Saunders Mac Lane: logika, matematika eta filosofia*

ENETZ EZENARRO

ILCLI

(Saunders Mac Lane: logic, mathematics, and philosophy)

Abstract

This is a survey paper on Saunders Mac Lane's contributions to logic, mathematics, and philosophy of mathematics. I give in the introduction Mac Lane's basic biography. Then, I present Mac Lane's first works on mathematical logic, under the special influence of Paul Bernays, his Ph. D. advisor. I want to emphasize the fact that Mac Lane's functionalism was grounded in his early contacts with Hilbertian formalism at Göttingen. The second part of the paper is devoted to Mac Lane's fieldwork in mainstream mathematics, particularly in algebra, geometry and topology. As a result of that work, his close collaboration with Samuel Eilenberg gave birth to category theory, at least in the original American form. The third and last part of the paper shows Mac Lane's functionalist philosophy of mathematics, which was presented late in his life, but developed all along his active mathematical life. It is worth indicating that Mac Lane gave us not only a systematic picture of the totality of classical mathematics, but also a normative philosophy for understanding and doing good mathematics.

Keywords: *category theory, logic, philosophy of mathematics, foundations of mathematics, mathematical models, algebraic foundations, axiomatics.*

0. Sarrera

XX. mendeko matematikari handietakoa izan zen dudarik gabe Saunders Mac Lane. Gerra aurreko (II. Mundu Gerra) eta gerra osteko matematikaren

* Lan honi azken forma emateko momentuan jakin dut Saunders Mac Lane apirilaren 14an hil dela. Izan bedi nik idatzitako hau haren omeneko. Eskerrik asko aldizkariaren bi txostengile anonimoei.

artean zubi-lan garrantzitsua egin zuena (beste zenbait matematikarirekin batera). Göttingenen gerra aurrean zegoen paregabeko matematikari bilgunea bertatik bertara ezagutzeko parada izan zuen, tesia idazten han emandako denboran. Gerra ostean Europak ordura arte matematikan izandako zentraltasuna galdu zuen, Estatu Batuen mesederako. Mac Lanek parte-hartze zuzena eta aktiboa izan zuen honen antolaketan eta garapenean. Garai hartan Europatik ihesi joandako matematikari handi askoren babesleku bihurtu ziren Estatu Batuak. Haiek, amerikar matematikari gazteekin elkarlanean, matematikaren garapenerako giro eta baldintza egokiak sortzen jakin zuten. Gerraren ondorioz, Europak azken mendeetako matematikaren erabateko gidaritza galdu zuen, hau Estatu Batuetara pasa zelarik. Hala jarraitzen du gaur egun ere, Europan nolabait sarea berrindartzea lortu bada ere.

Matematikari integrala izan zen Mac Lane. Bere bizitza luzean, matematikarekin zerikusia zuten alor gehienak ezagutzeko aukera izan zuen: irakaskuntza, ikerketa, matematikaren filosofia, erakundeak, ... Berari hainbeste gustatzen zitzaizkion hitzak erabiliz, alor hauek guztiak «modu naturalean» elkarlotzen jakin zuela esan daiteke. Matematikarekin hil arterainoko konpromisoa hartu zuela argi geratu da, besteak beste, aurten bertan, hil eta denbora gutxira, argitaratu den haren azken lanarekin: *Saunders Mac Lane: A Mathematical Autobiography*. Ez zuen mutur askerik utzi nahi izan, eta bizi izandako garaiaren eta egindako lanaren gainean zuen ikuspegia emanda joan nahi izan zuen.

Connecticuteko (AEB) Taftville herrian 1909ko abuztuaren 4an jaioa, eskoziar jatorriko familia bateko seme zaharrena zen Mac Lane. Yalen matematika ikasi ostean, Chicagoko unibertsitatera joan zen han MS titulua lortuz 1931n. Hala ere Mac Lanek Logika Matematikoan egin nahi zuen tesia eta Chicagoko unibertsitatean gai horren inguruan interes berezirik zuen irakaslerik aurkitzen ez zuenez, Alemaniako Göttingenera bidean jarri zen. Gerra aurreko garai haietan, gaur ez bezala, AEBek ez zuten oraindik zientziaren alorrean gaur duten abangoardia izaerarik, eta ohikoa zen talentudun matematikari estatubatuarrak estudiatzera Europara joatea.

David Hilbert handiaren inguruan bildutako matematikari talde garrantzitsua zegoen Göttingenen (Weyl, Noether, Landau, Courant...), matematikaren esparru desberdinetan lan emankorra egiten ari zena. Munduan zegoen matematika ikerketa zentrorik garrantzitsuenetakoa zen ezbairik gabe.

Uste baino laburragoa izan zen Mac Laneren Göttingeneko egonaldia. 1933ko udan Alemaniako giro politikoa gaiztotzen ari zela eta, korrika eta presaka bukatu behar izan zuen Paul Bernaysen gidaritzapean *Abgekürtze Beweise im Logikkalkul* izenburua zuen doktorego tesia. Frogapen matematikoetarako kalkulu sinboliko berezi baten aurkezpenean oinarritzen zen bere lana. Ordurako Göttingeneko matematikari ospetsuenak (judutar arrastokoak asko) handik alde egiten hasiak ziren. Mac Lanek Göttingenen gainbehera ezagutzeko parada izan zuen, horrenbestez. Ez zen Göttingen gehiago lehengora itzuliko.

AEBra itzuli eta berehala Yalen 1933/34 ikasturterako lana aurkitu zuen. Estatu Batuetako ekonomia 1929ko depresio ekonomiko sakonetik irteten hasia bazen ere, ez zen erraza matematikari gazteentzat unibertsitateetan lana aurkitzea, Mac Lanek bezala talentua erruz izanagatik. Harvard, Cornell eta Chicago unibertsitateetatik pasa behar izan zuen 1938an Harvarden irakasle laguntzaile plaza bat atera eta urte batzuetarako bertan finkatzea lortu zuen arte. Azkenik 1948an Chicagoko unibertsitatetik iritsi zitzaion eskaintza onartu zuen. Bertan emango zituen gelditzen zitzaizkion matematikari urte luzeak.

Mac Lanek matematikan egindako lana aztertzen hasita, hiru alor nagusi bereiz daitezke: ikerketa (jarduneko matematikari, nahiz matematikaren filosofo moduan), irakaskuntza eta erakundeetan egindako lana. Hiruak ere, bata bestearekin uztartuta beti; bata bestearen osagarri bezala ulertuta. Lan honetan, Mac Lanek (jarduneko) matematikan, logika matematikoan eta matematikaren filosofian egindako ekarpenetan zentratuko gara. Hala ere, sarrera hau aprobetxatu nahi genuke haren ibilbideari errepaso azkar bat eman eta beste bi alorretan egindakoa azpimarratzeko. Horrela baino ez baikara arestian aipaturiko Mac Laneren integraltasunaz behar bezala jabetuko.

Irakaskuntzan buru-belarri murgildutako gizona izan zen Mac Lane. Bere interesguneen zabaltasunak, bere irakaskuntza esparrua ere oso zabala izatea ekarri zuen. Mac Lanek landutako esparru nagusiak algebra eta topologia (zentzurik zabalenean) izan baziren ere, analisi matematikoan, fisika matematikoan nahiz matematika aplikatuan, logika matematikoan, geometrian... ere interes handia azaldu zuen. Horietako batzuetan ekarpen berriak ere egin zituen, eta, nola ez, gehienen inguruan eskolak eman ere bai. Interes handia erakutsi zuen gai berrien inguruan eskolak ematean; gaztetan defendatzen zuen jakintza unibertsalaren bideari eutsiz edo. Idatzitako artikuluek betetzen duten eremua nahiz bere gidaritzapean doktorego tesia egindako ikasleek landutako esparru aniztasuna ditugu esandakoaren froga garrantzitsuak.

Beti ikasleei laguntzeko prest, beren lanean aurkezten zitzaizkien arazoak entzun eta soluziobide posibleak eskaintzen zizkien; kontzeptu berrien adibideak eskatu eta aurrera begira aztertu beharreko aspektu desberdinak azaleratu. Beti ere zorroztasuna eta argitasuna eskatuz, eta matematikari dotorezia exijituz. Bere karrera matematikoa logikaren esparruan hasi izana ez da, beraz, kasualitatetzat hartu behar. Sinbolismoari eta notazioari ematen zien garrantzia; abstrakzio maila egokia aurkitzeari ematen zion garrantzia; ideia bat adierazteko modu «naturalena» aurkitzeari ematen zion garrantzia... esandakoa baieztatzera datoz.

Haren ikasleek azpimarratzen dutenez, erakusten zuenak baino gehiago, erakusteko zuen moduak erakartzen zituen. Komunikatzaile bizia, gizon atsegina eta lanerako giro egokia sortzen parekorik ez zuena zela, esan izan dute ezagutu zutenek. Hona Max Kelly, bere ikasle eta kolaboratzaileak *Saunders Mac Lane. Selected papers* liburuan dioena (538. or.):

> Inork ezingo lituzke gainerakoak horrenbeste bultzatu, adimen zorrotzaz gain, haren ilusio eta epeltasunik ez balu, haren lagun hurkoarenaganako interes sakona eta sinpatia, sentimentala ez izanagatik hainbat sinesgarriagoa. Beren buruak, harrotasunez, haren laguntzat dauzkatenek badakite hau dena: besteek saiakera hauek irakurtzean inferituko dute.[1]

Matematikarien hezitzaile eta motibatzaile aparta izan zen Saunders Mac Lane. Haren ikasleen artean, gero beren lanagatik ezagunak egingo ziren matematikari handiak aurki ditzakegu. Baita Fields medaila irabazitakorik ere. 1997an, 88 urterekin, zuzendu zuen azken tesia; logika matematikoaren inguruan berau. 95 urtetan koherentziaz gidatutako bizitza izan zen Mac Lanerena.

Zorroztasuna eta argitasuna izan ziren haren ibilbide osoaren bi ardatz nagusiak; haren ibilbide osoa bustiko zutenak. Agian arlo horietan harrigarriena eta bere ekarpenen artean nabarmenena kategoria teoria izan zela esan daiteke. Alde batetik matematikarientzako lan tresna, eta bestetik matematikaren barne kohesioa ulertzeko, eta azken batean matematikaren izaera zein den ezagutzeko, tresna bat ikusi zuen Mac Lanek teoria honengan. Aurrerantzean teoria hori garatzen emango zituen urteak, matematikaren barne kohesioa azalarazteko balio zuten tresna berriak bilatuz. Matematikaren gainean zuen ikuspegia lantzeko ere erabili zuen kategoria teoria. Teoria honek matematikaren izaeraren funtsa errepresentatzen zuela uste zuen. Mac Lanek matematikaren «izaera funktoriala» defendatzen zuen, multzo teoriazko oinarritze artifizialen gainetik.

Azkenik, hasieran esan dugun bezala, erakunde matematikoetan egindako lan eskerga ere ez genuke ahaztu nahi. Gizartearekiko, komunitate zientifikoarekiko eta bereziki komunitate matematikoarekiko erantzukizun sentipen handiko gizona zen Saunders. Bere bizibideagatik pribilegiatu bat sentitzen zen eta zentzu horretan ulertu behar da akademiari eskaini zion lana: pribilegio horregatik ordaindu beharreko bidezko zerga zela ulertu zuen. Bere itzal luzea aprobetxatzen jakin zuen, beti ere matematikaren onerako, nahiz eta bere autobiografian aitortzen duenez lan horretarako berezko

---

[1] *No man could so stimulate others unless, alongside an incisive intellect, he was possessed of enthusiasm and warmth, a deep interest in his fellow man, and a sympathy the more real for being unsentimental. Those who proudly call themselves his friends know these things: others will infer them in reading these essays.*

joerarik izan ez. Matematika egitea nahiago zuen, matematikaren periferiako kontuez arduratzea baino. Hala ere beharrezkoa ikusi zuenean ez zion bere ardurari muzin egin.

Horrela, ikerketa zientifikoa eta bereziki ikerketa matematikoa bultzatzeko ahaleginean, National Academy of Science-ko eta American Philosophical Society-ko lehendakariordetza edo Mathematical Association of America eta American Mathematical Society-ko lehendakaritza bezalako goren-goreneko postu akademikoak bete zituen hainbat urtetan. Matematikarien arteko harremanak bultzatuz, era guztietako kongresuak antolatuz, aldizkari matematikoak suspertuz, aldizkarietako batzorde teknikoetan parte hartuz, Estatu Batuak nazioarteko batzar zientifikoetan ordezkatuz eta abar, lan nekagaitza burutu zuen. Ibili zen leku guztietan matematika egiteko giro aproposa bilatzen saiatu zen, honek matematikaren bilakabidean zeukan garrantziaz oharturik. Matematika departamentu asko ezagutu zuen eta bere esperientziatik, hauek ondo funtziona dezaten eta eraginkorrak izan daitezen beharrezko baldintzak ere zerrendatu zituen, emaitza matematikoa bailitzan.

Matematikan, logikan eta matematikaren filosofian eginiko ekarpenak zehatzago aztertuko ditugu datozen orrietan.

1. Logika

Ezin da esan Mac Lane matematikaria eta logikaria izan zenik. Mac Lane profesionalki zerbait izan bazen, matematikaria izan baitzen; jarduneko matematikaria (bere hitzak jarraituz), eta ez nolanahikoa gainera. Hala ere, gazte-gaztetatik izan zuen Mac Lanek logikarako (logika matematikorako, bereziki) zaletasuna; eta zaletasun horrek bere jarduera matematikoan, matematikaren ikuspegian eta, azken batean, matematikaren filosofian berebiziko garrantzia izan zuen.

Garai hartan matematika departamentuetan (batez ere Estatu Batuetan) alor honek pizten zuen mesfidantza eta gutxiespenari aurre eginez, Yaleko unibertsitatean graduatu ostean, Mac Lanek matematika ikasketak logika matematikoaren bidetik zuzendu nahi izan zituen.

Yaleko hasierako urteetan ikasle guztiek jakintza orokorreko ikasgaiak izan ohi zituzten. Horrelako klase batzuetan ezagutu zuen Northorp irakaslea. Hura, Harvarden A. N. Withehead irakaslearekin ikasitakoa zen eta filosofia eta logika erakusten zituen Yalen. Mac Lanek Northorpen ahotik izan zuen Whiteheadek Bertrand Russell-ekin batera kaleratu zuen *Principia Mathematica* lan mardularen berri. Harrituta geratu zen Mac Lane, liburu hartan matematika osoa logikaren gainean nola oinarritzen zen azaltzen zela entzun zuenean. Berehala erosi zuen lan hura osatzen zuten hiru liburukietako lehenbizikoa. Liburu hartan aurkitu zuen frogapen formalaren esanahiak eta inferentzia arau zorrotzak erabiltzeko moduak txunditutа utzi zuten. Aurrerantzean eragin handia izango zuen liburu hark Mac Lanerengan, batez ere haren gaztetako matematikari jardunean.

Yalen graduatu ostean, graduondoko beka bat lortuta, Chicagoko unibertsitatean pasa zuen 1929-30 ikasturtea, bere logika matematikorako tesia prestatzen hasteko asmotan. Zermelok, 1908an aurkeztutako multzo teoriarako axiomatikaren barruan, edozein multzo ongi ordena daitekeela erakusterakoan, egiten zuen Aukeraren Axiomaren erabilera aztertu zuen Mac Lanek. Hau zen, 1930 urte buelta hartan, Whitehead eta Russellen (Frege ahaztu gabe) eskola logizistaren alternatiba nagusia. Izan ere, Russellen *Adarkatutako Tipoen Teoriak* ez baitzuen paradoxen agerpena modu onargarrian ekiditen eta matematika modu konsistentean egiteko modua, Zermeloren bidetik, Konprehentsio Axiomak eskaintzen baitzuen, multzo teoriarako proposatutako gainerako axiomekin batera.

Principia Mathematica liburuan ikasitako frogapen formal eta zorrotzaren ideia zuen Mac Lanek buruan, eta konbentzitua zegoen eguneroko matematikako frogapenak, Whitehead eta Russellek proposaturikora hurbildu behar zirela. Bestalde, zorroztasunarekin batera, frogetan ideia nagusiak garbi azaltzea garrantzitsua zen Mac Laneren iritziz. Horretan bazuen eraginik Yaleko urteetan Ore algebrista norbegiarraren bitartez jasotako algebra berriaren ezagutzak. Emmy Noether eta Emil Artin-ek gidatuta algebra berri bat sortzen ari zen Alemanian. Ulergarritasunaren aldeko urrats definitiboa zen, Mac Laneren irudirako, eraztun eta gorputz egitura abstraktuek, batuketaren eta biderkaduraren propietateak nola axiomatizatzen zituzten ikustea.

Hala ere, Chicagon igarotako urtean, Mac Lanek ez zuen ikusi logika matematikoan tesi bat idazteko leku aproposa zenik. Ez zegoen bereziki gai haietaz arduratzen zen inor. Eta Göttingenera joateko aukera ikusi zuenean, ez zuen bi aldiz pentsatu.

Göttingenen Mac Lanek aktibitate matematiko handia aurkitu zuen. Garai hartako matematika zentro nagusietakoa zen, David Hilbert handiaren inguruan antolatua. Orduko matematikaren alor guztiak lantzen ziren bertan eta Mac Lanek logikako tesia egiteaz gain, asko ikusi eta asko ikasi zuen. Emmy Noether, Hermann Weyl, Paul Bernays, Edmund Landau, Gustav Herglotz eta Richard Courant izan zituen irakasle, besteak beste.

Logika matematikoan lan egiteko asmotan joan zen Mac Lane Alemaniara eta bere asmoak Andre Weyli adierazi zizkionean, honek Paul Bernaysekin harremanetan jartzeko esan zion. Bernays izango zen Mac Laneren tesi zuzendaria. Mac Lanek tesia idazteko egindako lehen saiakera atzera bota zuen Bernaysek eta hasieratik hasi behar izan zuen berriz. Berak ordea argi zuen:

Whitehead eta Russellek frogapen matematikoak formalizatzeko egindako ekarpena izango zuen ardatz idatziko zuen tesiak.

Frogapen matematiko guztiak *Principia Mathematica*n azaltzen den moduan egingo balira, frogapenetarako plan molde berezi batzuk agerian geratuko liratekeela pentsatzen zuen Mac Lanek. Esate baterako *Principia*ko 2.8. eta 4.7. teoremak Modus Ponens legearen bidez konbinatzeko erabilitako eskema. Bere lana izango zen eskema horiek guztiak atera eta sailkapen bat egitea, frogapenak laburtzeko eta horiek argiago bihurtzeko modua eskainiz. Frogapenak, azken batean, eskema hauek era mekanikoan konbinatuz lortuko lirateke. Frogapen matematikoak egiteko kalkulu sinboliko berri bat zen Mac Lanek bere tesian proposatzen zuena. Bere ustetan kalkulu sinboliko hori erabilita, frogapen matematikoak zorrotzak eta argiak izango lirateke. Hori zen gutxi gorabehera Mac Laneren tesiaren funtsa. 1933ko uztailean aurkeztu zuen Hermann Weylen aurrean, eta horrela lortu zuen Doktore gradua. Gerora, Mac Lanek berak aitortuko du, bere tesiak ez zuen arrakasta handirik izan[2]. Ez Bernays eta ez Weyl ez ziren oso gustura geratu. Mac Lanek proposatutako kalkulu sinbolikoak ez zuen izan segidarik, nahiz eta gaur egun «teoremen frogapen automatikoa» bezala ezagutzen den adarraren hastapenetan koka daitekeen.

Bestalde, harritzekoa da (eta Mac Lanek berak ez dio esplikaziorik aurkitzen), tesia idazten Göttingenen pasatako urteak, logika matematikoan oso emankorrak izan arren, emaitza hauek ez zutela inongo eraginik izan bere lanean. Alemanian igarotako lehenbiziko urtean (1931), Kurt Gödel logikari austriarrak Hilbertek abiatutako programa formalistari bideak ia erabat itxi zizkion, *On formally undecidable properties of Principia Mathematica and related Systems* artikulu ospetsuan argitaratutako Sistema Formalen Ez-Osotasun Teoremak kaleratu zituenean. XX. mendeko matematikaren emaitzarik garrantzitsuenetakoa izan zen, eta logika matematikoan erabateko norabide aldaketa ekarri zuena; hala ere, Mac Lanek gerora izango zuen emaitza hauen berri.

Alemaniako egonaldiaren ondoren Estatu Batuetara itzulita, Mac Lanek logika matematikoa alboratu eta algebra nahiz topologiako hainbat alorretan murgilduko zen buru-belarri. Hala ere bere tesiaren ardatzean zeuden bi ideia nagusiak, zorroztasun eta argitasunarenak, bere ibilbide matematiko osoan zehar ez zituen baztertuko. Are gehiago, hein handi batean bere ibilbidea bi ardatzok gidatu zutela ikus daiteke.

Bi ardatz hauetan aurki dezakegu, Mac Lanek logika matematikoari egindako ekarpenetatik harago, logika matematikoak Mac Lanerentzat suposatu zuena. Mac Lanerentzat froga matematikoak bi gauzarako balio behar du:

---

[2] Kaplansky (arg.) (1979) liburuan aurki daiteke *Abgekürtze Beweise im Logikkalkul*, Mac Lanek logika matematikoan idatzitako tesia (alemanez). Atzera begira jarrita, bere tesiaren balorazio txiki bat ere egiten du Mac Lanek liburu honetan.

emaitza zuzena dela esan ahal izateko (zorroztasunaren bidetik baino lortu ezin dena), eta zuzena den emaitza hori, zuzena zergatik den azaltzeko (eta zentzu horretan frogapen guztiak ez dira berdinak). Lehen mailako predikatuen logika, lehen helburua gauzatzera letorkeen hizkuntza zorrotza litzateke: zorroztasunaren estandare absolutua. Hau da, frogapen bat erabat zorrotza izango da lehen ordenako predikatuen logikan, ZFC axioma sistematik abiatutako inferentzia segida bat bezala idatzia datorrenean inferentzia bakoitza onartutako arauei jarraituz egina badator. Horra hor erabateko zorroztasunaren definizioa. Praktikan, egia esan, frogapenak ez dira era horretakoak. Honen ordez, erabateko formaltasuna lortzeko bidea zein den adieraziko duten eskema hurbiltzaileak baino ez dira. Frogapenaren ideiak kalkulu logikoaren formaltasunaren azpian ez ehorzteko jokatzen da horrela.

Ulergarritasuna zorroztasuna bezain garrantzitsua da frogapen batean. Mac Lane bere tesian zorroztasuna eta ulergarritasuna uztartuko zituen kalkulu sinboliko bat proposatzen saiatu zen. Baina bere metodoak formalegiak ziren, agian Whitehead eta Russellen eraginez. Mac Laneren logikarako zaletasun goiztiarrak zerikusi zuzena du bere matematikaren filosofiarekin. Matematikaren aldebikotasuna aldarrikatzen zuen Mac Lanek: forma eta funtzioa.

2. Matematika «konbentzionala»

Lehenago ere esan dugu matematikari polifazetikoa zela Saunders Mac Lane. Berak deskribatzen duen matematikaren sare konplexuan[3], zonalde desberdinetan ibili zen, batez ere algebra eta topologiarenak ezagutu bazituen ere. Mugaldean ibiltzea atsegin zuela esan daiteke eta horixe izango zen bere ezaugarri nagusia. Horrela, besteak beste, topologiarako metodo algebraikoak erabili zituen eta logika matematikoa eta geometria diferentziala uztartzen dituen *sheaf theory* deitutakoaren sustatzaile garrantzitsua izan zen, adibidez[4]. Kategoria teoriak bestalde, Mac Laneren eguneroko (matematikari) jarduna eta bere matematikaren kontzepzioa guztiz bateratzen ditu. Teoria matematikoetan aurrera egiteko lan tresna izateaz gain, sare matematikoaren esentzia iradokitzen baitu: gezien garrantzia, sarearen zati ezberdinak harremanetan jartzeko, problemak ebazteko.

2.1. Algebra

Mac Lane, Alemaniatik bueltan, Yaleko unibertsitatean doktorego ondoko beka batekin lanean hasi zen. Oystein Ore matematikari norvegiarra zen

[3] Lan honen hirugarren atalean azaldua datorrena.
[4] Ikus Mac Lane eta Moerdjik (1992)

doktorego ondoko ikasleen arduraduna Yalen, eta haren arrastoari segika algebrara bideratu zituen bere ahaleginak. Gogo biziz ekin zion Mac Lanek ikerketa esparru berriari. Garai hartan, zenbakien teoria algebraikoan ziharduen Orek lanean, konkretuki p zenbaki arrazional batek, zenbaki algebraikoen gorputz batean (hau da, Q zenbaki arrazionalen gorputzaren K hedadura finituen) duen faktorizazioa aztertzen. Edozein zenbaki osok aurkezpen bakarra onartzen du, zenbaki oso lehenen potentzien biderkadura moduan: $(Z, +,.)$ faktorizazio bakarreko domeinua da. Hala ere, zenbaki oso algebraikoen kasuan emaitza honek huts egiten du, adibidez $a + b\sqrt{5}$ non $a, b \in Z$ eraztuna kontsideratzen dugunean gertatzen den bezala.

Richard Dedekindek XIX. mendean eman zuen *idealaren* definizioa. Algebra abstraktuaren lehen adibidetzat har daitekeen nozio honen bidetik etorriko zen problemaren behin betiko ebazpena. Zenbaki oso algebraikoen orokorpen bezala ikus daitezkeen ideal hauek, *ideal lehenetako* deskonposizio bakarra onartzen dute. Eta emaitza hau oso algebraikoen edozein domeinutarako betetzen da. Are gehiago, faktorizazio bakarreko domeinuak, ideal eta ideal lehenen deskonposizioen bidez karakteriza daitezke. Noetherrek ideal eta ideal lehenen erabilera zabala egiten zuen «algebra abstraktua» garatzerakoan, eta Noetherren eskolakoa zen Ore ere.

Orek ideal lehenak eraikitzeko bide berria aurkitu zuen, *baluazio* deitutako funtzioen bidez hain zuzen ere. Adibidez, Z eraztuneko p zenbaki lehen bat hartuta, posible da Z-ko m edozein zenbaki oso, $m = p^e m'$ moduan deskonposatzea, non e, p eta zenbaki osoak diren eta p eta elkarrekiko lehenak. Emaitza hau erabiliz p zenbaki lehen honi lotutako V_p aplikazioa defini daiteke, ondoko eran: $m \in Z$ hartuta, $V_p(m) = e$, baldin eta soilik baldin $m = p^e m'$ non $e, p, m' \in Z$ eta $(p, m') = 1$. Aplikazio honek ondoko bi propietateak betetzen ditu:

(1) $V(mn) = V(m) + V(n)$,
(2) $V(m + n) \geq Min(V(m), V(n))$ eta
(3) $V(0)$ ez dago definituta.

Era honetako aplikazio bat Z eraztunaren *baluazio* bat dela esaten da. V eta V', Z eraztunaren bi baluazio baliokideak direla esango da, $k \neq 0$ konstante batentzat, $V' = kV$ betetzen denean. Baluazio aplikazio hauek Z-ko zenbaki lehenekin bijekzioan jar daitezke, eta Z-ko ideal lehenak, zenbaki lehenak sortzaile dituzten ideal nagusiak baino ez direnez, baluazio hauek Z-ko ideal lehenekin ere bijekzioan jar daitezke.

Baluazioen terminoetan deskribagarria zen, hain zuzen ere, Orek zenbakien teoria algebraikoari egindako ekarpen konstruktiboa. Mac Lanek ere Baluazio Teoriaren inguruan argitaratu zituen hainbat artikulu[5]. Gorputz konkretu batzuen baluazio guztien eraikuntza esplizitua erakutsi eta emaitza

[5] Ikus Kaplansky (arg.) (1979).

hauek zenbakien teoria algebraikoan, nahiz Eisensteinenaren antzeko polinomioen irreduzibilitate irizpideak bilatzeko orduan zituzten aplikazioak ematen zituen Mac Lanek, besteak beste, lehen artikulu horietan.

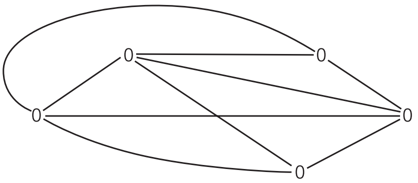
Beranduago Wolfgang Krullek (Noetherren ikaslea hau ere) maila altuagoko *V* baluazioak definitu zituen: oso algebraikoen domeinuetan izan beharrean, talde abeldar ordenatu orokor batean balioak hartzen zituztenak. Baluazio hauek, barietate algebraiko bateko puntu singular batean, funtzio batek duen multiplizitatea adieraz dezakete eta hortik datorkio geometria algebraikorako tresna interesgarritzat hartu izana. Mac Lanek aplikazio berri hauek ere aztertu zituen, baina garai hartan ez zegoen geometria algebraikoan oso jantzia (horretan ziharduten matematikari italiarren metodoak, zorroztasun formalean baino, Mac Laneri hain ilunak suertatzen zitzaizkion intuizio espazialetan oinarritzen zirelako agian), eta Oscar Zariski izan zen baluazio orokortu hauek modu egokian interpretatzen jakin zuena.

Zenbaki algebraiko eta gainazal algebraikoen artean erlazio zuzena dago: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ ekuazioaren erroak, zenbaki algebraikoak dira, a_i-ak arrazionalak direnean. Bestetik, a_i-ak y-ren funtzio polinomikoak direnean, goiko ekuazioak kurba algebraikoen gaineko (x, y) puntuak deskribatzen ditu.

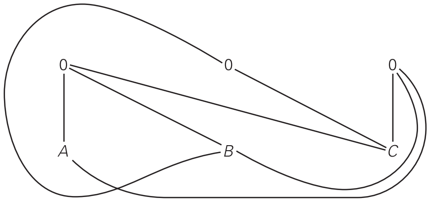
Baluazio teoria eta honek gorputz teoriarekin zeuzkan harremanak aztertuz osatu zuen Mac Lanek bere lehen corpus matematikoa kontsidera daitekeena. Topologia eta grafoen teoria ere izan zituen aztergai Mac Lanek, bere hasierako urte haietan. Ez zen matematikaren esparru murritzetan espezializatzearen aldekoa, eta beti eutsi zion «auzoan» gertatzen zenaren berri izateko jakin-minari.

Harvarden eman zituen urteetan (1938-1947) Hassler Whitney matematikariarekin izandako harremanetatik garatu zuen Mac Lanek topologiarako interesa. Mac Lanek ezagutu zuen garaian «lau koloreen problema» deitu izan denean murgilduta zebilen, hau da, esfera baten gainean herrialde desberdinen edozein mapa marraztuta, posible al da ondoz-ondoko edozein bi herrialdek kolore desberdinak izanik mapa osoa margotzea? Adibideek posible zela iradokitzen bazuten ere, ez zen frogapenik ezagutzen[6]. Problema honekin erlazionatutako beste bat, emandako mapa bat esfera baten gainean marraztea posible ote den jakitearena da. Kasu honetarako, hala ere, badira kontradibide ezagun batzuk. Adibidez, demagun gerra garaian gaudela eta Suitzako hiriburuan, Bernan, bost enbaxada daudela. Enbaxada bakoitza tunelen bidez, gainerako enbaxadekin komunikatu nahi da, baina maila batetik beherantz harkaitzek duten gogortasunagatik, sakonera berean zulatu behar dira tunel guztiak. Gainera tunelek elkarrekin topo egiterik ez da nahi.

[6] Gaur egun teorema hau frogatuta badago ere, froga matematikari askorentzat ez da behar bezain argigarria, kasuistika zabal baten azterketan oinarritzen baita, eta ordenagailuen kalkulu ahalmena beharrezkoa baita frogarako.



(i) K_5 grafo osoa



(ii) $K_{3,3}$ grafo oso bipartitoa

(i) grafoan antzeman daitekeenez, ezinezkoa da eskatutako baldintzetan problema soluzionatzea. Problemari dagokion grafoa ezin da planoan marraztu, ertzik gurutzatu gabe. Hori guztia jakinik, planteatzen zen problema matematikoa, ertzik gurutzatu gabe planoan (edo esferan, problema baliokidea baita) marraz zitezkeen grafoen karakterizazio bat ematearena zen. Grafo lauen karakterizazioa hain zuzen ere. Cazimier Kuratowski matematikari poloniarrak emandako emaitza da agian ezagunena: laua ez den edozein grafok bere baitan izan behar du (azpigrafo moduan)K_5 grafo osoa edo $K_{3,3}$ grafo oso bipartitoa. Whitneyk gai hauetan zuen interesak, Mac Lane ere kolaboratzera bultzatu zuen.

Grafo lau baten eskualde bakoitzaren muga zirkuitu bat da (bide itxi eta bakuna). Mac Lanek eskualde guztien mugek, grafoaren ertz bakoitza zehazki bitan hartzen duten zirkuituen bilduma bat osatzen dutela aurkitu zuen[7]. Bere ikerketak nagusiki aipatu ditugun algebrako esparruetan zentratu baziren ere, Whitney eta Adkisson-en[8] eskutik topologiara ere zaletu zen Mac Lane eta uztarketa honek ustekabeko emaitzak emango zituen etorkizunean. Algebra eta topologiaren uztarketatik lortuko zituen Mac Lanek matematikari eginiko ekarpen nabarmenenak.

Algebran ere Mac Laneren interes guneak aldatuz joan ziren. Hasierako urteetako baluazioen teoria utzi eta p(lehena) karakteristika zuten gorputzak aztertzen hasi zen. Gorputz hauei, *gorputz modularrak* ere esaten zaie. Funtzio algebraikoen azterketarako erabili ohi ziren gorp utz hauek. Mac Lane gorputz hauen azpigorputzek osaturiko erretikulo edo saretxoen azterketan zentratu zen, eta hauekin lotuta, baita funtzio algebraikoen azterketan ere.

Koefiziente konplexudun $f(x, y) = 0$ ekuazio polinomialak, y aldagaia, z aldagai konplexudun funtzio algebraiko bezala determinatzen du. Funtzio hauen teoria klasikoak (gaur analisi konplexu bezala ezagutzen dena), fun-

---

[7] *A combinatorial condition for planar graphs* artikuluan argitaratu zuen Mac Lanek aipatutako emaitza. Kaplansky (arg.) (1979) liburuan irakur daiteke.

[8] Mac Lanek eta V. W. Adkissonek batera argitaratutako *Planar graphs whose homeomorphisms can all be extended for any mapping on the sphere* artikulua ere Kaplansky (arg.) (1979) liburuan dago.

tzioen zeroei eta poloei arreta berezia eskainiz, XIX. mendeko matematikaren zati garrantzitsua errepresentatzen du. Ekuazio hauen soluzioak, *z* aldagaiak balioak hartzen dituen plano konplexuaren gaineko orri desberdinetan banatzen dira, *Riemann-en gainazal* izenez ezagutzen diren egiturak osatuz. Lehenbizi Felix Klein eta geroago Hermann Weyl izan ziren Göttingenen funtzio algebraikoen propietate geometriko eta kontzeptualak argitzeaz arduratu zirenak. Bat dimentsioko barietate konplexu baten lehen adibidea eman zuten. Gero, *C* zenbaki konplexuen gorputzaren ordez, gorputz orokorragoak kontsideratuz, barietate kontzeptua orokortu zuten. Egoera bereziki nahaspilatsua egiten zen, gorputza *p* karakteristikakoa zenean. Esan dugunez, gorputz berezi hauen azterketan zebilen Mac Lane ere. Funtzio algebraikoen gorputzak aztertzerakoan, aurrez aztertutako zenbaki algebraikoen gorputzekin lotura zuzena zutela ohartu zen.

2.2. **Algebra eta geometria**

Berrogeiko hamarkada hasieran kokatzen gara honenbestez. Mac Lane Harvardeko unibertsitatean zebilen eta bere urterik emankorrenak iristeko zeuden oraindik. Funtzio algebraikoen garaiaren azken aldera, Otto Schillingekin urte batzuetan izango zuen kolaborazio lanari ekingo zion. Alemanian eman zituen urteetan, Emil Artinek emandako klase gorputzen teoriarekin hunkitua geratu zen Mac Lane. Hala ere orduan ez zuen gaia ondo ulertu eta solte utzitako lokarri hura lotzeko asmoarekin murgildu zen kolaborazio lan horretan. Otto Schilling, Göttingen-en ezagutu zuen: Helmutt Hassen ikasle izana, klase gorputzen teorian oso jantzia zen. Hamiltonen kuaternioien orokorpen bat osatzen zuten, algebren biderkadura gurutzatuak aztertu zituzten lehendabizi eta honek bere aldetik, taldeen hedadurak aztertzera gidatu zituen, haietan oinarritzen baitzen[9].

G eta *H* bi talde emanik *H*-ren bidezko *G*-ren hedadura esaten zaio, *G* azpitalde normaltzat izanik, $E/G = H$ betetzen duen *E* taldeari. Talde hedadura hauetako bakoitzari, modu naturalean, ondoko talde homomorfismoa egokitzen zaio (projekzio deitua): $\beta: E \to H$, $\beta(G) \subseteq \{1\}$ betetzen delarik. $G \times H$ taldeen biderkadura zuzena adibidez, *H*-ren bidezko *G*-ren hedadura bat dela esan daiteke, elkarturiko homomorfismotzat $(g, h) \to h$ homomorfismo naturala duena. Talde hedadura hauek, *G*-n balioak hartzen dituzten H-ren zatidura multzoen[10] bitartez deskriba daitezke. Klasikoki, *H* taldearen sortzaileak eta hauen arteko erlazioak erabiliz (taldeen aurkezpenen bidez) kalkulatu ohi zen hau (Reynhold, Baer, Marshall, Hall,...). *F*, *H*-ren sortzaileek sortutako talde askea baldin bada eta *R*, sortzaile hauen arteko erlazio guztiek sortuta-

---

[9] Kaplansky (arg.) (1979) liburuan Mac Lanek O. Schillingekin elkarlanean idatzitako *Groups of algebras over an algebraic number field* artikulua irakur daiteke.

[10] Zatidura multzo esaten diot *factor set* terminoari.

ko F-ren azpitalde normal askea bada, orduan $H = F/R$ izango da. Taldeen *segida zehatz laburra* dela esanaz ere labur daiteke esandakoa:

$$1 \to R \to F \to H \to 1$$

non, 1-ek {1} taldea errepresentatzen duen, $R \to H$ inklusio homomorfismoa den eta $F \to H$ projekzio homomorfismoa den ($H = F/R$). Gogoratu homomorfismo segida hau *zehatza* dela esateak, talde bakoitzean «sartzen den» geziaren irudia eta talde horretatik «ateratzen den» geziaren nukleoa berdinak direla esan nahi duela.

Talde abeldarren kasua berezia da. H-ren bidezko G-ren hedadura talde abeldarrek, $Ext(H, G)$ deitutako taldea osatzen dute. Demagun $g_1, g_2, ..., g_n, ...$ H taldearen sortzaileak direla, p zenbaki lehen batentzat $pg_2 = g_1$, $pg_3 = g_2$, ..., $pg_{n+1} = g_n$, ... betetzen dela eta G osoen taldea dela. Egoera honetan $Ext(H, G)$taldea, *oso p-adikoen* taldea dela ikusi zuen Mac Lanek (oso p-adikoak, $a_0 + a_1p + a_2p^2 + a_3p^3 + ...$ $0 \leq a_i < p$ forma duten segidak dira).

Era honetako ikerketetan zebilela ezagutu zuen Mac Lanek Samuel Eilenberg, II. Mundu gerran AEBan babestutako topologo poloniar gaztea. Eilenbergek Mac Laneren lanen berri izan zuenean, berehala erlazionatu zituen eskuartean zerabilkien Steenrodek formulatutako *solenoide p-adikoa*ren homologia taldea kalkulatzeko problemarekin. Horrela hasi zen hain emankorra suertatu zen bien arteko elkarlana.

Solenoide p-adikoa honela eraiki daiteke. Toru bat hartu eta bigarren toru batez lehenbizikoa p aldiz bildu, hirugarren toru batez bigarrena p aldiz bildu etab. Prozesu hau limitera eramanda sortzen den espazioari esaten zaio solenoide p-adikoa. Steenrodek espazio metriko trinkoentzako, «ziklo erregularren» homologia teoria bat aurkitu zuen. Baina hauen homologia, talde hedaduren bidez kalkula litekeela pentsatzea ustekabekoa zen. Zein harreman zegoen talde hedadura eta homologiarako kontuan hartzen ziren «ziklo erregularren» artean? Matematikaren barne kohesioaren esperientzia, bertatik bizi izan zuen Mac Lanek bere jardun matematikoan.

X espazio topologiko baten homologia singularraren talde integrala eta $H^n(X, G)$, koefizienteak G talde abeldarrean dituen espazio berberaren kohomologia «singularra»ren arteko konexioa adierazten zuen formula bat aurkitu zuten, Eilenberg eta Mac Lanek. Segida zehatz labur baten bidez adieraz daiteke emaitza hau:

$$0 \longrightarrow Ext(H_{n-1}(X), G) \longrightarrow H^n(X, G) \xrightarrow{\alpha} Hom(H_n(X), G) \longrightarrow 0$$

Bestela esanda, Ext taldeak, X-n n dimentsioko kohomologia taldearen azpitalde bat ematen digu, dagokion zatidura taldea $H_n(X)$-tik G-rako homomorfismoen taldea izanik:

$$\alpha : H^n(X,G) \longrightarrow \frac{H^n(X,G)}{Ext(H_{n-1}(X),G)} \cong Hom(H_n(X),G) \qquad (*)$$

α homomorfismoak, homologiak kohomologian duen eragina nahiko argi azaltzen du. Koefizienteak G taldean dituen X-n «koziklo» bakoitzak X-ko ziklo bakoitza automatikoki G-ra bidaltzen du. α aplikazioa, naturala eta ezaguna zen eta bere nukleoa hedaduren *Ext* taldearen bidez deskribatzea lortu zuten. Hau izan zen 1942an argitaratu zuten «Group Extensions and Homology» artikulu luze eta garrantzitsuaren[11] emaitza zentrala. Segida zehatzen bidezko algebraren topologiarako inkurtsio esanguratsua izan zen.

X espazio baten ohiko homologia «singularrarentzako» balio zuen lehen emaitza honek. Kasurik sinpleenean poliedro baten ohiko kohomologia izango genuke. Baina espazio topologiko konplikatuagoetarako ondoz-ondoko hurbilpen espazioen limitea hartuz, irits liteke espazioaren kohomologiara. Adibidez, multzo irekien bidezko espazio topologikoaren gero eta estalki finagoen bidez, Čechen kohomologiaren kasuan geundeke (espazio topologiko trinko baten kasuan adibidez). Antzerako kasua litzateke, X eta Y bi espazio eta hauen arteko $h : X \to Y$ aplikazio jarrai bat izanik, arestian aipatutako taldeen segida zehatz laburra bagenu espazio bakoitzarentzat:

$$0 \longrightarrow Ext(H_{n-1}(X),G) \longrightarrow H^n(X,G) \xrightarrow{\alpha} Hom(H_n(X),G) \longrightarrow 0 \quad \text{eta}$$

$$0 \longrightarrow Ext(H_{n-1}(Y),G) \longrightarrow H^n(Y,G) \xrightarrow{\alpha} Hom(H_n(Y),G) \longrightarrow 0$$

Aipatutako h bezalako, X-tik Y-rako edozein aplikazio jarraik X-ren zikloak eta homologia, Y-koetara eramango lituzke: $H_n(h) : H_n(X) \to H_n(Y)$ homologiaren kasuan eta $H^n(h) : H^n(Y) \to H^n(Y)$ zikloen kasuan. Beraz h bakoitzak, ondoren ikusiko dugun eran, aplikazio bertikalak induzituko lituzke bi segida zehatzen artean:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Ext(H_{n-1}(Y),G) & \longrightarrow & H^n(Y,G) & \xrightarrow{\alpha} & Hom(H_n(Y),G) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & Ext(H_{n-1}(X),G) & \longrightarrow & H^n(X,G) & \xrightarrow{\alpha} & Hom(H_n(X),G) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Gainera goiko diagrama trukakorra da, hau da, goiko segidako edozein taldetan hasita, gezien bidez «lehenik eskuinera eta gero behera joatea» eta «lehenik behera eta gero eskuinera joatea» gauza bera da. Erdiko α aplikazioa *homomorfismo natural* bat dela esaten da: kohomologiatik homologiarako homomorfismo naturala. Izen honekin, $h : X \to Y$ aplikazio jarraiekin «ondo portatzen dela» esan nahi da, eta aurretik ere badugu izen hori justifikatzen

---

[11] Artikulu hau eta erlazionatutako beste batzuk ere Kaplansky (arg.) (1979) liburuan irakur daitezke. Baita ez daudenen erreferentziak aurkitu ere.

duen «natural» adjektiboaren erabilera informalik matematikan, gero ikusiko dugun bezala.

Homomorfismo naturalen bidez homologia singularrarentzat ez ezik, Čech-en homologiarentzat (limitea hartuz lortutakoa) ere segida zehatz laburrak lortzen dira. Segida zehatz honi esker H_n eta H_{n-1} homologia talde integralen bidez, G-n koefizienteak dituen H^n kohomologia taldea lortzea posible denez, emaitza honi *Koefiziente Unibertsalaren Teorema* izena eman zioten. G edozein koefizienteen talde emanda eta homologia integraletik abiatuta, *Ext* erabiliz kohomologia kalkulatzea posible egiten duelako, hain zuzen ere.

2.3. **Kategoria teoria**

(*) homomorfismo naturalak, kategoria teoriarako ateak zabaldu zizkien Eilenberg eta Mac Laneri. Homomorfismo honen izaera naturala zertan zen hobeto ulertu nahiak, bideratu zuen teoria berriaren garapena, kontzeptu berbera matematikaren alor desberdinetan agertzen zenaren jakitun baitziren bi matematikariak. Lehen esan dugunez, «natural» adjektiboa sarritan erabiltzen da matematikan era informal batean. Eskuartean dugunak, objektu bat definitzeko modu pertinente bakarrarentzako lekua uzten duenean, objektu hori «naturala» dela esan ohi da. Har dezagun beraiek aurkeztutako adibide bat.

F gorputzaren gaineko V espazio bektorial bat emanda, $V^* = Hom(V, F)$ *V-ren espazio duala* kontsidera dezakegu, hau da, $V \to F$ aplikazio linealek osatzen duten F gaineko espazio bektoriala. Gainera, oso erraz ikus daiteke V eta V^* espazio bektorialek dimentsio berbera dutela F gainean, eta ondorioz espazio isomorfoak direla. Bi espazio hauen arteko isomorfismo bat eraikitzeko beharrezkoa da V-ren oinarri bat finkatzea, adibidez $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ($\dim V = n$ dela suposatuz). Hori eginda, $v_i^* : V \to F$ $i = 1, 2, \ldots, n$ aplikazio linealak definitzen dira $v_i^* : (v_j) = \delta_{ij}$ $i, j = 1, 2, \ldots, n$ erregelak jarraituz (gogoratu $\delta_{ii} = 1_F$, eta $\delta_{ij} = 0_F$ $i, j = 1, 2, \ldots, n$). Erraz ikus daiteke $\{v_i^*, v_2^*, \ldots, v_n^*\}$ V^*ren oinarri bat dela eta ondorioz $V \cong V^*$ beteko da, esan d ugun bezala.

V^*, F gorputzaren gaineko espazio bektoriala denez, bere duala kalkula daiteke: $(V^*) = V^{**} = Hom(Hom(V, F, F)$, *V-ren biduala* deitua. Goiko emaitza dela eta $V^* \cong V^{**}$ beteko da, eta isomorfo izatearen erlazioa trantsitiboa denez baita $V \cong V^{**}$ere. V eta V^* espazioen artean, ordea, bada V eta V^*ren artean ez dagoen erlazio bat. Kasu honetan V-tik V^{**}-rako isomorfismo bat eraikitzeko ez dugu lehenbizi V-ren oinarri bat finkatu beharrik. Era honetan defini dezakegu V bakoitzerako, eskatutako isomorfismoa: $\kappa_V : \mathrm{V} \to V^{**}$ non $\forall v \in V$, $\forall f \in V^*$, $[\kappa_V(v)](f) = f(v)(\kappa_V(v) \in V^{**}$ denez, ondo definitua dagoena). Zentzu horretan V-tik V^{**}-rako aplikazio lineala naturala dela esan ohi da informalki, eta V-tik V^*-rakoa aldiz ez.

Bestalde, $f : V \to W$ aplikazio lineal bakoitzak, $f^* : V^* \to W^*$ bere aplikazio lineal duala du, eta ondorioz baita aplikazio biduala ere $f^{**} : V^{**} \to W^{**}$. Egoera honetan ondoko diagrama trukakorra dela ikus daiteke:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\kappa_V} & V^{**} \\ \downarrow & & \downarrow \\ W & \xrightarrow[\kappa_W]{} & W^{**} \end{array}$$

Mac Lane eta Eilenbergen azterketaren arabera κ_V-ren eta κ_W-ren naturaltasuna, goiko diagramaren trukakortasunari oso lotua dago. Diagrama trukakorrak gero etorriko zen kategoria teoriaren kontzeptu zentral bihurtuko ziren, eta diagrama trukakorrak erabiliz definitu zuten transformazio naturala, aplikazio naturalaren abstrakzioa izango zena. Guztiz orokorrak ziren ideia hauek esplizitu egiteko ahalegina dago kategoria teoriaren motibazioan.

Mac Lane eta Eilenbergek 1942an argitaratu zuten kategoria teoriako lehen artikulua. Talde teoriaren barnean, teoria berriaren kontzeptuak non agertzen ziren aztertzen zen bertan. Teoria berriaren abstrakzio maila handia zela eta, beldur ziren bi egileak, besterik gabe bere orokortasun osoarekin plazaratzeko eta horregatik aurretik zantzuak emanaz joatea pentsatu zuten. Ahalegin horretan kokatu behar da, beraz, *Natural isomorphisms in group theory* artikulua[12]. $G \times H$, G eta H taldeen biderkadura zuzena edota $G * H$,biderkadura askea taldeen kategoriatik, taldeen kategoriarako bifunktore bezala nola uler daitezkeen edo, $G \times H$ biderkadura zuzena eta $G \otimes H$ biderkadura tentsoriala , talde abeldarren kategoriatik, talde abeldarren kategoriarako bifunktore moduan, zergatik kontsidera daitezkeen aztertzen da, besteak beste, artikulu honetan. G eta H talde abeldarrak izanik, $Hom(G, H)$, $G \to H$ homomorfismo guztien multzoa ere, talde abeldarra da homomorfismoen konposaketarekin; kasu honetan trifunktoreen arteko isomorfismo naturala daukagu:

$$\tau : Hom(G, Hom(H, K)) \xrightarrow{\cong} Hom(G \times H, K),$$

K-n kobariantea eta G eta H-n kontrabariantea dena. $\tau = \tau\ (G, H, K)$ isomorfismo naturalak, $\phi : G \to Hom(H, K) \in Hom(G, Hom(H, K)$ homomorfismo bakoitzari, $G \times H \to K)$ homomorfismoa egokitzen dio, $G \times H$-ko edozein sortzaile $g \times h$-rentzat, honela definitua:

$$\big[[\tau(G,H,K)](\phi)\big](g \times h) = [\phi(g)](h) \in K .$$

Goiko isomorfismo horren atzean, azken batean *funktore adjuntuaren* kontzeptua ezkutatzen da, gerora teoriaren garapenean hain garrantzitsua

---

[12] Erreferentziak Kaplansky (arg.) (1979) liburuan.

izango dena. $-\times H$ funktorea, $Hom(H,-)$ funktorearen ezker adjuntua da, hain zuzen ere.

Hala ere, kategoria teoriaren giltzarria 1945ean argitaratutako *General theory of natural equivalences*[13] artikulu luze eta ezagunean aurki daiteke. Artikulu honetan, Mac Lane eta Eilenbergek kategoria teoriako hasierako kontzeptuak aurkeztu zituzten. Homologia eta kohomologia taldeen arteko α transformazio bereziaren «naturaltasun» informaletik abiatuta, diagramen trukakortasun propietate horri *natural* izena eman zioten. Naturaltasunaren kontzeptu informala, formalizatu zuten horrela. Hasiera batean teoriaren sortzaileek beraiek ere, ez zeukaten konfiantza handiegirik teoria berriarekin. Eta erabilgarria zela uste izan arren, gehiegizko abstrakzioa oztopo bat izan zitekeela pentsatzen zuten. Are gehiago, Mac Lanek bere autobiografian kontatzen duenez, Eilenbergek kategoria teoria artikulu honekin bukatutzat eman zuen, egin zitekeen guztia egina zegoelakoan. Ez zuen asmatu, laster igarrioko?? zuen moduan.

Kategoria teorian objektu matematiko klase bakoitzari morfismo edo gezi multzo bat egokitzen zaio, hauek izango dira, objektuen gainetik, teoriaren garapenean garrantzia izango dutenak. Morfismo hauek objektuen egitura kontserbatuko dute. Gainera morfismo hauen artean konposaketa eragiketa bat izango da, alde batetik elkarkorra eta bestetik identitateduna. Zehatzago adierazita:

***C** kategoria bat, A,B,C objektuz eta A eta B edozein bi objekturen arteko $f : A \to B$ morfismoz osatua dago. $f : A \to B$ eta $g : B \to C$ morfismoak badira, badugu morfismo hauen arteko konposaketa nozio bat, hau da, $g \circ f\ A \to C$ konposaketa morfismo bat izango da, ondoko axiomak betetzen dituena:*

(i) *Elkarkortasuna: $f : A \to B$, $g : B \to C$ eta $h : C \to D$ nahi bezala emandako **C**-ko morfismoak izanik, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.*
(ii) *Identitatea: kategoriako A objektu bakoitzarentzat, bada $1_A : A \to A$ morfismo bat, **C**-ko $f : A \to B$ edozein morfismorentzat honakoa betetzen duena: $f \circ 1_A = f$ eta $1_B \circ f = f$.*

Hona kategorien adibide batzuk: (1) ***Set***: multzoak dira objektuak eta aplikazioak morfismoak; (2) ***Group***: taldeak dira objektuak eta talde homomorfismoak dira morfismoak; (3) ***Ring***: eraztunak dira objektuak eta eraztun homomorfismoak dira morfismoak; (4) ***Field***: gorputzak dira objektuak, eta gorputz monomorfismoak dira morfismoak; (5) ***R-mod***: ezker *R*-moduluak dira objektuak eta *R*-modulu homomorfismoak dira morfismoak; (6) ***F-Vect***: *F*-espazio bektorialak dira objektuak eta *F*-aplikazio linealak dira morfismoak; (7) ***Top***: espazio topologikoak dira objektuak eta aplikazio jarraiak dira morfismoak.

---

[13] Ikus Kaplansky (arg.) (1979).

Kategorien kategoria bat ere kontsidera daiteke, non objektuak kategoriak diren eta hauen egitura kontserbatzen duten morfismoak *funktoreak* deituko diren. Honela defini daitezke funktoreak (*kobarianteak*)[14]:

$\mathbf{C}$ kategoriako A objektu bakoitzari $\mathbf{D}$ kategoriako FA objektu bat, eta $\mathbf{C}$-ko $\alpha : A \to B$ morfismo bakoitzari $\mathbf{D}$-ko $F\alpha : FA \to FB$ morfismo bat egokitzen dion erregela bat, $\mathbf{C}$-tik $\mathbf{D}$-rako funktore kobariantea dela esango dugu, ondoko baldintzak asetzen baditu:

(1) $\mathbf{C}$-ko edozein A objekturentzat $F1_A = 1_{FA}$ betetzen da,
(2) $\beta \circ \alpha$ $\mathbf{C}$-n definitua badago, $F(\beta \circ \alpha)$ $\mathbf{D}$-n definitua dago eta $F(\beta \circ \alpha) = F\beta \circ F\alpha$ betetzen da.

Azkenik, kategoria batetik beste baterako funktoreen kategoria bat ere defini daiteke. Kategoria honetan objektuak funktoreak izango dira eta morfismoak berriz, *transformazio naturalak*. Transformazio naturalak, kohomologia eta homologiaren arteko α-ren abstrakzioa direnak, honela defini daitezke:

$F, G : C \to D$ bi funktore baditugu, $\mathbf{C}$-ko A objektu bakoitzari $\eta_A : FA \to GA$, $\mathbf{D}$-ko morfismo bat egokitzen dion erregela bat, F-tik G-rako transformazio naturala dela esango dugu, ondoko baldintza asetzen badu:

$\mathbf{C}$-ko $A \to B$ edozein morfismorentzat ondoko diagrama trukakorra izango da:

$$\begin{array}{ccccc} A & FA & \xrightarrow{\eta_A} & GA \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ B & FB & \xrightarrow[\eta_B]{} & GB \end{array}$$

Kasu honetan $\eta : F \to G$ transformazio naturala dela esango dugu.

Funtsean 1945eko artikuluan agertzen diren definizio hauen argitan, naturaltasunaren nozio informala azaltzeko erabili dugun V espazio bektorial bat eta honen bidualaren kasua kontsideratzen badugu, honakoa izango genuke:

$$\begin{array}{cccc} V & 1_{F-Vect}V & \xrightarrow{\kappa_V} & V^{**} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ W & 1_{F-Vect}W & \xrightarrow[\kappa_W]{} & W^{**} \end{array}$$

non $1_{F-Vect}, -^{**} : F - Vect \to F - Vect$, F gaineko espazio bektorialen kategoriatik, F gaineko espazio bektorialen kategoriarako bi funktore diren, f V-tik W-rako $\boldsymbol{F}$-$\boldsymbol{Vect}$-eko edozein morfismo (aplikazio lineal) den eta $\kappa : 1_{F-Vect} \to -^{**}$

[14] Badira funktore *kontrabarianteak* ere.

transformazio naturala den, adibidea aztertzean esan dugun bezala diagrama trukakorra delako. Sakoneko ideien bila ibili ohi zen beti Mac Lane. Hau da bere lanaren adibide argi bat.

1945eko artikuluan, kontzeptu orokor hauek formulatu eta matematikaren esparru desberdinetan aurki daitezkeen adibideak eman zituzten. Aurreko artikuluarekin lotuz, taldeen kategoria bereziki aztertu zuten eta talde teoriako konstrukzioak teoria berriaren bidez nola interpreta zitezkeen azaldu. Honek guztiak hala ere, kategoria teoria hizkuntza bat baino ez denaren kontzepzioa areagotzeko balio du: lehendik badauzkagun emaitzak berrinterpretatzeko balio duena. Hau da teoria berriari komunitate matematikoak, oro har, hasierako urteetan egindako harrera hotza azaltzen duena.

Hala ere Mac Lane eta Eilenbergek ondo zekiten, aurkeztutako tresna berriek topologia algebraikoa bezalako adarrei zer nolako bultzada eman ziezaieketen. Behin teoria formalizatuta, teoria beraren jatorrian zeuden espazio topologikoen homologia eta kohomologia taldeen arteko erlazioak hobeto uler zitezkeela bazekiten. Bai Eilenbergek (Henri Cartanekin) eta bai Mac Lanek ere, algebra homologikoaren inguruko liburu bana argitaratu zuten, 1956an eta 1963an hurrenez hurren[15]. Biek ere ondo ezagutzen zuten tresneria kategorialari ederki atera zioten zukua lan hauetan. Multzo eta elementuen hizkuntza alde batera utzi eta geziekin jokatzeak, garrantzia geziengan jartzeak, matematikaren izaera dinamikoarekin hobeto bat egiten duela defendatuko du gerora Mac Lanek. Funktoreak multzoak baino «naturalagoak» direla azken batean.

Solenoide *p*-adikoaren homologia konputatzeko asmotan (talde hedadurek jokatzen zuten paper misteriotsua, Koefiziente Unibertsalaren Teoremaren bidez argituz) hasitako elkarlanak, kategoria teoria abstraktuari hasiera emateko balio izan zuen. Elkarlan emankorra izan zuten bi matematikariek eta hamabost artikulu inguru argitaratu zituzten elkarlanean, guztiak ere homologia eta kategoria teoriarekin zerikusia zutenak[16].

Ondoko urteetan, homologia eta kategoria teoriei eskaini zien Mac Lanek bere ikerketa denborarik gehiena. Kategoria teoria da, seguru asko Mac Lanek matematikari egindako ekarpen nabarmenena. Mac Lanerekin erlazionatutako kontzeptu matematikorik badago, hori funktorearena da. Funktoreen genesian parte hartzeaz gainera, etorkizunean bere jardun matematikoan etengabe presente dagoen kontzeptua da funktorearena. Funktoreen eta azken batean kategoria teoriaren hiru aspektu azpimarratuko ditugu Mac Lanek kontzeptu honi emandako garrantzia ulertzeko.

---

[15] Cartan, H. eta Eilenberg, S. (1956): *Homological algebra*. Mac Lane, S. (1963): *Homology*.

[16] Ikus Kaplansky (arg.) (1979).

Lehenbizi esan behar dugu kategoria teoria, algebra unibertsalarekin batera, baina hau ez bezala, sistema algebraikoetatik harago joanaz, estruktura matematiko ororen forma orokorra atera asmotan egin izan den saiakera garrantzitsuena dela. Objektu matematiko guztiek, batera betetzen dituzten propietateak aztertzea da teoria honen asmoa; ideia desberdinen atzean dauden forma orokorrak atera eta hauen jokaera aztertzea, formalizazioaren formalizazioa bailitzan. Forma orokorraren bilaketa lan horretan badira gidari izan diren kontzeptu batzuk. Geziarena da horietako bat. Kategoria teoriaren oinarrian, sistema matematikoen propietate asko gezi diagramen bidez adieraz daitezkeenaren ideia dago. Geziekin lotuta dago gezien arteko konposaketa eta honen ondotik berehala datorren diagramaren kontzeptua ere. Adibide bat jartzearren ikus dezagun M monoide bat gezi diagramen bidez nola deskriba daitekeen, elementuen gaineko propietateetan oinarritutako axiomen alternatiba gisa.

M monoide bat, M multzo bat eta ondoko bi diagramak trukakorrak egiten dituzten, $\mu : M \times M \to M$ eta $\eta : 1 \to M$ bi aplikazioren bidez deskriba daiteke:

$$\begin{array}{ccc} M\times M\times M & \xrightarrow{1\times\mu} & M\times M \\ \downarrow & & \downarrow \\ M\times M & \xrightarrow[\mu]{} & M \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 1\times M & \xrightarrow{\eta\times 1} & M\times M & \xrightarrow{1\times\eta} & M\times 1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow[1_M]{} & M & \xrightarrow[1_M]{} & M \end{array}$$

non, $1 \times \mu$-ko 1 hori, identitate funtzioa den; $1 \times M$-ko 1 hori $1 = \{0\}$ elementu bakarreko multzoa den eta λ eta ρ, $1\times X \xrightarrow{\lambda} X \xleftarrow{\rho} X \times 1$ bi bijekzio diren, ondoko eran definituak: $\lambda\ (0, x)$ eta $\rho\ (x, 0) = x$. Goiko bi diagramak trukakorrak direla esatea, $\mu \circ (1 \times \mu) = \mu \circ (\mu \times 1)$, $\mu \circ (\eta \times 1) = \lambda$ eta $\mu \circ (1 \times \eta) = \rho$ betetzen dela esatea da: elkarkortasun, ezker identitate eta eskuin identitate propietateak, ohiko elementuen bidezko terminologian idatzita. Horiek dira monoide baten axiomak.

Forma orokorraren bilaketan, paper fundamentala jokatzen duen kontzeptu bat, konstrukzio *unibertsala*rena da. Har dezagun adibidez, biderkadura cartesiarra. X eta Y bi multzo emanda, $X \times Y$ biderkadura cartesiarra eraiki dezakegu, hau da, $(x, y) \in X \times Y$ *baldin eta soilik baldin* $x \in X$ *eta* $y \in$ Y propietateak ezaugarritutako objektua. Elementuak alde batera lagata, monoidearen kasuan egin dugun bezala, honela deskriba daiteke $X \times Y$ multzoa: X eta Y multzoen arteko biderkadura cartesiarra, P multzo bat eta p,q bi aplikazioz osatua dago: $X \xleftarrow{p} P \xrightarrow{q} Y$. Gainera $f : Z \to X$, $g : Z \to Y$ edozein aplikazio bikoterako, $h : Z \to P$ aplikazio bakarra existitzen da, $p \circ h = f$ eta $q \circ h = g$ betetzen duena. Bestela esanda, ondoko diagrama trukakorra egiten duen h bakarra dago (hau da, biderkadura cartesiarraren propietate unibertsala):

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\ X & P \arrow[l, "p"] \arrow[r, "q"'] & Y \end{tikzcd} .$$

Propietate unibertsalek, baldintza batzuk betetzen dituen objektu bakarra dagoela esan ohi dute. Multzoetarako egin duguna, beste estruktura matematikoetan (beste kategorietan) ere modu berean egiten da: taldeetan, espazio bektorialetan, espazio topologikoetan,... Eta badira biderkadura cartesiarraz gain, beste konstrukzio unibertsal batzuk ere.

Funktoreen bigarren aspektu garrantzitsua, matematikaren zati desberdinak harremanetan jartzearena da. Eta hau da, Mac Lane sare matematikoaren ideiara gidatuko duen nozioa. Funktoreek garbi erakutsi izan dute matematika barne kohesio handia duen diziplina dela (algebra eta topologia, nahiz logika eta geometria diferentziala harreman estuan egon daitezkeela erakutsiz adibidez, edo hain ikusgarriak ez diren beste lotura askorekin). Esparru batean aurki dezakegun kontzeptu bat, beste «arropa» batzuekin aurki dezakegu, sarearen beste leku batean, eta behar izanez gero posible da ideia berbera ikuspuntu desberdinetatik enfokatzea. Ez da ahaztu behar baina, ondorio filosofiko sakonak (matematikaren filosofiarako) izan ditzakeen kontzeptu hau, problema konkretuen (solenoide p-adikoaren homologia konputatzeko problema eta honek talde hedadurekin zuen erlazio ezkutua argitzearena) ebazpenaren bila zebiltzala aurkitu zutela Eilenberg eta Mac Lanek. Problema konkretuak ebazteko erabilitako metodoen irakurketa sakona egitetik eratorri zen kategoria teoria. Problema matematikoak soluzionatzeko tresnak dira funktoreak, beste edozeren gainetik.

Hori da aipatu nahi genuen azkeneko aspektua: funktoreen erabilgarritasuna praktika matematikorako. 1971. urtean Mac Lanek argitaratu zuen *Categories for the working mathematician* (Mac Lane (1971)) liburuaren izenburuak garbi erakusten du Mac Lanek berak zein zentzutan kontsideratu zuen teoria berria[17]. Liburu honetan, kategoria teoriako nozio orokorrak azaltzen diren bitartean, kontzeptu berriak argitzeko eta ilustratzeko adibide asko

[17] Garbi dago liburuaren izenburuak, kategoria teoriaren beste erabilpen batzuk ere badirela iradokitzen duela. Esan behar da, hala ere, Mac Lanek teoria honi matematikaz kanpo eman nahi izan zitzaizkion erabilera ilunak arbuiatu egin zituela, kategoria teoria matematikarako sortua zela esanaz.

ematen da, matematikaren esparru diferenteetan (topologian, algebra unibertsalean,...) izan duten erabilera eta aurkitu zaizkien aplikazioak erakutsiz. Kategoria teoriako hasierako nozioak topologia algebraikoaren esparrutik datozenez, normala da hasieran eremu horretan aurkitzea aplikazio nabarmenenak. XX. mendeak aurrera egin ahala, funktoreen aplikazio eremua asko handitu da, bai matematikaren baitan eta baita matematika eta beste diziplina batzuen arteko mugan ere: konputazio teoria, filosofia, hizkuntzalaritza,...

3. Matematikaren filosofia

Mac Lanek logika matematikoan eta matematikaren oinarrietan izan zuen gaztetako interesak, modu naturalean eraman zuen matematikaren filosofiara. Mac Laneren iritziz, XX. mende hasierako matematikaren oinarrien inguruko eztabaidaren ondotik, 1920tik 1930erako tartean matematikaren filosofian interes handia piztu bazen ere, aurrera egiteko zailtasun handiak erakusten zituen gai honek. Berak ere, bai logika eta bai matematikaren filosofia, pixka bat alboratu eta dinamikoagoak ziren zelaietan murgiltzea erabaki zuen. 1980. urte inguruan, berriro helduko zion, ordea, kasu honetan, aspaldian gelditua zegoen gaiari, bere matematikaren ezagupen zabaletik perspektiba berriak irekiz. Urte horietan egindako lanaren emaitza da, hain zuzen ere, 1986an argitaratutako *Mathematics: Form and Function* liburua. Bertan luze eta zabal agertzen du Mac Lanek, berak duen matematikaren filosofiaren ikuspegia. Matematika eginez eta matematikaz pentsatuz, bizi osoa eman zuen gizonarengandik datorrelarik, oso kontuan hartu beharreko ikuspegia dela pentsatzen dugu.

Mathematics: Form and Function liburuan, kritika zorrotza egin zien Mac Lanek aurrez matematikaren filosofian egindako lan askori, bereziki Wittgensteinek egindakoari. Mac Laneren iritziz, ezinezkoa da matematikaren filosofia egitea benetan matematika ezagutu gabe. Matematika diogunean, lehenik eta behin, zertaz ari garen jakin behar dugu eta hori jakinda baino ezingo da esan, matematikaren filosofiak zer izan beharko lukeen. Wittgensteinek eta beste filosofo batzuek huts egin zuten horretan. Matematikaren oinarri-oinarrizko gaiak baino ez zituzten kontuan hartu, orduko matematikaren zabaltasun eta konplexutasuna arbuiatuz. Matematikan sartu egin behar du matematikaren filosofia egin nahi duenak. Filosofo profesionalek ez dute inongo autoritaterik, besterik gabe, ezagutzen ez duten hartaz jarduteko.

Abantaila handiz jokatzen du beraz Mac Lanek, hainbeste urtetan lehen mailako matematikari emankorra izan zen aldetik. Bere matematikaren ikuspegia azaltzerakoan, garaiko matematikari errepaso luze, zabal eta sakona emango dio lehenbizi. Eta ikuspegi orokor horrek emandako babesetik abiatuko da, bere tesia edo tesiak aurkezteko.

Mac Lanek matematikaren garapenak elkarrekin modu indartsuan elkarlotutako arau formal, kontzeptu eta sistemen sarea eskaintzen digula defendatzen du: matematika sare bat dela. Sare honetako korapiloak, zientziarako nahiz beste hainbat giza-jarduerarako beharrezkoak diren prozeduretatik oso hurbil daudela, eta fenomeno zientifiko eta giza-jarduueretatik, sistema matematiko formalerako bidea, intuizioari eta ideia orokor desberdinei esker burutzen dela. Gero, bere ustetan, sare formalak garapen berriak egitea bidera dezake konjetura, problema, abstrakzio eta hobeto ulertu nahiak bultzatuta.

3.1. Matematikaren izaera

Aurkezpen aldetik formala da matematika. Kalkuluak ondo zehaztutako arauei jarraituz egiten dira. Frogapenak aurrez onartutako axiometatik abiatuta eta aurrez onartutako dedukzio arauak erabiliz egiten dira. Errelebanteak diren kontzeptu berriak definizio zorrotzen bitartez sartzen dira. Akats eta desadostasunak arau pertinenteei erreparatuz konpontzen dira. Eguneroko matematikan erabili ohi den formalismoa, agian inperfektua eta eskematikoa izango da, baina ukaezina da berarekin daramala perfekzioaren ideia. Zentzu honetan pertsonongandik independentea da matematika. Erabat zorrotza da matematika.

Formala dena ondo komunikatua izan daiteke, anbiguotasunean erori gabe. Matematikaren erabateko formalizaziorako bidean, etapa desberdinak bereiz ditzakegu:

— Kalkulurako erregelak (kalkulu aritmetikoak, identitate trigonometrikoak,...).
— Diferentziazio formulak kalkuluan.
— Estimazio eta hurbilpenerako formulak.
— Aritmetika eta geometriarako axioma sistemak.
— Inferentzia logikorako arauak.
— Objektu algebraiko eta topologiko abstraktuentzako axiomak.
— Multzo eta Topos-entzako axiomak.
— Matematikaren erabateko formalizazioa.

Hilberten *formalismoak*, matematika ez zela formulen manipulazio sistematikoa baino baieztatzen zuen. Beharrezko oinarria zuen hau, berak nahi zuen bezala, matematika osoaren konsistentzia formala frogatzeko. Badira formalismoaren bidetik harago doazen ikuspegi batzuk: matematika sinboloen joko bat baino ez dela diotenak. Ez zen hau baina, Hilberten ikuspegia.

Mac Laneren iritziz matematikak badu osagai formal garrantzitsu bat, baina ez da hori matematikaren izaeraren alderdi bakarra. Eta garrantzitsuena ere ez. Matematika ez da errealitatearen azterketa zientifiko bat, baina bai errealitatearen alderdi ugarien muinean dauden aspektu formalen azterketa bat. Ez da espazioa eta denboraren zientzia, baina bai hauek ulertu ahal izateko ezinbestekoak diren ideien formulazioaz arduratzen den diziplina. Ulermen hori ideia nagusi batzuen menpekoa da. Eta ideia horiek, formalizatuz baino ezin daitezke zehatz eta ulergarri bihurtu.

Matematikan eman diren formalizazio gehienek, badute gidatuko dituen eta zentzua emango dien ideia edo nozio intuitiboren bat, barrenean. Ez da erraza «ideia» bat zer den garbi azaltzea. Are gehiago, ideia sakonak ia-ia komunikatu ezinak dira eta formalizazioren baten barnean adieraziak datozenean baino ezin daitezke antzeman. Ideia orokor hauetatik gehienak, giza-jardueretan oinarritzen dira. Ideia batek formalizazio asko eta desberdinak izan ditzake matematikaren barnean. (416. or.) Ondoko taulan dauzkagu zenbait adibide:

Jatorria	**Ideia**	**Bertsio Formala**
Polinomioak *sin*, *tan*, *log* Menpeko aldagaiak	Funtzioa	Espresio formalak (hizkuntza batean) Balioen taula osatua Bikote ordenatuen multzoa Gezia kategoria batean
Abiadura, azelerazioa Zuzen ukitzailea	Aldakuntza tasa	Deribatu Deribatu partzial Deribatu konplexua
Eragile diferentziala Matrizea Eragiketa aritmetikoa	Eragiketa	Transformazio lineala Eragiketa diadikoa Eragiketa monadikoa
Orden lineala Orden partziala Kongruentzia (zenbakiak, figurak)	Erlazioa	Erlazio diadikoa Bikote ordenatuen multzoa Erlazio triadikoa
Lehenetako faktorizazioa Frakzio partzialetako hedapena	(Barietate baten) osagaiak Deskonposaketa	Ideal lehenetako faktorizazioa Biderkadura Koproduktua, etab.

Matematika sistema formal bakarra izatea, onartu ezina da ikuspuntu errealista batetik. Oso landua den elkarlotutako sistema formal, sistema axiomatiko, arau eta konexio sare bat dela esateak hobeto deskribatuko luke, Mac Laneren hitzetan.

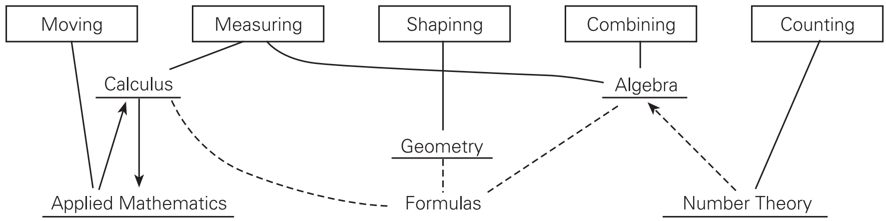
Matematikaren sareak, lehen ere esan dugunez, lotura asko dauzka kanpoko munduarekin (errealitatearekin). Matematikaren oinarrizko gaiak (grafikoki, sare matematikoaren ertzetan leudekeenak) bereziki gogor lotuta daude giza-jarduera arruntekin: zenbatzearekin, neurtzearekin, mugitzearekin, behatzearekin, aldatzearekin,... Horrenbestez posible da matematikak errealitatean lur hartzen duela esatea (jarduera hauek errealitatearen errepresentaziotzat hartzen ditugun heinean, beti ere).

Zientziek, matematikak giza jakintza askorekin duten zerikusia begi-bistan jartzen dute. Geometria, adibidez, neurketarekin, arkitekturarekin, nabigaziorekin, espaziorekin, denborarekin eta espazio-denborarekin lotua dago. Kalkulua mekanika, dinamika eta fisika teorikoko beste hainbat alderdiri lotua dago; ekuazio diferentzialak eta Fourierren analisia dauden bezalaxe. Baina sarritan matematikaren eta zientzien arteko lotura ez da oinarrizko matematikaren bidezkoa, konplexutasun handiko garapen matematikoen bidezkoa baizik. Hala ere ezin dezakegu matematika zientzia denik esan. Ez eta matematika aplikatua ere. Azken finean metodo axiomatikoa matematikaren independentzia deklarazio bat da: matematika ez dago kanpoko eraginen menpe.

Matematikak tratatzen dituen gaiak ingurutik ateratakoak dira (giza-jardueretatik, fenomeno fisikoetatik, zientziatik...) eta lehenago edo beranduago lortutako garapen matematikoak inguruari aplikatzen zaizkio. Matematika ez da baina, giza-jarduera, fenomeno fisiko eta abarrez arduratzen. Matematika ez da munduaz arduratzen. Mundutik eratorritako ideiak formalizatzea eta formalizazio horien garapenak egitea da matematikaren zeregina.

Kanpokoarekin Matematikak dituen loturez gain, bere barne-kontzeptuen arteko loturak ere kontuan izan behar ditugu, sare matematikoa deskribatzerakoan. Lotura horiei esker, matematika barne kohesio handia erakusten duen diziplina da. Adibide asko jar litezke, hasieran urrunekoak ziruditen matematikaren esparruen artean, gerora ikusi izan diren loturak erakusteko. Bat aipatzearren, hor daukagu zenbakien teoria algebraikoko ideal lehenaren kontzeptua, Riemann-en gainazaletako puntuen eta kurba algebraikoetako puntuen arteko erlazioa.

Sarearen korapilo eta loturak hobeto aztertuz, gaurko matematikaren sailkapena nola antola daitekeen ikusteko modua izan dezakegu. Matematikaren lehenbiziko banaketak nahiko argia dirudi, oinarrizko giza-jardueretatik zuzen eratorritako sailkapena litzateke:



Goiko diagraman[18] azpimarratuta dauzkagu matematika klasikoaren ohiko bost adar nagusiak. Zenbakien teoria alde batetik, zenbaki osoak gaitzat dituen adarra eta Peanoren axiomek guztiz deskribatzen duten estruktura duena (axioma horiekin frogatu ezin diren zenbaki osoen inguruko egiazko sententziak badiren arren). Algebra, formulen manipulazioaz arduratzen den adar bezala deskriba daiteke bere eboluzioaren lehen partean. Zehaztu gabeko zenbakien (normalean zenbaki errealak) lekua hartzen duten sinboloz adierazi ohi dira aldagaiak. Geometria, hasiera batean espazioaren zientzia bezala kontsidera daitekeena. Kalkulua, kantitate aldakorrez arduratzen den Matematikaren adarra; kantitate hauek tratatzeko deribazio eta integrazio teknikak eskaintzen dituena. Azkenik matematika aplikatua, kalkulua erabiliz entitate jarraien azterketa bezala uler daitekeena eta bide batez, kalkuluari problema berriak aurkezten dizkiona. Horrela, adibidez, beroaren azterketa eta hemendik eratorritako ekuazio diferentzialek serie trigonometrikoen azterketari hasiera eman zien, Fourier-en azterketen bidetik.

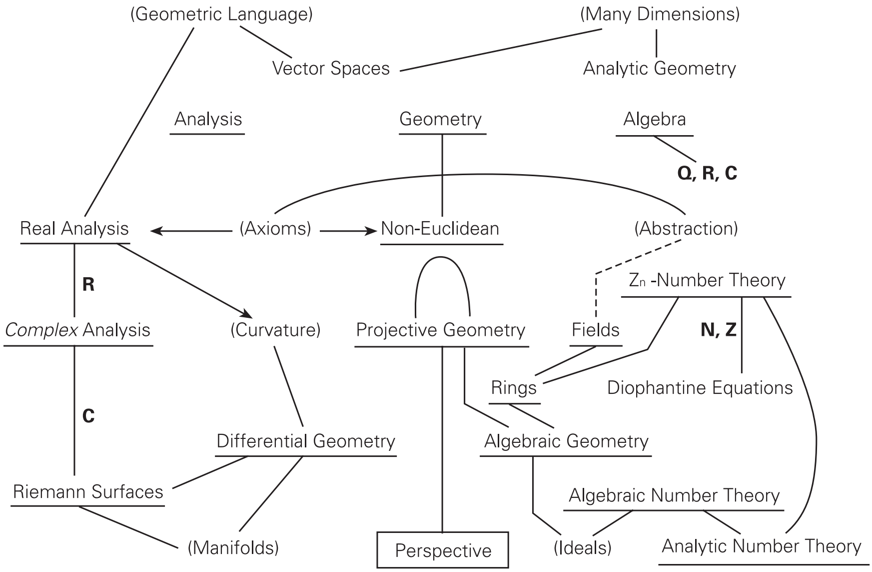
Baina Matematikaren irudi sinpleegia da hau: gaur ezagutzen dugun sarea, askoz konplexuagoa da. Hona bigarren diagrama bat[19], konplexuagoa, baina sinpleegia hau ere.

Era honetako diagramak gero eta gehiago zehaztu eta konplika daitezke, matematikaren adar desberdinak ondo lotuta daudela erakutsiz. Gainera, kontuan izan behar da sare hau ez dela bukatua, eta Matematikaren garapenak aurrera darraien heinean, lotura berriak eta adar berriak agertuz doazela. Hasiera batean elkarrengandik oso urrun egon daitezkeen bi adar (multzo teoria eta geometria, esaterako) denborarekin elkarrengana hurbildu daitezke, bietan erabilgarriak diren metodoak eta kontzeptuak agertuz doazen heinean (*sheaf theory*ko metodoek eragindako aipatu bi alorren hurbilketa bezala). Matematika osoaren diagrama bat marraztea ez litzateke lan erraza izango eta agian aterako litzatekeen diagraman ezer ikustea zaila izango litzateke.

---

[18] Diagrama hau Mac Lane (1981) artikuluan dago.

[19] Diagrama hau Mac Lane (1986) liburuan dago, 423. orrian. Liburu horretan, sare matematikoaren zati ezberdinak errepresentatuz, antzerako diagrama asko aurki daitezke.



3.2. Matematikaren garapena

Matematikaren garapena eta aurrerabide berriak nondik datozen aztertzerako orduan, hau da, ikerkuntza matematikoa zein norabidetan zuzendu erabakitzeko orduan, zerikusi handia izan dute, historikoki, matematika barnean modu naturalean aurkeztu izan diren problema ezagunek.

Norabide hori erabakiko duten beste indar batzuk ere badira: eguneroko giza-jarduereetan sortutako arazo nahiz zientzia desberdinen arazoei erantzun egokiak eman nahia adibidez. Baina, berriz diogu, problema ezagunek paper garrantzitsua jokatu dute matematikaren eboluzioa markatzerako orduan. 1900. urteko Parisko matematikarien kongresuan David Hilbertek proposatutako 20 problema irekiak izan litezke esan dugunaren adierazle garrantzitsua. Adibidez, mendetako lanari esker baino ebatzi ezin izan den Fermaten azken teoremaren *affairea* ekar genezake gogora: $x^n + y^n = z^n$ ekuazioak ez du soluziorik $n > 2$ denean. n = 2 denean, ekuazio horren soluzio oso guztiak aurkitzea posible da (hirukote pitagorikoak) kontzeptu matematikoetan gehiegi sakondu gabe. XIX. mendean Kummer saiatu zen n = 2 kasuan gertatzen zena, modu analogo batean orokortzen, ez zuen baina esperotako emaitzarik lortu. Hala ere, Kummerren azterketek ideal lehenen bidezko idealen deskonposaketaren kontzeptu orokorragorako bidea zabaldu zuten. Bide honetatik etorriko ziren gerora zenbakien teoria algebraiko deitu izan den matematikaren adar emankorraren garapen nagusiak. Azkenean, ondo kostata izan bazen ere, eta problemaren enuntziatu sinpleak inondik inora iradokitzen ez dituen emaitza sakonak baliatuz, Fermaten azken teorema frogatzea lortu zen. Azpimarratu beharra dago, Fermaten azken teoremak, berez, matematikan izandako errelebantzia oso erlatiboa izanik ere, berau frogatzeko asmotan bideratutako garapenetan dagoela problema honek matematikarako izan duen garrantzia.

Zenbait problemak ebazterako orduan duen zailtasuna ez dator bat, ikusi dugunez, ebazpen prozesutik lortutako emaitzek izan dezaketen errelebantziarekin. Era honetako problemak, xake problema batekin aldara ditzakegu neurri batean: zailtasun handia izan dezake bere ebazpenak, baina emaitza moduan ez dute balio handiegirik matematikaren barruan. Horrek ez du kentzen, baina, zeharka bada ere, problema hori matematikaren garapenerako etengabeko ekarpen iturri izateko aukera. Problema matematikoek, beraz, duten alde ludikoari edo suposatzen duten erronkari begiratuta, orain artean hainbeste azpimarratu dugun matematikaren izaera formalari kontrapisu egiteko balio dute. Eta badira zenbait eskola matematiko, hungariarra kasu, problema matematikoen formulazio eta ebazpenera bereziki zuzendu izan direnak. Paul Erdös XX. mendeko matematikari handia da eskola horren ordezkari garrantzitsu bat.

Matematikaren jardunean elementu nagusia da teoremak zergatik sostengatzen diren ondo ulertzea. Matematikariak eskolak emanaz eta elkarren arteko elkarrizketa eta eztabaiden bidez, behin eta berriz, lortutako emaitzak hobeto ulertzeko lanean dabiltza. Matematikaren ulertze hori gauzatzeko metodo desberdinak darabiltza matematikariak. Azter ditzagun metodo nagusiak.

Analogia. Jar ditzagun adibide batzuk analogiaz zer esan nahi dugun ikusteko. Multzoen gaineko eragiketa Boolearren (ebakidura, bildura, osagarria) eta proposizioen gaineko eragiketa logikoen (eta, edo, ez) arteko antzekotasunari deituko diogu analogia; zeresan handia izango du analogia honek logikan. Planoko edozein bektore osagai horizontal eta osagai bertikalaren arteko batuketa da; zenbaki konplexu oro zati errealaren eta zati irudikariaren arteko batuketa da eta $y'' = -y$ ekuazio diferentzialaren edozein soluzio $\cos x$-en multiplo baten eta $\sin x$-en multiplo baten batura da. Deskonposizio lineal horien guztien arteko analogiak, bektore espazio bateko oinarria definitzera eraman gaitzake.

Adibideen azterketa. Teoria orokor asko adibide konkretuen azterketatik abiatu izan da. Teoria oso baten garapena nondik bideratu adibide esanguratsu baten azterketak erabaki dezake. Geometria algebraikoa adibidez planoko kurba koadratiko, kubiko eta koartikoen azterketa egitetik abiatu zen. Adibidez, Hilbertek zenbakizko gorputzen hedadura koadratiko erlatiboen inguruan egindako azterketa intentsiboak, zenbaki algebraikoen gorputzen hedadura abeldarren inguruko zenbait konjetura eginarazi zizkion; eta konjetura horiek frogatzeak 50 urte inguruko lana suposatu zuen. Matematikako teoria orokorrak, kasu konkretu desberdinen ezaugarri komunak modu egokian deskribatzeko balio duten heinean dira erabilgarriak.

Frogapenen azterketa. Ez da nahikoa teorema bat frogatzearekin. Ahalik eta frogapenik egokiena aurkitzea beharrezkoa da, hau da, emaitza hori zergatik ematen den azaltzen duen frogapena lortu behar da. Frogapenen azterketa kontziente batek, frogapenean erabilitako ezinbesteko axiomak aurkitzera eraman gaitzake (analisian erabiltzen diren zenbait arrazonamenduren muinean Aukeraren Axioma dagoela adibidez) eta kontzeptu berrietarako bidea ireki dezake. Cauchyren integralaren teorema, hasieran *Gauss-Greenen lema* erabiliz frogatua, aldagai konplexuko analisiaren emaitza zentrala da. Bere frogapenaren azterketak metodo homologikoen erabilera iradokitzen du. Bestalde, frogapenak aztertzerakoan diagramak erabiltzea oso interesgarria suertatu izan da behin baino gehiagotan. Gogora ekar dezagun, topologoek X espazio batetik Y espazio baterako aplikazio jarraiak $X \to Y$ geziaren bidez adierazi izanak, homologiako segida zehatzak eta kategoriak bezalako kontzeptu aberatsak ekarri zituela.

Ikuspegiz aldatzea. Frogapena ulertzeko orduan garrantzitsua izan daiteke eskuartean dugun emaitzari ikuspegi desberdinetatik begiratzea.

Formulazio inbarianteak. Algebra linealean oso ondo ikusten da, espazio bektorialen oinarri aukeraketarekiko independenteak diren aplikazioak propietate interesgarriak izan ohi dituztela.

Matematikaren barne dinamikan, hau da, matematikaren hedatze prozesuan, orokortzerantz eta abstrakziorantz jotzea oinarrizko bi jokaera dira. Orokorpena eta abstrakzioa elkarri oso lotutako bi kontzeptu badira ere, bereizi beharrekoak dira. Orokorpena diogunean ordura arteko emaitzak barruan hartuko dituen ikuspegi berri batez dihardugu, kasu partikularren propietate nagusiak mantenduko dituena. Abstrakzioa aldiz, kasu konkretu bat hartu, eta irrelebanteak diren propietateak albo batera lagata, gure problemarako esentziala den hura baino ez kontsideratzean datza. Honelako sailkapen bat eman dezakegu:

a) *Kasu desberdinetatik orokortasunera*. Hasierako zenbait emaitza espezifiko teorema orokorrago baten baitan kokatzean datzana. Adibidez $(x + y)^2$, $(x + y)^3$ formula konkretuetatik $(x + y)^n$ binomioaren formulara, edo binomio orokortuaren formulara jauzi egin genezake.
b) *Urrats analogoen bidezko orokorpena*. Emandako kasuekiko modu paraleloan garatzen den teoria orokorrago bat bilatzean datzana. Adibidez, zenbaki erreal, konplexu eta kuaternoien ondoan, errealen gaineko dimentsio finitu handiagoko algebrarik ba ote zen ikusi nahi izan zenean egin zen moduan. Kasu hartan dimentsio finituko beste zatidura algebrarik ez zegoela ikusi zen. Ez behintzat elkarkortasuna

bezalako oinarrizko propietatea ez galtzekotan. Analisi errealetik konplexurako orokorpena ere hemen koka dezakegu.

c) *Aldaketen bidezko orokorpena*. Kasu batzuetan ezin izaten da teorema jakin bat zuzenean orokortu. Kontzeptu batzuk aldatuz ordea posible izan daiteke. Horixe da ondoko kasuan gertatzen dena. Zenbaki osoen eraztunean daukagun faktore lehenetako deskonposizioak huts egiten du, zenbaki algebraikoen gorputz koadratiko nahiz gorputz ziklotomiko gehienen, osoen eraztunetara pasatzen garenean. Idealen, ideal lehenetako deskonposizioak propietate hau bere gain hartzen du ordea, eta propietate orokorrago hau aipatutako beste eraztunetan ere betetzen da. Orokorpenak, emaitzaren muina non dagoen ikusarazten digu kasu honetan.

d) *Ezabaketaren bidezko abstrakzioa*. Eskuartean daukagun kontzeptu matematikoaren datu batzuk ahaztuz, kontzeptu «abstraktuago» bat lortzean datzana. Honek sarritan alderantzizko prozesu bat ere izan ohi du, «errepresentazio teorema» deitutakoen bidetik. Kontzeptu abstraktuak konkretuagoen bidez errepresentatzea nahikoa dela dioten teoremak dira hauek. Adibidez, «transformazio talde» kontzeptutik abiatuta elementuen izaeraz ahantz gaitezke, betetzen dituzten propietateak (transformazioen konposaketaren propietate elkarkorra, identitatearen existentzia eta alderantzizkoaren existentzia) bakarrik gordez. Horrela talde abstraktua definitzea lortzen da. Aitzitik, Cayleyren errepresentazio teoremak talde abstraktu oro, multzoren baten gaineko transformazio talde batekiko isomorfoa dela adierazten du.

e) *Analogia bidezko abstrakzioa*. Bi teoria desberdinen arteko begi-bistako paralelismo zuzen bat badela ikusteak, agian bi teoria horien azpian, orokorragoa den beste teoria bat badela iradokitzen du, teoria berria aurreko bien emaitza komunak emateko nahikoa delarik. Zenbaki algebraikoen gorputzen eta funtzio algebraikoen gorputzen teoria paraleloek adibidez, dimentsio finituko gorputz hedaduren teoria abstraktuagorako bidea iradokitzen dute. Kohomologia teoria, Lieren algebrak eta algebra elkarkorren eremu desberdinduak ere, topologia algebraikotik hartutako metodoen bitartez, arrakastaz bateratuak izan ziren algebra homologikoaren teoriaren barruan.

f) *Ikuspuntua aldatzearen bidezko abstrakzioa*. Hasiera batean oso iluna den kontzeptu bat, egoeraren azterketa zehatzaren ondoren, gertatzen denaren erantzule nagusia dela ikus daiteke batzuetan. Hori horrela denean, oinarrizko kontzeptu hau bere propietateekin formalizatzen saiatuko gara. Horrelako zerbait gertatzen da, Galoisen lanaren eboluzioan. Polinomio baten erroen teoria bezala hasi zena, gero eta gehiago Galoisen talde deitutakoan zentratzen joango zen, arazoaren funtsa kontzeptu horrengan zetzala konturaturik. Kasu honetan ikuspegi abstraktuagoak arazoa hobeto ulertzea ahalbidetzen du. Jarraitasunaren azterketak beste adibide garrantzitsu bat eskaintzen digu. Hasieran jarraitasuna eta limitea, desberdintza eta _-_ prozesuen bidez definituak izan ziren. Gerora propietate hauek deskribatzeko tarte irekien erabileraren garrantziaz ohartuta, multzo irekien kontzeptu abstraktura iritsi zen. Multzo irekiak baino ez ziren behar jarraitasuna, eta azken batean limitearen kontzeptua deskribatzeko. Egoera matematiko konkretu bakoitzean, oinarrizko nozioak intuizio eta ulermenaren bidez bereiziz joaten dira.

Orain arte problemak, orokorpenak eta abstrakzioak aipatu ditugu sare matematikoaren garapena gidatzen duten indar nagusi bezala. Baina, esan dugun bezala, sare matematikoak bere horretan lotura asko baditu ere, ez dugu ahaztu behar giza-jarduera eta jarduera zientifikoari bereziki lotuta agertzen dela sare hau. Bide hauetatik ere matematikaren adar berriak ager daitezke. Grafoen teoria, adibidez, gaur egun informatikan eta giza-zientzietan dituen aplikazioak direla eta modan dagoen matematikaren adarra izanik, ez da ahaztu behar Königsbergeko zubien problematik abiatu zela: pasa al daiteke zubi guztietatik, bi aldiz inondik pasa gabe? Joko bat baino ez zenak ikaragarrizko garapen formala izan du eta aplikazio asko aurkitu zaizkio, sarritan hasierako problemarekin inongo zerikusirik ez zutenak. Kontuan hartzekoa da, baita ere, batzuetan oso emankorra izango dela dirudien ideia batek zein bide laburra egiten duen, eta beste batzuetan, aldiz, espero ez den lekuan adar matematiko berri eta indartsu bat nola aurki daitekeen.

3.3. **Matematikaren filosofiak zer izan behar duen**

Sare matematikoa nola osatzen den eta nola garatzen den aztertu ostean, sententzia matematikoen izaera aztertuko dugu. Matematikaren filosofia egin ahal izateko beharrezko abiapuntua izango da hau.

Matematikako teoremak ez dira, inola ere, mundu fisikoko objektu indibidualen portaerari buruzko baieztapenak. Esan dugunez, matematika sare zabal bat da. Giza jarduerekiko eta zientziarekiko lotura sendoak izateaz gain, barne kohesio gogorra duena. Ez daukagu termino matematiko bakoitzari dagokion objektu fisikorik, ez eta teorema matematiko bakoitzari egokitutako lege fisikorik ere. Horren ordez, matematika osatzen duten sistemak eta horien erabilera praktikoa egiteko onartutako prozedurak dauzkagu. Hori horrela izanik, ez dauka inongo zentzurik, entitate matematikoen arteko erlazio bat emanik, horiei dagozkien objektu fisikoengan esandakoa egia den galdetzeak. Eman dugun matematikaren deskribapenaren arabera, honako hau litzateke egin beharreko galdera: «zuzena al da matematikaren zati hori?». Hau da, matematikaren esparru jakin batean egindako kalkuluek, aurrez onartutako arau formalak jarraitzen al dituzte, eta lortutako teoremak, hasieran onartutako axiometatik, eta hasieran onartutako inferentzia erregеlak erabiliz lortu al daitezke? Baiezko kasuan matematika zuzena dela esan ahal izango dugu; ez baina egia denik.

Matematikaren inguruan egindako honako beste galdera hauek ere zentzua izango lukete: erabakitzen al du matematika zati honek orain arte irekita egon den arazoren bat, edo osatzen al du lehenago hasitako garapenen bat? Matematika zati hau, argigarria suertatzen al da? Orain artekoa ulertzen laguntzen al du, edonola egiten duelarik ere? Etorkizunean garapen berriak egiteko bidea zabaltzen al du, edota lehendik datorren arazoren batekin lotzeko aukera ematen al du? Errelebantea al da matematikaren zati hau? Zientzia edo giza-jardueraren batekin loturarik ba al du? Baina, esan bezala, zuzentasunarena da galdera nagusia.

Mundu erreala ulertzeko forma matematiko desberdinak erabil daitezke. Adibidez $Z/2Z \times Z/2Z$ ez da mundu errealeko objektu bat. Forma bat baino ez da; munduko hainbat leku eta egoeratan errepresentazioa duen forma bat. Adibidez, egitura errektangular bakoitzean presente dagoen simetriaren kasuan agertzen da. Mundua kontenplatzetik eratorritako formak dira, matematikaren lehengaiak, baina forma hauek ez dira mundukoak.

Mac Lanek matematika, zuzena bai, baina egia ez delako tesia sostengatzen du, bere matematikaren filosofiarako abiapuntu bezala. Tesi honek ondorio zuzenak dauzka Mac Laneren matematikaren filosofiarako. Matematikan erabilitako multzoak ez dira bilduma fisikoak izango; hautatutako axiomen bidez definitutako kontzeptu abstraktu (forma) baten errepresentazioak dira. Badakigu mundu erreala finitua dela, eta, beraz, hemen kontsidera daitezkeen bilduma guztiak ere finituak izango dira. Hala ere, bai Zermelo-Fraenkel sistemarako, bai kategoria teoriarako infinituaren axioma beharrezkoa da, eta honek matematikan infinituaren kontzepzio bat badela iradokitzen du. Axioma honek bilduma baten propietate formal bat ezartzen du, bilduma hori objektu erreala izango balitz, infinitua izango litzatekeela dioena. Baina mundu errealean ez dago horrelakorik. Infinituaren axioma, infinitu potentzialaren kontzeptuan oinarritutako esaldi formal bat da azken finean eta hau da infinituak matematikan duen zentzua. Hala ere, matematikako benetako kalkulu, definizio eta frogapen guztiak finituak dira. Matematikako infinitua ez dago, beraz, mundu errealaren finitutasunarekin kontraesanean. Era honetan Cantor-ek egin zuen multzo infinituen erabilera kritikatu zuen posizioa baliogabetua geratzen da. Matematikako infinitua, infinitu formal bat da.

Matematikan existentziari buruz dihardugunean, ez da existentzia errealarekin nahastu behar. Objektu matematikoak existitzen direla diogunean, ez dugu pertsonak existitzen direla diogunean ulertzen duguna ulertu behar. Existentzia «errealak», ideia (logiko) matematikoei bide eman zien, azkenik $(\exists x)F(x)$ sententziarentzako axiomen bidez formalizatu zena. Horrela bada, kalkulu matematikoan $(\exists x)F(x)$ diogunean, sententzia hori inferentzia arau formalak jarraituz lortu dela da, esan nahi dugun guztia; ez gehiago eta ez gutxiago. Gutxiago nahi izanez gero, hala ere, logika intuizionistara jo dezakegu (beste sistema formal bat baino ez dena).

Zuzena bai, baina egiazkoa ez bada, matematikak ontologikoki ezer ez duela adierazten ondorioztatzen dugu. Beraz, matematikak ez dauka inongo zorrik ontologiarekin. Objektu matematikoak ez dira existitzen, eta kito. Ez daukagu Dedekinden ebakidurek zenbaki erreal «errealak» determinatzen dituztela jakiteko premiarik; deskribapen hauek zenbaki errealentzako forma egokiak sortzen dituztela eta lanerako balio dutela jakitea aski zaigu. Matematikarako logikaren «legeak» frogapen matematikoak aurrera eramateko onartu beharreko arau formalak baino ez dira. Zorionez lege horiek filosofo edo legelariek errealitateaz argudiatzerakoan darabiltzaten legeen paraleloak dira. Baina matematika ez dago errealitateaz arduratuta, arauez baizik.

Horrela bada, matematikaren filosofia egoki batek ez lituzke galdera ontologiko nahiz epistemologikoak onartu beharko. Teorema matematikoek mundu errealari buruzko egiak esaten ez badituzte, zergatik arduratu egia horiez jabetzera nola irits gaitezkeen? Honetan huts egiten dute ustez matematikaren filosofiaz diharduten lan askok. Horien artean aurkitzen da, hasieran aipatu dugun Wittgeinsteinek 1964an idatzitako *Remarks on the foundation of mathematics* liburua. Liburu honetan kontuan hartzen den matematika, oinarri-oinarrizko matematika da soil-soilik eta tratatzen diren gaiak hertsiki filosofikoak dira, matematikarekin zerikusia dutenak baino.

Esandako guztiak matematikaren filosofiako ohiko galdera nagusiak desplazatu egiten ditu. Baina horiek erantzunik gabe jarraitzen dute. Hona matematikaren filosofiak Mac Laneren ustetan erantzun beharko lituzkeen galdera nagusiak:

a) Zeintzuk dira «ideia» matematiko baten ezaugarriak? Nola antzeman dezakegu? Nola deskribatu? Zein da ideia lausoa eta formulazio zehatzaren arteko erlazioa?
b) Nola eratortzen da forma matematiko bat, giza jarduera eta kuestio zientifikoetatik? Zerk egiten du posible ideia baten formulazio matematikoa? Nola dakigu gai batean badela erator daitekeen matematikarik? Nola da posible formalizazio batek, garapen bat izan ostean, berriro ere mundu errealean aplikaziorik izatea?
c) Nola azaltzen da matematikak zientzia eta jakintzarako ereduak eskaintzeko duen ukaezinezko eraginkortasuna? Mundu erreala, eredu formalekin erraz bat etortzeko moduko zatiz eraikia al dago? Edo gure eredu formalaren nozioa al da, milaka urtetan errealitateak duen egituraketari egokitu zaiona?
   Matematikaren arauak, axiomak eta definizioak formalak badira ere, ez dugu ahaztu behar giza jarduera eta behaketa zientifikoen argitan

aukeratuak izan ohi direla. Hauen hedapenak garatu ostean, jatorrizko problemari erantzuteko erabiltzea ez da agian harrigarriena (nahiz eta nola gertatzen den ez jakin); bai ordea hasiera batean inolako zerikusirik ez duten fenomenoak azaltzeko erabilgarria suertatzea. Errealitatearen izaeraren inguruko kuestioak agertzen zaizkigu puntu honetan. Matematikaren garapen formalak mundura egokitzen direla onartzeak esan nahi al du, mundua nahaspila bat ez dela eta munduko gertaerak deskripzio formal konplikatuetara egokitzen diren ereduetan antolatuta daudela? Eta hala izatekotan, nola erator ditzake gizakiak eredu horiek eta hain zehatz aztertu? Zenbakiek beren izaera berezian (Peanoren axiomatika betetzen duten eredu guztiak isomorfoak baitira), edo taldeek beren aniztasunean, edo geometriak bere bertsio diferenteetan, edo analisiak dakarkigun aldaketaren nozioan, munduarekiko guztiz errelebanteak diren ereduez al dihardute?

d) Zein da matematika eta Zientzia Fisikoaren arteko muga?

Mac Lanek ez dauka galdera horientzat erantzun argirik, apal aitortzen duenez. Matematikaren filosofiaren norabideak zein izan behar duen eta zein ez esateak ordea, berebiziko garrantzia dauka, gaiaren zailtasuna begibistakoa denean.

Matematikaren forma eta funtzioaren azterketa zehatz batek matematikaren filosofia argitzeaz gain, ikerketa matematikoak hartu beharreko bidea zein den erabakitzen laguntzen du, Mac Laneren ustetan.

Giza esperientziatik eta fenomeno zientifikoen behaketatik eratorritako ideiak dira matematikaren lehengaiak eta hauek formalizatu eta orokortzea da matematikari dagokion lana. Ideiak bata bestearekin lotuz sare matematikoa ehunduz doa. Ikerketa matematikoa bide anitzetatik bideratu ohi da:

a) Inguru zientifikotik ideiak eta problemak erauziz;
b) Ideiak formulatuz;
c) Kanpotik datozen problemak askatuz;
d) Kontzeptu matematikoen arteko lotura berriak proposatuz;
e) Kontzeptuak zorroztasunez definituz;
f) Lehenagoko kontzeptuak gehiago garatuz (teorema berriak,...);
g) Matematikaren barneko problemak askatuz;
h) Konjetura eta problema berriak planteatuz;
i) Aipatutako puntuen aspektu desberdinak ulertuz;

Ikus daitekeen bezala, garrantzi berezia dauka ideia berriak atera eta horiek egindako ekarpenak hobeto ulertzen saiatzeak, eta hori teorema berriak ateratze hutsaren ohiko ikuspegitik aldentzen da. Ikerketa matematikoa, inola ere ez da teoremen frogapenera mugatzen.

Ikerketaren norabideari dagokionean, nola aukeratzen du matematikariak bere espezialitatea? Azken urteetan jarduneko matematikarien familiak ezagutu duen hazkunde nabarmenak, ikerketarako oso alor espezifikoen sorrera ekarri du. Bakoitzaren hautuan eragina duten baldintza nagusien artean, honakoak aipa genitzake: ohitura eta gaitasuna, autoritatea, moda, aukerak, ulermena,... Orokorrean korronte nagusiari jarraitu ohi zaio, zenbait bide uste baino azkarrago agortu daitezkeela gogoan izanda. Hala ere, eta korronte nagusiaren baitan konpetentzia gogorra izan ohi denez, ez da txarra izaten bide berri posibleei adi egotea.

Matematika ideietatik garatzen den sistema formalen sare kohesionatua da. Espezializazioak eraginda, matematikariek sarearen zonalde oso espezifikoetan lan egiten dute. Hala ere, eta etengabe ustekabeko lotura berriak agertzen direnez, erlazionatutako eremuetan gertatzen denaz jakitun izatea garrantzitsua da. Matematika ulertzeak ahal den neurrian espezializazioa gainditzea eskatzen duela pentsatzen du Mac Lanek. Gaztetan aldarrikatzen zuen jakintza unibertsalaren utopia azkenera arte mantentzen saiatu zen, neurri apalagoan bada ere.

4. Erreferentziak[20]

BROWDER, F. eta MAC LANE, S. (1978): The relevance of mathematics. *Mathematics Today*, Lynn Steenek editatua, 323-349 or. Springer-Verlag.

CARTAN, H. eta EILENBERG, S. (1956): *Homological Algebra*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

KAPLANSKY, I. (arg.) (1979): *Saunders Mac Lane. Selected papers*. New York: Springer-Verlag.

MAC LANE, S. (1963): *Homology*. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer.

— (1971): *Categories for the working mathematician*. Heidelberg: Springer-Verlag.

— (1976): The work of Samuel Eilenberg in topology. *Algebra, Topology and Category Theory*, 133-144 or. Academic Press.

— (1978): Origin of the cohomology of groups. *Ensegnement Mathematique*. 24 (2): 1-29 or.

— (1980): Mathematical models of space. *American Scientist*, 68, 184-191 or.

— (1981): Mathematical models: a sketch for the philosophy of mathematics. *Am. Math. Monthly* **88**, 462-472 or.

[20] Irving Kaplanskyk editatutako liburuak, 1979. urtera arte (hor sartzen dira urterik emankorrenak) Mac Lanek argitaratutako artikulu zerrenda nahiko osatua dauka atzealdean. Gainera, gure lanerako erabili ditugun artikulu nagusiak, liburu honetan oso osorik aurki daitezke. Saunders Mac Laneren lanak aztertzen hasteko derrigorrezko erreferentzia da liburu hau.

— (1986): *Mathematics: Form and Function*. New York: Springer-Verlag.

— (1997): Categorical foundations of the protean character of mathematics. *Philosophy of Mathematics Today*. 117-122 or. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

— (2005): *Saunders Mac Lane: a mathematical autobiography*. Wellesley, Massachusetss: A. K. Peters.

MAC LANE, S. eta BIRKHOFF, G. (1941): *Survey of modern algebra*. New York: Macmillan.

___(1967): *Algebra*. New York: Macmillan.

Mac Lane, S. Eta Moerdijk, I. (1992): *Sheaves in geometry and logic: a first introduction to topos theory*. New York: Springer-Verlag.