CARACTERIZACION EN LENGUAJES LOGICOS INFINITARIOS DE LOS ORDENES PARCIALES DISEMINADOS CONTABLES

Begoña CARRASCAL *

ABSTRACT

Taking into account that no subordering of a scattered partial ordering is dense, we are going to define one idea of rank of a partial ordering which will make possible an equivalent but more operative definition of a scattered partial ordering. Using this notion of rank and the Scott's sentence associated with the ordering, we are going to characterise in the infinitary language $L_{w_1,w}$ each element of a subclass of the partial orderings, this of the strongly scattered countable partial orderings.

Palabras clave: ordinal, ordinal sucesor, ordinal límite, inducción transfinita.

0. Introducción.

En primer lugar vamos a fijar las definiciones básicas relativas a estructuras de orden y a elementos o denotaciones de partes de dichas estructuras que vamos a utilizar repetidamente y que nos van a facilitar la lectura del contenido de este artículo. En segundo lugar definiremos una idea de rango de un orden parcial, rango que no corresponde a la definición que se podría derivar de la observación del rango usual para los órdenes lineales, pero que nos va a facilitar por una parte la definición de los órdenes parciales diseminados (aquellos que no contienen a $\mathbb{Q}$ como suborden) y por otra parte la caracterización de entre todos ellos en el lenguaje $L_{w_1,w}$ de los contables que no contienen anticadenas infinitas. Demostraremos un teorema mediante el cual veremos que son precisamente los órdenes parciales fuertemente diseminados y contables (finitos o numerables) y solamente ellos los que tienen rango contable. Finalmente obtendremos una caracterización de ellos mediante enunciados de $L_{w_1,w}$ compuestos por la conjunción de la sentencia de Scott asociada a cada orden parcial contable y del enunciado que nos indica cuál es el rango de dicho orden parcial.

THEORIA - Segunda Epoca - Vol. IX
1994, Nº 20, 173-184

1. Rango de un orden parcial.

Definición 1.1

Diremos que la relación binaria "<" definida en el conjunto P es un *orden parcial* si se verifican las propiedades irreflexiva, antisimétrica y transitiva. Dos elementos a y b de P se dicen *comparables* si a<b, o b<a o bien a=b. Si dos elementos no son comparables se dice que son *incomparables*. Un subconjunto cualquiera de un orden parcial en el cual todos los elementos son incomparables dos a dos se llama *anticadena*.

Definición 1.2

Sea P =(P,<) un orden parcial y sean a, b dos elementos comparables cualesquiera de P. Un *camino* entre a y b es un suborden lineal B de **P** tal que se verifica que todo punto de B está entre a y b. Es decir, si $a \leq b$ tendríamos que para todo $c \in B$ se verificaría $a \leq c \leq b$.

Definición 1.3

Sea (P,<) un orden parcial y sean a,b dos elementos cualesquiera comparables de P. Sea β un ordinal cualquiera. Por inducción en β, definimos el *rango entre a y b* de la siguiente forma:

$\beta := 0$ .rg(a,b)$\geq$0 si y sólo si $a \leq b$.

$\beta := \alpha + 1$ .rg(a,b)$\geq \alpha+1$ ssi existen sucesiones finitas arbitrariamente largas entre a y b tales que el rango entre cada dos elementos consecutivos de cada sucesión es mayor o igual que α. Formalmente, rg(a,b)$\geq \alpha+1$ ssi para todo número natural n existe un camino de longitud n entre a y b tal que $a=a_0<a_1<a_2<\ldots<a_n=b$ donde $rg(a_i, a_{i+1}) \geq \alpha$ para todo i<n.

$\beta := \lambda = \lim \alpha$ .rg(a,b)$\geq \lambda$ ssi rg(a,b)$\geq \alpha$ para todo ordinal $\alpha < \lambda$.

Tendremos, por tanto, que rg(a,b)=β ssi rg(a,b)$\geq \beta$ y rg(a,b) $\not\geq \beta+1$.

Evidentemente puede suceder que para todo ordinal β rg(a,b)$\geq \beta$. En este caso, convendremos en escribir rg(a,b)=∞.

Notas:

1. si $c \leq a \leq b \leq d$ y rg(a,b)$\geq \alpha$ se verifica fácilmente que rg(c,d)$\geq \alpha$.
2. Sean $Q \subseteq P$ y $a,b \in Q$. Si llamamos $rg_Q(a,b)$ al rango entre a y b en el suborden Q y $rg_P(a,b)$ al rango en el orden P se cumple que si $rg_Q(a,b)=\alpha$ entonces $rg_P(a,b) \geq \alpha$.

Ejemplo:

Sea $(P,<)=(\mathbb{Q},<)$ y sea un intervalo cerrado cualquiera de $\mathbb{Q}$, $[a,b] \subset \mathbb{Q}$. Veamos que rg(a,b)=∞. Supongamos que exista un ordinal α tal que rg(a,b)$\geq \alpha$ y

$rg(a,b) \not\geq \alpha+1$. Sabemos que en [a,b] se puede encontrar una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n<b$ con $[x_i,x_{i+1}]\cong[a,b]$, lo que significa que $rg(x_i,x_{i+1})\geq\alpha$. En consecuencia, $rg(a,b)\geq\alpha+1$ contra la hipótesis. Luego, $rg(a,b)=\infty$.

Tratamos de demostrar que es equivalente decir que el rango entre dos puntos es infinito y el hecho de que el orden de $\mathbb{Q}$ es sumergible en alguno de los caminos que existen entre dichos puntos. Manteniendo este objetivo, podríamos haber dado otras definiciones de rango diferentes a la anterior, como por ejemplo las dos que vamos a exponer a continuación. Sin embargo, seguiremos considerando la definición dada por razones que se van a explicitar seguidamente.

Una definición más natural que la adoptada sería quizás la siguiente:

$\beta:=0$.$rg'(a,b)\geq0$ si y sólo si $a\leq b$.

$\beta:=\alpha+1$.$rg'(a,b)\geq\alpha+1$ ssi existe una sucesión infinita de puntos entre a y b tal que entre cada dos elementos consecutivos de ella el rango sea mayor o igual a α. Formalmente, .$rg'(a,b)\geq\alpha+1$ ssi existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq P$ tal que $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n<...<b$ o $a<...<x_n<...<...<x_1<x_0=b$ con $rg'(x_i,x_{i+1})\geq\alpha$ .para todo $i<\omega$.

$\beta:=\lambda=\lim\alpha$.$rg'(a,b)\geq\lambda$ ssi $rg'(a,b)\geq\alpha$ para todo ordinal $\alpha<\lambda$.

Evidentemente, en el caso de los órdenes lineales las dos definiciones de rg y rg' coinciden. Además consideremos el caso de los buenos órdenes lineales. Sea 0 el mínimo de uno de dichos órdenes, A. Si definimos por inducción los puntos α-**límite** como elementos de los conjuntos siguientes,

. $L_0=\{x/x\in A\}$

. $x\in L_{\alpha+1}$ ssi $x=\lim\{x_m/m<\omega\}$ siendo $x_m\in L_\alpha$.

. Si λ es un ordinal límite $x\in L_\lambda$ ssi $x\in L_\alpha$ para todo $\alpha<\lambda$.

podremos concluir a raiz de las proposiciones que siguen que $rg'(0,b)\geq\alpha$ si y sólo si b está por encima de un punto α-límite, lo cual generaliza la idea de derivada de Cantor utilizada usualmente para definir la idea de rango. Sin embargo, este rango, rg', no es expresable mediante fórmulas de ningún lenguaje infinitario con cuantificación finita adecuada, lo cual se va a poder conseguir en el caso del rango rg.

Otra definición de rango, quizás más simple y más clara que la nuestra, podría ser la siguiente:

$\beta:=0$.$rg''(a,b)\geq0$ si y sólo si $a\leq b$.

$\beta:=\alpha+1$.$rg''(a,b)\geq\alpha+1$ ssi existe un elemento $c\in P$ con $a\leq c\leq b$ y tal que $rg''(a,c)\geq\alpha$ y $rg''(c,b)\geq\alpha$.

$\beta:=\lambda=\lim\alpha$.$rg''(a,b)\geq\lambda$ ssi $rg'(a,b)\geq\alpha$ para todo ordinal $\alpha<\lambda$.

Esta definición de rango es expresable en un lenguaje infinitario del tipo $L_{\kappa,\omega}$ y además también satisface nuestro objetivo de darse la equivalencia entre existir un ordinal α tal que $rg''(a,b)=\alpha$ y no ser sumergible $\mathbb{Q}$ en ningún camino entre a y b.

Sin embargo, no la adoptaremos como definición de rango ya que si nos limitamos a órdenes lineales, rg" no coincide con la idea de la derivada de Cantor-Bendixon y pretendemos, en lo posible, no diferir substancialmente de los conceptos ya definidos y ampliamente utilizados en las teorías de órdenes lineales.

Es trivial demostrar que se verifica la siguiente desigualdad entre los tres rangos, para todo par de elementos a y b de P con a≤b,

$$rg'(a,b) \leq rg(a,b) \leq rg''(a,b).$$

En el caso de órdenes lineales se tendría además rg(a,b)=rg'(a,b).

2. Orden parcial diseminado.

Centrándonos en nuestra noción de rango, rg, demostremos una serie de proposiciones que nos van a conducir a definir la idea de orden parcial diseminado. En estos resultados previos vamos a calcular el rango de intervalos pertenecientes a órdenes lineales usuales como van a ser las potencias de ω, ω^{α}, o las de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^{\alpha}$.

Expongamos a continuación la definición que se hace en [Ro] de los órdenes $\mathbb{Z}^{\alpha}$ basándose en la extensión de la idea de potenciación de ordinales al orden de $\mathbb{Z}$. Hacemos notar que identificaremos en lo que sigue $\mathbb{Z}$ con el tipo de orden de ($\mathbb{Z}$,<).

Definición 2.1

Por inducción transfinita para todo ordinal α , tenemos:

i) α :=0 $\qquad \mathbb{Z}^0=1$

ii) α := β+1 $\qquad \mathbb{Z}^{\beta+1}= \mathbb{Z}^{\beta}.\omega^*+\mathbb{Z}^{\beta}+\mathbb{Z}^{\beta}.\omega$

iii) α := λ = lim λ $\qquad \mathbb{Z}^{\lambda}=\left(\sum_{\gamma<\lambda}\mathbb{Z}^{\gamma}.\omega\right)^{*}+1+\left(\sum_{\gamma<\lambda}\mathbb{Z}^{\gamma}.\omega\right)$

Proposición 2.2

Para todo ordinal $\alpha\geq1$ y todo par de puntos a,b$\in \mathbb{Z}^{\alpha}$ tales que a≤b se tiene rg((a,b) $\ngeq\alpha$.

Demostración:

.α:=1. Si a,b $\in$ $\mathbb{Z}^{\alpha}$, entre a y b sólo puede haber un número finito de puntos, luego rg(a,b) $\ngeq$1.

Supongamos que la propiedad se verifica para α := β y veámoslo para α := β+1.
.α:= β+1; tenemos que $\mathbb{Z}^{\beta+1}= \mathbb{Z}^{\beta}.\omega^*+\mathbb{Z}^{\beta}+\mathbb{Z}^{\beta}.\omega$.

$\mathbb{Z}^{\beta}$ $\qquad$ $\mathbb{Z}^{\beta}$ $\qquad$ $\mathbb{Z}^{\beta}$ $\qquad$ $\mathbb{Z}^{\beta}$

.... ___a___ _______ _______ ___b___ ....

Si a,b $\in$ $\mathbb{Z}^{\beta+1}$, entre ellos habría un número finito, n_0, de copias de $\mathbb{Z}^{\beta}$, luego para todo n>n_0, si queremos una secuencia de n elementos entre a y b al menos dos de entre ellos estarán en la misma copia de $\mathbb{Z}^{\beta}$ y por hipótesis de inducción el rango entre estos dos puntos no será mayor o igual que β . Luego, rg(a,b) $\ngeq \beta+1$.

.$\alpha:=\lambda=\lim \gamma$. $\mathbb{Z}^{\lambda}=\left(\sum_{\gamma<\lambda}\mathbb{Z}^{\gamma}.\omega\right)^{*}+1+\left(\sum_{\gamma<\lambda}\mathbb{Z}^{\gamma}.\omega\right)$. Sean $a,b\in\mathbb{Z}^{\lambda}$. Es evidente que existen δ_1, $\delta_2<\lambda$ tales que $a,b\in\left(\sum_{\gamma\leq\delta_1}\mathbb{Z}^{\gamma}.\omega\right)^{*}+1+\left(\sum_{\gamma\leq\delta_2}\mathbb{Z}^{\gamma}.\omega\right)$. Consideremos $\delta=\max(\delta_1, \delta_2)$. Tendremos $a,b\in\left(\sum_{\gamma\leq\delta}\mathbb{Z}^{\gamma}.\omega\right)^{*}+1+\left(\sum_{\gamma\leq\delta}\mathbb{Z}^{\gamma}.\omega\right)$. Por otra parte, como se demuestra fácilmente por inducción, $\mathbb{Z}^{\delta+1}=\left(\sum_{\gamma\leq\delta}\mathbb{Z}^{\gamma}.\omega\right)^{*}+1+\left(\sum_{\gamma\leq\delta}\mathbb{Z}^{\gamma}.\omega\right)$, luego $a,b\in\mathbb{Z}^{\delta+1}$ con $\delta<\lambda$ y λ límite. Por hipótesis de inducción rg(a,b) $\ngeq \delta+1$ y por tanto rg(a,b)$\ngeq\lambda$.

Queda en consecuencia demostrada la proposición./

Demostremos ahora un lema inspirado en una idea desarrollada para módulos en [$\mathbb{Z}$] previo a la definición de orden parcial diseminado.

Lema 2.3

Sea (P,<) un orden parcial y sean a,b dos elementos de P tales que rg(a,b)=∞. Existe un elemento $c\in P$ tal que a< c< b y que verifica rg(a,c)=∞, rg(c,b)=∞.

Demostración:

Supongamos por reducción al absurdo que para todo elemento $c\in P$ tal que a<c<b, se verifica la existencia de ordinales α y β tales que rg(a,c)=α o rg(c,b)=β. Consideremos $\gamma_1=\sup\ \alpha$ tales que existe un $c\in P$ con a<c<b y rg(a,c)=α y $\gamma_2=\sup\ \beta$ siendo β tal que existe un elemento $c\in P$ con a<c<b y rg(c,b)=β.

Si existiera un elemento $c\in P$ entre a y b tal que rg(a,c)>γ_1 y rg(c,b)>γ_2 tendríamos que para este c rg(a,c)=∞ y rg(c,b)=∞ contra la hipótesis, luego para todo c entre a y b se verifica rg(a,c)$\ngtr\gamma_1$ o rg(c,b)$\ngtr\gamma_2$. Sea $\gamma=\sup\{\gamma_1,\gamma_2\}$, tendríamos rg(a,b) $\ngtr\gamma$ lo que contradice el hecho de ser rg(a,b)=∞.

Queda en consecuencia demostrado el lema./

Con el siguiente teorema obtendremos una caracterización para los órdenes sin subconjuntos densos en términos del rango.

Teorema 2.4

Sea (P,<) un orden parcial y sean $a,b\in P$. rg(a,b)=∞ si y sólo si $\mathbb{Q}$ es sumergible en alguno de los caminos entre a y b.

Demostración:

$\Leftarrow$) Denotemos por $[a,b]=\{x\in P/a \leq x \leq b\}$. Si $\mathbb{Q}$ fuera sumergible en $[a,b]$, por el ejemplo anteriormente expuesto, tendríamos que $rg(a,b)=\infty$.
$\Rightarrow$) Sea $rg(a,b)=\infty$ y veamos que $\mathbb{Q}$ es sumergible en alguno de los caminos situados entre a y b. Sea $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una enumeración de los elementos de una copia de $\mathbb{Q}$. Notemos que el subíndice correspondiente a cada elemento de esta enumeración no tiene nada que ver con la posición que ocupa en el orden de la copia de $\mathbb{Q}$. Por el lema anterior sabemos que existe un c_0, $a<c_0<b$ tal que $rg(a,c_0)=\infty$ y $rg(c_0,b)=\infty$. Establezcamos por inducción finita un homomorfismo de la copia de $\mathbb{Q}$ en un camino de $[a,b]$. Hacemos $f(q_0)=c_0$.

Suponemos que para m=n tenemos definidos $f(q_0)=c_0,\ldots,f(q_n)=c_n$ de tal forma que $c_i<c_j$ si y sólo si $f(q_i)<f(q_j)$. Además, si reordenamos los elementos $\{q_0,q_1,\ldots\ldots,q_n\}$ según el orden de $\mathbb{Q}$, si tenemos $q_{i_0}<q_{i_1}<\ldots<q_{i_n}$ donde $\{i_0,i_1,\ldots\ldots,i_n\}=\{0,1,\ldots\ldots,n\}$ y por lo tanto, $c_{i_0}<c_{i_1}<\ldots<c_{i_n}$, se verifica $rg(a,c_{i_0})=\infty$, $rg(c_{i_n},b)=\infty$, y $rg(c_{i_j},c_{i_{j+1}})=\infty$, para $j=0,1,\ldots\ldots,n-1$. Definamos $f(q_{n+1})$. Si q_{n+1} es menor que todos los q_{i_j} entonces por ser $rg(a,c_{i_0})=\infty$, existe c_{n+1} entre a y c_{i_0} tal que rg $(a,c_{n+1})=\infty$ y $rg(c_{n+1},c_{i_0})=\infty$. Haríamos aquí $f(q_{n+1})=c_{n+1}$. En el caso de que c_{n+1} esté situado entre q_{i_j} y $q_{i_{j+1}}$ para algún j $(0\leq j\leq n+1)$ al ser $rg(c_{i_j},c_{i_{j+1}})=\infty$ existiría a su vez un elemento c_{n+1} tal que $rg(c_{i_j},c_{n+1})=\infty$ y $rg(c_{n+1},c_{i_{j+1}})=\infty$. Adoptaríamos ese c_{n+1} como $f(q_{n+1})$. Si q_{n+1} fuera mayor que c_{i_n}, como $rg(c_{i_n},b)=\infty$, razonando análogamente existiría un c_{n+1} tal que $rg(c_{j_n},c_{n+1})=\infty$ y $rg(c_{n+1},b)=\infty$ y haríamos $c_{n+1}=f(q_{n+1})$. Queda así definido por inducción $f(q_i)=c_i$ para todo elemento de la copia de $\mathbb{Q}$ y por lo tanto podemos sumergir esta copia en [a,b] como habíamos supuesto./

Definamos ahora, en general, el rango de un elemento cualquiera de un orden parcial, así como el rango del orden parcial en su totalidad.

Definición 2.5

Sea (P,<) un orden parcial y sea $b\in P$ un elemento cualquiera de P. Definimos el rango de b, rg(b) de la siguiente forma:

$$rg(b)= \sup \{rg(a,b)/a\leq b\}$$

si es que dicho supremo existe. diremos que $rg(b)=\infty$ ssi existe un elemento a, a<b, tal que $rg(a,b)=\infty$

Definición 2.6

Sea (P,<) un orden parcial. Definimos el rango de P, rg P, como el supremo, si existe, de los rangos de sus elementos:

$$rg\ P = \sup \{rg\ a/a\in P\}.$$

Diremos que rg $P = \infty$ si existe un elemento $a\in P$ tal que rg $a=\infty$.

Uniendo los resultados del teorema y de las definiciones anteriores podemos ya definir el concepto de orden parcial diseminado.

Definición 2.7

Sea $(P, <)$ un orden parcial. P es un *orden parcial diseminado* si y sólo si rg $P \neq \infty$.

Diremos que P es *fuertemente diseminado* si y sólo si es diseminado y no contiene anticadenas infinitas.

Queremos ahora demostrar que son solamente los órdenes parciales diseminados contables los que tienen un rango contable en vistas a una caracterización de éstos mediante sentencias de Scott, [S], y enunciados relativos al orden parcial considerado.

Demostremos previamente una serie de proposiciones que nos indican el rango de las sucesivas potencias de ω, ω^{α}.

Proposición 2.8

Para todo par de elementos $a,b \in \omega^{\alpha}$, $a \leq b$, se verifica que $rg(a,b) \ntriangleright \alpha+1$.

Demostración:

Por inducción en α se demuestra fácilmente que ω^{α} se puede sumergir en $\mathbb{Z}^{\alpha}$ para todo ordinal α, luego aplicando la proposición 2.2 y teniendo en cuenta que el rango tomado en el suborden siempre es menor o igual que el rango en el orden total, tenemos que se verifica la proposición.

Corolario 2.9

Para todo ordinal α, se verifica que rg $\omega^{\alpha} \leq \alpha$.

Demostración:

Sea $a \in \omega^{\alpha}$. Por la proposición anterior, $rg(a) \leq \alpha$, luego $\sup(rg(a)) \leq \alpha$, es decir, rg $\omega^{\alpha} \leq \alpha$ c.q.d.

Proposición 2.10

$rg\ (\omega^{\alpha}+1) = \alpha$ para todo ordinal α.

Demostración:

Por inducción en α.

.$\alpha := 0$ tenemos que $\omega^{0}+1=2$ y por tanto es evidente que $rg(\omega^{0}+1)= 0$.

Supongamos demostrado que $rg(\omega^{\beta}+1)=\beta$ y veamos que se cumple que $rg\ (\omega^{\beta+1}+1)=\beta+1$. Sea $b \in \omega^{\beta+1}+1$ el último elemento del orden.

$$\underset{0_1}{.}\overset{\omega^{\beta}}{\_\_\_\_\_\_}\ \underset{0_2}{.}\overset{\omega^{\beta}}{\_\_\_\_\_\_}\ \underset{0_3}{.}\overset{\omega^{\beta}}{\_\_\_\_\_\_}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ .b.$$

Como $\omega^{\beta+1}=\omega^{\beta}.\omega$ consideremos los puntos mínimos de cada una de las copias de ω^{β} que componen $\omega^{\beta+1}$. Tenemos $0_1<0_2<...<b$ y por hipótesis de inducción $rg(0_i,0_{i+1})=\beta$, luego $rg(\omega^{\beta+1}+1)=\beta+1$ (es evidente ver que $rg(\omega^{\beta+1}+1)$ no puede ser estrictamente mayor que $\beta+1$).

Si $\alpha:=\lambda=\lim\beta$, consideremos la copia de $\omega^{\beta}+1$ contenida en ω^{λ} a partir del punto mínimo de ω^{λ}. Sea a_{β} el último punto de $\omega^{\beta}+1$ y sea a_{λ} el último punto de $\omega^{\lambda}+1$. Para todo $\beta<\lambda$ tendremos que $rg(a_{\lambda})\geq rg(a_{\beta})=\beta$, luego $rg(a_{\lambda})\geq\beta$ para todo $\beta<\lambda$ y por tanto $rg(\omega^{\lambda}+1)\geq\lambda$. Supongamos que $rg(\omega^{\lambda}+1)\geq\lambda+1$, tendríamos $rg(a_{\lambda})\geq\lambda+1$ y en consecuencia, tendría que existir un elemento de $\omega^{\lambda}+1$ de rango λ, lo cual no puede ocurrir ya que para todo $a\in\omega^{\lambda}+1$, si $a\neq a_{\lambda}$, existe un $\beta<\lambda$ tal que $a\in\omega^{\beta}+1$ y por tanto, $rg(a)\leq\beta<\lambda$.

Queda de este modo demostrada la proposición./

Utilizaremos los anteriores resultados para ver que el orden de ω_1 no es contable.

Proposición 2.11

$rg\ \omega_1=\omega_1$.

Demostración:

$rg\omega_1\geq rg(\omega^{\alpha}+1)=\alpha$, luego $rg\ \omega_1\geq\omega_1$. Además supongamos que se verifique $rg\omega_1\geq\omega_1+1$. Razonando igualmente que en el caso anterior existiría un elemento a en ω_1 tal que $rg(a)=\omega_1$. Por otra parte, existe un ordinal α contable tal que $a\in\omega^{\alpha}+1$ y en consecuencia $rg\ a\leq\alpha$ contra la hipótesis. Luego $rg\ \omega_1=\omega_1$./

Nota: Análogamente se demuestra que $rg(1+(\omega^{\alpha})^{*})=\alpha$ y que $rg\ (\omega_1)^{*}=\omega_1$.

Apoyándose en esta proposición y en el hecho de que no hay anticadenas infinitas, demostremos que únicamente los órdenes parciales fuertemente diseminados contables son los que tienen rango contable. Para ello enunciemos en primer lugar un teorema relativo a órdenes parciales generales, resultado debido a Dusnik y Miller, [D+M] t. 5.23, que nos va a resultar de utilidad en la demostración de la proposición anunciada.

Teorema 2.12 (Dusnik y Miller)

Si P es un orden parcial de cardinalidad κ, donde κ es un cardinal transfinito, y si todo subconjunto de P de cardinalidad $\aleph_0$ contiene dos elementos comparables, entonces P contiene un orden lineal de cardinalidad κ.

Proposición 2.13

Sea (P,<) un orden parcial fuertemente diseminado. rg P es finito o numerable si y sólo si P es finito o numerable.

Demostración:

Demostremos la implicación hacia la izquierda: si tuviéramos card $P \leq \aleph_0$ y el rango no fuera contable, para todo ordinal $\alpha < \omega_1$ tendríamos un $x_\alpha \in P$ tal que $rg(x_\alpha) \geq \alpha$. Consideramos el conjunto $\{x_\alpha / \alpha < \omega_1\} \subseteq P$. Si fuera contable tendríamos, como se puede fácilmente comprobar, que todos los puntos de P tienen rango mayor o igual que ω_1. Sea x uno de esos puntos. Sabemos que $rg(x) = \sup\{rg(b,x)/b \leq x\} \geq \omega_1$. Por inducción en α se puede demostrar que si $rg(a,b) \geq \alpha$, entonces para todo ordinal $\beta \leq \alpha$ existe un elemento x_β, con $a \leq x_\beta \leq b$ y tal que $rg(x_\beta, b) \geq \beta$ y que además se cumple que $x_\beta \neq x_{\beta'}$, si $\beta \neq \beta'$.

Basándonos en esta propiedad demostramos que el conjunto $\{b/b \leq x\}$ no es contable contra la hipótesis de que P lo era.

Recíprocamente, sea rg $P = \alpha$ finito o numerable y supongamos que card $P \geq \omega_1$. Aplicando el teorema anterior, al no existir anticadenas infinitas, tendríamos que existe una cadena de cardinalidad al menos ω_1 en el orden P y por tanto $rgP \geq \omega_1$, contradicción con el hecho de ser α el rango de P./

3. Caracterización en $L_{w_1,w}$ de un orden parcial fuertemente diseminado.

En vista a la caracterización de los órdenes fuertemente diseminados contables en $L_{w_1,w}$ utilizando la noción de rango definida en el apartado anterior, vamos a ver cómo podemos expresar el hecho de que el rango de un orden parcial fuertemente diseminado contable, P, en el lenguaje $L_{w_1,w}$ sea α. Más precisamente, enunciemos la siguiente proposición:

Proposición 3.1

Para todo ordinal α, si $|\alpha| \leq \kappa$, existe una fórmula $\varphi_\alpha(x,y)$ de $L_{k^+,w}$ tal que para todo orden parcial **P**=(P,<), $\mathbf{P} \models \varphi_\alpha [a,b]$ si y sólo si $rg(a,b) \geq \alpha$.

Demostración:

Por inducción en α :

. $\alpha := 0$

$$\varphi_0(x,y) := x \leq y$$

. $\alpha := \beta + 1$, suponemos definida $\varphi_\beta(x,y)$ y definamos $\varphi_{\beta+1}(x,y)$.

$$\varphi_{\beta+1}(x,y) := \bigwedge_{n<\omega} \exists x_0 \ldots \exists x_n \left[\left(x = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = y \right) \wedge \bigwedge_i \varphi_\beta(x_i, x_{i+1}) \right]$$

Evidentemente, $\mathbf{P} \models \varphi_{\beta+1}[a,b]$ ssi para todo $n < \omega$ existen $a_0, a_1, \ldots, a_n \in P$ tales que $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ con rg $(a_i, a_{i+1}) \geq \beta$.

. $\alpha := \lambda = \lim \beta$. Llamando $\delta = \mathrm{cof}\ \lambda$, tenemos que $\lambda = \lim\{\beta_t / t < \delta\}$ y construimos $\varphi_\lambda(x,y)$ de la siguiente forma:

$$\varphi_\lambda(x,y) := \bigwedge_{t<\delta} \varphi_{\beta_t}(x,y)$$

En este caso, **P**$\models\varphi_\lambda[a,b]$ ssi **P**$\models\varphi_\beta[a,b]$ para todo $\beta<\delta$ lo que es equivalente a decir que $rg(a,b)\geq\lambda$ c.q.d.

En conclusión, **P**$\models\varphi_\alpha[a,b]$ si sólo si $rg(a,b)\geq\alpha$ para todo α y es evidente comprobar que $\varphi_\alpha(x,y)$ es una fórmula de $L_{k^+,w}$ si $|\alpha|\leq\kappa$./

Utilicemos ahora estas fórmulas para construir a su vez otras fórmulas que nos expresen que el rango de un elemento dado de un orden parcial es mayor o igual que un ordinal α .

Proposición 3.2

Para todo ordinal α, si $|\alpha|\leq\kappa$, existe una fórmula $\psi_\alpha(x)$ de $L_{k^+,w}$ tal que dado un orden parcial **P**=(P,<) y un elemento a de P, **P**$\models\psi_\alpha[a]$ si y solamente si $rg(a)\geq\alpha$.

Demostración:

Definimos las $\psi_\alpha(x)$ por inducción en α :

.$\alpha:=0$ $\quad\psi_0(x):=(x\leq x)$

.$\alpha:=\beta+1$ $\quad\psi_{\beta+1}(x):=\exists y\, \varphi_{\beta+1}(y,x)$

.$\alpha:=\lambda=\lim\beta$ $\quad\psi_\lambda(x):=\bigwedge_{t<\delta}\exists y(\varphi_{\beta_t}(y,x))$, donde $\delta=cof\,\lambda$ y se tiene $\lambda=\lim\{\beta_t/t<\delta\}$.

Igualmente que en la proposición anterior, se verifica fácilmente que **P**$\models\psi_\alpha[a]$ si y solamente si $rg(a)\geq\alpha$ ./

Escribamos, por último, los enunciados ϕ_α que nos expresen el hecho de que el rango de un orden parcial dado sea al menos α.

Proposición 3.3

Para todo ordinal α, si $|\alpha|\leq\kappa$. existe un enunciado de $L_{k^+,w}$, ϕ_α, tal que dado un orden parcial cualquiera, **P**=(P,<), **P**$\models\phi_\alpha$ si y solamente si rg **P**$\geq\alpha$.

Demostración:

Por inducción en α :

.$\alpha:=0$ $\quad\phi_0(x):=\forall x\,\psi_0(x)$

.$\alpha:=\beta+1$ $\quad\phi_{\beta+1}(x):=\exists x\,\psi_{\beta+1}(x)$

.$\alpha:=\lambda=\lim\beta$ $\quad\phi_\lambda(x):=\bigwedge_{t<\delta}\exists x\,\psi_{\beta_t}(x)$, $\delta=cof\,\lambda$ y $\lambda=\lim\{\beta_t/t<\delta\}$.

Teniendo en cuenta el significado de las $\psi_\alpha(x)$ es trivial demostrar que los enunciados ϕ_α cumplen las condiciones exigidas por la proposición./

A pesar de que esta caracterización del rango de un orden parcial la hemos dado en general, nos vamos a limitar a los órdenes parciales contables sin anticadenas infinitas a la hora de buscar una caracterización de ellos salvo isomorfías. El motivo es que, en primer lugar, vamos a utilizar en dicha caracterización la sentencia de Scott [S] asociada al orden parcial, lo cual nos limita el campo a los contables si es que queremos caracterizaciones absolutas, en segundo lugar, es para los que no tienen anticadenas infinitas para los que hemos encontrado la equivalencia entre ser contables y tener rango contable.

Enunciemos pues el siguiente teorema:

Teorema 3.4

Sea **P**=(P,<) un orden parcial fuertemente diseminado contable. Existe un enunciado Φ_P de $L_{w_1,w}$ que caracteriza absolutamente a **P** dentro de la clase de los órdenes parciales sin anticadenas infinitas.

Demostración:

Como (P,<) es fuertemente diseminado, sabemos que existe un ordinal α tal que rg **P**=α y por ser P contable, sabemos que α es contable. Sea Ψ_P la sentencia de Scott asociada a **P**, sabemos que **P**$\models\Psi_P$ y que además, si **P'**$\models\Psi_P$ y **P'** es contable, por el teorema de isomorfía de Scott, [S], [KE], tendríamos que **P** y **P'** son isomorfos. Consideremos el enunciado $\Phi_P:=(\phi_\alpha\wedge\neg\phi_{\alpha+1})\wedge\Psi_P$. Es evidente que **P**$\models\Phi_P$. Sea **P'**=(P',<') otro orden parcial sin anticadenas finitas cualquiera tal que **P'**$\models\Phi_P$. Por ser **P'**$\models(\phi_\alpha\wedge\neg\phi_{\alpha+1})$ tenemos que rg **P'**=α, siendo α contable, luego P' sería contable por no tener anticadenas infinitas. En consecuencia, por ser **P'**$\models\Psi_P$ tendríamos que **P** y **P'** son isomorfos, luego Φ_P caracteriza a **P** salvo isomorfías./

En conclusión, mediante la definición de rango dada al principio del trabajo y haciendo uso de las sentencias de Scott hemos conseguido encontrar una caracterización absoluta mediante un enunciado de $L_{w_1,w}$ de cada orden parcial contable fuertemente diseminado, es decir, sin contener a $\mathbb{Q}$ como suborden y sin anticadenas infinitas. Este resultado no se puede extender inmediatamente a órdenes de cardinal cualquiera ya que, según es bien sabido, el teorema de isomorfía de Scott nos permite la caracterización absoluta solamente de los contables, consiguiéndose solamente en el caso de otros cardinales equivalencias lógicas en el lenguaje infinitario correspondiente.

* Dpto. de Lógica y Filosofía de la Ciencia
ILCLI
UPV/EHU

BIBLIOGRAFIA

[B] Barwise, K. J., "Back and forth thru infinitary logics", *MAA-Studies in Mathematics* 8 (1973), 5-34.

[C+K] Chang, C.C., Keisler, H. J., *Model theory*, North Holland, Amsterdam-London, 1990.

[CL] Clote, P., "The Metamathematics of Scattered Linear Orderings", *Arch. Math. Logic* (1989), 9-20.

[D+M] Dushnik, B. & Miller, E. W., "Partially ordered sets", *Amer. J. Math.* 63 (1941), 600-610.

[F] Flum, J., "First-order logic and its extensions", Conference of Kiel, *Lecture Notes in Mathematics* 499, 248-310.

[K] Keisler, H.J., *Model Theory for Infinitary Logic*, North Holland, Amsterdam-London,1971.

[N] Nadel, M., "Scott sentences and admissible sets", *Annals of Math. Logic* 7 (1974), 264-294.

[R] Rado, R., "Axiomatic treatement of rank in infinite sets", *Canada J. Math.* 1 (1949), 337-343.

[RO] Rosenstein, J.C., *Linear orderings*, Academic Press, New York, 1982.

[S] Scott, D., "Logic whith denumerably long formulas and finite strings of quantifiers", in *Proceedings of de Symposium on the Theory of Models*, Berkeley, 1963, North Holland, Amsterdam-London, 329-341.

[SI] Sierpinski, W., "Cardinal and ordinal numbers", *Monografie matemat.* 34, Warszawa, 1958.

[w] Wolk, E. S., "Partially well ordered sets and partial ordinals", *Fund. Math.* 60 (1967), 175-187.

[Z] Ziegler, M., "Theory of modules", *Annals of pure and appl. Logic* 26 (1984), 190-195.