NUMEROS SUPERALEATORIOS

José F. PRIDA *

ABSTRACT

The notion of hyperrandomness is introduced and it is proved that the set of the hyperrandom numbers is effectively inmune but not hyperinmune.

Sea ϕ_i^o la función recursiva parcial de cero argumentos e índice i.

Sea ω el conjunto de los números naturales y sean a, b elementos de ω.

Definición 1. a define b, lo que se denotará por $a \Rightarrow b$, si $\phi_a^o = b$.

Definición 2. a es anterior a b , lo que se denotará por $a \to b$, si existen números naturales $a_0, a_1, ..., a_n$ tales que

$$a = a_0 \Rightarrow a_1 \Rightarrow a_2 \Rightarrow ... \Rightarrow a_n = b.$$

De la definición 2 se sigue que $a \to a$.

Definición 3. Un conjunto de números naturales A es cerrado si para todo a, b ε ω se verifica:

(1) $(a \,\varepsilon\, A \text{ y } b \to a)$ implica $b \,\varepsilon\, A$.

(2) $(a \,\varepsilon\, A \text{ y } a \to b)$ implica $b \,\varepsilon\, A$.

Definición 4. Un conjunto A es conexo si para todo a,b ε ω se verifica:

(3) $a,b \,\varepsilon\, A$ implica $\exists c(a \to c \text{ y } b \to c)$.

Definición 5. Una cuenca A es un conjunto no vacío, cerrado y conexo.

Por ejemplo, como puede probarse fácilmente, el conjunto $C_a = \{b\!: \exists c(a \to ca \text{ y } b \to c)\}$ es una cuenca.

Lema 1. Todo a ε ω pertenece a una cuenca y sólo a una.

Para probar el lema bastará demostrar que si C es una cuenca tal que $a \varepsilon C$, entonces $C = C_a$.

En efecto, si b es un elemento de C, por (3) existirá un m ε C tal que $a \to m$ y $b \to m$, de donde se sigue por (2) que $m \varepsilon C_a$ y en consecuencia, por (1), que $b \varepsilon C_a$. Recíprocamente, si b es un elemento de C_a, existirá por (3) un n tal que $a \to n$ y $b \to n$, de donde se sigue por (2) que $n \varepsilon C$ y en consecuencia, por (1), que $b \varepsilon C$.

THEORIA - Segunda Epoca - Vol. IX
1994, Nº 20, 185-188

Definición 6. Se denotará por a^* al menor elemento de C_a.

Definición 7. Un número a es aleatorio si se verifica para todo b:

Si $b \Rightarrow a$, entonces $b \geq a$.

Definición 8. Un número a es superaleatorio si $a = a^*$, es decir si es el menor elemento de su cuenca.

Obviamente todo número superaleatorio es aleatorio.

Los conjuntos de los números aleatorios y superaleatorios serán denotados respectivamente por R y S.

Como es habitual, W_k denotará el dominio de la función recursiva parcial de un argumento e índice k.

Definición 9. Un conjunto A es efectivamente inmune si es infinito y existe una función recursiva f tal que para todo $k \varepsilon \omega$ se verifica:

(4) Si $W_k \subset A$, entonces $|W_k| \leq f(k)$.

Definición 10. Un conjunto es efectivamente simple si es recursivamente enumerable y su complementario es efectivamente inmune.

Teorema 1. El conjunto S de los números superaleatorios es efectivamente inmune.

Corolario 1. El complemento de S es efectivamente simple.

El teorema y el corolario se siguen de los tres lemas siguientes:

Lema 2. S es un conjunto Π_1.

Esto es consecuencia inmediata de las definiciones:

$$S = \{a: \forall b(b \varepsilon C_a \rightarrow b \geq a\} \quad y \quad C_a = \{b: \exists c(b \rightarrow c \ y \ a \rightarrow c)\}.$$

Lema 3. Si $\phi_a{}^o$ y $\phi_b{}^o$ están indefinidas y $a \neq b$, entonces $C_a \cap C_b = \varnothing$ y, en consecuencia, $a^* \neq b^*$.

