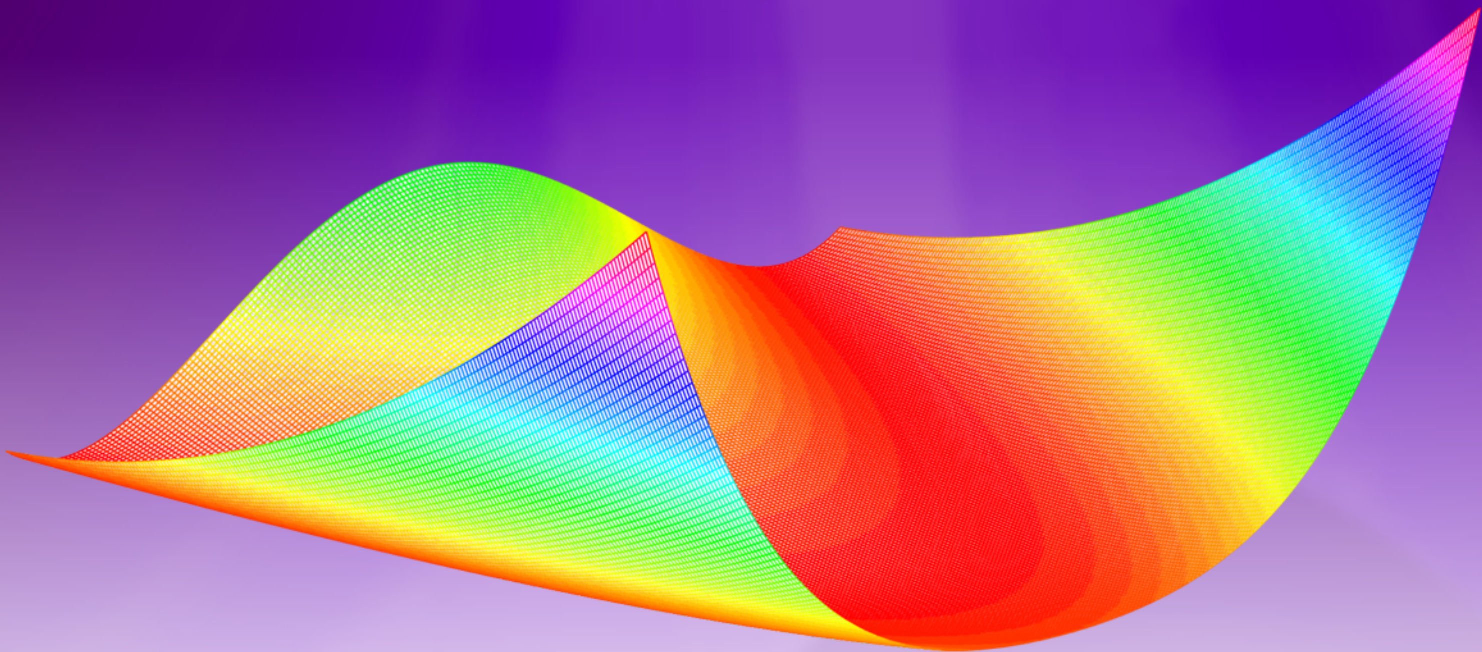
# Zenbakizko metodoak MATLAB® erabiliz

# PROBLEMA EBATZIAK

Eugenio Mijangos



eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

*CIP. Unibertsitateko Biblioteka*

**Mijangos, Eugenio**

Zenbakizko metodoak MATLAB erabiliz [Recurso electrónico]: problema ebatziak / Eugenio Mijangos. – Datos. – Bilbao : Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea, Argitalpen Zerbitzua = Servicio Editorial, [2019]. – 1 recurso en línea : PDF (112 p.).

Modo de acceso: World Wide Web.

ISBN: 978-84-9082-832-8

1. Análisis numérico – Informática. 2. MATLAB (Programa de ordenador).

(0.034) 519.6
(0.034) 004.438MATLAB


Matematika Aplikatua eta Estatistika eta Ikerkuntza Operatiboa
Zientzia eta Teknologia Fakultatea
eugenio.mijangos@ehu.eus



ISBN: 978-84-9082-832-8

# Aurkibidea

## Hitzaurrea

Zenbakizko metodoak I *irakasgaian Matematika Graduko 2. mailako euskarazko ikasleek argitaratu berria den egile honen* Zenbakizko metodoak MATLAB erabiliz *testuliburua dute. Liburu berri honen helburu nagusia da aurreko liburu teoriko hori osatzea, eta, bertan agertzen diren ariketa aukeratu batzuk eta beste ariketa berri batzuk ebatziz, irakasgai hori ulertzen laguntzea.*

*Aurreko testuliburua bezala, liburu praktiko hau ere oso erabilgarria izan daiteke bai Ingeniaritzako ikasketetan, eta baita Zientziako beste ikasketa batzuetan ere.*

*Liburu honen bidez zenbakizko metodoen oinarriak eskainiko dira, batez ere ikuspuntu praktiko batetik. Iraganean, zenbakizko analisian eta teorian oinarritzen zen zenbakizko metodoei buruzko ikasturte bat, baina, gaur egun, irakasgai horren edukia garatzean, kontuan hartu behar dugu ordenagailu ahaltsuak eta kalkulu-software eraginkorrak eskura izatea. Oraingo joera, gero eta gehiago, aplikazioetara eta inplementazioetara joatea da, jadanik prest dagoen kalkulu-tresneria erabiliz. Ikasturte batean, ikasleek zenbakizko metodoen oinarriak ikasiko dituzte. Gainera, ordenagailu-lengoaia batean programatzen ikasiko dute, eta software aurreratua erabiliko problemak ebazteko tresna gisa. MATLAB da horrelako softwarearen adibide egoki bat. Ikasleek beren programak idazteko erabil dezakete pakete informatiko hori, eta haren funtzioak problemak ebazteko tresna gisa.*

Egilearen oharrak: *liburu honetan askotan ematen den [20] erreferentzia* Zenbakizko metodoak MATLAB erabiliz *testuliburuari dagokio, eta horrela agertzen da liburu osoan zehar. Dezimalekin erabili beharreko puntuazioari dagokionez, testuan koma eta programazio-ariketetan puntua ez erabiltzearren (hots, bereizle berdina izateko), puntuz bereiziko dira dezimalak, nahiz eta euskaraz dezimalak komaz banandu.*

# 1. kapitulua

# MATLABi buruzko oinarrizko nozioak

Kapitulu honetan ikusiko dugu MATLAB paketea programa matematikoen multzo bat dela eta matrizeen erabileran oinarritzen dela. MATLAB izenak *MATrix LABoratory* esan nahi du, zeren bere oinarrizko datu-gaia matrize bat baita. MATLAB kalkulu teknikorako lengoaia ahaltsua da, eta oso erabilia da unibertsitateetan, Matematika, Zientzia eta Ingeniaritza ikasketetan. Pakete horrek zenbakizko programen eta marrazketa bidimentsionala eta tridimentsionala egiteko programa grafikoen bilduma zabal bat dauka. Gainera, goi-mailako lengoaia erabiliz, programa gehigarriak idaztea onartzen du.

MATLAB paketearen instrukzioak `idazmakina-letraz` idatziko dira. Adibideetan ikusiko dugu MATLABeko lan-leiho batek (ingelesez: *command window*) erakusten diguna. Honelako >> ikur baten jarraian agertzen da sartutako datua edo instrukzioa. Nahi duguna idatzi eta gero, «sartu» tekla sakatu behar dugu; orduan, ordenagailuak eragiketa egingo du eta emaitza erakutsiko du, honela: `ans =`. Programarekin erabiltzeko gidak eta erreferentziako gidak datoz; eta laguntza-leihoan ere aurki daitezke instrukzioei buruzko eta haien aukerei buruzko informazio gehiago eta adibideak.

Hitzaurrean aipatzen den bezala, dezimalekin erabili beharreko puntuazioari dagokionez, testuan koma eta MATLABeko programazio-ariketetan puntua ez erabiltzearren (hots, bereizle berdina izateko), puntuz bereiziko dira dezimalak, nahiz eta euskaraz dezimalak komaz banandu.

## 1.1. Problemak

1. Defini ditzagun $a$, $b$, $c$ eta $d$ aldagaiak, honela: $a = 14.75$, $b = -5.92$, $c = 61.4$ eta $d = 0.6(ab - c)$. MATLABen bidez kalkula itzazu:

$$(a) \qquad a + \frac{ab(a+d)^2}{c\sqrt{|ab|}} \qquad\qquad (b) \qquad de^{d/2} + \frac{(ad+cd)/\left(\frac{25}{a}+\frac{35}{b}\right)}{a+b+c+d}.$$

2. Sortu tarte berak bereizitako lerro-bektore bat 16 gai dauzkana, non lehenengo gaia 4 baita eta azkena 61.

3. Sortu zutabe-bektore bat non lehenengo gaia 31 baita, hurrengo gaiak txikiagoak egiten baitira -4 gehituz, eta azkena -9 baita. (Zutabe-bektore bat sor daiteke lerro-bektore bat irauliz).

4. Sortu jarraian ematen den matrizea. Lerroak sartzean, erabili bektoreen notazioa tarte berak bereizitako bektoreak sortzeko. (Hots, ez sartu gaiak banan-banan.)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1.0000 & 2.0000 & 3.0000 & 4.0000 & 5.0000 & 6.0000 \\ 3.0000 & 9.1667 & 15.3333 & 21.5000 & 27.6667 & 33.8333 & 40.0000 \\ 28.0000 & 27.7500 & 27.5000 & 27.2500 & 27.0000 & 26.7500 & 26.5000 \\ 6.0000 & 5.0000 & 4.0000 & 3.0000 & 2.0000 & 1.0000 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Lehenengo bi ariketetan bi puntuen ikurra (:) erabiliz, egin hau:

   (a) Sortu 4 gaiko lerro-bektore bat, `va` izenekoa, $A$-ren bigarren lerroko azken lau gaiak dauzkana.

   (b) Sortu 4 gaiko zutabe-bektore bat, `vb` izenekoa, $A$-ren seigarren zutabeko gaiak dauzkana.

   (c) Sortu $3 \times 4$ matrizea, `B` izenekoa, $A$ matrizearen 1., 2. eta 4. lerroetako eta 1., 2., 4. eta 7. zutabeetako gaiak erabiliz.

   (d) Sortu $2 \times 3$ matrizea, `C` izenekoa, $A$ matrizearen 2. eta 4. lerroetako eta 2., 5. eta 6. zutabeetako gaiak erabiliz.

5. Demagun $y = \dfrac{(x^3+1)^2}{x^2+2}$ funtzioa. Kalkula ezazu $y$-ren balioa $x$-ren balio hauetarako: -1.6, -1.2, -0.8, -0.4, 0, 0.4, 0.8, 1.2. Ebatzi problema hau $x$ bektore bat sortuz eta gero $y$ bektore bat sortuz, gaiez gaiko kalkuluak erabiliz. Bikote horietarako egin grafiko bat, non puntuak izartxo batez adierazita agertzen baitira, eta puntuak lotuta lerro beltzez. Etiketatu ardatzak.

6. Defini dezagun $a = 0.8$ eskalarra eta $x = -3, -2.8, -2.6, \ldots, 2.6, 2.8, 3$. Orduan, erabili aldagai horiek honela, $y$ kalkulatzeko: $y = \dfrac{8a^2}{x^2+4a^2}$. Marraztu $y$, $x$-rekiko.

7. Erabili MATLAB frogatzeko $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}$ serie infinituaren batura, $\pi/4$ra jotzen duena. Egin batura, hori kalkulatuz, $n$-ren balio hauetarako:

   (a) $n = 100$

   (b) $n = 1000$

   (c) $n = 5000$.

   Sortu `n` izeneko bektore bat alde bakoitzean, non lehenengo gaia 0 baita, gehikuntza 1, eta azken gaia 100, 1000 edo 5000 baita. Orduan, erabili gaiez gaiko kalkulua bektore bat sortzeko, non gaiak $(-1)^n \frac{1}{2n+1}$ baitira. Azkenik, erabili `sum` funtzioa seriearen gaiak batzeko. Konparatu (a), (b) eta (c) ataletan lortutako balioak $\pi/4$ balioarekin.

8. St. Louis-eko Sarrerako Arkua osatzen da ekuazio honen arabera:

$$y = 693.8 - 68.8 \cosh\left(\frac{x}{99.7}\right)$$

   (oinetan neurtuta). Egin Arkuaren marrazki bat, non $-299.25 \leq x \leq 299.95$ oin.

Daniel Schwen CC BY-SA 3.0

9. Bektore bat honela emango dugu: `x=[15 85 72 59 100 80 44 60 91 38]`. Baldintzazko egiturak eta begiztak erabiliz, idatzi programa bat 59 baino handiagoak diren `x`-ko gaien batezbestekoa kalkulatzeko.

10. Kosinu-funtzioaren balioa kalkula dezakegu serie infinitu honen bidez:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots.$$

   Sortu M fitxategi bat, formula hori inplementatuz, hau egiteko: $\cos x$-ren balioak kalkulatu, eta monitorean seriearen gai bakoitza erakutsi gehitzen dituen neurrian. Alegia, kalkulatu balio hauek elkarren segidan, eta erakutsi monitorean:

$$\begin{aligned}
&\cos x = 1 \\
&\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} \\
&\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

eta segi horrela zuk aukeratutako ordenara arte. Aurreko balio hurbildu bakoitzerako, kalkulatu ehuneko errore erlatiboa, eta erakutsi monitorean hau kontuan hartuz:

$$errorea = \frac{egiazkoa - seriearen\ hurbilpena}{egiazkoa} \times 100.$$

Proba bezala, erabili programa cos(1.5) kalkulatzeko, batuketan 8 batugai sartuta; hau da, seriea garatuz $x^{14}/14!$ batugaira arte.

11. Planoko puntu bat kokatzeko, bi koordenatu behar ditugu:

    - Koordenatu kartesiarretan, $(x, y)$ ardatzekiko distantzia horizontala eta bertikala.
    - Koordenatu polarretan, $(r, \theta)$ erradioa eta angelua.

    Koordenatu polarrak ezagutuz gero, nahiko erraza da koordenatu kartesiarrak kalkulatzea. Aldiz, alderantziz ez da hain erraza. Erradioa adierazpen honen bidez kalkulatzen dugu:

    $$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

    Puntua lehenengo edo laugarren koadrantean dagoenean (hots, $x > 0$), erraza da $\theta$ kalkulatzeko formula:

    $$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

    Beste kasuetarako agertzen da zailtasuna. Honako taula honek laburtzen ditu aukerak:

| $x$ | $y$ | $\theta$ |
|---|---|---|
| $<0$ | $>0$ | $\arctan(y/x) + \pi$ |
| $<0$ | $<0$ | $\arctan(y/x) - \pi$ |
| $<0$ | $=0$ | $\pi$ |
| $=0$ | $>0$ | $\pi/2$ |
| $=0$ | $<0$ | $-\pi/2$ |
| $=0$ | $=0$ | $0$ |

    Idatzi M fitxategi ondo egituratu bat $r$ eta $\theta$ kalkulatzeko, $x$-ren eta $y$-ren funtzioan. Adierazi $\theta$-rako azken emaitzak, gradutan. Proba ezazu zure programa, kasu hauek balioztatuz:

| $x$ | $y$ | $r$ | $\theta$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | | |
| 1 | 1 | | |
| 0 | 1 | | |
| -1 | 1 | | |
| -1 | 0 | | |
| -1 | -1 | | |
| 0 | 0 | | |
| 0 | -1 | | |
| 1 | -1 | | |

12. Garatu M fitxategi bat, non 0tik 100erako zenbakizko balio bat igortzen badiogu, hark taula honi jarraituz letrazko kategoria bat bueltatuko baitigu:

| **Letra** | **Irizpidea** |
|---|---|
| A | $90 \leq$ zenbakizko balioa $\leq 100$ |
| B | $80 \leq$ zenbakizko balioa $< 90$ |
| C | $70 \leq$ zenbakizko balioa $< 80$ |
| D | $60 \leq$ zenbakizko balioa $< 70$ |
| E | zenbakizko balioa $< 60$ |

13. Manning-en ekuazio hau erabil dezakegu uraren abiadura kalkulatzeko ubide ireki laukizuzen batean:

$$U = \frac{\sqrt{S}}{n}\left(\frac{BH}{B+2H}\right)^{2/3},$$

non $U$ = abiadura (m/s), $S$ = ubidearen malda, $n$ = marruskadura koefizientea, $B$ = zabalera (m) eta $H$ = sakonera (m). Datu hauek eskuragarriak dira bost ubidetarako:

| $n$ | $S$ | $B$ | $H$ |
|---|---|---|---|
| 0.035 | 0.0001 | 10 | 2 |
| 0.020 | 0.0002 | 8 | 1 |
| 0.015 | 0.0010 | 20 | 1.5 |
| 0.030 | 0.0007 | 24 | 3 |
| 0.022 | 0.0003 | 15 | 2.5 |

Idatzi M fitxategi bat ubide horietarako abiadura kalkulatzen duena. Sartu balio horiek matrize batean, non zutabe bakoitzak parametro bat adierazten baitu eta lerro bakoitzak ubide bat. Monitorean taula-itxura izan behar du M fitxategiaren irteerak; baina handituta, bosgarren zutabe batekin, non ubide bakoitzari dagokion abiadura agertzen baita, zutabeak etiketatzeko taularen goiburuak sartuta.

14. Habe baten desplazamendua honelako funtzio batek neurtzen du:

$$y(x) = \frac{-5}{6}[< x-0 >^4 - < x-5 >^4] + \frac{15}{6} < x-8 >^3 + 75 < x-7 >^2 + \frac{57}{6}x^3 - 238.25x,$$

non $x$ habearen zeharkako distantzia baita, eta *singulartasun-funtzioa* honela definitzen baita:

$$< x-a >^n = \left\{ \begin{array}{ll} (x-a)^n, & x > a \text{ denean} \\ 0, & x \leq a \text{ denean} \end{array} \right\}$$

Garatu M fitxategi bat, $x$ abszisa eta $y$ ordenatua dituen grafiko bat egiteko.

15. Likido baten $B$ bolumena, $r$ erradiodun eta $L$ luzeradun zilindro horizontal baten barnean, likidoaren $h$ sakoneraren menpean dago formula honen bidez:

$$B = \left[r^2 \arccos\left(\frac{r-h}{r}\right) - (r-h)\sqrt{2rh-h^2}\right] L.$$

Garatu M fitxategi bat, bolumena/sakonera grafiko bat marrazteko. Proba ezazu programa, $r = 2$ m eta $L = 5$ m denean.

16. «Zatitu eta erdibanatu» metodoa, $a$ zenbaki positibo baten erro karratua hurbiltzeko metodo zaharra, honela formula daiteke:

$$x = \frac{x + a/x}{2}.$$

Idatzi `while ... break` begiztako egituran oinarritutako M fitxategi ondo egituratu bat, algoritmo hori inplementatzeko. Erabili koska egoki bat, egitura argi bat izateko moduan. Urrats bakoitzean, balioetsi zure hurbilpenaren errorea adierazpen honen bidez:

$$\varepsilon = \left| \frac{x_{berria} - x_{zaharra}}{x_{berria}} \right|.$$

Errepikatu begizta $\varepsilon$-ren balioa, zuk emandako $\varepsilon_e$ tolerantzia bat baino txikiago izan arte. Diseinatu zure programa, emaitza eta errorea emateko. Ziurta ezazu zuk kalkula ditzakezula zero edo zero baino txikiagoak diren zenbaki guztien erro karratuak. Azken kasu horretan, erakutsi emaitza zenbaki irudikari bat bezala. Esate baterako, monitorean -4ren erro karratuaren itzultzeak $2i$ izan behar du. Proba ezazu zure programa $a = 0, 2, 4$ eta -9 balioztatuz, $\varepsilon_e = 10^{-4}$ hartuz.

17. *Zatikako funtzioak*, batzuetan, oso erabilgarriak dira menpeko aldagaiaren eta aldagai askearen arteko erlazioa ekuazio bakar batean adierazi ezin dugunean. Adibidez, honela deskriba liteke espazio-suziri baten abiadura:

$$v(t) = \begin{cases} 11t^2 - 5t, & 0 \leq t \leq 10 \\ 1100 - 5t, & 10 < t \leq 20 \\ 50t + 2(t-20)^2, & 20 < t \leq 30 \\ 1520e^{-0.2(t-30)}, & t > 30 \\ 0, & \text{beste kasu batean.} \end{cases}$$

Garatu M fitxategi bat $v$ kalkulatzeko $t$-ren funtzioan. Orduan, erabili $v = v(t)$ funtzio hori, grafiko bat sortzeko $t = -5$etik $t = 50$ arte ($t$ abszisa eta $v$ ordenatua erakutsiz).

## 1.2. Problema batzuen ebazpena

1.

(a)
```
a=14.75;
b=-5.92;
c=61.4;
d=0.6*(a*b-c);
a+((a*b*(a+d)^2)/(c*sqrt(abs(a*b))))
ans =
 -829.5390
```

(b) `d*exp(d/2)+(((a*d+c*d)/(25/a+35/b))/(a+b+c+d))`

```
ans =

  -84.7934
```

3. `A = (31:-4:-9)'`

5.

```
x=-1.6:0.4:1.2
y=((x.^3+1).^2)./(x.^2+2)
plot(x,y,'-*k')
xlabel('X')
ylabel('Y')
```

7.

(a)
```
n=[0:100];
v= (-1).^n./(2*n+1);
% Batuketa:
batura=sum(v)
% Konparaketa:
(pi/4-batura)*4/pi
```

(b)
```
n=[0:1000];
v= (-1).^n./(2*n+1);
% Batuketa:
batura=sum(v)
% Konparaketa:
(pi/4-batura)*4/pi
```

(c)
```
n=[0:5000];
v= (-1).^n./(2*n+1);
% Batuketa:
batura=sum(v)
% Konparaketa:
(pi/4-batura)*4/pi
```

9. Lehenengo eta behin, bb59 funtzioa definitzen dugu:

```
function [bb] = bb59(x)

% 59 baino handiagoak diren x bektoreko gaien batezbestekoa kalkulatzen
```

```
% duen funtzioa.

Elementu_kopurua=length(x);
Bektorea=[];
Zenbatzailea=1;
for i=1:1:Elementu_kopurua
    if x(i)>59
        Bektorea(Zenbatzailea)=x(i);
        Zenbatzailea=Zenbatzailea+1;
    end
end
bb=mean(Bektorea)
end
```

Gero hau egiten da:

```
x=[15 85 72 59 100 80 44 60 91 38];
Batezbestekoa=bb59(x)
```

11.

```
function [r,theta] = polar(x,y)
% Sarrerako balioak: x eta y koordenatu kartesiarrak
% Irteerako balioak: r eta theta koordenatu polarrak
r=sqrt(x^2+y^2);
if x>0
    theta=atan(y./x)
elseif x<0 & y>0
    theta=atan(y./x)+pi
elseif x<0 & y<0
    theta=atan(y./x)-pi
elseif x<0 & y==0
    theta=pi
elseif x==0 & y>0
    theta=pi/2
elseif x==0 & y<0
    theta=-pi/2
else
    theta=0
end
```

Gero, esate baterako, hau egin daiteke:

```
x=-1; y=-1;
[r,theta] = polar(x,y)
r =

    1.4142


theta =

   -2.3562
```

13.

```
function ur_abiadura
n=[0.035 0.020 0.015 0.030 0.022];
S=[0.0001 0.0002 0.0010 0.0007 0.0003];
B=[10 8 20 24 15];
H=[2 1 1.5 3 2.5];
abi=(sqrt(S)./n).*((B.*H).*(B+2*H)).^(2/3)
disp('_____________________________________')
disp('  n        S       B    H   abiadura')
disp('_____________________________________')
for i=1:5
fprintf('%5.3f   %5.4f   %2d   %3.1f  %7.4f\n',n(i),S(i),B(i),H(i),abi(i))
end
disp('_____________________________________')
end

>> ur_abiadura
```

exekutatzean hau lortuko dugu:

```
-------------------------------------
  n        S       B    H   abiadura
-------------------------------------
0.035   0.0001   10   2.0  12.2284
0.020   0.0002    8   1.0  13.1284
0.015   0.0010   20   1.5  164.6170
0.030   0.0007   24   3.0  147.3659
0.022   0.0003   15   2.5  64.9898
-------------------------------------
```

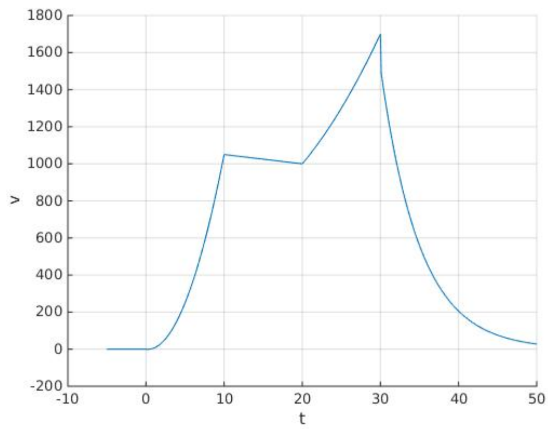
17. Zatikako funtzioa kodetzen dugu:

```
function y=v(t)
for k=1:length(t)
    if t(k)>=0 && t(k)<=10
        y(k)=11*t(k)^2-5*t(k);
    elseif t(k)>10 && t(k)<=20
        y(k)=1100-5*t(k);
    elseif t(k)>20 && t(k)<=30
        y(k)=50*t(k)+2*(t(k)-20)^2;
    elseif t(k)>30
        y(k)=1520*exp(-0.2*(t(k)-30));
    else
        y(k)=0;
    end
end
```

Gero, hau egiten badugu:

```
t=-5:0.1:50;
y=v(t);
plot(t,y)
grid on
xlabel('t')
ylabel('v')
box off
```

irudi hau lortuko dugu:



# 2. kapitulua

# Ordenagailuaren aritmetika eta errorearen analisia

Soluzio bat lortzeko erabiltzen dugun ordenagailua tresna inperfektua da. Izan ere, mugatuta dago hark duen gaitasuna zenbakiak zehaztasunez adierazteko. Ondorioz, makinak berak lortzen dituen emaitzek erroreak dituzte.

Bestalde, metodo hurbilduak erabiltzen baditugu, erroreak sortzen dira. Adibidez, abiaduraren deribatua kalkulatzeko (puenting-jauzilariaren adibidean bezala) diferentzia finituak erabiltzean:

$$\frac{dv}{dt} \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i}.$$

Auzia da, beraz, nola maneiatu horrelako ziurgabetasuna.

Ordenagailu bat erabiltzen denean problema baten zenbakizko soluzio bat lortzeko, programak gauzatzen ditu erabilitako zenbakizko metodoari elkartutako eragiketak. Zenbakizko metodo batzuk errazak dira inplementatzeko, baina batzuetan prozedurak zailak dira programatzeko.

Zenbakizko metodo bat programatu baino lehen, oso onuragarria da metodoa inplementatzeko jarraitu behar ditugun urrats guztiak planifikatzea. Horrelako plan bati *algoritmo* deritzogu, eta soluziora heltzeko urratsez urratseko instrukzioen bilduma da.

Zenbakizko kalkuluaren praktikan, kontuan hartu behar dugu ordenagailuak lortutako emaitzak ez direla soluzio matematiko zehatzak. Hainbat faktorerengatik, soluzioaren zehaztasuna txikitu daiteke, eta zailtasun hori ulertzeak maiz gida gaitzake algoritmo egokiak eraikitzera. Diskretizazio/trunkatze erroreak eta biribiltze-erroreak aztertuko ditugu.

Puntu higikorreko sistemetan dugun zenbaki dezimalen adierazpena eta beren bakartasuna. Horrelako sistema batean digituak inaustea eta biribiltzea. Ikusiko dugu, baita ere, nola adierazten dituen zehaztasun bikoitza duen ordenagailu batek puntu higikorreko zenbakiak eta zelako mugak dituen.

Kontuan hartu behar dugu kalkulu batzuetan gerta daitekeen *zifra esanguratsuen ezeztapena*, eta horrek emaitzetara ekar dezakeen zehaztasunaren okertzea zifra esanguratsu batzuk galtzeagatik; esate baterako, kenketetan kasu batzuetan.

Azkenik, kontuan hartuko dugu datuen hasierako erroreak hedatzen direla eragiketen kate batean zehar. Edozein zenbakizko prozesutan, kualitate desiragarria da hasierako baldintzetako errore txiki batek azken emaitzan errore txikiak eragitea. Algoritmo batek propietate hori badauka, *egonkorra* dela esango dugu; bestela, *ezegonkor* deritzo. Ahal den neurrian, metodo egonkorrak aukeratuko ditugu.

## 2.1. Problemak

**Eskuz ebazteko problemak:**

1. Egin [20] liburuko 3.3. adibidearen pareko kalkuluak $x_0 = 0.5$ puntuko $f(x) = e^{-2x}$ funtzioaren deribatua hurbiltzeko. Behatu antzekotasunak eta desberdintasunak, zure taula adibideko taularekin konparatzean.

2. Egin [20] liburuko 3.2. adibidearen antzeko kalkuluak $f'(x_0)$ hurbiltzeko, adierazpen hau erabiliz:
$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}.$$
Erakutsi errorea $O(h^2)$ ordenakoa dela. Hain zuzen, errorearen gai nagusia ($h$ nahiko txikia denean) $-\frac{h^2}{3!}f'''(x_0)$ dela $f'''(x_0) \neq 0$ bada.

3. Egin [20] liburuko 3.3. adibidearen pareko kalkuluak 2. problemaren hurbilpena erabiliz. Behatu antzekotasunak eta desberdintasunak, zure taula adibideko taularekin konparatzean.

4. Bihurtu zenbaki bitar hauek zenbaki dezimal:
   (a) $10101_{bi}$
   (b) $11111110_{bi}$
   (c) $0.11011_{bi}$
   (d) $0.1010101_{bi}$
   (e) $1.0110101_{bi}$
   (f) $11000101.101_{bi}$.

5. Bihurtu zenbaki dezimal hauek zenbaki bitar:
   (a) 23
   (b) 378
   (c) 0.6
   (d) 7/16
   (e) 23/32
   (f) 1/7.

6. Idatzi 81, 66.25 eta -0.625 zenbakiak era hauetan:
   (a) Era bitarrean.
   (b) Puntu higikorreko era normalizatuan.
   (c) 32 bit-eko zehaztasun bakuneko kate baten bidez (IEEE-754 estandarrean).

7. Idatzi 256.1875, -30952 eta -0.0032 zenbakiak era hauetan:

   (a) Era bitarrean.

   (b) Puntu higikorreko era normalizatuan.

   (c) 64 bit-eko zehaztasun bikoitzeko kate baten bidez (IEEE-754 estandarrean).

8. Aurkitu $R - 0.d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_{7bi}$ hurbiltze-errorea, zazpi zifra esanguratsuko hurbilpen bitar hauetan:

   (a) $R = 1/10 \approx 0.0001100_{bi}$.

   (b) $R = 1/7 \approx 0.0010010_{bi}$.

9. Serie geometriko konbergenteen baturaren formula erabiliz, frogatu $1/7{=}0.\overline{001}_{bi}$ garapen bitarra eta $\dfrac{1}{7} = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{64} + \dfrac{1}{512} + \ldots$ baliokideak direla.

10. Serie geometriko konbergenteen baturaren formula erabiliz, frogatu $1/5{=}0.\overline{0011}_{bi}$ garapen bitarra eta $\dfrac{1}{5} = \dfrac{3}{16} + \dfrac{3}{256} + \dfrac{3}{4096} + \ldots$ baliokideak direla.

11. Zehaztu zer gertatzen den, lau zifrako mantisa duen ordenagailu batek eragiketa hauek egiten dituenean:

    (a) $\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5}\right) + \dfrac{1}{6}$

    (b) $\left(\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{3}\right) + \dfrac{1}{5}$

    (c) $\left(\dfrac{3}{17} + \dfrac{1}{9}\right) + \dfrac{1}{7}$

    (d) $\left(\dfrac{7}{10} + \dfrac{1}{9}\right) + \dfrac{1}{7}$.

12. (a) Zenbat zenbaki positibo desberdin adieraz daitezke $(\beta, t, L, U) = (10, 2, -9, 10)$ puntu higikorreko sisteman?

    (b) Zenbat zenbaki normalizatu desberdin adieraz daitezke $(\beta, t, L, U)$ puntu higikorreko sistema orokorrean?

13. (a) $8/7 = 1.14285714285714\ldots$ zenbakiak, noski, ez du adierazpen zehatzik sistema hamartarrean. Aurkitu $\beta$ oinarriko eta $t$ mantisako (zehaztasuneko) puntu higikorreko sistema bat, non zenbaki horrek adierazpen zehatza daukan.

    (b) $\pi$ zenbakirako al dago horrelako sistema?

14. Aurkitu $E_x$ errore absolutua eta $R_x$ errore erlatiboa, eta zehaztu hurbilpenaren zifra esanguratsuen kopurua kasu hauetan:

    (a) $x = 2.71828182,\ \widehat{x} = 2.7182$.

(b) $y = 98350,\ \widehat{y} = 98000.$

(b) $z = 0.000068,\ \widehat{z} = 0.00006.$

15. Bete ezazu kalkulu hau:
$$p = \int_0^{1/4} e^{x^2} dx \approx \int_0^{1/4} \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!}\right) dx = \widehat{p}.$$
Esan zein errore mota gertatzen den, eta konparatu $\widehat{p}$ emaitza egiazko balioarekin: $p = 0.2553074606$.

16. (a) Jo dezagun $p_1 = 1.414$ eta $p_2 = 0.09125$ datuak lau zifra esanguratsuko zehaztasunarekin emanda daudela. Egoera horretan, aurkitu $p_1 + p_2$ eta $p_1 p_2$ eragiketei dagozkien emaitzak.

    (b) Jo dezagun $p_1 = 31.415$ eta $p_2 = 0.027182$ datuak bost zifra esanguratsuko zehaztasunarekin emanda daudela. Egoera horretan, aurkitu $p_1 + p_2$ eta $p_1 p_2$ eragiketei dagozkien emaitzak.

17. Bukatu kalkulu hauek, eta esan nolako errorea gertatzen den:

    (a) $\dfrac{\sin(\pi/4 + 0.00001) - \sin(\pi/4)}{0.00001} = \dfrac{0.70711385222 - 0.70710678119}{0.00001} = \ldots.$

    (b) $\dfrac{\ln(2 + 0.00005) - \ln(2)}{0.00005} = \dfrac{0.69317218025 - 0.69314718056}{0.00005} = \ldots.$

18. Hiru zifrako eta biribiltzeko puntu higikorreko aritmetika erabiliz, kalkula itzazu batura hauek (batu adierazten den ordenan):

    (a) $\sum_{k=1}^{6} \frac{1}{3^k}$.

    (b) $\sum_{k=1}^{6} \frac{1}{3^{7-k}}$.

19. Izan bitez Taylorren garapen hauek:
$$\frac{1}{1-h} = 1 + h + h^2 + h^3 + O(h^4)$$
eta
$$\cos(h) = 1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} + O(h^6).$$
Aurkitu horien baturaren eta biderkaduraren hurbiltze-ordenak.

20. Izan bitez Taylorren garapen hauek:
$$\sin(h) = h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} + +O(h^7)$$
eta
$$\cos(h) = 1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} + O(h^6).$$
Aurkitu horien baturaren eta biderkaduraren hurbiltze-ordenak.

21. $f_1(x_0, h) = \cos(x_0 + h) - \cos(x_0)$ funtzioa eralda dezakegu beste $f_2(x_0, h)$ bat lortzeko, formula trigonometriko hau erabiliz:

$$\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

Beraz, $f_1$ eta $f_2$ funtzioek balio berdinak dituzte, aritmetika zehatzean, $x_0$ eta $h$ aldagaien balio guztietarako.

(a) Aurkitu $f_2(x_0, h)$-ri dagokion adierazpena.

(b) $(f(x_0 + h) - f(x_0))/h$ adierazpenaren bidezko $f'(x_0)$-ren kalkulu hurbilduan, iradoki adierazpen bat ezeztapenaren errorea saihesteko. Idatzi MATLABeko programa bat zure adierazpena inplementatzen duena, eta kalkula itzazu $f'(0.5)$-ren hurbilpenak, $h = 1.e - 20, 1.e - 19, \ldots, 1$ balioetarako.

(c) Azaldu zure emaitzen eta [20] liburuko 3.3. adibideko emaitzen artean dagoen diferentzia.

22. $f_1(x, \delta) = \sin(x + \delta) - \sin(x)$ funtzioa eralda dezakegu beste $f_2(x, \delta)$ bat lortzeko, formula trigonometriko hau erabiliz:

$$\sin(a) - \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

Beraz, $f_1$ eta $f_2$ funtzioek balio berdinak dituzte, aritmetika zehatzean, $x$ eta $\delta$ aldagaien balio guztietarako.

(a) Aurkitu $f_2(x, \delta)$-ri dagokion adierazpena.

(b) Froga ezazu, analitikoki, $f_1(x, \delta)/\delta$ eta $f_2(x, \delta)/\delta$ adierazpenak, $\delta$ nahiko txikia denean, $\cos(x)$ funtzioaren hurbilpenak direla.

(c) Idatzi MATLABeko funtzio bat $g_1(x, \delta) = f_1(x, \delta)/\delta - \cos(x)$ eta $g_2(x, \delta) = f_2(x, \delta)/\delta - \cos(x)$ kalkulatzeko, $x = 3$ eta $\delta = 1.e - 11$ hartuz.

(d) Azaldu bi kalkuluen arteko emaitzen diferentziak.

23. Jo dezagun lehenengo deribatuaren hurbilpena, hots:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Formula honetarako trunkatze (edo diskretizazio) errorea $O(h)$ da. Demagun $f$ balioztatzean errore absolutua $\varepsilon$-k bornatzen duela, eta baztertu egingo ditugu oinarrizko eragiketa aritmetikoak egitean sortutako erroreak.

(a) Froga ezazu konputazio-errore osoa (trunkatzearen eta biribiltzearen konbinazioa) bornatuta dagoela balio honetaz:

$$\frac{Mh}{2} + \frac{2\varepsilon}{h},$$

non $M$ $|f''(\cdot)|$-aren borne bat baita.

(b) Zein $h$-ren baliotarako minimizatzen da aurreko bornea?

(c) Erabiltzen dugun biribiltze-errorea, gutxi gorabehera, $10^{-16}$ da. Erabili aurreko galderaren emaitza, [20] liburuko 3.3. adibideko grafikoaren portaera azaltzeko. Grafikoaren itxura azaltzean, azaldu, baita ere, non espero dezakegun minimo hori aurkitzea.

24. Demagun $f(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$ funtzioa.

(a) Erabili formatu hamartarra, sei digitu esanguratsurekin (biribilduz), $f(0.007)$ kalkulatzeko (kalkulagailua erabiliz).

(b) Erabili MATLAB (`format long` erabiliz) $f(x)$-ren balioa kalkulatzeko, eta benetako errore erlatiboa, biribiltzearen ondorioz, (a) atalean lortutako $f(x)$-ren balioarekiko.

(c) Biderkatu $f(x)$ funtzioa $\dfrac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}$ adierazpenaz, biribiltze-errorea izateko joera gutxiago duen $f(x)$-ren era bat lortzeko. Era berrian, erabili sei digitu esanguratsutako formatu hamartarra (biribilduz) $f(0.007)$ kalkulatzeko (kalkulagailua erabiliz). Konparatu balioa, (a) eta (b) ataletan lorturiko balioekin.

25. Demagun $f(x) = \dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x}$ funtzioa.

(a) Erabili formatu hamartarra sei digitu esanguratsurekin (biribilduz) $f(0.005)$ kalkulatzeko (kalkulagailua erabiliz).

(b) Erabili MATLAB (`format long` erabiliz) $f(x)$-ren balioa kalkulatzeko, eta benetako errore erlatiboa, biribiltzearen ondorioz, (a) atalean lortutako $f(x)$-ren balioarekiko.

(c) Biderkatu $f(x)$ funtzioa $\dfrac{\sqrt{9+x}+3}{\sqrt{9+x}+3}$ adierazpenaz, biribiltze-errorea izateko joera gutxiago duen $f(x)$-ren era bat lortzeko. Era berrian, erabili sei digitu esanguratsutako formatu hamartarra (biribilduz) $f(0.005)$ kalkulatzeko (kalkulagailua erabiliz). Konparatu balioa (a) eta (b) ataletan lorturiko balioekin.

26. Honako kasu hauetan, aurkitu formula baliokide bat zifra esanguratsuen galera saihesteko:

(a) $\ln(x+1) - \ln(x)$, $x$ handi baterako.

(b) $\sqrt{x^2+1} - x$, $x$ handi baterako.

(c) $\cos^2(x) - \sin^2(x)$, $x \approx \pi/4$ baterako.

(d) $\sqrt{\dfrac{1+\cos(x)}{2}}$, $x \approx \pi$ baterako.

Kasu bakoitzean, azaldu zergatik aukeratu duzun formula hori, eta eman zenbakizko adibide bat zehaztasunaren diferentzia agerian uzteko.

27. (a) Froga ezazu $\ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) = -\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ betetzen dela $|x| \geq 1$ bada.
    (b) Bi formula horietako zein da egokiena zenbakizko kalkulurako? Azaldu zergatik, eta eman zenbakizko adibide bat zehaztasunaren diferentzia agerian jartzeko.

28. Azaldu adierazpen hauetarako ager daitezkeen zailtasunak, eta berridatzi formula horiek zenbakizko kalkulurako era egokiago batean:

    (a) $\sqrt{x + \frac{1}{x}} - \sqrt{x - \frac{1}{x}}$, $\quad x \gg 1$ denean.
    (b) $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$, $\quad a \approx 0$ eta $b \approx 1$ direnean.

    Kasu bakoitzean, eman zenbakizko adibide bat zehaztasunaren diferentzia nabaria izateko.

29. Izan bitez adierazpen hauek:

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1, \quad q(x) = ((x-3)x+3)x - 1, \quad r(x) = (x-1)^3.$$

    (a) Lau zifrako puntu higikorreko aritmetika erabiliz eta biribilduz, kalkula itzazu $p(2.72)$, $q(2.72)$ eta $r(2.72)$. Kontuan izan $p(x)$-ren kalkuluan, aritmetika horrekin, $(2.72)^3 = 20.12$ eta $(2.72)^2 = 7.398$ direla.
    (b) Lau zifrako puntu higikorreko aritmetika erabiliz eta biribilduz, kalkula itzazu $p(0.975)$, $q(0.975)$ eta $r(0.975)$. Kontuan izan $p(x)$-ren kalkuluan, aritmetika horrekin, $(0.975)^3 = 0.9268$ eta $(0.975)^2 = 0.9506$ direla.

30. Demagun $(\beta, t, L, U) = (10, 8, -50, 50)$ puntu higikorreko sistema duen makina bat erabiltzen dugula ekuazio koadratiko honen erroak kalkulatzeko:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

    non $a$, $b$ eta $c$ zenbaki erreal ezagunak baitira.

    Ondorengo kasu bakoitzerako, esan zelako zenbakizko zailtasunak gerta daitezkeen formula estandarra erabiltzen badugu erroak kalkulatzeko. Azaldu, baita ere, nola gainditu zailtasun horiek (ahal denean):

    (a) $a = 1; \quad b = -10^5; \quad c = 1.$
    (b) $a = 6 \cdot 10^{30}; \quad b = 5 \cdot 10^{30}; \quad c = -4 \cdot 10^{30}.$
    (c) $a = 10^{-30}; \quad b = -10^{30}; \quad c = 10^{30}.$

31. (a) Marraztu $(\beta, t, L, U) = (2, 3, -2, 3)$ puntu higikorraren sistemako zenbaki guztien adierazpen hamartarrak. $d_0.d_1d_2$ mantisako zenbaki txikiena 1.00 da, eta zenbaki posible handiena 1.11 (sistema hamartarrean 1.75). Hortaz, begizta batean 1etik 1.75era joango gara, eta gehikuntzak $\beta^{1-t} = 2^{-2} = 0.25$ izango dira. Hori da begizta baterako oinarria. Bestalde, berretzailea -2tik 3ra doa; hori da aurreko begiztaren barneko begizta baten tartea. Begizta bikoitz horrek eraikitzen du

bektore bat sistema horretako zenbaki positibo guztiekin. Baina, zenbaki negatiboak eta zeroa ere marraztu behar dituzu. Marrazteko orduan, $\boldsymbol{x}$ bektorean zenbaki hamartar horiek guztiak gorde behar dituzu, eta $y_i = 0$ hartu $(x_i, y_i)$ bikote guztietarako.

(b) Zer gertatzen da sistemako zenbakien arteko distantziarekin? Zergatik?

32. *Bigarren mailako ekuazioaren ebazpenaren formula hobetua.* Demagun $a \neq 0$ eta $b^2 - 4ac > 0$ ditugula, eta jo dezagun $ax^2 + bx + c = 0$ ekuazioa. Haren erroak adierazpen ezagun hauen bidez kalkulatzen dira:

(a) $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ eta $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Frogatu erro horiek kalkula daitezkeela adierazpen baliokide hauen bidez:

(b) $x_1 = \dfrac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}$ eta $x_2 = \dfrac{-2c}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}$.

*Oharra.* $|b| \approx \sqrt{b^2 - 4ac}$ denean, kontuz ibili behar dugu ezeztatzearen bidezko zehaztasunaren galera saihesteko. Baldin $b > 0$ bada, $x_1$ erroa (b) formularen bidez kalkulatu beharko genuke, eta $x_2$ erroa (a) formulaz. Aldiz, $b < 0$ bada, $x_1$ erroa (a) formularen bidez kalkulatu beharko genuke, eta $x_2$ erroa (b) formula erabiliz.

33. Demagun gure zenbaki-sistema hamartarrak 8 digitu esanguratsu erabiltzen dituela (hots, $t = 8$). Erabili formula egokia $x_1$ eta $x_2$ kalkulatzeko, aurreko ariketan azaltzen den bezala, bigarren mailako ekuazio hauen erroak aurkitzeko:

(a) $x^2 - 1000.001x + 1 = 0$.

(b) $x^2 - 100000.0001x + 1 = 0$.

(c) $x^2 + 100000.00001x + 1 = 0$.

34. Aztertu eragiketa hauen erroreen hedapena (begira ezazu [20] liburuko 3.4.5. azpiatala):

(a) Hiru zenbakiren batura:

$$p + q + r = (\widehat{p} + \varepsilon_p) + (\widehat{q} + \varepsilon_q) + (\widehat{r} + \varepsilon_r).$$

(b) Zero ez den zenbaki baten alderantzizkoa:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{\widehat{q} + \varepsilon_q}.$$

(c) Zero ez den zenbaki batez zatitzea:

$$\frac{p}{q} = \frac{\widehat{p} + \varepsilon_p}{\widehat{q} + \varepsilon_q}.$$

**MATLABez ebazteko problemak:**

35. Formula koadratiko klasikoak dio $ax^2 + bx + c = 0$ ekuazioaren bi erroak honela kalkulatzen direla:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{eta} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

(a) Sortu MATLABeko M fitxategi bat (`[x1,x2]=fkklas(a,b,c)` motakoa) erroak kalkulatzeko, eta erabili funtzio hori bi erroak kalkulatzeko kasu honetan:

$$a = 1, \quad b = -100000000, \quad c = 1.$$

(b) Konpara itzazu emaitza horiek MATLABeko funtzio honek ematen duenarekin:

```
roots([a b c])
```

(c) Zer gertatzen da erroak eskuz edo kalkulagailu arrunt batez kalkulatzen badituzu? Ikusi beharko duzu formula klasikoa ona dela erro bat kalkulatzeko, baina ez bestea. Beraz, erabili ezazu zuk sortutako funtzio hura zehaztasunez erro bat aurkitzeko, eta gero erabili propietate hau:

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

beste erroa kalkulatzeko.

36. *Formula hobetua.* Erabili aurreko 32. problemaren informazioa ariketa hauek egiteko.

(a) Idatzi algoritmo bat erroak era horretan kalkula ditzan, eta $|b| \approx \sqrt{b^2 - 4ac}$ denean, kontuz ibil dadila ezeztatzearen bidezko zehaztasunaren galera saihesteko. Alegia, zera kontuan hartuz:

- Baldin $b > 0$ bada, $x_1$ erroa azken formularen bidez kalkulatu beharko genuke, eta $x_2$ erroa formula klasikoaz.
- Aldiz, $b < 0$ bada, $x_1$ erroa formula klasikoaren bidez kalkulatu beharko genuke, eta $x_2$ erroa azken formula erabiliz.

(b) Gero, inplementatu algoritmo hori MATLABeko M fitxategi bat eraikiz (adibidez, `[x1,x2]=fkhobe(a,b,c)` motakoa) eta probatu ekuazio koadratiko egoki batzuekin (esate baterako, $x^2 - 5x + 6 = 0$ edo $x^2 - 100000000x + 1 = 0$).

37. Formula klasikoa eta formula hobetua erabiliz, kalkula itzazu bigarren mailako ekuazio hauen erroak:

(a) $x^2 - 1000.001x + 1 = 0$.

(b) $x^2 - 100000.0001x + 1 = 0$.

(c) $x^2 - 100000.00001x + 1 = 0$.

(d) $x^2 - 1000000.000001x + 1 = 0$.

(e) $x^2 - 100000000.00000001x + 1 = 0$.

Egiaztatu emaitzak ($x_1 + x_2 = -b/a$ eta $x_1 x_2 = c/a$ bete behar dute), eta konpara itzazu kasu bakoitzeko formula klasikoak eta formula hobetuak lorturiko emaitzak. Zein da metodo egokiena? Zergatik huts egiten du besteak?

38. Hau da $f(x) = e^x$ funtzioaren Taylorren seriearen garapena:

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots.$$

Erabili ekuazio hori $e^{-2}$ kalkulatzeko, kasu hauetan:

(a) Lehenengo lau batugaiak erabiliz.

(b) Lehenengo sei batugaiak erabiliz.

(c) Lehenengo zortzi batugaiak erabiliz.

Kasu bakoitzean, kalkula ezazu trunkatze-errore absolutua eta errore erlatiboa. Erabili MATLAB, `format long` instrukzioaz, $e^{-2}$-ren benetako balioa kalkulatzeko. Erabili sei zenbaki esanguratsuko zenbaki hamartarrak (biribilduz), eragiketa guztietan.

39. Hau da $\sin(x)$-rako berretura-seriea:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots.$$

MATLABeko funtzio honek seriea erabiltzen du $\sin(x)$ kalkulatzeko:

```
function s = berresin(x)
% sin(x) berretura seriearen bidez kalkulatzen du.
s = 0;
t = x;
n = 1;
while s+t ~= s;
s = s+t;
t = -x.^2/((n+1)*(n+2)).*t
n = n+2;
end
```

(a) Zergatik bukatuko da `while` begizta?

(b) Aldatu `berresin.m`-ren lehenengo lerroa honela:
`function [s,tmax,tkop]=berresin(x)`
Gero, sartu lerro hauek `while` begizta hasi baino lehen:

```
tmax = abs(t);
tkop = 0;
```

eta lerro hauek begiztaren bukaeran:

```
tmax = max(tmax,abs(t));
tkop = tkop+1;
```

Erantzun galdera hauek $x = \pi/2,\ 11\pi/2,\ 21\pi/2$ eta $31\pi/2$ balioetarako:

- Zein da emaitzaren zehaztasuna?
- Zenbat gai erabili behar izan ditu?
- Zein izan da seriearen tamaina handieneko gaia?

Galdera horiek erantzuteko, komeni da honelako taula bat egitea:

| x | $\pi/2$ | $11\pi/2$ | $21\pi/2$ | $31\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|
| sin(x)-berresin(x) | | | | |
| tmax | | | | |
| tkop | | | | |

(c) Zer ondorioztatzen da puntu higikorreko aritmetikaren eta berretura-serieen erabileraz funtzioak balioztatzeko orduan?

40. [20] liburuko 3.22. eta 3.23. adibideak kontuan hartuz, frogatu $\{1/2^n\}_{n=1}^{\infty}$ segidaren gaiak garatzeko hiru metodo hauek erabil ditzakegula:

(a) $r_0 = 1$ eta $r_n = \frac{1}{2}r_{n-1}$, $n = 2, 3, \dots$ izanik.

(b) $p_0 = 1$, $p_1 = 0.5$ eta $p_n = \frac{3}{2}p_{n-1} - p_{n-2}$, $n = 2, 3, \dots$ izanik.

(c) $q_0 = 1$, $q_1 = 0.5$ eta $q_n = \frac{5}{2}q_{n-1} - q_{n-2}$, $n = 2, 3, \dots$ izanik.

Orain, kasu bakoitzean hasierako errore txiki bat sortzen da:

(a) $r_0 = 0.994$.

(b) $p_0 = 1$, $p_1 = 0.497$.

(c) $q_0 = 1$, $q_1 = 0.497$.

MATLAB erabiliz, sortu metodo bakoitzerako lehenengo 10 iterazioak, eta aurkeztu emaitzak [20] liburuko 3.1. eta 3.2. tauletan bezala (MATLABen bidez, hori ere).

Nolako errorea (egonkorra/ezegonkorra) gertatzen da kasu bakoitzean? Non txikitzen da errore hori?

## 2.2. Problema batzuen ebazpena

4. (a) $2^4 + 2^2 + 2^0 = 21$;

(c) $2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-4} + 2^{-5} = 0.84375$;

(e) $2^0 + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-5} + 2^{-7} = 1.4140625$.

5. (a) $23 = 2 \cdot 11 + 1$;

   $11 = 2 \cdot 5 + 1$;

   $5 = 2 \cdot 2 + 1$;

   $2 = 2 \cdot 1 + 0$;

   $1 = 2 \cdot 0 + 1$.

   Beraz, $23{=}10111_{bi}$ dugu.

   (d) $R = 7/16$ denez, honela kalkulatuko dugu:

$$\begin{array}{lll} 2R = 7/8 & d_1 = \lfloor 7/8 \rfloor = 0 & Z_1 = zat(7/8) = 7/8 \\ 2Z_1 = 7/4 & d_2 = \lfloor 7/4 \rfloor = 1 & Z_2 = zat(7/4) = 3/4 \\ 2Z_2 = 3/2 & d_3 = \lfloor 3/2 \rfloor = 1 & Z_3 = zat(3/2) = 1/2 \\ 2Z_3 = 1 & d_4 = \lfloor 1 \rfloor = 1 & Z_4 = zat(1) = 0. \end{array}$$

   Beraz, $7/16{=}0.0111_{bi}$ dugu.

6. (a) $81 = 2 \cdot 40 + 1$;

   $40 = 2 \cdot 20 + 0$;

   $20 = 2 \cdot 10 + 0$;

   $10 = 2 \cdot 5 + 0$;

   $5 = 2 \cdot 2 + 1$;

   $2 = 2 \cdot 1 + 0$;

   $1 = 2 \cdot 0 + 1$.

   Beraz, $81{=}1010001_{bi}$ dugu.

   (b) Era normalizatuan $81 = 1.010001 \cdot 2^6$ dugu.

   (c) Zeinua positiboa denez, lehenengo bit 0 da.

   Hurrengo zortzi bitak honela kalkulatzen dira:

   6+127=133

   $133{=}10000101_{bi}$

   Hamargarren bitetik aurrera 1.010001 zenbakiaren **010001** mantisa da.

   Beraz, ordenagailuak 0|10000101|01000100000000000000000 gordeko du 32 bit-eko zehaztasun bakuneko kasuan.

11. (a) $1/3 = 0.010101\ldots_{bi} = 1.\overline{01}_{bi} \cdot 2^{-2} \approx 1.0101_{bi} \cdot 2^{-2}$

$1/5 = 0.00110011\ldots_{bi} = 1.\overline{1001}_{bi} \cdot 2^{-3} \approx 1.1010_{bi} \cdot 2^{-3}$

$1/6 = 0.0010101\ldots_{bi} = 1.\overline{01}_{bi} \cdot 2^{-3} \approx 1.0101_{bi} \cdot 2^{-3}$,

$1/3 + 1/5 \approx 1.0101_{bi} \cdot 2^{-2} + 1.1010_{bi} \cdot 2^{-3} = 10.101_{bi} \cdot 2^{-3} + 1.1010_{bi} \cdot 2^{-3} = (10.101_{bi} + 1.1010_{bi}) \cdot 2^{-3} = 1.0001_{bi} \cdot 2^{-1}$,

$(1/3 + 1/5) + 1/6 \approx 1.0001_{bi} \cdot 2^{-1} + 1.0101_{bi} \cdot 2^{-3} = 1.0001_{bi} \cdot 2^{-1} + 0.010101_{bi} \cdot 2^{-1} = (1.0001_{bi} + 0.010101_{bi}) \cdot 2^{-1} = 1.0110_{bi} \cdot 2^{-1} = 11/16$.

Bestalde, $(1/3 + 1/5) + 1/6 = 7/10$.

Ondorioz, errore absolutua $=|7/10 - 11/16| = 2/160$.

18. (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} \frac{1}{3^k} = (((((1/3 + 1/9) + 1/27) + 1/81) + 1/243) + 1/729)$ kalkulatuko dugu hiru zifrako eta biribiltzeko koma mugikorreko aritmetika erabiliz.

0.333+0.111=0.444;

0.444+0.037=0.481;

0.481+0.012=0.493;

0.493+0.004= 0.497;

0.497+0.001=0.498.

Beraz, $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} \frac{1}{3^k} = 0.498$ ematen du.

(b) Era berean jokatuz, zera dugu:

$$\sum_{k=1}^{6} \frac{1}{3^{7-k}} = (((((1/729 + 1/243) + 1/81) + 1/27) + 1/9) + 1/3) = 0.499.$$

Hori da zehatzagoa (a)-rena baino; (b) kalkuluan biribiltzean, ez da galtzen hamarren txikien pisua, zenbaki txikienetik handienera batzen baitira.

19. Hau dugu: $\dfrac{1}{1-h} = 1 + h + h^2 + h^3 + O(h^4)$ eta $\cos(h) = 1 - \dfrac{h^2}{2!} + \dfrac{h^4}{4!} + O(h^6)$.

Beraz,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-h} + \cos(h) &= 1 + h + h^2 + h^3 + O(h^4) + 1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} + O(h^6) = \\
&= \left(1 + h + h^2 + h^3 + 1 - \frac{h^2}{2!}\right) + \left(O(h^4) + \frac{h^4}{4!} + O(h^6)\right) = \\
&= 2 + h + \frac{h^2}{2!} + h^3 + O(h^4).
\end{aligned}$$

Bestalde,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-h}\cos(h) &= (1+h+h^2+h^3+O(h^4))\left(1-\frac{h^2}{2!}+\frac{h^4}{4!}+O(h^6)\right) = \\
&= 1+h+h^2-\frac{h^2}{2!}+h^3-\frac{h^3}{2!}+\left(\frac{h^4}{4!}-\frac{h^4}{2!}+\frac{h^5}{4!}-\frac{h^5}{2!}+\frac{h^6}{4!}+\frac{h^7}{4!}\right) \\
&+(1+h+h^2+h^3)O(h^6)+(1-\frac{h^2}{2!}+\frac{h^4}{4!})O(h^4)+O(h^4)O(h^6) \\
&= 1+h+\tfrac{h^2}{2}+\tfrac{h^3}{2}+O(h^4)+O(h^6)+O(h^4)+O(h^{10}) \\
&= 1+h+\tfrac{h^2}{2}+\tfrac{h^3}{2}+O(h^4)
\end{aligned}
$$

23. (a) Adierazpen hori erabiltzen badugu $f'(x)$ hurbiltzeko, hau da errorea:

$$\left|f'(x)-\frac{\overline{f(x+h)}-\overline{f(x)}}{h}\right|$$

Baina, $\overline{f(x)} = f(x)+\varepsilon_2$ eta $\overline{f(x+h)} = f(x+h)+\varepsilon_1$ dugunez,

$$
\begin{aligned}
\overline{f(x+h)}-\overline{f(x)} &= f(x+h)+\varepsilon_1-(f(x)+\varepsilon_2) \\
&= f(x+h)-f(x)+\varepsilon_1-\varepsilon_2 \\
&\le f(x+h)-f(x)+|\varepsilon_1-\varepsilon_2| \\
&\le f(x+h)-f(x)+2\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Izan ere, $|\varepsilon_1-\varepsilon_2| \le |\varepsilon_1|+|\varepsilon_2| \le 2\varepsilon$.

Emaitza hori errorearen kalkuluan erabiliz, hau lortzen da:

$$
\begin{aligned}
\left|f'(x)-\frac{\overline{f(x+h)}-\overline{f(x)}}{h}\right| &\le \left|f'(x)-\frac{f(x+h)-f(x)+2\varepsilon}{h}\right| \\
&= \left|f'(x)-\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{2\varepsilon}{h}\right| \\
&\le \left|f'(x)-\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|+\frac{2\varepsilon}{h} \\
&\le \frac{Mh^2/2}{h}+\frac{2\varepsilon}{h} = \frac{Mh}{2}+\frac{2\varepsilon}{h}.
\end{aligned}
$$

Azken urratsean, kontuan hartu dugu $M > 0$ konstantea $|f''(\cdot)|$-aren goi-borne bat dela eta, ondorioz, $|f(x+h)-f(x)-f'(x)h| \le Mh^2/2$ betetzen dela.

(b) $\alpha(h) = \dfrac{Mh}{2}+\dfrac{2\varepsilon}{h}$ funtzioa badugu, $\alpha'(h) = \dfrac{M}{2}-\dfrac{2\varepsilon}{h^2} = 0$ bete behar denez, $h^2 = \dfrac{4\varepsilon}{M}$. Beraz, $\widehat{h} = 2\sqrt{\varepsilon/M}$ balioan $\alpha(h)$ erroreak hartzen du balio txikiena ($\alpha''(\widehat{h}) > 0$ baita).

(c) [20] liburuko 3.3. adibideko kasuan $M = 1$ eta $\varepsilon = 10^{-16}$ direnez, $\widehat{h} = 2 \cdot 10^{-8}$. [20] liburuko 3.1 irudian eta taulan ikusten da $10^{-8}$-rako, gutxi gorabehera, errore txikienak gertatzen direla.

26. (b) $\sqrt{x^2+1}-x = (\sqrt{x^2+1}-x)\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$. **Lau digitu esangarriko sistema baterako** $x$ handi bat hartuz, esate baterako $x = 10^3$, hau gertatzen da:

$$\sqrt{x^2+1} - x = \sqrt{1000000+1} - 1000 = \sqrt{1000000} - 1000 = 0.$$

Aldiz,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} &= \frac{1}{\sqrt{1000000+1}+1000} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1000000}+1000} = \frac{1}{2000} \\ &= 5 \cdot 10^{-4}.\end{aligned}$$

(c) $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$ dugu. Dematzagun **lau digitu esangarriko sistema bat** eta $x \approx \pi/4$. Adibidez, $x = \pi/4 + 10^{-6} = 0.7854 + 0.000001 = 0.7854$ betetzen denez, hau gertatzen da:

$$\begin{aligned}\cos^2(x) - \sin^2(x) &= (\cos(x))^2 - (\sin(x))^2 \\ &= (\cos(0.7854))^2 - (\sin(0.7854))^2 \\ &= 0.5000 - 0.5000 = 0.\end{aligned}$$

Aldiz, $\cos(2x) = \cos(2 \cdot 0.7854) = -3.673 \cdot 10^{-6}$.

27. (a) $x - \sqrt{x^2-1} \cdot \dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$ denez, $\ln(x - \sqrt{x^2-1}) = -\ln(x + \sqrt{x^2-1})$ betetzen da.

(b) $|x| \gg 1$ denean, $x - \sqrt{x^2-1} \approx 0$ da, eta zifra esanguratsuen galera gertatzen da. Esate baterako, sistema hamartarrean $t = 5$ bada eta $x = 10^3$, $\ln(x - \sqrt{x^2-1}) = 0$ da, eta, aldiz, $-\ln(x + \sqrt{x^2-1}) = -7.6009$.

31. (a) Emandako baldintzekin funtzio hau eraikitzen da:

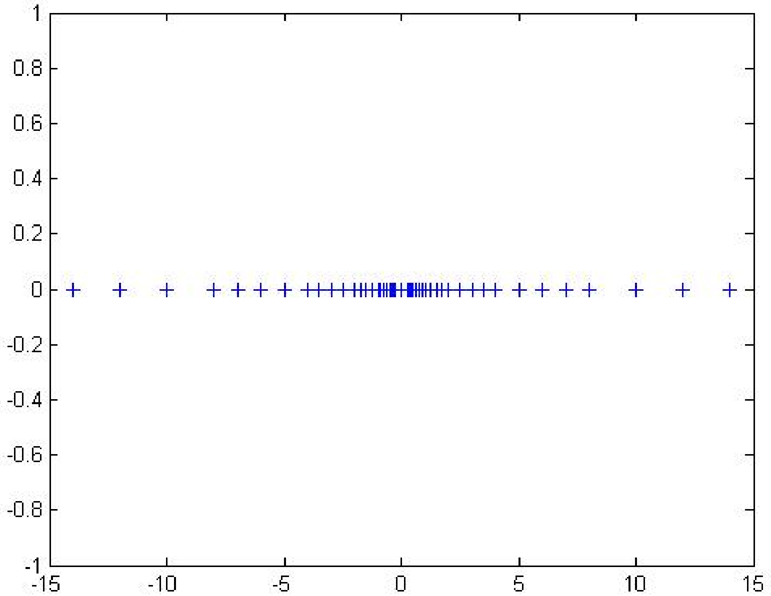
```
function arik31

x=[];

for i=1:0.25:1.75
    for j=-2:3
        x=[x i*2^j];   % zenbaki positibo guztiak
    end
end
x=[x -x 0];      % zenbaki guztiak, 0-a sartuta
x=sort(x);       % x ordenatzeko txikienetik handienera
```

```
n=length(x)      % x-ren dimentsioa
y=zeros(1,n);    % zeroz lerro-bektore bat osatzen da (abzisan jartzeko)
plot(x,y,'+')    % + ikurrarekin adieraziz marrazten da
end
```

Funtzio hori exekutatzen badugu, irudi hau lortuko dugu:




(b) Berreduren balioak txikiak direnean, distantziak ere txikiak dira. Baina berredurak handitzen diren neurrian distantziak ere handitu egiten dira.

33. (a) eta (b) ekuazioetarako $\sqrt{b^2-1} \approx -b$ denez, erroak adierazpen hauen bidez kalkulatuko ditugu:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{eta} \quad x_2 = \frac{-2c}{b-\sqrt{b^2-4ac}} \text{ edo } x_2 = \frac{c/a}{x_1}.$$

(c) ekuaziorako $\sqrt{b^2-1} \approx b$ denez, erroak adierazpen hauen bidez kalkulatuko ditugu:

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{eta} \quad x_1 = \frac{-2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}} \text{ edo } x_1 = \frac{c/a}{x_2}.$$

34. (a) $|(p+q+r)-(\widehat{p}+\widehat{q}+\widehat{r})| = \varepsilon_p+\varepsilon_q+\varepsilon_r$;

(b) $R_q = \varepsilon_q/q$ errore erlatiboa da. Orduan, $\widehat{q}/q \approx 1$ denean, zera dugu:

$$\left|\frac{1}{q}-\frac{1}{\widehat{q}}\right| = \left|\frac{1}{\widehat{q}+\varepsilon_q}-\frac{1}{\widehat{q}}\right| = \left|\frac{-\varepsilon_q}{\widehat{q}(\widehat{q}+\varepsilon_q)}\right| \approx \left|\frac{\varepsilon_q/q}{q}\right| = \frac{R_q}{|q|}.$$

Bestalde, hau da errore erlatiboa:

$$R_{1/q} = \frac{|1/q - 1/\widehat{q}|}{|1/q|} \approx \frac{R_q/|q|}{|1/q|} = R_q.$$

# 3. kapitulua

# Ekuazio ez-linealen ebazpena

Medikuntza-ikasketek baieztatu dute puenting-jauzilari batek bizkarrezurreko kalte garrantzitsu bat jasateko duen probabilitatea handitu egiten dela baldin erorketa libreko abiadura 36 m/s baino handiagoa bada, erorketa librean 4 s egon ondoren. Orduan, zure nagusiak nahi du puenting-enpresan zuk zehaztea zein masatarako gainditzen den irizpide hori, airearen erresistentzia-koefizientea 0.25 kg/m bada.

Zuk badakizu, aurreko ikasketen bidez, adierazpen hau erabil dezakegula denboraren menpeko erorketaren abiadura jakiteko:

$$v(t) = \sqrt{\frac{g \cdot m}{c_d}} \tanh\left(\sqrt{\frac{g \cdot c_d}{m}} t\right).$$

Ezin da bakandu $m$. Aukera bat da $m$ aurkitzeko funtzio berri honen *erroa* kalkulatzea:

$$f(m) = \sqrt{\frac{g \cdot m}{c_d}} \tanh\left(\sqrt{\frac{g \cdot c_d}{m}} t\right) - v(t). \tag{3.1}$$

Kapitulu honetan ikusiko dugu nola erabil dezakegun ordenagailua $f(x)$ funtzio baten erroak kalkulatzeko. Besteak beste, problemetan *bakartze-metodoak* landuko dira, bisekzio-metodoa eta regula-falsi metodoa Bolzanoren teoreman oinarritzen dira. Bisekzio-metodoak bi eragozpen nabari ditu, eta hauexek dira: bata, metodoa astiro hurbiltzen dela soluziorantz; eta, bestea, hurbildu bitartean alde batean utz ditzakeela hurbilketa onak. Metodo honek soluziorantz jotzen du, eta, horregatik, erabilgarria da hasierako estimazio bat asmatzeko, eta, jarraian, beste metodo eraginkorrago bat aplikatu ahal izateko. Metodo horrek huts egin dezake $p$ puntuan, baldin abszisa $y = f(x)$ kurbaren zuzen ukitzailea bada eta kurbak abszisa ez badu zeharkatzen.

Bestalde, *metodo irekiak* ditugu. Oinarrizko metodo bat puntu finkoaren metodoa da, haren konbergentzia-analisia egiten da. Zenbakizko metodoetan, Newtonen metodoa da erreferentziako metodo bat, bere konbergentzia koadratikoagatik baldintza batzuk betetzen direnean. Honela kalkulatzen da hurrengo iterazioa:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}.$$

Dagokion algoritmoan $f'(x)$ deribatua kalkulatu behar da. Baina, batzuetan, ezin da deribatua kalkulatu iterazioaren formulan ordezkatzeko; orduan, zenbakizko metodoak erabiliz zehaztu dezakegu malda. Hots, Newtonen metodoaren ordez *ebakitzailearen metodoa* erabiliko dugu. Kasu horietan, deribatua hurbil dezakegu adierazpen honen bitartez:

$$f'(p_k) \approx \frac{f(p_k) - f(p_{k-1})}{p_k - p_{k-1}},$$

eta, Newtonen ekuazioan ordezkatuz $k = n - 1$erako,

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})(p_{n-1} - p_{n-2})}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}. \tag{3.2}$$

Adierazpen horretan ikusten den bezala, hasierako bi puntu behar ditugu. Hau da, $p_0$ eta $p_1$ puntuek errotik nahiko hurbil egon behar dute (Newtonen metodoan bezala); $p_2$ izango da lortuko duguna 1. iterazioan. Newtonen metodoaren antzeko baldintzak betetzen badira, metodo horren konbergentzia superlineala da.

Ebakitzailearen metodoak aurreko bi puntu erabiltzen ditu puntu berri bat lortzeko. *Muller-en metodoan* hiru puntu erabiltzen dira. Demagun iterazioen hasieran $(p_0, f(p_0))$, $(p_1, f(p_1))$ eta $(p_2, f(p_2))$ hiru puntuak ditugula. Orduan, hiru puntu horietatik pasatzen den parabola bakarra eraikitzen dugu, eta, abszisa-ardatzarekin ebakitze-puntua kalkulatuz, hurrengo $p_3$ puntua izango dugu.

*Alderantzizko interpolazio koadratikoaren metodoan*, $x$-rekiko hurbilpen koadratikoa erabili beharrean, $y$-rekikoa erabiliko da. Hots, $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ eta $(c, f(c))$ hiru puntuak ezagutuz, alderantzizko funtzioarekin arituko gara; lortuko dugun polinomio koadratikoa $P(y)$ motakoa izango da, eta interpolazio-baldintza hauek erabiliz zehaztuko dugu:

$$a = P(f(a)), \quad b = P(f(b)), \quad c = P(f(c)).$$

Parabola honek beti ebakitzen du $x$ ardatza; hots, $y = 0$. Beraz, $x = P(0)$ hurrengo iterazioa izango da.

Azkenik, MATLABeko `fzero` funtzioa erabiltzen duen *zeroin algoritmoa* dugu.

## 3.1. Problemak

**Eskuz ebazteko problemak:**

1. $e^x - 3x = 0$ ekuazioak erro bat dauka $p \approx 0.61906129$ puntuan. Erabili bisekzio-metodoaren sei iterazio, erro hori aurkitzeko, $[0, 1]$ tartetik hasiz. Zenbat iterazio behar dira erroaren hurbilpena balioztatzeko lau zifra esanguratsurekin (hots, 0.6190 lortzeko)?

2. Bistakoa da $(x - 0.4)(x - 0.6) = x^2 - x + 0.24 = 0$ ekuazioak $x = 0.4$ eta $x = 0.6$ erroak dituela. Kontuan izan $[0, 1]$ tarteko muturrak ez direla onak bisekzioaren metodoa hasteko; zergatik? Funtzioaren marrazketa erabiliz, aurkitu erroen tarte egokiak bisekzio-metodoak erro bakoitzera jotzeko. Bestalde, $[0.5, 1]$ tartetik bisekzio-metodoaz bilaketa hasten badugu, zein da $|p - p_5|$ zehaztasunaren bornea bost iterazio igaro ondoren? Zein da benetako zehaztasuna, bost iterazio igaro ondoren?

3. Erabili bisekzioaren metodoa, ekuazio hauen erro positibo txikiena aurkitzeko:

   (a) $e^x - x - 2 = 0$,

   (b) $x^2 - e^x = 0$,

   (c) $\sin(x) - 2\cos(x) = 0$,

   (d) $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$,

   (e) $2e^{-x} - \sin x = 0$,

   (f) $3x^3 + 4x^2 - 8x - 1 = 0$.

   Kasu bakoitzean, aurkitu tarte egoki bat, eta, gero, kalkulatu erroaren hurbilpena % 0.5 zehaztasun erlatiboarekin. Lehen erabilitako tartearekin, kalkula ezazu *regula falsi* metodoaz erroaren hurbilpena % 0.5 zehaztasun erlatiboarekin. Zein metodok du konbergentzia azkarrena?

4. Izan bedi $f(x) = e^x - x^2 + 3x - 2$ funtzioa.

   (a) Aurkitu, konbergentzia-irizpidea erabiliz, iterazioen kopuru maximoa $f(x) = 0$ ekuazioa bisekzio-metodoaz ebazteko, $a = 0$ eta $b = 1$ hartuz, $\tau = 10^{-4}$ zehaztasun absolutuarekin.

   (b) Bisekzio-metodoa erabiliz, aurkitu $f(x) = 0$ ekuazioaren $p \in [0, 1]$ erroaren lehenengo hurbilpena, non $\dfrac{|p_n - p_{n-1}|}{|p_n|} < 10^{-2}$ edo $|f(p_n)| < 5.0 \times 10^{-2}$ betetzen baita.

   (c) *Regula falsi* metodoa erabiliz, aurkitu $f(x) = 0$ ekuazioaren $p \in [0, 1]$ erroaren lehenengo hurbilpena, non $\dfrac{|p_n - p_{n-1}|}{|p_n|} < 10^{-2}$ edo $|f(p_n)| < 5.0 \times 10^{-2}$ betetzen baita.

   (d) Zein metodok du konbergentzia azkarrena?

5. Izan bedi $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$ funtzioa.

   (a) Aurkitu, konbergentzia-irizpidea erabiliz, iterazioen kopuru maximoa $f(x) = 0$ ekuazioa bisekzio-metodoaz ebazteko, $a = 1$ eta $b = 2$ hartuz, $\tau = 10^{-4}$ zehaztasun absolutuarekin.

   (b) bisekzio-metodoa erabiliz, aurkitu $f(x) = 0$ ekuazioaren $p \in [1, 2]$ erroaren lehenengo hurbilpena, non $\dfrac{|p_n - p_{n-1}|}{|p_n|} < 5.0 \times 10^{-4}$ edo $|f(p_n)| < 10^{-4}$ betetzen baita.

   (c) *Regula falsi* metodoa erabiliz, aurkitu $f(x) = 0$ ekuazioaren $p \in [1, 2]$ erroaren lehenengo hurbilpena, non $\dfrac{|p_n - p_{n-1}|}{|p_n|} < 5.0 \times 10^{-4}$ edo $|f(p_n)| < 10^{-4}$ betetzen baita.

   (d) Zein metodok du konbergentzia azkarrena?

6. Zer gertatuko da bisekzio-metodoa erabiltzen badugu $f(x) = 1/(x - 2)$ funtzioarekin tarte hauetan: (a) $[3, 7]$ eta (b) $[1, 7]$.

7. Emandako tarteetan, aztertu funtzio hauek puntu finko bakar bat duten ala ez:

   (a) $F(x) = 1 - x^2/4, \quad [0, 1]$.

   (b) $F(x) = 2^{-x}, \quad [0, 1]$.

   (c) $F(x) = 1/x, \quad [0.5, 5.2]$.

   Aintzat hartu 4.5. adibidea.

8. Aztertu puntu finkoko iterazioaren konbergentzia, $F(x) = -4 + 4x - \dfrac{1}{2}x^2$ denean.

   (a) Ebatzi analitikoki $F(x) = x$, eta frogatu $p = 2$ eta $p = 4$ puntu finkoak direla.

   (b) Hartu $p_0 = 1.9$, eta kalkula itzazu $p_1$, $p_2$, $p_3$, eta balio horiei dagozkien zehaztasun absolutuak eta erlatiboak.

   (c) Hartu $p_0 = 3.8$, eta kalkula itzazu $p_1$, $p_2$, $p_3$, eta balio horiei dagozkien zehaztasun absolutuak eta erlatiboak.

   (d) 4.3. teorema erabiliz, zer ondoriozta daiteke?

9. Izan bedi $F(x) = x^2 + x - 4$. Orduan, erabil dezakegu puntu finkoko iterazioa $x = F(x)$ ekuazioaren erroak kalkulatzeko? Zergatik?

10. Puntu finkoaren metodoan, zergatik da abantaila $F'(p) \approx 0$ izatea?

11. Demagun $F, F' \in C(p - r_0, p + r_0)$, $r_0 > 0$, non $F(p) = p$, eta ez dela $n$ existitzen $F(p_n) = p$ betetzen duenik. Froga ezazu hau betetzen bada:

$$|F'(p)| > 1,$$

    $p$ puntu finko aldaragarria dela. Hots, $p_n$ iterazioa $p$-tik nahiko hurbil badago, $|p_{n+1} - p| > |p_n - p|$ dugula.

12. Demagun [20] testuliburuko 4.1. korolarioaren hipotesiak betetzen direla, $F'(p) = 0$, eta $F''(p)$ existitzen dela. Froga ezazu $r$ positibo bat existitzen dela, $r < r_0$, non $p_0 \in [p-r, p+r]$ betetzen bada, $p_n = F(p_{n-1})$ segidako gai guztiak $[p-r, p+r]$ tartean baitaude eta $\{p_n\} \to p$ konbergentzia koadratikoarekin. (*Iradokizuna*: erabili $F$-ren bigarren mailako Taylorren polinomioa $p$-ren ingurunean $F(p_n)$ hurbiltzeko).

13. Izan bedi $e^x - 3x^2 = 0$ ekuazioa; aurkitu $x = -0.5$ eta $x = 4$ puntuetatik gertuko erroak Newton-Raphson metodoaz, sei digituko zehaztasun erlatiboarekin (hots, $ze = 10^{-6}$ izanik).

14. Izan bedi $x^2 - x + 2 = 0$ ekuazioa.

    (a) Zehaztu Newton-Raphsonen $p_n = F(p_{n-1})$ iterazio-funtzioa.

    (b) Hasi $p_0 = -1.5$ puntutik, eta aurkitu $p_1,\ p_2$ eta $p_3$.

    (c) Zein da $|f(p_3)|$ errorea $p_3$ puntuan?

    (d) Zergatik gertatzen da hori?

15. Izan bedi $x^2 - x - 3 = 0$ ekuazioa.

    (a) Zehaztu Newton-Raphsonen $p_n = F(p_{n-1})$ iterazio-funtzioa.

    (b) Hasi $p_0 = 1.6$ puntutik, eta aurkitu $p_1,\ p_2,\ p_3$ eta $p_4$.

    (c) Zein da $|f(p_4)|$ errorea $p_4$ puntuan?

16. Izan bedi $(x-2)^4 = 0$ ekuazioa.

    (a) Zehaztu Newton-Raphsonen formulako $p_n = F(p_{n-1})$ iterazio-funtzioa.

    (b) Hasi $p_0 = 2.1$ puntutik, eta aurkitu $p_1,\ p_2,\ p_3$ eta $p_4$.

    (c) Zein da $|f(p_4)|$ errorea $p_4$ puntuan?

    (d) Aztertu $\{p_n\}$ segidaren konbergentzia-ordena.

17. Izan bedi $x^3 - 3x - 2 = 0$ ekuazioa.

    (a) Zehaztu Newton-Raphsonen formulako $p_n = F(p_{n-1})$ iterazio-funtzioa.

    (b) Hasi $p_0 = 2.1$ puntutik, eta aurkitu $p_1,\ p_2,\ p_3$ eta $p_4$.

    (c) Zein da $|f(p_4)|$ errorea $p_4$ puntuan?

    (d) Aztertu $\{p_n\}$ segidaren konbergentzia-ordena.

18. Izan bedi $xe^{-x} = 0$ ekuazioa.

    (a) Zehaztu Newton-Raphsonen formulako $p_n = F(p_{n-1})$ iterazio-funtzioa.

    (b) Hasi $p_0 = 0.2$ puntutik, eta aurkitu $p_1,\ p_2,\ p_3$ eta $p_4$. Zein da $|f(p_4)|$ errorea $p_4$ puntuan? Zein da $\lim_{n\to\infty} p_n$? Zein da zehaztasun absolutua $p_4$ puntuan?

    (c) Hasi $p_0 = 20$ puntutik, eta aurkitu $p_1,\ p_2,\ p_3$ eta $p_4$. Zein da $|f(p_4)|$ errorea $p_4$ puntuan? Zein da $\lim_{n\to\infty} p_n$? Zein da zehaztasun absolutua $p_4$ puntuan?

(d) Azaldu zer gertatzen den (b) eta (c) kasuetan.

19. Ebakitzailearen metodoa erabiliz, aurki itzazu ekuazio hauen $p_2$ eta $p_3$ hurbilpenak, emandako hastapen-puntuetatik hasiz:

    (a) $x^2 - 2x - 1 = 0$, non $p_0 = 2.6$ eta $p_1 = 2.5$.

    (b) $x^2 - x - 3 = 0$, non $p_0 = 1.7$ eta $p_1 = 1.67$.

    (c) $x^2 - 2x - 1 = 0$, non $p_0 = -1.5$ eta $p_1 = -1.52$.

20. Erabil dezakegu Newton-Raphsonen metodoa $x^2 - 14x + 50 = 0$ ebazteko? Zergatik?

21. Erabil dezakegu Newton-Raphsonen metodoa $x^{1/3} = 0$ ebazteko? Zergatik?

22. Erabil dezakegu Newton-Raphsonen metodoa $(x - 3)^{1/2} = 0$ ebazteko, $p_0 = 4$ hartuz? Zergatik?

23. Erabili Mullerren metodoa $x^3 - x - 2 = 0$ ekuazioaren erro bat hurbiltzeko. Hasi $p_0 = 1.0$, $p_1 = 1.2$ eta $p_2 = 1.4$ puntuetatik, eta kalkula itzazu $p_3$ eta $p_4$. Zein da $|f(p_4)|$ errorea $p_4$ puntuan?

24. Erabili Mullerren metodoa $4x^2 - e^x = 0$ ekuazioaren erro bat hurbiltzeko. Hasi $p_0 = 4.0$, $p_1 = 4.1$ eta $p_2 = 4.2$ puntuetatik, eta kalkula itzazu $p_3$ eta $p_4$. Zein da $|f(p_4)|$ errorea $p_4$ puntuan?

25. Izan bedi $xe^{0.5x} + 1.2x - 5 = 0$ ekuazioa. $f(x) = xe^{0.5x} + 1.2x - 5$ funtzioa marrazten badugu, $x = 1$ eta $x = 2$ artean erro bat dagoela ikusten dugu. Ekuazio hori $x = F(x)$ era desberdinetan berridatz dezakegu. Honako hiru aukera hauetatik, zein da zure aburuz egokiena? Eman arrazoia funtzioen deribatuak aztertuz:

    (a) $x = \dfrac{5 - xe^{0.5x}}{1.2}$;

    (b) $x = \dfrac{5}{e^{0.5x} + 1.2}$;

    (c) $x = \dfrac{5 - 1.2x}{e^{0.5x}}$.

**MATLABez ebazteko problemak:**

26. Metodo grafikoa erabiliz, bakartu tarteetan funtzio hauen erroak:

    (a) $f(x) = \sin(x) + 0.8\cos(x)$.

    (b) $f(x) = x^2 - 4x + 3.5 - \ln(x)$.

    (c) $f(x) = (x - 2.1)^2 - 7x\cos(x)$.

    Egiaztatu analitikoki tarte bakoitzean erro bat dagoela (hots, Bolzanoren teorema erabiliz).

27. Inplementatu bisekzio-metodoa honelako MATLABeko funtzio bat garatuz:

    (a) Lehenengo lerroa honela izan behar:
    `function [p,z,e,i]=bisekzioa(f,a,b,ztol,etol,imax)`

    (b) Sarrerak: `f`= funtzioa, `a,b`= funtzio horrek erro bat duen tarte bat, `ztol`= zehaztasunaren tolerantzia, `etol`= errorearen tolerantzia, eta `imax`= iterazio kopuru maximoa.

    (c) Irteerak: `p`= erroaren azken hurbilpena tolerantzia horiekin, `i`= erabilitako iterazio kopurua, `z`= zehaztasun absolutua, eta `e`= errorea azken iterazioan.

    (d) MATLABeko funtzio horrek, datu horiek emateaz gain, ondo eraikitako (formatu egokiak erabiliz) taula bat sortu behar du zutabe desberdinak erabiliz era honetan:

    $i \quad a_i \quad b_i \quad p_i \quad z_i \quad e_i$

    $i$ iterazio bakoitzerako, $a_i$ eta $b_i$ zutabe horietan agertu behar dira erroa daukan tartearen muturrak, $p_i = (a_i + b_i)/2$ hurbilpen berria, $z_i = |p_i - p_{i-1}|$ zehaztasun absolutua eta $e_i = |f(p_i)|$ errorea.

    (e) Egiaztatu kode hori ondo dabilela, zuk aukeratuz ekuazio egoki bat non soluzio zehatza aurrez ezagutzen baituzu eta bisekzio-metodoaren urrats batzuk eginda baitauzkazu. Aukera itzazu tarte egoki bat, iterazio kopuru maximoa, eta zehaztasunaren eta errorearen tolerantziak.

28. Bisekzio-metodoaren kodea erabiliz, ebatzi 26. problema.

    (i) Kalkulatu erroa $10^{-4}$ errore-tolerantziarekin, $10^{-4}$ zehaztasun erlatiboarekin, eta gehienez 100 iterazio erabiliz.

    (ii) Kalkula ezazu, arkatzez, kasu bakoitzean zenbat iterazio beharko dituen gehienez metodoak, zehaztasun absolutua $10^{-6}$ izateko. Orain, MATLABen bidez, kalkulatu metodoak erabiltzen duen benetako iterazio kopurua zehaztasun hori lortzeko. Horretarako, hartu `etol` oso txikia (esate baterako, $10^{-10}$).

29. Zure kodean zati batzuk aldatuz, lortu `regula_falsi.m` fitxategi-kode bat; metodo honetan, erroaren hurbilpen berria ez da lortzen $p_i = (a_i + b_i)/2$ eginez, honela baizik:

$$p_i = b_i - f(b_i)\frac{b_i - a_i}{f(b_i) - f(a_i)}.$$

    (i) Ebatzi 26. problemako ekuazioak M fitxategi berri hau erabiliz, eta $10^{-4}$ errore-tolerantziarekin, $10^{-4}$ zehaztasun erlatiboarekin, eta gehienez 100 iterazio erabiliz.

    (ii) Zein du konbergentzia azkarrena? Bisekzioarena edo regula falsirena?

    (iii) Orain, MATLABen bidez, kalkulatu metodoak erabiltzen duen benetako iterazio kopurua zehaztasun absolutua $10^{-6}$ izateko. Horretarako, hartu `etol` oso txikia (esate baterako, $10^{-10}$). Konparatu 28. problemako (ii) atalean lortutako emaitzarekin. Ondorioren bat atera dezakezu?

30. `newton.m` fitxategia lortzeko, inplementa ezazu Newtonen metodoa ([20]testuliburuko 4.1. algoritmoa) honelako MATLABeko funtzio bat garatuz:

    (a) Lehenengo lerroa honela izan behar:
    `function [p,ze,e,i]=newton(f,df,p0,zetol,etol,imax)`

    (b) Sarrerak: `f`= funtzioa, `df`= funtzioaren deribatua, `p0`= hasierako puntua, `zetol`= zehaztasun erlatiboaren tolerantzia, `etol`= errorearen tolerantzia eta `imax`= iterazio kopuru maximoa.

    (c) Irteerak: `p`= erroaren hurbilpen hoberena tolerantzia horiekin, `i`= iterazio kopurua, `ze`= zehaztasun erlatiboa eta `e`= errorea.

    (d) MATLABeko funtzio horrek, datu horiek emateaz gain, ondo eraikitako (formatu egokiak erabiliz) taula bat sortu behar du zutabe desberdinak erabiliz era honetan:

    $i \qquad p_i \qquad ze_i \qquad e_i$

    $i$ iterazio bakoitzerako, $p_i$ hurbilpenak, $ze_i = |p_i - p_{i-1}|/|p_i|$ zehaztasun erlatiboa eta $e_i = |f(p_i)|$ errorea.

    (e) Egiaztatu kode hori ondo dabilela, zuk aukeratuz ekuazio egoki bat non soluzio zehatza aurrez ezagutzen baituzu eta Newtonen metodoaren urrats batzuk eginda baitauzkazu. Aukera itzazu hasierako puntu egoki bat, iterazio kopuru maximoa, eta zehaztasunaren eta errorearen tolerantziak.

31. Aurreko ariketa egin ondoren, ebatzi ekuazio hauek hasierako puntuetatik abiatuz eta Newton-en metodoa erabiliz:

    (a) $f(x) = 2^{-x} - x = 0$, non $p_0 = 1$.

    (b) $f(x) = x^2 - 4x + 3.5 - \ln(x) = 0$, non $p_0 = 1$.

    (c) $f(x) = (x - 2.1)^2 - 7x\cos(x) = 0$, non $p_0 = 1.5$.

    (i) Kalkulu hauek egiteko, erabili lehenengo ariketako `newton.m` fitxategia.

    (ii) Kalkulatu erroa ekuazio bakoitzean $10^{-6}$ errore-tolerantziarekin, $10^{-6}$ zehaztasun erlatiboarekin, eta gehienez 100 iterazio erabiliz.

32. Newtonen metodoari dagokion inplementazioa adibide moduan hartuz, inplementa ezazu ebakitzailearen metodoa; ikus ezazu [20] testuliburuko 4.2. algoritmoaren sasikodea. Ebatzi:

    (a) $f(x) = 2^{-x} - x = 0,\ p_0 = 1, p_1 = 1.5$.

    (b) $f(x) = x^2 - 4x - 3.5 - \log(x) = 0,\ p_0 = 1, p_1 = 1.5$.

    (c) $f(x) = (x - 2.1)^2 - 7x\cos(x) = 0,\ p_0 = 1.5, p_1 = 2$.

    Konparatu emaitza horiek MATLABeko `fzero.m` funtzioaz lortutakoekin.

33. (a) Garatu sasikode bat puntu finkoaren metodorako, gai dena $x = F(x)$ ekuazioa ebazteko.

(b) Inplementatu sasikode hori MATLABeko `fpuntufinko.m` fitxategi berri bat bezala.

(c) Ebatzi $x = F(x) = 2^{-x}$ ekuazioa, $p_0 = 1$ puntutik hasiz. Zer gertatzen da? Zergatik?

34. Garatu [20] testuliburuko 4.3.5. ataleko Mullerren metodoaren sasikode bat, eta, gero, inplementatu MATLABeko M fitxategi batean, non sartutako balioak `f,p0,p1,p2,etol,` `zetol,imax` baitira, eta ateratzen diren balioak `p,ze,e,i` (ikus ezazu 30. problemako (b) eta (c) ataletan parametro horien esanahia). Kontuan hartu $\sqrt{b^2 - 4ac}$ zenbaki konplexua izan daitekeela, eta zein erro gorde behar dugun.

35. Erabili Mullerren metodoa $p_0 = 1.5$, $p_1 = 1.4$ eta $p_2 = 1.3$ hasierako balioak $f(x) = 1 + 2x - \tan(x)$ funtzioaren erro baten hurbilpena lortzeko, `etol`$=10^{-8}$ errorearen tolerantziarekin, `zetol`$=10^{-12}$ zehaztasun erlatiboarekin, eta `imax`$=50$ iterazio kopuru maximoarekin.

36. Konparatu Newtonen, ebakitzailearen eta Mulleren metodoen konbergentzia aurreko problemaren funtziorako, Newtonen metodorako $p_0 = 1.5$ hartuz, eta ebakitzailearen metodorako $p_0 = 1.5$ eta $p_1 = 1.4$. Hartu aurreko problemako balio berdinak `etol`, `zetol` eta `imax` parametroetarako.

## 3.2. Problema batzuen ebazpena

1. [20] testuliburuko 4.1. konbergentziaren teorema kontuan hartuz, zera bete behar da:

$$\varepsilon_n = |p - p_n| \leq \frac{|b-a|}{2^n} \leq 10^{-4}.$$

Beraz,

$$\frac{|1-0|}{2^n} \leq 10^{-4} \;\Rightarrow\; n \geq 4/\log_{10} 2 = 4/030103 = 13.288\ldots \Rightarrow n \geq 14.$$

3. (a) Bisekzio-metodoaz: $a_1 = 0$ eta $b_1 = 2$ balioen tartean eta $f(x) = e^x - x - 2$ funtziorako, honela lortuko dugu erro bat:

| $n$ | $a_n$ | $b_n$ | $p_n$ | *zeh.erl.* |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 2 | 1 | 1.00000 |
| 2 | 1 | 2 | 1.5 | 0.33333 |
| 3 | 1 | 1.5 | 1.25 | 0.20000 |
| 4 | 1 | 1.25 | 1.125 | 0.11111 |
| 5 | 1.125 | 1.25 | 1.1875 | 0.052632 |
| 6 | 1.125 | 1.1875 | 1.1562 | 0.027027 |
| 7 | 1.125 | 1.1562 | 1.1406 | 0.013699 |
| 8 | 1.1406 | 1.1562 | 1.1484 | 0.0068027 |
| 9 | 1.1406 | 1.1484 | 1.1445 | 0.0034130 |

Beraz, bisekzio-metodorako $p_b = 1.1445$, $i_b = 9$ dugu.

Bestalde, regula falsi metodoaz hau lortzen da:

| $n$ | $a_n$ | $b_n$ | $p_n$ | *zeh.erl.* |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 2 | 0.45568 | $\infty$ |
| 2 | 0.45568 | 2.00000 | 0.77357 | 0.69762 |
| 3 | 0.77357 | 2.00000 | 0.95962 | 0.24052 |
| 4 | 0.95962 | 2.00000 | 1.05673 | 0.10120 |
| 5 | 1.05673 | 2.00000 | 1.10425 | 0.04496 |
| 6 | 1.10425 | 2.00000 | 1.12674 | 0.02037 |
| 7 | 1.12674 | 2.00000 | 1.13722 | 0.00930 |
| 8 | 1.13722 | 2.00000 | 1.14206 | 0.00426 |

Ondorioz, regula falsi metodoaz $p_{rf} = 1.1421$, $i_{rf} = 8$ dugu.

Beraz, ia konbergentzia azkartasun berdina izan dute. Regula falsirena pixka bat azkarragoa izan da kasu honetan, $i_{rf} < i_b$.

5. (a) $|b - a|/2^n < 10^{-4}$, beraz: $n = 14$;

   (b) Bisekzio-metodoaren bitartez, zera dugu:

| $n$ | $a_n$ | $b_n$ | $p_n$ | *zeh.erl.* | *errorea* |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.00000 | 2.00000 | 1.50000 | 0.50000 | 5.06250 |
| 2 | 1.00000 | 1.50000 | 1.25000 | 0.16667 | 1.31641 |
| 3 | 1.00000 | 1.25000 | 1.12500 | 0.10000 | 0.00806 |
| 4 | 1.00000 | 1.12500 | 1.06250 | 0.05556 | 0.53026 |
| 5 | 1.06250 | 1.12500 | 1.09375 | 0.02941 | 0.27006 |
| 6 | 1.09375 | 1.12500 | 1.10938 | 0.01429 | 0.13329 |
| 7 | 1.10938 | 1.12500 | 1.11719 | 0.00704 | 0.06320 |
| 8 | 1.11719 | 1.12500 | 1.12109 | 0.00350 | 0.02772 |
| 9 | 1.12109 | 1.12500 | 1.12305 | 0.00174 | 0.00987 |
| 10 | 1.12305 | 1.12500 | 1.12402 | 0.00087 | 0.00091 |
| 11 | 1.12402 | 1.12500 | 1.12451 | 0.00043 | 0.00357 |
| 12 | 1.12402 | 1.12451 | 1.12427 | 0.00022 | 0.00133 |
| 13 | 1.12402 | 1.12427 | 1.12415 | 0.00011 | 0.00021 |

   Ondorioz, $p_b = 1.12415$, $i_b = 13$; $|f(p_b)| = 0.00021$; $ze = 0.00011$ (ze=zehaztasun erlatiboa);

   (c) Regula falsi metodoaz hau lortzen da:

| $n$ | $a_n$ | $b_n$ | $p_n$ | *zeh.erl.* | *errorea* |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.00000 | 2.00000 | 1.05000 | 0.05000 | 0.62949 |
| 2 | 1.05000 | 2.00000 | 1.08047 | 0.02901 | 0.38282 |
| 3 | 1.08047 | 2.00000 | 1.09863 | 0.01681 | 0.22786 |
| 4 | 1.09863 | 2.00000 | 1.10931 | 0.00972 | 0.13389 |
| 5 | 1.10931 | 2.00000 | 1.11554 | 0.00562 | 0.07807 |
| 6 | 1.11554 | 2.00000 | 1.11916 | 0.00324 | 0.04532 |
| 7 | 1.11916 | 2.00000 | 1.12126 | 0.00187 | 0.02624 |
| 8 | 1.12126 | 2.00000 | 1.12247 | 0.00108 | 0.01517 |
| 9 | 1.12247 | 2.00000 | 1.12317 | 0.00062 | 0.00876 |
| 10 | 1.12317 | 2.00000 | 1.12357 | 0.00036 | 0.00506 |

Beraz, $p_{rf} = 1.12357$, $i_{rf} = 10$; $|f(p_b)| = 0.00506$; $ze = 0.00036$.

(d) Azkarrena regula falsi metodoa izan da, $i_{rf} < i_b$.

7. (a) Puntu finko bat du $(0,1)$ tartean, $F([0,1]) = [3/4, 1] \subset [0,1]$ baita.

   Puntu finko bakarra da, zeren $|F'(x)| < 1 \quad \forall x \in [-2,2]$ eta $[0,1] \subset [-2,2]$ baititugu.

9. $x = -2$ eta $x = 2$ erroak dira, eta $|F'(-2)| > 1$, $|F'(2)| > 1$ direnez, bi erro horiek ez dira puntu erakargarriak; ondorioz, ezin ditugu kalkulatu puntu finkoaren metodoa erabiliz.

13. $p_0 = -0.50$ **bada**, Newton-Rapshonen metodorako $f(x) = e^x - 3x^2$ eta $f'(x) = e^x - 6x$ denez, zera lortzen dugu:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{e^{p_{n-1}} - 6p_{n-1}}{e^{p_{n-1}} - 3p_{n-1}^2},$$

beraz:

| $n$ | $p_n$ | *zeh.erl.* | *errorea* |
|---|---|---|---|
| 0 | -0.500000 | 1.000001 | 0.143469 |
| 1 | -0.460220 | 0.086438 | 0.004261 |
| 2 | -0.458964 | 0.002737 | 0.000004 |
| 3 | -0.458962 | 0.000003 | 0.000000 |
| 4 | -0.458962 | **0.000000** | 0.000000 |

Ondorioz, $p^* \approx p_4 = -0.458962$, 4 iterazio erabiliz, eta $ze = 2.7 \cdot 10^{-12}$ izanik.

$p_0 = 4$ **bada**,

| $n$ | $p_n$ | *zeh.erl.* | *errorea* |
|---|---|---|---|
| 0 | 4.000000 | 1.000001 | 6.598150 |
| 1 | 3.784361 | 0.056982 | 1.043379 |
| 2 | 3.735379 | 0.013113 | 0.044743 |
| 3 | 3.733084 | 0.000615 | 0.000095 |
| 4 | 3.733079 | 0.000001 | 0.000000 |
| 5 | 3.733079 | 0.000000 | 0.000000 |

Ondorioz, $p^* \approx p_5 = 3.733079$, $i = 5$ iterazio erabiliz, eta $ze = 5.86 \cdot 10^{-12}$ izanik.

15. (a) $p_n = \dfrac{p_{n-1}^2 + 3}{2p_{n-1} - 1}$.

(b) $p_0 = 1.6$ bada,

| $n$ | $p_n$ | *zeh.erl.* | *errorea* |
|---|---|---|---|
| 0 | 1.600000 | 1.000001 | 2.040000 |
| 1 | 2.527273 | 0.366906 | 0.859835 |
| 2 | 2.315206 | 0.091597 | 0.044972 |
| 3 | 2.302818 | 0.005379 | 0.000153 |
| 4 | 2.302776 | 0.000018 | 0.000000 |

Ondorioz, $p_1 = 2.527273$, $p_2 = 2.315206$, $p_3 = 2.302818$, $p_4 = 2.302776$.

(c) $|f(p_3)| = 1.8 \cdot 10^{-9}$.

17. (a) Newton-Rapshonen metodorako $f(x) = x^3 - 3x - 2$ eta $f'(x) = 3x^2 - 3$ denez, zera lortzen dugu:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^3 - 3p_{n-1} - 2}{3p_{n-1}^2 - 3} = \frac{2p_{n-1}^3 + 2}{3p_{n-1}^2 - 3}$$

(b) $p_0 = 2.1$ denez, hau dugu:

| $n$ | $p_n$ | *zeh.erl.* | *errorea* |
|---|---|---|---|
| 0 | 2.100000 | 1.000001 | 0.961000 |
| 1 | 2.006061 | 0.046828 | 0.054766 |
| 2 | 2.000024 | 0.003018 | 0.000219 |
| 3 | 2.000000 | 0.000012 | 0.000000 |
| 4 | 2.000000 | 0.000000 | 0.000000 |

Ondorioz, $p_1 = 2.006061$, $p_2 = 2.000024$, $p_3 = 2.000000$, $p_4 = 2.000000$.

(c) $|f(p_4)| = 0$.

(d) $n \to \infty$ denean $p_n \to 2$ dugunez, konbergentziaren ordena aztertzeko, limite hau kalkulatuko dugu:

$$\begin{aligned}
\lim_{p_n \to 2} \left| \frac{p_{n+1} - 2}{p_n - 2} \right| &= \lim_{p_n \to 2} \left| \frac{\dfrac{2p_n^3 + 2}{3p_n^2 - 3} - 2}{p_n - 2} \right| \\
&= \lim_{p_n \to 2} \left| \frac{2p_n^3 - 6p_n^2 + 8}{3(p_n^2 - 1)(p_n - 2)} \right| \\
&= \lim_{p_n \to 2} \left| \frac{2p_n^2 - 2p_n - 4}{3(p_n^2 - 1)} \right| = 0.
\end{aligned}$$

Beraz, konbergentzia superlineala da gutxienez.

Orain aztertuko dugu koadratikoa den ala ez. Hori dela eta, limite hau kalkulatuko dugu:

$$\begin{aligned}\lim_{p_n\to 2}\left|\frac{p_{n+1}-2}{(p_n-2)^2}\right| &= \lim_{p_n\to 2}\left|\frac{2p_n^3-6p_n^2+8}{3(p_n^2-1)(p_n-2)^2}\right| \\ &= \lim_{p_n\to 2}\left|\frac{2(p_n-2)^2(p_n+1)}{3(p_n^2-1)(p_n-2)^2}\right| \\ &= \lim_{p_n\to 2}\left|\frac{2(p_n+1)}{3(p_n^2-1)}\right| = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Ondorioz, Newton-Rapshonen algoritmoak konbergentzia koadratikoa du $p_n \to 2$ kasuan. Edonola ere, konbergentzia koadratikoaz konturatzeko, nahiko izaten da goiko taulan nabaritzea zehaztasunaren zutabean komaren eskuinaldeko zeroen kopurua bikoiztu egiten dela iterazio bakoitzean.

19. (a) $x^2-2x-1=0$ ekuazioa ebazteko, ebakitzailearen metodoa erabiliko dugu $p_0=2.6$ eta $p_1=2.5$ hartuz. $p_2$ eta $p_3$ hurbilpenak kalkulatuko ditugu adierazpen hau erabiliz:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})(p_{n-1}-p_{n-2})}{f(p_{n-1})-f(p_{n-2})}$$

Hori kontuan hartuz, hau lortzen da bi iterazioetan:

| $n$ | $p_{n-1}$ | $p_n$ | $p_{n+1}$ | *zeh.erl.* | *errorea* |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2.600000 | 2.500000 | 1.829268 | 0.516954 | 0.421333 |
| 2 | 2.500000 | 1.829268 | 1.673993 | 0.128259 | 0.493435 |

Ondorioz, $p_2 = 1.829268$ eta $p_3 = 1.673993$.

20. Ez, ekuazioak ez baitu erro errealik.

21. $f(x)=x^3-x-2$, $a=p_0=1.0$, $b=p_1=1.2$, $c=p_2=1.4$ direnez, Mullerren metodoaz hau egiten da:

 1. iterazioan zera kalkulatzen da:

 $c = f(p_2)$,

 $a = \dfrac{e_0h_1-e_1h_0}{h_1h_0^2-h_0h_1^2}$, eta

 $b = \dfrac{e_0h_0^2-e_1h_1^2}{h_1h_0^2-h_0h_1^2}$, non $h_0 = p_0 - p_2$, $h_1 = p_1 - p_2$, $e_0 = f(p_0) - c$ eta $e_1 = f(p_1) - c$.

Hortik,

$$z = \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}},$$

non aukeratzen den zeinua $|z|$-ri balio txikiena ematen diona baita. Gero, $p_3 = p_2 + z$ izango da.

2. iterazioan era antzeko batean jokatzen da, $p_0, p_1, p_2$ balioen ordez $p_1, p_2, p_3$ balioak erabiliz.

Horrela jokatuz, hau lortzen da:

| $n$ | $p_{n-1}$ | $p_n$ | $p_{n+1}$ | $z$ | $p_{n+2}$ | $zeh.erl.$ | $errorea$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.000000 | 1.200000 | 1.400000 | 0.124956 | 1.524956 | 0.081941 | 0.021316 |
| 2 | 1.200000 | 1.400000 | 1.524956 | -0.003600 | 1.521356 | 0.002366 | 0.000140 |

$p_3 = 1.524956$ eta $p_4 = 1.521356$. Errorea $|f(p_4)| = 1.40 \cdot 10^{-4}$ da.

# 4. kapitulua

# Sistema linealak: metodo zuzenak eta iteratiboak

Bi (edo hiru) ekuazio eta bi (edo hiru) ezezagun dituen sistema bat ebaztea eskuz egin dezakegu, ordezkapenaz edo beste metodo bat erabiliz (esate baterako, Cramer-en metodoa). Sistema bat horrela ebaztea, praktikan, ezinezko bihurtzen da ekuazioen eta ezezagunen kopurua handiagoa denean.

Jo dezagun sistema lineal bat:

$$\begin{array}{lcr}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
a_{m-1,1}x_1 + a_{m-1,2}x_2 + \ldots + a_{m-1,n-1}x_{n-1} + a_{m-1,n}x_n & = & b_{n-1} \\
a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n-1}x_{n-1} + a_{mn}x_n & = & b_n.
\end{array}$$

Notazio matrizialarekin, honela idatz daiteke ekuazio linealen sistema hori:

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b},$$

non

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Askotan, ekuazioen eta ezezagunen kopurua berdina ($m = n$) eta handia da, $n$ ordenako $\boldsymbol{A}$ matrize karratua ezaguna da, eta $n$ dimentsioko $\boldsymbol{b}$ zutabe-bektorea ere bai, eta $\boldsymbol{x}$ ezezagun zutabe-bektorea $n$ dimentsiokoa da.

Jakin badakigu $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$-ren soluzioa $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ idatz daitekeela, non $\boldsymbol{A}^{-1}$ matrizea $\boldsymbol{A}$-ren alderantzizkoa baita. Hala ere, konputazio praktikako problema gehienetan, ez da beharrezkoa, ezta gomendagarri ere, $\boldsymbol{A}^{-1}$ kalkulatzea. Adibide erakusgarri moduan, ekuazio bateko eta ezezagun bateko ekuazio hau hartuko dugu:

$$7x = 21.$$

Sistema hori ebazteko modu hoberena zatiketa da:

$$x = \frac{21}{7} = 3.$$

Alderantzizko matrizea erabiltzeak honetara eramaten gaitu:

$$x = 7^{-1} \times 21 = 0.142857 \times 21 = 2.99997.$$

Alderantzizkoak aritmetika gehiago behar du (zatiketa bat eta biderketa bat, zatiketa bat bakarrik izan beharrean), eta emaitzaren zehaztasuna txikiagoa da. Antzeko zerbait gertatzen da sistema handiagoetan. Ondorioz, ekuazio-sistemen ebazpen zuzenean zentratuko gara, alderantzizkoaren kalkulua egin beharrean.

Aplikazio askotan sistema linealak ebatzi behar dira era eraginkor batean. Berez, sistema linealen ebazpena da ordenagailuek gehien duten eginbeharra, prozesu askotan bitarteko urrats batean ekuazio-sistema linealen ebazpena eskatzen baitute. Ondorioz, gaur egun ere, helburu interesgarria da ikertzaileentzat sistemak ebazteko metodo ahalik eta eraginkorrenak sortzea.

Kapitulu honetan, metodo zuzenak (*LU* metodoa edo Choleskyren metodoa bezalakoak) landuko dira. Sistema lineal bat ebaztean zenbakizko baldintzak sor ditzakeen arazoak ere aztertuko ditugu. Azkenik, metodo iteratiboak eta haien konbergentzia jorratuko dira.

*LU* eta Choleskyren faktorizazioa *metodo zuzenak* dira; izan ere, ez balira egongo biribiltze-erroreak, ikusi dugun bezala, urratsen kopuru finitu batean soluzio zehatzera helduko lirateke. Baina, sistemaren matrizea eskasa bada (hots, gaien ehuneko handi bat zeroak direnean), Gaussen metodoak zeroak hondatzen ditu (hots, ez-zero bihurtzen ditu). Edonola ere, matrizearen egitura hori eskasa denean, badaude estrategia egokiak esplotatzeko; ikus [10, 13]. MATLABeko `nnz(A)` funtzioak $\boldsymbol{A}$ matrizean zero ez diren gaien kopurua zenbatzen du.

*Metodo iteratiboak* egokiak dira matrizearen egitura aprobetxatuz eragiketa gutxiago egiteko eta ordenagailuaren memoria gutxiago erabiltzeko, eta hori oso interesgarria da sistema oso handia denean, deribatu partzialetako ekuazioen sistemetan bezala.

## 4.1. Problemak

**Eskuz ebazteko problemak:**

1. Faktorizatu matrize hauek $LU$ deskonposizioaren bidez eta pibotatze partziala erabiliz:

*a)* $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$. *b)* $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$.

*c)* $\begin{bmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$. *d)* $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

*e)* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$. *f)* $\begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & -3 \\ 1 & 4 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Zein dira matrize horien bat-norma eta infinitu-norma?

Aurkitu matrize horien baldintzazko zenbakiak bi norma horietarako (hots, $\kappa_1$ eta $\kappa_\infty$).

2. Ebatzi sistema lineal hauek $LU$ deskonposizioaren bidez eta pibotatze partziala erabiliz:

*a)*
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 5 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 10 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 &= -4. \end{aligned}$$

*b)*
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 &= 7 \\ 8x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 5x_4 &= 17 \\ 6x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 8x_4 &= 15. \end{aligned}$$

*c)*
$$\begin{aligned} -5x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_3 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 &= 2. \end{aligned}$$

*d)*
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 4. \end{aligned}$$

*e)*
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 4x_4 &= 5 \\ 2x_1 - 1x_2 + 5x_3 &= -6 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \\ -3x_1 + 2x_3 + 6x_4 &= 4. \end{aligned}$$

*f)*
$$\begin{aligned} 4x_1 + 8x_2 + 4x_3 &= 8 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= -4 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 10 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_4 &= -4. \end{aligned}$$

Kalkula ezazu sistema guztietarako $\kappa(A)_\infty$-ren behe-borne bat.

3. Izan bedi $\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{b}$ sistema, non $\boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrize goi-triangeluarra eta $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ baitira. Zenbat eragiketa aritmetiko behar ditugu sistema hori ebazteko?

4. (a) Izan bedi $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrizea. Zenbat biderketa/zatiketa behar ditu pibotatzerik gabeko $LU$ deskonposizioak? (*Iradokizuna*: $1^2+2^2+\ldots+m^2 = m(m+1)(2m+1)/6$ berdintza erabili, zeina indukzioz froga baitaiteke).
   (b) Zenbat biderketa/zatiketa behar ditu aurreranzko ordezkapenak? Eta atzeranzko ordezkapenak?
   (c) Sistema lineal bat pibotatzerik gabeko $LU$ metodoaz ebazteko, zenbat biderketa/zatiketa egin behar ditugu?

5. (a) Izan bedi $\boldsymbol{U}$ matrize ez-singular goi-triangeluarra. Frogatu $\boldsymbol{U}^{-1}$-en diagonaleko gaiak $\boldsymbol{U}$-ren diagonaleko gaien erreziprokoak direla.
   (b) Aurreko atalaren emaitza erabiliz, frogatu hau betetzen dela:

$$\|\boldsymbol{U}\|_\infty \geq \max_i |u_{ii}| \quad \text{eta} \quad \|\boldsymbol{U}^{-1}\|_\infty \geq \frac{1}{\min_i |u_{ii}|}.$$

   Infinitu-normako bi desberdintza horiek hau inplikatzen dute:

$$\kappa_\infty(\boldsymbol{U}) \geq \frac{\max_i |u_{ii}|}{\min_i |u_{ii}|}.$$

   Desberdintza horren eskuinaldeko kantitatea sarri erabiltzen dugu matrize goi-triangeluar baten baldintzazko zenbakiaren hurbilpena bezala.

6. Faktorizatu matrize simetriko hauek, $\boldsymbol{R}^t\boldsymbol{R}$ eran, Choleskyren metodoa erabiliz:

$$a)\quad \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 10 \end{bmatrix}. \qquad b)\quad \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 10 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$c)\quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \qquad d)\quad \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$e)\quad \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}. \qquad f)\quad \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

   Zein kasutan da matrizea hertsiki diagonal menperatzaile? Hori gertatzen denean, nolakoa da matrizea? Kalkulatu matrize horietarako baldintzazko zenbakiaren behe-borne bat.

7. Aurkitu $a$-ren eta $b$-ren balio guztiak, matrize hau simetriko definitu positiboa izateko:

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1+b \\ 1 & a & 1 \\ 1-b^2 & 1 & a \end{bmatrix}.$$

8. Sistema hauetarako, aurkitu Jacobiren eta Gauss-Seidelen lehenengo hiru iterazioak, $\boldsymbol{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ erabiliz:

*a*)
$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 &= 1 \\ 6x_1 - 2x_2 &= 2. \end{aligned}$$

*b*)
$$\begin{aligned} 5x_1 - x_2 + x_3 &= 10 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 &= 11 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 &= 3. \end{aligned}$$

*c*)
$$\begin{aligned} 3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85 \\ 0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 &= -19.3 \\ 0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 &= 71.4. \end{aligned}$$

*d*)
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 4. \end{aligned}$$

*e*)
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 10x_3 &= -11 \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 &= -11 \\ 10x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 &= 25. \end{aligned}$$

*f*)
$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 - x_3 &= 2 \\ -x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 2x_3 + 3x_4 &= -2. \end{aligned}$$

Beste galdera batzuk:

i) Zein da metodo bakoitzeko zehaztasun erlatiboa hirugarren iterazioan? Metodo horiek konbergenteak badira, zein baliotara uste duzu konbergitzen direla? Egiaztatu hori dela, hain zuzen, sistemaren soluzioa sisteman ordezkatuz.

ii) Sistema bakoitzean iterazioekin hasi baino lehen, aztertu jakin dezakegun Jacobiren metodoa konbergentea den ala dibergentea. Zergatik?

iii) Ez bada konbergentea, nola bihur dezakegu konbergente (ahal bada)? Kasu horretan, ebatzi berriro sistema hori hasierako puntu berdina erabiliz.

iv) Zein metodok egiten du konbergentzia azkarren (egiten badu)? Justifikatu erantzuna konbergentziari buruzko teoria erabiliz.

v) Zein da problema bakoitzean Jacobiren metodoaren konbergentzia-ratioa?

vi) Zenbat iterazio behar ditu gehienez Jacobiren metodoak hasierako errorea $10^4$ bider txikiago egiteko? Erantzuna konbergentziaren teoreman oinarritu behar da.

$$\left(\text{Oharra: } k.\ \text{iterazioko zehaztasun erlatiboa} = \frac{\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{(k-1)}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}^{(k)}\|_\infty}\right).$$

9. Izan bedi matrize hau:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}.$$

Aurkitu $a$-ren balioak $\boldsymbol{A}$ simetriko definitu positiboa izan dadin, baina Jacobiren iterazioa ez konbergitzeko.

10. Froga ezazu $\boldsymbol{A}$ $2 \times 2$-matrize simetriko definitu positiboa bada, Jacobiren metodoa konbergentea dela edozein hasierako baliotarako.

**MATLABez ebazteko problemak:**

11. Izan bedi matrize hau:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & -6 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

eta izan bitez matrize-norma hauek:

- $\|\boldsymbol{A}\|_1 = \max_j \|\boldsymbol{A}_{:,j}\|_1$ (zutabe guztien bat-normetako maximoa)
- $\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \max_i \|\boldsymbol{A}_{i,:}\|_1$ (lerro guztien bat-normetako maximoa)

(a) Aztertu **eskuz** $\boldsymbol{A}$ matrize honen singulartasuna, eta kalkulatu bat-norma eta infinitu-norma.

(b) Kalkulatu $\boldsymbol{A}^{-1}$ MATLABeko `inv(A)` funtzioa erabiliz, eta kalkulatu matrize horren bat-norma eta infinitu-norma.

(c) Kalkulatu **eskuz** $\boldsymbol{A}$ matrizearen baldintzazko zenbakia, hau da: $\kappa(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \cdot \|\boldsymbol{A}\|$ bi norma horietarako.

(d) Egiaztatu lortutako emaitzak MATLABeko `cond(A,1)` eta `cond(A,inf)` funtzioak erabiliz.

(e) Eranskinetik kopiatu kodea MATLABeko `lup.m` funtzio-fitxategia sortzeko, eta kalkulatu $\boldsymbol{A}$ matrizearen $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{U}$ eta $\boldsymbol{P}$ matrizeak funtzio hori erabiliz.

(f) Kalkulatutako matrize horiek erabiliz (ikus (5.10)-(5.11) adierazpenak), ebatzi **eskuz** sistema hau:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & -6 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

12. Izan bedi $\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{Pb}$ sistema. Sortu MATLABeko funtzio bat `aurrerantz.m` izenekoa, adierazpen hauek kontuan hartuz:

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 \\ x_i &= b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} x_j, \quad i = 2, 3, \ldots, n-1, n, \end{aligned}$$

ikus [20] testuliburuko (5.5)-(5.6) berdintzak.

Egiaztatu aurreko problemako $\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{Pb}$ sistema ondo ebatzi duzula funtzio hori erabiliz.

13. Izan bedi $\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y}$ sistema. Sortu MATLABeko funtzio bat `atzerantz.m` izenekoa, adierazpen hauek kontuan hartuz:

$$
\begin{aligned}
x_n &= \frac{b_n}{u_{nn}} \\
x_i &= \frac{b_i - \sum\limits_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j}{u_{ii}}, \quad i = n-1, n-2, \ldots, 3, 2, 1,
\end{aligned}
$$

ikus [20] testuliburuko (5.2) berdintzak

Egiaztatu aurreko problemako $\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y}$ sistema ondo ebatzi duzula funtzio hori erabiliz.

14. Sortu M fitxategi bat, $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ sistema $LU$ faktorizazioaz ebazteko gai izan dadin. Programa horrek sistema hori ebazteko ondoz ondoko lan hauek egin behar ditu:

    (a) Programa horrek goiburu hau izan behar du:
    `function x=ebatzi(A,b)`.

    (b) Egiaztatu $\boldsymbol{A}$ ez dela singularra, hots $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$. Kalkulu hori egiteko, MATLABek `det` funtzioa du. Baldin singularra bada, mezu bat emanez bukatuko da.

    (c) $\boldsymbol{LU} = \boldsymbol{PA}$ faktorizazioa egin behar du. Lan hori `lup` funtzioak egin dezake.

    (d) $\boldsymbol{Pb}$ kalkulatu behar du. Lan hori egiteko modu errazena `b(p)` idaztea da (MATLABi esker), non `p` permutazio-bektorea baita (`lup` funtzioak kalkulatzen du).

    (e) $\boldsymbol{LUx} = \boldsymbol{Pb}$ sistema ebatzi behar du, urrats hauei jarraituz:

    (L) Ebatzi $\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{Pb}$. Lan hori `aurrerantz` funtzioak egin dezake.

    (U) Ebatzi $\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y}$. Lan hori `atzerantz` funtzioak egin dezake.

    Egiaztatu `ebatzi.m` funtzioa ondo dabilela aurreko sistema ebatziz (ez ahaztu M fitxategiak izen hori izan behar duela).

15. Izan bedi sistema hau:

$$
\begin{array}{rrrrcr}
4x_1 & -2x_2 & & & = & 0 \\
-2x_1 & +5x_2 & -x_3 & & = & 2 \\
& -x_2 & +4x_3 & +2x_4 & = & 3 \\
& & 2x_3 & +3x_4 & = & -2.
\end{array}
$$

    (a) Garatu Jacobiren metodorako M fitxategi bat, `jacobi.m` izenekoa. Programa horrek gai izan behar du $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ sistema lineala ebazteko, non $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hertsiki diagonal menperatzailea baita. Programa horrek goiburu hau izan behar du:
    `function x=jacobi(A,b,x0,ze,imax)`,
    non `x` soluzioaren hurbilpen bat baita, `x0` hasierako hurbilpen bat, eta `ze` eta `imax` eskatutako zehaztasun erlatiboa eta iterazioen kopuru maximoa baitira, hurrenez

hurren. Programaren exekuzioa bukatuko da, $k$-garren iterazioan lortutako zehaztasun erlatiboak hau betetzen duenean:

$$\frac{\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{(k-1)}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}^{(k)}\|_\infty} \leq ze,$$

edo $k = imax$ denean.

(a) Asmatu zure kabuz sistema bat diagonal menperatzailekoa, eta ebatzi egindako programa erabiliz. Egiaztatu emaitza.

(b) Emandako sistema Jacobiren metodoaz ebatzi gabe, esan konbergituko den ala ez. Eta 11. problemako (f) atalekoa? Arrazoitu erantzunak.

(c) Gutxi gorabehera, zenbat iterazio erabiliko ditu hasierako errorea mila bider txikiagoa egiteko?

(d) Ebatzi emandako sistema kode hori erabiliz, eta egiaztatu aurreko analisia betetzen dela.

(b) Garatu Gauss-Seidelen metodorako MATLABeko M fitxategi bat `gaussseidel.m` izenekoa. Programa horrek gai izan behar du $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ sistema lineala ebazteko, non $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ hertsiki diagonal menperatzailea baita. Programa horrek goiburu hau izan behar du:

```
function x=gaussseidel(A,b,x0,ze,imax),
```

non `x` soluzioaren hurbilpen bat baita, `x0` hasierako hurbilpen bat, eta `ze` eta `imax` eskatutako zehaztasun erlatiboa eta iterazioen kopuru maximoa baitira, hurrenez hurren. Programaren exekuzioa bukatuko da $k$-garren iterazioan lortutako zehaztasun erlatiboak hau betetzen duenean:

$$\frac{\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{(k-1)}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}^{(k)}\|_\infty} \leq ze,$$

edo $k = imax$ denean.

(a) Asmatu zure kabuz sistema bat diagonal menperatzailekoa, eta ebatzi egindako programa erabiliz. Egiaztatu emaitza.

(b) Emandako sistema Gauss-Seidelen metodoaz ebatzi gabe, esan konbergituko den ala ez. Eta 11. problemako (f) atalekoa? Arrazoitu erantzunak.

(c) Gutxi gorabehera zenbat iterazio erabiliko ditu hasierako errorea mila bider txikiagoa egiteko?

(d) Ebatzi emandako sistema kode hori erabiliz, eta egiaztatu aurreko analisia betetzen dela.

## ERANSKINA

Kode hau $LU = PA$ faktorizazioa kalkulatzeko erabil daiteke:

```
function [L,U,p] = lup(A)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% LUP  Triangelu faktorizazioa L*U = PA bete dadin.
%   SARRERAK:
%     A deskonposatu nahi dugun matrizea,
%   EMAITZAK:
%    L matrize behe-triangeluarra,
%    U matrize goi-triangeluarra eta
%    p=permutazio-bektorea.
%
%   (P=permutazio-matrizea eman dezake goiburuan p P-rekin trukatuz.)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
[n,n] = size(A);
p = (1:n)';

for k = 1:n-1

   % Pibotatze partziala egiten du.
   % Aurkitu diagonaleko (k,k) gaitik behera dagoen tamaina
   % handieneko gaia (pibota) eta posizioa (m) azpibektore horretan.
   [pibota,m] = max(abs(A(k:n,k)));

   % pibotaren lerroa A matrizean:
   m = m+k-1;

   % Jauzi ezabapena zutabea 0 bada.
   if (A(m,k) ~= 0)

      % Trukatu m eta k lerroak, eta eguneratu permutazio-bektorea.
      if (m ~= k)
         A([k,m],:) = A([m,k],:);
         p([k,m]) = p([m,k]);
      end

      % Biderkatzaileak kalkulatzen ditugu, eta A matrizearen diagonal
      % azpian gordetzen ditugu. Gero L matrizeko diagonal azpian jarriko
      % ditugu.
      i = k+1:n;
      A(i,k) = A(i,k)/A(k,k);

      % Eguneratu matrizearen gainerakoa. Gero, U matrize
      % goi-triangeluarrean gordeko dugu.
      j = k+1:n;
      A(i,j) = A(i,j) - A(i,k)*A(k,j);
   end
end
```

```
% L, U eta P matrizeak idazten dira;
% tril(A,-1): A-ren diagonal azpikoa gordetzen du, bestea zero da.
% triu(A): A-ren diagonala eta bere goiko aldea gordetzen ditu, bestea
%          zero da.
L = tril(A,-1) + eye(n,n);
U = triu(A);
P=zeros(n,n);
for i=1:n
    P(i,p(i))=1;
end
```

## 4.2. Problema batzuen ebazpena

1. (b) *LU* deskonposizioa garatuko dugu matrize honetarako:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}.$$

1. eta 3. errenkadak permutatzeko matrize hau erabiliko dugu:

$$\boldsymbol{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Gero, 1. zutabean zeroak egiteko, biderkatzaileen matrize (ezabapen-matrize) hau dugu:

$$\boldsymbol{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 & 0 \\ -3/4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Beraz,

$$\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 0 & -1/2 & -3/2 & -3/2 \\ 0 & -3/4 & -5/4 & -5/4 \\ 0 & 7/4 & 9/4 & 17/4 \end{bmatrix}.$$

Matrize horretako $\boldsymbol{A}(2,2)$ pibotetik behera bigarren zutabean zeroak egiteko, berdin jokatuko dugu:

$$\boldsymbol{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/7 & 1 & 0 \\ 0 & 2/7 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{M}_2\boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 0 & 7/4 & 9/4 & 17/4 \\ 0 & 0 & -2/7 & 4/7 \\ 0 & 0 & -6/7 & -2/7 \end{bmatrix}.$$

Matrize horretako $\boldsymbol{A}(3,3)$ pibotetik behera hirugarren zutabean zeroak egiteko, berdin jokatuko dugu:

$$\boldsymbol{P}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{M}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Horrek hau ematen du:

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{M}_3\boldsymbol{P}_3(\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A})) = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 0 & 7/4 & 9/4 & 17/4 \\ 0 & 0 & -6/7 & -2/7 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

Bestalde, $\boldsymbol{M}_3\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}$ honela eraldatuko dugu, ezkerretik eskuinera:

$$\boldsymbol{M}_3\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M}_3(\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{P}_3)\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M}_3\widetilde{\boldsymbol{M}}_2\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A},$$

non $\widetilde{\boldsymbol{M}}_2 = \boldsymbol{P}_3\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{P}_3$ definitzen baita. Eta gero, hau eginez:

$$\boldsymbol{M}_3\widetilde{\boldsymbol{M}}_2\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M}_3\widetilde{\boldsymbol{M}}_2(\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3)\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M}_3\widetilde{\boldsymbol{M}}_2\widetilde{\boldsymbol{M}}_1\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U},$$

non $\widetilde{\boldsymbol{M}}_1 = \boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3$.

Horrela, hau dugu:

$$\boldsymbol{M}_3\widetilde{\boldsymbol{M}}_2\widetilde{\boldsymbol{M}}_1\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U},$$

Beraz,

$$\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{L}_2\boldsymbol{L}_3\boldsymbol{U} = \boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}.$$

non $\boldsymbol{L}_1 = \widetilde{\boldsymbol{M}}_1^{-1}$, $\boldsymbol{L}_2 = \widetilde{\boldsymbol{M}}_2^{-1}$ eta $\boldsymbol{L}_3 = \boldsymbol{M}_3^{-1}$ baitira, eta hori kalkulatzen da $\widetilde{\boldsymbol{M}}_1$-tik, $\widetilde{\boldsymbol{M}}_2$-tik eta $\boldsymbol{M}_3$-tik diagonalaren azpiko biderkatzaileen zeinuak aldatuz, eta gero permutazioak aplikatuz. Beraz, hau badugu:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} &= \boldsymbol{L}_1\boldsymbol{L}_2\boldsymbol{L}_3 \\ \boldsymbol{P} &= \boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1, \end{aligned}$$

Ondorioz, ariketa honetan hau dugu:

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -2/7 & 1 & 0 \\ 1/4 & -3/7 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

zera egiaztatuz:

$$\boldsymbol{LU} = \boldsymbol{PA}.$$

Jarraian, $\boldsymbol{A}$ matrizearen 1-norma eta $\infty$-norma kalkulatuko ditugu:

$$\|\boldsymbol{A}\|_1 = \max_j \|\boldsymbol{A}_{:,j}\|_1 = \max_{1\le j\le 4}\{20, 18, 22, 14\} = 22$$

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \max_i \|\boldsymbol{A}_{i,:}\|_1 = \max_{1\leq i\leq 4}\{4, 11, 29, 30\} = 30.$$

Bestalde, hau dugunez:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 9/4 & -3/4 & -1/4 & 1/4 \\ -3 & 5/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & -1 & 1 & -1/2 \\ 3/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_1 = \max_j \|\boldsymbol{A}^{-1}_{:,j}\|_1 = \max_{1\leq j\leq 4}\{7.25, 4.75, 2.25, 1.25\} = 7.25$$

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty = \max_i \|\boldsymbol{A}^{-1}_{i,:}\|_1 = \max_{1\leq i\leq 4}\{3.5, 6, 3, 3\} = 6.$$

Ondorioz,

$$\kappa_1(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\|_1\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_1 = 22 \cdot 7.25 = 159.5$$
$$\kappa_\infty(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\|_\infty\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_1 = 30 \cdot 6 = 180.$$

2. (b) Aurreko ariketan kalkulatutako $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{U}$ eta $\boldsymbol{P}$ matrizeak kontuan hartuko ditugu, eta baita $\boldsymbol{b} = [3, 7, 17, 15]^t$ dela ere.

   Lehenengo $\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{Pb}$ goitik behera ebazten badugu, $\boldsymbol{y} = [17, 2.25, -0.85714, 0]^t$ da.

   Gero, $\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y}$ behetik gora, $\boldsymbol{x} = [1, 0, 1, 0]^t$ lortuz.

   Jarraian, sistema horren $\kappa_\infty$-ren behe-borne bat aurkituko dugu. Jo dezagun $\boldsymbol{b}$ bektorea honela perturbatzen dugula:

$$\widetilde{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{b} + \delta\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 17 \\ 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.001 \\ 7 \\ 17 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

   $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ sistemaren soluzio zehatza $\boldsymbol{x} = (1, 0, 1, 0)^t$ da, baina $\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{x}} = \widetilde{\boldsymbol{b}}$ sistemaren soluzio zehatza $\boldsymbol{x} = (1.00225, -0.003, 0.9995, 0.0015)^t$ da, hots:

$$\delta\boldsymbol{x}_b = (0.00225, -0.003, -0.0005, 0.0015)^t.$$

   Infinitu-norma erabiltzen badugu, $\boldsymbol{b}$-ren eta $\boldsymbol{x}$-ren perturbazio erlatiboak kalkulatzeko, zera dugu:

$$\frac{\|\delta\boldsymbol{b}\|_\infty}{\|\boldsymbol{b}\|_\infty} = \frac{0.001}{17} = 5.8824 \cdot 10^{-5} \quad \text{eta} \quad \frac{\|\delta\boldsymbol{x}_b\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty} = \frac{0.003}{1} = 0.003.$$

   eta [20] testuliburuko (5.25) adierazpena kontuan hartuz, hau dugu:

$$\kappa_\infty(\boldsymbol{A}) \geq \frac{\|\delta\boldsymbol{x}_b\|/\|\boldsymbol{x}\|}{\|\delta\boldsymbol{b}\|/\|\boldsymbol{b}\|} = \frac{0.003}{5.8824 \cdot 10^{-5}} = 51.$$

3.

| Ezezaguna | $\div$ | $*$ | $+/-$ |
|---|---|---|---|
| $x_n = b_n/u_{nn}$ | 1 | 0 | 0 |
| $x_{n-1} = (b_{n-1} - u_{n-1,n}x_n)/u_{n-1,n-1}$ | 1 | 1 | 1 |
| $x_{n-2} = (b_{n-2} - u_{n-2,n-1}x_{n-1} - u_{n-2,n}x_n)/u_{n-2,n-2}$ | 1 | 2 | 2 |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $x_1 = (b_1 - u_{12}x_2 - \ldots - u_{1n}x_n)/u_{11}$ | 1 | $n-1$ | $n-1$ |

$\{a_n\}$ progresio aritmetiko baten lehenengo $n$ gaien batuketa kalkulatzeko, adierazpen hau erabiltzen da:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n.$$

Hortaz, $1 + 2 + \ldots + (n-1) = \dfrac{1 + (n-1)}{2} \cdot (n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ dugu. Ondorioz, $n$ zatiketa, $n(n-1)/2$ biderketa eta $n(n-1)/2$ kenketa ditugu; guztira, $n^2$ eragiketa aritmetiko.

4. (a) *LU* deskonposizioan, zutabez zutabe biderketa eta zatiketa hauek egin behar dira:

| Zutabea | $*$ | $\div$ |
|---|---|---|
| 1 | $(n-1)(n-1)$ | $n-1$ |
| 2 | $(n-2)(n-2)$ | $n-2$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $n-2$ | $2 \cdot 2$ | 2 |
| $n-1$ | $1 \cdot 1$ | 1 |

Oharra: oraingo zutabearekin egiten diren eragiketak zatiketak bakarrik dira, biderkatzaileak kalkulatzeko; baina, zutabe horren diagonaleko gaia ez da biderkatzen azpiko gaia zeroak bihurtzeko beharrezkoa ez delako, emaitza ezagutzen baitugu.

Beraz, biderketen kopurua honela aurkituko dugu enuntziatuaren iradokizuna erabiliz:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (n-2)^2 + (n-1)^2 = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} = \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6}$$

Bestalde, zatiketen kopurua aurkitzeko, progresio aritmetiko baten lehenengo $n-1$ gaien batura kalkulatzeko, $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} n$ adierazpena erabiliko dugu:

$$1 + 2 + \ldots + (n-2) + (n-1) = \frac{1 + (n-1)}{2}(n-1) = \frac{n^2 - n}{2}$$

Guztira, $\dfrac{2n^3 - 3n^2 + n}{6} + \dfrac{n^2 - n}{2} = \dfrac{n^3 - n}{3}$.

(b) $\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b}$ ebazten da aurreranzko ordezkapena erabiliz. Beraz, biderketa hauek egin behar ditugu $y_i$ ezezagun bakoitza kalkulatzeko (ez dago zatiketarik):

| $y_i$ | $*$ |
|---|---|
| $y_1$ | 0 |
| $y_2$ | 1 |
| $y_3$ | 2 |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $y_{n-1}$ | $(n-2)$ |
| $y_n$ | $(n-1)$ |

Hots, $1+2+\ldots+(n-2)+(n-1) = \dfrac{n^2-n}{2}$.

$\boldsymbol{y}$ kalkulatu eta gero, $\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y}$ ebazten da atzeranzko ordezkapena erabiliz. Beraz, biderketa eta zatiketa hauek egin behar ditugu $x_i$ ezezagun bakoitza kalkulatzeko:

| $x_i$ | $*$ | $\div$ |
|---|---|---|
| $x_n$ | 0 | 1 |
| $x_{n-1}$ | 1 | 1 |
| $x_{n-2}$ | 2 | 1 |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $x_2$ | $(n-2)$ | 1 |
| $x_1$ | $(n-1)$ | 1 |

Hots, $1+2+\ldots+(n-2)+(n-1) = \dfrac{n^2-n}{2}$ biderketak eta $n$ zatiketak, guztira $\dfrac{n^2-n}{2}+n = \dfrac{n^2+n}{2}$.

(c) Ondorioz, $LU$ faktorizazioa eta $\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b}$ eta $\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y}$ sistemak ebazteko erabiltzen diren biderketak/zatiketak hauek dira:

$$\frac{n^3-n}{3} + \frac{n^2-n}{2} + \frac{n^2+n}{2} = \frac{n^3+3n^2-n}{3}.$$

6. (a) Lehenengo lerrorako ($i = 1$), zera dugu:

$$r_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{4} = 2.$$

Beraz,

$$\begin{aligned} r_{12} &= \frac{a_{12}}{r_{11}} = \frac{-2}{2} = -1 \\ r_{13} &= \frac{a_{13}}{r_{11}} = \frac{2}{2} = 1. \end{aligned}$$

Hurrengo lerrorako ($i = 2$), zera dugu:

$$\begin{aligned} r_{22} &= \sqrt{a_{22} - r_{12}^2} = \sqrt{2 - (-1)^2} = 1 \\ r_{23} &= \frac{a_{23} - r_{12}r_{13}}{r_{22}} = \frac{-1 - (-1) \cdot 1}{1} = 0. \end{aligned}$$

Hirugarren lerrorako ($i = 3$), hau lortuko dugu:

$$r_{33} = \sqrt{a_{33} - r_{13}^2 - r_{23}^2} = \sqrt{10 - (-1)^2 - (0)^2} = 3.$$

Ondorioz, Choleskyren faktorizazioak zera ematen du:

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ez da hertsiki diagonal menperatzaile; izan ere, $|a_{22}| \not> |a_{21}| + |a_{23}|$. (Matrize simetriko bat hertsiki diagonal menperatzaile bada eta diagonaleko gai guztiak positiboak badira, definitu positiboa da).

$$\kappa_2(\boldsymbol{A}) \geq \frac{\max\limits_i r_{ii}^2}{\min\limits_i r_{ii}^2} = \frac{\max\{4, 1, 9\}}{\min\{4, 1, 9\}} = \frac{9}{1} = 9.$$

8. (a) Ebatzi behar dugun sistema hau da:

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 &= 1 \\ 6x_1 - 2x_2 &= 2. \end{aligned}$$

Sistema ebazteko, Jacobiren metodoko adierazpen hau dugu; ikus [20] testuliburuko (5.32):

$$x_i^{(k+1)} = \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \Big/ a_{ii}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

eta adierazpen hori hiru iteraziotan erabiliz, hau dugu:
$\boldsymbol{x}_J^{(1)} = [-1, -1]^t$,
$\boldsymbol{x}_J^{(2)} = [-4, -4]^t$, eta
$\boldsymbol{x}_J^{(3)} = [-13, -13]^t$.

Gauss-Seidelen metodoan adierazpen hau dugu; ikus [20] testuliburuko (5.34):

$$x_i^{(k+1)} = \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \Big/ a_{ii}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Eta adierazpen hori hiru iteraziotan erabiliz, hau dugu:

$\boldsymbol{x}_{GS}^{(1)} = [-1, -4]^t$,

$\boldsymbol{x}_{GS}^{(2)} = [-13, -40]^t$, eta

$\boldsymbol{x}_{GS}^{(3)} = [-121, -364]^t$.

i) Jacobiren metodorako zehaztasun erlatiboa $ze_J = 0.69231$ da.

Gauss-Seidelen metodorako zehaztasun erlatiboa $ze_{GS} = 0.89011$ da.

Bistan dago ez metodo baterako ez besterako iterazioak ez direla konbergitzen. Jarraian, konbergentzia aztertuko dugu ikuspuntu teoriko batetik.

ii) $\boldsymbol{T}_J = \mathbb{1} - \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}) = -\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

$\det(\boldsymbol{T}_J - \lambda\mathbb{1}) = \lambda^2 - 9 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 3 \Rightarrow |\lambda_{max}| = 3$ dugu. Ondorioz, $\rho(T_J) = 3 > 1$ eta 5.10. teoremagatik, Jacobiren metodoa dibergentea izan behar da kasu horretan.

$$\boldsymbol{T}_{GS} = \mathbb{1} - (\boldsymbol{L}+\boldsymbol{D})^{-1}\boldsymbol{A} = -(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{D})^{-1}\boldsymbol{U} = -\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

$\det(\boldsymbol{T}_{GS} - \lambda\mathbb{1}) = \lambda^2 - 9\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$ eta $\lambda_2 = 9 \Rightarrow |\lambda_{max}| = 9$ dugu. Ondorioz, $\rho(T_{GS} = 9 > 1$ eta 5.10. teoremagatik, Gauss-Seidelen metodoa dibergentea izan behar.

iii) Bi ekuazioen ordena trukatuz, hau lortzen da:

$$\begin{aligned} 6x_1 - 2x_2 &= 2 \\ -x_1 + 3x_2 &= 1. \end{aligned}$$

Orduan, $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ eta matrize hori diagonal menperatzailea denez, nahitaez $\rho(T_J) < 1$ betetzen da; hortaz, Jacobiren metodoa konbergituko da. Ikus dezagun, sistema baliokide horretan, Jacobiren metodoa lehen bezala aplikatuz:

$\boldsymbol{x}_J^{(1)} = [0.33333, 0.33333]^t$,

$\boldsymbol{x}_J^{(2)} = [0.44444, 0.44444]^t$, eta

$\boldsymbol{x}_J^{(3)} = [0.48148, 0.48148]^t$.

Gauza bera gertatzen da Gauss-Seidelen metodorako. Sistema baliokide horretan, Gauss-Seidelen metodoa lehen bezala aplikatuz:

$\boldsymbol{x}_{GS}^{(1)} = [0.33333, 0.44444]^t$,

$\boldsymbol{x}_{GS}^{(2)} = [0.48148, 0.49383]^t$, eta

$\boldsymbol{x}_{GS}^{(3)} = [0.49794, 0.49931]^t$.

$\boldsymbol{x}^* = [1/2, 1/2]^t$ soluziora jotzen dute.

iv) Ekuazioen trukaketa egin ondoren, berriro $\rho(\boldsymbol{T}_J)$ eta $\rho(\boldsymbol{T}_{GS})$ kalkulatu behar ditugu. $\boldsymbol{A}$ matrizerako antzeko eragiketak eginez, hau lortzen dugu:

$$\rho(\boldsymbol{T}_J) = \rho(-\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})) = \rho\left(\begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}\right) = 1/3 < 1 \Rightarrow \text{konbergentea.}$$

$$\rho(\boldsymbol{T}_{GS} = \rho(-(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{D})^{-1}\boldsymbol{U}) = \rho\left(\begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 0 & 1/9 \end{bmatrix}\right) = 1/9 < 1 \Rightarrow \text{konbergentea.}$$

$\rho(\boldsymbol{T}_{GS} < \rho(\boldsymbol{T}_J)$ denez, konbergentzia azkarrena Gauss-Seidel metodoaz lortzen da.

v) $Ratioa = -\log_{10}\rho(\boldsymbol{T}_{GS}) = 0.95424,\ \ konbergentziaren\ ratioa = 1/ratioa = 1.048.$

vi) [20] liburuko 5.10. teoremaren arabera, $\|\boldsymbol{e}_n\| \approx \rho(\boldsymbol{T}_{GS})^n\|\boldsymbol{e}_0\|$; beraz, hau bete behar da:

$$\frac{\|\boldsymbol{e}_n\|}{\|\boldsymbol{e}_0\|} \approx \rho(\boldsymbol{T}_{GS})^n \leq 10^{-4}$$

Logaritmo hamartarrak aplikatuz, zera erdiesten dugu:

$$n \geq \frac{4}{ratioa} = 4.1918.$$

Beraz, $n$ zenbaki osoa izan behar denez, $n =$ 5etik aurrera beteko da.

9. Aurkitu behar ditugu $a$-ren balioak $\boldsymbol{A}$ hau simetriko definitu positiboa izan dadin:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}.$$

Horretarako, Sylvester-en irizpidea noiz betetzen den aztertuko dugu; hots, zein diren $a$-ren balioak minor nagusiak positiboak izateko. Azter dezagun,

$$1 > 0 \text{ eta } 1 - a^2 > 0 \text{ eta } \det(\boldsymbol{A}) > 0$$

$$1 - a^2 > 0 \iff |a| < 1 \iff -1 < a < 1.$$

$$\det(\boldsymbol{A}) = 2a^3 - 3a^2 + 1 = 2(a-1)^2(a+1/2) > 0 \iff a \neq 1 \text{ eta } a > -\frac{1}{2}$$

Baldintza horiek batera bete behar direnez, $-1/2 < a < 1$ balioetarako $\boldsymbol{A}$ definitu positiboa da.

Jacobiren iterazioa ez konbergitzeko, [20] liburuko 5.10. teorema erabiliko dugunez, $\rho(\boldsymbol{T})$ kalkulatuko dugu:

$$\boldsymbol{T} = -(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{D})^{-1}\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 0 & -a & -a \\ -a & 0 & -a \\ -a & -a & 0 \end{bmatrix}$$

Jarraian, $\boldsymbol{T}$-ren autobaloreak honela kalkulatuko ditugu:

$$\det(\boldsymbol{T} - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} -\lambda & -a & -a \\ -a & -\lambda & -a \\ -a & -a & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 2a^3 + 3\lambda a^2 = -(\lambda - a)^2(\lambda + 2a) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = a, \quad \lambda_2 = -2a.$$

Ondorioz, $\rho(\boldsymbol{T}) = \max\{|a|, |-2a|\} = |2a|$. Orain, [20] liburuko 5.10. teoremaren arabera, Jacobiren metodoa dibergituko da baldin eta soilik baldin $\rho(\boldsymbol{T}) \geq 1$ bada; kasu honetan, hori gertatzen da $|a| \geq 1/2 \iff a \in (-\infty, -1/2] \cup [1/2, \infty)$ betetzen bada.

Azkenik, $\boldsymbol{A}$ definitu positiboa eta Jacobiren metodoa dibergitzeko, zera bete behar da:

$$a \in (-1/2, 1) \quad \text{eta} \quad a \in (-\infty, -1/2] \cup [1/2, \infty),$$

horrek $a \in [1/2, 1)$ bete behar dela inplikatzen du.

# 5. kapitulua

# $QR$ faktorizazioa eta minimo karratu linealak

Kapitulu honetan, minimo karratu linealen problema ebatziko dugu; alegia:

$$\min_{\boldsymbol{x}} \|\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}\|_2,$$

non $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ eta $m \geq n$.

Minimo karratuen problema askotan agertzen da mundu errealeko aplikazioetan, bereziki datu-doitzea behar denean. Problema horri aurre egiteko, oso garrantzitsuak dira transformazio ortogonalak, eta horrelako tresnak azaltzen hasiko gara.

Householder-en islapenak matrize-transformazioak dira, eta zenbakizko algoritmo moldagarri eta eraginkorrenetariko batzuen oinarria dira. Oso teknika ezaguna da horrelako $\boldsymbol{H}_i$ matrize ortogonalen segida bat eraikitzea, $\boldsymbol{A}$ matrize baten diagonalaren pean dauden gaiak zero bihurtzeko. Beraz, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ karratua bada, $n-1$ Householderren transformazioen bidez, $\boldsymbol{R}$ matrize triangeluar bat ere lor dezakegu; hots:

$$\boldsymbol{H}_{n-1} \dots \boldsymbol{H}_2\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}$$

eta $\boldsymbol{Q}^t = \boldsymbol{H}_{n-1} \dots \boldsymbol{H}_2\boldsymbol{H}_1$ bada, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{QR}$ faktorizazioa izango dugu.

Hori guztia erabil dezakegu sistema lineal karratu determinatu bat ebazteko, honela:

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{QRx} = \boldsymbol{b} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{Rx} = \boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b}.$$

Jarraian, minimo karratu linealen problema ebatziko dugu; hor agertzen den $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrizea, normalean, $m > n$ izango dugu. Problema horretan, $\boldsymbol{x}^*$ bektorea aurkitu behar dugu $\|\boldsymbol{Ax}^* - \boldsymbol{b}\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}\|_2$ betetzen duela. Soluzio hori kalkulatzeko, bi tresna desberdin hauek erabil ditzakegu: ekuazio normalak eta QR faktorizazioa.

- *Ekuazio normal* hauen bitartez $\boldsymbol{x}^*$ soluzioa kalkula dezakegu:

  $$(\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{b},$$

  sistema hori bateragarria da.

- $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{QR}$ faktorizazioa erabiliz, minimo karratuen problema honela idatz dezakegu:

  $$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} \|\boldsymbol{Rx} - \boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b}\|_2$$

  eta matrize karratu goi-triangeluar bat duen sistema bat ebatziz, $\boldsymbol{x}^*$ erraz aurki dezakegu; ikus [20] testuliburuko 6.2. algoritmoa.

Geroago, hein urriko kasua permutazio-matrizeen bidez tratatzen da; zutabeak era egoki batean trukatuz, ikus [20] testuliburuko 6.3. algoritmoa. Deskonposizio ortogonal osoaz lortzen den minimo karratuen problemaren soluzio txikiena (norma txikienarekin) zuzen kalkulatzen da.

Azkenik, edozein $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrizeren balio singularretako deskonposizioa dugu:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U\Sigma V}^t,$$

non $\boldsymbol{U}$ $m \times m$ matrize ortogonal bat baita, $\boldsymbol{V}$ $n \times n$ matrize ortogonal bat, eta $\boldsymbol{\Sigma}$ $m \times n$ matrize diagonal bat; esate baterako, $m > n$ denean, honelakoa da:

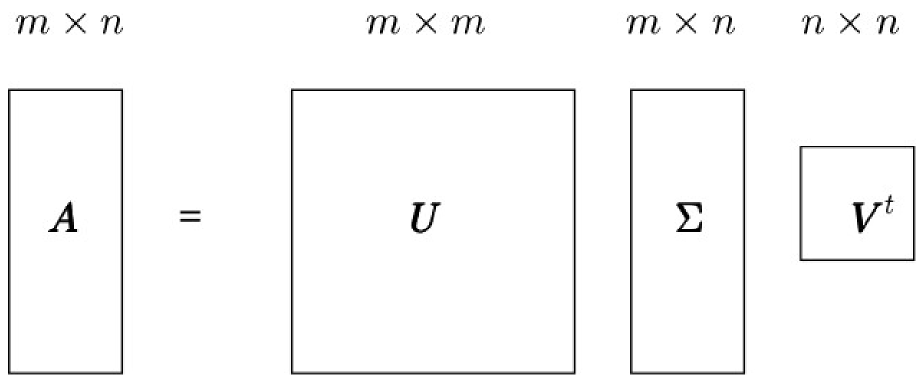
$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & & & \\ & \sigma_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \sigma_r & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{bmatrix}$$

eta $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$ *balio singularrak* bakarrak dira. $\boldsymbol{\Sigma}$ matrizeko beste gaiak zero dira. Ikus [20] liburuko 6.8. atala.

Kontuan izan $m$ eta $n$-ren artean ez dagoela ordenako erlazio finko bat, eta hein$(\boldsymbol{A}) = r \leq min\{m, n\}$ betetzen dela. Deskonposizio horretan agertzen diren matrizeen dimentsioak irudi honetan ikus daitezke, $m > n$ den kasuan.

Bestalde, $\sigma$ zenbakia $\boldsymbol{A}$ matrizearen balio singularra bada, $\boldsymbol{U}$ eta $\boldsymbol{V}$ matrizeetan $\boldsymbol{u}$ eta $\boldsymbol{v}$ zutabe bektore bakarrak existitzen dira, hurrenez hurren, non hau betetzen baita:

$$\boldsymbol{Av} = \sigma\boldsymbol{u} \quad \text{eta} \quad \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{u} = \sigma\boldsymbol{v}.$$




**5.1. irudia.** Balio singularretako deskonposizioa, $m > n$ denean.

$\boldsymbol{u}$ eta $\boldsymbol{v}$ bektoreei *ezker* eta *eskuin bektore singularrak* deritzegu, hurrenez hurren.

Matlaben erabiltzen dugun agindua `svd` da (Singular Value Decomposition). Hots, `[U,Sigma,V]=svd(A)` aginduak balio singularretako definizioko hiru matrizeak ematen ditu. Eta `s=svd(A)` idazten badugu, $\min\{m, n\}$ tamainako `s` bektore batean balio singularrak lortuko ditugu, handienetik txikienera ordenatuta.

Balio singularretako deskonposizioa erabiliz, minimo karratuen problema era egonkorrenean ebatz dezakegu; ikus [20] liburuko 6.8.3. azpiatala.

Edozein $\boldsymbol{A}$ matrizetarako balio singularretako deskonposizioari buruzko teorema honek propietate batzuk ematen ditu, eta geroago proposatzen diren problema batzuen bidez frogatzen dira.

**5.1. teorema.** *Izan bedi $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eta $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U\Sigma V}^t$ bere balio singularretako deskonposizioa. Izan bitez $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$ balio singular ez-nuluak eta $\sigma_{r+1} = \ldots = \sigma_p = 0$, non $p = \min\{m, n\}$. Orduan baieztapen hauek betetzen dira:*

1. *$\boldsymbol{A}$-ren heina $r$ da.*
2. *$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_r\}$ bektoreek $K(\boldsymbol{A})$-ren oinarri ortonormal bat osatzen dute.*
3. *$\{\boldsymbol{u}_{r+1}, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_m\}$ bektoreek $K(\boldsymbol{A})$ azpiespazioaren $\mathbb{R}^m$-ko $K(\boldsymbol{A})^\perp$ azpiespazio osagarri ortogonaleko oinarri ortonormal bat osatzen dute.*
4. *$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r\}$ bektoreek $K(\boldsymbol{A}^t)$-ren oinarri ortonormal bat osatzen dute.*
5. *$\{\boldsymbol{v}_{r+1}, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ bektoreek $K(\boldsymbol{A}^t)$ azpiespazioaren $\mathbb{R}^n$-ko $K(\boldsymbol{A}^t)^\perp$ azpiespazio osagarri ortogonaleko oinarri ortonormal bat osatzen dute.*

## 5.1. Problemak

**Eskuz ebazteko problemak:**

1. i) Izan bitez sistema hauek:

*a)*
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 5 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 10 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 &= -4. \end{aligned}$$

*b)*
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 &= 7 \\ 8x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 5x_4 &= 17 \\ 6x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 8x_4 &= 15. \end{aligned}$$

*c)*
$$\begin{aligned} -5x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_3 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 &= 2. \end{aligned}$$

*d)*
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 4. \end{aligned}$$

*e)*
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 4x_4 &= 5 \\ 2x_1 - 1x_2 + 5x_3 &= -6 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \\ -3x_1 + 2x_3 + 6x_4 &= 4. \end{aligned}$$

*f)*
$$\begin{aligned} 4x_1 + 8x_2 + 4x_3 &= 8 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= -4 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 10 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_4 &= -4. \end{aligned}$$

Aurkitu sistemei elkartutako matrizeen $QR$ faktorizazioa, erabilitako Householderren bektoreak emanez eta Householderren matrizeak kalkulatu barik. Erakutsi, urratsez urrats, egindako eragiketa nagusiak.

ii) Ebatzi sistemak, aurreko atalean aurkitutako $QR$ faktorizazioak erabiliz.

2. (a) Izan bedi $\boldsymbol{x} = [1, 12, 2, 5, 7]^t$ bektorea. Kalkula ezazu biraketa bat $(4, 2)$ planoan $x_2$ zero bihurtzeko. Zenbat radianetako biraketa eman behar du $\boldsymbol{x}$ bektoreak, plano horretan emaitza hori lortzeko?

   (b) Bektorea errenkada bat bada, esate baterako $\boldsymbol{x} = [1, 12, 2, 5, 7]$, nola egingo zenuke $(4, 2)$ planoan $x_2$ zero bihurtzeko?

3. Aplikatu Givens-en biraketak matrize honi, $(1, 2)$ planoan lehenengo zutabeko bigarren lerroko gaia zero bihurtzeko:
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Horretarako, $c$ eta $s$ balioak honela kalkulatuko ditugu (ikus [20] liburuko 6.3. atala):
$$c = \cos(\theta) = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_k^2}} \quad \text{eta} \quad s = \sin(\theta) = \frac{-x_k}{\sqrt{x_i^2 + x_k^2}},$$
non $(i, k)$ bikoteak esaten baitigu zein planotan egiten den $\theta$ angeluko biraketa, bektore baten $i$. lerroko gaiaz $k$. lerroko gaia zero bihurtzeko.

(b) Gero, kalkula ezazu dagokion $\boldsymbol{G}(i,k,\theta)$ matrizea.

(c) Kalkula ezazu $\boldsymbol{G}(i,k,\theta)^t\boldsymbol{A}$.

(d) Diseinatu algoritmo bat $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ matrize orokor batekin $\boldsymbol{G}(i,k,\theta)^t\boldsymbol{M}$ kalkulua egiteko. $c$-ren eta $s$-ren kalkulua algoritmoaren barnean egin daiteke.

(e) Bigarren zutabeko 2. lerroko gaiaz 3. lerroko gaia zero egiteko, zein izango litzateke $\boldsymbol{G}(i,k,\theta)$ Givensen matrizea?

4. Izan bitez $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ sistema gaindeterminatu hauek:

*a)* $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ eta $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.   *b)* $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ eta $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 20 \end{bmatrix}$.

*c)* $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ eta $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.   *d)* $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ eta $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

*e)* $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ eta $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$.   *f)* $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ eta $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Ebatzi sistema horiek ekuazio normalak erabiliz. Zein da beren hondarraren norma euklidearra?

5. Ebatzi aurreko problemaren sistemak, $QR$ faktorizazioaren bitartez. Kalkula ezazu hondarraren norma euklidearra.

6. Izan bedi $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ sistema gaindeterminatua, non

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix} \text{ eta } \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Zein da ekuazio normalei dagokien matrizearen bi-normarako baldintzazko zenbakia?

(b) Zein da $\boldsymbol{A}$-ren bi-normarako baldintzazko zenbaki orokortua? Zein dira $QR$ faktorizaziorako $\boldsymbol{R}$ matrizea eta $\boldsymbol{R}$-ren bi-normarako baldintzazko zenbaki orokortua?

(c) Konparatu aurreko bi ataletan lortutako baldintzazko zenbakiak. Zer esan dezakegu?

(d) Ebatzi sistema hori bi metodoekin, lau zifra esanguratsuz, eta konpara itzazu emaitzak.

7. Aurkitu $f(x) = ax+b$ funtzio lineal hoberena, minimo karratuen zentzuan, datu multzo hauetarako:

$a)$ $\begin{array}{c|cccc} x & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 3 & 2 & 0 & 4 \end{array}$. $\quad b)$ $\begin{array}{c|cccc} x & -3 & -1 & 1 & 3 \\ \hline y & 15 & 5 & 1 & 5 \end{array}$.

Zein da hondarra? Marraztu $a)$ kasurako funtzio lineala eta datuak, koordenatu-sistema kartesiar batean.

8. Aurkitu $f(x) = ax^2 + bx + c$ parabola hoberena, minimo karratuen zentzuan, datu multzo hauetarako:

$a)$ $\begin{array}{c|cccc} x & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 3 & 2 & 0 & 4 \end{array}$. $\quad b)$ $\begin{array}{c|cccc} x & -3 & -1 & 1 & 3 \\ \hline y & 15 & 5 & 1 & 5 \end{array}$.

Zein da hondarra? Marraztu $a)$ kasurako funtzio koadratikoa eta datuak, koordenatu-sistema kartesiar batean.

9. Izan bedi matrize hau:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2.5 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Aurkitu $K(\boldsymbol{A})$ azpiespazioaren oinarri ortonormal bat, $QR$-faktorizazioa erabiliz.

(b) Aurkitu $K(\boldsymbol{A})$-ren azpiespazio nuluaren oinarri ortonormal bat, $QR$-faktorizazioa erabiliz.

(c) Aurkitu $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ sistemaren $\boldsymbol{x}_B$ oinarri-soluzioa, baldin $\boldsymbol{b} = [1 \;\; 3 \;\; 5]^t$ bada.

(d) Aurkitu $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ sistemaren $\boldsymbol{x}_{LM}$ soluzioa; hots, norma euklidear minimoa duen minimo karratuen problemaren soluzioa.

10. Izan bedi matrize hau:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 9 \\ 1 & 11 & 12 \end{bmatrix}.$$

(a) Hein urrikoa da? Arrazoitu erantzuna.

(b) Kalkula ezazu bere $QR$-faktorizazioa, zutabeen permutazioak eginez, beharrezkoa bada.

(c) Aurkitu $K(\boldsymbol{A})$ azpiespazioaren oinarri ortonormal bat, $QR$-faktorizazioa erabiliz.

(d) Aurkitu $K(\boldsymbol{A})$-ren azpiespazio nuluaren oinarri ortonormal bat, $QR$-faktorizazioa erabiliz.

(e) Aurkitu $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ sistemaren $\boldsymbol{x}_B$ oinarri-soluzioa, baldin $\boldsymbol{b} = [2 \;\; 1 \;\; 4 \;\; 3]^t$ bada.

(f) Aurkitu $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ sistemaren $\boldsymbol{x}_{LM}$ soluzioa; hots, norma euklidear minimoa duen minimo karratuen problemaren soluzioa.

11. Izan bedi $\boldsymbol{A} \in \mathrm{I\!R}^{m\times n}$ matrizea eta $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U\Sigma V}^t$ bere balio singularretako deskonposizioa, non $\boldsymbol{A}$-ren heina $r$ baita eta $m \geq n \geq r$ ($n \geq m \geq r$ ere izan liteke). Izan bedi $\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{V\Sigma}^+\boldsymbol{U}^t \in \mathrm{I\!R}^{n\times m}$ non

$$\boldsymbol{\Sigma}^+ = \operatorname{diag}\left\{\frac{1}{\sigma_1}, \ldots, \frac{1}{\sigma_r}, 0, \ldots, 0\right\}.$$

$\boldsymbol{A}^+$ matrizeari $\boldsymbol{A}$-ren *Moore-Penrose sasi-alderantzizko matrize* deitzen zaio.

Froga ezazu $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^+$-ek Moore-Penroseren lau baldintza hauek betetzen dituela:

(i) $\boldsymbol{AXA} = \boldsymbol{A}$

(ii) $\boldsymbol{XAX} = \boldsymbol{X}$

(iii) $(\boldsymbol{AX})^t = \boldsymbol{AX}$

(iv) $(\boldsymbol{XA})^t = \boldsymbol{XA}$

Ikus [20] liburuko 6.8.1. atala.

12. Izan bedi $\boldsymbol{A} \in \mathrm{I\!R}^{m\times n}$ matrizea eta $\boldsymbol{P} \in \mathrm{I\!R}^{m\times m}$ eta $\boldsymbol{Q} \in \mathrm{I\!R}^{n\times n}$ matrize ortogonalak. Froga ezazu $\|\boldsymbol{PAQ}\|_2 = \|\boldsymbol{A}\|_2$ betetzen dela.

13. Izan bedi $\boldsymbol{A} \in \mathrm{I\!R}^{m\times n}$ $r$ heineko matrize bat eta $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U\Sigma V}^t$ balio singularretako deskonposizioa, non $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$ balio singular ez-nuluak eta $\sigma_{r+1} = \ldots = \sigma_n = 0$ baitira.

(a) Froga ezazu $\|\boldsymbol{A}\|_2 = \|\boldsymbol{\Sigma}\|_2 = \sigma_1$.

(b) Froga ezazu $r = n$ bada, $\kappa_2(\boldsymbol{A}) = \sigma_1/\sigma_n$.

(c) Baldin balio singular ez-nuluak $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$ badira, froga ezazu $\boldsymbol{A} = \sigma_1\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_1^t + \sigma_2\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{v}_2^t + \ldots + \sigma_r\boldsymbol{u}_r\boldsymbol{v}_r^t$.

$\boldsymbol{A} = \widehat{\boldsymbol{U}}\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}\widehat{\boldsymbol{V}}^t$ adierazpenari *balio singularretako deskonposizio laburtu* deritzogu, non

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\Sigma}} &= \operatorname{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r\} \\ \widehat{\boldsymbol{U}} &= [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_r] \\ \widehat{\boldsymbol{V}} &= [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r] \end{aligned}$$

14. (a) Froga ezazu balio singularretako deskonposiziotik $\boldsymbol{AV} = \boldsymbol{U\Sigma}$ atera dezakegula.

(b) Aurreko berdintza erabiliz, froga ezazu $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A}$ eta $\boldsymbol{AA}^t$ autobalio berdinak dituztela eta balio singularren karratuak direla.

(c) Froga ezazu $\boldsymbol{A}$-ren heina $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A}$-ren heinaren berdina dela, eta hori dela balio singular ez-nuluen kopuruaren berdina.

15. (a) Froga ezazu espazio bektorial baten oinarri ortonormal baten bektoreak matrize ortogonal batez biderkatzean lortutako bektore berriek espazio horretako beste oinarri ortonormal bat ematen dutela.

    (b) Espazio bektorial baten $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ oinarri kanonikoa $\boldsymbol{Q}$ matrize ortogonal batez biderkatzen badugu, zein da lortzen den oinarri ortonormal berria?

16. Izan bedi $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $r$ heineko matrize bat eta $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^t$ balio singularretako deskonposizioa. Izan bitez $\boldsymbol{U} = [\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m]$ ezker bektore singularrak, $\boldsymbol{V} = [\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ eskuin bektore singularrak eta $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$ balio singular ez-nuluak eta $\sigma_{r+1} = \ldots = \sigma_p = 0$, non $p = \min\{m, n\}$.

    (a) Froga ezazu $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_r$ $\mathbb{R}^m$-ko bektoreak ortogonalak direla.

    (b) Kalkula ezazu $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A}$, eta hortik ondorioztatu nola kalkula ditzakezun $\sigma_i$ balio singularrak eta $\sigma_i > 0$ betetzen duten balioei dagozkien $\boldsymbol{v}_i$ eskuin bektore singularrak.

    (c) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}$ erabiliz, azaldu nola kalkula dezakezun $\sigma_i > 0$ bakoitzari dagokion $\boldsymbol{u}_i$ ezker bektore singularra.

    (d) Froga ezazu $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ $\mathbb{R}^m$-ko bektoreek $K(\boldsymbol{A})$ azpiespazioaren oinarri ortonormal bat osatzen dutela (kontuan hartu $\boldsymbol{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}$).

    (e) Froga ezazu $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ $\mathbb{R}^n$-ko bektoreek $K(\boldsymbol{A}^t)$ azpiespazioaren oinarri ortonormal bat osatzen dutela (kontuan hartu $\boldsymbol{A}^t$-ren balio singularretako deskonposiziotik $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Sigma}^t$ lortzen dela).

    (f) Froga ezazu $\boldsymbol{V}$ matrizeko $\boldsymbol{v}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ $\mathbb{R}^n$-ko zutabe-bektoreek $K(\boldsymbol{A}^t)^\perp$ azpiespazioaren oinarri ortonormal bat osatzen dutela (kontuan hartu $\boldsymbol{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}$).

    (g) Froga ezazu $\boldsymbol{U}$ matrizeko $\boldsymbol{u}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ $\mathbb{R}^m$-ko zutabe-bektoreek $K(\boldsymbol{A})^\perp$ azpiespazioaren oinarri ortonormal bat osatzen dutela (kontuan hartu $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Sigma}^t$).

    (h) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^t$ erabiliz, nola kalkula ditzakezu $\sigma_i$ balio singularrak eta $\sigma_i > 0$ betetzen duten balioei dagozkien $\boldsymbol{u}_i$ ezker bektore singularrak? Gero, nola kalkulatuko zenuke $\sigma_i > 0$ bakoitzari dagokion $\boldsymbol{v}_i$ ezker bektore singularra?

17. (a) Izan bedi matrize hau:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

    16. problemaren emaitzak erabiliz, aurkitu $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^t$ balio singularretako deskonposizioa, eta egiaztatu berdintza hori betetzen dela.

    (b) $\boldsymbol{b} = [3, 2, 1]^t$ bada, $\boldsymbol{A}$-ren deskonposizio hori aprobetxatuz, ebatzi $\min\limits_{\boldsymbol{x}} \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2$ minimo karratuen problema $\boldsymbol{x}$ soluzioa norma minimokoa izanik.

18. Izan bedi matrize hau:
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$
16. problemaren emaitzak erabiliz, aurkitu $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\Sigma\boldsymbol{V}^t$ balio singularretako deskonposizioa, eta egiaztatu berdintza hori betetzen dela.

**MATLABez programatzeko problemak:**

19. Sortu M fitxategi bat $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ sistema lineal bat ($\boldsymbol{A}$ karratua eta ez-singularra denean) ebazteko gai izan dadin $QR$ faktorizazioaren laguntzaz, baina $\boldsymbol{Q}$ matrize ortogonala eta Householderren matrizeak kalkulatu barik. Aldiz, gorde itzazu lortutako Householderren bektoreak $\boldsymbol{U}$ matrize batean.

    Programa horrek sistema hori ebazteko ondoz ondoko lan hauek egin behar ditu:

    (a) Programa horrek goiburu hau izan behar du:
    `function [U,R,x]=qrkes(A,b).`

    (b) Egiaztatu $\boldsymbol{A}$ karratua eta ez-singularra dela.

    (c) $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{A}$ eta $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b}$ kalkulatu behar ditu.

    (d) $\boldsymbol{Rx} = \boldsymbol{c}$ sistema ebatzi behar du. Lan hori egiteko, `atzerantz` funtzioa erabili.

20. Izan bedi sistema hau:
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & -6 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$
Egiaztatu `qrkes.m` funtzioa ondo dabilela aurreko sistema ebatziz. Egiaztatu emaitza.

21. Sortu M fitxategi bat $\min_x \|\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}\|_2$ minimo karratuen problema ebazteko, non $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eta $m > n$. $\boldsymbol{A}$ hein betekoa dela suposatuko dugu. Bi metodo erabiliko ditugu.

    - *Ekuazio normalen metodoa.* Kasu honetan, $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A}$ matrizea deskonposatu Choleskyren faktorizazioa erabiliz. Gero, `aurrerantz` eta `atzerantz` funtzioen bidez ebatzi sistema. Sortu funtzio berri hau:

      `function [h,x]=eknorm(A,b)`

    - *$QR$ metodoa.* Kasu honetan, aprobetxa dezakezu lehenengo ariketan egindako `qrkes` funtzioa. Baina orain $\boldsymbol{A}$ matrizea ez da karratua izan behar. Sortu funtzio berri hau:

      `function [h,x]=qrmkhb(A,b)`

    Bi metodoetan, $h$ hondar bektorearen bi-norma da.

22. Aurreko ariketan lortutako bi metodoak erabiliz, ebatzi $\min_x \|\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b}\|_2$ minimo karratuen problema balio hauetarako:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{eta} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Problema hau apunteetako 6.3. eta 6.4. adibideetan agertzen da.

## 5.2. Problema batzuen ebazpena

1. (i) eta (ii)

a) sistemaren ebazpena $QR$ deskonposizioa erabiliz.

1. urratsa: $\boldsymbol{a}_1 = [1,1,2]^t$, $\sigma_1 = zeinu(1)\|\boldsymbol{a}_1\|_2 = 2.4495$

Householderren bektorea: $\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1+2.4495 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.4495 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\rho_1 = 1/(\sigma_1 \boldsymbol{u}_1(1)) = 0.11835.$$

Householderren matrizea: $\boldsymbol{H}_1 = \mathbb{1} - \rho_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{u}_1^t = \begin{bmatrix} -0.40825 & -0.40825 & -0.81650 \\ -0.40825 & 0.88165 & -0.23670 \\ -0.81650 & -0.23670 & 0.52660 \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{A}^{(2)} = \boldsymbol{H}_1 \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2.44949 & -6.53197 & 2.85774 \\ 0 & 2.23670 & 3.24866 \\ 0 & -1.52660 & -5.50269 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}^{(2)} = \boldsymbol{H}_1 \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -2.8577 \\ 7.7221 \\ -8.5559 \end{bmatrix}$$

2. urratsa: $\tilde{\boldsymbol{a}}_2 = [2.2367, -1.5266]^t$, $\sigma_2 = zeinu(2.2367)\|\tilde{\boldsymbol{a}}_2\|_2 = 2.7080$

Householderren bektorea: $\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.2367+2.7080 \\ -1.5266 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4.9447 \\ -1.5266 \end{bmatrix}$

$$\rho_2 = 1/(\sigma_2 \boldsymbol{u}_2(2)) = 0.074681$$

Householderren matrizea: $\boldsymbol{H}_2 = \mathbb{1} - \rho_2 \boldsymbol{u}_2 \boldsymbol{u}_2^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.82596 & 0.56373 \\ 0 & 0.56373 & 0.82596 \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}^{(3)} = \boldsymbol{H}_2 \boldsymbol{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} -2.44949 & -6.53197 & 2.85774 \\ 0 & -2.70801 & -5.78530 \\ 0 & 0 & -2.71360 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}^t \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^{(3)} = \boldsymbol{H}_2 \boldsymbol{b}^{(2)} = \begin{bmatrix} -2.8577 \\ -11.2013 \\ -2.7136 \end{bmatrix}$$

Azkenik, $\boldsymbol{Rx} = \boldsymbol{Q}^t \boldsymbol{b}$ ebatziz, $\boldsymbol{x} = [-3 \quad 2 \quad 1]^t$ lortzen da.

b) sistemaren ebazpena $QR$ deskonposizioa erabiliz.

1. urratsa: $\rho_1 = 0.0070468$

   Householderren bektorea: $\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 12.9545 \\ 4 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}$

   Householderren matrizea: $\boldsymbol{H}_1 = \begin{bmatrix} -0.18257 & -0.36515 & -0.73030 & -0.54772 \\ -0.36515 & 0.88725 & -0.22550 & -0.16912 \\ -0.73030 & -0.22550 & 0.54901 & -0.33825 \\ -0.54772 & -0.16912 & -0.33825 & 0.74632 \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{A}^{(2)} = \boldsymbol{H}_1 \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -10.95445 & -10.22415 & -12.78019 & -8.39841 \\ 0 & -0.46573 & -1.25497 & -1.59321 \\ 0 & 0.06854 & 0.49006 & -0.18643 \\ 0 & 1.80141 & 2.61755 & 4.11018 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}^{(2)} = \boldsymbol{H}_1 \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -23.73464 \\ -1.25497 \\ 0.49006 \\ 2.61755 \end{bmatrix}$$

2. urratsa: $\rho_2 = 0.23074$

   Householderren bektorea: $\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2.32763 \\ 0.06854 \\ 1.80141 \end{bmatrix}$

   Householderren matrizea: $\boldsymbol{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.25014 & 0.03681 & 0.96751 \\ 0 & 0.03681 & 0.99892 & -0.02849 \\ 0 & 0.96751 & -0.02849 & 0.25122 \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{A}^{(3)} = \boldsymbol{H}_2\boldsymbol{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} -10.95445 & -10.22415 & -12.78019 & -8.39841 \\ 0 & 1.86190 & 2.86446 & 4.36830 \\ 0 & 0 & 0.36876 & -0.36198 \\ 0 & 0 & -0.57057 & -0.50358 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}^{(3)} = \boldsymbol{H}_2\boldsymbol{b}^{(2)} = \begin{bmatrix} -23.73464 \\ 2.86446 \\ 0.36876 \\ -0.57057 \end{bmatrix}$$

3. <u>urratsa</u>: $\rho_3 = 1.4044$

Householderren bektorea: $\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.04813 \\ -0.57057 \end{bmatrix}$

Householderren matrizea: $\boldsymbol{H}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.54280 & 0.83986 \\ 0 & 0 & 0.83986 & 0.54280 \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}^{(4)} = \boldsymbol{H}_3\boldsymbol{A}^{(3)} = \begin{bmatrix} -10.95445 & -10.22415 & -12.78019 & -8.39841 \\ 0 & 1.86190 & 2.86446 & 4.36830 \\ 0 & 0 & -0.67937 & -0.22646 \\ 0 & 0 & 0 & -0.57735 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^{(4)} = \boldsymbol{H}_3\boldsymbol{b}^{(3)} = \begin{bmatrix} -23.735 \\ 2.8645 \\ -0.67937 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Azkenik, $\boldsymbol{Rx} = \boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b}$ ebatziz, $\boldsymbol{x} = [1, 0, 1, 0]^t$ lortzen da.

4. (a) Ekuazio normalen bitartez ebazteko, kalkulu hauek gauzatu behar ditugu:

$$\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} \text{ eta } \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Gero, $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{b}$ ebatziz, $\boldsymbol{x}^* = [2, 1]^t$ lortzen dugu.

Bestalde, hondarraren norma euklidearra: $\min \|\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}\|_2 = \|\boldsymbol{Ax}^* - \boldsymbol{b}\|_2 = 2$.

(d) Bistan dago $\boldsymbol{A}$ matrizearen bigarren zutabea lehenengoa bider 2 dela; alegia, $\boldsymbol{A}$ hein urrikoa da.

Ekuazio normalen bitartez ebazteko, kalkulu hauek gauzatu behar ditugu:

$$\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 24 \end{bmatrix} \text{ eta } \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Sistema bateragarri zehaztugabe hau dugu:

$$\begin{aligned} 6x + 12y &= 6 \\ 12x + 24y &= 12 \end{aligned}$$

Soluzioek $x + 2y = 1$ bete behar dutenez, multzo hau da: $\mathcal{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1 - 2y\}$. Soluzio horien guztien artean norma euklidear minimoa duena funtzio honen minimoa kalkulatuz lortuko dugu:

$$f(y) = (1 - 2y)^2 + y^2 = 1 - 4y + 4y^2 + y^2 = 5y^2 - 4y + 1$$

deribatuz eta zerori berdinduz, $f'(y) = 10y - 4 = 0 \Rightarrow y = 0.4$ eta $f''(0.4) = 10 > 0$ denez, norma minimokoa $(0.2, 0.4)^t$ izango da.

$\boldsymbol{x}^* \in \mathcal{M}$ multzoko bikote guztientzat, jatorrizko sistemaren hondarraren norma euklidearra kalkulatuko dugu:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - 2y \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2y + 2y - 3 \\ 2 - 4y + 4y - 2 \\ -1 + 2y - 2y - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Beraz, hondarraren norma euklidearra: $\min \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2 = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b}\|_2 = 2.8284$ da.

5. (a) Householderren bektoreak: $\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 3.2361 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -4.4721 \\ 0 \end{bmatrix}.$

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} -0.4472 & 0.8944 & 0 \\ -0.8944 & -0.4472 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} -2.2361 & 2.2361 \\ 0 & 2.2361 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{R}_u = \begin{bmatrix} -2.2361 & 2.2361 \\ 0 & 2.2361 \end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -2.2361 \\ 2.2361 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad (\boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b})_u = \begin{bmatrix} -2.2361 \\ 2.2361 \end{bmatrix}$ eta hondarra $(\boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b})_l = 2$ da.

Orain, $\boldsymbol{R}_u\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b})_u$ sistema ebatziz, $\boldsymbol{x}^* = [2 \quad 1]^t$ lortzen da. Hondarraren norma euklidearra 2 da (aurreko 4.(a) ariketan lortu dugunaren berdina, bete behar duen bezala).

(d) $\boldsymbol{A}$ matrizeko bigarren zutabearen norma lehenengoarena baino handiagoa denez, biak trukatzen dira permutazio-matrize hau erabiliz:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Beraz, $\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ matrizeari $QR$ metodoa aplikatuko diogu. Householderren 1. bektorerako, $\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 6.8990 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ hau dugu:

$$\boldsymbol{H}_1 = \begin{bmatrix} -0.40825 & -0.81650 & 0.40825 \\ -0.81650 & 0.52660 & 0.23670 \\ 0.40825 & 0.23670 & 0.88165 \end{bmatrix},$$

eta, kasu horretan, zera lortzen da:

$$\boldsymbol{Q}\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{H}_1\overline{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} -4.8990 & -2.4495 \\ 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -2.4495 \\ -1.1596 \\ 2.5798 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{R}_{11} = [\,-4.8990 - 2.4495\,]$, $\boldsymbol{R}_{12} = [\,-2.4495\,]$. Laburtuz, [20] testuliburuko (6.22) adierazpenean bezala, hau lortu dugu:

$$\boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \widetilde{\boldsymbol{R}} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{11} & \boldsymbol{R}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{array}{l} r = 1 \\ m - r = 2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} r = 1 & n - r = 1 \end{array} \end{array}$$

Gainera, [20] liburuko (6.23) adierazpen hau dugu:

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2^2 = \|\boldsymbol{Q}^t(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b})\|_2^2 = \|(\boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})(\boldsymbol{P}^t\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b}\|_2^2$$

eta bektore hauek:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix} = \boldsymbol{P}^t\boldsymbol{x} \quad \text{eta} \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} \end{bmatrix} = \boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -2.4495 \\ -1.1596 \\ 2.5798 \end{bmatrix}, \text{ non } \boldsymbol{c} = -2.4495 \text{ eta } \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} -1.1596 \\ 2.5798 \end{bmatrix}.$$

Orain, [20] liburuko 6.3. algoritmoari jarraituz, honela jokatuko dugu oinarri-soluzioa kalkulatzeko:

3. eta 4. urratsetan $\boldsymbol{z} = 0$ hartzen badugu, $\boldsymbol{R}_{11}\boldsymbol{y}_B = \boldsymbol{c}$ ebazten dugu, hots: $\boldsymbol{y}_B = -2.4495/-4.8990 = 0.5$, eta

$$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}.$$

Jarraian, luzera minimoko soluzioa, $\boldsymbol{x}_{LM}$, kalkulatuko dugu, eta, horretarako, kontuan hartuko dugu [20] liburuko (6.25) adierazpena:

$$\|\boldsymbol{x}_{LM}\|_2 = \min_{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^{n-r}} \left\| \boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{11}^{-1}\boldsymbol{R}_{12} \\ -\mathbb{1}_{n-r} \end{bmatrix}\boldsymbol{z} \right\|_2.$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{11}^{-1}\boldsymbol{R}_{12} \\ -\mathbb{1}_{n-r} \end{bmatrix}\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.5 \\ -1 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} z \\ 0.5 - 0.5z \end{bmatrix}$$

Funtzio hau definituko dugu:

$$\begin{aligned} f(z) &= \|\boldsymbol{v}\|_2^2 = z^2 + (0.5 - 0.5z)^2 \\ &= z^2 + 0.25 - 0.5z + 0.25z^2 = 1.25z^2 - 0.5z + 0.25 \\ \Rightarrow f'(z) &= 2.5z - 0.5 = 0 \Rightarrow z = 0.2 \end{aligned}$$

eta $f''(0.2) > 0$ denez, $z = 0.2$rako $f(z)$-k heltzen du minimoa; ondorioz,

$$\boldsymbol{x}_{LM} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.5 - 0.5 \cdot 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{bmatrix}.$$

Hondarra $\|\boldsymbol{d}\|_2 = 2.8284$ da. Alegia, aurreko problemako emaitza berdinak lortu ditugu, izan behar zuen bezala.

6. Hona hemen atal desberdinen ebazpenak:

   (a) $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2.000001 \end{bmatrix}$ matrizearen autobalioak $\lambda_1 = 0.0000005$ eta $\lambda_2 = 4.0000005$ dira. Ondorioz:

   $$\kappa_2(\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A}) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} = \frac{4.0000005}{0.0000005} = 8.0 \cdot 10^6$$

   (b) $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1.414 & -1.414 \\ 0 & -0.001 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

   Dakigunez, $\kappa_2(\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A}) = \kappa_2(\boldsymbol{A})^2$, beraz: $\kappa_2(\boldsymbol{A}) = \sqrt{8.0 \cdot 10^6} = 2.828 \cdot 10^3$.
   Bestalde, $\boldsymbol{Q}$ ortogonala denez, $\kappa_2(\boldsymbol{R}) = \kappa_2(\boldsymbol{A})$ dugu, eta $\kappa_2(\boldsymbol{R}) = 2.828 \cdot 10^3$.

   (c) Argi ikusten denez, (a) eta (b) atalen arabera, ekuazio normalen matrizearen zenbakizko baldintza $\kappa_2(\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A}) = 8 \cdot 10^6$ da, eta, aldiz, $QR$ metodoa erabiliz gero dugun sistemaren baldintza $\kappa_2(\boldsymbol{R}) = 2.828 \cdot 10^3$ da; alegia, nahiko hobea da $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A}$-rena baino.

   (d) Kasu honetan, baldin lau zifra esangarriko aritmetika erabiltzen badugu, hau da $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{b}$ ekuazio normalen sistema:

   $$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4.001 \end{bmatrix}$$

   eta bistan dago ez duela soluziorik; ez ahaztu ekuazio normalak beti bateragarriak izan behar direla.

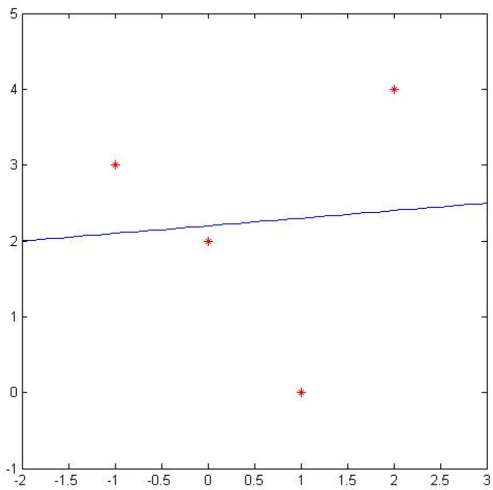
   Aldiz, $QR$ faktorizazioa erabiliz, $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -2.828 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dugu. Orduan, zera dugu:

   $$\begin{bmatrix} -1.414 & -1.414 \\ 0 & -0.001 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.828 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Beraz, sistema horren hondarra 0 da, eta $\begin{bmatrix} -1.414 & -1.414 \\ 0 & -0.001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.828 \\ -1 \end{bmatrix}$ sistema bakarrik ebatzi behar dugu. Emaitza hau da:

$$x_1 = -998, \quad x_2 = 1000.$$

7. (a) Datu horiei doitutako $f(x) = ax + b$ funtzioa kalkulatzeko, $\min \|\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}\|_2$ problema ebatzi behar dugu, non $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ eta $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ baitira. Orduan, $\boldsymbol{x}^*$ aurkitu daiteke ekuazio normalak ebatziz: $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{b}$. Hortik $\boldsymbol{x}^* = [0.1 \quad 2.2]^t$ lortzen da. Hondarraren norma euklidearra $\|\boldsymbol{Ax}^* - \boldsymbol{b}\|_2 = 2.9496$ da. Ondorioz, eskatutako ekuazio lineala hau da: $y = 0.1x + 2.2$.




9. (a) $QR$ faktorizazioa erabiltzen da. Eragiketak laburtzeko, $\boldsymbol{P} = \mathbb{1}$ hartuko dugu; hots, kasu honetan ez dugu zutabeen trukaketarik egingo. $\boldsymbol{A}$ matrizearen $QR$ faktorizazioa eginez gero, hau lortzen da:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} -0.5774 & 0.7071 & 0.4082 \\ -0.5774 & 0 & -0.8165 \\ -0.5774 & -0.7071 & 0.4082 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} -1.7321 & -1.7321 & -4.3301 \\ 0 & 1.4142 & 0.7071 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Orduan, $\boldsymbol{Q}_u = \begin{bmatrix} -0.5774 & 0.7071 \\ -0.5774 & 0 \\ -0.5774 & -0.7071 \end{bmatrix}$ matrizearen zutabeek $K(\boldsymbol{A})$ azpiespazioaren oinarri bektoriala osatzen dute.

(b) Bestalde, $\boldsymbol{Q}_l = \begin{bmatrix} 0.4082 \\ -0.8165 \\ 0.4082 \end{bmatrix}$ matrizearen zutabeak $K(\boldsymbol{A})^{\perp}$ azpiespazioaren oinarri bektoriala osatzen du.

(c) $\boldsymbol{R}$-ren egitura kontuan hartuz, $\boldsymbol{R}_{11} = \begin{bmatrix} -1.7321 & -1.7321 \\ 0 & 1.4142 \end{bmatrix}$ eta $\boldsymbol{R}_{12} \begin{bmatrix} -4.3301 \\ 0.7071 \end{bmatrix}$ (ikus [20] liburuko 6.6. atala). Bestalde $\boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -5.1962 \\ -2.8284 \\ 0 \end{bmatrix}$, orduan, $\boldsymbol{c} = [-5.1962 \quad -2.8284]^t$ eta hondarra $d = 0$ da.

Orain, $\boldsymbol{R}_{11}\boldsymbol{y}_B = \boldsymbol{c}$ ebatziz, $\boldsymbol{y}_B = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$. Beraz,

$$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{P} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(d) $\boldsymbol{x}_{LM}$ kalkulatzeko, [20] liburuko (6.25) adierazpena kontuan hartzen dugu. Bektore hau kalkulatuko dugu:

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{P} \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{11}^{-1}\boldsymbol{R}_{12} \\ -\mathbb{1} \end{bmatrix} z.$$

Horretarako, $\boldsymbol{R}_{11}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{R}_{12}$ sistema ebazten dugu, $\boldsymbol{w} = [2 \quad 0.5]$ lortuz. Hortaz,

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0.5 \\ -1 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 5 - 2z \\ -2 - 0.5z \\ z \end{bmatrix}$$

eta $\|\boldsymbol{q}\|_2^2 = f(z) = (5 - 2z)^2 + (-2 - 0.5z)^2 + z^2 = 5.25z^2 - 18z + 29$ funtzio horren minimoa $z^* = 1.7143$ da.

Ondorioz, zera dugu:

$$\boldsymbol{x}_{LM} = \begin{bmatrix} 5 - 2 \cdot 1.7143 \\ -2 - 0.5 \cdot 1.7143 \\ 1.7143 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5714 \\ -2.8571 \\ 1.7143 \end{bmatrix}.$$

13. (a) $\|\boldsymbol{A}\|_2 = \max\limits_{\|\boldsymbol{x}\|_2=1} \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2$ kontuan hartuko dugu. Beraz, $\|\boldsymbol{x}\|_2 = 1$ betetzen duen edozein $\boldsymbol{x}$ hartuz, zera dugu:

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2 &= \|\boldsymbol{U}\Sigma\boldsymbol{V}^t\boldsymbol{x}\|_2 = \|\Sigma\boldsymbol{V}^t\boldsymbol{x}\|_2, && \boldsymbol{U} \text{ ortogonola izateagatik} \\ &\leq \|\Sigma\|_2\|\boldsymbol{V}^t\boldsymbol{x}\|_2 = \|\Sigma\|_2\|\boldsymbol{x}\|_2, && \boldsymbol{V}^t \text{ ortogonola izateagatik} \\ &= \|\Sigma\|_2, && \|\boldsymbol{x}\|_2 = 1 \text{ izateagatik.} \end{aligned}$$

Beraz, $\|\boldsymbol{A}\|_2 \leq \|\boldsymbol{\Sigma}\|_2$ dela frogatu dugu. Frogatzeko $\|\boldsymbol{A}\|_2 \geq \|\boldsymbol{\Sigma}\|_2$ betetzen dela, $\boldsymbol{U}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\Sigma}$ dugula erabiliz lortzen da, lehen bezala jokatuz. Hortaz, $\|\boldsymbol{A}\|_2 = \|\boldsymbol{\Sigma}\|_2$ frogatu dugu.

Bestalde, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n > 0$ badugu, argi dago $\|\boldsymbol{\Sigma}\|_2 = \max\limits_{\|\boldsymbol{x}\|_2=1} \|\boldsymbol{\Sigma x}\|_2 = \|\boldsymbol{\Sigma e}_1\|_2 = \sigma_1$ betetzen dela ($\boldsymbol{e}_1 = [1, 0, \ldots, 0]^t \in \mathbb{R}^n$).

(b) Dakigunez, $\kappa_2(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\|_2\|\boldsymbol{A}^+\|_2$ dugu, eta $\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Sigma}^+\boldsymbol{U}^t$ da $\boldsymbol{A}$ matrizearen sasi-alderantzizko matrizea. Kontuan hartu, matrize diagonal hau genuenez,

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix},$$

orain hau dugula:

$$\boldsymbol{\Sigma}^+ = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & & & & \vdots \\ & 1/\sigma_2 & & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1/\sigma_n & \vdots \end{bmatrix}.$$

Aurreko atalean, $\|\boldsymbol{Ax}\|_2 = \|\boldsymbol{\Sigma}\|_2$ frogatzeko jokatu dugun bezala, honetan ere joka dezakegu $\|\boldsymbol{A}^+\|_2 = \|\boldsymbol{\Sigma}^+\|_2$ frogatzeko. Kasu honetan, argi dago hau betetzen dela:

$$\|\boldsymbol{\Sigma}^+\|_2 = \max_{\|\boldsymbol{x}\|_2=1} \|\boldsymbol{\Sigma}^+\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{\Sigma}^+\boldsymbol{e}_n\|_2 = 1/\sigma_n$$

non $\boldsymbol{e}_n = [0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0]^t \in \mathbb{R}^m$, bata $n$. posizioan egonik.

Hortaz, $\kappa_2(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\|_2\|\boldsymbol{A}^+\|_2 = \|\boldsymbol{\Sigma}\|_2\|\|\boldsymbol{\Sigma}^+\|_2 = \sigma_1/\sigma_n$.

(c) Hau betetzen da:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U\Sigma V}^t = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_m] \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & & & \\ & \sigma_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \sigma_r & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1^t \\ \boldsymbol{v}_2^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_r^t \\ \boldsymbol{v}_{r+1}^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_n^t \end{bmatrix}$$

$$= \underset{m\times n}{[\sigma_1\boldsymbol{u}_1, \sigma_2\boldsymbol{u}_2, \ldots, \sigma_r\boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{0}, \ldots, \boldsymbol{0}]} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1^t \\ \boldsymbol{v}_2^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_r^t \\ \boldsymbol{v}_{r+1}^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_n^t \end{bmatrix}$$

$$= \sigma_1\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_1^t + \sigma_2\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{v}_2^t + \ldots + \sigma_r\boldsymbol{u}_r\boldsymbol{v}_r^t$$

$$= [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_r] \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1^t \\ \boldsymbol{v}_2^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_r^t \end{bmatrix}$$

$= \widehat{\boldsymbol{U}}\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}\widehat{\boldsymbol{V}}^t$, balio singularretako deskonposizio laburtua.

17. (a) Gogora dezagun $\boldsymbol{U}$ eta $\boldsymbol{V}$ ortogonalak direla eta $\boldsymbol{\Sigma}$ diagonala; orduan:

$$\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{U\Sigma V}^t)^t(\boldsymbol{U\Sigma V}^t) = \boldsymbol{V\Sigma}^t\boldsymbol{U}^t\boldsymbol{U\Sigma V}^t = \boldsymbol{V\Sigma}^t\boldsymbol{\Sigma V}^t = \boldsymbol{V\Lambda V}^t,$$

non $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Sigma}^t\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Ondorioz, $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V\Lambda V}^t$ dugu, non $\boldsymbol{V}$ ortogonala baita eta $\boldsymbol{\Lambda}$ diagonala; hortaz, hau betetzen da:

$$\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{AV} = \boldsymbol{V\Lambda},$$

eta $\boldsymbol{V}$-ren edozein $i$ zutabetarako $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_i = \lambda_i\boldsymbol{v}_i$ dugu. Hots, $\lambda_i$ da $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A}$ matrizearen $i$. autobalioa, eta $\boldsymbol{v}_i$ da horri dagokion autobektore unitario bat.

Problema honetan $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ da, eta zera lortzen dugu:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 1$$

$\lambda_1 = 3$-ri dagokion autobektore unitario bat aurkituko dugu:

$$\begin{bmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$(x, y) = (t, t)$ eta unitarioa izateko $\boldsymbol{v}_1 = (x, y) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

$\lambda_2 = 1$-i dagokion autobektore unitarioa honela kalkulatzen da:

$$\begin{bmatrix} 2-1 & 1 \\ 1 & 2-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$(x, y) = (t, -t)$ eta unitarioa izateko $\boldsymbol{v}_2 = (x, y) = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

$i$ guztietarako $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ denez, $\sigma_1 = \sqrt{3}$ eta $\sigma_2 = 1$.

Ondorioz, $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dugu, eta $\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Bestalde, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^t$ balio singularretako deskonposiziotik $\boldsymbol{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}$ ateratzen dugu, eta zutabez zutabe hartzen badugu, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_i = \sigma_i \boldsymbol{u}_i$ dugu; hortaz:

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1/\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} /\sqrt{3} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_2/\sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} /1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Baina, $\boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ denez eta $\boldsymbol{u}_1$ eta $\boldsymbol{u}_2$ lehenengo bi zutabeak direnez, kalkulatu behar dugu falta den hirugarren zutabea, $\boldsymbol{u}_3$. Dakigunez, $\boldsymbol{u}_3$ horrek $\boldsymbol{u}_1$ eta $\boldsymbol{u}_2$ bektoreekiko ortogonala izan behar du, eta unitarioa; alegia:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1^t \boldsymbol{u}_3 &= \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \\ \boldsymbol{u}_2^t \boldsymbol{u}_3 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Hortik, soluzioa $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ t \end{bmatrix}$ da, eta unitario bihurtuz, $\boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$ lortzen dugu; eta $\boldsymbol{U}$ hau da:

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Hala ere, $\boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$ ere izan liteke. Alegia, balio singularretako deskonposizio osoa, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^t$, ez da bakarra. Aldiz, balio singularrak bai, bakarrak dira.

Balio singularretako deskonposizio laburtua hau da problema honetan:

$$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2] \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1^t \\ \boldsymbol{v}_2^t \end{bmatrix} = \widehat{\boldsymbol{U}}\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}\widehat{\boldsymbol{V}}^t,$$

non $\widehat{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{V}$.

(b) Alde hau ebazteko, kontuan hartuko dugu [20] liburuko 6.8.3 atala. Minimo karratuen probleman $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U\Sigma V}^t$ deskonposizio izanez gero, zera betetzen da:

$$\|\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}\|_2 = \|\boldsymbol{U\Sigma V}^t\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2 = \|\boldsymbol{U}^t(\boldsymbol{U\Sigma V}^t\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b})\|_2 = \|\boldsymbol{\Sigma V}^t\boldsymbol{x} - \boldsymbol{U}^t\boldsymbol{b}\|_2,$$

non $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{V}^t\boldsymbol{x}$ eta $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{U}^t\boldsymbol{b}$ definituz, hau lortzen baitugu:

$$\|\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}\|_2 = \|\boldsymbol{\Sigma y} - \boldsymbol{z}\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{\Sigma}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} \end{bmatrix} \right\|_2,$$

hortik, $w_i = c_i/\sigma_i,\ \ i = 1, \ldots, r$, eta hondarra $\|\boldsymbol{d}\|_2$ direla ondorioztatzen dugu. Beraz, problema honetan zera dugu:

$$\|\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}\|_2 = \|\boldsymbol{\Sigma y} - \boldsymbol{z}\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{\Sigma}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} [\,\boldsymbol{y}\,] - \begin{bmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} \end{bmatrix} \right\|_2,$$

hortik, $y_i = c_i/\sigma_i,\ \ i = 1, 2$, eta hondarra $\|\boldsymbol{d}\|_2 = 0$. Ondorioz, problema honetarako hau dugu:

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{U}^t\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\sqrt{3}/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Orduan,

$$y_1 = (3\sqrt{3}/\sqrt{2})/\sqrt{3} = 3/\sqrt{2} \quad \text{eta} \quad y_2 = (1/\sqrt{2})/1 = 1/\sqrt{2}.$$

Beraz,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Vy} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

# 6. kapitulua

# Ekuazio ez-linealen sistemen ebazpena

Ikasgai honetan aldagai anitzeko problemekin arituko gara, eta gure helburu nagusia izango da ekuazio ez-linealen sistemak ebaztea. Newtonen metodoarekin hasiko gara.

Izan bedi $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ funtzioa eta $\boldsymbol{f} \in C^1$ (hots, lehenengo ordenako deribatu partzial guztiak funtzio jarraituak dira), non $f_1, \dots, f_n$ bere osagaiak baitira. Ebatzi behar dugun ekuazioa zera da:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}. \tag{6.1}$$

Aldagai bateko funtzioen kasurako bezala, hemen ere metodo iteratibo bat erabiliko dugu $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ puntu batetik abiatuz. Demagun $k$-garren iterazioan dagoela prozesu hori; orduan, puntu horren inguruan, hau da Taylorren lehenengo ordenako garapena:

$$\boldsymbol{M}_k(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_k)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k),$$

non $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_k)$ matrizea $\boldsymbol{f}$-ren jacobiarra baita $\boldsymbol{x}_k$ puntuan (hots, $\boldsymbol{f}$-ren lehenengo ordenako deribatua da puntu horretan); honela definitzen da:

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_k) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_k) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f_1(\boldsymbol{x}_k)^t \\ \vdots \\ \nabla f_n(\boldsymbol{x}_k)^t \end{bmatrix}$$

Jarraian, (6.1) ekuazioan $\boldsymbol{f}(x)$-ren ordez $\boldsymbol{x}_k$-ren inguruko $\boldsymbol{M}_k(\boldsymbol{x})$ hurbilpen lineala jarriko dugu; alegia:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_k)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k) = \mathbf{0}.$$

Ekuazio horren soluzioa $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_k)^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)$ denez, hau da Newtonen metodoaren iterazioa:

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_k)^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k). \tag{6.2}$$

Newtonen $\boldsymbol{p}_k = \boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}_k$ urratsak $\boldsymbol{p}^* = \boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}_k$-ren hurbilpen bat ematen digu.

Beraz, iterazio bakoitzean sistema lineal hau ebatzi behar da:

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{p}_k = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k), \tag{6.3}$$

eta, gero, hau kalkulatu:

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{p}_k.$$

Baina, Newtonen metodorako aldaera batzuk existitzen dira; metodoari elkartutako (6.3) sistemaren definizioan eta ebazpenean desberdintzen dira. Horien guztien helburua da algoritmoaren fase hori murriztea, eta, horretarako, $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_k)$ matrize jacobiarra hurbiltzen da era desberdinetan; horrela, metodo hauek erabiliko ditugu:

- Diferentzia finituzko Newtonen metodoa: jacobiarra diferentzia finituen bitartez kalkulatzen da.
- Newtonen metodo aldatua: iterazio guztietan hasierako puntuko jacobiarra erabiltzen da.
- Jacobiren aldaera: jacobiarra bere diagonalera murrizten da, diagonaleko gaiak besteekin konparatuz nahiko handiak direnean.
- Gauss-Seidelen aldaera: matrize jacobiarra bere diagonalarekin eta diagonalaren azpiko azpimatrizearekin hurbiltzen da.
- Quasi-Newton metodoak, bereziki Broyden-en metodoa. Diferentzia finituzko Newtonen metodoko iterazio bakoitzean, jacobiarraren hurbilpena egiteko, $n^2 + n$ funtzio-balioztatze egin behar ditugu ($n^2$, jacobiarra kalkulatzeko, eta $n$, funtzioaren balioa kalkulatzeko), eta sistema lineala ebazteko $O(n^3)$ eragiketa gehiago. Ahalegin konputazionalaren kopuru hori handiegia da, $n$ txikia izan ezean. Quasi-Newton metodoak dira sistema ez-linealak ebazteko ebakitzailearen metodoaren hedatze arrakastatsuenak. Iterazio bakoitzean $n$ funtzio-balioztatze bakarrik behar izango ditugu, $O(n^2)$ eragiketa aritmetikorekin. Besteak beste, Broyden-en metodoa lantzen da problemetan.

Dakigunez, funtzio deribagarri baten minimoak kalkulatzeko, puntu kritikoak ebazten dira ekuazio ez-linealen sistema bat ebatziz: gradientea berdin zero. Beraz, aurreko metodoak aprobetxatzen ditugu puntu kritikoak kalkulatzeko, eta puntu kritiko batean gradientearen deribatua, jatorrizko funtzioaren matrize hessiarra, definitu positiboa bada, funtzioaren minimo bat izango dugu. Aldiz, definitu negatiboa bada, maximo bat. Horrek errazten digu murrizketarik gabeko optimizazio arloan sartzeko bidea. Hor ikusten dira metodo global batzuk, eta haiek, urrats egoki bat egiteko (metodo globala izateko), bete behar dituzten Armijo-Goldstein-en (edo Wolfe-ren) baldintzak.

Azkenik, minimo karratu ez-linealen problema ebazteko, kontuan hartzen ditugu Newtonen metodoa eta Gauss-Newtonen eta Levenberg-Marquardt-en metodoak.

## 6.1. Problemak

1. Ebatzi sistema hau Newtonen metodoaz [20] liburuko 7.1. algoritmoa erabiliz, $(x_0, y_0, z_0) = (0.5, 0.5, 0.5)$ hartuz:

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ f_2(x,y,z) &= 2x^2 + y^2 - 4z = 0 \\ f_3(x,y,z) &= 3x^2 - 4y + z^2 = 0. \end{aligned}$$

   Bigarren urratsa egiteko, $LU$ metodoa erabili.

   Baldin $\boldsymbol{f}(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z))$ bada, bukatu iteratzeko prozesua $\|\boldsymbol{f}(x,y,z)\|_\infty < 6 \cdot 10^{-5}$ denean.

2. Ebatzi sistema hau Newtonen algoritmoaz, $(x_0, y_0) = (1.5, 1.5)$ hartuz:

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ f_2(x,y) &= e^{x-1} + y^3 - 2 = 0. \end{aligned}$$

   Baldin $\boldsymbol{f}(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ bada, bukatu iteratzeko prozesua $\|\boldsymbol{f}(x,y)\|_\infty < 10^{-4}$ denean.

3. Izan bedi sistema hau:

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= x^2 - y - 0.2 = 0 \\ f_2(x,y) &= y^2 - x - 0.3 = 0. \end{aligned}$$

   Ebatzi sistema hori Newtonen metodoaz, $(x_0, y_0) = (1.2, 1.2)$ hartuz; egin bi iterazio bakarrik. Orain, $(x_0, y_0) = (-0.2, -0.2)$ hartu, eta egin Newtonen metodoaren lehenengo bi iterazioak.

4. Ebatzi hirugarren problema, diferentzia finituzko Newtonen metodoaz.

5. Ebatzi hirugarren problema, Broydenen metodoaz.

6. Kalkulatu Broydenen metodoaren lehenengo hiru iterazioak sistema honetarako:

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= x_1 + x_2 - 3 &= 0 \\ f_2(x,y) &= x_1^2 + x_2^2 - 9 &= 0, \end{aligned}$$

   $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0)^t = (2, 7)^t$ eta $\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_0)$ hartuz. Zein da $\|\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2\|$ zehaztasuna? Eta errorea (hots, $\|(f_1(\boldsymbol{x}_3), f_2(\boldsymbol{x}_3))\|$)?

7. Izan bedi sistema hau:

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ f_2(x,y) &= xy - 1 = 0. \end{aligned}$$

   (a) Egiaztatu $(1,1)$ eta $(-1,-1)$ sistema horren soluzioak direla.

(b) Zelako arazoak ager daitezke Newtonen metodoa aplikatzen saiatzen bagara soluzio horiek kalkulatzeko?

8. Aurkitu sistema ez-lineal hauen soluzio bat, Newtonen metodoa erabiliz:

$$(a)\quad \begin{array}{l} x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 + 8 = 0, \\ x_1x_2^2 + x_1 - 10x_2 + 8 = 0; \qquad \text{hartu} \quad (x_0, y_0) = (1.2, 1.2). \end{array}$$

$$(b)\quad \begin{array}{l} 3x_1^2 - x_2^2 = 0, \\ 3x_1x_2^2 - x_1^3 - 1 = 0; \qquad \text{hartu} \quad (x_0, y_0) = (0.5, 0.5). \end{array}$$

Ebatzi sistema horiek Newtonen metodoaz, eta bukatu $\|\boldsymbol{f}(x,y)\|_\infty < 10^{-3}$ denean. Sistema bakoitzean, zenbat iterazio erabili ditugu? Zein da zehaztasun erlatiboa? Zein da konbergentziaren ordena?

9. Ebatzi aurreko problemako $(a)$ eta $(b)$ sistemak Broydenen metodoaz, eta bukatu $\|\boldsymbol{f}(x,y)\|_\infty < 10^{-3}$ denean. Sistema bakoitzean, zenbat iterazio erabili ditugu? Zein da zehaztasun erlatiboa? Zein da konbergentziaren ordena?

10. (a) Froga ezazu $f(\boldsymbol{x}) = x^2 - y^4 + 1$ funtzioak koordenatu-jatorrian zela-puntu bat duela. Hots, koordenatu-jatorria puntu kritikoa dela, baina ez dela minimo bat ezta maximo bat ere.
    (b) Zer gertatzen da Newtonen metodoa aplikatzen badugu zela-puntu hori kalkulatzeko?

11. Izan bedi optimizazioko problema hau:

$$\min\ 5x^2 + 5y^2 - xy - 11x + 11y + 11.$$

    (a) Aurkitu minimo izateko lehenengo ordenako baldintza beharrezkoak betetzen dituen puntu bat (hots, puntu kritiko bat).
    (b) Froga ezazu puntu hori minimo globala dela.
    (c) Zein izango litzateke gradiente-metodoaren konbergentzia-ratioa problema honi aplikatzen badiogu?
    (d) Gradiente-metodoko zenbat iterazio erabili behar ditugu gutxienez, funtzio errorea $10^{-11}$ bider gutxitzeko?

12. Izan bedi helburu-funtzio hau: $f(\boldsymbol{x}) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2, \quad \boldsymbol{x}_0 = (1,1)^t$.
    (a) Zein da $f$-rako beherapen azkarreneko norabidea $\boldsymbol{x}_0$-tik?
    (b) $(1,-1)^t$ norabide beherakorra da?
    (c) Lehenengo ataleko norabide beherakorrerako, eta atzeranzko bilaketa lineala erabiliz, aurkitu $\lambda$ onargarri bat $\lambda_0 = 1$, $\rho = 0.5$ eta $\alpha = 0.1$ hartuz.

13. Izan bedi optimizazioko problema hau: $\min f(x,y) = 3x^2 + y^4$.

(a) Gradiente-metodoaren iterazio bat aplikatu $\boldsymbol{x}_0 = (1,-2)^t$ hartuz, eta, $\lambda$ aurkitzeko, atzeranzko bilaketa lineala erabili $\lambda = 1$, $\rho = 0.5$ eta $\alpha = 0.1$ hartuz.

(b) Errepikatu (a)-ren kalkulua, baina orain $\lambda = 1$, $\rho = 0.1$ eta $\alpha = 0.1$ hartuz. Konparatu kalkuluetan kostatu dena aurreko atalean kostatu denarekin.

(c) Orain, egin Newtonen metodoaren iterazio bat (a) ataleko baldintza berdinekin $\lambda$ onargarria kalkulatzeko. Zer gertatu da? Konparatu kalkuluetan kostatu dena aurreko ataletan kostatu denarekin.

14. Izan bedi helburu-funtzio hau: $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 3x$.

(a) Aurkitu $f$-ren minimo lokal bat.

(b) Zergatik da (a)-ren soluzioa minimo global bat?

(c) Gradientearen metodoa aplikatzen badugu (a) ataleko minimoa aurkitzeko, zein izango litzateke helburu-funtzioaren konbergentzia-ratioa?

15. Aurkitu gradiente-metodoaren konbergentzia-ratioa aplikatzen diogunean problema honi:

$$\min f(x,y) = x^2 + 1.999xy + y^2.$$

16. Frogatu $\phi(\boldsymbol{x}) = x_1^2 - x_2^4 + 1$ funtzioak zela-puntu bat daukala jatorrian. Zer gertatzen da Newtonen metodoa aplikatzen badugu zela-puntu hori aurkitzeko?

17. Rosenbrock-en funtzioa $\phi(\boldsymbol{x}) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1-x_1)^2$ da, eta minimo bakar bat dauka; zein da? Aplikatu gradientearen metodoa, $\boldsymbol{x}_0 = (0,0)^t$-tik hasiz, iterazio bat bakarrik eginez, eta atzeranzko bilaketa erabiliz, $\lambda = 1$, $\rho = 0.5$ eta $\alpha = 0.1$ hartuz. Zein da gutxi gorabehera konbergentzia-ratioa? Zenbat iterazio behar ditu, gutxi gorabehera, funtzio-errorea $10^{-6}$ bider gutxitzeko?

18. Rosenbrocken $\phi(\boldsymbol{x}) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1-x_1)^2$ funtzioaren minimo bakarra kalkulatzeko, erabili Newtonen metodoa eta BFGS metodoa bi iteraziotan zehar. Bi kasuetan, atzeranzko bilaketa erabiliz, $\lambda = 1$, $\rho = 0.5$ eta $\alpha = 0.1$ hartuz, eta $\boldsymbol{x}_0 = (0,0)^t$. Zein metodo hurbildu da gehiago soluziora?

19. Doitu $d = \phi(t,\boldsymbol{x}) = x_1 e^{-x_2 t}$ funtzioa $t_i = -1, 0, 1, 2$ puntuetan $d_i = 2.7, 1, 0.4, 0.1$ balioei. Horretarako, erabili Gauss-Newtonen bi iterazio $\boldsymbol{x} = (1,1)^t$ puntutik. Bilaketa linealerako, erabili atzeranzko bilaketa, $\lambda = 1$, $\rho = 0.5$ eta $\alpha = 10^{-4}$ hartuz.

20. Froga ezazu [20] liburuko 7.4.3. ataleko (7.35) eta (7.36) adierazpenak, $\boldsymbol{d}_k$ kalkulatzeko, baliokideak direla.

21. Izan bedi $\boldsymbol{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, non $r_i = e^{t_i x} - y_i$, $i = 1,2,3$, eta $f(x) = \frac{1}{2}\boldsymbol{r}(x)^t \boldsymbol{r}(x)$, non datu hauek baititugu:

$$(t_1, y_1) = (1,2) \quad (t_2, y_2) = (2,4) \quad (t_3, y_3) = (3, \cdot).$$

Jo dezagun $y_3$-ren balioak eta $x_0$ hasierako puntuak balio hauek har ditzaketela:

(a) $y_3 = 8$ eta $x_0 = 1$.

(b) $y_3 = -1$ eta $x_0 = 0$.

Ebatzi problema hau (a) eta (b) kasuetan, Newtonen metodoaz eta Gauss-Newtonen metodoaz, urratsaren luzera aldatu barik (hots, $\lambda$ erabili gabe). Metodo bakoitzeko, bukatu iterazioak $\|\nabla f(\boldsymbol{x}_k)\|_\infty < 10^{-5}$ denean. Zer gertatzen da kasu bakoitzean? Zergatik?

**MATLABez programatzeko problemak:**

22. Ekuazio ez-linealen sistemetarako, [20] liburuko 7.1. Newtonen metodoaren algoritmoa dugu. Eraiki M-fitxategi bat goiko algoritmoa inplementatzeko. Fitxategi horren izena `snewton.m` izango da.

    (a) Gogora ezazue goiburu hau izan behar duela:

    `function [x,nf,err,ze,i]=snewton(x0,emax,zemax,imax)`,

    non `nf` funtzio-balioztatze kopurua baita.

    (b) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ bektorea kalkulatzeko, funtzio bat definitu behar da M-fitxategi baten bidez, `fun.m` izenekoa (ez ahaztu bektoreak zutabeak direla idazkera matrizialean).

    (c) Era antzeko batean kalkulatzen da $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$-ren deribatua; hots, $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$ matrizea kalkulatzeko, M-fitxategi bat eraikitzen da, `Jfun.m` izenekoa.

    (d) Lehenengo urratsean $\boldsymbol{x}_k$ punturako $\boldsymbol{f}$ funtzioaren eta $\boldsymbol{J}$ deribatuaren balioak kalkulatzen dira iterazio horretan.

    (e) Algoritmo horren 2. urratsean, [20] liburuko (7.3) Newtonen sistema ebatzi behar dugu. Urrats horretan, erabili *LU* deskonposizioa eta aurreranzko eta atzeranzko ebazpenak.

    (f) Sistema ebatzi eta gero, $\boldsymbol{x}_{k+1}$ berria izango dugu; hor (4. urratsean) erabiliko dugun norma infinitu-norma izango da. $\|\boldsymbol{p}_k\|_\infty/\|\boldsymbol{x}_{k+1}\|_\infty < ze$ edo $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{k+1})\|_\infty < emax$ edo $i = imax$ denean, gelditu egiten da; bestela, 1. urratsera joango da.

    (g) Izan bedi $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x^2+y^2-2 \\ e^{x-1}+y^3-2 \end{bmatrix}$. Ebatzi $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ sistema Newtonen metodoaz, zuk eraikitako kodearen bitartez. Hartu $\boldsymbol{x}_0 = (2,2)^t$, $ze = 10^{-6}$, $emax = 10^{-6}$ eta $imax = 20$.

23. (a) Eraiki `J=dfjfun(x)` goiburuko M-fitxategi bat, $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$ matrize jakobiarra hurbiltzeko diferentzia finituzko metodoak erabiliz; ikus [20] liburuko 7.2.1. atala, non $h = \sqrt{\varepsilon_M}$ (MATLABen `eps`$=\varepsilon_M$ da).

    (b) Aurreko kodea ondo ibiltzen dela egiaztatu eta gero, eraiki beste kode bat, non $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$ matrize jakobiar hurbildu hori baita. Haren goiburua hau izango da:

    `function [x,nf,err,ze,i]=dfnewton(x0,emax,zemax,imax)`,

    non `nf` funtzio-balioztatze kopurua baita.

Funtzio horrek Newtonen metodoaren funtzioarena egingo du, baina berari matrize jacobiar hurbildua emanez, ez benetakoa. Berak jacobiarraren balio hurbildua lortuko du, `dfjfun.m` erabiliz.

(c) Ebatzi aurreko ariketaren azken atala, parametro berdinekin, `dfnewton` funtzioa erabiliz. Gero, kodean, aldatu $h$-ren balioa $h = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$ desberdinetarako, eta, taula batez, konparatu bere eraginkortasuna: iterazio kopurua eta funtzio-balioztatze kopurua.

24. Inplementatu [20] liburuko 7.2. algoritmoa: Quasi-Newton metodoa, matrize hessiarra Broydenen metodoaz eguneratuz. Haren goiburua hau izango da:

    `function [x,nf,err,ze,i]=qnewton(x0,emax,zemax,imax)`,

    non `nf` funtzio-balioztatze kopurua baita.

    Ebatzi 22. ariketako (g) atala, parametro berdinekin, `qnewton` funtzioa erabiliz.

25. Konparatu 22.(g) ataleko problemarako 22.-24. ariketetako hiru kodeen eraginkortasuna, taula bat sortuz eta zutabe bakoitzean metodo bakoitzerako funtzio-balioztatze kopurua eta iterazio kopurua idatziz. Zer ondorio atera dezakezu?

## 6.2. Problema batzuen ebazpena

1. Sistema ebazteko 6.1. algoritmoari jarraitzen diogu.

   $\boldsymbol{x}_0 = [0.5 \quad 0.5 \quad 0.5]^t$ dugu eta $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = [f_1(\boldsymbol{x}) \quad f_2(\boldsymbol{x}) \quad f_3(\boldsymbol{x})]^t$, non

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ f_2(x,y,z) &= 2x^2 + y^2 - 4z = 0 \\ f_3(x,y,z) &= 3x^2 - 4y + z^2 = 0. \end{aligned}$$

$\underline{i = 0}$ denean,

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = \begin{bmatrix} -0.25 \\ -1.25 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\|_\infty = 1.25 > 6.0{\cdot}10^{-5}$ denez, $\boldsymbol{x}_1$ bektore berri bat kalkulatu behar dugu. Orduan, $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_0)$ kalkulatuko dugu:

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{p}_0 = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ sistema LU metodoaz ebaztean, hau dugu:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.66667 & 1 & 0 \\ 0.33333 & 0.63636 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 0 & 3.66667 & -4.66667 \\ 0 & 0 & 3.63636 \end{bmatrix},$$

hau lortuz:

$$\boldsymbol{p}_0 = \begin{bmatrix} 0.375 \\ 0 \\ -0.125 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{p}_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.375 \\ 0 \\ -0.125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.875 \\ 0.5 \\ 0.375 \end{bmatrix}$$

$\underline{i = 1}$ denean,

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) = \begin{bmatrix} 0.15625 \\ 0.28125 \\ 0.43750 \end{bmatrix}$$

$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)\|_\infty = 0.43750 > 6.0 \cdot 10^{-5}$ denez, $\boldsymbol{x}_2$ bektore berri bat kalkulatu behar dugu. Orduan, $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_1)$ kalkulatuko dugu:

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_1) = \begin{bmatrix} 1.75 & 1 & 0.75 \\ 3.5 & 1 & -4 \\ 5.25 & -4 & 0.75 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)$ sistema LU metodoaz ebaztean, hau dugu:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.66667 & 1 & 0 \\ 0.33333 & 0.63636 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 5.25 & -4 & 0.75 \\ 0 & 3.66667 & -4.5 \\ 0 & 0 & 3.36364 \end{bmatrix},$$

hau lortuz:

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} -0.0851834 \\ -0.0033784 \\ -0.0050676 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 0.875 \\ 0.5 \\ 0.375 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.0851834 \\ -0.0033784 \\ -0.0050676 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.78982 \\ 0.49662 \\ 0.36993 \end{bmatrix}$$

$\underline{i = 2}$ denean,

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2) = \begin{bmatrix} 0.0072933 \\ 0.0145238 \\ 0.0217943 \end{bmatrix}$$

$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)\|_\infty = 0.0217943 > 6.0 \cdot 10^{-5}$ denez, $\boldsymbol{x}_3$ bektore berri bat kalkulatu behar dugu. Orduan, $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_2)$ kalkulatuko dugu:

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_2) = \begin{bmatrix} 1.57963 & 0.99324 & 0.73986 \\ 3.15927 & 0.99324 & -4 \\ 4.73890 & -4 & 0.73986 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{p}_2 = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)$ sistema LU metodoaz ebaztean, hau dugu:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.66667 & 1 & 0 \\ 0.33333 & 0.63569 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 4.73890 & -4 & 0.73986 \\ 0 & 3.65991 & -4.49324 \\ 0 & 0 & 3.34956 \end{bmatrix},$$

hau lortuz:

$$\boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} -4.6062 \cdot 10^{-3} \\ -1.0229 \cdot 10^{-5} \\ -9.6016 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} 0.78982 \\ 0.49662 \\ 0.36993 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4.6062 \cdot 10^{-3} \\ -1.0229 \cdot 10^{-5} \\ -9.6016 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.78521 \\ 0.49661 \\ 0.36992 \end{bmatrix}$$

$\underline{i=3}$ denean,

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_3) = \begin{bmatrix} 2.1217 \cdot 10^{-5} \\ 4.2434 \cdot 10^{-5} \\ 6.3650 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$$

$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_3)\|_\infty = 6.3650 \cdot 10^{-5} > 6.0 \cdot 10^{-5}$ denez, $\boldsymbol{x}_4$ bektore berri bat kalkulatu behar dugu. Orduan, $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_3)$ kalkulatuko dugu:

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_3) = \begin{bmatrix} 1.57042 & 0.99322 & 0.73985 \\ 3.14084 & 0.99322 & -4 \\ 4.71126 & -4 & 0.73985 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_3)\boldsymbol{p}_3 = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_3)$ sistema LU metodoaz ebaztean, hau dugu:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.66667 & 1 & 0 \\ 0.33333 & 0.63569 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 4.71126 & -4 & 0.73985 \\ 0 & 3.65989 & -4.49323 \\ 0 & 0 & 3.34953 \end{bmatrix},$$

hau lortuz:

$$\boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix} -1.3510 \cdot 10^{-5} \\ -6.2612 \cdot 10^{-11} \\ -4.1393 \cdot 10^{-11} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_4 = \boldsymbol{x}_3 + \boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix} 0.78521 \\ 0.49661 \\ 0.36992 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1.3510 \cdot 10^{-5} \\ -6.2612 \cdot 10^{-11} \\ -4.1393 \cdot 10^{-11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.78520 \\ 0.49661 \\ 0.36992 \end{bmatrix}$$

$\underline{i=4}$ denean,

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_4) = \begin{bmatrix} 1.8253 \cdot 10^{-10} \\ 3.6505 \cdot 10^{-10} \\ 5.4758 \cdot 10^{-10} \end{bmatrix}$$

$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_4)\|_\infty = 5.4758 \cdot 10^{-10} < 6.0 \cdot 10^{-5}$ denez, bilatzen ari ginen $\boldsymbol{x}^*$-ren hurbilpena $\boldsymbol{x}_4$ da.

Beraz, lau iterazio horietan, $\boldsymbol{x}_4 = [0.7852 \quad 0.4966 \quad 0.3699]^t$ lortu dugu, eta $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_4)\|_\infty = 5.4758 \cdot 10^{-10}$.

3. $\boldsymbol{x}_0 = [1.2 \quad 1.2]^t$ badugu, $\boldsymbol{x}_1 = [1.1924 \quad 1.2218]^t$ eta $\boldsymbol{x}_2 = [1.1923 \quad 1.2216]^t$. Bestalde, $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)\|_\infty = 6.1333 \cdot 10^{-8}$ dugu.

   $\boldsymbol{x}_0 = [-0.2 \quad -0.2]^t$ badugu, $\boldsymbol{x}_1 = [-0.2905 \quad -0.1238]^t$ eta $\boldsymbol{x}_2 = [-0.2861 \quad -0.1182]^t$. Bestalde, $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)\|_\infty = 3.1610 \cdot 10^{-5}$ dugu.

4. Hirugarren probleman, $\boldsymbol{x}_0 = [1.2 \quad 1.2]^t$ kasurako, diferentzia finituzko Newtonen metodoaren lehenengo bi iterazioak garatuko ditugu.

   Sistema ebazteko [20] liburuko 7.1. algoritmoari jarraituko diogu, baina jacobiarra diferentzia finituen bidez hurbiltzen da $h_j = 0.01x_j$ hartuz. Horretarako, [20] testuliburuko (7.13) adierazpena erabiliko dugu zutabe bakoitza kalkulatzeko.

   $\boldsymbol{x}_0 = [1.2 \quad 1.2]^t$ dugu eta $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = [f_1(\boldsymbol{x}) \quad f_2(\boldsymbol{x})]^t$, non

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= x^2 - y - 0.2 = 0 \\ f_2(x,y) &= y^2 - x - 0.3 = 0. \end{aligned}$$

$\underline{i=0}$ denean,

$$\boldsymbol{f}([1.2,1.2]^t) = \begin{bmatrix} 0.04 \\ -0.06 \end{bmatrix}$$

$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\|_\infty = 0.06$.

Orain, $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_0)$-ren $\boldsymbol{A}_0$ hurbilpena kalkulatuko dugu zutabez zutabe:

$$\boldsymbol{a}_1 = \frac{\boldsymbol{f}([1.2,1.2]^t + 0.01\cdot 1.2[1,0]^t) - \boldsymbol{f}([1.2,1.2]^t)}{0.01\cdot 1.2} = [2.412,-1]^t$$

$$\boldsymbol{a}_2 = \frac{\boldsymbol{f}([1.2,1.2]^t + 0.01\cdot 1.2[0,1]^t) - \boldsymbol{f}([1.2,1.2]^t)}{0.01\cdot 1.2} = [-1,2.412]^t$$

Ondorioz, $\boldsymbol{A}_0 = \begin{bmatrix} 2.412 & -1 \\ -1 & 2.412 \end{bmatrix}$ lortu dugu.

$\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{p}_0 = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ sistema LU metodoaz ebaztean, hau dugu:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0.41459 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 2.41200 & -1 \\ 0 & 1.99741 \end{bmatrix},$$

hau lortuz:

$$\boldsymbol{p}_0 = \begin{bmatrix} -0.0075720 \\ 0.0217363 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{p}_0 = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.0075720 \\ 0.0217363 \end{bmatrix} = [\,1.19241.2217\,]$$

$\underline{i=1}$ denean,

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) = \begin{bmatrix} 1.4820\cdot 10^{-4} \\ 2.1163\cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)\|_\infty = 2.1163\cdot 10^{-4}$ denez, $\boldsymbol{x}_2$ bektore berri bat kalkulatu behar dugu.

Orain, $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_1)$-ren $\boldsymbol{A}_1$ hurbilpena kalkulatuko dugu zutabez zutabe:

$$\boldsymbol{a}_1 = \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1 + 0.01\cdot 1.1924[1,0]^t) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)}{0.01\cdot 1.1924} = [2.3968,-1]^t$$

$$\boldsymbol{a}_2 = \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1 + 0.01\cdot 1.2217[0,1]^t) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)}{0.01\cdot 1.2217} = [-1,2.4557]^t$$

Ondorioz, $\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 2.3968 & -1 \\ -1 & 2.4557 \end{bmatrix}$ lortu dugu.

$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)$ sistema LU metodoaz ebaztean, hau dugu:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0.41723 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 2.39678 & -1 \\ 0 & 2.03846 \end{bmatrix},$$

hau lortuz:

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} -1.1780 \cdot 10^{-4} \\ -1.3415 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 1.1924 \\ 1.2217 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1.1780 \cdot 10^{-4} \\ -1.3415 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1923 \\ 1.2216 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2) = \begin{bmatrix} 1.4186 \cdot 10^{-6} \\ 1.657 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)\|_\infty = 1.657 \cdot 10^{-6}$. Aurreko ariketan, Newtonen metodoaz, bigarren iterazioan errorea $10^{-8}$ ordenakoa zen, eta funtzioaren balioa 7 bider kalkulatu behar izan dugu.

5. Hirugarren probleman, $\boldsymbol{x}_0 = [1.2 \quad 1.2]^t$ kasurako Broydenen metodoaren lehenengo bi iterazioak garatuko ditugu; ikus [20] liburuko 7.2. algoritmoa.

   $\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_0) = \begin{bmatrix} 2.4 & -1 \\ -1 & 2.4 \end{bmatrix}.$

   **0. iterazioan** zera kalkulatzen da:

   $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = [0.04 \quad -0.06]^t$,

   $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\|_\infty = 0.06$.

   **1. iterazioan** zera egiten da:

   $\boldsymbol{A}_0^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5042 & 0.2101 \\ 0.2101 & 0.5042 \end{bmatrix},$

   $\boldsymbol{s}_0 = -\boldsymbol{A}_0^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = [-0.007563 \quad 0.02185]^t$,

   $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{s}_0 = [1.1924 \quad 1.2218]^t$.

   $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) = \begin{bmatrix} 5.7199 \cdot 10^{-5} \\ 4.7737 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$

   $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)\|_\infty = 4.7737 \cdot 10^{-4}$.

   **2. iterazioan** zera egiten da: lehenengo, $\boldsymbol{A}_1^{-1}$ lortzen dugu Broyden-en metodoaren urratsei jarraituz (ikus [20] liburuko 7.2. algoritmoa).

   $\boldsymbol{A}_1^{-1} = \boldsymbol{A}_0^{-1} + \dfrac{(\boldsymbol{s}_0 - \boldsymbol{A}_0^{-1}\boldsymbol{y}_0)\boldsymbol{s}_0^t\boldsymbol{A}_0^{-1}}{\boldsymbol{s}_0^t\boldsymbol{A}_0^{-1}\boldsymbol{y}_0}$ kalkulatzeko, honako hau egingo dugu:

   $\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = [0.039943 \quad 0.060477]^t$,

   $\boldsymbol{z} = -\boldsymbol{A}_0^{-1}\boldsymbol{y}_0 = [-0.0074339 \quad -0.0221014]^t$,

   $p = -\boldsymbol{s}_0^t\boldsymbol{z}_0 = 5.3911 \cdot 10^{-4}$,

   $\boldsymbol{C} = \dfrac{(\boldsymbol{s}_0 + \boldsymbol{z})\boldsymbol{s}_0^t\boldsymbol{A}_0^{-1}}{p} = \begin{bmatrix} -1.8605 \cdot 10^{-4} & -2.2580 \cdot 10^{-3} \\ -3.6411 \cdot 10^{-4} & -4.4190 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$ eta

   $\boldsymbol{A}_1^{-1} = \boldsymbol{A}_0^{-1} + \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0.50402 & 0.20783 \\ 0.20972 & 0.49978 \end{bmatrix}.$

   Orain $\boldsymbol{x}_2$ kalkulatzen da:

   $\boldsymbol{s}_1 = -\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) = [-1.2804 \cdot 10^{-4} \quad -2.5058 \cdot 10^{-4}]^t$, eta azkenik,

$\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{s}_1 = [1.1923 \quad 1.2216]^t$.

Bestalde, $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)\|_\infty = \|(2.4353 \cdot 10^{-6}, -6.8625 \cdot 10^{-6})\|_\infty = 6.8625 \cdot 10^{-6}$.

Beraz, errorea handixeagoa da aurreko problemetako metodoek kalkulatutakoa baino. Aldiz, kasu honetan, funtzioaren balioa 3 bider bakarrik kalkulatu behar izan du, eta jacobiarra hasieran (bere ordez identitatea ere erabil daiteke); baina 4. probleman funtzioaren balioa 7 bider kalkulatu behar izan dugu, eta 3.ean matrize jacobiar zehatza iterazio bakoitzean eta 3 funtzio-balio. Edonola ere, ez ahaztu Broydenen metodoek konbergentzia superlineala dutela, hasierako puntua errotik nahiko hurbil badago eta iterazio bakoitzean funtzioa behin batean balioztatzen dela.

7. (a) $f_1(1,1) = 0$ eta $f_2(1,1) = 0$ dugunez, $(1,1)$ sistemaren soluzio bat da.

   $f_1(-1,-1) = 0$ eta $f_2(-1,-1) = 0$ dugunez, $(-1,-1)$ sistemaren beste soluzio bat da.

   (b) Jakobiarrak soluzioen inguruan ia singularrak direnez, Newtonen metodoaren konbergentzia okerragoa da.

9. (a) Zortzigarren probleman

$$\begin{aligned} x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 + 8 = 0, \\ x_1x_2^2 + x_1 - 10x_2 + 8 = 0; \end{aligned}$$

sistema ebatzi behar dugu $\boldsymbol{x}_0 = [1.2, 1.2]^t$ hasierako punturako, Broyden-en metodoaz; ikus [20] liburuko 7.2. algoritmoa. Onartzen den $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)\|_\infty$ errorearen balio maximoa 0.001 da. Demagun

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 + 8 \\ x_1x_2^2 + x_1 - 10x_2 + 8 \end{bmatrix}$$

Matrize jacobiarra hau da:

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 10 & 2x_2 \\ x_2^2 + 1 & 2x_1x_2 - 10 \end{bmatrix}$$

Orduan, Broydenen metodoaz, hau egin behar dugu:

$$\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_0) = \begin{bmatrix} -7.6 & 2.4 \\ 2.44 & -7.12 \end{bmatrix}.$$

**0. iterazioan** zera kalkulatzen da:

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = [-1.12, -1.072]^t$,

$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\|_\infty = 1.12 > 0.001$.

**1. iterazioan** zera egiten da: $\boldsymbol{A}_0^{-1} = \begin{bmatrix} -0.147546 & -0.049735 \\ -0.050564 & -0.157493 \end{bmatrix}$,

$\boldsymbol{s}_0 = -\boldsymbol{A}_0^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = [-0.21857, -0.22546]^t$,

$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{s}_0 = [0.98143, 0.97454]^t$.

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) = \begin{bmatrix} 0.098606 \\ 0.168160 \end{bmatrix}$

$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)\|_\infty = 0.168160$.

Zehaztasun erlatiboa (ze) honela kalkulatuko dugu:

$ze_1 = \dfrac{\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}_1\|_\infty} = 0.22973$

**2. iterazioan** zera egiten da: lehenengo, $\boldsymbol{A}_1^{-1}$ lortzen dugu Broyden-en metodoaren urratsei jarraituz (ikus [20] liburuko 7.2. algoritmoa).

$\boldsymbol{A}_1^{-1} = \boldsymbol{A}_0^{-1} + \dfrac{(\boldsymbol{s}_0 - \boldsymbol{A}_0^{-1}\boldsymbol{y}_0)\boldsymbol{s}_0^t\boldsymbol{A}_0^{-1}}{\boldsymbol{s}_0^t\boldsymbol{A}_0^{-1}\boldsymbol{y}_0}$ kalkulatzeko, honako hau egingo dugu:

$\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = [1.2186, 1.2402]^t$,

$\boldsymbol{z} = -\boldsymbol{A}_0^{-1}\boldsymbol{y}_0 = [0.24148, 0.25693]^t$,

$p = -\boldsymbol{s}_0^t\boldsymbol{z}_0 = 0.11071$,

$\boldsymbol{C} = \dfrac{(\boldsymbol{s}_0 + \boldsymbol{z})\boldsymbol{s}_0^t\boldsymbol{A}_0^{-1}}{p} = \begin{bmatrix} 0.0090336 & 0.0095987 \\ 0.0124076 & 0.0131838 \end{bmatrix}$ eta

$\boldsymbol{A}_1^{-1} = \boldsymbol{A}_0^{-1} + \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -0.138513 & -0.040136 \\ -0.038156 & -0.144310 \end{bmatrix}$.

Orain, $\boldsymbol{x}_2$ kalkulatzen da:

$\boldsymbol{s}_1 = -\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) = [0.020407, 0.028030]^t$, eta azkenik,

$\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{s}_1 = [1.0018, 1.0026]^t$. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2) = \begin{bmatrix} -0.0095780 \\ -0.0168272 \end{bmatrix}$

Bestalde, $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)\|_\infty = 0.016827 > 0.001$ eta $ze_2 = \dfrac{\|\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}_2\|_\infty} = 0.027958$.

**3. iterazioan** $\boldsymbol{A}_2^{-1}$ lortzen dugu adierazpen honen bitartez:

$\boldsymbol{A}_2^{-1} = \boldsymbol{A}_1^{-1} + \dfrac{(\boldsymbol{s}_1 - \boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{y}_1)\boldsymbol{s}_1^t\boldsymbol{A}_1^{-1}}{\boldsymbol{s}_1^t\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{y}_1}$ kalkulatzeko, honako hau egingo dugu:

$\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) = [-0.10818, -0.18499]^t$,

$\boldsymbol{z} = -\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{y}_1 = [-0.022410, -0.030823]^t$,

$p = -\boldsymbol{s}_1^t \boldsymbol{z}_1 = 0.0013213,$

$\boldsymbol{C} = \dfrac{(\boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{z})\boldsymbol{s}_1^t \boldsymbol{A}_1^{-1}}{p} = \begin{bmatrix} 0.0059036 & 0.0073701 \\ 0.0082383 & 0.0102847 \end{bmatrix}$ eta

$\boldsymbol{A}_2^{-1} = \boldsymbol{A}_1^{-1} + \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -0.132609 & -0.032766 \\ -0.029918 & -0.134025 \end{bmatrix}.$

Orain $\boldsymbol{x}_3$ kalkulatzen da:

$\boldsymbol{s}_2 = -\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2) = [-0.0018215, -0.0025418]^t$, eta azkenik,

$\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{s}_2 = [1.0000, 1.0000]^t.$

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_3) = \begin{bmatrix} -9.9675 \cdot 10^{-05} \\ -1.5168 \cdot 10^{-04} \end{bmatrix}$

Bestalde, $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_3)\|_\infty = 1.5168e-04 < 0.001$ eta $ze_3 = \dfrac{\|\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}_3\|_\infty} = 0.0025418$; beraz, eskatutako baldintza betetzen da $\boldsymbol{x}_3$ bektorerako; hots, 3 iterazio erabiliz.

Gainera, $ze_1, ze_2$ eta $ze_3$ zehaztasun erlatiboen balioak aztertuz, konbergentzia lineala dela ikus daiteke. Bestalde, erraz egiaztatzen da sistemaren soluzio zehatza $\boldsymbol{x}^* = (1,1)^t$ dela; beraz, hau dugu:

$$\frac{\|\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}^*\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}^*\|_\infty} = 0.038.$$

Ondorioz, konbergentzia superlineala dela esan daiteke. Iterazio gehiago eginez gero, are argiago ikusten da konbergentzia superlineala.

11. (a) $f(x,y) = 5x^2 + 5y^2 - xy - 11x + 11y + 11$ funtzioaren minimoa kalkulatzeko, lehenengo ordenako baldintza gradientea $\mathbf{0}$ izatea denez, hau dugu:

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 10x - y - 11 \\ -x + 10y + 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sistemaren emaitza bakarra $(x,y) = (1,-1)^t$ puntu kritikoa da.

(b) Bikote hori minimoa izateko baldintza nahikoa $\nabla^2 f(x,y)$ definitu positiboa izatea da. Matrize hessiarra kalkulatuko dugu:

$$\boldsymbol{Q} = \nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 10 & -1 \\ -1 & 10 \end{bmatrix}$$

eta bistan dago definitu positiboa dela. Sylvester-en irizpideaz: $10 > 0$ eta $10^2 - 1 = 9 > 0$. Hori $\mathbb{R}^2$ multzoko puntu guztietarako gertatzen denez, $(1,-1)^t$ puntu kritikorako ere bai. Ondorioz, puntu horretan funtzioak balio minimoa heltzen du. Globala da, zeren, ikusi dugunaren arabera, matrize hessiarra definitu positiboa baita planoko puntu guztietarako; beraz, konbexua da, eta minimo lokala ere globala da eta bakarra.

(c) Konbergentzia-ratioa kalkulatzeko, $\boldsymbol{Q}$ matrizearen autobalioak kalkulatuko ditugu:

$$\det\begin{vmatrix} 10-\lambda & -1 \\ -1 & 10-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 20\lambda + 99 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 11,\ \lambda_2 = 9$$

Ondorioz, $r = \kappa(\boldsymbol{Q}) = 11/9$ $\boldsymbol{Q}$ matrizearen baldintza da, eta:

$$\text{konbergentzia-ratioa} = \left(\frac{r-1}{r+1}\right)^2 = \left(\frac{11/9-1}{11/9+1}\right)^2 = 0.01.$$

(d) Gradienteko metodoak zenbat iterazio behar ditu, gutxienez, funtzio-errorea $10^{-11}$ bider gutxitzeko?

Iterazio baterako [20] liburuko (7.28) adierazpen hau dugu:

$$f(\boldsymbol{x}_{k+1}) - f(\boldsymbol{x}^*) \leq \left(\frac{r-1}{r+1}\right)^2 (f(\boldsymbol{x}_k) - f(\boldsymbol{x}^*))$$

Beraz, $n$ iteraziotarako:

$$f(\boldsymbol{x}_{k+n}) - f(\boldsymbol{x}^*) \leq \left(\frac{r-1}{r+1}\right)^{2n} (f(\boldsymbol{x}_k) - f(\boldsymbol{x}^*))$$

Hori dela eta, hau betetzen bada, funtzio-errorea $10^{-11}$ bider txikituko da:

$$\left(\frac{r-1}{r+1}\right)^{2n} < 10^{-11} \Rightarrow 0.01^n < 10^{-11} \Rightarrow 10^{-2n} < 10^{-11} \Rightarrow -2k < -11 \Rightarrow k > 5.5.$$

Alegia, $k = 6$ iteraziorekin funtzio-errorea $10^{-11}$ bider txikiagoa izango da.

13. (a) $f(\boldsymbol{x}) = 3x^2 + y^4$ funtzioaren minimoa kalkulatzeko, gradientearen metodoa aplikatuko dugu $\boldsymbol{x}_0 = (1,-2)^t$ hartuz. Minus gradientearen norabidean egin behar dugun $\lambda > 0$ urratsaren luzera kalkulatzeko, atzeranzko bilaketari jarraituko diogu. Alegia, gradientearen metodoa aplikatzeko, $\boldsymbol{x}_0 = [1,-2]^t$ denez, $\boldsymbol{x}_1$ kalkulatzeko, $\lambda = 1$ hartuko dugu, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda\boldsymbol{d}$, non norabidea hau izan behar baita:

$$\boldsymbol{d}_0 = -\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \begin{bmatrix} -6 \\ 32 \end{bmatrix}$$

eta $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda\boldsymbol{d}_0 = [-5, 30]^t$ izango dugu. Orain, [20] liburuko (7.29) desberdintza (Armijoren baldintza) betetzen bada, $\boldsymbol{x}$ hori onartuko dugu; bestela $\lambda = \rho\lambda$ egingo dugu, eta $\boldsymbol{x}$ berri bat kalkulatuko $\boldsymbol{x}$ onargarria izan arte. Hau da, [20] liburuko (7.29) adierazpena kasu honi aplikatuta:

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \lambda\boldsymbol{d}_0) \leq f(\boldsymbol{x}_0) + \alpha(\nabla f(\boldsymbol{x}_0)^t\boldsymbol{d}_0)\lambda.$$

Alegia, alde batetik:

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \lambda\boldsymbol{d}_0) = f(-5, 30) = 810075$$

eta, bestetik:

$$f(\boldsymbol{x}_0) + \alpha(\nabla f(\boldsymbol{x}_0)^t \boldsymbol{d}_0)\lambda = 19 + 0.1(-1060)1 = -87$$

eta Armijoren baldintza ez da betetzen. Beraz, $\lambda = 0.5 \cdot 1 = 0.5$ erabiliko dugu, eta hau lortuko:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{d}_0 = [1, -2]^t + 0.5[-6, 32]^t = [-2, 14]^t,$$

$$f(\boldsymbol{x}) = 38428$$

$$f(\boldsymbol{x}_0) + \alpha(\nabla f(\boldsymbol{x}_0)^t \boldsymbol{d}_0)\lambda = 19 + 0.1(-1060)0.5 = 19 - 53 = -34$$

eta Armijoren baldintza ez da betetzen. Beraz, $\lambda = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25$ erabiliko dugu, eta hau lortuko:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{d}_0 = [1, -2]^t + 0.25[-6, 32]^t = [-0.5, 6]^t,$$

$$f(\boldsymbol{x}) = 1296.8$$

$$f(\boldsymbol{x}_0) + \alpha(\nabla f(\boldsymbol{x}_0)^t \boldsymbol{d}_0)\lambda = 19 + 0.1(-1060)0.25 = 19 - 26.5 = -7.5$$

eta Armijoren baldintza ez da betetzen. Beraz, $\lambda = 0.5 \cdot 0.25 = 0.125$ erabiliko dugu, eta hau lortuko:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{d}_0 = [1, -2]^t + 0.125[-6, 32]^t = [0.25, 2]^t,$$

$$f(\boldsymbol{x}) = 16.188$$

$$f(\boldsymbol{x}_0) + \alpha(\nabla f(\boldsymbol{x}_0)^t \boldsymbol{d}_0)\lambda = 19 + 0.1(-1060)0.125 = 19 - 13.25 = 5.75$$

eta Armijoren baldintza ez da betetzen. Beraz, $\lambda = 0.5 \cdot 0.125 = 0.0625$ erabiliko dugu, eta hau lortuko:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{d}_0 = [1, -2]^t + 0.0625[-6, 32]^t = [0.625, 0]^t,$$

$$f(\boldsymbol{x}) = 1.1719$$

$$f(\boldsymbol{x}_0) + \alpha(\nabla f(\boldsymbol{x}_0)^t \boldsymbol{d}_0)\lambda = 19 + 0.1(-1060)0.0625 = 19 - 6.625 = 12.375$$

Beraz, Armijoren baldintza betetzen da, eta $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x} = [0.625, 0]^t$ izango da.

(b) Aurreko atalarekiko aldaketa bakarra $\rho = 0.1$ da. (a) atalean ikusi dugu $\lambda = 1$ handiegia zela. Beraz, orain $\lambda = \rho\lambda = 0.1 \cdot 1 = 0.1$ hartuko dugu, eta kalkulu hauek egingo ditugu [20] liburuko (7.29) Armijoren baldintza betetzen den ala ez aztertzeko:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{d}_0 = [1, -2]^t + 0.1[-6, 32]^t = [0.4, 1.2]^t,$$

$$f(\boldsymbol{x}) = 2.5536$$

$$f(\boldsymbol{x}_0) + \alpha(\nabla f(\boldsymbol{x}_0)^t \boldsymbol{d}_0)\lambda = 19 + 0.1(-1060)0.1 = 19 - 10.6 = 8.4$$

Beraz, Armijoren baldintza betetzen da, eta, kasu honetan, $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x} = [0.4, 1.2]^t$ izango da.

Ikusi dugunez, kasu honetan 2 saiotan $\boldsymbol{x}$ onargarri bat lortu dugu; aldiz, (a) atalean 5 saio erabili behar izan ditugu. Hala ere, $\lambda$-ren balioa azkarregi txikitzeak baztertu ditzake urrats onargarri handiagoak, eta horrek atzeratu dezake minimoaren kalkulua.

(c) Newtonen metodoa aplikatzeko, sistema hau ebatzi behar dugu:

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{d} = -\nabla f(\boldsymbol{x}_0) \text{ eta gero, hau egin: } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{d}.$$

Kasu honetan, hauek dira matrize hessiarra eta gradientea $\boldsymbol{x}_0$ puntuan:

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}_0) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 48 \end{bmatrix} \qquad \nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \begin{bmatrix} 6 \\ -32 \end{bmatrix}$$

eta sistemari dagokion soluzioa

$$\boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} -1.00000 \\ 0.66667 \end{bmatrix};$$

hortaz,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} -1.00000 \\ 0.66667 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.33333 \end{bmatrix}.$$

Orain, Armijoren baldintza betetzen duen aztertuko dugu:

$$f(\boldsymbol{x}) = 3.1605$$

eta

$$f(\boldsymbol{x}_0) + \alpha(\nabla f(\boldsymbol{x}_0)^t \boldsymbol{d})\lambda = 19 + 0.1(-27.333)1 = 16.2667;$$

beraz, Armijoren baldintza betetzen da zuzenean, $\lambda$ gutxitu barik. Hori gertatzen da $\boldsymbol{x}_0$ puntua $\boldsymbol{x}^*$-ren ingurune batean dagoelako, non Newtonen metodoaren konbergentzia koadratikoa edo ia koadratikoa baita. Arrazoi horregatik, Newtonen metodo aldatuetan (quasi-Newton metodoak bezala), bilaketa linealean komeni da hasieran $\lambda = 1$ hartzea.

15. Gradientearen metodorako problema koadratiko honen konbergentzia-ratioa aurkitu behar dugu:

$$\min f(x, y) = x^2 + 1.999xy + y^2.$$

Horretarako, $f(x, y)$ funtzio koadratikoari dagokion $\boldsymbol{Q}$ matrize hessiarra da, hots:

$$\boldsymbol{Q} = \nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 1.999 \\ 1.999 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrize horren autobalioak honela kalkulatuko ditugu:

$$\det(\boldsymbol{Q} - \lambda \mathbb{1}) = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1.999 \\ 1.999 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1.999^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3.999, \quad \lambda_2 = 0.001.$$

Beraz, hau da $\boldsymbol{Q}$ matrizearen baldintza:

$$r = \kappa = \frac{3.999}{0.001} = 3999,$$

eta hau konbergentzia-ratioa:

$$\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2 = 0.9990.$$

Alegia, oso gutxi txikitzen da $|f(\boldsymbol{x}_k) - f(\boldsymbol{x}^*)|$ errorea iterazio bakoitzean; ikus [20] liburuko (7.28) adierazpena.

17. Berreketa karratuengatik $\phi(\boldsymbol{x}) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$ funtzioak har dezakeen balio txikiena 0 da, eta hori heltzen du $\boldsymbol{x}^* = [1,1]^t$ puntuan.

$$\nabla\phi(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} -400x_1(x_2 - x_1^2) - 2(1 - x^2) \\ 200(x_2 - x_1^2) \end{bmatrix}$$

Gradientearen metodoa aplikatzeko, $\boldsymbol{x}_0 = [0,0]^*$ denez, $\boldsymbol{x}$ onargarri bat kalkulatzeko $\lambda = 1$ hartuko dugu, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{d}_0$, non norabidea hau izan behar baita:

$$\boldsymbol{d}_0 = -\nabla\phi(\boldsymbol{x}_0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

eta $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{d}_0 = [2,0]^t$ izango dugu. Orain [20] liburuko (7.29) desberdintza (Armijoren baldintza) betetzen bada, $\boldsymbol{x}$ hori onartuko dugu; bestela, $\lambda = \rho\lambda$ egingo dugu, eta $\boldsymbol{x}$ berri bat kalkulatuko, $\boldsymbol{x}$ onargarria izan arte. Hau da [20] liburuko (7.29) adierazpena kasu honi aplikatuta:

$$\phi(\boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{d}_0) \leq \phi(\boldsymbol{x}_0) + \alpha(\nabla\phi(\boldsymbol{x}_0)^t \boldsymbol{d}_0)\lambda.$$

Alegia, alde batetik:

$$\phi(\boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{d}_0) = \phi(2,0) = 1601$$

eta, bestetik:

$$\phi(\boldsymbol{x}_0) + \alpha(\nabla\phi(\boldsymbol{x}_0)^t \boldsymbol{d}_0)\lambda = 1 + 0.1(-4)1 = 0.6$$

eta Armijoren baldintza ez da betetzen. Beraz, $\lambda = 0.5 \cdot 1 = 0.5$ erabiliko dugu, eta hau lortuko:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{d}_0 = [1,0]^t,$$

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \phi(1,0) = 100$$

$$\phi(\boldsymbol{x}_0) + \alpha(\nabla\phi(\boldsymbol{x}_0)^t \boldsymbol{d}_0)\lambda = 1 + 0.1(-4)0.5 = 0.8$$

eta Armijoren baldintza ez da betetzen. Beraz, $\lambda = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25$ erabiliko dugu, eta hau lortuko:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{d}_0 = [0.5,0]^t,$$

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \phi(0.5,0) = 6.5$$

$$\phi(\boldsymbol{x}_0) + \alpha(\nabla\phi(\boldsymbol{x}_0)^t \boldsymbol{d}_0)\lambda = 1 + 0.1(-4)0.25 = 0.9$$

eta Armijoren baldintza ez da betetzen. Beraz, $\lambda = 0.5 \cdot 0.25 = 0.125$ erabiliko dugu, eta hau lortuko:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{d} = [0.25,0]^t,$$

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \phi(0.25,0) = 0.95312$$

$$\phi(\boldsymbol{x}_0) + \alpha(\nabla\phi(\boldsymbol{x}_0)^t \boldsymbol{d}_0)\lambda = 1 + 0.1(-4)0.125 = 0.95$$

eta Armijoren baldintza ez da betetzen. Beraz, $\lambda = 0.5 \cdot 0.125 = 0.0625$ erabiliko dugu, eta hau lortuko:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{d} = [0.125,0]^t,$$

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \phi(0.125, 0) = 0.79004$$
$$\phi(\boldsymbol{x}_0) + \alpha(\nabla\phi(\boldsymbol{x}_0)^t\boldsymbol{d}_0)\lambda = 1 + 0.1(-4)0.0625 = 0.975$$

Beraz, Armijoren baldintza betetzen da, eta $\boldsymbol{x} = [0.125, 0]^t$ onargarria izango da.

Zein da gutxi gorabehera konbergentzia-ratioa? Zenbat iterazio behar ditu gutxienez funtzio-errorea $10^{-6}$ bider gutxitzeko? Jarraian, erantzuna emango diegu galdera horiei.

Horretarako, matrize hessiarraren balioa kalkulatuko dugu $\boldsymbol{x}^* = [1, 1]^t$-ean. Matrize hessiarra hau da:

$$\nabla^2\phi(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} -400x_2 + 1200x_1^2 + 2 & -400x_1 \\ -400x_1 & 200 \end{bmatrix}$$

Orduan,

$$\nabla^2\phi(\boldsymbol{x}^*) = \begin{bmatrix} 802 & -400 \\ -400 & 200 \end{bmatrix}$$

Matrize horren autobalioak $M = 1001.6$ eta $m = 0.39036$ dira; beraz,

$$r = \kappa(\nabla^2\phi(\boldsymbol{x}^*)) = \frac{M}{m} = 2508.0,$$

orduan,

$$\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2 = 0.99841$$

Ondorioz, konbergentzia-ratioa 0.99841etik hurbil dago minimoaren ingurunean; alegia, oso gutxi txikitzen da $|f(\boldsymbol{x}_k) - f(\boldsymbol{x}^*)|$ errorea iterazio bakoitzean; ikus [20] liburuko (7.28). Adierazpen hori iterazio baterako denez, funtzio-errorea $n$ iterazio eginez gero $10^{-6}$ bider gutxitzeko, hau bete behar da:

$$0.99841^n \leq 10^{-6},$$

hots, $n \geq -6/\log_{10} 0.99841 = 8682.1$ (logaritmo hori negatiboa baita). Ondorioz, 8683 iterazio egin behar dira, gutxi gorabehera.

21. Bikote hauek doituko ditugu $e^{tx}$ funtzioaren bidez:

$$(t_1, y_1) = (1, 2) \quad (t_2, y_2) = (2, 4) \quad (t_3, y_3) = (3, 8).$$

horretarako, $r_i = e^{t_i x} - y_i$, $i = 1, 2, 3$ hondarren funtzioak erabiliko ditugu, eta $f(x) = \frac{1}{2}\boldsymbol{r}(x)^t\boldsymbol{r}(x)$ definituko dugun funtzioa minimizatu beharko dugu.

Minimo karratu ez-linealen problema hori ebazteko, <u>Newtonen metodoa</u> erabiliko dugu $\boldsymbol{x}_0 = 1$-etik hasiz. Kalkulu hauek egingo ditugu:

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}_0) = \begin{bmatrix} 0.71828 \\ 3.38906 \\ 12.08554 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{J}(x_0) = \begin{bmatrix} 2.7183 \\ 14.7781 \\ 60.2566 \end{bmatrix},$$

$\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_0)^t \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}_0) = 780.27$ eta $\|\nabla f(\boldsymbol{x}_0)\| = 780.27 > 10^{-5}$, baldintza betetzen ez denez, kalkulu hauekin jarraituko dugu:

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_0)^t \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_0) + \sum_{i=1}^3 r_i(\boldsymbol{x}_0)\nabla^2 r_i(\boldsymbol{x}_0) = 3856.6 + 1.9525 = 3858.6$, $\boldsymbol{b} = -\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = -780.27$.

Ondorioz, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_0 = \boldsymbol{b}$ sistemak $\boldsymbol{p}_0 = -0.20222$ soluzioa ematen digu, eta $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{p}_0 = 0.79778$rako kalkulu hauek egiten dira:

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}_1) = \begin{bmatrix} 0.22061 \\ 0.93113 \\ 2.95013 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{J}(x_1) = \begin{bmatrix} 2.2206 \\ 9.8623 \\ 32.8504 \end{bmatrix},$$

$\nabla f(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_1)^t \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}_1) = 106.59$ eta $\|\nabla f(\boldsymbol{x}_1)\| = 106.59 > 10^{-5}$, baldintza betetzen ez denez, kalkulu hauekin jarraituko dugu:

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_1)^t \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_1) + \sum_{i=1}^3 r_i(\boldsymbol{x}_1)\nabla^2 r_i(\boldsymbol{x}_1) = 1180.6 + 0.48990 = 1181.8$, $\boldsymbol{b} = -\nabla f(\boldsymbol{x}_1) = -106.59$.

Ondorioz, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{b}$ sistemak $\boldsymbol{p}_1 = -0.090187$ soluzioa ematen digu, eta $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{p}_1 = 0.70760$rako kalkulu hauek egiten dira:

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}_2) = \begin{bmatrix} 0.029109 \\ 0.117285 \\ 0.354421 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{J}(x_2) = \begin{bmatrix} 2.0291 \\ 8.2346 \\ 25.0633 \end{bmatrix},$$

$\nabla f(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_2)^t \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}_2) = 9.9078$ eta $\|\nabla f(\boldsymbol{x}_2)\| = 9.9078 > 10^{-5}$, baldintza betetzen ez denez, kalkulu hauekin jarraituko dugu:

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_2)^t \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_2) + \sum_{i=1}^3 r_i(\boldsymbol{x}_2)\nabla^2 r_i(\boldsymbol{x}_2) = 699.83 + 0.059066 = 700.15$, $\boldsymbol{b} = -\nabla f(\boldsymbol{x}_2) = -9.9078$.

Ondorioz, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{b}$ sistemak $\boldsymbol{p}_2 = -0.014151$ soluzioa ematen digu, eta $\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{p}_2 = 0.69345$erako kalkulu hauek egiten dira:

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}_3) = \begin{bmatrix} 5.9776 \cdot 10^{-4} \\ 2.3914 \cdot 10^{-3} \\ 7.0835 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{J}(x_3) = \begin{bmatrix} 2.0006 \\ 8.0048 \\ 24.0215 \end{bmatrix},$$

$\nabla f(\boldsymbol{x}_3) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_3)^t \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}_3) = 0.19270$ eta $\|\nabla f(\boldsymbol{x}_3)\| = 0.19270 > 10^{-5}$, baldintza betetzen ez denez, kalkulu hauekin jarraituko dugu:

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_3)^t \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_3) + \sum_{i=1}^3 r_i(\boldsymbol{x}_3)\nabla^2 r_i(\boldsymbol{x}_3) = 645.10 + 0.0011959 = 645.11$, $\boldsymbol{b} = -\nabla f(\boldsymbol{x}_3) = -0.19270$.

Ondorioz, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{b}$ sistemak $\boldsymbol{p}_3 = -2.9870 \cdot 10^{-4}$ soluzioa ematen digu, eta $\boldsymbol{x}_4 = \boldsymbol{x}_3 + \boldsymbol{p}_3 = 0.69315$erako kalkulu hauek egiten dira:

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}_4) = \begin{bmatrix} 2.5896 \cdot 10^{-7} \\ 1.0358 \cdot 10^{-6} \\ 3.1075 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{J}(x_4) = \begin{bmatrix} 2.0000 \\ 8.0000 \\ 24.0000 \end{bmatrix},$$

$\nabla f(\boldsymbol{x}_4) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_4)^t \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}_4) = 8.3385 \cdot 10^{-5}$ eta $\|\nabla f(\boldsymbol{x}_4)\| = 8.3385 \cdot 10^{-5} > 10^{-5}$, baldintza betetzen ez denez, kalkulu hauekin jarraituko dugu:

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_4)^t \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_4) + \sum_{i=1}^{3} r_i(\boldsymbol{x}_4) \nabla^2 r_i(\boldsymbol{x}_4) = 644.00 + 5.1792e - 07 = 644.00$, $\boldsymbol{b} = -\nabla f(\boldsymbol{x}_4) = -8.3385 \cdot 10^{-5}$.

Ondorioz, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_4 = \boldsymbol{b}$ sistemak $\boldsymbol{p}_4 = -1.2948 \cdot 10^{-7}$ soluzioa ematen digu, eta $\boldsymbol{x}_5 = \boldsymbol{x}_4 + \boldsymbol{p}_4 = 0.69315$erako kalkulu hauek egiten dira:

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}_5) = \begin{bmatrix} 4.8406 \cdot 10^{-14} \\ 1.9451 \cdot 10^{-13} \\ 5.8442 \cdot 10^{-13} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{J}(x_5) = \begin{bmatrix} 2.0000 \\ 8.0000 \\ 24.0000 \end{bmatrix},$$

$\nabla f(\boldsymbol{x}_5) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_5)^t \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}_5) = 1.5679 \cdot 10^{-11}$ eta $\|\nabla f(\boldsymbol{x}_5)\| = 1.5679 \cdot 10^{-11} < 10^{-5}$. Baldintza betetzen da 5 iteraziotan, $\boldsymbol{x}_5 = 0.69315$.

Minimo karratu ez-linealen problema hori ebazteko, <u>Gauss-Newtonen metodoa</u> erabiliko dugu $\boldsymbol{x}_0 = 1$-etik hasiz. Kalkulu hauek egingo ditugu:

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}_0) = \begin{bmatrix} 0.71828 \\ 3.38906 \\ 12.08554 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{J}(x_0) = \begin{bmatrix} 2.7183 \\ 14.7781 \\ 60.2566 \end{bmatrix},$$

$\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_0)^t \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}_0) = 780.27$ eta $\|\nabla f(\boldsymbol{x}_0)\| = 780.27 > 10^{-5}$, baldintza betetzen ez denez, kalkulu hauekin jarraituko dugu:

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_0)^t \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_0) = 3856.6$, $\boldsymbol{b} = -\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = -780.27$.

Ondorioz, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_0 = \boldsymbol{b}$ sistemak $\boldsymbol{p}_0 = -0.20232$ soluzioa ematen digu, eta $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{p}_0 = 0.79768$rako kalkulu hauek egiten dira:

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}_1) = \begin{bmatrix} 0.22039 \\ 0.93012 \\ 2.94677 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{J}(x_1) = \begin{bmatrix} 2.2204 \\ 9.8602 \\ 32.8403 \end{bmatrix},$$

$\nabla f(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_1)^t \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}_1) = 106.43$ eta $\|\nabla f(\boldsymbol{x}_1)\| = 106.43 > 10^{-5}$, baldintza betetzen ez denez, kalkulu hauekin jarraituko dugu:

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_1)^t \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_1) = 1180.6$, $\boldsymbol{b} = -\nabla f(\boldsymbol{x}_1) = -106.43$.

Ondorioz, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{b}$ sistemak $\boldsymbol{p}_1 = -0.090149$ soluzioa ematen digu, eta $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{p}_1 = 0.70753$rako kalkulu hauek egiten dira:

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}_2) = \begin{bmatrix} 0.028979 \\ 0.116755 \\ 0.352809 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{J}(x_2) = \begin{bmatrix} 2.0290 \\ 8.2335 \\ 25.0584 \end{bmatrix},$$

$\nabla f(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_2)^t \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}_2) = 9.8609$ eta $\|\nabla f(\boldsymbol{x}_2)\| = 9.8609 > 10^{-5}$, baldintza betetzen ez denez, kalkulu hauekin jarraituko dugu:

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_2)^t \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_2) = 699.83$, $\boldsymbol{b} = -\nabla f(\boldsymbol{x}_2) = -9.8609$.

Ondorioz, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{b}$ sistemak $\boldsymbol{p}_2 = -0.014090$ soluzioa ematen digu, eta $\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{p}_2 = 0.6934$rako kalkulu hauek egiten dira:

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}_3) = \begin{bmatrix} 5.9012 \cdot 10^{-4} \\ 2.3608 \cdot 10^{-3} \\ 7.0835 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{J}(x_3) = \begin{bmatrix} 2.0006 \\ 8.0047 \\ 24.0213 \end{bmatrix},$$

$\nabla f(\boldsymbol{x}_3) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_3)^t \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}_3) = 0.19023$ eta $\|\nabla f(\boldsymbol{x}_3)\| = 0.19023 > 10^{-5}$, baldintza betetzen ez denez, kalkulu hauekin jarraituko dugu:

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_3)^t \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_3) = 645.10$, $\boldsymbol{b} = -\nabla f(\boldsymbol{x}_3) = -0.19023$.

Ondorioz, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{b}$ sistemak $\boldsymbol{p}_3 = -2.9489 \cdot 10^{-4}$ soluzioa ematen digu, eta $\boldsymbol{x}_4 = \boldsymbol{x}_3 + \boldsymbol{p}_3 = 0.69315$erako kalkulu hauek egiten dira:

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}_4) = \begin{bmatrix} 2.5130 \cdot 10^{-7} \\ 1.0052 \cdot 10^{-6} \\ 3.0156 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{J}(x_4) = \begin{bmatrix} 2.0000 \\ 8.0000 \\ 24.0000 \end{bmatrix},$$

$\nabla f(\boldsymbol{x}_4) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_4)^t \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}_4) = 8.0920 \cdot 10^{-5}$ eta $\|\nabla f(\boldsymbol{x}_4)\| = 8.0920 \cdot 10^{-5} > 10^{-5}$, baldintza betetzen ez denez, kalkulu hauekin jarraituko dugu:

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_4)^t \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_4) = 644.00$, $\boldsymbol{b} = -\nabla f(\boldsymbol{x}_4) = -8.0920 \cdot 10^{-5}$.

Ondorioz, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_4 = \boldsymbol{b}$ sistemak $\boldsymbol{p}_4 = -1.2565 \cdot 10^{-7}$ soluzioa ematen digu, eta $\boldsymbol{x}_5 = \boldsymbol{x}_4 + \boldsymbol{p}_4 = 0.69315$erako kalkulu hauek egiten dira:

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}_5) = \begin{bmatrix} 4.5741 \cdot 10^{-14} \\ 1.8296 \cdot 10^{-13} \\ 5.4889 \cdot 10^{-13} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{J}(x_5) = \begin{bmatrix} 2.0000 \\ 8.0000 \\ 24.0000 \end{bmatrix},$$

$\nabla f(\boldsymbol{x}_5) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_5)^t \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}_5) = 1.4729 \cdot 10^{-11}$ eta $\|\nabla f(\boldsymbol{x}_5)\| = 1.4729 \cdot 10^{-11} < 10^{-5}$. Baldintza betetzen da 5 iteraziotan, $\boldsymbol{x}_5 = 0.69315$.

Ohartu $\boldsymbol{x}^* = \ln 2 = 0.69315\ldots$ dela.

# Bibliografia


[1] U.M. Ascher eta Ch. Greif, *A First Course in Numerical Methods.* SIAM, 2011.

[2] K.E. Atkinson, *An Introduction to Numerical Analysis.* John Wiley and Sons, 1989.

[3] D.P. Bertsekas, *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods.* Academic Press, New York, 1982. Athena Scientific, Belmont, USA, 2003.

[4] D.P. Bertsekas, *Nonlinear Programming. (Second edition)*

[5] R.P. Brent, *Algorithms for Minimization without Derivatives.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973.

[6] C.G. Broyden, *A Class of Methods for Solving Nonlinear Simultaneous Equations.* Mathematics of Computation (American Mathematical Society) 19 (92): 577–593.

[7] S.C. Chapra, *Applied Numerical Methods with MATLAB for Engineers and Scientists.* McGraw-Hill, AEB, 2008.

[8] T.J. Dekker, *Finding a zero by means of successive linear interpolation.* In B. De jon; P. Henrici, Constructive Aspects of the Fundamental Theorem of Algebra, Wiley-Interscience, Londres, 1969.

[9] J.E. Dennis eta R.B. Schnable, *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations.* Prentice-Hall, 1983. SIAMek berrinprimatuta, 1996.

[10] I.S. Duff, A.M. Erisman eta J.K. Reid, *Direct Methods for Sparse Matrices.* Oxford University Press, 1986.

[11] P.E. Gill, W. Murray eta M.H. Wright, *Practical Optimization.* Academic Press, Lon dres, 1981.

[12] P.E. Gill, W. Murray eta M.H. Wright, *Numerical Linear Algebra and Optimization, Volume 1.* Addison-Wesley, 1991.

[13] J.A. George eta J.W. Liu, *Computer Solution of Large Sparse Positive Definite Systems.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1981.

[14] A. Gilat eta V. Subramaniam, *Numerical Methods for Engineers and Scientists: An Introduction with Applications Using MATLAB.* John Wiley & Sons, AEB, 2008.

[15] G.H. Golub eta C.F. Van Loan, *Matrix Computations.* The John Hopkins University Press, Baltimore, 1996.

[16] D.J. Higham eta N.J. Higham, *MATLAB Guide.* SIAM, 2005.

[17] N.J. Higham, *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms.* SIAM, 2002.

[18] D.G. Luenberger, *Linear and Nonlinear Programming.* Addison-Wesley, AEB, 1989.

[19] J.F. Mathews eta K.D. Fink, *Métodos Numéricos con MATLAB.* Pearson, Prentice Hall, Madrid, 2005.

[20] E. Mijangos, *Zenbakizko metodoak MATLAB erabiliz.* Euskal Herriko Unibertsitateko Argitalpen Zerbitzua, Bilbo, UPV/EHU, 2017.

[21] C.B. Moler, *Numerical Computing with MATLAB.* SIAM, Filadelfia, AEB, 2004.

[22] J. Nocedal eta S.J. Wright, *Numerical Optimization.* Springer Series in Operations Research, New York, 1999.

[23] J.M. Ortega eta W.C. Rheinboldt, *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables.* Academic Press, New York, 1970.

[24] M. Overton, *Numerical Computing with IEEE Floating Point Arithmetic.* SIAM, Filadelfia, 2001.

[25] J.M. Sanz-Serna, *Diez lecciones de Cálculo numérico.* Secretariado de Publicaciones e Intercambio Editorial, Universidad de Valladolid, 2010.

[26] J. Stoer eta R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis.* Springer-Verlag, 2002.

[27] G.W. Stewart, *Introduction to Matrix Computations.* Academic Press, New York, 1973.

[28] G.W. Stewart, *Matrix Algorithms: Basic Decompositions.* SIAM, Filadelfia, 1998.

[29] L.N. Trefethen eta D. Bau, *Numerical Linear Algebra.* SIAM, Filadelfia, 1997.

[30] P. Wolfe, *Convergence conditions for ascent methods.* SIAM Review 11, 226–235.

[31] P. Wolfe, *Convergence conditions for ascent methods. II: Some corrections.* SIAM Review 13, 185–188.

UNIBERTSITATEKO ESKULIBURUAK
MANUALES UNIVERSITARIOS

INFORMAZIOA ETA ESKARIAK • INFORMACIÓN Y PEDIDOS

UPV/EHUko Argitalpen Zerbitzua • Servicio Editorial de la UPV/EHU
argitaletxea@ehu.eus • editorial@ehu.eus
1397 Posta Kutxatila - 48080 Bilbo • Apartado 1397 - 48080 Bilbao
Tfn.: 94 601 2227 • www.ehu.eus/argitalpenak

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea