

# DEMOSTRACIONES CLASICAS<sup>1</sup>

Luis VEGA\*

## ABSTRACT

Let's agree in calling "classical demonstration" a deduction that enables us to know the rational necessity that something is the case and cannot be otherwise. I propose to take seriously actual instances of this notion, e.g. some mathematical proofs, and explore certain discursive and epistemic implications of their existence. Then I will look at questions about characterizing, rigorizing and acknowledging this kind of conclusive proof. Finally, some remarks on the meaning of *Provability Logic* in this context will be made.

Convengamos en que una "demostración clásica" es una deducción que -se supone- nos hace saber la necesidad (o imposibilidad) de que algo sea el caso o, incluso, la razón determinante de que sea sí y no pueda ser de otra de manera.

1. Esta idea clásica de demostración es asombrosa. Se ha desarrollado al hilo de una tradición alimentada por dos fuentes: de una ha recibido su caracterización, entre descriptiva y programática; de la otra, sus referentes ejemplares o paradigmáticos. Según la primera, una demostración consiste en una prueba lógicamente concluyente que nos da a conocer la verdad de una proposición en la inteligencia de que es imposible que lo propuesto sea de otra manera. Más aún: este tipo de prueba puede llevar su fuerza y transparencia hasta el punto no sólo de que sepamos tal cosa sino de hacernos saber que sabemos; lo cual implica un reconocimiento de la normatividad epistémica de la prueba semejante al expresado por Wittgenstein: "Recorro la demostración y digo 'Sí, así tiene que ser'" (*Observaciones sobre los fundamentos de la matemática* III § 30). Esta virtud se remonta a la noción aristotélica de una deducción *epistemonikós* -"syllogismus faciens scire", en términos medievales-; hoy sigue su camino bajo diversas alusiones tácitas o expresas a la "cogencia" de una demostración propiamente dicha, procedentes de gente tan dispar como el ya citado Wittgenstein o Church o Corcoran. Conforme a la segunda fuente de inspiración, el paradigma de la idea clásica de demostración es la prueba rubricada por el "Q.E.D." de los matemáticos; H. Scholz ha dicho incluso que a *demonstrar* sólo se aprende en matemáticas. También se trata de una referencia casi inmemorial (la asociación entre demostración y matemáticas nos consta desde la antigua Academia platónica). Pues bien, hoy día, de la historia del desarrollo crítico del pensamiento occidental que nos ha enseñado -o así suele creerse- a no estar seguros de nada, nadie esperaría algo tan fuerte como esta idea clásica: nadie esperaría ni una pretensión de conocimiento tan atrevida, ni una tradición tan persistente.

Todo aficionado a la epistemología está enterado de que los signos de los tiempos han impuesto el falibilismo y apuntan hacia el "fiabilismo [*reliabilism*]", amén de sugerir otros desfallecimientos. ¿No resulta escandalosa entonces una presunción tan apodíctica e internalista como la de saber que se sabe? Todo aficionado a la historia de las pruebas sabe de buena tinta que una demostración sólo obra como tal en contextos discursivos y marcos de reconocimiento histórica y socialmente determinados, que los criterios de rigor son flores del día y basta con atender en cada ocasión las exigencias del momento ("sufficient unto the day is the rigor thereof"); todo aficionado a la historia de las matemáticas ha oído hablar de revoluciones y cambios de paradigma en ese ámbito. Pero de la concepción tradicional se desprendería el corolario de que un teorema matemático, con la firma reconocida del "Q.E.D." clásico, puede ser algo demostrado de una vez por todas, para siempre. ¿No es una pretensión ingenua, por no decir insensata?

En suma: ¿será posible que haya algo tan bueno como lo que se supone que es una demostración clásica y que nos dure tanto? De aficionado a aficionados: creo que sí.

Muchos historiadores de las matemáticas aseguran que no: "Ninguna demostración es definitiva. Los nuevos contraejemplos sovacan las viejas demostraciones. Las demostraciones son entonces revisadas, con lo que se consideran erróneamente probadas para siempre. Pero la historia nos dice que lo único que esto significa es que aún no ha llegado la hora de un nuevo examen crítico de la demostración (...) Las demostraciones de una generación son las falacias de la siguiente"<sup>2</sup>. A mayor abundamiento, bastantes filósofos y algún que otro ensayista dan la tradición de la idea clásica de demostración por acabada<sup>3</sup>. Bien, me temo una vez más que la situación no está tan clara. Para quienes se muevan en esta onda depresiva de fin de siglo, resultará sorprendente que dispongamos de algunos algoritmos efectivos que nos llevan en una serie finita de pasos rutinarios a resultados exactos, al tiempo que nos hacen saber que ciertas clase de problemas son solubles, aunque sólo sea en restringidos ámbitos matemáticos y metamatemáticos; como sorprenderá que aún contemos con ciertas estrategias demostrativas que nos dan a conocer la necesidad o la imposibilidad racional de algo. Desde otro punto de vista, también asombrará la terquedad de ciertos usos y costumbres. Por ejemplo, largos años después de la "revolución no-euclidiana", los autores que parecen más interesados en divulgar la conformación actual del conocimiento matemático y en vislumbrar los nuevos horizontes de las matemáticas, siguen aduciendo viejos paradigmas clásicos -ciertas pruebas de los *Elementos* de Euclides en especial- a la hora de ilustrar cabalmente la idea de demostración matemática<sup>4</sup>.

2. Puede que dos ejemplos de distinto género nos introduzcan sin muchos preámbulos en algunas condiciones y variedades de las demostraciones clásicas.

Según una reciente *Histoire d'Algoritmes*: "el algoritmo de Euclides representa muy a menudo para el matemático el prototipo del proceder algorítmico y este método clásico sigue siendo de notable actualidad"<sup>5</sup>. La primera muestra será entonces el uso euclídeo del mencionado algoritmo de *anthypháíresis*, o sustracción recíproca, en los *Elementos* VII 1-3. En sustancia establece que dados dos o más enteros positivos -"números" en este contexto-, tienen una medida común, ya sea la unidad si se trata de primos relativos, ya sea una medida común máxima en otro caso, y esa medida común puede hallarse en una serie finita de pasos predeterminados<sup>6</sup>. Tomándonos ciertas libertades, podemos esquematizar el procedimiento en unos términos algorítmicos como los siguientes.

## DEMOSTRACIONES CLASICAS

Consideremos dos números cualesquiera,  $m, n$ . (1) Inicio:  $\langle m, n \rangle$ . (2) Si  $m = n$ , entonces  $\text{mcm} = m$ . (3) Si  $m \neq n$ , sígase la rutina: (i) inicio; (ii) si  $m$  es mayor que  $n$ ,  $\langle m-n, n \rangle$ ; (iii) si no,  $\langle m, n-m \rangle$ ; (iv) fin. (4) Si  $\text{mcm} = m = 1$ , entonces  $m, n$  son primos entre sí, primos relativos.

Por otro lado, las magnitudes conmensurables se comportan dentro de la teoría de la proporción como los números (X 5); así que el procedimiento de *anthyphaíresis* puede generalizarse al dominio de las magnitudes y cobrar aquí un nuevo significado: el de un criterio efectivo de conmensurabilidad. Dos o más magnitudes son conmensurables si y sólo si tienen una medida común máxima determinada por *anthyphaíresis*. Cuando su aplicación a unas magnitudes dadas genera un bucle que nunca termina de arrojar un resto que mida el resultado precedente, las magnitudes en cuestión serán inconmensurables (X 2); la situación puede recordarnos la búsqueda infinita de contraejemplos a que nos conduce la invalidación semántica de toda fórmula enunciativa de la lógica de primer orden que no sea un teorema.

La efectividad del procedimiento en el dominio de los números o de las magnitudes que guardan entre sí la razón que un número guarda con otro número, nos hace saber que los términos en cuestión son conmensurables y cuál es justamente su medida común máxima. Esta es una de las interpretaciones posibles del "Q.E.D." asociado a una demostración clásica: lo que hay que demostrar puede considerarse como un problema a resolver, una expectativa matemática a satisfacer o un programa a realizar; la prueba es la conciencia del cumplimiento cabal de estas demandas. Hoy nos pueden tentar diversas lecturas o visiones al respecto; por ejemplo, una lectura más bien intuicionista (e.g. en la línea de Martin-Löf 1987), o una planificación de las pruebas a través del espejo de una máquina interiorizada (e.g. en la línea de trabajo de Alan Bundy 1990). En el pasado de la idea clásica de demostración tampoco faltarían interpretaciones sumamente fuertes e internalistas del "Q.E.D.": recordemos, por ejemplo, la tradición constructiva del "*verum = factum*", cuya afinidad con la matemática se dejó sentir desde sus inicios en la época del despegue de la filosofía moderna<sup>7</sup>. Bajo cualquiera de estas ópticas, el algoritmo euclideo de conmensuración es congruente con dos rasgos internalistas del hacer saber (o hacer "ver") de ciertas pruebas clásicas: (1) un procedimiento algorítmico demuestra una conclusión,  $\alpha$ , sólo si hay algún agente discursivo X que entiende o puede seguir este procedimiento como método hasta concluir en  $\alpha$  -entonces suele decirse que la prueba es comprensible ["abarcable [surveyable]"]; (2) si X entiende una demostración, X posee o se hace cargo de un procedimiento de construir o de verificar su conclusión de modo que X también comprende ("ve") la necesidad de que esta conclusión sea verdadera -en este sentido cabe decir que la prueba es cogente.

La segunda muestra es bien distinta pero guarda cierta relación con la primera. Se trata de la famosa prueba de la inconmensurabilidad de la diagonal con el lado del cuadrado. Según todos los visos, data de la segunda mitad del s. V a.n.e. A la luz de Aristóteles (*APr.* 41a26-30), en la primera mitad del s. IV descansaba en la reducción de la hipótesis de la conmensurabilidad al absurdo de que un mismo número sea par e impar. Más tarde se añadió una versión reelaborada al final del libro X de los *Elementos* como "proposición 117". Este añadido apócrifo está hoy desterrado de las ediciones de los *Elementos*, pero no ha dejado de ser un lugar común en la literatura sobre las pruebas

matemáticas. Con todo, me voy a remitir al texto original para no ser cómplice de su frecuente tergiversación moderna<sup>8</sup>.

Sean ABCD un cuadrado, AC su diagonal. Digo que AC y AB son inconmensurables en longitud. Pues, si fuera posible, sean conmensurables. Digo que resultará que un mismo número es par e impar.

Está claro que  $AC^2 = 2 AB^2$  [I 47]. Ahora bien, como CA y AB son conmensurables, CA y AB guardan entre sí la razón que un número guarda con otro número [X 6]. Sea  $CA:AB :: EF:G$ , y sean EF y G los términos menores de aquellos que guardan la misma razón que ellos [VII 33]. Entonces EF no es la unidad. Si lo fuera, como  $EF:G :: AC:AB$  y AC es mayor que AB, EF también será mayor que G, la unidad mayor que un número [V 14]; lo cual es absurdo. Así pues, EF no es la unidad. Luego, es un número.