En efecto, si existe un $m \varepsilon C_a \cap C_b$, existirán entonces p, q tales que $m \rightarrow p$, $a \rightarrow p$, $m \rightarrow q$ y $b \rightarrow q$, siguiendose de las dos primeras hipótesis que $a = p$ y $b = q$, con lo que $m \rightarrow a$ y $m \rightarrow b$, y en consecuencia $a \rightarrow b$ o $b \rightarrow a$; pero esto contradice las hipótesis del lema.

Lema 4. Existe una función recursiva f que verifica para todo e:

(5) Si $W_e \subset S$, entonces $|W_e| \leq f(e)$.

Para demostrarlo definamos $\varphi: \omega^2 \rightarrow \omega$ a través del siguiente algoritmo: Dado el par $(e, n) \varepsilon \omega^2$, mediante computación simultanea de $\phi_e(0)$, $\phi_e(1)$, $\phi_e(2)$, ... se van listando elementos de W_e. Si $|W_e| > n+1$, la computación termina cuando hayan aparecido n+2 elementos distintos, en cuyo caso el valor asignado a $\varphi(e,n)$ será el mayor de ellos. Si $|W_e| \leq n+1$, la computación no tiene fin. Así pues, si $|W_e| > n+1$ se verifica:

(5) $\varphi(e,n)\downarrow$

(6) $\varphi(e,n) \in W_e$

(7) $\varphi(e,n) > n$.

Sea h una función recursiva tal que

(8) $\phi^o{}_{h(e,n)} = \varphi(e,n)$.

De acuerdo con el teorema de recursión existirá una función recursiva $r:\omega \rightarrow \omega$ tal que para todo $e \in \omega$

(9) $\phi^o{}_{r(e)} = \phi^o{}_{h(e,r(e))} = \varphi(e, r(e))$.

En consecuencia, si $|W_e| > r(e) + 1$, se tendrá:

(1 0) $\varphi(e, r(e))\downarrow$

(1 1) $\varphi(e, r(e)) \in W_e$

(1 2) $\varphi(e, r(e)) > r(e)$,

siguiendose de (9) y (12) que $\varphi(e, r(e))$ no es aleatorio, con lo que, de acuerdo con (11)

(1 3) $\varphi(e, r(e)) \in W_e \cap \bar{R} \subset W_e - \bar{S}$,

lo que implica que W_e no está contenido en S. Así pues

(1 8) Si $W_e \subset S$, entonces $|W_e| \leq r(e) + 1$.

Definición 11. Un conjunto infinito A es hiperinmune si no está dominado por ninguna función recursiva, i.e.: si $A = \{a_0 < a_1 < a_2 \dots\}$, no existe una función recursiva f tal que para todo n

(1 9) $a_n \leq f(n)$.

Teorema 2. El conjunto S de los números superaleatorios no es hiperinmune.

Corolario 2. El conjunto R de los números aleatorios no es hiperinmune.

Para demostrar el teorema bastará encontrar un subconjunto infinito H de S y una función recursiva g que domine H (y por tanto S y R).

Sea h una función recursiva e inyectiva tal que $\phi^o{}_{h(j)}$ está indefinida para todo j . Si $i \neq j$, entonces $h(i) \neq h(j)$ y, por tanto, $h(i) \notin C_{h(j)}$ y $h(j) \notin C_{h(i)}$, con lo que $C_{h(i)}$ y $C_{h(j)}$ tienen intersección vacía, por lo que

$$(20) \qquad h(i)^* \neq h(j)^*,$$

y, en consecuencia, el conjunto $H = \{h(i)^*: i \in \omega\}$ es un subconjunto infinito de S.

Además H está dominado por la función recursiva g definida por la igualdad

$$g(n) = h(0) + h(1) + \ldots +h(n).$$

En efecto, si $H = \{a_0 < a_1 < a_2 < \ldots\}$, se tendrá:

$$g(n) = h(0) + h(1) + \ldots + h(n) \geq h(0)^* + h(1)^* + h(n)^*$$
$$\geq a_0 + a_1 + \ldots +a_n \geq a_n.$$

En consecuencia, ni H, ni S, ni R son hiperinmunes.

* Dpto. de Lógica y Filosofía de la Ciencia
Universidad Complutense de Madrid

BIBLIOGRAFIA

P. Odifreddi, *Classical Recursion Theory*, North Holland, 1989.