LOS INFINITESIMALES COMO FICCIONES UTILES PARA LEIBNIZ: LA POLEMICA EN LA ACADEMIA DE PARIS

(*The Infinitesimals as Useful Fictions for Leibniz: The Controversy in the Paris Academy of Sciences*)

Fernando JOVEN*

Recibido: 1996.11.17.

* Seminario Mayor Agustiniano, Filipinos, 7, 47007 Valladolid.

BIBLID [ISSN 0495-4548 (1997) Vol. 12: No 29; p. 257-279]

RESUMEN: A comienzos del siglo XVIII se origina una polémica en la Academia de Ciencias de París a propósito de la fundamentación del cálculo infinitesimal. Con motivo de la misma Leibniz presentará los infinitesimales como ficciones útiles, noción que agrega polémica a la polémica y que habrá que precisar. Leibniz se desmarcará claramente de la idea de infinitesimal mantenida por sus seguidores franceses. Resultado de todo ello es un triunfo en la práctica del cálculo infinitesimal y un alto en cuanto a su fundamentación

Descriptores: cálculo infinitesimal: historia: siglo XVIII, Leibniz: cálculo, infinitesimales como ficciones.

ABSTRACT: *In the beginning of the XVIII century arises a discussion in the Paris Academy of Sciences about the justification of infinitesimal Calculus. In this line, Leibniz will present infinitesimals as useful fictions, a problematic notion that requires an accurate meaning. Leibniz does not accept the infinitesimal concept of his french followers. The result of the controversy was a triumph for Calculus, but a pause in its justification.*

Keywords: *Infinitesimal Calculus: history: XVIIIth Century, Leibniz: Calculus, Infinitesimals as fictions.*

Introducción

En la Academia Real de las Ciencias de París, entre 1700 y 1706, un grupo de matemáticos se opone tanto a la presunta falta de rigor como a los resultados del nuevo análisis[1]. Este debate incluye a Leibniz, Johann Bernoulli, Malebranche, Varignon, l'Hospital, Rolle, Fontenelle y otros. La importancia del debate no sólo se debe a que al final haya una completa victoria del cálculo infinitesimal en Francia sino principalmente al carácter de los ataques de Rolle contra la metafísica del cálculo. Dichos ataques tenían a la vez un significado matemático y filosófico[2].

Repasemos brevemente la historia[3]. En 1684 había publicado Leibniz *Nova methodus*. Hacia finales de la década de los ochenta ya tenían los hermanos Bernoulli un dominio claro del tema[4]. Ambos hermanos serán a partir de 1690 los grandes utilizadores del cálculo resolviendo con él multitud de problemas matemáticos y de otra índole[5]. En el invierno de 1691-1692 Johann Bernoulli inició en los secretos del cálculo a l'Hospital[6]. A partir de aquí, consecuencia de los diferentes cursos impartidos y de la actividad desplegada por Johann Bernoulli, un grupo de matemáticos franceses centrados alrededor de la figura carismática de Malebranche, que también estudió el tema, entró en esos años en contacto con el nuevo cálculo. Se trata de Varignon, Montmort, Carré, Reyneau, Saurin, Fontenelle y otros. Así pues la difusión del cálculo es obra de los Bernoulli, especialmente del más joven de los dos.

Los primeros textos en los que aparece el cálculo en las sesiones de la Academia de París son de mediados de 1693[7]. Parece que Malebranche tuvo un papel destacado como patrocinador de la revolución infinitesimalista en la Academia. En 1696 el marqués de l'Hospital publica el primer libro de texto sobre el tema, libro que tendrá una importancia decisiva[8]. En la Academia, bajo la dirección técnica de l'Hospital y Varignon, todo ese grupo de matemáticos tendrá que enfrentarse a un grupo de acérrimos enemigos al cálculo dirigido por Rolle, Ph. de la Hire, y Gallois. El conflicto desembocó en una situación explosiva, así de 1700 a 1706 la Academia estuvo dividida sobre el uso de las nuevas técnicas. De un lado el grupo defensor, a favor de la versión del cálculo codificada por l'Hospital y, en general, con un compromiso en favor de la existencia real de cantidades infinitesimales. Frente a ellos el partido contrario. El debate entre unos y otros se realizará en tres etapas.

1. Primera etapa: La discusión entre Rolle y Varignon

La primera fase del debate es una pugna entre Rolle[9] y Varignon[10] y tiene lugar en 1700-1701. Rolle dirige el ataque al cálculo infinitesimal en un triple frente: el cálculo no es riguroso, lleva a errores y no ha producido ninguna nueva verdad.

Rolle desarrolla en primer lugar un ataque a los fundamentos. El cálculo no es riguroso pues postula una jerarquía de diferentes órdenes de infinitos arbitrariamente grandes y pequeños. Además una cantidad dada más o menos su diferencial es igualada a ella misma, lo cual equivale a decir que la parte es igual al todo. En tercer lugar, en algunas ocasiones los diferenciales son usados como cantidades diferentes de cero y otras veces como cero absoluto. Como se ve las dos primeras objeciones están fundadas en el rechazo de la existencia de cantidades que no satisfagan el principio de Arquímedes. La primera acusación implicaba también que los infinitesimalistas no habían dado prueba de la existencia de esos órdenes diferentes de infinitos. Rolle trataba de demostrar que los diferenciales eran ceros absolutos. En palabras suyas:

> D'abord on y voit que tous ces Infinis du premier genre tels que *dx* ou *dy*, n'ayant aucune étendue réelle, tous les Infinis des autres genres ne seroient aussi que des zeros absolus dans le calcul. Toutes ces suites infinies d'Infinis, que fournit le Système, ne seroient que des riens qu'on suppose être infiniment compris dans d'autres riens[11].

Varignon, en la defensa que expone en las sesiones de la Academia, proporcionó pruebas en favor de la existencia de los infinitesimales. Así, por ejemplo, podemos dividir indefinidamente un intervalo T de tiempo en partes infinitamente pequeñas o momentos t. En un cuerpo que se mueve con velocidad constante, los espacios recorridos son proporcionales a los tiempos y puesto que el espacio recorrido en cada momento está en relación a la totalidad del espacio como un instante t lo está al tiempo total T, entonces el espacio en cada instante es un infinitesimal. Varignon usa a Newton como fuente para tratar de hacer una presentación rigurosa del cálculo.

Rolle y Varignon no se pusieron de acuerdo. Para Varignon la realidad matemática es un universo de cantidades variables, dinámicas, donde las cantidas fijas son un caso especial de las anteriores. Insistirá en la idea de que los diferenciales son cantidades tendentes a cero, no son considerados como nada, sino tendiendo a ser nada, evanescentes. Hay que verlas:

> non antequam evanescunt, non postea, sed cum evanescunt[12].

Igualmente afirma Varignon:

> Une différentielle n'arrive à zéro absolu qu'à la fin du calcul qui la considère toujours comme à la veille de s'évanouir *in puncto evanescentiae* pendant lequel point de temps (pour ainsi dire) elle est toujours reelle et indefiniment petite[13].

Esto para el finitista Rolle no tenía ningún sentido, pues él admitía un universo donde sólo había lugar para cantidades finitas y el cero. Sin posibilidad de nada más. Hay que observar que las pruebas de Varignon no son demasiado fuertes y Berkeley treinta años después seguirá con las mismas críticas a dicho tipo de afirmaciones.

Para Varignon los infinitesimales están en el límite de las magnitudes finitas. Pretende mostrar además que los infinitesimales existen, creencia común a los infinitesimalistas franceses y compartida por Johann Bernoulli, en quien posiblemente había nacido la idea. Existía el intento de dar un referente semántico a la noción formal de diferencial. Aquí surgía la coincidencia entre Rolle y Varignon pues para ambos el problema fundacional consistía en dar sentido a la teoría por medio de una ontología realista, una búsqueda de referencia en suma. Varignon buscaba un referente a dx, a fin de cuentas dx funcionaba en la ecuación como una constante numérica. Al interpretar dx en la naturaleza como un proceso, proceso por el que la cantidad x se convierte en cero, Varignon creaba así una asimetría entre el formalismo de las ecuaciones y sus referentes. La concepción de Varignon es bastante diferente a la de Leibniz. Da la impresión de ser muy newtoniana[14].

Además de su ataque a los fundamentos Rolle intentó ir más allá y pretendió dar ejemplos de un mal funcionamiento del cálculo; así en marzo y julio de ese año propone sendas curvas que se pueden resolver según los métodos de Hudde pero no con el cálculo infinitesimal[15]. Los esfuerzos de Rolle fueron en vano y los problemas planteados serán resueltos sin dificultad[16].

