CONDICIONALES Y NO MONOTONIA

Luis FARIÑAS DEL CERRO*
Antonio FRIAS DELGADO**

1. Introducción

De todos los conectores lógicos clásicos, el condicional es, sin duda, el que guarda una relación más estrecha con la idea intuitiva que tenemos de consecuencia lógica. Tanto es así, que expresiones condicionales del lenguaje ordinario como

i) Si la víctima fue asesinada en el salón, entonces el asesino es el mayordomo

son, en realidad, procesos de inferencia.

Este amalgamiento entre condicional e inferencia puede comprobarse, por ejemplo, en las motivaciones que están a la base de la reformulación contemporánea de la lógica modal por parte de C.I. Lewis.

Un condicional puede ser expresado por un símbolo del sistema formal mismo, en tanto que la noción de inferencia aparece en un nivel superior, como relación entre fórmulas o conjuntos de fórmulas del sistema lógico. Ahora bien, parece bastante razonable la idea de que mediante cierto tipo de condicionales es posible 'codificar' o 'representar' en un sistema formal las propiedades metalógicas de una relación de consecuencia dada.

Los axiomas y reglas de dicha hipotética lógica de condicionales, digamos $\mathfrak{L}_{\Rightarrow}$, habrían de expresar las propiedades básicas que cumple una determinada relación de consecuencia lógica, digamos $\mathfrak{C}_{\vdash}$. Lo importante es que, si este fuera el caso, el problema de si $<\alpha,\beta> \in \mathfrak{C}_{\vdash}$ (si dos fórmulas están o no en una relación de consecuencia determinada) se convierte en el problema equivalente de $\vdash_{\mathfrak{L}_{\Rightarrow}} \alpha \Rightarrow \beta$ (si un condicional es o no deducible en cierta lógica).

El interés práctico de esta equivalencia, obviamente, será mayor en los casos en los que los métodos para determinar $\mathfrak{C}_{\vdash}$ sean complejos, en tanto que la deducción en $\mathfrak{L}_{\Rightarrow}$ sea tratable. Además, y en cualquier caso, habremos ganado en una mayor comprensión de las propiedades que cumple $\mathfrak{C}_{\vdash}$.

Supongamos que $\mathfrak{C}_{\vdash}$ es, concretamente, una relación de consecuencia no monótona. En el articulo anterior se vieron los numerosos problemas que existen para determinar efectivamente si α es una consecuencia no monótona de un conjunto de fórmulas Γ. En este caso concreto estaría más que justificada la busqueda de una lógica $\mathfrak{L}_{\Rightarrow}$ que capturase las propiedades básicas de la relación de consecuencia no monótona y nos facilitara la tarea deductiva en la práctica. Por diversas razones, que a unos pareceran más fundamentadas filosóficamente que a otros, un tipo de condicionales que podríamos utilizar para capturar la no monotonía es el de los contrafácticos.

THEORIA - Segunda Época - Vol. X
1995, Nº 23, 27-36

El razonamiento no monótono presenta aspectos que pueden capturarse mediante lógicas de condicionales contrafácticos; pero la relación entre condicionales y no monotonía es compleja y quizás no siempre haya sido bien entendida.

¿Qué acerca los condicionales contrafácticos a la no monotonía? Digamos, ya de entrada, que entre condicionales contrafácticos y no monotonía se pueden tender dos grandes puentes.

i) Por una parte, se podrían entender las peculiares características de ambos -frente al condicional material y el razonamiento monótono, respectivamente- como el resultado de un mismo mecanismo básico: la existencia de contextos o información no explicitada.

ii) Por otra parte, las lógicas de condicionales contrafácticos pueden capturar propiedades importantes del razonamiento no monótono.

A los efectos que nos interesan en este artículo -condicionales y no monotonía-, vamos a señalar dos grandes modos de tratamiento de los condicionales, a los que nos referiremos en adelante como el de Goodman y el de Stalnaker-Lewis.

a) Veamos suscintamente el planteamiento de Goodman. Consideremos el condicional

i) Si se frotase esta cerilla, ardería.

La propuesta de Goodman es considerar un condicional contrafáctico, como el anterior, de la siguiente forma:

$A \Rightarrow B$ (A implica contrafácticamente B) si y sólo si existe un contexto o un conjunto de hipótesis, H, tal que $A \wedge H \longrightarrow B$ (A junto con H implican clásicamente B).

La existencia de contextos implícitos en los condicionales contrafácticos -en el ejemplo anterior: condiciones normales de humedad, oxígeno, etc.- los acerca de algún modo al razonamiento no monótono.

