¿EXISTEN NUMEROS FUERA DE LA MATEMATICA?

Alfonso AVILA DEL PALACIO*

ABSTRACT

Our aim in this paper is to propose an ontology for numbers that is compatible with an epistemology that does not invoke mysterious faculties. On the basis of my explanatory system, we find objects capable of being classified: horses, colors, etc. Once grouped, they can be reclassified in units, pairs, and so on. When they use expressions like "three horses", in fact, I believe that what they mean is "a threesome of horses". I call nonmathematical numbers those reclassification, and I suggest that arithmetical numbers could be regarded as pictures of nonmathematical numbers, that are closely connected with empirical facts.

1. Introducción[1]

Como bien apunta Kitcher, "La filosofía de las matemáticas ha tenido un importante desarrollo los últimos 50 años... -a pesar de que, al parecer,- se han abandonado los programas fundacionistas que dominaron las primeras décadas de este siglo" (Kitcher, 1988, p. 397). Los problemas surgidos en éstos, sobre todo, aunque no exclusivamente, a partir de los trabajos de Gòdel, generaron cierto escepticismo como el profesado por uno de los más reconocidos filósofos actuales de la matemática:

> *No creo -dice Putnam- que la matemática tenga una crisis en sus fundamentos... por lo tanto, no creo que necesite una fundamentación... El hecho que los filósofos aleguen que una noción no es clara no significa que no sea clara... Los diversos sistemas de filosofía matemática, sin excepción, necesitan no ser tomados seriamente* (Putnam, 1983, p. 295).

Es importante observar, sin embargo, que así como para algunos fundacionistas, como Frege y Russell, la matemática es, en última instancia, lógica; igualmente lo es para algunos no fundacionistas como Putnam o Field: aunque para Putnam sea una lógica modal, y para Field, simplemente un sistema adecuado que facilita, en ciertas ocasiones, la deducción.

De cualquier forma, el desarrollo aludido por Kitcher se ha dado, sobre todo, en la línea empirista:

> *Inspirados por la idea de que la matemática es parecida a las ciencias naturales, han sugerido que el problema principal de la filosofía de las matemáticas es encontrar una ontología de las matemáticas que sea compatible*

THEORIA - Segunda Época - Vol. VIII
1993, Nº 19, 89-112

con una epistemología que no invoque facultades misteriosas (Kitcher, 1988, p. 397).

En esta línea de pensamiento, la pretensión del presente trabajo es defender una ontología para los números[2] que, a pesar de no haber sido su propósito original, concilia determinados aciertos tanto de los nominalistas como de los empiristas y no necesita invocar facultades epistemológicas misteriosas. En "What numbers could not be", Benacerraf presentó objeciones técnicas a la idea fregeana-russelleana de que los números son objetos; y en "Mathemathical Truth", presentó objeciones epistemológicas a esa misma idea. En otro trabajo (Avila 1989a), tratando de contestar las objeciones técnicas, argumenté que aún si los números no *fueran* conjuntos específicos como pretenden Frege (1893) y Russell (1919), sí *podemos verlos* como objetos específicos, ya sean estos conjuntos o no. En el presente trabajo, intentaré mostrar, construyendo un puente entre la experiencia y los números vistos de esa forma, que esa visión también es defendible frente a las objeciones epistemológicas.

Para ello, empezaré por exponer y comentar brevemente algunos de los trabajos más recientes a favor o en contra de la existencia de los números aritméticos; posteriormente analizaré la noción misma de existencia que manejan ese tipo de trabajos, y en función de eso determinaré lo que sería necesario para poder afirmar que algo existe; por último, en base a lo anterior, intentaré probar que existen ciertos números extramatemáticos que sirven de puente entre los números aritméticos y la experiencia.

2. ¿Existen los números aritméticos?

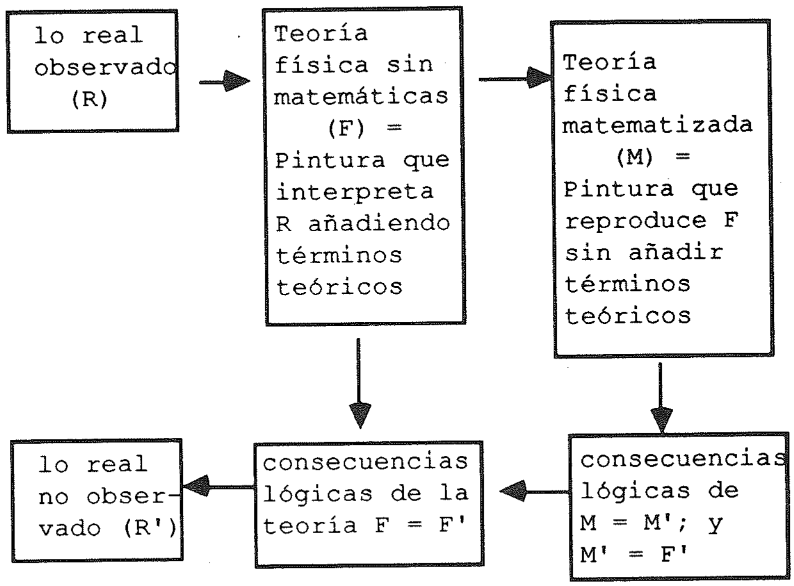
De entrada, parece ser un exceso contrario a la navaja de Occam la mera sugerencia de que existen otros "números" no matemáticos, siendo que los mismos números de la Aritmética son de dudosa existencia[3]. Así pues, veamos primero lo que se ha dicho, tanto en contra, como a favor de la existencia de la números aritméticos.

2.1. Argumentos en contra

Sin tratar de ser exhaustivo, presentaré aquí tres argumentos (dos de Field y otro de Quine) que, considero, se encuentran entre los más importantes y representativos actualmente.

A) Dentro de la corriente nominalista, Field niega categoricamente que existan tales entidades como los números. Para él, como para muchos, existen únicamente los objetos físicos, las expresiones lingüísticas y los eventos mentales. En todo caso, el mejor argumento para sostener que las matemáticas pueden verse como verdaderas (es decir, como si hablaran de entidades que cumplen las leyes matemáticas) ha sido, para Field, el dado por Quine y Putnam al enfatizar éstos que necesitamos postular tales entidades para llevar a cabo las inferencias ordinarias acerca del mundo físico y hacer ciencia. Sin embargo, en contra de este argumento, Field sostiene que al matematizar una teoría empírica sólo se está creando un esquema homomórfico a la teoría misma (totalmente prescindible) con la idea de efectuar deducciones más facilmente que en dicha teoría.

El esquema general que propone Field puede visualizarse mediante el siguiente diagrama:



Donde se observa que para Field una teoría empírica (F) al interpretar el dominio (R), al que se refiere, añade ciertos términos teórico que son los que permiten explicar y predecir el comportamiento de dicho dominio[4]; mientras que, al matematizar la teoría empírica en cuestión no se está interpretando la teoría (F) y, por consiguiente, es sólo otra forma de decir lo mismo (M = F).

El ejemplo que da Field de esto, para la Aritmética, comienza por sustituir expresiones nominalistas del tipo "E_{21} x Cx", donde

> *... no hay términos singulares o cuantificadores para números u otras entidades abstractas: el número 21 ocurre no como un nombre, sino sólo como parte de un símbolo de operador* (Field, 1980, p. 22),

con las cuales es difícil trabajar; por expresiones matematizadas del tipo "el cardinal del conjunto de cajas es 21" donde se hace referencia expresa al número 21, y con las cuales se puede deducir matemáticamente con mayor facilidad. Field muestra que podemos decir lo mismo hablando expresamente de números, o sustituyendo las referencias a números por expresiones nominalistas como las mencionadas arriba.

Esta estrategia nos lleva a preguntarnos qué implica el hecho de que podemos decir "lo mismo" en dos sistemas conceptuales diferentes: uno que contenga, al menos, la aritmética; y otro que no contenga la aritmética, pero que, al menos, contenga la lógica cuantificacional y nX. Por supuesto, no es lo mismo decir que existe el número 21, a decir que existen 21 X: el primero no es espacio-temporal, y las 21 X suponemos que sí. Sin embargo, para aceptar las conclusiones que saca Field de ahí, tendríamos que probar todavía que, al aceptar que existen espacio-temporalmente 21 X, no estamos aceptando implícitamente la misma ontología que tendríamos que aceptar al sostener que el número 21 es el cardinal de un conjunto de entidades espacio-temporales; es decir, que en la teoría científica nominalista de Field no hay ya una interpretación numérica de la realidad; o, con otras palabras, que F no contiene a M. Mi intuición es que la traducción nominalista de Field, en realidad, no elimina del todo los números y sólo evita hablar directamente de ellos. Ya que si, al fin de cuentas, podemos decir lo mismo en dos sistemas conceptuales diferentes ¿no será porque comparten una misma ontología básica? De hecho, el cambio de lenguaje no garantiza la eliminación de ninguna entidad de las que se hable explícitamente en cualquiera de esos lenguajes; de tal suerte que para probar que una entidad no existe necesitamos algo más que haber encontrado una forma de hablar de ella sin mencionarla explícitamente. Tal como ya lo había puntualizado Maxwell en relación a los enunciados de Ramsey y los productos finales de Craig,

> *... la eliminación de los* términos teóricos, *aun por definición explícita, no necesariamente eliminaría la referencia a las* entidades *teóricas (inobservables)...; -e, incluso,- aunque pudiera eliminarse la referencia a las entidades teóricas..., no por ello se cuestiona la realidad (existencia) de las entidades teóricas.* (Maxwell, 1962, p. 135).