2. Segunda etapa: Intervención de Leibniz. Ficción racional

A finales de 1701 se hace callar a ambos polemistas y la Academia nombra una comisión que fue favorable a Rolle, pero sin llegar a dar un juicio definitivo. Gouye era uno de los tres miembros de la comisión y había atacado el cálculo en un artículo anónimo aparecido en el *Journal de Trévoux* de mayo de 1701 que tenía por fin recensionar un trabajo de Johann Bernoulli. En dicho artículo se queja de la oscuridad del nuevo método. Leibniz le contestó por medio de una carta del 29 de agosto de 1701 dirigida a Pinson y que aparecería publicada, en parte, en el número de diciembre de la revista. Tras una primera parte algo irónica, en la segunda afirma:

> Mais il aura la bonté de considérer que si les découvertes sont considérables, la nouveauté de la méthode en reléve plutôt la beauté. A l'égard de la sureté du chemin, le livre de Mr. le Marquis de l'Hospital lui pourra donner satisfaction. J'ajoûterai même à ce que cet illustre Mathématicien en a dit, qu'on n'a pas besoin de prendre l'infini ici à la rigueur, mais seulement comme lorsqu'on dit dans l'optique, que les rayons du soleil viennent d'un point infiniment éloigné, et ainsi sont estimés parallèles. Et quand il y a plusieurs degrés d'infini ou infiniment petits, c'est comme le globe de la Terre est estimé un point à l'égard de la distance des fixes, et une boule que nous manions est encore un point en comparaison du semidiamétre du globe de la Terre, de sorte que la distance des fixes est un infiniment infini ou infini de l'infini par rapport au diamétre de la boule. Car au lieu de l'infini ou de l'infiniment petit, on prend des quantités aussi grandes et aussi petites qu'il faut pour que l'erreur soit moindre que l'erreur donnée, de sorte qu'on ne diffère du stile d'Archimède que dans les expressions, qui sont plus directes dans nôtre méthode et plus conformes à l'art d'inventer[17].

Leibniz hace en este texto una justificación del cálculo apelando al principio de autoridad: Arquímedes[18]. En segundo lugar recurre al ejemplo astronómico, que ya había usado en el *Tentamen de motuum coelestium causis*, y que dio lugar a nuevas críticas. Los oponentes lo interpretaron como si los diferenciales fueran muy pequeños, cantidades constantes que están después de las cantidades finitas. Leibniz no quiere decir eso, de hacerlo caería en contradicción con afirmaciones suyas previas. Acababa de tener con Bernoulli una extensa correspondencia sobre el tema[19] y en ella Leibniz había rechazado una serie de comparaciones biológicas que le hacía Bernoulli. ¿Iba a utilizar comparaciones astronómicas que significaban los mismo? ¿Tan radicalmente cambia de opinión en algo más de dos años? Lo incomparable hay que tomarlo en sentido absoluto. El ejemplo no es más que una figura retórica. La clave del texto vuelve a estar una vez más en el supuesto de la razón: *l'erreur moindre que l'erreur donnée*[20].

De todas formas es claro que no ayudó mucho Leibniz con su respuesta a darle ante los polemistas un estatuto de ciencia rigurosa al cálculo. De hecho Varignon alarmado le escribe el 28 de noviembre de 1701:

> Soufrez que je prenne la liberté de vous asseurer moy même de mes tres humbles respects, et de vous donner avis d'un Ecrit qu'on répand ici sous vôtre nom par raport à la contestation que vous sçavez être entre M. Rolle et moy sur votre calcul qu'il prétend fautif et paralogistique. M. l'Abbé Galloys, qui est celuy qui le fait agir, repand ici que vous avez déclaré n'entendre para differentielle ou Infinement petit, qu'un grandeur à la verité tres petite, mais cependant toujours fixe et determinée, telle qu'est la Terre par raport au firmament, ou un grain de sable par raport à la Terre: au lieu que j'ay appelé Infiniment petit ou differentielle d'une grandeur, ce en quoy cette grandeur est Inépuisable. J'ay, dis-je, appelé Infini ou Indéfini, tout Inépuisable; et Infiniment ou Indéfinement petit par raport à une grandeur, ce en quoy elle est inépuisable. D'ou j'ay conclu que dans le calcul differentiel, Infini, Indéfini, Inépuisable en grandeur, plus grand que quelque grandeur qu'on puisse assigner, ou Indéterminablement grand, ne signifient que la même chose, non plus que Infiniment ou Indéfiniment petit, plus petit que quelque grandeur qu'on puisse assigner, ou Indéterminablement petit. Je vous supplie, Monsieur, de vouloir bien m'envoyer vôtre sentiment sur cela, affin d'arrêter les enemis de ce calcul, qui abusent ainsy de vôtre nom pour tromper les Ignorans et les Simples[21].

Varignon le pide una respuesta urgente pues:

> Vous y dites seulement (autant que je m'en peux souvenir) que vos differens genres d'infinis, ou d'infinement petits, se doivent regarder comme l'on fait d'ordinaire le firmament par raport à la Terre, et la Terre par raport à un grain de sable: de sorte que par raport au firmament la Terre seroit une differentielle du premier genre, et un grain de sable, une du second. Comme je ne pus nier que cet Ecrit ne fust de vous, je dis à ce Pere, que ce n'étoit là qu'une comparaison grossière pour vous faire entendre à tout le monde. Les ennemis de vôtre calcul ne laissent pourtant pas d'en triompher, et de répandre cela comme une déclaration nette et précise de vôtre sentiment sur cette matière. Je vous suplie donc, Monsieur, de vouloir bien nous envoyer au plustost cette déclaration nette et précise de vôtre sentiment sur cela, adressée à nôtre illustre ami M. Bernoulli de Groningue, ou à moy si vous me jugez digne de cet honneur, affin de faire taire, s'il est possible, ou de moins de confondre ces ennemis de la vérité[22].

Como se ve queda reflejada una interpretación de los infinitesimales que no coincide con la que Leibniz expone en su correspondencia con Bernoulli. Es una concepción diríamos *extensional* o *referencial* de los infinitesimales que conlleva la admisión de errores en el proceso de cálculo pues dx al sumarse a x es algo aunque se desprecie. No puede decirse entonces exactamente que $x + dx = x$.

Leibniz contestó a Varignon en la carta, tantas veces citada, del 2 de febrero de 1702. Tras excusarse por el retraso en responder debido a que no había recibido la carta por estar de viaje, pasa a exponer su pensamiento. En primer lugar no hay necesidad de basar el análisis matemático en controversias metafísicas de existencias:

> Je ne me souviens pas assez des expressions dont je m'y puis estre servi, mais mon dessein a esté de marquer, qu'on n'a point besoin de faire dependre l'analyse Mathematique des controverses metaphysiques, ny d'asseurer qu'il y a dans la nature des lignes infiniment petites à la rigueur, ou comparaison des nostres, ny par consequent qu'il y a des lignes infiniment plus grandes que les nostres [et pourtant terminées, d'autant qu'il m'a paru, que l'infini pris à la rigueur doit avoir sa source dans l'interminé, sans quoy je ne voy pas moyen de trouver un fondament propre à le discerner du fini[23].

Precisamente el ejemplo quería hacer ver, con lo exagerado de la comparación, que lo infinitesimal o lo infinito no es comparable con lo finito en cuanto a magnitud. Se ha interpretado su ejemplo justo en el sentido contrario. Gracias a él se ha visto un resquicio a la comparabilidad de magnitud entre infinito, finito e infinitesimal:

> C'est pourquoy à fin d'eviter ces subtilités, j'ay cru que pour rendre le raisonnement sensible à tout le monde, il suffisoit d'expliquer icy l'infini par l'incomparable, c'est à dire de concevoir des quantités incomparablement plus grandes ou plus petites que les nostres; ce qui fournit autant qu'on veut de degrés d'incomparables, puisque ce qui est incomparablement plus petit, entre inutilement en ligne de compte à l'egard de celuy qui est incomparablement plus grand que luy c'est ainsi qu'une parcelle de la matiere magnetique que passe à travers du verre n'est pas comparable avec un grain de sable, ny ce grain avec le globe de la terre, ny ce globe avec le firmament[24].

No cabe comparabilidad en magnitud, en extensión. Por eso mismo pueden tomarse tan pequeños como se quiera. Lo importante es que no estamos en la misma escala, en el mismo nivel. Ahora bien, aunque hiciéramos una comparabilidad de magnitudes, lo cual sería impropio y equivocado; aún en el supuesto de que se admitiera esa metafísica de extensiones que están como referencia de los infinitesimales y se hiciera la comparabilidad, el error causado siempre sería menor que cualquier error dado. El cálculo siempre sería plenamente eficaz y operativo aún desde supuesto ontológicos innecesarios para el mismo:

> Mais il faut considerer en même temps, que ces incomparables communs mêmes n'estant nullement fixes ou determinés, et pouvant estre pris aussi petits qu'on veut dans nos raisonnemens Geometriques, font l'effect des infiniment petits rigoureux, puis qu'un adversaire voulant contredire à nostre enontiation, il s'ensuit par nostre calcul que l'erreur sera moindre qu'aucune erreur qu'il pourra assigner, estant en nostre pouvoir de prendre cet incomparablement petit, assez petit pour cela, d'autant qu'on peut tousjours prendre une grandeur aussi petite qu'on veut[25].

