COMPLETUD DE DOS CALCULOS LOGICOS DE LEIBNIZ

(*Completeness of Two Logical Systems of Leibniz*)

Xavier CAICEDO*
Alejandro MARTIN*

Manuscrito recibido: 2000.5.28.
Versión final: 2001.3.20.

* Departamento de Matemáticas, Universidad de los Andes, Apartado Aéreo 4976, Bogotá, Colombia. E-mail: xcaicedo@uniandes.edu.co, martinmaldonado@yahoo.com

BIBLID [0495-4548 (2001) 16: 42; p. 539-558]

RESUMEN: Este trabajo se encuadra dentro de una nueva visión de la lógica de Leibniz, la cual pretende mostrar que sus escritos fueron ricos no solamente en proyectos ambiciosos (Característica Universal, Combinatoria, Mathesis) sino también en desarrollos lógico-matemáticos concretos. Se demuestra que su "Característica Numérica" que asigna pares de números a las proposiciones categóricas es una semántica para la cual la silogística aristotélica es correcta y completa, y que el sistema algebraico presentado en *Fundamentos de un Cálculo Lógico* es una lógica algebraica similar a la de Boole.

Descriptores: lógica, historia, Leibniz, silogística, álgebra de la lógica, corrección, completud.

ABSTRACT: *This work is a contribution to a new view of Leibniz's logic, pretending to show that his writings were not only rich in projects (Characteristica, Combinatoria, Mathesis), but also in concrete logico-mathematical developments. We prove that his "Numerical Characteristic", assigning pairs of numbers to terms of categorical propositions, is a complete and correct semantics for aristotelian syllogistic, and the algebraic system presented in* Fundamentals of Logical Calculus *is essentially a complete version of boolean algebraic logic.*

Keywords: *logic, history, Leibniz, syllogistic, algebra of logic, soundness, completeness.*

SUMARIO

Este trabajo nació de una intención similar a la de las primeras investigaciones de Sánchez-Mazas: reivindicar la figura de Leibniz como lógico matemático frente a lo que se dice de él en (Couturat 1901) e incluso en (Aiton 1985) que continúa siendo su biografía más divulgada.

Utilizando las herramientas lógico-filosófico-hermenéuticas de su momento, Sánchez-Mazas se enfrenta a la lectura de los cálculos de Leibniz, partiendo de la idea (que incluso Leibniz parece compartir) de que ninguno de los sistemas de asignación numérica cumple cabalmente su propósito, y por lo tanto su tarea es la de completar o corregir aquello que hizo falta (Sánchez-Mazas 1963)[1].

Por el contrario, en la primera parte de este trabajo mostramos utilizando estrategias contemporáneas que el segundo de los intentos de Leibniz expuesto en *Sobre los Números Característicos* (C, 245-47), donde a cada término de un argumento se asigna una pareja de números, constituye una semántica completa para la lógica aristotélica, de manera que una argumentación silogística es validada por la aritmética leibniciana si y solamente si es deducible de acuerdo a los cánones clásicos. Para ello, aprovechamos la re-lectura de la lógica aristotélica hecha por Corcoran y Smiley, que expresa con bastante fidelidad su sistematización medieval, asumida por Leibniz en su manuscrito *Definición Matemática de las Formas de los Silogismos* (C, 410-416).

Por lo que se conoce de los escritos de Leibniz, cerca de 1686 abandona el intento de construir un modelo aritmético de la lógica y se concentra en inventar un álgebra de la lógica.

A diferencia de Sánchez-Mazas, quien encuentra la forma de adaptar el sistema aritmético original a estos y otros ensayos, en la segunda parte de este trabajo consideramos el sistema propuesto en el manuscrito *Fundamentos de un Cálculo Lógico* (C, 421-23) como una pura lógica algebraica y demostramos que, con la adición de un solo axioma, su parte positiva resulta ser una cálculo completo en el sentido moderno que anticipa el álgebra de Boole [2].

De esta manera esperamos ilustrar cómo muchas de las concepciones modernas acerca de un cálculo lógico, incluyendo la posibilidad de múltiple interpretación y las relaciones ideales entre sintaxis y semántica, están en alguna forma ya presentes en los trabajos de Leibniz, y motivaron las diversas revisiones de sus sistemas.

1. *Completud del Sistema de los Números Característicos*

> Usando estos números, puedo demostrar inmediatamente, en una forma maravillosa, todas las reglas lógicas y puedo mostrar cómo uno puede saber si ciertos argumentos están en la forma adecuada (*Prefacio a la Característica Universal 1678-79* (G, VII, 184-89)).

Leibniz busca la manera de asignar números a los términos de los argumentos silogísticos de manera que sólo con los números se pueda verificar cuáles son válidos y cuáles no. El primer problema que aboca es el encontrar la relación entre los números característicos de A y de B que exprese la verdad de la proposición categórica 'Todo A es B'. Siguiendo a Aristóteles, considera verdadera la proposición universal afirmativa cuando el predicado B se encuentra contenido en el sujeto A. Es decir, dado un análisis del concepto A, se encuentra a B entre sus componentes. Un ejemplo simple es el siguiente: *'animal racional'* contiene *'animal'*. Se trata, pues, de la interpretación *intensional* que concibe los conceptos o propiedades, como compuestos de conceptos más simples. En cambio, para la interpretación *extensional* hoy imperante un concepto está determinada por el conjunto de individuos que lo satisfacen y la contenencia iría al contrario: 'Todo A es B' es verdadera si (la extensión de) A se encuentra contenida en (la de) B.

Leibniz piensa que los conceptos compuestos contienen a los simples de la misma manera que los números contienen sus factores primos, de ahí que la relación con la que pretende expresar la contenencia intensional sea la divisibilidad. En *Elementos de un Cálculo (Abril 1679)* (C, 49-57) propone lo siguiente: "Todo A es B" es verdadera si y sólo si el número característico de B divide al de A. La siguiente tarea es encontrar la relación que corresponde a la particular afirmativa: "Algún A es B". Observa Leibniz que esta proposición significa que existe un C que es A y a la vez es B. En términos de divisibilidad querría decir que existe un número c que es divisible por a y por b. Pero dado que para cualquier par de números a, b el producto ab cumple dicho requisito se tendría que esta proposición es verdadera para cualquier par de términos. Escribe Leibniz al final del texto arriba citado: "Por lo tanto, lo que hemos dicho es más restringido de lo que debería ser; así que debemos comenzar de nuevo". A partir de ahí cambia de estrategia y propone asignar a cada término dos números en vez de uno. La versión más elaborada de este intento que hemos encontrado es la que presenta en *Sobre los Números Característicos* (1679) [SNC], y en ella basaremos nuestro trabajo.

