

$$y(t_{n+k}) = y(t_{n+k-1}) + \int_{t_{n+k-1}}^{t_{n+k}} f(t, y(t)) dt.$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 Q}{dt^2} = Q'', \\ \frac{d^3 Q}{dt^3} = Q'''. \end{cases}$$

Elisabete Alberdi Celaya
Judith Muñoz Matute

$$f_{n+j} = f(t_{n+j}, y_{n+j}) \quad \text{non } j = 0, 1, \dots, k-1$$

$$\begin{cases} Q'(t_{n+2} + sh) = \left(\nabla y_{n+2} + \frac{2s+1}{2} \nabla^2 \frac{1}{h} y_{n+2} + \frac{3s^2+4s}{6} \nabla^3 y_{n+2} \right) \cdot \frac{1}{h}, \\ Q''(t_{n+2} + sh) = \left(\nabla^2 y_{n+2} + \frac{6s}{6} \nabla^3 y_{n+2} \right) \cdot \frac{1}{h^2}, \\ Q'''(t_{n+2} + sh) = \nabla^3 y_{n+2} \cdot \frac{1}{h^3}. \end{cases}$$

$$y_{n+k} = y_{n+k-1} + h \int_{t_{n+k-1}}^{t_{n+k}} P(t) dt.$$

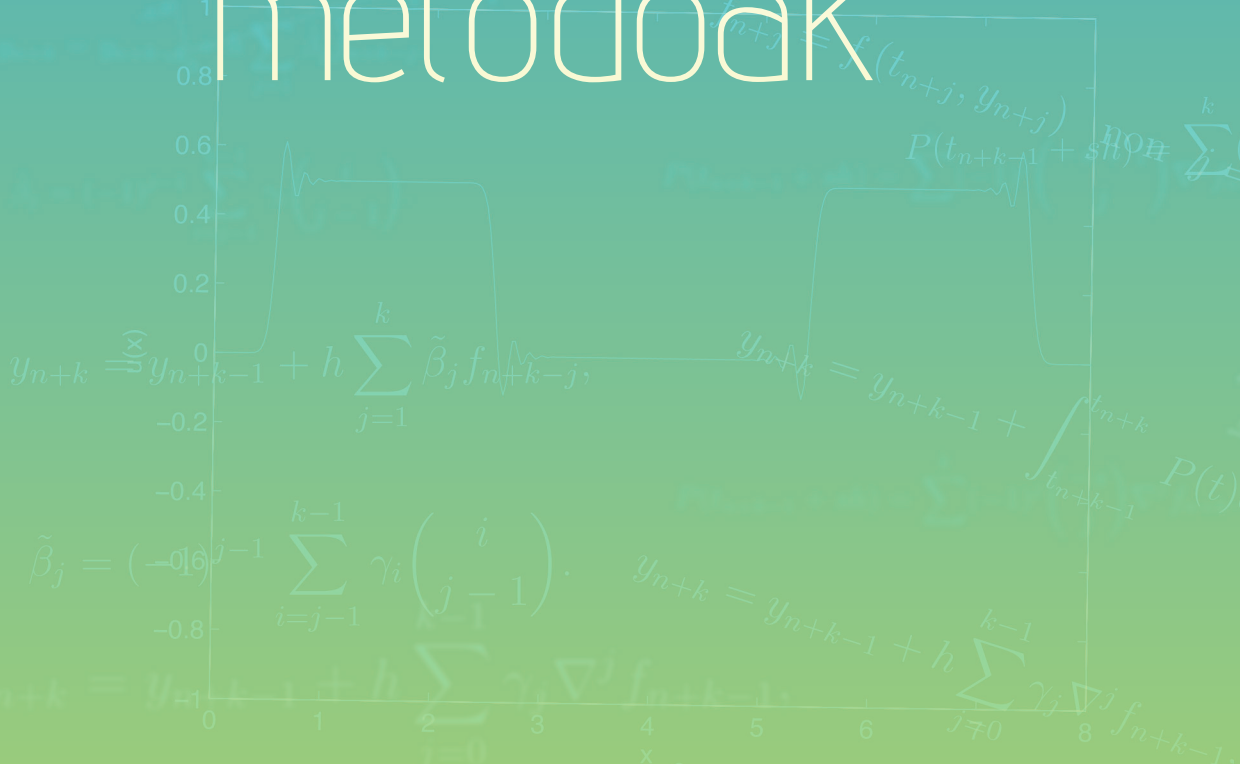
Ekuazio diferentzialen ebazpenerako zenbakizko metodoak

$$\begin{cases} Q'(t_{n+2} + sh) \approx \nabla y_{n+2} \cdot \frac{1}{h}, \\ Q''(t_{n+2} + sh) \approx \nabla^2 y_{n+2} \cdot \frac{1}{h^2}, \\ Q'''(t_{n+2} + sh) \approx \nabla^3 y_{n+2} \cdot \frac{1}{h^3}. \end{cases}$$

$$y_{n+k} = y_{n+k-1} + h \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j \nabla^j f_{n+k-1},$$

$$\gamma_j = (-1)^j \int_0^1 \binom{j}{s} ds.$$

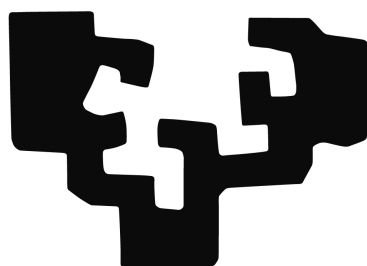
$$y(t_{n+k}) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{-s+1}{j} \nabla^j y(t_{n+k-1}) + \int_{t_{n+k-1}}^{t_{n+k}} f(t, y(t)) dt.$$



$$y_{n+k} = y_{n+k-1} + h \sum_{j=1}^k \tilde{\beta}_j f_{n+k-j},$$

$$\tilde{\beta}_j = (-1)^{j-1} \sum_{i=j-1}^{k-1} \gamma_i \binom{i}{j-1}.$$





UPV EHU

Ekuazio diferentzialen
ebazpenerako zenbakizko
metodoak

Elisabete Alberdi Celaya
Judit Muñoz Matute

CIP. Unibertsitateko Biblioteka

Alberdi Celaya, Elisabete

Ekuazio diferentzialen ebazpenerako zenbakizko metodoak [Recurso electrónico] / Elisabete Alberdi Celaya, Judit Muñoz Matute. – Datos. – Bilbao : Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea, Argitalpen Zerbitzua = Servicio Editorial, [2020]. – 1 recurso en línea : PDF (125 p.)

Modo de acceso: World Wide Web.

ISBN: 978-84-1319-180-5.

1. Ecuaciones diferenciales - Soluciones numéricas. I. Muñoz Matute, Judit, coaut.

(0.034)519.62/.63

(0.034)517.9

UPV/EHUko Euskara Zerbitzuak sustatua eta zuzendua, Euskarazko ikasmaterialgintza sustatzeko deialdiren bitartez.

© Euskal Herriko Unibertsitateko Argitalpen Zerbitzua

ISBN: 978-84-1319-180-5

Gaien aurkibidea

Irudien zerrenda	III
Taulen zerrenda	V
1 Sarrera	1
2 Lehen ordenako ekuazio diferentzial arrunten ebazpenerako metodoak	3
2.1 Pauso bakarreko metodoak eta pauso anitzekoak	3
2.2 Existentzia eta bakartasuna	4
2.3 Erroreak eta zehaztasun-ordena	5
2.3.1 Mozketa-errore lokala eta globala	5
2.3.2 Zehaztasun-ordena	6
2.4 Egonkortasuna	6
2.5 Sendotasuna eta konbergentzia	10
2.6 Runge-Kutta metodoak	11
2.6.1 Ordena-baldintzak	12
2.6.2 Runge-Kutta metodoen egonkortasuna	16
2.6.3 Kateatutako Runge-Kutta metodoak	20
2.7 Pauso anitzeko metodo linealak	24
2.7.1 Interpolazio polinomikoa. Atzerakako diferentziak	26
2.7.2 Adams Bashforth-en metodoak	30
2.7.3 Adams Moulton-en metodoak	32
2.7.4 Adamsen aurreikuste-zuzentze eskemak	32
2.7.5 BDF metodoak	36
2.7.6 NDF metodoak	39
2.7.7 Hobetutako pauso anitzeko metodo linealak	40
3 Elementu Finituen Metodoa (EFM)	49
3.1 Hasierako formulazioa	49
3.2 Formulazio klasikoa edo sendoa	50
3.3 Funtzio-espazioak	50
3.4 Formulazio bariazionala edo ahula	51
3.4.1 Formulazio bariazional abstraktua	52
3.5 Formulazio bariazional diskretua	53
3.6 Oinarriko funtzioen aukeraketa	54
3.7 Inplementazioa	55
3.7.1 Sarea	55
3.7.2 Zatika linealak diren EFMko oinarriko funtzioak	55

3.7.3	Zenbait ezaugarri	57
3.7.4	EFMko ekuazio-sistema	58
3.7.5	Sistematizazioa	59
3.7.6	Elementukako egitura EFMan	59
3.7.7	Eredu-elementua. Zenbakizko integrazioa	65
3.7.8	Zatika koadratikoak diren EFM funtzioak	66
3.8	Errorearen analisia	70
3.9	Adibideak	73
4	Petrov-Galerkinen Elementu Finituen Metodoa	85
4.1	Formulazioa	85
4.2	Adibideak	86
4.3	Errorearen analisia	89
5	Lerroen metodoa	90
5.1	Beroaren ekuazioa	90
5.1.1	Soluzio analitikoa	90
5.1.2	Lerroen metodoaren bidezko soluzioa	91
5.1.3	Egonkortasuna	92
5.1.4	Simulazioak	93
5.2	Uhin-ekuazioa	95
5.2.1	Soluzio analitikoa	96
5.2.2	Lerroen metodoaren bidezko soluzioa	96
5.2.3	Simulazioak	97
5.3	Adibideak	104
A	Bigarren ordenako ekuazio diferentzial arrunten ebazpenerako metodoak	108
A.1	Pauso anitzeko metodo linealak	108
A.2	Alfa orokortua metodoa	110
A.2.1	Newmark-en metodoa	110
A.2.2	Alfa metodoa	111
	Bibliografia	112

Irudien zerrenda

2.1	Mozketa-errore lokalaren eta gobalaren adierazpen grafikoa.	5
2.2	Adams Bashforth metodoaren egonkortasuna, $k = 4$	9
2.3	A-egonkortasuna eta $A(\alpha)$ -egonkortasuna.	10
2.4	2.6 taulako Runge-Kutta inplizituaren egonkortasun-eremua.	18
2.5	Runge-Kutta metodo esplizituen egonkortasun-eremua $s = p$	19
2.6	RKF45 metodoaren egonkortasun-eremuak.	21
2.7	DOPRI(5,4) metodoaren egonkortasun-eremuak.	22
2.8	2.13 taulako metodoaren egonkortasun-eremuak.	23
2.9	Adams Bashforth-egonkortasun-eremua.	31
2.10	Adams Moultonen egonkortasun-eremuak.	33
2.11	Adams Bashforth-egonkortasun-eremuak eta Moultonen egonkortasun-eremuak.	34
2.12	Aurreikusi, ebaluatu, zuzendu, ebaluatu eskemako egonkortasun-eremuak.	35
2.13	Aurreikusi, ebaluatu, zuzendu eskemako egonkortasun-eremuak, $k^* = k + 1$	36
2.14	BDF metodoen egonkortasun-eremuak.	37
2.15	Enright-en metodoen egonkortasun-eremuak (kurba bakoitzaren kanpo-aldea).	42
2.16	SDBDF metodoen egonkortasun-eremuak (kurba bakoitzaren kanpo-aldea).	42
2.17	EBDF metodoen egonkortasun-eremuak (kurba bakoitzaren kanpo-aldea).	46
2.18	Metodo konbinatuen egonkortasun-eremuak (kurba bakoitzaren kanpo-aldea).	47
3.1	Funtzio linealak (kapela funtzioak).	55
3.2	Funtzio koadratikoak.	55
3.3	Eremuaren partiketa dimentsio bakarrean.	55
3.4	EFM funtzio linealen deribatuak.	56
3.5	Forma-funtzio linealak.	60
3.6	Elementukako matrizeen kalkulua eta mihiztaketa.	62
3.7	Oinarriko funtzio koadratikoen kasuko nodoak eta puntu laguntzaileak.	68
3.8	Nodoetako EFMko funtzio koadratikoak.	68
3.9	Puntu laguntzaileetako EFMko funtzio koadratikoak.	69
3.10	Forma-funtzio koadratikoak.	70
4.1	4.1 adibidearen soluzio analitikoak.	87
4.2	4.1 adibidearen soluzio hurbildua, Bubnov-Galerkin metodoa erabilia.	87

4.3	4.2 adibidearen soluzio analitikoa.	88
4.4	4.2 adibidearen soluzio hurbildua Bubnov-Galerkin metodoa erabilia.	88
5.1	Nodo bakoitzaren eboluzioa denboran, 5.1 adibidean.	94
5.2	Difusioa denboran, 5.1 adibidean.	94
5.3	Espazio-denbora sarea 5.1 adibidean.	95
5.4	Nodo bakoitzaren eboluzioa denboran, 5.2 adibidean.	98
5.5	Uhinaren eboluzioa 5.2 adibidean.	98
5.6	Espazio-denbora sarea 5.2 adibidean.	99
5.7	Nodo bakoitzaren eboluzioa denboran, 5.3 adibidean.	100
5.8	Uhinaren eboluzioa 5.3 adibidean.	100
5.9	Espazio-denbora sarea 5.3 adibidean.	101
5.10	Hasierako baldintza 5.4 adibidean.	102
5.11	Frekuentzia altuak aldiune batean 5.4 adibidean, MATLABeko «ode15s» funtzioaz ebatzita.	102
5.12	Frekuentzia altuak aldiune batean 5.4 adibidean, HHT- α metodoaz ebatzita.	103
5.13	Nodo bakoitzaren eboluzioa denboran, 5.4 adibidean.	103
5.14	Uhinaren eboluzioa 5.4 adibidean.	104

Taulen zerrenda

2.1	Runge-Kutta metodo bateko Butcher taula.	11
2.2	Butcher taularen matrize-adierazpena.	12
2.3	4-ataleko Runge-Kutta metodo esplizituen Butcher taula.	12
2.4	1-10 zehaztasun-ordenako Runge-Kutta metodoek bete beharreko baldintza kopurua.	15
2.5	Runge-Kutta metodo esplizituen atal kopuruaren eta zehaztasun-ordenaren arteko erlazioa.	16
2.6	Runge-Kutta implizitu baten Butcher taula [1].	17
2.7	Runge-Kutta implizitu baten Butcher taula $s = 1, p = 2$ izanik.	17
2.8	Runge-Kutta implizitu baten Butcher taula $s = 2, p = 4$ izanik.	18
2.9	Runge-Kutta implizitu baten Butcher taula $s = 3, p = 6$ izanik.	18
2.10	Kateatutako Runge-Kutta metodoen Butcher taula.	20
2.11	RKF45 metodoko koefizienteak.	21
2.12	DOPRI(5,4) metodoko koefizienteak.	23
2.13	7-ataleko kateatutako Runge-Kutta metodo bat ([1] 112 orrialdea).	24
2.14	Adams Bashforth metodoko koefizienteak [2].	30
2.15	Adams Bashforth metodoko koefizienteak eta errore-konstanteak.	31
2.16	Adams Moultonen metodoko koefizienteak.	32
2.17	Adams Moultonen metodoko koefizienteak eta errore-konstanteak.	33
2.18	BDF metodoen koefizienteak eta errore-konstanteak.	37
2.19	BDF metodoen $A(\alpha)$ -egonkortasuna.	37
2.20	NDF metodoen eraginkortasuna eta egonkortasuna BDF metodoekiko.	40
2.21	Enrighten metodoen ezaugarriak.	41
2.22	SDBDF metodoen ezaugarriak.	43
2.23	New Efficient SDMM metodoen ezaugarriak $\beta^* = -0,2, \gamma^* = 0,2$ izanik.	43
2.24	New Efficient SDMM metodoen ezaugarriak $\beta^* = -0,05, \gamma^* = 0,9$ izanik.	43
2.25	EBDF metodoetako koefizienteak.	44
2.26	EBDF metodoen ezaugarriak.	46
2.27	MEBDF metodoen ezaugarriak.	46
2.28	BDF esplizituen koefizienteak.	48
2.29	A-EBDF metodoen egonkortasun-ezaugarriak.	48
2.30	E2BD metodoen ezaugarriak.	48
2.31	New SDMM metodoen ezaugarriak.	48
3.1	Gauss-Legendre-ren koadraturako puntuak eta pisuak.	67

1. kapitulua

Sarrera

Ekuazio diferentzialak erabiltzen dira gure inguruneko hainbat fenomeno deskribatzeko. Ekuazio diferentzialesetan funtzio ezezagun baten aldaketak (hau da, deribatuak) agertzen dira, eta helburua izaten da ekuazioa betetzen duen funtzioa aurkitzea. Beren konplexutasuna dela eta, gehienetan, ez da posible izaten emaitza zehatza edo analitikoa kalkulatzeko. Ondorioz, metodo matematiko ugari sortu izan dira ekuazio diferentzialen emaitza hurbilduak kalkulatzeko. Metodo horiei *zenbakizko metodo* deritze, eta lan honetan horietako batzuk aztertu eta landu dira.

Ekuazio diferentzial batean funtzio ezezagun bat eta haren deribatuak agertzen dira. Ekuazio diferentziala arrunta (EDA) da, ekuazioan aldagai bakarraren menpeko funtzio bat eta haren deribatuak (deribatu arruntak) agertzen direnean. Aldiz, deribatu partzialeko ekuazioa da (DPE) aldagai bat baino gehiagoren menpeko funtzio bat eta haren deribatu partzialak agertzen direnean.

Lehen ordenako Ekuazio Diferentzial Arruntak (EDAk) ebazteko metodoen aurkezpenarekin hasi dugu 2 atala. EDA lehen ordenakoa da, agertzen den ordenarik handieneko deribatua lehen ordenakoa delako. EDA baten soluzioa zehazteko, hasierako balio bat behar izaten da. Horregatik, hasierako baldintzadun EDak aztertu ditugu 2 atalean. Lehen ordenako eta hasierako baldintzadun Ekuazio Diferentzial Arruntak adierazpen hau dauka:

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \quad (1.1)$$

Gerta daiteke, EDA bakarra izan beharrean, EDA sistema bat izatea. Kasu horretan, aldagai bakarraren menpe dauden funtzioak eta beren deribatu arruntak agertzen direneko EDA sistema izango dugu:

$$\begin{aligned} y'_1 &= f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n), & y_1(t_0) &= y_{10}, \\ y'_2 &= f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n), & y_2(t_0) &= y_{20}, \\ &\dots & & \\ y'_n &= f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n), & y_n(t_0) &= y_{n0}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

2 ataleko teoria aplikagarria da lehen ordenako eta hasierako baldintzadun EDA sistemarako ere. Ebatzi beharreko EDaren ordena bat baino handiagoa balitz, posible da lehen ordenako EDA sistema bat lortzea aldagai-aldaketak erabilita. Hortaz, 2 ataleko teoria aplikagarria da ordena handiagoko EDaren edo EDA sistemaren kasuan ere.

3 atalean Elementu Finituen Metodoa (EFM) aplikatu diogu dimentsio bakarreko eta inguruneko baldintzadun bigarren ordenako ekuazio diferentzial linealari. Problema estatiko bat hartu da, hau da, bakarrik espazioaren menpekoa. Ebatzi den problema bigarren ordenako EDA da, ekuazioan aldagai bakarraren menpeko funtzio ezezaguna eta haren deribatuak agertzen baitira. Zehazki, Bubnov-Galerkinen metodoa azaldu da 3 atalean.

4 atalean, Petrov-Galerkinen EFMa azaldu da. Ohikoa da metodo hori erabiltzea Bubnov-Galerkinen metodoa ez-egonkorra den kasuetan. Azalpenerako, dimentsio bakarreko adbezio-ekuazioa hartu da kontuan.

5 atalean deribatu partzialeko ekuazioen ebazpena azaldu da Lerroen metodoa erabilia. Metodo horretan, lehenengo, espazioko aldagaiak diskretizatzen dira EFMa erabilia. Horrela lortzen den hasierako baliodun EDA sistema denboran diskretizatzen da. Beroaren ekuazioa eta uhin-ekuazioa ebatzi dira era horretan. Uhin-ekuazioari EFMa aplikatu ostean lortzen den EDA sistema bigarren ordenakoa denez, bigarren ordenako EDAk ebazteko zenbait metodoren azalpena eman da A atalean.

2. kapitulua

Lehen ordenako ekuazio diferentzial arrunten ebazpenerako metodoak

Lehen ordenako ekuazio diferentziala forma honetakoa da:

$$y' = f(t, y), \quad (2.1)$$

$f(t, y)$ funtzio bat izanik. $y(t)$ funtzioa ekuazio horren soluzioa da, edozein t -ren baliotarako honako hau betetzen badu:

$$y'(t) = f(t, y(t)). \quad (2.2)$$

Orokorrean, soluzioak parametro aske bat izaten du. Hortaz, era bakarrean zehaztua izateko, hasierako edo hastapeneko baldintza bat behar izaten da:

$$y(t_0) = y_0. \quad (2.3)$$

Atal honetan lehen ordenako eta hasierako baldintzadun ekuazio diferentzial arruntak hartuko ditugu kontuan, hau da:

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0, \quad (2.4)$$

motakoak, non $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ eta $f : [a, b] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ funtzioak jarraituak baitira. Hasierako zenbait kontzeptu definituko ditugu, eta horiek ebazteko zenbakizko metodoak aurkeztuko ditugu.

2.1 Pauso bakarreko metodoak eta pauso anitzekoak

Hasierako balioko Ekuazio Diferentzial Arrunt (EDA) bat edo sistema bat hartuko dugu. Izan bedi $y(t)$ EDAREN soluzio analitikoa. Zenbakizko metodoek emaitza analitikoaren hurbilpenak ematen dituzte $y(t_n) \approx y_n$ puntu batzuetan:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = b. \quad (2.5)$$

Izan bitez honako aldiune hauek: t_n non $t_n = a + nh$, $n = 0, 1, 2, \dots$. *Pauso-tamaina* deritzo h balioari. Izan bedi y_n y -ren hurbilpena t_n aldiunean, hau da:

$$y(t_n) \approx y_n. \quad (2.6)$$

Eta izan bedi $f_n \equiv f(t_n, y_n)$.

Zenbakizko metodo bat pauso bakarrekoa da, zenbakizko soluzioa aurkitzeko ekuazio diferentziala eta aurreko pausoko balioak erabiltzen direnean. Pauso bakarrekoko metodorik ezagunenetako bi honako hauek dira:

- Eulerren metodo esplizitua: $y_{n+1} = y_n + hf_n$.
- Eulerren metodo implizitua: $y_{n+1} = y_n + hf_{n+1}$.

Metodo bat esplizitua da aldiune batean y ezezagunak izango duen balioa kalkulatzeko balio guztiak ezagutzen direnean; bestela, metodoa implizitua da.

Pauso bakarrekoko metodoetan, hainbat aldaketa egin izan dira. Horietako batzuk dira:

- pauso bakarrekoko eta atal anitzeko metodoak (edo s -ataleko metodoak),
- pauso anitzeko metodoak (edo k -pausoko metodoak).

[3] erreferentzian, hasierako balioko EDAk ebazteko hainbat metodoren errepassoa egiten da. Pauso bakarrekoko eta atal anitzeko metodoetan, tarteko hainbat puntutako deribatua erabiltzen dira. Runge-Kutta metodoak horien adibide dira, eta 2.6 atalean aztertuko ditugu berauek.

Pauso anitzeko metodoetan (edo k pausokoetan), soluzio zehatzaren aurreko k hurbilpen erabiltzen dira. Hau da, $t_n + kh$ aldiuneko y_{n+k} balio hurbildua kalkulatzeko $t_n, t_n + h, \dots, t_n + (k - 1)h$ puntuetako ezezagunaren $y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k-1}$ balioak erabiltzen dira. Pauso anitzeko zenbait metodo lineal aztertuko ditugu 2.7 atalean.

Zenbakizko metodoen azalpenarekin hasi aurretik, zenbait kontzeptu orokorrek hasiko gara, hala nola: soluzioaren existentzia eta bakartasuna, zenbakizko metodoen zenbait ezaugarri (sendotasuna, zehaztasun-ordena, egonkortasuna, etab.).

2.2 Existentzia eta bakartasuna

Ekuaizio diferentzial baten soluzioa existitzen den ala ez den, eta existitzen denean soluzioa ea bakarra den jakiteko irizpiderik erabiliena Lipschitz-en baldintza da.

Definizioa. $f : [a, b] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ funtzioak bere bigarren aldagaian Lipschitzen baldintza betetzen du existitzen bada, L konstante bat honako baldintza hau betetzen duena:

$$\|f(t, Y) - f(t, Z)\| \leq L \|Y - Z\|, \quad \forall t \in [a, b], Y, Z \in \mathbb{R}^m. \quad (2.7)$$

L konstanteari *Lipschitzen konstante* deritzo.

Teorema. Izan bedi hasierako baldintzadun honako EDA hau:

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(a) = y_0, \quad (2.8)$$

$f : [a, b] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ funtzioa bere lehenengo aldagaian jarraitua izanik, eta bigarren aldagaian Lipschitzen baldintza betetzen duena. Kasu horretan, hasierako baldintzadun EDAk soluzio bakarra dauka.

Froga. Hainbat erreferentzian aurki daiteke teorema horren frogia; besteak beste, [1] erreferentzian.

2.3 Erroreak eta zehaztasun-ordena

2.3.1 Mozketa-errore lokala eta globala

Zenbakizko metodo baten mozketza-errore lokala ekuazio diferentzialaren soluzio zehatzaren eta zenbakizko metodoa erabilia lortzen den soluzio hurbilduaren arteko diferentzia da, soluzio hurbildua kalkulatzeko aurreko balioak zehatzak erabili direnean:

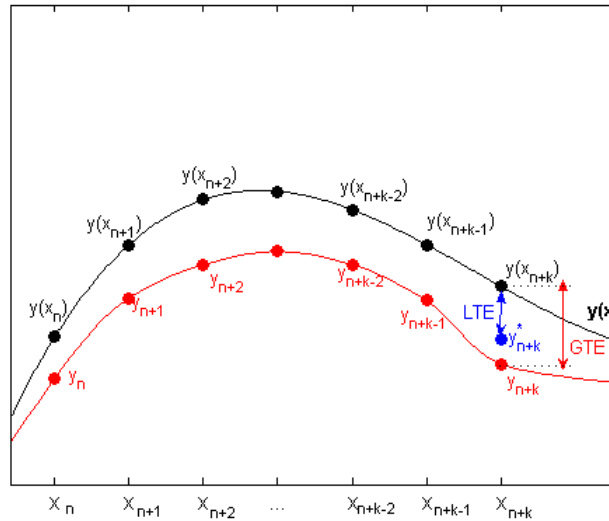
$$LTE = y(t_{n+k}) - y_{n+k}^*, \quad (2.9)$$

$y(t)$ izanik ekuazio diferentzialaren soluzio zehatza, eta y_{n+k}^* aurreko balioak zehatzak bailiran zenbakizko metodoa erabiliz kalkulatuak balio hurbildua. Hau da, $y_{n+j} = y(t_{n+j})$ betetzen dela kontuan hartuz kalkulatu dena, $j = 0, 1, \dots, k-1$ izanik. LTE laburdura ingelesezko *Local Truncation Error*etik dator.

Kokapen-bereganaketa deritzo kokatuta gauden pausoaren, adibidez $(n+k)$ pausoaren, aurretiko k pausoetan zenbakizko metodoa erabiliz kalkulatu ditugun balioak balio zehatzen berdintzat hartzeari [4]. Hau da:

$$y_{n+j} = y(t_{n+j}), \quad \text{non } j = 0, 1, \dots, k-1. \quad (2.10)$$

Hain zuzen, (2.9) adierazpeneko y_{n+k}^* terminoa kokapen-bereganaketa eginda kalkulatu da.



2.1 irudia. Mozketa-errore lokalaren eta globalaren adierazpen grafikoa.

Definizio hau egokia da pauso bakarreko metodoetarako zein pauso anitzekoetarako. Hau da, $k = 1$ denean, pauso bakarreko metodoen mozketza-errore lokalaren definizioa izango genuke, eta $k > 1$ denean, pauso anitzeko metodoena.

Zenbakizko metodo baten mozketza-errore globala da balio zehatzaren eta zenbakizko metodoa erabiliz kalkulatu den balioaren arteko diferentzia. GTE letrak erabilia izendatuko dugu (ingelesezko *Global Truncation Error*):

$$GTE = y(t_{n+k}) - y_{n+k}. \quad (2.11)$$

2.3.2 Zehaztasun-ordena

Pauso bakarreko edo anitzeko zenbakizko metodo lineala emanik, [2, 5] erreferentziak jarraituz eta 2.3.1 atalean azaldu dugun kokapen-bereganaketa eginez, eta metodo inplizituen kasuan $f(t_{n+k}, y_{n+k}^*) = f(t_{n+k}, y(t_{n+k}))$ berdintza ere kontuan hartuz, era honetan adieraz daiteke mozketa-errore lokala:

$$LTE = C_0 y(t_n) + C_1 h y'(t_n) + C_2 h^2 y''(t_n) + \dots + C_q h^q y^{(q)}(t_n) + \dots \quad (2.12)$$

Zenbakizko metodoa p zehaztasun-ordenakoa dela esaten da, mozketa-errore lokala $O(h^{p+1})$ bada edo mozketa-errore globala $O(h^p)$ bada. Hau da, $C_0 = C_1 = \dots = C_p = 0$ eta $C_{p+1} \neq 0$:

$$LTE = C_{p+1} h^{p+1} y^{(p+1)}(t_n) + O(h^{p+2}). \quad (2.13)$$

$C_{p+1} h^{p+1} y^{(p+1)}(t_n)$ osagaia da mozketa-errore lokaleko osagai nagusia, eta C_{p+1} osagaia errore-konstantea da.

Erraz frogatu daiteke (ikus [4] erreferentziako 57-59 orrialdeak) errorearen metaketaren eraginez mozketa-errore globaleko h terminoa mozketa-errore lokalekoa baino maila bat txikiagoa dela, hau da: $LTE = O(h^{p+1}) \Rightarrow GTE = O(h^p)$.

2.4 Egonkortasuna

Ekuzio diferentzial baten egonkortasuna eta zenbakizko metodoarena bereizi egin behar dira. Ekuzio diferentzial baten egonkortasunak problemaren soluzio zehatzak perturbazioen aurrean duen sentikortasuna adierazten du. EDA baten soluzio-kurbak t handitzean bata bestearengandik banatzen badira, ekuzio diferentziala ez-egonkorra da. Matematikoki, ekuzio diferentziala egonkorra da problemaren autobalioen parte erreala negatiboa bada. Zenbakizko metodo baten egonkortasunak, aldiz, zenbakizko soluzioek perturbazioen aurrean duten sentikortasuna erakusten du. Horrela, zenbakizko metodo bat egonkorra da perturbazioak handitzen ez direnean.

Zenbakizko metodo baten egonkortasun-azterketa (edo egonkortasun linealaren azterketa) era honetan egiten da:

- Lehen ordenako EDA (edo sistema ebazten ari garenean): sinplifikatzeko jacobtarra, $\partial f / \partial y$, diagonalizagarria dela pentsatuko dugu. Horrek esan nahi du autobektoreek osatutako T matrize bat existitzen dela:

$$T^{-1} \frac{\partial f}{\partial y} T = \text{diag} \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d \}. \quad (2.14)$$

Posible da ekuzioa banatzea aldagai-aldaketa bat eginez [6]. Horrela, j . osagaiak honako baldintza hau beteko du: $w_j' = \lambda_j w_j$. Ekuzio horietako bakoitza test-ekuzio bezala ezagutzen da. Beraz, lehen ordenako EDAREN kasuan, zenbakizko metodoaren egonkortasun-azterketa egiten da metodoa $y' = \lambda y$ test-ekuzioari aplikatuz.

- Bigarren ordenako EDAREN kasuan (lehen ordenara murriztu gabe) ebazteko metodoen kasuan: zenbakizko metodoaren egonkortasun-azterketa egiten da zenbakizko metodoa $y'' + \xi \omega y' + \omega^2 y = 0$ test-ekuzioari aplikatuz.

Zenbakizko metodoa (lehen ordenako EDAk ebaztekoa zein bigarren ordenako EDAk ebaztekoa) test-ekuazioari aplikatu ostean, diferentziantan emandako honako matrize-ekuazio hau lortzen da:

$$Y_{n+k} = AY_{n+k-1}, \quad (2.15)$$

Y_{n+k-1}, Y_{n+k} izanik zenbakizko metodoko aldagaiak edo ezezagunak, non: $Y_{n+k} = (y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_{n+k})^T$, $Y_{n+k-1} = (y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k-1})^T$ eta A $k \times k$ dimentsioko matrizea izanik. A matrizeari *anplifikazio-faktore* deritzo. Hau da, (2.15) adierazpena era honetan idatz daiteke:

$$\begin{pmatrix} y_{n+1} \\ y_{n+2} \\ \dots \\ y_{n+k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_n \\ y_{n+1} \\ \dots \\ y_{n+k-1} \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Pauso bakarreko metodoen kasuan, $A = R(h\lambda)$ *egonkortasun-funtzio* deritzon funtzioa da. Kasu horretan, (2.15) ekuazioa era honetan idazten da:

$$y_{n+1} = R(h\lambda) y_n. \quad (2.17)$$

Pauso anitzeko metodoen kasuan, A *anplifikazio-faktorea* matrize bat da. Kasu horretan, polinomio karakteristikoa (edo egonkortasun-polinomioa) era honetan definitzen da:

$$p(r) = \det(A - rI). \quad (2.18)$$

A matrizearen autobalioak (2.18) polinomioaren erroak dira. A matrizearen modulurik handieneko autobalioari *erradio espektral* deritzo, eta ρ erabiliz izendatzen da:

$$\rho = \max \{ |\lambda_i| : \lambda_i \text{ } A \text{ matrizearen autobalioa izanik} \}. \quad (2.19)$$

Lema. Izan bitez r_1, r_2, \dots, r_l (2.18) polinomioaren erroak, beraien anizkoitzasunak hurrenez hurren m_1, m_2, \dots, m_l izanik. Orduan, (2.15) sistemaren soluzio orokorra honako adierazpen honen bidez emana dator:

$$y_n = p_1(n)r_1^n + p_2(n)r_2^n + \dots + p_l(n)r_l^n, \quad (2.20)$$

$p_j(n)$ polinomioen maila $m_j - 1$ izanik, hau da, erroen anizkoitzasuna baino bat txikiagoa (ikus [2], 378-380 orrialdeak).

(2.20) adierazpenak erakusten du y_n bornatua egoteko $n \rightarrow \infty$ doanean, (2.18) polinomioaren erroek unitate bateko erradiodun zirkuluaren barnean egon behar dutela, eta unitate bateko erradioko zirkunferentzian dauden erroak sinpleak izan behar direla (sinpleak izango ez balira, eta anizkoitzasuna baino unitate bat txikiagoko polinomioek biderkatuta doazenez, $n \rightarrow \infty$ doanean $y_n \rightarrow \infty$ beteko litzateke, eta y_n ez litzateke bornatua egongo).

Definizioa. Zenbakizko metodo bat egonkorra da (2.18) polinomio karakteristikoak honako baldintza hauek betetzen baditu:

- (2.18) polinomioaren erroek unitate bateko erradiodun zirkuluaren barnean egon behar dute.
- Unitate bateko erradioko zirkunferentzian dauden erroak sinpleak izan behar dira.

Definizioa (Egonkortasun-eremua). Zenbakizko metodo baten egonkortasun-eremua edo egonkortasun absolutuko eremua, S , honako adierazpen honen bidez emana dago:

$$S = \left\{ \hat{h} \in \mathbb{C} : \left\{ \begin{array}{l} \left| r_j(\hat{h}) \right| \leq 1, \quad r_j \text{ (2.18) polinomioaren erro sinplea.} \\ \left| r_j(\hat{h}) \right| < 1, \quad r_j \text{ (2.18) polinomioaren erro anizkoitza.} \end{array} \right. \right\} \quad (2.21)$$

Egonkortasun-eremu baten adibidea. Izan bedi pauso anitzeko honako metodo hau:

$$y_{n+k} - y_{n+k-1} = h \left(\frac{55}{24} f_{n+k-1} - \frac{59}{24} f_{n+k-2} + \frac{37}{24} f_{n+k-3} - \frac{3}{8} f_{n+k-4} \right). \quad (2.22)$$

2.7.2 atalean ikusiko dugu aurreko adierazpena 4 zehaztasun-ordenako Adams Bashforth-en metodoari dagokiola.

Egonkortasun-eremua lortzeko, lehenengo pausoa da zenbakizko metodoa test-ekuazioari aplikatzea. Kasu horretan, $k = 4$ dela kontuan hartuz, diferentziantan emandako ekuazio hau lortzen da:

$$y_{n+4} - y_{n+3} = \hat{h} \left(\frac{55}{24} y_{n+3} - \frac{59}{24} y_{n+2} + \frac{37}{24} y_{n+1} - \frac{3}{8} y_n \right), \quad (2.23)$$

non $\hat{h} = \lambda h$.

(2.23) adierazpena (2.16) bezala berridatziz, edo baliokidea dena, (2.15) bezala berridatziz:

$$\begin{pmatrix} y_{n+1} \\ y_{n+2} \\ y_{n+3} \\ y_{n+4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\hat{h}\frac{3}{8} & \hat{h}\frac{37}{24} & -\hat{h}\frac{59}{24} & 1 + \hat{h}\frac{55}{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_n \\ y_{n+1} \\ y_{n+2} \\ y_{n+3} \end{pmatrix} \Leftrightarrow Y_{n+4} = AY_{n+3}. \quad (2.24)$$

(2.24) adierazpeneko A matrizearen polinomio karakteristikoa kalkulatu dugu, eta zerorekin berdinduko dugu bere erroak aurkitzeko:

$$p(r) = \det(A - rI) = r^4 - \left(1 + \frac{55}{24}\hat{h} \right) r^3 + \frac{59}{24}\hat{h}r^2 - \frac{37}{24}\hat{h}r + \frac{3}{8}\hat{h} = 0. \quad (2.25)$$

Polinomio karakteristikoa kalkulatzeko beste era bat da diferentziantan emandako (2.23) ekuazioan $y_j = r^j$ motako soluzioekin proba egitea. Era horretan, (2.25) adierazpenarekin bat datorren honako adierazpen hau lortzen da:

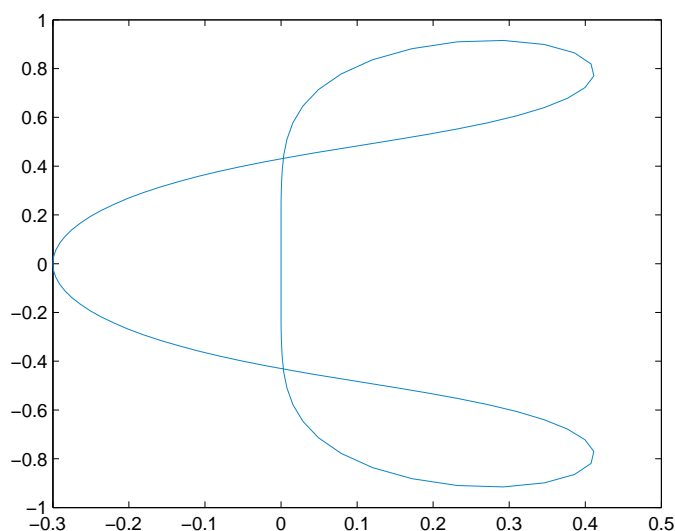
$$r^4 - \left(1 + \frac{55}{24}\hat{h} \right) r^3 + \frac{59}{24}\hat{h}r^2 - \frac{37}{24}\hat{h}r + \frac{3}{8}\hat{h} = 0. \quad (2.26)$$

Zenbakizko metodoaren-egonkortasun eremua osatzen dute \hat{h} balioen leku geometrikoek, zeinentzat (2.26) adierazpenaren erroak unitatea edo txikiagoak

baitira. (2.26) adierazpenetik \hat{h} askatuko dugu, eta (2.26) adierazpeneko erroek 1 balio duten kurba irudikatuko dugu. Horretarako, nahikoa da $r = e^{i\theta}$ egitea, $\theta \in [0, 2\pi]$ izanik:

$$\hat{h} = \frac{e^{4i\theta} - e^{3i\theta}}{\frac{55}{24}e^{3i\theta} - \frac{59}{24}e^{2i\theta} + \frac{37}{24}e^{i\theta} - \frac{9}{24}}. \quad (2.27)$$

θ aldagaiari balioak emanaz, (2.26) polinomioaren erroek 1 balio duten \hat{h} -ren balioak irudikatzeko gai gara. Puntu horiek S egonkortasun-eremuaren muga osatzen dute. Egonkortasun-eremua muga horren barneko aldea edo kanpokoa den jakiteko, nahikoa da (2.26) adierazpenean \hat{h} -ren balio bat ordezkatzeara eta era horretan lortzen den polinomioaren erroekin zer gertatzen den ikustea. 2.2 irudian ikus daiteke zenbakizko metodo honi dagokion egonkortasun eremua.



2.2 irudia. Adams Bashforth metodoaren egonkortasuna, $k = 4$.

Definizioa (A-egonkortasuna edo egonkortasun absolutua). (Dahlquist 1963) Zenbakizko metodo bat A-egonkorra da $\mathbb{C}^- \in S$ betetzen bada, S egonkortasun-eremua izanik eta \mathbb{C}^- parte erreal negatiboa duten zenbakien multzoa.

Definizioa (L-egonkortasuna). Pauso bakarreko zenbakizko metodo bat L-egonkorra da, baldintza hauek betetzen baditu:

- A-egonkorra bada.
- $y' = \lambda y$ test-ekuazioari metodoa aplikatzean, non $\lambda \in \mathbb{C}$ eta $Re(\lambda) < 0$, $y_{n+1} = R(\lambda h) y_n$ betetzen bada, non $|R(\lambda h)| \rightarrow 0$ izanik $Re(h\lambda) \rightarrow -\infty$ denean.

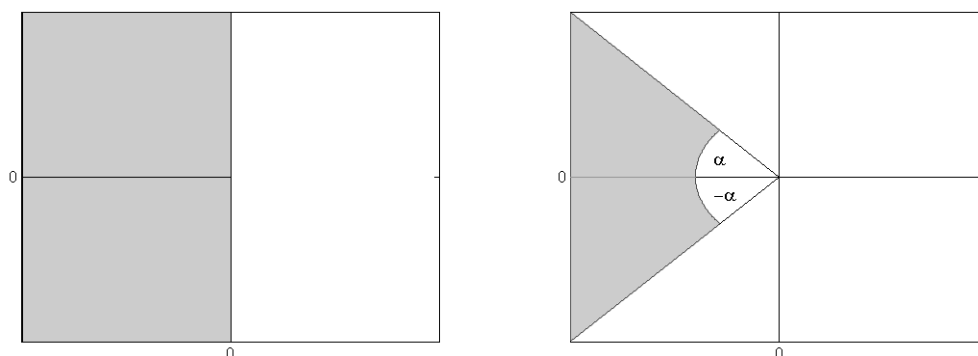
Teorema. (Dahlquist 1963) Pauso anitzekoa izanik, A-egonkorra den zenbakizko metodo baten zehaztasun-ordena $p \leq 2$ da. A-egonkorrak eta 2 zehaztasun-ordenakoak diren metodoen artean metodo trapezoidala da errore konstanterik txikiena duena, konstante hori $C = -\frac{1}{12}$ izanik. Teorema honen frogia [7] erreferentzian dago, 265 orrialdean.

Definizioa. ($A(\alpha)$ -egonkortasuna) (Widlund 1967) Izan bedi S zenbakizko metodo lineal baten egonkortasuna. Zenbakizko metodo hori $A(\alpha)$ -egonkorra da honako baldintza hau betetzen bada:

$$S_\alpha = \left\{ \hat{h} : \left| \arg(-\hat{h}) \right| < \alpha, \hat{h} \neq 0 \right\} \subseteq S,$$

non $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Definizioa. Zenbakizko metodo bat $A(0)$ -egonkorra da, nahikoa txikia den $\alpha > 0$ batentzat $A(\alpha)$ -egonkorra bada.



2.3 irudia. A -egonkortasuna eta $A(\alpha)$ -egonkortasuna.

Definizioa. (Cryer 1973) Zenbakizko metodo bat A_0 -egonkorra da, honako baldintza hau betetzen bada:

$$|r_i(x)| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad -\infty < x < 0.$$

Definizioa. (Nevanlinna 1979) Zenbakizko metodo bat A^0 -egonkorra da, $(-\infty, 0] \subseteq S$ betetzen bada.

Egonkortasunen arteko erlazioa. $A(0)$ -egonkorra \Rightarrow A_0 -egonkorra \Rightarrow A^0 -egonkorra.

2.5 Sendotasuna eta konbergentzia

Definizioa. Zenbakizko metodo bat emanik, sendotasunak adierazten du zenbakizko metodoak ekuazio diferentzialaren soluzioa adierazteko duen gaitasuna. Horretarako, t_{n+k} aldiuneko mozketa-errore lokala kalkulatu behar da LTE . Zenbakizko metodoa sendoa da, honako baldintza hau betetzen bada:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} LTE \right) = 0.$$

Definizioa. Zenbakizko metodo bat konbergentea da 2.2 ataleko teorema betetzen duten hasierako baldintzadun problema guztientzat $h \rightarrow 0$ denean, honako hau betetzen denean:

$$\max \|y(t_n) - y_n\| \rightarrow 0. \quad (2.28)$$

Konbergentziak zenbakizko metodoaren zehaztasuna ziurtatzen du, pauso tamaina nahikoa txikietarako.

2.6 Runge-Kutta metodoak

Runge-Kutta metodoak pauso bakarreko eta atal anitzeko metodoak dira. Runge-Kutta metodoei *s-ataleko metodo* ere deitzen zaie. Atal anitz izateak esan nahi du pausoa emango den tarteko s aldiunetako deribatuak erabiliko direla. Ideia hori Rungeri (1895) egokitu izan zaio; ikus [1]. Geroago zenbait ekarpen egin zituzten Heun-ek (1900) eta Kutta-k (1901). Azken horrek, Kuttak, zehaztasun-ordena 4 duten Runge-Kutta metodoen ezaugarriak aztertu zituen, eta zehaztasun-ordena 5 duten lehenengo Runge-Kutta metodoak proposatu zituen. Hutak (1956) zehaztasun-ordena 6 duten Runge-Kutta metodoak proposatu zituen. Ordenagailu digitalek garrantzia hartu zutenetik, Runge-Kutta metodoak gero eta garrantzitsuagoak dira, eta haien hainbat aldaera proposatu izan dituzte hainbat ikerlarik. Hasierako lanak Runge-Kutta metodo esplizituen sorreran zentratu izan badira ere, gaur egun interesekoak dira Runge-Kutta implizituak ere.

Hasierako balioko honako EDA hau emanik:

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad (2.29)$$

s ataleko Runge-Kutta metodoa honela emana dator:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i, \quad (2.30)$$

non:

$$k_i = f(t_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j), \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (2.31)$$

Ohikoa da Runge-Kutta metodoko (2.30) eta (2.31) adierazpenetako a_{ij} , b_i eta c_i konstanteak Butcher taula batean biltzea; ikus 2.1 taula.

c_1	a_{11}	a_{12}	\cdots	a_{1s}
c_2	a_{21}	a_{22}	\cdots	a_{2s}
\cdots	\cdots	\cdots	\cdots	\cdots
c_s	a_{s1}	a_{s2}	\cdots	a_{ss}
	b_1	b_2	\cdots	b_s

2.1 taula. Runge-Kutta metodo bateko Butcher taula.

Adibidez, $s = 4$ ataleko Runge-Kutta metodo batean 4 konstante c_i , 4 konstante b_i eta 16 konstante a_{ij} daude.

2.1 Butcher taula matrize eran ere idatz daiteke. Horretarako, s dimentsioko \vec{b} eta \vec{c} bektoreak eta $s \times s$ dimentsioko A matrizea definituko ditugu:

$$\vec{b} = [b_1, b_2, \dots, b_s]^T, \quad \vec{c} = [c_1, c_2, \dots, c_s]^T, \quad A = [a_{ij}].$$

2.1 Butcher taula matrize eran adierazten da 2.2 taularen bidez.

A matrizeko osagaien arabera, metodoa era ezberdinetakoa izan daiteke:

$$\frac{\vec{c} \mid A}{\mid \vec{b}^T}$$

2.2 taula. Butcher taularen matrize-adierazpena.

- Metodo esplizitua: A hertsiki behe-triangeluarra: $a_{ij} = 0$, non $j \geq i, i = 1, 2, \dots, s$.
- Metodo erdi-inplizitua: A behe-triangeluarra: $a_{ij} = 0$, non $j > i, i = 1, 2, \dots, s$.
- Metodo implizitua: A ez da behe-triangeluarra: $a_{ij} \neq 0$, non $j > i, i = 1, 2, \dots, s$.

\vec{c} bektoreko osagai bakoitzak adierazten du pauso barruko zein ataletan gauden. Pisuen bektorea da \vec{b}^T . A matrizeak adierazten du aurreko ataletan kalkulatu diren deribatuen arteko dependentzia (metodoa esplizitua bada) edo atal guztien arteko dependentzia (metodoa implizitua bada).

Runge-Kutta metodoa esplizitua denean, (2.31) adierazpena honela geratzen da:

$$k_i = f(t_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j), \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (2.32)$$

4 ataleko Runge-Kutta metodo esplizitu batean, 4 konstante c_i , 4 konstante b_i eta 16 konstante a_{ij} daude. Baina metodoa esplizitua denez, 16 a_{ij} konstanteetatik 10 nuluak dira; ikus 2.3 taula. Hau da, gehienez 6 a_{ij} konstante ez-nulu daude, A matrizeko diagonal nagusiaren azpian kokatuta daudenak, alegia. 14 konstante horiek (4 + 4 + 6) zehaztasun-ordenaren baldintzak edo egonkortasun-baldintzak betetzeko eran zehazten dira.

c_1	0	0	0	0
c_2	a_{21}	0	0	0
c_3	a_{31}	a_{32}	0	0
c_4	a_{s1}	a_{42}	a_{43}	0
	b_1	b_2	b_3	b_4

2.3 taula. 4-ataleko Runge-Kutta metodo esplizituen Butcher taula.

Runge-Kutta metodoetako a_{ij} , b_i eta c_i konstanteak ez dira askeak beraien artean. Alde batetik, honako erlazio hau betetzen da [3]:

$$c_i = \sum_{j=1}^s a_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (2.33)$$

2.6.1 Ordena-baldintzak

2.3.2 atalean, mozketaren errorea lokala (2.12) ekuazioa erabilia definitu dugu. Zenbakizko metodoaren zehaztasun-ordena p dela esan dugu $GTE = O(h^p)$

betetzen bada, edo, gauza bera dena, $LTE = O(h^{p+1})$ betetzen bada. Mozketaren errore lokalaren (2.9) adierazpena pauso bakarreko ($k = 1$) metodoari aplikatuz honako hau daukagu:

$$LTE = y(t_{n+1}) - y_{n+1}^*. \quad (2.34)$$

Runge-Kutta metodo baten zehaztasun-ordenaren baldintzak kalkulatzeko, $y(t_{n+1})$ -en Taylor-en garapena egiten da:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(t_n) + \frac{h^3}{6}y'''(t_n) + O(h^4). \quad (2.35)$$

Demagun $f(t, y)$ funtzioaren deribatu partzialak existitzen direla eta jarraituak direla. Honako notazio laburtu hau erabiliko dugu $f(t, y)$ funtzioaren deribatu partzialentzat:

$$f = f(t, y), \quad f_t = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad f_{tt} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad f_{ty} = f_{yt} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t}, \quad \text{etab.}$$

Honako hauek dira (2.35) adierazpeneko deribatuak:

$$\begin{cases} y'(t_n) = f, \\ y''(t_n) = f_t + f_y y' = f_t + f f_y, \\ y'''(t_n) = f_{tt} + f_{ty} f + f(f_{yt} + f f_{yy}) + f_y(f_t + f f_y) \\ \quad = f_{tt} + 2f_{ty} f + f^2 f_{yy} + f_y(f_t + f f_y). \end{cases} \quad (2.36)$$

(2.36) adierazpeneko notazioa gehiago laburtuko dugu, honako bi funtzio hauek definituz:

$$F = f_t + f f_y, \quad G = f_{tt} + 2f_{ty} f + f^2 f_{yy}. \quad (2.37)$$

(2.37) adierazpenak Taylorren (2.35) garapenean ordezkatzuz, honako hau daukagu:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf + \frac{1}{2}h^2 F + \frac{1}{6}h^3 (F f_y + G) + O(h^4). \quad (2.38)$$

Eta y_{n+1}^* balioa era honetan kalkula daiteke:

$$y_{n+1}^* = y(t_n) + h \sum_{i=1}^s b_i k_i, \quad (2.39)$$

non:

$$k_i = f(t_n + c_i h, y(t_n)) + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (2.40)$$

(2.40) adierazpeneko k_i terminoak garatuz eta F -ren eta G -ren adierazpenak erabilia (2.37), k_1 , k_2 eta k_3 ren adierazpen laburtuetara iristen gara:

$$\begin{cases} k_1 = f, \\ k_2 = f + hc_2 F + \frac{1}{2}h^2 c_2^2 G + O(h^3), \\ k_3 = f + hc_3 F + h^2 \left(c_2 a_{32} F f_y + \frac{1}{2} c_3^2 G \right) + O(h^3), \\ \vdots \end{cases} \quad (2.41)$$

(2.41) adierazpena (2.39) adierazpenean ordezkaturaz, y_{n+1}^* lortzen da:

$$y_{n+1}^* = y(t_n) + h(b_1 + b_2 + b_3)f + h^2(b_2c_2 + b_3c_3)F + \frac{1}{2}h^3[2b_3c_2a_{32}Ff_y + (b_2c_2^2 + b_3c_3^2)G] + O(h^4). \quad (2.42)$$

$y(t_{n+1})$ eta y_{n+1}^* en adierazpenak, (2.38) eta (2.42) hurrenez hurren, mozketaren errore lokalaren (2.34) adierazpenean ordezkaturaz, zera daukagu:

$$LTE = hf(1 - (b_1 + b_2 + b_3)) + h^2F\left(\frac{1}{2} - (b_2c_2 + b_3c_3)\right) + h^3\left(\frac{1}{6}(Ff_y + G) - \frac{1}{2}(2b_3c_2a_{32}Ff_y + (b_2c_2^2 + b_3c_3^2)G)\right). \quad (2.43)$$

Bukatzeko, (2.43) adierazpeneko hirugarren batugaia ordenaturaz, hauxe lortzen da:

$$LTE = hf(1 - (b_1 + b_2 + b_3)) + h^2F\left(\frac{1}{2} - (b_2c_2 + b_3c_3)\right) + h^3\left(Ff_y\left(\frac{1}{6} - b_3c_2a_{32}\right) + G\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}(b_2c_2^2 + b_3c_3^2)\right)\right). \quad (2.44)$$

Eta (2.44) adierazpenetik ondoriozta daitezke Runge-Kutta metodoen zehaztasun-ordenaren baldintzak:

- Runge-Kutta metodoaren zehaztasun-ordena 1 da, honako baldintza hau lortzen bada: $1 - (b_1 + b_2 + b_3) = 0 \Rightarrow \sum b_i = 1$. Hau da, (2.47) adierazpeneko lehenengo baldintza betetzen bada.
- Runge-Kutta metodoaren zehaztasun-ordena 2 da, lehen ordenakoa izateko baldintzaz gain, beste hau ere betetzen bada:

$$\frac{1}{2} - (b_2c_2 + b_3c_3) = 0 \Rightarrow \sum b_i c_i = \frac{1}{2}. \quad (2.45)$$

Hau da, metodoaren zehaztasun-ordena 2 da, (2.47) adierazpeneko lehenengo bi baldintzak betetzen badira.

- Runge-Kutta metodoaren zehaztasun-ordena 3 da, lehen eta bigarren ordenako baldintzez gain, beste hauek ere betetzen badira:

$$\begin{cases} \frac{1}{6} - \frac{1}{2}(b_2c_2^2 + b_3c_3^2) = 0 \Rightarrow \sum b_i c_i^2 = \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{6} - b_3c_2a_{32} = 0 \Rightarrow \sum b_i \left(\sum_{j<i} a_{ij}c_j\right) = \frac{1}{6}. \end{cases} \quad (2.46)$$

Hau da, metodoaren zehaztasun-ordena 3 da, (2.47) adierazpeneko lehenengo lau baldintzak betetzen badira.

Era honetan jarraituz, Runge-Kutta metodoaren zehaztasun-ordena 4 izateko bete behar diren 8 baldintzak, edo 5 ordenakoa izateko bete beharreko 17 baldintzak ondoriozta daitezke, etab. (2.47) adierazpenean jaso dira Runge-Kutta metodoaren zehaztasun-ordena 5 izateko bete beharreko 17 ordena-baldintzak. Era berean, 2.4 taulan jaso dira y ezezagunaren n ordenako deribatuetako bakoitzean bete behar dituen baldintzak, baita baldintza kopuru osoa ere.

$$\left\{ \begin{array}{ll} 1. \sum b_i = 1, & 9. \sum b_i c_i^2 \left(\sum_{j<i} a_{ij} c_j \right) = \frac{1}{10}, \\ 2. \sum b_i c_i = \frac{1}{2}, & 10. \sum b_i c_i \left(\sum_{j<i} a_{ij} c_j^2 \right) = \frac{1}{15}, \\ 3. \sum b_i c_i^2 = \frac{1}{3}, & 11. \sum b_i c_i \left(\sum_{j<i} a_{ij} \left(\sum_{k<j} a_{jk} c_k \right) \right) = \frac{1}{30}, \\ 4. \sum b_i \left(\sum_{j<i} a_{ij} c_j \right) = \frac{1}{6}, & 12. \sum b_i \left(\sum_{j<i} a_{ij} c_j \right)^2 = \frac{1}{20}, \\ 5. \sum b_i c_i^3 = \frac{1}{4}, & 13. \sum b_i \left(\sum_{j<i} a_{ij} c_j^3 \right) = \frac{1}{20}, \\ 6. \sum b_i c_i \left(\sum_{j<i} a_{ij} c_j \right) = \frac{1}{8}, & 14. \sum b_i \left(\sum_{j<i} a_{ij} c_j \left(\sum_{k<j} a_{jk} c_k^2 \right) \right) = \frac{1}{40}, \\ 7. \sum b_i \left(\sum_{j<i} a_{ij} c_j^2 \right) = \frac{1}{12}, & 15. \sum b_i \left(\sum_{j<i} a_{ij} \left(\sum_{k<j} a_{jk} c_k^2 \right) \right) = \frac{1}{60}, \\ 8. \sum b_i \left(\sum_{j<i} a_{ij} \left(\sum_{k<j} a_{jk} c_k \right) \right) = \frac{1}{24}, & 16. \sum b_i \left(\sum_{j<i} a_{ij} \left(\sum_{k<j} a_{jk} \left(\sum_{m<k} a_{km} c_m \right) \right) \right) \\ & = \frac{1}{120}, \\ & 17. \sum b_i c_i^4 = \frac{1}{5}. \end{array} \right. \quad (2.47)$$

Ordena	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Deribatu bakoitzeko baldintza kopurua	1	1	2	4	9	20	48	115	286	719
Baldintza kopuru osoa	1	2	4	8	17	37	85	200	486	1205

2.4 taula. 1-10 zehaztasun-ordenako Runge-Kutta metodoek bete beharreko baldintza kopurua.

Ikusitakoaren harira, esan beharra dago ez dela existitzen 5 ataleko eta zehaztasun-ordena 5 duen Runge-Kutta metodo espliziturik. Teorema honen froga aurki daiteke [4] erreferentziako 181-182 orrialdeetan. Teorema hau hedatu egin daiteke, eta ez da existitzen p ataleko eta p zehaztasun-ordenako Runge-Kutta metodo espliziturik $p > 5$ bada (Butcher, 1987). Runge-Kutta metodo esplizituen atal kopuruaren eta zehaztasun-ordenaren arteko erlazioa 2.5 taulan jaso da, [4].

Zehaztasun-ordena	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Atal kopuru minimoa	1	2	3	4	6	7	9	11	12-17	13-17

2.5 taula. Runge-Kutta metodo esplizituen atal kopuruaren eta zehaztasun-ordenaren arteko erlazioa.

2.6.2 Runge-Kutta metodoen egonkortasuna

Runge-Kutta metodoen egonkortasuna aztertzeko, (2.30) metodoa aplikatzen zaio $y' = \lambda y$ test-ekuazioari. Hori eginez, diferentzian emandako lehen ordenako ekuazioa lortzen da:

$$y_{n+1} = R(\hat{h})y_n, \quad (2.48)$$

non $\hat{h} = h\lambda$.

$R(\hat{h})$ da Runge-Kutta metodoaren egonkortasun-funtzioa. Test-ekuazioari (2.30) adierazpena aplikatu ostean, honako hau lortzen da:

$$y_{n+1} = y_n + \hat{h} \sum_{i=1}^s b_i Y_i, \quad (2.49)$$

non:

$$Y_i = y_n + \hat{h} \sum_{j=1}^s a_{ij} Y_j, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (2.50)$$

$Y = [Y_1, Y_2, \dots, Y_s]^T \in \mathbb{R}^s$ eta $e = [1, 1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^s$ bektoreak definituko ditugu. Era honetan, (2.49) eta (2.50) adierazpenak honela idatz daitezke:

$$\begin{cases} Y = y_n e + \hat{h} A Y, \\ y_{n+1} = y_n + \hat{h} b^T Y. \end{cases} \quad (2.51)$$

(2.51) adierazpeneko lehenengo berdintzatik Y askatuz eta bigarrean ordezkaturik, honako hau lortzen da:

$$y_{n+1} = y_n \left(1 + \hat{h} b^T (I - \hat{h} A)^{-1} e \right). \quad (2.52)$$

I matrizea s dimentsioko unitate-matrizea izanik. Hortaz, egonkortasun-funtzioa honela emana dator:

$$R(\hat{h}) = 1 + \hat{h} b^T (I - \hat{h} A)^{-1} e. \quad (2.53)$$

Dekker-ek eta Verwer-ek (1984) egonkortasun-funtzioaren adierazpen baliokide bat eman zuten [4]. Honako hau da adierazpena:

$$R(\hat{h}) = \frac{\det(I - \hat{h} A + \hat{h} e b^T)}{\det(I - \hat{h} A)}. \quad (2.54)$$

Runge-Kutta metodoen egonkortasun-funtzioak begiratuta, egonkortasun-eremuei buruzko ondorio hauek atera daitezke:

- Runge-Kutta metodoa esplizitua denean, hau da A matrizea behe-triangeluarra denean, $(I - \hat{h}A)$ matrizea ere behe-triangeluarra da, eta diagonal nagusiko posizio guztietan 1 elementua dago. Ondorioz, $\det(I - \hat{h}A) = 1$ betetzen da, eta egonkortasun-eremua \hat{h} aldagaiaren menpeko polinomioa da.
- Runge-Kutta metodoa esplizitua ez denean, $\det(I - \hat{h}A)$ determinantea \hat{h} aldagaiaren menpeko polinomioa da. Hortaz, egonkortasun-eremua \hat{h} aldagaiaren menpeko funtzio arrazionala da.
- Runge-Kutta metodo esplizituetan ezin da A-egonkortasun edo egonkortasun absolutua bete. $|\hat{h}| \rightarrow \infty$ denean, y_{n+1} ez dago bornatua. Ondorioz, Runge-Kutta metodo esplizituen egonkortasun-eremua finitua da.
- Runge-Kutta metodoa esplizitua ez denean, posible da A-egonkortasunaren edo egonkortasun absolutuaren baldintza betetzea. $|\hat{h}| \rightarrow \infty$ denean, y_{n+1} bornatua dago. Ondorioz, gerta daiteke Runge-Kutta metodoaren egonkortasun-eremua infinitua izatea.

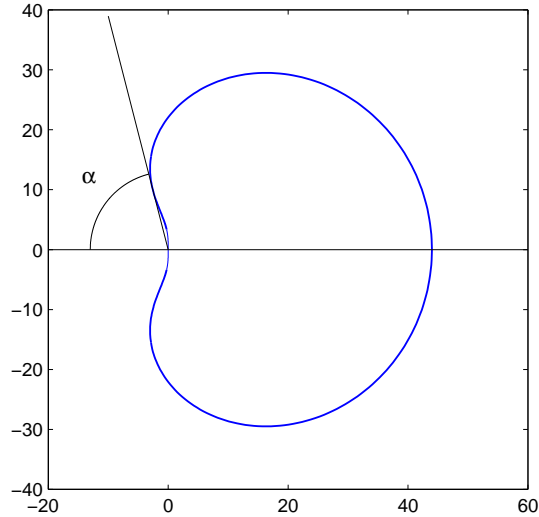
Runge-Kutta implizituen abantaila da, metodoa ordena jakin batekoa izateko, metodo esplizituek baino atal kopuru gutxiago beharko dituztela. Gainera, Runge-Kutta metodo implizituen egonkortasun-eremua esplizituena baino handiagoa da. Runge-Kutta implizituen desabantaila, aldiz, gutxienez atal baten izaera implizitua da. Horrek, iterazio-metodoak erabiltzera behartzen gaitu. 2.6 taulan Runge-Kutta implizitu baten koefizienteak jaso dira [1]. Adibidez, $\lambda = 0,158984$ balioa aukeratuz, metodoa $A(75,5996^\circ)$ -egonkorra da. Metodoaren egonkortasun-eremua 2.4 irudian adierazi da. Gainera, posiblea da A-egonkorrak diren Runge-Kutta metodo implizituak sortzea. Horien adibide dira Gauss-en metodo bezala ezagutzen diren Runge-Kutta metodo implizituak. 2.7, 2.8 eta 2.9 tauletan jaso dira $s = 1, 2, 3$ ataleko eta $p = 2, 4, 6$ ordenako Gauss-en metodoen koefizienteak.

λ	λ	0	0
$\frac{1+\lambda}{2}$	$\frac{1-\lambda}{2}$	λ	0
1	$\frac{-(1-\lambda)(1-9\lambda+6\lambda^2)}{1-3\lambda+6\lambda^2}$	$\frac{2(1-\lambda)(1-6\lambda+6\lambda^2)}{1-3\lambda+6\lambda^2}$	λ
$\frac{1+3\lambda}{6(1-\lambda)^2}$	$\frac{2(1-3\lambda)}{3(1-\lambda)^2}$	$\frac{1-3\lambda+6\lambda^2}{6(1-\lambda)^2}$	

2.6 taula. Runge-Kutta implizitu baten Butcher taula [1].

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$$

2.7 taula. Runge-Kutta implizitu baten Butcher taula $s = 1, p = 2$ izanik.



2.4 irudia. 2.6 taulako Runge-Kutta inplizituaren egonkortasun-eremua.

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

2.8 taula. Runge-Kutta inplizitu baten Butcher taula $s = 2, p = 4$ izanik.

$$\begin{array}{c|ccc} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10} & \frac{5}{36} & \frac{2}{9} - \frac{\sqrt{15}}{15} & \frac{5}{36} - \frac{\sqrt{15}}{30} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{36} + \frac{\sqrt{15}}{24} & \frac{2}{9} & \frac{5}{36} - \frac{\sqrt{15}}{24} \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{10} & \frac{5}{36} + \frac{\sqrt{15}}{30} & \frac{2}{9} + \frac{\sqrt{15}}{15} & \frac{5}{36} \\ \hline & \frac{5}{18} & \frac{4}{9} & \frac{5}{18} \end{array}$$

2.9 taula. Runge-Kutta inplizitu baten Butcher taula $s = 3, p = 6$ izanik.

Atal kopurua eta zehaztasun-ordena berdinak dituzten Runge-Kutta metodo esplizituen, hau da $s = p$, (eta hau gertatzen da $s = 1, 2, 3, 4$ kasuetan), egonkortasun-eremuak 2.5 irudian ikus daitezke.

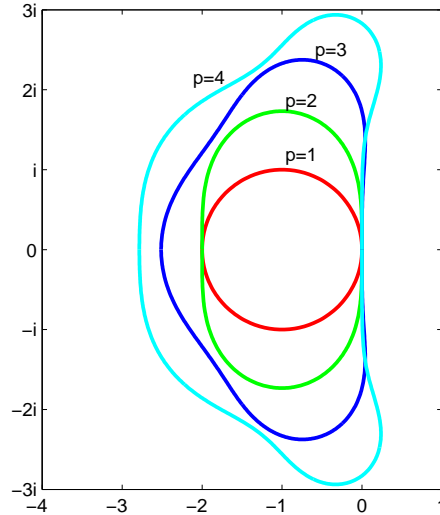
$s = p$ baldintza betetzen duten Runge-Kutta metodo esplizituen egonkortasun-eremua beti da berbera. Kasu honetan, (2.53) adierazpenak forma hau hartzen du:

$$R(\hat{h}) = 1 + \sum_{j=1}^s \frac{\hat{h}^j}{j!}. \quad (2.55)$$

$p < s$ betetzen duten Runge-Kutta metodo esplizituen kasuan (eta hau gertatzen da $p > 4$ denean), egonkortasun-funtzioak honako forma hau dauka:

$$R(\hat{h}) = 1 + \hat{h} + \frac{\hat{h}^2}{2!} + \frac{\hat{h}^3}{3!} + \dots + \frac{\hat{h}^p}{p!} + \sum_{q=p+1}^s \gamma_q \hat{h}^q. \quad (2.56)$$

γ_q koefizienteak Runge-Kutta metodoaren koefizienteen menpekoak dira. Kasu



2.5 irudia. Runge-Kutta metodo esplizituen egonkortasun-eremua $s = p$.

honetan, posible da egonkortasun-eremua apur bat hobetzea. Hala eta guztiz, aukera honek ez du emaitza ikusgarriarik ematen. s ataleko eta $s - 1$ zehaztasun-ordenako Runge-Kutta esplizitu baten egonkortasun-eremua kalkulatu dugu. Horretarako, egonkortasun-funtzioaren (2.53) adierazpena erabiliko dugu. $d = (I - \hat{h}A)^{-1}e$ notazioa erabiliko dugu. Bakarrik kalkulatu behar dugu d -ko \hat{h}^{s-1} -en koefizientea. Bestela esanda, $(I - \hat{h}A)d = e$ sistema ebaztean, pauso bakoitzean \hat{h} -ren mailarik altueneko terminoa gorde behar dugu. $(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = c_i)$ errenkadetako elementuek bete behar dituzten baldintzak kontuan hartuz eta \hat{h} -ren maila baxuagoko terminoak LP hizkiez adieraziz, honako hau daukagu:

$$\begin{cases} d_1 = 1, \\ d_2 = 1 + \hat{h}a_{21}d_1 = c_2\hat{h} + LP, \\ d_3 = 1 + \hat{h}a_{31}d_1 + \hat{h}a_{32}d_2 = a_{32}c_2\hat{h}^2 + LP, \\ \vdots \\ d_s = 1 + \hat{h}a_{s1}d_1 + \hat{h}a_{s2}d_2 + \dots + \hat{h}a_{s,s-1}d_{s-1} = a_{s,s-1}a_{s-1,s-2}\dots a_{32}c_2\hat{h}^{s-1} + LP. \end{cases} \quad (2.57)$$

Beraz, $R(\hat{h}) = 1 + \hat{h}b^T d$ polinomioko \hat{h}^s osagaiaren koefizientea γ_s da, eta era honetan kalkulatzen da:

$$\gamma_s = b_s a_{s,s-1} a_{s-1,s-2} \dots a_{32} c_2. \quad (2.58)$$

Hau da, γ_s da A matrizearen diagonal nagusiaren azpiko lehenengo diagonaleko elementuen eta b_s -ren arteko biderketa. Ohartu, metodoa s zehaztasun-ordenakoa bada, ordena-baldintzek $\gamma_s = \frac{1}{s!}$ betetzea eskatzen dutela. s ataleko eta $s - 1$ zehaztasun-ordenako Runge-Kutta esplizitu baten egonkortasun-eremua kalkulatzeko jarraitu ditugun pausoak jarraituz, metodoaren egonkortasun-polinomioa kalkula daiteke. Horretarako, nahikoa da \hat{h} -ren mailarik altueneko

bi terminoak gordetzea. Hori eginez, \hat{h}^{s-1} -eko γ_{s-1} koefizientea lortzen da:

$$\gamma_{s-1} = b_{s-1}a_{s-1,s-2}\dots a_{3,2}a_{2,1} + b_s \sum_{i<s} a_{i,j} \sum_{k<j} a_{j,k}. \quad (2.59)$$

2.6.3 Kateatutako Runge-Kutta metodoak

Asko kostatzen da Runge-Kutta metodoetako mozketa-errore lokaleko osagai nagusia kalkulatzeko. Merson-ek (1957) mozketa-errore lokala k_i koefizienteen menpe balioesteko era bat proposatu zuen. Mersonen ideia oinarrian c_i eta a_{ij} koefiziente bereko p eta $(p+1)$ ordenako bi Runge-Kutta metodo hartzea dago. Prozesu hori kateatze bezala ezagutzen da. Kateatutako Runge-Kutta metodoen Butcher taula 2.10 taula da.

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{c} & A \\ \hline & \mathbf{b}^T \\ \hline & \hat{\mathbf{b}}^T \\ \hline & \mathbf{E}^T \end{array}$$

2.10 taula. Kateatutako Runge-Kutta metodoen Butcher taula.

p zehaztasun-ordenakoa da \mathbf{c} , A eta \mathbf{b}^T koefizienteek definitzen duten Runge-Kutta metodoa. Aldiz, $(p+1)$ zehaztasun-ordenakoa \mathbf{c} , A eta $\hat{\mathbf{b}}^T$ koefizienteek definitzen dutena. Baldin \tilde{y}_{n+1} eta y_{n+1} badira hurrenez hurren $(p+1)$ eta p metodoen bidez lortutako emaitzak, horiek kalkulatzeko egin beharreko eragiketak azken batuketan honetan ezberdintzen dira:

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s \hat{b}_i k_i, \quad y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i. \quad (2.60)$$

Mozketa-errore lokala \tilde{y}_{n+1} eta y_{n+1} balioen diferentzia eginez balioesten da, hau da:

$$\tilde{y}_{n+1} - y_{n+1} = h \sum_{i=1}^s E_i k_i. \quad (2.61)$$

$E_i = \hat{b}_i - b_i$ izanik eta $\mathbf{E}^T = \hat{\mathbf{b}}^T - \mathbf{b}^T$; ikus 2.10 taula.

p zehaztasun-ordenaz kalkulaturako y_{n+1} balioa erabiltzen denean hurrengo pausoko hasierako balio gisa, metodoa p ordenakoa da, eta kateatutako metodoa $(p, p+1)$ izendatzen da. Aldiz, $(p+1)$ zehaztasun-ordenaz kalkulaturako \tilde{y}_{n+1} denean hurrengo pausoko hasierako balioa, orduan metodoa $(p+1)$ ordenakoa da eta $(p+1, p)$ izendatzen da.

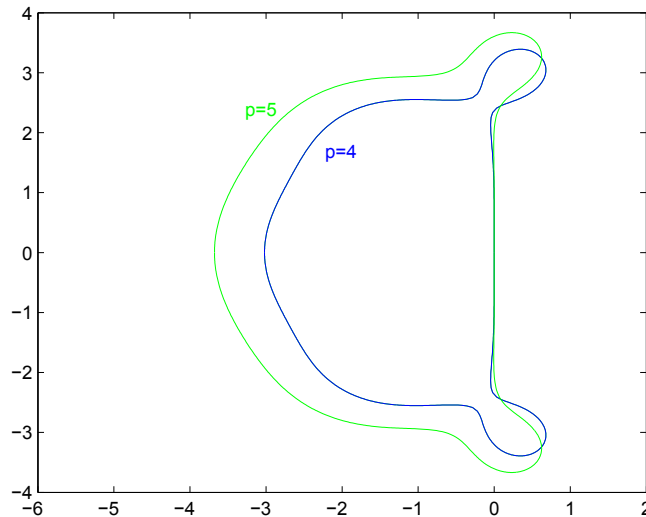
Kateatutako zenbait Runge-Kutta metodo ezagun ikusiko ditugu:

- Fehlberg-i zor dizkiogu kateatutako zenbait Runge-Kutta metodo [8, 9]. Fehlberg-en (4, 5) ordenako Runge-Kutta metodorik ezagunena RKF45 da. Metodo horretako koefizienteak mozketa-errore lokala txikia izateko eran aukeratu zituen. Metodo honen Butcher taula 2.11 taulan ikus daiteke eta egonkortasun-eremuak 2.6 irudian. 6-ataleko metodoa da, eta bere egonkortasun-polinomioak hauek dira:

- 4 ordena: $R(\hat{h}) = 1 + \hat{h} + \frac{\hat{h}^2}{2!} + \frac{\hat{h}^3}{3!} + \frac{\hat{h}^4}{4!} + \frac{\hat{h}^5}{104}$.
- 5 ordena: $R(\hat{h}) = 1 + \hat{h} + \frac{\hat{h}^2}{2!} + \frac{\hat{h}^3}{3!} + \frac{\hat{h}^4}{4!} + \frac{\hat{h}^5}{5!} + \frac{\hat{h}^6}{2080}$.

$\frac{1}{104}$ osagaia honako elementu hauen biderketa gisa kalkulatzen da:

$$\gamma_s = b_5 a_{54} a_{43} a_{32} a_{21} = -\frac{1}{55} \cdot \left(-\frac{845}{4104}\right) \cdot \frac{7296}{2197} \cdot \frac{9}{32} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{104}.$$



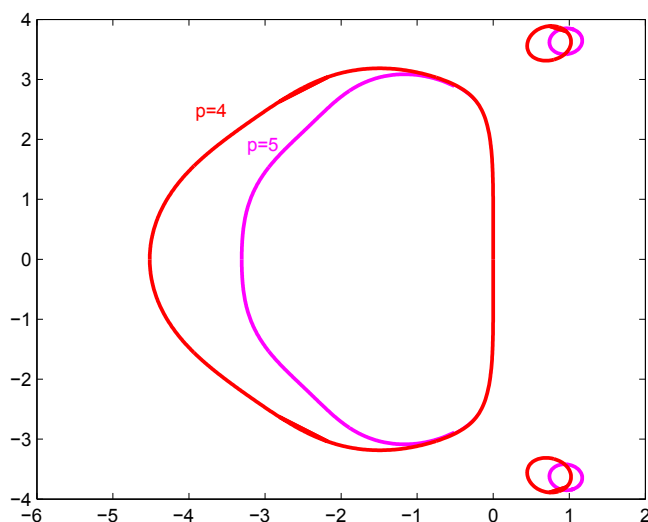
2.6 irudia. RKF45 metodoaren egonkortasun-eremuak.

c_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	a_{i6}
0						
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$					
$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{9}{32}$				
$\frac{12}{13}$	$\frac{1932}{2197}$	$-\frac{7200}{2197}$	$\frac{7296}{2197}$			
1	$\frac{439}{216}$	-8	$\frac{3680}{513}$	$-\frac{845}{4104}$		
$\frac{1}{2}$	$-\frac{8}{27}$	2	$-\frac{3544}{2565}$	$\frac{1859}{4104}$	$-\frac{11}{40}$	
b^T	$\frac{25}{216}$	0	$\frac{1408}{2565}$	$\frac{2197}{4104}$	$-\frac{1}{5}$	0
\hat{b}^T	$\frac{16}{135}$	0	$\frac{6656}{12825}$	$\frac{28561}{56430}$	$-\frac{9}{50}$	$\frac{2}{55}$
E^T	$\frac{1}{360}$	0	$-\frac{128}{4275}$	$-\frac{2197}{75240}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{2}{55}$

2.11 taula. RKF45 metodoko koefizientek.

- Dormand-ek eta Prince-k garatu zuten kateatutako Runge-Kutta metodo ezagun bat. DOPRI (5,4) izena dauka metodo horrek [10]. 7 ataleko metodo bat da; \hat{b}^T konstanteak darabiltzagunean metodoaren ordena 5 da, eta b^T

darabiltzagunean ordena 4 da. Praktikan 6 ataleko metodoa da, \hat{b}^T bektoreko azken koefizientea 0 baita. *Azkena eta lehenengoa berdinak* (ingelesezko *FSAL, First Same As Last*) motako metodoa da. Esan nahi du deribatuaren azken ebaluazioa erabiltzen dela hurrengo pausoko deribatuaren lehenengo ebaluazio gisa. 2.12 taulan jaso dira metodo honen koefizienteak, eta 2.7 irudian ikus daiteke egonkortasun-eremuen adierazpen grafikoa.



2.7 irudia. DOPRI(5,4) metodoaren egonkortasun-eremuak.

DOPRI(5,4) metodoko egonkortasun-eremuak hauek dira:

- 4 ordenako metodoarena: $R(\hat{h}) = 1 + \hat{h} + \frac{\hat{h}^2}{2} + \frac{\hat{h}^3}{6} + \frac{\hat{h}^4}{24} + \frac{149\hat{h}^5}{16299} + \frac{41\hat{h}^6}{30559} + \frac{\hat{h}^7}{24000}$.
- 5 ordenakoarena: $R(\hat{h}) = 1 + \hat{h} + \frac{\hat{h}^2}{2} + \frac{\hat{h}^3}{6} + \frac{\hat{h}^4}{24} + \frac{\hat{h}^5}{120} + \frac{\hat{h}^6}{600}$.

$\frac{1}{600}$ terminoa honako koefiziente hauen biderketa izanik:

$$\gamma_s = b_6 a_{65} a_{54} a_{43} a_{32} a_{21} = \frac{11}{84} \cdot \left(-\frac{5103}{18656}\right) \cdot \left(-\frac{212}{729}\right) \cdot \frac{32}{9} \cdot \frac{9}{40} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{600}.$$

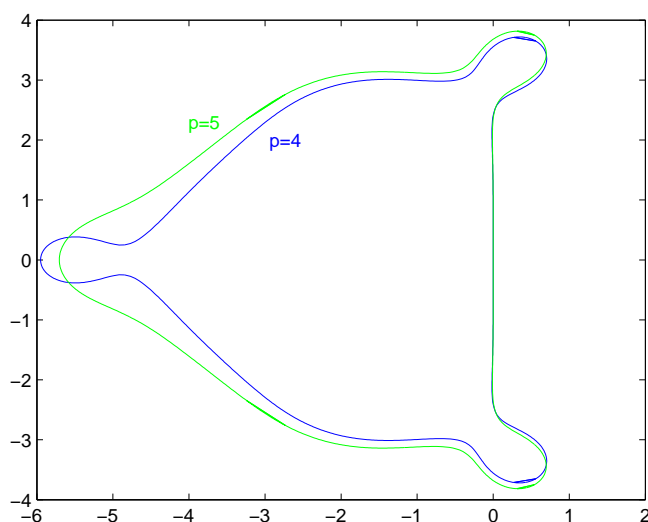
- 7-ataleko eta (5,4) zehaztasun-ordenako beste metodo bat ere diseinatu zuten Dormandek eta Princek [10]. Metodo horren koefizienteak 2.13 taulan jaso dira, eta egonkortasun-eremuak 2.8 irudikoak dira.

Metodo horren egonkortasun-polinomioak honako hauek dira:

- 4 ordenakoarena: $R(\hat{h}) = 1 + \hat{h} + \frac{\hat{h}^2}{2} + \frac{\hat{h}^3}{6} + \frac{\hat{h}^4}{24} + \frac{3209\hat{h}^5}{37800} + \frac{97\hat{h}^6}{141750} - \frac{\hat{h}^7}{64800}$
- 5 ordenakoarena: $R(\hat{h}) = 1 + \hat{h} + \frac{\hat{h}^2}{2} + \frac{\hat{h}^3}{6} + \frac{\hat{h}^4}{24} + \frac{\hat{h}^5}{120} + \frac{\hat{h}^6}{1296}$

c_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	a_{i6}	a_{i7}
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$						
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$					
$\frac{4}{5}$	$\frac{44}{45}$	$-\frac{56}{15}$	$\frac{32}{9}$				
$\frac{8}{9}$	$\frac{19372}{6561}$	$-\frac{25360}{2187}$	$\frac{64448}{6561}$	$-\frac{212}{729}$			
1	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	
b^T	$\frac{5179}{57600}$	0	$\frac{7571}{16695}$	$\frac{393}{640}$	$-\frac{92097}{339200}$	$\frac{187}{2100}$	$\frac{1}{40}$
\hat{b}^T	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	0
E^T	$\frac{71}{57600}$	0	$-\frac{71}{16695}$	$\frac{71}{1920}$	$-\frac{17253}{339200}$	$\frac{22}{525}$	$-\frac{1}{40}$

2.12 taula. DOPRI(5,4) metodoko koefizienteak.



2.8 irudia. 2.13 taulako metodoaren egonkortasun-eremuak.

Metodo berri honen egonkortasun-eremuak DOPRI(5,4) metodoarenak baino handiagoak dira. Hala ere, DOPRI(5,4) metodoaren abantaila da 6-atalekoa dela, eta aurkeztu berri dugun metodoa 7-atalekoa. Gainera, DOPRI(5,4) metodoaren mozketaren errore lokala metodo berri honena baino txikiagoa da.