Dado que  $CA:AB :: EF:G$ , así mismo  $CA^2:AB^2 :: EF^2:G^2$  [VI 20, corolario; VIII 11]. Ahora bien,  $CA^2 = 2 AB^2$ ; luego, también  $EF^2 = 2G^2$ . Por tanto,  $EF^2$  es par. Así que el número EF es par, pues de ser impar, su cuadrado también sería impar, porque si se suman números impares y la cantidad (de los sumandos) es impar, el total es impar [IX 23]. Por tanto, EF es par. Pártase en dos partes iguales por H. Como EF y G son los términos menores de aquellos que guardan la misma razón que ellos, son primos entre sí [VII 21]. Ahora bien, EF es par. Entonces, G es impar. Pues de ser par, mediría a dos números EF, G (todo número par tiene parte mitad [VII def. 6]), que son primos entre sí; lo cual es imposible. Luego, G no es par; por tanto, es impar. Y como  $EF = 2 EH$ , entonces  $EF^2 = 4 EH^2$  [VIII 11]. Pero  $EF^2 = 2 G^2$ ; luego,  $G^2 = 2 EH^2$ ; por tanto,  $G^2$  es par. Así que, según lo dicho antes, G es par; pero, también impar. Lo cual es imposible.

Por consiguiente, AC y AB no son conmensurables en longitud. Q.E.D.

En este ejemplo resaltan ciertos rasgos de las demostraciones matemáticas clásicas que ya asomaban en la muestra anterior. Por ejemplo: (i) El resultado se obtiene por deducción sobre la base de ciertas nociones matemáticas elementales (las de cuadrado, número par e impar, números primos relativos), y de algunas de sus propiedades mejor conocidas (e.g.: si  $n^2$  es par,  $n$  es par, y si  $n^2$  es impar,  $n$  es impar). (ii) Esa misma deducción nos hace saber que, dado este marco teórico, el resultado de inconmensurabilidad se sigue necesariamente; dicho en otras palabras, es una deducción lógicamente correcta y epistémicamente cogente, de modo que todo el que entienda las bases conceptuales y comprenda la validez de los pasos de la prueba está en condiciones de reconocer así mismo su conclusión. (iii) La prueba tiene un alcance general: vale para el lado y la diagonal de cualquier cuadrado euclidiano -en la primera muestra, para todo número y magnitud conmensurable. En términos comprensivos de esa muestra anterior, cabe decir que (i) refleja la carga teórica de una demostración clásica, como prueba que discurre en términos típicamente "teóricos", y su carga sistemática, como nudo del tejido deductivo de un cuerpo de conocimientos; (ii) indica la significación internalista de este modo de hacer saber; la generalidad de (iii) envuelve, a su vez, una proyección normativa sobre el dominio regido por la prueba -"Hemos de estar dispuestos a usar la demostración como pauta de juicio (...) La demostración ha de resultar modélica" (Wittgenstein, o.c., III § 22). Pero, la segunda muestra añade a estos rasgos otro no menos notable y relativamente distintivo: (iv) La prueba establece la imposibilidad de una medida numérica (i.e. exacta) común entre las magnitudes consideradas, conclusión negativa de máximo alcance que los griegos sólo podían establecer mediante el recurso lógico de la deducción indirecta o reducción al absurdo dentro del marco teórico de discurso dado<sup>9</sup>.

Este punto marca una diferencia sustancial entre la matemática de la conmensuración, o de la no-conmensuración, y la matemática de la inconmensurabilidad.

## DEMOSTRACIONES CLASICAS

El hecho de que dos o más cantidades o magnitudes sean conmensurables es algo que cabe comprobar echando las cuentas. Recordemos el procedimiento efectivo de *anthyphaíresis*: aplicado a unos números naturales cualesquiera, siempre acaba dando su medida común exacta, sea ésta la unidad si son primos entre sí, sea su medida común máxima si no lo son. Pero supongamos el caso de un cuadrado de lado  $x$  y diagonal  $y$  -en términos de nuestros irracionales cabe asociar 1 a  $x$ ,  $\sqrt{2}$  a  $y$ . Ahora la *anthyphaíresis* o cualquier otro recurso de contar, incluidas nuestras máquinas de cálculo, ya no arrojan de suyo un resultado concluyente, sino tantos fracasos de conmensuración cuantos sean los sucesivos intentos. Tenemos, a lo sumo, experiencias de no conmensuración: el hecho es que  $x$  e  $y$  no acaban de encontrar una medida numérica común, aunque siempre podamos confiar en ulteriores aproximaciones. Esas experiencias refutadoras o estas expectativas de posibles aproximaciones indefinidamente proseguidas se mueven en un plano distinto del plano de lo que resulta a todas luces imposible, como los griegos mismos advirtieron a propósito de la inconmensurabilidad. Las no-conmensuraciones (al igual que las conmensuraciones) se dejan ver, mostrar o comprobar; la inconmensurabilidad es un punto lógico y teórico que sólo se deja demostrar. En términos más generales: el no dar con la solución exacta de un problema, o ignorar si a la larga tendrá solución, es algo muy distinto a establecer que la solución es imposible. En los dos primeros casos, aún cabría confiar en mejores aproximaciones. En el último caso, no cabe esperanza alguna puesto que nos hallamos ante una imposibilidad racional: se trata de un resultado concluyente y, en este sentido, definitivo. En suma: así como disponemos de métodos efectivos para determinar que ciertas clases de problemas son solubles, podemos contar con demostraciones terminantes de que determinados problemas son insolubles en un marco discursivo dado.

Quizás sea el momento de reparar en un detalle que nos evitará precipitaciones y malentendidos, aunque no nos ahorrará problemas. El punto es este: de todo lo anterior no se desprende que los teoremas así demostrados tengan vida eterna. El lenguaje griego de la inconmensurabilidad está hoy día en desuso, es una lengua tan muerta -pasta de filólogos e historiadores- como la *koiné* que hablaban en el s. III a.n.e. los habitantes de Alejandría. Las lenguas matemáticas actualmente en uso, para el dominio correspondiente, son los lenguajes aritmético, conjuntista o lógico (análisis no-estándar) de los irracionales. Dicho de otro modo, unas proposiciones como las de los *Elementos* pueden perder su empleo, les puede llegar la hora de la jubilación o incluso algo peor, verse acusadas de falta de rigor ante nuestros tribunales profesionales y condenadas al limbo de un Seminario de H<sup>a</sup> de la matemática antigua. Sin embargo, es curioso que esta inactualidad no sólo no les ha hecho perder su condición de demostraciones, sino que tampoco les ha impedido seguir oficiando -al menos en algún caso- como paradigmas de la prueba matemática.

Bueno, entonces ¿qué pasa con las demostraciones clásicas?

**3.** Ahora toca dar un rodeo en busca de unas nociones y una perspectiva adecuadas.

Un punto de partida frecuentado por los análisis de la demostración es la noción de "seguirse lógicamente de", la relación de consecuencia lógica. No es fácil definirla. Supongamos que si una proposición o aserción  $\alpha$  es consecuencia lógica de un conjunto de proposiciones o aserciones  $\Gamma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ , entonces  $\alpha$  es -cuando menos- una consecuencia semántica de  $\Gamma$  en el sentido tarskiano estándar: si  $\Gamma^*$  y  $\alpha^*$  son respectivamente los correlatos del antecedente y del consecuente en un lenguaje

formalizado, no hay modelo de  $\Gamma^*$  que no sea modelo de  $\alpha^*$ . Este análisis depara una caracterización precisa de la relación (es reflexiva, asimétrica, monótona, transitiva; se da o no se da con independencia de las intenciones de los agentes discursivos). Y aunque el análisis modelista se atiene a una versión reductiva de la noción de "seguirse lógicamente de" sin abundar en mayores explicaciones, puede acreditar dos connotaciones familiares de la mediación de una relación de consecuencia: (i) si el antecedente es verdadero, la verdad se preserva y transmite al consecuente; (ii) si el consecuente es falso, la falsedad se preserva y retrotrae al antecedente.

Al hablar de transmisiones y retroacciones estamos pensando no sólo en consecuencias sino en deducciones. Una deducción -siempre que hable de "deducción" sobreentenderé "deducción correcta"- es un proceso de inferencia por el que conocemos que  $\alpha$  se sigue lógicamente de  $\Gamma$  o nos servimos de esta relación con diversos propósitos. Aparte de ser un proceso mental y cognitivo de razonamiento, la deducción puede proceder expresamente en términos lingüísticos: entonces las deducciones devienen procesos discursivos que dan a conocer la existencia de relaciones de consecuencia a quienquiera que siga el hilo del discurso al tiempo que pueden servir, por ejemplo, para organizar cuerpos de proposiciones con arreglo a las virtudes estructurales de las relaciones de ese tipo. Así, desde luego, nos estamos moviendo en un terreno epistémico y pragmático -aunque siga subyacente el plano semántico de la relación estándar de consecuencia. Pues los procesos de deducción son obra de algún agente discursivo con vistas a algo y nada puede hacerse conocer como no sea a alguien. Para marcar este terreno, en vez de hablar de antecedente-consecuente, conviene referirse a un conjunto de premisas  $\Gamma$ , una conclusión  $\alpha$ , y una línea deductiva de discurso tendida entre ellas. Premisas, conclusión y línea o dirección del discurso suelen considerarse elementos básicos de una argumentación cabal y expresa, de modo que podemos integrar la deducción en un campo discursivo general donde viene a ser una argumentación que nos da a conocer o nos permite emplear una relación de consecuencia con diversos propósitos.

Las argumentaciones pueden verse como interacciones lingüísticas dinámicas complejas o como productos discursivos, como procesos o como textos. Tomaré la argumentación en el segundo sentido, i.e. el de *argumento* y, más concretamente, como la transcripción textual de lo que se hace cuando se procura dar cuenta y razón de algo ante alguien en un marco dado de discurso. Los argumentos pueden ser, a su vez, relativamente buenos o malos a estos efectos. Una finalidad general de la argumentación es persuadir a los presuntos destinatarios; el logro de este objetivo comporta diversos recursos y supone diversas condiciones según sea el caso. De donde se desprende la importancia de discriminar los medios más idóneos y oportunos: discriminación que, al decir de Aristóteles, es un signo de cultura<sup>10</sup>. Pero de ahí también se colige la dificultad de dar con una normativa eficiente o con una definición operativa de la bondad de los argumentos: es ilusoria la esperanza de quienes piensen en una determinación analítica general por condiciones necesarias y suficientes. En todo caso, me parece más provechosa la opción de considerar diversos usos paradigmáticos en diferentes contextos. Sin embargo, hay ciertas virtudes genéricas que siempre cabría esperar de un buen argumento, por ejemplo la de estar fundado en razones plausibles y pertinentes con respecto al objeto y al propósito de la argumentación en el marco dado, amén de resultar eficaz en algún sentido (e.g. comprensible y convincente).