1.1. Formalización de la lógica aristotélica

Entre los grandes logros de Aristóteles está el descubrimiento de que es la forma de los argumentos la que garantiza su validez, y no la materia a la cual se refieren. En los *Analíticos Primeros* establece claramente la forma de las proposiciones que entran en los argumentos silogísticos utilizando variables para simbolizar los términos (predicados) involucrados, y determina la forma de los silogismos correctos lo mismo que los métodos deductivos para utilizarlos y transformar unos en otros. Es el ejemplo más antiguo que tenemos de una lógica formal. En la Edad Media se asigna una vocal a cada tipo de proposición categórica. Leibniz presenta en su manuscrito *Determinación Matemática de la Forma de los Silogismos* [DMFS (C, 412)] el lenguaje simbólico resultante:

> A, E, I, O están por [*significant*] la forma, y B, C, D están por la materia (...)
> ACD está por Todo C es D, ECD está por Ningún C es D
> IBC está por Algún B es C, OBD está por Algún B no es D.

Las vocales se usan para representar las constantes lógicas (*que están por la forma*) y las consonantes para los términos (*que están por la materia*). Leibniz explicita también que el sistema está basado en los silogismos perfectos de la primera figura, a los cuales se pueden reducir los demás silogismos válidos por reconocidos métodos de prueba: "A partir de estos pocos modos, voy a probar ahora los otros, usando subalternación, regreso y conversión" (C, 411). Prueba por *regreso* llama Leibniz a la prueba por contradicción, *subalternación* y *conversión* son reglas clásicas de transformación de proposiciones categóricas. Esta reducción ya había sido observada por Aristóteles, incluyendo la necesidad de la prueba "hipotética" por contradicción para lograr algunas de las reducciones.

Lukasiewicz fue el primer lógico en presentar una formalización moderna de la silogística aristotélica. Su trabajo es quizás el primero en analizar sistemáticamente una lógica antigua con herramientas modernas, y demuestra además la corrección del sistema de los números característicos con respecto a su formalización[4]. Sin embargo su interpretación de la lógica de Aristóteles fue fuertemente cuestionada por Corcoran y Smiley, quienes en los años setenta presentaron simultáneamente una formalización más fiel de la teoría expuesta en los *Analíticos Primeros*. Según ellos, la silogística consta únicamente de reglas y no de axiomas como la presenta Lukasiewicz, y solamente contempla dos tipos de deducción compleja por medio de silogismos encadenados. Aunque estos autores no mencionan a

Leibniz, su formalización refleja también con fidelidad la descripción arriba mencionada que hace Leibniz de la lógica de Aristóteles. Si bien Leibniz en algún momento considera algunas proposiciones como axiomas, las usa únicamente para demostrar algunas de las reglas primitivas, que son las mismas de (Corcoran 1972). Y aunque no hace Leibniz explícita una noción precisa de deducción compleja, la lógica tradicional consideraba esta noción tan obvia, en cuanto discurso que utilizaba en forma encadenada las reglas de inferencia fundamentales, que era innecesario definirla. Esta es una de sus diferencias más significativas con la lógica moderna.

1.2. Sistema deductivo

Seguiremos en líneas generales la formalización de Corcoran.

Usamos el simbolismo tradicional para denotar las proposiciones categóricas: Aab, Oab, Iab, Eab, excepto por el uso de minúsculas para los términos, y aceptamos sólo aquellas cuyos términos son diferentes (es decir, Acc o Ebb no hacen parte del lenguaje).

Siguiendo a Leibniz (y a Corcoran) tomamos como reglas de inferencia primitivas los silogismos perfectos de la primera figura y las reglas de subalternación y conversión. Formalmente, y utilizando $\vdash$ como símbolo de deducción:

1.2.1. Reglas de inferencia

Silogismos: (SP1) Aab, Abc $\vdash$ Aac (SP3) Aab, Ica $\vdash$ Icb
(SP2) Eab, Aca $\vdash$ Ecb (SP4) Eab, Ica $\vdash$ Ocb

Subalternación: (S) Aab $\vdash$ Iab
Conversiones: (C1) Eab $\vdash$ Eba (C2) Iab $\vdash$ Iba.

La noción de deducción implícita en los textos de Aristóteles es la de una sucesión de silogismos encadenados que extraen conclusiones de una multiplicidad de postulados aceptados como ciertos. También se permiten deducciones silogísticas que incluyen el uso de "hipótesis" adicionales que no se consideran aceptadas como verdaderas, sino puestas provisionalmente para efectos de *prueba por reducción al absurdo* u otros tipos de pruebas hipotéticas. De hecho, de los métodos "hipotéticos" solamente el de reducción al absurdo se explica y utiliza sistemáticamente en los textos de Aristóteles. Seguramente no es coincidencia que Leibniz solamente considere necesario este principio además de las reglas de inferencia primitivas. La formalización de Corcoran captura bien esta noción de deducción implícita en los *Analíticos Primeros:*

1.2.2. Deducción directa. Una *deducción directa de* P *a partir de un conjunto de proposiciones* Σ es una lista finita de proposiciones $P_1,\ldots, P_n$ donde $P_n = P$ tal que para todo $k \leq n$: o bien $P_k \in \Sigma$, o bien P_k resulta de P_j para algún $j < k$ por (S), (C1) o (C2), o bien P_k resulta de P_j, P_h para algunos j, $h < k$ por (SP1), (SP2), (SP3) o (SP4).

Dada una proposición categórica P definimos su *contradictoria* $\neg P$, de la siguiente manera: $\neg(Aab)=Oab$, $\neg(Iab)=Eab$, $\neg(Oab)=Aab$, $\neg(Eab)=Iab$.

1.2.3. Deducción indirecta. Una *Deducción indirecta de* P *a partir de un conjunto de proposiciones* Σ es una deducción directa $P_1,\ldots, P_n$ a partir de $\Sigma \cup\{\neg P)$ en la cual $P_n = \neg P_j$ para algún $j < n$.

Dado un conjunto de proposiciones Σ, escribimos $\Sigma \vdash P$ para indicar que existe una deducción directa o indirecta de P a partir de Σ.

Fue observado y parcialmente demostrado por Aristóteles que todos los silogismos podían reducirse a los dos universales de la primera figura, es decir a (SP1) y (SP2). Esto corresponde al hecho de que las reglas del sistema que se acaba de introducir no son independientes pues las reglas de inferencia de la segunda columna son deducibles de las de la primera, como puede comprobar fácilmente el lector.

1.3. Semántica numérica de Leibniz

Ya vimos cuál fue la intuición que guió a Leibniz a hacer la primera propuesta de relación numérica, donde la idea de que un concepto estuviera contenido en otro se veía reflejada en los números por la divisibilidad. Con ello tenía resuelto el problema para las proposiciones de la forma "Todo A es B". Sin embargo, no era posible hacerlo para las de la forma "Algún A es B". Para nosotros, esta última proposición afirma que existe un individuo que es A y a la vez es B. Pero Leibniz no quiere tratar con la existencia de individuos actuales, sino con conceptos o propiedades. Por lo tanto "Algún A es B" querría decir que es posible un concepto que sea A y sea B. Y para que algo sea posible, él considera que es suficiente que no implique una contradicción. Debe, pues, encontrar la forma de verificar mediante los números cuándo dos términos son *compatibles* (o *composibles*) y cuándo no. He aquí su solución:

En cada proposición categórica existe el número característico
Del sujeto: $+s$ $-\sigma$
Del predicado: $+p$ $-\pi$
Y dos ecuaciones: $ks = mp$ y $\kappa\sigma = \mu\pi$.
Observando que los números expresados en las correspondientes letras griegas y latinas son primos relativos, es decir que no tienen divisores comunes distintos de la unidad.
$s = mp/k$ $\sigma = \mu\pi/\kappa$ $p = ks/m$ $\pi = \kappa\sigma/\mu$
En una proposición universal afirmativa $k = 1$ y $\kappa = 1$
En una particular negativa ó k es mayor que 1 ó κ es mayor que 1
En una universal negativa ó s y π ó σ y p no son primos relativos
En una particular afirmativa tanto s y π como σ y p son primos relativos. [SNC]

Decide pues asignar a cada término A dos números, uno positivo *pa* (que corresponde a las propiedades que afirma) y otro negativo *na* (las que niega). Como todo término es posible, tenemos que pa y na no deben contener ambos una misma propiedad, y como estamos identificando las propiedades con los números primos, el primer requerimiento que obtenemos es que pa y na deben ser primos relativos. "Algún A es B" quiere decir entonces que A y B no se contradicen, por lo tanto no existe una propiedad que A afirme y B niegue y viceversa, es decir, pa y nb por un lado, y na y pb por el otro, son primos relativos.

Considerando asignaciones arbitrarias de números característicos a los términos, podemos expresar las condiciones que exige Leibniz a sus números en la forma siguiente:

1.3.1. Definición. Una *valuación* es una función V(x) que asigna a cada término x del lenguaje un par de números naturales relativamente primos (px, nx). Decimos que V *satisface* una proposición P, en símbolos $V \models P$, si se cumple uno de los casos siguientes según la forma de P:

$V \models Aab$ ssi $pb \mid pa$ y $nb \mid na$ $V \models Iab$ ssi tanto pa, nb como pb, na son primos relativos

$V \models Oab$ ssi $V \not\models Aab$ $V \models Eab$ ssi $V \not\models Iab$.

Dado un conjunto de proposiciones Σ, $V \models \Sigma$ significa que $V \models P$ para todo $P \in \Sigma$.

$\Sigma \models P$ significa que para toda valuación V tal que $V \models \Sigma$ se tiene $V \models P$.

Es fácil verificar que las reglas primitivas de la lógica aristotélica son válidas bajo las valuaciones leibnicianas, es decir:

1.3.2. Lema. (S) Aab $\models$ Iab; (C1) Eab $\models$ Eba; (C2) Iab $\models$ Iba; (SP1) Aab, Abc $\models$ Aac; (SP2) Eab, Aca $\models$ Ecb; (SP3) Aab, Ica $\models$ Icb; (SP4) Eab, Ica $\models$ Ocb.

Dem. Es trivial para las reglas de conversión y para (SP1). Presentamos la prueba de (SP2), las demás son muy parecidas. Sea V(x) = (px, nx) una valuación tal que V $\models$ Eab y V $\models$ Aca, entonces o bien pa y nb, o bien pb y na, no son primos relativos, y además pa | pc y na | nc. Si pa y nb no son primos relativos pc y nb tampoco lo son, pues pa | pc. Por un argumento simétrico, si pb y na no son primos relativos tampoco lo son pb y nc. Esto significa que V $\models$ Ecb.

1.3.3. Teorema de corrección. Dado un conjunto de proposiciones Σ *y una proposición* P: $\Sigma \vdash$ P *implica* $\Sigma \models$ P. □

Dem. Si P se obtiene de Σ por una deducción directa $P_1, \ldots, P_n$ = P, el lema anterior permite probar por inducción en $k \leq n$ que si V $\models$ S entonces V $\models$ P_k. Si P se obtiene de Σ por una deducción indirecta $P_1, \ldots, P_n$ con $P_n = \neg P_j$, $j < n$, tenemos por el caso anterior que si V $\models$ $\Sigma \cup \{\neg P\}$ entonces V $\models$ P_j, $\neg P_j$, lo cual es imposible por definición de satisfacción. Así, V $\models$ S implica V $\not\models \neg$P, o sea V $\models$ P. □

1.4. Completud

La idea de que la silogística resultaba completa con respecto a la valuación leibniciana nos fue sugerida al leer el último párrafo de [SNC], en el que dice:

> Y por lo tanto el cálculo de todos los modos y figuras se puede derivar mediante nada más que reglas de números. Si queremos saber si una figura funciona en virtud de su forma [*procedat vi formae*], miramos si la contradictoria de la conclusión es compatible con las premisas, es decir, si se pueden encontrar números que satisfagan las premisas y la contradictoria de la conclusión al mismo tiempo. Si no se puede encontrar ninguno, del argumento se sigue la conclusión por virtud de su forma.

Una forma equivalente de expresarlo es: la conclusión se sigue del argumento en virtud de su forma si *toda* valuación que satisfaga las premisas satisface la conclusión, que es la forma como enunciaremos el teorema de completud. En los textos que se conocen anteriores a [SNC], para Leibniz bastaba que *una* valuación satisfaciera tanto las premisas como la conclusión para que la validez de un argumento quedara probada, lo cual evidentemente corrige Leibniz en el párrafo citado. En lo que sigue mostramos que, el sistema de los números característicos resulta ser bajo esta concepción, no solamente para los modos y figuras clásicas como afirma Leibniz sino para los argumentos silogísticos encadenados.

1.4.1. Definición. Un conjunto de proposiciones Σ es *inconsistente* si existe alguna proposición P, tal que $\Sigma \vdash P$ y $\Sigma \vdash \neg P$, de lo contrario es *consistente*.

1.4.2. Teorema. Dado un conjunto consistente finito de proposiciones, existe una valuación que lo satisface.

Dem. Sea T el conjunto de términos que ocurren en un conjunto consistente finito Σ y sea $\Sigma^* = \{P: \Sigma \vdash P\}$. Entonces T y Σ^* son finitos; por tanto, podemos fijar una función inyectiva c: $T \rightarrow$ Primos y definir V(a) = (Pa, Na) para cada $a \in T$ de la manera siguiente:

$$Pa = c(a) \prod\{c(b): Aab \in \Sigma^*\},\ Na = \prod\{c(d): Ead \in \Sigma^*\}.$$

Para ver que V es efectivamente una valuación, supóngase por contradicción que existe $a \in T$ y un primo e tal que $e \mid Pa$ y $e \mid Na$. Entonces, por inyectividad de c, e = c(b) tal que b = a o $Aab \in \Sigma^*$, y $Eab \in \Sigma^*$. Pero no puede ser el caso que b = a, pues Eaa no es una expresión de nuestro sistema. Por tanto Aab, $Eab \in \Sigma^*$, y Σ resulta inconsistente por (S).

Verificamos ahora por casos que $V \models P$ para toda proposición $P \in \Sigma^*$:

i) P = Aab. Sea e un primo tal que $e \mid Pb$, entonces e = c(d) donde o bien d = b, o bien $Abd \in \Sigma^*$. Como $Aab \in \Sigma^*$, en el primer caso tendríamos e =c(b) | Pa por definición de V. En el segundo caso, si $d \neq a$, tendríamos $Aad \in \Sigma^*$ por (SP1) y así también e = c(d) | Pa. Si d = a, e = c(a) | Pa trivialmente. En suma, Pb | Pa. Ahora, sea f un primo tal que f | Nb: entonces f = c(d), donde $Ebd \in \Sigma^*$. Si $d \neq a$, tenemos $Ead \in \Sigma^*$ (SP2) y por tanto f = c(d) | Na. Si d = a, tenemos $Eba \in \Sigma^*$ que implica $Eab \in \Sigma^*$ (C1) y por definición f = c(a) | Na. En suma, Nb | Na, lo que termina la demostración de $V \models Aab$.

ii) P = Eab. Entonces c(b) | Na por lo que $Eab \in \Sigma^*$, y c(b) | Pb trivialmente, luego $V \models Eab$.

iii) P = Iab. Si V $\not\models$ Iab, existe un primo e tal que (e | Pa y e | Nb) ó (e | Na y e | Pb). Supongamos, sin pérdida de generalidad, el primer caso. Entonces e = c(d) donde, o bien d = a o bien Aad $\in \Sigma^*$, y por otro lado Ebd $\in \Sigma^*$. Si d = a, tenemos por hipótesis {Iab, Eba} $\subseteq \Sigma^*$, que da una inconsistencia por (C1). Si Aad $\in \Sigma^*$, tenemos {Iab, Aad, Ebd} $\subseteq \Sigma^*$ que da la inconsistencia {Iab, Eab} por (C1) y (SP2).

iv) P = Oab. Si V $\not\models$ Oab, entonces Pb | Pa y Nb | Na. Por tanto c(b) | | Pa, que implica Aab $\in \Sigma^*$. Tenemos entonces la inconsistencia {Aab, Oab} $\subseteq \Sigma^*$. □

1.4.3. Teorema de completud. Dado un conjunto finito Σ *de proposiciones,* $\Sigma \models$ P *implica* $\Sigma \vdash$ P.

Dem. Si $\Gamma \nvdash$ P entonces $\Gamma \cup \{\neg P\}$ es consistente, de lo contrario se tendría $\Gamma \vdash$ P por deducción indirecta. Por el Teorema 1.4.2 debe existir una valuación V que satisface a Γ pero no a P; es decir, $\Gamma \not\models$ P. □

1.4.4. Comentario. No deja de llamar la atención que, por los textos de Leibniz que se conocen, parece que después de [SNC] abandonó el proyecto de la característica numérica. En textos posteriores se refiere al mismo como si lo hubiese dejado insatisfecho. ¿Sería posible que hubiese encontrado la solución del problema que enfrentaba y no se diera cuenta? Cuando Leibniz encuentra una valuación que valida un silogismo incorrecto, dice que parece encontrarse una vez más en un callejón sin salida (este mismo ejemplo es utilizado por Couturat para mostrar la imperfección del sistema). Como se observa en (Sánchez-Mazas 1963, p. 59) el error se debió a una elección desafortunada de los números característicos para los términos, y sobre todo a creer que la corrección de un silogismo quedaría demostrada con una asignación particular, ya que habría también una valuación que mostraría su no-corrección. Se desprende del texto citado al inicio de esta sección que Leibniz sabía bien que para verificar la validez de un silogismo no era suficiente ensayar con una valuación (como si lo es para verificar su invalidez). Su frustración se explica talvez porque aspiraba a una "característica" simétrica en la cual fuese posible determinar con una sola asignación y cálculo tanto la validez como la invalidez de los argumentos. El teorema de completud que hemos demostrado (y en cuya validez Leibniz creía por lo que hemos visto) exige el ensayo de un número grande de valuaciones. Leibniz no tenía razones para suponer que este número fuese siquiera finito; y aún si hubiese descubierto que era suficiente ensayar una cantidad finita de valuaciones, como se desprende de la prueba del teorema, el encontrar todas las asignaciones numéricas que validan un número grande de premisas silogísticas es demasiado complicado como para que Leibniz lo considerase como una característica útil[5]. Sin embargo, es importante resaltar la genialidad que yace en el sistema de dos números característicos, ya que gracias a esta estrategia consigue Leibniz un sistema completo en el sentido moderno, consistente además con las ideas aristotélicas. El punto más delicado es que logra definir una exclusión lógica sin necesidad de recurrir a términos negativos ni a una totalidad lógica, ya que en este último caso la totalidad habría consistido en un término que pudiera contener todas las propiedades, en particular propiedades excluyentes. Aparte de su posible infinitud, tal término sería necesariamente contradictorio, lo que iría en contra de uno de sus principios fundamentales (todo término es posible) e impediría validar para todo término la subalternación.

2. Completud de una Lógica Algebraica de Leibniz

En el manuscrito *Reglas a Partir de las Cuales se Puede Tomar una Decisión 1679* (C, 77-84), uno de sus textos acerca de la característica numérica, Leibniz escribe: "Podemos también utilizar letras en lugar de números, como en álgebra." En un principio muchas de las pruebas que debería hacer con letras (generales) las hace con números (particulares). Pero enuncia algebraicamente las reglas generales, por ejemplo: "Todo A es B ssi a = mb".

En los años posteriores a su desarrollo de la característica numérica (1679-1690) Leibniz continuó su estudio de la lógica tratando de establecer las "proposiciones verdaderas en sí mismas" (axiomas) y las "inferencias verdaderas en sí mismas" (reglas de inferencia). Estas ideas aparecen por primera vez en *Espécimen de un Cálculo Universal* (G, VII, 218-243) y mejor aún en *Desarrollos Posteriores al Espécimen de un Cálculo Universal* (G, VII, 221-227). En estos ensayos las proposiciones son de la forma 'a es b' y los sistemas que propone están a medio camino entre la lógica aristotélica y un álgebra de términos. Es en las *Investigaciones Generales sobre el Análisis de los Conceptos y las Verdades 1686* [IG] (C, 356-399) donde une la sintaxis algebraica implícita en la característica numérica con la axiomática que había comenzado a desarrollar. La clave para algebrizar la proposición categórica 'Todo a es b', que antes expresaba 'a es b', la encuentra en la ecuación que inicialmente utilizó para codificar esta proposición en forma numérica: "a = yb para algún y". Con esta traducción de las proposiciones categóricas aristotélicas a expresiones algebraicas comienza a independizarse de la silogística de Aristóteles para intentar desarrollar un cálculo de igualdades y desigualdades, con una visión que nos parece tan moderna como la de Boole. En [IG] se presentan muchas alternativas, deducciones y ensayos en esta dirección, sin decidirse específicamente por ninguna. Una de las expresiones más avanzadas de ese intento se encuentra en *Fundamentos de un Cálculo Lógico 1690* [FCL], texto en el que nos basaremos para lo que sigue. En este texto, Leibniz ha abandona la mayoría de consideraciones aristotélicas para concentrarse en las puramente algebraicas, y se decide claramente por un sistema de identidades y desigualdades en el cual la regla principal es la substitución de iguales para el caso de identidades, y una mezcla de sustitución y reducción al absurdo en el caso de las desigualdades. En este texto nos basaremos para lo que sigue.

2.1. Sistema algebraico implícito en Fundamentos de un Cálculo Lógico

Formalizamos aquí el calculo de identidad implícito en [FCL], sin tocar el de desigualdades que no está claramente desarrollado y exigiría consideraciones no algebraicas.

El alfabeto consiste en un conjunto de *términos simples*, *TS*, más los símbolo $\neg$, $=$, (,). El conjunto de *términos* T es el mínimo conjunto que contiene a *TS* y cumple: A, B $\in$ T entonces $\neg$A $\in$ T y (AB) $\in$ T. Una *proposición* es una igualdad de la forma: A = B, donde A, B $\in$ T.

2.1.1. Axiomas. Todas las proposiciones de la forma siguiente:

1. $AA = A$
2. $\neg\neg A = A$
3. $AB = BA$
4. $A(BC) = (AB)C$
5. $\neg B = \neg B\neg(AB)$
6. $A\neg B = A\neg(AB)$.

2.1.2. Deducción. Dado un conjunto de proposiciones Σ, una Σ-*deducción* es una sucesión de términos $D_1,\ldots,D_n$ tal que para todo $i < n$, D_{i+1} se obtiene de reemplazar en D_i una ocurrencia de P por Q, o viceversa, para alguna proposición $P = Q \in \Sigma \cup$ *Axiomas*.

$\Sigma \vdash A = B$ si existe una Σ-deducción tal que D_1 es A y D_n es B.

Si Σ es vacío escribimos $\vdash A = B$.

Es fácil verificar que si $\Sigma \vdash A_i = B_i$ para i = 1,..., k, y $\{A_1 = B_1,..., A_k = = B_k\} \vdash C=D$ entonces $\Sigma \vdash C=D$. También se tiene: $A = B, B=C \vdash A = C$, $A = B \vdash B = A$, y $\vdash A = A$.

Evidentemente, si D_i, D_{i+1} forman parte de una Σ-*deducción* entonces $\Sigma \vdash D_i = D_{i+1}$. En consecuencia, escribiremos las deducciones como cadenas de igualdades $D_1 = D_2(J_1) = ... = D_k(J_k)$, con una posible justificación (J_i) de cada substitución. En forma no muy diferente de como lo hace Leibniz en [FCL].

2.1.3. Comentario. Aclaramos la relación de nuestra formalización con el sistema que presenta Leibniz en [FCL]. Donde Leibniz utiliza los signos 'no-' y '∞', hemos utilizado '¬' y '='. Los axiomas 1, 2, 3 son los únicos que Leibniz tiene por proposiciones indemostrables, aunque asume implícitamente el axioma 4. Es interesante notar como este mismo principio (la asociatividad) constituye el hueco señalado por Frege en la demostración leibniciana de 2 + 2 = 4 en los *Nuevos Ensayos.* Sin embargo, este axioma es innecesario si se permite la yuxtaposición consecutiva de más de dos términos como operación lógica primitiva, lo cual parece ser el punto de vista de Leibniz.

El axioma 5, que aparece ya en [IG], es una proposición que utiliza como postulado en algunas de sus deducciones y cree debería ser demostrable de los axiomas que ha asumido, aunque observa no haber podido hacerlo. Hoy es fácil demostrar, utilizando valuaciones adecuadas, que en realidad es independiente de los demás axiomas. El axioma 6 es el único no mencionado por Leibniz, a pesar de su similitud estructural con el axioma 5. Creemos, sin embargo, que encaja perfectamente en el espíritu del sistema que Leibniz buscaba desarrollar, y es suficiente (y necesario, pues es independiente) para alcanzar la completud que Leibniz implícitamente buscaba.

La única regla de inferencia que Leibniz se permite en la deducción de identidades a partir de sus axiomas en [FCL] es la substitución de iguales, en concordancia con su concepción innumerables veces expresada en este y otros textos: "A=B quiere decir que una puede ser substituida por la otra, B por A o A por B, i.e. que son equivalentes" (FCL (C, 421)). La noción de deducción propuesta no es sino una formalización de esta regla.

2.2. Desarrollo del sistema

Para Leibniz era muy importante poder expresar dentro de su sistema 'A contiene B'. Hemos visto como sus trabajos anteriores lo llevaron a expresarlo en la forma: $A = YB$ para algún Y. Sin embargo, si A contiene a B, al añadírselo no se le debe estar añadiendo nada. Esto se expresa algebraicamente de la siguiente manera: $A = AB$. Veamos como prueba Leibniz que ambas expresiones son equivalentes:

2.2.1. Teorema (Leibniz). $A = YB \vdash A = AB$

Dem. $A = YB$ (hipótesis) $= Y(BB)$ (axioma 1) $= (YB)B$ (axioma 4) $= AB$ (hipótesis). □

Otro resultado esencial para Leibniz era la contraposición aristotélica (Todo A es B implica que Ningún B es no-A). Vimos que 'Todo A es B' corresponde a $A = AB$, 'Ningún B es no-A' corresponde por lo tanto a $\neg B = \neg B \neg A$. Es el axioma A5 el que le permite demostrarlo, razón que pudo llevarlo a considerarlo como un postulado indispensable.

2.2.2. Teorema (Leibniz). $A = AB \vdash \neg B = \neg B \neg A$.

Dem. $\neg B = \neg B \neg(AB)$ (axioma 5) $= \neg B \neg A$ (hipótesis). □

2.2.3. Teorema (Leibniz). $\vdash C = C \neg(A \neg C)$

Dem. $C = \neg\neg C$ (axioma 2) $= \neg\neg C \neg(A \neg C))$ (axioma 5) $= C \neg(A \neg C)$ (axioma 2). □

2.2.4. Teorema. a. $\vdash (A \neg A)C = (A \neg A)$, *b.* $\vdash \neg(A \neg A)C = C$, *c.* $\vdash A \neg A = B \neg B$, *d.* $\vdash A(\neg(A \neg B) \neg(B \neg A)) = AB = B(\neg(A \neg B) \neg(B \neg A))$.

Dem. a. $(A \neg A)C = \neg A(A \neg\neg C)$ (axiomas 2, 3, 4) $= \neg A(A \neg(A \neg C))$ (axioma 6) $= A(\neg A \neg(A \neg C))$ (axiomas 3, 4) $= A \neg A$ (axioma 5).
b. $\neg(A \neg A)C = \neg((A \neg A) \neg C)C$ (2.2.4a) $= C$ (2.2.3).
c. $A \neg A = (A \neg A)(B \neg B)$ (2.2.4a) $= (B \neg B)(A \neg A) = B \neg B$ (2.2.4a).
d. $A(\neg(A \neg B) \neg(B \neg A)) = (A \neg(A \neg B)) \neg(B \neg A) = (AB) \neg(B \neg A)$ (axiomas 2, 6) $= A(B \neg(B \neg A)) = A(BA)$ (axiomas 2, 6) $= AB = BA = B(\neg(B \neg A) \neg(A \neg B))$ (simetría) $= B(\neg(A \neg B) \neg(B \neg A))$. □

2.2.5. Teorema. $\neg(A \neg B) \neg(B \neg A) = \neg(P \neg P) \dashv\vdash A = B$.

Dem. La prueba hacia la izquierda es trivial por 2.2.4c. Probamos la otra dirección: $A = A\neg(P\neg P)$ (2.2.3b) $= A(\neg(A\neg B)\neg(B\neg A))$ (hip.) $=$
$= B(\neg(A\neg B)\neg(B\neg A))$ (2.2.3.d) $= B\neg(P\neg P)$ (hip.) $= B$ (2.2.3b). □

2.2.6. Teorema. $B = BA, \neg B = \neg BA \vdash A = \neg(P\neg P)$.

Dem. $A = \neg\neg A$ (axioma 2) $= \neg(\neg A\neg(AB))$ (axioma 5) $= \neg(\neg A\neg B)$ (hip.) $=$
$= \neg(\neg A(\neg BA))$ (hip) $= \neg((A\neg A)\neg B)$ (axiomas 3, 4) $= \neg(A\neg A)$ (2.2.4a) $=$
$= \neg(P\neg P)$ (2.2.4c). □

En adelante, dados los términos F, A, B, y suponiendo que A ocurre en F, la expresión F[A/B] denotará el resultado de reemplazar alguna ocurrencia de A en F por B.

2.2.7. Lema de introducción. $\vdash AF = AF[M/AM]$.

Dem. Por inducción en la construcción del término F. Si F es simple, entonces F es M y por lo tanto $\vdash AF = AM = (AA)M = A(AM) =$
$= AF[M/AM]$. Supongamos ahora que se tiene la deducción para D y E.
Si $F = \neg D$ tenemos: $\vdash AF = A\neg D = A\neg(AD)$ (axioma 5) $=$
$= A\neg(AD[M/AM])$ (hip. ind.) $= A\neg(D[M/AM])$ (axioma 5) $=$
$= AF[M/AM]$.

Si $F = DE$, supongamos que la ocurrencia de M que se reemplaza está en E. Entonces $\vdash AF = A(DE) = (AE)D$ (axiomas 3, 4) $= (AE[M/AM])D$ (ind. hip.) $= A(DE[M/AM])$ (axiomas 3, 4) $= AF[M/AM]$. □

2.2.8. Corolario (Lema de extracción). $\vdash AF = AF[AM/M]$.

2.2.9. Teorema de la deducción. Si $A = \neg(P\neg P), E_1,\ldots, E_n \vdash \neg(P\neg P) = B$, *entonces* $E_1,\ldots, E_n \vdash A = AB$.

Dem. Sea $\neg(P\neg P) \equiv B_1, B_2,\ldots, B_m \equiv B$ una deducción de $\neg(P\neg P) = B$ a partir de las hipótesis indicadas. Probamos por inducción en $j \leq m$ que: $E_1,\ldots, E_n \vdash A = AB_j$. Si $j = 1$, B_j es $\neg(P\neg P)$ y así $\vdash A = A B_j$, por 2.2.4; por lo tanto $E_1,\ldots, E_n \vdash A = AB_j$. Supongamos que $E_1,\ldots, E_n \vdash A = AB_j$ $(j < m)$ y consideremos B_{j+1}.

Caso 1: B_{j+1} se obtiene de B_j usando substitución con algún $E_1,\ldots, E_n$, entonces trivialmente $E_1,\ldots, E_n \vdash A = AB_j$ (ind. hip.) $= AB_{j+1}$, utilizando la misma substitución que transforma B_j en B_{j+1} en la deducción original.

Caso 2: B_{j+1} se obtiene de B_j substituyendo con $A = \neg(P\neg P)$. Hay dos subcasos. Si B_{j+1} resulte de reemplazar una ocurrencia de A en B_j por $\neg(P\neg P)$ tenemos: $\vdash AB_j = AB_j[A/A\neg(P\neg P)]$ (2.2.4b) $= AB_j[A/\neg(P\neg P)]$) (lema de extracción) $= AB_{j+1}$. Si por el contrario B_{j+1} resulta de substituir $\neg(P\neg P)$ por A, tenemos: $\vdash AB_j = AB_j[\neg(P\neg P)/A\neg(P\neg P)]$ (lema de introducción) $= AB_j[\neg(P\neg P)/A]$) (2.2.4b) $= AB_{j+1}$. En ambos casos tenemos $\vdash AB_j = AB_{j+1}$. Por tanto, $E_1,\ldots, E_n \vdash A = AB_j$ (hip. ind.) $= AB_{j+1}$. □

2.3. Semántica proposicional para el sistema ecuacional de Leibniz

Los "términos" en la lógica algebraica de Leibniz representan en primera instancia, conceptos o propiedades generales (animal, racional, etc.), de acuerdo con la tradición aristotélica y con las propias concepciones de Leibniz. Sin embargo, Leibniz admite explícitamente la posibilidad de tomarlos como proposiciones cuando afirma: "Así como todo término puede ser entendido como proposición toda proposición puede ser entendida como término" [IG]. Ello justificaría la semántica de dos valores de verdad que introducimos enseguida para examinar la completud del sistema. Sin embargo, nos interesa esta semántica más bien como instrumento para demostrar la equivalencia del sistema leibniciano con los cálculos proposicionales modernos (ya que negación y conjunción, representada por yuxtaposición en Leibniz, forman un conjunto completo de conectivas), en especial el álgebra booleana, la cual puede también concebirse indistintamente como una álgebra de proposiciones o una álgebra de predicados.

2.3.1. Definición. Una *valuación* es una función α: $T \rightarrow \{0,1\}$ que cumple las siguientes condiciones: $\alpha[AB] = \alpha[A]\alpha[B]$ y $\alpha[\neg A] = 1 - \alpha[A]$, correspondientes a las tablas booleanas clásicas de la conjunción y la negación. Decimos que α *satisface* a una proposición $A = B$ si $\alpha(A) = \alpha(B)$. Dadas proposiciones $E_1,\ldots, E_n$, $A = B$, escribimos $E_1,\ldots, E_n \vDash A = B$ si toda valuación que satisface a $E_1,\ldots, E_n$ satisface a $A = B$.

2.3.2. Lema. $\alpha[A] = \alpha[B]$ *si y solamente si* $\alpha[\neg(A\neg B)\neg(B\neg A)] = 1$.

Dem. $\alpha[\neg(A\neg B)\neg(B\neg A)] = 1$ si y solamente si $\alpha[A\neg B] = \alpha[B\neg A] = 0$, lo cual es posible si y solamente si $\alpha[A] = \alpha[B]$.

La *corrección* del sistema, es decir, que de $E_1,\ldots, E_n \vDash A = B$ se sigue $E_1,\ldots, E_n \vdash A = B$, es inmediata, pues $\alpha(P) = \alpha(Q)$ implica $\alpha(D) =$

$= \alpha(D[P/Q])$. El resto sale por inducción en la longitud de las deducciones. Procedemos ahora a demostrar su *completud.*

Dado $A \in T$ y una valuación α, defínase la proposición A^α como "$A = \neg(P\neg P)$" si $\alpha[A] = 1$, y como "$A = \neg(P\neg P)$" si $\alpha[A] = 0$.

2.3.3. Lema. Sean $P_1, P_2,..., P_n$ *los términos simples que ocurren en A y sea* α *una valuación, entonces* $P_1{}^\alpha, P_2{}^\alpha,..., P_n{}^\alpha \vdash A^\alpha$.

Dem. Siempre se tiene: $A^\alpha \vdash (\neg A)^\alpha$ y $A^\alpha, B^\alpha \vdash (AB)^\alpha$, como se indica en la tabla:

$\alpha(A)$	$\alpha(B)$	A^α	B^α	$(\neg A)^\alpha$	$(AB)^\alpha$
1	1	$A = \neg(P\neg P)$	$B = \neg(P\neg P)$	$\neg A = P\neg P$ (axioma 2)	$AB = \neg(P\neg P)$ (axioma 1)
1	0	$A = \neg(P\neg P)$	$B = P\neg P$		$AB = P\neg P$ (2.2.4a)
0	1	$A = P\neg P$	$B = \neg(P\neg P)$	$\neg A = \neg(P\neg P)$ (subst.)	$AB = P\neg P$ (2. 2.4a)
0	0	$A = P\neg P$	$B = P\neg P$		$AB = P\neg P$ (axioma 1)

El resultado se sigue entonces fácilmente por inducción en la complejidad del término A. □

2.3.4. Teorema de Completud. El sistema algebraico es completo, es decir, si $E_1,..., E_n \models A=B$ *entonces* $E_1,..., E_n \vdash A=B$. *En particular,* $\models A=B$ *implica* $\vdash A=B$.

Dem. Verificamos en primer lugar que si $\alpha[A] = 1$ para toda valuación α, entonces $\vdash A = \neg(P\neg P)$. Bajo la hipótesis, A^α es $A = \neg(P\neg P)$ para cualquier valuación α, y por el lema 2.3.3 tenemos que si $P_1, P_2,..., P_n$ son los términos simples de A: $P_1{}^\alpha, P_2{}^\alpha,..., P_n{}^\alpha \vdash A = \neg(P\neg P)$. Ahora, una valuación α de $P_2,..., P_n$ puede extenderse a $P_1, P_2,..., P_n$ de dos maneras: o bien $\alpha(P_1) = 1$, en cuyo caso tenemos: $P_1 = \neg(P\neg P), P_2{}^\alpha,..., P_n{}^\alpha \vdash A = \neg(P\neg P)$, o bien $\alpha(P_1) = 0$ que da: $P_1 = P\neg P, P_2{}^\alpha,..., P_n{}^\alpha \vdash A = \neg(P\neg P)$. Por el teorema de la deducción tenemos: $P_2{}^\alpha,..., P_n{}^\alpha \vdash P_1 = P_1A$ y $P_2{}^\alpha,..., P_n{}^\alpha \vdash \neg P_1 = \neg P_1A$, y por el teorema 2.2.5: $P_2{}^\alpha,..., P_n{}^\alpha \vdash A = \neg(P\neg P)$. Como esto vale para cualquier valuación de $P_2,..., P_n$, podemos seguir eliminando de la misma manera $P_2,..., P_n$ hasta obtener: $\vdash A = \neg(P\neg P)$.

En lo que sigue, utilizaremos la abreviación $A\leftrightarrow B$ para denotar el término $\neg(A\neg B)\neg(B\neg A)$. Note que si $\models A = B$ entonces $\alpha[A\leftrightarrow B] = 1$ para toda α por el Lema 2.3.2. Entonces, por lo que hemos probado en el párrafo anterior, $\vdash A\leftrightarrow B = \neg(P\neg P)$, y por el Teorema 2.2.5, $\vdash A = B$. Ahora, probamos por inducción en $n \geq 0$ que si $E_1,\ldots, E_n \models A = B$, entonces $E_1,\ldots, E_n \vdash A = B$. El caso $n = 0$, ausencia de hipótesis, es lo que acaba de probarse. Para $n \geq 1$, sea E_1 la proposición $C = D$, entonces por el Lema 2.3.2 y considerando los casos $\alpha[C] = \alpha[D]$ y $\alpha[C] \neq \alpha[D]$ se concluye que $E_2,\ldots, E_n \models (C\leftrightarrow D) = (C\leftrightarrow D)(A\leftrightarrow B)$. Por hipótesis de inducción, $E_2,\ldots, E_n \vdash (C\leftrightarrow D) = (C\leftrightarrow D)(A\leftrightarrow B)$ y por el Teorema 2.2.4, $E_1 \vdash (C\leftrightarrow D) = \neg(P\neg P)$. Por tanto, $E_1, E_2,\ldots, E_n \vdash \neg(P\neg P) =$
$= \neg(P\neg P)(A\leftrightarrow B) \vdash \neg(P\neg P) = (A\leftrightarrow B) \vdash A=B$ (teorema 2.2.4). □

Notas

1 Uno de los proyectos fundamentales de la obra de Sánchez-Mazas consistirá en desarrollar, a partir de las ideas leibnicianas, un modelo aritmético de la lógica, que si bien en un principio parece "deducirse" de los planteamientos del filósofo alemán, poco a poco va tomando cuerpo hasta convertirse en un objeto nuevo (como afirma Javier de Lorenzo en el prólogo a Sánchez-Mazas 1994).

2 Con una sencilla modificación de la prueba que presentamos se puede demostrar la completud del cálculo presentado en [FCL] con respecto al modelo de Sánchez-Mazas.

3 Evidencia de su búsqueda de diversas semánticas para la lógica aristotélica son sus interpretaciones utilizando círculos (de manera muy similar a los diagramas de Euler) o segmentos de recta. En el *Cálculo de Adición Real* (G, VII, 236-247) presenta un sistema de pura álgebra (speciosa generalis) susceptible de diversas interpretaciones, lógicas o geométricas, donde plantea que los términos pueden interpretarse no sólo intensionalmente, sino incluso extensionalmente.

4 Sin embargo afirma que parece "mera coincidencia" que el sistema leibniciano valide sus axiomas ya que "Leibniz no sabía que la lógica aristotélica podía ser axiomatizada (...) sólo contrastó algunas leyes de conversión y algunos modos silogísticos a fin de estar seguro de que su interpretación no era errónea" (Lukasiewicz, p. 107). La interpretación de Corcoran nos permite recuperar la formalización leibniciana de la silogística y mostrar como la corrección de su sistema estaba muy lejos de ser mera coincidencia.

5 Esto puede ser lo mismo que lleva a Sánchez-Mazas a decir del sistema de dos números característicos "(...) siendo los cálculos de este tipo, excesivamente complicados y redundantes, a la vez que carentes de claridad y justificación lógica" (Sánchez-Mazas,

1981). Esta opinión, compartida por varios estudiosos de los cálculos lógicos de Leibniz, es la que pretendemos refutar en este trabajo.

BIBLIOGRAFIA

Aiton, E.J.: 1985, *Leibniz, una Biografía*, C. Corredor (trad.), Madrid, Alianza, 1992.

Caicedo, X.: 1990, *Elementos de Lógica y Calculabilidad*, Bogotá, Universidad de los Andes.

Corcoran, J.: 1972, 'Completeness of Ancient Logic', *Journal of Symbolic Logic* 37/4.

Couturat, L.: 1901, *La Logique de Leibniz*, Paris, Alcan. Reprinted Hildesheim, Olms, 1961.

Leibniz, G.W.: 1966, *Logical Papers*, Parkinson (ed.), Oxford, Clarendon Press.

Leibniz, G.W.: 1989, *G.W. Leibniz Philosophical Essays*, Ariew & Garber (ed.), Hacket Pub. Co.

Leibniz, G.W.: 1903, *Opuscules et Fragmentes inedits de Leibniz*, Couturat (ed.), Paris, Felix Alcan Ed. (C)

[DMFS] *Definición Matemática de las Formas de los Silogismos* [De formis syllogismorum Matematice definiendis (C, 410-416)].

[SNC] *Sobre los Números Característicos* [sin título (C, 245-47)].

[FCL] *Fundamentos de un Cálculo Lógico* [Fundamenta Calculi Logici (C, 421-23)].

[IG] *Investigaciones Generales sobre el Análisis de los Conceptos y las Verdades* [Generales Inquisitiones de Analysi Notionum et Veritatum (C, 356-399)].

Leibniz, G.W.: *Philosophische Schriften*, Gerhardt (ed.), vols I-VII. (G)

Lukasiewicz, J.: 1957, *La Silogística de Aristóteles*, Madrid, Tecnos, 1977.

Rescher, N.: 1954, 'Leibniz's Interpretation of his Logical Calculi', *Journal of Symbolic Logic* 19/1.

Sánchez-Mazas, M.: 1963, *Fundamentos Matemáticos de la Lógica Formal*, Caracas, Universidad Central de Venzuela.

Sánchez-Mazas, M.: 1981, 'Un modelo aritmético de la silogística', *Lógica, Epistemología y Teoría de la Ciencia* 9, Madrid.

Sánchez-Mazas, M.: 1994a, 'Actualización de la característica numérica universal de Leibniz', Prologo de Javier de Lorenzo, Cuadernos universitarios de "Theoria", San Sebastián, Centro de Análisis, Lógica e Informática Jurídica.

Sánchez-Mazas, M.: 1994b, 'La aritmética intensional', in J. Echeverría, J. de Lorenzo, L. Peña (ed.): *Calculemos... Matemáticas y Libertad, Homenaje a Miguel Sánchez-Mazas*, Madrid, Trotta.

Smiley, T.J.: 1973, 'What is a Syllogism', *Journal of Philosophical Logic* 2, 136-154.

Zalamea, F.: 1998, 'El cálculo infinitesimal y los cálculos lógicos, en Leibniz, como especificaciones de la característica universal.' Seminario de Historia de las Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Lecturas Matemáticas, por aparecer.

Xavier Caicedo es actualmente Profesor en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de los Andes, Bogotá. También Profesor en la Universidad Nacional de Colombia. Editor Ejecutivo de la *Revista Colombiana de Matemáticas* (1978-1993), Editor Académico (1993-). Su trabajo investigador se centra en la teoría de modelos, especialmente el estudio de las lógicas abstractas. Autor de un libro de texto y más de 35 artículos de lógica matemática, co-editor del libro *Models, Algebras, and Proofs.*

Alejandro Martín es Profesor en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de los Andes, Bogotá. Licenciado en Matemáticas, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia. Estudiante de doctorado en el programa de Lógica, Historia y Filosofía de la Ciencia (UNED, Madrid). Sus líneas de investigación son la filosofía de las matemáticas y la historia de la lógica.