Consideremos los enunciados:

ii) los estudiantes son jovenes
iii) los hombres son mortales

Podríamos asimilar la diferencia que existe entre (ii) y (iii) a la que existe entre un condicional contrafáctico y un condicional material, en el sentido de que en el segundo caso no hay contextos implícitos -no hay excepciones que haya que añadir al antecedente para deducir clásicamente el consecuente-, en tanto que sí los hay en el primero. Podríamos decir: los contextos implícitos son a los contrafácticos, lo que las excepciones a la no monotonía; tratar con contextos implícitos puede ser un buen marco para tratar con excepciones.

El objetivo de Goodman en el tratamiento de los contrafácticos era práctico, en la medida de que trataba de hacer explícitos los contextos para poder derivar la conclusión del contrafáctico. Un objetivo equivalente en el razonamiento no monótono es el ejemplificado en los distintos formalismos que comentábamos en el artículo anterior.

Tal objetivo práctico de deducción efectiva de contrafácticos se le reveló al propio Goodman irrealizable. Añádase a ello el carácter circular que veía Goodman en la caracterización de los condicionales contrafácticos. En efecto, el contexto H que añadido a A nos permitiría deducir clásicamente B, según Goodman, no puede ser cualquier contexto, sino que ha de ser contrafácticamente consistente con A. De donde resulta:

$A \Rightarrow B$ si y sólo si existe un contexto H tal que $A \wedge H \rightarrow B$ y, además, $\neg(H \Rightarrow \neg A)$.

Se observará un recurso a $\Rightarrow$ en la propia definición de $\Rightarrow$. Volvemos a encontrarnos aquí con los problemas generados por la exigencia de la consistencia.

b) El planteamiento de Stalnaker-Lewis utiliza la semántica de mundos posibles. A implica contrafácticamente B se entiende así:

$A \Rightarrow B$ es verdadero en el mundo actual si y sólo si en el mundo más parecido al actual en el que A sea verdadero, B es verdadero.

La lógica de condicionales a la que nos lleva esta idea permite establecer ciertos principios generales, que son justamente aquéllos que preservan la identidad de contextos implícitos. Pero no constituye un instrumento que en la práctica pueda servir para extraer conclusiones de condicionales contrafácticos.

La situación en la que nos encontramos podría resumirse así: las lógicas de condicionales contrafácticos en la línea de Stalnaker pueden servir para capturar algunas de las propiedades más importantes de la no monotonía -como relación de consecuencia lógica-, pero no son el instrumento que nos permite, en la práctica, efectuar inferencias no monótonas; nos dice propiedades sobre las inferencias, pero no nos dice qué se infiere.

2. Lógicas de condicionales para el razonamiento no monótono

Las dos formas de ver el problema son necesarias, dado que estamos interesados en construir métodos para poder realizar razonamientos concretos en sistemas particulares, pero también lo estamos en conocer los postulados básicos que racionalmente un contrafáctico debe verificar. Este doble aspecto aparece también de forma clara en los formalismos de condicionales desarrollados en la no monotonía. El primero, el que se refiere a los razonamientos practicos, es reflejado por la construcción de extensiones, o modelos particulares, de tal forma que razonar se convierte en un test de pertenencia o en la evaluación de una fórmula; el segundo se refiere a los postulados que toda extensión o todo modelo debe verificar.

Aquí vamos a presentar dos tratamientos, uno debido a Delgrande y otro a Makinson y Gärdenfors.

2.1. El primer intento de construir una lógica de condicionales específicamente para dar cuenta de los enunciados generales o prototípicos ha sido el de Delgrande (1987).

$A \Rightarrow B$ se considera verdadero en el estado actual si y sólo si en el estado más tipico que el estado actual $A \rightarrow B$ es verdadero.

El conjunto de axiomas y reglas de inferencia de la lógica de Delgrande caracterizan los postulados generales de un sistema de inferencia no monótono, pero no nos dicen nada sobre una deducción no monótona en particular. Una relación de consecuencia no monótona debe poder permitirnos deducir más de lo que la lógica monótona permite; sin embargo, la capacidad deductiva de las lógicas de condicionales es más pobre que la de la lógica clásica. Esto se debe a que la lógica de condicionales ha de eliminar todos los principios clásicos que puedan introducir una inconsistencia cuando aparecen excepciones. El problema al que dan respuesta las lógicas de condicionales es el de definir los postulados generales que debe satisfacer un razonamiento en presencia de excepciones.

Si queremos utilizar los principios generales para deducir más de lo que permite la lógica clásica, hay que introducir los medios para calcular efectivamente los contextos implícitos.

