eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

HEZKUNTZA ETA KIROL FAKULTATEA

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y DEPORTE

LAS MATEMÁTICAS Y SU PRESENCIA EN LA NATURALEZA

TRABAJO FIN DE GRADO

AUTORÍA: Gallego Alonso, Igone.

DIRECCIÓN: Beitia Gómez de Segura, María Asunción.

AÑO: 2018 - 2019

“El gran libro de la naturaleza está escrito en símbolos matemáticos.”

Galileo Galilei (1564-1642), físico y astrónomo italiano.

RESUMEN:

El presente Trabajo de Fin de Grado presenta la asombrosa relación que existe entre las matemáticas y la naturaleza, y cómo se pueden aprender contenidos matemáticos partiendo de la observación de algunos elementos naturales. Por ello, se ha diseñado una secuencia didáctica para la asignatura de matemáticas de sexto curso de primaria, donde la naturaleza se utiliza como fuente para extraer actividades propiamente matemáticas y como un elemento motivador en el aprendizaje. Asimismo, con esta propuesta, la asignatura se presenta a través de un método constructivista, globalizado e interdisciplinar, donde los niños y las niñas son los dueños de su propio aprendizaje. Cabe destacar que esta propuesta didáctica no se ha puesto en práctica, pero perfectamente se podría llevar a cabo en un aula de cualquier colegio del País Vasco, ya que está fundamentada en el Plan Heziberri 2020.

Palabras clave: matemáticas, naturaleza, elementos naturales, enseñanza/aprendizaje, motivación, propuesta didáctica y Heziberri 2020.

LABURPENA:

Hemen aurkezten den Gradu Amaierako lanean matematika eta naturaren arteko erlazio zoragarria aurkezten da, eta nola kontzeptu matematiko asko uler daitezkeen naturaren elementu batzuen azterketatik abiatuz. Horretarako, lehen hezkuntzako seigarren mailarako sekuentzia didaktiko bat diseinatu da matematika irakasgaiarentzako; zeinetan natura oinarri gisa erabiltzen den ariketa matematikoak sortarazterakoan eta ikasketarako motibazio herramienta gisa. Honekin batera, proposamen honetan irakasgaia metodo konstruktibista gisa aurkezten da, globalizatua eta interdisziplinala, zeinetan haurrek heuren ikasketaren jabe diren. Esan beharrekoa da proposamen didaktiko hau ez dela praktikan jarri, baina Euskadiko edozein ikasgelan aplikatu daiteke Plan Heziberri 2020 planean oinarritzen baita.

Hitz gakoak: matematikak, natura, naturaren elementuak, ikaskuntza/irakazkuntza, motibazioa, sekuentzia didaktikoa eta Heziberri 2020.

ABSTRACT:

This Last Grade Project talks about the amazing relation that exists between the mathematics and the nature, and also about how it is possible to learn mathematic contents by observing some natural elements. As a consequence of it, a sixth grade of Primary mathematics lesson plan has been designed, in which the nature not only is going to be the main factor to obtain mathematic activities but also a motivating element in the learning process. In addition, with this project the mathematics subject is exposed through a constructivist, globalised and interdisciplinar method, in which children arise as the principal ones of their own learning. To sum up, it is important to consider that this project has not been taken in practice, although it is totally possible to be applied in a classroom of whatever Basque Country's schools, since it is based in the 2020 Heziberri's Plan.

Keywords: mathematics, nature, natural elements, teaching/learning, motivation, lesson plan and Heziberri 2020.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

La relación que guardan las matemáticas y la naturaleza es de gran interés, pues es muy común encontrar patrones matemáticos en este mundo que nos rodea. Las formas de algunas plantas, animales o alimentos son tan fascinantes que parecen haber sido diseñadas antes de su creación y son las matemáticas las que ayudan a describirlas y analizarlas.

Por este motivo, lo que se propone con este documento es desarrollar en el sexto curso de Educación Primaria algunos contenidos matemáticos que aparecen en el currículo, a través del análisis de diferentes elementos que se encuentran en la naturaleza.

Es decir, con este trabajo se pretende potenciar una metodología creativa, motivacional y dinámica en la que el alumnado tenga una actitud positiva en el proceso de aprendizaje y sienta que lo que estudia sirve para algo.

Por lo tanto, las matemáticas se presentan desde un método constructivista, globalizado e interdisciplinar, donde los alumnos y alumnas van a aprender ciertos conceptos matemáticos a través de la observación, manipulación y su propia experiencia.

En cuanto a cómo están estructuradas las siguientes páginas, el trabajo se inicia con un marco teórico donde, en primer lugar, se hace referencia a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; en segundo lugar, se expone un pequeño análisis del desarrollo cognitivo para saber cuáles son las capacidades del alumnado de esta edad; en tercer lugar, centrándonos más en el tema se habla de la relación que guardan las matemáticas y la naturaleza; en cuarto lugar, se analizan elementos de la naturaleza y se observa que se pueden trabajar muchos contenidos matemáticos a través de ella; y en quinto lugar, el Plan Heziberri 2020 corrobora lo importante que es relacionar las matemáticas con situaciones de la vida cotidiana.

Después, se plantea una propuesta didáctica para trabajar las matemáticas desde la perspectiva de un aprendizaje significativo y de una forma atractiva y diferente, a través de la observación del entorno que nos rodea.

Por último, el trabajo finaliza con las conclusiones y las propuestas de mejora.

2. JUSTIFICACIÓN PERSONAL

Las matemáticas para muchos niños y niñas son consideradas difíciles y aburridas (Blanco, Caballero, Piedehierro, Guerrero y Gómez, 2010, p.15), por lo que rara vez se piensa en ellas como una asignatura donde se aprende disfrutando y conociendo el entorno.

Lo que ocurre, en muchas ocasiones, es que los/as estudiantes tienen una imagen estereotipada de la asignatura, ya que son sus propios padres, amigos o compañeros los que comentan malas experiencias con esta disciplina. Por lo tanto, la sociedad tiene mucha culpa de que se tengan estos pensamientos y sentimientos de fracaso con las matemáticas, pues tal como señalan Gil, Blanco y Guerrero (2006, p. 49), ésta es la principal encargada de promover y divulgar la idea de que las matemáticas son difíciles, complicadas y destinadas a los "más inteligentes". Por ello, como dice Etxandi (2007, citado en Blanco, et al., p.15) dentro de las aulas se necesita profesorado comprometido con las matemáticas y su didáctica para que, además de educar en base a los contenidos del currículo, se tengan en cuenta los intereses del alumnado y se considere la asignatura como una interacción con el medio, no como algo aislado.

Así pues, la idea de estudiar las matemáticas a través del análisis de diferentes elementos que se encuentran en la naturaleza me parece una muy buena oportunidad para que los niños y las niñas se den cuenta de lo importantes que son a la hora de entender cualquier aspecto de nuestro entorno. Además, trabajar la asignatura utilizando otros recursos que no sean los libros de texto, puede despertar más interés en los/as estudiantes y animarles a ver las matemáticas como algo divertido.

Por lo tanto, gracias a la elección de este tema se puede apostar por una metodología innovadora en la que la teoría se estudiará a partir de ejemplos prácticos, en vez de memorizar fórmulas que rápidamente se olvidan. Es decir, la asignatura se afrontará desde un punto de vista más práctico que teórico.

Todo esto, ayudará a que los niños y las niñas, además de desarrollar las competencias matemáticas que están establecidas en el currículo, progresen en otros aspectos como pueden ser su iniciativa personal, su pensamiento crítico, su creatividad y/o su originalidad.

3. MARCO TEÓRICO

3.1. Enseñanza/aprendizaje de las matemáticas.

Según el informe TIMSS 2015 (Estudio de las Tendencias en Matemáticas y Ciencias, en sus siglas en inglés) los alumnos españoles de primaria mejoran en matemáticas y ciencias con respecto al último estudio, pero no es suficiente, ya que siguen por debajo de la media de la OCDE y de la Unión Europea (ver anexo 1).

Estos resultados, tanto para las familias del alumnado como para los profesores e investigadores resultan escasos, lo cual les obliga a reflexionar y a investigar en el origen de dichos problemas y en la mejor manera de solucionarlos.

Según Alonso, Sáez y Picos (2004, p.91), en las edades tempranas las actitudes hacia las matemáticas tienden a ser favorables, pero según avanzan los cursos el alumnado va perdiendo el interés por ellas y las califica como una asignatura difícil y aburrida (ver anexo 2).

Blanco, Caballero, Piedehierro, Guerrero y Gómez (2010, p.15), señalan que ese rechazo que va surgiendo hacia esta asignatura se debe a la propia naturaleza de las matemáticas, a su carácter abstracto e impersonal, a la metodología de enseñanza y a la actitud de los profesores hacia los alumnos y hacia la disciplina. Asimismo, también afirman que, en muchas ocasiones, son los mismos padres, amigos o compañeros los que transmiten una imagen estereotipada de la asignatura con comentarios negativos.

Por su parte, Socas (1997, p. 135) afirma que muchas de las actitudes negativas y emocionales hacia las matemáticas están asociadas a la ansiedad por acabar las tareas y al miedo por fracasar o equivocarse.

Está claro que son muy diversos los motivos por los que el alumnado puede fracasar en la asignatura de matemáticas pero para que esto no ocurra y para que el proceso de enseñanza-aprendizaje sea lo más efectivo posible, como bien señala Miguel de Guzmán (2007, p.47), uno de los grandes matemáticos del siglo XX, lo primero que hay que hacer es “romper con la idea preconcebida y fuertemente arraigada en nuestra sociedad de que la matemática es necesariamente aburrida, abstrusa, inútil, inhumana y muy difícil.”

Lo cierto es que en muchas ocasiones apenas se relaciona el contenido matemático con la realidad, o la vinculación que se establece es con realidades ajenas al alumnado, por eso, el proceso de enseñanza-aprendizaje de esta materia no provoca una motivación ni un interés en el alumnado. Debido a esto, en la 46ª Conferencia Internacional de la Educación de la UNESCO (2001), se apuntó que para el aprendizaje de las ciencias es muy importante asociar los programas educativos con el contexto humano y social y favorecer un enfoque interdisciplinario y de contextualización.

Sin duda, a pesar de que todos los planes de estudios están diseñados en base a las características psicológicas del alumnado según la edad, con el fin de alcanzar unos objetivos en un plazo establecido, como bien afirma Goñi (2011, p. 9), “el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas es bastante complejo”. Al fin y al cabo, todos los estudiantes no tienen los mismos intereses, ni las mismas motivaciones, aspiraciones, características y posibilidades.

Sin embargo, a pesar de todas esas diferencias que pueden existir, la confianza en la disposición y habilidad de querer aprender matemáticas tiene un papel fundamental para el alumnado de cara a sentirse competente (McLeod, 1992, p.575). Además, confiar en las propias capacidades de cada uno/a, fomenta una actitud responsable y favorece una participación activa en el proceso de aprendizaje, mejorándolo, como bien señala Guzmán (2007, p.41).

Para ello, el papel y la competencia del docente son esenciales, pues tal como dice Bermejo (1996, p. 259) el comportamiento que tiene el profesorado en el aula influye de manera positiva o negativa en la conducta y en el rendimiento del alumnado.

Por un lado, es muy importante que el docente atienda las diferencias individuales de cada estudiante, tanto de los más aventajados como de aquellos que se rezagan un poco. Aunque con esta idea se corre el riesgo de caer en el individualismo en vez de educar en valores como la solidaridad, la tolerancia y el respeto por las diferencias individuales.

Y, por otro lado, es esencial que el foco del aprendizaje no se centre solo en el docente, sino que el protagonista sea el alumno, es decir, el docente no ha de ser solo un transmisor de conocimientos, sino que se tiene que convertir en facilitador y orientador del conocimiento, así como en un participante en el proceso de enseñanza-aprendizaje junto con el estudiante. Lógicamente esto no disminuye la importancia de los docentes y, por lo tanto, se necesita que sean buenos, competentes y capaces de dejar una huella positiva en el estudiante (Ruiz, 2008, p.2).

Así pues, la tarea del profesorado no es nada fácil y está cargada de gran responsabilidad, ya que es esencial en el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de esta disciplina. El buen maestro y la buena maestra no solo tienen que tener un buen dominio del contenido matemático, sino también del pedagógico y de la didáctica de la matemática.

3.2. Desarrollo cognitivo y matemáticas.

Desde el origen de la psicología hasta hoy en día, muchos autores se han interesado en conocer cómo los individuos adquieren, conservan y desarrollan el conocimiento y, sin duda, la teoría que más repercusión ha tenido en la historia de la educación ha sido la desarrollada por el psicólogo suizo Jean Piaget (Saldarriaga-Zambrano, Bravo-Cedeño y Loor-Rivadeneira, 2016, p.129).

Para este autor el desarrollo cognitivo es una reorganización de los procesos mentales debido a la maduración biológica de cada sujeto ya que, según él, el origen del pensamiento proviene, en gran medida, de los genes, es decir, que es innato; y, además, sostiene que el conocimiento y la inteligencia se encuentran estrechamente ligados al medio físico y social. Piaget cree que la interacción con los estímulos sociales y culturales hace que haya una evolución en el pensamiento (Piaget, 1979, p.9).

Por lo tanto, la inteligencia no es un rasgo fijo. Según se avanza en el tiempo, los conocimientos de cada individuo se van ampliando y desarrollando, y las habilidades para percibir, pensar, comprender y manejarse en la realidad también aumentan.

Así pues, como bien recogen en su libro Elgarreesta, Morcillo, Arruabarrena y Gonzalez (2017, pp. 166-219), Piaget dividió el desarrollo cognoscitivo en cuatro grandes etapas para ajustar las necesidades infantiles a sus capacidades según la edad:

- Etapa sensoriomotora (de 0 a 2 años). Se caracteriza porque los niños y las niñas obtienen el conocimiento a partir de la interacción con el entorno y por la capacidad que tienen para imitar y combinar acciones simples. El desarrollo matemático se consigue a través de juegos experimentales.
- Etapa preoperacional (de 2 a 7 años). En esta etapa el niño y la niña adquieren un sentido intuitivo del concepto de número, usándolo sólo en situaciones prácticas, ya que no son capaces de seguir la lógica para extraer conclusiones válidas ni de realizar correctamente operaciones mentales complejas de la vida adulta. Por ejemplo, un niño de tres años entre un montón de caramelos esparcidos en una superficie y otro de igual cantidad agrupado en un espacio más pequeño, se quedará con el primero.
- Etapa de las operaciones concretas (de 7 a 12 años). En este periodo de tiempo empieza a utilizarse la lógica para llegar a conclusiones válidas siempre que sea una situación concreta, no abstracta. Además, el niño y la niña son capaces de utilizar relaciones causales y cuantitativas. Siguiendo con el anterior ejemplo, en esta etapa ya pueden estimar que el número de caramelos en un montón permanece constante mientras no se le añada o quite nada.
- Etapa de las operaciones formales (de 12 años en adelante). Aquí es cuando ya muestran la capacidad para trabajar conceptos abstractos y utilizan su razonamiento hipotético-deductivo para formular y comprobar hipótesis.

Por su parte, como señala Gómez (1997, p.12), Vygotsky también ha influido a la hora de entender el desarrollo de los individuos ya que, según él, los niños y las niñas no adquieren el aprendizaje si no es mediante la interacción con otra persona más capaz (un adulto), en su zona de desarrollo próximo, la cual define como:

> La distancia entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz (Vygotsky, 1979, p.133).

Por lo tanto, cuando un niño o una niña realizan una actividad que son capaces de hacer por sí mismos, no se considera construcción de conocimiento, sino práctica de lo ya aprendido. Del mismo modo, si se les enseña algo que está fuera de sus capacidades momentáneas, no servirá de nada, ya que no les será posible aprenderlo. Esto significa, que para trabajar en la zona del desarrollo próximo es muy importante que el docente posea un excelente dominio de lo que quiere enseñar, y así, poderse situar en el nivel de competencia del alumnado y responder a sus necesidades (Gómez, 1997, p.14).

De esta forma, siguiendo la teoría del desarrollo de Vygotsky, para que se dé un desarrollo óptimo del aprendizaje matemático, en primer lugar, se necesita la ayuda de un maestro (u otros adultos), ya que es el que guía y orienta el aprendizaje del estudiante; en segundo lugar, se requiere el uso de representaciones que permitan al alumnado tener una imagen clara de los elementos con que está trabajando, las relaciones entre ellos y las operaciones que debe ejecutar con los mismos; y por último, es importante usar un lenguaje específico para nombrar objetos, algoritmos, operaciones y relaciones con claridad y precisión (Gómez, 1997, p.18).

Por último, más recientemente, Howard Gardner (2001, p. 108), profesor de la Universidad de Harvard, con su teoría de las inteligencias múltiples defiende que como consecuencia de la gran cantidad de problemas que hay que resolver en el día a día, existen muchos tipos de inteligencias, las cuales se pueden adaptar y aplicar a la resolución de los mismos. En concreto hay ocho tipos: inteligencia lingüística, inteligencia lógico-matemática, inteligencia espacial, inteligencia musical, inteligencia corporal y cenestésica, inteligencia intrapersonal, inteligencia interpersonal e inteligencia naturalista.

Gardner (2001, p.109) afirma que todas las personas son dueñas de cada uno de los ocho tipos de inteligencias, aunque cada uno/a puede destacar más en unas que en otras. Por esto mismo, es importante que en el ámbito educativo se trabajen y se entrenen cada una de ellas para lograr un equilibrio entre todas y el éxito académico.

En el caso de la inteligencia lógico-matemática, la rapidez para solucionar problemas matemáticos de manera lógica, es el indicador que determina cuánta inteligencia lógico-matemática se posee, y por lo tanto, cuanto más se trabaje, mejores resultados se obtendrán.

A modo de reflexión, el alumnado que tiene un buen razonamiento matemático disfrutará con los números y le encantará experimentar, preguntar y resolver problemas lógicos. También disfrutará trabajando desafíos matemáticos complejos cuya solución exija usar el pensamiento crítico y sentirá la curiosidad de aplicar sus destrezas a situaciones de la vida cotidiana. Sin embargo, el hecho de tener una gran inteligencia lógico-matemática no garantiza alcanzar un buen rendimiento académico en las matemáticas (Ferrándiz, et al., 2008, p. 214).

3.3. Relación entre la naturaleza y las matemáticas

Las matemáticas, además de tener un papel formativo y de transmisión de conocimientos, están muy presentes en la naturaleza y en casi cualquier ámbito de la actividad humana. De hecho, existen elementos, sucesos y seres vivos tan perfectos que no se sabe si hay una mente maestra detrás de su estructura y es la matemática la que ayuda con sus ecuaciones a explicar, por ejemplo, las manchas de las alas de las mariposas o las de las cebras, el crecimiento de las ramas de los árboles o el desplazamiento de un relámpago.

Si nos remontamos al origen de los tiempos, como bien señala Mirón (2009, p. 1), gracias a los conocimientos matemáticos, el ser humano fue capaz de entender y modelizar ciertos fenómenos naturales que ocurrían a su alrededor.