## DEMOSTRACIONES CLASICAS

Voy a suponer que las pruebas son una especie de buenos argumentos con pretensiones típicamente cognoscitivas. Según esto, toda prueba es una argumentación aunque no toda argumentación sea una prueba. Si una prueba es una argumentación, no hay un reino de las pruebas al margen de unos agentes y unos usos en determinados marcos discursivos, ni hay un limbo semántico al que pasen a residir cuando no son reconocidas por alguien o a nadie convencen. Si las pruebas son buenos argumentos incluirán múltiples subespecies de acuerdo con sus diversos marcos discursivos de aplicación o de especialización, y se resistirán a cualquier intento de determinación uniforme y unívoca. Sin embargo, también cabe esperar de las pruebas ciertas virtudes genéricamente distintivas. En principio, empleamos las pruebas como procedimientos discursivos para acreditar nuestras pretensiones de conocimiento en un amplio sentido (e.g. desde hacer más inteligible el objeto de la argumentación, incrementar o explicar su contenido informativo, hasta justificar la conversión de una creencia en un presunto conocimiento o respaldar el crédito que le conferimos, pasando por la dilucidación de un punto en discusión o la pretendida solución a un problema). Así pues, un argumento  $\langle \Gamma, \alpha \rangle$  será una prueba sólo si es un buen argumento y tiene mayor valor cognoscitivo o más fuerza epistémica o más poder de convicción que la mera aserción de  $\alpha$  en el marco de discurso dado. Considero estos valores de prueba como una gama continua compuesta a su vez por diversas gradaciones de valor cognoscitivo, fuerza y plausibilidad, de modo semejante a como la gama perceptible de los colores se compone de gradaciones diversas (longitud de onda, tonalidad, brillo). En esta perspectiva, el valor de una prueba concreta sólo será apreciable, en general, por comparación con otras pruebas o elementos de juicio ante los que haga valer su presunta contribución a extender o acreditar o sancionar el conocimiento disponible<sup>11</sup>. En suma: las pruebas se aducen en un marco tácito o expreso de interacción y de enfrentamiento discursivos, donde el valor, la fuerza y la plausibilidad de una aserción o de una prueba vienen determinados en mayor o menor medida por el valor, la fuerza y la plausibilidad de alguna contrapropuesta o contraargumentación alternativa (e.g. del tipo  $\langle \Gamma', \text{no-}\alpha \rangle$ ). Las pruebas son, por lo demás, hijas de los tiempos y de los marcos sociales e institucionales que gobiernan su uso, su reconocimiento, su valoración y su contraste.

Si las pruebas son buenos argumentos con disposiciones y pretensiones epistémicas, las demostraciones son pruebas deductivas que tienden a presentar ciertos valores en un grado relativamente máximo. E.g.: pueden elevar la fuerza epistémica hasta el punto de hacer saber y el poder de convicción hasta la cogencia. Según esto, toda demostración es una prueba, pero no toda prueba es una demostración. Las ideas y los usos de la demostración tienen en Occidente una venerable historia y, a lo largo de ella, han concitado tantos entusiasmos como equívocos. La misma tradición clásica incurre en indecisiones a propósito de las relaciones entre las pruebas, en general, y la demostración en particular: puede separarlas abriendo un abismo entre la dialéctica plausible de los *Tópicos* y la lógica del saber concluyente de los *Analíticos*, según el programa oficial aristotélico, o entre las estimaciones probables y las luces analíticas de la razón, según otros programas acogidos al lema racionalista del "more geometrico"; pero también puede integrar la demostración en el mundo de las pruebas -e.g. a través de la mediación de las llamadas "proposiciones máximas" o del análisis de actitudes argumentativas ("*obligaciones*") o de la consideración de grados de convicción. Aquí me

arriesgaré a adoptar una perspectiva integradora, al margen de que se ajuste fielmente o no a la concepción clásica de la demostración. Propongo a grandes rasgos la siguiente.

[a] Si una demostración es una prueba, es un buen argumento; por ende, ha de incluir entre sus virtudes cierta eficacia pragmática y retórica (e.g. ha de ser inteligible, pertinente y oportuna, convincente). Más aún: [a.1]  $\langle \Gamma, \alpha \rangle$  sólo será una demostración en un marco M, si hay una comunidad competente de agentes discursivos activos en M que asumen y sancionan  $\langle \Gamma, \alpha \rangle$  como una demostración.

[b] Si una demostración es una prueba deductiva, entonces también ha de cumplir las demandas lógicas y epistémicas que se derivan de esa calidad -e.g. la de ser lógicamente concluyente-, y ha de contar con ciertas virtudes o disposiciones metódicas. Por ejemplo, si  $\langle \Gamma, \alpha \rangle$  es una demostración en M, [b.1] su línea discursiva de deducción se atiene a una estrategia deductiva ganadora frente a los contraargumentos disponibles en M<sup>12</sup>; [b.2]  $\langle \Gamma, \alpha \rangle$  puede contribuir a sistematizar el cuerpo de conocimientos correspondiente como un orden parcial de deducción y, en todo caso, su incorporación a un sistema consistente de este tipo, una teoría T, nunca pondrá en peligro la consistencia del sistema así extendido, T<sub>1</sub>, o del ampliado con otras nuevas extensiones, T<sub>n</sub>.

[c] Si una demostración es una deducción que hace saber, es un medio internalista de adquisición o de justificación del conocimiento. Vengo hablando de "internalismo" conforme a su acepción habitual en teoría del conocimiento: son estados o disposiciones internas, o factores internalizados en algún sentido los que determinan que un sujeto discursivo sepa algo por demostración. En esta perspectiva, el entendimiento de una demostración es determinante de su valor epistémico en dos planos: en el de las condiciones digamos "locales" de la prueba (e.g. como comprensión de los pasos deductivos que la componen) y en el de las condiciones "globales" (e.g. como comprensión de la estrategia deductiva y de la dirección del discurso).

De ahí nacen dos cualidades de la demostración clásica que no se generalizan al común de las pruebas. Llamaré "saber" entre comillas un reconocimiento o entendimiento que en general no está implicado en el *saber-que* en su versión estándar, i.e. como conocimiento públicamente acreditado por pruebas. Entonces: [c.1] si X sabe-que  $\alpha$  por demostración, X "sabe" que sabe-que  $\alpha$ ; [c.2] si X sabe-que  $\alpha$  por una demostración y W "sabe" que X sabe-que  $\alpha$  por tal demostración, W sabe-que  $\alpha$  por tal demostración, esto es: W sólo puede "saber" -en el sentido indicado- que X cuenta con una demostración, si W es capaz de seguir y entender tal demostración, lo cual significa una manera de rehacerla.

[d] Las demostraciones no sólo forman una banda relativamente extrema del amplio espectro de las pruebas, sino que además esta banda también presenta una configuración gradual de menor o mayor valor cognoscitivo, menor o mayor fuerza demostrativa.

Cabe pensar que las demostraciones clásicas -aunque no responden a un patrón homogéneo- representan la polarización más fuerte. Por lo menos, la tradición clásica suele referirse, e.g. en el caso de [a.1], no tanto a una comunidad competente de agentes discursivos en un marco dado como a la comunidad universal de los agentes racionales en cualquier marco de discurso; o, en el caso de (b.1), a una estrategia deductiva ganadora frente a cualquier contraargumento posible. Pero incluso la concepción clásica de la demostración admite grados y géneros. Tradicionalmente se han venido distinguiendo dos variantes principales: una demostración puede ser (i) "una deducción que hace saber la

## DEMOSTRACIONES CLASICAS

necesidad/imposibilidad de que algo sea el caso, o (ii) "una deducción que hace saber la razón propia y determinante de la necesidad o la imposibilidad de que algo sea el caso". La historia misma de la idea tradicional nos invita a sustituir este "modo material" por un "modo formal" de hablar en los términos: una demostración puede ser bien (i') "una prueba deductiva  $\langle \Gamma, \alpha \rangle$  que hace saber la verdad de  $\alpha$  a todo el que entienda el curso de la deducción y conozca la verdad de las premisas  $\Gamma$ ", o bien (ii') "una prueba deductiva  $\langle \Gamma, \alpha \rangle$  que hace saber la razón determinante de la verdad de  $\alpha$  a todo el que entienda el curso de la deducción y conozca la verdad de las premisas  $\Gamma$ "<sup>13</sup>. La distancia entre (i') y (ii') es similar a la que separa, e.g., una prueba de que la fbf ' $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ ' es deducible en la lógica estándar de enunciados porque es una tautología y esta lógica es completa, de una prueba constructiva de su deducibilidad por normalización, bien en la línea de Post, bien en el sentido de Prawitz.

4. Considerada en esta perspectiva la idea clásica de demostración, empezamos a entrever qué pasa con ella. Los primeros en aparecer son sus problemas. Uno tan antiguo como la idea misma radica en su presunto fundamentalismo: cualquier demostración se remite en última instancia a algún principio indemostrable pero no menos verdadero, necesario e inteligible que la conclusión a demostrar; pues se supone que el orden de deducción discurre parejo al orden lineal de fundamentación y los principios son fuentes no sólo de verdad sino de necesidad y de inteligibilidad intrínseca. En su versión aristotélica, esto implica que la demostración es una reinstauración del orden del ser en el orden del conocimiento. Otras versiones posteriores (hasta llegar incluso a Bolzano o a Frege) también contraen fuertes compromisos ontológicos y relacionan el orden de la justificación epistémica con una jerarquía sustantiva. Aunque haya ramales quizás menos fundamentalistas que tienden a neutralizar estos supuestos (e.g. el que parte de Ockham), en la tradición principialista en general el problema del carácter apodíctico de la demostración se retrotrae a la autojustificación de los axiomas o principios. No es la mejor política posible, habida cuenta de que, a veces, la plausibilidad de un axioma descansa precisamente en la fuerza o el valor epistémicos de las pruebas que lo adoptan -según suele acontecer en teoría de conjuntos-, y casi siempre la inteligibilidad de una demostración envuelve no tal o cual evidencia expresa, en particular, sino el dominio de un patrón estratégico y de un entramado teórico dentro de un cuerpo de conocimientos. Con ello no se disipan las responsabilidades y los compromisos, pero adquieren un tinte holista y vienen a recaer más bien sobre el uso de la teoría (o del lenguaje de la teoría) en su conjunto.

Un problema aún más obvio en la perspectiva de §3 es compaginar el carácter gradual de las pruebas en general con el carácter categórico del hacer saber demostrativo<sup>14</sup>. Desde el punto de vista del análisis del *saber-que*, podría formularse un problema análogo en términos paralelos: cómo se concilia una noción débil, más bien externalista y fiable de "X sabe-que  $\alpha$ " por alguna prueba pertinente, con la noción fuerte de "X sabe-que  $\alpha$ " justamente por una demostración clásica. Una solución tentadora sería considerar que el concepto de *saber-que* entraña una tensión normativa, de modo que la noción débil constituye su sentido operativo y la noción fuerte constituye su sentido límite<sup>15</sup>, aunque no por ello represente un ideal inalcanzable. Esta puntualización choca con las posturas que reducen la demostración al común de las pruebas -donde hablar de "demostraciones clásicas" sólo surte el efecto retórico de un título honorífico-, y con el

extremo opuesto de los que reclaman para la demostración un *tópos ouránios*, un reino propio en el más allá del mundo de las pruebas.

A los problemas se suman algunas confusiones y precipitaciones. Por ejemplo, ciertos falibilismos parecen precipitarse desde el tópico común "cualquiera puede equivocarse" en una conclusión del estilo de "nadie podrá jamás saber que sabe algo", o partir del supuesto obvio de que hoy no podemos conocer lo que sólo llegaremos a conocer mañana, limitación que se extiende a nuestras pautas de reconocimiento, para apresurarse a predecir, e.g. en la línea de interpretación de M. Kline de la historia moderna de las matemáticas, que las demostraciones de hoy son las falacias de mañana. Si así fuera, la idea clásica de la demostración no pasaría de ser el sueño de una antigua noche de verano. Puede que así sea, pero en lo que concierne a las demostraciones clásicas el punto es que "hoy es siempre todavía" -por decirlo en los expresivos términos de Machado-, aparte de que cada uno se crea muy dueño de juzgar su existencia como una bendición o como una ironía o como una paradoja histórica.

Al margen de los problemas y malentendidos de orden general, la idea clásica de demostración y sus presuntos ejemplares, las demostraciones clásicas, suscitan cuestiones de relieve en determinados mundos de las pruebas y ámbitos del conocimiento, concretamente en matemáticas. Veamos en este contexto tres focos de discusiones y de limitaciones que no dejan de estar interrelacionados: son las cuestiones de *caracterización, rigorización y reconocimiento*. Empecemos por las primeras.

5. Según Bourbaki: "Depuis les Grecs, qui dit mathématique dit démonstration" (1960, *Éléments de mathématique. E I: Théorie des ensembles*, Paris, Hermann, 1970<sub>2</sub>, p. 7). Puede que esto sólo se aplique a la tradición del "Q.E.D." del pensamiento matemático occidental, por contraste con otras como la tradición más universal del cálculo o la tradición india del "Mira". Pero, en ese contexto al menos, sí cabe pensar que si alguien nos dice qué entiende por demostración le podremos decir qué entiende por matemáticas. Si uno, por ejemplo, dice con R. Wilder: "what we call "proof" in mathematics is nothing but a testing of the products of our intuition" (1944, 'The nature of mathematical proof', *Amer. Mathem. Monthly* 51, p. 319), podrá seguramente entender por "matemáticas" casi cualquier cosa.

Lo cierto, en todo caso, es que las matemáticas nunca han vivido sólo de teoremas demostrados, ni han asumido sólo el legado tradicional de la demostración clásica. Hoy, es bien sabido, las matemáticas reconocen resultados plausibles, aproximados y provisionales, amén de diversos procedimientos de cálculo probababístico (e.g. algoritmos de Rabin), de comprobación o de confirmación. Hay, así mismo, conjeturas que aun resistiéndose a una demostración no dejan de estimular su búsqueda y siguen siendo objeto de investigación matemática -la expectación creada en torno a la presunta demostración del último teorema de Fermat puede ser un incentivo para estrechar el cerco a otros casos pendientes, e.g. la conjetura de Goldbach. Hay, por añadidura, suposiciones cuya verificación descansa en su rendimiento teórico o sistemático; digamos que actúan en nombre de algo como "la mejor suposición", por analogía con la llamada "mejor explicación" en la ciencia empírica. Son, por ejemplo, la correspondencia biunívoca entre los puntos del continuo y los números reales (un presupuesto básico de la geometría analítica), la hipótesis cantoriana del continuo, el axioma de elección. Hay, en fin, asunciones metateóricas que sólo gozan de plausibilidad *a posteriori* como la

## DEMOSTRACIONES CLASICAS

suministrada por coligación inductiva o por ausencia de contraejemplos, e.g. la tesis de Church-Turing -ninguna prueba nos asegurará *a priori* la correspondencia cabal entre la noción informal de lo soluble o calculable y la definición formal de computabilidad.

Nos podemos imaginar entonces una distribución de las pruebas como la siguiente: una amplia franja central de pruebas de comprobación o de refutación, flanqueada por márgenes abiertos a los extremos del espectro. En uno de los márgenes están las meras constataciones -e.g. la observación de que la serie "...7777..." aparece en el lugar 5.682 de la expansión decimal de  $\pi$  en el cómputo de Shanks-Wrench (1961). En el otro margen, se encuentran las demostraciones clásicas más fuertes. Entre ambos media esa vasta zona de mayor o menor fuerza probatoria, mayor o menor indeterminación, por donde se sitúan o transitan los casos que apuntan hacia el uno o el otro. La aplicación rutinaria de una regla de cálculo quedaría en las proximidades del margen de la constatación; los ensayos con pruebas y refutaciones consideradas por Lakatos o las asunciones relativamente fundadas, como la tesis de Church-Turing, estarían confinadas en el interior de la franja central; dentro de esta misma zona, la prueba Appel-Haken-Koch (1977) del llamado "teorema de los cuatro colores" se orientaría más bien hacia el margen de las demostraciones; puede que la prueba de Andrew J. Wiles (1993) del último teorema de Fermat, con las debidas correcciones subsiguientes, se halle en el umbral; por lo demás, la rigorización de una prueba es a veces un expediente de ingreso en este distinguido margen -véase más adelante, §6. A la luz de este enfoque gradual del campo de las pruebas matemáticas, cabe hacer tres observaciones: (a) Aunque lo veamos como una especie de continuo, no dejan de darse ciertas distancias -e.g. no se habla de un presunto "teorema de los cuatro sietes" de Shanks-Wrench, por contraste con el llamado "teorema de los cuatro colores" de Appel-Haken, y este resultado a su vez difiere de un teorema clásico en la medida en que su prueba se viene considerando inabarcable. Hay, por cierto, dos polarizaciones cuyos extremos son obviamente inconfundibles, el de las constataciones o verificaciones que se limitan a mostrar que algo es el caso y el de las demostraciones clásicas que además dan a conocer la razón de que algo sea así y no pueda ser de otra manera. (b) La existencia de pruebas más débiles no parece amenazar la existencia de otras más fuertes, ni en particular la supervivencia de una demostración clásica. En otras palabras, las nuevas concepciones "cuasi-empíricas" del conocimiento matemático vienen a desmentir la antigua identificación racionalista de este conocimiento con la demostración clásica y vienen a extender la sombra del falibilismo por las matemáticas: todos alguna vez podemos equivocarnos, tanto nosotros como nuestros ordenadores -según algunos, próximos miembros de la comunidad matemática. Pero de ahí no se sigue que nunca sepamos nada. Un matemático falibilista, al menos en sus días laborables, podrá reconocer que tiene a su disposición razones concluyentes para saber, e.g., que el conjunto de los números primos es infinito, bien que aún no las tenga para determinar su distribución -para decidir acerca de la hipótesis de Riemann. (c) La idea de demostración matemática, en general, se presta a una caracterización abierta antes que a una caracterización cerrada. Este punto merece una consideración especial por diversos motivos. Uno estriba en el hecho de que la imagen del mundo de las pruebas matemáticas es relativa al punto de vista adoptado: por ejemplo, si nos atuviéramos a un simple criterio de certidumbre, podríamos correr las constataciones de los cálculos "a mano" o por ordenador hacia el mismo extremo atribuido a las demostraciones clásicas con el

agravante de que algunas de estas demostraciones nos parecerían menos evidentes y otras enteramente ociosas. Pero existen motivos mucho más relevantes. Veamos.

Hay nociones susceptibles de caracterización *cerrada*. Son caracterizaciones cerradas, por ejemplo, la determinación de una clase por enumeración y denotación exhaustiva de sus miembros, la definición de un concepto en términos de condiciones necesarias o suficientes, una definición recursiva por inducción. Hay, en cambio, nociones que demandan otro género de caracterización, una caracterización *abierta*. El caso más socorrido es la noción de *juego*: su determinación, si puede decirse así, procede sobre la base de unos juegos paradigmáticos (e.g. póker, ajedrez, ruleta...) para luego extenderse a un número indefinido de actividades que consideramos juegos en virtud de su mayor o menor afinidad, o su aire de familia, con los primeros (extensión donde caben no sólo nuevos juegos, como los de rol, sino la vasta gama de actividades que puede cubrir una invitación del tenor de "vamos a jugar a..."). Los juegos paradigmáticos se distinguen tanto por su calidad de ejemplos típicos (ejemplares de juegos de cartas, tablero, azar, etc.), como por su contribución a formar y determinar la idea misma de juego: no sólo nos deparan una noción genérica de qué es jugar, sino que el simple hecho de que uno de ellos dejara de ser un juego supondría un cambio sustancial en nuestra idea de juego. Pero no nos facilitan un listado preciso de criterios inequívocos o de características suficientes para identificar cualquier otra actividad más o menos afín como juego o como no-juego. Con todo, la noción genérica que envuelven nos permite convenir en que mientras no cambie nuestra idea de jugar, si un juego de rol por ejemplo incluye como jugada el asesinato de personas de carne y hueso, entonces pasa a convertirse en otra cosa que un juego. En suma: sin una definición cerrada de la naturaleza propia y exclusiva de los juegos, nos las arreglamos en la práctica para discernir algunos casos típicos de juego y de no-juego. En honor de Wittgenstein, que analiza la noción de juego de lenguaje bajo este punto de vista en sus *Investigaciones filosóficas* (I. §§66-71), llamaré *W-paradigmáticas* estas nociones de caracterización abierta que abarcan unos contados casos típicos y otros muchos casos diversos que guardan un aire de familia con los primeros.

Proyectemos sobre la prueba matemática esta perspectiva. Para empezar, nos libra de confundir el concepto formal de derivación con la noción común de demostración matemática. El primero admite una caracterización *cerrada* en términos harto familiares. Sea  $S$  un sistema axiomático formalizado en el lenguaje  $L$ , donde hay un conjunto recursivamente definible de expresiones de la categoría de las fórmulas enunciativas (fbfs).  $S$  cuenta, a su vez, con un conjunto finito de axiomas, o enunciados primitivos, y un conjunto expreso de reglas de transformación que permiten obtener un enunciado derivado a partir de uno o más enunciados previamente dados. Pues bien,  $D$  es una *derivación* del enunciado  $\alpha_n$  en  $S$  si y sólo si  $D$  consiste en una serie de enunciados  $\alpha_i \in L$  ( $1 \leq i \leq n$ ), donde cada uno de los miembros o es un axioma de  $S$ , o resulta de la aplicación de una regla de transformación de  $S$  a uno o más miembros precedentes, hasta concluir en  $\alpha_n$ . (También cabe definir en términos recursivos, por inducción más una cláusula de cierre, el concepto de derivación no finita.)

Me temo, en cambio, que la noción común y general de demostración matemática sólo se presta a una caracterización *abierta*. En principio, la comunicación ordinaria de las pruebas también supone aquí un trasfondo tácito. Además el desarrollo del conocimiento matemático nos ha proporcionado paradigmas de diversos tipos: demostración euclídea,

## DEMOSTRACIONES CLASICAS

demostración algebraica, prueba por casos, prueba por inducción, reducción por diagonalización, etc. Por otro lado, como ya he sugerido, el campo de la prueba matemática se asemeja a un espectro en uno de cuyos extremos cabe situar el polo de las demostraciones clásicas. Es difícil trazar un perfil único y preciso de demostración capaz de albergar todas las variantes que pueden presentar un aire de familia. Pero es fácil señalar algunos casos típicos o *W-paradigmáticos*, como los ejemplos de demostraciones clásicas que ofrecen los libros de introducción o los ensayos sobre la índole de las matemáticas. Y tampoco es imposible discernir, por relación a ellos, otras posibles muestras más o menos demostrativas o no demostrativas en absoluto: la sanción de una proposición como un teorema por parte de la comunidad matemática no suele ser indiscriminada. La discusión misma de los casos problemáticos, -¿la prueba por ordenador del resultado de los cuatro colores es efectivamente una demostración? ¿la prueba de Wiles del último teorema de Fermat puede ser efectivamente una demostración clásica?-, sólo tiene sentido sobre el supuesto de que tal discriminación es viable.

Por otro lado, esta perspectiva nos permite comprender la posibilidad de integración de nuevas formas de demostración y de convivencia entre diversos tipos de pruebas, incluida la supervivencia de las demostraciones clásicas en la era del ordenador. Los juegos de dados, por ejemplo, datan de tiempos inmemoriales -los "kyboi" ya eran muy populares entre los antiguos griegos (cf. e.g. Heródoto I.94). Sin embargo, no parece que los modernos juegos de consola o de rol sean incompatibles con los dados o amenacen con cambiar nuestra idea de juego hasta el punto de que el tirar los dados deje ser una manera de jugar. ¿Por qué no puede ocurrir algo parecido con unos ejemplares *W-paradigmáticos* de demostración tan antiguos como algunas demostraciones clásicas? De ahí se desprende además una diferencia entre estos paradigmas y otros harto familiares para la filosofía y la historia de la ciencia de nuestros días: los "paradigmas" en el sentido considerado por la concepción de los cambios y las "revoluciones científicas" de Kuhn o *K-paradigmas*. Se supone que una "revolución" en una disciplina científica está marcada, entre otras cosas, por un cambio de *K-paradigma* en el modo de concebir el campo de estudio y en el modo de practicar la disciplina afectada, o por cambios correlativos en sus ejemplares o aplicaciones *K-paradigmáticas*. Una de los casos más afamados entre los que adoptan esta perspectiva kuhniana en la historia de las matemáticas es la revolucionaria aparición de las geometrías no-euclidianas. A esta luz, resulta que este cambio de *K-paradigma* en geometría -aun alumbrando nuevos métodos de prueba, una nueva concepción y modos nuevos de cultivo de la disciplina-, no ha comportado una revolución *W-paradigmática* pareja en la idea de demostración matemática: en este sentido, los nuevos *W-paradigmas* no han enterrado a los clásicos. Aunque los *Elementos* son desde hace tiempo una lengua matemática muerta -y lo que hoy suele entenderse por "geometría elemental" es una teoría formalizada en un lenguaje lógico de primer orden-, algunas de sus proposiciones siguen siendo ejemplos típicos, *W-paradigmas*, del significado de "Q.E.D." en una comunidad matemática. Más aún: cabe apostar a que lo seguirán siendo a menos que cambien radicalmente nuestras ideas sobre la demostración efectiva y su característica necesidad racional.

Esta caracterización abierta parece contravenir ciertas suposiciones muy extendidas hoy en medios lógico-matemáticos. Se supone que existen demostraciones matemáticas *genuinas*, al margen del contorno un tanto borroso de las pruebas y sus polarizaciones

paradigmáticas, y esta condición puede apreciarse de manera cabal y precisa a través de su rigorización, en particular a través de su formalización. En otras palabras, la caracterización abierta de la demostración sólo sería un correlato preformal o informal, histórico o retórico de su debida caracterización formal cerrada. En último término, la manera de salvar una pretendida demostración es hacerla más rigurosa y el modo de aprender más cosas sobre la demostración matemática es desarrollar y refinar nuestros métodos de formalización metamatemática.

Me temo que este punto de vista tiende a pasar por alto los aspectos epistémicos y pragmáticos que forman parte de la idea común y los usos reales de la demostración. Aun así, plantea ciertas cuestiones interesantes que guardan relación con el sentido y el alcance de nuestros procedimientos de rigorización y formalización. En cualquier caso, apunta al núcleo sustancial de los problemas que laten en las discusiones actuales en torno a la idea clásica de demostración: los problemas de reconocimiento. A fin de cuentas, el camino mismo de los ejemplares *W-paradigmáticos* y las muestras de mayor o menor afinidad nos conduce al mismo punto: ¿cómo reconocemos que una prueba constituye en efecto una demostración? Se abre tentadora la vía de la rigorización. Veamos qué nos depara.

6. ¿Cómo reconocemos una demostración? De acuerdo con una venerable tradición que alcanza nuestros días, se supone que basta realizar la deducción pertinente: una demostración se da a conocer a sí misma cuando la seguimos y entendemos, por el mero hecho de hacerla. La virtud negativa de esta suposición es clara: nunca será preciso pedir algo así como la demostración de una demostración lograda -tal exigencia haría feliz a cualquier escéptico. Pero sus virtudes positivas, en orden a la identificación de pruebas de nuevo cuño o con vistas a la conversión de pruebas prometedoras en demostraciones rigurosas, resultan mucho más oscuras. Hace 40 años todavía cundía la ilusión de que había criterios eficaces al respecto: para hacer rigurosa una deducción, se la introduce en un sistema axiomatizado y se formaliza el sistema en los términos de un lenguaje lógico de primer orden; de ahí saldrá una cadena consistente y completa de derivaciones, entre las que se encuentra la prueba original transfigurada en deducción convalidada y en demostración cumplida.

Las cosas ya no parecen tan simples. Hoy tendemos a relativizar la noción de rigor: el rigor se estima por relación a alguna norma o criterio dentro de una escala de graduación. Cuando se declara que una prueba es rigurosa, se sobreentiende que lo es con respecto a un estándar de justificación, de explicación o de cogencia, y en un grado suficiente o, al menos, superior al de otras pruebas deductivas objeto de comparación. Así pues, es preferible hablar no tanto de rigor como de *rigorización*.

Intentaré precisar el sentido de este término. Supongamos una prueba deductiva,  $D$ . Una rigorización de  $D$  es una demostración correlativa  $D^*$ , capaz de mejorar, explicar o, al menos, convalidar el valor demostrativo efectivo o virtual de  $D$ . (Entiendo que una prueba deductiva tiene un valor demostrativo virtual si es convincente por su eficacia o rendimiento tácitos, antes que por su constitución expresa: e.g. presenta lagunas en algún paso deductivo o deficiencias en su estrategia discursiva) Según esto, una rigorización  $D^*$  consiste en una demostración efectiva que incluye sustancialmente las razones y conclusiones de la deducción original, aunque no preserve su forma lógica, y cumple satisfactoriamente ciertos estándares de justificación, explicación o cogencia vigentes en

## DEMOSTRACIONES CLÁSICAS

el marco discursivo dado. Con esto quiero decir que  $D^*$  es preferible como demostración a  $D$  y podemos dar razón de esta preferencia.

Recordemos por ejemplo la famosa prueba de Leibniz de la proposición " $2 + 2 = 4$ ". Discurre como sigue (*Nuevos ensayos...*, IV, vii §10):

(...) El que dos y dos son cuatro no constituye una verdad completamente inmediata. Es posible demostrarla y he aquí la manera:

*Definiciones:* 1) *Dos* es uno y uno.

2) *Tres* es dos y uno.

3) *Cuatro* es tres y uno.

*Axioma:* Poniendo cosas iguales una en lugar de la otra, la igualdad se mantiene.

*Demostración:*

|   |           |
|---|-----------|
| 2 y 2 es 2 y 1 y 1 (por la def. 1)..... | 2 + 2     |
| 2 y 1 y 1 es 3 y 1 (por la def. 2)..... | 2 + 1 + 1 |
| 3 y 1 es 4 (por la def. 3).....         | 3 + 1     |
|   | 4         |

Luego, en virtud del axioma, 2 y 2 es 4, como había que demostrar.

En 1884, Frege (*Fundamentos de Aritmética*, I §6) hizo notar que esta prueba contiene una laguna: descansa implícitamente en la proposición " $2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1$ ". Para ser una demostración efectiva debería contar con el añadido expreso de esta premisa como caso particular de la asociatividad,  $a + (b + c) = (a + b) + c$ , que rige la adición aritmética. Entonces Frege propone una rigorización lógica de esta y cualquier otra prueba de la misma forma, sobre la base explícita de la ley general de asociatividad de la suma, a saber:

$$\forall xyz [(x + (y + z)) = ((x + y) + z)]$$

Conviene reparar en que una rigorización no siempre es una muestra de pedantería: aquí, al menos, no lo es. Si no se aduce la asociatividad, no cabe generalizar la prueba de Leibniz a cualquier otra fórmula equiforme de adición y, además, la operación aritmética involucrada resulta equívoca: las definiciones y el axioma dados no excluyen otra interpretación en términos de sustracción y, por ende, la construcción de una contrapueba como la siguiente:

$$"0 = 2-2 \text{ (def. 1); } -2 = 0-2 \text{ (def. 2); } -4 = -2-2 \text{ (def. 3). Luego, } \text{¿}0-0 = -4\text{?}"$$

pues, según es bien sabido, la sustracción, por contraste con la adición, no es asociativa.

Poincaré (1894, 'Sobre la naturaleza del razonamiento matemático', §2), volviendo por su cuenta sobre ese mismo pasaje de Leibniz, presentó otra rigorización de la prueba. Se trata de una rigorización no tanto lógica como matemática, en la medida en que aduce no la condición general de asociatividad sino una definición de la operación aritmética  $x + 2$  en los términos:  $x + 2 = (x + 1) + 1$ . Podemos tomar esta presentación por una rigorización teórica que viene a justificar la prueba original de Leibniz en el mismo plano de discurso -aunque, por cierto, Poincaré trate con displicencia esta verificación particular de las propiedades de la suma. Así pues, caben diversos tipos y modalidades de rigorización.

Pero la situación puede complicarse un poco más si tomamos conciencia tanto de la variedad de los paradigmas típicos de la demostración, como de la variación histórica de las normas y estándares de rigor<sup>16</sup>. Recordemos, en el primer caso, las diferencias entre

una demostración euclídea que discurre a través de operaciones informales de instanciación en un diagrama y de generalización, y así quiere *hacer ver* la verdad de una proposición o el hecho de una construcción, frente a una demostración algebraica más abstracta que funciona por definiciones y sustituciones de expresiones simbólicas, o frente a una demostración inductiva que descansa en una idea de la serie numérica ajena a la aritmética griega. Las variaciones, en el segundo caso, aún podrían ser más llamativas y patentes. Los pautas del rigor y los modelos de rigorización, pese a su constitución estructural o formal y a sus pretensiones de intemporalidad, no han dejado de ser carne de historia. Las pruebas, en general, son hijas de los tiempos y esta filiación se hace sentir particularmente en nuestros estándares de rigor y en nuestros patrones de reconocimiento. Por ejemplo, el tipo de prueba geométrica practicado por Euclides en los *Elementos* representó para la matemática de la escuela alejandrina el estándar del rigor demostrativo; a esta luz, las pruebas mecánicas avanzadas por Arquímedes en la solución de algunos problemas geométricos, no podían ser vistas como demostraciones ni por su mismo autor; sin embargo, algunos vicios atribuidos entonces a este "método mecánico" fueron luego vindicados como virtudes por la física matemática clásica y otros, como la suposición de una composición "infinitesimal", han hallado una justificación en el "análisis no estándar" de nuestros días, mientras que las pruebas diagramáticas euclídeas se ven ahora algo defectuosas, demasiado deudoras de conocimientos y supuestos tácitos, harto ingenuas para unos ojos educados en la axiomática abstracta o estructural de los *Fundamentos de geometría* de Hilbert y en los métodos de formalización subsiguientes. Para colmo, la variedad de los paradigmas y la variación de los criterios de rigor de la prueba demostrativa también alcanza a los refinamientos metódicos y a las reconstrucciones lógicas; marca no sólo el uso de la demostración, sino su análisis; condiciona no sólo el sentido del rigor subyacente en una época, sino las *rigorizaciones* explícitas.

Recapitemos. Una rigorización puede mejorar, explicar o convalidar la prueba correlativa bien en el sentido de desarrollar o articular mejor la estrategia teórica de la deducción original, bien en el sentido de desvelar o refinar su estructura lógica, o bien en todos estos sentidos; a veces, una rigorización puede adoptar incluso otra estrategia teórica o lógica alternativa. Doy por descontado (cf. supra §3, [c]) que no cabe reconocer una demostración si no es comprendida globalmente, como un discurso dirigido a establecer que algo es el caso por las razones pertinentes, o no se entienden cada uno de los pasos deductivos que van determinando el logro de este objetivo. Con vistas a lo primero quizás importe más considerar la estrategia teórica; con vistas a lo segundo, la estrategia lógica. Sea como fuere, una rigorización trata de mejorar nuestro conocimiento global y/o procesual de una prueba demostrativa. Por extensión, también se podría llamar "rigorización" a lo que sería no ya una demostración propiamente dicha sino más bien su representación formal -o informática- como una derivación en un formalismo lógico -o en un programa.

La "rigorización", en este sentido extendido, significa para algunos el certificado del rigor absoluto. Pero, en realidad, su significación es más problemática y compleja por varios motivos. Baste mencionar: 1/ La existencia de una correspondencia cabal entre la deducción original, en su propio marco discursivo, y su versión en los términos de una derivación formal o automatizada, es ya problemática de suyo; como en otros casos

similares, nada nos asegura en principio el ajuste fino entre, por un lado, las nociones y el hilo discursivo de una demostración convincente y, por otro lado, las expresiones y las transformaciones definidas en un lenguaje formalmente preciso. 2/ Ningún formalismo lógico es un código vacío; todo lenguaje lógico envuelve una teoría y un método analíticos. Y este análisis también acusa la variedad de unos paradigmas y la variación de unos patrones históricos de "forma lógica". Consideremos, por ejemplo, el análisis de los pasos elementales y de la secuencia deductiva global que nos permite convalidar o mostrar la validez de una prueba deductiva. Un punto históricamente sensible es la noción misma de "paso (o deducción) elemental": consistía, hace algún tiempo, en una inferencia inmediata o en un silogismo; luego, como previó Leibniz, a través del modelo de la demostración algebraica también vino a ser una sustitución de términos en fórmulas de identidad; de ahí pasó a generalizarse como una transformación que sólo exige el uso de una regla; en nuestros días, se trata más bien de una deducción en nombre de un operador o un término "lógico" (e.g. en la introducción o la eliminación de un conector o cuantificador estándar). Pero, en fin, todavía no tenemos una demarcación fundada, uniforme y general entre los términos considerados "lógicos" y los considerados "extra-lógicos", de modo que la rigorización formalizada de la relación misma de "*seguirse lógicamente de*", i.e. el concepto preciso y adecuado de *consecuencia lógica*, es una cuestión todavía pendiente de solución<sup>17</sup>.

En todo caso, hay quienes parecen considerar que sólo hay rigorizaciones lógicas y formalizadas. Otros han dictaminado que sólo hay rigorizaciones por axiomatización. Pero, por fortuna, siempre han existido muchos más recursos metódicos que los sancionados por una metodología: ha habido y hay, de hecho, rigorizaciones de muchos y muy diversos tipos e, incluso, de dispar fortuna. A veces, por añadidura, no es fácil conciliar el rigor intuitivo y los rigores teórico y lógico, en especial cuando median consideraciones de familiaridad, simplicidad, elegancia. Entonces puede ocurrir que una prueba menos rigurosa, pero muy familiar, sea mucho más conocida que una alternativa mejor que podría describirse incluso como una rigorización de la primera. Por ejemplo, la tradicional prueba indirecta, por reducción al absurdo, de la irracionalidad de  $\sqrt{2}$  siempre ha representado un modelo de rigor intuitivo; así ha sido incluso en las versiones que podríamos tomar como casos degenerativos en la medida en que no muestran la generalidad o la necesidad debidas -e.g. la versión ofrecida por G.H. Hardy en su (1940) *Apología del matemático*. Por contra, una rigorización de L. Löwenheim (1946) bajo la forma de deducción directa, más interesante e informativa, no ha pasado de ser una curiosidad técnica prácticamente ignorada (vid. supra nota 9). En estos avatares de la fortuna pueden influir consideraciones prácticas del tipo: "¿Para qué rigorizar una demostración que ya se considera plenamente convincente?". Una respuesta es: "Para ampliar el alcance teórico o la significación sistemática del teorema, o reorganizar el contexto deductivo afectado". (La prueba de Löwenheim sería un ejemplo de las dos virtudes primeras). Pero no faltan avatares de otro género en la accidentada historia de las rigorizaciones. En ocasiones, una rigorización lógica puede suponer la ruina de la estrategia teórica y sistemática de la demostración original, como ocurre con el análisis lógico medieval -en los términos de una contienda dialéctica- de ciertas pruebas geométricas de Euclides y Arquímedes (cf. e.g. la versión de la prop. I de *Sobre la medida del círculo* en la *Quaestio de quadratura circuli* de Alberto de Sajonia, ed. M. Clagett

(1964), incluida en sus *Studies in Medieval Physics and Mathematics*, London, Variorum Reprints, 1979; XI, 60-40). Por haber hay, en fin, "rigorizaciones" *honoris causa*, puramente convencionales si no retóricas, como algunas reformulaciones lógicas sugeridas antaño al calor de la silogística o del "more geometrico", o como algunas otras practicadas hoy en nombre de la lógica de primer orden.

De todo esto, contra lo que parecen esperar algunos críticos de la formalización demasiado precipitados, no se sigue la incapacidad de la lógica formal para lograr una demostración propiamente dicha o una demostración de corte clásico. Consideremos *lógica* una deducción  $D_L$  cuya línea discursiva depende esencialmente de los términos u operadores *lógicos* presentes en ella. Hoy día, precisamente, se están estudiando algunas características de los operadores lógicos bastante afines a la cogencia deductiva propia de una demostración informal clásica. Por ejemplo, según la "Teoría General de la Demostración" de D. Prawitz, desarrollada a partir de los sistemas de deducción natural de Gentzen, las reglas de introducción y de eliminación de los operadores lógicos (conectores, cuantificadores) han de obedecer determinadas condiciones de legitimidad y de operatividad deductivas, dentro del marco sistemático de una relación de deducibilidad cuya definición estructural responde a la prevista en los cálculos  $L$  del propio Gentzen. Sobre esta base, un enunciado  $\alpha$  es deducible de un conjunto de enunciados  $\Gamma$  si y sólo si hay un procedimiento que transforma las deducciones  $D_L$  de los enunciados de  $\Gamma$  en un proceso normalizado de deducción  $D_L$  de  $\alpha$ . Sea  $\alpha'$  una tesis lógica, i.e. un enunciado deducible del conjunto vacío de premisas. Una demostración de  $\alpha'$  consiste en una transformación de las deducciones de las subfórmulas enunciativas constituyentes de  $\alpha'$  en una deducción normal de  $\alpha'$ . Viene a ser una construcción efectiva de  $\alpha'$  a partir de las deducciones básicas que conforman su propia estructura lógica. Y las virtudes de este método de normalización no se agotan en el logro de demostraciones lógicas constructivas. Además de facilitarnos, por ejemplo, rigorizaciones no forzadas de demostraciones de índole intuicionista, nos permite investigar algunas características estructurales de las pruebas deductivas, como su correspondiente grado de complejidad o la identificación de una misma demostración bajo deducciones diversas.

¿Qué ocurre si avanzamos en la dirección de la formalización y pasamos de este plano de la demostración lógica al plano metateórico de una lógica de la demostrabilidad?

7. Una directriz del programa de Hilbert era la pretensión de que toda demostración matemática genuina es (meta)matematizable. Según se entienda esto, se apreciará en buena medida la incidencia de los teoremas de limitación de Gödel (1931) sobre el programa. En todo caso, de Gödel (1931) resulta que la noción " $x$  es una *demostración* de  $y$ " es recursiva primitiva -aunque no lo sea así la noción de ser *demostrable*. En esta línea, lo menos que cabe esperar de una demostración matemática es la existencia de un procedimiento efectivo para determinar si su transcripción textual como una sucesión regulada de enunciados es una demostración y, si lo es, de qué enunciado. Gödel, como es sabido, opera sobre la base de un sistema  $\Sigma$  capaz de expresar la aritmética elemental de Peano y cuenta con un método de codificación numérica de su sintaxis.

Rosser, en su extensión de 1936 y su exposición de 1939 de los teoremas de Gödel, explicita un lema de diagonalización que irá ganando mayor relieve y generalidad con el tiempo: dada una fórmula enunciativa cualquiera  $\beta(v)$ , con  $v$  como única variable libre, hay un enunciado  $\alpha$  tal que  $\Sigma \vdash \alpha \leftrightarrow \beta(\ulcorner \alpha \urcorner)$  -donde  $\ulcorner \alpha \urcorner$  es el número Gödel de  $\alpha$ . Hoy

diríamos que este enunciado es punto fijo de  $\beta(v)$  y llamaríamos "criterio de expresabilidad" a otra precisión de Rosser<sup>18</sup>: una fórmula enunciativa  $B(v)$ , con  $v$  como única variable libre, expresa la deducibilidad (" $v$  es deducible") en  $\Sigma$  cuando y sólo cuando se atiende a esta condición: para cualquier enunciado  $\alpha$ ,  $\Sigma \vdash B(\ulcorner \alpha \urcorner)$  si y sólo si  $\Sigma \vdash \alpha$ . Desde estos supuestos se llega hasta el primer resultado de limitación: hay un enunciado  $\alpha$  que satisface la condición  $\Sigma \vdash \alpha \leftrightarrow \neg \beta(\ulcorner \alpha \urcorner)$ , y dicho enunciado es indecidible ( $\alpha$  viene a expresar literalmente su no deducibilidad en  $\Sigma$ , y en  $\Sigma$  no resulta deducible ni  $\alpha$  ni su negación). Ahora bien, como la consistencia de  $\Sigma$  puede entenderse bajo la condición:  $\Sigma \vdash \text{Cons}(\Sigma) \rightarrow \neg \beta(\ulcorner \alpha \urcorner)$ , tampoco cabría deducir en  $\Sigma$  la consistencia misma de  $\Sigma$ : segundo teorema de limitación.

En la jerga lógico-matemática el ser deducible en un sistema axiomático equivale a ser demostrable. De manera que los resultados de Gödel (1931) marcan limitaciones lógicas de la demostrabilidad en cualquier sistema de la capacidad expresiva y deductiva de  $\Sigma$ . Sin embargo, la primera referencia expresa a una lógica de la *demostrabilidad* aparece en una axiomatización de Gödel (1932) de la noción  $Bp$ , " $p$  es demostrable". Sobre la base de la lógica estándar de conectores de enunciado, esta noción responde a los axiomas: 1.  $Bp \rightarrow p$ ; 2.  $Bp \rightarrow (B(p \rightarrow q) \rightarrow q)$ ; 3.  $Bp \rightarrow BBp$ ; y a la regla: de  $\alpha$  puede inferirse  $B\alpha$ . Gödel sugiere que  $Bp$  también puede leerse en términos modales como  $Np$  (" $p$  es necesario") y observa que esta lógica de la demostrabilidad no puede aplicarse sin restricciones a un sistema formal dado  $\Sigma$ : en particular, la fórmula derivable  $B(Bp \rightarrow p)$  habría de resultar inválida pues supondría la demostrabilidad en  $\Sigma$  de su propia consistencia (contra el segundo teorema).

Más adelante se avanzan otras dos sugerencias de una suerte de noción absoluta de demostrabilidad. Una, más bien incidental, procede de la contribución del mismo Gödel en 1946 al bicentenario de Princeton y remite la noción precisa de demostrabilidad a una fundación conjuntista en un axioma fuerte de infinitud pendiente de investigación. La otra se debe a J. Myhill (1960, 'Some remarks on the notion of proof', *The Journal of Philosophy* LVII/14, 461-471) y discurre al hilo de cierta lectura de los resultados de Gödel (1931). Se trata de una lectura no sintáctica ni semántica, sino *apodíctica*, conforme a la cual Gödel ha establecido, para  $\Sigma$  y cualquier otro sistema del mismo género, la existencia de pruebas deductivas que no son formalizables en  $\Sigma$ , en particular la prueba siguiente: "Los axiomas de la aritmética elemental son verdaderos y las reglas de inferencia preservan la verdad. Luego, todo teorema de la aritmética elemental es verdadero. Por tanto, " $0 = 1$ " no es un teorema de la aritmética elemental. Por consiguiente, un determinado enunciado  $p$  (la aritmetización del enunciado de que " $0 = 1$ " no es un teorema) es verdadero" (*l.c.*, 463). Myhill propone una axiomatización de la noción  $Bp$  de Gödel (1932) con dos restricciones sustanciales: queda descartado un esquema axiomático de la forma de 3.,  $Bp \rightarrow BBp$ , porque permitiría demostrar algún enunciado  $p$  que afirmara su propia indemostrabilidad;  $B$  sólo opera sobre, o se predica de letras esquemáticas ( $p, q, \dots$ ) referidas a enunciados aritméticos, pero ningún enunciado aritmético propiamente dicho contiene a su vez el operador o predicado metateórico  $B$ , de modo que, en general, también se excluye la aparición reiterada de  $B$  en cualquier fbf. La propuesta de Myhill no parece muy afortunada y, en todo caso, pasó inadvertida. Myhill, como tantos otros -e.g. R. Montague: 1963, 'Syntactical treatments of Modality, with colloraries on reflexion principles and finite axiomatizability', *Acta Philosophica*

*Fennica XVI*, 153-167-, se movía llevado por la corriente de los resultados de limitación de Gödel, pero el análisis la demostrabilidad ya había tomado en la década anterior otro rumbo.

En la década de los 50, había nacido lo que hoy entendemos como lógica de la *demostrabilidad* de modo un tanto ocasional, a raíz de un problema planteado por Henkin en la onda del primer teorema de limitación de Gödel, y con una dirección imprevista -al menos en la perspectiva de una suerte de demostrabilidad general o absoluta. Hoy podemos ver que el lugar donde se gesta su historia es este interrogante de Henkin (1952):

Si  $\Sigma$  es un lenguaje formal estándar idóneo para la teoría recursiva de los números, puede construirse una fórmula (con un determinado entero  $q$  como su número Gödel) que exprese la proposición de que la fórmula con el número Gödel  $q$  es demostrable en  $\Sigma$ . ¿Esta fórmula es demostrable o es independiente en  $\Sigma$ ? [Prob. 3]<sup>19</sup>.

También podemos notar algún signo de un parto difícil. Kreisel (1953, 'On a problem of Henkin's', *Proc. Netherlands Acad. Sciences* 56, 405-406) viene a contestar: según, depende de cómo se exprese la demostrabilidad y de la fórmula construida para expresar su propia demostrabilidad. Podemos, en fin, registrar el nacimiento de la historia de esta lógica con la solución de Löb (1955), bajo un planteamiento más general propiciado por el mismo Henkin como comadrón -i.e. *referee* del artículo de Löb para el *Journal of Symbolic Logic*<sup>20</sup>. La respuesta de Löb envuelve: (a) La introducción de unas condiciones que van a determinar el concepto de *demostrabilidad* operativo a lo largo de esta historia. Sea *Dem* el prefijo (operador o predicado) de *demostrabilidad* y sean  $\alpha, \Sigma$  unos enunciados cualesquiera. Entonces:

- C1. si  $\Sigma \vdash \alpha, \Sigma \vdash Dem(\ulcorner \alpha \urcorner)$  ;  
 C2. si  $\Sigma \vdash Dem(\ulcorner \alpha \urcorner)$  y  $\Sigma \vdash ((Dem(\ulcorner \alpha \urcorner) \rightarrow Dem(\ulcorner \beta \urcorner)), \Sigma \vdash Dem(\ulcorner \beta \urcorner))$  ;  
 C3.  $\Sigma \vdash Dem(\ulcorner \alpha \urcorner) \rightarrow Dem(\ulcorner Dem(\ulcorner \alpha \urcorner) \urcorner)$  .

(b) La solución al problema específicamente planteado por Henkin. (c) La solución general del problema para los enunciados de la forma  $\Sigma \vdash \alpha \leftrightarrow Dem(\ulcorner \alpha \urcorner)$ . (d) La generalización ulterior que hoy se denomina "teorema (o regla) de Löb": si  $\Sigma \vdash Dem(\ulcorner \alpha \urcorner) \rightarrow \alpha, \Sigma \vdash \alpha$ . Años más tarde, entre 1966 y 1967, Kripke dio a conocer otra derivación de este resultado a partir del segundo teorema de limitación de Gödel por vía de contraposición: si no es el caso de  $\Sigma \vdash \alpha$ , tampoco es el caso de  $\Sigma \vdash Dem(\ulcorner \alpha \urcorner) \rightarrow \alpha$ <sup>21</sup>. Ahora es de dominio público que los resultados de Gödel y de Löb son técnicamente equivalentes. Pero, en el presente contexto, el teorema de Löb cobra cierta significación especial: acota el alcance de un supuesto de la forma del axioma 1. de Gödel (1932); no sólo asegura que la consistencia de  $\Sigma$  es indemostrable en  $\Sigma$ , sino que caracteriza los casos de consistencia demostrables en una teoría interesante dada como aquéllos que resultan trivialmente demostrables. Marca, en fin, el alcance y los límites de nuestras posibilidades de reconocimiento de lo demostrable: siempre podremos reconocer la demostrabilidad de un aserto (y a partir de ahí su "verdad" sistemática) al encontrarnos con él en calidad de teorema -según prevé una regla del tenor: si  $\Sigma \vdash \alpha$ , entonces  $\Sigma \vdash Dem(\ulcorner \alpha \urcorner)$ -, pero sólo en ese caso, sólo si es en efecto demostrable.

La fortuna de la lógica de la demostrabilidad ha venido ligada desde los años 70, dentro del marco general de los resultados de limitación, a otros desarrollos colaterales en el

## DEMOSTRACIONES CLASICAS

análisis de la modalidad y de la autorreferencia, y en el estudio de álgebras diagonalizables, hasta adquirir la forma madura que presenta el sistema *GL* -en honor de Gödel y Löb-, y sus extensiones y proyecciones, en George Boolos 1993, *The Logic of Provability*<sup>22</sup>. La historia de estos desarrollos y confluencias haría las delicias de cualquier historiador de la ciencia moderna interesado tanto en los avances técnicos y heurísticos, como en los aspectos sociales e institucionales. Por lo demás, el sistema matriz *GL*, -o cualquier otro similar, fundado sobre la lógica primaria y unas condiciones determinantes del prefijo *Dem* como las de Löb-, cumple los desiderata de un sistema lógico estándar y es, dentro de su elegancia, irreprochable. Sin embargo, en la perspectiva de una formalización metateórica de un trasunto de la idea de demostración como *demostrabilidad*, esta subespecialización lógica no parece demasiado prometedora. Cuando menos, el reciente relieve de la lógica de la demostrabilidad tiene visos de ser un subproducto del análisis de las cuestiones de autorreferencia y del estudio de las álgebras diagonalizables, antes al contrario. Y al parecer, de momento, nuestro conocimiento más sustancial de la demostrabilidad con respecto a unas teorías matemáticas formalizadas sigue siendo el que se deriva de los teoremas de Gödel y de Löb. Estos resultados vienen a reiterar que, dicho en términos genéricos e informales, podremos reconocer una demostración y un teorema probado cuando estemos ante ellos. En la lógica de la demostrabilidad, la demostración cumplida sigue manteniendo la accesibilidad que siempre le ha conferido la tradición clásica. Pero el acceso sólo se produce en los casos de prueba consumados. De modo que esta lógica nada nos dice sobre los casos problemáticos, e.g. si una proposición en tela de juicio constituye o no un teorema demostrable, ni sobre los casos pendientes e interesantes, e.g. cómo sancionar formas nuevas de prueba o cómo lograr una demostración cuando la echamos en falta.

Puede que, a fin de cuentas, no sea misión de la lógica enseñarnos a demostrar. En el mundo de la argumentación al menos, la lógica no se muestra misericordiosa: no enseña al que no sabe. (Cuando el peregrino del *Pilgrim's Regress* de C.S. Lewis acude a la Dama que personifica la lógica, en busca de sabias respuestas que sacien su sed de conocimientos, la Dama le responde: "Yo no puedo decirte lo que sé, yo sólo puedo decirte lo que sabes".) Quizás lo que debamos esperar de la *Provability Logic*, en particular, no sea otra cosa que cierta lucidez sobre nuestras posibilidades y limitaciones de reconocimiento. De modo que a las indeterminaciones pragmáticas e históricas antes apuntadas a propósito de las cuestiones de caracterización y rigorización de las pruebas demostrativas, viene a sumarse ahora esta especie de delimitación estructural de las expectativas razonables acerca de los métodos de reconocimiento más precisos y sistemáticos que, hoy por hoy, poseemos.

\* Departamento de Lógica y Filosofía de la Ciencia  
Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED)  
Ciudad Universitaria  
Senda del Rey, s/n  
28040 Madrid

## Notas

- 1 Trabajo parcialmente realizado en el marco del proyecto PS92-0031 (DGICYT).
- 2 Kline, Morris: 1980, *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre*, Madrid, Siglo XXI, 1985, pp. 377, 384. También es elocuente Michael Crowe: 1992, 'Afterword (1992): a revolution in the historiography of mathematics?', in D. Gillis (ed.): *Revolutions in Mathematics*, Oxford, Clarendon Press, 306-316.
- 3 Cf. por ejemplo Th. Tymoczko: 1979, 'The Four-Color problem and its philosophical significance', in Tymoczko (ed.): 1985, 245-266; J. Horgan: 'La muerte de la demostración', *Investigación y ciencia* 208 (1993), 70-77.
- 4 Por ejemplo, P.J. Davis y R. Hersh confían este cometido al que presentan como "el teorema más famoso según está expuesto en el libro más famoso de la historia de las matemáticas", a saber: la proposición I 47 de los *Elementos* (i.e. "el teorema de Pitágoras"). *Experiencia matemática*, Barcelona, Labor, 1988, pp. 115-116.
- 5 J.L. Chabert et al.: 1994, *Histoire d'Algoritmes. Du caillou à la puce*, Paris, Belin, ch. 4, p. 129; cf. también 'Introduction', p. 7. Naturalmente, de ahí no se sigue que Euclides ya se hiciera una idea general y precisa de *algoritmo*.
- 6 Euclides: *Elementos. Libros V-IX*, Madrid, Gredos, 1994; pp. 120-125. Hoy tiende a verse este procedimiento efectivo en términos de divisiones dirigidas a obtener el máximo común divisor: es una versión que puede prestarse a equívocos si trata de convertir la aritmética euclídea en un remedo de nuestra moderna aritmética de fracciones.
- 7 Según esta tradición, nada conocemos y verificamos mejor que los objetos que nosotros mismos podemos construir y las consecuencias deducibles de esta construcción o de nuestras operaciones subsiguientes sobre ellos. El modelo es justamente la demostración geométrica. Cf. Hobbes: *Six Lessons to the Profs. of Mathematics*, en la edic. W. Molesworth (London, J. Bohn, 1839-1845), t. VIII, pp. 183 ss. (reprod. Aalen, Scientia Verlag, 1966).
- 8 Sigo la edic. Heiberg de Euclides (Leipzig, Teubner, 1886), III, Apéndice, 27, pp. 408 y 410, con las abreviaturas normales: el símbolo '='; expresiones de la forma 'XY<sup>2</sup>' para "el cuadrado (construido) a partir de XY", y de la forma 'W:X:: Y:Z' para la proporción "como W es a X, así es Y a Z". Las referencias del tipo '[I 47]' remiten al libro y a la proposición correspondientes en los *Elementos*. Contra una interpretación bastante común, aquí no se prueba que  $\sqrt{2}$  sea un irracional ni algo acerca de nuestros números irracionales. Antes bien: (1) el objeto de la prueba es geométrico; (2) nuestro "irracional" no equivale en extensión al "álogon [sin razón expresable]" de Euclides, noción que implica una inconmensurabilidad no sólo en longitud sino en cuadrado; (3) en la medida que la matemática griega carece de nuestro concepto de número real, la idea de *álogon* de Euclides también queda lejos de coincidir intensional o conceptualmente con lo que hoy se entiende por "irracional".
- 9 La demostración directa de un resultado paralelo en la moderna teoría de los números (que la raíz cuadrada de un entero o es entera o es irracional) ha debido esperar a Löwenheim: 1946, 'On making indirects proofs direct' (edic. y trad. de W.O. Quine), *Scripta Mathematica* 28/2, 101-115. La prueba de Löwenheim supone no sólo nuestra teoría lógica de la cuantificación sino el principio de elección. Cf. L. Vega: 1990, 'La reducción al absurdo: una aproximación histórica', *Analogía* IV/2, 3-35.
- 10 "(...) Es propio del hombre instruido buscar en cada materia la exactitud en la medida en que la admite la naturaleza del asunto. Obviamente tan absurdo sería aceptar del matemático un proceder meramente suasorio como exigir al orador demostraciones estrictas" (EN., 1094b23-27). Vid. también en el mismo sentido *Metaphys.*, 995a6-13.
- 11 Cf. L. Vega: 1991, 'Argumentos, pruebas y demostraciones', in AAVV: *Perspectivas actuales de lógica y filosofía de la ciencia*, Madrid, Siglo XXI, 1994, pp. 203-221, necesitado de revisión en varios aspectos. Esta perspectiva gradual y dialéctica se remonta a Aristóteles, vid. L. Vega: 1993, 'Tà éndoxa: argumentación y plausibilidad', *Éndoxa* 1, 5-19.
- 12 Me refiero no sólo a estrategias deductivas lógicas o dialógicas como las que suelen cultivarse a título de "lógicas del diálogo" -vid. e.g. el panorama ofrecido en el monográfico *Synthese* 63/3 (1985)-, sino también a estrategias discursivas con actitudes y fines

## DEMOSTRACIONES CLASICAS

cognitivos expresos, e.g. en la línea dialéctico-epistémica del "ultimately undefeated argument" de J.L. Pollock: 1987, *Contemporary Theories of Knowledge*, London, Hutchinson, pp. 188-189.

- 13 La variante (i) corresponde a las demostraciones llamadas "quia", que incluyen diversos tipos de pruebas: "a posteriori", "por los efectos", "por los signos"; la variante (ii) corresponde a las calificadas "propter quid", donde a veces se distinguen la demostración "simple" o la "sumamente potente [potissima]". La transición del "modo material" de hablar al "formal" aparece con el s. XIV. Ockham, e.g., declara que el objeto de la demostración no es otro que una proposición, cuya necesidad estriba en no poder ser falsa (*Summa logicae*, III ii 5), y que las premisas son las causas determinantes del asentimiento firme a su aserción. Hoy en día, (i') es la noción empleada, e.g., por J. Gasser: 1989, *Essai sur la nature et les critères de la preuve*, Cousset, DelVal; mientras que G. Weaver: 1988, 'Reading proofs with understanding', *Theoria* LIV/1, 31-47, o J. Corcoran: 1989, 'Argumentations and Logic', *Argumentation* 3, 17-43, se inclinan por versiones en la línea de (ii').
- 14 Quizás sea un síntoma de la impronta de la idea clásica de demostración -por cierto. no confesada ni, al parecer, advertida-, el hecho de que haya quien considere esta cuestión como el problema epistemológico general que subyace en las paradojas Gettier, cf. e.g. S. Haack: 1993, *Evidence and Inquiry*, Oxford, Blackwell; 'Introduction', p. 7.
- 15 Cf. el instructivo C. Pereda: 1994, *Vértigos argumentales*, Barcelona, Anthropos; II C, pp. 198-224.
- 16 Si el primero en hablar expresamente de *rigorización* fue Philip Kitcher a comienzos de los 80 (e.g. en 1981, 'Mathematical Rigor -Who Needs It?', *Noûs* 15, 469-494), desde mucho antes se conocía ya la variabilidad de los estándares de rigor, vid. James Pierpont: 1928, 'Mathematical Rigor, Past and Present', *Bulletin Amer. Mathem. Society* 34, 28-53.
- 17 Cf. e.g. L. Vega: 1990, '¿La lógica da explicaciones? El caso de la relación de consecuencia', in AAVV: *Variaciones sobre la explicación*, Madrid, UNED, pp. 135-209. Han movido el asunto D. Prawitz (e.g. 1985, 'Remarks on some approaches to the concept of logical consequence', *Synthese* 62/2, 153-171) y J. Etchemendy (e.g. 1990, *The Concept of Logical Consequence*, Cambridge, Mass., Harvard University Press). Más allá de ciertos usos estandarizados en ámbitos restringidos del análisis lógico, la discusión continúa.
- 18 Cf. Rosser: 1939, 'Una exposición informal de las demostraciones de los teoremas de Gödel y del teorema de Church', in P. Castrillo y L. Vega (comps.): *Lecturas de Lógica II*, Madrid, UNED, 1984, pp. 367 (lema de diagonalización), 370 (criterio de expresabilidad).
- 19 'A problem concerning provability', *The Journal of Symbolic Logic* 17/2, 160. Henkin, en este contexto originario, no preguntaba si algún enunciado extensionalmente equivalente a la aserción de su propia demostrabilidad, es demostrable, e.g. el caso trivial:  $\Sigma \vdash o = o \leftrightarrow B(\ulcorner o = o \urcorner)$ ; ni si todos los enunciados de ese tipo son demostrables. Preguntaba si un enunciado construido en orden a expresar su propia demostrabilidad es demostrable. Las generalizaciones empiezan a aparecer con la solución del problema.
- 20 'Solution of a problem of Leon Henkin', *JSL* 20/2, 115-118.
- 21 Cf. por ejemplo C. Smoryński: 1991, 'The development of self-reference: Löb's theorem', in T. Drucker (ed.): *Perspectives on the History of Mathematical Logic*, Boston/Basel/Berlin, Birkhauser, p. 130 en particular.
- 22 Cambridge, Cambridge University Press. Sobre los principales momentos de esta corta y reciente historia, cf. C. Smoryński: 1981, 'Fifty years of self-reference in arithmetic', *Notre Dame J. of Formal Logic* 22, 357-374; 1991, 'The development of self-reference: Löb's theorem', *I.c.*, 110-133; G. Boolos y G. Sambin: 1993, 'Provability: the emergence of a mathematical modality', *Studia Logica* 50, 1-23.