La estrategia seguida por Delgrande consiste en presentar primero una lógica de condicionales que caracterice la noción de 'tipicalidad'. Dicha lógica es excesivamente pobre como para efectuar deducciones no monótonas; así que Delgrande se ve obligado, posteriormente, a incorporar mecanismos que amplien su potencia deductiva. Esto lo logra introduciendo extensiones.

Interpretando la tipicalidad desde un punto de vista modal como relación de accesibilidad entre mundos, habría de tener las propiedades de reflexividad, transitividad y cierto tipo de conectividad, más débil que una relación euclideana, a saber: si Ew_1w_2 y Ew_1w_3, entonces o Ew_2w_3 o Ew_3w_2 (S4.3).

En realidad, Delgrande sustituye la relación de accesibilidad entre mundos por una función de selección, f, que, dado un mundo y una proposición, le asigna el conjunto de mundos menos excepcionales en los que A es verdadera. Sea $\|A\|^M$ el conjunto de mundos en los que A es verdadera en el modelo M; $f(w,\|A\|^M)$ es el conjunto de los mundos menos excepcionales en los que A es verdadera.

Ahora podemos definir el condicional $A \Rightarrow B$ como verdadero en w si y sólo si

$$f(w,\|A\|^M) \subseteq \|B\|^M$$

Restringiéndonos al caso proposicional, por ganar en claridad expositiva, y expresando lo anterior más formalmente, un modelo M está considerado como el triplo <W,f,m>, donde W es un conjunto de estados -de 'mundos posibles'-; f es una función que asocia a cada fórmula -más exactamente: al conjunto de estados en los que la fórmula es verdadera- y a cada estado un conjunto de estados; m es una función que asocia a cada variable proposicional el conjunto de estados en los que es verdadera. Si F es una fórmula y M es un modelo, $\|F\|^M$ -o simplemente $\|F\|$- denotará la extensión de F en M; es decir: al conjunto de estados en M en los que F es verdadera.

La noción de satisfacibilidad de una fórmula F en un estado w y en un modelo M (M,w sat F) se define por inducción sobre la estructura de la fórmula así:

M,w sat p si y sólo si $w \in m(p)$

M,w sat $\neg$F si y sólo si M,w no sat F
M,w sat F $\vee$ G si y sólo si M,w sat F o M,w sat G
M,w sat F $\Rightarrow$ G si y sólo si $f(w,\|F\|) \subseteq \|G\|$
Una fórmula F es satisfecha en un modelo M si y sólo si existe un w en M tal que M,w sat F; F es válida si y sólo si para cada modelo M y cada estado w en M, M,w sat F.

Supongamos que interpretamos la lógica de condicionales en una semántica de mundos posibles de modo que A $\Rightarrow$ B sea satisfecha en un mundo posible y en un modelo si y sólo si el conjunto de mundos posibles en los que A es verdadera está incluido en el conjunto de mundos posibles en el que B es verdadero. La función f permite expresar la tipicalidad. Es decir, f(w,A) representa el conjunto de estados más tipicos en los que A es verdadera, entre aquéllos que son más típicos que w. Según Delgrande, la noción de tipicalidad viene dada por las siguientes propiedades semánticas:

a) $f(w,\|A\|) \subseteq \|A\|$
b) Si $f(w,\|A\|) \subseteq \|B\|$, entonces $f(w,\|A\|) \subseteq f(w,\|A\wedge B\|)$
c) Si $f(w,\|A\|) \nsubseteq \|B\|$, entonces $f(w,\|A\wedge\neg B\|) \subseteq f(w,\|A\|)$
d) $f(w,\|A\vee B\|) \subseteq f(w,\|A\|) \cup f(w,\|B\|)$

El sentido de estas reglas es el siguiente. (a) impone una condición de reflexividad. (b) expresa una conjunción a la derecha. (c) expresa un principio de inclusión de lo consistente. (d) expresa un principio de disyuntividad.

Delgrande construye la lógica condicional NP añadiendo al cálculo proposicional los axiomas y reglas de inferencia siguientes:

ID. $A \Rightarrow A$
CC. $((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)) \rightarrow (A \Rightarrow (B \wedge C))$
RT. $A \Rightarrow B \rightarrow ((A \wedge B \Rightarrow C) \rightarrow (A \Rightarrow C))$
CV. $\neg(A \Rightarrow B) \rightarrow ((A \Rightarrow C) \rightarrow (A \wedge \neg B \Rightarrow C))$
CC'. $((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)) \rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C)$
RCM. A partir de $B \rightarrow C$ se puede inferir $A \Rightarrow B \rightarrow A \Rightarrow C$

NP es una lógica normal, esto es, está clausurada respecto a las reglas:

RCEA. A partir de $A \leftrightarrow B$ se puede inferir $(A \Rightarrow C) \leftrightarrow (B \Rightarrow C)$
RCK. A partir de $(B_1 \wedge ... \wedge B_n) \rightarrow B$ se puede inferir $((A \Rightarrow B_1) \wedge ... \wedge (A \Rightarrow B_n)) \rightarrow (A \Rightarrow B)$ para todo $n \geq 0$

En su aplicación al razonamiento no monótono, sin embargo, hay que imponer restricciones, por ejemplo, a la transitividad.