Los infinitesimales no son comparables en magnitud con lo finito, no hay extensión infinitesimal y la justificación, la demostración rigurosa del cálculo, es posibilitada gracias a la creación de un elemento formal, que la razón establece y pone en relación con lo que es extensión material. Entre ambos elementos se pueden establecer *ratios*, proporcionalidades en virtud del principio de continuidad[26].

Igual que las mónadas, átomos de carácter formal y no material, reales, creadas por Dios, están en relación permanente con una materia que es divisible al infinito y a la que animan, así los infinitésimos, reales que no materiales, creados por la razón humana son puestos en relación con el espacio y el tiempo, divisibles al infinito, haciéndonos descubrir sus propiedades[27] Si estudiando las mónadas descubrimos lo más profundo de la realidad, lo mismo nos ocurre al introducirnos en el mundo de lo infinitesimal que nos puede permitir el descubrir lo más profundo del movimiento de los cuerpos en el espacio y el tiempo. Continúa Leibniz:

> C'est peut-estre ce que vous entendés, Monsieur, en parlant de l'inépuisable, et c'est sans doute en cela que consiste la demonstration rigoureuse du calcul infinitesimal dont nous nous servons, et qui a cela de commode, qu'il donne directement et visiblement, et d'une maniere propre à marquer la source de l'invention (...)[28].

Y prosigue Leibniz:

> De plus comme les racines imaginaires ont leur fundamentum in re (...); on peut dire de même, que les infinis et infiniment petits sont tellement fondés que tout se fait dans la Geometrie, et même dans la nature, comme si c'estoient des parfaites realités, temoins non seulement nostre analyse Geometrique des Transcendentes, mais encor ma loy de la continuité, en vertu de laquelle il est permis de considerer le repos comme un mouvement infiniment petit. (...). Cependant on peut dire en general que doute la continuité est une chose ideale et qu'il n'y a jamais rien dans la nature, qui ait des parties parfaitement uniformes, mais en recompense le reel ne laisse pas de se gouverner parfaitement par l'ideal et l'abstrait, et il se trouve que les regles du fini reussissent dans l'infini, comme s'il y avait des atomes (c'est à dire des elemens assignables de la nature), quoyqu'il n'y en ait point la matiere estant actuellement sousdivisée sans fin; et que vice versa les regles de l'infini reussissent dans le fini, comme s'il y avoit des infiniment petits metaphysiques, quoyqu'on n'en ait point besoin; et que la division de la matiere ne parvienne jamais à les parcelles infiniment petites: c'est par ce que tout se gouverne par raison, et qu'autrement il n'y auroit

point de science ny regle, ce qui ne seroit point conforme avec la nature du souverain principe[29].

Todo se gobierna según la razón. La razón está en todo. La realidad es racional, Dios no ha podido por menos de hacerla así, pues él es razón perfecta y soberana. No hace falta una extensión material infinitesimal, no se da. No existen los infinitesimales. Pero sí hacen falta como principios de la razón para dar razón de las propiedades de la realidad espacio-temporal. Son racionales, son reales. Ahí está su *fundamentum in re*. Aquí matemática y metafísica en Leibniz se entrecruzan[30]. El cálculo para Leibniz siempre estuvo justificado, los planteamientos metafísicos de Leibniz cuadran perfectamente con el cálculo y si sus interlocutores no los ven o no los aceptan que prescindan de ellos y tomen todo como una ficción[31]. Nunca podrán negar que la ficción funciona. Así, al margen de metafísicas, aunque no se crea en la realidad de los infinitesimales, como muchos no creerán en la realidad de las mónadas, siempre cabe considerarlos como ficciones, lo cual no es ningún desdoro, pues lo que si que no se puede negar es que el éxito de los infinitesimales y del cálculo es irrebatible:

> D'où il s'ensuit, que si quelcun n'admet point des lignes infinies et infiniment petites à la rigueur metaphysique et comme des choses reelles, il peut s'en servir seurement comme des notions ideales qui abregent le raisonnement, semblables à ce qu'on appelle racines imaginaires dans l'analyse commune, (...), lesquelles toutes imaginaires qu'on les appelle, ne laissent pas d'estre utiles, et même necessaires à exprimer analytiquement des grandeurs reelles. (...). Cependant il ne faut point s'imaginer que la science de l'infini est degradée par cette explication et reduite à des fictions[32].

Los infinitesimales no existen, ni como extensiones determinadas, ni tampoco como cero o nada[33], pero son reales, creados por nuestra razón como ineludibles para interpretar la realidad existente. La carta termina pero la discusión no se detiene[34].

Según confiesa Varignon a Bernoulli, entregó la carta para ser publicada en el *Journal de Sçavans* y causó efecto en Gouye y Ph. de la Hire.[35] Gouye parece que llegó a a decir que Leibniz se expresaba en forma muy diferente a como lo había hecho antes. Leibniz no lo cree así:

> Au reste j'avois écrit il y a deja quelques années à M. Bernoulli de Groningue que les infinis et infiniment petits pourroient estre pris pour des fictions, semblables aux racines imaginaires, sans que cela dût faire tort a nostre calcul, ces fictions estant utiles et fondées en realité[36].

En medio de una pugna entre quienes ven los infinitesimales con existencia espacial (Bernoulli, l'Hospital, Fontenelle, Varignon) y quienes aprovechan esa visión para mostrar las inconsistencias en el cálculo (Rolle, Gallois), Leibniz tendrá que recurrir una y otra vez al término *ficciones* para hacerse entender. Dicho término será malinterpretado por todos. Unos creerán que les da la razón: el cálculo carece de fundamento. Otros lo verán como claramente insuficiente: no hay compromiso existencial.

Al hablar de ficciones entramos en un asunto clave para Leibniz pues el término *fictio* puede significar una quimera, un sueño, algo inventado y quizá así lo usamos cuando decimos *ciencia ficción*. En esta forma lo entendieron los defensores franceses del cálculo. Es evidente que entendido así no sería la justificación que realiza Leibniz más que una fundamentación *ad hoc*. Ahora bien, el término *fictio* también se usa en expresiones, ya pertenencientes al derecho romano, como *fictio legis* o *fictio iuris*. Es decir, como supuesto que la razón construye, permitido dentro de todo un marco conceptual, en este caso del derecho y de la racionalidad jurídica, que posibilita dar solución a un caso práctico, a algo *natural* que está ahí diríamos nosotros, y que no es posible resolverlo sin una intervención de la razón haciendo actuar supuestos que permiten encontrar soluciones a problemas que no estaban contemplados estrictamente en el derecho positivo[37]. No se trata de una invención, sino de un supuesto admitido racionalmente en función de toda una racionalidad jurídica y proveniente de dicha racionalidad. Un supuesto de la razón que permite interpretar el derecho positivo y que a su vez se convierte en derecho positivo para el futuro. Algo parecido ocurre con los infinitesimales, son un supuesto de la razón, en virtud de toda una filosofía racionalista subyacente, que permite resolver un problema *natural* que encontramos: hallar la tangente o la cuadratura a una curva. Sin dicho supuesto no es tan factible encontrar soluciones. A su vez dichas ficciones entran de plano en el nivel geométrico natural para los problemas futuros. Creo que en este sentido entiende Leibniz los infinitesimales como ficciones bien fundadas, quizá fuera mejor decir, como supuestos racionales. No hay que olvidar que la formación primera de Leibniz fue jurídica y a lo largo de su vida estuvo profundamente interesado y ocupado por el derecho; no creo que esta lógica jurídica estuviera al margen de su pensamiento al usar el término *fictio*. Sin duda los infinitesimales son *fictiones* que no existen pero que determinan la interpretación y utilización de lo existente en una forma plenamente justificada.

Volvamos al conflicto de la Academia. Leibniz en realidad está solo. Sus partidarios no ven suficientemente válido el hablar de infinitesimales como ficciones. Escribe por entonces la *Justification du calcul des infinitesimales par celuy de l'algebre ordinaire* que no es publicada[38]. En carta a Varignon del 20 de junio de 1702, una vez que ha recibido por

Varignon noticias de las pretensiones de Fontenelle de hacer una metafísica del cálculo[39], supongo que temiéndose lo peor, afirmará que:

> Entre nous je crois que Mons. de Fontenelle, qui a l'esprit galant et beau, en a voulu railler, lorsqu'il a dit qu'il vouloit faire des elemens metaphysiques de nostre calcul. Pour dire le vray, je ne suis pas trop persuadé moy même, qu'il faut considerer nos infinis et infiniment petits autrement que comme des choses ideales ou comme des fictions bien fondées. Je croy qu'il n'y a point de creature au dessous de la quelle il n'y ait une infinité de creatures, cependant je ne crois point qu'il y en ait, ny même qu'il y en puisse avoir d'infiniment petites et c'est ce que je crois pouvoir demonstrer. Il est que les substances simples (c'est à dire qui ne sont pas des estres par aggregation) sont veritablement indivisibles, mais elles sont immaterielles, et ne sont que principes d'action[40].

