Matematikaren filosofia fundamentista *vs.* ez-fundamentista. Ikuspegi nagusi batzuk

ENETZ EZENARRO*

ILCLI eta Matematika eta Zientzia Esperimentalen Didaktika Saila
(UPV/EHU)

(Foundationist *vs.* non-foundationist philosophy of mathematics. Some main viewpoints)

DOI: 10.1387/gogoa.15640

Abstract

The logicist project launched by Frege as a continuation of the arithmetization and rigorization process of analysis during the 19th century, not only served to start the modern field of the philosophy of mathematics but, also, to focus the research in a concrete direction. Frege's last aim was to justify the absolute certitude of the mathematical knowledge through setting secure indubitable foundations for mathematics. This has been the main task of the philosophy of mathematics since then, to such an extent that philosophy of mathematics has often been identified with the search for foundations. Apparently opposite methodologies have been placed in the service of the same final aim by several approaches during these years. I call foundationism to this mainstream in the philosophy of mathematics. In the 1960s, and starting with Lakatos, critical voices emerged opposing the direction adopted in the field since Frege. They considered the question of the foundations as an outdated and irrelevant question from the viewpoint of the mathematics of their time, and committed to the task of articulating the propper methodology of «informal» mathematics, as the primary task for a more relevant philosophy of mathematics. I call non-foundationism to this heterodox viewpoint. In this paper I review some main

* Eskerrak eman nahi dizkiet *Gogoa* aldizkariko txostengile anonimoei eginiko iruzkin baliotsuengatik.

examples of each of both branches to emphasize their differences in order to obtain a broader panoramic of the field.

Keywords: *Philosophy of mathematics, Foundationism, Non-foundationism, Frege, Lakatos.*

1. Ezagutza matematikoaren izaerari buruzko eztabaida

Filosofia eta matematikaren arteko loturak aintzinakoak dira. Aintzinako greziarrak izan ziren bi esparruetan lehenbizikoz sistematikotasuna, zorroztasuna eta justifikazioaren garrantzia barneratu zituztenak. Hala ere, hasiera batean harrigarria irudi dezake filosofiak denbora guzti honetan zehar erakutsi duen matematikaganako interesak. Filosofia, izan ere, eguneroko bizitzatik eratorritako oinarrizko kuestioetaz arduratu izan den gogoeta baita (ezagutzaren eta moralaren esparruetatik ontologiara jo duena), eta matematika aitzitik, azterketa esparrurik abstraktuena eta nolabait eguneroko giza-jardunetatik urrunduena kontsideratua izan dena. Zergatik, beraz, filosofia matematikaz arduratu?

Arrazoi nagusi bat ondokoa izan daiteke: egitate matematikoen ezagutza, pertzepzio fisikoarekin eta beraz esperientziarekin loturarik gabe, arrazonamendu hutsean justifikatzen deneko ustea. Uste horretatik erator daiteke matematikaren azterketa filosofiko batek filosofiarentzako zentrala izan den pentsamendu arrazionalaren izaerari buruzko ondorio garrantzitsuak atera daitezkeelako itxaropena. Pentsamendu kontzeptualak erabat baldintzatzen eta egituratzen du gizakion bizitza, eta beste edozerengandik bereizten du. Eta hain zuzen ere, matematika da pentsamendu kontzeptualaren emaitzarik behinena (George & Velleman, 2002).

Ezagutza matematikoa jasotzeko moduari buruzko galdera zentrala da matematikaren filosofian. Epistemologia orokorrak *a posteriorizko* eta *a priorizko* ezagutzak bereiztu izan ditu. Lehenbizikoak zentzumenen bidezko esperientzia eskatzen du kontzeptuak osatzeko eta justifikatzeko, eta bigarrenak, aldiz, ez. Proposizio bat *a priori* edo *a posteriori* ezagutzen den determinatzeko, proposizioaren justifikazioa oinarritzen den ebidentzia klasea aztertu behar dugu; eta bereziki ebidentzia horietakoren bat zentzumenen bidezko esperientzian oinarrituta dagoen ikusi. Horren gainean defenditu izan da matematikaren emaitzak *a priori* ezagutzen ditugula eta mundu fisikoari buruzkoak, aldiz, *a posteriori*. Ikuspegi honen arabera, zenbaki lehenen zerrenda amaigabea dela dakigu, ez neurketarik edo behaketarik egin dugulako, hausnarketa hutsean oinarrituta baizik. Ezagutza hau grabitazio legearen ezagutzaren oso bestelakoa litzateke, *a posteriorizkoa* litzatekeena eta behaketaren bat egin gabe justifikaezina izango litzatekeena.

Aspaldikoa da giza-ezagutzaren baitan ezagutza matematikoari estatus berezi hori eman izan dion tradizio filosofikoa. Davis eta Hersh-en arabera (1981) Euklidesen Elementuak historikoki interpretatuak izan diren moduan aurkitu daiteke ikuspegi honen jatorria. Interpretazio honen arabera, Euklides, berez begibistakoak diren egietatik abiatuta, eta froga zorrotzen bidez aurrera eginez, egiazkoa, objektiboa eta betierekoa den ezagutza batera iristen da. Hori da beraiek Euklidesen mitoa deitzen dutena, gaur egungo pertsonarik jantzienek ere sinisten dutela dirudiena eta, azken batean, filosofia metafisikoaren euskarri nagusia izan dena, hau da, unibertsoaren izaerari buruzko ziurtasun aprioristikoak ezartzea bilatzen zuen filosofiarena.

Euklidesen mitotik ondoriozta liteke matematikari, zentzuen bidezko esperientziatik kanpo, beharrezko eta betiereko egiak aurkitzeko paper ezinbestekoa zegokiola. Ezagutza matematikoa ohiko giza ezagutza enpirikoarekiko bereiztua izan zen honela garai klasikotik, esperientzian ez, arrazoian oinarritutako ezagutza bezala.

Ezagutza matematikoari buruzko ikuspegi honek enpirismoarekin talka egiten du. Enpirismoa, gure ezagutza oro, azken finean, zentzumenen bidezko esperientzian oinarrituta justifikatzen dela dioen eragin handiko aspaldiko doktrina bat da. Eta zentzu askotan doktrina onargarria da, gainera. Nola jasoko dugu, bada, kanpoko munduari buruzko ezagutza, honek guregan nolabait eragin gabe? Gure informazio bide guztiak bost zentzumenen bidezkoak diren heinean, badirudi munduari buruzko ezagutza oro hauen bidez jasotako inpresioen gainean justifikatu beharrekoa dela.

Platonismo deitu izan den matematikaren ikuskeran bilatu izan dute batzuk arazo honen irtenbidea. Matematikak munduari buruzko ezer ez digula esaten onartzen bada, orduan ezagutza matematikoaren *a priorizko* izaera eta enpirismoaren arteko talka eragoztea lortzen da. Enpirismoa, azken batean, munduari buruzko ezagutza justifikatzeko moduak motibatua baita. Baina aipatutako talka eragoztearen prezioa ez da txikia kasu honetan. Berehala sortzen den galdera baita, munduari buruzkoa ez bada, matematika zeri buruzkoa den. Galdera honi platonismoak ematen dion erantzunaren arabera, mundua bezalaxe, gugandik modu independentean, baina aurrekoa ez bezala, espazio-denboratik kanpo kokatutako mundu bati buruzkoa da matematika.

Gaur egunean oraindik matematikari gehienek errealitate estrasentsorial objektibo batekin lan egiteko konbikzioa agertzen dute beraien eguneroko lanean, nahiz eta zuzenean galdetuz gero matematikaren ikuspegi platonista bat nekez defenda daitekeela uste izan (Dieudonné, 1970). Hau da, hain zuzen ere, jarduneko matematikariak, kuestio filosofikoetan ardura handirik ez dutenak, astegunetan platonistak eta asteburuetan formalistak direla esaten denean adierazi nahi dena (Hersh, 1997).

Platonismoaren bidea nekeza iruditzuz gero beti dago ezagutza matematikoa azken finean, *a posteriorizkoa* ez ote den galdetzeko aukera. Hau da, Euklidesen mitoa ukatuz, nolabait, enpirismoaren tesiekin bateragarria litzatekeen matematikaren epistemologia bat proposatzea. Aukera hau ere ez da berria. John Stuart Mill filosofo britainiarra dugu ildo honen ordezkari garrantzitsu bat. Millentzat matematikako legeak errealitate fisikoari buruzko egia objektiboak dira, eta mundua behatuz ikasten ditugun oinarrizko printzipioetatik eratortzen ditugu (Mill, 1843).

Ezagutza matematikoaren inguruko bereizketa honetan oinarritu da, ikusiko dugunez, matematikaren filosofiaren baitan landu izan den korronte nagusiaren (fundamentista) eta azken hamarkadetan landu diren proposamen berrien (ez fundamentistak) arteko bereizketa. Bi ildoen adibide nagusiak errepasatuz eta batzuen eta besteen arteko desberdintasunak agerian jarriz gaur egungo matematikaren filosofiaren sailkapena hobeto ulertzen laguntzea da gure asmoa artikulu honetan.

2. Matematikaren filosofia fundamentista

2.1. Fregeren logizismo fundamentista eta matematikaren oinarrien krisia

Mendeetan zehar asko izan dira matematikaren izaeraren inguruan zeresana izan duten filosofo eta matematikariak. Baina matematikaren filosofian nagusitu den ikuspegitik Frege hartu izan da iturburu nagusi moduan. Fregek eman zion hasiera, matematikaren filosofia modernoari eta berak ezarri zituen aurrera begira matematikaren filosofian landu beharreko gai nagusiak zeintzuk izango ziren.

Berebiziko garrantzia izan du kuestio honek harrez gero matematikaren filosofiak esparru moduan egin duen ibilbidean. Izan ere, Fregeren interesek eta ekarpenek matematikaren filosofia norabide konkretu batetik bideratu baitzuten, matematikaren filosofiaren egitekoa, hein handi batean, matematikarentzako oinarri seguruen bilaketara mugatuz. Davisek eta Hershek diotenez matematikaren filosofiaren garai kritiko batean fundamentismoa matematikaren filosofiaren korronte nagusia izateak, matematikaren filosofia eta bere oinarrien azterketaren identifikazio birtuala ekarri du (Davis & Hersh, 1981).

Matematika logikara erreduzitzen zela, eta beraz, matematika finean logika baino ez zela erakutsi nahi zuen Fregek. Matematikaren oinarrien inguruko Fregeren lana hiru liburutan jasoa dator nagusiki: *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* (Frege, 1879), *Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch-mathematische Untersuchungüber den Begriff der Zahl* (Frege, 1884) eta *Grundgesetze der Arithmetik, begriffschriftlich* *abgeleitet* (Frege, 1892-1903). *Begriffschrift*-a 88 orriko lan labur bat da. Fregek asmatutako sinbolismo berria aurkeztu eta azaltzen da bertan eta garrantzia historiko handia duen lana da logikan, bertan aurkezten baita lehenbiziko aldiz modu sistematiko batean proposizioen kalkulua eta predikatuen kalkulua. Grundlagen-ean Fregek egindako zenbaki kardinalaren azterketa logikoaren azalpen ez-tekniko bat ematen da, kuestio filosofikoak eztabaidatzen direlarik. Azkenik, matematikaren oinarrietan Fregek eginiko lan nagusia, erraldoia, Grundgesetze-etan jasotzen da, 1892an eta 1903an argitaratutako bi liburukietan.

Fregeren logizismoaren tesi nagusiak aritmetika (eta honekin matematika osoa) logika hutsaren gainean jarri zitekeela zioen, ordura arte nagusia izan zen Kanten aritmetikaren teoriari kontrajarrita. Esan beharra dago, sarritan Dedekinden (1888) aritmetikaren oinarrien inguruko artikulua ere, Fregerenarengandik modu independentean garatutako proiektu logizista baten baitan kokatu izan dela (Reck, 2011). Oso zalantzazkoa da hau. Egia da Dedekindek artikulu horretan logikari eta motibazio filosofiko lauso batzuei buruzko aipamen batzuk egiten dituela, *pentsamenduaren legeei* erreferentzia eginez, baina Fregeren kasuan ez bezala, Dedekinden kasuan argi dago bere interesak guztiz matematikoak direla, eta inolaz ere ez logikaren edo haragoko kuestio filosofikoen ingurukoak. Eta bi gizonen lanen artean antzekotasunak topatu daitezkeen arren, praktikan Dedekinden lanak kutsu «matematikoagoa» du, Fregek tresneria askoz formalagoa darabilen bitartean.

Lehen azaldu dugun moduan garai honetarako analisiaren aritmetizatzea burutua zen, hau da, zenbaki errealak, arrazionalak eta osoak zenbaki arrunten gainean nola definitzen ziren ezaguna zen. Eta esandako bidetik Fregeren *Grundgesetze*-en asmo nagusia, bat zenbakia zer zen argitzea izan zen. Izan ere, Frege ez baitzegon batere ados garaiko zenbaki arrunten izaerari buruzko ikuspegi nagusiekin, hauek esperientzian oinarritzen ziren heinean. Millek sostengatzen zuenaren kontra, Fregerentzat zentzumenak ez ziren inolako oinarria justifikazio aritmetikorako eta, beraz, enpirismoa ez zen onargarria matematikaren kasuan. Gehienez ere egitate horiek jasotzerakoan zentzumenek paperen bat jokatu zezaketela onartzen zuen Fregek.

Egia aritmetikoak, eta ondorioz egia matematikoak orokorrean, zertan oinarritzen ziren, zeren gainean justifika zitezkeen erantzun nahi zuen Fregek, eta logika izan zen bere erantzuna. 1879an argitaratu zuen lehen mailako logika lehenbizikoz jasotzen zuen *Begriffsschrift* izeneko liburua (Frege, 1879). Bertan kuantifikatzaile/aldagai nozioa erabilita, orduan ohikoa zen subjektu -predikatu erako analisi gramatikalagoa alde batera utzi, eta proposizio predikatiboen arteko inferentzia-erlazioen egitura agerian utziko zuen azterketa funtzionalago bat nola egin erakutsi zuen. Arrazoiaren kanonen sistematizazio zehatza lortzen zen horrela Fregeren ustetan. Giza pentsamenduari lotutako kuestio psikologikoekin zerikusirik ez zuena, bide batez. Hau da, Fregeren ustetan logikak ez zuen ezer esatekorik gizakien arrazonatzeko moduaz.

Hau guztia erabat modu sistematikoan garatu beharrekoa zela pentsatzen zuen Fregek. Eta bide horretan sistema axiomatikoei greziarren garaitik izandako bultzada nabariena eman zien sistema formalen sorrerarekin. Kontu handiz bereiztu zituen bere sistema logiko horretako oinarrizko printzipioak eta inferentzia erregelak. Teorema baten frogapenean emandako pausuek hutsunerik gabeko kate bat osatzen zutela ziurtatzeko ezinbestekoa zen ordura arte ezagutu gabeko formaltasun maila hau. Eta honek proposizioaren egiazkotasunaren gaineko edozein zalantza uxatzeko balio zuen. Tresna hau, Fregeren ikuspuntutik, inferentziak ulertzeko eta baieztapenen arteko egitura justifikatibo sistematikoa erakutsiz, edozein jakintza esparru argitu eta ordenatzeko gure ahalmenari eginiko ekarpen moduan ulertu behar zen; eta ez matematikarien eguneroko lan-tresna moduan.

Logika erabiliz aritmetikaren jakintza esparrua aztertu eta berrantolatu zuela esan zuen Fregek, Peanoren aritmetikaren printzipioak bigarren mailako logika sistema batean deribatzea lortu ostean, eta aritmetikako oinarrizko printzipioen multzoa hutsa zela ikusi ostean, hau da, ez zegoela printzipio logikoetatik haragoko beste inolako suposizioren beharrik, hauetatik modu logiko batean aritmetika osoa deduzitzeko. Begiratu batean hala ez iruditu arren, aritmetika inferentziaren zientziaren garapen hutsetik eratortzen zela, eta bere egiak, hortaz, horko legeetatik eratortzen zirela ondorioztatu zuen Fregek.

Logika izan zen hainbestean, matematikaren oinarritzean esperientziak izan zezakeen edozein eraginen aurka Fregek aurkeztu zuen alternatiba. Bere idatzietan esperientzia, bai bere edukietan zein formetan, aritmetikaren oinarrietan inplikatua ez zegoela erakusteko argudio andana erabilita ere, arrazoirik pisuzkoena dudarik gabe, bere programa logizistaren ustezko egingarritasuna izango zen. Programa logizista burutzeak, azken batean, aritmetika logikaren oinarrizko printzipioen gainean eraiki zitekeela erakutsiko zuen, eta horretarako ez zela munduari buruzko egia enpirikoen beharrik, ez eta intuizio lausoen bidez baino jaso ezin ziren egien beharrik. Azalpen sinpleagoak bazirela eta intuizioetara jo beharrik ez zegoela.

Fregek aipatutako moduan aritmetika logikara eraman ahal izateak, matematikaren gainean luzatutako galderak, logika beraren gaineko galdera bilakatuko lituzke automatikoki. Eta logika, beste jakintza esparru bat baino ez balitz, argi legoke, Fregeren programa logizistak galderen fokua lekuz aldatu bai, baina galdera berriak erantzun gabe utziko lituzkeela. Lehengoetan, beraz. Baina ez zen hau Fregeren ikuspuntua. Izan ere, Fregerentzat logika beste zientziak baino orokorragoa baitzen. Logika ez zen, beste esparruek egiten zuten bezala objektu edo fenomeno konkretuak aztertzeaz, eta hauen inguruko egiak bilatzeaz arduratzen. Egiaz arduratzen zen logika. Egia orokorrean hartuta. Proposizioz proposizio egia zein baldintzatan transmititzen den aztertzen zuen logikak. Logikako legeek pentsamendu arrazional ororen gainean agintzen zuten. Proposizio batetik beste bat nola inferitzen zen eta baieztapen bat beste bat erabiliz nola justifikatzen zen erakusten zuten logikaren legeek. Arrazoitzeak, azken finean, argumentatzeko forma batzuk erabiltzea esan nahi zuen, horretarako sistema logiko bat aurrez onartuta. Hori zela eta ez zeukan zentzu handirik logikaren justifikazio bat eskatzeak eta programa logizistak matematikaren justifikazioaren gaineko galderak isilaraziko lituzke. Hori zen Fregeren ikuspuntua.

Logizismoak dioena egia izatekotan, egia aritmetikoak egia logikoak baino ez lirateke; pentsamendu arrazionalaren loturen inguruko egiak. Pentsamendu arrazionalaren inguruko egiak pentsamendu hutsean oinarrituta jasotzeak ez dirudi hain gogorra denik. Fregeren arabera zuzenean gure arrazoiari ematen zaizkion objektuei buruz dihardu aritmetikak.

Filosofikoki ez ezik, jardun matematikoari ere ekarpenak egiten zizkiola arrazoitzen zuen Fregek. Esan dugun bezala, egia matematikoen arteko dependentzia logikoen erlazioak azalarazteak panorama argitzeko balio zuelako. Teorema baterako beharrezkoak uste ziren hipotesi multzo bat baztertuz, adibidez, teoremaren egia justifikatzerakoan inongo zeresanik ez zutela argi geratzen zelako. Edo alderantziz, teoremaren justifikaziorako beharrezko hipotesien multzoa hasieran kontsideratzen ez ziren proposizioez osatu beharra zegoela ikusi zelako. Era honetako egoerak ekarriko lituzke Fregeren ekarpenak. Baina ez hori bakarrik, proposizio baten justifikazioan parte hartzen zuten kontzeptuak ere hobeto ulertzea ekarriko luke. Eta ulergarritasunari buruz hitz egitean, beti bezala, Frege ez zen aspektu psikologikoetaz ari, kontzeptuen formarik oinarrizkoenez eta hauen antolamenduari buruz baizik. Kasu askotan mende askotako esfortzu jarraitu bat behar izaten dute prozesu hauek eta Fregeren ustez bere programak bide honetan ere lagundu zezakeen (George & Velleman, 2002).

Fregek kontzeptuen eta hauen hedaduren teoria oso bat garatu zuen *Grundgesetze der Arithmetik* (Frege, 1893-1903) lan nagusian. Hau, ordea, lanaren alderdi nagusia den aritmetika lantzeko prestaketa lana baino ez da izango. Eztabaida aritmetiko osoa zenbaki kardinalaren definizioan oinarrituko da: F kontzeptuaren kardinala, «F kontzeptuaren hedadurekin kopurukideak diren hedadurak» kontzeptuaren hedadura izango da. F kontzeptu bati zegokion zenbaki kardinalaren definiziotik *Humeren printzipioa* deitu izan dena ondorioztatu zuen Fregek. Bi kontzepturen arteko kopurukidetasuna, zenbaki arruntari erreferentziarik egin gabe, definitzen da printzipio honetan:

> F eta G edozein bi kontzepturentzat, F -ren kopurua eta G-ren kopurua berdinak dira baldin eta F eta G kopurukideak badira.

Bukatzeko, Humeren printzipiotik Dedekind-Peanoren axiomak deribatuko ditu, gerora *Fregeren teorema* deitu izan dena frogatuz (Wright, 1983). Bigarren mailako logika eta axioma ez logiko bakar bezala Humeren printzipioa erabilita sistema konsistente baten barnean hori egitea posible dela ikusi den arren, Fregek erabilitako sistema formala *inkonsistentea* zela ikusi zuen Russellek bere izena daraman «paradoxa» famatua deduzitu zitekeela ikusirik. Inkonsistentzia horrek *Grundgesetze*-etan enuntziatutako *Oinarrizko V. Legean* zuen jatorria. Lege horrek hau zioen:

> *F* eta *G* edozein kontzepturentzat, *F*-ren hedadura *G*-ren hedaduraren berdina da baldin eta edozein *a* objekturentzat, *Fa* baldin eta soilik baldin *Ga* bada.

Beste hitz batzuekin esanda, *F* eta *G* kontzeptuen hedadura berdina dela, baldin eta bietan ere objektu berberak sartzen badira.

Russellek, hedadura bat izatekotan kontraesanera zeraman kontzeptu baten adibidea aurkitu zuen: bere buruaren elementu ez den multzoa. Jatorrizko formulazioa 1902an Russellek Fregeri bere aurkikuntzaren berri emanaz bidalitako gutunean aurki daiteke (Van Heijenoort, 1967, 124-125). Nola ez, jatorrizkoa Fregeren terminologia eta notazioan emana zetorren. Gaur egungo multzo teoriazko bertsioa da hemen egokitasunagatik eta sinpletasunagatik eskainiko duguna.

$$R = \{x \mid x \text{ multzo bat da eta } x \notin x\}$$

deitzen badugu kontzeptu horren hedadura, ondoko kontraesanera iristen gara:

$$R \in R \text{ baldin eta soilik baldin } R \notin R.$$

Russellen paradoxa deitu izan zaio, Fregeren programa logizistak arrakasta izatea eragotzi zuen argudio honi. Fregeren sistemak kontraesanak zeuzkan eta, Frege bera, urte luzeetako lana konpondu ezinik geratu zen, azken orduan ahalegindu bazen ere.

Paradoxa hori da XX. mendeko lehen hiru hamarkadetan matematikaren oinarrien inguruan eman zen eztabaidari atea zabaldu ziona. Matematikaren oinarrien inguruko krisia bezala ezagutua. Hiru programa lehiatu ziren nagusiki aritmetika (eta hedaduraz matematika) barne inkonsistentzietatik (paradoxetatik) libratuko zuen eta *a priorizko* ezagutza matematikoa justifikatuko zuen aritmetikaren eta analisiaren oinarritze sendo baten bilaketan: Frege eta Russellen *logizismoa*[1], Brouwerren *intuizionismoa* eta Hilberten *formalismoa*. Bakoitzak bere bidetik paradoxek kolokan jarritako erabateko ziurtasuna berreskuratu nahi izan zuen matematikarako. Zentzu honetan ulertzen

[1] Russellez gain, Frege bera ere saiatu bait zen paradoxa saihesteko bere sistema egokitzen.

da Asprayk eta Kitcherrek (1988) esandakoa: Fregek markatu zuela hurrengo hamarkadetan matematikaren filosofian jarraitu beharreko ildoa. Ildo fundamentista. Errepasa ditzagun programa hauek zehaztasun pixka batekin, matematikaren filosofia fundamentistaren adar nagusien ikuspegi zabalago bat eskaintzeko.

2.2. Russellen logizismoa

Fregerenarekin batera Russellena da matematika azken finean logika baino ez zela defendatu zuen bigarren proiektu garrantzitsua. *The Principles of Mathematics* (Russell, 1903) lanean aipatzen duenez Russellentzat matematika puroa «baldin *p* orduan *q*» erako, *p* eta *q*, aldagai berberak dituzten eta konstante logikoetatik aparte beste konstanterik ez duten proposizioez osatutako proposizioen bilduma baino ez da izango. Matematikaren definizio hau justifikatzen saiatu zen Russell gero lan horretan bateko eta besteko proposizio matematikoak aztertuz. Hala ere 1903ko azterketa hori gero etorriko zen *Principia Mathematica* (Whitehead & Russell, 1910) Russellek Whiteheadekin batera argitaratutako 3 bolumeneko lan nagusiaren aurrekaria baino ez zen izango. Aipatutako azterketak *Principles*-en eginikoa baino azterketa sistematiko eta zorrotzago bat eskatzen zuela jabetzen zen Russell eta hori egiteko Peanoren lanetan oinarritutako hizkuntza sinboliko landu bat aukeratu zuen. Peanoren bide axiomatikoa jarraituz, Russellek matematika osoa sistema formal axiomatiko baten baitan jasotzea nahi izan zuen. Bien arteko alde nagusia hala ere honakoa zen: Russell Peano baino harago zihoan «eraikuntza matematiko» honen oinarriak jartzerakoan. Italiarra matematikaren oinarri zen aritmetika definitu gabeko jatorrizko kontzeptu eta frogatu gabeko printzipioetan oinarritzeko prest zegoen bitartean, Russellentzat beharrezkoak ziren jatorrizko kontzeptu bakarrak logikan jasota zeuden eta teorema matematiko guztiak hauetatik berak proposatutako sistema logikoan deduzitu zitezkeen.

Whitehead eta Russellen *Principia Mathematica* 1910 eta 1913 bitartean argitaratu zen. Ordurako Russellek Fregeren *Grundgesetze*-etako V. oinarrizko legetik bere izena daraman paradoxa aurkitua zuen. Arazoa behar bezala ulertuta eta konponduta programa logizistak bere bidea jarrai zezakeela pentsatzen zuen Russellek. Arazoaren diagnostiko hori zegoen *Principia*-ren abiapuntuan. Russellentzat Fregeren V. oinarrizko legea zilegia izan daiteke «hedadura» edo «klasearen» definizio moduan, eta honetatik paradoxa deribatzen bazen ere, arazoa ez zegoen lege horretan, deribazioan baizik, *zirkularitate* batean erortzen baitzen. Objektu matematiko baten definizioa *inpredikatiboa* deitzen da, definitutako entitatea barnean hartzen duen bilduma bati erreferentzia egiten badio. Matematikan asko dira era honetako definizioak, esaterako, bi zenbaki osoren arteko zatitzaile komunetako handiena, bi zenbakion zatitzaile komunen multzoan «handiena» bezala definitzen da.

Era honetako definizio inpredikatiboetan datza Russellen ustez berea eta antzerako paradoxen jatorria eta hauek debekatzea izango da Russellek matematikan paradoxak saihesteko proposatuko duen soluzioa. *Gurpil zoroaren printzipioa* deituko dio Russellek definizio inpredikatiboak galarazten dituen axiomari. Era honetan klase bat bere buruaren elementua ote den ala ez suposatzea ez da faltsua izango Russellentzat, zentzugabea eta bere sisteman debekatua baizik. Unibertsoko klase guztiak barnean dituen klaserik ere ez da existituko arrazoi beragatik: ez du zentzurik. Unibertsoa geruzatan banatzen duen *tipoen teoria* bat proposatu zuen Russellek paradoxak saihestuz programa logizista burutzeko marko egoki bezala. Eztabaida sinplifikatzeko Russellen *funtzio proposizionalak* predikatuen logikan euren hedaduren bidez ordezkatu daitezke, gaur egungo multzo teoriazko ikuspegi batetik eztabaida jarraitzeko.

Tipoen teorian batetik *indibiduoak* zeuden, klaseak ez ziren objektu matematikoak, 0 tipokoak zirenak. Indibiduoen klaseak letozke hierarkiaren bigarren posizioan, 1 tipokoak. 2 tipokoak indibiduoen klaseen klaseak lirateke etabar. Modu honetan deskriba daiteke Russellek emandako tipoen teoriaren lehen bertsioa, *tipoen teoria sinplea* deitu izan dena (Russell, 1903).

Funtzioei buruz izan beharrean klaseei buruz hitz egitera pasatzeak Fregek emandako zenbaki arrunten definizioa sinplifikatzeko aukera eman zion Russelli. Honela M edozein klaseren elementu kopurua, M klasearen klase kopurukideen klase bezala definitu zuen Russellek. Tipoen teoria sinplearen baitan edozein klaseren elementu kopurua, klase horri zegokion tipo desberdineko klasea zen, bat goragokoa hain zuzen ere. Eta Russellentzat zenbaki arrunt bat klaseren baten elementu kopurua izango da beti. Horrela zero zenbakia elementurik gabeko 1 tipoko klase guztien klasea izango da, hau da, elementu bakarra (1 tipoko multzo hutsa) daukan 2 tipoko klasea izango da. Bat zenbakia elementu bakarreko 1 tipoko klaseen klasea izango da, 2 tipokoa beraz. Bi zenbakia bi elementuko 1 tipoko klase guztien klasea eta abar. Edozein n zenbaki arrunt beraz n-elementuko 1 tipoko klase guztien 2 tipoko klasea izango da Russellentzat.

Fregek emandako zenbaki arrunt baten *hurrengoaren* kontzeptua ere moldatu zuen Russellek M klase baten kopuruaren hurrengo bezala, klase horri bertan ez legokeen edozein elementu biltzerakoan sortzen den klase berriaren elementu kopurua hartuz. Kontzeptu honi lotuta Russellek aritmetikarako ezinbesteko zituen zenbaki arruntak eta hauetako bakoitzaren hurrengoaren kontzeptua eta hori bermatzeko ez zuen *infinituaren axioma* deitu ziona postulatu beste aukerarik ikusi, hau da, bere unibertso geruzatuaren oinarrian 0 tipoko infinitu indibiduo existitzen direla froga beharrik gabe baiezten duen proposizioa. Axioma honetatik modu zuzenean eratortzen dira zenbaki arrunten segida eta bakoitzarentzat hurrengo baten existentzia Russellen definizioetatik. Russellen axioma honek, dena den, arazoak sortzen ditu, inola ere ez delako beste axiomen parekoa izaera logikoari dagokionean. Baina aritmetikarako ezinbestekoa zaio eta postulatu bat bezala onartuko du. Hau izango da denborarekin bere programaren burutuezintasuna argudiatzeko baliatuko den arrazoi nagusietako bat.

Russellen hurrengo urratsa zenbaki arruntaren kontzeptu orokorra definitzen ahalegintzea izango da. Tipoen teoria sinpleak zentzu honetan arazo saihestezinak aurkeztuko ditu, Russellek baliatu nahi duen Fregeren zenbaki arruntaren definizio orokorra inpredikatiboa delako: n zenbaki arrunt bat da, zero zenbakia eta barnean duen edozein zenbakiren hurrengoa ere barnean duen edozein klaseren (3 tipokoa) elementua bada. Zenbaki arrunten klasea bere definizioan 3 tipoko klase guztien bildumari erreferentzia egiten dion 3 tipoko klase bat izango litzateke. Russellen paradoxarekin batera ordurako ezagunak ziren beste paradoxa batzuen azterketa sistematikoa burututa, hauen jatorrian leudeken zirkularitate klase guztiak (sintaktikoak eta semantikoak bereiztu izan ohi dira) saihesteko balioko zuen tipoen teoria sofistikatuago bat eman zuen Russellek 1908ko artikulu batean (Russell, 1908); hau izango zen azkenik *Principia Mathematican* aurkeztuko zena. Adarkatutako tipoen teoria deitu izan zaio teoria sofistikatuago honi.

Guri hemen interesatzen zaigunerako, nahikoa izango da esatea aritmetika eta honen gainean matematika eraikitzeko bidean aurkitzen zituzten definizio inpredikatiboak saihestu nahian garatutako adarkatutako tipoen teoria berriak matematika klasikoko hainbat definizio garrantzitsu problematiko bihurtzen zituela. Zailtasun honi aurre egiteko *erreduzibilitate axioma* izeneko axioma berezi bat erantsi zion Russellek bere sistemari. Honen arabera tipo bakoitzean edozein funtzio proposizionalentzat bada formalki baliokidea den lehen ordeneko funtzio predikatibo bat, eta beraz funtzio inpredikatiboak predikatiboen bidez ordezkatzeko bidea ematen du. Russellek tipoen teoria sinplea klaseen bidez ikuspegi estentsional batetik emanda Fregeren zenbakiaren azterketa modu sinpleago batean emateko aukera izan zuela esan dugu gorago. Adarkatutako tipoen teorian Russellek jadanik ezin du tipoen teoria sinplean hartutako ikuspegi estentsionalik erabili eta horregatik jotzen du erreduzibilitate axioma formalizatzerakoan ikuspegi intentsionala erabiltzera. Infinituaren axiomaren kasuan bezala erreduzibilitate axioma ere ezin zitekeen inola ere axioma logiko bat bezala kontsideratu, hori baino gehiago, sortzen ziren arazoak konpontzeko ad hoc eginiko zuzenketa baten itxura gehiago zuelarik. Russellen proiektu logizista burutzeko ezinbestekoak ziren bi axioma hauen izaera ez-logikoa erabakiorra suertatuko zen etorkizunean, matematika logikan oinarritzeko ahalegin berri hau ere onargarritzat ez jotzeko. Fregeren lana bezalaxe helburua lortu ez izanaren estigma geratuko zitzaion Russellen saiakerari, honek bere lorpen partzialen garrantzia izkutatu behar ez lukeen arren (Kneebone, 1963).

Beranduago Russellen adarkatutako tipoen teoriaren jatorrian zegoen zirkularitate tipo desberdinen azterketan paradoxa sintaktikoak (Russellen paradoxa bezalakoak) eta paradoxa semantikoak (*gezurtiaren paradoxa* bezalakoak) bereiztu beharrekoak direla ikusi izan da. Matematikaren garapenean zerikusirik izan dezaketen bakarrak paradoxa sintaktikoak direla eta hauek direla matematika oinarritu nahi deneko sistema batek saihestu beharrekoak. Horretarako Russellek 1903an proposatutako tipoen teoria sinplea nahikoa dela ikusi izan da eta ez dagoela teoria adarkatuaren sofistikazio eta problemetan galdu beharrik. Tipoen teoria sinplea izan zen, esaterako, Churchek formalizatu zuena funtzioaren eta errekurtsioaren azterketarako bere λ-kalkulua ematerakoan.

2.3. Brouwerren intuizionismoa

Intuizionistentzat Fregeren logizismoak nolabait erantzun nahi zituen kuestio filosofikoak, erredukzio logizistek besterik gabe asumitzen zuten errealitate matematikoaren izaerari buruzko posizionamendu tazito bat baztertuz erantzun zitezkeen: *errealismoa matematikan* baztertuz hain zuzen ere.

Mundu naturala gugandik independentea eta determinatua dela dio *errealismoak*, hau da, gauzak munduan modu jakin batekoak direla: guk horiek ezagutzera iristeko dugun ahalmenarekin inongo loturarik gabekoak. Esaterako, «momentu honetan munduko emakume kopurua gizonezko kopurua baino handiagoa da» proposizioa munduak berak egiten du egiazko edo faltsu, guk hori ezagutzeko aukera gutxi dugun arren. Inor gutxik jarriko du zalantzan, ordea, bi aukera daudenik: proposizioa egiazkoa izatea edo bere ukazioa egiazkoa izatea. Eta orokorrean mundu naturalari buruzko proposizioetan *Tertio Excluso* legea onartzera garamatza ikuspuntu errealistak:

> Mundu naturalari buruzko edozein S proposiziorentzat, S egiazkoa da edo $\neg S$ egiazkoa da.

Matematikaren ikuspuntu errealista bat duenak errealitate matematikoa determinatua eta gugandik independentea dela aitortuko du. Adibidez, 2 baino handiagoa den edozein zenbaki bikoiti bi zenbaki lehenen batura dela dioen *Goldbachen konjektura* ezaguna hartuko bagenu, eta nahiz eta milaka milioi zenbakirekin aproba egin ostean kontradibiderik aurkitu ez den, ohiko matematikari errealista batek, konjekturak dioena edo bere ukazioa egia direnik inongo zalantzarik ez luke izango, proposizio matematikoei lehen aipatu dugun *Tertio Excluso* legea aplikatuz. Hau da matematikari gehienek praktikan daukaten ikuspegia, eta baita Fregek berak zuena ere.

Matematikan errealismoa ukatzeak errealitate matematikoa determinatua ez dagoela onartzea eskatzen du, eta errealiate horri buruz plazaratu daitekeen edozein galdera zentzudunek ez duela zertan erantzunik izan. Erantzun oro egiazkoa edo faltsua egiten duen errealitate finkaturik ez delako existitzen. Errealitate matematikoaren ikuspuntu hau defendatzen duten ildo batzuek osatzen dute *konstruktibismoa* deitu izan den adarra matematikaren filosofian.

XIX. mendearen azken laurdenean hasi zen agertzen konstruktibismoa ikus-molde berezi bezala matematikaren barruan, Dedekind eta Cantorrenak bezalako kontzeptu eta frogapen metodo gero eta abstraktuagoetarako joerak hartutako abiada handiari kontrapisu egiteko asmotan (Troelstra, 1994). Kronecker, Dedekinden irakasle izana, izan zen seguerenez lehenbiziko konstruktibista kontzientea baina, Brouwer matematikari holandarraren idatzi polemikoak izan ziren matematika konstruktibista ulertzeko oinarriak modu zehatz eta sistematikoan ezartzen lagundu zutenak (Brouwer, 1925-1927).

Konstruktibismoaren barruan, *intuizionismo* bezala ezagutzen da Brouwerren matematikaren filosofia. Brouwerrek esaten zuen objektu matematikoak eraiki egiten ditugula eta hauen propietate fundamentalen gure ezagutza *a priorizko* intuizio batean oinarritzen dela. Intuizio honen bidez gai izango ginateke potentzialki infinitua den objektu matematiko multzo bat (zenbaki arruntak) antzemateko, eta hauek eraikuntza berrietan erabiltzeko. Bere ustez matematika klasikoa zilegi litzatekeenetik ateratzen da, giza eraikuntza ahalmenen bidez iritsi ezinak diren objektuak erabiltzerakoan (multzo infinituak, esaterako), eta *Tertio Excluso* legean oinarritutako existentzia proba ez-konstruktiboak ematerakoan. Matematika klasikoaren akatsok saihestuko lituzkeen matematika berri bat eskaintzea zen intuizionisten asmoa, beraien ikuspegitik zilegiak ziren metodoak baino erabiliko ez lituzkeena, eta beraz, matematikaren oinarri intuizionista batetik egiazkoa kontsidera zitekeena.

Matematikari klasikoarentzat, proposizio baten baieztapena zuzena edo okerra egiten duena gugandik independentea eta determinatua den errealitate matematikoa, bera, izango da. Proposizio matematikoen baieztagarritasun zuzenerako baldintza klasikoak *egia-baldintzak* direla esanaz ezarri ohi da hau. Lehen mailako logika klasikoko egiaren definizio errekurtsiboa, operatzaile logikoek, agertzen diren proposizioetan, hauen baieztagarritasun zuzenerako baldintzetan duten eraginaren zehaztapen bezala ikus daiteke. Adibidez, definizio honen arabera $\forall xFx$ proposizioa egiazkoa izango da $\mathfrak{I}$ interpretazio batean, baldin eta $\mathfrak{I}$-ren domeinuko edozein objektu, $\mathfrak{I}$-k F-ri egokitutako hedaduran sartzen bada. Eta orokorrean, horrela definitutako baieztagarritasun baldintzei erreferentzia eginez erabakitzen du matematikari klasikoak inferentzia forma baten baliozkotasuna.

Egia-baldintza klasikoak ezin dira, ordea, matematikari intuizionistarentzat proposizio baten baieztagarritasun zuzenerako baldintzak izan, bilduma infinitu osatuak inplikatzen dituzten baldintzak ulergaitzak direlako intuizionistentzat. Bilatutako baldintzek finitarioak izan beharko dute; gizaki batek banan bana konprobatzeko modukoak, modu idealizatuan bada ere (finituak baina handiak diren kasuan). Froga matematikoak finituak izan behar direla kontutan hartuta, eskatutakoa burutzeko modu naturala frogak berak eskaintzen du. Baieztagarritasun baldintzatzat frogagarritasuna hartzea: frogatu badaiteke, baieztatu daiteke. Proposizioen baieztagarritasun baldintza intuizionistak *froga-baldintzak* edo *Brouwer-Heyting-Kolmogorov interpretazioa* (Troelstra, 1994) deituko dira, beraz. Eta existentzia frogatzeko eraikitzea lortu beharko da (George & Velleman, 2002).

Proposizio matematikoen baieztagarritasunerako egia-baldintzak edo froga-baldintzak erabiltzeak desberdintasun nabarmenak sortzen ditu egokiak diren inferentzia-formak aukeratzeko orduan. Batzuk aipatuko ditugu hemen.

Tertio Excluso legea da matematikari klasikoaren inferentzia forma nagusietako bat eta honela idatz dezakegu inferentzia forma hau:

$$Y \vee \neg Y$$

Besteak beste, kasuak bereiztuz egiten diren frogen oinarrian dagoen arrazonamendua onargarri egiten duena matematikari klasikoarentzat. Lege honen arabera Y proposizio baterako edozein baldintzatan ondorioztatu daiteke $Y \vee \neg Y$. Intuizionista batentzat ordea, gauzak ez dira hain errazak, onartu ahal izateko Y edo $\neg Y$ frogatzea eskatuko bailuke, eta ikusi dugunez, hau ez da beti erraza izaten. Adibidez Goldbachen konjeturaren kasuan ezingo genuke onartu $Y \vee \neg Y$ bi parteetako baten frogarik ere ez dugulako.

Har ditzagun ukazio bikoitzaren inferentzia forma eta ukazio bikoitzaren ezabaketaren inferentzia forma:

$$\frac{X}{\neg\neg X} \qquad\qquad \frac{\neg\neg X}{X}$$

Bi hauek ere matematikari klasikoaren tresneria arruntaren artean kokatzen dira. Intuizionistarentzat, aldiz, lehenbizikoa onargarria den arren, hau da, proposizio baten froga emanda beti izango da posible honen ukazio bikoitzaren froga eraikitzea, bigarrena ez da baliogarria izango. Horren homologo intuizionistatzat har dezakegun inferentzia forma baliogarria beste hau izango litzateke:

$$\frac{X \vee \neg X \qquad \neg\neg X}{X}$$

hau da, intuizionista batek proposizio baten ukazio bikoitzetik ezin du zuzenean proposizio hori ondorioztatu; bai, aldiz, proposizio horren edo bere ukazioaren froga bat izanez gero. Intuizionistarentzat, beraz, proposizio bat eta bere ukazio bikoitza ez dira baliokideak izango, ez dagoelako beti ziurtatuta baldintza berberetan biak baieztagarriak izango direnik.

Aurrekoaren ondorio garrantzitsu bat absurdura eramanezko frogak kontu handiz egin beharrekoak izatean datza. Izan ere ondoko bi inferentzia formak intuizionistarentzat, matematikari klasikoarentzat bezala zuzenak diren arren,

$$\frac{X \to (Y \wedge \neg Y)}{\neg X} \qquad\qquad \frac{\neg X \to (Y \wedge \neg Y)}{\neg\neg X}$$

ez da gauza bera gertatzen absurdura eramanezko hurrengo formarekin:

$$\frac{\neg X \to (Y \wedge \neg Y)}{X}$$

Orokorrean intuizionistarentzako absurdura eramanezko argudio onargarri bakarrak ondorio bezala ukazio batera daramatenak izango dira, matematikari klasikoarentzako ez bezala.

Kasuz kasuko argumentazio metodoari ere ezin zaio eutsi bere horretan:

$$\frac{X \to Y \quad \neg X \to Y}{Y} \qquad\qquad \frac{\mathrm{X} \to Y \quad \neg X \to Y \quad X \vee \neg X}{Y}$$

ezkerrekoak matematikari klasikoaren kasuz kasuko argumentazio metodoa erakutsiko luke, intuizionistarentzat zuzena ez dena. Eskuinekoak, aldiz, kasukako argumentazio metodo intuizionistaren itxura zein den erakusten du.

Klasikoki baliokideak kontsideratzen diren hainbat formula ere ez dira intuizionistarentzat baliokideak izango, batetik bestea inferitzea posible izan arren bestetik bata inferitzea ezinezkoa izateko zentzuan. Hona zenbait adibide[2]

$$\frac{\neg X \vee Y}{X \to Y} \qquad\qquad \frac{X \to Y}{\neg X \vee Y}$$

$$\frac{X \to Y}{\neg Y \to \neg X} \qquad\qquad \frac{\neg Y \to \neg X}{X \to Y}$$

$$\frac{X \to \neg Y}{Y \to \neg X} \qquad\qquad \frac{\neg \mathrm{X} \to Y}{\neg Y \to X}$$

[2] Ezkerreko zutabeko inferentzia formak matematikari klasiko zein intuizionistarentzat baliokideak izanik eta eskuineko zutabekoak, aldiz, matematikari klasikoentzat soilik.

Antzerako zerbait gertatzen da kuantifikatzaileak dituzten inferentzia formekin:

$\exists x \neg Fx$	$\neg \forall x Fx$
$\neg \forall x Fx$	$\exists x \neg Fx$
$\forall x \neg Fx$	$\neg \exists x Fx$
$\neg \exists x Fx$	$\forall x \neg Fx$

Adibide hauek guztiak ikusita ondorioa begibistakoa da: hainbat froga daude klasikoki onargarriak izanik ere intuizionisten ikuspuntutik onartezinak direnak. Horietako batzurentzat posible izango da intuizionistentzat baliagarria den beste froga bat ematea, baina hau ez da beti hala gertatzen eta ondorioz badira matematikari klasikoarentzat baieztagarriak izanagatik intuizionistarentzat hala ez direnak, eta inoiz baieztagarriak izateko itxurarik ere ez dutenak. Matematika klasikoko teorema eta froga sinple eta dotoreak hauen analogo intuizionista *artifizialekin* ordezkatzeak ere zer pentsatua eman izan dio matematikari askori. Eta gehienak ez zeuden horretarako prest. Hilbert izan zen, intuizionismoak matematika klasikoari egiten zizkion kritika batzuk onartu bai, baina hau alboratzeko inongo intentziorik ez zuenez, matematika klasikoa eta bere arrazonatzeko modua segurua zela behin betiko ezarriko zuen programa indartsua martxan jarri zuena.

2.4. Hilberten formalismoa

Hilbertek Bernaysekin batera argitaratutako bi liburukiz (1934-1939) osatutako *Grundlagen der Mathematik* lanean jasoa dator batez ere programa honen garapena. Hilberten matematikaren oinarrien inguruko lanik garrantzitsuena hau izanik ere, ez dugu ahaztu behar 1899an argitaratutako *Grundlagen der Geometrie* (Hilbert, 1899), geometria euklidestarraren behin betiko aurkezpen axiomatikoa eman zuenean erakutsi zuela Hilbertek jadanik, matematikaren oinarrietan zuen interesa.

Grundlagen der Mathematik-en hasieran bereizketa garrantzitsu bat egin zuen Hilbertek «sistema axiomatiko» kontzeptuak izan zitzakeen onartutako bi esanahien inguruan, sistema axiomatiko «konkretua» eta «formala», hain zuzen ere. Sistema axiomatiko *konkretuetan* ezagutza enpirikoetatik abiatzen da bat, eta hau sistematizatzen ahalegintzen da, tartean diren kontzeptuak idealizatuz eta ezaguna den horretatik oinarrizko printzipio batzuk aukeratuz, zeintzuetatik gainontzeko proposizioak deribatu ahal izango diren. Hau da Euklidesek geometrian aplikatu zuen metodoa, esaterako. Fenomeno baten ezagutza, hau gobernatzen duten printzipioak zeintzuk diren bereizteko adinako garapenera iristen denean, teoria estrukturatzeko balio du metodo honek Hilberten arabera.

Honen ondoan, ordea, sistema axiomatiko *formalak* leudeke, matematika puroaren metodo gorena litzatekeena, eta inongo ezagutza enpirikorekin inongo loturarik ez duena. Era honetako sistema bat eraikitzeko jatorrizko ideia eta proposizio batzuk aukeratu behar dira, hauetatik modu formal batez ondorioak deduzitzeko, inongo interpretaziori erreferentziarik egin gabe. Esan beharra dago, hala ere, sistema axiomatiko formalak garatutako teoria matematikoak logikoki berregituratzen laguntzen zuten tresna bezala ikusten zituela Hilbertek eta ez emaitza berriak bilatzeko eta matematika zabaltzeko.

Grundlagen der Geometrie lanean erakutsi zuen Hilbertek sistema axiomatiko formal batek, berak eraikuntza batekin konparatzen zuenak, bazeukala ordea, sistema axiomatiko konkretuek ez zuten *esanguratasun* arazo bat, hauek ezagutza enpiriko batean oinarritzen zirenez, jakineko interpretazioa zutelako. Sistema axiomatiko formalek esanguratsuak izateko, estrukura horiek matematikaren alderdiren batean, errealizazio edo ereduren bat bazutela erakutsi behar zuten. Horretarako sistema axiomatiko formalaren jatorizko kontzeptuak ondo definitutako kontzeptu zehatzekin ordezkatuta, jatorrizko proposizioak egiazkoak direla erakutsi beharko litzateke; hau da, sistema formalean postulatutako entitateek osatutako multzoa, objektu matematiko zehatzen multzo baten bidez ordezkatu beharko litzateke, eta sistema formaleko konstante predikatibo eta funtzionalak, aukeratutako objektuen multzoan definitutako predikatu eta funtzio zehatzen bidez. Teoria formal baten eredua, beraz, teoriak karakterizatutako estruktura konkretua duen ondo definitutako sistema matematiko bat baino ez da. Hau zen Hilbertentzat sistema axiomatiko formal batek determinatutako teoria formal bat *esanguratsua* zela ikustea: eredu bat izateko modukoa den ikustea.

Hilbertek emandako sistema geometrikoaren konsistentziara itzulita, erabilitako metodoa, sistema axiomatiko formal horrentzako eredu aritmetiko bat eskaintzearena izan zen. Sistema geometrikoan kontraesanen bat deduzitzea posible bazen, beste horrenbeste gertatuko zen, ereduaren bidez kontraesana aritmetikara itzulita, aritmetikan. Era honetan, aritmetikaren konsistentzia frogatzea nahikoa izango zen bere geometria euklidestarraren konsistentzia frogatzeko. Geometriaren konsistentzia *absoluturik* ez, baina aritmetikarekiko konsistentzia *erlatiboa* ezartzea lortu zuen horrela Hilbertek. Axiomen arteko independentziaren inguruko kuestioak erantzuteko ere ereduez baliatu zen Hilbert: besteetatik independentea zela erakutsi nahi zuen axioma ez beste guztiak betetzen zituzten eredu aritmetikoak eraikitzea nahikoa zuen, axioma horren gainontzekoekiko independentzia erakusteko.

Sistema axiomatiko formalen esanguratasunerako beharrezko diren ereduak eraikitzea horretarako indibidualen domeinu finitu bat baino behar ez denean filosofikoki onargarria bada ere, urrats kopuru finitu batean eraiki daitezkeelako, ez da gauza bera gertatzen beharrezko domeinu hori infinitua denean. Eredua eraikitzeko beharko genukeen domeinu infinituaren existentzia bera, hau erabilita justifikatu nahi den sistema axiomatiko formalaren existentzia beraren pareko problema litzatekeelarik. Eta argi dago matematikan, kasu gutxi batzuk kenduta, gehinetan domeinu infinituak dituzten ereduak behar izaten direla. Hilbertek zenbaki arrunten multzoa erabili zuen beste esparru batzuen konsistentzia erlatiboak frogatzeko ereduak eraikitzeko, eta ondorioz, multzo hau gure pertzepzioari zuzenean eskainitako objektu bezala erakusteko modu bat aurkitu nahi zuen, (Peanorena bezalako) sistema axiomatiko batean oinarrituz sortuko litzaizkiokeen zirkularitate problemak saihesteko[3]. Teoria formalentzat ereduak eraikitzeko baliatutako esparruak era honetako kuestioak saihestu beharra zuela ikusi zuen Hilbertek[4] eta intuizioak zuzenean jasotzeko modukoa izan behar zuela. Infinitu aktualaren aukera baztertuta arrazonamendu matematiko infinitarioak gordetzeko balioko zuen sistema finitarioa asmatu zuen Hilbertek metamatematikan (Kneebone, 1963).

|, ||, |||, ||||,... makilatxoen zerrenda erabili dezakegu hori nola egin zuen ikusteko. Makilatxo bat eman ostean, zerrenda honetako hurrengo objektua, aurrekoari makilatxo bat erantsiz lortzen da. *Numeral* deituko ditugu makilatxoen bidez eraikitako ikurrok eta hizki gotikoz adieraziko ditugu metaproposizioetan. Edozein bi numeral beren luzeraren arabera konparatu ditzakegu. Numeral bakoitzean aldiko makilatxo bat ezabatuta urrats kopuru finitu batean bi numeralak luzera berekoak diren edo ez erabaki dezakegu eta hala ez izatekotan, bietako zein den luzeagoa. Numeralen gaineko orden erlazio bat defini dezakegu horrela, $A < B$ izanik A numerala B numerala baino motzagoa denean. Bi numeralen arteko batuketa definitzeko nahikoa da $A + B$ numerala A eta B numeralen konkatenazio bezala definitzea, hau da, bataren eta bestearen makilatxoak bata bestearen segidan jartzea. $A \cdot B$ biderkadura berriz B-ren makilatxo bakoitza, A-ko makilatxo guztiez ordezkatzean lortutako numerala bezala defini daiteke.

Teoria axiomatiko formalen errealizazioak eraikitzeko elementuen domeinu ez-hipotetiko bat izateko, errealizazio horietan behar izango ditugun propietate aritmetiko guztiak frogatu beharko genituzke, emandakotik harago ez doazen arrazoibideak erabilita. Arrazoitze modu ez-hipotetiko honi deituko diote Hilbert eta Bernaysek «inferentzia finitario». Bi ezaugarri nagusitan laburtu dezakegu. Batetik objektu bati buruz hitz egiteko beharrezkoa da hau eraiki ahal izatea, eta bestetik, urrats kopuru finitu batean amaitu ezi-

---

[3] Zenbaki arruntenten sistema axiomatiko honek ere gainontzekoek bezala eredu bat behar izango baitzukeen.

[4] Honetan datza Hilberten azken lan metamatematikoek lehenbizikoekiko duten desberdintasun nabarmenena.

nezko definizio edo kalkulurik ez da onartuko, eta gainera urrats kopuru finitu hau ere mugatu daiteke.

Honenbestez, ikusi daiteke orain arte numeralei lotuta eman ditugun definizioak *finitarioak* direla. Horrez gainera aritmetikan ezinbestekoak diren indukzio matematikoaren bidezko frogapenerako prozedura eta errekurtsio bidezko definiziorako prozeduraren interpretazio finitarioak eman ditzakegu. $P(n)$ teorema baten indukzio bidezko froga batek edozein N numeral zehatzetarako mugatu daitekeen urrats kopuru finitu batean $P(N)$ konprobatzeko modua eskaintzen digu. Antzera $f(n)$ funtzio baten definizio errekurtsibo batek, edozein N partikularretarako, mugatu daitekeen urrats kopuru finitu batean $f(N)$ ebaluatzeko modua ematen du. Prozedura hauen bidez, posible da termino finitarioetan, batuketa eta biderketaren elkarkortasuna, trukakortasuna eta banakortasuna ezartzea eta, besteak beste, zenbaki lehenaren kontzeptua sartuta *aritmetikaren teorema fundamentala* frogatzea.

Kuantifikatzaileak dituzten proposizioekin lan egiterakoan agertzen dira lehenbizi ikuspegi finitarioa hartzeak derrigortutako limitazioak. Unibertsalki kuantifikatutako $\forall x P(x)$ moduko proposizioak interpretatzeko modu bakarra, N edozein numeral hartuta $P(N)$ finitarioki egiazkoa dela erakustea posible izatearena baita. Existentzialki kuantifikatutako $\exists x P(x)$ proposizioen kasuan, berriz, $P(N)$ betetzen duen N numeral bat ezagutzen den kasuan soilik beteko dela ulertzen da, edo kasurik okerrenean urrats kopuru finitu baten buruan propietate hori beteko duen numeral bat kalkulatzeko prozedura bat ematen denean. Gauzak okerragoak dira kuantifikatutako proposizioen ukazioekin. $\neg\exists x P(x)$ formako proposizioen kasuan, interpretazio finitariorik naturalenak, edozein N numeraletarako $P(N)$ faltsua dela esaten du. Kasu horretan ordea $\exists x P(x)$ eta $\neg\exists x P(x)$ bi proposizioek ez dute zertan kasuistika osoa eman, hau da, ez litzateke matematika arruntean ezinbestekoa den *tertio excluso* lege klasikoa beteko, izan ere, oso posible delako $P(N)$ betetzen duen N numerala existitu arren urrats kopuru finitu batean determinatzeko modurik ez ezagutzea. Antzerako zerbait esan daiteke unibertsalki kuantifikatutako proposizioen kasuan.

Ikusitakoarekin argi geratzen da Hilbert eta Bernaysek proposatutako arrazonamendu finitarioaren bidez teoria formalentzat errealizazioak eskaintzerakoan lortutako segurtasuna, matematika arruntaren logika klasikoarekiko inferentzia ahalmenaren ahultze garrantzitsu batekin ordaintzen dela. Gainera galera honekin ohiko aritmetikarekin pareka daitekeen (bai emaitzei dagokienean, bai inferentzia erraztasunari dagokionean) teoria finitariorik lortzea ezinezkoa dela ikusten da. Aritmetika finitarioak ezingo luke, beraz, aritmetika arruntarentzako eredurik eskaini. Metamatematikarako baliabide interesgarria dira, hala ere. Potentzialki infinitua den objektuen sistema bat eskaintzen baitute, bide finitarioen bidez tratatu daitezkeen propietate asko eskainiz.

Teoria axiomatiko formal baten errealizagarritasunaren bidezko esanguratasunaren kuestiora itzuliko gara orain. Lehen ere esan dugu, era honetako teoria batentzat eredu finitu bat ematen dugunean, teoria honen esanguratasuna bermatzen dugula hitzaren adierarik gogorrenean. Halakorik ezin denean, numeralen sisteman oinarritutako eredu infinitu bat, bide finitarioen bidez eraikitzeak ere, teoriaren esanguratasuna erakusteko balioko luke hasiera batean. Baina teoria formal baten esanguratasuna karakterizatzeko ahalegin hau ere antzua suertatuko da, eta teoria formal baten esanguratasunaren karakterizaziorik ahulenarekin geratu zen Hilbert, azkenean. Teoria baten *konsistentzia frogagarria*, hain zuzen ere. Ezaugarritze honetan oinarritu zuen *finitismo* deitutako bere filosofia formalista. 1899an ez bezala *Grundlagen der Mathematik*-eko Hilberten kontzepzio honen arabera teoria axiomatiko formal bat esanguratsua izateko nahikoa zen bere axiometatik kontraesan bat deduzitzeko aukerarik ez zegoela bide finitistak erabiliz frogatzea. Teoria matematiko formalen konsistentzia finitarioki frogatzean zetzan, Hilbertentzat, teoria honek estruktura esanguratsu bat definitzeko baldintza. Bide finitista «seguruak» erabiltzeko hautuan datza *Grundlagen der Geometrie*-n Hilbertek kuestio metamatematikoei eginiko lehen ekarpenen eta *Grundlagen der Mathematik* Bernaysekin batera oinarrien inguruan bere filosofia formalista aurkeztuz emandako lan nagusiaren arteko bereizketa nagusia. Lehenbizikoan geometria euklidestarraren aurkezpen axiomatiko bat eman ostean ohiko arrazonamendu matematikoa baliatu zuen sistema honen ezaugarri metamatematiko batzuk agerian jartzeko, nagusiki geometriaren aritmetikarekiko konsistentzia erlatiboa. Bestean, ordea, asmo nagusia ohiko jardun matematikoa justifikatzea zen eta horretarako ohiko matematika zehatz-mehatz jasoko zuen *sistema formal* baten konsistentzia bide finitarioak erabilita frogatu nahi izan zuen Hilbertek.

Hilberten ikuskeran teoria matematiko bat jasotzen zuen sistema formal bat, errepresentatzen zuen teoriaren «bertsio sintaktikoa» izan behar zuen. Postulatutako elementuen domeinu bat, hasierako *formula* multzo finitu bat eta esplizituki zerrendatutako deribazio erregela kopuru finitu batez osatua behar zuen. Sistema formaleko formula deribagarriak hasierako formuletatik deribazio erregelen aplikazio kopuru finitu baten bidez lortzen zirenak baino ez lirateke izango. Hasierako teorian frogagarria den teorema orok sistema formalean bere «bertsio sintaktikoa» duela ikustea posible izango balitz, sistema formalaren konsistentzia sintaktikoa frogatzea nahikoa litzateke, honek ordezkatutako teoria axiomatikoa justifikatzeko, hau da, Hilberten zentzu ahulean esanguratsua zela erakusteko. Gödelek frogatu zuen hau lehen mailako predikatuen kalkuluarentzat 1930ean.

Sistema formalek teoria matematikoak errepresentatzen zituzten heinean, hauetan ohikoak ziren arrazoibide infinitarioen pareko liratekeen deribazio erregela infinitarioak jaso beharko lituzkete. Hilbertentzat ordea intuitiboki hau horrela izanik ere sistema formalak, hauen baitako deribazio guztien osotasun bezala hartuta, modu konstruktiboan eraikiak zeudela eta metodo finitarioen bidezko eztabaida onartzen zutela kontsideratu zuen. Ohiko teoria matematiko infinitarioen justifikazio metamatematiko finitario bat eskaintzeko asmoa zuen Hilberten programak.

Hilbertek erakutsi zuen matematika klasikoa bere baitan jasotzen duen *I* sistema formal baten konsistentziaren froga finitario bat emateko gauza izateak, *I* sistema hori matematika finitarioaren *hedadura kontserbakorra* izatea lekarkeela. Hau da, matematika klasikoan deribatu daitezkeen, eta beraz *I* sisteman formalizatu daitezkeen, eta ikuspegi finitista batetik esanahia duten proposizio guztiak, bide finitarioak erabilita justifika zitezkeela.

Gödelen lehenbiziko teoremaren arabera (1931), matematika klasikoa bertan jasotzeko adinako *S* sistema formal batek, konsistentea izatekotan ez-osoa izan beharko luke, hau da, *S* sistemaren baitan proposizio *erabakiezinak* aurkitu ahal izango genituzke: bai bera eta bai bere ukapena sistema horretan deribaezinak izanik. Gödelen frogaren ideia intuitibo bat ematen saiatuko gara. Honen arabera *S* «behar adina ahaltsua» litzatekeen sistema formal bat izanik, orduan posible litzateke bere baitan *S* beraren propietate sintaktikoei buruz zerbait esaten duten proposizioak deribatzea. Bi gauzaren menpekoa da hau egiteko aukera. Batetik posible da sistema formal baten propietate sintaktikoak zenbakizko terminoetan adieraztea: objektu sintaktikoak zenbakiak bezala eta propietate sintaktikoak zenbakien teoriazko propietate moduan. Bestetik, nahikoa ahaltsua den sistema formal batean posible da zenbaki arrunten inguruko oinarrizko proposizioak ezartzea. Bi hauetatik ondorioztatzen da behar adina ahaltsua den sistema formal batean posible dela sistema berari buruz zerbait «dioten» proposizioak deribatzea. Gödelek bere buruaren frogaezintasuna baiezten zuen G_S proposizio formal bat kontsideratu zuen behar bezain ahaltsua zen *S* sistema formal batean. *S*-n deribagarria al da G_S proposizioa? *S* sistema formal *zuzen* bat izango balitz, hau da, bertan deribagarria den edozein proposizio, *S*-ren edozein eredu edo errealizaziotan egiazkoa izango balitz, G_S *S* sisteman deribaezina izango litzatekela ikusi daiteke. Deribagarria izango balitz faltsua izango litzateke, deribagarria ez dela «esaten» duenez, baina hau S sistema zuzen bat izatearen aurkakoa litzateke. Beraz G_S ez da *S*-n deribagarria, eta horixe bera «esaten» duenez egiazkoa litzateke gainera, eta $\neg G_S$ faltsua. Eta *S*-ren zuzentasunetik, $\neg G_S$ *S*-n deribaezina. Ez G_S eta ez $\neg G_S$, ez lirateke beraz deribagarriak *S* sisteman, hau da, *erabakiezinak* lirateke eta *S* sintaktikoki ez-osoa litzateke. Berez Gödelen frogan ez litzateke *S*-ren zuzentasunik beharko ondorio berera iristeko, argudioa konplikatuz.

Hilbertek ez zuen inola ere horrelako emaitzarik espero, baina hala ere bere programak lehenbiziko emaitza hau saihestea lortzen duela ikusi dezakegu. Izan ere, Hilbertek matematika klasikoa jasoko zuen sistemaren osotasunean pentsatzeko hiru arrazoi nagusi baitzituen: batetik *tertio excluso* legearen zuzentasuna; bestetik, egia matematiko oro frogagarria izatearen konbikzioa; eta azkenik, matematika klasiko infinitarioaren arrazoitzeko forma eta kontzepzioak sistema formal batean jaso ziztezkeelako ustea. Lehenbizikoa eta azkena Hilberten programak zentzua izateko derrigorrezko baldintzatzat hartu ditzakegun bitartean, posible da bigarrena programa alboratu gabe baztertzea. Hau da, zergatik ez da posible izango, frogatu ezin diren egia matematikoak izan arren, infinitarioki justifika daitekeen proposizio erreal oro, bide finitarioak erabiliz ere justifikagarriak izatea? Izan ere, Hilberten programaren helburua ez baita, matematika klasikoak edozein egia matematiko frogatzeko bidea ematen duela erakustea, baizik eta, matematika klasikoak problema bat soluzionatzen badu, soluzio hori zuzena dela erakustea (Kneebone, 1963; Mendelson, 1964).

Gödelek bigarren teorema bat ere eman zuen ordea artikulu berean (1931), lehenengo teoremaren ondorio garrantzitsu bat zena, eta honek bai, Hilberten programaren gainean laino beltzak jartzeko balio izan zuena. Lehenbiziko teoreman, esan dugunez, sistema formal bat behar adina indartsua izanez gero, bere Gödelen proposizioa bere baitan frogatu ezina da. Eta horixe da, hain zuzen ere, G_S proposizioak dioena, S-n frogatuezina dela. S-ren konsistentziak G_S-ren egiazkotasuna inplikatzen du, beraz. Arrazoibide hau, berau, S sisteman formalizatu daitekeela ikusi zuen Gödelek, hau da, S sisteman $Q \vdash G_S$ deriba zitekeela, non, Q proposizioak S konsistentea dela adieraziko lukeen. Gauzak horrela, S-ren baitan S beraren konsistentzia frogatzeko gauza izanez gero, *modus ponens* bitartez G_S deribatuko genuke S-n. Lehenbiziko teoremak, ordea, S-n G_S deribatu ahal izanez gero, S inkonsistentea litzatekeela esaten du, beste era batera esanda, S konsistentea izanez gero, konsistentzia hori ezingo litzatekeela S-n frogatu. Hauxe da, hain zuzen ere aipatutako Gödelen bigarren ez-osotasun teorema: *behar bezain indartsua den* S *sistema formal bat, konsistentea baldin bada,* S-*n ezin da bere konsistentzia frogatu.*

Lehenbiziko ez-osotasun teoremak ez bezala, bigarrenak zuzenean Hilberten programaren funtsa kolokan jartzen zuen. Ikusi dugun bezala, matematika klasikoa jasoko lukeen I sistema formalaren konsistentzia bide finitarioak erabiliz frogatu ahal izatearen gorabeheran baizetzan programa osoa burutu ahal izatea. Baina era honetako froga bat ematea lortuz gero, frogapen hau I sistemaren baitako I ren konsistentzia baieztatuko lukeen deribazio formal batera eraman ahal izango litzateke. Eta bigarren ez-osotasun teoremak, I konsistentea den heinean, hau ezinezkoa dela esaten digu. I konsistentea izatekotan, aukeratu beharra daukagu, bigarren teorema honen arabera: arrazoibide finitario osoa ezin da I sistemaren baitan formalizatu edo ez da I ren konsistentziaren froga finitariorik existitzen. Bigarren kasuan Hilberten programa burutuezina izango litzateke.

2.5. Gaur egungo matematikaren filosofia fundamentistaren ezaugarri orokor batzuk

Oinarrien krisiari erantzun nahian sortutako hiru proiektu nagusiek ez zuten lortu funtsean bilatzen zutenik, hau da, ezagutza matematikoaren ustezko erabateko ziurtasuna berrezartzea. Dena den Fregek irekitako ildo fundamentistak bere bidea jarraitu zuen krisiaren ostean ere. Artikulu honetan goian esan dugun bezala adibide nagusiak aztertu nahi izan ditugu eta ez da gure asmoa ildo fundamentistaren sailkapen exhaustibo bat ematea. Hala ere, jatorri bera duten heinean eta galdera berberak erantzun nahi dituzten heinean, sortu diren alternatiba desberdinek dituzten ezaugarri komun batzuk aipatu ditzakegu ildo hau nolabait karakterizatzeko. Batetik, matematika ezagutza multzo estatiko bat dela onartzen dute guztiek, eta Fregek markatutako bidetik, ezagutza matematikoaren justifikazioaz arduratzen dira nagusiki. Matematikak erabat ziurra, edo behintzat fidagarria den oinarritze bat duela onartzen dute orokorrean, eta logika matematikoa matematikaren filosofiarako ezinbesteko tresna metodologikotzat daukate. Bide batez, aipagarria da, ikusiko dugun beste ildoa ez bezala, gaur egungo matematikaren filosofia fundamentista *filosofia analitikoaren* baitan kokatzen dela.

XX. mendearen bigarren erdian sortutako adar berriekin esparruaren gaur egungo sailkapen sintetiko bat ematen du Celluccik (2013), bide bakoitzaren izenari honi ekarpen nagusiak egin dizkioten autoreak aipatuz. Platonismoa (Gödel, Penrose), neo-logizismoa (Wright, Hale), neo-formalismoa (Curry, Mac Lane), neointuizionismoa (Bishop, Dummett), inplikazionismoa (Putnam), estrukturalismoa (Bourbaki, Shapiro, Resnik), fikzionalismoa (Field) eta internalismoa (Maddy) litzateke gaurko panoramaren deskribapen bat Celluciren arabera. Antzerako ekarpenak izen bera daraman bidearen baitan kokatzen ditu Celluccik bere sintesi ahaleginean. Beste sailkapen batzuk ere egin izan dira ordea (Kitcher & Aspray, 1988; Hersh, 1997; Horsten, 2012).

Edozein kasutan, esan beharra dago, matematikarentzat oinarri seguruen bilaketa XIX. mende amaierako analisiaren errigorizazio prozesuaren baitan kokatutako kuestio matematikoetatik abiatzen bada ere, bereziki krisiaren ostean, matematikaren filosofia fundamentista problema matematikoetatik gero eta gehiago urrundu zela. XX. mendeko matematikaren filosofiako aztergai nagusiak metafisika eta epistemologiako kuestio tradizionalei lotuak agertzen dira batik bat. Objektu matematikoen izaeraz, objektu matematikoen portaera baldintzatzen duten oinarrizko legeez eta hauen inguruko ezagutza jasotzeko moduaz arduratu dira nagusiki landu izan diren bide desberdinak. Tymockzco-ren hitzetan (1998) azken hamarkadetan haziz joan den matematikaren ikuspuntu fundamentistekiko ezerosotasun bat agertu da bai matematikaren filosofiaz arduratu izan diren filosofo zein matematikarien artean. Ikuspuntu fundamentista bakoitzak muga garrantzitsuekin topo egin izan du, teorema matematikoen forman emanak sarri eta ez dirudi gaur matematikarentzat oinarri ziurrak aurkitzetik duela mende bat egon gintezkeena baino hurbilago gaudenik. Fundazionismoarentzat giltzarri izan diren usteak, garai batean begibistakoak kontsideratuak, kolokan jarriak dira gaur egun eta oinarrien inguruko eztabaida errelebantzia galduz joan da azken hamarkadetan. Oinarrien gaia kuestio «zaharkitu» bat bilakatu da aspaldidanik (Lolli, 1985).

3. Matematikaren filosofia ez-fundamentista

3.1. Lakatosen kuasienpirismoa

Lakatosen matematikaren filosofia kokatzerakoan, Hershek (1997) aipatzen du, zientziaren filosofian matematikaren oinarrien bilaketaren analogoak, logika induktiboaren problema klasikora garamatzala, hau da, saiakuntza eta behaketa partikularretatik lege orokorrak ondorioztatzeko modura. Popperrek (1934) arazoari izkin egitea lortu zuen, teoria zientifikoak behaketetatik zuzenean ondorioztatzen direnik ukatuz. Horren aurrean, teoria zientifikoak, hipotesi, espekulazio, nahiz igarpen modura asmatuak direla esan zuen, eta ondoren proba esperimentalen bidezko errefutazio ahaleginetik pasa behar direla. Proban jarri eta errefutatu daitezkeen teoriek baino ez dute, Popperren arabera, zientifikoak kontsideratzeko aukera. Proba horiek gainditzen dituzten teoriek, soilik, izango dute sinesgarritasun maila bat, eta behin behinean onargarriak kontsideratu ahal izango dira, baina inoiz ez *frogatuak*. Popperren arabera posible da teoria zientifiko bat objektiboki egiazoa izatea, guk hori erabateko ziurtasunez inoiz jakingo ez dugun arren.

Popperren ezagutza zientifikoaren teoriaren jarraitzailea zen Lakatos. Edonola ere, Popperren teoriek zientziaren filosofiari eginiko ekarpenek ez zuten garaiko matematikaren filosofian inongo eraginik izan. Arestian aipatutako bidetik, oinarrien inguruan zentratzen zen eztabaida matematikaren filosofian eta ez inola ere matematikaren metodologian. Matematikaren filosofia Popperren bidetik zientziaren filosofia orokorrago baten baitan kokatzea posible zela erakusteko ahalegina izan zen Lakatosena.

Matematikaren filosofia formalistari kritika zorrotza eginez abiatu zuen Lakatosek *Proofs and Refutations* (1976) bere doktorego tesia jasotzen zuen liburu ospetsuaren hitzaurrea. 1963 eta 1964 bitartean *British Journal of Philosophy of Science* aldizkarian zatika argitaratu bazen ere publiko zabalago batengana iritsi ziren Lakatosen ideia berritzaileak liburuaren bidez; urte luzez nahiko izkutuan mantendu ziren ideiak.

Hitzaurre horretan esaten duenez eskola formalistak matematika bere abstrakzio axiomatiko formalarekin identifikatzen du eta matematikaren filosofia metamatematikarekin. Formalismoak matematikaren filosofia matematikaren historiatik deskonektatzen duela dio Lakatosek. Kanten hitzak parafraseatuz, matematikaren filosofiaren gidarik gabeko matematikaren historiaren itsutasuna eta matematikaren historiako fenomeno interesgarrienak kontutan hartzen ez dituen matematikaren filosofiaren hutsaltasuna aldarrikatu zituen. Gainera formalismoak matematika estatusa ukatzen omen dio matematika bezala ulertu izan denaren gehiengoari. Bi mila urteko tradizioa duten matematikaren filosofia *dogmatikoen* azken katebegi bezala aurkezten du Lakatosek formalismoa. Historian behin eta berriz berrezarri izan den matematikaren azken oinarritze seguruaren mitoak matematikaren irudi autoritario eta zalantzaezina berresteko eta *eszeptiko* eta *dogmatikoen* arteko eztabaida epistemologikoak azken hauen aldera desorekatzeko balio izan dute Lakatosen ustez. Honela laburbiltzen du bere lanaren asmoa: «Kasuazterketa honen funtsak formalismo matematikoa zalantzan jarriko du, ez ditu ordea, zuzenean, dogmatismo matematikoaren oinarrizko posizioak zalantzan jarriko. Bere asmo xumea da, garatzea, matematika informal, kuasienpirikoa, ez dela zabaltzen, erabateko ziurtasunez ezarritako teorema kopuruaren hazkunde monotono baten bitartez, baizik eta, espekulazio eta kritiken bidezko, frogen eta errefutazioen bidezko, igarpenen hobekuntzaren bitartez[5]» (Lakatos, 1976, 5).

Proofs and Refutations ohiko matematikaren filosofiako testuetatik oso desberdina da. Pólyaren *Induction and Analogy in Mathematics* lanean (*Mathematics and Plausible Reasoning* (Pólya, 1954) liburuko lehenbiziko liburukia) aurkeztutako adibide baten segida bat da, eskolako elkarrizketa bat bezala aurkeztua. Matematika formalistaren sinbolo eta erregelen hoztasunaren aurrean ikasle eta irakasleen eta hauen arteko elkarrizketen hurbiltasuna aurkezten du Lakatosek.

Pólyak zenbait poliedro aurkezten ditu (prismak, piramideak, piramide bikoitzak, estalkidun prismak, etab.). Poliedroaren aurpegi kopurua F izanik, erpin kopurua V izanik, eta ertz kopurua E izanik, erakutsitako kasu guztietan, goian aipatutako berdintza ematen dela erakusten du: $V - E + F = 2$. Lakatosek Pólyaren kasuz kasuko sarrerari segida ematen dio. Irakasleak Eulerren formularen Cauchyren froga aurkezten die ikasleei: zabaldu plano batean poliedroaren ertzak. Falta diren diagonalak marraztu aurpegietan, honek ez du berdintza aldatzen, ertz berri bat eta aurpegi berri bat gehitzen bait zaizkio diagramari. Triangeluz osatutako diagramatik triangeluak, banan-banan erauzi, horretarako, aldiko, ertz bakarra edo bi ertz ezabatuz. Ezabapen bakoitzean, konprobatu V, E eta F txikituz badoaz ere $V - E + F$ ez dela aldatzen. Behar adina ezabaketa egiten direnean, diagrama triangelu soila bilaka-

[5] «The core of this case-study will challenge mathematical formalism, but will not challenge directly the ultimate positions of mathematical dogmatism. Its modest aim is to elaborate the point that informal, quasi-empirical, mathematics does not grow through a monotonous increase of the number of indubitably established theorems but through the incessant improvement of guesses by speculation and criticism».

tzen da. Kasu sinple honetan $V = 3$, $E = 3$ eta $F = 2$ (aurpegi bat triangelu barruan, beste bat kanpoan). Eta $3 - 3 + 2 = 2$.

Honen ostean bata bestearen atzetik datoz ikasleen kontraadibideak. Zer da froga honek frogatzen duena? Zer eta nola ezagutzen dugu matematikan? Nola berrikusten dira definizioak matematikan? Nola aldatzen dira froga metodoak? Ba al da matematikariek jarraitzen duten arau metodologikorik aldaketa hauek bideratzen dituztenean? Zeintzuk dira? Eztabaida matematikoki nahiz logikoki gero eta sofistikatuagoa da. Beti daude ikuspegi desberdinak jokoan eta ikasleen ikuspegiak aldatuz doaz. Era honetako galderak matematikaren historialariarentzat zein matematikariarentzat izan daitezke interesgarriak. Kontutan izan gainera, testua laguntzen duten oin-oharren bidez, Descartes-Eulerren formularen historia bere konplexutasun guztiarekin eta zehaztasun handiz kontatzen digula Lakatosek. Ematen du testu nagusia benetako historiaren berreraikitze arrazional bat bezala ikusten zuela. Aspray eta Kitcherren arabera (1988, 18): «Matematikaren historiaren edozein azterketa seriok, behar bezala jarduten denean esparruak aurrera egiteko moduaren inguruko ideiaren batzuk erakutsi behar lituzke, eta Lakatosen galderek, historiografia ideia tazitu batzutatik harago mugitzeko ahalmena daukate, (bateraezinak izan daitezkeen) iturri multzo batetik distilatuta, printzipio metodologikoen formulazio esplizitu baterantz[6]».

Oinarrizko printzipio batzuetatik abiatzen den sistema orokor bat beharrean, Lakatosek kontrajarritako ikuspuntuak, argudioak eta kontra-argudioak aurkezten ditu. Problema eta konjektura batetik, ezusteko bideetatik zabalduz doan matematika. Eztabaida eta desakordioen artetik teoria bat gorpuzten da. Zalantzetatik ziurtasuna eta ziurtasunetik zalantza berriak.

Esplizituki ez esan arren zenbait ideia nagusi antzeman daitezke Lakatosen matematika informalaren deskribapenean, hitzaurrean esaten duenaren ildoan doazenak: matematikan, natur zientzietan bezalaxe, ez dago erabateko ziurtasunik, eta teoria matematikoak kritika eta zuzenketen bidez doaz zabalduz eta sendotuz, inoiz ere akats eta berrikuspenetatik libre egotera iritsi gabe. Problema edo konjektura bat hartuta, froga eta kontraadibideen aldi bereko bilaketa bat ematen da. Froga berriek aurreko kontraadibideak kontutan hartu behar dituzte, kontraadibide berriek aurreko frogak baztertzera garamatzaten bitartean. Lakatosek argi dauka, matematika informalen testuinguru honetan, «froga» hitzaren esanahia ez dela ohiko esanahi formalista, hau da, premisen egiazkotasuna ondorioetara pasa arazten duen inferentzia kate finituarena. Azalpenekin, justifikazioekin eta, azken finean, konjektura

[6] «Any serious investigation of the history of mathematics must embody some ideas about how the subject proceeds when it is done properly, and Lakatos's questions promise to move historiography beyond a set of tacit ideas, distilled from a (possibly incompatible) collection of sources, toward the explicit formulation of methodological principles».

sinesgarriagoa eta konbentzigarriagoa egiten duten lanketekin du zerikusia, aldi berean, kontraadibideen presiopean zehatzagoa eta zorrotzagoa bihurtzen dena (Davis & Hersh, 1981).

Frogaren urrats bakoitza da kritikagarria, bai eszeptizismo hutsagatik, bai argudio jakin batentzat kontraadibide bat erakutsiz. Argudio bateko urrats bakarra kolokan jartzen duen kontraadibideari *lokala* esaten dio Lakatosek, aldiz, argudioa beharrean, ondorioa bera kolokan jartzen duen kontraadibidea *globala* izango da.

Modu honetan Lakatosek bere azterketa epistemologikoa aplikatzen dio matematika *informalei*, hau da, zabalkunde eta aurkikuntza prozesuan dagoen matematikari, Lakatosen arabera, ikasle eta matematikariek matematika bezala ezagutzen dutena horixe baita, azken finean. Formalizatutako matematika, ordea, ez omen da matematika erreala, ez da inon ageri, ez bada logikako liburuetan. Bada, matematikaren filosofia gehiena formalizatutako matematika horren gainekoa izatea egozten dio Lakatosek eskola formalistari, eta hedaduraz, fundamentismo deitu dugun korronteari.

Lakatosentzat matematikaren filosofia *dogmatikoak* (logizista edo formalista) ez dira onargarriak, eta Popperrek zientziaren filosofian irekitako bidearekin bateragarria litzatekeen matematikaren filosofia bat posible dela erakutsi nahi du. Baina, Davisek eta Hershek (1981) seinalatzen dutenez, bateratze hori nola egin daitekeen ez du argi uzten ez *Proofs and Refutations* lanean ez eta gerora gaiaren inguruan jardundako idatzi apurretan. Badirudi Lakatosentzat matematika informala zientzia bat kontsidera daitekeela Popperren zentzuan. Teoria zaharrei eginiko kritika eta berfintzeei esker eta teoria alternatiboei esker zabaltzen da, formalizatutako matematikaren hazkunde eredu tradizionaletatik urrun. Baina bada kontu bat argi ez dagoena. Izan ere, Popperrek natur zientzietarako proposatutako filosofiak, teoria zientifikoak falsatzeko balio dezakeen kanpoko mundu natural baten existentziarekiko dependentzia nabarmena bait dauka. Lakatosek matematika eredu horretara eraman nahi izanez gero teoria matematikoak falsatzeko balioko luketen objektu matematiko eta mundu matematikoaren beharra izango luke. Popperren doktrinarekin bateragarria litzatekeen matematikaren filosofia falibilista batek erantzun beharreko kuestioa litzateke hau.

Gai honi dedikatutako bere lanen artean badago «A renaissance of empiricism in the philosophy of mathematics?» (Lakatos, 1978) izenburua duen artikulu bat. Bertan matematikaren oinarrien bilaketak gehiagorako ematen ez duela onartzen duten logizista eta formalista ezagunen hitzak gogorarazten ditu, matematikaren filosofiaren inguruko bere ez-ohiko ikuspegia komunitate matematikoaren ikuspegi nagusiaren aurkakoa ez dela erakusteko. Matematika faliblearen bere teoria *kuasienpirikotzat* dauka Lakatosek, natur zientzietan ez bezala, matematikan falsatzaile potentzialak espazio-denborazkoak ez direlako. Matematika informala eta paradoxak lirateke matematika formalaren falsatzaileak. Baina Lakatosek matematika informalaren objektuak zeintzuk liratekeen argitu beharko luke bere matematikaren ikuspuntua gaur egungo zientziaren filosofiaren baitan kokatzeko, baina ez du egiten.

Ernesten arabera (1991) esplizituki emanak ez datozen arren bost tesi nagusi identifika daitezke Lakatosen lanean bere kuasienpirismoa sintetizatzeko balio dutenak: (1) ezagutza matematikoa faliblea dela, eta erabateko ziurtasunik ez dagoela matematikan, oinarri seguruen bilaketa oro baztertuz; (2) matematika sistema hipotetiko-deduktiboa dela, Popperrek emandako zientzia enpirikoen kontzepzio berean; (3) matematikaren filosofia estuki lotuta dagoela matematikaren historiari, matematikaren epistemologiak ezagutza matematikoa jasotzeko moduaren galdera orokorra ez ezik, ezagutza matematiko konkretuen azalpena ere eman behar duelako; (4) matematika informalaren garrantzia azpimarratzen da, bai produktu bezala eta bai praktika bezala, matematika formalaren iturri izateaz gain matematikaren iturri kuasienpirikoa berau delako; eta azkenik (5) ezagutza matematikoaren sorkuntzarako eredu bat eskaintzen da, zeinaren arabera, heuristika egongo bailitzatekeen sorkuntza, kritika eta berformulazioen iterazio dialektiko ziklikoen bidez. Ernestentzat ezagutza matematikoaren genesiaren, praktika matematikoaren eta matematikaren historiaren teoria bat da Lakatosen matematikaren filosofia *kuasienpirista*.

Lakatos hartu izan da matematika ez-fundamentistaren abiapuntu bezala (Aspray & Kitcher, 1988; Hersh, 1997; Cellucci, 2013) eta bere idatzietatik edan izan dute gerora bide berriak proposatu dituzten hainbat autorek. Ezin daiteke esan Lakatosek bere matematikaren filosofia modu sistematikoan garatu zuenik. Batetik gazterik hil izanagtik eta bestetik bere lan nagusiko zeharkako idazteko moduagatik. Bere lanen balorazio desberdinak aurki daitezke gaur egun (Feferman, 1976; Ernest, 1991; Davis & Hersh, 1981; Cellucci, 2013). Matematikaren filosofian erantzun zehatzik eman ez bazuen ere, bide fundamentistaren aurrean proposamen berritzaileak egin eta bide berriak irekitzeko ausardia edukitzea izan daiteke Lakatosen lorpen garrantzitsuena matematikaren filosofian.

3.2. Kitcherren naturalismoa

Kitcher da matematikaren filosofia ez-fundamentistaren tradizioan eragin handiko beste autore bat (Hersh, 1997; Cellucci, 2013). *The Nature of Mathematical Knowledge* (1983) liburuan azaldu zuen Kitcherrek bere posizioa matematikaren filosofian. Bertan Lakatosek bere liburuaren hitzaurrean egin zuen moduan kritika zorrotza luzatzen die matematikaren epistemologia *a prioristak* defendatzen dituztenei, Lakatosek dogmatikoak deitzen zituenak.

Horien aurrean Kitcherrek enpirismoa eta eboluzionismoaren arteko nahasketa bat proposatzen du (Hersh, 1997). Ikuspuntu honen arabera daukagun ezagutza matematiko oro, zenbaki txikien aritmetika eta oinarrizko figura lauen begibistako ezaugarriek osatutako oinarrizko gune batetik abiatzen den eta arrazionalki azaldu daitekeen hazkunde prozesu batean du jatorria. Ezagutza matematiko ororen oinarrizko gune hori fisikoki esperimentatzen dugu bildumak, ordenamenduak, elkarketak eta zenbaketak egiten ditugunean.

Aritmetika elkarketaren eta zenbaketaren idealizatutako teoria bat izango litzateke; multzo teoria bildumak osatzearen idealizatutako teoria bat. Idealizatutako subjektu baten eraikuntzen emaitza bat litzateke matematika. Idealizatutako subjektu horrek ez lituzke guk dauzkagun zenbait muga izango. Esaterako, multzo infinituak eraiki ahal izango lituzke. Gas idealen legeen eta gas errelen portaeraren arteko erlazioarekin konparatzen du, hainbestean, proposizio matematiko idealizatuen eta guk fisikoki aurrera eraman ditzakegun eragiketen arteko erlazioa, horrek matematikaren izaera enpirikoa zalantzan jartzen ez duela erakusteko. Gas errealak idealizatutako eredura hurbiltzen diren modu berean hurbilduko lirateke gure eragiketen emaitzak matematikara.

Matematika, beraz, oinarrizko gune batetik ematen den eboluzio ulergarri bat litzateke. Barneko indarrek eta kanpoko presioek bultzatuta moldatzen dena. Kanpoko presioetaz diharduenean esperientzia sozialak ezagutza matematikoan duen garrantzia azpimarratu nahi du Kitcherrek. Belaunaldi baten ezagutza matematikoa beren gurasoen belaunaldiaren ezagutza matematikoan du jatorria. Ikerketa aldizkarietako matematikari komunitate matematikoak balioztatzen du bere kritika eta gidaritzaren bidez. Artikulu matematiko askotan arrazoibideek duten luzeera dela eta hauen onarpena behin-behinekoa baino ez da izaten. Matematikariek beren tesiak berkontsideratzen dituzte gaitasuna aitortzen zaion eszeptiko batek kontra eginez gero. Matematikaren filosofiak ezagutza matematikoaren osagai sozial hau barneratu behar du, Kitcherren arabera.

Ezagutza matematikoaren hazkundea nola ematen den aztertzea matematikaren historialariaren zeregina da, eta ez matematikaren filosofoarena bakarrik, Kitcherren ustetan. Liburuaren azken kapituluan, adibide gisa hain zuzen ere, XVIII. eta XIX. mendeetan emandako analisiaren azterketa bat aurkezten du, zenbaki errealak analisiaren oinarritzat hartzeko arrazoi historikoak emanaz.

Thomas Khunek zientziaren filosofian emandako printzipio garrantzitsu bat bere egiten du Kitcherrek liburuan: aldaketa zientifikoak teorian ezezik praktikan ere aldaketak dakartzala. Praktika matematikoaren bost osagai identifikatzen ditu: hizkuntza, ikuspegi matemaikoa, onartutako kuestioak, onartutako baieztapenak, onartutako arrazoibideak. Guztiak bateragarriak izan behar dira, bere ustetan.

Matematikaren garapena baldintzatzen duten bost printzipio arrazional ere identifikatzen ditu Kitcherrek: errigorizazioa, orokorpena, galderak sortzea, galderak erantzutea eta sistematizazioa. Printzipio hauen arabera eboluzionatzen omen du matematikak: enpirikoki onargarriak diren zenbatzearen eta bildumak egitearen matematikatik, urrats arrazionalak, bata bestearen atzetik kateatuz, gaur egungo matematika osora. Hortan datza, Kitcherren aburuz, gaurko matematikaren baliozkotasunak.

3.3. Gaur egungo matematikaren filosofia ez-fundamentistaren ezaugarri orokor batzuk

Matematikaren filosofiaren zereginak oinarrien bilaketan baino, bai matematikari eta bai filosofoentzat «interesgarriagoak[7]» izango liratekeen gaien inguruan zentratzeko ahaleginak izan dira, bereziki XX. mendearen erditik aurrera. Matematikaren eguneroko praktikatik eta matematikaren historiatik sortutako kuestioen lanketak ireki omen dezake matematikaren filosofia eraginkorrago eta interesgarriago baterako bidea (Aspray & Kitcher, 1988).

Matematikaren filosofia fundamentista modernoak abiapuntua Fregerengan duen bezalaxe, Lakatosekin hasten da matematikaren filosofia ez-fundamentista modernoa. 1963 eta 1964an argitaratutako lau artikuluak[8] daude bide berri honen jatorrian. Harrez gero ekarpen desberdinak izan dira. Kitcherrena da horien artean garrantzitsuenetakoa Lakatosenarekin batera beste batzuengan izan duen eraginagatik, hauengan, besteak beste: Davis, Hersh, Tymoczko, Rota, Grosholz, Rav eta van Bengedem (Cellucci, 2013).

Terminologiari lotutako arazoak dauzkagu hemen ere. Aspray eta Kitcherrek (1988) «mainstream philosophy of mathematics» (matematikaren filosofiako bide nagusia) eta «maverick philosophy of mathematics» (matematikaren filosofia heterodoxoa) bereiztu zituzten. Hershek (1997) bide berria deskribatzeko, Aspray eta Kitcherren «maverick» adjektiboari, «humanist» (humanista) gehitzen dio («maverick and humanist»), Aristoteles, Locke, Hume edo Millen bidetik, matematika giza sorkuntza bat dela azpimarratzeko. Matematikaren izaera estrasentsorial eta estratenporala baztertu, eta ezagutza matematikoaren osagai historiko eta soziala azpimarratu nahi ditu horrela.

Bestelakoa da gure hautua. Celluccik (2013) ondo seinalatzen duen moduan, gaur zabaldua dagoen arren, «maverick philosophy of mathematics» ez baita oso terminologia egokia, gaur hetorodoxoa dena noizbait ortodoxia bilakatzearen aurka egiten duelako. Tradizioaren pisua gainetik kendu

---

[7] Proposamena egiten dutenen arabera.

[8] Goian esan dugun bezala, *Proofs and Refutations* liburuan jasotzen diren artikuluak.

nahian bezala, matematikaren filosofian indarrak oinarrien bilaketan xahutzea espresuki baztertu izan dute «maverick» bide berri hauetako askok. Matematikaren filosofian oinarrien bilaketaren irrelebantziaren aurrean bide honi uko egitea azpimarratzen du «maverick» bideak. *Matematikaren filosofia ez-fundamentista* deitu ditut ezaugarri hau funtsezkoa delakoan. Jakinik, nola ez, terminologia honen azpian ere oso ekarpen desberdinak sar daitezkeela.

Aurreko atalean ildo fundamentistarekin egin bezala ildo ez-fundamentistan eginiko ekarpenek orohar dituzten ezaugarri batzuk zehaztu nahiko genituzke, bukatzeko. Matematika ezer baino lehen gizakiak sortutako produktu bat dela kontsideratzen dute, ez dagoela errealitate matematiko estrasentsorial, aldaezin eta betierekorik, ez eta matematikaren oinarritze ziurrik, absoluturik eta behinbetikorik ere. Are gehiago, matematikak ez duela horrelakorik ezertarako behar. Zentzu honetan ez zaizkie interesatzen korronte nagusiarentzat berebizikoak (izan) diren teoria matematikoen azken formalizazioak, ez sistema formalen bidezko azterketa metamatematikoak, hauek matematikaren filosofiarako egin ditzaketen ekarpenak hutsalak direla kontsideratuta eta matematika errealarekin zerikusi gutxi dutela argudiatuta. Filosofia analitikoa deitu izan denetik kanpo kokatzen dira.

Aitzitik, matematikaren filosofia giza ezagutzaren filosofia orokor baten baitan integratu behar dela defendatzen dute, zientziaren filosofia orokor baten baitan bereziki; batean zein bestean antzeko kuestioei garrantzia emanez, matematika giza ezagutzaren baitako bitxikeriatzat hartu beharrean. Matematikaren filosofia egoki baterako matematikaren historiak, hau da, prozesu matematikoen eboluzioaren ezagutzak, jokatzen duen paper garrantzitsua azpimarratzen dute. Matematikaren filosofiak, matematikaren oinarrien bilaketa fregearrari lotutako kuestioak alde batera laga eta matematikaren metodologia artikulatzera bideratu beharko omen luke, matematikaren eboluzioa eta hazkundea nola ematen den azalduz. Horretarako, hurrengo hauen moduko galderak erantzun beharko omen lituzke matematikaren filosofia eraginkor batek: nola hazten da ezagutza matematikoa? Zer da aurrerapen matematikoa? Zergatik dira ideia edo teoria matematiko batzuk beste batzuk baino hobeak? Zer da azalpen matematiko bat? Zer froga matematiko bat?

Erreferentzia bibliografikoak

ASPRAY, W. & KITCHER, P. (arg.) (1988), *History and Philosophy of Modern Mathematics*. Minnesota Studies in the Philosophy of Science. Volume XI. Minneapolis, MN: University of Minnesota Press.

BROUWER, L.E.J. (1925-1927); (1925), «Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik I». Mathematische Annalen **93**: 244-257. (1925a), «Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik II». Mathematische Annalen **95**: 453-472. (1927), «Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik III». *Mathematische Annalen* **96**: 451-488.

CELLUCCI, C. (2013), «Top-Down and Bottom-Up Philosophy of Mathematics». Foundations of Science **18**: 93-106.

DAVIS, J.D. & HERSH, R. (1981), *The Mathematical Experience*. Boston, MA: Birkhäusser.

DEDEKIND, R. (1888), *Was sind und was sollen die Zahlen?*. Braunschwig. Berrargitalpena: *Werke* 3. bol., 335-391. Ingelesezko itzulpena in: W.W. Beman (1901): *Essays on the Theory of Numbers, I. Continuity and Irrational Numbers, II. The nature and meaning of numbers*. Chicago, IL: Open Court.

DIEUDONNÉ, J. (1970), *The Work of Nicolas Bourbaki*, American Mathematical Monthly **77**, 134-145.

ERNEST, P. (1991), *Philosophy of Mathematics Education*. London: Falmer. Feferman, S. (1976), «The Logic of Mathematical Discovery vs. the Logical Structure of Mathematics». Department of Mathematics, Stanford University.

FREGE, G. (1879), *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Halle, Alemania: Louis Nerbert. Ingelesezko itzulpena in J. van Heijenoort (1967): *From Frege to Gödel*. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1-82 orr.

FREGE, G. (1884), *Die Grundlagen der Arithmetik*. Breslau: Koebner. Ingelesezko itzulpena J.L. Austin (1978), *The Foundations of Arithmetic*. Evanston, IL: Northwestern University Press.

FREGE, G. (1893-1903) *Grundgesetze der Arithmetik* (1. bol., 1892; 2. bol., 1903). Olms: Hildescheim. Ingelesezko itzulpen partziala M. Furth (1964), *The Basic Laws of Arithmetic: Exposition of the System*. Berkeley, CA: California University Press.

GEORGE, A. & VELLEMAN, D.J. (2002), *Philosophies of Mathematics*. Oxford, UK: Blackwell.

GÖDEL, K. (1931), *Über formal unentscheidbare Sä tze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, Monatshefte für Mathematik und Physik*. **38**, 173-198. Ingelesezko itzulpena in J. Van Heijenoort (1967): «On formally undecidable propositions of Principia mathematica and related Systems I», 596-616.

HERSH, R. (1997), *What is Mathematics, Really?*. New York: Oxford University Press.

HILBERT, D. (1899), *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig: Teubner. Ingelesezko itzulpena (1902). Chicago: Open Court.

HILBERT, D. & BERNAYS, P. (1934-1939), *Grundlagen der Mathematik* (1. bol., 1934; 2. bol.,1939) Berlin: Springer.

HORSTEN, L. (2012), «Philosophy of Mathematics». *Stanford Encyclopedia of Phylosophy*.

KITCHER, P. (1983), *The Nature of Mathematical Knowledge*. New York: Oxford University Press.

KNEEBONE, G.T. (1963), *Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics*. London: Van Nostrand.

LAKATOS, I. (1976), *Proofs and Refutations*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

LAKATOS, I. (1978), *Philosophical Papers* (2 bol.). J. Worrall eta G. Curriek argitaratua. Cambridge, UK: Cambridge University Press. (Tymoczko, 1998) liburuan ere agertzen da.

LOLLI, G. (1985), «Foundational problems from computation theory». Synthese **62**: 272-285.

MENDELSON, E. (1964), *Introduction to Mathematical Logic*. New York: Van Nostrand. 4. edizioa (1997), CRC Press.

MILL, J.S. (1843), *A System of Logic, Ratiocinative and Inductive, being a connected view of the principles of evidence and the methods of scientific investigation*. London: John W. Parker, West Strand.

PÓLYA, G. (1945), *How to solve It*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

PÓLYA, G. (1954), *Mathematics and Plausible Reasoning* (2 bol.). Princeton, NJ: Princeton University Press.

POPPER, K. (1934), *Logik der Forschung*. Wien: Springer.

RECK, E. (2011), «Dedekind's Contributions to the Foundations of Mathematics». *Stanford Encyclopedia of Phylosophy*.

RUSSELL, B. (1903), *The Principles of Mathematics*. Cambridge, UK: University Press.

RUSSELL, B. (1908), «Mathematical Logic as Based on the Theory of Types». *American Journal of Mathematics* **30**: 222-262. J. Van Heijenoort (1967)-an berrargitaratua: 152-182.

TROELSTRA, A.S. (1994), «History of Constructivism in the Twentieth Century». *The ITLI Prepublications Series*. Amsterdam: University of Amsterdam Press. Tymoczko, T. (arg.) (1998), *New Directions in the Philosophy of Mathematics*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

VAN HEIJENOORT, J. (1967), *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

WHITEHEAD, A.N. & RUSSELL, B. (1910-1913), *Principia Mathematica* (1. bol., 1910; 2. bol., 1912; 3. bol., 1913). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

WRIGHT, C. (1983), *Frege's conception of numbers as objects*. Aberdeen: Aberdeen University Press.