Para Delgrande una teoría de defectos es un par T=<D,C>, donde D es un conjunto de fórmulas de su lógica de condicionales llamadas defectos y C es un conjunto de fórmulas clásicas que describen el estado del mundo. Parecería razonable que la cuestión de si una fórmula F se puede derivar no monótonamente de una teoría T fuese equivalente a la deducción en la lógica de Delgrande de algún tipo de condicional cuyo consecuente fuese F, por ejemplo de $C \Rightarrow F$. Este es efectivamente el caso; pero se hace necesario dar un rodeo más todavía. La deducción debe hacerse a partir de una extensión de la teoría de defectos, para construir la cual Delgrande introduce la idea de condicional soportado en un conjunto de fórmulas.

Una fórmula $A \Rightarrow B$ está soportada en un conjunto de fórmulas Γ si existe una fórmula C tal que:

i) $A \rightarrow C$ es un teorema de la logica clásica;
ii) $C \Rightarrow B$ es deducible de Γ en la lógica de condicionales de Delgrande;
iii) si existe un C' tal que $A \rightarrow C'$ es un teorema clásico y de Γ fuese derivable $\neg(C' \Rightarrow B)$ en la lógica de condicionales de Delgrande, entonces es un teorema clásico $C \rightarrow C'$.

La idea básica es que $A \Rightarrow B$ está soportado en Γ si hay un condicional $C \Rightarrow B$ tal que C se sigue de A y no hay ningún condicional en Γ con un antecedente más fuerte que niegue a B. De otro modo: $A \Rightarrow B$ está soportado en una teoría de defectos si es una consecuencia de ella o es una consecuencia de otros condicionales soportados o hay buenas razones para aceptarlo o no hay razones más fuertes para rechazarlo.

Una extensión, E(D), de D se define así

$E_0 = D$
$E_{i+1} = Ei \cup \{\alpha \wedge \gamma \Rightarrow \beta \mid D \vdash \alpha \Rightarrow \beta$ y $\alpha \wedge \gamma \Rightarrow \beta$ está soportada en $D \cup C\} \cup$
$\{\alpha \wedge \neg\gamma \Rightarrow \beta \mid D \vdash \alpha \Rightarrow \beta$ y $\alpha \wedge \gamma \Rightarrow \beta$ no está soportada en $D \cup C\}$

Resumiendo, Delgrande nos propone la formalización del razonamiento no monótono como compuesto de las dos partes siguientes:

i) La definición de una lógica de condicionales que formaliza los principios generales que un razonamiento no monótono condicional debe verificar. Conviene observar, no obstante, que el lenguaje no permite fórmulas con condiconales $\Rightarrow$ anidados.

ii) Un método para calcular una extensión particular en la cual las deducciones no monótonas se transforman en saber si un test de pertenencia a la extensión es verificado.

Estos dos pasos reflejan bien la separación entre principios generales y razonamiento específico. Y justamente se abordan en este orden.

2.1. Otra forma diferente ha sido introducida por Makinson y Gärdenfors a partir de los trabajos de Goodman.

En este caso se parte de una extensión basada en una idea de preferencia entre fórmulas que verifica ciertos postulados; dichos postulados inducen un conjunto de principios de racionalidad en el condicional asociado.

Makinson y Gärdenfors retoman el planteamiento de D. Lewis en su influyente texto *Counterfactuals* donde se evita la circularidad de Goodman recurriendo a la noción de similaridad que introduce un orden de preferencias entre los mundos posibles. Tendríamos ahora que G es contrafactualmente derivable de F si y sólo si G es una consecuencia clásica de $F \wedge H$ y $\neg H$ es menos posible que F.

Gärdenfors y Makinson demuestran un teorema de representación que conecta las relaciones de inferencia basadas en un orden entre las fórmulas con los postulados básicos del razonamiento no monótono. Su tratamiento presenta, al menos, las siguientes dificultades:

i) Si el orden está ya completamente dado, el razonamiento se limita a una simple inspección del orden y ver cómo aparecen en él las fórmulas, sin necesidad de efectuar cálculo alguno para establecer si una fórmula se sigue de otra.

ii) Desde un punto de vista práctico, el problema de la extracción de conclusiones a partir de ordenes de posibilidad completamente definidos está lejos de ser un problema abordable.