Cosas ideales, ficciones bien fundadas, ficciones de la razón, ficciones indispensables, es decir creaciones de la razón conceptual imprescindibles para una interpretación correcta de la realidad que ante todo es racional. Es necesario hablar el lenguaje de los infinitesimales para poder hablar de la realidad. Son un *logos* que es razón.

Inmediatamente en ese mismo año 1702 realiza una reelaboración de la *Justification...* bajo el título *Defense du calcul des differences*[41], en dicho trabajo tras repetir otra vez que su método equivale al de Arquímedes, pone un ejemplo de cálculo y termina el artículo diciendo:

> Je veux pourtant adjouter que le fondement de tout cecy se peut expliquer en prenant z et x, (...), *dans l'acte même* d'evanouir et de tomber en A. C'est comme dans le mouvement naissant, car un'instant de mouvement differe d'un instant de repos, et dans cet element du temps, il y a un element de progrés naissant, qui est plus que rien. Mais quand même l'instant de cet acte d'evanouissement ou de naissance ne seroit qu'une fiction dans la rigueur métaphysique, (...) il suffit qu'il n'en sçauroit naistre aucune erreur et que ces fictions tiendroient tousjours lieu des verités pour le calcul à peu pres comme les racines imaginaires. Puisque en rejettant tous les infiniment petits, et n'employant à leur place que des grandeurs aussi petites que l'on voudra, on monstrera tousjours que l'erreur seroit moindre qu'aucune erreur donnée. C'est à dire qu'il n'y en a aucune. C'est ce qui m'a fait parler autres fois des incomparables, par ce que ce que j'en dis a lieu soit qu'on entende des grandeurs infiniment petites ou qu'on employe des grandeurs d'une petitesse inconsiderable et suffisante pour faire l'erreur moindre que celle qui est donnée. Ce qui sert à allier la commodité du calcul avec la rigueur de la demonstration[42].

Leibniz tiene que hacer aceptable la realidad del infinitesimal sin postular la existencia de cantidades infinitesimales. Lo logra bajo el término de ficción[43]. Los infinitesimales por muy contradictorios que parezcan son indispensables como lo son los números imaginarios. Su sistema filosófico justifica la introducción y quizá la idea de ficción cale en sus seguidores como apropiada para poder darles entrada[44]. Leibniz no ve justificado el cálculo por el hecho de que exista detrás una ontología realista. El asunto importante no es si existen las cantidades infinitesimales o no, sino que el empleo de infinitesimales hace del cálculo una realidad efectiva y vinculante. Con ello nos encontramos con dos cuestiones a distinguir: primera, si un concepto implica algo que sea objetivamente existente, ésto es un problema filosófico; segunda, si la aplicación de un concepto en matemáticas está bien fundamentada[45]. Los malentendidos causados por los infinitesimales, ficciones, ¿no se deberán al hecho de que son ficciones indispensables en el cálculo con cantidades finitas?. No son producto de la imaginación, sino realidades que la razón conceptual construye para dar razón de la realidad y el movimiento de las cosas en el espacio[46]. Serán reales y quizá, si así se entiende mejor, nos podemos referir a ellas como ficticias; desde luego, lo que no pueden es existir, tener un correlato espacial. Serían entonces uno más entre todo de lo que hay espacio-temporalmente y no algo que nos permite interpretar lo existente, ya que están más allá de lo que tiene una referencia con existencia física. Son de nuestra razón. Reales o ficticias, pero nunca con existencia física pues pertenecen a la razón.

En el uso de los infinitesimales como ficciones destaca un manuscrito no publicado por Leibniz, *Cum prodiisset*[47], en él formula el principio de continuidad así:

> Proposito quocunque transitu continuo in aliquem terminum desinente, liceat ratiocinationem communem instituere, qua ultimus terminus comprehendatur[48].

Según dicho principio, ciertas propiedades y relaciones permanecen válidas en el caso de una transición continua hasta llegar a una situación límite[49]; aunque en dicho caso límite los símbolos utilizados se convierten en ficciones, sin embargo siguen siendo válidas las relaciones u operaciones realizadas con ellos como si fueran hechas con cantidades finitas[50].

Siguiendo en la misma línea de ficciones, en 1704 escribirá a Fontenelle:

> Il est vray que chez moi, (...) les infiniment petits ne sont pas des grandeurs. Ma metaphysique les bannit de ses terres. Elle ne leur donne retraite que dans les espaces imaginaires du calcul géometrique[51].

En 1716, poco antes de morir, escribirá a d'Angicourt que los infinitesimales son sólo:

> Des fictions utiles pour abréger et pour parler universellement[52].

3. Tercera etapa y final de la polémica

Volvamos al debate de la Academia. Se planteó entre Rolle y Varignon, pero Leibniz sin pretenderlo participa. Las intervenciones de Leibniz no hacen sino dividir a los defensores del cálculo, pues tanto l'Hospital como Fontenelle son acérrimos defensores de la existencia de un correlato espacial para los infinitesimales. La postura de Leibniz no convence ni a unos ni a otros y sus amigos le llegarán a decir que lo mejor que puede hacer es quedarse calladito. Así se lo confiesa a d'Angicourt años más tarde:

> Quand ils disputèrent en France avec l'Abbé Gallois, le Père Gouge et d'autres, je leur témoignai, que je ne croyois point qu'il y eût des grandeurs véritablement infinies ni véritablement infinies ni véritablement infinitésimales, que ce n'étoient que des fictions, mais des fictions utiles pour abréger et pour parler universellement, comme les racines imaginaries dans l'Algèbre (...). Mais comme M. le Marquis de l'Hospital croyoit que par là je trahissois la cause, ils me prièrent de n'en rien dire, outre ce que l'en avois dit dans un endroit des Actes de Leipsic, et il me fut aisé de déférer à leur prière[53].

En ningún momento Leibniz había expresado un compromiso con la existencia de las cantidades infinitesimales. Sus partidarios quedaron desilusionados con el maestro. Leibniz no tenía una verdad definitiva que dar respecto a los infinitesimales o al menos ellos no la entendían. Hubo un desencanto con Leibniz y signos del mismo los dio Fontenelle en la eulogía que hizo en la Academia a la muerte de Leibniz en 1716:

> Il semble cependant qu'il en ait ensuite été effrayé lui-même, et qu'il ait crû que ces différents ordres d'Infiniment petits n'étoient que des grandeurs incomparables, à cause de leur extrême inégalité (...). Aussi ceux même qui l'ont pris de lui n'en ont-ils pas pris cet adoucissement, qui gâteroit tout. Un Architecte a fait un Bâtiment si hardi qu'il n'ose lui-même y loger, et il se trouve des gens qui se fient plus que lui à sa solidité, qui y logent sans crainte, et qui plus est, sans accident[54].

Hay una gran diferencia entre Leibniz y los infinitesimalistas franceses acerca de los fundamentos. Los franceses se fijan sólo en la noción de incomparabilidad que Leibniz presenta y que ellos malinterpretan. Pensaron que para Leibniz era bastante afirmar que entre una cantidad y su diferencial había una diferencia de grado. Lo consideran un error fatal que da alas a los enemigos del cálculo, pues si dos cantidades son comparables entonces su diferencia era una cantidad finita y por lo tanto se introducía un error finito en el cálculo. Esto no pasaría si *dx* fuera una cantidad infinitamente pequeña, entonces el error sería menor que cualquier cantidad finita. No leyeron metafóricamente el ejemplo de Leibniz. Vista la situación Leibniz recurre a la noción de ficciones bien fundadas como modo de hacerse entender, pero es una postura que no ven lo suficientemente contundente[55].

El debate en París continúa aunque ahora sin participación de Leibniz. La segunda parte del mismo enfrenta a Rolle y Saurin en 1702-1703. El 13 de abril de 1702 sale publicado en el *Journal des Sçavans* un artículo de Rolle acerca de las tangentes en el que al final plantea el problema de qué ocurre cuando tenemos más de una tangente a la curva en un punto, punto de autointersección de la curva. En estos casos no funciona, dice él, el nuevo cálculo. Era un ataque y Leibniz parece que piensa escribir a Fontenelle sobre tal artículo[56]. La respuesta a Rolle la escribe un protegido de l'Hospital, Saurin[57], que aplica la regla de l'Hospital y resuelve el problema. A su vez le devuelve la jugada y plantea otro problema: aplicar los métodos clásicos a las curvas mecánicas. Una vez más las exitosas aplicaciones del cálculo infinitesimal a los problemas concretos jugaban un papel esencial en su aceptación como método riguroso. El debate se convierte en personal y político, el *Journal de Sçavans* dirigido por Gouye publica íntegros los trabajos de Rolle, mientras que recorta los de Saurin. Rolle volvió al ataque en 1703 y 1704 con las integrales y entonces le contestó Fontenelle. El 2 de febrero de 1704 moría l'Hospital y Fontenelle, miembro de la Academia desde 1697 y secretario perpetuo de 1699 a 1740, lee un discurso de elogio. En él afirma que los que critican el cálculo lo hacen porque no lo entienden, es una cuestión de ignorancia. Fontenelle no toca el asunto de la fundamentación del cálculo, en esos momentos tema de discusión y que él está estudiando, pero la fuerza operativa del cálculo es tal que prácticamente se impone por sí mismo[58]. Las declaraciones de Fontenelle son una toma de postura pública que dada su situación en la Academia va a influir decisivamente en dicha institución[59].

La tercera parte del debate enfrenta de nuevo a Rolle y Saurin a lo largo de 1705[60]. Saurin no había contestado a los ataques hecho por Rolle en 1703 y 1704, así que el 23 de abril de 1705 Saurin ataca a Rolle otra vez. Hubo un intercambio de artículos con insultos, pero poco nuevo. A finales de 1705 la Academia decide nombrar una comisión formada por Bignon, Ph. de la Hire, Gallois, Cassini y Fontenelle. A pesar de las dudas que albergaba Varignon sobre los componentes de dicha comisión,[61] ésta da una respuesta pacificadora en 1706. Fontenelle años más tarde, en 1719, la denominará como la paz de los infinitesimales[62]. Rolle dejó de atacar, al menos públicamente, y la muerte de Gallois en 1707 llevaron al triunfo al cálculo en el continente[63].

Realmente el asunto fundacional permanecía oscuro para todos excepto para Leibniz y el análisis seguía "con vigor, pero sin rigor"[64]. Las afirmaciones de Rolle precedieron a las de Berkeley y de hecho las tres críticas principales de Rolle están repetidas en el *Analyst* aunque desde perspectivas más epistemológicas. Berkeley a diferencia de Rolle nunca cuestionó los resultados del cálculo y se vio por ello forzado a proponer la teoría del doble error.

Resumiendo podemos decir que Rolle consiguió que el cálculo entrara en una crisis de fundamentos en la Academia. Su crítica se apoya en dos argumentos: el primero de los cuales insiste en subrayar la insuficiencia y falta de rigor lógico en los conceptos y principios fundamentales del nuevo cálculo. El segundo argumento consiste en mostrar con ejemplos que el cálculo infinitesimal lleva al error pues no da los mismos resultados que los obtenidos utilizando métodos clásicos. En el fondo Rolle hace una crítica filosófica y otra práctica. En la primera ni pierde ni gana; la respuesta de Varignon apoyada en la obra de Newton no es demasiado satisfactoria, los infinitesimales no son nadas, pero se desvanecen; en la segunda pierde estrepitosamente. Cuando Berkeley vuelva años después con la crítica al cálculo y retome las ideas de Rolle, el planteamiento ya sólo será filosófico, pues el cálculo infinitesimal habrá vencido en la práctica[65].

Se puede concluir, en relación a la introducción de estos nuevos objetos matemáticos, que la postura de Leibniz deja claro que no depende de una intuición geométrica subjetiva, de la imaginación; ni de la constructibilidad objetiva de los mismos; ni depende tampoco de la existencia de una referencia espacial para ellos. Ni siquiera, por último, es el fin de su introducción el completar la interpretación de un algoritmo que funciona de todas formas por sí mismo. Respecto a la justificación del cálculo el problema no es la justificación de determinados objetos, sino la fundamentación del método y ésta es ante todo filosófica en el marco de una filosofía racionalista.

Notas

[1] La Academia de París, creada en 1666 bajo la responsabilidad de Colbert y con la protección de Luis XIV, se mantenía en los límites de la geometría analítica cartesiana. En realidad la oposición en París al cálculo es ya anterior a esos años y de ella se hace eco Johann Bernoulli en la carta dirigida a Leibniz el 14 de agosto de 1697 donde transcribe al final de la misma lo que Varignon a su vez le había escrito: "Ut impleam vacuum hujus paginae, transcribam huc quaedam ex literis Dn. Varignonii, quas eodem die cum Tuis accepi, ut videas quam misere luat noster calculus apud invidos et ignaros; vix putem Lutheri et Calvini reformationem durius habitam fuisse. 'Mr. le Marquis de l'Hospital, inquit, est encore à la campagne, desorte que je me trouve seul icy chargé de la defense des infiniment petits, dont je suis le vray martyr, tant j'ay désja soutenu d'assaux pour eux contre certains mathematiciens du vieux style, qui chagrins de voir, que par ce calcul les jeunes gens les attrapent et même les passent, font tout ce qu'ils peuvent pour le décrier, sans qu'on puisse obtenir deux d'écrire contre. Il est pourtant vray que depuis la solution que Mr. le Marquis de l'Hospital a donnée de vôtre problème de Linea celerrimi descensus, ils ne parlent plus tant ni si haut qu'auparavant'. Quos hic vocat mathematicos styli veteris, haud dubie collimat in Catelanum, de la Hire, Roolium aliosque obscuri nominis, qui nominari non merentur" (MS 3/2, 465-466). La carta de Varignon a Bernoulli es del 6 de agosto de 1697. L'Hospital era el único francés que había llegado a la solución correcta del problema de la braquistócrona, eso le

dio cierto respeto al nuevo cálculo en la Academia, sobre este problema y la aportación de l'Hospital puede verse Peiffer (1989).

2 Véase Mancosu (1989). La opinión de Gerhardt afirmando que la polémica no tenía motivos científicos sino que sólo estaba causada por envidias, intrigas y problemas nacionalistas me parece exagerada al menos para el primer período, véase (MS 4, 85).

3 Sigo a Blay (1986) y (1993, cap. 4). También Mancosu (1989) y (1996, 165-177) que dependen del anterior.

4 El primero Jakob Bernoulli (1654-1705) en el período que abarca de 1687 a 1690. En esta misma época se inicia en el cálculo Johann Bernoulli (1667-1748) de manos de su hermano. En mayo de 1690 ya publica Jakob en *Acta Eruditorum* un artículo utilizando el nuevo cálculo para resolver un problema planteado por Leibniz. Realmente los dos hermanos, y especialmente Jakob, tuvieron que *redescubrir* el cálculo. *Nova methodus* fue un artículo muy difícil y además publicado con numerosas erratas, Jakob lo leyó y empezaron a cambiar sus intereses de la matemática cartesiana al cálculo. Pide ayuda a Leibniz en una carta del 15 de diciembre de 1687 (MS 3/1, 10-13), pero Leibniz está en Italia y no le contestará hasta el 24 de septiembre de 1690 (MS 3/1, 13-20) cuando ya Bernoulli domina claramente el cálculo como así lo reconoce Leibniz. Sobre Jakob Bernoulli puede verse Roero (1989).

5 Por ejemplo el problema de la curvatura de una vela hinchada por el viento, resuelto en 1692. La prioridad de tal descubrimiento fue tema de discusión permanente entre los dos hermanos. No se llevaban especialmente bien entre sí.

6 Le dio un curso particular remunerado. El marqués Guillaume de l'Hospital (1661-1704) se convertirá desde entonces en un acérrimo defensor del cálculo.

7 El 17 de junio de 1693 sería la primera vez según los testimonios recogidos de las actas de sesiones por Blay, véase Blay (1986, 224-226) y (1993, 152 y 231).

8 *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* publicado en Paris en 1696, reeditado en 1715, traducciones al inglés y al latín de 1730 y 1764 respectivamente. L'Hospital quiso construir un sistema riguroso de cálculo empleando infinitesimales. Fontenelle en el discurso leído en el acto de homenaje celebrado a la muerte del marqués en 1704 afirmó que hasta el momento de publicarse el libro, "la Géométrie des Infiniment petits n'étoit encore qu'une espece de Mystere, et, pour ainsi-dire, une science Cabalistique renfermée entre cinq, ou six personnes". Seguro que pensaba en Leibniz, Newton, los hermanos Bernoulli, Varignon y l'Hospital. Véase Mancosu (1989, 225) donde está recogida la cita de Fontenelle. Parece que Bernoulli pensaba que l'Hospital tenía muy poco de original en su libro, así en carta a Leibniz del 8 de febrero de 1698 le confiesa: "(...) cum totum quantum est, paucis paginis exceptis (...) a me partim scriptum, partim in calamum dictatum, partim etiam, postquam Parisios deseruissem, per literas communicatum acceperit (...)" (MS 3/2, 480). En relación a esta queja puede verse Wurtz (1989, 17-18) donde expone los problemas críticos referentes a los manuscritos originales de las lecciones dadas por Bernoulli a l'Hospital. Para un resumen general de las ideas de l'Hospital y de las lecciones impartidas por Bernoulli véase Bos (1980, 96-102).