En efecto, los griegos fueron los primeros que reflexionaron sobre la naturaleza de los números y la de los objetos. En torno al año 600 a.C. Tales de Mileto fundó la Escuela Jónica, en la cual se comenzó el estudio científico de la geometría, y un poco más tarde, a mediados del siglo VI a.C., Pitágoras fundó la escuela pitagórica (Álvarez, 2007, p. 105).

En el libro de la Metafísica de Aristóteles con el título de *Los pitagóricos y su doctrina de los números* se recoge que los filósofos pitagóricos fueron los primeros en construir una teoría matemática que aportase una explicación a todos los fenómenos que ocurren en la naturaleza, pues observaron que los números guardaban semejanzas con los seres y con los fenómenos naturales. Además, para ellos las matemáticas, en concreto el número natural, era el origen, el fundamento y la explicación de todas las cosas, es decir, los pitagóricos aseguraban que todos los cuerpos están constituidos según los números, y los números son lo primero en toda la naturaleza (Guzmán, 1990, p. 14).

Por lo tanto, para los pitagóricos la esencia del mundo era la matemática y como afirmaba Filolao (citado en Pérez, 2005, p. 130): "Todas las cosas que pueden ser conocidas tienen número; pues no es posible que sin número nada pueda ser conocido ni concebido."

Desde entonces y tras la aparición de los Elementos de Euclides (los puntos, las rectas, los ángulos, los círculos, las esferas, etc.), Aristóteles interpretó los poliedros regulares como formas perfectas y pertenecientes a la naturaleza. Sin embargo, a las curvas extrañas o a los polígonos no regulares los consideró formas imperfectas, expulsándolas del universo matemático (Pérez Sanz, 2005, p.132).

Por su parte, Arquímedes se preocupó de mirar esas formas imperfectas con ojos matemáticos y descubrió, entre otras cosas, como bien recoge Mirón (2009, p.4), la espiral que hoy en día lleva su nombre: La espiral de Arquímedes.

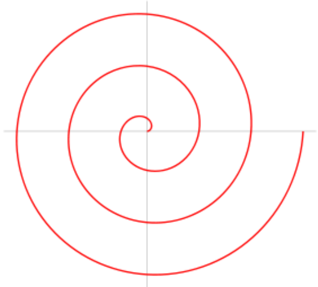


Figura 1. La espiral de Arquímedes. (Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Espiral_de_Arqu%C3%ADmedes#/media/Archivo:Archimedean_spiral.svg)

En el siglo XIII, Santo Tomás de Aquino con esta frase: "Los sentidos se deleitan con las cosas debidamente proporcionadas" también relacionó las matemáticas con la naturaleza, ya que según lo que defendían los griegos, las proporciones están estrechamente vinculadas con la simetría y la simetría es un contenido matemático. Así pues, siguiendo esta teoría, todos los elementos que se encuentran en la naturaleza que están llenos de belleza y se consideran perfectos, son simétricos. Algunos ejemplos de perfectas simetrías que se pueden encontrar en el mundo real son: los hexágonos de los copos de nieve, el cuerpo de una mariposa y los panales de abejas.

A finales del siglo XVI, Galileo Galilei decidió terminar de romper con esa visión tan perfecta del universo que defendía Aristóteles, mostrando que la Luna no es una esfera perfecta, que Júpiter tiene satélites que orbitan a su alrededor y que hasta el sol tiene manchas (Pérez Sanz, 2005, p. 135). Además, este sabio hombre, como bien señala Sorando (2000), creó una ciencia nueva en la que se estudiaba la dependencia funcional entre magnitudes variables al relacionar las distancias y los tiempos de caída de un móvil, intentando explicar todos los movimientos mediante leyes matemáticas.

Galileo afirmó que "El gran libro del Universo está continuamente abierto ante nuestros ojos. Está escrito en lenguaje matemático, y las letras son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es humanamente imposible entender una sola palabra."

Asimismo, un poco más tarde, el astrónomo Johannes Kepler descubrió que los planetas describían órbitas elípticas alrededor del Sol y el físico y matemático Isaac Newton, por su parte, dedujo la ley de gravitación universal, demostrando que la órbita de un cuerpo es siempre una curva cónica. Newton decía que "La naturaleza está escrita con el lenguaje de las matemáticas". (Mirón, 2009, p. 4).

Por último, en los *Principios metafísicos de la ciencia de la naturaleza* Immanuel Kant (1989, p.31), contaba que "en toda teoría particular de la naturaleza sólo puede haber tanta ciencia propiamente dicha como matemática se encuentre en ella". Este filósofo, por consiguiente, también consideraba que el mundo que nos rodea es matemático y defendía que la naturaleza es un libro escrito en caracteres matemáticos. Louis Couturat (1960, p.98) afirmaba que: "Igual que sus contemporáneos, Kant concibió las matemáticas como ciencias del espacio y del tiempo, no como una ciencia metódica formal o un conjunto de razonamientos deductivos e hipotéticamente necesarios"

Por lo tanto, parece que el mundo se rige por leyes de carácter matemático e inspira a los matemáticos, físicos y astrónomos en sus definiciones y desarrollos.

3.4. Las matemáticas a través de elementos naturales.

La naturaleza además de inspirar a los matemáticos para desarrollar sus teorías (como por ejemplo el movimiento de los planetas a Newton), posee una construcción matemática que asombra al ser humano. Por ejemplo:

- La tela de una araña contiene numerosas formas geométricas, además de circunferencias concéntricas.
- Las celdas de los panales de abejas y los copos de nieve son hexagonales.
- El corazón de la manzana, es una estrella de cinco puntas.
- Muchos frutos, como las cerezas, las naranjas y las ciruelas, y los planetas tienen forma esférica.

Como se observa, el entorno natural sigue leyes matemáticas y está compuesto por numerosas formas geométricas que pueden ser perfectamente descritas con detallada precisión matemática gracias a la ayuda de los fractales, la simetría, las sucesiones y el número áureo.

FRACTALES

Los fractales matemáticos como bien explica Pérez Montesdeoca (2005, p. 3), son objetos geométricos auto-similares, es decir, se generan a partir de una estructura básica que se repite e independientemente de la escala a la que sean observados, siempre se verá el mismo patrón geométrico. Por lo tanto, los fractales se caracterizan por tener un área finita (fija) pero un perímetro infinito. Para entenderlo mejor, algunos ejemplos de este tipo de representaciones geométricas son los siguientes:

- La curva de Koch. En 1904, el matemático sueco Helge Von Koch definió una curva con un sentido geométrico, que es una de las primeras figuras fractales y su construcción se lleva a cabo mediante adiciones progresivas a un segmento. Es decir, se toma un segmento como punto de partida, se divide en tres partes iguales y luego, el segmento que queda en el centro se sustituye por dos segmentos de igual medida que al unirlos, formando entre ellos un ángulo de 60º, formarían un triángulo equilátero junto con el suprimido. La curva de Koch es el resultado de repetir este procedimiento en cada segmento resultante infinitas veces (Pérez Montesdeoca, 2005, p.10).

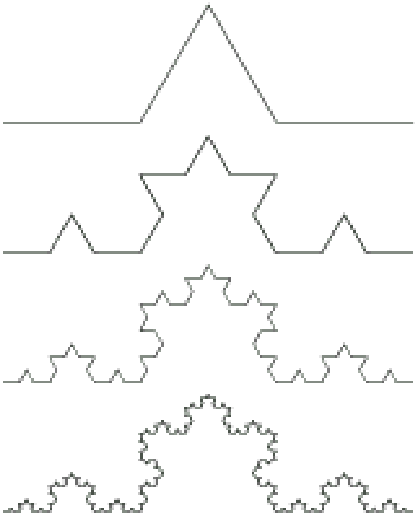


Figura 2. La curva de Koch. (Fuente: http://www.epsilones.com/paginas/historias/historias-008-antes-mandel.html)

- El copo de nieve de Koch. Está muy relacionado con la curva de Koch, ya que el procedimiento para su construcción es el mismo. Lo único que varía con respecto a la curva es que, en vez de iniciar la figura con un segmento, se empieza con un triángulo equilátero, del cual habrá que dividir sus tres lados en un tercio de su longitud para luego seguir infinitas veces el mismo proceso ya explicado en la curva. El copo, es una figura fractal muy sencilla con la peculiaridad de ser una curva infinita, continua y cerrada, encerrando una superficie finita (Pérez Montesdeoca, 2005, p.12).

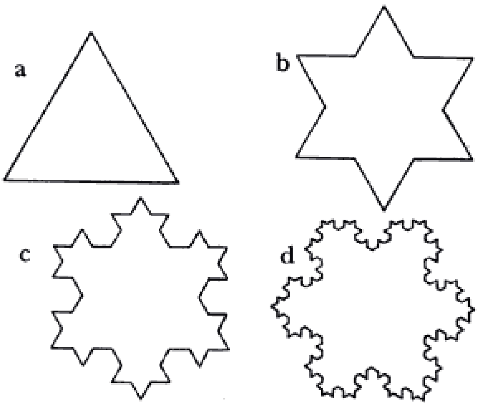


Figura 3. El copo de nieve de Koch. (Fuente: http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/ciencia/volumen3/ciencia3/147/htm/sec_5.htm)

- El triángulo de Sierpinski: En 1915, Waclaw Sierpinski también aportó al mundo de los fractales su triángulo, pues el proceso de construcción es infinito. Como punto de partida para su construcción se toma un triángulo equilátero, el cual se divide en cuatro triángulos iguales más pequeños, utilizando el punto medio de cada lado como nuevo vértice. Luego, el triángulo que queda en el centro se elimina y se repite el mismo proceso en los triángulos restantes (Pérez Montesdeoca, 2005, p.7).

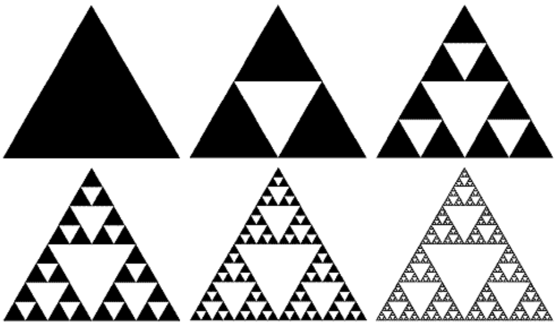


Figura 4. El triángulo de Sierpinski. (Fuente: https://batchdrake.wordpress.com/2009/01/12/el-area-del-triangulo-de-sierpinski/)

Pero el verdadero padre de la geometría fractal fue el polaco Benoît B. Mandelbrot cuando en los años 70 se preocupó por cuestiones que nunca antes habían interesado a los científicos, como los patrones de las grietas. Según este matemático las formas de la naturaleza poseen tal complejidad que no obedecen estrictamente a los patrones geométricos de la geometría euclidiana, fundamentada en rectas, curvas, polígonos, esferas, etc. Mandelbrot (1982, citado en Sorando, 2012, p. 1), en su libro *The Fractal Geometry of Nature* afirmaba que “Las nubes no son esferas; las montañas no son conos; los litorales no son círculos; y los relámpagos no viajan en línea recta.”

Por lo tanto, este matemático, a esas figuras que existen en la naturaleza, que no pueden ser representadas por los elementos euclidianos y que, además, presentan un número finito de “niveles” auto-similares, les da sentido y las denomina fractales naturales (Pérez Montesdeoca, 2005, p.3). La diferencia con los fractales matemáticos es que, aunque esos grados de autosimilitud son muy parecidos entre ellos, no poseen una semejanza totalmente exacta.

Así pues, bajo esta premisa, la geometría fractal ha servido de gran ayuda para explicar y reproducir numerosos fenómenos naturales tales como: el curso de los ríos, la formación de las nubes, el crecimiento de las plantas (especialmente el de los helechos, el brócoli romanesco, el aloe vera y la cicuta) y la evolución de las galaxias y de los rayos. Del mismo modo, se entiende mejor el interior del ser humano, pues los bronquios, los conductos de los pulmones y la organización de las células de los vasos sanguíneos tienen una estructura fractal (ver anexo 3).

SIMETRÍA

La simetría es una característica geométrica que según la RAE se define como: “correspondencia exacta en la disposición regular de las partes o puntos de un cuerpo o figura con relación a un centro, un eje o un plano”. Y dándole un enfoque biológico su definición sería: “correspondencia que se puede distinguir, en el cuerpo de una planta o de un animal respecto a un centro, un eje o un plano, de acuerdo con los cuales se disponen ordenadamente órganos o partes equivalentes”.

Dicho esto, la simetría es un concepto que desde siempre le ha llamado la atención al ser humano, pues muchos elementos de la naturaleza, de la arquitectura, del arte y de la ciencia se rigen por patrones simétricos. Gracias a ella, el entorno se comprende más fácilmente y termina resultando un poco más sencillo de lo que a primera vista puede parecer (Morones, 2002, p. 173).

Asimismo, este concepto está estrechamente ligado a la perfección y la belleza, ya que como bien considera el neurocientífico Vilayanur S. Ramachandran (2001, p.21), la simetría es una característica fundamental para que algo resulte estéticamente atractivo. Por eso, cuando se observan imágenes tan espectaculares en la naturaleza, especialmente en el mundo animal y vegetal, es porque, en la mayoría de sus casos, son organismos simétricos. Existen diferentes tipos de simetrías entre los animales y las plantas: las radiales y las bilaterales (Alters, 2000, p.133).

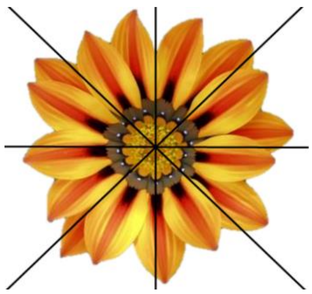


Figura 5. Simetría radial. (Fuente: http://agrega.juntadeandalucia.es/repositorio/12122011/3e/es-an_2011121213_9234532/ODE-ee694b35-f62e-3e69-ab64-57f3d8b65fb4/41_los_ejes_simetra_axial_y_radial.html)

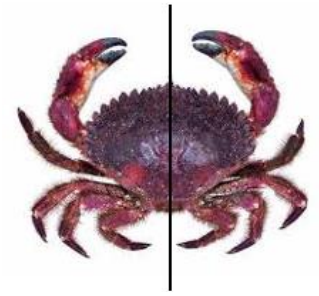


Figura 2. Simetría bilateral. (Fuente: http://biblioimarpe.imarpe.gob.pe/bitstream/123456789/3202/1/Guia%20de%20crustaceos.pdf)

Por un lado, los organismos con simetría radial (ver anexo 4), se caracterizan por ser simétricos con respecto a cualquier eje que pase por el centro del cuerpo. En el caso de los animales, dichos ejes imaginarios se trazan desde el centro de la superficie oral (donde se encuentra la boca) hasta el centro del extremo opuesto o aboral, dividiéndolos en mitades iguales. La mayoría son animales que no presentan región ventral, ni dorsal, ni cabeza, ni cola y, además, generalmente son sedentarios o muy poco móviles. Claros ejemplos de esta disposición son los cnidarios (medusas, anémonas, etc.) y los equinodermos (estrellas de mar) (Alters, 2000, p.133).

Del mismo modo, esta simetría radial también es muy frecuente en las plantas, pues muchas flores se ven iguales desde cualquier dirección y se pueden dividir en sectores idénticos desde el centro de la flor. Estas flores reciben el nombre de actinomorfas y algunos ejemplos son: los dientes de león y los narcisos (Alters, 2000, p.133).

Entre las formas características de simetría radial, teniendo como referencia el eje central: si el organismo se puede dividir en cuatro partes iguales, presentará una simetría tetraradial (por ejemplo, las medusas), en caso de que se pueda dividir en cinco partes la simetría será pentaradial (por ejemplo, las estrellas de mar) y cuando se divida en seis u ocho trozos iguales se le denominará hexaradial y octaradial, respectivamente (por ejemplo, algunos corales).

Por otro lado, los organismos con simetría bilateral (ver anexo 4), son aquellos que cuando se dividen por la mitad con un plano sagital, es decir, aquel que es perpendicular al suelo y que forma un ángulo recto con los planos frontales, muestran dos partes, en teoría, idénticas. Esto implica que el organismo siempre se divide en una mitad derecha y en otra mitad izquierda, separadas por un eje (Alters, 2000, p.133).

Según Baguñà, Ruiz-Trillo, Paps y Riutort (2002, p. 535), como la simetría bilateral se adapta mejor a organismos que están en movimiento, aproximadamente el 98% de los animales son poseedores de ella, entre los que se encuentran los seres humanos. Sin embargo, entre las plantas los ejemplos son menos frecuentes, pero no inexistentes: las orquídeas, algunos frutos y muchas semillas presentan una simetría de este tipo.

Por último, mencionar que se pueden encontrar combinaciones de la simetría radial y bilateral, que da lugar a la simetría birradial (ver anexo 4) y es típica de los ctenóforos, animales marinos que constituyen una elevada proporción del plancton.

SUCESIONES

Se denomina sucesión a cualquier secuencia ordenada de números, figuras o cosas. A sus elementos se les llaman términos y se suelen designar mediante una letra con subíndices correspondientes a las posiciones que toman en dicha sucesión: a_1, a_2, a_3,… Una de las sucesiones más famosas y que está muy presente en la vida cotidiana es la sucesión de Fibonacci.

Como cuentan Zacarías, Ovando y Cocoletzi (2010, p.15) el nombre de esta sucesión se debe al matemático más destacado de la Edad Media, Leonardo de Pisa, más conocido en el mundo de las matemáticas como Fibonacci. En el año 1202 publicó el libro *Liber Abaci*, en el cual además de introducir en Europa el uso del cero, los números indo-arábigos, la descomposición en factores primos y los criterios de divisibilidad, describe reglas elementales para sumar, restar, multiplicar y dividir en las que se pueden apreciar las grandes ventajas del sistema de notación posicional. (Alonso y Bermúdez, 2002, p.176)

Asimismo, Fibonacci introduce su famosa sucesión como solución a un problema de cría de conejos, el cual plantea lo siguiente: “Suponiendo que una pareja de conejos cría otra pareja cada mes, y que los conejos son fértiles a partir del segundo mes, ¿cuántos conejos se pueden tener al cabo de un año?” (Cocoletzi, Zacarías y Ovando, 2010, p.16).

Según Rocha (2015, p. 29) la solución es simple: Al empezar, en el corral, hay una pareja y cuando finaliza el primer mes también sigue habiendo solo una pareja. Al terminar el segundo mes ya hay dos parejas de conejos (la inicial y las dos crías) y al finalizar el tercer mes conviven tres parejas (la inicial, las dos primeras crías y una nueva pareja). En el cuarto mes, como procrea la pareja inicial y su primogénita, hay cinco parejas, al final del quinto mes habrá ocho, y así sucesivamente hasta culminar el año. En ese momento, el corral contará con un total de 144 parejas de conejos (ver anexo 5).

Entonces, la sucesión de Fibonacci que resulta ser: 1,1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55…, donde cada número es resultado de la suma de los dos anteriores, no solo les sorprende a los matemáticos, sino que también lo hace a los biólogos, ya que como afirman Alonso y Bermúdez (2002, p. 182), si se analiza la morfología del reino natural desde un punto de vista geométrico, se pueden encontrar muchas señales de los números de Fibonacci entre los seres vivos.