Runge-Kutta metodo baten egonkortasun-eremuaren konputazio adibidea:

Aurretik ere esan da kateatutako DOPRI(5,4) Runge-Kutta metodoaren egonkortasun-polinomioa honako adierazpen honen bidez emana dagoela:

$$R(\hat{h}) = 1 + \hat{h} + \frac{\hat{h}^2}{2!} + \frac{\hat{h}^3}{3!} + \frac{\hat{h}^4}{4!} + \frac{\hat{h}^5}{5!} + \frac{\hat{h}^6}{600}.$$

Zenbakizko metodoa egonkorra da, $R(\hat{h}) \leq 1$ betetzen bada. Metodoaren

c_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	a_{i6}	a_{i7}
0							
$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$						
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$					
$\frac{5}{9}$	$\frac{55}{324}$	$-\frac{25}{108}$	$\frac{50}{81}$				
$\frac{2}{3}$	$\frac{83}{330}$	$-\frac{13}{22}$	$\frac{61}{66}$	$\frac{9}{110}$			
1	$-\frac{19}{28}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{27}{7}$	$\frac{22}{7}$		
1	$\frac{19}{200}$	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{243}{400}$	$\frac{33}{40}$	$\frac{7}{80}$	
b^T	$\frac{19}{200}$	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{243}{400}$	$\frac{33}{40}$	$\frac{7}{80}$	0
\hat{b}^T	$\frac{431}{5000}$	0	$\frac{333}{500}$	$-\frac{7857}{10000}$	$\frac{957}{1000}$	$\frac{193}{2000}$	$-\frac{1}{50}$
E^T	$-\frac{11}{1250}$	0	$\frac{33}{500}$	$-\frac{891}{5000}$	$\frac{33}{250}$	$\frac{9}{1000}$	$-\frac{1}{50}$

2.13 taula. 7-ataleko kateatutako Runge-Kutta metodo bat ([1] 112 orrialdea).

egonkortasun-eremua irudikatzeko honako hau egiten da:

$$R(\hat{h}) = 1 + \hat{h} + \frac{\hat{h}^2}{2!} + \frac{\hat{h}^3}{3!} + \frac{\hat{h}^4}{4!} + \frac{\hat{h}^5}{5!} + \frac{\hat{h}^6}{600} = e^{i\theta}.$$

Eta θ aldagaiak $[0, 2\pi]$ tarteko balioak hartzea ahalbidetu behar da.

Egonkortasun-funtziotik \hat{h} ebaztea posible ez den kasuetan, \hat{h} puntuen leku geometrikoa ez da ordenatua geratzen. Horrelakoetan, egonkortasun-eremua irudikatzeko \hat{h} erroak ordenatzen dira. Behin erro horiek ordenatu ostean, 2.7 irudiko DOPRI(5,4) metodoaren egonkortasun-eremua lortzen da.

2.7 Pauso anitzeko metodo linealak

Hasierako balioko lehen ordenako EDA emanik (2.8), horren soluzioa aurkitu nahi da $a \leq t \leq b$ tartean, a eta b finituak izanik. Demagun f funtzioak Lipschitzen baldintzak betetzen dituela. Hortaz, problemak soluzio bakarra izango du. Izan bedi $y(t)$ problemaren soluzioa. Izan bitez honako aldiune hauek: t_n non $t_n = a + nh$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Izan bedi y_n y -ren hurbilpena t_n aldiunean, eta izan bedi $f_n \equiv f(t_n, y_n)$.

Zenbakizko metodoa pauso anitzeko (edo k pausoko) metodo lineala da y_{n+j} eta f_{n+j} balioen arteko erlazio lineal bat bada, $j = 0, 1, \dots, k$ izanik, y_n balioak kalkulatzeko ahalbidetzen duena. Pauso anitzeko metodo lineala honako adierazpen honen bidez emana dator:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j}, \quad (2.62)$$

non α_j, β_j konstanteak baitira, $\alpha_k \neq 0$ eta α_0 eta β_0 batera nuluak ez izanik. Pauso anitzeko (2.62) metodoa esplizitua da $\beta_k = 0$ betetzen denean. Aldiz, implizitua da $\beta_k \neq 0$ betetzen bada. Metodoa pauso bakarrekota da $k = 1$ bada.

Pauso anitzeko metodorik ezagunenak Adamsen metodoak eta BDF-ak (ingelesezko *Backward Differentiation Formulae*, BDF) metodoak dira. Aipatutako bi metodoak pauso anitzeko zenbakizko metodo linealak dira, eta beren adierazpen matematikoa (2.62) da:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j}.$$

Adams Bashforthen metodoak lortzen dira (2.62) adierazpenean honako berdintza hauek aplikatzen baditugu: $\alpha_k = 1$, $\alpha_{k-1} = -1$, $\alpha_j = 0$, $j = 0, 1, \dots, k-2$ izanik, eta $\beta_k = 0$, $\beta_j = \tilde{\beta}_{k-j}$, $j = 0, 1, \dots, k-1$ izanik. Adams Bashforthen metodoak esplizituak dira, eta honako adierazpen hau daukate:

$$y_{n+k} = y_{n+k-1} + h \sum_{j=1}^k \tilde{\beta}_j f_{n+k-j}.$$

Aldiz, Adams Moultonen metodoak lortzen dira (2.62) adierazpenean honako berdintza hauek aplikatzen baditugu: $\alpha_k = 1$, $\alpha_{k-1} = -1$, $\alpha_j = 0$, non $j = 0, 1, \dots, k-2$, eta $\beta_j = \beta_{k-j}^*$ $j = 0, 1, \dots, k$ balioentzat. Adams Moultonen metodoak implizituak dira:

$$y_{n+k} = y_{n+k-1} + h \sum_{j=1}^{k+1} \beta_j^* f_{n+k+1-j}.$$

$\tilde{\beta}_j$ eta β_j^* koefizienteak Adams Bashforthen eta Adams Moultonen metodoetako koefizienteak izanik, hurrenez hurren. Adamsen metodoak Eulerren metodo esplizituaren eta implizituaren lehenengo orokorpena izan ziren. Metodo horiek Adamsi eta Bashforthi zor zaizkio [11]. Metodo biek Eulerren metodoek baino informazio gehiago darabilte. Proiektilen ibilbidea kalkulatzeko erabili ziren [12].

BDF-ak Gearek sortu zituen [13] eta autobalio handiko ekuazio diferentzialak (ekuazio diferentzial zurrinak) ebazteko erabili ziren, egonkortasun ezaugarri onak baitituzte. BDF-ek ere Eulerren metodoek baino informazio gehiago erabiltzen dute soluzioa kalkulatzeko. BDF metodoen adierazpena lortzen da (2.62) adierazpenean honako berdintza hauek jartzen baditugu: $\alpha_j = \hat{\alpha}_j$ non $j = 0, 1, \dots, k$, eta $\beta_k = 1$, $\beta_j = 0$, $j = 0, 1, \dots, k-1$ balioentzat:

$$\sum_{j=1}^k \hat{\alpha}_j y_{n+j} = h f_{n+k},$$

$\hat{\alpha}_j$ BDFetako konstanteak izanik. Aurrerago, 2.7.5 atalean ikusiko ditugu.

[2, 3] erreferentzietan, ondoren definitzen dugun C konstantea hartzen da *errore-konstantetzat*, eta honela definitzen da (2.13) mozketaren errore lokaleko C_{p+1} konstantearen menpe:

$$C = \frac{C_{p+1}}{\rho'(1)} = \frac{C_{p+1}}{\sigma(1)}, \quad (2.63)$$

non:

$$\begin{cases} C_0 = \sum_{i=0}^k \alpha_i, \\ C_1 = \sum_{i=0}^k i\alpha_i, \\ C_2 = \frac{1}{2!} \left(\sum_{i=0}^k i^2\alpha_i \right) - \left(\sum_{i=0}^k \beta_i \right), \\ C_q = \frac{1}{q!} \left(\sum_{i=0}^k i^q\alpha_i \right) - \frac{1}{(q-1)!} \left(\sum_{i=0}^k i^{q-1}\beta_i \right), \quad q \geq 3, \end{cases} \quad (2.64)$$

$\rho(r)$ eta $\sigma(r)$ metodoei lotutako polinomio karakteristikoak izanik:

$$\begin{cases} \rho(r) = \sum_{j=0}^k \alpha_j r^j, \\ \sigma(r) = \sum_{j=0}^k \beta_j r^j. \end{cases} \quad (2.65)$$

Pauso anitzeko zenbakizko metodo linealen (2.62) egonkortasun-azterketan, metodoa (2.15) eran idazteko prozesua beste prozesu sinpleago honek ordezkatzeko da. Behin metodoa $y' = \lambda y$ test-ekuazioari aplikatu ostean, diferentziantan emandako honako ekuazio hau lortzen da:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h\lambda \sum_{j=0}^k \beta_j y_{n+j}. \quad (2.66)$$

Eta (2.66) ekuazioa Lagrange-ren metodoa erabilia ebaz daiteke. Hau da, $y_p = r^p$ motako soluzioak aurkitu nahi dira. Hortaz, $y_p = r^p$ ordezkatzuz $p = n, n+1, \dots, n+k$ balioentzat eta r^n -rekin zatituz, metodoaren polinomio karakteristikoa lortzen da, beste prozesua erabilia lortzen den (2.18) adierazpenekoa, alegia.

$$p(r) = \sum_{j=0}^k \alpha_j r^j - \hat{h} \sum_{j=0}^k \beta_j r^j = \rho(r) - \hat{h}\sigma(r), \quad (2.67)$$

non $\hat{h} = \lambda h$.

2.7.1 Interpolazio polinomikoa. Atzerakako diferentziak

$\{(t_i, y_i) : i = 1, 2, \dots, m\}$ balioak interpolatzen dituen $P(t)$ funtzioa oinarriko zenbait funtzioen konbinazio lineal gisa idatz daiteke. Izan bedi $\{\phi_j(t) : j = 1, 2, \dots, m\}$ oinarria; orduan, $P(t)$ funtzioa honela dago emana:

$$P(t) = \sum_{j=1}^m x_j \phi_j(t), \quad (2.68)$$

zehaztu beharreko koefizienteak x_j izanik. Honako baldintza hauek bete behar dira (2.68) adierazpeneko $P(t)$ funtzioak $\{(t_i, y_i) : i = 1, 2, \dots, m\}$ datuak interpola ditzan:

$$P(t_i) = \sum_{j=1}^m x_j \phi_j(t_i) = y_i, \text{ non } i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.69)$$

(2.69) adierazpena ekuazio linealen sistema bat da:

$$Ax = y, \quad (2.70)$$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ izanik (2.68) adierazpeneko ezezagunak, eta A matrizeko koefizienteak $a_{ij} = \phi_j(t_i)$ izanik.

Hortaz, izan bitez honako $k + 1$ balioak $\{(t_{n+i}, y_{n+i}) : i = 0, 1, 2, \dots, k\}$, eta bata bestearengandik h distantziak bereizitako $t_n, t_{n+1}, \dots, t_{n+k}$ balioak. Hau da: $h = t_{n+i+1} - t_{n+i}$ non $i = 0, 1, 2, \dots, k - 1$ [14]. s aldagai bat definituko dugu $t = t_{n+k} + sh$ eta $t = t_{n+i} + (s + i)h$ izateko eran. $\{(t_{n+i}, y_{n+i}) : i = 0, 1, 2, \dots, k\}$ puntuetatik pasatzen den eta (2.68) adierazpenaz emana datorren polinomio interpolatzailea era honetan idatziko dugu:

$$P(t_{n+k} + sh) = \sum_{j=0}^k x_j \phi_j(t_{n+k} + sh). \quad (2.71)$$

Newtonen atzerakako polinomio interpolatzailearen kasuan, (2.71) adierazpeneko $\phi_j(t)$ funtzioak era honetan definitzen dira:

$$\phi_j(t) = (-1)^j \binom{-s}{j}, \quad (2.72)$$

non:

$$\binom{-s}{j} = \frac{(-s)(-s-1)\dots(-s-(k+1))}{k!}.$$

Eta polinomioko x_j koefizienteak honako hauek dira:

$$x_j = \nabla^j y_{n+k}, \quad (2.73)$$

non $\nabla^j y_{n+k} = \nabla(\nabla^{j-1} y_{n+k})$ eta $\nabla y_{n+k} = y_{n+k} - y_{n+k-1}$, eta honako berdintza betez:

$$\nabla^{j+1} y_{n+k} = \nabla^j y_{n+k} - \nabla^j y_{n+k-1}. \quad (2.74)$$

Ondorioz, Newtonen atzerakako polinomio interpolatzailea (2.71) era honetan idazten da, (2.72) eta (2.73) berdintzak kontuan hartuz:

$$P(t_{n+k} + sh) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{-s}{j} \nabla^j y_{n+k}. \quad (2.75)$$

Newtonen atzerakako polinomio interpolatzaileak (2.75) adierazpen ezberdinak ditu interpolazioan erabiltzen diren puntu kopuruaren arabera eta kokatuta gauden puntuaren arabera. Honela, kasu hauek bereiz daitezke:

- Polinomio hau $\{(t_{n+i}, y_{n+i}) : i = 0, 1, 2, \dots, k\}$ $k + 1$ puntuetatik pasatzen denean eta t_{n+k-1} puntuan kokatzen bagara, $P(t)$ polinomioak adierazpen hau dauka:

$$P(t_{n+k-1} + sh) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{-s+1}{j} \nabla^j y_{n+k}. \quad (2.76)$$

Azkenengo puntuan kokatu beharrean, azken-aurreko puntuan kokatzeak (hau da, t_{n+k-1} puntuan) koefiziente binomiala $-s + 1$ izatea eragiten du.

Hauxe da justu BDF metodoetan gertatzen dena. (2.76) polinomioa beste era honetan ere idatz daiteke [15]:

$$P(t) = y_{n+k} + \sum_{j=1}^k \nabla^j y_{n+k} \frac{1}{j! h^j} \prod_{m=0}^{j-1} (t - t_{n+m}). \quad (2.77)$$

BDF metodoen kasuan, posible da mozketa-errore lokala atzerakako diferentzien menpe idaztea. Horrela, BDFen mozketa-errore lokala (2.13) era honetan emana dator:

$$LTE = Ch^{k+1} y^{k+1}(t_n) + O(h^{k+2}).$$

Aurreko adierazpeneko $y^{k+1}(t_n)$ balioa hurbiltzeko, Newtonen atzerakako polinomio interpolatzailea erabiltzen da (2.75). Polinomio interpolatzaile hori honako $k+2$ puntu hauetatik pasatzen da: $\{(t_{n+i}, y_{n+i}) : i = -1, 0, 1, 2, \dots, k\}$ [6]. Polinomio horren $k+1$. deribatua $k+1$ ordenako atzerakako diferentziak emana dago. Hau da:

$$Q^{(k+1)}(t_{n+k} + sh) = \nabla^{k+1} y_{n+k} \cdot \frac{1}{h^{k+1}}. \quad (2.78)$$

Adibidez, $k = 2$ denean, honela izango litzateke:

y_{n-1} , y_n , y_{n+1} eta y_{n+2} puntuetatik igarotzen den polinomioa hauxe da:

$$Q(t_{n+2} + sh) = \sum_{j=0}^3 (-1)^j \binom{-s}{j} \nabla^j y_{n+2}, \quad (2.79)$$

koefiziente binomialen balioak honako hauek izanik:

$$\begin{cases} \binom{-s}{0} = 1, \\ \binom{-s}{1} = -s, \\ \binom{-s}{2} = \frac{(-s)(-s-1)}{2!}, \\ \binom{-s}{3} = \frac{(-s)(-s-1)(-s-2)}{3!}. \end{cases} \quad (2.80)$$

(2.80) adierazpena (2.79) adierazpenean ordezkatzuz, honako hau lortzen da:

$$\begin{aligned} Q(t_{n+2} + sh) &= y_{n+2} + s \nabla y_{n+2} + \frac{(-s)(-s-1)}{2!} \nabla^2 y_{n+2} \\ &+ \frac{(-s)(-s-1)(-s-2)}{3!} \nabla^3 y_{n+2}. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Ondoren, (2.81) funtzioaren lehenengo hiru deribatuak kalkulatuko ditugu:

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt}(t_{n+2} + sh) = \frac{dQ}{ds} \frac{ds}{dt}, \\ \frac{d^2Q}{dt^2}(t_{n+2} + sh) = \frac{d^2Q}{ds^2} \frac{ds^2}{dt^2}, \\ \frac{d^3Q}{dt^3}(t_{n+2} + sh) = \frac{d^3Q}{ds^3} \frac{ds^3}{dt^3}. \end{cases} \quad (2.82)$$

Beste alde batetik, honako erlazio hau ere izan behar da kontuan:

$$t = t_{n+2} + sh \Rightarrow dt = h \cdot ds \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{1}{h}. \quad (2.83)$$

(2.82) adierazpeneko notazioa era honetan sinplifikatu dugu:

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} = Q', \\ \frac{d^2Q}{dt^2} = Q'', \\ \frac{d^3Q}{dt^3} = Q'''. \end{cases} \quad (2.84)$$

(2.82) adierazpenak garatuz, (2.83) kontuan hartuz eta (2.84) notazio sinplifikatua erabiliz, zera daukagu:

$$\begin{cases} Q'(t_{n+2} + sh) = \left(\nabla y_{n+2} + \frac{2s+1}{2} \nabla^2 \frac{1}{h} y_{n+2} + \frac{3s^2+4s}{6} \nabla^3 y_{n+2} \right) \cdot \frac{1}{h}, \\ Q''(t_{n+2} + sh) = \left(\nabla^2 y_{n+2} + \frac{6s}{6} \nabla^3 y_{n+2} \right) \cdot \frac{1}{h^2}, \\ Q'''(t_{n+2} + sh) = \nabla^3 y_{n+2} \cdot \frac{1}{h^3}. \end{cases} \quad (2.85)$$

Hurbilpenak erabilita, honako berdintza hauek lortzen dira:

$$\begin{cases} Q'(t_{n+2} + sh) \approx \nabla y_{n+2} \cdot \frac{1}{h}, \\ Q''(t_{n+2} + sh) \approx \nabla^2 y_{n+2} \cdot \frac{1}{h^2}, \\ Q'''(t_{n+2} + sh) \approx \nabla^3 y_{n+2} \cdot \frac{1}{h^3}. \end{cases} \quad (2.86)$$

Era honetan, frogatuta geratzen da (2.78) berdintza.

- Polinomioa $\{f_{n+i} = f(t_{n+i}, y_{n+i}) : i = 0, 1, 2, \dots, k\}$ $k+1$ puntuetatik pasatzea nahi dugunean, eta t_{n+k-1} puntuan kokatzen bagara, orduan $P(t)$ era honetan emana dago:

$$P(t_{n+k-1} + sh) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{-s+1}{j} \nabla^j f_{n+k}. \quad (2.87)$$

Hauxe da Adams Moulton metodoen kasua, hain zuzen.

- Polinomioa $\{f_{n+i} = f(t_{n+i}, y_{n+i}) : i = 0, 1, 2, \dots, k-1\}$ k puntuetatik pasatzea nahi bada, eta t_{n+k-1} puntuan kokatzen bagara, orduan $P(t)$ era honetan emana dago:

$$P(t_{n+k-1} + sh) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{-s}{j} \nabla^j f_{n+k-1}. \quad (2.88)$$

Eta azken hori Adams Bashforthen metodoei dagokie.

2.7.2 Adams Bashforthen metodoak

Izan bitez $y(t_n), y(t_{n+1}), \dots, y(t_{n+k-1})$ honako ekuazio diferentzial honen soluzio zehatzak:

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \quad (2.89)$$

Demagun beraien hurbilpenak $y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k-1}$ ezagutzen direla.

Adamsek (2.89) adierazpena era honetan hartu zuen kontuan [2]:

$$y(t_{n+k}) = y(t_{n+k-1}) + \int_{t_{n+k-1}}^{t_{n+k}} f(t, y(t)) dt. \quad (2.90)$$

$y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k-1}$ balio hurbilduak ezagutzen ditugunez, posible da honako balio hauek kalkulatzeko:

$$f_{n+j} = f(t_{n+j}, y_{n+j}) \quad \text{non } j = 0, 1, \dots, k-1. \quad (2.91)$$

(2.90) adierazpeneko $f(t, y(t))$ funtzioa polinomio batez ordezkatzeko dugu. Izan bedi $P(t) = \{f_{n+j}(t) : j = 0, 1, \dots, k-1\}$ puntuetatik igarotzen den polinomioa. 2.7.1 atalean ikusi da $P(t)$ polinomioa (2.88) adierazpenak emana dagoela:

$$y_{n+k} = y_{n+k-1} + \int_{t_{n+k-1}}^{t_{n+k}} P(t) dt. \quad (2.92)$$

(2.92) adierazpena integratuz lortzen da Adams Bashforthen metodoa:

$$y_{n+k} = y_{n+k-1} + h \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j \nabla^j f_{n+k-1}, \quad (2.93)$$

non:

$$\gamma_j = (-1)^j \int_0^1 \binom{-s}{j} ds. \quad (2.94)$$

2.14 taulan jaso dira Adams Bashforthen metodoko koefizienteak [2].

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8
γ_j	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{251}{720}$	$\frac{95}{288}$	$\frac{19087}{60480}$	$\frac{5257}{17280}$	$\frac{1070017}{3628800}$

2.14 taula. Adams Bashforth metodoko koefizienteak [2].

(2.93) adierazpeneko atzerakako diferentziak garatuz, Adams Bashforthen metodoaren honako adierazpen baliokide hau lortzen da:

$$y_{n+k} = y_{n+k-1} + h \sum_{j=1}^k \tilde{\beta}_j f_{n+k-j}, \quad (2.95)$$

non:

$$\tilde{\beta}_j = (-1)^{j-1} \sum_{i=j-1}^{k-1} \gamma_i \binom{i}{j-1}. \quad (2.96)$$

k	$\tilde{\beta}_1$	$\tilde{\beta}_2$	$\tilde{\beta}_3$	$\tilde{\beta}_4$	$\tilde{\beta}_5$	$\tilde{\beta}_6$	$\tilde{\beta}_7$	$\tilde{\beta}_8$	C
1	1								$-\frac{1}{2}$
2	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$							$\frac{5}{12}$
3	$\frac{23}{12}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{5}{12}$						$-\frac{3}{8}$
4	$\frac{55}{24}$	$-\frac{59}{24}$	$\frac{37}{24}$	$-\frac{3}{8}$					$\frac{251}{720}$
5	$\frac{1901}{720}$	$-\frac{1387}{360}$	$\frac{109}{30}$	$-\frac{637}{360}$	$\frac{251}{720}$				$-\frac{95}{288}$
6	$\frac{4277}{1440}$	$-\frac{2641}{480}$	$\frac{4991}{720}$	$-\frac{3649}{720}$	$\frac{959}{480}$	$-\frac{95}{288}$			$\frac{19087}{60480}$
7	$\frac{19872}{60480}$	$-\frac{18637}{2520}$	$\frac{235183}{20160}$	$-\frac{10754}{945}$	$\frac{135173}{20160}$	$-\frac{5603}{2520}$	$\frac{19087}{60480}$		$-\frac{5257}{17280}$
8	$\frac{16083}{4480}$	$-\frac{1152169}{120960}$	$\frac{2424653}{13440}$	$-\frac{296053}{13440}$	$\frac{2102243}{120960}$	$-\frac{115747}{13440}$	$\frac{32863}{13440}$	$-\frac{5257}{17280}$	$\frac{1070017}{3628800}$

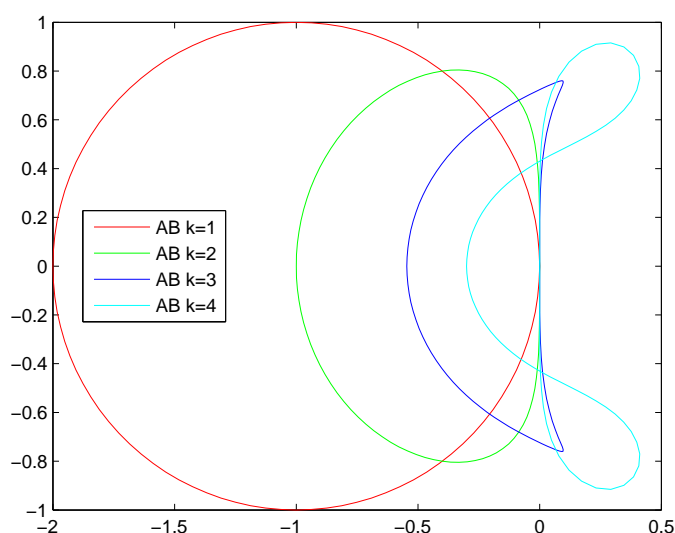
2.15 taula. Adams Bashforthen metodoko koefizienteak eta errore-konstanteak.

Behin γ_j koefizienteen balioak kalkulaturik, posible da $\tilde{\beta}_j$ koefizienteak kalkulatzeko (2.96) adierazpena erabili. 2.15 taulan ikus daitezke koefiziente horien balioak.

Adams Bashforthen metodoko mozketaren errore lokala honako hau da:

$$LTE_k = (-1)^k \gamma_k h^{k+1} y^{k+1}(t_n) + O(h^{k+2}). \quad (2.97)$$

2.9 irudian adierazi dira Adams Bashforthen metodoko egonkortasun-eremuak. $k = 1$ balioari dagokion Adams Bashforthen metodoa Eulerren metodoa da. Ondorioz, Eulerren metodoko egonkortasun-eremua ikus daiteke, $(0, 1)$ zentroan eta 1 erradiodun zirkunferentzia. Zehaztasun-ordena handitu ahala egonkortasun-eremua txikitu egiten dela ikus daiteke. Metodo hauek ez dira egokiak ekuazio diferentzial zurrinak ebazteko.



2.9 irudia. Adams Bashforthen egonkortasun-eremua.

2.7.3 Adams Moultonen metodoak

Adams Bashforthen metodoa lortzeko erabiltzen den polinomioa (t_{n+k}, f_{n+k}) puntutik pasarazten denean, (2.87) polinomioa daukagu, 2.7.1 atalean ikusi dugun moduan [2].

Polinomio hori (2.90) adierazpenean ordezkatzuz eta integratuz, honako metodo implizitu hau lortzen da:

$$y_{n+k} = y_{n+k-1} + h \sum_{j=0}^k \gamma_j^* \nabla^j f_{n+k}, \quad (2.98)$$

non:

$$\gamma_j^* = (-1)^j \int_0^1 \binom{-s+1}{j} ds. \quad (2.99)$$

2.16 taulan jaso dira Adams Moultonen metodoko koefizienteak [2].

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8
γ_j^*	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{24}$	$-\frac{19}{720}$	$-\frac{3}{160}$	$-\frac{863}{60480}$	$-\frac{275}{24192}$	$-\frac{33953}{3628800}$

2.16 taula. Adams Moultonen metodoko koefizienteak.

(2.98) adierazpeneko atzerakako diferentziak garatzen baditugu, Adams Moultonen metodoko honako adierazpen hau lortzen da:

$$y_{n+k} = y_{n+k-1} + h \sum_{j=1}^{k+1} \beta_j^* f_{n+k+1-j}, \quad (2.100)$$

non:

$$\beta_j^* = (-1)^j \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_i^* \binom{j}{i}. \quad (2.101)$$

Behin γ_j^* koefizienteen balioak kalkulaturik, posible da β_j^* koefizienteak kalkulatzeko (2.101) adierazpena erabilita. 2.17 taulan ikus daitezke koefiziente horien balioak.

$k = 1$ balioari dagokion Adams Moultonen metodoa atzerakako Eulerren metodoa da, eta $k = 2$ balioari dagokiona metodo trapezoidala.

Adams Moultonen metodoko mozketaren errorea honako hau da:

$$LTE_k = (-1)^{k+1} \gamma_k^* h^{k+1} y^{(k+1)}(t_n) + O(h^{k+2}). \quad (2.102)$$

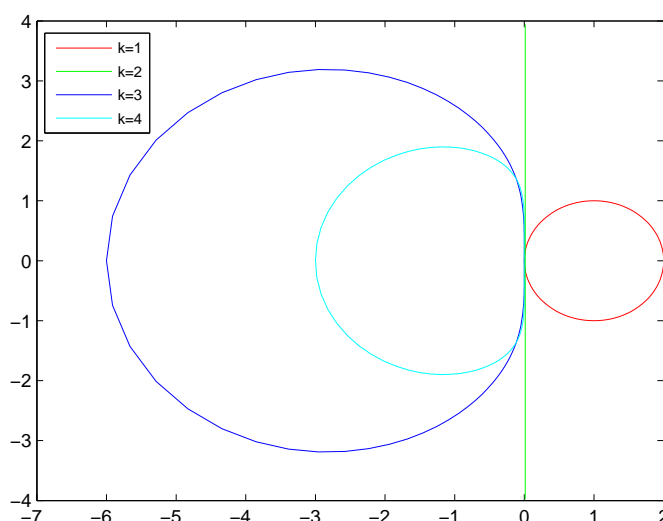
Adams Moultonen metodoko egonkortasun-eremuak Adams Bashfortheoak baino handiagoak izan arren, ez dute plano konplexuaren zati negatibo osoa beren baitan hartzen; ikus 2.10 eta 2.11 irudiak. Ondorioz, ez dira A-egonkorak.

2.7.4 Adamsen aurreikuste-zuzentze eskemak

Metodo batzuetan aurreikuste- eta zuzentze prozesuak erabiltzen dira. Ohikoa da aurreikuste-prozesua metodo esplizitu bat erabiliz egitea, eta, aldiz, metodo

k	β_1^*	β_2^*	β_3^*	β_4^*	β_5^*	β_6^*	β_7^*	β_8^*	C
1	1								$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$							$-\frac{1}{12}$
3	$\frac{5}{12}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{12}$						$\frac{1}{24}$
4	$\frac{3}{8}$	$\frac{19}{24}$	$-\frac{5}{24}$	$\frac{1}{24}$					$-\frac{19}{720}$
5	$\frac{251}{720}$	$\frac{323}{360}$	$-\frac{11}{30}$	$\frac{53}{360}$	$-\frac{19}{720}$				$\frac{3}{360}$
6	$\frac{95}{288}$	$\frac{1427}{1440}$	$-\frac{133}{240}$	$\frac{241}{720}$	$-\frac{173}{1440}$	$\frac{3}{160}$			$-\frac{863}{60480}$
7	$\frac{19087}{60480}$	$\frac{2713}{2520}$	$-\frac{15487}{20160}$	$\frac{586}{945}$	$-\frac{6737}{20160}$	$\frac{263}{2520}$	$-\frac{863}{60480}$		$\frac{275}{24192}$
8	$\frac{5257}{17280}$	$\frac{139849}{120960}$	$-\frac{4511}{4480}$	$\frac{123133}{120960}$	$-\frac{88547}{120960}$	$\frac{1537}{4480}$	$-\frac{11351}{120960}$	$\frac{275}{24192}$	$-\frac{33953}{3628800}$

2.17 taula. Adams Moultonen metodoko koefizienteak eta errore-konstanteak.



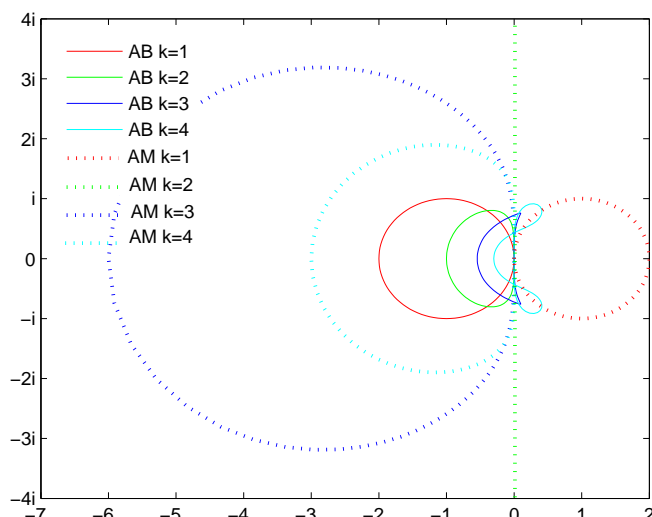
2.10 irudia. Adams Moultonen egonkortasun-eremuak.

inplizitua erabiltzea lortutako emaitza zuzentzeko. Zuzenketa behin baino gehiagotan egin daiteke, gelditze-irizpide bat erabilita.

Adamsen metodoak aurreikuste-zuzentze eran implementa daitezke. Hau da, Adams Bashforth metodoa erabilita aurreikusten da, eta, ondoren, Adams Moultonen metodoa erabilita zuzentzen da lortu den balioa. Ohikoa da aurreikusitako balioari bizpahiru zuzenketa egitea. Aurreikusteko erabili den metodoak eta zuzentzekoak ez dute zertan zehaztasun-ordena berekoak izan. Normalean, aurreikusteko erabili den metodoaren zehaztasun-ordena zuzentzeko erabili denarena baino bat handiagoa izaten da.

1. **Aurreikusi, ebaluatu, zuzendu, ebaluatu eskema (ingelesezko PECE eskema, *Predict Evaluate Correct Evaluate*):**

Eskema honetako pausoak hauek dira:



2.11 irudia. Adams Bashforthen eta Moultonen egonkortasun-eremuak.

- Adams Bashforthen metodoa erabilia aurreikusten da:

$$\tilde{y}_{n+k} = y_{n+k-1} + h \sum_{j=1}^k \bar{\beta}_j f(t_{n+k-j}, y_{n+k-j}). \quad (2.103)$$

- Deribatuaren balioa ebaluatu \tilde{y}_{n+k} puntuan, hau da: $f(t_{n+k}, \tilde{y}_{n+k})$.

- Adams Moultonen metodoa erabilia zuzendu:

$$y_{n+k} = y_{n+k-1} + h\beta_1^* f(t_{n+k}, \tilde{y}_{n+k}) + h \sum_{j=2}^{k+1} \beta_j^* f(t_{n+k+1-j}, y_{n+k+1-j}). \quad (2.104)$$

- Deribatuaren balioa ebaluatu y_{n+k} puntuan: $f(t_{n+k}, y_{n+k})$.

Egonkortasun-analisia egiteko metodoa aplikatzen zaio test-ekuazioari $y' = \lambda y$. Horrela, $y_j = r^j$ eginez eta r^n terminoaz zatituz, \hat{h} aldagaian koadratikoa den ekuazioa lortzen da:

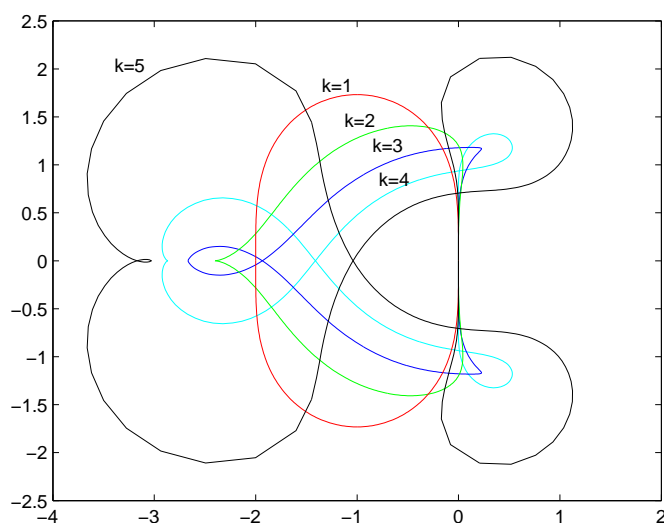
$$A\hat{h}^2 + B\hat{h} + C = 0, \quad (2.105)$$

non:

$$\begin{cases} A = \left(\sum_{j=0}^k \gamma_j^* \right) \left(\sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j \left(1 - \frac{1}{r}\right)^j \right), \\ B = (1-r) \sum_{j=0}^k \gamma_j^* + r \sum_{j=0}^k \gamma_j^* \left(1 - \frac{1}{r}\right)^j, \\ C = 1 - r. \end{cases} \quad (2.106)$$

$r = e^{i\theta}$ bakoitzarentzat (2.105) ekuazioak bi erro ditu. Horrek egonkortasun-eremua zehazten duen kurba definitzen du.

2.12 irudian ikus daitezke eskema honi dagozkion egonkortasun-eremuak. Bai metodo aurreikuslea (Adams Bashforth metodoa) baita zuzentzailea ere (Adams Moulton metodoa) k ordenakoak hartu dira.



2.12 irudia. Aurreikusi, ebaluatu, zuzendu, ebaluatu eskemako egonkortasun-eremuak.

2. **Aurreikusi, ebaluatu, zuzendu eskema (ingelesezko PEC eskema, *Predict Evaluate Correct*):**

Eskema honetako pausoak hauek dira [1]:

- Adams Bashforthen metodoa erabilita aurreikusten da:

$$\tilde{y}_{n+k} = y_{n+k-1} + h \sum_{j=1}^k \bar{\beta}_j f(t_{n+k-j}, y_{n+k-j}). \quad (2.107)$$

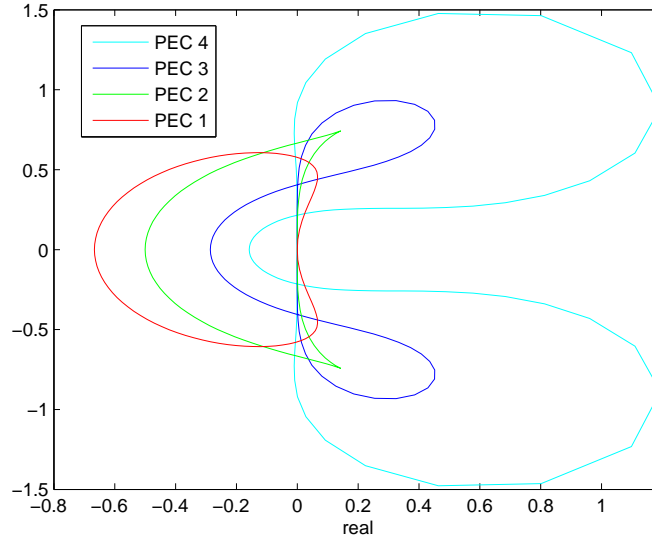
- Deribatuaren balioa ebaluatu \tilde{y}_{n+k} puntuan, hau da: $f(t_{n+k}, \tilde{y}_{n+k})$.

- Adams Moultonen metodoa erabilita zuzentzen da:

$$y_{n+k} = y_{n+k-1} + h\beta_1^* f(t_{n+k}, \tilde{y}_{n+k}) + h \sum_{j=2}^{k+1} \beta_j^* f(t_{n+k+1-j}, y_{n+k+1-j}). \quad (2.108)$$

2.13 irudian eskema honi dagozkion egonkortasun-eremuak ikus daitezke. Metodo aurreikuslearen zehaztasun-ordena (Adams Bashforth metodoarena) zuzentzailearena baino (Adams Moulton metodoa) bat handiagoa hartu da. Hau da: $k^* = k + 1$.

Aurreikusi, ebaluatu, zuzendu, ebaluatu eskeman aurreikuste-metodoa erabiliz lortu diren puntuetako deribatuak erabiltzen dira. Aldiz, aurreikusi, ebaluatu, zuzendu eskeman, zuzentzailea erabilita lortu diren puntuetako deribatuak erabiltzen dira.



2.13 irudia. Aurreikusi, ebaluatu, zuzendu eskemako egonkortasun-eremuak, $k^* = k + 1$.

3. Aurreko bi eskemaz gain, posible da beste eskema hauek ere izatea: aurreikusi, ebaluatu, zuzendu, ebaluatu, zuzendu eskema (ingelesez PECEC); aurreikusi, ebaluatu, zuzendu, ebaluatu, zuzendu, ebaluatu eskema (ingelesez, PECECE), etab. Orokorrean, posible da $P(EC)^k$ eta $P(EC)^k E$ motako eskemak erabiltzea. Terminologia bera erabiltuta, $P(EC)^\infty$ eskemak esan nahi du konbergentzia lortu arte prozesua errepikatu egiten dela [4].

2.7.5 BDF metodoak

BDFak pauso anitzeko metodo linealak dira, eta deribatu bakarra erabiltzen dute balio berria kalkulatzeko. Gainontzeko balioak y aldagaiaren balioak dira. Ohartu Adamsen metodoetan justu kontrakoa gertatzen dela, hau da, y aldagaiaren balio bakarra erabiltzen da balio berria kalkulatzeko. BDF metodoko formula lortzeko $y' = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$ problemako ezezaguna den y aldagaiaren y_n, \dots, y_{n+k-1} hurbilpenak ezagutzen dira. Helburua da y_{n+k} balioa kalkulatzea. Horretarako, $\{(t_{n+j}, y_{n+j}) : j = 0, \dots, k\}$ balioen polinomio interpolatzailea hartzen da, $P(t)$. Polinomio hori atzerakako diferentzien bidez adieraz daiteke, eta (2.76) edo (2.77) adierazpenen bidez emana dator; ikus 2.7.1 atala.

y_{n+k} ezezaguna kalkulatzeko da $P(t)$ polinomioak sareko azken puntuan ekuazio diferentziala betetzeko eran, hau da, t_{n+k} puntuan hau betetzeko eran:

$$P'(t_{n+k}) = f(t_{n+k}, y_{n+k}). \quad (2.109)$$

Horrela, BDF metodoen adierazpena lortzen da:

$$\sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \nabla^j y_{n+k} = h f_{n+k} \Rightarrow \sum_{j=1}^k \hat{\alpha}_j y_{n+j} = h f_{n+k}. \quad (2.110)$$

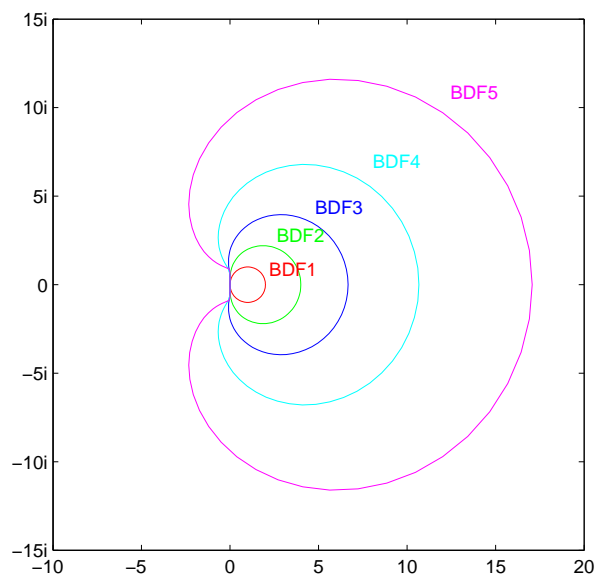
k	$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	C
1	-1	1							$-\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{2}$	-2	$\frac{3}{2}$						$-\frac{1}{3}$
3	$-\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	-3	$\frac{11}{6}$					$-\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{4}$	$-\frac{4}{3}$	3	-4	$\frac{25}{12}$				$-\frac{1}{5}$
5	$-\frac{1}{5}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{10}{3}$	5	-5	$\frac{137}{60}$			$-\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{6}$	$-\frac{72}{60}$	$\frac{225}{60}$	$-\frac{400}{60}$	$\frac{450}{60}$	-6	$\frac{147}{60}$		$-\frac{1}{7}$
7	$-\frac{1}{7}$	$\frac{7}{6}$	$-\frac{21}{5}$	$\frac{35}{4}$	$-\frac{35}{3}$	$\frac{21}{2}$	-7	$\frac{1089}{420}$	$-\frac{1}{8}$

2.18 taula. BDF metodoen koefizienteak eta errore-konstanteak.

BDF metodoen koefizienteak eta egonkortasun-ezaugarriak 2.18 eta 2.19 tauletan jaso dira, eta 2.14 irudian marraztu dira egonkortasun-eremuak. BDF metodoek Adamsen metodoek baino egonkortasun-ezaugarri hobek dituztela ikus daiteke.

k	1	2	3	4	5	6
α	90°	90°	$86,03^\circ$	$73,35^\circ$	$51,84^\circ$	$17,84^\circ$

2.19 taula. BDF metodoen $A(\alpha)$ -egonkortasuna.