9 El algebrista Michel Rolle (1652-1719). Destacará su memoria *Du nouveau système de l'infini* publicada en las actas de la Academia de 1703, pero que incluye material usado ya en los años anteriores, ver Mancosu (1989, 229).

10 Pierre Varignon (1654-1722). Próximo al grupo de Malebranche pero independiente de él, toma contacto con el cálculo en 1693. Sus trabajos dieron un impulso decisivo al cálculo pues lo aplicó a problemas de mecánica newtoniana, traduciendo en términos leibnicianos resultados de los

Principia. Al parecer dominaba tanto el sistema de Leibniz como el de Newton. Acerca de la capacidad de Varignon hay un comentario personal de Johann Bernoulli a Leibniz en una carta del 21 de junio de 1704: "Quid nunc defuncto Hospitalio in re mathematica peragatur in Gallia, non equidem scio; certe hoc tempore neminem ibi novi, qui in profundioribus excellat, si unum excipias Varignonium, a quo ipso tamen haud adeo magni progressus expectandi sunt: intelligit inventa aliena et excolit, sed ipse ad inveniendum non videtur factus: diceres esse eum bonum commentatorem, non vero Auctorem" (MS 3/2, 755). Sobre Varignon véase Peiffer (1988) y Blay (1993, 159-173).

11 La cita de Rolle está recogida en Mancosu (1989, 231). Las objecciones que se plantean son si en geometría podemos hablar de infinitesimales y números infinitos los unos respecto de los otros; la segunda es el problema de $x + dx = x$; la tercera es la dificultad planteada al hacer por ejemplo $(y + dy)(y + dy) = y^2 + 2ydy$, dejando de lado $dydy$ que se convierte en cero. ¿Es $dy = 0$ o no?, pues $2ydy$ no lo es y $dydy$ sí. Las críticas de Rolle aparecieron por primera vez en las memorias de la Academia del 17 y 21 de julio de 1700.

12 Cita recogida de Peiffer (1988, 717). Por cierto Peiffer habla de los diferenciales en Varignon como variables tendentes a cero. No creo que el término variable en el sentido actual sea usado en Varignon.

13 Cita recogida en Peiffer (1988, 717).

14 Véase Peiffer (1988, 717). Peiffer comenta que Leibniz, gracias al principio de continuidad, incluye al mismo límite en el proceso incluso en el caso de que la noción límite contenga elemento ficticios, los infinitesimales. Para Leibniz el límite no es cero, sino la ficción del infinitesimal. Sin embargo Varignon no llega hasta ahí, va sólo hasta el límite e insistirá en que los infinitesimales son siempre cantidades menores que cualquier cantidad dada. Otro problema sería la concepción misma de los infinitesimales en Newton que aunque habla de fluxiones deja abierta la puerta a los infinitesimales, véase Lai (1975).

15 Quiere hacer ver que el cálculo lleva a resultados erróneos. Basa sus propios resultados en los métodos de Jean Hudde (1633-1704) y, en menor grado, Pierre de Fermat (1601-1655).

16 Pueden verse los problemas propuestos en Blay (1986, 239-240), donde se analizan pormenorizadamente las sesiones de la Academia.

17 Leibniz (1701; MS 5, 350). La carta está recogida entera en (MS 4, 95-96) y el extracto publicado en la revista francesa aparece repetido como Leibniz (1701; MS 5, 350).

18 En diferentes lugares usa el argumento de autoridad, así "veteris enim methodi nostra non nisi contractio est, inventioni apta" carta de Leibniz a Jakob Bernoulli del 3 de diciembre de 1703, (MS 3/1, 81).

19 Correspondencia que mantiene con Johann Bernoulli durante 1698-1699 acerca de la realidad de los infinitesimales.

20 No porque sea un error muy pequeño como afirma Wurtz (1989, 27), sino porque es más pequeño que cualquier cantidad.

21 (MS 4, 88). El eco creado por las manifestaciones de Leibniz todavía queda recogido en la carta de Varignon a Leibniz del 9 de octubre de 1705: "on a répandu par le monde que vous y conveniez vous même que vôtre calcul n'etait pas démontré" (MS 4, 132).

22 (MS 4, 90).

23 (MS 4, 91).

24 (MS 4, 91-92).

25 (MS 4, 92). En la carta a Jakob Bernoulli del 3 de diciembre de 1703 afirma de nuevo: "Hinc pro infinitis et infinite parvis sumo utcunque magna et utcunque parva, et si sic error possit fieri dato minor, tuta est methodus" (MS 3/1, 81). Ahí está todo el método.

26 Al que en diferentes ocasiones se va a referir, por ejemplo en Leibniz (1702; MS 4, 105): "Et cet avantage appliqué encor à la physique et particulierement aux loix du mouvement revient en partie à ce que j'apelle la loy de la Continuité qui me sert depuis longtemps de principe d'invention en physique, (...), prenant l'egalité pour un cas particulier de l'inegalité et le repos pour un cas particulier du mouvement, et le parallelisme pour un cas de la convergence etc. supposant non pas que la difference des grandeurs qui deviennent egales est deja rien, mais qu'elle est dans l'acte d'evanouir, et de même du mouvement, qu'il n'est pas encor rien absolument, mais qu'il est sur le point de l'estre", el error será siempre menor que cualquier error dado. Además "suivant le langage des infinies ou infinitesimales, qui prend le cercle, par exemple, pour un polygone regulier dont le nombre des costés est infini. Autrement la loy de la continuité seroit violéee, c'est à dire puisqu'on passe des polygones au cercle, par un changement continuel et sans faire de saut, il faut aussi qu'il ne se fasse point de saut dans le passage des affections des polygones à celle du cercle" (Leibniz 1702; MS 4, 106). Texto de gran importancia en el que la continuidad es entendida entre lo *natural*, curva, y lo *racional*, polígono de infinitos lados. Ambos son reales. Leibniz habla de emplear el lenguaje de los infinitesimales, lo cual no implica considerarlos con existencia, por lo que difiero de la opinión de Wurtz (1989, 35). Continuidad no como paso al límite sino como principio de la razón que relaciona lo *natural* y lo *racional*.

27 Pueden verse los comentarios de Cekic (1982, 121-122): en lo metafísico tenemos que la idea de infinito aparece en la teoría de las mónadas, infinitas en número, siendo a la vez elementos infinitamente pequeños del mundo y conteniendo cada una la infinitud del mundo. Por otro lado en matemáticas están los infinitesimales. El mundo es para Leibniz infinito tanto hacia lo grande como hacia lo pequeño y no sólo potencialmente, sino en acto; por ello cada parte del mundo es espejo de todo el mundo y así como el universo es infinito, los elementos de ese todo pueden llegar a ser infinitamente pequeños. Macrocosmos y microcosmos son correlativos y a la vez son conceptos tanto matemáticos como metafísicos. Estas ideas le habrían sido inspiradas por Pascal, en el número 199 de sus *Pensamientos*, Pascal (1963, 525-528), donde "el hombre es una nada respecto al infinito y un todo respecto a la nada" y además los hombres "establecemos últimos (principios) que lo parezcan a la razón, como se hace con las cosas materiales en las que llamamos punto indivisible a aquel más allá del cual nuestros sentidos nada perciben, aunque sea divisible indefinidamente y por su naturaleza". La teoría de las mónadas y la de los infinitesimales están en paralelismo. Si aquella es posterior a ésta, entonces se manifiesta como la metafísica de Leibniz está condicionada por las matemáticas, estando éstas a su vez cargadas de filosofía racionalista. Para la relación entre mónadas e infinitesimales véase MacDonald Ross (1990) que destaca las contraposiciones de físico-metafísico y la de mental o imaginario frente a real. El profesor Gustavo Bueno en la introducción a Leibniz (1714, 43-47) interpreta los infinitesimales como mónadas en un sentido diferente al nuestro, *monista* diríamos. Los puntos serían ellos mismos mónadas en un tercer mundo popperiano (materialidades terciogenéricas dice). Creo que el dualismo forma-materia, natural-racional impregna el pensamiento de Leibniz también aquí y no parece que el punto geométrico reproduzca la estructura de la mónada. La *mónada* infinitesimal es creación de la razón en un nivel diferente al del punto geométrico si éste pertenece al espacio tal y como dice el profesor Bueno. Hay una diferencia de la mónada respecto al punto matemático, véase Lorenzo (1985, 173).

28 *Ibid.*

29 (MS 4, 93-94).

30 Y a la inversa también: "Ma metaphysique est toute mathematique pour dire ainsi ou la pourroit devenir" en la carta de Leibniz a l'Hospital del 27 de noviembre de 1694 (MS 2, 258). Afirma Robinet que "Mathématique et métaphysique sont étroitement associables puisque l'une fournit á l'autre des éléments fondateurs. La science de l'infini, les courbes transcendantes, se trouvent dans leur ensemble soumises au calcul déterminat des formes qui n'ont pas d'autre objet que l'idealité mathématique constituée par l'équation infinitiste" (Robinet 1986, 56).

31 Ishiguro (1988, 189) no lo interpreta así. Afirma que se podría definir el infinitesimal por una paráfrasis: cantidad finita variable que es más pequeña que cualquier cantidad dada. El diferencial es el límite de la serie de dichas cantidades cada vez más pequeñas y el infinitesimal es una cantidad finita variable que se escoge tan pequeña como se quiera, con lo cual no se puede hablar de ficciones más que aplicado a dicho límite, pero no a los infinitesimales. No creo que sea preciso corregir a Leibniz como hace Ishiguro.

32 (MS 4, 92-93).

33 Hay un manuscrito de Leibniz, *Responsiones meae...* de octubre de 1702, recogido en Horváth (1982, 155), en el que se afirma: "(...) ut 0 videatur tractari debere velut quantitas, non intelligendum est aliquid vere nihilum, sed infinite parvum sive incomparabilis exilitatis".

34 Muchas son los comentarios a esta carta, normalmente para decir que los infinitesimales en Leibniz son ficciones, por ejemplo Abraham Robinson. Según Horváth (1986, 66-67) Leibniz considera en esta carta los siguientes casos: 1. El infinitesimal en un sentido metafísico riguroso; 2. Las cantidades infinitesimales realmente existentes en la naturaleza; 3. Las cantidades ordinarias existentes que pueden ser escogidas tan pequeñas como se quiera, son las llamadas cantidades incomparables; 4. Los infinitesimales como nociones ideales que abrevian el razonamiento. Del primer caso no trata dentro de las matemáticas pues esta es una cuestión filosófica y según su creencia el cálculo no depende de controversias metafísicas sobre la existencia actual de infinitesimales. La segunda posibilidad la rechaza pues no cree que los infinitesimales existan en la naturaleza. Las ideas tercera y cuarta pueden ser usadas en el cálculo fructíferamente. Nuestra interpretación no coincide exactamente con ésta.

35 (MS 4, 97). Incluso Gouye parece que se *convierte* después al cálculo, véase la carta de Varignon a Leibniz del 23 de mayo de 1702, (MS 4, 103).

36 Carta del 14 de abril de 1702 a Varignon (MS 4, 98).

37 Es el caso, por ejemplo, de la *fictio legis Corneliae* establecida para resolver el problema de la herencia en caso de muerte de un ciudadado que es esclavo de los enemigos, puesto que el esclavo ni puede testar ni se otorga validez al testamento anteriormente hecho en libertad mientras dure la situación de esclavitud, la *lex Cornelia* hacia el 81 aC establece el principio, la *fictio*, de que la muerte del ciudadano se entendiese en el momento de caer prisionero, es decir, cuando todavía era libre: "qui ab hostibus captus est, testamentum quasi servus facere non potest. Sane valet testamentum id quo ante captivitatem factum est, si revertatur, iure postliminii, aut si ibidem decedat, beneficio legis Corneliae, qua lege etiam legitimae tutelae hereditatesque firmantur", citado en Iglesias (1965, 112-113).

38 Leibniz (1702; MS 4, 104-106). Ver Pasini (1988, 697).

39 "M. de Fontenelle m'a dit qu'il va faire des élemens metaphysiques de vôtre Calcul, dont il a (dit-il) le systeme tout entier dans la teste" en la carta de Varignon a Leibniz del 23 de mayo de 1702 (MS 4, 104). El libro será publicado en 1727.

40 (MS 4, 110).

41 No publicado por Leibniz. El manuscrito ha sido editado por E. Pasini en Pasini (1988, 705-708).

42 Texto en Pasini (1988, 708), el subrayado está en el original. He eliminado las numerosas notas de edición y paréntesis.

43 Según Pasini (1988, 698-699), que en mi opinión defiende en el mismo congreso justo la interpretación contraria a la de Peiffer (1988), Leibniz encuentra al infinitesimal justo antes de ser nada, en el momento mismo de la negación se conserva una magnitud tendente a cero entre el ser y el no ser y eso constituye el infinitesimal. Corresponde al momento mismo del nacimiento o de desaparición de una magnitud. Ambos momentos van a ser una ficcion metafísica así como el infinitesimal es una ficcion geométrica. Este tipo de interpretaciones en el *límite* me parece que suenan bastante a interpretaciones posteriores del cálculo y no manifiestan claramente la ruptura entre finito e infinitesimal, la incomparabilidad. De cualquier forma es el lenguaje que usa Leibniz con la pretensión de convencer a sus contemporáneos, seguidores o detractores, de la justificación del cálculo. Pasini cita otro manuscrito de finales del mismo año, sin título, que se desenvuelve en términos parecidos pero que no edita en su artículo. El tema del artículo de Leibniz era la "quaestio de jure negligendi quantitates infinite parvas" y seguramente estaba destinado a una revista alemana. Afirma que los infinitesimales son "quantitates in ipso ortu suo vel occaso usamos" que "hinc tacite methodo rigorosa utimur" teniendo en cuenta que los infinitesimales como "compendium loquendi statim assumimus sive fingimus". Véase para estas citas Pasini (1988) que entiende aquí *lenguaje* como simple suposición o forma de hablar.

44 Pasini (1988, 698) vendría a señalar que el problema no es tanto la legitimidad de los infinitesimales cuanto que son por un lado superfluos como medio de prueba al ser eliminables y por otro imprescindibles dada su utilidad en el cálculo. Para fundamentar suficientemente el cálculo bastaría sólo con establecer las reglas que rigen la introducción y eliminación de infinitesimales. MacDonald Ross (1990, 133) afirma que en Leibniz todos los conceptos matemáticos lógicamente coherentes son reales frente a los imaginarios que son los que contienen contradicción. De éstos últimos algunos son útiles en el nivel de manipulación simbólica, entre ellos estarían los números imaginarios y los infinitesimales. Además habría conceptos irreales respecto a los cuales no hay realidades que les correspondan, por ejemplo el concepto de circunferencia perfecta, son *entia rationis*. No estoy seguro que aplicar el calificativo *imaginario* a los infinitesimales sea lo más apropiado. La interpretación de Ishiguro (1988, 191) es diferente, todos los números son *entia rationis* y hay verdades objetivas que corresponden a ellos.

45 Véase Bos (1974, 54) y Mancosu (1989, 236-237).

46 A fin de cuentas Robinson en el análisis no estándar también construye desde la teoría de modelos un referente conceptual que da razón de unos nuevos números y que posibilita el cálculo.

47 Se da como fecha del manuscrito el año 1701 o 1702, no puede ser anterior a 1701 pues tiene referencias a un trabajo de Gouye de ese año. Los problemas que menciona el manuscritos son los tratados precisamente en este período, véase Bos (1974, 56-66) para un análisis detallado de las demostraciones que hace Leibniz. También Horváth (1982, 156) y (1986, 67-69).

48 Citado en Bos (1974, 56). Anteriormente también había formulado el principio como: "(...) mon principe de la continuité, suivant lequel la nature n'agit pas per saltum" en la carta a l'Hospital del 14 de enero de 1696 (MS 2, 310).

49 Considerar una curva como un polígono de infinitos lados, una tangente como una secante, etc.

[50] Insiste Bos (1974, 65-66) en que el intento que aquí realiza Leibniz de fundamentar el cálculo lleva naturalmente a la introducción del concepto de función de forma implícita. Esta es una idea que Bos repite.

[51] Citado en Pasini (1988, 700).

[52] Leibniz (1983, 79). Citado en Pasini (1988, 701).

[53] De la carta a d'Angicourt de septiembre de 1716 recogida en Leibniz (1983, 79), véase comentario en Mancosu (1989, 237).

[54] Texto recogido en Mancosu (1989, 239). Una acusación parecida da la impresión que hace MacDonald Ross (1990, 130).

[55] Mancosu (1989, 238) afirma que con la noción de ficciones bien fundadas Leibniz estaba proponiendo una sofisticada fundamentación formalista de su algoritmo. Al considerar a los infinitesimales como ficciones bien fundadas introducía un corte entre el aparato formal y los referentes. El sistema de Leibniz estaría entonces basado en una sumisión de la semántica en favor de un formalismo consistente.

[56] Existe el manuscrito de una carta iniciada pero no enviada de Leibniz a Fontenelle, véase el texto en Pasini (1988, 709).

[57] Joseph Saurin (1659-1737).

[58] Fontenelle años después afirmará al principio de su obra *Les élémens de la géometrie de l'infini* (París, 1727), en la cual tratará de fundamentar el cálculo, que hasta ese momento el cálculo todavía no es verdadera ciencia: "Le Calcul n'est guere en Géométrie que ce qu'est l'expérience en Physique, et toutes les Vérités produites seulement par le Calcul, on les pourroit traiter de Vérités d'expérience. Les Sciences doivent aller jusqu'aux premieres causes, sur-tout la Géométrie, où l'on ne peut soupçonner comme dans la Physique des principes qui nous soient inconnus", citado en Blay (1993, 180). No creo que Leibniz hubiera estado de acuerdo con esas afirmaciones.

[59] Para toda esta historia puede verse Mancosu (1989, 238-242) el cual se apoya en (Blay 1986) que ha estudiado detenidamente las sesiones de la Academia de París.

[60] Leibniz está al tanto de todas las polémicas gracias a la correspondencia con Varignon, véase la carta de Varignon a Leibniz del 6 de diciembre de 1704 (MS 4, 126) y la de Leibniz a Varignon del 27 de julio de 1705 (MS 4, 127-128).

[61] Manifestada en carta a Leibniz del 9 de octubre de 1705 (MS 4, 131-132).

[62] Leibniz dirá de dicho juicio en carta a Johann Bernoulli del 15 de julio de 1706: "si vera sunt quae referuntur, Judicium magis morale, quam mathematicum fuit" (MS 3/2, 794).

[63] Véase Mancosu (1989, 242-243). Influirán en esta aceptación los éxitos del cálculo, por ejemplo el logro de Johann Bernoulli y Hermann que en 1710 presentaron en la Academia la solución que habían encontrado de modo independiente al problema inverso de las fuerzas centrales, es decir, a la cuestión de que órbita sigue un cuerpo alrededor de otro suponiendo una fuerza de atracción inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Demostraron que un cuerpo sometido a una fuerza centrípeta que varía inversamente al cuadrado de la distancia entre ambos debe moverse según una sección cónica. Newton lo había dejado en la primera edición de los *Principia* sin demostración, véase Aiton (1986, 142-143) y sobre todo Aiton (1989). En cuanto a Rolle, Varignon le dice a Leibniz en la carta del 28 de abril de 1708 que "M. Rolle ne laisse pas de decrier encore sourdement ce calcul par le monde" (MS 4, 167) y Leibniz en 1710 le escribe a

Varignon: "M. Rolle pourroit être appellé pater difficultatum comme un certain Ministre public; il paroit né pour faire des difficultés" (MS 4, 169).

64 En frase de Kline citada en Mancosu (1989, 244). De la misma idea es Bos (1980, 123-124).

65 La utilidad y aplicabilidad del cálculo a la naturaleza era manifiesta aunque los fundamentos para muchos de los protagonistas no estuvieran claros. Esta misma utilidad podría haberse visto como la misma justificación del cálculo. Sin duda tal fundamentación estaría hoy en línea con las propuestas que hace Kline en filosofía de la matemática, véase Kline (1980).

BIBLIOGRAFIA

Aiton, E.J.: 1986, 'The application of the infinitesimal Calculus to some physical problems by Leibniz and his friends', *Studia Leibnitiana, Sonderheft* 14, 133-143.

Aiton, E.J.: 1989, 'The contributions of Isaac Newton, Johann Bernoulli and Jakob Hermann to the inverse problem of central forces', *Studia Leibnitiana, Sonderheft* 17, 48-58.

Blay, M.: 1986, 'Deux moments de la critique du calcul infinitésimal: Michel Rolle et George Berkeley', *Revue d'Histoire des Sciences et de leurs Applications* 39, 223-253.

Blay, M.: 1993, *Les raisons de l'infini. Du monde clos à l'univers mathématique*, Paris, Gallimard.

Bos, H.J.M.: 1974-75, 'Differentials, higher-order differentials and the derivative in the leibnizian Calculus', *Archive for History of Exact Sciences* 14, 1-90.

Bos, H. J. M.: 1980, 'Newton, Leibniz y la tradición leibniziana', in I. Grattan-Guinness (ed.): *Del cálculo a la teoría de conjuntos 1630-1910. Una introducción histórica*, Madrid, Alianza, 69-124.

Cekic, M.: 1982, 'Leibniz und die Mathematiker des 17. Jahrhunderts', *Studia Leibnitiana, Supplementa* 22, 119-128.

Horváth, M.: 1982, 'The problem of infinitesimal small quantities in the leibnizian Mathematics', *Studia Leibnitiana, Supplementa* 22/4, 149-157.

Horváth, M.: 1986, 'On the attempts made by Leibniz to justify his Calculus', *Studia Leibnitiana* 18, 60-71.

Iglesias, J.: 1965, *Derecho Romano. Instituciones de Derecho Privado*, Barcelona, Ariel.

Ishiguro, H.: 1988, 'La notion dite confuse de l'infinitésimal chez Leibniz', *Studia Leibnitiana, Sonderheft* 15, 183-196.

Kline, M.: 1980, *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre*, Madrid, Siglo XXI.

Lai, T.: 1975, 'Did Newton renounce infinitesimals?', *Historia Mathematica* 2, 127-136.

Leibniz, G.W.: MS, *Mathematische Schriften*, ed. por C. I. Gerhardt, Hildesheim, Olms, 1971, ed. original 1849-1863, 7 vols.

Leibniz, G.W.: 1701, 'Mémoire de Mr. G. G. Leibniz touchant son sentiment sur le Calcul Différentiel', in Leibniz (MS 5, 350).

Leibniz, G.W.: 1702, 'Justification du Calcul des Infinitesimales par celuy de l'Algebra ordinaire', in Leibniz (MS 4, 104-106).

Leibniz, G.W.: 1714, *Monadología*, Oviedo, El Basilisco, 1981.

Leibniz, G.W.: 1983, *Oeuvre concernant le Calcul Infinitésimal*, Paris. Es la traducción francesa realizada por J. Peyroux de algunos de los artículos y cartas recogidos en Dutens, L. (ed.): *Gothofridi Guillemi Leibnitii Opera Omnia*, vol. III, Genevae, 1768.

Lorenzo, J. de: 1985, *El Racionalismo y los problemas del método*, Madrid, Cincel.

MacDonald Ross, G.: 1990, 'Are there real infinitesimals in Leibniz's Metaphysics?', in A. Lamarra (ed.): *L'infinito in Leibniz: Problemi e Terminologia. Simposio Internazionale del Lessico Intellettuale Europeo e della Gottfried-Wilhelm-Leibniz-Gesellschaft, Roma, 6-8 Novembre 1986*, Roma/Hannover, Ateneo/Niedersachsische Landesbibliothek, 125-141.

Mancosu, P.: 1989, 'The Metaphysics of the Calculus: A foundational debate in the Paris Academy of Sciences, 1700-1706', *Historia Mathematica* 16, 224-248.

Mancosu, P.: 1996, *Philosophy of Mathematics and mathematical practice in the Seventeenth Century*, Oxford, Oxford University Press.

Pascal, B.: 1963, *Oeuvres Complètes*, Paris, Seuil.

Pasini, E.: 1988, 'Die Private Kontroverse des G. W. Leibniz mit sich selbst: Handschriften über die Infinitesimalrechnung im Jahre 1702', in A. Heinekamp (ed.): *Leibniz Tradition und Aktualität. V. Internationaler Leibniz-Kongress*, Hannover, Gottfried Wilhelm Leibniz Gesellschaft, 695-709.

Peiffer, J.: 1988, 'La conception de l'infiniment petit chez Pierre Varignon, lecteur de Leibniz et de Newton', in A. Heinekamp (ed.): *Leibniz Tradition und Aktualität. V. Internationaler Leibniz-Kongress*, Hannover, Gottfried Wilhelm Leibniz Gesellschaft, 710-717.

Peiffer, J.: 1989, 'Le problème de la Brachystochrone à travers les relations de Jean I Bernoulli avec L'Hospital et Varignon', *Studia Leibnitiana, Sonderheft* 17, 59-81.

Robinet, A.: 1986, 'Sens et rôle philosophique de la Spécieuses (SP^3): La Symbolique du Calcul Différentiel et Intégral', *Studia Leibnitiana, Sonderheft* 14, 48-63.

Roero, C.S.: 1989, 'The passage from Descartes' algebraic Geometry to Leibniz's infinitesimal Calculus in the writings of Jacob Bernoulli', *Studia Leibnitiana, Sonderheft* 17, 140-150.

Wurtz, J.P.: 1989, 'La naissance du Calcul Differentiel et le problème du statut des infiniment petits: Leibniz et Guillaume de L'Hospital', in H. Barreau, J. Harthong (eds.): *La Mathématique Non Standard: Histoire, Philosophie, Dossier scientifique*, Paris, CNRS, 13-41.

Fernando Joven es Doctor en Filosofía por la Universidad de Valladolid con una tesis titulada *Abraham Robinson y el análisis no estándar: ¿Una vuelta a Leibniz?* (1996, no publicada).