De hecho, a partir de dicha sucesión se crea la espiral de Fibonacci que, curiosamente, es la forma geométrica que poseen las conchas de algunas caracolas marinas, en especial el nautilus, los cuernos de algunas cabras, algunas telas de arañas, los huracanes, etc. (ver anexo 6).

Dicha espiral se caracteriza porque se construye a través de una secuencia de cuadrados, que van acorde con la famosa secuencia numérica. El primer cuadrado se dibuja con lado igual a la unidad y el segundo, dibujado a su lado, también; el tercer cuadrado se añade sobre los anteriores con dos unidades de lado; el siguiente se dibuja al lado de los anteriores con tres unidades de lado; y así sucesivamente. Luego, al unir los vértices diagonales de los cuadrados dibujados por medio de cuartos de circunferencia, se obtiene la siguiente figura: (Alonso y Bermúdez, 2002, p. 183).

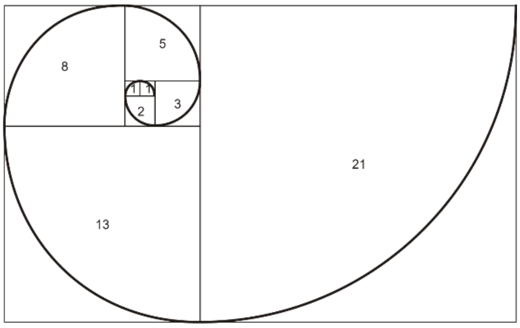


Figura 3. Espiral de Fibonacci. (Fuente: http://ehfdisenos.blogspot.com/2012/05/fibonacci.html)

Asimismo, los números de Fibonacci aparecen de forma muy curiosa en la distribución de las semillas de algunas plantas, en las corolas de muchas flores, en la disposición de las espinas de algunos cactus, e incluso en la ramificación de algunas plantas. Y es que, de acuerdo con la filotaxia, una rama de la botánica que se dedica a estudiar los patrones de organización de las plantas, la sucesión de Fibonacci es la estrella de los modelos matemáticos de esta disciplina (Alonso y Bermúdez, 2002, p.187).

Por ejemplo, en el Helianthes annulus (un tipo de girasol), las pipas se distribuyen de manera ordenada, formando espirales de dos tipos: las que tienen sentido horario y las de sentido anti horario. Ambas parten de la zona central y se abren hacia fuera. Si se cuentan las espirales de cada tipo, normalmente se obtienen dos valores consecutivos de la sucesión de Fibonacci: 34 y 55, 55 y 89, o 89 y 144. También, cualquier variedad de piña, las coliflores y muchos tipos de cactus se ajustan igualmente a estos patrones. (Gallego, 2005, p. 52) (Ver anexo 7).

Con respecto a los pétalos, son muchas las plantas con flores cuyo número de pétalos resulta ser un número de Fibonacci: la mayor parte de los geranios, las violetas, el heliotropo, algunos tipos de azaleas y muchas orquídeas tienen 5 pétalos; el delphinium tiene 8 pétalos y las margaritas 21, 34, 55 (ver anexo 8). Y, a lo que a la distribución de las hojas de una planta alrededor del tallo se refiere, la sucesión de Fibonacci también influye junto con su altura. Según Alonso y Bermúdez (2002, p.186), “el número de giros horarios y anti horarios que hay que dar alrededor del tallo hasta que una hoja queda exactamente en la vertical de otra, y el número de hojas que crecen entre estas dos posiciones son números consecutivos de la sucesión de Fibonacci”.

En definitiva, la reiterada presencia de la sucesión de Fibonacci en la naturaleza llama bastante la atención y está estrechamente relacionada con la proporción áurea que se explica a continuación.

NÚMERO ÁUREO

Si se dividen dos números consecutivos de la sucesión de Fibonacci, se obtiene un cociente muy próximo al número áureo. De hecho, a medida que se avanza en la serie y los números son más altos, el cociente se va acercando cada vez más al valor óptimo del número de oro: 1,61803398874989 (Córcoles, 2004, p.79)

Ahora bien, el número áureo, también denominado proporción áurea o razón áurea, es un número irracional (número decimal infinito no periódico), que se representa con la letra griega “phi” (φ) y cuya ecuación se expresa como: $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Este número es una razón entre dos segmentos distintos (a y b) pertenecientes a una misma recta: entre la parte mayor (a) y la menor (b) debe haber la misma razón que entre el todo (a+b) y la mayor (a) (ICMAT, 2012, p.13).

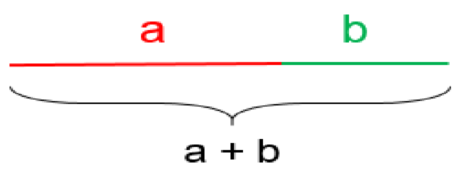


Figura 4. Segmentos en razón áurea.

El descubrimiento de este valor se debe a los pitagóricos cuando adoptaron la estrella pentagonal como símbolo de su escuela, la cual tiene cinco puntas, es simétrica, y está inscrita en un pentágono, donde cada punta coincide con uno de sus vértices (Waigant, 2012, p.2). Al calcular la relación entre cualquier diagonal con un lado del pentágono, el resultado es siempre el mismo: el número áureo (ver anexo 9).

Esta idea según Alonso (2003, p.168), ha influido en el arte desde la Grecia Clásica hasta el Renacimiento, jugando un papel muy importante en la arquitectura, la pintura, y la escultura, donde la belleza era buscada y medida en términos numéricos, mediante proporciones dadas por el rectángulo áureo (ver anexo 10).

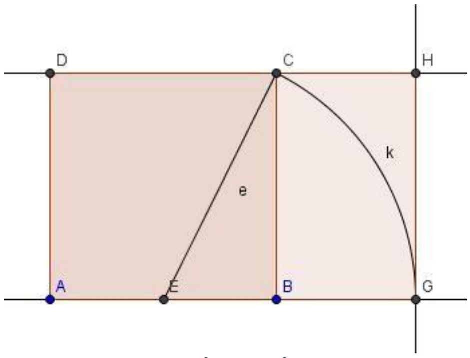


Figura 5. Rectángulo áureo. (Fuente: https://www.gaussianos.com/fibonacci-las-abejas-y-las-tarjetas-de-credito/)

Algunos ejemplos donde está presente son: las pirámides de Egipto, el Partenón, el edificio de la O.N.U en Nueva York, la obra de Miguel Ángel en la Capilla Sixtina, las vasijas griegas del Museo de Boston, etc... (Ver anexo 11).

Asimismo, el alemán Adolf Zeysing (citado en Agra y Taboada, 2018) afirmó que la “ley de las proporciones” se cumple, también, en las medidas ideales del cuerpo humano, en las especies de animales que se distinguen por la elegancia de sus formas y en botánica.

En relación con el cuerpo humano, la razón áurea aparece en numerosas medias: en la división de la altura total de un individuo entre la distancia del ombligo a los pies, en el cociente entre la altura del sujeto y la distancia del ombligo a la punta de la mano con el brazo estirado, en la relación entre la longitud de la cabeza y su anchura y, por último, si se divide la medida del hombro hasta la punta de los dedos de la mano extendida entre la medida del codo hasta la punta extendida de los dedos.

Todo esto, se refleja en el famoso dibujo que Leonardo da Vinci hizo para ilustrar el libro *La Divina Proporción* del matemático Luca Pacioli, el cual proponía un hombre perfecto en el que las relaciones entre las distintas partes del cuerpo se basan en el número de oro.

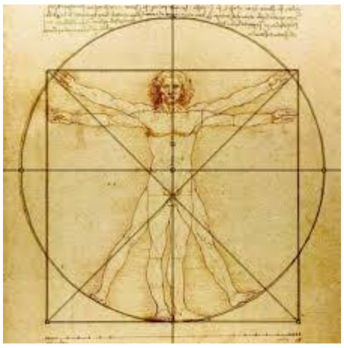


Figura 6. El hombre de Vitruvio por Leonardo da Vinci.
(Fuente: http://duracreatividad.blogspot.com/2013/03/el-hombre-de-vitruvio.html)

En cuanto a la naturaleza, el número áureo aparece en los lugares más inesperados como: en las espirales de algunos caracoles, en el corazón de la manzana, en la forma de crecimiento de algunas plantas y en la distribución de los pétalos de sus flores o sus semillas.

Como explican Alonso y Bermúdez (2002, p.185), las plantas producen sucesivas generaciones de semillas, desde el centro de la flor, que se van desplazando 1/φ respecto a las anteriores, de tal forma que el ángulo de apertura de las semillas aumenta exactamente en la proporción áurea. La distribución de las espinas de muchos tipos de cactus se ajusta también al mismo patrón (ver anexo 7).

Como resultado de sus propiedades únicas, el número áureo se considera algo sagrado o divino y una forma única de comprender la belleza y la espiritualidad en la vida.

3.5. Las matemáticas y la naturaleza en el plan Heziberri 2020.

El Plan Heziberri 2020 (p.15) se inspira, por un lado, en los cuatro pilares de la educación que plantea la UNESCO (aprender a conocer, aprender a hacer, aprender a vivir juntos y aprender a ser); y por otro lado, en las competencias básicas presentadas por la Comisión de las Comunidades Europeas: competencia en comunicación lingüística, competencia matemática, competencias básicas en ciencia y tecnología, competencia digital, aprender a aprender, competencias sociales y cívicas, sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor, y conciencia y expresiones culturales.

Tal como aparece en el Plan Heziberri 2020 (p.20), la competencia matemática consiste en “aplicar el conocimiento matemático para interpretar, describir, explicar y dar respuestas a problemas relacionados con las necesidades de la vida cotidiana, utilizando modos de pensamiento, representación y herramientas propias del área”.

En otro punto, el Plan Heziberri 2020 (p.61), especifica que:

> La competencia matemática no debe limitarse al conocimiento de la terminología, datos y procedimientos matemáticos, ni a las destrezas para realizar ciertas operaciones y cumplir con determinados métodos, sino que se trata de poner el conocimiento matemático en acción para resolver los problemas que se pueden presentar en las diferentes situaciones del día a día.

De todos es sabido que, la actividad matemática es fundamental para adquirir y desarrollar estrategias generales de aprendizaje. Al hacer matemáticas se desencadenan procesos con los que se trabajan capacidades muy generales como argumentar, inferir, explorar, ensayar, clasificar, analizar, particularizar, generalizar y estimar. También, se desarrolla el pensamiento lógico y la capacidad de razonamiento (deductivo, inductivo, analógico), se trabaja la percepción y visualización espacial, se estimula la actitud crítica, se agudiza la intuición, y se fomenta la creatividad, la perseverancia en el trabajo y la confianza en las propias posibilidades (Heziberri 2020, p. 63).

Con todo esto, no cabe duda de que las matemáticas son un instrumento necesario para comprender mejor otras disciplinas del curriculum, como es el caso de las ciencias de la naturaleza, pues la naturaleza forma parte de la vida cotidiana del alumnado. Según recoge el Plan Heziberri 2020 (p.74):

> La utilización del lenguaje matemático aplicado a los distintos fenómenos naturales, a la generación de hipótesis, a la descripción, explicación y a la predicción de resultados, al registro de la información, a la organización de los datos de forma significativa, a la interpretación de datos e ideas, en la formalización de leyes

> naturales, es un instrumento que nos ayuda a comprender mejor la realidad que nos rodea. La utilización de algoritmos y cálculos matemáticos es imprescindible para el desarrollo de la competencia científica, así como el uso de funciones y modelos matemáticos. La investigación científica parte en muchos casos de situaciones problemáticas abiertas en las que una vez establecido el marco referencial o teórico es necesario utilizar estrategias de solución asociadas de forma directa con la competencia matemática.

En definitiva, la normativa curricular expone la importancia de que el aprendizaje de las matemáticas se base en contextos funcionales, relacionados con situaciones de la vida cotidiana, de forma que se produzca un aprendizaje significativo. Es decir, que a partir de las experiencias propias y los conocimientos previos se adquieran progresivamente conocimientos más complejos.

Asimismo, el Plan Heziberri 2020 plantea unos objetivos y unos bloques de contenidos para el área de matemáticas en el segundo ciclo de Educación Primaria que se enuncian a continuación.

Por un lado, los objetivos son los siguientes:

1. Plantear y resolver de manera individual o en grupo, problemas extraídos de la vida cotidiana, utilizando diferentes estrategias, justificando el proceso de resolución, interpretando los resultados y aplicándolos a nuevas situaciones para poder actuar de manera más eficiente en el medio social.
2. Aplicar el conocimiento matemático para comprender, valorar y producir informaciones y mensajes sobre hechos y situaciones de la vida diaria y reconocer su carácter instrumental para otros campos de conocimiento.
3. Identificar formas geométricas del entorno natural y cultural, utilizando el conocimiento de sus elementos, relaciones y propiedades para describir la realidad, aplicando los conocimientos geométricos para comprender y analizar el mundo físico que nos rodea y resolver problemas a él referidos.
4. Realizar, con seguridad y confianza, cálculos y estimaciones (numéricas, métricas, etc.) utilizando los procedimientos más adecuados a cada situación (cálculo mental, escrito, calculadora, …) para interpretar y valorar diferentes situaciones de la vida real, sometiendo los resultados a revisión sistemática.

5. Razonar y argumentar utilizando elementos del lenguaje común y del lenguaje matemático (números, tablas, gráficos, figuras) acordes con su edad, que faciliten la expresión del propio pensamiento para justificar y presentar resultados y conclusiones de forma clara y coherente.
6. Utilizar de forma adecuada las tecnologías de la información y comunicación (calculadoras, ordenadores, etc.) tanto para los cálculos como en la búsqueda, tratamiento y representación de informaciones de índole diversa y también para ayudar en el aprendizaje de las matemáticas.
7. Apreciar el papel de las matemáticas en la vida cotidiana, disfrutar con su uso y reconocer el valor de modos y actitudes propias de la actividad matemática, tales como la exploración de las distintas alternativas, la precisión en el lenguaje o la flexibilidad y perseverancia en la búsqueda de soluciones.
8. Valorar las matemáticas como parte integrante de nuestra cultura, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual y aplicar las competencias matemáticas adquiridas para analizar y valorar fenómenos sociales como la diversidad cultural, el respeto al medio ambiente, la salud, el consumo, la igualdad de género o la convivencia pacífica.

Y, por otro lado, estos son los bloques de contenidos:

- Bloque 1: Contenidos comunes.
- Bloque 2: Números y operaciones
- Bloque 3: La medida: estimación y cálculo de magnitudes
- Bloque 4: Geometría.
- Bloque 5: Tratamiento de la información, azar y probabilidad
- Bloque 6: Resolución de problemas.

4. MÉTODO: PROPUESTA DIDACTICA.

4.1. Contextualización y metodología.

Tal como recoge Alsina (2011, p. 13):

> Las matemáticas no son un conjunto de conocimientos abstractos que los alumnos pueden aprender sólo a través de un cuaderno de actividades, sino que las matemáticas tratan de ver nuestro mundo y crear representaciones con las que podemos trabajar para resolver las situaciones problemáticas que importan.

Así es que, este mismo autor, Alsina (2010, p.14), propone una "pirámide de educación matemática", en la que aparecen los recursos necesarios para desarrollar el pensamiento matemático y sus grados de frecuencia recomendables en las prácticas del aula para fomentar la competencia matemática. En los primeros niveles de la pirámide se encuentran las situaciones de la vida cotidiana, los materiales manipulativos y los juegos; en los niveles intermedios se sitúan los recursos literarios (cuentos, canciones, etc.) y los recursos tecnológicos (calculadora, apps, etc.); y finalmente, en la cúspide del diagrama piramidal aparecen los libros de texto y/o los cuadernos de actividades, para abordar la enseñanza desde situaciones más descontextualizadas y abstractas (Alsina, 2018, p.9).

Figura 7. Pirámide de la educación matemática. ALSINA, À. (2009): "Matemáticas en la educación primaria" Barcelona. Graó, pp. 93-138.

Por eso, en base a esta pirámide, la idea es crear un proyecto en el que los niños y las niñas sean protagonistas de su propio aprendizaje y que los contenidos que aprendan sean significativos, despertando en ellos interés, curiosidad y motivación. Además, con el tema escogido para la propuesta didáctica, "las matemáticas y la naturaleza", se pretende dejar de enseñar los contenidos matemáticos de forma aislada y descontextualizada y apostar por una metodología globalizada e interdisciplinar.

Por ello se van a diseñar una serie de actividades muy visuales y manipulativas, donde la base sea la observación, la investigación, la experimentación, la formulación y comprobación de hipótesis. Es decir, el aprendizaje del alumnado será activo.

Esta metodología, por lo tanto, apuesta por la reflexión, la participación y el diálogo activo entre los compañeros y las compañeras de clase, convirtiéndoles en personas competentes tanto en el ámbito matemático como en cualquier otro. Además, les ayudará a lograr una mayor autonomía personal, confianza, autoestima y creatividad.

El curso para el que está pensado llevar a cabo este proyecto es sexto de educación primaria, ya que a esas edades los niños y las niñas tienen ya la madurez suficiente como para participar activamente en las actividades y asumir los contenidos trabajados.

4.2. Objetivos y contenidos de la propuesta didáctica

Con la propuesta didáctica que se plantea, lo que se pretende, entonces, es el acercamiento de las matemáticas al alumnado de una forma atractiva y diferente, a través de la observación del entorno que les rodea, es decir, de elementos que están presentes en su vida cotidiana como son los animales y las plantas.

Por lo tanto, los dos objetivos principales claros del proyecto son: encontrar relaciones entre los conceptos matemáticos y los objetos del mundo natural y representar elementos de la naturaleza mediante las matemáticas en las aulas de Educación Primaria, diseñando una serie de actividades para que los niños y las niñas alcancen nociones lógico-matemáticas.

Asimismo, a continuación, se detallan una serie de objetivos más específicos del proyecto:

Cognitivos	Psicomotores	Afectivos
1. Trabajar los criterios de divisibilidad. 2. Averiguar el resto de una división con la calculadora. 3. Realizar operaciones con fracciones. 4. Introducir la media aritmética. 5. Aprender a utilizar el programa geogebra para construir polígonos y arcos de circunferencia e investigar sobre sus propiedades. 6. Calcular el área del triángulo. 7. Identificar triángulos semejantes. 8. Dividir un segmento en dos y tres partes iguales. 9. Comprender qué es la simetría. 10. Aprender a dibujar los ejes de simetría de un polígono regular y de un círculo. 11. Calcular perímetros y áreas de polígonos regulares.	1. Encontrar relaciones entre los conceptos matemáticos y los elementos del mundo natural. 2. Empezar a tomar contacto con la calculadora y otras herramientas de cálculo. 3. Aprender a usar instrumentos matemáticos (escuadra, cartabón, transportador y compás). 4. Crear una figura en 2D y en 3D.	1. Aceptar las opiniones y los comentarios de los compañeros. 2. Escuchar a los compañeros y al docente. 3. Mostrar una actitud de iniciativa personal. 4. Trabajar en pequeños grupos de manera eficiente. 5. Trabajar individualmente de manera eficaz.

En cuanto a los contenidos que se trabajarán, revisando el temario del libro de matemáticas de sexto de primaria de la editorial edelvives (ver anexo 1), de los doce temas que se proponen, se trabajarán conceptos del tema 1: múltiplos y divisores; del tema 6: fracciones y operaciones; del tema 8: escalas y movimientos en el plano; del tema 10: perímetro y área y del tema 12: estadística y probabilidad.

Como puede observarse, se abordarán contenidos de los 6 bloques mencionados en el apartado anterior.

Del mismo modo que con los objetivos, a continuación, aparecen unos contenidos específicos del proyecto, divididos en conceptuales, procedimentales y actitudinales:

Conceptuales	Procedimentales	Actitudinales
1. Múltiplos y divisores de un número. 2. Criterios de divisibilidad. 3. Operaciones con fracciones. 4. Media aritmética. 5. Los polígonos. 6. Arcos de circunferencia. 7. Área del triángulo. 8. Semejanza de triángulos. 9. La simetría 10. Ejes de simetría. 11. Perímetros y áreas.	1. Identificación de las matemáticas en elementos de la naturaleza. 2. Geogebra. 3. Herramientas matemáticas. 4. Construcción de triángulos.	1. Curiosidad por conocer el mundo que nos rodea desde un punto de vista matemático.

A continuación, se presenta la descripción completa de todas las actividades que se proponen y con las que se pretenden alcanzar los objetivos establecidos.

4.3. Actividades.

ACTIVIDAD 1 (ver anexo 13)	
Título: ¿Dónde están las matemáticas? ¿Se pueden ver?	
Tipo de grupo: Grupo-clase	**Lugar:** Aula ordinaria
Objetivos 1. Saber los conocimientos previos del alumnado acerca del tema. 2. Aceptar las opiniones y los comentarios de los compañeros.	
Contenidos 1. Curiosidad por conocer el mundo que nos rodea desde un punto de vista matemático. (A) 2. Las matemáticas en la naturaleza. (C) 3. Los fractales. (C) 4. La sucesión de Fibonacci. (C) 5. El número áureo. (C) 6. La simetría. (C)	
Descripción detallada de cómo se desarrolla Esta actividad consta de dos partes: - En la primera, se le plantearán al alumnado cuatro preguntas, creando así un pequeño debate entre todos y todas acerca de lo que saben sobre el tema. - En la segunda, se proyectarán unos videos mediante los cuales el alumnado podrá observar cómo las matemáticas están presentes en la naturaleza y, una vez vistos, se les volverán a realizar las preguntas de la primera parte de la actividad para comprobar si los videos les han hecho cambiar algunas de sus respuestas.	
Materiales Un documento Word con las preguntas (ver anexo 13). Un proyector y los videos de Youtube: https://www.youtube.com/watch?v=l0M8tEj1mnY ; https://www.youtube.com/watch?v=9vmakrmzd1U ; https://www.youtube.com/watch?v=-elt1tayX9k	
Criterios de evaluación 1. La evolución de las respuestas a las preguntas después de la reproducción del video.	

ACTIVIDAD 2	
Título: En busca de las matemáticas, ¡todos a la calle!	
Tipo de grupo: Grupo-clase	**Lugar:** Parque natural
Objetivos 1. Encontrar relaciones entre los conceptos matemáticos y los elementos del mundo natural. 2. Mostrar una actitud de iniciativa personal.	
Contenidos 1. Identificación de las matemáticas en elementos de la naturaleza. (P) 2. Curiosidad por conocer el mundo que nos rodea desde un punto de vista matemático. (A)	
Descripción detallada de cómo se desarrolla Durante esta sesión se irá hasta el parque natural más cercano para observar y entrar en contacto con todos aquellos elementos de la naturaleza que se encuentren en él. Se llevarán diferentes tipos de materiales para poder tomar nota de algunos datos, fotografiar algunos elementos e incluso para poder coger todo lo que se pueda y se considere que pueda servir para trabajar contenidos matemáticos. Además, antes de que acabe la sesión, se les avisará de que por su cuenta tienen que conseguir (de casa, de otro parque, de otro lugar, de internet, etc…) alguna foto más o algún elemento natural diferente de los que ya han conseguido durante la salida al parque.	
Materiales Cuadernos, lápices, gomas, reglas, cámaras de fotos, elementos de la naturaleza (plantas, hojas, animales, frutas, etc.)	
Criterios de evaluación 1. El reconocimiento de contenidos matemáticos en los elementos naturales.	

ACTIVIDAD 3	
Título: Entre todos encontramos matemáticas en la naturaleza.	
Tipo de grupo: Grupos pequeños y grupo-clase	**Lugar:** Aula ordinaria
Objetivos 1. Encontrar relaciones entre los conceptos matemáticos y los elementos del mundo natural. 2. Trabajar en pequeños grupos de manera eficiente. 3. Escuchar a los compañeros y al docente. 4. Aceptar las opiniones y los comentarios de los compañeros.	
Contenidos 1. Identificación de las matemáticas en elementos de la naturaleza. (P) 2. Curiosidad por conocer el mundo que nos rodea desde un punto de vista matemático. (A)	
Descripción detallada de cómo se desarrolla En grupos pequeños, cada uno/a presentará los elementos e imágenes que tenga, tanto de la sesión en el parque como de los que hayan traído por su cuenta y, tras unos minutos, cada grupo tendrá que decantarse por los cinco elementos que, a su parecer, escondan diferentes contenidos matemáticos y que se puedan trabajar en el aula. Una vez escogidos los elementos, cada grupo los dejará en una zona de la clase habilitada para ello, y el docente añadirá alguna imagen nueva y distinta para ampliar el trabajo del alumnado. Para terminar, el docente a nivel grupo-clase pedirá que se observen bien todos esos elementos seleccionados y que se clasifiquen según lo que recuerdan de los videos de la primera actividad. Así, se creará un debate en base a los contenidos que aparecieron en dichos videos, pero lo que no se imaginan es que en las próximas actividades esos conceptos solamente van a servir de excusa para trabajar temas de matemáticas propios de su curso.	
Materiales Fotografías y elementos naturales.	
Criterios de evaluación 1. La capacidad de argumentación y razonamiento en la actividad. 2. La capacidad de relacionar los objetos obtenidos con los contenidos del video y otros conocimientos previos.	

ACTIVIDAD 4 (ver anexo 14)

Título: ¿Qué pasa con los conejos?

Tipo de grupo: Parejas	**Lugar:** Aula ordinaria

Objetivos

1. Trabajar los criterios de divisibilidad.
2. Empezar a tomar contacto con la calculadora y otras herramientas de cálculo.
3. Averiguar el resto de una división con la calculadora.
4. Trabajar en pequeños grupos de manera eficiente.

Contenidos

1. Múltiplos y divisores de un número. (C)
2. Criterios de divisibilidad. (C)
3. Propiedades de las divisiones. (C)
4. La calculadora y otras herramientas matemáticas. (P)

Descripción detallada de cómo se desarrolla

Para empezar la actividad, se planteará el problema de los conejos, con el que descubrirán los primeros términos de la sucesión de Fibonacci: 1,1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34… Así pues, los primeros términos los calcularán a mano, pero luego con la ayuda de una hoja de cálculo (programa Excel) o la calculadora, el alumnado tendrá que averiguar algún término más de dicha sucesión.

A continuación, en base a esos números, y según los criterios de divisibilidad, cada pareja irá marcando, primero, cuáles son múltiplos de dos, luego, cuáles son múltiplos de 3, luego de 5, de 4, de 8, de 13,…

En cuanto descubran tres múltiplos de cada número, verán que pasa algo muy curioso y es que dentro de la sucesión de Fibonacci, los múltiplos de cada divisor se van repitiendo cada X números.

Además, aprovechando esta actividad, tendrán que calcular los restos de las divisiones formadas por cada término de la sucesión y cada uno de los divisores anteriores (2, 3, 5, 4, 8, 13…), pero sin hacer la operación. Solamente podrán utilizar los criterios de divisibilidad y la calculadora.

Según vayan calculando los restos, también se darán cuenta de que cada cierto número, se van a empezar a repetir los números a modo de series.

Materiales

Papel, lápiz, goma, ordenador, el programa Excel y calculadora.

Criterios de evaluación

1. Comprende todos los conceptos.
2. Ejecuta todo correctamente.
3. Se desenvuelve bien con las nuevas herramientas.

ACTIVIDAD 5 (ver anexo 15)

Título: Fibonacci y fracciones.

Tipo de grupo: Individual	**Lugar:** Aula ordinaria

Objetivos

1. Realizar operaciones con fracciones.
2. Trabajar individualmente de manera eficaz.

Contenidos

1. Operaciones con fracciones. (C)

Descripción detallada de cómo se desarrolla

En esta actividad al alumnado se le plantearán las cuatro primeras operaciones que aparecen en la imagen (a, b, c y d) y se les pedirá que las calculen. En cuanto las resuelvan, tendrán que observar qué ocurre con los resultados y ser capaces de dar la solución de las otras tres que quedan, así como de muchas más, sin tener que hacer ninguna operación.

Por último, tendrán que calcular la aproximación decimal de cada fracción resultante y verán que el número resultante es siempre muy similar.

a) $1+\frac{1}{2}$ b) $1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}$ c) $1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}$

d) $1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}$ e) $1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}$

f) $1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}}$ g) $1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}}}$

Figura 12. Operaciones con fracciones.

Materiales

Papel, lápiz y goma.

Criterios de evaluación

1. Comprende todos los conceptos.
2. Ejecuta todo correctamente.

ACTIVIDAD 6 (ver anexo 16)	
Título: Fibonacci y medias.	
Tipo de grupo: Parejas	**Lugar:** Aula ordinaria

Objetivos

1. Introducir la media aritmética.
2. Tomar contacto con la calculadora y otras herramientas de cálculo.
3. Trabajar en pequeños grupos de manera eficiente.

Contenidos

1. Media aritmética. (C)

Descripción detallada de cómo se desarrolla

Cada pareja lanzará dos veces un dado (o una vez dos dados), y con esos números que salgan (ordenados de menor a mayor), tendrán que construir una sucesión del tipo Fibonacci.

- En primer lugar, cada pareja sumará el primer término con el cuarto y luego dividirá el resultado entre dos (media entre los términos 1º y 4º). Después, harán lo mismo con el 2º término y el 5º, con el 3º y el 6º y con todos los términos que quieran, siempre y cuando las medias se hagan entre un término y el que esté tres posiciones por detrás. Observarán lo que va saliendo.
- En segundo lugar, sumarán el primer término con el segundo y con el séptimo y el resultado lo dividirán entre tres (media entre los términos 1º, 2º y 7º). A continuación, realizarán lo mismo con el 2º, 3º y 8º término, con el 3º, 4º y 9º, etc. También observarán lo que les va saliendo.

Cada pareja podrá trabajar con números diferentes pero todos acabarán observando lo mismo.

Materiales

Dados, papel, lápiz y goma o el programa Excel.

Criterios de evaluación

1. Comprende todos los conceptos.
2. Ejecuta todos los contenidos correctamente.

ACTIVIDAD 7

Título: ¿Dibujamos con geogebra?

Tipo de grupo: Individual	**Lugar:** Aula ordinaria

Objetivos

1. Aprender a utilizar el programa geogebra para construir polígonos e investigar sobre sus propiedades.
2. Trabajar individualmente de manera eficaz.

Contenidos

1. Los polígonos. (C)
2. Geogebra. (P)

Descripción detallada de cómo se desarrolla

En primer lugar, con la ayuda de geogebra construirán un rectángulo áureo, del cual podrán obtener las medidas de sus lados para calcular su razón (número áureo).

En segundo lugar, el alumnado dibujará un pentágono regular, también con geogebra, y a continuación trazará todas sus diagonales. Observarán que el resultado es una estrella inscrita en él y que el pentágono regular vuelve a aparecer en el centro de la estrella (invertido), en el cual podrán dibujar una nueva estrella y así sucesivamente.

A continuación, medirán algunos segmentos para calcular la razón de los lados de los triángulos que han quedado inscritos en el pentágono y comprobarán que el resultado de todos ellos es el número áureo.

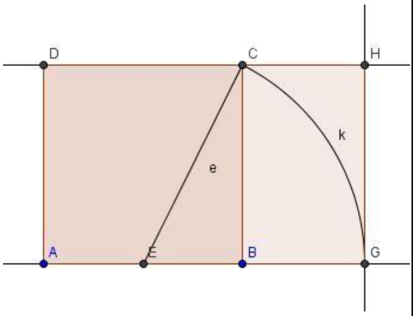


Figura 13. Rectángulo áureo. (Fuente: https://www.gaussianos.com/fibonacci-las-abejas-y-las-tarjetas-de-credito/)

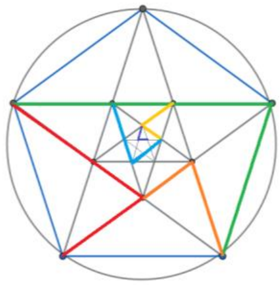


Figura 14. Estrella pitagórica.

Materiales

Ordenador y geogebra.

Criterios de evaluación

1. Comprende todos los conceptos.
2. Ejecuta todos los contenidos correctamente.
3. Se desenvuelve bien con las nuevas herramientas.

ACTIVIDAD 8

Título: Espirales con geogebra

Tipo de grupo: Individual	**Lugar:** Aula ordinaria

Objetivos

1. Aprender a utilizar e programa geogebra para construir polígonos y arcos de circunferencia e investigar sobre sus propiedades.
2. Trabajar individualmente de manera eficaz.

Contenidos

1. Los polígonos. (C)
2. Arcos de circunferencia. (C)
3. Geogebra. (P)

Descripción detallada de cómo se desarrolla

A partir de rectángulos áureos, por parejas, construirán con geogebra la espiral áurea.

Y después, a partir de cuadrados sucesivos de lados iguales a los números de Fibonacci, construirán otra espiral.

De esta manera, con las dos construidas, podrán observar la analogía entre ambas.

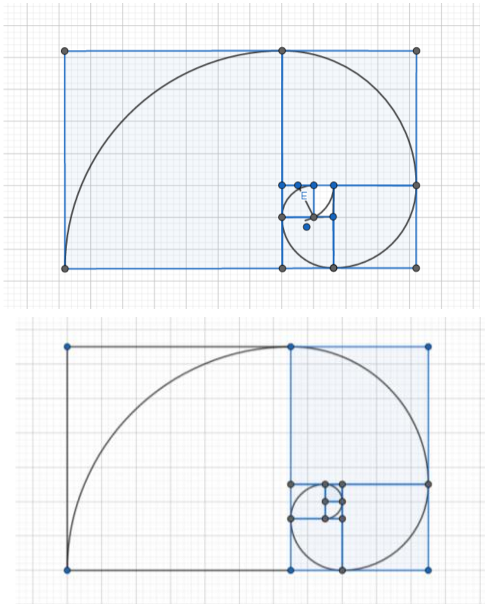


Figura 15. Espiral áurea y espiral de Fibonacci.

Materiales

Ordenador y geogebra.

Criterios de evaluación

1. Comprende todos los conceptos.
2. Ejecuta todos los contenidos correctamente.

ACTIVIDAD 9

Título: Triángulo mágico

Tipo de grupo: Individual | **Lugar:** Aula ordinaria

Objetivos

1. Calcular el área del triángulo.
2. Identificar triángulos semejantes.
3. Aprender a usar instrumentos matemáticos (escuadra, cartabón, transportador y compás).
4. Trabajar individualmente de manera eficiente.

Contenidos

1. Área del triángulo. (C)
2. Semejanza de triángulos. (C)

Descripción detallada de cómo se desarrolla

Para empezar esta actividad, el alumnado dibujará un triángulo rectángulo isósceles y trazará su altura, desde la hipotenusa hasta el vértice opuesto, dando lugar a otros dos triángulos isósceles semejantes al primero. Luego en uno de esos nuevos triángulos, se volverá a trazar la altura y uno de los triángulos resultantes se pintará de un color (por ejemplo, rojo como en la imagen).

A continuación, de los tres triángulos resultantes (uno pintado y dos sin pintar), se escogerá el de mayor área y sin pintar y se volverán a seguir los mismos pasos, formando otros tres triángulos nuevos: uno pintado de otro color (por ejemplo, naranja) y otros dos sin pintar.

Después, en todos los triángulos que haya en la figura sin pintar de mayor e igual área, se volverá a repetir el proceso, apareciendo nuevos triángulos pintados y sin pintar, y así sucesivamente.

A la hora de pintar los triángulos, tendrán que tener en cuenta sus áreas, ya que todos los que tengan las mismas irán coloreados del mismo color, y así, se darán cuenta que los triángulos de colores siguen la sucesión de Fibonacci.

Además, esta actividad servirá para introducir los fractales.

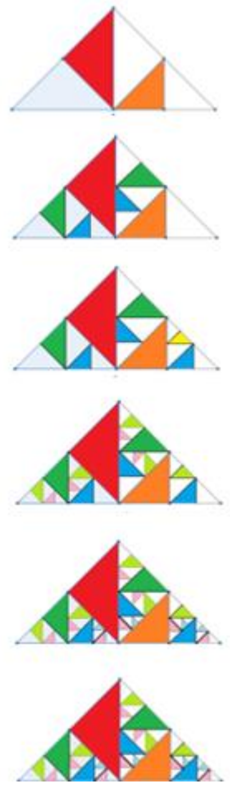


Figura 16. Triángulo mágico.

Materiales

Papel, escuadra y cartabón, lápiz, goma y pinturas de colores o geogebra.

Criterios de evaluación

1. Comprende todos los conceptos.
2. Ejecuta todos los contenidos correctamente.

ACTIVIDAD 10

Título: ¡A crear fractales!

Tipo de grupo: Individual

Lugar: Aula ordinaria

Objetivos

1. Dividir un segmento en dos y tres partes iguales.
2. Identificar triángulos semejantes.
3. Aprender a usar instrumentos matemáticos (escuadra, cartabón, transportador y compás).
4. Trabajar individualmente de manera eficaz.

Contenidos

1. Semejanza de triángulos. (C)

Descripción detallada de cómo se desarrolla

Con esta actividad, se crearán dos fractales: el triángulo de Sierpinski y la curva de Koch.

Por una parte, con el triángulo de Sierpinski, los niños y las niñas crearán un triángulo equilátero inicial, en el cual se irán inscribiendo otros triángulos equiláteros. Además, de esta forma, se podrán analizar las relaciones entre los perímetros y las áreas de los triángulos equiláteros.

Por otra parte, para la curva de Koch, el alumnado dividirá, sucesivamente, segmentos en tres partes iguales.