B) El otro argumento que me parece importante de Field para sostener que las matemáticas no hablan de entidades concretas es el siguiente:

> *Si la matemática junto con -una teoría nominalista- N implican A que no es una consecuencia lógica de N sola, entonces la verdad de las teorías matemáticas dependería de que un grupo de afirmaciones consistentes lígicamente N+noA no sea verdadero. Pero parecería posible (o no a priori falso) que tal grupo consistente de afirmaciones acerca de objetos concretos sea verdadero. Si es así, entonces, las matemáticas no podrían ser verdaderas en todos los mundos posibles* (Field, 1980, p. 13).

Considero que Field está en lo correcto al afirmar que sus conclusiones suponen que las matemáticas deben ser válidas en todo mundo posible; es decir, que no contienen cierta interpretación de una realidad particular. De hecho, como lo afirmamos en el apartado anterior, Field podría mantener su conclusión de que una teoría nominalista (F) contiene a su matematización (M), si prueba que (M) por si sola no posee ningún elemento interpretativo de la realidad (R). De tal suerte que, para rechazar la postura de Field, tendremos que mostrar no sólo que (F) contiene a (M), sino que las predicciones (F') de la realidad (R') no pueden ser obtenidas de (F) sola si quitamos de ella todo elemento traducible, o equivalente, a (M). Esto último lo intentaremos en el inciso 4 a partir del examen de la teoría galileana del movimiento.

Anteriormente, ya Frechet (1958) y Lakatos (1978) habían sugerido que las matemáticas son falsables, y recientemente Hossack afirmó que

> *Las demostraciones -matemáticas- requieren mundos espacio-temporales-causales como el nuestro y fracasarían en mundos menos complacientes; esto implica que las verdades matemáticas no son necesarias ya que no se sostienen a través de todo el espacio lógico* (Hossack, 1991, p. 157)

C) Por otro parte, entre la corriente reduccionista, para Quine, también,

> *... los números, a no ser como un modo de hablar, quedan abandonados... Nos quedamos únicamente con la ontología de la teoría de conjuntos pura, ya que los números y sus cuádruplos pueden modelarse dentro de ella... Tenemos objetos físicos y tenemos clases* (Quine, 1981, pp. 26 y 28).

En resumen, para Quine, como para otros reduccionistas, no hay números porque todas sus apariciones en diferentes contextos pueden sustituirse por otras entidades, presumiblemente más básicas. De tal suerte que, tratando de no multiplicar la ontología innecesariamente, Quine admite sólo su "inquebrantable creencia en las cosas externas... y también, si bien con menos firmeza, en los átomos y los electrones, y en las clases" (Quine, 1981, p. 31). Estas últimas entidades las admite, un poco a disgusto, sólo porque permiten modelar toda la matemática.

Esta postura nos remite a la cuestión, ya apuntada, de dos sistemas conceptuales, uno de los cuales (en este caso, la teoría de conjuntos) contiene a otro (la aritmética). La teoría de conjuntos no habla explícitamente de números; pero si los números son ciertos conjuntos, no veo la dificultad en decir que existen los números tal como existen los conjuntos. De hecho, para Frege, uno de los más importantes reduccionistas, decir que la matemáticas es lógica y que los números pueden expresarse en términos de conjuntos no implica negar la existencia de los números; implica sólo que se trata de ciertos conjuntos particulares.

2.2. Argumentos a favor

También sin pretender, por supuesto, ser exhaustivo, a continuación presentaré brevemente los argumentos de tres trabajos muy recientes que defienden una postura realista con respecto a los números: uno de ellos se debe a John Bigelow, el otro a Michael Resnik y el último a Penelope Maddy.

A) Bigelow sostiene que "los números y los objetos matemáticos en general son universales" (Bigelow, 1988, p. 3).

> *La teoría de universales será una colección sistemática de afirmaciones acerca de las relaciones entre los universales. Y esto es lo que sostengo que son las matemáticas: un estudio de relaciones entre relaciones* (Bigelow, 1988, p. 16).

A partir del realismo a posteriori de Armstrong (1978), Bigelow sostiene, contrariamente al nominalismo de Occam o de Field, que los universales existen tanto como los objetos individuales, aunque no puedan determinarse espacio-temporalmente como éstos porque juegan libremente con el espacio y el tiempo. Según Bigelow, "son todas las propiedades físicas reales y las relaciones entre las cosas físicas" (Bigelow, 1988, p. 1). Se refiere, por supuesto, a las cualidades primarias: solidez, extensión, figura, movimiento y número; todas las cuales, al parecer, admiten un tratamiento matemático. Las cualidades secundarias, como el color, no están en los objetos físicos; pero eso no es tan grave porque se forman a partir de las primarias.

Específicamente, para Bigelow, los números naturales son relaciones de mutua distinción entre objetos. El 3, por ejemplo, es la relación de agrupar-tres mutuamente distintos. En general, "un número *n* es una relación de *n*-lugares de agrupar-*n* mutuamente distintos" (Bigelow, 1988, p. 52). En ese sentido, el origen de los números es la relación de no identidad o, para usar un término aristotélico, la diada.

Contrariamente a eso, Berkeley (y después también Frege criticando a Mill, quien parecía defender una postura semejante a la de Bigelow) sostuvo que "el número es enteramente una creatura de la mente... -ya que- la misma cosa tiene una diferente denominación numérica según el punto de vista desde el que se conciba" (en Baum, 1973, p. 184); y una casa, por ejemplo, tendría 2 puertas, 4 ventanas, 200 metros, etcétera. Sin embargo, para Bigelow los números no son propiedades de los agregados físicos, como sostenía Mill, ni tampoco son parte de la predicación que puede hacerse de los conceptos, como sostiene Frege, sino que son relaciones entre los objetos concretos. En ese sentido, para Bigelow, las puertas tienen una relación entre sí llamada 2, las ventanas una llamada 4, los metros, una llamada 200 y la casa tiene una relación consigo misma llamada 1.

Esta concepción sobre los números, apoyada en las ideas de Armstrong acerca de la existencia de los universales, me parece sumamente interesante y defendible; sin embargo, no la comparto totalmente porque se apoya en un supuesto discutible que intentaré refutar más adelante. Dicho supuesto consiste en la extendida creencia de que el mundo está formado sólo de ciertos objetos físicos y sus relaciones. Algunos sostienen que lo único que existe realmente son dichos objetos porque son más o menos estables, mientras que otros, como Armstrong y Bigelow, afirman que las relaciones repetibles entre ellos también puede decirse que existen. Sin embargo, los objetos básicos de qualquier ontología no son datos directos de la experiencia, son, más bien, el producto de un trabajo de conceptualización; de tal suerte que, en diferentes sistemas conceptuales, los objetos básicos pueden diferir e, incluso, puedemos hablar más bien de procesos, eventos o totalidades. Por ello, aún cuando comparto con Armstrong y Bigelow la idea de que no sólo existen los objetos definidos espacio-temporalmente, no veo la necesidad de mantener la creencia de que el mundo sólo puede ser conceptualizado a partir de objetos físicos y sus relaciones; y, por consiguiente, los números, al no ser espacio-temporales, no tienen por que ser forzosamente, como concluye Bigelow, relaciones entre objetos espacio-temporales.

B) Resnik, apoyado en ciertas consideraciones de Quine, sostiene que,

> *... no hay una línea significativa epistemológicamente entre las matemáticas y las ciencias según la cual pueda darse una prueba para las hipótesis científicas empíricas sin recurrir a pruebas matemáticas...; -y, añade,- no hay una distinción no arbitraria de cuándo un científico actúa como matemático y cuándo como físico* (Resnik, 1988, pp. 400 y 401);

lo cual cuestiona la pretensión de Field (expuesta en 2.1.a) de que es posible tener una teoría plenamente nominalista que no contenga, ni siquiera implícitamente, elementos matemáticos.

Resnik pertenece a una importante escuela de pensamiento, donde se encuentran Dedekind, Peano y el mismo Benacerraf, que concibe las matemáticas como el estudio de las estructuras. De hecho, con respecto a la aritmética, Resnik adopta la definición de los números propuesta por Dedekind, según la cual éstos son sólo "lugares en una progresión cualquiera". En palabras de Resnik,

> ... *conocer la secuencia de los números naturales implica que contiene una posición inicial (cero), que cada posición tiene un único sucesor, que la secuencia no tiene fin y que en ella se aplica la inducción matemática* (Resnik, 1988, p. 415).

Sin embargo, Resnik no concluye de ahí, como Benacerraf, que "no hay tales cosas como los números" (Benacerraf, 1965, p. 73); ya que Resnik defiende la idea de que, a semejanza de los universales de Armstong y Bigelow, las estructuras que estudian las matemáticas son estructuras (Patterns) existentes en el mundo empírico.

C) Por su parte, Penelope Maddy acepta, por un lado, como existente sólo lo definible espacio-temporalmente y, por otro, concuerda con los reduccionistas, como Quine, que defienden la idea de que las matemáticas se reducen a la teoría de conjuntos. De tal suerte que para fundamentar su postura realista en matemáticas, afirma que

> ... *todos los conjuntos tienen bases físicas y una localización espacio-temporal, y todos los objetos físicos son conjuntos* (Penelope, 1990, p. 180).

Sin analizar en detalle la interesante propuesta de Penelope, por rebasar la intención de este trabajo, quisiera mencionar que comparto su estrategia para tratar de probar la existencia de los números; es decir, su búsqueda de una vinculación de éstos con lo empírico. Mi idea es que no necesariamente tenemos que ver los números como conjuntos; pero, como sea que los veamos, sólo podemos decir que existen si encontramos que están vinculados directa o indirectamente con la experiencia.

De cualquier forma, para poder juzgar mejor las afirmaciones en pro o en contra de la existencia de los números, considero que debemos primero aclarar la noción misma de existencia que implican todas esas afirmaciones.

3. ¿Cómo pueden entenderse las afirmaciones de existencia?

Cuando decimos que algo existe ¿qué queremos decir? A esta pregunta se han dado muy diversas respuestas. La discusión se remonta, en el terreno filosófico, indudablemente a los primeros filósofos. Entre ellos, recordemos solamente la confrontación que tuvieron Platón y Aristóteles al respecto: para este último existían solamente las cosas individuales determinadas espacio-temporalmente: "la experiencia es el conocimiento de las cosas particulares... todos los actos, todos los hechos se dan en lo particular" (Aristóteles, *Metafísica*, lib. 1, cap. 1); mientras que para Platón existían, incluso tal vez con más derecho, ciertas entidades extramundanas que hoy llamaríamos universales, es decir, no determinadas espacio-temporalmente. Desde ahí se perfilaron dos grandes corrientes, por supuesto, cada una con sus respectivos matices: los que afirman, como Field y otros nominalistas, que no existen los universales ni siquiera en las cosas individuales como podría aceptar Aristóteles, que los únicos que existen son los objetos físicos concretos y, en todo caso, las expresiones lingüísticas y los eventos mentales, todos los cuales están determinados espacio-temporalmente en un espacio de Minkowski; y los que, como Platón, Russell o Bigelow, defienden la existencia legítima de los universales que, en palabras de Bigelow, "juegan libremente con el espacio y el tiempo" (Bigelow, 1988, p. 4).

De cualquier forma, cuando se pregunta por la existencia de los individuales o los universales, se está preguntando si existen de algún modo en el mundo físico o, en todo caso, no sólo en la mente de alguien. Los unicornios pueden estar en la mente de muchas personas; pero nadie que tenga "un robusto sentido de la realidad", como dice Russell, afirmaría que los unicornios realmente existen; lo que tenemos, a lo sumo, es una expresión o un evento mental no referenciales. De tal suerte que, al parecer, de lo que realmente podemos predicar la existencia o no existencia es únicamente de algo que está en nuestra mente y puede o no tener un correlato fuera de ella. Esta postura es cercana al enfoque de Frege, según el cual la existencia es algo que se predica de los conceptos, a saber: que tienen instancias.

A partir de esta manera de entender las afirmaciones de existencia, podemos parafrasearlas en términos de la noción de *pintura* sugerida en el *Cratilo* por Platón y retomada en nuestro tiempo por Wittgenstein. No es mi intención apegarme estrictamente a la noción de pintura que usó alguno de ellos, o la que hayan usado ciertos teóricos del arte; más bien, inspirado en aquellos autores, la empleo aquí para expresar la idea intuitiva de un retrato. En Avila (1989b) y (1991) hice algunas precisiones a dicha idea, y sólo quisiera enfatizar, para mayor claridad del presente trabajo, que entiendo por 'pintura' una representación de algo que está en el mundo empírico y, por lo cual, tiene las siguientes características: 1) el ser una pintura se lo debe al uso social que se hace de ella; 2) puede ser aprehendida con los sentidos y la mente, o sólo con la mente; 3) se le concibe como una idealización de algo que está en el mundo de una forma más compleja y, por ello, no coincide plenamente con lo que intenta retratar, y 4) se le considera una interpretación de lo idealizado y, por lo cual, tiene algunos elementos no observables directamente en lo retratado.

En esos términos, las opiniones que presentamos en el inciso 2 acerca de la existencia de los números, puede traducirse en términos de pinturas diciendo que, mientras para Bigelow, Resnik y Penelope dichos números son pinturas, para Field y Quine, son sólo seudopinturas; es decir, que para los primeros tienen una contraparte fuera de la mente, mientras que para los últimos son entidades aprehensibles mentalmente, pero sin referentes empíricos.

En cierto sentido, las expresiones vacuas hablan sobre posibilidades o imposibilidades a la manera como Putnam, según entiendo, concibe las matemáticas. Aunque, habría que advertir que esto no implica aceptar una ontología meinongiana de entes subsistentes y existentes; donde los primeros "tienen algún tipo de ser pero no existen, y entre los cuales se encuentran objetos posibles pero no actualizados" (Orayen, 1970, p. 130). Concuerdo con Russell y Quine en que hay un solo mundo y que no hay diversos sentidos de "existir' como cree Malcom (ver Herrera, 1976, pp. 86 a 90). Decir que una expresión vacua habla de posibilidades no implica sustancializar las posibilidades, significa solamente que dicha expresión es un "retrato" sin referente; es decir, al fin de cuentas, que parece un retrato pero que en realidad no lo es. De cualquier forma, expresa algo que puede ser comprendido y, eventualmente, podría tener referente, incluso, como resultado de la acción creadora del hombre. Ya que, al fin de cuentas, ¿qué es lo que podemos decir con seguridad que está fuera de nuestra mente, es decir, objetivamente en el mundo?

Después de Kant es difícil sostener una postura en la cual ignoremos la participación de la estructura de nuestra percepción y la actividad de nuestra mente en la pintura que tengamos de lo que existe independientemente de que lo conozcamos. En ese sentido, con respecto a la percepción, una de las teorías más convincentes es, a mi juicio, la gestaltista de Wertheimer y Köler; según la cual "el animal humano o no-humano percibe 'todos' o 'totalidades' y no puntos cualitativos" (en Moulines, 1973, p. 132). En palabras de Carnap, "lo dado son las vivencias mismas en su totalidad y en su globalidad" (Carnap, 1961, p. 125); dentro de las cuales, abría que añadir, nuestros sentidos captan únicamente los cambios para los cuales nuestro

> *... organismo esté "afinado", merced a una estructura nerviosa de sensibilidad selectiva que traduce un cambio del medio a "mensaje sensorial" codificado* (Lowenstein, 1966, p. 14)

Ahora bien, si la experiencia sensible es primariamente un todo continuo y cambiante, a la manera heracliteana, ¿de dónde obtenemos el conocimiento de las cosas individuales que son, para los nominalistas como Field, las que verdaderamente existen? Al parecer, percibimos totalidades cambiantes, al interior de las cuales llamamos cosas individuales a ciertos puntos de referencia fijos en algún sentido: puntos, porque se les considera, en cierto aspecto, indivisibles; y fijos, porque se les distingue del resto de lo cambios percibidos. Tal como dice Quine:

> *Nuestras expresiones sobre cosas externas, nuestra noción misma de cosas, constituyen solamente un aparato conceptual que nos sirve para prever y controlar la activación de nuestros receptores sensoriales a la luz de la activación anterior de dichos receptores* (Quine, 1981, p. 9).

En cualquier caso, al parecer, los conceptos son anteriores ya que son necesarios para la delimitación del objeto, el cual se obtiene mediante la intersección de varios conceptos. Por ello, Quine mismo sostiene que "todos los objetos son teóricos..., -en tanto que, incluso,- la comprensión de un término no implica un *designatum*, precede al conocimiento de si el término tiene o no un *designatum*"(Quine, 1981, p. 31).

Por ejemplo, este portafolio que tengo enfrente ¿en qué sentido lo concibo como un objeto singular? Las notas que lo objetivan son: a) el concepto mismo de portafolio que es algo así como cierto "aire de familia", como diría Wittgenstein; y

b) un conjunto de espacios de Minkowski, es decir, los hechos de que se encuentraba frente a mi el día *x* a la hora *y*, el día *z* a la hora *w*, etc.; en donde lo he reconocido como "lo mismo" en virtud de algunas notas individualizadoras: color, tamaño, etc., que conforman también un "aire de familia". De cualquier forma, tanto el concepto de portafolio como este objeto concreto pueden verse como "parecidos de familia" y sólo difieren en el grado de precisión; ya que cuando llamo objeto a una instancia de un concepto, sólo estoy añadiendo al "parecido de familia" expresado en el concepto, un nuevo "parecido de familia" que está representado por dicha instancia y por ninguna otra.