Recientemente, Fariñas, Herzig, Lang (1994) han ampliado las ideas de Gärdenfors y Makinson para los casos en los que sólo se conoce parte del orden de posibilidad y han mostrado que suministra los postulados básicos del razonamiento no monótono -aunque no satisface la monotonía racional. Fariñas, Herzig, Lang han demostrado, además, un teorema de representación entre los ordenes de posibilidad -completos e incompletos- y los modelos, que resultan ser los que axiomatiza la lógica de condicionales **VA** de D. Lewis.

Los ordenes de posibilidad -una relación dual de los ordenes de expectativas utilizado por Gärdenfors y Makinson- son preórdenes totales (reflexivos, transitivos y totales) que contienen la relación de deducción clásica y son estables respecto a la disyunción. Más precisamente, un orden de posibilidad $\leq$ es una relación entre fórmulas que satisface las siguientes condiciones:

i) Si $F \leq G$ y $G \leq H$, entonces $F \leq H$ (transitividad).
ii) Si $G \vdash F$, entonces $G \leq F$ (dominancia).
iii) $F \vee G \leq F$ o $F \vee G \leq G$ (disyuntividad).

Estas tres propiedades implican la conectividad:

$F \geq G$ o $G \geq F$

Los órdenes de expectativas de Gärdenfors y Makinson se pueden interdefinir con los órdenes de posibilidades: F es al menos tan posible como G si y sólo si $\neg F$ es al menos tan cierto como $\neg G$.

La relación de inferencia no monótona introducida por Gärdenfors y Makinson puede reformularse en términos de órdenes de posibilidades así:

Dado un orden de posibilidad $\leq$, la relación de inferencia no monótona $\mid\!\sim_{\leq}$ se define

$F \mid\!\sim_{\leq} G$ si y sólo si

i) o bien $F \vdash G$
ii) o bien existe una proposición H tal que $F \wedge H \vdash G$ y $F > \neg H$.

Se observará que G es derivable no monótonamente de F si lo es clásicamente o si lo es contrafácticamente -repárese en la simetría con la definición de Lewis. La condición (i) es necesaria para garantizar la propiedad de la superclasicidad de la relación no monótona.

Gärdenfors y Makinson demuestran que las relaciones de inferencia comparativas satisfacen las propiedades esperables de superclasicidad, equivalencia lógica a la izquierda, y, o, monotonía racional, preservación de la consistencia y acumulación. Además, prueban un teorema de representación que garantiza que para cualquier relación de inferencia que satisfaga las propiedades anteriores, hay un orden de posibilidad que lo genera.

El teorema siguiente permite transformar una definición de no monotonía relativa a una hipótesis H en una relación entre fórmulas.

Teorema: Dado un orden de posibilidad $\geq$ y dos fórmulas F y G, son equivalentes:

i) Existe una proposición H tal que $F \wedge H \vdash G$ y $F > \neg H$.
ii) $F > F \wedge \neg G$
iii) $F \wedge G > F \wedge \neg G$

Derivar una relación de inferencia comparativa a partir de un orden de posibilidades requiere que el orden sea conocido enteramente; esta exigencia parece demasiado fuerte. Por ello, Fariñas, Herzig, Lang introducen un tratamiento para órdenes de posibilidad incompletos.

Un orden de posibilidad incompleto es un conjunto de desigualdades, E, de la forma $A \leq B$ o $A < B$, donde A y B son fórmulas clásicas. Diremos que es consistente si y sólo si existe un orden de posibilidad completo que lo extiende.

¿Cómo definir una relación de inferencia no monótona a partir de un orden de posibilidad incompleto dado? Intuitivamente, la idea es que podemos hacerlo para un orden de posibilidad incompleto E si la fórmula puede ser derivada en cualquier extensión completa de E.

$A \mid\!\sim_E B$ si y sólo si para todo orden de posibilidad completo $\leq$ que extienda E, $A \mid\!\sim_{\leq} B$

Aparentemente hemos ganado poco con esta nueva definición, pero repárese en lo siguiente: por el teorema anterior, decir que $A \mid\!\sim_E B$ es equivalente a decir que

a) $A \wedge B > A \wedge \neg B$ es verdad en todas las extensiones de E,

lo que no es sino otra manera de decir que

b) $A \wedge B > A \wedge \neg B$, considerada como una fórmula lógica con un operador condicional $>$, es verdad en todos los modelos de E.

La relación de inferencia no monótona a partir de un orden de posibilidad incompleto satisface la mayor parte de las propiedades deseables en una relación de consecuencia no monótona, excepto la monotonicidad racional -es decir, la adición de premisas no monótonamente consistentes no garantiza la estabilidad en la relación no monótona.

Un resultado de Fariñas, Herzig, Lang (1994), por lo que se refiere a la relación entre condicionales y no monotonía, establece el hecho de que determinar si $A \mid\!\sim_E B$ es equivalente a efectuar un test de validez en la lógica de condicionales **VA**.

El sistema **VA** se construye con los axiomas:

i) Tautologías clásicas
ii) Transitividad: $((\phi \leq \varphi) \wedge (\varphi \leq \chi)) \rightarrow (\phi \leq \chi)$
iii) Conexión: $(\phi \leq \varphi) \vee (\varphi \leq \phi)$
iv) **A**: $\phi < \varphi \rightarrow \Box (\phi < \varphi)$

Y las reglas:

v) Modus ponens
vi) Regla para la posibilidad comparativa:
Para cualquier $n \geq 1$,

$$\frac{\vdash \phi \rightarrow \varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n}{\vdash \varphi_1 \leq \phi \vee \ldots \vee \varphi_n \leq \phi}$$

Consideremos brevemente la semantica de esferas de Lewis para la lógica de condicionales **VA**.

Un modelo de esfera aboluto es un triplo $M = \langle W, \mathcal{S}, m \rangle$, donde W es un conjunto no vacío de mundos, m una función de significación de variables proposicionales a conjuntos de mundos y $\mathcal{S}$ es un conjunto no vacío de subconjuntos de W, llamado sistema de esferas. $\mathcal{S}$ tiene que satisfacer las siguientes condiciones:

i) para todo S, S' $\in \mathcal{S}$, $S \subseteq S'$ o $S' \subseteq S$ -anidamiento.

ii) para todo subconjunto $(S_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{S}$, $\bigcup_{i \in I} S_i \in \mathcal{S}$ y $\bigcap_{i \in I} S_i \in \mathcal{S}$ -estabilidad para la unión y la intersección.

La satisfacción de una fórmula en un mundo w de un modelo M se define así:

Si F es una fórmula atomica, $M,w. \models$ si y sólo si $w \in m(F)$

$M,w \models F \wedge G$ si y sólo si $M,w \models F$ y $M,w \models G$

$M,w \models F \geq G$ si y sólo si para toda esfera S en $\mathcal{S}$, si hay un w' en S tal que $M,w \models G$ entonces hay un w'' en S tal que $M,w'' \models F$.

$M \models A$ si y sólo si $M,w \models A$ para todo w en W. Una fórmula es valida en los modelos de esferas absolutos si y sólo si $M \models A$ para todo modelo de esfera absoluto M. Lewis demostró que la lógica de condicionales **VA** axiomatiza completamente los modelos de esferas absolutos.

La relación entre los órdenes de posibilidad y la semántica de esferas viene dada por los dos teoremas siguientes.

Teorema. Sea $\geq$ una relación binaria sobre fórmulas clásicas. Las dos condiciones siguientes son equivalentes:

i) $\geq$ es un orden de posibilidad;
ii) hay un modelo de esfera absoluto M tal que $A \geq B$ si y sólo si $M \models A \geq B$

Teorema de representación para órdenes de posibilidad completos:
Sea $\leq$ un orden de posibilidad completo, $\mathrel{|\!\sim}_{\leq}$ su relación de consecuencia no monótona inducida, $M_{\leq}$ su modelo de esfera absoluto asociado; entonces

$A \mathrel{|\!\sim}_{\leq} B$ si y sólo si $A \vdash B$ o $M_{\leq} \models A > A \wedge \neg B$

Para los órdenes incompletos tenemos el resultado siguiente.

Teorema de representación para ordenes de posibilidad incompletos.
$A \mathrel{|\!\sim}_{E} B$ si y sólo si $A \vdash B$ o $\mathcal{C} \models A > A \wedge \neg B$, donde $\mathcal{C}$ es el conjunto de fórmulas condicionales que representan el orden de posibilidad incompleto E.

Lo que se ha establecido es que comprobar si $A \mathrel{|\!\sim}_{E} B$ ocurre o no es equivalente a comprobar la validez de una fórmula en **VA**.

Por lo que se refiere al formalismo no monótono presentado por Delgrande, hemos de señalar que, aunque los axiomas de su sistema indican los postulados esenciales, hay otros principios de racionalidad que están ímplicitos en su definición de extensión. En cuanto al formalismo presentado por Gärdenfors y Makinson, todos los postulados aparecen directamente en los axiomas de **VA**.

*IRIT - U. Paul Sabatier (Toulouse)
**Universidad de Cádiz

BIBLIOGRAFIA

Delgrande, J.P.: 1987, 'A first-order conditional logic for prototypical properties', *Artificial Intelligence* 33, 105-130.

Delgrande, J.P.: 1988, 'An approach to default reasoning based on a first-order conditional logic: revised report', *Artificial Intelligence* 36, 63-90.

Fariñas del Cerro, L., Herzig, A. and Lang, J.: 1994, 'From ordering-based nonmonotonic reasoning to conditional logics', *Artificial Intelligence* 66, 375-393.

Gärdenfors, P. and Makinson, D.: 1994, 'Nonmonotonic inference based on expectation', *Artificial Intelligence* 65, 197-245.

SYSTÈMES D'INFÉRENCE NON MONOTONE

Philippe BESNARD*

1.Introduction

Concernant la formalisation du raisonnement, le premier sujet d'études a été la logique classique, dont voici une brève description de rappel. Le langage de la logique classique est basé sur un vocabulaire comportant une infinité de variables et une liste de symboles de relations (prédicats), avec des connecteurs $\neg$ (négation), $\rightarrow$ (implication), $\wedge$ (conjonction), $\vee$ (disjonction) ainsi que les quantificateurs $\forall$ (quel que soit) et $\exists$ (il existe). Les formules sont obtenues d'abord en appliquant des variables aux prédicats puis par composition à l'aide des connecteurs et quantificateurs. Il est possible d'avoir d'autres termes que les variables en arguments des prédicats, en ayant recours à des constantes et des symboles de fonctions. Les formules ont, généralement, une lecture assez intuitive, par exemple $\neg\exists x\ P(x,x)$ signifie que P est une relation antiréflexive et $\forall xy\ P(x,y) \rightarrow P(y,x)$ indique que P est symétrique.

Pour ce qui est de la sémantique de la logique classique, la notion de base est l'interprétation, une structure basée sur un ensemble non vide appelé domaine. Dans une interprétation, une fonction (respectivement relation) sur le domaine de l'interprétation est associée à chaque symbole de fonction (respectivement relation). La vérité d'une formule dans une interprétation est évaluée d'après la valeur associée aux symboles de fonction et de relation apparaissant dans la formule. Par exemple, $\forall xyz\ P(x,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z)$ est évaluée à vrai dans toute interprétation qui associe à P une relation transitive. La notion d'inférence qui se dégage de la sémantique de la logique classique se définit ainsi: s'ensuit des prémisses toute formule vraie dans chaque interprétation où toutes les prémisses sont vraies (une telle interprétation étant appelée un modèle des prémisses). Ainsi, de $\neg\exists xy\ P(x,y)$ (le fait que P soit vide) s'ensuit $\neg\forall x\ P(x,x)$ (le fait que P n'est pas réflexive), ce qui sera noté $\neg\exists xy\ P(x,y) \models \neg\forall x\ P(x,x)$.

Il existe différents systèmes de règles, tous équivalents à l'approche sémantique, qui permettent de formaliser des déductions en logique classique (c'est-à-dire de calculer si une certaine formule s'ensuit d'un ensemble donné de formules). Par exemple, un tel système de règles permet d'établir que $\forall x\ P(x,x)$ (le fait que P soit réflexive) s'ensuit de $\forall xy\ P(x,y) \vee P(y,x)$ (le fait que P soit totale), ce qui sera noté $\forall xy\ P(x,y) \vee P(y,x) \vdash \forall x\ P(x,x)$ (la notation $Th(\mathcal{A}) = \{F \mid \mathcal{A} \vdash F\}$ sera également utilisée dans la suite).

Du point de vue de la formalisation du raisonnement, le fait que la logique classique soit un système formel a permis de déterminer certaines limitations à ses possibilités. Notamment, que la logique classique ne permet pas de représenter

THEORIA - Segunda Época - Vol. X
1995, Nº· 23, 37-47

i) $\geq$ es un orden de posibilidad;
ii) hay un modelo de esfera absoluto M tal que $A \geq B$ si y sólo si $M \models A \geq B$

Teorema de representación para órdenes de posibilidad completos:
Sea $\leq$ un orden de posibilidad completo, $\mid\!\sim_{\leq}$ su relación de consecuencia no monótona inducida, $M_{\leq}$ su modelo de esfera absoluto asociado; entonces

$A \mid\!\sim_{\leq} B$ si y sólo si $A \vdash B$ o $M_{\leq} \models A > A \wedge \neg B$

Para los órdenes incompletos tenemos el resultado siguiente.

Teorema de representación para ordenes de posibilidad incompletos.
$A \mid\!\sim_{E} B$ si y sólo si $A \vdash B$ o $\mathcal{C} \models A > A \wedge \neg B$, donde $\mathcal{C}$ es el conjunto de fórmulas condicionales que representan el orden de posibilidad incompleto E.

Lo que se ha establecido es que comprobar si $A \mid\!\sim_{E} B$ ocurre o no es equivalente a comprobar la validez de una fórmula en **VA**.

Por lo que se refiere al formalismo no monótono presentado por Delgrande, hemos de señalar que, aunque los axiomas de su sistema indican los postulados esenciales, hay otros principios de racionalidad que están ímplicitos en su definición de extensión. En cuanto al formalismo presentado por Gärdenfors y Makinson, todos los postulados aparecen directamente en los axiomas de **VA**.

*IRIT - U. Paul Sabatier (Toulouse)
**Universidad de Cádiz

BIBLIOGRAFIA

Delgrande, J.P.: 1987, 'A first-order conditional logic for prototypical properties', *Artificial Intelligence* 33, 105-130.

Delgrande, J.P.: 1988, 'An approach to default reasoning based on a first-order conditional logic: revised report', *Artificial Intelligence* 36, 63-90.

Fariñas del Cerro, L., Herzig, A. and Lang, J.: 1994, 'From ordering-based nonmonotonic reasoning to conditional logics', *Artificial Intelligence* 66, 375-393.

Gärdenfors, P. and Makinson, D.: 1994, 'Nonmonotonic inference based on expectation', *Artificial Intelligence* 65, 197-245.

SYSTÈMES D'INFÉRENCE NON MONOTONE

Philippe BESNARD*

1.Introduction

Concernant la formalisation du raisonnement, le premier sujet d'études a été la logique classique, dont voici une brève description de rappel. Le langage de la logique classique est basé sur un vocabulaire comportant une infinité de variables et une liste de symboles de relations (prédicats), avec des connecteurs $\neg$ (négation), $\rightarrow$ (implication), $\wedge$ (conjonction), $\vee$ (disjonction) ainsi que les quantificateurs $\forall$ (quel que soit) et $\exists$ (il existe). Les formules sont obtenues d'abord en appliquant des variables aux prédicats puis par composition à l'aide des connecteurs et quantificateurs. Il est possible d'avoir d'autres termes que les variables en arguments des prédicats, en ayant recours à des constantes et des symboles de fonctions. Les formules ont, généralement, une lecture assez intuitive, par exemple $\neg\exists x\ P(x,x)$ signifie que P est une relation antiréflexive et $\forall xy\ P(x,y) \rightarrow P(y,x)$ indique que P est symétrique.

Pour ce qui est de la sémantique de la logique classique, la notion de base est l'interprétation, une structure basée sur un ensemble non vide appelé domaine. Dans une interprétation, une fonction (respectivement relation) sur le domaine de l'interprétation est associée à chaque symbole de fonction (respectivement relation). La vérité d'une formule dans une interprétation est évaluée d'après la valeur associée aux symboles de fonction et de relation apparaissant dans la formule. Par exemple, $\forall xyz\ P(x,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z)$ est évaluée à vrai dans toute interprétation qui associe à P une relation transitive. La notion d'inférence qui se dégage de la sémantique de la logique classique se définit ainsi: s'ensuit des prémisses toute formule vraie dans chaque interprétation où toutes les prémisses sont vraies (une telle interprétation étant appelée un modèle des prémisses). Ainsi, de $\neg\exists xy\ P(x,y)$ (le fait que P soit vide) s'ensuit $\neg\forall x\ P(x,x)$ (le fait que P n'est pas réflexive), ce qui sera noté $\neg\exists xy\ P(x,y) \models \neg\forall x\ P(x,x)$.

Il existe différents systèmes de règles, tous équivalents à l'approche sémantique, qui permettent de formaliser des déductions en logique classique (c'est-à-dire de calculer si une certaine formule s'ensuit d'un ensemble donné de formules). Par exemple, un tel système de règles permet d'établir que $\forall x\ P(x,x)$ (le fait que P soit réflexive) s'ensuit de $\forall xy\ P(x,y) \vee P(y,x)$ (le fait que P soit totale), ce qui sera noté $\forall xy\ P(x,y) \vee P(y,x) \vdash \forall x\ P(x,x)$ (la notation $Th(\mathcal{A}) = \{F \mid \mathcal{A} \vdash F\}$ sera également utilisée dans la suite).

Du point de vue de la formalisation du raisonnement, le fait que la logique classique soit un système formel a permis de déterminer certaines limitations à ses possibilités. Notamment, que la logique classique ne permet pas de représenter

THEORIA - Segunda Época - Vol. X
1995, Nº· 23, 37-47