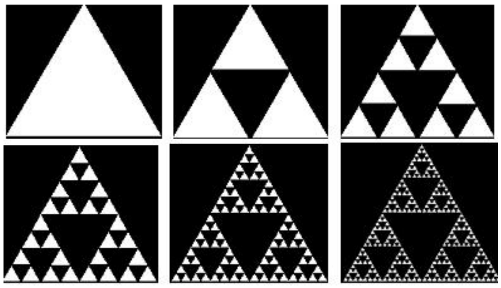


Figura 17. El triángulo de Sierpinski. (Fuente: https://batchdrake.wordpress.com/2009/01/12/el-area-del-triangulo-de-sierpinski/)

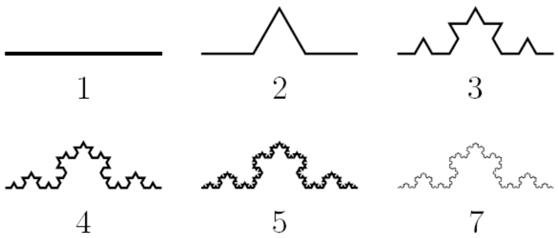


Figura 18. La curva de Koch. (Fuente: https://eddi.ru/snowflake-koch-building.html)

Materiales

Folios, lápiz, goma, regla, compás, transportador, escuadra y cartabón o geogebra.

Criterios de evaluación

1. Comprende todos los conceptos.
2. Ejecuta todos los contenidos correctamente.
3. Crea de manera correcta los fractales.

ACTIVIDAD 11 (Ver anexo 17)

Título: Curva de dragón

Tipo de grupo: Individual

Lugar: Aula ordinaria

Objetivos

1. Aprender a usar herramientas matemáticas (escuadra, cartabón, transportador y compás) para construir triángulos.
2. Crear una figura en 2D y en 3D.
3. Trabajar individualmente de manera eficaz.

Contenidos

1. Herramientas matemáticas. (P)
2. Construcción de triángulos. (P)

Descripción detallada de cómo se desarrolla

En primer lugar, para dibujar la curva de dragón en un papel, los niños y las niñas, a partir de diferentes segmentos irán construyendo triángulos rectángulos isósceles, alternando siempre la orientación de los triángulos.

Y en segundo lugar, para su creación con papiroflexia, el alumnado tendrá que seguir unos pasos (ver en el anexo), que les resultarán más sencillos de interpretarlos después de haber dibujado la curva con lápiz en un papel.

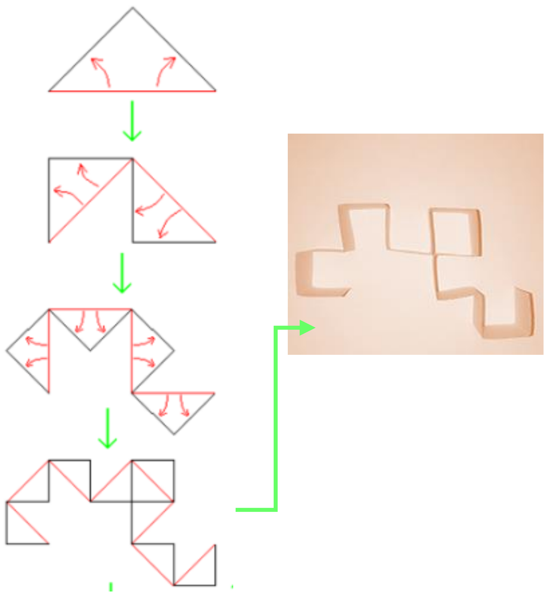


Figura 19. Curva de dragón. (Fuente (http://edupython.blogspot.com/2013/07/la-curva-de-dragon-el-fractal-de-parque.html y https://es.wikipedia.org/wiki/Curva_del_drag%C3%B3n)

Materiales

Folios, lápiz, goma, regla, compás, transportador, escuadra y cartabón.

Criterios de evaluación

1. Comprende todos los conceptos.
2. Ejecuta todos los contenidos correctamente.
3. Crea de manera correcta el fractal, tanto en 2D como en 3D.

ACTIVIDAD 12

Título: Juguemos con las simetrías.

Tipo de grupo: Grupos pequeños, grupo-clase e individual.	**Lugar:** Aula ordinaria

Objetivos

1. Comprender qué es la simetría.
2. Aceptar las opiniones y los comentarios de los compañeros.
3. Trabajar en grupo de manera eficiente.
4. Trabajar individualmente de manera eficaz.

Contenidos

1. La simetría. (C)

Descripción detallada de cómo se desarrolla

En primer lugar, para esta actividad se aprovecharán todas las pantas, hojas y animales recolectados, de la segunda actividad, ya que mediante ellos los niños y las niñas podrán observar la simetría. Al doblar por la mitad varios elementos, observarán que algunos son simétricos y otros que no lo son y, además, verán que existen diferentes tipos de simetría.

Asimismo, colocando un espejo en la mitad de cada elemento, podrán comprobar que se refleja su parte simétrica y que por muy parecidas que sean las dos mitades, es muy difícil que un elemento sea perfectamente simétrico. Esto mismo se puede hacer con imágenes de las caras de los alumnos, lo cual puede resultar un juego muy divertido porque siendo ellos y ellas mismas los de las fotos, seguramente se vean raros y diferentes a como son en realidad, porque la mayoría no somos perfectamente simétricos.

Después, para seguir comprendiendo el concepto, el alumnado cogerá papeles y hará unas dobleces, recortará algunas formas, y al desdoblarlo observará que el resultado es una figura simétrica.

Por último, se pondrán en parejas y utilizando su cuerpo se colocarán en la posición que quieran. El resto de compañeros y compañeras tendrán que decir si están en posición simétrica y cuál es el eje de simetría, creándose un debate de porqué está en simetría o no lo están.

Materiales

Fotografías de elementos naturales y del alumnado, espejos, folios, lápiz, goma y tijeras.

Criterios de evaluación

1. Comprende qué es la simetría.

ACTIVIDAD 13

Título: Polígonos regulares para trabajar simetrías.

Tipo de grupo: Individual	**Lugar:** Aula ordinaria

Objetivos

1. Aprender a dibujar los ejes de simetría de un polígono regular y de un círculo.
2. Calcular perímetros y áreas de polígonos regulares.
3. Trabajar individualmente de manera eficaz.

Contenidos

1. Ejes de simetría. (C)
2. Perímetros y áreas. (C)

Descripción detallada de cómo se desarrolla

Esta actividad consta de tres partes:

- En la primera parte, el alumnado creará formas simétricas con el programa SketchBook.
- En la segunda parte, tendrán que construir diferentes polígonos regulares (bien a mano o bien con geogebra), y después, dibujar sobre ellos todos los ejes de simetría que tengan, para llegar a la conclusión de que los ejes de simetría van ligados al número de lados del polígono.
- En la tercera parte, una vez hechos los polígonos y trazados sus ejes de simetría, intentarán calcular las áreas y los perímetros de dichos polígonos, a partir de los triángulos resultantes en cada figura.

Por último, dibujarán una circunferencia y tendrán que observar qué pasa en este caso con los ejes de simetría, y con esto se introducirá la idea de infinito.

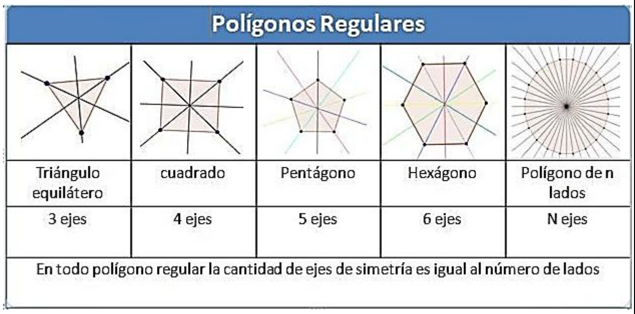


Figura 20. Polígonos regulares y ejes de simetría. (Fuente: https://sites.google.com/site/elementossimetricos/simetria-en-figuras-geometricas)

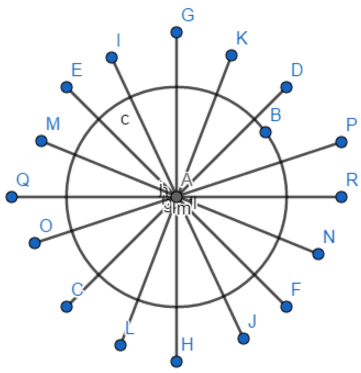


Figura 21. Circunferencia y ejes de simetría.

Materiales

SketchBook, papel, lápiz, goma, regla, compás y geogebra.

Criterios de evaluación

1. Comprende todos los conceptos.
2. Ejecuta todos los contenidos correctamente.

ACTIVIDAD 14

Título: Hundir la simetría

Tipo de grupo: Parejas	**Lugar:** Aula ordinaria

Objetivos

1. Comprender qué es la simetría.
2. Trabajar en pequeños grupos de manera eficiente.

Contenidos

1. La simetría. (C)

Descripción detallada de cómo se desarrolla

A cada niño/a se le dará una plantilla como la de la imagen, pero vacía. Solamente les aparecerán abajo las figuras que tienen que utilizar. Cada niño/a tendrá que colocar en el lado izquierdo del eje de simetría todas las figuras, cada una en una casilla y después, en pareja y por turnos, deberán ir dándose coordenadas (por ejemplo, 2A) hasta adivinar todas las casillas en las que haya una figura. Una vez adivinen las coordenadas, tendrán que acertar también de qué figura se trata, para poderlas dibujar al lado derecho del eje de simetría que ambos tienen libre. El juego no lo ganará el que antes acierte todas las coordenadas y las figuras de cada casilla, sino el que al comprobar con el otro lado del eje que tiene el compañero, todas las formas geométricas queden colocadas simétricamente con respecto al eje.

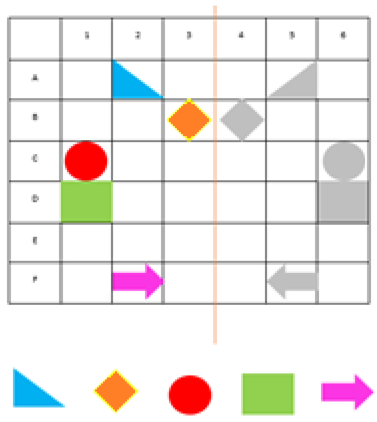


Figura 22. Juego hundir la simetría.

Materiales

Plantilla del juego, lápiz, goma y pinturas de colores.

Criterios de evaluación

1. El interés y la participación en la actividad.
2. Ejecuta el juego correctamente.

5. CONCLUSIONES

Para la realización del Trabajo de Fin de Grado tenía claro que quería un tema de matemáticas, pues en el colegio era mi asignatura preferida y siempre me he imaginado dando clases de matemáticas.

En la primera tutoría, mi tutora me dio bastante libertad para poder trabajar lo que quisiera con la asignatura porque el tema no estaba cerrado y podía relacionar las matemáticas con lo que yo quisiera. De hecho, tras darle varias vueltas, terminé eligiendo relacionar las matemáticas con la literatura, pero sin estar del todo convencida. Eso me pasa por ser una persona tan indecisa. Así que, con ese tema elegido, pero teniendo otra opción en la cabeza, me puse a buscar información para empezar a redactar el marco teórico. Ahí, en ese momento, es cuando me di cuenta de que ese tema que había escogido no era el que a mí más me gustaba ni el que más me motivaba para realizar el último trabajo y el más importante de la carrera, ya que siempre me entretenía buscando información del otro tema que dejé sin elegir. Por eso, sin perder más tiempo, le planteé a mi tutora cambiar de tema y así es como nació el actual Trabajo de Fin de Grado.

Por un lado, me parecía interesantísimo relacionar las matemáticas con la naturaleza, ya que muchas veces el ser humano no es consciente de que las matemáticas están por todas partes y que no pueden ser concebidas separadas de la realidad. De hecho, además de en la naturaleza, se pueden encontrar en: juegos (ej. reglas y normas), en la música (ej. valor de las notas musicales), en situaciones del día a día (ej. compras y recetas), en los objetos (ej. formas), etc.

Y por otro lado, con esta relación entre dos asignaturas de primaria, pensé que los niños y las niñas de primaria podrían sentirse más motivados a la hora de estudiar las matemáticas, ya que la forma de trabajarlas se escapa de rutinas de ejercicios repetitivos y los contenidos se aprenden de una forma contextualizada gracias a la observación del entorno natural.

Asimismo, reflexionando sobre lo que he aprendido yo personalmente con la realización de este trabajo, es decir, haciendo una comparación de lo que sabía antes de empezar y lo que sé ahora, la diferencia es bastante grande. Sabía que en el mundo natural se podían encontrar elementos geométricos o simetrías, es decir, conocía lo que es fácil de percibir por la vista, pero después de haber buscado tanta información y de haber redactado este documento, sé que hasta los números de pétalos que tienen las flores guardan una sucesión matemática o que un rayo repite un mismo patrón geométrico a diferentes escalas. Por lo tanto, he descubierto un mundo natural fascinante que se rige por leyes de carácter matemático y, por consiguiente, que la naturaleza da mucho juego para poder trabajar la asignatura de matemáticas en las aulas de primaria.

Por último, me gustaría dejar constancia de que, aunque a lo largo de la elaboración del trabajo he tenido momentos de bajón y en los que me sentía bloqueada y que no sabía cómo avanzar, al final, con la ayuda de mi tutora y de mi gente más cercana (familiares y amigos), he terminado el último trabajo de la carrera bastante satisfecha y con buenas sensaciones.

6. PROPUESTAS DE MEJORA

Tras recopilar la máxima información posible acerca del tema gracias a las diferentes fuentes que existen hoy en día (internet, libros, artículos, etc.), se ha redactado el marco teórico del documento, y a partir de ahí, se ha elaborado una propuesta didáctica con catorce actividades, en la que se trabajan bastantes contenidos matemáticos propios del curso para el que va dirigida. Sin embargo, no se ha podido llevar a cabo en ninguna clase así que, esto sería la primera propuesta de mejora y la más importante: poner en práctica las actividades y ver su desarrollo real en un aula de sexto de primaria.

Otra manera de mejorar la propuesta didáctica sería extendiéndola, es decir, planteando actividades nuevas, bien relacionadas con los contenidos trabajados en las actividades ya propuestas o bien con nuevos contenidos que sigan surgiendo tras la observación a la naturaleza.

Y, por último, si los resultados obtenidos en el curso para el que está pensada la secuencia son exitosos, se podría proponer trabajar las matemáticas de forma parecida, relacionándolas con la naturaleza, en otros cursos y etapas de primaria.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGRA, P. G., & TABOADA, J. R. (2018). *Las matemáticas del arte: Más allá del número de oro*. Catarata: Madrid.

ALONSO, A. y BERMÚDEZ, T. (2002). De conejos y números. La sorprendente sucesión de Fibonacci. *La gaceta de la RSME*. Vol. 5.1, pp. 175-196.

ALONSO, J. C. P. (2003). Las matemáticas en la naturaleza. *Sigma: revista de matemáticas*, (n. 22), pp. 161-171.

ALONSO, S. H., SÁEZ, A. M. y PICOS, A. P. (2004). ¿Por qué se rechazan las matemáticas? Análisis evolutivo y multivariante de actitudes relevantes hacia las matemáticas. *Revista de educación*, (n. 334), 75-95.

ALSINA, A. (2010). La "pirámide de la educación matemática" Una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. *Aula de innovación educativa*, (n.189), pp. 12-16.

ALSINA, A. (2011). *Educación matemática en contexto.* Barcelona: Horsori.

ALSINA, A. (2018). La evaluación de la competencia matemática: ideas clave y recursos para el aula. *Epsilon Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática,* (núm. 98), p. 7-23.

ALTERS, S. (2000). *Biology: Understanding Life*. Jones and Bartlett Publishers Inc.: Londres.

ÁLVAREZ RÍOS, Y. (2007). La geometría de las formas de la naturaleza. *Revista Tecno Lógicas*, (n.18), pp. 104-136.

BAGUÑÀ, J., PAPS, J., RIUTORT, M., y RUIZ-TRILLO, I. (2002). Origen y evolución de los ejes corporales y la simetría bilateral en animales. *Facultat de biología. Diagonal 645*. Cap. 35, pp. 535-548.

BERMEJO, V. (1996). Enseñar a comprender las matemáticas. *Psicología de la Instrucción I.* Madrid: Síntesis, pp. 256-279.

BLANCO, L., CABALLERO, A., PIEDEHIERRO, A., GUERRERO, E. y GÓMEZ, R. (2010). El Dominio afectivo en la Enseñanza/Aprendizaje de las Matemáticas. Una revisión de investigaciones locales. *Campo abierto.* Vol. 29, (n.1), pp. 13-27.

CALVINO, I. (2009). El libro de la naturaleza en Galileo. *Ciencias*, (n. 95), pp. 50-53.

COCOLETZI, G. H., GONZÁLEZ ZACARÍAS, C., y PALOMINO OVANDO, M. A. (2010). Los números de fibonacci en la naturaleza y los sistemas nanoestructurados artificiales. *Mundo Nano. Revista Interdisciplinaria en Nanociencias y Nanotecnología*. Vol. 3, (n. 1), pp. 15-28.

CÓRCOLES, A. R. (2004). Fibonacci y el número áureo. *Manual formativo de ACTA*, (n. 34), pp. 73-81.

COUTURAT, L. (1960). *La filosofía de las matemáticas de Kant.* UNAM, México.

ELGARREESTA I.L., MORCILLO. J.A., ARRUABARRENA.L.R. y GONZALEZ, A. J. G. (2017). Desarrollo biológico y cognitivo en el ciclo vital. Ediciones Pirámide: Madrid.

FERRÁNDIZ, C., BERMEJO, R., SAINZ, M., FERRANDO, M. Y PRIETO, M.D. (2008). Estudio del razonamiento lógico-matemático desde el modelo de las inteligencias múltiples. *Anales de psicología.* Vol.24, (n. 2), pp. 213-222.

GALLEGO, F. B. (2005). Ubicuidad de la sucesión de Fibonacci. *Un breve viaje por la ciencia*: Universidad de La Rioja, pp. 49-54.

GARDNER, H. (2001). *Estructuras de la mente. La teoría de las Inteligencias Múltiples.* Fondo de cultura económica: Colombia.

GIL, N., GUERRERO, E. Y BLANCO, L. J. (2006). El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. *Revista de Investigación PsicoEducativa.* Vol. 4, (n.8), pp. 47-72

GOÑI, J. Mª. (2011).Matemáticas. Investigación, innovación y buenas prácticas. *Grao*. Vol. 3, (n.12), pp. 5-22.

GÓMEZ, L. F. (1997). *La enseñanza de las matemáticas desde la perspectiva sociocultural del desarrollo cognoscitivo*. Iteso: México.

GUZMÁN, M. de (1990). Los Pitagóricos. Madrid: Universidad Complutense de Madrid, p. 14.

GUZMÁN, M. de (2007). Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación,* (n.43), pp.19-58.

HEZIBERRI, (2020). Currículo de la educación básica. Gobierno Vasco: Departamento de educación, política lingüística y cultura.

ICMAT, (2012). Matemáticas de la naturaleza. Ministerio de economía y competitividad, p. 1-17.

KANT, I. (1989). *Principios metafísicos de la ciencia de la naturaleza.* Madrid: España, Alianza Editorial.

MCLEOD, D.B. (1992). Affect in mathematics education: A reconceptualization. *Handbook of Research on mathematics Teaching and Learning.* New York: Macmillan, pp. 575-598.

MIRÓN PÉREZ, L. (2009). El mundo de las matemáticas en la naturaleza. *Revista de Innovación y experiencias educativas,* (n.23). Recuperado el 2019/01/18 de: https://archivos.csif.es/archivos/andalucia/ensenanza/revistas/csicsif/revista/pdf/Numero_23/LAURA_MIRON_1.pdf

MORONES, R. (2002). La simetría izquierda-derecha en la naturaleza. *Ciencia UANL*. Vol. V, pp-173-179.

PÉREZ. P.M. (2005). Longitud y Área de Curvas Fractales. Dimensión Fractal, pp. 1-15.

PÉREZ SANZ, A. (2005). Curvas en la naturaleza. *Un paseo por la geometría*. IES Salvador Dalí, pp. 129-155.

PIAGET, J. (1979). *La construcción de lo real en el niño.* Ediciones Nueva Visión: Buenos Aires.

RAMACHANDRAN, V. S., y FREEMAN, A. (2001). Sharpening Up 'The Science of Art'. *Journal of Consciousness Studies*. Vol. *8,* (n. 1), pp. 9-29.

ROCHA, M. I. V. (2015). La sucesión de Fibonacci. *Revista de Educación Matemática*. Vol. 21, (n. 3), pp. 29-38.

RUIZ, J. M. (2008) Problemas actuales en la enseñanza aprendizaje de la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*. (n.47), pp. 1-7.

SALDARRIAGA-ZAMBRANO, P. J, BRAVO-CEDEÑO, G.D.R. y LOOR-RIVADENEIRA, M. R. (2016). La teoría constructivista de Jean Piaget y su significación para la pedagogía contemporánea. *Revista científica: Dominio de Ciencias.* Vol. 2, (n. esp.), pp. 127-137.

SOCAS, M.M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. *La educación matemática en la enseñanza secundaria,* pp. 125-154.

SORANDO MUZÁS, J.M. (2000). Matemáticas y realidad. *Revista del IES Elaios de Zaragoza*. Recuperado el 2019/02/12 de: http://matematicasentumundo.es/TEXTOS/textos_realidad.htm

SORANDO MUZAS, J.M. (2012). Fractales. Geometría del caos. *Revista IES Elaios* de Zaragoza, pp. 1-10.

VYGOTSKY, L. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Critica: Barcelona.

WAIGANT, M. (2012). El número de oro. La divina proporción. *El rincón de la ciencia*. (n. 63), pp. 1-6.

8. ANEXOS

Anexo 1. Estudio de las Tendencias en Matemáticas y Ciencias (TIMSS) en 2015.

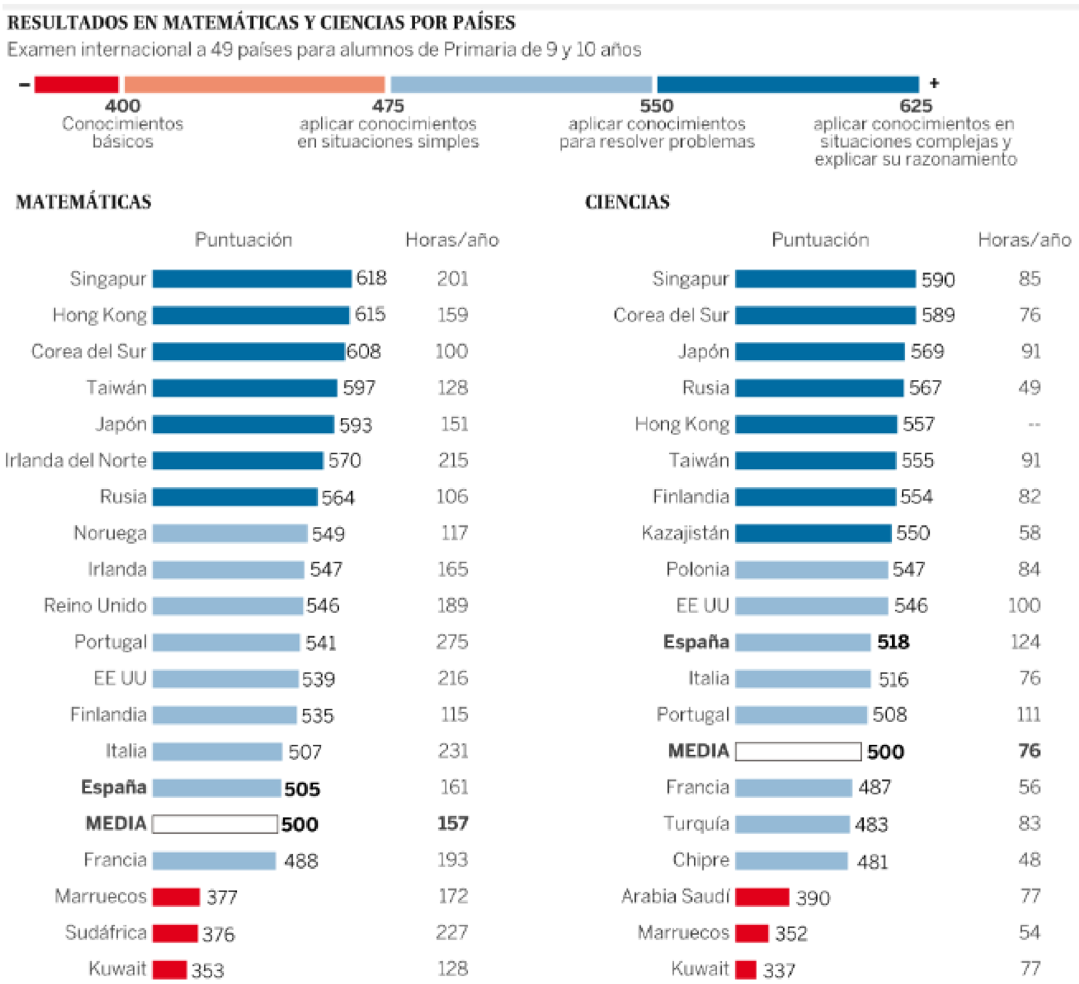


Figura 23. Resultados en matemáticas y ciencias por países. (Fuente: https://elpais.com/politica/2016/11/28/actualidad/1480373155_844220.html)

Estos son los resultados de un examen en el que han participado 580.000 alumnos y alumnas de primaria de diferentes países. La puntuación media española en la prueba TIMSS es de 505 puntos en matemáticas (23 más que en 2011), lo que la sitúa por primera vez por encima de la nota media de los alumnos de nueve y diez años de los países analizados. El resultado mejora pero sigue por debajo de la media de la OCDE (525) y de la Unión Europea (519). España se encuentra bastante lejos del grupo que encabeza la lista y sólo uno de cada cuatro alumnos españoles puede resolver problemas matemáticos simples.

Anexo 2. Relación entre percepción de facilidad y consideración de la materia divertida.

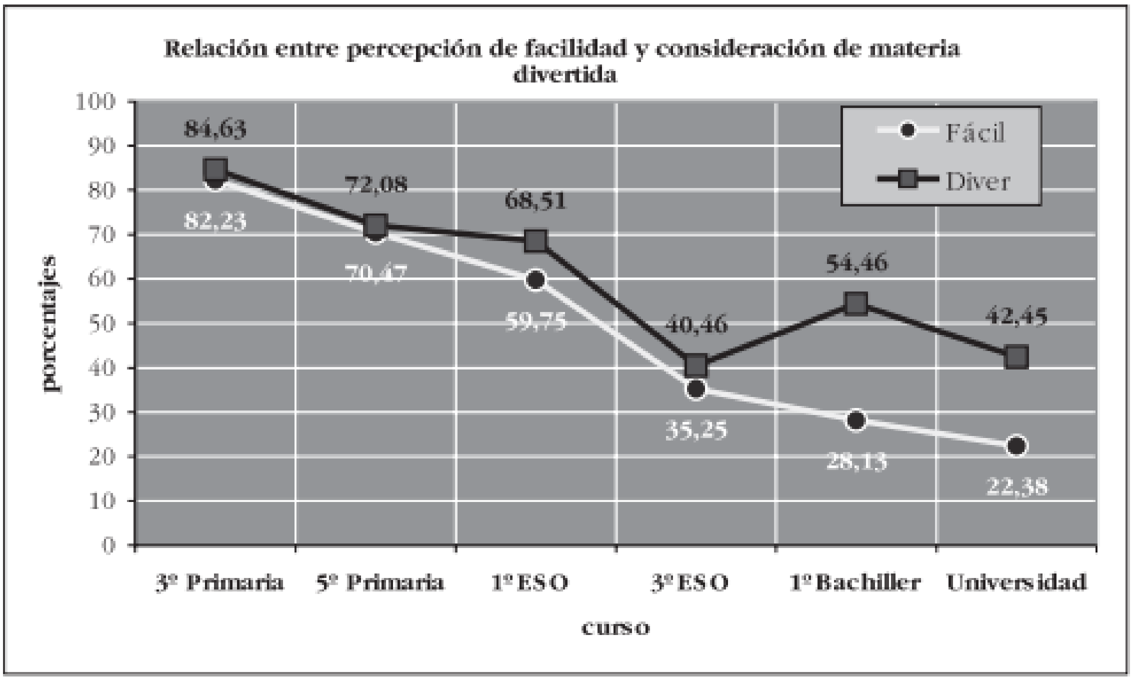


Figura 24. Dificultad y diversión de las matemáticas por niveles educativos. (Fuente: http://www.revistaeducacion.educacion.es/re334/re334_06.pdf)

Anexo 3. Ejemplos de fractales.

Figura 25. Río. (Fuente: http://nabucco.es/obtienen-figuras-fractales/)

Figura 26. Nubes. (Fuente: http://wwwcmc18.blogspot.com/2011/11/la-geometria-fractal-estudia-las-formas.html)

Figura 27. Rayo. (Fuente: http://www.geohikers.es/matematicas-en-la-naturaleza-i-el-universo-es-fractal/)

Figura 28. Planta de aloe vera. (Fuente: https://www.muyinteresante.com.mx/preguntas-y-respuestas/secuencia-fibonacci-matematicas-aplicadas/)

Figura 29. Brócoli romanesco. (Fuente: https://www.smartick.es/blog/matematicas/curiosidades-matematicas/matematicas-en-la-naturaleza/)

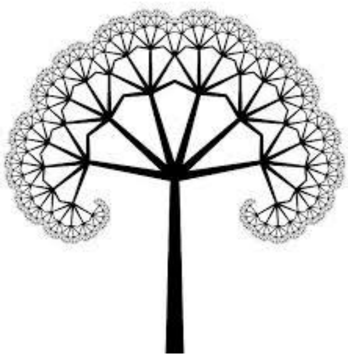


Figura 30. Cicuta. (Fuente: http://www.geohikers.es/matematicas-en-la-naturaleza-i-el-universo-es-fractal/)

Figura 31. Helechos. (Fuente: http://espores.org/es/plantas/una-musa-darrel-tija-i-fulles.html)

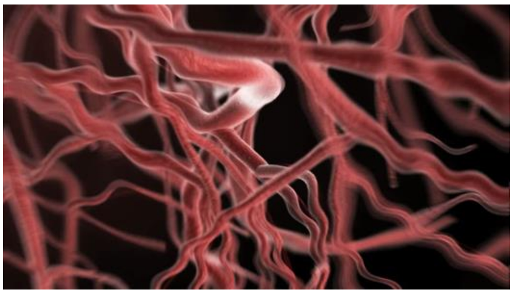


Figura 32. Vasos sanguíneos. (Fuente: http://footage.framepool.com/es/shot/501830372-sistole-celular-sistema-cardio-circulatorio-circulacion)

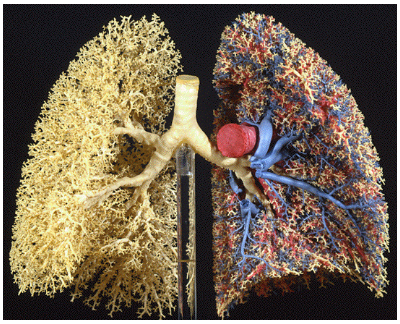


Figura 33. Sistema pulmonar. (Fuente: http://www.geohikers.es/matematicas-en-la-naturaleza-i-el-universo-es-fractal/)

Anexo 4. Ejemplos de simetría radial, bilateral y birradial.

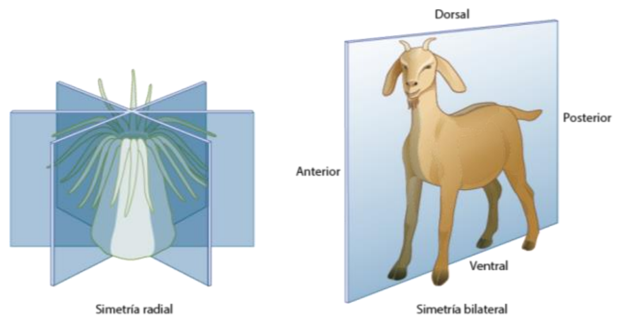


Figura 34. Simetría radial y bilateral. (Fuente: http://biologia.cubaeduca.cu/media/biologia.cubaeduca.cu/medias/temasopales/Bio-8-261/co/modulo_raiz_2.html)

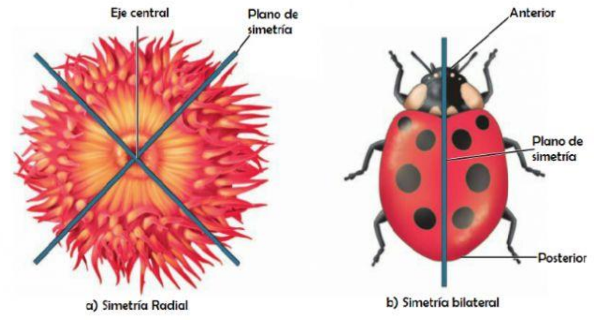


Figura 35. Simetría radial y bilateral. (Fuente: http://www.100cia.site/index.php/naturaleza-y-vida-salvaje/item/7088-como-es-la-simetria-radial-en-animales)

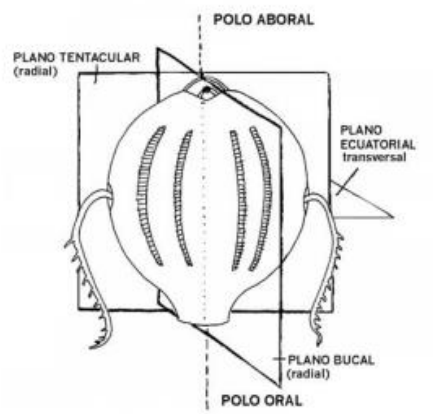


Figura 36. Simetría birradial. (Fuente: *https://www.ucm.es/data/cont/docs/465-2013-08-22-A2%20PROMORFOLOGIA.pdf*)

Animales y plantas con simetría radial.

Figura 37. Estrella de mar. (Fuente: http://cuantovive.org/como-se-reproduce-una-estrella-de-mar/)

Figura 38. Diente de león. (Fuente: https://www.monover.com/diente-de-leon-taraxacum-officinale/)

Figura 39. Medusa. (Fuente: https://smoda.elpais.com/belleza/tienen-las-medusas-el-secreto-de-la-inmortalidad/)

Figura 40. Flor silvestre. (Fuente: http://archivo.infojardin.com/tema/geranios-de-flor-doble-cuales-son.209662/)

Animales y plantas con simetría bilateral.

Figura 41. Mariposa. (Fuente: https://www.anipedia.net/mariposas/vida-mariposas/)

Figura 42. Búho. (Fuente: http://divaganciasdesobremesa.blogspot.com/2010/11/los-buhos-entre-mitos-y-realidades.html)

Figura 43. Orquídea. (Fuente: https://www.pinterest.ch/pin/609674868275102148/).

Figura 44. Pera. (Fuente: https://www.elnortedecastilla.es/degustacastillayleon/saludable/pera-fragancia-jugosidad-20180605195236-nt.html)

Anexo 5. El problema de los conejos de Fibonacci.

¿Cuántas parejas de conejos se producirán en un año, si se comienza con una pareja que produce cada mes otra pareja que procrea a su vez a los dos meses de vida?

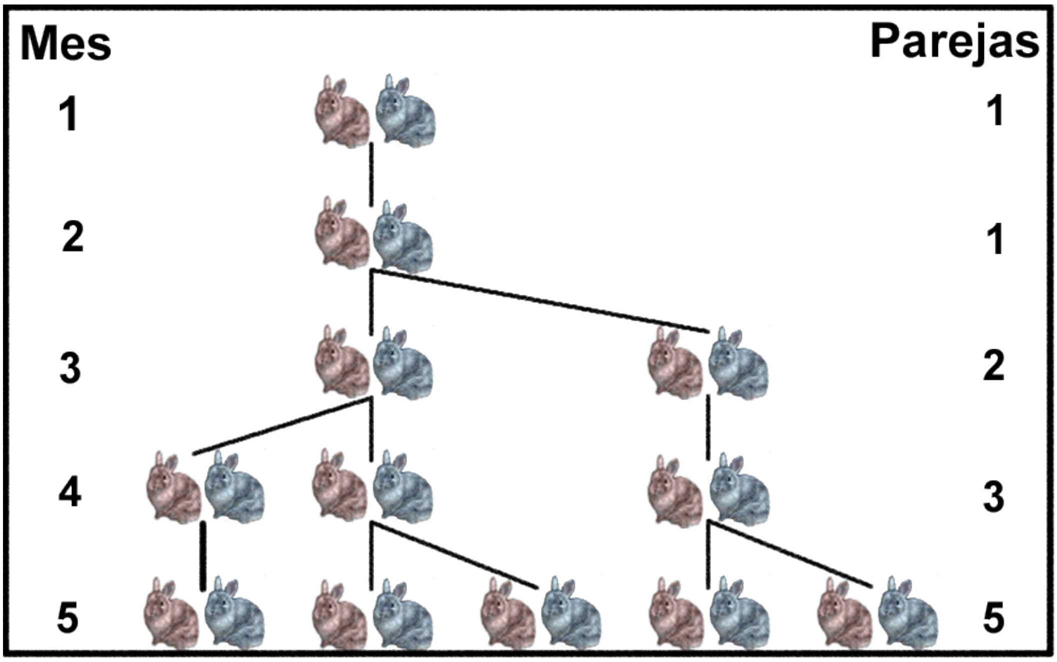


Figura 45. La sucesión de los conejos de Fibonacci. (Fuente: http://arquimedes.matem.unam.mx/PUEMAC/PUEMAC_2008/aurea/html/conejos.html)

Según el esquema y la siguiente tabla…

mes	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
parejas inmaduras	1	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
parejas fértiles	0	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
total parejas	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

… la cantidad conejos que habría a final de año es de 144 conejos.

La sucesión que se sigue sería: $a_1=1$, $a_2=1$, $a_3=2$, $a_4=3$, $a_5=5$, $a_6=8$, $a_7=13$, $a_8=21$, $a_9=34$, $a_{10}=55$, $a_{11}=89$, $a_{12}=144$.

Anexo 6. Ejemplos de la espiral de Fibonacci.

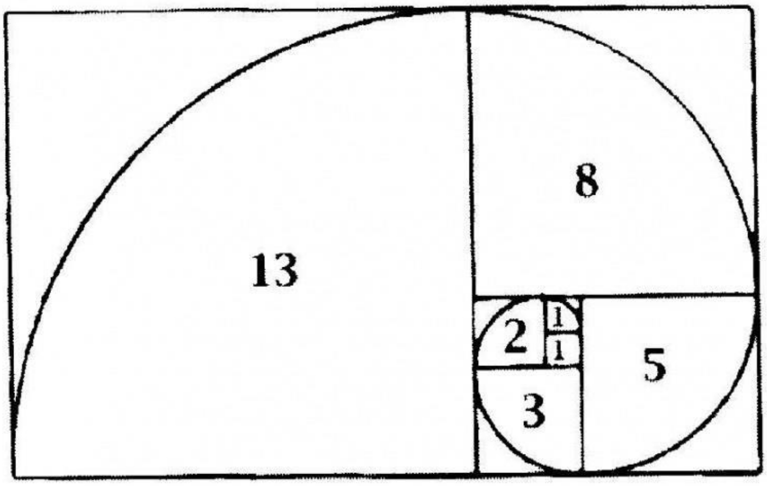


Figura 46. Espiral de Finonacci. (Fuente: http://skelerock.com/index.php/2016/05/15/tool-el-misterioso-espiral-detras-de-lateralus/)

Figura 47. Concha de un nautilus. (Fuente: http://www.geohikers.es/matematicas-en-la-naturaleza-ii-y-sin-embargo-el-universo-tambien-es-euclidiano/)

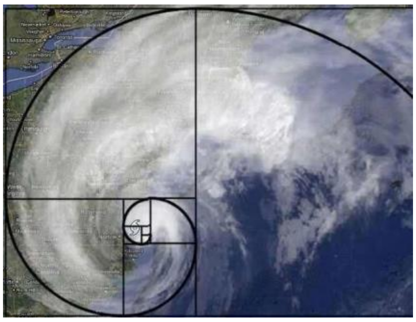


Figura 48. Movimiento del aire. (Fuente: http://www.geohikers.es/matematicas-en-la-naturaleza-ii-y-sin-embargo-el-universo-tambien-es-euclidiano/)

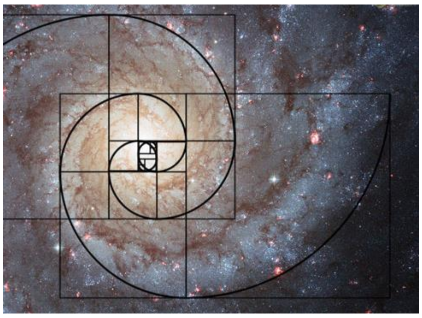


Figura 49. Galaxia. (Fuente: https://www.imagenesmy.com/imagenes/leonardo-fibonacci-spiral-galaxy-bf.html)

Figura 50. Mapa de África. (Fuente: https://www.ingenierodelmonton.com/post/98062790722/el-continente-africano-cumple-el-patr%C3%B3n-de-la)

Figura 51. Oreja. (Fuente: http://salephianos.blogspot.com/2017/05/sucesion-de-fibonacci-en-el-cuerpo.html)

Anexo 7. Espiral de Fibonacci.

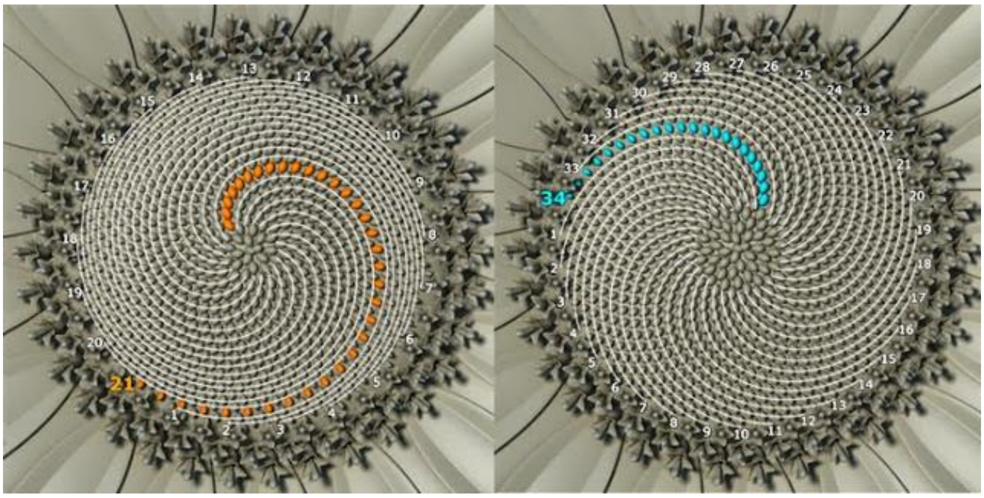


Figura 52. Helianthes annulus (Fuente: https://bargas-la-sagra.blogspot.com/2013/10/la-naturaleza-es-doctora-en-matematicas.html)

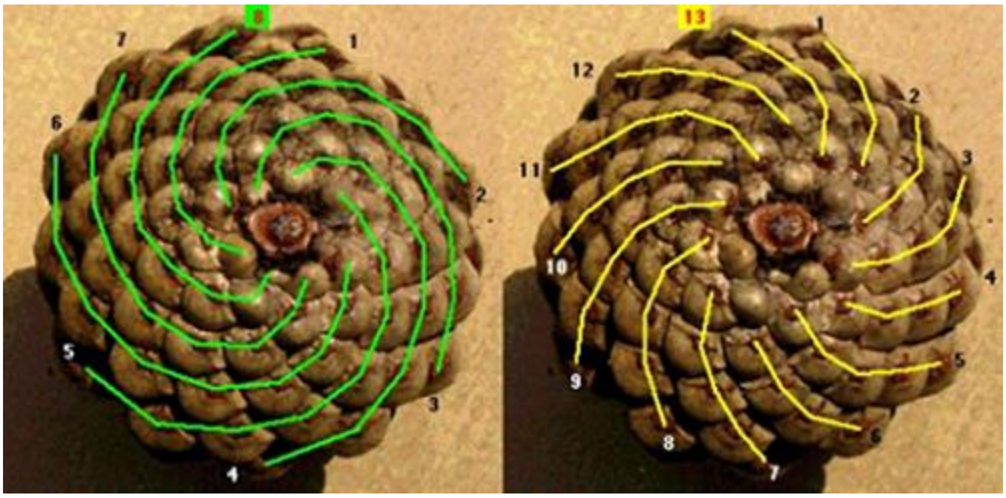


Figura 1. Piña. (Fuente: http://musicayciencia.tectv.gob.ar/numeros.php)

*Las semillas se van desplazando 1/ φ respecto a las anteriores, de tal forma que el ángulo de apertura de las semillas aumenta exactamente en la proporción áurea.

Anexo 8. Pétalos de las flores y Fibonacci.

5 pétalos:

Figura 2 Geranio. (Fuente: http://www.elicriso.it/es/como_cultivar/geranio/)

Figura 3. Azaleas. (Fuente: https://www.pinterest.es/pin/309763280589966316/?lp=true)

Figura 4. Violetas. (Fuente: https://norfipc.com/fotos-naturaleza/flor-violeta-africana-saintpaulia.php)

8 pétalos:

Figura 57. Delphinium. (Fuente: http://hablemosdeflores.com/delphinium-elatum/)

21, 34, 55 pétalos:

Figura 58. Margaritas. (Fuente: https://www.jardineriaon.com/curiosidades-sobre-las-margaritas.html)

Anexo 9. Estrella pentagonal.

La relación entre cualquier diagonal con un lado del pentágono es siempre el número áureo.

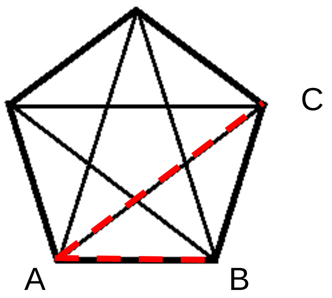


Figura 59. Estrella pentagonal.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \approx 1{,}61803398874989$$

Pero esa no es la única relación posible en la estrella pentagonal:

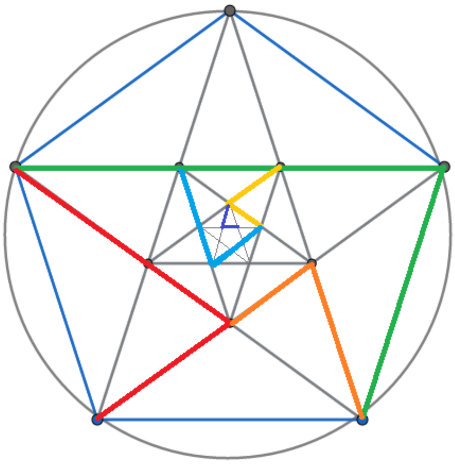


Figura 60. Estrella pitagórica.

Anexo 10. Rectángulo áureo.

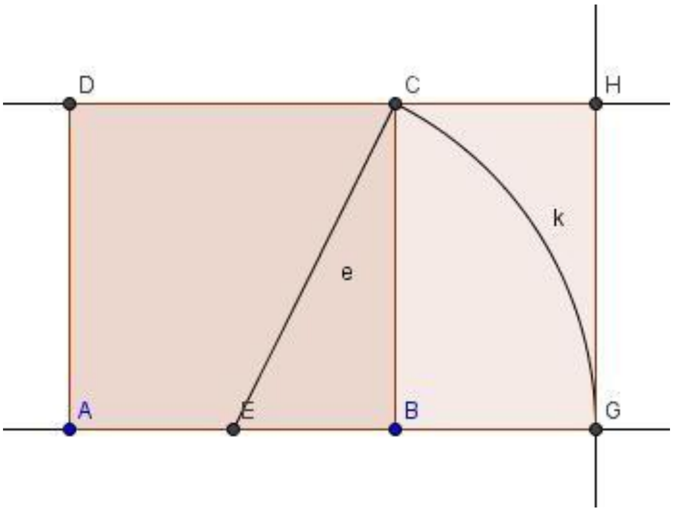


Figura 61. Rectángulo áureo. (Fuente: https://www.gaussianos.com/fibonacci-las-abejas-y-las-tarjetas-de-credito/)

Pasos para su construcción:

1. Se dibuja un cuadrado con vértices A, B, C y D.
2. Se marca el punto medio de uno de los lados: E.
3. Se une el punto E con uno de los vértices del lado opuesto y se coge esta medida con el compás.
4. Con la punta del compás en E y con dicha medida, se hace un arco que corte en un punto la recta que surge de extender el lado AB. Ese punto es G.
5. Se dibuja una línea paralela al lado BC, atravesando G.
6. Se extiende el lado DC hasta que corte en un punto H la recta paralela.
7. ¡Ya está hecho el rectángulo áureo! Ahora si se divide el lado AG entre el lado AD, la razón será igual al número áureo.

Anexo 11. Ejemplos donde está presente el número áureo.

Figura 62. El Partenón. (Fuente: https://cuentosymates.blogspot.com/2014/04/por-que-phi.html

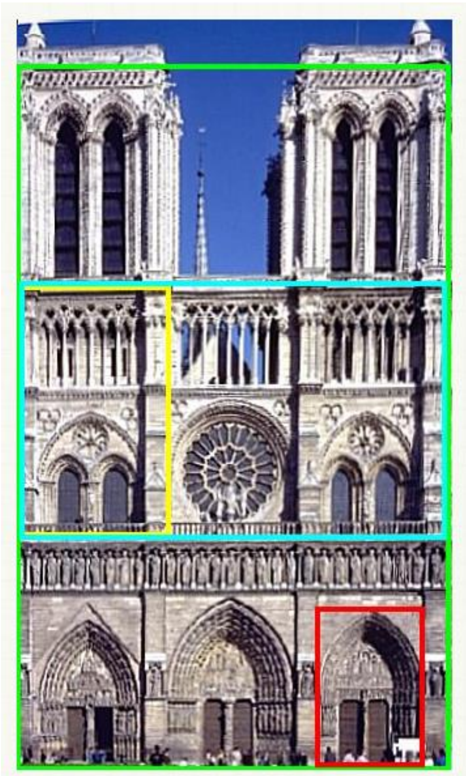
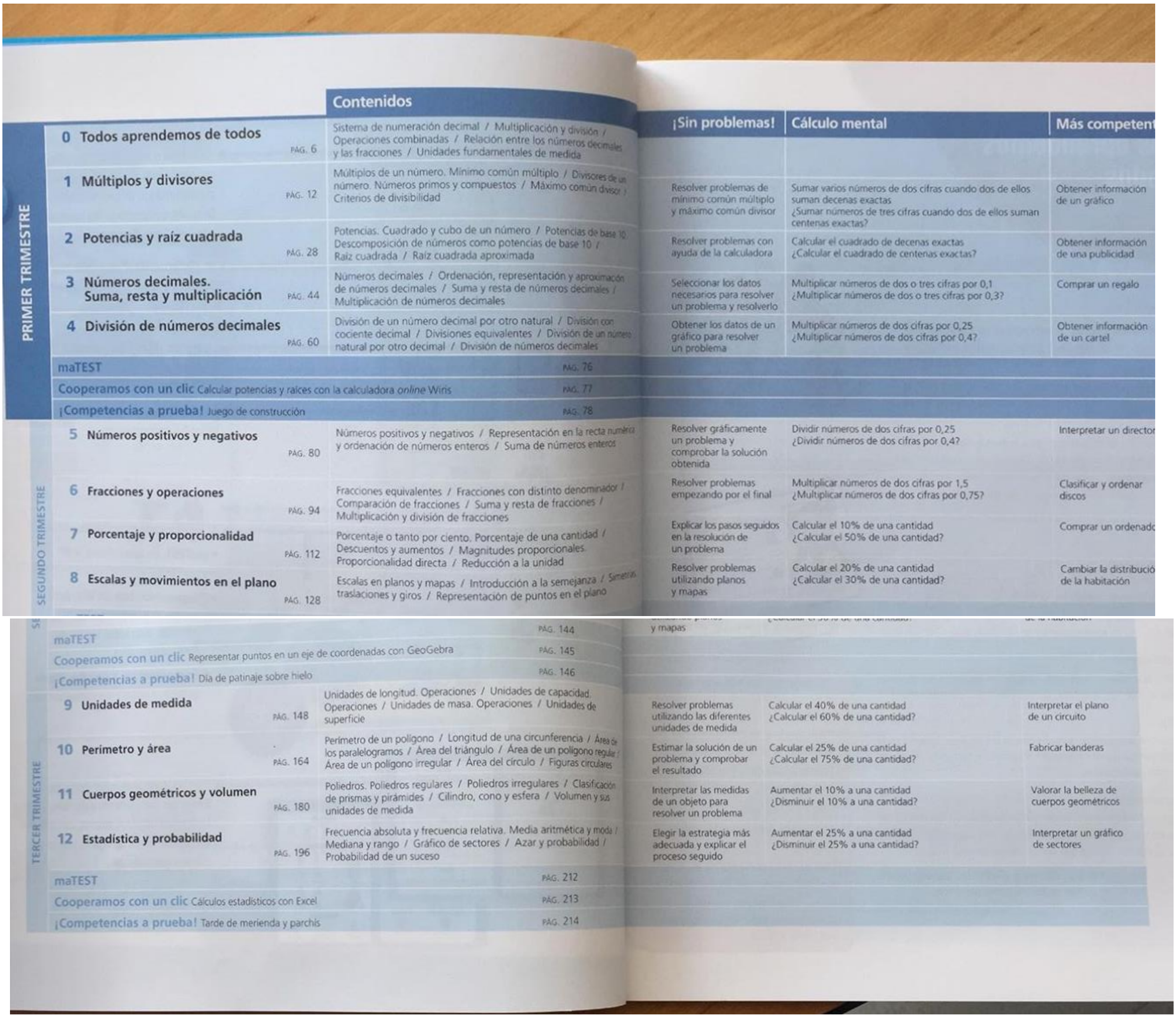


Figura 63. Catedral de Notre Dame. (Fuente: https://pequenoldn.librodenotas.com/matiaventuras/1064/mati-y-el-5

Anexo 12. Índice del libro de matemáticas de sexto de primaria, editorial edelvives.



		Contenidos	¡Sin problemas!	Cálculo mental	Más competent
PRIMER TRIMESTRE	0 Todos aprendemos de todos PÁG. 6	Sistema de numeración decimal / Multiplicación y división / Operaciones combinadas / Relación entre los números decimales y las fracciones / Unidades fundamentales de medida			
	1 Múltiplos y divisores PÁG. 12	Múltiplos de un número. Mínimo común múltiplo / Divisores de un número. Números primos y compuestos / Máximo común divisor / Criterios de divisibilidad	Resolver problemas de mínimo común múltiplo y máximo común divisor	Sumar varios números de dos cifras cuando dos de ellos suman decenas exactas ¿Sumar números de tres cifras cuando dos de ellos suman centenas exactas?	Obtener información de un gráfico
	2 Potencias y raíz cuadrada PÁG. 28	Potencias. Cuadrado y cubo de un número / Potencias de base 10 Descomposición de números como potencias de base 10 / Raíz cuadrada / Raíz cuadrada aproximada	Resolver problemas con ayuda de la calculadora	Calcular el cuadrado de decenas exactas ¿Calcular el cuadrado de centenas exactas?	Obtener información de una publicidad
	3 Números decimales. Suma, resta y multiplicación PÁG. 44	Números decimales / Ordenación, representación y aproximación de números decimales / Suma y resta de números decimales / Multiplicación de números decimales	Seleccionar los datos necesarios para resolver un problema y resolverlo	Multiplicar números de dos o tres cifras por 0,1 ¿Multiplicar números de dos o tres cifras por 0,3?	Comprar un regalo
	4 División de números decimales PÁG. 60	División de un número decimal por otro natural / División con cociente decimal / Divisiones equivalentes / División de un número natural por otro decimal / División de números decimales	Obtener los datos de un gráfico para resolver un problema	Multiplicar números de dos cifras por 0,25 ¿Multiplicar números de dos cifras por 0,4?	Obtener información de un cartel
	maTEST	PÁG. 76			
	Cooperamos con un clic Calcular potencias y raíces con la calculadora *online* Wiris	PÁG. 77			
	¡Competencias a prueba! Juego de construcción	PÁG. 78			
SEGUNDO TRIMESTRE	5 Números positivos y negativos PÁG. 80	Números positivos y negativos / Representación en la recta numérica y ordenación de números enteros / Suma de números enteros	Resolver gráficamente un problema y comprobar la solución obtenida	Dividir números de dos cifras por 0,25 ¿Dividir números de dos cifras por 0,4?	Interpretar un director
	6 Fracciones y operaciones PÁG. 94	Fracciones equivalentes / Fracciones con distinto denominador / Comparación de fracciones / Suma y resta de fracciones / Multiplicación y división de fracciones	Resolver problemas empezando por el final	Multiplicar números de dos cifras por 1,5 ¿Multiplicar números de dos cifras por 0,75?	Clasificar y ordenar discos
	7 Porcentaje y proporcionalidad PÁG. 112	Porcentaje o tanto por ciento. Porcentaje de una cantidad / Descuentos y aumentos / Magnitudes proporcionales. Proporcionalidad directa / Reducción a la unidad	Explicar los pasos seguidos en la resolución de un problema	Calcular el 10% de una cantidad ¿Calcular el 50% de una cantidad?	Comprar un ordenado
	8 Escalas y movimientos en el plano PÁG. 128	Escalas en planos y mapas / Introducción a la semejanza / Simetrías traslaciones y giros / Representación de puntos en el plano	Resolver problemas utilizando planos y mapas	Calcular el 20% de una cantidad ¿Calcular el 30% de una cantidad?	Cambiar la distribució de la habitación
	maTEST	PÁG. 144			
	Cooperamos con un clic Representar puntos en un eje de coordenadas con GeoGebra	PÁG. 145			
	¡Competencias a prueba! Día de patinaje sobre hielo	PÁG. 146			
TERCER TRIMESTRE	9 Unidades de medida PÁG. 148	Unidades de longitud. Operaciones / Unidades de capacidad. Operaciones / Unidades de masa. Operaciones / Unidades de superficie	Resolver problemas utilizando las diferentes unidades de medida	Calcular el 40% de una cantidad ¿Calcular el 60% de una cantidad?	Interpretar el plano de un circuito
	10 Perímetro y área PÁG. 164	Perímetro de un polígono / Longitud de una circunferencia / Área de los paralelogramos / Área del triángulo / Área de un polígono regular / Área de un polígono irregular / Área del círculo / Figuras circulares	Estimar la solución de un problema y comprobar el resultado	Calcular el 25% de una cantidad ¿Calcular el 75% de una cantidad?	Fabricar banderas
	11 Cuerpos geométricos y volumen PÁG. 180	Poliedros. Poliedros regulares / Poliedros irregulares / Clasificación de prismas y pirámides / Cilindro, cono y esfera / Volumen y sus unidades de medida	Interpretar las medidas de un objeto para resolver un problema	Aumentar el 10% a una cantidad ¿Disminuir el 10% a una cantidad?	Valorar la belleza de cuerpos geométricos
	12 Estadística y probabilidad PÁG. 196	Frecuencia absoluta y frecuencia relativa. Media aritmética y moda / Mediana y rango / Gráfico de sectores / Azar y probabilidad / Probabilidad de un suceso	Elegir la estrategia más adecuada y explicar el proceso seguido	Aumentar el 25% a una cantidad ¿Disminuir el 25% a una cantidad?	Interpretar un gráfico de sectores
	maTEST	PÁG. 212			
	Cooperamos con un clic Cálculos estadísticos con Excel	PÁG. 213			
	¡Competencias a prueba! Tarde de merienda y parchís	PÁG. 214			

Figura 64. Índice del libro de matemáticas de sexto de primaria, editorial: edelvives.

Anexo 13. Actividad 2: conocimientos previos.

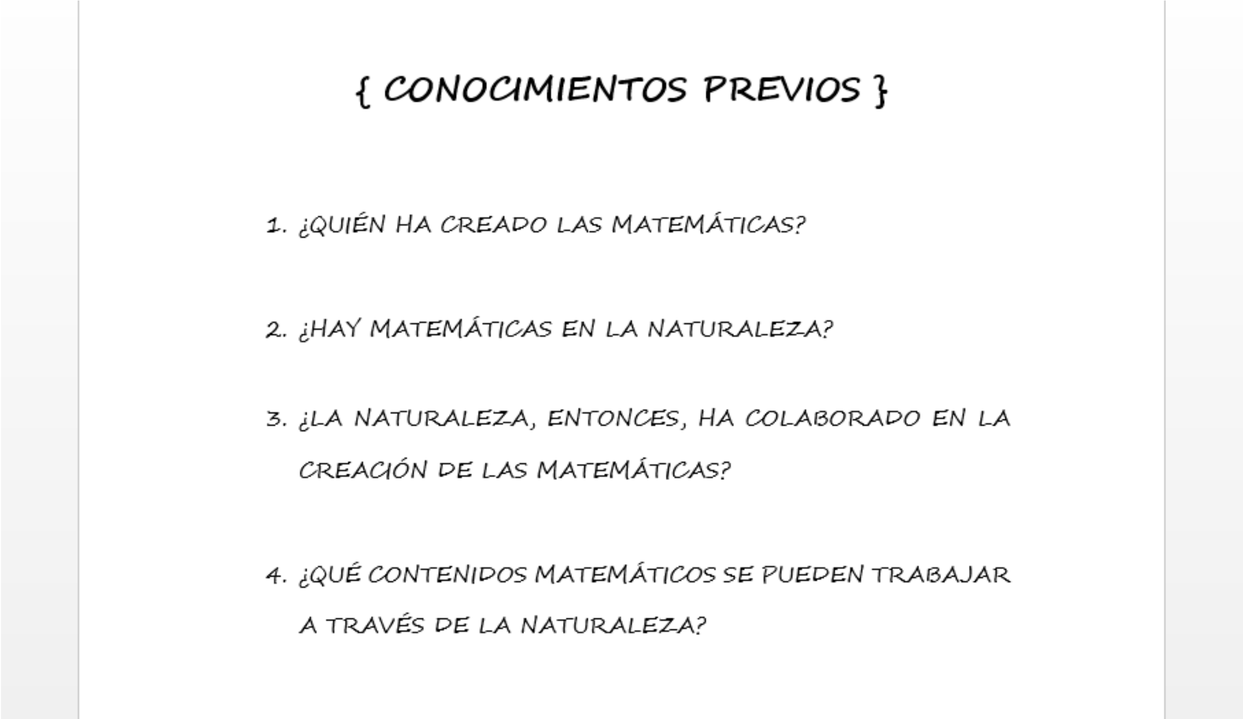


Figura 65. Preguntas conocimientos previos.

Anexo 14. Actividad 4: Fibonacci y divisibilidad.

Fibonacci y divisibilidad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610
múltiplos de 3 (cada 4 nú	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610
múltiplos de 5 (cada 5 nú	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610
múltiplos de 4 (cada 6 nú	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610
múltiplos de 8 (cada 6 nú	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610
múltiplos de 13 (cada 7 nú	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610
múltiplos de 21 (cada 8 nú	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610
restos al dividir entre 3	1	1	2	0	2	2	1	0	1	1	2	0	2	2	1
restos al dividir entre 5	1	1	2	3	0	3	3	1	4	0	4	4	3	2	0
restos al dividir entr 4	1	1	2	3	1	0	1	1	2	3	1	0	1	1	2
restos al dividir entr 8	1	1	2	3	5	0	5	5	2	7	1	0	1	1	2
restos al dividir entre 13	1	1	2	3	5	8	0	8	8	3	11	1	12	0	12
restos al dividir entre 21	1	1	2	3	5	8	13	0	13	13	5	18	2	20	1

Fibonacci y divisibilidad	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	987	1597	2584	4181	6765	10946	17711	28657	46368	75025	121393	196418	317811	514229	832040
múltiplos de 3 (cada 4 nú	987	1597	2584	4181	6765	10946	17711	28657	46368	75025	121393	196418	317811	514229	832040
múltiplos de 5 (cada 5 nú	987	1597	2584	4181	6765	10946	17711	28657	46368	75025	121393	196418	317811	514229	832040
múltiplos de 4 (cada 6 nú	987	1597	2584	4181	6765	10946	17711	28657	46368	75025	121393	196418	317811	514229	832040
múltiplos de 8 (cada 6 nú	987	1597	2584	4181	6765	10946	17711	28657	46368	75025	121393	196418	317811	514229	832040
múltiplos de 13 (cada 7 nú	987	1597	2584	4181	6765	10946	17711	28657	46368	75025	121393	196418	317811	514229	832040
múltiplos de 21 (cada 8 nú	987	1597	2584	4181	6765	10946	17711	28657	46368	75025	121393	196418	317811	514229	832040
restos al dividir entre 3	0	1	1	2	0	2	2	1	0	1	1	2	0	2	2
restos al dividir entre 5	2	2	4	1	0	1	1	2	3	0	3	3	1	4	0
restos al dividir entr 4	3	1	0	1	1	2	3	1	0	1	1	2	3	1	0
restos al dividir entr 8	3	5	0	5	5	2	7	1	0	1	1	2	3	5	0
restos al dividir entre 13	12	11	10	8	5	0	5	5	10	2	12	1	0	1	1
restos al dividir entre 21	0	1	1	2	3	5	8	13	0	13	13	5	18	2	20

Figura 66. Fibonacci y divisibilidad.

Anexo 15. Actividad 5: Fibonacci y fracciones.

Sucesión de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, …

a) $1+\frac{1}{2}=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$ = 1,5

b) $1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{\frac{3}{2}}=1+\frac{2}{3}=\frac{3+2}{3}=\frac{5}{3}$ = 1,666…

c) $1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}=1+\frac{1}{\frac{5}{3}}=1+\frac{3}{5}=\frac{5+3}{5}=\frac{8}{5}$ = 1,6

d) $1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}=1+\frac{1}{\frac{8}{5}}=1+\frac{5}{8}=\frac{8+5}{8}=\frac{13}{8}$ = 1,625

e) $1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}=1+\frac{1}{\frac{13}{8}}=1+\frac{8}{13}=\frac{13+8}{13}=\frac{21}{13}$ =1,6153…

f) $1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}}=1+\frac{1}{\frac{21}{13}}=1+\frac{13}{21}=\frac{21+13}{21}=\frac{34}{21}$ = 1,6190…

g) $1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}}}=1+\frac{1}{\frac{34}{21}}=1+\frac{21}{34}=\frac{34+21}{34}=\frac{55}{34}$ = 1,6176…

* En la siguiente fracción aparecerá en el numerador 89 y en el denominador 55…

Anexo 16. Actividad 6: Fibonacci y medias.

Fibonacci y medias	Sucesión Fibonacci	n, n+3 media=n+2	n, n+1, n+6 media=n+4		Otra sucesión tipo Fibonacci	n, n+3 media=n+2	n, n+1, n+6 media=n+4
n	1	2	5		2	7	19
n+1	1	3	8		5	12	31
n+2	2	5	13		7	19	50
n+3	3	8	21		12	31	81
n+4	5	13	34		19	50	131
n+5	8	21	55		31	81	212
n+6	13	34	89		50	131	343
n+7	21	55	144		81	212	555
n+8	34	89	233		131	343	898
n+9	55	144	377		212	555	1453
n+10	89	233	610		343	898	2351
n+11	144	377	987		555	1453	3804
n+12	233	610	1597		898	2351	6155
n+13	377	987	2584		1453	3804	9959
n+14	610	1597	4181		2351	6155	16114
n+15	987	2584	6765		3804	9959	26073
n+16	1597	4181	10946		6155	16114	42187
n+17	2584	6765	17711		9959	26073	68260
n+18	4181	10946	28657		16114	42187	110447
n+19	6765	17711	46368		26073	68260	178707
n+20	10946	28657	75025		42187	110447	289154
n+21	17711	46368	121393		68260	178707	467861
n+22	28657	75025	196418		110447	289154	757015
n+23	46368	121393	317811		178707	467861	1224876
n+24	75025	196418	514229		289154	757015	1981891
n+25	121393	317811	832040		467861	1224876	3206767
n+26	196418	514229			757015	1981891	
n+27	317811	832040			1224876	3206767	
n+28	514229	1346269			1981891	5188658	
n+29	832040				3206767		
n+30	1346269				5188658		
n+31	2178309				8395425		

Figura 67. Fibonacci y medias.

Anexo 17. Actividad 11: curva de dragón.

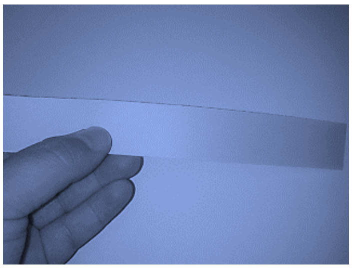
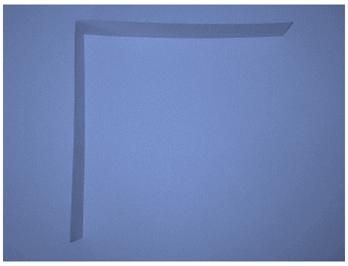
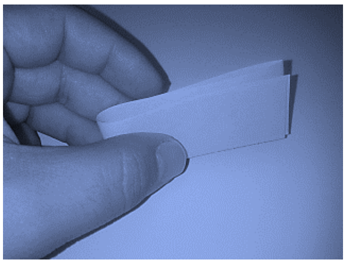
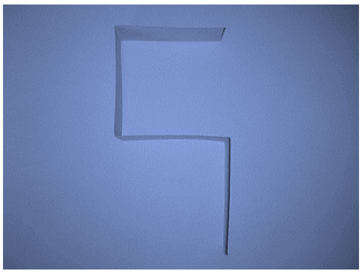
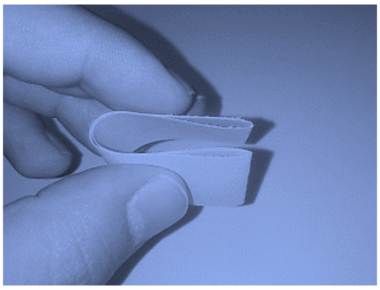
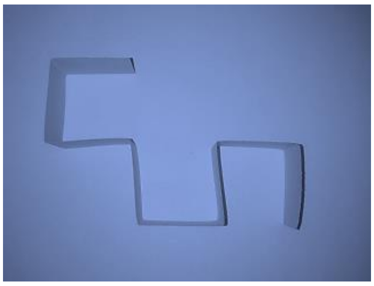
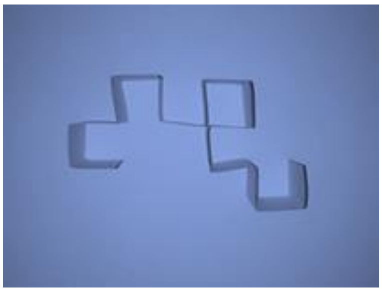
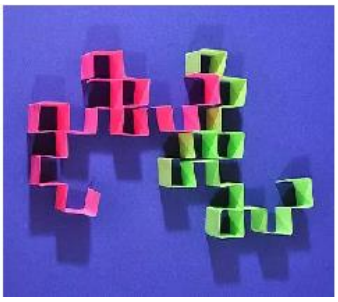
1. Se coge una hoja y se corta una tira a lo largo de unos dos o tres centímetros de ancho. 	2. Se dobla la tira a la mitad y de seguido se desdobla, quedando el doblez como un ángulo recto. 
3. Se vuelve a doblar la tira en dos como estaba al principio del segundo paso y se hace un nuevo doblez a la mitad. 	4. Ahora al desdoblar la tira aparece la forma del paso dos, dos veces. 
5. Se vuelve a doblar la tira igual que como estaba en el final del paso tres y se hace una nueva doblez a la mitad. 	6. Se desdobla la tira y se obtiene la figura del paso cuatro repetida dos veces. 
7. Se hace por última vez todo el proceso y se obtiene la curva de dragón. 	8. Para hacerlo a mayor escala, se cogen más tiras y de mayor longitud. 

Figura 68. Paso a paso de la curva de dragón. (Fuente: http://edupython.blogspot.com/2013/07/la-curva-de-dragon-el-fractal-de-parque.html)

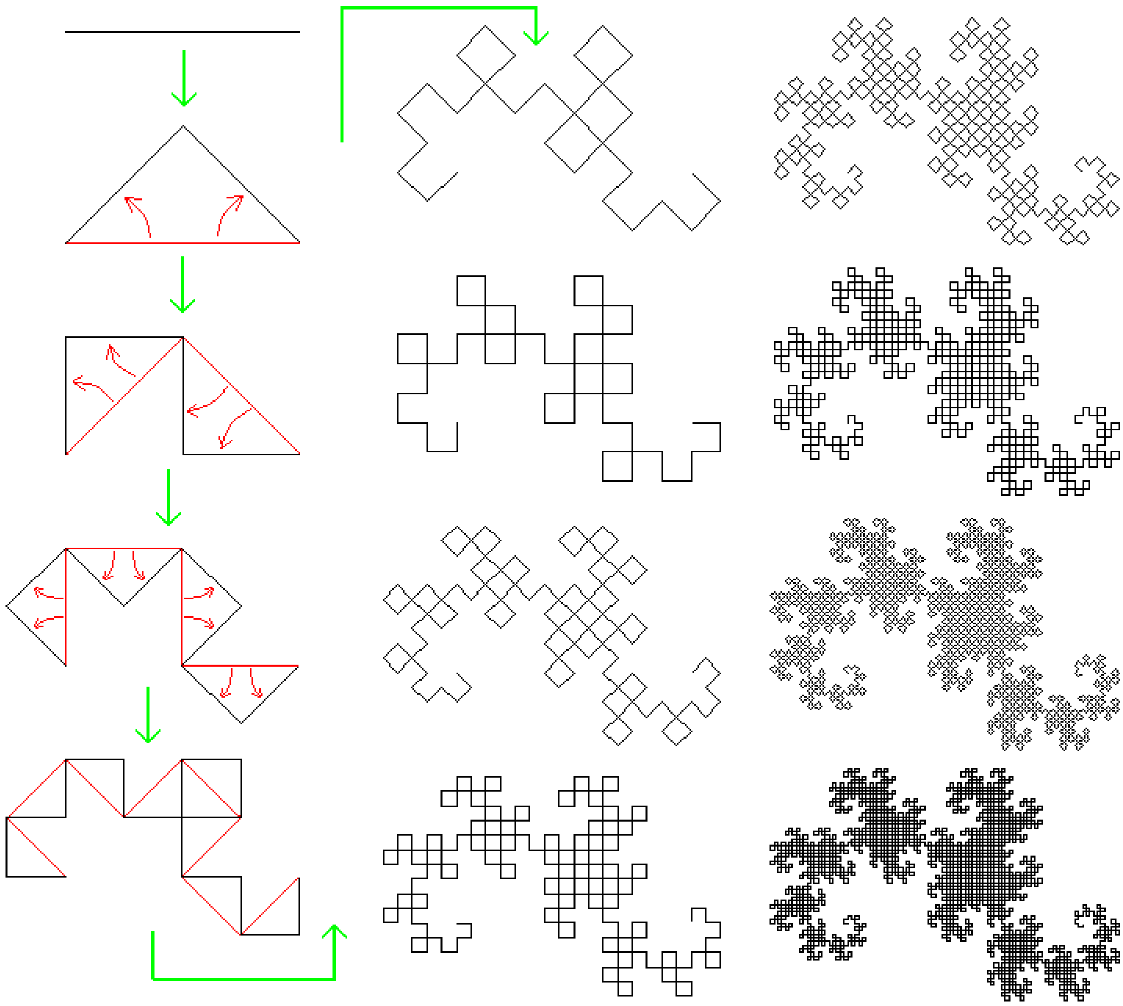


Figura 69. Curva de dragón. (Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Curva_del_drag%C3%B3n)