En estos términos, las llamadas cosas físicas no son más reales que otras que no están conceptualizadas como tales. Al fin de cuentas, las cosas, los procesos y las cualidades más que estar como tales en el mundo, o incluso en nuestra percepción, son constructos mentales que intentan retratar, en el sentido de separar y fijar, algún aspecto de lo dado como totalidad continua y cambiante. Las cosas individuales son tales sólo en virtud de la forma como hemos conceptualizado el mundo; y habría que recordar que esta conceptualización es un producto cultural expresado en nuestros lenguajes naturales que nos orienta a "ver" cosas donde podrían "verse" también procesos, cualidades, partes de totalidades, o qué sé yo. Como dice Orayen, "la ontología depende en grado bastante alto de convenciones" (Orayen, 1989, p. 289). Por ejemplo, a diferencia de lo que pasa en los lenguajes occidentales,

> *... gran número de palabras chinas hacen tanto de sustantivos como de verbos, de manera que a quien piensa en chino le cuesta muy poco advertir que los objetos son también sucesos, que nuestro mundo es una colección de procesos más que de entidades* (Watts, 1961, p. 24).

Por lo anterior, tal como dice Quine siguiendo a Duhem y a Carnap, "nuestros enunciados acerca del mundo externo deben someterse como un cuerpo total al tribunal de la experiencia sensible y no individualmente" (Quine, 1953, p. 75). De tal suerte que, para probar en general que una entidad lingüística o mental refiere debe mostrarse, al interior de un cuerpo teórico-práctico total (de preferencia de los llamados teorías científicas), que directa o indirectamente puede verse como una idealización e interpretación de algo empírico. De ahí que, no resulte sencillo determinar la referencia de los términos singulares, ya que al principio y al fin del proceso cognoscitivo tenemos totalidades, y sólo en medio tenemos entidades aisladas y fijas que podrían ser los referentes de los términos singulares.

En ese sentido, es correcta la estrategia de Field, expuesta arriba en el inciso 2.1.b, de tratar de probar la no existencia de los números, mostrando que su presencia dentro de las teorías científicas es superflua porque las predicciones de las teorías se hacen sin su auxilio. De tal suerte que podríamos decir que los números existen sólo si directa o indirectamente refieren a algo empírico; es decir, si pudieramos probar, en contra de la idea de Field, que existen afirmaciones numéricas falsables empíricamente al interior de un cuerpo teórico-práctico que no pueda prescindir de la aritmética.

Así pues, de acuerdo a lo dicho hasta aquí, una pintura mental en tanto que es un "parecido de familia" puede referir, ya sea, a otra "pintura mental", o a un individual o universal empíricos. Con mayor precisión, podemos decir que la pintura X de otra pintura Z refiere, si: a) puede establecerse un homomorfismo[5] de X sobre Z; b) podemos mostrar que X interpreta en cierto sentido a Z, y c) si, además, Z refiere a un universal o individual empíricos; donde, decimos que una pintura mental Z refiere a un individual empírico M, el cual es perceptible a partir de cierta conceptualización, si: a) puede establecerse un homomorfismo de Z sobre M, y b) podemos mostrar, al interior de una teoría empírica exitosa, que Z interpreta y, en función de eso, puede predecir el comportamiento de M; y decimos, por último, que una pintura mental Z refiere a un universal empírico S, el cual es perceptible a partir de cierta conceptualización, si: a) el universal tiene instancias empíricas (s_1, s_2, s_3, etc.), es decir, individuales que son parcialmente retratados por la pintura mental del universal; b) podemos mostrar, al interior de una teoría empírica exitosa, que Z interpreta y, en función de eso, puede predecir cierto comportamiento de s_1, s_2, s_3, etcétera.

4. ¿Existen números fuera de la matemática?

De acuerdo a la manera de entender las afirmaciones de existencia que acabamos de exponer, no es relevante la distinción entre individuales y universales. Hacer esa distinción, por un lado, obliga a Field a negar la existencia de los números por considerarlos universales; y, por otro, al querer defender la existencia de los números, obliga a Bigelow y a Resnik a defender la existencia de los universales en general, y a Frege y Penelope, a defender la idea de que los números son individuales. Pero, si al fin de cuentas, tanto los individuales como los universales son "parecidos de familia" perceptibles al interior de un cuerpo teórico-práctico-total, decir que los números son individuales o universales no nos permite decidir sobre su existencia.

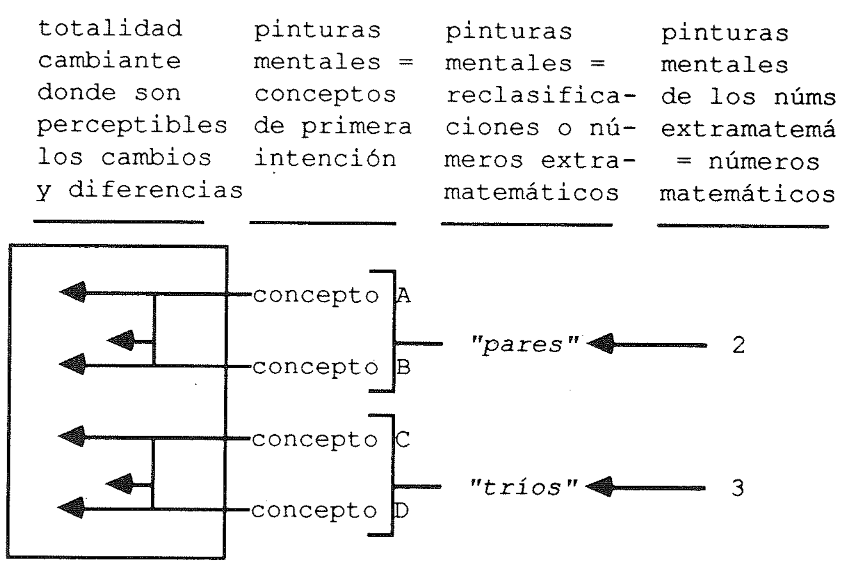
No obstante, creo que es inegable que hay algo de razón en ambos bandos: de hecho, la dificultad para falsar empíricamente las afirmaciones numéricas sugiere, como lo sostienen los nominalistas, que los números no hablan, al menos directamente, de cuestiones empíricas; y, por otra parte, el extendido uso de los números en las ciencias empíricas sugiere, como lo sostienen los empiristas, que hay algo en el mundo que es captado por las leyes de la aritmética.

En ese estado de la cuestión, mi propuesta consiste en sugerir que los números aritméticos no refieren directamente a la experiencia, sino sólo indirectamente por intermediación de ciertos "números" extramatemáticos. Concretamente, he sugerido desde Avila (1989a) ver los números aritméticos como pinturas mentales que refieren a otras pinturas mentales[6] (números extramatemáticos), donde éstas últimas son el resultado de una reclasificación de lo empírico en pares, tríos, etc. que es posible sólo después de una primitiva conceptualización de la experiencia. Mi intuición es que estas conceptualizaciones sucesivas probablemente recojan, tanto el origen histórico, como el uso empírico de los números aritméticos. Sin embargo, no estoy en posibilidad de defender aquí la hipótesis histórica, y me limitaré únicamente a sugerir la plausibilidad del uso empírico referido. De cualquier forma, dichas conceptualizaciones, a pesar de que multiplican y complican la ya de por sí cuestionable ontología de los números, permiten construir un puente plausible entre lo empírico y los números de la aritmética pura.

Esquemáticamente, el proceso podemos suponer que se inicia parcelando el mundo percibido como una totalidad cambiante, por ejemplo, de la siguiente manera:

caballos	perros	hombres	
*	+	o	unidades
**	++	oo	pares
***	+++	ooo	tríos

donde el cuadrado representa el mundo empíricamente percibido; las divisiones verticales representan una primitiva conceptualización en caballos, perros y hombres, y las divisiones horizontales, sobrepuestas a las verticales, representan la reclasificación de lo empírico en unidades, pares y tríos[7]. Posteriormente, estas reclasificaciones, o conceptos de segunda intención, son idealizadas e interpretadas mediante los números aritméticos. En esos términos, el esquema completo sería como sigue:



donde suponemos que el concepto A tiene dos instancias, lo mismo que el concepto B; mientras que los conceptos C y D tiene cada uno tres instancias. Las reclasificaciones "pares" y "tríos" se obtienen como "parecidos de familia" entre lo que cae, por un lado, bajo A y B, y por otro lado, bajo C y D. De esa forma, "pares" puede verse como una pintura mental de algo que está en un mundo que ha sido previamente conceptualizado de cierta manera: esto es, lo que se percibe como común (el "parecido de familia") entre las instancias de los conceptos A y B. Lo mismo sucede con las pinturas mentales "tríos", "cuartetos", etcétera. Por último, los números aritméticos 2 y 3 aparecen en este esquema como pinturas mentales de las pinturas "pares" y "tríos" respectivamente.

Ahora bien, con el objeto de apoyar la idea de ver los números aritméticos ligados a lo empírico por mediación de los números que he llamado expramatemáticos, a continuación analizaremos las siguientes cuestiones: I) los números aritméticos ¿pueden verse como retratos mentales de los números extramatemáticos? o, incluso, como verdaderas pinturas de éstos? y II) ¿qué papel desempeñan, en el interior de una teoría científica exitosa, tanto los números matemáticos como los extramatemáticos? más concretamente, ¿los primero pueden verse como pinturas de los segundos y éstos como pinturas conceptuales con instancias perceptibles en el mundo empírico? y, en ese sentido, ¿podemos ver la aritmética como una doble idealización e interpretación de algo empírico?

I.- Para probar que los números aritméticos pueden verse como retratos, o incluso como pinturas, de las reclasificaciones conceptuales que he llamado números extramatemáticos, necesitamos de acuerdo a lo expuesto en el inciso 3: a) encontrar un homomorfismo de los primeros sobre los segundos, y b) mostrar que los primeros pueden verse como idealizaciones e interpretaciones de los segundos.

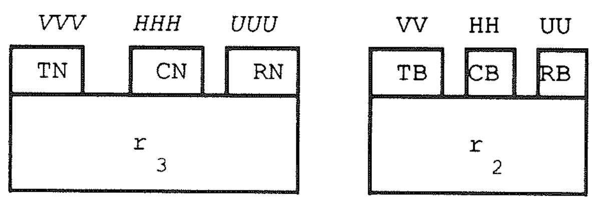
a) En primer lugar, para mostrar el homomorfismo de los números aritméticos sobre los números que llamo extramatemáticos bastaría con probar: 1) que por cada número aritmético hay uno extramatemático, y si los primeros son infinitos, también tendrán que ser los segundos; 2) que por cada relación entre los números aritméticos hay una análoga entre los números extramatemáticos, es decir, que estos últimos cumplen, al menos[8], los axiomas de Peano; y 3) que hay también homomorfismos entre cada uno de los números aritméticos sobre los correspondientes números extramatemáticos, es decir, que cada uno de aquellos puede verse como un retrato individual de su correspondiente número extramatemático.

Ahora bien, si n_1, n_2, n_3,... son números aritméticos y r_1, r_2, r_3,... son las reclasificaciones extramatemáticas correspondientes, (a1) se cumple ya que dado cualquier número natural n_x puedo encontrar el concepto reclasificatorio correspondiente, que sería el "parecido de familia" entre lo que cae bajo el concepto "unidades que sumadas dan n_x" y algunos otros conceptos cuyas instancias puedan ponerse en correspondencia biunívoca con las instancias de ese concepto. E, incluso, si no encuentro un concepto con n_x instancias empíricas, en tanto que "unidades que sumadas dan n_x" y otros conceptos similares son aprehendibles (es decir comprensibles) por la mente humana, el número correspondiente puede verse como un retrato de algo. Por supuesto, es posible que algunos de estos "parecidos de familia" (los correspondientes a los números naturales infinitamente grandes) no tengan, a su vez, correlatos fuera de la mente. Pero, de cualquier forma, eso no anula, por lo pronto, el homomorfismo entre los números y los "parecidos de familia" mencionados; ya que por cada número natural habrá un concepto reclasificatorio que le corresponde, independientemente de si éste es una pintura o no. Más adelante trataré de probar que, en efecto, es una pintura.

Para probar (a2), veamos si se dan entre los números extramatemáticos relaciones análogas a la de sucesor y a la operación de suma que rigen entre los números matemáticos. Para ello, supongamos que hemos conceptualizado globalmente el mundo de tal manera que sólo "vemos" los siguientes objetos:

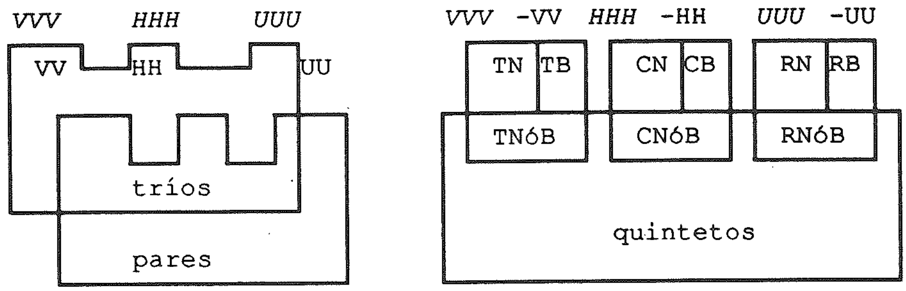
$$\nabla_a\ \nabla_b\ \blacktriangledown_a\ \blacktriangledown_b\ \blacktriangledown_c \quad 0_a\ 0_b\ \bullet_a\ \bullet_b\ \bullet_c \quad o_a\ o_b\ \bullet_a\ \bullet_b\ \bullet_c$$

los cuales nos permiten dividir (o clasificar) el mundo, digamos, en triángulos, cuadrados, ruedas, negros y blancos. A partir de ahí, dichos objetos pueden ser reagrupados, por ejemplo, mediante las reclasificaciones r_3 y r_2, que esquemáticamente serían así:

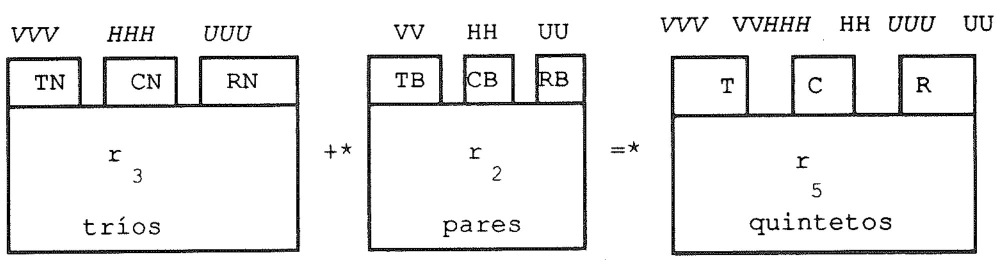


donde 'V' representa la entrada para un triángulo blanco, *'V'* para un triángulo negro, 'H' para un cuadrado blanco, *'H'* para un cuadrado negro, 'U' para una rueda blanca y *'U'* representa la entrada para un objeto redondo negro. De esa forma, r_3 es el "parecido de familia" entre lo que cae bajo los conceptos *TN*, *CN* y *RN*, cada uno de los cuales agrupa 3 objetos[9]; por lo cual, r_3 agrupa tríos. Por un razonamiento análogo, r_2 agrupa pares.

Dado el mundo que supusimos, cada una de las mencionadas características es aplicable a cierto número de objetos simples o complejos, que de esa forma quedan agrupados en las clasificaciones mencionadas, o en otras que se formen a partir de ellas. A partir de varios conceptos (o clasificaciones) podemos, en general, obtener otros conceptos (o clasificaciones) combinando los primeros; como, por cierto, le hemos hecho para obtener *TN* y *CN* al combinar los conceptos "x es un triángulo" y "x es un cuadrado" con el concepto "x es un negro". Para el caso de las reclasificaciones, que he llamado números extramatemáticos, este proceso se da mediante oparaciones análogas a la suma y sucesión aritméticas. La "suma" de números extramatemáticos puede verse como la unión de dos reclasificaciones que atrapan *diferentes* grupos de objetos que son *similares* en cierto sentido. Sólo podemos "sumar" diferentes grupos de entidades que sean similares en cierto sentido; es decir, manzanas con manzanas, peras con peras, etcétera[10]. Esquemáticamente, podemos verlo como sigue:

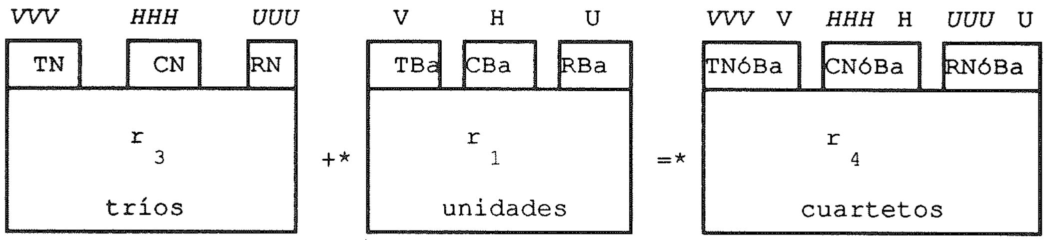


donde *TNóB* sería una clasificación con tres notas, conservando al menos una en común (*T*) para que sean objetos *similares*, y significa "triángulos negros o blancos", o simplemente "triángulos"; *CNóB* significa "cuadrados negros o blancos", y *RNóB* significa "ruedas negras o blancas". Cada una de estas clasificaciones atrapa 5 objetos: lo cual es cierto si un objeto no puede ser al mismo tiempo negro y blanco; es decir, si son propiedades excluyentes, para que puedan formar *diferentes* grupos. Cubiertas esas características, obtenemos un nuevo "parecido de familia" entre lo que cae bajo *TNóB*, *CNóB* y *RNóB*: justo, la circunstancia de que todos ellos atrapan el mismo numero de objetos. A partir de este sencillo ejemplo, podemos apreciar que, en efecto, puede darse entre los llamados números extramatemáticos una operación análoga a la suma aritmética (es decir, conmutativa y asociativa, como no sería difícil mostrar) que consiste en formar un nuevo y diferente "parecido de familia" a partir de dos "parecidos de familia" dados:



Por otra parte, para explicar la relación "z es sucesor de w", tenemos que mostrar que se cumplen para toda entidad r_x los axiomas de Peano: es decir, que hay una reclasificación, digamos r_1 (axioma 1), que no es sucesor de ninguna otra (axioma 8), y que r_x +* r_1 =* Sr_x; donde Sr_x también es una reclasificación (axioma 6) y Sr_x es sucesor de r_x.

En efecto, existe r_1, y es el "parecido de familia" entre lo que cae bajo todos los conceptos que puedan considerarse como *descripciones definidas*; es decir, que cada uno de ellos son satisfechos por un sólo objeto. Por otra parte, r_1 no es sucesor de ningún r_x, a condición, como en la aritmética, de no aceptar a r_0 (donde r_1 sería sucesor de r_0) como una verdadera reclasificación; sin embargo, a semejanza de la aritmética, podría aceptarse r_0 ampliando el concepto de número extramatemático. Por último, para toda r_x existe Sr_x; ya que si r_x es un "parecido de familia" entre lo que cae bajo ciertos conceptos, habrá un nuevo "parecido de familia" si a los objetos que caen bajo cada uno de dichos conceptos les añadimos un objeto más, por supuesto, respetando las condiciones de posibilidad de la "suma" de reclasificaciones: es decir, que sean *diferentes* grupos de objetos *similares*. Gráficamente, quedaría, por ejemplo, como sigue:



donde TBa, CBa y RBa son *clasificaciones definidas* porque "agrupan", o seleccionan, cada una de ellas un solo objeto: ∇_a, 0_a y o_a, respectivamente; 'TNóBa' significa triángulos que sean negros o que sean blancos y (a), 'CNóBa' significa cuadrados que sean negros o blancos y (a), y 'RNóBa' significa ruedas que sean negras o blancas y (a); cada una de estas clasificaciones agrupa cuatro objetos, lo cual constituye el "parecido de familia" que existe entre ellas y define la reclasificación r_4.

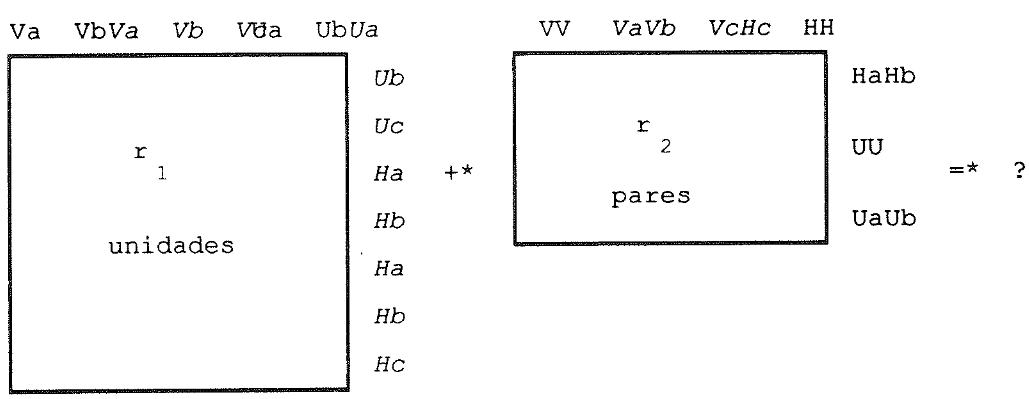
El universo que supusimos cuenta sólo con 15 objetos diferentes, por lo cual, es natural que nos preguntemos si existen reclasificaciones de entes reales[11] mayores que r_{15}. Con otras palabras, si el mundo es finito ¿podemos siempre encontrar, como de hecho sí pasa con los números aritméticos, el sucesor del número extramatemático que corresponde a la totalidad de los entes existentes? De acuerdo a lo discutido arriba en el inciso 3, la totalidad de los entes que, en un momento dado, decimos que existen depende de nuestra conceptualización del mundo; por consiguiente, bajo otra conceptualización es de suponerse que siempre podamos *contar* más entes. Sin embargo, habrá que advertir que estos entes "de más" no son entes posibles: son tan reales y existentes como los primeros; lo que sí está en el mundo de las posibilidades son nuestras, hasta cierto punto arbitrarias, conceptualizaciones no actuales. Por ejemplo, el mundo que supusimos podría conceptualizarse en líneas horizontales, verticales, inclinadas a la derecha, a la izquierda o circulares; las cuales no serían menos reales que los triángulos, cuadrados y ruedas originales. De esta forma, en vez de 15 contaríamos 40 objetos diferentes; y si, además, conceptualizamos también los puntos de unión de las líneas rectas, *contaríamos* 35 objetos "más", es decir, 70 en total. Como puede apreciarse, el único límite a este proceso es, al parecer, nuestra propia imaginación; por lo cual, podemos confiar en que existe un Sr_x para cualquier r_x.

Por último, podemos mostrar brevemente que se cumple (a3) (es decir, que podemos ver los números aritméticos como objetos individuales que retratan otros objetos individuales, tal como lo enfatizaron Frege y Russell): i) en tanto que unos y otros pueden definirse individualmente a partir de su relación con ciertos conceptos específicos (Frege lo hizo con los números matemáticos[12], y más arriba lo hemos ejemplificado con respecto a los números extramatemáticos); y 2) viendo que tienen propiedades análogas, como, por ejemplo, el hecho de que así como el 3 se puede obtener sumando N veces el 1, de igual forma r_3 se puede obtener "sumando" N veces r_1, etc.

b) En segundo lugar, veamos de qué forma los números aritméticos idealizan e interpretan a los extramatemáticos.

Continuando con nuestro mundo hipotético de triángulos, cuadrados y ruedas, podemos comprobar que en efecto los números aritméticos simplifican, y en ese sentido idealizan, las relaciones que se dan entre los números extramatemáticos, al advertir que, mientra la suma aritmética se olvida de la relación que tienen los números con ciertos conceptos específicos, la "suma" de reclasificaciones no puede olvidarse de ello y, por lo cual, sólo es posible entre grupos *diferentes* de objetos *similares*.

Por ejemplo, si r_1 se forma a partir de las 15 *descripciones definidas* que "agrupan" cada uno de los entes del mundo, y r_2 se forma a partir de las clasificaciones que agrupen pares de elementos del mundo, es decir, triángulos blancos, triángulos (a), etc., éstas serían más de 15 si algunos o todos los objetos caen en más de una clasificación, y, de no ser ese el caso, serían sólo 7 y un objeto del mundo no estaría en ninguna calsificación. De cualquier forma, no podríamos "sumar" $r_1 +^* r_2$; ya que, para el segundo caso, quedaría esquemáticamente como sigue:



donde puede apreciarse que la "suma" de reclasificaciones no es posible si éstas no están formadas por igual número de clasificaciones, las cuales deben agrupar diferentes objetos en una y en otra reclasificación; es decir, no sería correcto "sumar", por ejemplo, lo agrupado por *Va* con lo agrupado por *VaVb*, porque estaríamos "contando" dos veces el triángulo negro (a).

Por otra parte, sostenemos que la aritmética puede verse como una interpretación que permite explicar, al menos en parte, el comportamiento general de los números extramatemáticos, tomando en cuenta que la llamada "inducción matemática" (axioma 9 de Peano) es justamente la ley de los números que posibilita cierta predicción en el comportamiento de los mismos. Por ejemplo, mediante la inducción matemática sabemos que, para todos los números aritméticos, la suma de dos nones o dos pares produce un par, y que la suma de un par y un non produce siempre un non. Pues bien, si dentro de los números extramatemáticos definimos como "non" (r_n) a toda reclasificación que o bien sea r_1 o sea el sucesor de un "par" (r_p), y éste lo definimos como el sucesor de un "non"; entonces, en efecto se cumple que para toda r_n y r_p, $r_n +^* r_1 =^* r_n$, etc. Esto se debe a que, en general, las unidades, los pares y los tríos, que son las entidades que caen bajo las reclasificaciones r_1, r_2 y r_3 se comportan entre sí como los números matemáticos lo hacen; es decir, que un par de centímetros al juntarse con un trío de centímetros, producen un quinteto de centímetros; y lo mismo pasa con los pesos de los cuerpos, de tal manera que un par de gramos junto con un trío de gramos producen un quinteto de gramos. Pero esto no tiene por que ser siempre así. Es perfectamente concebible que, por ejemplo, la "suma" empírica de los pesos de dos cuerpos no fuera igual a la suma aritmética de los números respectivos debido, tal vez, al desgaste de energía producido en la unión de los cuerpos. Esto podría ser posible y, de hecho, cosas semejantes suceden en el mundo subatómico, con los volúmenes de agua y alcohol que se unen, o con otras magnitudes como la temperatura de dos cuerpos que se juntan. En base a esto, podemos afirmar que las leyes aritméticas de los números idealizan e interpretan el comportamiento general de los pares, tríos, etc.; pero hay, como en toda ley empírica, excepciones a la ley: no todos los pares y tríos se comportan así, pero basta con que algunos lo hagan para mantener las leyes aritméticas inamovibles. La aritmética no es válida en todo mundo posible, como supone Field, y ni siquiera es válida para todos los pares y tríos de nuestro mundo, pero parece ser irrefutable por lo indirecto de su referencia al mundo empírico.

Así pues, podemos concluir que los números aritméticos pueden verse como imágenes mentales de los números extramatemáticos e, incluso, hemos mostrado la plausibilidad de que se interpreten como auténticas pinturas de las reclasificaciones de lo empírico.

II.- Nos resta tratar de mostrar, al interior de un cuerpo teórico-práctico-total que incluya números aritméticos, que en efecto los números extramatemáticos pueden verse, por un lado, como los referentes naturales de dichos números, por otro lado, puedan verse como verdaderas pinturas de algo empírico y, por lo tanto, como el enlace de los números aritméticos con la experiencia. Lo cual, tendremos que hacerlo viendo si tanto unos como otros son imprescindibles para que una teoría exitosa, como la Teoría Científica del Movimiento debida a Galileo, obtenga ciertas predicciones empíricas.

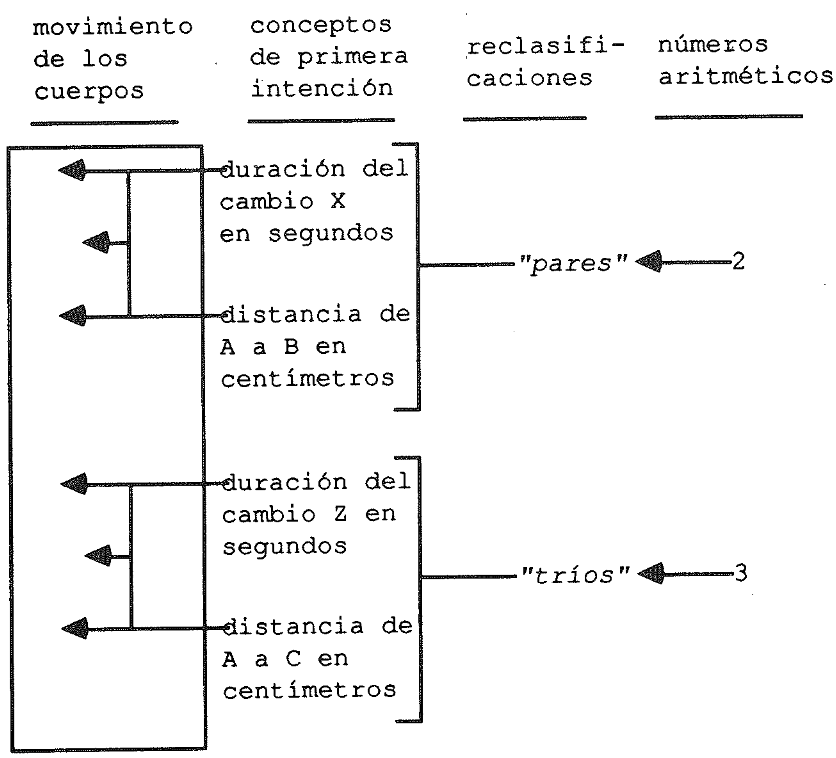
Galileo principia por definir el movimiento uniforme y el uniformemente acelerado (que corresponde a la caida de los cuerpos sobre la Tierra) de la siguiente manera:

> *Por movimiento igual o uniforme entiendo aquél en el que los espacios recorridos por un móvil en tiempos iguales, cualesquiera que estos sean, son iguales entre sí* (Galileo, 1638, p. 191)
>
> *LLamamos movimiento igualmente, esto es, uniformemente acelarado, a aquél que partiendo del reposo adquiere, en tiempos iguales, iguales incrementos de rapidez* (Galileo, 1638, p. 205)

de lo cual, obtiene matemáticamente el interesante corolario de que un cuerpo en caída libre recorre en los tiempos 1, 2, 3, 4, etc. espacios que guardan la proporción de los números nones 1, 3, 5, 7, etcétera. Este resultado, verificable en la experiencia, maravilló al mismo Galileo y lo convenció de que las leyes de la naturaleza pueden encontrarse trabajando matemáticamente. Ahora bien, ¿cómo se usan aquí los números 1, 2, 3, etc.? Es decir: a) ¿refieren a las pinturas mentales r_1, r_2, r_3, etc.? y, a su vez, cada una de estas reclasificaciones ¿se instancia respectivamente en unidades, pares y tríos empíricos? y b) ¿Podemos omitirlos a unos y otros sin mutilar la imagen del mundo que nos transmite esta teoría?

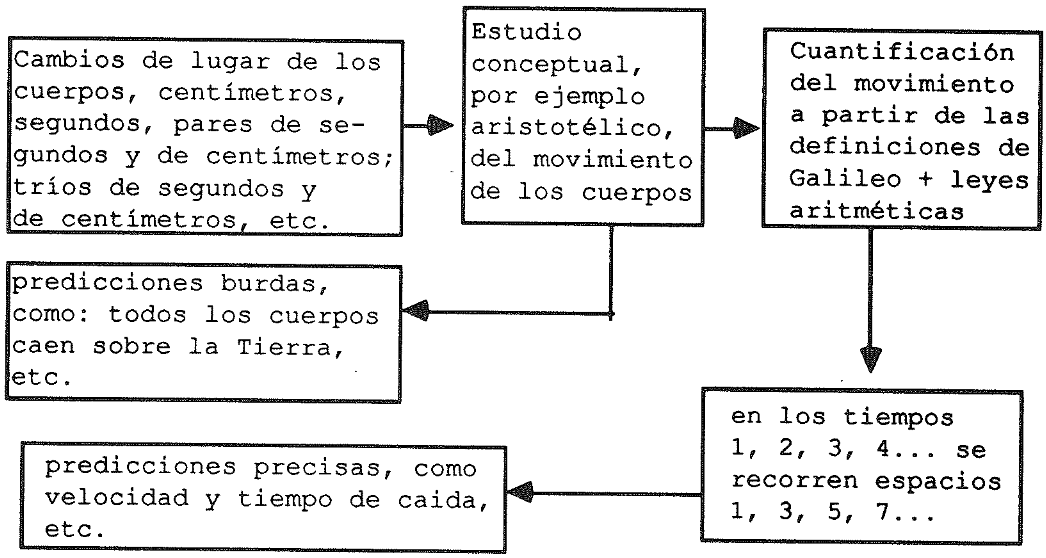
Galileo habla de tiempos y distancias a los que asigna números. Pero ¿a qué refieren, por ejemplo, '2 segundos' o '3 centímetros'? El tiempo es un concepto que es instanciado por la duración de los cambios relativos que se perciben. Pero podemos tener cambios más prolongados que otros, como la rotación de la Tierra al rededor del Sol, en comparación a la rotación de la Luna alrededor de la Tierra; en este caso, tendremos un concepto comparativo en el cual distinguimos no sólo lo que es tiempo y lo que no, sino que hacemos distinciones entre los tiempos. El siguiente paso en la precisión del concepto, como diría Carnap, es la asignación de números a los diferentes tiempos; de tal manera que podamos decir, por ejemplo, que el tiempo t_n es 2 veces el tiempo t_m etcétera. Cuando llegamos a este punto, y Galileo fue, justamente, el primero en cuantificar el movimiento en las definiciones citadas arriba, estamos en posibilidad de aplicar las leyes aritméticas al dominio en cuestión.

De acuerdo al esquema presentado arriba, las referencias de los números que usa Galileo podrían verse como sigue:



donde puede verse que "pares" es una pintura conceptual que es instanciada por un par de segundos o por un par de centímetros; siendo estas instancias algo percibido por los sentidos. Lo mismo pasa con "tríos", que es instanciada por diferentes tríos perceptibles por los sentidos; y lo mismo pasaría con otras muchas reclasificaciones de este tipo.

Considero que es, justamente, esta doble idealización e interpretación lo que le permite a Galileo predecir matemáticamente el comportamiento de dichos pares y tríos concretos y decir que los cuerpos caen sobre la tierra con determinada aceleración. Vemos esto con el esquema de Field (ver arriba inciso 2.1):



A partir del cual podemos afirmar que sin la matematización realizada sobre los pares y tríos percibidos, por mediación de al conceptualización expresada en las definiciones de Galileo, no hubiera sido posible predecir la aceleración concreta que sufren los cuerpos en caida libre. Porque, en efecto, ¿cómo encontraríamos la velocidad o el tiempo de caida de un cuerpo sobre la Tierra sin conocer las leyes aritméticas de los números naturales?

En palabras del propio Galileo:

> *No hay en la naturaleza nada mas viejo que el movimiento y no faltan libros voluminosos sobre tal asunto... A pesar de todo esto, muchas de sus propiedades, muy dignas de conocerse, no han sido observadas ni demostradas hasta el momento... En efecto, que yo sepa, nadie ha demostrado que un móvil que cae partiendo del reposo, recorre, en tiempos iguales, espacios que mantienen entre sí la misma proporción que se da entre los números impares sucesivos comenzando por la unidad* (Galileo, 1638, p. 190).

5. CONCLUSION

Si las afirmaciones de existencia son afirmaciones de referencia empírica; si lo empírico, a su vez, se concibe como perceptibles sólo a través de nuestras diferentes conceptualizaciones de una totalidad cambiante; si aceptamos, con los nominalistas, que los números aritméticos son diferentes a cualquier cosa empírica; pero aceptamos, también, que de alguna forma la aritmética nos permite predecir algunos comportamientos empíricos; entonces, podemos aceptar la existencia de ciertos números extramatemáticos que pueden verse como puentes entre los números aritméticos y ciertos objetos empíricos. En resumen, por lo aquí expuesto, considero que podríamos ver los números extramatematicos (concibiendo éstos como ciertos "parecidos de familia" entre los objetos que caen bajo diferentes conceptos) como los referentes naturales de los aritméticos cuando éstos se aplican a las cosas del mundo.

Por otra parte, siendo que en nuestro esquema los números aritméticos refieren directamente a ciertos conceptos (pinturas mentales que son instanciadas, o bajo las cuales, caen objetos empíricos), las leyes aritméticas pueden verse como leyes de conceptos, es decir lógicas. Esto concuerda con el caracter lógico que destacados filósofos como Frege, Putnam, Quine y Field le atribuyen a la aritmética. Incluso, al proponer que dichos referentes son conceptos de segunda intención, la aritmética podría verse, tal como lo sostienen algunos de ellos, como una lógica especial. Todo lo cual, por cierto, no le quitaría a la aritmética su conexión con lo empírico, si concebimos la lógica a la manera, por ejemplo, de Frechet:

> *No estamos lejos de concluir que la lógica misma es un producto de nuestra experiencia, que ha sido precedido de una síntesis inductiva y que si es absolutamente legítimo y, aún, muy útil establecer una axiomática, ésta, como las de las otras ciencias, no puede obtenerse sino como una esquematización esencialmente revisable de las reglas prácticas del razonamiento* (Frechet, 1958, p. 32).

* Universidad Juárez del Estado de Durango
México

NOTAS

1 Agradezco infinitamente los atinados y pertinentes comentarios y críticas de Ulises Moulines, Jesús Mosterín y Alejandro Tomasini a una versión previa de este trabajo, los cuales me obligaron a modificar y clarificar algunos puntos.

2 Ontología que propuse por primera vea en Avila (1989a). En todo este trabajo, al igual que en Avila (1989a), (1989b) y (1991), cuando hablo de números aritméticos me refiero siempre, exclusivamente, a los números naturales.

3 Esto me lo hizo ver, sobretodo, León Olivé al cuestionarme un trabajo anterior: Avila (1989a).

4 Lo cual, concuerda con lo que dice al respecto la Concepción Estructural en Filosofía de la Ciencia (ver, por ejemplo, la obra de Stegmüller y Moulines al respecto).

5 A la manera como Krantz, Luce, Suppes y Tversky (1971) lo proponen para toda representación numérica; Aunque, ellos sugieren que debe haber un homomorfismo de lo representado sobre la representación, y aquí estoy proponiendo que debe haber, más bien, un homomorfismo en sentido inverso para expresar la idea de que la pintura es una idealización de lo pintado, es decir, que no todo elemento de lo pintado está representado en la pintura, como ya lo había enfatizado Platón en el Cratilo.

6 Creo que esta propuesta es cercana a la idea de García de la Sienra (1990) de que hay una manera independiente y previa a las matemáticas de referirse al mundo real. El

propone que esa manera es la Philosophia del Ente esbozada básicamente por Aristóteles, Suárez y Leibniz; y mi idea al respecto, es la que expongo en el presente inciso.

7 Considero que estas reclasificaciones que yo llamo números extramatemáticos son los que Russell describe al decir: "Es claro que concebir los números es una forma de agrupar... podemos suponer a todos los pares en un grupo, a todos los tríos en otro y así sucesivamente" (Russell, 1919, cap. 2, p. 14); mientras que para Aristóteles los números serían, al parecer, los pares o los tríos mismos. "El número cualquiera que él sea, es siempre un número de ciertas cosas, de fuego, de tierra, de unidades" (Aristóteles, *Metafísica*, lib. XIV, cap. 5).

8 Ya que hay, cuando menos, otra propiedad de los números aritméticos, a saber: su relación con conceptos específicos, manifestada en expresiones como "4 osos + 2 osos = 6 osos".

9 De esa forma, se vincula sólo con estos conceptos específicos. De hecho, incluso puede definirse a partir de ellos sin hacer ninguna mención a su relación con los otro números extramatemáticos, y por lo cual, es una propiedad no estructural, tal como lo defendí en Avila (1989a).

10 Mi propuesta consiste en sugerir que estas expresiones, en realidad, hablan de "sumar" números extramatemáticos; con respecto a lo cual, la suma aritmética es un retrato necesariamente idealizado.

11 Por supuesto, si tomamos en cuenta las entidades que están sólo en la mente de las personas, el universo se ampliaría considerablemente y podríamos tener tantas clasificaciones y reclasificaciones como quisiéramos, tal como lo manejamos al discutir la condición (a1); pero el punto aquí es ver si también podríamos tener infinitas reclasificaciones si sólo manejamos clasificaciones de entidades existentes en el mundo empírico.

12 Recientemente mandé a *Crítica: revista hispanoamericana de filosofía* un artículo titulado "La definición de número en Gottlob Frege" en el cual expongo la noción fregeana de número en términos semejantes a los aquí manejados; lo cual, por cierto, fue lo que me sugirió la idea de que los números extramatemáticos pueden verse como los referentes naturales de los números aritméticos.

BIBLIOGRAFIA CITADA

Avila, Alfonso

1989a *Las matemáticas y las ciencias empíricas: ¿qué podrían ser los números?* tesis de doctorado en filosofía, UNAM, México.

1989b "Los números vistos como pinturas", *Ergo: revista de filosofía*, Vol. III, No. 5, Xalapa, Ver., México, pp. 83 a 94

1991 "Algunas aclaraciones acerca de los números vistos como pinturas" *Analogía*, México, en prensa.

Baum, Robert (ed)

1973 *Philosophy and Mathematics: from Plato to the present*, Freeman, Cooper and Co., San Fancisco.

Bigelow, John

1988 *The Reality of Numbers*, Clarendon Press, Oxford.

Carnap, Rudolf

1961 *La Construcción lógica del mundo*, traducción de Laura Mues, UNAM, México, 1988.

Field, Hartry

1980 *Science without numbers: a defence of nominalism*, Basil Blackwell, Oxford.

Frechet, Maurice

1958 *Las Matemáticas y lo Concreto*, traducción de Gustavo Machado, UNAM, México.

Galileo Galilei

1638 *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*, edición de C. Solis y J. Sadaba, Editora Nacional, Madrid, 1981.

García de la Sienra, Adolfo

1990 "Estructuras y Representaciones" *Crítica, revista hispanoamericana de filosofía*, Vol. XXII, No. 64, pp. 3 a 22.

Herrera, Alejandro

1976 *¿Es la existencia un predicado lógico?* IIF-UNAM, México.

Hossack, Keith

1991 "Access to Mathematical Objets" *Crítica: revista hispanoamericana de filosofía*, Vo. XXIII, No. 68, México, pp. 157 a 181.

Kitcher, P.

1984 *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford, University Press, Oxford.

1988 "Introduction" *Revue Internationale de Philosophie*, vol 42, No. 167, 4/1988.

Krantz D., D. Luce, P. Suppes and A Tversky

1971 *Foundations of Measurement*, Academic Press, N. Y.

Lowenstein, Otto

1966 *Los Sentidos*, traducción de Juan Almela, FCE, México, 1969.

Maddy, Penelope

1990 *Realism in Mathematics*, Clarendon Press, Oxford.

Maxwell, Grober

1962 "El estatus ontológico de las entidades teóricas" en *Filosofía de la ciencia: teoría y observación*, compilado por León Olivé y Ana Rosa Pérez Ransanz, Siglo XXI y UNAM, México, 1989, pp. 116 a 144.

Moulines, Ulises

1973 *La estructura del mundo sensible (sistemas fenomenalistas)*, Ariel, Barcelona.

1989 "¿Hay una filosofía de la ciencia en el último Wittgenstein?", *Theoria* (segunda época), año IV, curso 1988-1989, No. 11, pp. 327-342.

Orayen, Raúl

1970 "Predicación de existencia y prueba ontológica" *Crítica: revista hispanoamericana de filosofía*, may.-sep. 1970.

1989 *Lógica, significado y ontología*, UNAM, México.

Putnam, Hilary

1979 "Philosophy of Mathematics" *Current Research in Philosophy of Science*.

1983 "Mathematics without foundations" en *Philosophy of Mathematics* (second edition) Benacerraf and Putnam (eds), Cambridge University Press, USA, pp. 295-402.

Quine, W. V.

1953 "Dos dogmas del empirismo" en *Desde un punto de vista Lógico*, traducción de M. Sacristán, Ed. Ariel, Barcelona, 1962.

1981 *Teorías y Cosas*, traducción de Antonio Zirión, UNAM, México, 1986.

Resnik, Michael

1988 "Mathematics from the structural point of view", *Revue Internacionale de Philosophie*, Vol. 42, No. 167, 4/1988, pp. 400-424.

Robles, José Antonio

1980 *El problema de los universales: el realismo y sus críticos*, UNAM, México.

1991 "Berkeley y Benacerraf. La aritmética es sólo un sistema de signos" *Crítica: revista hispanoamericana de filosofía*, Vol. XXIII, No. 68, México, pp. 105-126.

Watts, Alan

1961 *El camino del Zen*, traducción de Juan Adolfo Vázquez, Editora Sudamericana, Buenos Aires.

Wittgenstein, Ludwig

1967 *Investigaciones Filosóficas*, traducción de Alfonso García Suárez y Ulises Moulines, UNAM, México, 1986.