2.14 irudia. BDF metodoen egonkortasun-eremuak.

k ordenako BDF metodoen mozketaren errore lokala honako hau da:

$$LTE_k = C_{k+1} h^{k+1} y^{(k+1)}(t_n) + O(h^{k+2}), \quad (2.111)$$

C_{k+1} izanik k ordenako BDF metodoaren C errore konstantearen zenbakitzailea (2.63), non:

$$C = \frac{C_{k+1}}{\rho'(1)} = \frac{-1}{k+1}, \quad (2.112)$$

eta $C_{k+1} = \frac{-1}{\gamma_k(k+1)}$ izanik, $\rho'(1) = \frac{1}{\gamma_k}$ eta γ_k honako adierazpen hauek emana:

$$\gamma_k = \hat{\alpha}_k = \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} = \begin{cases} 1, & k=1, \\ 3/2, & k=2, \\ 11/6, & k=3, \\ 25/12, & k=4, \\ 137/60, & k=5. \end{cases} \quad (2.113)$$

BDF metodoen mozketa-errore lokalaren kalkuluaren adibidea:

Eulerren metodo esplizituaren eta metodo trapezoidalaren (metodo implizitua) mozketa-errore lokalak nola kalkula daitezkeen [4] erreferentzian kontsulta daiteke. Hemen, BDF2 metodoaren mozketa-errore lokala kalkulatu dugu. BDF2 metodoak honako adierazpen hau dauka:

$$y_{n+k} = \frac{4}{3}y_{n+k-1} - \frac{1}{3}y_{n+k-2} + \frac{2}{3}hf_{n+k}. \quad (2.114)$$

$k=2$ kasuan gaudenez eta $f=y'$ denez, (2.114) adierazpena era honetan idatziko dugu:

$$y_{n+2} = \frac{4}{3}y_{n+1} - \frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}hy'_{n+2}. \quad (2.115)$$

BDF2 metodoak (2.62) forma matematikoari erantzuten dio, $\alpha_0 = \frac{1}{3}$, $\alpha_1 = -\frac{4}{3}$, $\alpha_2 = 1$ eta $\beta_2 = \frac{2}{3}$ izanik. Beraz, BDF2 metodoko polinomio karakteristikoak honako hauek dira:

$$\begin{cases} \rho(r) = \sum_{j=0}^k \alpha_j r^j = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}r + r^2, \\ \sigma(r) = \sum_{j=0}^k \beta_j r^j = \frac{2}{3}r^2. \end{cases} \quad (2.116)$$

Mozketa-errore lokalaren definizioa erabilita (2.9), zera daukagu:

$$LTE = y(t_{n+2}) - y_{n+2}^*, \quad (2.117)$$

non:

$$y_{n+2}^* = \frac{4}{3}y(t_{n+1}) - \frac{1}{3}y(t_n) + \frac{2}{3}hy'_{n+2}. \quad (2.118)$$

(2.118) adierazpenean $y'(t_{n+2})$ balio zehatza erabiliko dugu, y'_{n+2} balio hurbildua erabili beharrean. Arrazoi hori dela eta, mozketa-errore lokalaren zenbakitzailea den C_3 zenbakia lortzen da.

t_n puntuan zentratutako Taylorren honako garapen hauek erabiliko ditugu:

$$\begin{cases} y(t_{n+1}) = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{1}{2!}h^2y''(t_n) + \frac{1}{3!}h^3y'''(t_n) + \dots \\ y(t_{n+2}) = y(t_n) + 2hy'(t_n) + 2h^2y''(t_n) + \frac{4}{3}h^3y'''(t_n) + \dots \\ y'(t_{n+2}) = y'(t_n) + 2hy''(t_n) + 2h^2y'''(t_n) + \dots \end{cases} \quad (2.119)$$

(2.119) adierazpeneko Taylorren garapenak (2.117) adierazpenean ordezkaturaz, honako hau lortzen da:

$$\begin{aligned} LTE = & \left(y(t_n) + 2hy'(t_n) + 2h^2y''(t_n) + \frac{4}{3}h^3y'''(t_n)\dots \right) \\ & - \frac{4}{3} \left(y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{1}{2!}h^2y''(t_n) + \frac{1}{3!}h^3y'''(t_n) + \dots \right) + \frac{1}{3}y(t_n) \\ & - \frac{2}{3}h \left(y'(t_n) + 2hy''(t_n) + 2h^2y'''(t_n) + \dots \right). \end{aligned} \quad (2.120)$$

(2.120) adierazpenean terminoak berrordenatuz:

$$\begin{aligned} LTE = & y(t_n) \left(1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \right) + hy'(t_n) \left(2 - \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \right) \\ & + h^2y''(t_n) \left(2 - \frac{2}{3} - \frac{4}{3} \right) + h^3y'''(t_n) \left(\frac{4}{3} - \frac{4}{18} - \frac{4}{3} \right) + O(h^4). \end{aligned} \quad (2.121)$$

Horrela, BDF2 metodoaren mozketaren errorea lokalak lortzen da:

$$LTE = -\frac{2}{9}h^3y'''(t_n) + O(h^4). \quad (2.122)$$

(2.122) formula lortzen da BDF2 metodoko α_i , β_i koefizienteak (2.64) adierazpenean ordezkaturaz. Ondorioz, $C_0 = C_1 = C_2 = 0$, $C_3 = -2/9$ balioak lortzen dira. Era horretan, frogatuta geratzen da BDF2 metodoaren zehaztasun-ordena 2 dela. Metodoko errore-konstantea (2.63) kalkulatzeko, $\rho(1)$ edo $\sigma'(1)$ kalkulatu beharra dago. Bata zein bestea kalkulatu nahikoa da, biak baitira berdinak:

$$\begin{cases} \rho'(r) = -\frac{4}{3} + 2r \Rightarrow \sigma'(1) = \frac{2}{3}, \\ \sigma(1) = \frac{2}{3}. \end{cases} \quad (2.123)$$

Azkenik, BDF2 metodoko errore-konstantea lortzen da:

$$C = \frac{C_3}{\sigma(1)} = \frac{-2/9}{2/3} = \frac{-1}{3}. \quad (2.124)$$

2.7.6 NDF metodoak

BDF metodoei egindako aldaketa bat NDF metodoak dira (ingelesez, *Numerical Differentiation Formulae*) [15]. Konputazio-kostu txikiko aldaketak dira. NDF metodoan $(k + 1)$ atzerakako diferentzia gehitzen da k ordenan. k ordenako NDF metodoak adierazpen hau dauka:

$$\sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \nabla^j y_{n+k} = hf_{n+k} + \kappa \gamma_k \nabla^{k+1} y_{n+k}, \quad (2.125)$$

γ_k konstantea (2.113) adierazpenekoa izanik. κ koefizientea $A(\alpha)$ -egonkortasuneko angelua maximizatzeke erant proposatu zen [15]. Era horretan, gainera, posible

zen mozketaren errore lokala txikitzea. NDF metodoek BDFek baino egonkortasun-ezaugarri txarragoak izan arren, BDFek baino errore-konstante txikiagoa daukate:

$$C = \left(-\frac{1}{k+1} - \kappa\gamma_k \right). \quad (2.126)$$

$(k+1)$ ordenako atzerakako diferentzia $k = 1, 2, 3, 4$ ordenatan gehitzea proposatu zen [15], $k = 5$ ordenatik aurrera ez baita eraginkortasun askorik hobetzen. 2.20 taulan jaso dira NDF metodoen ezaugarriak.

k	NDF metodoen κ koefizientea	Pauso tamainaren %	BDF metodoen $A(\alpha)$ -egonkortasuna	NDF metodoen $A(\alpha)$ -egonkortasuna
1	-0,1850	%26	90°	90°
2	-1/9	%26	90°	90°
3	-0,0823	%26	86°	80°
4	-0,0415	%12	73°	66°

2.20 taula. NDF metodoen eraginkortasuna eta egonkortasuna BDF metodoekin.

2.7.7 Hobetutako pauso anitzeko metodo linealak

Azken urteetan lan asko egin izan da ordena altuko eta egonkortasun-ezaugarri oneko zenbakizko metodoen sorreran. Hemen, pauso anitzeko metodo linealetan egindako aurrerapenei begiratuko diegu. Pauso anitzeko metodo lineal hobek lortzeko, bi norabide jarraitu dira bereziki [7]:

- Ordena altuagoko deribatuak erabili dira zenbakizko metodoaren formularen.
- Super-etorkizuneko puntuak erabili dira.
- Pauso anitzeko bi metodo linealen konbinazioak egin dira.

Bigarren deribatua darabilten pauso anitzeko metodoak

$y' = f(t, y)$ EDAREN t aldagaiarekiko deribatua honako hau da:

$$y'' = f_t + f_y y' = f_t + f_y f = g(t, y). \quad (2.127)$$

Taylorren 2. ordenako serie-garapena erabiliz, era honetan kalkulatu litzateke y_{n+1} :

$$y_{n+1} = y_n + h f_n + \frac{h^2}{2} g_n, \quad (2.128)$$

$f_n = f(t_n, y_n)$, $g(t, y) = y''$ (2.127) adierazpenaren bidez emana eta $g_n = g(t_n, y_n)$ izanik.

Bigarren deribatua erabiltzen duen pauso anitzeko zenbakizko metodo lineal baten adierazpen orokorra honako hau da [7]:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^k \beta_i f_{n+i} + h^2 \sum_{i=0}^k \gamma_i g_{n+i}. \quad (2.129)$$

Taylorren serie-garapenak erabilia bigarren deribatua darabilen pauso anitzeko metodo lineala p ordenakoa izan dadin, α_i , β_i , γ_i koefizienteek bete beharreko baldintzak lortzen dira:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i i^q = q \sum_{i=0}^k \beta_i i^{q-1} + q(q-1) \sum_{i=0}^k \gamma_i i^{q-2}, \quad \text{non } 0 \leq q \leq p. \quad (2.130)$$

Egonkortasun-azterketa test-ekuazioari, $y' = \lambda y$, metodoa aplikatuz egiten da. Kasu honetan, test-ekuazioaren bigarren deribatua ere behar da: $y'' = (\lambda y)' = \lambda^2 y$. Bi adierazpenok (2.129) ekuazioan ordezkaturaz, egonkortasun-eremua kalkulatzeko erabiltzen den adierazpena iristen gara:

$$\sum_{i=0}^k \left(\alpha_i - \hat{h} \beta_i - \hat{h}^2 \gamma_i \right) r^i = 0, \quad \text{non } \hat{h} = \lambda h, \quad r = e^{i\theta}. \quad (2.131)$$

(2.131) ekuazio koadratikoa da, eta $r = e^{i\theta}$ ordezkatu eta θ aldagaiari $[0, 2\pi]$ tarteko balioak emanez lortzen den ekuazioaren bi erroek egonkortasun-eremuaren muga deskribatuko dute.

(2.129) metodoaren errore konstantea honako hau da [7]:

$$C = \frac{C_{p+1}}{\sigma(1)} = \frac{1}{\sigma(1)(p+1)!} \left[\sum_{i=0}^k \alpha_i i^{p+1} - (p+1) \sum_{i=0}^k \beta_i i^p - p(p+1) \sum_{i=0}^k \gamma_i i^{p-1} \right]. \quad (2.132)$$

Bigarren deribatua darabilten pauso anitzeko metodo ezagunak dira Enrighten metodoak [16] eta SDBDF metodoak (Second derivative BDF method) [7]. Metodo biak dira A-egonkorak $p = 4$ ordenaraino; ikus 2.21 eta 2.22 taulak eta 2.15 eta 2.16 irudiak.

Enrighten metodoetan, k -pausotako metodoak $(k+2)$ zehaztasun-ordena dauka, eta adierazpen hau daukate:

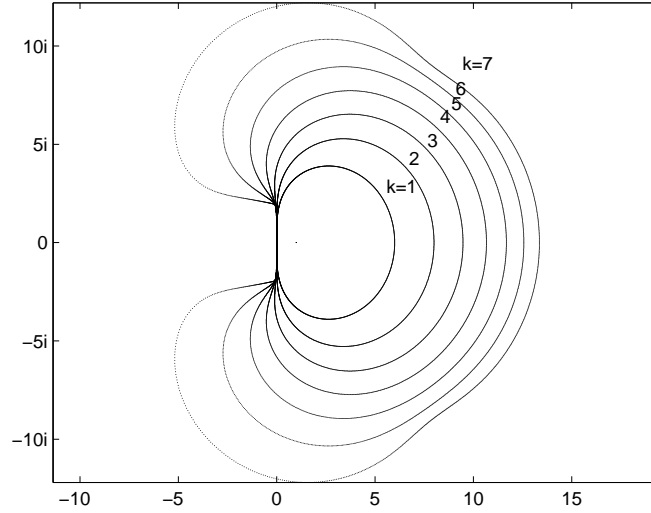
$$y_{n+k} = y_{n+k-1} + h \sum_{i=0}^k \beta_i f_{n+i} + h^2 \gamma_k g_{n+k}. \quad (2.133)$$

Enrighten metodoetako zenbait adibide:

$$\begin{aligned} k=1: & y_{n+k} = y_{n+k-1} + h \left(\frac{2}{3} f_{n+1} + \frac{1}{3} f_n \right) - \frac{1}{6} h^2 g_{n+1}, \\ k=2: & y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{29}{48} f_{n+1} + \frac{5}{12} f_n - \frac{1}{48} f_{n-1} \right) - \frac{1}{8} h^2 g_{n+1}, \\ k=3: & y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{307}{540} f_{n+1} + \frac{19}{40} f_n - \frac{1}{20} f_{n-1} + \frac{7}{1080} f_{n-2} \right) - \frac{19}{180} h^2 g_{n+1}, \\ k=4: & y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{3133}{5760} f_{n+1} + \frac{47}{90} f_n - \frac{41}{480} f_{n-1} + \frac{1}{45} f_{n-2} - \frac{17}{5760} f_{n-3} \right) - \frac{3}{32} h^2 g_{n+1}. \end{aligned}$$

k	1	2	3	4	5	6	7
p	3	4	5	6	7	8	9
$A(\alpha)$	90°	90°	$87,88^\circ$	$82,03^\circ$	$73,10^\circ$	$59,95^\circ$	$37,61^\circ$

2.21 taula. Enrighten metodoen ezaugarriak.



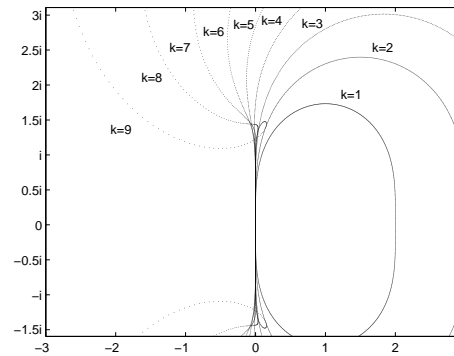
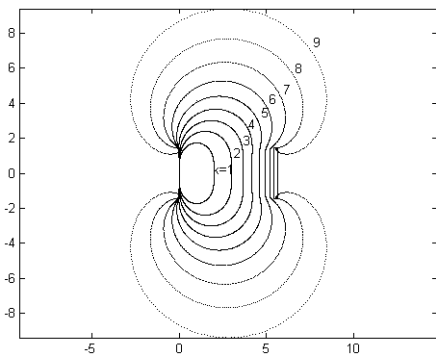
2.15 irudia. Enrighten metodoen egonkortasun-eremuak (kurba bakoitzaren kanpo-aldea).

SDBDF metodoek ere bigarren deribatua darabilte, eta BDF-ak oinarritzat hartuz sortutako metodoak dira. Beren adierazpena hauxe da:

$$\sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=j}^k \frac{1}{i} \right) \frac{\nabla^j y_{n+k}}{j} = \left(\sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \right) h f_{n+k} - \frac{h^2}{2} g_{n+k}. \quad (2.134)$$

SDBDF metodoen zenbait adibide:

$$\begin{aligned} k = 1 : \frac{h^2}{2} g_{n+1} &= h f_{n+1} - (y_{n+1} - y_n), \\ k = 2 : \frac{h^2}{2} g_{n+1} &= \frac{3}{2} h f_{n+1} - \left(\frac{7}{4} y_{n+1} - 2y_n + \frac{1}{4} y_{n-1} \right), \\ k = 3 : \frac{h^2}{2} g_{n+1} &= \frac{11}{6} h f_{n+1} - \left(\frac{85}{36} y_{n+1} - 3y_n + \frac{3}{4} y_{n-1} - \frac{1}{9} y_{n-2} \right), \\ k = 4 : \frac{h^2}{2} g_{n+1} &= \frac{11}{6} h f_{n+1} - \left(\frac{415}{144} y_{n+1} - 4y_n + \frac{3}{2} y_{n-1} - \frac{4}{9} y_{n-2} + \frac{1}{16} y_{n-3} \right). \end{aligned}$$



2.16 irudia. SDBDF metodoen egonkortasun-eremuak (kurba bakoitzaren kanpo-aldea).

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$A(\alpha)$	90°	90°	90°	$89,36^\circ$	$86,35^\circ$	$80,82^\circ$	$72,53^\circ$	$60,71^\circ$	$43,39^\circ$	$12,34^\circ$

2.22 taula. SDBDF metodoen ezaugarriak.

Bigarren deribatua darabilten pauso anitzeko metodo lineal gehiago ere badaude. Horietakoak dira *New Efficient Second Derivative Multistep Methods* (*New Efficient SDMM*) metodoak ere [17]. Metodo honetan, bi parametroekin β^* eta γ^* jokatuz posible da SDBDF metodoek baino egonkortasun-ezaugarri hobeko metodoak lortzea; ikus 2.23 eta 2.24 taulak. Metodoen adierazpen matematikoa honako hau da:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i y_{n+i} = h\beta_k (f_{n+k} - \beta^* f_{n+k-1}) + h^2 \gamma_k (g_{n+k} - \gamma^* g_{n+k-1}), \quad (2.135)$$

$g(t, y) = y'' = f_t + f f_y$ izanik.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$A(\alpha)$	90°	90°	90°	89°	86°	$81,7^\circ$	75°	$63,5^\circ$	$47,6^\circ$

2.23 taula. New Efficient SDMM metodoen ezaugarriak $\beta^* = -0,2$, $\gamma^* = 0,2$ izanik.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$A(\alpha)$	90°	90°	90°	$89,9^\circ$	$87,3^\circ$	$84,2^\circ$	80°	71°	$57,8^\circ$

2.24 taula. New Efficient SDMM metodoen ezaugarriak $\beta^* = -0,05$, $\gamma^* = 0,9$ izanik.

Pauso anitzeko zenbakizko metodo hedatuak

Egonkortasun-ezaugarri hobek lortzeko asmoarekin, BDF metodoen hedapen bat proposatu zen [18] erreferentzian. Metodo berriari EBDF deitu zitzaion (ingelesezko *Extended Backward Differentiation Formula*). Metodo honetan t_{n+k} eta t_{n+k+1} aldiuneetako balioak iragartzen dira BDF metodoa erabilia, eta, ondoren, zuzentzaile hau aplikatzen da:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h\beta_k f_{n+k} + h\beta_{k+1} \bar{f}_{n+k+1}. \quad (2.136)$$

\bar{f}_{n+k+1} osagaia t_{n+k+1} aldiunean BDF-ak erabilia kalkulatu den puntuari dagokion deribatua da. 2.25 taulan jaso dira (2.136) adierazpeneko koefizienteak. EBDF metodoak A-egonkorak dira $p = 4$ ordenaraino; ikus 2.26 taula eta 2.17 irudia.

k	β_{k+1}	β_k	α_8	α_7	α_6	α_5	α_4	α_3	α_2	α_1	α_0
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$								1	-1
2	$-\frac{4}{23}$	$\frac{22}{23}$							1	$-\frac{28}{23}$	$\frac{5}{23}$
3	$-\frac{18}{197}$	$\frac{150}{197}$						1	$-\frac{279}{197}$	$\frac{99}{197}$	$-\frac{17}{197}$
4	$-\frac{144}{2501}$	$\frac{1644}{2501}$					1	$-\frac{4008}{2501}$	$\frac{2124}{2501}$	$-\frac{728}{2501}$	$\frac{111}{2501}$
5	$-\frac{600}{14919}$	$\frac{8820}{14919}$				1	$-\frac{26550}{14919}$	$\frac{18700}{14919}$	$-\frac{9600}{14919}$	$\frac{2925}{14919}$	$-\frac{394}{14919}$
6	$-\frac{1200}{39981}$	$\frac{21780}{39981}$			1	$-\frac{77940}{39981}$	$\frac{68450}{39981}$	$-\frac{46800}{39981}$	$\frac{21375}{39981}$	$-\frac{5756}{39981}$	$\frac{690}{39981}$
7	$-\frac{14700}{626709}$	$\frac{319620}{626709}$		1	$-\frac{1324470}{626709}$	$\frac{1393070}{626709}$	$-\frac{1189475}{626709}$	$\frac{723975}{626709}$	$-\frac{292334}{626709}$	$\frac{70070}{626709}$	$-\frac{7545}{626709}$
8	$-\frac{235200}{12403947}$	$\frac{5988360}{12403947}$	1	$-\frac{28187040}{12403947}$	$\frac{34531280}{12403947}$	$-\frac{35354480}{12403947}$	$\frac{26886300}{12403947}$	$-\frac{14471072}{12403947}$	$\frac{5201840}{12403947}$	$-\frac{1120080}{12403947}$	$-\frac{235200}{12403947}$

2.25 taula. EBDF metodoetako koefizienteak.

Metodoaren zehaztasun-ordena $(k + 1)$ da, α_i, β_i koefizienteek honako ekuazio-sistema hau betetzen badute:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i i^q = q \sum_{i=0}^k \beta_i i^{q-1}, \quad \text{non } q = 0, 1, \dots, k + 1.$$

$y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k-1}$ balioak eskura izanik, EBDF metodoa honako pauso hauetan oinarritzen da:

1. k ordenako BDF metodoa erabilia, t_{n+k} aldiuneko \bar{y}_{n+k} balioa kalkulatzeko da:

$$\sum_{j=0}^k \hat{\alpha}_j y_{n+j} = h f_{n+k}, \quad (y_{n+k} := \bar{y}_{n+k}). \quad (2.137)$$

2. Beste pauso bat ematen da k ordenako BDF metodoa erabilia. Hau da, t_{n+k+1} aldiuneko \bar{y}_{n+k+1} balioa kalkulatzeko da:

$$\sum_{j=0}^k \hat{\alpha}_j y_{n+j+1} = h f_{n+k+1}, \quad (y_{n+k+1} := \bar{y}_{n+k+1}). \quad (2.138)$$

3. $\bar{f}_{n+k+1} = f(t_{n+k+1}, \bar{y}_{n+k+1})$ balioa kalkulatzeko da.
4. EBDF metodoetako formula zuzentzailea aplikatzeko da, \bar{f}_{n+k+1} balioa (2.136) adierazpenean ordezkatu eta y_{n+k} balioa kalkulatu. Eta azken balio hori da, y_{n+k} , EBDF metodoaz lortzen den balioa.

Hau da EBDF metodoen mozketaren errorea lokala:

$$LTE_k = h^{k+2} \left(\beta_{k+1} C_1 \left(1 - \frac{\hat{\alpha}_{k-1}}{\hat{\alpha}_k} \right) \frac{\partial f}{\partial y} y^{(k+1)} + C_3 y^{(k+2)} \right) (x_n) + O(h^{k+3}). \quad (2.139)$$

C_1 BDF metodoei dagokien errorea konstantea izanik eta C_3 koefizientea EBDF metodoko (2.136) zuzentzaileari dagokiona.

EBDF metodoen egonkortasun-azterketa egiteko, metodo osoa (bi iragarleak eta zuzentzailea) test-ekuazioari aplikatzen zaio. Egonkortasun-eremu honen errorea mugatzen dute:

$$A' \hat{h}^3 + B' \hat{h}^2 + C' \hat{h} + D' = 0, \quad (2.140)$$

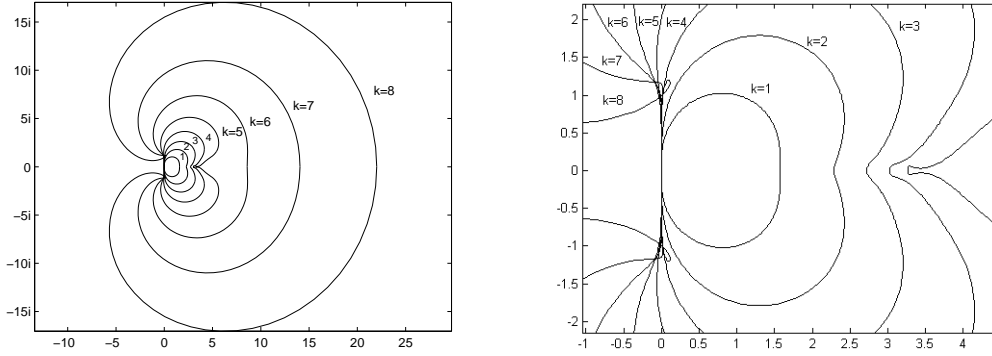
non:

$$\begin{cases} A = \beta_k r^k, \\ B = -2\hat{\alpha}_k \beta_k r^k - T + \beta_{k+1} S, \\ C = \beta_k \hat{\alpha}_k^2 r^k + 2\hat{\alpha}_k T - \hat{\alpha}_k \beta_{k+1} S + \beta_{k+1} \hat{\alpha}_{k-1} R, \\ D = -\hat{\alpha}_k^2 T, \\ R = \sum_{j=0}^{k-1} \hat{\alpha}_j r^j, \quad S = \sum_{j=0}^{k-2} \hat{\alpha}_j r^{j+1}, \quad T = \sum_{j=0}^k \alpha_j r^j. \end{cases} \quad (2.141)$$

Eta egonkortasun-eremuak lortzen dira $r = e^{i\theta}$ ordezkatuz (2.141) adierazpeneko formulatan.

k	1	2	3	4	5	6	7	8
p	2	3	4	5	6	7	8	9
$A(\alpha)$	90°	90°	90°	87,61°	80,21°	67,73°	48,82°	19,98°

2.26 taula. EBDF metodoen ezaugarriak.



2.17 irudia. EBDF metodoen egonkortasun-eremuak (kurba bakoitzaren kanpoaldea).

EBDF metodoen eskema bera jarraitzen duten beste zenbait metodo ere aurkeztu izan dira. Horietakoak dira, besteak beste, MEBDF metodoak (Modified Extended Backward Differentiation Formulae). Metodo honek BDF metodoa erabilia bi iragarpen egiten ditu (EBDFetan bezala), eta zuzentzaile ezberdin bat erabiltzen du [19, 20]. MEBDF metodoetako zuzentzailea honako hau da:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h \hat{\beta}_k f_{n+k} + h \beta_{k+1} \bar{f}_{n+k+1} + h (\beta_k - \hat{\beta}_k) \bar{f}_{n+k}. \quad (2.142)$$

MEBDF metodoak ere A-egonkorak dira $p = 4$ ordenaraino 2.27 taulan ikus daitekeen bezala.

k	1	2	3	4	5	6	7	8
p	2	3	4	5	6	7	8	9
$A(\alpha)$	90°	90°	90°	88,36°	83,14°	74,50°	62°	42,88°

2.27 taula. MEBDF metodoen ezaugarriak.

Pauso anitzeko metodo lineal konbinatuak

Metodo berri bat sor daiteke pauso anitzeko metodo linealak konbinatuz. Horietakoak dira metodo konbinatuak [21] eta A-BDF metodoak [22].

Metodo konbinatuak [21] ($k + 1$) ordenako Adams Moultonen eta k ordenako BDFaren konbinazio lineal gisa kalkulatu dira:

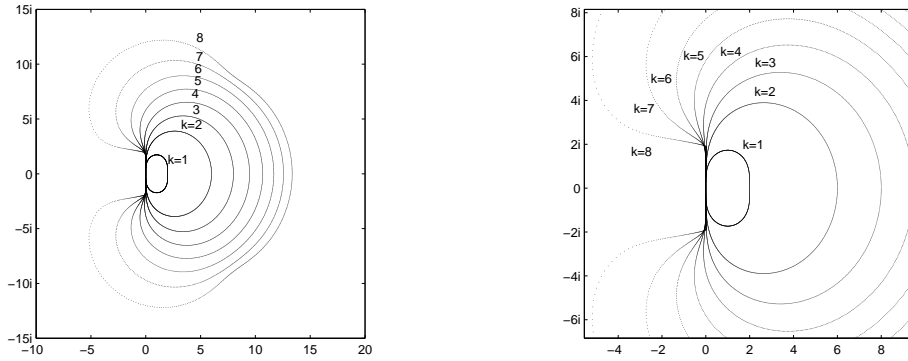
$$\{AMF^{(k+1)} - \gamma^k \cdot h \cdot J \cdot BDF^{(k)}\} = 0, \quad (2.143)$$

γ^k parametro aske bat izanik eta $J = \partial f / \partial y$ jacobtarra. (2.143) adierazpena $p = (k + 1)$ zehaztasun-ordenakoa da $\forall \gamma^k$ balioentzat.

γ^k parametroen aukeraketa ezberdinak egin daitezke:

- $\gamma^{(k)} = -k\gamma_k^*$ aukeratuz, γ_k^* Adams Moultonen metodoko koefizienteak izanik (2.16 taulakoak), $p = 4$ ordenaraino A-egonkortasuna lortzen da.
- $\gamma^{(k)}$ $A(\alpha)$ -egonkortasuneko angelua maximizatzeke eran ere aukera daiteke. Horrela, posible da $p = 4$ ordenan A-egonkortasuna lortzea eta $p = 12$ ordenan $A(28, 68^\circ)$ -egonkortasuna lortzea [7, 21].

2.18 irudian $\gamma^{(k)} = -k\gamma_k^*$ aukeratuz lortzen diren metodo konbinatuen egonkortasun-eremuak ikus daitezke, γ_k^* balioak Adams Moultonen metodokoak izanik.



2.18 irudia. Metodo konbinatuen egonkortasun-eremuak (kurba bakoitzaren kanpo-aldea).

A-BDF metodoak [22] k ordenako BDF inplizituaren eta BDF esplizituaren konbinazio lineal gisa kalkulatzen dira:

$$BDF^{(i)} - a \cdot BDF^{(e)} = 0, \quad (2.144)$$

a parametro aske bat izanik. Metodo hauek A-egonkorak dira $k = 1, 2$ kasuan $a \in [-1, 1)$ denean, eta $A(\alpha)$ -egonkorak dira $k = 7$ ordenarako.

BDF esplizituek honako adierazpen hau daukate:

$$\sum_{j=0}^k \bar{\alpha}_j y_{n+j} = h \bar{\beta}_k f_{n+k-1}, \quad (2.145)$$

$\bar{\alpha}_j$ eta $\bar{\beta}_k$ koefizienteak ondorioztatzeko, k pausotako BDF metodo esplizitua k ordenakoa izan dadin bete beharreko baldintzen adierazpena erabili behar da:

$$\sum_{i=0}^k \bar{\alpha}_i i^q = q \sum_{i=0}^k \bar{\beta}_i i^{q-1}, \quad 0 \leq q \leq k. \quad (2.146)$$

2.28 taulan jaso dira BDF esplizituen koefizienteak.

k	$\bar{\alpha}_5$	$\bar{\alpha}_4$	$\bar{\alpha}_3$	$\bar{\alpha}_2$	$\bar{\alpha}_1$	$\bar{\alpha}_0$	$\bar{\beta}_k$	p
1					1	-1	1	1
2				1	0	-1	2	2
3			1	$\frac{3}{2}$	-3	$\frac{1}{2}$	3	3
4		1	$\frac{10}{3}$	-6	2	$-\frac{1}{3}$	4	4
5	1	$\frac{65}{12}$	-10	5	$-\frac{5}{3}$	$\frac{1}{4}$	5	5

2.28 taula. BDF esplizituen koefizienteak.

Beste aukera bat da aipatutako teknikak konbinatzea. Horrela, EBDF eskemaren barruan A-BDFak erabiltzen dira [23] erreferentzian A-EBDF metodoak sortuz. Horrela, a parametroa kalkula daiteke $p \leq 4$ ordenarako A-egonkorrak diren metodoak lortzeko eta 9 ordenaraino $A(\alpha)$ -egonkorrak diren metodoak lortzeko. 2.29 taulan jaso dira A-EBDF metodoen egonkortasun-ezaugarriak.

k	1	2	3	4	5	6	7	8
p	2	3	4	5	6	7	8	9
$A(\alpha)$	90°	90°	90°	88,85°	84,2°	75°	61°	30,50°

2.29 taula. A-EBDF metodoen egonkortasun-ezaugarriak.

EBDFen eskeman bigarren deribatuak darabiltzaten metodoak ere sortu dira. Horrelakoak dira E2BD [24] eta New SDMM [25] metodoak. [24] erreferentzian bi E2BD metodo aurkezten dira. Metodo berri horien ezaugarriak 2.30 eta 2.31 tauletan jaso dira.

k	1	2	3	4	5	6
p	4	5	6	7	8	9
$A(\alpha)$ 2. mota	90°	90°	90°	89°	87°	83°
$A(\alpha)$ 1. mota	90°	90°	90°	90°	90°	89°

2.30 taula. E2BD metodoen ezaugarriak.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$A(\alpha)$	90°	90°	90°	90°	89,8°	88,3°	85,3°	80,5°	73,5°	61,9°	50,3°	29,9°

2.31 taula. New SDMM metodoen ezaugarriak.

3. kapitulua

Elementu Finituen Metodoa (EFM)

Elementu Finituen Metodoa (EFM) ekuazio diferentzialen emaitza hurbilduak lortzeko erabiltzen den metodo bat da, ingeniartzako eta fisikako arloetan erabili ohi dena. Honi esker, deribatu partzialeko ekuazioei emaitzak eman dakizkieke. Metodo hau XX. mendearen erdialdean hasi zen garatzen, eta oraindik ere erabilia da gaur egun.

Atal honetan zehar, ekuazio diferentzialak EFM-aren bidez nola ebazten diren aztertuko da.

3.1 Hasierako formulazioa

Honela emana dator dimentsio bakarreko eta ingurune baldintzadun bigarren ordenako ekuazio diferentzial lineala:

$$-(a(x)u'(x))' + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad x \in (0, l). \quad (3.1)$$

Helburua da ekuazioa betetzen duen $u(x)$ soluzioa aurkitzea $x \in [0, l]$ eremuan (dimentsio bakarra denez, tartean). Ekuazio diferentzialaz gain, ingurune baldintzak behar dira soluzioa aurkitu nahi bada. Ingurune baldintzek esango digute $[0, l]$ eremuko ingurunean (1Dko problema landuko denez, $x = 0$ eta $x = l$ muturretan) zenbat balio duen u ezezagunak edo bere deribatuak, u' funtzioak alegia. Hau da, datu hauek beharko ditut:

- Dirichlet motako ingurune baldintzak (IB): $u(0) = u_0$ edo $u(l) = u_l$.
- Neumann ingurune baldintzak (IB): $-a(0)u'(0) = \gamma_0$ edo $a(l)u'(l) = \gamma_l$.

Beraz, (3.1) problemako datuak honako hauek dira:

- Operatzaile diferentzialeko koefizienteak $(a(x), b(x), c(x))$.
- Iturria ($f(x)$) eta dauden ingurune baldintzak $(u_0, u_l, \gamma_0, \gamma_l)$.

Datuek honako baldintza hauek bete beharko dituzte: $a(x)$, $a'(x)$, $b(x)$, $c(x)$ eta $f(x)$ jarraituak izatea. Matematikoki idatzita:

$$a(x) \in C^1[0, l], \quad b(x), c(x), f(x) \in C^0[0, l]. \quad (3.2)$$

2D edo 3Dko problemetan, ingurunea lerro bat edo gainazal bat izango da. 1Dko problemetan, aldiz, eremua tarte lineal bat da, eta ingurunea tarte horretako puntuek osatzen dute.

3.2 Formulazio klasikoa edo sendoa

(3.1) ekuazioaren formulazio klasikoa edo sendoa honela emana dator:

$$\begin{cases} -(a(x)u'(x))' + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x), & x \in (0, l), \\ u(x) = g_D, & x \in \Gamma_D, \\ u'(x) = h_N, & x \in \Gamma_N. \end{cases} \quad (3.3)$$

Datu-funtzioek (3.2) betetzen dute. Helburua da ekuazioa betetzen duen eta bigarren deribatu jarraitua duen $u(x)$ funtzioa aurkitzea ($u(x) \in C^2[0, l]$). $u(x)$ funtzioak ekuazioa bete duenez, bere bigarren deribatua funtzio jarraitua da, $f(x)$ funtzioa bezala. Ondoren ikusiko den formulazio ahulean, ekuazio diferentziala eremuan integratuko da, eta, horrela, $u(x)$ ezezagunari eskatuko zaizkion baldintzak nasaiagoak izango dira, hau da, baldintza gutxiago izango ditu. Problema berbera planteatzeko beste era bat da formulazio ahula edo formulazio bariazionala, eta aurrerago aztertuko da. Ohikoa da eremua denotatzeko Ω erabiltzea, eta eremuaren ingurunerako $\partial\Omega$. (3.3) probleman $\Omega = (0, l)$ da. Dirichleten inguruneko baldintzadun eremua Γ_D izendatu da, eta Neumannen inguruneko baldintzadun eremua Γ_N . Bi eremu horiek honako baldintza hauek betetzen dituzte: $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ eta $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega$.

3.3 Funtzio-espazioak

Hona iritsita, egokia da zenbait funtzio-espazio definitzea:

- Funtzio jarraituen espazioa, C^0 , Ω eremuan:

$$C^0(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) \text{ jarraia}\},$$

C^0 espazio bektoriala denez, honako hau betetzen da:

$$f, g \in C^0 \Rightarrow \alpha f + \beta g \in C^0, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (3.4)$$

- Karratu integragarriko funtzioen espazioa, L^2 , Ω eremuan: L^2 espazioan daude: funtzio jarraituak (C^0), zatika jarraituak direnak, etab. Bertako funtzioen ezaugarria da karratu integragarria dutela. Espazioa L^2 edo H^0 denotatzen da:

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} f(x)^2 dx < \infty \right\}.$$

- Sobolev-en espazioa, H^1 , Ω eremuan:

$$H^1(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) \mid f' \in L^2(\Omega)\}.$$

- $H_0^1(\Omega)$ espazioa Ω eremuan: $H^1(\Omega)$ espazioaren azpiespazio bat da:

$$H_0^1(\Omega) = \{f \in H^1(\Omega) \mid f(x) = 0, \partial\Omega \text{ eremuan}\}.$$

3.4 Formulazio bariazionala edo ahula

Izan bedi $u(x)$ hasierako problemaren emaitza. (3.1) ekuazioa test funtzioekin, $v(x)$ -ekin, biderkatuz eta $(0, l)$ eremuan integratuz, honako hau daukagu:

$$\begin{aligned} \int_0^l - (a(x)u'(x))' v(x)dx + \int_0^l b(x)u'(x)v(x)dx + \int_0^l c(x)u(x)v(x)dx \\ = \int_0^l f(x)v(x)dx. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Zatikako integrazioa erabilita, (3.5) adierazpeneko lehenengo terminoa integratuko dugu:

$$\int U \cdot dV = U \cdot V - \int V \cdot dU, \quad (3.6)$$

non, $U = v(x)$, $dV = (a(x)u'(x))'$. Honako adierazpen hau lortuko da:

$$\int_0^l - (a(x)u'(x))' v(x)dx = \int_0^l a(x)u'(x)v'(x)dx - a(l)u'(l)v(l) + a(0)u'(0)v(0). \quad (3.7)$$

Orduan, (3.5) adierazpenean (3.7) ordezkatzuz, beste hauxe lortuko da:

$$\begin{aligned} \int_0^l a(x)u'(x)v'(x)dx + \int_0^l b(x)u'(x)v(x)dx + \int_0^l c(x)u(x)v(x)dx \\ = \int_0^l f(x)v(x)dx + a(l)u'(l)v(l) - a(0)u'(0)v(0), \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\forall v(x) \in H^1((0, l)).$$

Ohartu (3.8) adierazpeneko integralek zentzua izan dezaten $v(x) \in H^1((0, l))$ bete behar dela.

Oraindik ere, formulazio ahula lortzeko azken pausoak falta zaizkigu.

(3.8) adierazpenean, $u(x)$ ez ezik $u'(x)$ ere ez dugu ezagutzen Γ_D eremuan (Dirichlet baldintzadun ingurunean). Gabezia horri aurre egiteko test-funtzioak honako V espazio honetan aukeratuko dira:

$$V = \{v(x) \in H^1((0, l)) \mid v(x) = 0, \Gamma_D \text{ eremuan}\}. \quad (3.9)$$

Horrela, (3.8) adierazpenak forma hau hartuko du:

$$\begin{aligned} \int_0^l a(x)u'(x)v'(x)dx + \int_0^l b(x)u'(x)v(x)dx + \int_0^l c(x)u(x)v(x)dx \\ = \int_0^l f(x)v(x)dx + a(l)u'(l)v(l) - a(0)u'(0)v(0), \forall v(x) \in V. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Beraz, funtzio batek (3.10) betetzen badu, inguruneko Dirichlet baldintzak betetzea baino ez zaio falta (Γ_D eremuan definituak) (3.3) problemaren soluzioa izateko. Beste era batean esanik, soluziogaia honako U espaziokoa izango da:

$$U = \{u(x) \in H^1((0, l)) \mid u(x) = g_D, \forall x \in \Gamma_D\}. \quad (3.11)$$

Eta inguruneko baldintzadun (3.3) ekuazio diferentzialak formulazio bariazional edo ahul hauxe dauka:

Soluziogaien espazioa, U , eta test-funtzioen espazioa, V , definitzen dira:

$$\begin{cases} U = \{u(x) \in H^1((0, l)) \mid u(x) = g_D, \forall x \in \Gamma_D\}, \\ V = \{v(x) \in H^1((0, l)) \mid v(x) = 0, \forall x \in \Gamma_D\}, \end{cases} \quad (3.12)$$

helburua (3.10) beteko duen $u \in U$ soluzioa aurkitzea da:

$$\begin{aligned} \int_0^l a(x)u'(x)v'(x)dx + \int_0^l b(x)u'(x)v(x)dx + \int_0^l c(x)u(x)v(x)dx \\ = \int_0^l f(x)v(x)dx + a(l)u'(l)v(l) - a(0)u'(0)v(0), \forall v(x) \in V. \end{aligned} \quad (3.13)$$

U multzoa H^1 eko azpimultzoa da, baina orokorrean ez da azpiespazioa. Problema inguruneko baldintzak Dirichlet motako baldintza nuluak (homegenoak) direnean izango da U H^1 eko azpiespazio bat. Beste kasu guztietan, nahikoa da soluzioa bi partetan banatzea:

$$u(x) = w(x) + g(x), \quad (3.14)$$

$g(x)$ izanik inguruneko Dirichlet baldintzak bete behar dituen funtzio laguntzaile bat. $w(x)$ deitu dugun parteak inguruneko Dirichlet baldintza nuluak beteko ditu, eta V espazioko funtzioa izango da. Gainera, $w(x)$ funtzioa oinarriko funtzioen konbinazio lineal gisa definituko da. Horrela, nahikoa izango da test-funtzioen V espazioa eta $g(x)$ funtzio laguntzailea definitzea.

3.4.1 Formulazio bariazional abstraktua

Berriro (3.10) ekuazioa hartuko dugu:

$$\begin{aligned} \int_0^l a(x)u'(x)v'(x)dx + \int_0^l b(x)u'(x)v(x)dx + \int_0^l c(x)u(x)v(x)dx \\ = \int_0^l f(x)v(x)dx + a(l)u'(l)v(l) - a(0)u'(0)v(0), \forall v(x) \in V. \end{aligned}$$

Inguruneko baldintzak $u(0) = u_0$ eta $a(l)u'(l) = \gamma_l$ izanik. Hortaz:

$$\begin{aligned} \int_0^l a(x)u'(x)v'(x)dx + \int_0^l b(x)u'(x)v(x)dx + \int_0^l c(x)u(x)v(x)dx \\ = \int_0^l f(x)v(x)dx + \gamma_l v(l), \forall v(x) \in V. \end{aligned}$$

$l(v)$ deituko diogu ekuazio horren eskuineko aldeari, eta test-espazioan definitutako funtzional bat izango da $l : V \rightarrow \mathbb{R}$:

$$l(v) = \int_0^l f(x)v(x)dx + \gamma_l v(l).$$

$l(v)$ funtzionala lineala da. Hau da, honako hau betetzen du:

$$l(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 l(v_1) + \alpha_2 l(v_2), \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \forall v_1, v_2 \in V. \quad (3.15)$$

Ezkerraldeari $b(u, v)$ deituko diogu, eta era honetan definitutako forma bilineala izango da $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$:

$$b(u, v) = \int_0^l a(x)u'(x)v'(x)dx + \int_0^l b(x)u'(x)v(x)dx + \int_0^l c(x)u(x)v(x)dx, \quad (3.16)$$

$b(u, v)$ bilineala izateak esan nahi du, u finkatzen denean $b(u, v)$ funtzionala lineala dela v aldagaian, eta v finkatzen denean $b(u, v)$ lineala dela u aldagaian.

Lift kontzeptua definituko dugu. \tilde{u}_0 funtzioa u_0 Dirichleten balioaren *lift* bat da, berdina badira \tilde{u}_0 funtzioaren $x = 0$ muturreko murrizketa eta u_0 balioa. Hau da, lifta u_0 balioaren hedapena da eremu osora. Liftik errazena sortzeko era da u_0 balioa funtzio konstante gisa eremu osoan definitzea:

$$\tilde{u}_0(x) = u_0.$$

\tilde{u}_0 funtzioaren lifta definitu ostean, posible da hori soluziotik ateratzea, eta $x = 0$ muturrean zero izango da diferentzia. Horrek esan nahi du test-funtzioen espazioan egongo dela. Bestela esanda, soluzioa liftaren eta test-funtzio baten batura gisa adieraz daiteke. Mota horretako baturei *spazio afin* deritze:

$$\tilde{u}_0 + V = \{\tilde{u}_0 + v \mid v \in V\}. \quad (3.17)$$

Eta formulazio bariazional abstraktua era labur honetan adieraz daiteke: $l : V \rightarrow \mathbb{R}$ formal lineala eta $b : (\tilde{u}_0 + V) \times V \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilineala emanik:

$$\begin{cases} \text{Aurkitu } u \in \tilde{u}_0 + V \text{ non:} \\ b(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (3.18)$$

Dirichlet inguruneko baldintza homogeneousak ditugunean, hau da, $u_0 = 0$, funtzio nulua erabil daiteke lift bezala, eta formulazio bariazional abstraktua sinplifikatua geratzen da:

$$\begin{cases} \text{Aurkitu } u \in V \text{ non:} \\ b(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (3.19)$$

3.5 Formulazio bariazional diskretua

Formulazio bariazionalan, test-funtzioen V espazioak dimentsio infinitua dauka. Formulazio bariazional diskretura pasatzeak esan nahi du dimentsio finituko test-funtzioen espazio bat aukeratuko dela. Dei diezaigun espazio horri $V^h \subseteq V$. Era berean, soluziogaien multzo diskretua eraikiko da, $U^h \subseteq U$:

$$u^h(x) = w^h(x) + g^h(x). \quad (3.20)$$

Ohartu $w^h(x) \in V^h \subseteq V$ betetzen dela, eta, beraz, $w^h(x)$ funtzioek $w^h(x) = 0$ beteko dute Γ_D eremuan, hau da, Dirichlet baldintza homogeneoak. Eta g^h funtzio laguntzaileak honako hau beteko du:

$$g^h(x) \approx g(x), \quad \forall x \in \Gamma_D. \quad (3.21)$$

Hortaz, problemaren formulazio bariazional diskretua honako hau da:

Inguruneko baldintzadun (3.3) problema emanik, kalkulatu $u^h(x) = w^h(x) + g^h(x)$ non:

$$w^h(x) \in V^h \subseteq V = \{v(x) \in H^1((0, l)) \mid v(x) = 0, \Gamma_D \text{ eremuan}\}, \quad (3.22)$$

$$g^h(x) \approx g(x), \quad \forall x \in \Gamma_D,$$

honako hau betetzeko eran:

$$\begin{aligned} \int_0^l a(x)(u^h)'(x)(v^h)'(x)dx + \int_0^l b(x)(u^h)'(x)v^h(x)dx + \int_0^l c(x)u^h(x)v^h(x)dx \\ = \int_0^l f(x)v^h(x)dx + a(l)(u^h)'(l)v^h(l) - a(0)(u^h)'(0)v^h(0), \\ \forall v^h(x) \in V^h. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Eta falta direnak hauek dira: g^h era egokian adieraztea, V^h espazioko oinarriko funtzioak $N_j(x)$ aukeratzea, soluzioaren hurbilpena adieraztea, eta bertako d_j koefizienteak kalkulatzeko.

Soluzioa test-funtzioen konbinazio lineal gisa idazten denean, *Bubnov-Galerkin izeneko EFM* deritzo:

$$u(x) \approx \sum_{j=1}^n d_j N_j(x), \quad (3.24)$$

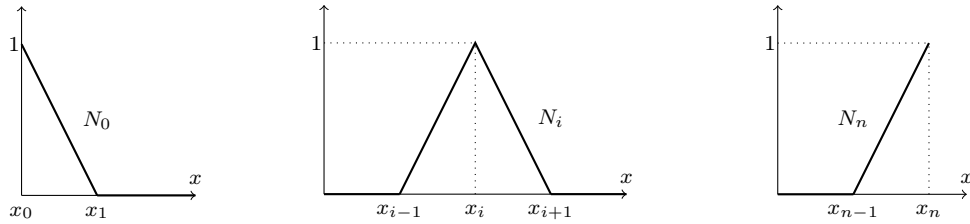
eta, hemen, Bubnov-Galerkinen garapena egingo da.

3.6 Oinarriko funtzioen aukeraketa

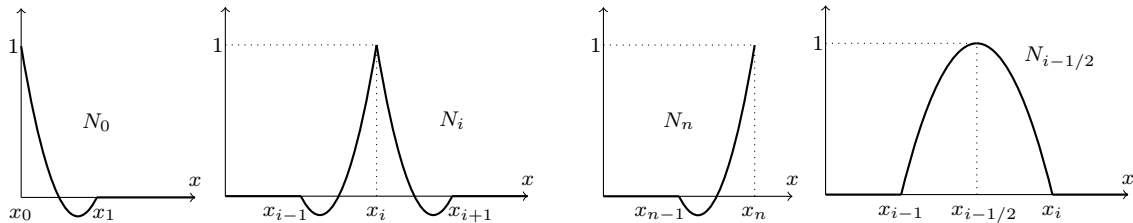
Oinarriko funtzio bezala familia ezberdinak erabil daitezke (polinomioak, sinusoidalak, esponentzialak, etab.). Baina EFMan funtzio polinomikoak erabiltzen dira. Horiek linealak, koadratikoak, hirugarren mailakoak, eta abar izan daitezke. Funtzio linealei *kapela funtzio* deritze, eta 3.1 irudian ikus daitezke. Funtzio koadratikoak 3.2 irudian marraztu dira. Aurrerantzean, funtzio linealekin egingo da lana.

EFMan erabiltzen diren funtzioek honako baldintza hauek betetzen dituzte:

- Eremuko (tarteko) azpitarte ezberdinetan definituta dauden funtzioak dira.
- $H^1(\Omega)$ espazioko funtzioak dira.
- Kalkulatu behar diren d_j koefizienteak $u(x_j) = d_j$ baldintza betetzeko eran aukeratzen diren funtzioak dira, $1 \leq j \leq n$ izanik.



3.1 irudia. Funtzio linealak (kapela funtzioak).



3.2 irudia. Funtzio koadratikoak.

3.7 Implementazioa

Atal honetan, EFMaren garapena egingo da. Sarearekin eta EFMko funtzioen azalpenarekin hasiko da.

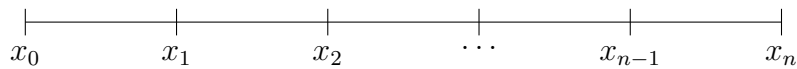
3.7.1 Sarea

$\Omega = [0, l]$ tartea zatituko dugu n azpitartetan:

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = l, \quad (3.25)$$

$h_i = x_{i+1} - x_i$ izanik i azpitartearen luzera.

- *Nodo* deritze $(n + 1)$ puntuei x_i , $i = 0, 1, \dots, n$.
- *Elementu finitu* deritze n azpitarteei $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, (n - 1)$.
- Nodoek eta elementuek sarea edo eremuaren diskretizazioa osatzen dute; ikus 3.3 irudia.



3.3 irudia. Eremuaren partiketa dimentsio bakarrean.

3.7.2 Zatika linealak diren EFMko oinarriko funtzioak

V^h espazioko oinarri bat aukeratu behar da test-funtzioak izan nahi badira. Funtzio linealak erabiliz, V^h nola osatzen den azalduko da.

Kasu linealean, honela definituta dago V_h :

$$V_h = \{v_h(x) \in C^0(\bar{\Omega}) \mid v_h(x) \text{ lineala elementuka eta } v_h(x) = 0, \Gamma_D \text{ eremuan}\}.$$

$N_i(x)$ deituko diegu V^h ko oinarriko funtzioei. Tarteko x_i nodoetan $N_i(x)$ funtzioak era honetan kalkulatu daude:

$$N_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{x_{i+1} - x}{h_i}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & \text{bestela,} \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, n-1.$$

Muturretako nodoetan, honela definitzen dira $N_i(x)$ funtzioak:

$$N_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{h_0}, & x_0 \leq x \leq x_1, \\ 0, & \text{bestela,} \end{cases} \quad N_n(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{n-1}}{h_{n-1}}, & x_{n-1} \leq x \leq x_n, \\ 0, & \text{bestela.} \end{cases}$$

Funtzioak honako baldintza hau betetzen du:

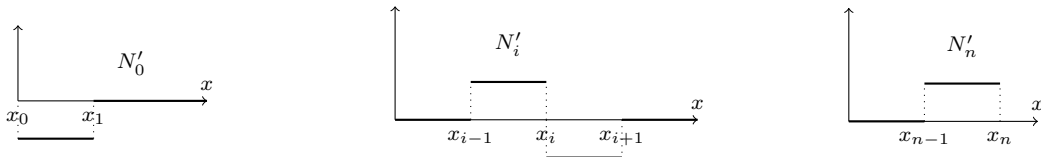
$$N_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (3.26)$$

Hau da, $N_i(x)$ funtzioak 1 balio du x_i nodoan eta 0 gainontzekoetan.

Gainera, $N_i(x) \neq 0$ da x_i barnean daukaten azpitarteetan. Oinarriko funtzioen deribatuak honako hauek dira:

$$N'_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{h_{i-1}}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{-1}{h_i}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & \text{bestela,} \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, n-1,$$

$$N'_0(x) = \begin{cases} \frac{-1}{h_0}, & x_0 \leq x \leq x_1, \\ 0, & \text{bestela,} \end{cases} \quad N'_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{h_{n-1}}, & x_{n-1} \leq x \leq x_n, \\ 0, & \text{bestela.} \end{cases}$$



3.4 irudia. EFM funtzio linealen deribatuak.

3.4 irudian marraztu dira EFM funtzio linealen deribatuak.

Gainera, $|i - j| > 1$ denean, honako hauek betetzen dira:

$$\begin{cases} N_i(x)N_j(x) = 0, \\ N_i(x)N'_j(x) = 0, \\ N'_i(x)N'_j(x) = 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

3.7.3 Zenbait ezaugarri

Izan daitezkeen inguruneko baldintzen arabera, V^h espazioko oinarriko funtzioak zein diren zehaztuko dugu. Har dezagun Ω eremuaren diskretizazio bat $(n + 1)$ nodoetan eta, beraz, $(n + 1)$ funtzio izango ditugu $\{N_0(x), N_1(x), \dots, N_n(x)\}$. Funtzio hauek beren artean linealki independenteak dira. Funtzio horiek eta beren deribatuak karratu integragarrikoak dira, beraz, $H^1(\Omega)$ espazioan daude. Honela osatuta dago V^h espazioaren oinarri bat:

1. Mutur bietan Dirichlet inguruneko baldintzak (IB-DD):

$$V^h = \text{span}\{N_1(x), \dots, N_{n-1}(x)\}. \quad (3.28)$$

2. Mutur batean Dirichlet eta bestean Neumann. Bi kasu bereiz daitezke:

- Dirichlet-Neumann kasuan (IB-DN):

$$V^h = \text{span}\{N_1(x), \dots, N_n(x)\}. \quad (3.29)$$

- Neumann-Dirichlet kasuan (IB-ND):

$$V^h = \text{span}\{N_0(x), \dots, N_{n-1}(x)\}. \quad (3.30)$$

EFM funtzio bat V^h ko oinarrian egoteko baldintza da Dirichlet baldintza duen muturrean zero izatea. Funtzioak aipatutako baldintza betetzen ez badu, ez da egongo V^h ko oinarrian. Ohartu, mutur bietan Dirichlet baldintza dagoenean, funtzio hauek soilik betetzen dutela baldintza:

$$N_i(x_0) = N_i(x_n) = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n - 1. \quad (3.31)$$

Goian aipatutako kasuetako bakoitzean, $u^h(x)$ soluzioa era honetan definitzen da:

$$u^h = w^h + g^h = \begin{cases} \sum_{j=1}^n d_j N_j(x) + g_0 N_0(x), & \text{IB-DN problemen,} \\ \sum_{j=0}^{n-1} d_j N_j(x) + g_n N_n(x), & \text{IB-ND problemen,} \\ \sum_{j=1}^n d_j N_j(x) + g_0 N_0(x) + g_n N_n(x), & \text{IB-DD problemen.} \end{cases} \quad (3.32)$$

Eta $N_i(x_j) = \delta_{ij}$ betetzen dela kontuan hartuz, nodo bakoitzean honako hau da $u^h(x_i)$ balio hurbildua:

$$u^h(x_i) = \begin{cases} \begin{cases} d_i, & i \neq 0, \\ g_0, & i = 0, \end{cases} & \text{IB-DN problemen,} \\ \begin{cases} d_i, & i \neq n, \\ g_n, & i = n, \end{cases} & \text{IB-ND problemen,} \\ \begin{cases} d_i, & i \neq 0, n, \\ g_0, & i = 0, \\ g_n, & i = n, \end{cases} & \text{IB-DD problemen.} \end{cases} \quad (3.33)$$

3.7.4 EFMko ekuazio-sistema

Edozein inguruneko baldintzetara orokor daiteke egin den (3.32) hurbilpena:

$$u^h = w^h + g^h = \sum_{j=0}^n d_j N_j(x), \quad (3.34)$$

non, inguruneko baldintzen kudeaketa egitea faltako baita.

(3.34) adierazpena (3.23) adierazpenean ordezkatzuz eta V^h espazioan definitu diren oinarriko funtzioak erabiliz, honako hau lortzen da:

$$\begin{aligned} & \int_0^l a(x) \left(\sum_{j=0}^n d_j N_j(x) \right)' N_i'(x) dx + \int_0^l b(x) \left(\sum_{j=0}^n d_j N_j(x) \right)' N_i(x) dx + \\ & \quad + \int_0^l c(x) \left(\sum_{j=0}^n d_j N_j(x) \right) N_i(x) dx = \\ & = \int_0^l f(x) N_i(x) dx + a(l)(u^h)'(l) N_i(l) - a(0)(u^h)'(0) N_i(0), \quad i = 0, 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Batukariak integraletatik kanpora aterata, honako hau lortuko da:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^n \left[\int_0^l (a(x) N_j'(x) N_i'(x) dx + b(x) N_j'(x) N_i(x) dx + c(x) N_j(x) N_i(x) dx) \right] d_j \\ & = \int_0^l f(x) N_i(x) dx + a(l)(u^h)'(l) N_i(l) - a(0)(u^h)'(0) N_i(0), \quad i = 0, 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Eta matrize eran honela idatziko da (3.36) adierazpena:

$$\sum_{j=0}^n K_{ij} d_j = F_i, \quad i = 0, 1, \dots, n \Rightarrow K \cdot d = F, \quad (3.37)$$

$K = (K_{ij})$ eta $F = (F_i)$ honako hauek izanik:

$$\begin{cases} K_{ij} = \int_0^l (a(x) N_j'(x) N_i'(x) dx + b(x) N_j'(x) N_i(x) dx + c(x) N_j(x) N_i(x) dx), \\ F_i = \int_0^l f(x) N_i(x) dx + a(l)(u^h)'(l) N_i(l) - a(0)(u^h)'(0) N_i(0). \end{cases} \quad (3.38)$$

K matrizea $(n+1)$ dimentsioko matrize karratua da, eta *zurruntasun-matrize global* deritzo. F bektoreak $(n+1)$ elementu ditu, eta *indarren bektore global* deritzo. Ezezagunen bektorea d da.

Ohartu EFMko funtzio guztiak kontuan hartzen dituen matrize orokorra dagoela $((n+1) \times (n+1))$ dimentsioa duena, eta matrize horren parte bat hartzen dela inguruneko edozein baldintzatarako: DN kasuan, matrize orokor horretako lehenengo errenkada eta zutabea kentzen dira; ND kasuan, matrize orokor horretako azken lerroa eta zutabea kentzen dira; eta DD kasuan, lehenengo errenkada eta zutabea eta azkenak kentzen dira.

Ohartu K matrizeko $N_i N_j$, $N_i N_j'$ eta $N_i' N_j'$ biderkaketak zero direla $|i-j| > 1$ denean. Ondorioz, K matrizea tridiagonala da dimentsio bakarrean.

3.7.5 Sistematizazioa

Elementu Finituen Metodoan zenbait pauso bereizi behar dira:

1. Geometriaren definizioa: nodoak eta elementuak, ezaugarri fisikoak ($a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $f(x)$) eta ingurune baldintzak.
2. K matrizearen eta F bektorearen kalkulua.
3. Ingurune baldintzen kudeaketa. K matrizearen eta F bektorearen dimentsioen egokitzapena.
4. Ekuazio-sistemaren ebazpena.

Honako atal honetan, 2 eta 3 puntuak garatuko ditugu.

3.7.6 Elementukako egitura EFMan

(3.37) ekuazio-sistemaren eraketa bi zatitan egingo dugu:

- Lehenengo zatian, dimentsiorik handieneko problema hartuko dugu diskretizazioko $(n + 1)$ nodoak (guztiak) kontuan hartuz. Horrela, K matrizea ($(n + 1)$ dimentsioko matrize karratua) eta F bektorea ($(n + 1)$ dimentsioko) kalkulatuko ditugu, ingurune baldintzak kontuan izan gabe. Gainera, suposatuko dugu NN ingurune baldintza nuluak daudela. Hau da, (3.38) sistema era honetan geratuko litzateke NN ingurune baldintza nuluen kasurako:

$$\begin{cases} K_{ij} = \int_0^l (a(x)N_j'(x)N_i'(x)dx + b(x)N_j'(x)N_i(x)dx + c(x)N_j(x)N_i(x)dx), \\ F_i^* = \int_0^l f(x)N_i(x)dx. \end{cases} \quad (3.39)$$

K matrizearen eta F^* bektorearen eraketak bi parte ditu: elementukako integralak kalkulatu behar dira (horrela, elementukako zurruntasun-matrizea eta indar-bektorea lortzen dira); eta elementukako matrizeen mihiztaketa (nodoek eremu osoan daukaten posizioa kontuan hartuz).

- Bigarren partean, problemako ingurune baldintzak izango dira kontuan K matrizean eta F bektorean (Dirichleten baldintzak eta Neumannen baldintza ez-nuluak kontuan hartuz, baleude).

Elementukako zurruntasun-matrizea eta indarren bektorea

Edozein elementu (azpitarte) kontuan hartzen dugunean, $[x_k, x_{k+1}]$, elementu horretako soluzio hurbildua u^h era honetan idazten da:

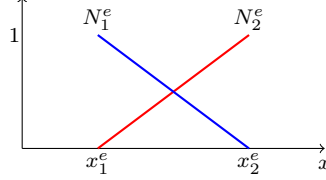
$$u^h(x) = d_k N_k(x) + d_{k+1} N_{k+1}(x), \quad x_k \leq x \leq x_{k+1}, \quad (3.40)$$

$[x_k, x_{k+1}]$ elementuan oinarriko beste funtzioak nuluak baitira. Aurrerantzean $[x_k, x_{k+1}]$ elementu orokorrari $\Omega^e = [x_1^e, x_2^e]$ deituko diogu, eta n elementu

ditugunez, orduan, $e = 1, \dots, n$. Forma-funtzioak definituko ditugu $N_1^e(x)$ eta $N_2^e(x)$, oinarriko funtzioen murrizketa izanik elementuan:

$$N_1^e(x) = \frac{x_2^e - x}{h^e}, \quad N_2^e(x) = \frac{x - x_1^e}{h^e}, \quad x_1^e \leq x \leq x_2^e, \quad (3.41)$$

non $h^e = x_2^e - x_1^e$. 3.5 irudian ikus daitezke forma funtzio linealak.



3.5 irudia. Forma-funtzio linealak.

Notazio berdinarekin jarraituz, d_1^e eta d_2^e deituko diegu d_k eta d_{k+1} ezezagunek hurrenez hurren elementuan dituzten balioei. Orduan:

$$(u^h(x))^e = d_1^e N_1^e(x) + d_2^e N_2^e(x). \quad (3.42)$$

Orduan, K zurruntasun-matrizearentzat zein F^* bektorearentzat 0 eta l balioen arteko integrala kalkulatu behar da, eta era honetan egin daiteke:

$$\int_0^l (\cdot) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega^e} (\cdot), \quad (3.43)$$

non $\Omega^e = [x_1^e, x_2^e]$. Eta K rentzat eta F^* rentzat elementukako aportazioen batuketa har daiteke:

$$K = \sum_{i=1}^n K^e, \quad F^* = \sum_{i=1}^n (F^*)^e, \quad (3.44)$$

K^e eta $(F^*)^e$, K_n eta F^*_n e elementuaren gainean egindako integralek aportatzen duten partea izanik.

Aurrerantzean K^e eta $(F^*)^e$ deituko diegu K matrizean eta F^* bektorean e elementuaren gainean egindako integralek aportatzen dituzten parteei. Beren elementuak nola kalkulatu diren (3.39) adierazpenean ikus daiteke, baina, kasu honetan, integralen eremua Ω^e elementura mugatzen da. EFM funtzioen murrizketa guztiak Ω^e elementuan nuluak dira, bi izan ezik: elementuko muturrei lotutako EFM funtzioak. Horien murrizketak e elementuan forma-funtzioak dira, $N_1^e(x)$ eta $N_2^e(x)$. Beraz, Ω^e elementuak K matrize globalean egiten duen aportazioa $N_1^e(x)$ eta $N_2^e(x)$ funtzioen bidezkoa da.

K^e elementukako zurruntasun-matrizean nuluak ez diren lau elementu egongo dira bakarrik. Dei diezaiegun osagai horiei $K_{11}^e, K_{12}^e, K_{21}^e, K_{22}^e$:

$$K^e = \begin{pmatrix} k_{11}^e & k_{12}^e \\ k_{21}^e & k_{22}^e \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

Aipatutako osagaiak (3.39) adierazpeneko integraletatik eratortzen dira, zeinetan e elementuaren $N_1^e(x)$ eta $N_2^e(x)$ forma-funtzioak agertzen baitira. Hau da, e eta $e + 1$ ekuazioetan (errenkadak), eta e eta $e + 1$ batugaietan (zutabeetan):

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{11}^e = \int_{\Omega^e} (a(x)(N_1^e)'(x)(N_1^e)'(x)dx + b(x)(N_1^e)'(x)N_1^e(x)dx + c(x)N_1^e(x)N_1^e(x)dx), \\ K_{12}^e = \int_{\Omega^e} (a(x)(N_2^e)'(x)(N_1^e)'(x)dx + b(x)(N_2^e)'(x)N_1^e(x)dx + c(x)N_2^e(x)N_1^e(x)dx), \\ K_{21}^e = \int_{\Omega^e} (a(x)(N_1^e)'(x)(N_2^e)'(x)dx + b(x)(N_1^e)'(x)N_2^e(x)dx + c(x)N_1^e(x)N_2^e(x)dx), \\ K_{22}^e = \int_{\Omega^e} (a(x)(N_2^e)'(x)(N_2^e)'(x)dx + b(x)(N_2^e)'(x)N_2^e(x)dx + c(x)N_2^e(x)N_2^e(x)dx). \end{array} \right. \quad (3.46)$$

Era berean, $(F^*)^e$ elementukako indarren bektorean, bi elementu ez-nulu soilik egongo dira. Dei diezaiegun elementu horiei $(F_1^*)^e$ eta $(F_2^*)^e$:

$$(F^*)^e = \begin{pmatrix} (F_1^*)^e \\ (F_2^*)^e \end{pmatrix}. \quad (3.47)$$

Bi terminoak (3.39) adierazpenean e elementuari dagozkion $N_1^e(x)$ eta $N_2^e(x)$ forma-funtzioak agertzen diren integraletatik eratortzen dira. Zehazki, e eta $e + 1$ ekuazioetatik (errenkadetatik):

$$\left\{ \begin{array}{l} (F_1^*)^e = \int_{\Omega^e} f(x)N_1^e(x)dx, \\ (F_2^*)^e = \int_{\Omega^e} f(x)N_2^e(x)dx. \end{array} \right. \quad (3.48)$$

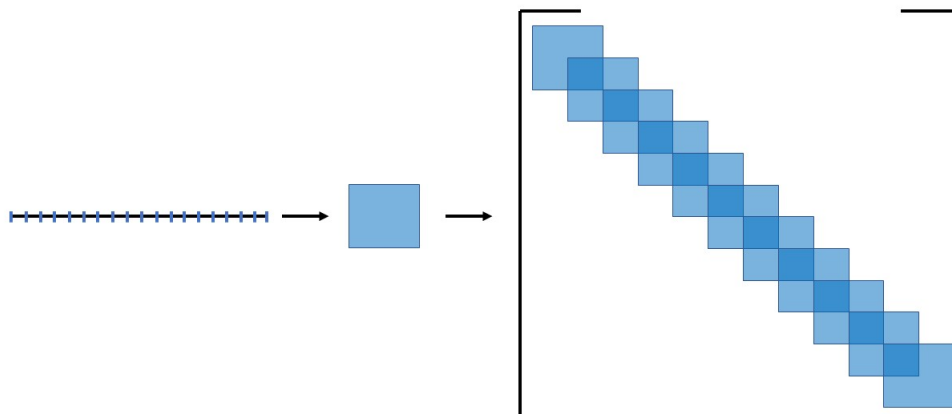
Ohartu elementukako formulatan ez dela agertzen inguruneko baldintzei lotutako terminorik. Horiek geroago txertatuko dira maila globalean, inguruneko baldintzak tratatzen direnean.

Zurruntasun-matrizearen eta indar-bektorearen mihiztaketa

Mihiztaketa-prozesuan (3.44) sortu behar da, elementukako aportazioak, K^e eta $(F^*)^e$ kontuan hartuta. Dimensio bakarreko problemetan, nodoen zenbaketa sekuentziala da, eta erraza da mihiztaketa egitea. Aurretik esan da e elementuaren aportazioa K^e dela, eta e eta $e + 1$ errenkadetan (ekuazioetan) eta zutabeetan (batugaietan) gertatzen da. Ondorioz, elementukako zurruntasun-matrizeak era mailakatuan gainezartzen dira K matrizean (diagonal nagusian, eta bere gaineko eta azpiko diagonaletan); ikus 3.6 irudia. Batzen diren termino bakarrik diagonalekoak dira (lehenengoa eta azkena salbu). F^* matrizeko elementukako aportazioak era berean gainezartzen dira:

$$K = \begin{pmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{11}^2 & k_{12}^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{21}^2 & k_{22}^2 + k_{11}^3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{21}^3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_{22}^{n-2} + k_{11}^{n-1} & k_{12}^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_{21}^{n-1} & k_{22}^{n-1} + k_{11}^n & k_{12}^n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & k_{21}^n & k_{22}^n \end{pmatrix}, \quad (3.49)$$

$$F^* = \begin{pmatrix} (F_1^*)^1 \\ (F_2^*)^1 + (F_1^*)^2 \\ (F_2^*)^2 + (F_1^*)^3 \\ \vdots \\ (F_2^*)^{n-1} + (F_1^*)^n \\ (F_2^*)^n \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$



3.6 irudia. Elementukako matrizeen kalkulua eta mihiztaketa.

Inguruneko baldintzen kudeaketa

Inguruneko baldintzak era globalean kudeatzen dira. Horrek esan nahi du behin K matrize osoa eta F^* bektore osoa mihiztatu ostean egiten dela. Bi pausotan egiten da:

- Neumann motako inguruneko baldintza ez-nuluak izan behar dira kontuan.
- Dirichlet motako inguruneko baldintzak kontuan hartuz egin beharreko problemaren dimentsioaren egokitzapena.

Neumann motako inguruneko baldintza ez-nuluak kontuan hartuz hasiko gara.

- **Neumann motako inguruneko baldintzak.** Baldintza hauek F^* bektorean soilik eragiten dute, eta bektore horretan sartu behar dira Neumann motako inguruneko baldintza ez-nuluak. Ohartu (3.38) adierazpenean geneukan F bektorearen adierazpena honako hau zela:

$$F_i = \int_0^l f(x)N_i(x)dx + a(l)(u^h)'(l)N_i(l) - a(0)(u^h)'(0)N_i(0), \forall i = 0, 1, \dots, n. \quad (3.51)$$

(3.38) adierazpenean Neumann motako inguruneko baldintza nuluak hartu direnez kontuan, F^* lortu da (3.39) adierazpenean:

$$F_i^* = \int_0^l f(x)N_i(x)dx, \quad \forall i = 0, 1, \dots, n.$$

$x_n = l$ muturrean Neumann inguruneko baldintza badugu, hau da $(u^h)'(l) = u'_l$, eta mutur horretan oinarriko funtzioek baldintza hau betetzen dutela kontuan hartuz:

$$\begin{cases} N_i(l) = 0, & i = 0, 1, \dots, (n-1), \\ N_n(l) = 1. \end{cases} \quad (3.52)$$

Beraz, F_n^* osagaian dagokion terminoa gehitu beharko da, hau da:

$$F_n^* \leftarrow \int_0^l f(x)N_n(x)dx + a(l)u'_l.$$

Horrek esan nahi du orain arte daukagun F^* bektoreari bektore bat gehitu behar zaiola. Gehituko zaion bektore horrek azken posizioan izan ezik beste guztietan zeroak izango ditu; azkenengo posizioan (hain zuzen, $x_n = l$ nodoari dagokion posizioan) $a(l)u'_l$ balioa izango du.

Neumann baldintza $x_0 = 0$ lehenengo muturrean izango balitz, hau da $(u^h)'(0) = u'_0$, oinarriko funtzioek mutur horretan honako baldintza hau betetzen dutenez:

$$\begin{cases} N_0(0) = 1, \\ N_i(0) = 0, & \forall i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (3.53)$$

dagokion terminoa gehitu beharko da F_0^* osagaian, hau da:

$$F_0^* \leftarrow \int_0^l f(x)N_0(x)dx - a(0)u'_0.$$

Gehituko den terminoa ikur negatiboaz joango da, (3.51) adierazpenean ikus daitekeen bezala.

- **Dirichlet motako inguruneko baldintzak.** Dirichlet motako inguruneko baldintzek K matrizean eta F^* bektorean eragiten dute.

$x_n = l$ muturrean Dirichlet inguruneko baldintza dagoenean, hau da $(u^h)(l) = g_n$, (3.34) adierazpeneko d_n ezezagunaren balioa ezagutzen da: $d_n = g_n$. Demagun une honetara arte honako ekuazio-sistema hau lortu dela:

$$\begin{pmatrix} k_{00} & \dots & k_{0r} & \dots & k_{0n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_{r0} & \dots & k_{rr} & \dots & k_{rn} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_{n0} & \dots & k_{nr} & \dots & k_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ \vdots \\ d_r \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0^* \\ \vdots \\ F_r^* \\ \vdots \\ F_n^* \end{pmatrix}. \quad (3.54)$$

K matrizeko azkenengo lerroan, azken posizioan izan ezik beste guztietan zeroak sartuko ditugu. Azken lerroko azken posizioan 1 terminoa sartuko dugu. F^* bektoreari dagokionez, azken posizioan g_n balioa sartuko dugu, hau da: $F_n^* = g_n$.

$$\begin{pmatrix} k_{00} & \dots & k_{0r} & \dots & k_{0n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_{r0} & \dots & k_{rr} & \dots & k_{rn} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_{n-1,0} & \dots & k_{n-1,r} & \dots & k_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ \vdots \\ d_r \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0^* \\ \vdots \\ F_r^* \\ \vdots \\ F_{n-1}^* \\ g_n \end{pmatrix}. \quad (3.55)$$

Honako adierazpen hau (3.55) adierazpenaren baliokidea da:

$$\begin{pmatrix} k_{00} & \dots & k_{0r} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_{r0} & \dots & k_{rr} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_{n-1,0} & \dots & k_{n-1,r} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ \vdots \\ d_r \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0^* - g_n k_{0n} \\ \vdots \\ F_r^* - g_n k_{rn} \\ \vdots \\ F_{n-1}^* - g_n k_{n-1,n} \\ g_n \end{pmatrix}. \quad (3.56)$$

Sistema ebazten da eta $d_n = g_n$ balioa lortzen da.

$x_0 = 0$ muturrean Dirichlet inguruneko baldintza badugu, hau da $(u^h)(0) = g_0$, (3.34) adierazpeneko d_0 ezezagunaren balioa ezagutzen da: $d_0 = g_0$. Une horretara arte lortu den ekuazio-sistema hau da:

$$\begin{pmatrix} k_{00} & \dots & k_{0r} & \dots & k_{0n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_{r0} & \dots & k_{rr} & \dots & k_{rn} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_{n0} & \dots & k_{nr} & \dots & k_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ \vdots \\ d_r \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0^* \\ \vdots \\ F_r^* \\ \vdots \\ F_n^* \end{pmatrix}. \quad (3.57)$$

K matrizeko lehenengo lerroan, lehenengo posizioan izan ezik beste guztietan zeroak sartuko ditugu. Lehenengo lerroko lehenengo posizioan 1 terminoa sartuko dugu. F^* bektoreari dagokionez, lehenengo posizioan g_0 balioa sartuko dugu, hau da: $F_0^* = g_0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_{r0} & \dots & k_{rr} & \dots & k_{rn} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_{n0} & \dots & k_{nr} & \dots & k_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ \vdots \\ d_r \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ \vdots \\ F_r^* \\ \vdots \\ F_n^* \end{pmatrix}. \quad (3.58)$$

Sistema ebazten da eta $d_0 = g_0$ balioa lortzen da.

Mutur bietan Dirichlet inguruneko baldintzak daudenean, lehenengo lerroan eta azkenengo lerroan zeroak sartzen dira, aurretik aipatu diren posizioetan izan ezik, non 1 sartzen baita. F^* bektoreko lehenengo posizioan g_0 sartzen da, hau da $F_0^* = g_0$, eta F^* -ren azken posizioan $F_n^* = g_n$. Ondoren, era horretan lortutako sistema ebazten da.

3.7.7 Ereduelementua. Zenbakizko integrazioa

Zurruntasun-matrizea eta indar-bektorea lortzeko (3.46) eta (3.48) integralak egin behar dira. Elementu guztiei trataera bera eman nahi bazaie, eredu-elementu baterako transformazio geometrikoa egin daiteke. Era horretan, integralen kalkulua sistematikoki egingo da elementu guztietan. Horretarako, $\Omega^e = [x_1^e, x_2^e]$ elementu orokor bat $[-1, 1]$ eredu-elementu bilakatuko dugu honako aldagai-aldaketa honen bidez:

$$\xi(x) = \frac{2}{h^e}(x - x_m^e), \quad (3.59)$$

non $h^e = x_2^e - x_1^e$ eta $x_m^e = (x_1^e + x_2^e)/2$ Ω^e elementuaren erdiko puntua izanik.

Ohartu honako berdintza hauek betetzen direla:

$$\xi(x_1^e) = \frac{2}{h^e}(x_1^e - x_m^e) = \frac{2}{x_2^e - x_1^e}\left(x_1^e - \frac{x_1^e + x_2^e}{2}\right) = \frac{x_1^e - x_2^e}{x_2^e - x_1^e} = -1,$$

$$\xi(x_2^e) = \frac{2}{h^e}(x_2^e - x_m^e) = \frac{2}{x_2^e - x_1^e}\left(x_2^e - \frac{x_1^e + x_2^e}{2}\right) = \frac{x_2^e - x_1^e}{x_2^e - x_1^e} = 1.$$

Hau da, $x \in \Omega^e$ betetzen bada, orduan $\xi \in [-1, 1]$ beteko da. *Ereduelementu* edo *elementu kanoniko* deritzo $[-1, 1]$ elementuari, eta honako hauek dira elementu horren forma funtzioak:

$$\hat{N}_1(\xi) = \frac{1 - \xi}{2}, \quad \hat{N}_2(\xi) = \frac{\xi + 1}{2}, \quad -1 \leq \xi \leq 1. \quad (3.60)$$

(3.59) adierazpenetik x askatuz, zera daukagu:

$$x(\xi) = x_m^e + \frac{h^e}{2}\xi, \quad (3.61)$$

eta aldaketaren jacobtarra hauxe da:

$$J(\xi) = \frac{dx}{d\xi} = \frac{h^e}{2}.$$

(3.41) eta (3.60) forma-funtzioen erlazioa honako hau da:

$$N_1^e(x(\xi)) = \frac{x_2^e - x_m^e - \frac{h^e}{2}\xi}{h^e} = \frac{h^e - h^e\xi}{2h^e} = \frac{1 - \xi}{2} = \hat{N}_1(\xi),$$

$$N_2^e(x(\xi)) = \frac{x_m^e + \frac{h^e}{2}\xi - x_1^e}{h^e} = \frac{h^e\xi + h^e}{2h^e} = \frac{\xi + 1}{2} = \hat{N}_2(\xi).$$

Eta beren deribatuak hauek dira:

$$\frac{dN_1^e(x(\xi))}{dx} = \frac{d\hat{N}_1(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{-1}{2} \frac{2}{h^e} = \frac{-1}{h^e},$$

$$\frac{dN_2^e(x(\xi))}{dx} = \frac{d\hat{N}_2(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{2} \frac{2}{h^e} = \frac{1}{h^e}.$$

Integratu nahi den funtzioa $h(x)$ bada eta $\Omega^e = [x_1^e, x_2^e]$ elementu orokorrean integratu nahi bada, (3.61) aldagai-aldaketaren ondorioz honela geratzen da integrala:

$$\int_{x_1^e}^{x_2^e} h(x) dx = \int_{-1}^1 h(x(\xi)) J(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 g(\xi) d\xi, \quad (3.62)$$

non $g(\xi) := h(x(\xi))J(\xi)$.

(3.46) eta (3.47) era honetan kalkula daitezke, elementu kanonikoan goiko adierazpenak erabilia:

$$\hat{K}^e = \begin{pmatrix} \int_{-1}^1 \frac{-1}{h^e} \frac{-1}{h^e} J d\xi & \int_{-1}^1 \frac{-1}{h^e} \frac{1}{h^e} J d\xi \\ \int_{-1}^1 \frac{-1}{h^e} \frac{-1}{h^e} J d\xi & \int_{-1}^1 \frac{1}{h^e} \frac{1}{h^e} J d\xi \end{pmatrix}, \quad (3.63)$$

$$\left(\hat{F}^*\right)^e = \begin{pmatrix} \int_{-1}^1 \hat{f} \hat{N}_1 J d\xi \\ \int_{-1}^1 \hat{f} \hat{N}_2 J d\xi \end{pmatrix}, \quad (3.64)$$

non $\hat{f}(\xi) := f(x(\xi))$.

(3.62) integrala zenbakizko integrazioa erabilia ebaz daiteke. Aukera bat da Gaussen koadratua metodoak erabilia ebaztea:

$$\int_{-1}^1 g(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^m \omega_i g(\xi_i), \quad (3.65)$$

m puntu ξ_i eta w_i pisuak erabiltzen direnean, metodoak era zehatzean integratzen ditu $(2m - 1)$ mailako polinomioak. Puntuak eta pisuak aukeratzeko era asko daude, eta horietako bat da Gauss-Legendreren metodoa. 3.1 taulan jaso dira $m = 1, 2, 3, 4, 5$ puntu aukeratzeko diren kasuetako puntuen osagaiak eta pisuak.

3.7.8 Zatika koadratikoak diren EFM funtzioak

Funtzio koadratikoak erabiltzen ditugunean, zera daukagu:

$$V_h = \{v_h(x) \in C^0(\bar{\Omega}) \mid v_h(x) \text{ koadratikoa elementuka eta } v_h(x) = 0 \text{ } \Gamma_D \text{ eremuan}\}.$$

$v_h(x) \in V_h$ era honetan emanda egongo da:

$$v_h(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad \forall i = 0, \dots, n-1.$$

Kasu honetan, 3 parametro daude elementu bakoitzean. Guztira n elementu daudenez, $3n$ parametro ditugu. Kontuan hartuz V^h espazioa nola definitu dugun,

m	ξ_i	ω_i
1	0	2
2	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	1
3	$\begin{pmatrix} 0 \\ \pm \sqrt{\frac{3}{5}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{8}{9} \\ \frac{9}{9} \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} \pm \sqrt{\frac{3-2\sqrt{\frac{6}{5}}}{7}} \\ \pm \sqrt{\frac{3+2\sqrt{\frac{6}{5}}}{7}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{18+\sqrt{30}}{36} \\ \frac{18-\sqrt{30}}{36} \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 0 \\ \pm \frac{1}{3} \sqrt{5-2\sqrt{\frac{10}{7}}} \\ \pm \frac{1}{3} \sqrt{5+2\sqrt{\frac{10}{7}}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{128}{225} \\ \frac{322+13\sqrt{70}}{900} \\ \frac{322-13\sqrt{70}}{900} \end{pmatrix}$

3.1 taula. Gauss-Legendreren koadraturako puntuak eta pisuak.

Γ_D eremuan zero balio duten eta globalki jarraituak diren funtzioak erabilia, honako murrizketa hauek ditugu:

$$\begin{cases} a_{i-1}x_i^2 + b_{i-1}x_i + c_{i-1} = a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i, & \forall i = 1, \dots, n-1, \\ a_0 x_0^2 + b_0 x_0 + c_0 = 0, & x_0 \in \Gamma_D, \\ a_{n-1} x_n^2 + b_{n-1} x_n + c_{n-1} = 0, & x_n \in \Gamma_D, \end{cases} \quad (3.66)$$

$(n-1)$ barne-nodo daude, eta Γ_D eremuaren araberako kasu hauek eman daitezke:

1. Mutur bietan Dirichlet inguruneko baldintzak: $(n-1)$ barne-nodo daude eta mutur bietan Dirichlet inguruneko baldintzak ditugu. Beraz, $(n-1) + 2$ murrizketa bete behar dira. Horrek esan nahi du V_h espazioaren dimentsioa (parametro kopuruaren eta murrizketa kopuruaren arteko diferentzia) honako hau dela:

$$3n - (n-1) - 2 = 2n - 1,$$

eta askatasun-graduen kopurua $2n - 1$ da.

2. Mutur batean Dirichlet baldintza eta bestean Neumann: $(n-1)$ barne-nodo daude, eta mutur batean Dirichlet inguruneko baldintza dugu. Beraz, $(n-1) + 1$ murrizketa bete behar dira, eta V_h espazioaren dimentsioa da:

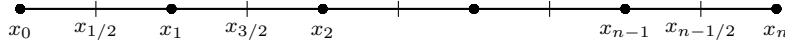
$$3n - n = 2n,$$

eta askatasun-graduen kopurua $2n$.

Bakarrik $n - 1$ barne-nodo daudenez, n puntu laguntzaile gehitzen dira V_h espazioko funtzioak definitu ahal izateko; ikus 3.7 irudia. Puntu laguntzaileak era honetan definitzen dira:

$$x_{i-1/2} = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Hau da, elementu bakoitzeko erdiko puntuak gehitzen dira.



3.7 irudia. Oinarriko funtzio koadratikoen kasuko nodoak eta puntu laguntzaileak.

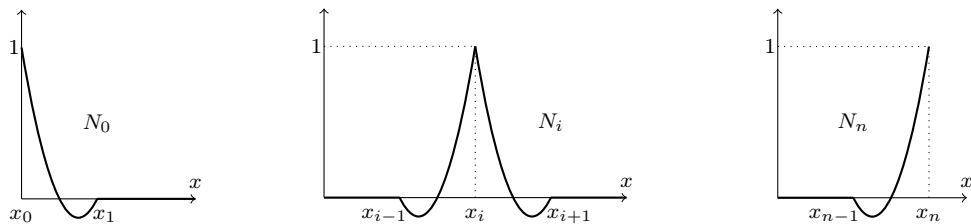
Tarteko nodoetan era honetan definitzen dira funtzio koadratikoak:

$$N_i(x) = \begin{cases} 1 + 3 \left(\frac{x - x_i}{h_{i-1}} \right) + 2 \left(\frac{x - x_i}{h_{i-1}} \right)^2, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ 1 - 3 \left(\frac{x - x_i}{h_i} \right) + 2 \left(\frac{x - x_i}{h_i} \right)^2, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & \text{bestela,} \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, n - 1.$$

Muturretako nodoetan hauek dira funtzioak:

$$N_0(x) = \begin{cases} 1 - 3 \left(\frac{x - x_0}{h_0} \right) + 2 \left(\frac{x - x_0}{h_0} \right)^2, & x_0 \leq x \leq x_1, \\ 0, & \text{bestela,} \end{cases}$$

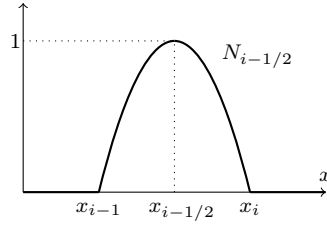
$$N_n(x) = \begin{cases} 1 + 3 \left(\frac{x - x_n}{h_{n-1}} \right) + 2 \left(\frac{x - x_n}{h_{n-1}} \right)^2, & x_{n-1} \leq x \leq x_n, \\ 0, & \text{bestela.} \end{cases}$$



3.8 irudia. Nodoetako EFMko funtzio koadratikoak.

Puntu laguntzaileetan ere oinarriko funtzioak definitzen dira:

$$N_{i-1/2}(x) = \begin{cases} 1 - 4 \left(\frac{x - x_{i-1/2}}{h_{i-1}} \right)^2, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ 0, & \text{bestela,} \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, n - 1.$$



3.9 irudia. Puntu laguntzaileetako EFMko funtzio koadratikoak.

Tarteko eta muturretako nodoetako funtzio koadratikoak 3.8 irudian ikus daitezke, eta puntu laguntzaileetakoak 3.9 irudian.

V^h espazioko oinarriak hauek dira, kasuan kasu:

1. Mutur bietan Dirichlet inguruneko baldintzak daudenean:

$$V_h = \text{span}\{N_{1/2}, N_1, \dots, N_{n-1}, N_{n-1/2}\}. \quad (3.67)$$

2. Mutur batean Dirichlet eta bestean Neumann inguruneko baldintzak. Bi kasu bereizi behar dira:

- DN kasua:

$$V_h = \text{span}\{N_{1/2}, N_1, \dots, N_{n-1}, N_{n-1/2}, N_n\}. \quad (3.68)$$

- ND kasua:

$$V_h = \text{span}\{N_0, N_{1/2}, N_1, \dots, N_{n-1}, N_{n-1/2}\}. \quad (3.69)$$

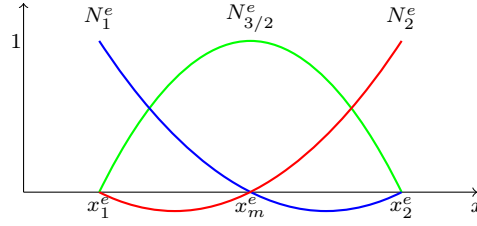
Eta $u^h(x)$ soluzio hurbildua era honetan eraikitzen da:

$$u^h = w^h + g^h = \begin{cases} \sum_{j=1}^n d_j N_j(x) + \sum_{j=1}^n d_{j-1/2} N_{j-1/2}(x) + g_0 N_0(x), & \text{DN problema,} \\ \sum_{j=0}^{n-1} d_j N_j(x) + \sum_{j=1}^n d_{j-1/2} N_{j-1/2}(x) + g_n N_n(x), & \text{ND problema,} \\ \sum_{j=1}^n d_j N_j(x) + \sum_{j=1}^n d_{j-1/2} N_{j-1/2}(x) + g_0 N_0(x) + g_n N_n(x), & \text{DD problema.} \end{cases} \quad (3.70)$$

Beste alde batetik, honako hauek dira forma-funtzio koadratikoak:

$$\begin{cases} N_1^e(x) = 1 - 3 \left(\frac{x - x_1^e}{h^e} \right) + 2 \left(\frac{x - x_1^e}{h^e} \right)^2, \\ N_{3/2}^e(x) = 1 - 4 \left(\frac{x - x_m^e}{h^e} \right)^2, \\ N_2^e(x) = 1 + 3 \left(\frac{x - x_2^e}{h^e} \right) + 2 \left(\frac{x - x_2^e}{h^e} \right)^2, \end{cases} \quad x_1^e \leq x \leq x_2^e, \quad (3.71)$$

non $x_m^e = (x_1^e + x_2^e)/2$. 3.10 irudian ikus daitezke forma funtzio koadratikoak.


3.10 irudia. Forma-funtzio koadratikoak.

Kasu honetan ere (3.27) ekuazioa betetzen denez, matrize lokalaren eta bektore lokalaren dimentsioak 3×3 eta 3×1 dira, hurrenez hurren. Ondorioz, zurruntasun-matrize globala pentadiagonala da.

Lehen bezala, (3.59) aldagai-aldaketa eginez, hauek dira forma-funtzio kanonikoak:

$$\hat{N}_1(\xi) = \frac{\xi(1-\xi)}{2}, \quad \hat{N}_{3/2}(\xi) = 1 - \xi^2, \quad \hat{N}_2(\xi) = \frac{(\xi+1)\xi}{2}, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

eta honako erlazio hauek betetzen dituzte:

$$N_1^e(x(\xi)) = \hat{N}_1(\xi), \quad N_{3/2}^e(x(\xi)) = \hat{N}_{3/2}(\xi), \quad N_2^e(x(\xi)) = \hat{N}_2(\xi),$$

eta, ondorioz:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1^e(x(\xi))}{dx} &= \frac{d\hat{N}_1(\xi)}{x} = \frac{d\hat{N}_1(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1-2\xi}{2} \frac{2}{h^e} = \frac{1-2\xi}{h^e}, \\ \frac{dN_{3/2}^e(x(\xi))}{dx} &= \frac{d\hat{N}_{3/2}(\xi)}{x} = \frac{d\hat{N}_{3/2}(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = -2\xi \frac{2}{h^e} = \frac{-4\xi}{h^e}, \\ \frac{dN_2^e(x(\xi))}{dx} &= \frac{d\hat{N}_2(\xi)}{x} = \frac{d\hat{N}_2(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{2\xi+1}{2} \frac{2}{h^e} = \frac{2\xi+1}{h^e}. \end{aligned}$$

Zurruntasun-matrize eta bektore lokalak elementu kanonikoaren menpe idazten dira (3.63) eta (3.64) kasuetan egin den bezala.

3.8 Errorearen analisisa

Forma bilinealaren jarraitutasuna: $V \times V$ -en definitua dagoen $b(u, v)$ forma bilineala jarraitua da, existitzen bada $0 < M < \infty$ honako baldintza hau betetzen duena:

$$|b(u, v)| \leq M \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in V,$$

$\|\cdot\|$ V -n definitutako norma bat izanik.

Forma linealaren jarraitutasuna: V -n definitua dagoen $l(v)$ forma lineala jarraitua da, existitzen bada $0 < C < \infty$ honako baldintza hau betetzen duena:

$$|l(v)| \leq C \|v\|, \quad \forall v \in V.$$

Forma bilinealaren koertzibitatea: $b(u, v)$ forma bilineala, $V \times V$ -en definitua dagoena koertziboa da, existitzen bada $\alpha > 0$ non:

$$|b(v, v)| \geq \alpha \|v\|^2, \forall v \in V.$$

Lax-Milgram-en teorema. Izan bedi $b(u, v)$ forma bilineal jarraitua eta koertziboa, eta izan bedi $l(v)$ forma lineal jarraitua. Orduan, (3.13) problema bariazionalak soluzio bakarra dauka, eta honako hau betetzen du:

$$\|u\| \leq \|\tilde{u}_0\| \left(1 + \frac{M}{\alpha}\right) + \frac{C}{\alpha}.$$

Teorema. (3.3) problemaren soluzioa den edozein $u \in V$ (3.13) problema bariazionalaren soluzioa da.

*Oharra: (3.13) problemaren soluzioen bakartasunak, (3.3) problemaren soluzioen bakartasuna dakar berekin.

Teorema. Problema bariazional diskretuaren soluzio bakarra existitzen da $u^h \in V^h$. **Hori frogatzeko, nahikoa da zurruntasun-matrizea alderantzikagarria dela frogatzea.

Galerkinen ortogonalitasuna: izan bedi $V^h \subset V$, eta har ditzagun formulazio bariazional jarraitua eta diskretua:

$$\begin{cases} \text{Aurkitu } u \in V \text{ eta } u^h \in V^h \text{ honako hauek betetzen dituztenak:} \\ b(u, v) = l(v), \forall v \in V, \\ b(u^h, v^h) = l(v^h), \forall v^h \in V^h. \end{cases}$$

Problema jarraituan test-funtzio gisa V^h -ko funtzioak erabiliz:

$$b(u, v^h) = l(v^h), \forall v^h \in V^h,$$

eta azken ekuazioari problema diskretua kenduz, Galerkinen ortogonalitasuna lortzen da:

$$b(u - u^h, v^h) = 0, \forall v^h \in V^h.$$

Horrek esan nahi du Elementu Finituen Metodoak ematen duen soluzioa V^h espazio diskretuarekiko b -ortogonal dela. Propietate hau oso garrantzitsua da ondoren ikusiko dugun Céa-ren lemaren frogan.

Hurbilketa teorema (Céa-ren lema). Izan bedi $b(u, v)$ $V \times V$ -en definitutako forma bilineala eta honako propietate hauek betetzen dituen:

- Jarraitua; hau da, existitzen da $0 < M < \infty$ non:

$$|b(u, v)| \leq M \|u\| \|v\|, \forall u, v \in V.$$

- Koertziboa; hau da, existitzen da $\alpha > 0$ non:

$$|b(v, v)| \geq \alpha \|v\|^2, \forall v \in V.$$

Lax-Milgram-en teoremaren arabera, problema bariazionalak eta problema bariazional diskretuak soluzio bakarra daukate. Céaren lema honako hau esaten du:

$$\|u - u^h\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v^h\|, \quad \forall v^h \in V^h.$$

Ondorioz, u^h da u -ren hurbilpenik onena V^h espazioan, $\frac{M}{\alpha}$ konstante baten balioraino.

Froga.

Forma bilinealaren koertzibitatea erabiliz, honako hau daukagu:

$$\alpha \|u - u^h\|^2 \leq |b(u - u^h, u - u^h)|,$$

$b(\cdot, \cdot)$ ko bigarren osagaian $v^h \in V^h$ gehituz eta kenduz

$$\alpha \|u - u^h\|^2 \leq |b(u - u^h, u - v^h + v^h - u^h)|,$$

eta $b(\cdot, \cdot)$ bilineala dela kontuan hartuz, honako hau lortzen da:

$$\alpha \|u - u^h\|^2 \leq |b(u - u^h, u - v^h) + b(u - u^h, v^h - u^h)|.$$

Galerkinen ortogonaltasuna erabiliz, $b(u - u^h, v^h - u^h) = 0$ daukagu, $v^h - u^h$ funtzioa V^h barnean baitago. Azkenik, forma bilinealaren jarraitutasuna aplikatuz, hau lortzen da:

$$\alpha \|u - u^h\|^2 \leq |b(u - u^h, u - v^h)| \leq M \|u - u^h\| \|u - v^h\|,$$

edo goiko adierazpenaren baliokidea den beste adierazpen hau daukagu:

$$\|u - u^h\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v^h\|, \quad \forall v^h \in V^h.$$

Teorema. Izan bedi u^h problema bariazional diskretuaren soluzioa, zatika linealak diren funtzioak erabilia lortzen dena. Izan bedi $h = \max(h_i)$ elementuen tamaina maximoa eta $\|\cdot\|_{L^2}$ $L^2(\Omega)$ espazioko norma. Orduan:

$$\|u - u^h\|_{L^2} \leq Ch^2 \|u''\|_{L^2},$$

non $C > 0$ konstanteak ez baitu elementuen tamainaren (h -ren) eta soluzioaren (u -ren) menpekotasunik.

3.9 Adibideak

3.1 adibidea. Elementu finitu linealak erabilia, ebatzi inguruneko baldintzadun ekuazio diferentzial hau:

$$-u''(x) + u(x) = x, \quad 0 < x < l, \quad u(0) = u_0, \quad u'(l) = u'_l.$$

Jarraitu pauso hauek:

- Problemaren formulazio bariazionala lortu.
- Aplikatu Elementu Finituen Metodoa, eremua hiru elementu lineal berdin erabilia diskretizatuz. Egin formulazio bariazional hurbilduaren garapena, ekuazio-sistema lortu arte.
- Honako datu hauek emanik: $l = 1$, $u_0 = 1$, $u'_l = 1$:
 - Kalkulatu elementukako zurruntasun-matrizeak.
 - Mihiztatu zurruntasun-matrizea eta indar-bektorea.
 - Aplikatu inguruneko baldintzak.

Esku-artean daukagun probleman, $a(x) = 1$, $b(x) = 0$, $c(x) = 1$, $f(x) = x$ dira. 3.4 atalean ikusitakoa kontuan hartuz, zera daukagu:

$$-\int_0^l u''(x)v(x)dx + \int_0^l u(x)v(x)dx = \int_0^l xv(x)dx.$$

Eta lehenego integralari zatikako integrazioa aplikatuz, honako hau daukagu:

$$\int_0^l (u'(x)v'(x) + u(x)v(x)) dx = \int_0^l xv(x)dx + v(l)u'(l) - v(0)u'(0).$$

Hortaz, formulazio bariazionala hauxe da: U funtzio onargarrien eta V test funtzioen espazioak definitzen dira:

$$\begin{aligned} U &= \{u(x) \in H^1((0, l)) \mid u(0) = u_0\}, \\ V &= \{v(x) \in H^1((0, l)) \mid v(0) = 0\}, \end{aligned} \tag{3.72}$$

helburua da $u \in U$ aurkitzea, honako baldintza hau beteko duena:

$$\int_0^l (u'(x)v'(x) + u(x)v(x)) dx = \int_0^l xv(x)dx + v(l)u'(l) - v(0)u'(0), \quad \forall v(x) \in V. \tag{3.73}$$

Orain, EFMa aplikatuko dugu, hiru elementu lineal berdin erabilia diskretizatuz:

Nodoetako EFM funtzioak: $\{N_0(x), N_1(x), N_2(x), N_3(x)\}$.

Oinarriko funtzioak: $V^h \subset V$: $\{N_1(x), N_2(x), N_3(x)\}$.

Funtzio laguntzailea: $N_0(x)$.

Eta hurbilpena era honetan emanda dago:

$$u^h(x) = w^h(x) + g^h(x) = \sum_{j=1}^3 d_j N_j(x) + u_0 N_0(x), \quad (3.74)$$

non:

$$\begin{cases} w^h(x) = \sum_{j=1}^3 d_j N_j(x), \\ g^h(x) = u_0 N_0(x). \end{cases}$$

Edo gauza bera dena:

$$u^h(x) = \sum_{j=0}^3 d_j N_j(x), \quad (3.75)$$

non: $d_0 = u_0$.

3.7.4 atalean ikusitakoa kontuan hartuz, nahikoa da (3.75) adierazpena formulazio bariatzional diskretuko (3.23) adierazpenean ordezkatzea, eta $N_i(x)$ non $i = 0, 1, 2, 3$ funtzioak erabilia sistema hau lortzen baita:

$$\begin{aligned} & \int_0^l a(x) \left(\sum_{j=0}^3 d_j N_j(x) \right)' N_i'(x) dx + \int_0^l c(x) \left(\sum_{j=0}^3 d_j N_j(x) \right) N_i(x) dx \\ &= \int_0^l f(x) N_i(x) dx + a(l)(u^h)'(l) N_i(l) - a(0)(u^h)'(0) N_i(0), \quad \text{non } i = 0, 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Batukariak integraletatik kanpo ateraz, honako hau daukagu:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^3 \left[\int_0^l (a(x) N_j'(x) N_i'(x) dx + c(x) N_j(x) N_i(x) dx) \right] d_j \\ &= \int_0^l f(x) N_i(x) dx + a(l)(u^h)'(l) N_i(l) - a(0)(u^h)'(0) N_i(0), \quad \text{non } i = 0, 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Matrize-idazkera erabilia, (3.77) era honetan idatziko dugu:

$$\sum_{j=0}^3 K_{ij} d_j = F_i, \quad i = 0, 1, 2, 3 \Rightarrow K \cdot d = F, \quad (3.78)$$

non $K = (K_{ij})$ eta $F = (F_i)$:

$$\begin{cases} K_{ij} = \int_0^l (a(x) N_j'(x) N_i'(x) dx + c(x) N_j(x) N_i(x) dx), \\ F_i = \int_0^l f(x) N_i(x) dx + a(l)(u^h)'(l) N_i(l) - a(0)(u^h)'(0) N_i(0). \end{cases} \quad (3.79)$$

K matrize karratuaren dimentsioa 4×4 da, eta F bektoreak 4 osagai ditu.

(3.78) sistema osoa era honetan idatz daiteke:

$$\begin{pmatrix} K_{00} & K_{01} & K_{02} & K_{03} \\ K_{10} & K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{20} & K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{30} & K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}. \quad (3.80)$$

$N_i N_j$, $N_i N'_j$ eta $N'_i N'_j$ biderketak nuluak dira $|i - j| > 1$ baldintza betetzen bada. Hortaz, K matrizeko elementuak honela geratzen dira:

$$\begin{cases} K_{00} = \int_0^l ((N'_0)^2(x) + N_0^2(x)) dx, \\ K_{01} = \int_0^l (N'_1(x)N'_0(x) + N_1(x)N_0(x)) dx, \\ K_{02} = 0, \\ K_{03} = 0, \end{cases} \quad (3.81)$$

$$\begin{cases} K_{10} = \int_0^l (N'_0(x)N'_1(x) + N_0(x)N_1(x)) dx, \\ K_{11} = \int_0^l ((N'_1)^2(x) + (N_1)^2(x)) dx, \\ K_{12} = \int_0^l (N'_2(x)N'_1(x) + N_2(x)N_1(x)) dx, \\ K_{13} = 0, \end{cases} \quad (3.82)$$

$$\begin{cases} K_{20} = 0 \\ K_{21} = \int_0^l (N'_1(x)N'_2(x) + N_1(x)N_2(x)) dx, \\ K_{22} = \int_0^l ((N'_2)^2(x) + (N_2)^2(x)) dx, \\ K_{23} = \int_0^l (N'_3(x)N'_2(x) + N_3(x)N_2(x)) dx, \end{cases} \quad (3.83)$$

$$\begin{cases} K_{30} = 0, \\ K_{31} = 0, \\ K_{32} = \int_0^l (N'_2(x)N'_3(x) + N_2(x)N_3(x)) dx, \\ K_{33} = \int_0^l ((N'_3)^2(x) + N_3^2(x)) dx. \end{cases} \quad (3.84)$$

Ondorioz, K matrizea tridiagonala da:

$$\begin{pmatrix} K_{00} & K_{01} & 0 & 0 \\ K_{10} & K_{11} & K_{12} & 0 \\ 0 & K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ 0 & 0 & K_{32} & K_{33} \end{pmatrix}. \quad (3.85)$$

Bukatzeko, honako datu hauek emanik: $l = 1$, $u_0 = 1$, $u'_l = 1$:

- Kalkulatu elementukako zurruntasun-matrizeak:

Luzera bereko 3 elementu ditugu. 3.7.6 atalean ikusi ditugun kalkuluak egingo ditugu. Izan bitez $\Omega^e = [x_1^e, x_2^e]$, $e = 1, 2, 3$ hiru elementuak. Zehazki, hauek dira 3 elementuak: $\Omega^1 = [0, \frac{1}{3}]$, $\Omega^2 = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, $\Omega^3 = [\frac{2}{3}, 1]$. Elementu bakoitzaren zurruntasun-matrizea kalkulatu dugu:

- $\Omega^1 = [0, \frac{1}{3}]$ elementua: hauek dira $\Omega^e = [x_1^e, x_2^e]$ elementu orokorraren forma-funtzioak:

$$N_1^e(x) = \frac{x_2^e - x}{h^e}, \quad N_2^e(x) = \frac{x - x_1^e}{h^e}, \quad x_1^e \leq x \leq x_2^e, \quad (3.86)$$

non $h^e = x_2^e - x_1^e$.

$\Omega^1 = [0, \frac{1}{3}]$ elementuaren kasuan, hauek dira forma funtzioak:

$$N_1^1(x) = \frac{1/3 - x}{1/3} = 1 - 3x, \quad N_2^1(x) = \frac{x - 0}{1/3} = 3x, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{3}. \quad (3.87)$$

Lehenengo elementuaren forma-funtzioen deribatuak hauek dira:

$$(N_1^1)'(x) = -3, \quad (N_2^1)'(x) = 3, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{3}. \quad (3.88)$$

Datu horiek eta $a(x) = 1$, $b(x) = 0$, $c(x) = 1$ (3.46) adierazpenean ordezkaturik, elementu honetako zurruntasun-matrizea K^1 kalkulatu da:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{11}^1 = \int_{\Omega^1} (a(x)(N_1^1)'(x)(N_1^1)'(x)dx + b(x)(N_1^1)'(x)N_1^1(x)dx \\ \quad + c(x)N_1^1(x)N_1^1(x)dx), \\ K_{12}^1 = \int_{\Omega^1} (a(x)(N_2^1)'(x)(N_1^1)'(x)dx + b(x)(N_2^1)'(x)N_1^1(x)dx \\ \quad + c(x)N_2^1(x)N_1^1(x)dx), \\ K_{21}^1 = \int_{\Omega^1} (a(x)(N_1^1)'(x)(N_2^1)'(x)dx + b(x)(N_1^1)'(x)N_2^1(x)dx \\ \quad + c(x)N_1^1(x)N_2^1(x)dx), \\ K_{22}^1 = \int_{\Omega^1} (a(x)(N_2^1)'(x)(N_2^1)'(x)dx + b(x)(N_2^1)'(x)N_2^1(x)dx \\ \quad + c(x)N_2^1(x)N_2^1(x)dx). \end{array} \right. \quad (3.89)$$

Balio hauek lortzen dira:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{11}^1 = \int_0^{\frac{1}{3}} (9 + (1 - 3x)^2)dx = \frac{28}{9}, \\ K_{12}^1 = \int_0^{\frac{1}{3}} (-9 + (1 - 3x)3x)dx = -\frac{53}{18}, \\ K_{21}^1 = \int_0^{\frac{1}{3}} (-9 + (1 - 3x)3x)dx = -\frac{53}{18}, \\ K_{22}^1 = \int_0^{\frac{1}{3}} (9 + (3x)^2)dx = \frac{28}{9}. \end{array} \right. \quad (3.90)$$

Ondorioz:

$$K^1 = \begin{pmatrix} \frac{28}{9} & -\frac{53}{18} \\ -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} \end{pmatrix}. \quad (3.91)$$

- Honako hauek dira $\Omega^2 = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ elementuko forma-funtzioak:

$$N_1^2(x) = \frac{2/3 - x}{1/3} = 2 - 3x, \quad N_2^2(x) = \frac{x - 1/3}{1/3} = 3x - 1, \quad \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}. \quad (3.92)$$

Eta beren deribatuak beste hauek:

$$(N_1^2)'(x) = -3, \quad (N_2^2)'(x) = 3, \quad \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}. \quad (3.93)$$

Berriro, funtzio horiek eta $a(x) = 1$, $b(x) = 0$, $c(x) = 1$ balioak (3.46) adierazpenean ordezkatzuz, K^2 kalkulatu dugu:

$$\begin{cases} K_{11}^2 = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} (9 + (2 - 3x)^2) dx = \frac{28}{9}, \\ K_{12}^2 = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} (-9 + (2 - 3x)(3x - 1)) dx = -\frac{53}{18}, \\ K_{21}^2 = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} (-9 + (2 - 3x)(3x - 1)) dx = -\frac{53}{18}, \\ K_{22}^2 = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} (9 + (3x - 1)^2) dx = \frac{28}{9}. \end{cases} \quad (3.94)$$

Ondorioz, K^2 hauxe da:

$$K^2 = \begin{pmatrix} \frac{28}{9} & -\frac{53}{18} \\ -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} \end{pmatrix}. \quad (3.95)$$

- $\Omega^3 = [\frac{2}{3}, 1]$ elementuarekin berdin jokatu dugu. Forma-funtzioak hauek dira:

$$N_1^3(x) = \frac{1 - x}{1/3} = 3 - 3x, \quad N_2^3(x) = \frac{x - 2/3}{1/3} = 3x - 2, \quad \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \quad (3.96)$$

Deribatuak beste hauek:

$$(N_1^3)'(x) = -3, \quad (N_2^3)'(x) = 3, \quad \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \quad (3.97)$$

Era berean jokatzuz, K^3 matrizeko osagaiak kalkulatu ditugu:

$$\begin{cases} K_{11}^3 = \int_{\frac{2}{3}}^1 (9 + (3 - 3x)^2) dx = \frac{28}{9}, \\ K_{12}^3 = \int_{\frac{2}{3}}^1 (-9 + (3 - 3x)(3x - 2)) dx = -\frac{53}{18}, \\ K_{21}^3 = \int_{\frac{2}{3}}^1 (-9 + (3 - 3x)(3x - 2)) dx = -\frac{53}{18}, \\ K_{22}^3 = \int_{\frac{2}{3}}^1 (9 + (3x - 2)^2) dx = \frac{28}{9}. \end{cases} \quad (3.98)$$

Eta, ondorioz, hauxe da K^3 :

$$K^3 = \begin{pmatrix} \frac{28}{9} & -\frac{53}{18} \\ -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} \end{pmatrix}. \quad (3.99)$$

Problema honetan $a(x)$, $b(x)$ eta $c(x)$ ez dira x aldagaiaren menpekoak. Ondorioz, elementukako hiru matrizeak berdinak dira.

- Elementukako indar-bektorea lortu.

Indar-bektorea ezberdina da elementu bakoitzean, $f(x) = x$ baita. Elementukako indar-bektorea kalkulatu dugu mutur bietan, Neumann inguruneko baldintza nuluak kontuan hartuz, hau da:

$$F_i^* = \int_0^l f(x)N_i(x)dx.$$

Elementukako $(F^*)^e$ bektorea kalkulatu dugu:

$$\begin{cases} (F_1^*)^e = \int_{\Omega^e} f(x)N_1^e(x)dx, \\ (F_2^*)^e = \int_{\Omega^e} f(x)N_2^e(x)dx. \end{cases}$$

- $\Omega^1 = [0, \frac{1}{3}]$ elementuarentzat:

$$\begin{cases} (F_1^*)^1 = \int_0^{\frac{1}{3}} xN_1^1(x)dx = \int_0^{\frac{1}{3}} x(1-3x)dx = \frac{1}{54}, \\ (F_2^*)^1 = \int_0^{\frac{1}{3}} xN_2^1(x)dx = \int_0^{\frac{1}{3}} x(3x)dx = \frac{1}{27}. \end{cases}$$

- $\Omega^2 = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ elementuarentzat:

$$\begin{cases} (F_1^*)^2 = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} xN_1^2(x)dx = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} x(2-3x)dx = \frac{4}{54}, \\ (F_2^*)^2 = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} xN_2^2(x)dx = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} x(3x-1)dx = \frac{5}{54}. \end{cases}$$

- Eta $\Omega^3 = [\frac{2}{3}, 1]$ elementuarentzat:

$$\begin{cases} (F_1^*)^3 = \int_{\frac{2}{3}}^1 xN_1^3(x)dx = \int_{\frac{2}{3}}^1 x(3-3x)dx = \frac{7}{54}, \\ (F_2^*)^3 = \int_{\frac{2}{3}}^1 xN_2^3(x)dx = \int_{\frac{2}{3}}^1 x(3x-2)dx = \frac{8}{54}. \end{cases}$$

Beraz, hauek dira elementukako hiru indar-bektoreak:

$$(F^*)^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{54} \\ \frac{1}{27} \end{pmatrix}, \quad (F^*)^2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{54} \\ \frac{5}{54} \end{pmatrix}, \quad (F^*)^3 = \begin{pmatrix} \frac{7}{54} \\ \frac{8}{54} \end{pmatrix}. \quad (3.100)$$

- Mihiztatu zurruntasun-matrizea eta indar-bektorea.

- Zurruntasun-matrizearen mihiztadura honela geratzen da:

$$K = \begin{pmatrix} \frac{28}{9} & -\frac{53}{18} & 0 & 0 \\ -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} + \frac{28}{9} & -\frac{53}{18} & 0 \\ 0 & -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} + \frac{28}{9} & -\frac{53}{18} \\ 0 & 0 & -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{28}{9} & -\frac{53}{18} & 0 & 0 \\ -\frac{53}{18} & \frac{56}{9} & -\frac{53}{18} & 0 \\ 0 & -\frac{53}{18} & \frac{56}{9} & -\frac{53}{18} \\ 0 & 0 & -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} \end{pmatrix}. \quad (3.101)$$

- Eta indar-bektorearen mihiztadura honela geratzen da:

$$F^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{54} \\ \frac{1}{27} + \frac{4}{54} \\ \frac{5}{54} + \frac{7}{54} \\ \frac{8}{54} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{54} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{12}{54} \\ \frac{8}{54} \end{pmatrix}. \quad (3.102)$$

- Inguruneko baldintzak aplikatu.

- Neumann baldintza $x_3 = l$ muturrean. Baldintza hau aplikatzen da indar-bektorean. Ondorioz, F_n^* osagaien dagokion batugaia gehitu behar da, hau da:

$$F_n^* \leftarrow \int_0^l f(x)N_n(x)dx + a(l)u_l'.$$

Kasu honetan, $n = 3$, beraz:

$$F = \begin{pmatrix} \frac{1}{54} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{12}{54} \\ \frac{8}{54} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{54} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{12}{54} \\ \frac{62}{54} \end{pmatrix}. \quad (3.103)$$

- Dirichlet inguruneko baldintza $x_0 = 0$ muturrean. Honako hau da Neumann inguruneko baldintza aplikatu osteko sistema:

$$\begin{pmatrix} \frac{28}{9} & -\frac{53}{18} & 0 & 0 \\ -\frac{53}{18} & \frac{56}{9} & -\frac{53}{18} & 0 \\ 0 & -\frac{53}{18} & \frac{56}{9} & -\frac{53}{18} \\ 0 & 0 & -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{54} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{12}{54} \\ \frac{62}{54} \end{pmatrix}. \quad (3.104)$$

Zeroak sartuko ditugu K matrizeko lehenengo lerroko posizio guztietan, lehenengoan ezik, non 1 zenbakia jarriko baitugu. F^* -ren lehenengo posizioan $u_0 = 1$ sartuko dugu, hau da, $F_0^* = u_0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{53}{18} & \frac{56}{9} & -\frac{53}{18} & 0 \\ 0 & -\frac{53}{18} & \frac{56}{9} & -\frac{53}{18} \\ 0 & 0 & -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{9} \\ \frac{12}{54} \\ \frac{62}{54} \end{pmatrix}. \quad (3.105)$$

Ondorioz, (3.105) sistemaren baliokidea den beste sistema hau lortzen da:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{56}{9} & -\frac{53}{18} & 0 \\ 0 & -\frac{53}{18} & \frac{56}{9} & -\frac{53}{18} \\ 0 & 0 & -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{9} \\ \frac{12}{54} \\ \frac{62}{54} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{53}{18} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \underbrace{d_0}_{=1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{56}{9} & -\frac{53}{18} & 0 \\ 0 & -\frac{53}{18} & \frac{56}{9} & -\frac{53}{18} \\ 0 & 0 & -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{55}{18} \\ \frac{12}{54} \\ \frac{54}{54} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.106)$$

(3.106) sistema ebatzi ostean, emaitza hauek lortzen dira:

$$\begin{cases} d_0 = 1 (= u_0), \\ d_1 = 1,1294, \\ d_2 = 1,3490, \\ d_3 = 1,6457. \end{cases} \quad (3.107)$$

Hortaz, honako hau da (3.75) problemaren soluzioa:

$$u^h(x) = \sum_{j=0}^3 d_j N_j(x), \quad (3.108)$$

non d_j balioak (3.107) adierazpenekoak baitira.

3.2 adibidea. Ebatzi 3.1 adibidea Dirichlet inguruneko baldintza homogeneoekin:

$$-u''(x) + u(x) = x, \quad 0 < x < l, \quad u(0) = 0, \quad u(l) = 0.$$

Aurreko adibidearekiko inguruneko baldintzak aldatu egiten dira. Beraz, inguruneko baldintzak aplikatzera arteko kalkuluak berdinak dira. (3.101) zurruntasun-matrizea eta (3.102) indar-bektorea berrartuko ditugu:

$$K = \begin{pmatrix} \frac{28}{9} & -\frac{53}{18} & 0 & 0 \\ -\frac{53}{18} & \frac{56}{9} & -\frac{53}{18} & 0 \\ 0 & -\frac{53}{18} & \frac{56}{9} & -\frac{53}{18} \\ 0 & 0 & -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} \end{pmatrix}, \quad F^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{54} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{12}{54} \\ \frac{8}{54} \end{pmatrix}. \quad (3.109)$$

Hauxe da momentuz daukagun sistema:

$$\begin{pmatrix} \frac{28}{9} & -\frac{53}{18} & 0 & 0 \\ -\frac{53}{18} & \frac{56}{9} & -\frac{53}{18} & 0 \\ 0 & -\frac{53}{18} & \frac{56}{9} & -\frac{53}{18} \\ 0 & 0 & -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{54} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{12}{54} \\ \frac{8}{54} \end{pmatrix}. \quad (3.110)$$

Dirichlet inguruneko baldintzak aplikatuko ditugu:

- K matrizeko lehenengo errenkadako posizioetan zeroak sartuko ditugu lehenengoan izan ezik, non 1 sartuko baitugu. F^* bektoreko lehenengo posizioan $u_0 = 0$ sartuko dugu, hau da, $F_0^* = u_0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{53}{18} & \frac{56}{9} & -\frac{53}{18} & 0 \\ 0 & -\frac{53}{18} & \frac{56}{9} & -\frac{53}{18} \\ 0 & 0 & -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{9} \\ \frac{12}{54} \\ \frac{8}{54} \end{pmatrix}. \quad (3.111)$$

Era honetan, (3.111) sistemaren baliokidea den sistema lortzen da:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{56}{9} & -\frac{53}{18} & 0 \\ 0 & -\frac{53}{18} & \frac{56}{9} & -\frac{53}{18} \\ 0 & 0 & -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{9} \\ \frac{12}{54} \\ \frac{8}{54} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{53}{18} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \underbrace{d_0}_{=0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{56}{9} & -\frac{53}{18} & 0 \\ 0 & -\frac{53}{18} & \frac{56}{9} & -\frac{53}{18} \\ 0 & 0 & -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{9} \\ \frac{12}{54} \\ \frac{8}{54} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.112)$$

- (3.112) sistema eraldatzen jarraituko dugu. K matrizeko azken errenkadako posizioetan, azkenengoan izan ezik, zeroak jarriko ditugu. Azken posizioan 1 jarriko dugu. F^* bektoreko azken posizioan $u_3 = 0$ jarriko dugu, hau da, $F_3^* = u_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{56}{9} & -\frac{53}{18} & 0 \\ 0 & -\frac{53}{18} & \frac{56}{9} & -\frac{53}{18} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{9} \\ \frac{12}{54} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.113)$$

(3.113) sistemaren baliokidea den sistema hau lortzen da:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{56}{9} & -\frac{53}{18} & 0 \\ 0 & -\frac{53}{18} & \frac{56}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{9} \\ \frac{12}{54} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{53}{18} \\ 0 \end{pmatrix} \underbrace{d_3}_{=0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{56}{9} & -\frac{53}{18} & 0 \\ 0 & -\frac{53}{18} & \frac{56}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{9} \\ \frac{12}{54} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.114)$$

Azkenik, (3.114) sistema ebazten da, emaitza hauek lortuz:

$$\begin{cases} d_0 = 0 (= u_0), \\ d_1 = 0,0448, \\ d_2 = 0,0569, \\ d_3 = 0 (= u_3). \end{cases} \quad (3.115)$$

Problemaren soluzioa hau da:

$$u^h(x) = \sum_{j=0}^3 d_j N_j(x), \quad (3.116)$$

non d_j balioak (3.115) adierazpenekoak baitira.

3.3 adibidea. Aurreko bi adibideetako ekuazio diferentziala emanik,

$$-u''(x) + u(x) = x,$$

kalkulatu integralak eredu-elementua erabilia bi era hauetan:

- Integralak analitikoki eginez.
- Zenbakizko integrazioa erabilia.

3.1 adibidean ikusi dugu ekuazioari lotutako elementukako zurruntasun-matrizea (3.89) dela. Zehazki, $a(x) = 1$, $b(x) = 0$, $c(x) = 1$ kasurako honela geratzen da:

$$\begin{cases} K_{11}^e = \int_{\Omega^1} ((N_1^e)'(x)(N_1^e)'(x)dx + N_1^e(x)N_1^e(x)dx), \\ K_{12}^e = \int_{\Omega^1} ((N_2^e)'(x)(N_1^e)'(x)dx + N_2^e(x)N_1^e(x)dx), \\ K_{21}^e = \int_{\Omega^1} ((N_1^e)'(x)(N_2^e)'(x)dx + N_1^e(x)N_2^e(x)dx), \\ K_{22}^e = \int_{\Omega^1} ((N_2^e)'(x)(N_2^e)'(x)dx + N_2^e(x)N_2^e(x)dx). \end{cases} \quad (3.117)$$

$\Omega^e = [x_1^e, x_2^e]$ elementu orokorretik $[-1, 1]$ eredu-elementura pasatzeko, aldagai-aldaketa egingo dugu:

$$x(\xi) = x_m^e + \frac{h^e}{2}\xi.$$

Aldagai-aldaketako jacobtarra hauxe da:

$$J(\xi) = \frac{dx}{d\xi} = \frac{h^e}{2}.$$

Eta forma-funtzioen arteko erlazioa honako hau da.

$$N_1^e(x(\xi)) = \frac{x_2^e - x_m^e - \frac{h^e}{2}\xi}{h^e} = \frac{h^e - h^e\xi}{2h^e} = \frac{1 - \xi}{2} = \hat{N}_1(\xi),$$

$$N_2^e(x(\xi)) = \frac{x_m^e + \frac{h^e}{2}\xi - x_1^e}{h^e} = \frac{h^e\xi + h^e}{2h^e} = \frac{\xi + 1}{2} = \hat{N}_2(\xi).$$

Forma-funtzioen deribatuak hauek dira:

$$\frac{dN_1^e(x(\xi))}{dx} = \frac{d\hat{N}_1(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{2}{h^e} = -\frac{1}{h^e},$$

$$\frac{dN_2^e(x(\xi))}{dx} = \frac{d\hat{N}_2(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{2} \frac{2}{h^e} = \frac{1}{h^e}.$$

Aurrerantzean, tarte bakoitzeko luzerari h deituko diogu, hau da $h^e = h$, elementu guztiak berdinak baitira.

Era honetan, elementukako (3.117) matrizea era honetan geratzen da eredu-elementua erabilia:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{11}^e = \int_{-1}^1 \left(\hat{N}'_1(\xi) \hat{N}'_1(\xi) \frac{h}{2} d\xi + \hat{N}_1(\xi) \hat{N}_1(\xi) \frac{h}{2} d\xi \right) \\ = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{h^2} \frac{h}{2} d\xi + \frac{(1-\xi)^2}{4} \frac{h}{2} d\xi \right) = \frac{1}{h} + \frac{h}{3}, \\ K_{12}^e = \int_{-1}^1 \left(\hat{N}'_2(\xi) \hat{N}'_1(\xi) \frac{h}{2} d\xi + \hat{N}_2(\xi) \hat{N}_1(\xi) \frac{h}{2} d\xi \right) \\ = \int_{-1}^1 \left(\frac{-1}{h^2} \frac{h}{2} d\xi + \frac{(1-\xi^2)}{4} \frac{h}{2} d\xi \right) = -\frac{1}{h} + \frac{h}{6}, \\ K_{21}^e = \int_{-1}^1 \left(\hat{N}'_1(\xi) \hat{N}'_2(\xi) \frac{h}{2} d\xi + \hat{N}_1(\xi) \hat{N}_2(\xi) \frac{h}{2} d\xi \right) \\ = \int_{-1}^1 \left(\frac{-1}{h^2} \frac{h}{2} d\xi + \frac{(1-\xi^2)}{4} \frac{h}{2} d\xi \right) = -\frac{1}{h} + \frac{h}{6}, \\ K_{22}^e = \int_{-1}^1 \left(\hat{N}'_2(\xi) \hat{N}'_2(\xi) \frac{h}{2} d\xi + \hat{N}_2(\xi) \hat{N}_2(\xi) \frac{h}{2} d\xi \right) \\ = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{h^2} \frac{h}{2} d\xi + \frac{(1+\xi)^2}{4} \frac{h}{2} d\xi \right) = \frac{1}{h} + \frac{h}{3}. \end{array} \right. \quad (3.118)$$

Hau da:

$$K^e = \begin{pmatrix} \frac{1}{h} + \frac{h}{3} & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} \\ -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & \frac{1}{h} + \frac{h}{3} \end{pmatrix}. \quad (3.119)$$

Ikus daitekeen moduan, elementukako zurruntasun-matrizea berbera da elementu guztientzat. Orain, $h = \frac{1}{3}$ ordezkatzuz zera daukagu:

$$K^e = \begin{pmatrix} \frac{28}{9} & -\frac{53}{18} \\ -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} \end{pmatrix}. \quad (3.120)$$

3.1 adibidean, elementukako indar-bektorea hauxe dela ikusi dugu:

$$\begin{cases} (F_1^*)^e = \int_{\Omega^e} f(x) N_1^e(x) dx, \\ (F_2^*)^e = \int_{\Omega^e} f(x) N_2^e(x) dx, \end{cases}$$

non $f(x) = x$.

Elementu orokor batetik eredu-elementura pasatzea ahalbidetzen duen aldagai-

aldaketa egingo dugu:

$$\left\{ \begin{array}{l} (F_1^*)^e = \int_{\Omega^e} x N_1^e(x) dx \\ = \int_{-1}^1 \left(\frac{x_1^e + x_2^e}{2} + \frac{h}{2} \xi \right) \frac{1 - \xi}{2} \frac{h}{2} d\xi = \frac{h}{6} (x_2^e + 2x_1^e), \\ (F_2^*)^e = \int_{\Omega^e} x N_2^e(x) dx \\ = \int_{-1}^1 \left(\frac{x_1^e + x_2^e}{2} + \frac{h}{2} \xi \right) \frac{1 + \xi}{2} \frac{h}{2} d\xi = \frac{h}{6} (2x_2^e + x_1^e). \end{array} \right. \quad (3.121)$$

Erraz egiazta daiteke berdinak direla orain lortutako emaitzak eta 1 adibideko edozein elementuren abzisetatik abiatuta lortu zirenak:

$$(F^*)^1 = \left(\frac{1}{\frac{54}{1}} \right), \quad (F^*)^2 = \left(\frac{4}{\frac{54}{5}} \right), \quad (F^*)^3 = \left(\frac{7}{\frac{54}{8}} \right). \quad (3.122)$$

Aurreko atalean, integralak era zehatzean kalkulatu dira eredu-elementuaren gainean. Bigarren mailako polinomioak dira adibide honetan integratu behar diren funtzioak; aldagaia ξ da. Gauss-Legendreren integrazioan bi integrazio-puntu kontuan hartuz integrazioa zehatza izango da. Ondoren, $[0, \frac{1}{3}]$ lehenengo elementuari dagokion indar-bektorea kalkulatu dugu, bi integrazio-puntu erabilita. Bi integrazio-puntu erabiliko ditugunez, abzisa $\xi_i = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ dira, eta integrazio-pisuak $w_i = 1$.

(3.121) adierazpena hartuko dugu kontuan. Lehenengo elementua hartuko dugu, hau da $e = 1$, eta $[x_1^e, x_2^e] = [0, \frac{1}{3}]$, $h = \frac{1}{3}$ ordezkatuko dugu:

$$\left\{ \begin{array}{l} (F_1^*)^1 = \int_{-1}^1 \left(\frac{x_1^1 + x_2^1}{2} + \frac{h}{2} \xi \right) \frac{1 - \xi}{2} \frac{h}{2} d\xi \\ = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \xi \right) \frac{1 - \xi}{2} \frac{1}{6} d\xi = \frac{1}{72} \int_{-1}^1 (1 - \xi^2) d\xi, \\ (F_2^*)^1 = \int_{-1}^1 \left(\frac{x_1^1 + x_2^1}{2} + \frac{h}{2} \xi \right) \frac{1 + \xi}{2} \frac{h}{2} d\xi \\ = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \xi \right) \frac{1 + \xi}{2} \frac{1}{6} d\xi = \frac{1}{72} \int_{-1}^1 (1 + \xi)^2 d\xi. \end{array} \right. \quad (3.123)$$

Bi integral horiek zenbakizko integrazio bidez ebatziko ditugu, bi integrazio-puntu erabilita:

$$\left\{ \begin{array}{l} (F_1^*)^1 = \frac{1}{72} \int_{-1}^1 (1 - \xi^2) d\xi \\ = \frac{1}{72} \left[1 \cdot \left(1 - \left(\frac{-\sqrt{3}}{3} \right)^2 \right) + 1 \cdot \left(1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 \right) \right] = \frac{1}{72} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{54}, \\ (F_2^*)^1 = \frac{1}{72} \int_{-1}^1 (1 + \xi)^2 d\xi \\ = \frac{1}{72} \left[1 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 + 1 \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 \right] = \frac{1}{72} \cdot \frac{8}{3} = \frac{1}{27}. \end{array} \right. \quad (3.124)$$

4. kapitulua

Petrov-Galerkinen Elementu Finituen Metodoa

Atal honetan kontuan hartuko diren problemetan, ezberdinak izango dira funtzio onargarrien eta test-funtzioen espazioak. Forma bilinealak ez du 3.8 atalean azaldu den koertzibitate-propietatea beteko. Kasu honetan, Bubnov-Galerkinen metodoa ez-egonkorra izan daiteke. Beraz, bestelako metodoak erabili beharko dira horrelako problemak diskretizatzeke.

4.1 Formulazioa

Dimentsio bakarreko adbezio-ekuazioa hartuko dugu:

$$\begin{cases} \text{Aurkitu honako hauek betetzen dituen } u: \\ u'(x) = f(x), \quad \forall x \in \Omega = (0, l), \\ u(0) = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

$f(x) \in L^2(\Omega)$ funtzio integragarria izanik. (4.1) problemaren formulazio bariazionala lortzeko, ekuazioa test-funtzio egokiez biderkatu eta Ω eremuan integratuko dugu:

$$\int_0^l u'(x)v(x)dx = \int_0^l f(x)v(x)dx.$$

Kasu honetan, $f(x) \in L^2(\Omega)$ betetzen denez, beharrezkoa da $v(x) \in L^2(\Omega)$ izatea. 3.4 atalean azaldu zen bezala, soluzioak $u \in H_0^1(\Omega)$ bete beharko du. Beraz, honako hau da (4.1) problemaren formulazio bariazionala:

$$\begin{cases} \text{Aurkitu honako hau betetzen duen } u \in U: \\ b(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V, \end{cases} \quad (4.2)$$

$U = H_0^1(\Omega)$ izanik, $V = L^2(\Omega)$ eta

$$b(u, v) = \int_0^l u'v dx, \quad l(v) = \int_0^1 f v dx.$$

(4.2) formulazioari *Petrov-Galerkinen formulazio* deritzo, eta ezberdinak dira funtzio onargarrien espazioa U eta test-funtzioen espazioa V .

Zentzuzkoa da maila diskretuan ere funtzio onargarrien eta test-funtzioen espazio ezberdinak kontuan hartzea: $U_h \subset U$ eta $V_h \subset V$. Hortaz, honako hau da (4.2) problemaren Petrov-Galerkinen formulazio bariazional diskretua:

$$\begin{cases} \text{Aurkitu honako hau betetzen duen } u \in U: \\ b(u^h, v^h) = l(v^h), \quad \forall v^h \in V^h. \end{cases} \quad (4.3)$$

Bubnov-Galerkinen metodoa lortzen da $U^h = V^h$ aukeratzen badira. Aukeraketa horrek, batzuetan, ez egonkortasunak sor ditzake soluzio hurbilduan, elementuaren tamaina ez bada behar beste txikia. Jarraian ikusiko dugun adibidean, agerian geratuko da hori. Problema horri aurre egiteko, komenigarria da diskretizazio-metodo egonkorak erabiltzea. Erreferentzia garrantzitsuak daude Deribatu Partzialeko Ekuazioak (DPE) ebazteko metodo egonkorrei buruz [26, 27, 28]. Metodo horiek bereziki garrantzitsuak dira adbekzio-terminoak agintzen duen problemak ebazteko, horrelakoetan, egonkortasun eza baita gainditu beharreko arazo nagusietakoa. Zenbait diskretizazio-teknika kontuan hartzen dira minimizazio erresidualen metodoen familia zabalean. Horietakoak dira, besteak beste, karratu minimoko Elementu Finituen Metodoa (ingelesez, *least-squares FEM*) [29, 30], egonkortasuna lortzeko metodo bariazionalak [31, 32] edo test-funtzio optimoak aukeratuz lortzen den Petrov-Galerkin ez-jarraituaren metodoa (ingelesez, *Discontinuous Petrov-Galerkin*) [33].

4.2 Adibideak

4.1 adibidea. Dimentsio bakarrean lehen ordenako honako problema hau hartuko dugu kontuan:

$$\begin{cases} u' = f, \quad \forall x \in (0, 1), \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

$f(x) = \frac{1}{2M} \left(1 - \tanh^2 \left(\frac{1}{M} (x - 0, 5) \right) \right)$ izanik eta $M = 0,005$. Problema horren soluzio zehatza honako hau da:

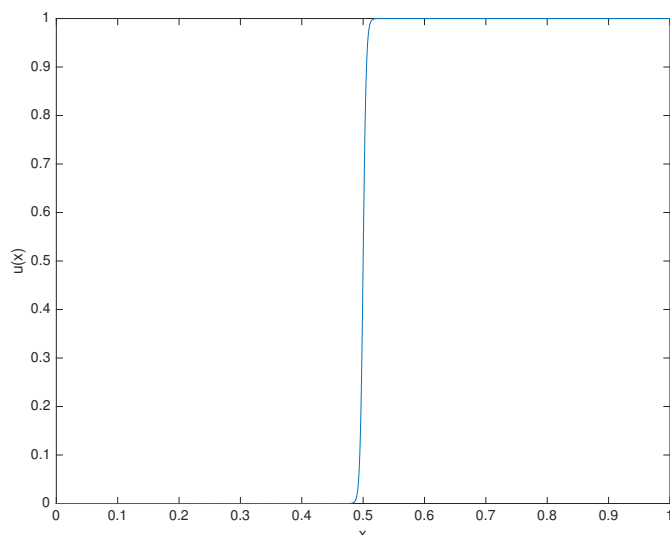
$$u(x) = \frac{1}{2} \left(\tanh \left(\frac{1}{M} (x - 0, 5) \right) + 1 \right).$$

Problema hori ebartziko dugu Bubnov-Galerkinen metodoa erabilita. Zatika emandako funtzio linealak erabiliko dira funtzio onargarri eta test-funtzio gisa. 4.1 irudian soluzio analitikoa irudikatu da. 4.2 irudian 128 elementu erabilita lortu den soluzio hurbildua ikus daiteke. Elementu gutxi hartzen direnean, Bubnov-Galerkinen metodoak soluzio ez-egonkorra ematen duela ondoriozta daiteke.

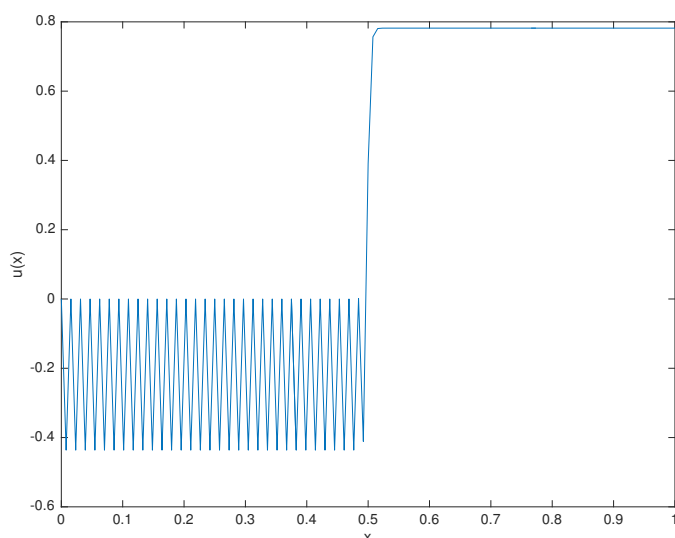
4.2 adibidea. Lehen ordenako honako problema hau hartuko dugu orain kontuan, bi dimentsiotan:

$$\begin{cases} \beta \cdot \nabla u = f, \quad \forall (x, y) \in (0, 1)^2, \\ u = 0, \quad \forall (x, y) \in \Gamma^-. \end{cases}$$

Hemen, $\beta = (1, 1)$ abiadura da, $\nabla u = (\partial_x u, \partial_y u)$ da $u(x, y)$ funtzioaren gradientea, eta $f(x, y)$ definitu da soluzio zehatza (edo analitikoa) honako hau



4.1 irudia. 4.1 adibidearen soluzio analitikoa.



4.2 irudia. 4.1 adibidearen soluzio hurbildua, Bubnov-Galerkin metodoa erabilia.

izateko eran:

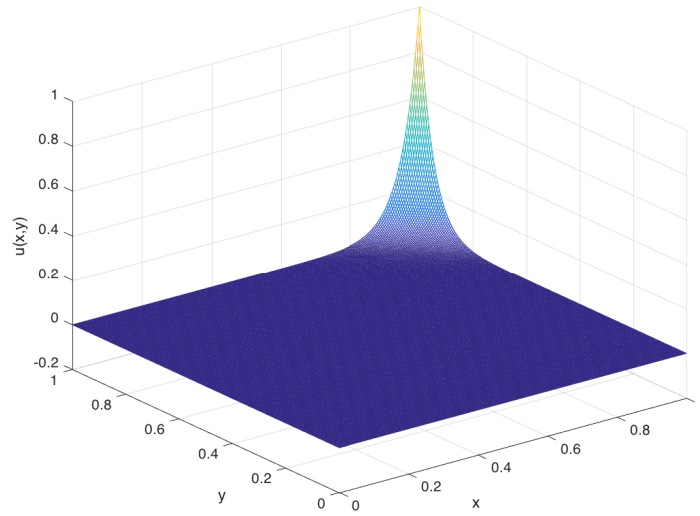
$$u(x, y) = \frac{(e^{20(x-1)} - e^{-20})(e^{20(y-1)} - e^{-20})}{(1 - e^{-20})^2}.$$

Dirichleten inguruneko baldintza homogeneousak hartuko dira kontuan eremu honetan:

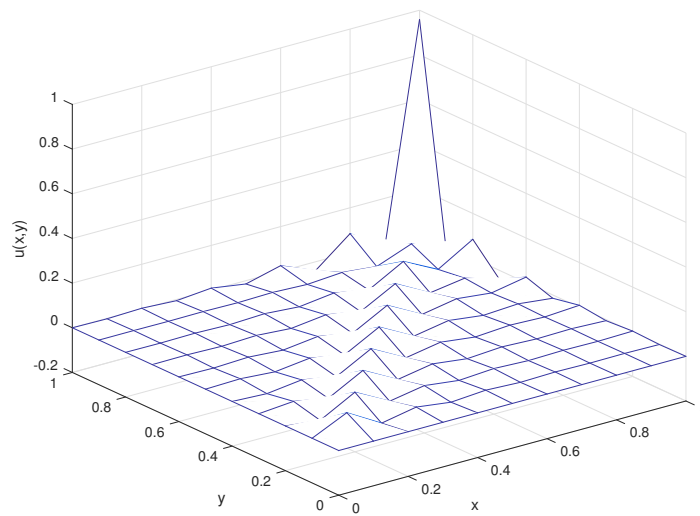
$$\Gamma^- = \{(0, y), y \in (0, 1)\} \cup \{(x, 0), x \in (0, 1)\}.$$

Problema hau ere Bubnov-Galerkinen metodoa erabilia ebatzi da, zatika emandako funtzio linealak erabiliz funtzio onargarri eta test-funtzio gisa. 10×10 elementuko sarea aukeratu da. 4.3 irudian soluzio analitikoa ikus daiteke, eta

4.4 irudian soluzio hurbildua. Berrito agerian geratzen da Bubnov-Galerkinen metodoak soluzio ez egonkorak ematen dituela elementu gutxiko sareetan.



4.3 irudia. 4.2 adibidearen soluzio analitikoa.



4.4 irudia. 4.2 adibidearen soluzio hurbildua Bubnov-Galerkin metodoa erabilia.

4.3 Errorearen analisisa

Babuška-Nečas-en teorema. Hartu kontuan honako formulazio bariazional hau:

$$\begin{cases} \text{Aurkitu } u \in U \text{ non} \\ b(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V, \end{cases}$$

U eta V Hilbert espazioak izanik, $b(\cdot, \cdot)$ forma bilineal jarraitua izanik eta $l(\cdot)$ forma lineal jarraitua V test-espazioan. Gainera, $l(\cdot)$ forma linealari eskatuko diogu bateragarritasun-baldintza betetzea:

$$l(v) = 0, \quad \forall v \in V_0 := \{v \in V \mid b(u, v) = 0, \quad \forall u \in U\}.$$

Orduan, $b(\cdot, \cdot)$ forma bilinealak *inf-sup* baldintza betetzen badu, hau da:

$$\inf_{u \in U - \{0\}} \sup_{v \in V - \{0\}} \frac{|b(u, v)|}{\|u\|_U \|v\|_V} \geq \gamma > 0,$$

$\|\cdot\|_U$ eta $\|\cdot\|_V$ hurrenez hurren U eta V espazioetan definitutako normak izanik, problema bariazionalaren u soluzio bakarra existitzen da.

Babuška teorema. Aurreko problema bariazionalaren Petrov-Galerkinen diskretizazioa hartuko dugu kontuan:

$$\begin{cases} \text{Aurkitu } u^h \in U^h \text{ non} \\ b(u^h, v^h) = l(v^h), \quad \forall v^h \in V^h, \end{cases}$$

$U^h \subset U$ eta $V^h \subset V$ funtzio onargarrien eta test-funtzioen espazio diskretuak izanik, eta $\dim U_h = \dim V_h \leq \infty$. $b(\cdot, \cdot)$ forma bilinealak eta espazio diskretuek *inf-sup* baldintza diskretua betetzen badute:

$$\inf_{u^h \in U^h - \{0\}} \sup_{v^h \in V^h - \{0\}} \frac{|b(u^h, v^h)|}{\|u^h\|_U \|v^h\|_V} \geq \gamma^h > 0,$$

orduan, problema bariazional diskretuak soluzio diskretu bakarra du, u^h , eta honako hau beteko da:

$$\|u - u^h\| \leq \frac{M}{\gamma^h} \inf_{w^h \in U^h} \|u - w^h\|_U,$$

M izanik $b(\cdot, \cdot)$ forma bilinealaren jarraitutasun konstantea.

5. kapitulua

Lerroen metodoa

Espazioaren eta denboraren menpeko Deribatu Partzialeko Ekuazioak (DPE) ebazteko erabiltzen den teknika da *Lerroen metodoa* izenekoa (ingelesez *Method of Lines, MoL*). Lehenengo, espazioko aldagaiak diskretizatzen dira EFMa erabilita, eta, ondorioz, Ekuazio Diferentzial Arrunten (EDA) sistema bat lortzen da. Ondoren, denborako diskretizazioa egiten da hasierako baliodun EDAk ebazteko metodoak erabilita (Eulerren metodoak, etab.).

Atal honetan, beroaren ekuazioari eta uhin-ekuazioari *Lerroen metodoa* aplikatuko zaie. Formulazio matematikoa azalduko dugu, eta ordenagailu bidezko simulazioetan lortutako emaitza batzuk ere aurkeztuko dira.

5.1 Beroaren ekuazioa

Beroaren ekuazioa edo difusio-ekuazioa hartuko da kontuan dimentsio bakarrean. l luzeradun eremua $\Omega = [0, l]$, denbora-tartea $I = [0, T]$ eta inguruneko Dirichleten baldintza nuluak hartuko dira kontuan.

$$\blacksquare \text{ Beroaren ekuazioa: } \begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, \\ u(0, t) = 0 = u(l, t), \\ u(x, 0) = g(x), \end{cases} \quad (5.1)$$

$\alpha^2 = \frac{k}{c\rho}$ difusibitate termikoa izanik, k eroankortasun termala, c gaitasun termala eta ρ dentsitatea. Hemen, hasierako baldintza funtzio bat da $g(x)$.

5.1.1 Soluzio analitikoa

Beroaren ekuazioaren soluzio analitikoa edo zehatza aldagaien banaketaren metodoa erabilita lor daiteke [34]. (5.1) problemaren soluzio analitikoa honako autofuntzio hauen serie bidezko garapen gisa emana dago ($\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$, $k = 1, 2, \dots$):

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) e^{-(\alpha k\pi)^2 t}, \quad (5.2)$$

$$\text{non } A_k = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx.$$

Hasierako baldintza autofuntzioren baten berdina denean, hau da, $g(x) = \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)$, orduan: $A_k = \begin{cases} 0, & i \neq k \text{ bada} \\ 1, & i = k \text{ bada} \end{cases}$. Eta, orduan, batugai bakarrak osatzen du emaitza:

$$u(x, t) = \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) e^{-(\alpha i\pi)^2 t}. \quad (5.3)$$

$l = 8$ luzeradun eta $\alpha^2 = 1$ kasuan, honako hasierako baldintza hau kontuan hartuz:

$$g(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{8}\right), \quad \forall x \in [0, 8], \quad (5.4)$$

soluzio analitikoa honako hau litzateke:

$$u(x, t) = \sin\left(\frac{\pi x}{8}\right) e^{-\pi^2 t}. \quad (5.5)$$

5.1.2 Lerroen metodoaren bidezko soluzioa

$\Omega = [0, l]$ tartea zatituko dugu n azpitartetan, (3.25) adierazpenean bezala:

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = l.$$

Soluzio hurbildua t aldagaiaren menpekotasuna duten koefizienteen bidez definitzen da:

$$u(x, t) \approx u^h(x, t) = \sum_{j=0}^n d_j(t) N_j(x). \quad (5.6)$$

(5.6) denborarekiko eta espazioarekiko deribatuz, honako hauek ditugu:

$$u_t^h(x, t) = \sum_{j=0}^n d_j'(t) N_j(x), \quad u_{xx}^h(x, t) = \sum_{j=0}^n d_j(t) N_j''(x). \quad (5.7)$$

(5.7) adierazpenak (5.1) adierazpenean ordezkatzuz, eta 3 atalean bezala $N_i(x)$ test-funtzioekin biderkatuz eta $\Omega = [0, l]$ tartean espazioarekiko integratuz, honako hau lortzen da:

$$\int_0^l \sum_{j=0}^n d_j'(t) N_j(x) N_i(x) dx = \alpha^2 \int_0^l \left(\sum_{j=0}^n d_j(t) N_j''(x) N_i(x) \right) dx, \quad \forall i = 0, \dots, n. \quad (5.8)$$

(5.8) adierazpena honela berrordena daiteke:

$$\sum_{j=0}^n \left(\int_0^l N_j(x) N_i(x) dx \right) d_j'(t) = \alpha^2 \sum_{j=0}^n \left(\int_0^l N_j''(x) N_i(x) dx \right) d_j(t), \quad \forall i = 0, \dots, n. \quad (5.9)$$

Espazioarekiko bigarren deribatua agertzen den terminoari zatikako integrazioa aplikatuz, honako hau lortzen da:

$$\sum_{j=0}^n \left(\int_0^l N_j(x) N_i(x) dx \right) d_j'(t) = -\alpha^2 \sum_{j=0}^n \left(\int_0^l N_j'(x) N_i'(x) dx \right) d_j(t), \quad \forall i = 0, \dots, n. \quad (5.10)$$

(5.10) adierazpenean agertzen diren integralei honela deituz:

$$m_{ij} = \int_0^l N_j(x)N_i(x)dx, \quad k_{ij} = \int_0^l N'_j(x)N'_i(x)dx, \quad (5.11)$$

honako hau daukagu:

$$\sum_{j=0}^n \left(\underbrace{\int_0^l N_j(x)N_i(x)dx}_{m_{ij}} \right) d'_j(t) = -\alpha^2 \sum_{j=0}^n \left(\underbrace{\int_0^l N'_j(x)N'_i(x)dx}_{k_{ij}} \right) d_j(t), \quad \forall i = 0, \dots, n. \quad (5.12)$$

Bukatzeko, (5.12) adierazpena matrize eran idatziko dugu:

$$\sum_{j=0}^n m_{ij}d'_j(t) = -\alpha^2 \sum_{j=0}^n k_{ij}d_j(t), \quad \forall i = 0, \dots, n \quad \Rightarrow \quad \boxed{M\mathbf{d}'(t) = -\alpha^2 K\mathbf{d}(t)} \quad (5.13)$$

(5.13) Ekuazio Diferentzial Arrunten sistema bat da, hasierako baldintza $\mathbf{d}(0) = \mathbf{d}_0 = (g(x_0), g(x_1), \dots, g(x_{n-1}), g(x_n))^T$. (5.13) EDA sistema honela idatz daiteke $y' = f(t, y)$ eran:

$$\mathbf{d}'(t) = -\alpha^2 M^{-1}K\mathbf{d}(t), \quad \mathbf{d}(0) = \mathbf{d}_0. \quad (5.14)$$

Hasierako baliodun (5.14) EDA sistema Eulerren metodoak, eta abar erabilita ebartz daiteke.

5.1.3 Egonkortasuna

(5.13) sistema denboran esplizituak diren metodoak erabilia ebazten bada, Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) baldintza bete behar da diskretizazioaren egonkortasuna ziurtatu nahi bada [35]. (5.13) problemaren soluzioa egonkorra izateko, denboran integratzeko erabili den metodoaren egonkortasun-eremuan egon behar dute $A := -\alpha^2 M^{-1}K$ matrizearen autobalioen eta denborako pauso-tamainen biderketek. 2.5 irudian s ataleko eta p ordenako Runge-Kutta metodo esplizituen egonkortasun-eremuak irudikatu dira $s = p$ kasurako.

Espazioan dimentsio bakarrekoa den problema denboran Eulerren metodo esplizitua erabiliz integratu da. Eulerren metodo esplizitua Runge-Kutta metodo esplizitua da, $s = p = 1$ izanik. Sare uniforme kontuan hartuko dugu bai espazioan baita denboran ere; h izango da espazioko elementu bakoitzaren tamaina eta τ denborako pauso-tamaina. Zatika emandako funtzio linealak kontuan hartzen badira espazioan, elementukako matrizeak honako hauek dira:

$$M_{elem} = h \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}, \quad K_{elem} = \frac{\alpha^2}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A matrizearen autobalio guztiak denborako pauso-tamainaz biderkatu ostean denboran erabili den zenbakizko metodoaren egonkortasun-eremuan egon daitezen, honako baldintza bete beharko du modulurik handieneko autobalioak:

$$-2 < \lambda_{max}\tau < 0, \quad (5.15)$$

A matrizearen modulurik handieneko autobalioa $\lambda_{max} = \frac{-12\alpha^2}{h^2}$ da. Hortaz, (5.15) baldintza honetan bihurtzen da:

$$\frac{\tau\alpha^2}{h^2} < \frac{1}{6}.$$

Eta azken adierazpen hori da, hain zuzen, dimentsio bakarreko espazioko (5.13) problemak bete beharreko CFL baldintza, denboran aurrera egiteko Eulerren metodo esplizitua erabiltzen denean.

5.1.4 Simulazioak

Aurretik azaldutakoa aplikatuko dugu zenbait adibidetan. *MATLAB* softwarea erabili da adibide hauek egiteko [36].

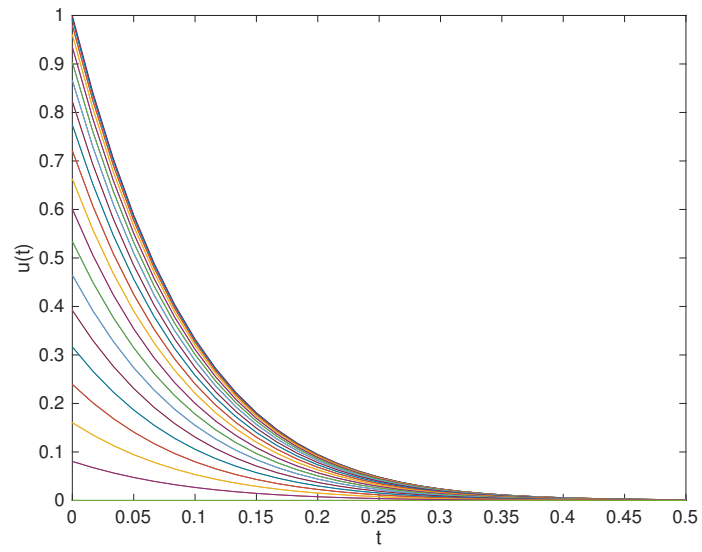
5.1 adibidea. Har dezagun (5.1) problema, $\Omega = [0, 1]$, $\alpha^2 = 1$ eta $I = [0, 0, 5]$ izanik.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \\ u(0, t) = 0 = u(1, t), \\ u(x, 0) = \sin(\pi x). \end{cases}$$

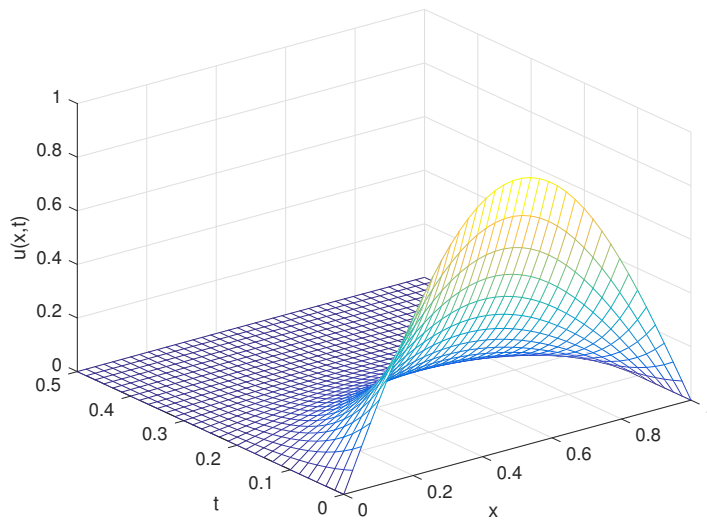
Problemaren $u(x, t)$ soluzioak gorputz bateko tenperatua-distribuzioa adieraz dezake. Problema konputagailuz ebatziko dugu, espazioan zatika linealak diren funtzioak hartuko ditugu kontuan, eta era horretan sortzen den EDA sistema metodo trapezoidala erabilia ebatziko dugu. 40 nodo hartu dira kontuan espazioan, eta denboran 30 pauso eman dira.

Nodo bakoitzak denboran duen eboluzioa ikus daiteke 5.1 irudian. Ohartu irudi horretan 20 kurba ditugula, hau da, kurba bat nodo bikoitzeko. Hori gertatzen da, espazioko tarteko erdiko puntuarekiko simetrikoak diren nodoetan difusioa berdina delako. Espazioko tarteko lehenengo eta azkenengo nodoei zero funtzio konstantea dagokie, eta baliorik handieneko kurba erdiko puntuan gertatzen da. Beste alde batetik, 5.2 irudiak erakusten du aldiune bakoitzean nodo bakoitzean izango den u funtzioaren balioa. Irudi honetan argi geratzen da denboran aurrera egin ahala difusioa disipatuz doala.

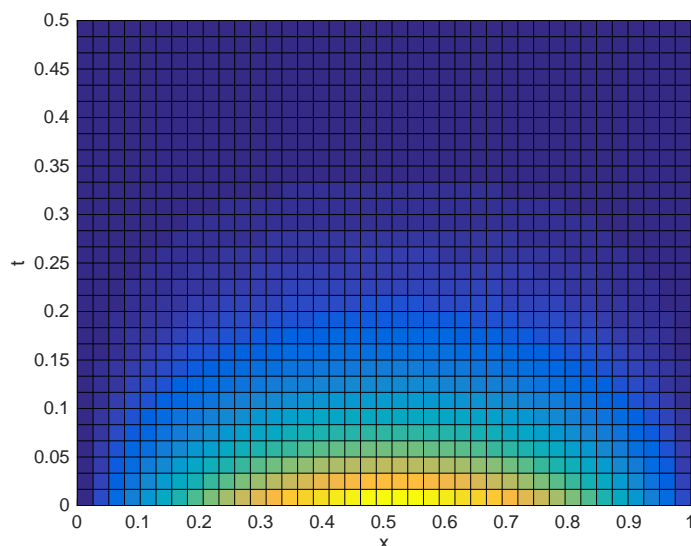
Azkenik, 5.3 irudian adierazi da espazio-denborako sarea eta $u(x, t)$ soluzioaren kolore-mapa.



5.1 irudia. Nodo bakoitzaren eboluzioa denboran, 5.1 adibidean.



5.2 irudia. Difusioa denboran, 5.1 adibidean.



5.3 irudia. Espazio-denbora sarea 5.1 adibidean.

5.2 Uhin-ekuazioa

Atal honetan, uhin-ekuazioa hartuko da kontuan dimentsio bakarrean. Berriro, l luzerako eremua $\Omega = [0, l]$, denbora-tartea $I = [0, T]$ eta inguruneko Dirichleten baldintza nuluak hartuko dira kontuan.

$$\blacksquare \text{ Uhin-ekuazioa: } \begin{cases} u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}, \\ u(0, t) = 0 = u(l, t), \\ u(x, 0) = g(x), \\ u_t(x, 0) = f(x). \end{cases} \quad (5.16)$$

(5.16) ekuazioak muturretan sendo tinkatutako l luzerako soka baten mugimendu ondulatorio bertikala deskribatzen du deboran zehar. Soka homogenea eta guztiz elastikoa dela suposatu da, eta kanpoko indarrek ez dutela bere gainean eragiten. $u(x, t)$ deitu diogu sokako $x \in \Omega$ puntuaren t aldiuneko oreka-posizioarekiko desplazamendu bertikalari.

Gainera, $\alpha^2 = T_0/\rho$ da uhinaren hedapen-abiadura, T_0 izanik aplikatutako tentsioa eta ρ masa-dentsitate lineala. Soka homogenea eta elastikoa dela jo dugunez, T_0 eta ρ konstanteak dira. Sokaren hasierako posizioa eta hasierako abiadura dira $g(x)$ eta $f(x)$, hurrenez hurren. Dirichleten inguruneko baldintzek sokaren mutur biak finkatzen dituzte.

5.2.1 Soluzio analitikoa

Kasu honetan, aldagai-banaketako metodoa erabiliz, (5.16) problemaren soluzio analitikoa lor daiteke [34]:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(B_k \cos \left(\frac{k\pi\alpha t}{l} \right) + C_k \sin \left(\frac{k\pi\alpha t}{l} \right) \right) \sin \left(\frac{k\pi x}{l} \right), \quad (5.17)$$

$$\text{non } B_k = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin \left(\frac{k\pi x}{l} \right) dx \text{ eta } C_k = \frac{2}{k\pi\alpha} \int_0^l f(x) \sin \left(\frac{k\pi x}{l} \right) dx.$$

5.2.2 Lerroen metodoaren bidezko soluzioa

Berriro, (3.25) adierazpenean bezala, $\Omega = [0, l]$ tartea zatituko dugu n azpitartetan. Soluzio hurbildua honela definitzen dugu:

$$u(x, t) \approx u^h(x, t) = \sum_{j=0}^n d_j(t) N_j(x). \quad (5.18)$$

Kasu honetan, (5.18) denborarekiko eta espazioarekiko deribatuz, honako hauek ditugu:

$$u_{tt}^h(x, t) = \sum_{j=0}^n d_j''(t) N_j(x), \quad u_{xx}^h(x, t) = \sum_{j=0}^n d_j(t) N_j''(x). \quad (5.19)$$

(5.19) adierazpenak (5.16) adierazpenean ordezkatzuz, test-funtzioekin biderkatuz eta espazioarekiko integratuz, honako hau lortzen da:

$$\int_0^l \sum_{j=0}^n d_j''(t) N_j(x) N_i(x) dx = \alpha^2 \int_0^l \left(\sum_{j=0}^n d_j(t) N_j''(x) N_i(x) \right) dx, \quad \forall i = 0, \dots, n. \quad (5.20)$$

(5.20) adierazpena berrordenatuz:

$$\sum_{j=0}^n \left(\int_0^l N_j(x) N_i(x) dx \right) d_j''(t) = \alpha^2 \sum_{j=0}^n \left(\int_0^l N_j''(x) N_i(x) dx \right) d_j(t), \quad \forall i = 0, \dots, n. \quad (5.21)$$

Zatikako integrazioa aplikatuz, honako hau lortzen da:

$$\sum_{j=0}^n \left(\underbrace{\int_0^l N_j(x) N_i(x) dx}_{m_{ij}} \right) d_j''(t) = -\alpha^2 \sum_{j=0}^n \left(\underbrace{\int_0^l N_j''(x) N_i(x) dx}_{k_{ij}} \right) d_j(t), \quad \forall i = 0, \dots, n. \quad (5.22)$$

(5.22) adierazpena matrize eran idatziz:

$$\sum_{j=0}^n m_{ij} d_j''(t) = -\alpha^2 \sum_{j=0}^n k_{ij} d_j(t), \quad \forall i = 0, \dots, n \quad \Rightarrow \quad \boxed{M \mathbf{d}''(t) = -\alpha^2 K \mathbf{d}(t)} \quad (5.23)$$

Hemen, (5.23) bigarren ordenako EDA sistema bat da, hasierako baldintzak $\mathbf{d}(0) = \mathbf{d}_0 = (g(x_0), g(x_1), \dots, g(x_{n-1}), g(x_n))^T$ eta $\mathbf{d}'(0) = \mathbf{d}'_0 = (f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_{n-1}), f(x_n))^T$. Amaitzeko, (5.23) EDA sistema honela idatz daiteke:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}''(t) &= -\alpha^2 M^{-1} K \mathbf{d}(t), \\ \mathbf{d}(0) &= \mathbf{d}_0, \\ \mathbf{d}'(0) &= \mathbf{d}'_0. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Hasierako baliodun (5.24) EDA sistema HHT- α metodoa, eta abar erabilita ebatz daiteke.

5.2.3 Simulazioak

5.2 adibidea. Har dezagun (5.16) problema, $\Omega = [0, 2]$, $\alpha^2 = 1$ eta $I = [0, 10]$ izanik.

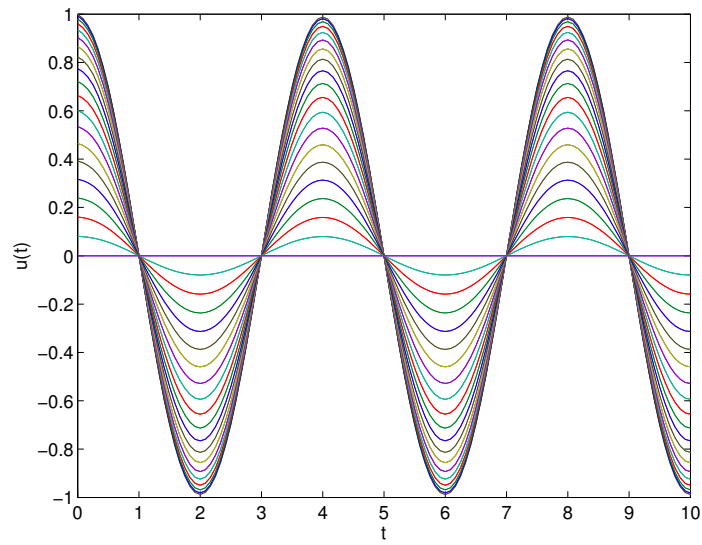
$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \\ u(0, t) = 0 = u(2, t), \\ u(x, 0) = \sin(\frac{\pi}{2}x), \\ u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

Hemen, 2 unitateko luzerako soka hartuko da kontuan. Sokaren mutur biak finko daude zero altueran edozeinaldiunetan. Sokaren hasierako posizioa $u(x, 0) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$ da, eta hasierako abiadura nulua da, $u_t(x, 0) = 0$. Problema honek sokaren bibrazioak modelatzen ditu 10 segundotan. Konputagailuz lortu da soluzioa, zatika linealak diren funtzioak kontuan hartuz, eta 4 ordenako BDF metodoa erabili da EDA sistema ebazteko. 40 nodo hartu dira espazioan, eta 120 pauso eman dira denboran.

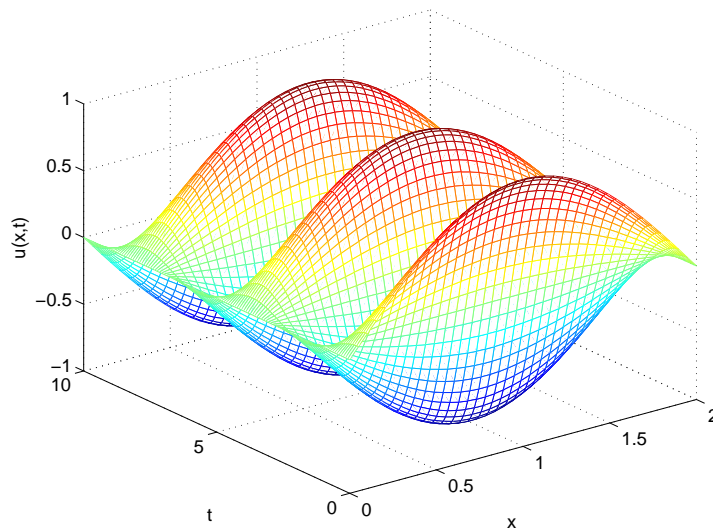
5.4 irudian ikus daiteke sokako nodo bakoitzak denboran duen mugimendua. Ohartu 20 kurba ditugula, hau da, kurba bat nodo bikote bakoitzerako. Hori gertatzen da, espazioko tarteko erdiko puntuarekiko simetrikoak diren nodoetan mugimendua bera delako.

Espazioko lehenengo eta azkenengo nodoei zero funtzio konstantea dagokie (hau da, geldirik daude altuera horretan), eta baliorik handieneko kurba erdiko puntuan gertatzen da. Beste alde batetik, 5.5 irudiak erakusten du nodo bakoitzak aldiune bakoitzean duen posizioa. Hau da, irudi horretan uhinaren eboluzioa ikus daiteke.

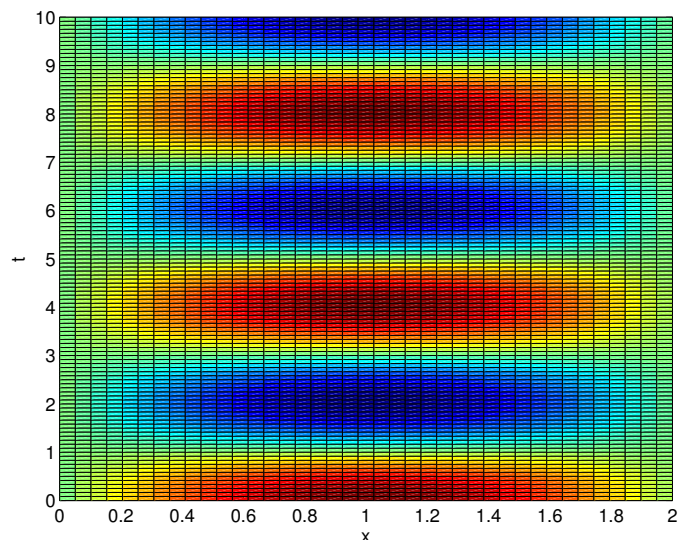
Azkenik, 5.6 irudian adierazi dira espazio-denborako sarea eta $u(x, t)$ soluzioa kolore ezberdinak erabilita. Soluzioaren baliorik handienak gorritz adierazi dira, baliorik txikienak urdinez, eta balio nulua berdez.



5.4 irudia. Nodo bakoitzaren eboluzioa denboran, 5.2 adibidean.



5.5 irudia. Uhinaren eboluzioa 5.2 adibidean.

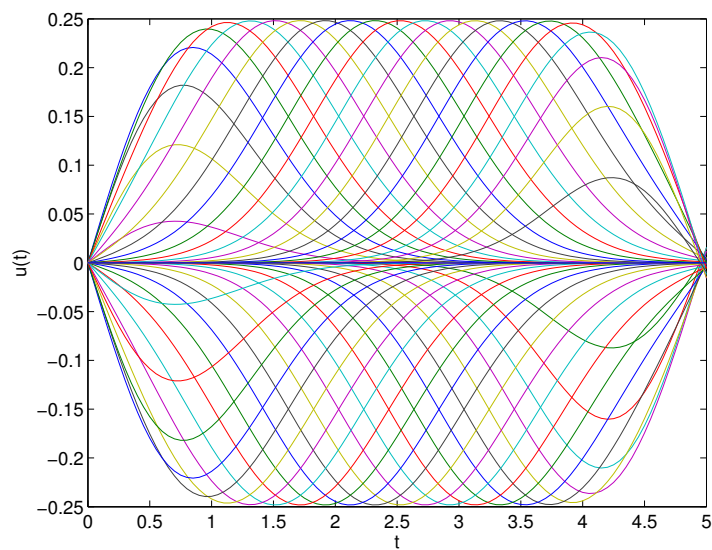


5.6 irudia. Espazio-denbora sarea 5.2 adibidean.

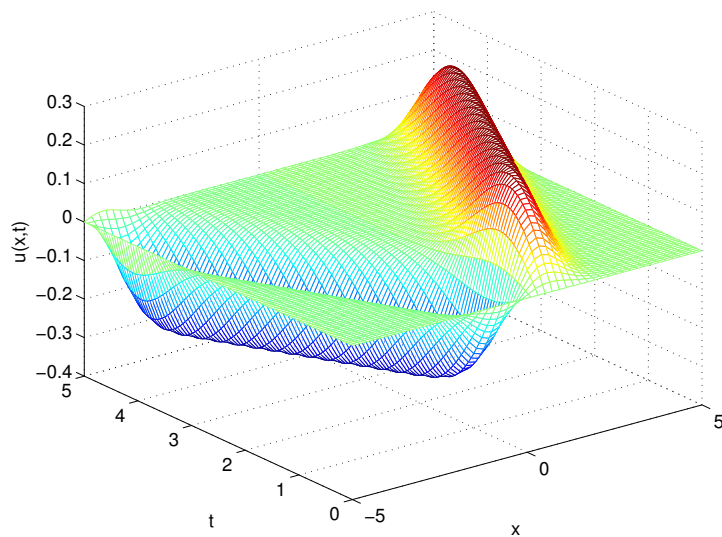
5.3 adibidea. Honako problema hau hartuko dugu, $\Omega = [-5, 5]$, $\alpha^2 = 1$ eta $I = [0, 5]$ izanik.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \\ u(-5, t) = 0 = u(5, t), \\ u(x, 0) = 0, \\ u_t(x, 0) = xe^{-x^2}. \end{cases}$$

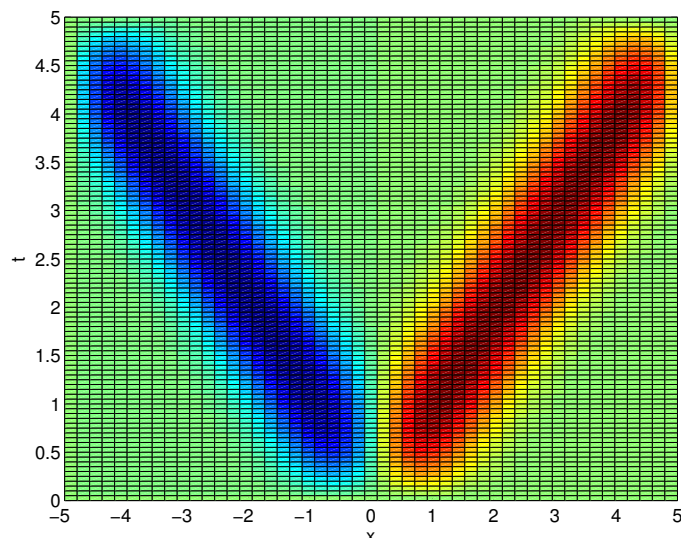
Kasu honetan, sokaren hasierako posizioa zero funtzioa da, eta mugimendua $u_t(x, 0)$ hasierako abiaduraren eraginez gertatzen da. Aurreko adibideetan bezala, 5.7, 5.8 eta 5.9 irudietan ikus daiteke nodo bakoitzaren mugimendua, soluzioaren eboluzioa eta espazio-denbora sarea, hurrenez hurren. Irudi horietan ikus daiteke bi uhin antisimetriko kontrako norantzan mugitzen ari direla.



5.7 irudia. Nodo bakoitzaren eboluzioa denboran, 5.3 adibidean.



5.8 irudia. Uhinaren eboluzioa 5.3 adibidean.



5.9 irudia. Espazio-denbora sarea 5.3 adibidean.

5.4 Adibidea. Orain, honako problema hau hartuko dugu kontuan, $\Omega = [0, 8]$, $\alpha^2 = 1$ eta $I = [0, 16]$ izanik.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \\ u(0, t) = 0 = u(8, t), \\ u(x, 0) = f(x), \\ u_t(x, 0) = 0, \end{cases}$$

eta hasierako posizioa honakoa izanik:

$$f(x) = \begin{cases} 100x - 299, & x \in [2, 99, 3), \\ 1, & x \in [3, 5], \\ -100x + 501, & x \in (5, 5, 01], \\ 0, & \text{beste kasuetan,} \end{cases}$$

ikus 5.10 irudian.

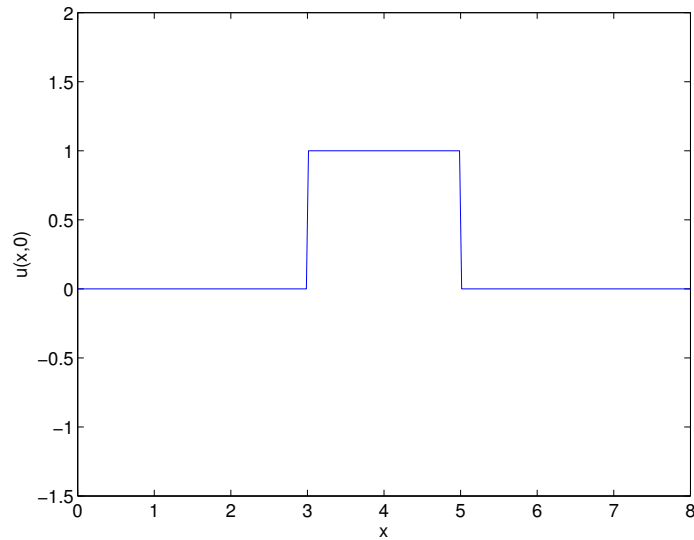
Frekuentzia handiko uhinak agertzen dira soluzioan zatika linealak diren funtzioak erabiltzen badira espazioan, eta era horretan lortu den EDA sistema ohiko metodo batez ebazten bada. Frekuentzia horiek hasierako posizioak dituen izkinen ondorio dira.

5.11 irudian ikus daitezke aldiune bateko frekuentzia altuko uhinak. Kasu horretan, 300 nodo erabili dira, eta *MATLAB*eko «ode15s» [37] funtzioa erabili da EDA sistema ebazteko. Funtzio hau BDF metodoetan oinarrituta dago, eta pausotamaina aldakorrek funtzioa da. Kasu honetan, 8700 pauso eman ditu denboran problemaren soluzioa aurkitzeko. Hemen, kontrako norantzetan mugitzen diren bi uhin errektangeluar simetriko lortzen dira.

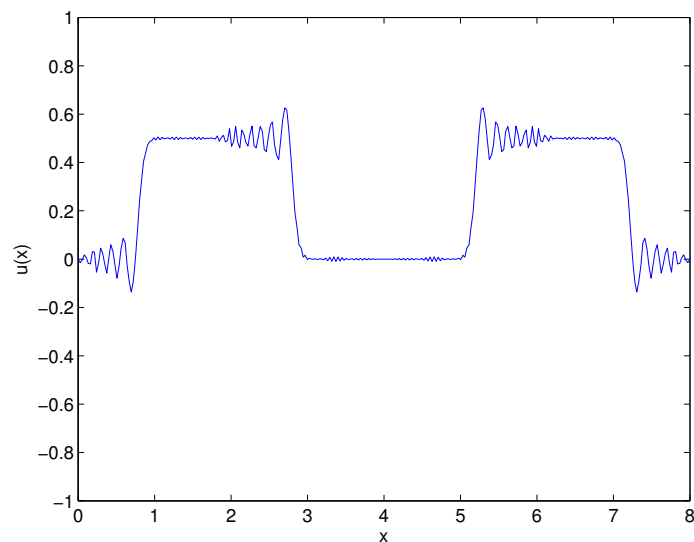
Badaude zenbait metodo, frekuentzia-altu horiek desagerrarazteko gai izanik, konputazio-kostu txikiagoa dutenak. Horretarako aukera bat da zuzenean 2. ordenako EDA sistema ebaztea (lehen ordenara murriztu gabe). Horietako metodo bat hiru parametro aske (α , β eta γ) dituen HHT- α metodoa da; ikus A.2.2 atala.

5.12, 5.13 eta 5.14 irudietan HHT- α metodoa erabilia lortu diren soluzioak ikus daitezke, $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{4}{9}$ eta $\gamma = \frac{5}{6}$ izanik.

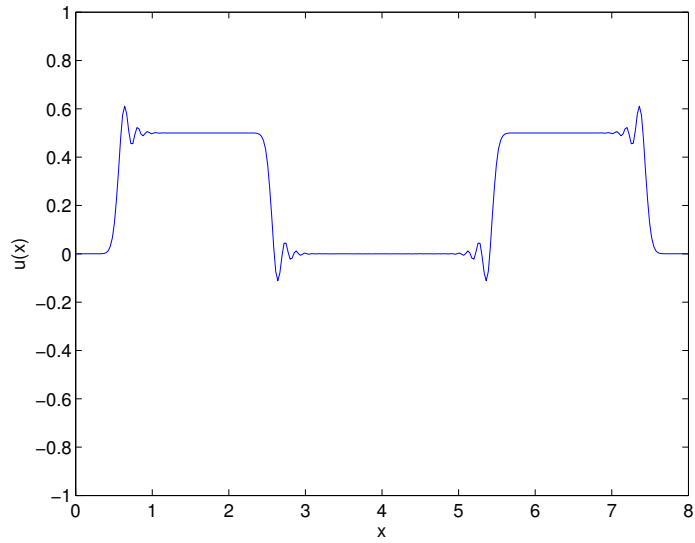
Parametroen balio horietarako HHT- α metodoaren zehaztasun-ordena 2 da, baldintzarik gabe egonkorra da, eta, gainera, frekuentzia altuak desagerrarazteko gai. Kasu honetan, 300 nodo hartu dira, eta denboran 800 pauso eman dira.



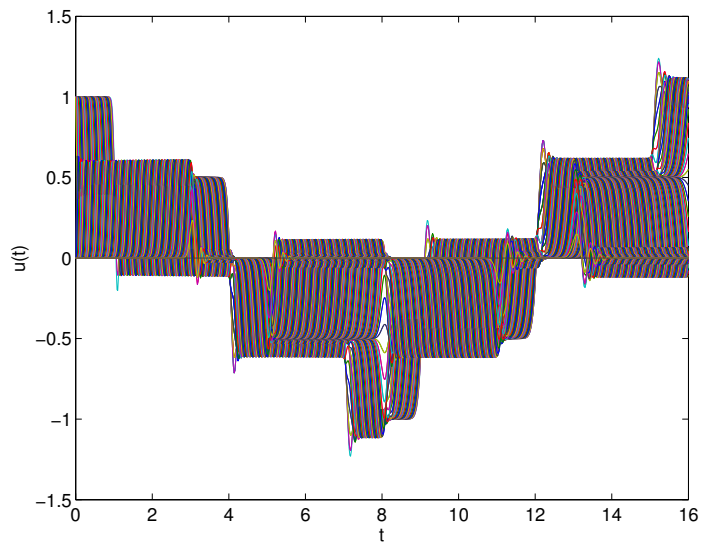
5.10 irudia. Hasierako baldintza 5.4 adibidean.



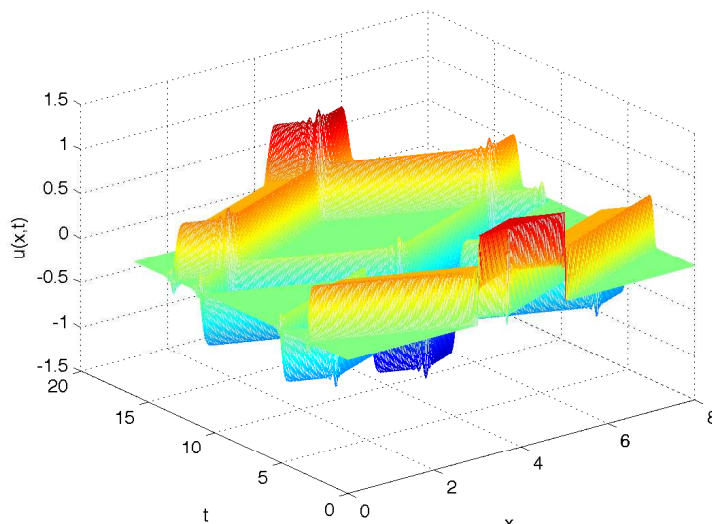
5.11 irudia. Frekuentzia altuak aldiune batean 5.4 adibidean, MATLABeko «ode15s» funtzioaz ebatzita.



5.12 irudia. Frekuentzia altuak aldiune batean 5.4 adibidean, HHT- α metodoaz ebatzita.



5.13 irudia. Nodo bakoitzaren eboluzioa denboran, 5.4 adibidean.



5.14 irudia. Uhinaren eboluzioa 5.4 adibidean.

5.3 Adibideak

5.5 adibidea. 5.1 adibidea Lerroen metodoa erabilia. Hartu kontuan 3 elementu espazioan.

5.1 adibidean difusio-ekuazioa daukagu, $l = 1$, $\alpha^2 = 1$, $T = 0,5$ eta $g(x) = \sin(\pi x)$ izanik. Espazioko partiketa honela definitzen dugu:

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 = 1,$$

non $x_1 = \frac{1}{3}$ eta $x_2 = \frac{2}{3}$. Soluzio hurbildua era honetan idatziko dugu:

$$u(x, t) \approx u^h(x, t) = \sum_{j=0}^3 d_j(t) N_j(t),$$

deribatuak honako hauek izanik:

$$u_t^h(x, t) = \sum_{j=0}^3 d_j'(t) N_j(t), \quad u_{xx}^h(x, t) = \sum_{j=0}^3 d_j(t) N_j''(t).$$

Orain, espazioko formulazio bariazionala idatziko dugu, 5.1.2 atalean bezala:

$$\sum_{j=0}^3 \left(\int_0^1 N_j(x) N_i(x) dx \right) d_j'(t) = - \sum_{j=0}^3 \left(\int_0^1 N_j'(x) N_i'(x) dx \right) d_j(t), \quad \forall i = 0, \dots, 3.$$

Orduan, masa $M = (M_{ij})$ eta zurruntasun $K = (K_{ij})$ matrizeak honako hauek dira: $\forall i, j = 0, 1, 2, 3$

$$\begin{cases} M_{ij} = \int_0^1 N_j(x) N_i(x) dx, \\ K_{ij} = \int_0^1 N_j'(x) N_i'(x) dx. \end{cases}$$

Orain, elementu bakoitzeko M eta K matrizeak kalkulatu ditugu: $\Omega^1 = [0, \frac{1}{3}]$, $\Omega^2 = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, $\Omega^3 = [\frac{2}{3}, 1]$. Horretarako, lehendabizi, $[-1, 1]$ elementuko masa- eta zurruntasun-matrizeak kalkulatu ditugu. Honako aldagai-aldaketa hau egingo dugu, 3 atalean bezalaxe:

$$x(\xi) = x_m^e + \frac{h}{2}\xi, \quad J(\xi) = \frac{dx}{d\xi} = \frac{h}{2},$$

h izanik espazioko elementu bakoitzaren luzera. Ezagunak dira honako berdintza hauek:

$$N_1^e(x(\xi)) = \hat{N}_1(\xi), \quad N_2^e(x(\xi)) = \hat{N}_2(\xi),$$

eta baita deribatuak ere:

$$\frac{dN_1^e(x(\xi))}{dx} = \frac{-1}{h}, \quad \frac{dN_2^e(x(\xi))}{dx} = \frac{1}{h}.$$

Hortaz, honako hau daukagu:

$$\begin{cases} M_{11}^e &= \int_{-1}^1 \hat{N}_1(\xi)\hat{N}_1(\xi)\frac{h}{2}d\xi = \int_{-1}^1 \frac{(1-\xi)^2}{4}\frac{h}{2}d\xi = \frac{h}{3}, \\ M_{12}^e &= \int_{-1}^1 \hat{N}_2(\xi)\hat{N}_1(\xi)\frac{h}{2}d\xi = \int_{-1}^1 \frac{(1-\xi^2)}{4}\frac{h}{2}d\xi = \frac{h}{6}, \\ M_{21}^e &= \int_{-1}^1 \hat{N}_1(\xi)\hat{N}_2(\xi)\frac{h}{2}d\xi = \int_{-1}^1 \frac{(1-\xi^2)}{4}\frac{h}{2}d\xi = \frac{h}{6}, \\ M_{22}^e &= \int_{-1}^1 \hat{N}_2(\xi)\hat{N}_2(\xi)\frac{h}{2}d\xi = \int_{-1}^1 \frac{(1+\xi)^2}{4}\frac{h}{2}d\xi = \frac{h}{3}, \end{cases} \quad (5.25)$$

$$\begin{cases} K_{11}^e &= \int_{-1}^1 \hat{N}'_1(\xi)\hat{N}'_1(\xi)\frac{h}{2}d\xi = \int_{-1}^1 \frac{1}{h^2}\frac{h}{2}d\xi = \frac{1}{h}, \\ K_{12}^e &= \int_{-1}^1 \hat{N}'_2(\xi)\hat{N}'_1(\xi)\frac{h}{2}d\xi = \int_{-1}^1 \frac{-1}{h^2}\frac{h}{2}d\xi = -\frac{1}{h}, \\ K_{21}^e &= \int_{-1}^1 \hat{N}'_1(\xi)\hat{N}'_2(\xi)\frac{h}{2}d\xi = \int_{-1}^1 \frac{-1}{h^2}\frac{h}{2}d\xi = -\frac{1}{h}, \\ K_{22}^e &= \int_{-1}^1 \hat{N}'_2(\xi)\hat{N}'_2(\xi)\frac{h}{2}d\xi = \int_{-1}^1 \frac{1}{h^2}\frac{h}{2}d\xi = \frac{1}{h}, \end{cases} \quad (5.26)$$

edo gauza bera dena:

$$M^e = \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix}, \quad K^e = \begin{pmatrix} \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} \\ -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} \end{pmatrix}. \quad (5.27)$$

Kasu honetan, $h = \frac{1}{3}$ denez, zera daukagu:

$$M^e = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}, \quad K^e = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}. \quad (5.28)$$

Masa- eta zurruntasun-matrize globalak mihizatuz, honako hau daukagu:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{18} & 0 & 0 \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} & 0 \\ 0 & \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} \\ 0 & 0 & \frac{1}{18} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{18} & 0 & 0 \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} & 0 \\ 0 & \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} \\ 0 & 0 & \frac{1}{18} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}, \quad (5.29)$$

$$K = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 3+3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3+3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}. \quad (5.30)$$

M matrizearen alderantzizkoa kalkulatu dugu:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{52}{5} & -\frac{14}{5} & \frac{14}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{14}{5} & \frac{28}{5} & -\frac{8}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{8}{5} & \frac{28}{5} & -\frac{14}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{14}{5} & \frac{52}{5} \end{pmatrix}.$$

Hortaz, honako matrize hau daukagu:

$$-M^{-1}K = \begin{pmatrix} -\frac{156}{5} & -\frac{42}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{42}{5} & -\frac{168}{5} & -\frac{24}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{42}{5} & -\frac{168}{5} & -\frac{24}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{42}{5} & -\frac{156}{5} \end{pmatrix},$$

eta $\mathbf{d}'(t) = -M^{-1}K\mathbf{d}(t)$ EDA sistema honako hau da:

$$\begin{pmatrix} d_0'(t) \\ d_1'(t) \\ d_2'(t) \\ d_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{156}{5} & -\frac{42}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{42}{5} & -\frac{168}{5} & -\frac{24}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{42}{5} & -\frac{168}{5} & -\frac{24}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{42}{5} & -\frac{156}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0(t) \\ d_1(t) \\ d_2(t) \\ d_3(t) \end{pmatrix},$$

hasierako baldintza hau izanik:

$$\mathbf{d}_0 = (g(x_0), g(x_1), g(x_2), g(x_3))^T = (\sin(0), \sin(\pi/3), \sin(2\pi/3), \sin(\pi))^T.$$

Azkenik, Dirichleten inguruneke baldintza homogeneoak ditugunez, bakarrik bi ezezagun ditugu, hain zuzen, $d_1(t)$ eta $d_2(t)$. Inguruneke baldintzak aplikatuz, honako EDA sistema hau lortzen da:

$$\begin{cases} d_1'(t) = -\frac{168}{5}d_1(t) - \frac{24}{5}d_2(t), \\ d_2'(t) = -\frac{42}{5}d_1(t) - \frac{168}{5}d_2(t), \\ (d_1(0), d_2(0)) = (\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2), \end{cases}$$

eta sistema hori lehen ordenako EDAk ebazteko metodoak erabiliz ebatz daiteke (adibidez, atzerakako Eulerren metodoa erabilita).

5.6 adibidea. Ebatzi 5.2 adibidea, Lerroen metodoa erabilita. Hartu kontuan 3 elementu espazioan.

5.2 adibidean uhin-ekuazioa daukagu, $l = 2$, $\alpha^2 = 1$, $T = 10$, $g(x) = \sin(\pi x/2)$ eta $f(x) = 0$ izanik. Espazioko partiketa honela definitzen dugu:

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 = 2,$$

non $x_1 = \frac{2}{3}$ eta $x_2 = \frac{4}{3}$. Soluzio hurbildua era honetan idatziko dugu:

$$u(x, t) \approx u^h(x, t) = \sum_{j=0}^3 d_j(t) N_j(t),$$

deribatuak honako hauek izanik:

$$u_{tt}^h(x, t) = \sum_{j=0}^3 d_j''(t)N_j(t), \quad u_{xx}^h(x, t) = \sum_{j=0}^3 d_j(t)N_j''(t).$$

Orain, espazioko formulazio bariazionala idatziko dugu 5.2.2 atalean bezala:

$$\sum_{j=0}^3 \left(\int_0^1 N_j(x)N_i(x)dx \right) d_j''(t) = - \sum_{j=0}^3 \left(\int_0^1 N_j'(x)N_i'(x)dx \right) d_j(t), \quad \forall i = 0, \dots, 3.$$

Aurreko adibidean bezala, masa- eta zurruntasun-matrizeak kalkulatu ditugu $h = \frac{2}{3}$ izanik:

$$M^e = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}, \quad K^e = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad (5.31)$$

eta matrize globalak kalkulatu ditugu, mihizadura erabiliz:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}, \quad (5.32)$$

$$K = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}. \quad (5.33)$$

Orain, $\mathbf{d}''(t) = -M^{-1}K\mathbf{d}(t)$ EDA sistema honako hau da:

$$\begin{pmatrix} d_0''(t) \\ d_1''(t) \\ d_2''(t) \\ d_3''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{39}{5} & -\frac{21}{10} & 0 & 0 \\ -\frac{21}{10} & -\frac{42}{5} & -\frac{6}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{42}{5} & -\frac{21}{10} \\ 0 & 0 & -\frac{21}{10} & -\frac{39}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0(t) \\ d_1(t) \\ d_2(t) \\ d_3(t) \end{pmatrix},$$

hasierako baldintzak hauek izanik:

$$\mathbf{d}_0 = (g(x_0), g(x_1), g(x_2), g(x_3))^T = (\sin(0), \sin(\pi/3), \sin(2\pi/3), \sin(\pi))^T,$$

$$\mathbf{d}'_0 = (f(x_0), f(x_1), f(x_2), f(x_3))^T = (0, 0, 0, 0)^T.$$

Azkenik, Dirichleten inguruneko baldintzak aplikatuz, honako EDA sistema hau lortzen da:

$$\begin{cases} d_1'(t) = -\frac{42}{5}d_1(t) - \frac{6}{5}d_2(t), \\ d_2'(t) = -\frac{6}{5}d_1(t) - \frac{42}{5}d_2(t), \\ (d_1(0), d_2(0)) = (\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2), \\ (d_1'(0), d_2'(0)) = (0, 0), \end{cases}$$

Eta 2. ordenako EDA sistema hori zuzenean ebaz daiteke, 2. ordenako EDA ebazteko metodoak erabilita, edota 1. ordenako EDA sistemara murriztu eta lehen ordenako EDA ebazteko metodoak erabilita ebaz daiteke.

A eranskina

Bigarren ordenako ekuazio diferentzial arrunten ebazpenerako metodoak

A.1 Pauso anitzeko metodo linealak

Hasierako baldintzadun bigarren ordenako EDA emanik

$$y'' = f(t, y, y'), \quad y(a) = \eta, \quad y'(a) = \hat{\eta}, \quad (\text{A.1})$$

horren soluzioa aurkitu nahi da $a \leq t \leq b$, a eta b finituak izanik. Demagun f funtzioak Lipschitzen baldintzak betetzen dituela. Hortaz, problemak soluzio bakarra izango du. Izan bedi $y(t)$ (A.1) problemaren soluzioa. (A.1) problema lehen ordenako EDA sistema bezala idatziz gero, eta horri \tilde{k} pausotako metodo bat aplikatuz (2.62), honako hau lortzen da:

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{\tilde{k}} \tilde{\alpha}_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{\tilde{k}} \tilde{\beta}_j y'_{n+j}, \\ \sum_{j=0}^{\tilde{k}} \tilde{\alpha}_j y'_{n+j} = h \sum_{j=0}^{\tilde{k}} \tilde{\beta}_j f(t_{n+j}, y_{n+j}, y'_{n+j}). \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

(A.2) adierazpenetik $\{y'_{n+j} \mid j = 0, 1, \dots, \tilde{k}\}$ ezabatuz, honako hau lortzen da [2]:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h^2 \sum_{j=0}^k \beta_j f(t_{n+j}, y_{n+j}), \quad \text{non } k = 2\tilde{k}. \quad (\text{A.3})$$

Bigarren ordenako EDAn ebazteko erabiltzen den k pausoko metodo lineal bati dagokio (A.3) adierazpena. Lehen ordenako EDAn ebazteko balio duen k pausoko metodo linealaren (2.62) antzekoa da. Koefizienteak izango dira ezberdinak, eta lehen ordenakoetan h agertzen zen tokian orain h^2 agertuko da. Horren ondorioz, errore lokala $1/h^2$ faktorea jarraituz metatzen da errore globalean. Lehen ordenako EDAn kasuan, $1/h$ faktorea jarraituz egiten zen metaketa. Beraz, bigarren ordenako EDAn kasuan: $LTE = O(h^{p+2}) \Rightarrow GTE = O(h^p)$.

Lehen ordenako EDAk ebazteko pauso anitzeko metodo linealen mozketare errore globalaren definizioa eta adierazpena (2.11), kokapen-bereganaketaren definizioa (2.10) eta mozketare errore lokala (2.9) ikusi genituen. Definizio horiek baliagarriak dira bigarren ordenako EDAk ebazteko pauso anitzeko metodo linealen kasuan.

Bigarren ordenako EDAk ebazteko pauso anitzeko metodo linealaren (A.3), mozketare errore lokala honela idatz daiteke [2, 5]:

$$LTE = C_0 y(t_n) + C_1 h y'(t_n) + C_2 h^2 y''(t_n) + \dots + C_q h^q y^{(q)}(t_n) + \dots \quad (\text{A.4})$$

C_i konstanteak hauek izanik:

$$\begin{cases} C_0 = \sum_{i=0}^k \alpha_i \\ C_1 = \sum_{i=0}^k i \alpha_i \\ C_2 = \frac{1}{2!} \left(\sum_{i=0}^k i^2 \alpha_i \right) - \left(\sum_{i=0}^k \beta_i \right) \\ C_q = \frac{1}{q!} \left(\sum_{i=0}^k i^q \alpha_i \right) - \frac{1}{(q-2)!} \left(\sum_{i=0}^k i^{q-2} \beta_i \right), \quad q \geq 3. \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

(A.3) adierazpenaz emandako zenbakizko metodoa p zehaztasun-ordenakoa da, mozketare errore lokala $O(h^{p+2})$ bada edo mozketare errore globala $O(h^p)$ bada. Hau da, $C_0 = C_1 = \dots = C_p = C_{p+1} = 0$ eta $C_{p+2} \neq 0$:

$$LTE_{n+k} = C_{p+2} h^{p+2} y^{(p+2)}(t_n) + O(h^{p+3}). \quad (\text{A.6})$$

$C_{p+2} h^{p+2} y^{(p+2)}(t_n)$ osagaia da mozketare errore lokaleko osagai nagusia, eta C_{p+2} osagaia errore-konstantea da. Zenbait erreferentzian C konstantea hartzen da *errore-konstantetzat* [2]:

$$C = \frac{C_{p+2}}{\sigma(1)}, \quad (\text{A.7})$$

$\sigma(r)$ izanik zenbakizko metodoaren polinomio karakteristikoetako bat (2.65).

Eranskin honetan, bigarren ordenako zenbait EDA sistema ebazteko zenbakizko metodo linealak aztertuko ditugu. Zehazki, honako era honetan emandako EDA sistemak ebazteko balio duen metodoak izango ditugu aztergai:

$$M d'' + C d' + K d = F, \quad d(t_0) = d_0, \quad d'(t_0) = v_0. \quad (\text{A.8})$$

Zehazki, bigarren ordenako EDA sistemak ebazteko erabiltzen diren pauso anitzeko metodo linealetara (A.3) murrizten diren zenbait metodo aurkeztuko ditugu. Metodo horien egonkortasun-azterketa egiten da, zenbakizko metodoa 2. ordenako koefiziente konstanteko EDA lineal homogeneoari aplikatuz. Hau da, test-ekuazioari aplikatuz:

$$u'' + \omega^2 u = 0. \quad (\text{A.9})$$

Metodoa test-ekuazioari aplikatu ostean, diferentzian emandako lehen ordenako ekuazio-sistema lortzen da:

$$U_{n+1} = A(\Omega) U_n, \quad (\text{A.10})$$

non $\Omega = h\omega$, A anplifikazio-faktorea izanik, eta U_{n+1} eta U_n izanik t_{n+1} eta t_n aldiuneetako ezezagunek osatutako matrizeak, hurrenez hurren. Zenbakizko metodoa egonkorra da bere erradio espektrala ρ bat baino txikiagoa edo berdina denean (hertsiki 1 baino txikiagoa erro anizkoitzentzat):

$$\rho(A) = \max \{|\lambda_i| : \lambda_i \text{ } A \text{ matrizearen autobalioa izanik}\} \leq 1. \quad (\text{A.11})$$

A.2 Alfa orokortua metodoa

Izan bedi bigarren ordenako honako EDA sistema hau:

$$Md'' + Cd' + Kd = F, \quad d(t_0) = d_0, \quad d'(t_0) = v_0. \quad (\text{A.12})$$

Alfa orokortua metodoa honako era honetan emanda dago [38]:

$$Ma_{n+1-\alpha_m} + Cv_{n+1-\alpha_f} + Kd_{n+1-\alpha_f} = F(t_{n+1-\alpha_f}), \quad (\text{A.13})$$

non:

$$\begin{cases} d_{n+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f) d_{n+1} + \alpha_f d_n, \\ v_{n+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f) v_{n+1} + \alpha_f v_n, \\ a_{n+1-\alpha_m} = (1 - \alpha_m) a_{n+1} + \alpha_m a_n, \\ t_{n+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f) t_{n+1} + \alpha_f t_n, \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

eta:

$$\begin{cases} d_{n+1} = d_n + \Delta t v_n + \frac{\Delta t^2}{2} [(1 - 2\beta) a_n + 2\beta a_{n+1}], \\ v_{n+1} = v_n + \Delta t [(1 - \gamma) a_n + \gamma a_{n+1}], \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

β , γ , α_f eta α_m parametro errealak izanik, $d' = v$, $d'' = a$ eta (A.14) tarteko balioak t , d , v eta a aldagaiek $[t_n, t_{n+1}]$ denbora-tarteko muturretan dituzten balioen interpolazio linealak izanik, non $\alpha_f, \alpha_m \in [0, 1]$.

Alfa orokortua metodoaren zehaztasun-ordena 2 da, honako baldintza hau betetzen bada:

$$\gamma = 1/2 - \alpha_m + \alpha_f.$$

Egonkorra da honako baldintza hauek betetzen badira [38]:

$$\alpha_m \leq \alpha_f \leq \frac{1}{2}, \quad \beta \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\alpha_f - \alpha_m). \quad (\text{A.16})$$

Frekuentzia altuko uhinak disipatzeko gai da, A anplifikazio-matrizearen autobalioak errealak direnean. Eta hori gertatzen da honako hau betetzen denean:

$$\beta = \frac{1}{4} (1 - \alpha_m + \alpha_f)^2. \quad (\text{A.17})$$

A.2.1 Newmarken metodoa

Alfa orokortua metodoan $\alpha_f = \alpha_m = 0$ eginez, Newmarken metodoa lortzen da [39]:

$$\begin{cases} Ma_{n+1} + Cv_{n+1} + Kd_{n+1} = F_{n+1}, \\ d_{n+1} = d_n + \Delta t v_n + \frac{\Delta t^2}{2} [(1 - 2\beta) a_n + 2\beta a_{n+1}], \\ v_{n+1} = v_n + \Delta t [(1 - \gamma) a_n + \gamma a_{n+1}]. \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

Newmarken metodoaren zehaztasun-ordena 2 da, $\gamma = 1/2$ [40] betetzen bada. Metodoa egonkorra izateko, $\gamma \geq 1/2$ eta honako hauek bete behar dira: $\frac{1}{2} \leq \gamma \leq 2\beta$ [40]. Frekuentzia altuen disipazioa gertatzeko, hauxe bete behar da:

$$\beta = \frac{\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)^2}{4}. \quad (\text{A.19})$$

Zehaztasun-ordena 2 denean ($\gamma = 1/2$), metodoa egonkorra izatea ahalbidetzen duen β baliorik txikiena da $\beta = \gamma/2 = 1/4$. Hala ere, kasu horretan lortzen den Newmarken metodoak (metodo trapezoidalak, alegia) ez ditu frekuentzia altuak disipatzen, nahiz eta (A.19) baldintza bete.

A.2.2 Alfa metodoa

Alfa orokortuan $\alpha_m = 0$ eginez, Hilber-Hughes-Taylorren α metodoa lortzen da. HHT- α [41] izenarekin ere ezaguna da. Honako adierazpen hauen bidez emana dago:

$$\begin{cases} Ma_{n+1} + (1 - \alpha) Cv_{n+1} + \alpha Cv_n + (1 - \alpha) Kd_{n+1} + \alpha Kd_n = F(t_{n+1-\alpha}), \\ d_{n+1} = d_n + \Delta t v_n + \frac{\Delta t^2}{2} [(1 - 2\beta) a_n + 2\beta a_{n+1}], \\ v_{n+1} = v_n + \Delta t [(1 - \gamma) a_n + \gamma a_{n+1}], \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

non $t_{n+1-\alpha} = (1 - \alpha) t_{n+1} + \alpha t_n$.

Metodoaren zehaztasun-ordena 2 da, $\gamma = \frac{1}{2} + \alpha$ betetzen denean.

Gainera, parametroak $\alpha \in [0, \frac{1}{3}]$ eta $\beta = \frac{(1+\alpha)^2}{4}$ betetzeko eran aukeratuz, HHT- α metodoa egonkorra da, eta frekuentzia altuen disipazioa lortzen da.

Bibliografia

- [1] J. C. Butcher. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. John Wiley & Sons, Chichester, 2008.
- [2] E. Hairer, G. Wanner, S. P. Nørsett. *Solving ordinary differential equations, I, Nonstiff problems*. Springer, Berlin, 1993.
- [3] J. C. Butcher. Numerical methods for Ordinary Differential Equations in the 20th century. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 125(1-2):1–29, 2000.
- [4] J. D. Lambert. *Numerical methods for ordinary differential systems: the initial value problem*. John Wiley & Sons, New York, 1991.
- [5] J. D. Lambert. *Computational Methods in Ordinary Differential Equations*. John Wiley, Chichester, 1973.
- [6] L. F. Shampine, I. Gladwell, S. Thompson. *Solving ODEs with Matlab*. Cambridge University Press, New York, 2003.
- [7] E. Hairer, G. Wanner. *Solving ordinary differential equations, II, Stiff and Differential Algebraic Problems*. Springer, Berlin, 1991.
- [8] E. Fehlberg. Classical fifth, sixth, seventh and eighth order Runge-Kutta formulas with stepsize control. *NASA TR R*, 287, 1968.
- [9] E. Fehlberg. Low order classical Runge-kutta formulas with step-size control and their application to some heat transfer problems. *NASA TR R*, 315, 1969.
- [10] J. R. Dormand, P. J. Prince. A family of embedded Runge-Kutta formulae. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 6(1):19–26, 1980.
- [11] F. Bashforth, J. C. Adams. *An attempt to test the theories of Capillary action by comparing the theoretical and measured forms of drops of fluid*. Cambridge University Press, Cambridge, 1883.
- [12] F. R. Moulton. *New methods in exterior Ballistics*. University of Chicago Press, Chicago, 1926.
- [13] C. W. Gear. *Numerical initial value problems in Ordinary Differential Equations*. Prentice Hall, New Jersey, 1971.
- [14] R. L. Burden, J. D. Faires. *Numerical Methods*. Brooks/Cole publishing Thomson Learning, Pacific Grove, California, 1998.

- [15] L. F. Shampine, M. W. Reichelt. The MATLAB ODE Suite. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 18(1):1–22, 1997.
- [16] W. H. Enright. Second derivative multistep methods for stiff ordinary differential equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 11(2):321–331, 1974.
- [17] G. A. F. Ismail, I. H. Ibrahim. New efficient second derivative multistep methods for stiff systems. *Applied Mathematical Modelling*, 23(4):279–288, 1999.
- [18] J. R. Cash. On the integration of stiff systems of ODEs using extended backward differentiation formula. *Numerische Mathematik*, 34(3):235–246, 1980.
- [19] J. R. Cash. The integration of stiff initial value problems in ODEs using modified extended backward differentiation formulae. *Computers & Mathematics with Applications*, 9(5):645–657, 1983.
- [20] J. R. Cash. Modified Extended Backward Differentiation Formulae for the numerical solution of stiff initial value problems in ODEs and DAEs. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 125(1-2):117–130, 2000.
- [21] R. D. Skeel, A. K. Kong. Blended linear multistep methods. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 3(4):326–345, 1977.
- [22] C. Fredebeul. A-BDF: A generalization of the backward differentiation formulae. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 35(5):1917–1938, 1998.
- [23] G. Hojjati, M. Y. R. Ardabili, S. M. Hosseini. A-EBDF: an adaptative method for numerical solution of stiff systems of ODEs. *Mathematics and Computers in Simulation*, 66(1):33–41, 2004.
- [24] J. R. Cash. Second Derivative Extended Backward Differentiation formulas for the numerical integration of stiff systems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 18(1):21–36, 1981.
- [25] G. Hojjati, M. Y. R. Ardabili, S. M. Hosseini. New second derivative multistep methods for stiff systems. *Applied Mathematical Modelling*, 30(5):466–476, 2006.
- [26] A. N. Brooks, T. J. R. Hughes. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32:199–259, 1982.
- [27] T. J. R. Hughes. Multiscale phenomena: Green’s functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 127(1-4):387–401, 1995.

- [28] T. J. R. Hughes, G. R. Feijóo, L. Mazzei, J.-B. Quincy. The variational multiscale method - a paradigm for computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 166(1-2):3–24, 1998.
- [29] P. B. Bochev, M. D. Gunzburger. *Least-squares finite element methods*, volume 166. Springer Science & Business Media, 2009.
- [30] T. J. R. Hughes, L. P. Franca, G. M. Hulbert. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. the Galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 73(2):173–189, 1989.
- [31] J. Chan, J. A. Evans, W. Qiu. A dual Petrov-Galerkin finite element method for the convection-diffusion equation. *Computers & Mathematics with Applications*, 68(11):1513–1529, 2014.
- [32] A. Cohen, W. Dahmen, G. Welper. Adaptivity and variational stabilization for convection-diffusion equations. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 46(5):1247–1273, 2012.
- [33] L. Demkowicz, J. Gopalakrishnan. An overview of the discontinuous Petrov Galerkin method. In *Recent developments in discontinuous Galerkin finite element methods for partial differential equations*, pages 149–180. Springer, 2014.
- [34] S. J. Farlow. *Partial differential equations for Scientists & Engineers*. Dover, New York, 1993.
- [35] G. Strang. On the construction and comparison of difference schemes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 5(3):506–517, 1968.
- [36] C. Pozrikidis. *Introduction to finite and spectral element methods using MATLAB*. Chapman and Hall/CRC, 2014.
- [37] R. Ashino, M. Nagase, R. Vaillancourt. Behind and beyond the MATLAB ODE suite. *Computers & Mathematics with Applications*, 40(4-5):491–512, 2000.
- [38] J. Chung, G. M. Hulbert. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: The generalized- α method. *Journal of Applied Mechanics*, 60(2):371–375, 1993.
- [39] N. M. Newmark. A method of computation for structural dynamics. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 85(3):67–94, 1959.
- [40] T. J.R. Hughes. *The finite element method. Linear Static and dynamic finite element analysis*. Prentice-Hall International Editions, Englewood Cliffs, New Jersey, 1987.
- [41] H. M. Hilber, T. J. R. Hughes, R. L. Taylor. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 5(3):283–292, 1977.

UNIBERTSITATEKO ESKULIBURUAK
MANUALES UNIVERSITARIOS

INFORMAZIOA ETA ESKARIAR • INFORMACIÓN Y PEDIDOS

UPV/EHUko Argitalpen Zerbitzua • Servicio Editorial de la UPV/EHU
argitaletxea@ehu.eus • editorial@ehu.eus
1397 Posta Kutxatila - 48080 Bilbo • Apartado 1397 - 48080 Bilbao
Tfn.: 94 601 2227 • www.ehu.eus/argitalpenak

eman ta zabal zazu



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea