



Las Ecuaciones de Boussinesq y aguas poco profundas

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas

Natalia Izaguirre Lizarraga

Trabajo dirigido por
Virginia Muto

Leioa, 20 de febrero de 2020

Índice general

Agradecimientos	v
Introducción	vii
1. Derivación de las Ecuaciones de Boussinesq	1
1.1. Derivación de las Ecuaciones de Boussinesq	1
1.2. Expansión asintótica	7
2. Resolución analítica de Ecuaciones de Boussinesq con el método de la tangente hiperbólica	15
2.1. Método de la tanh	15
2.2. La ecuación cúbica de Boussinesq	17
2.3. Ecuaciones de Boussinesq acopladas	19
2.4. La ecuación de Boussinesq estándar	21
2.5. La ecuación de Boussinesq estándar mejorada	23
3. Resolución numérica de la Ecuación de Boussinesq Mejorada	27
3.1. Método de Diferencias Finitas	28
3.1.1. Discretización del tiempo	28
3.1.2. Discretización del espacio	30
3.2. Ejemplos numéricos	32
3.2.1. Primer ejemplo: un único solitón	32
3.2.2. Segundo ejemplo: interacción entre dos solitones	34
A. Solución analítica de la Ecuación de Boussinesq	37
A.1. Método de la tangente hiperbólica	37
A.2. Solución analítica de la ecuación cúbica de Boussinesq	38
A.3. Solución analítica de las ecuaciones de Boussinesq acopladas	38
A.4. Solución analítica de la ecuación de Boussinesq estándar	39
A.5. Solución analítica de la ecuación de Boussinesq estándar mejorada	39

B. Resolución numérica de la Ecuación de Boussinesq Mejorada	41
Bibliografía	49

Agradecimientos

En primer lugar me gustaría agradecer a mi directora de TFG, Virginia Muto, por su paciencia y por guiarme y ayudarme a enfocar este trabajo como es debido.

También quiero dar las gracias a mi familia y a mis amigos Iñigo y Carlota por apoyarme y creer siempre en mí durante esta etapa, incluso cuando ni yo lo hacía.

Y sobretodo quiero expresar mi más sincero agradecimiento a dos de mis profesores de matemáticas del colegio: Agustín Fermín y Jesús Erausquin. Gracias Agustín por enseñarme a ver la belleza de las matemáticas, y gracias Jesús por animarme y confiar en mí para estudiar esta carrera.

Introducción

El movimiento de las olas nos rodea, desde las más profundas olas de la mecánica cuántica hasta las grandes olas de la superficie del océano. Las olas del agua pueden dividirse en dos tipos: aguas profundas y aguas poco profundas o costeras. Estas últimas no se estudian tan a fondo como las aguas profundas debido a la complicada topografía del fondo desigual del mar. Sin embargo, es esencial tener una descripción clara y completa de las aguas poco profundas tanto para el desarrollo de amplias zonas costeras y portuarias, como para tener una mejor comprensión del mecanismo de las aguas profundas.

La ecuación de Korteweg-de Vries (KdV) modela las ondas de aguas poco profundas y es muy conocida. No obstante, la ecuación de Boussinesq proporciona una aproximación muy superior a tales ondas.

Boussinesq presentó una teoría de las olas de aguas poco profundas sobre un fondo horizontal que, mucho después, se desarrolló a las ecuaciones clásicas de Boussinesq para un fondo desigual. Las actuales ecuaciones de Boussinesq, caracterizadas por reducir un problema tridimensional a uno bidimensional, han llamado la atención considerablemente en los últimos treinta años, dando lugar a una serie de ecuaciones tipo Boussinesq mejoradas y de orden superior con el objetivo de mejorar las propiedades lineales y no lineales y de poder tener en cuenta la propagación de la onda en casi todas las profundidades de agua finitas [3].

Las ecuaciones de Boussinesq se utilizan ampliamente en la ingeniería costera y oceánica. Unos ejemplos, entre otros, son la modelización de olas de un tsunami (ondas largas que se transmiten en la superficie de aguas poco profundas) o la modelización de las oscilaciones de la marea. El movimiento de este tipo de olas está perfectamente descrito por las ecuaciones de Navier-Stokes, pero actualmente es imposible resolver completamente los modelos tridimensionales en ningún dominio significativo. Por eso, deben utilizarse los modelos aproximados como las ecuaciones de Boussinesq.

En los años 1871 y 1872 Boussinesq incluyó los efectos de dispersión por

primera vez en las ecuaciones de Saint-Venant. Las ecuaciones de Boussinesq son más completas físicamente hablando que las ecuaciones de Saint-Venant, pero al mismo tiempo, son más complicadas desde el punto de vista matemático y numérico. Estas ecuaciones poseen una estructura hiperbólica (igual que las ecuaciones no lineales de aguas poco profundas) combinada con derivadas de alto orden para modelar la dispersión de las ondas [2].

Las ecuaciones de Boussinesq más conocidas son las que resolveremos en el segundo capítulo. Pero antes de su resolución, en el capítulo 1 deduciremos las ecuaciones de Boussinesq a partir de las ecuaciones físicas del flujo potencial. Estas ecuaciones pueden ser más o menos efectivas dependiendo del término disipativo que se escoja. De esta manera, obtendremos dos modelos distintos de ecuaciones de Boussinesq acopladas; uno de ellos asociado a un modelo de disipación más sencillo, y el otro a uno más completo y realista.

Como ya se ha mencionado anteriormente, en el capítulo 2 resolveremos analíticamente algunas de las ecuaciones de Boussinesq más conocidas. Entre ellas están la ecuación cúbica de Boussinesq, las ecuaciones de Boussinesq acopladas, la ecuación de Boussinesq estándar y la ecuación de Boussinesq estándar mejorada. Buscaremos soluciones de tipo solitón mediante un método muy útil para encontrar soluciones exactas de ecuaciones no lineales: el método de la tangente hiperbólica.

En el apéndice A encontraremos tanto el desarrollo de ciertas operaciones utilizadas en este capítulo, como pequeños programas escritos con MATHEMATICA para resolver los sistemas de ecuaciones que aparecen al aplicar el método de la \tanh .

Finalmente, en el capítulo 3 pasaremos a la resolución numérica de la ecuación de Boussinesq estándar mejorada. Introduciremos un esquema en diferencias finitas, el cual permite convertir problemas diferenciales en problemas algebraicos fácilmente resolubles. Resolveremos la ecuación para dos ejemplos distintos, uno de un único solitón y otro de la interacción entre dos solitones.

En el apéndice B encontraremos el programa desarrollado con MATHEMATICA para la resolución del primer ejemplo.

Capítulo 1

Derivación de las Ecuaciones de Boussinesq

En este primer capítulo deducimos las ecuaciones de Boussinesq a partir de las ecuaciones físicas de la teoría del flujo potencial. Para ello, usamos un método de la expansión asintótica de la velocidad potencial en términos de un parámetro.

1.1. Derivación de las Ecuaciones de Boussinesq

Para derivar las ecuaciones de Boussinesq, comenzamos con un problema completo de ondas en el agua siguiendo el trabajo de Denys Dutykh y Frédéric Dias [2].

Utilizamos un sistema de coordenadas cartesianas (x', y', z') con los ejes x' e y' a lo largo del nivel del agua y el eje z' apuntando verticalmente hacia arriba. Llamamos Ω_t al dominio del fluido en \mathbb{R}^3 . El subíndice t describe el hecho de que el dominio varía con el tiempo y que no se conoce a priori.

El flujo que ocupa Ω_t es no viscoso e incompresible. Que sea no viscoso quiere decir que el fluido no opone una gran resistencia al movimiento y, por tanto, las fuerzas de rozamiento que aparecen cuando este está en movimiento son muy pequeñas o no se tienen en cuenta. Esto no quiere decir que no existan, pues en mayor o menor medida, la viscosidad está presente en cualquier fluido. Por otro lado, tenemos que tener en cuenta que al ser incompresible, la densidad del fluido no varía. Esto último es muy común cuando se habla de líquidos, como es nuestro caso [1].

El dominio Ω_t está limitado por abajo por el fondo del agua $z' = -h'(x', y', t')$, y por arriba por la superficie $z' = \eta'(x', y', t')$ (ver figura 1.1). Para evitar discusiones con las condiciones de contorno laterales, escogemos Ω_t de tal

forma que sea ilimitado en las direcciones horizontales. Hacemos esto ya que el planteamiento de las condiciones de contorno laterales para la ecuación de Boussinesq es una cuestión que sigue abierta, y además, porque la elección de estos valores depende de la aplicación que se esté estudiando.

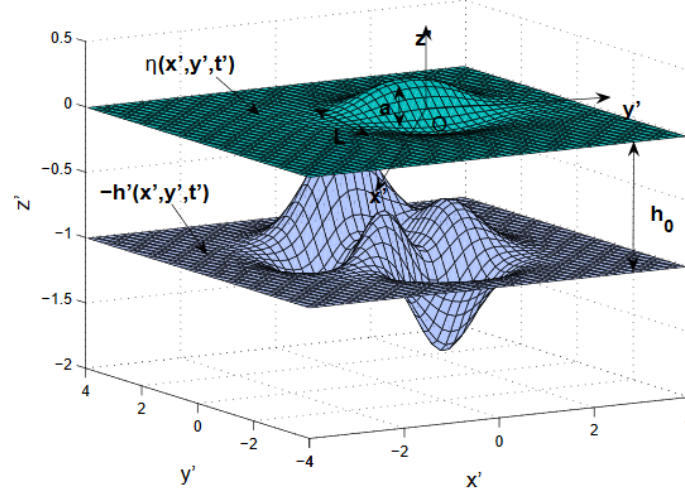


Figura 1.1: Esbozo del dominio del fluido.

Si suponemos que el flujo es irrotacional (su rotacional es 0 y proviene de un campo conservativo), podemos definir la velocidad potencial ϕ' como:

$$\vec{v}' = \nabla' \phi', \quad \nabla' := \left(\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'} \right)^T, \quad (1.1)$$

donde \vec{v}' denota el campo de velocidad.

Por teoría de la dinámica de fluidos [7], la ecuación de continuidad que explica la conservación de masa líquida es la siguiente:

$$\nabla'(\rho \vec{v}') + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (1.2)$$

donde ρ denota la densidad del flujo. En nuestro caso, ya que tenemos un flujo incompresible ($\rho = cte$), y por cómo hemos definido el campo de velocidad en (1.1), la ecuación se simplifica y nos queda la siguiente ecuación de Laplace:

$$\nabla'^2 \phi' = 0. \quad (1.3)$$

A continuación, escribimos el siguiente sistema de ecuaciones para la teoría

del flujo potencial en presencia de una superficie libre [2].

$$\begin{aligned}
 \nabla'^2 \phi' &= 0, & (x', y', z') &\in \Omega_t = \mathbb{R}^2 \times [-h', \eta'], \\
 \phi'_{z'} &= \eta'_{t'} + \nabla' \phi' \cdot \nabla' \eta', & z' &= \eta', \\
 \phi'_{t'} + \frac{1}{2} |\nabla' \phi'|^2 + g\eta' &= 0, & z' &= \eta', \\
 \phi'_{z'} + h'_{t'} + \nabla' \phi' \cdot \nabla' h' &= 0, & z' &= -h',
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

donde g denota la aceleración de la gravedad. Hemos asumido que la superficie libre es un gráfico y que la presión es constante sobre esta. Además, suponemos que la profundidad del agua es siempre positiva ($\eta' + h' > 0$). Es decir, no tenemos en cuenta la posibilidad de que exista una zona seca.

Vamos a añadir a la tercera ecuación de (1.4) un término disipativo para explicar los efectos de la viscosidad.

$$\phi'_{t'} + \frac{1}{2} |\nabla' \phi'|^2 + g\eta' + D'_{\phi'} = 0, \quad z' = \eta'.$$

Uno se puede preguntar por qué es necesaria la disipación. Para empezar, tal y como hemos mencionado antes, los líquidos del mundo real son viscosos. Esto se traduce al lenguaje de ecuaciones diferenciales mediante términos disipativos. Estudiar un modelo no disipativo significa estudiar una situación en la que no hay una pérdida de energía, lo que no interesa desde el punto de vista físico ya que cualquier flujo viene acompañado de una disipación de energía. En otras palabras, no añadir el término disipativo implicaría estudiar algo completamente irreal, y que por tanto, no nos aporta la información que buscamos.

En este trabajo vamos a estudiar dos modelos disipativos diferentes. Por una parte, un modelo más sencillo donde el término disipativo es constante; y por otro lado, un modelo más realista que se obtiene al equilibrar la tensión normal sobre la superficie libre.

$$\text{MODELO 1: } \quad D'_{\phi'} = \delta_1 \phi'. \tag{1.5}$$

$$\text{MODELO 2: } \quad D'_{\phi'} = \delta_2 \phi'_{z'z'}, \tag{1.6}$$

con δ_1 y δ_2 dos coeficientes de viscosidad que analizaremos más adelante.

Antes de seguir, cabe decir que la derivación de Boussinesq es más clara si se trabaja con variables escalares. Por eso, introducimos las siguientes variables no dimensionales:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{x'}{l}, & y &= \frac{y'}{l}, & z &= \frac{z'}{h_0}, & t &= \frac{\sqrt{gh_0}}{l} t', \\
 h &= \frac{h'}{h_0}, & \eta &= \frac{\eta'}{a_0}, & \phi &= \frac{\sqrt{gh_0}}{ga_0 l} \phi',
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

donde h_0 es la profundidad característica del agua, l la longitud característica de la ola y a_0 la amplitud característica de la ola.

Ahora vamos a aplicar estos cambios a nuestro sistema de ecuaciones. Lo haremos primero término a término para la segunda ecuación,

$$\phi'_{z'} = \eta'_{t'} + \nabla' \phi' \cdot \nabla' \eta'.$$

Utilizando la regla de la cadena, obtenemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} = \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial x}, & \frac{\partial}{\partial y'} &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y'} = \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial z'} &= \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial z'} = \frac{1}{h_0} \frac{\partial}{\partial z}, & \frac{\partial}{\partial t'} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t'} = \frac{\sqrt{gh_0}}{l} \frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Para el primer término, teniendo en cuenta (1.7), sabemos que

$$\phi' = \frac{ga_0 l}{\sqrt{gh_0}} \phi.$$

Por tanto, aplicando la expresión correspondiente de (1.8) llegamos a que

$$\phi'_{z'} = \frac{1}{h_0} \frac{ga_0 l}{\sqrt{gh_0}} \phi_z.$$

Para el segundo término, hacemos lo mismo y obtenemos que

$$\eta' = a_0 \eta \quad \implies \quad \eta'_{t'} = \frac{a_0 \sqrt{gh_0}}{l} \eta_t.$$

Por último, para el tercer término tenemos

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{l} \frac{ga_0 l}{\sqrt{gh_0}} \phi_x, \frac{1}{l} \frac{ga_0 l}{\sqrt{gh_0}} \phi_y, \frac{1}{h_0} \frac{ga_0 l}{\sqrt{gh_0}} \phi_z \right) \cdot \left(\frac{a_0}{l} \eta_x, \frac{a_0}{l} \eta_y, \frac{a_0}{h_0} \eta_z \right) = \\ &= \frac{ga_0^2 l}{\sqrt{gh_0}} \left(\frac{1}{l} \phi_x, \frac{1}{l} \phi_y, \frac{1}{h_0} \phi_z \right) \cdot \left(\frac{1}{l} \eta_x, \frac{1}{l} \eta_y, \frac{1}{h_0} \eta_z \right). \end{aligned}$$

Denotando a partir de ahora el gradiente horizontal mediante el símbolo ∇ (es decir $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$) y recordando que η no depende de z , concluimos que

$$\nabla' \phi' \cdot \nabla' \eta' = \frac{ga_0^2}{l\sqrt{gh_0}} \nabla \phi \cdot \nabla \eta + \frac{ga_0^2 l}{h_0^2 \sqrt{gh_0}} \phi_z \cdot \cancel{\eta_z} = \frac{ga_0^2}{l\sqrt{gh_0}} \nabla \phi \cdot \nabla \eta.$$

De este modo, la segunda ecuación de nuestro sistema queda convertida en:

$$\frac{1}{h_0} \frac{ga_0 l}{\sqrt{gh_0}} \phi_z = \frac{a_0 \sqrt{gh_0}}{l} \eta_t + \frac{ga_0^2}{l\sqrt{gh_0}} \nabla \phi \cdot \nabla \eta \iff \phi_z = \frac{h_0^2}{l^2} \eta_t + \frac{a_0 h_0}{l^2} \nabla \phi \cdot \nabla \eta.$$

Retomando la primera ecuación de (1.4)

$$\nabla'^2 \phi' = 0,$$

aplicamos (1.7) y (1.8) y obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \nabla'^2 \phi' = 0 &\iff \phi'_{x'x'} + \phi'_{y'y'} + \phi'_{z'z'} = 0 \iff \\ &\iff \frac{1}{l^2} \frac{ga_0 l}{\sqrt{gh_0}} \phi_{xx} + \frac{1}{l^2} \frac{ga_0 l}{\sqrt{gh_0}} \phi_{yy} + \frac{1}{h_0^2} \frac{ga_0 l}{\sqrt{gh_0}} \phi_{zz} = 0 \iff \\ &\iff \frac{1}{l^2} \frac{ga_0 l}{\sqrt{gh_0}} \nabla^2 \phi + \frac{1}{h_0^2} \frac{ga_0 l}{\sqrt{gh_0}} \phi_{zz} = 0. \end{aligned}$$

Multiplicando ahora ambos lados de la ecuación por $\frac{h_0^2 \sqrt{gh_0}}{ga_0 l}$, llegamos a que la primera ecuación del sistema queda transformada en la siguiente:

$$\frac{h_0^2}{l^2} (\phi_{xx} + \phi_{yy}) + \phi_{zz}.$$

Si hacemos lo mismo para la tercera ecuación de (1.4)

$$\phi'_{t'} + \frac{1}{2} |\nabla' \phi'|^2 + g\eta' + D'_{\phi'} = 0,$$

utilizando los cálculos realizados en (1.7) y (1.8), los tres primeros términos salen inmediatamente y son, respectivamente,

$$ga_0 \phi_t,$$

$$\frac{ga_0^2}{2h_0} |\nabla \phi|^2 + \frac{ga_0^2 l^2}{2h_0^3} \phi_z^2$$

y

$$ga_0 \eta.$$

En cuanto al último término, hemos de diferenciar dos situaciones dependiendo de si escogemos el modelo (1.5) o (1.6).

Por un lado, eligiendo (1.5):

$$D'_{\phi'} = \delta_1 \phi' \iff D_\phi = \delta_1 \frac{ga_0 l}{\sqrt{gh_0}} \phi = \delta_1 \frac{a_0 l \sqrt{gh_0}}{h_0} \phi.$$

Por otra parte, si elegimos el modelo (1.6):

$$D'_{\phi'} = \delta_2 \phi'_{z'z'} \iff D_\phi = \delta_2 \frac{1}{h_0^2} \frac{ga_0 l}{\sqrt{gh_0}} \phi_{zz} = \delta_2 \frac{a_0 l \sqrt{gh_0}}{h_0^3} \phi_{zz}.$$

En resumen, la tercera ecuación quedaría de la siguiente manera:

$$ga_0 \phi_t + \frac{ga_0^2}{2h_0} |\nabla \phi|^2 + \frac{ga_0^2 l^2}{2h_0^3} \phi_z^2 + ga_0 \eta + D_\phi = 0. \quad (1.9)$$

Introducimos las siguientes variables no dimensionales para simplificar las expresiones de los términos disipativos.

$$R_1 := \frac{1}{\delta_1} \left(\frac{ga_0 l}{h_0^2 \sqrt{gh_0}} \right), \quad R_2 := \frac{1}{\delta_2} \left(\frac{ga_0 l}{\sqrt{gh_0}} \right).$$

Como R_1 y R_2 son adimensionales, deducimos las dimensiones de δ_1 y δ_2 de la siguiente manera:

$$R_1 \delta_1 = \frac{\frac{m}{s^2} \cdot m \cdot m}{m^2 \sqrt{\frac{m}{s^2} \cdot m}} = \frac{1}{s}, \quad R_2 \delta_2 = \frac{\frac{m}{s^2} \cdot m \cdot m}{\sqrt{\frac{m}{s^2} \cdot m}} = \frac{m^2}{s},$$

donde m son metros y s segundos. Por tanto δ_1 tiene dimensiones $[s^{-1}]$ y es denominado *coeficiente de frecuencia de la viscosidad*, y δ_2 tiene dimensiones $[m^2 s^{-1}]$ y se le conoce como *coeficiente de viscosidad cinemática*.

Multiplicando a ambos lados de la ecuación (1.9) por $\frac{h_0^2}{ga_0 l^2}$, obtenemos la que va a ser la tercera ecuación del sistema:

$$\begin{aligned} \frac{h_0^2}{ga_0 l^2} ga_0 \phi_t + \frac{h_0^2}{ga_0 l^2} \frac{ga_0^2}{2h_0} |\nabla \phi|^2 + \frac{h_0^2}{ga_0 l^2} \frac{ga_0^2 l^2}{2h_0^3} \phi_z^2 + \frac{h_0^2}{ga_0 l^2} ga_0 \eta + \frac{h_0^2}{ga_0 l^2} D_\phi = \\ = 0 \iff \frac{h_0^2}{l^2} \phi_t + \frac{a_0 h_0}{2l^2} |\nabla \phi|^2 + \frac{a_0}{2h_0} \phi_z^2 + \frac{h_0^2}{l^2} \eta + \frac{a_0}{h_0} D_\phi = 0, \end{aligned}$$

donde $D_\phi = \frac{1}{R_1} \phi$ si escogemos (1.5) y $D_\phi = \frac{1}{R_2} \phi_{zz}$ si escogemos (1.6).

Repetiendo análogamente para la última ecuación del sistema, obtenemos que nuestro sistema de ecuaciones queda transformado en el siguiente.

$$\begin{aligned} \frac{h_0^2}{l^2} (\phi_{xx} + \phi_{yy}) + \phi_{zz} &= 0, & (x, y, z) \in \Omega_t \\ \phi_z &= \frac{h_0^2}{l^2} \eta_t + \frac{a_0 h_0}{l^2} \nabla \phi \cdot \nabla \eta, & z = \frac{a_0}{h_0} \eta, \\ \frac{h_0^2}{l^2} \phi_t + \frac{a_0 h_0}{2l^2} |\nabla \phi|^2 + \frac{a_0}{2h_0} \phi_z^2 + \frac{h_0^2}{l^2} \eta + \frac{a_0}{h_0} D_\phi &= 0, & z = \frac{a_0}{h_0} \eta, \\ \phi_z + \frac{h_0^3}{a_0 l^2} h_t + \frac{h_0^2}{l^2} \nabla \phi \cdot \nabla h &= 0, & z = -h. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Por último, para simplificar la notación introducimos las siguientes variables:

$$\mu := \frac{h_0}{l} \quad y \quad \epsilon := \frac{a_0}{h_0}.$$

De tal forma que (1.10) nos queda:

$$\begin{aligned}
 \mu^2(\phi_{xx} + \phi_{yy}) + \phi_{zz} &= 0, & (x, y, z) \in \Omega_t \\
 \phi_z &= \mu^2\eta_t + \epsilon\mu^2\nabla\phi \cdot \nabla\eta, & z = \epsilon\eta, \\
 \mu^2\phi_t + \frac{1}{2}\epsilon\mu^2|\nabla\phi|^2 + \frac{1}{2}\epsilon\phi_z^2 + \mu^2\eta + \epsilon D_\phi &= 0, & z = \epsilon\eta, \\
 \phi_z + \frac{\mu^2}{\epsilon}h_t + \mu^2\nabla\phi \cdot \nabla h &= 0, & z = -h.
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

1.2. Expansión asintótica

Consideramos la expansión asintótica de la velocidad potencial ϕ en potencias pares del parámetro definido en la sección anterior, μ .

$$\phi = \phi_0 + \mu^2\phi_1 + \mu^4\phi_2 + \dots \tag{1.12}$$

Ahora sustituimos (1.12) en (1.11). De esta forma, la primera ecuación del sistema queda:

$$\mu^2(\nabla^2\phi_0 + \mu^2\nabla^2\phi_1 + \mu^4\nabla^2\phi_2 + \dots) + \phi_{0zz} + \mu^2\phi_{1zz} + \mu^4\phi_{2zz} + \dots = 0. \tag{1.13}$$

Agrupamos los términos del mismo orden.

$$\mu^0 : \quad \phi_{0zz} = 0, \tag{1.14}$$

$$\mu^2 : \quad \nabla^2\phi_0 + \phi_{1zz} = 0, \tag{1.15}$$

$$\mu^4 : \quad \nabla^2\phi_1 + \phi_{2zz} = 0. \tag{1.16}$$

Hacemos lo mismo para la condición de contorno de (1.11) en la que $z = -h$.

$$\begin{aligned}
 (\phi_{0z} + \mu^2\phi_{1z} + \mu^4\phi_{2z} + \dots) + \frac{\mu^2}{\epsilon}h_t + \\
 + \mu^2(\nabla\phi_0 + \mu^2\nabla\phi_1 + \mu^4\nabla\phi_2 + \dots) \cdot \nabla h = 0,
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

$$\mu^0 : \quad \phi_{0z} = 0, \tag{1.18}$$

$$\mu^2 : \quad \phi_{1z} + \frac{h_t}{\epsilon} + \nabla\phi_0 \cdot \nabla h = 0, \tag{1.19}$$

$$\mu^4 : \quad \phi_{2z} + \nabla\phi_1 \cdot \nabla h = 0. \tag{1.20}$$

De las ecuaciones (1.14) y (1.18) podemos concluir rápidamente que la variable ϕ_0 no depende de la componente vertical z ; es decir, $\phi_0 = \phi_0(x, y, t)$. Definimos ahora el vector velocidad horizontal

$$\vec{u}(x, y, t) := \nabla\phi_0, \quad \vec{u} = (u, v)^T. \tag{1.21}$$

A continuación, observamos que la expansión de la ecuación de Laplace en potencias de μ^2 nos da relaciones de recurrencia entre $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots$. Por ejemplo, utilizando (1.15) podemos expresar ϕ_1 en función de las derivadas de ϕ_0 .

$$\phi_{1zz} = -\nabla \cdot \vec{u}. \quad (1.22)$$

Como $\nabla \cdot \vec{u}$ no depende de z , integramos (1.22) fácilmente respecto de z y obtenemos:

$$\phi_{1z} = -z\nabla \cdot \vec{u} + C(x, y, t), \quad (1.23)$$

donde podemos encontrar $C(x, y, t)$ mediante la ecuación (1.19),

$$\phi_{1z} = -\frac{h_t}{\epsilon} - \nabla\phi_0 \cdot \nabla h = -\frac{h_t}{\epsilon} - \vec{u} \cdot \nabla h.$$

Igualando ahora esta última ecuación y (1.23) en $z = -h$, obtenemos el valor de $C(x, y, t)$.

$$h\nabla \cdot \vec{u} + C(x, y, t) = -\frac{h_t}{\epsilon} - \vec{u} \cdot \nabla h \iff C(x, y, t) = -\frac{h_t}{\epsilon} - \vec{u} \cdot \nabla h - h\nabla \cdot \vec{u}.$$

Sustituyendo finalmente $C(x, y, t)$ en (1.23) llegamos a que

$$\phi_{1z} = -(z+h)\nabla \cdot \vec{u} - \frac{h_t}{\epsilon} - \vec{u} \cdot \nabla h. \quad (1.24)$$

Integramos de nuevo respecto de z y conseguimos la siguiente expresión para ϕ_1 :

$$\phi_1 = -\frac{1}{2}(z+h)^2\nabla \cdot \vec{u} - z\left(\frac{h_t}{\epsilon} + \vec{u} \cdot \nabla h\right) + C_1(x, y, t). \quad (1.25)$$

En este caso tomamos $C_1(x, y, t) = 0$, ya que necesitaríamos más términos de la expansión asintótica para determinar la función C_1 y solamente estamos buscando una de las ecuaciones más simples de Boussinesq.

Ahora determinamos ϕ_2 . Para ello, utilizamos la ecuación (1.16) y expre-

samos ϕ_{2zz} en función de las derivadas de ϕ_1 .

$$\begin{aligned}
 \phi_{2zz} &= -\nabla^2\phi_1 = \nabla^2\left(\frac{1}{2}(z+h)^2\nabla\cdot\vec{u}\right) + \nabla^2\left(z\left(\frac{h_t}{\epsilon} + \vec{u}\cdot\nabla h\right)\right) = \\
 &= \nabla\left[\nabla\left(\frac{1}{2}(z+h)^2\nabla\cdot\vec{u}\right)\right] + \nabla^2\left[z\left(\frac{h_t}{\epsilon} + \vec{u}\cdot\nabla h\right)\right] = \\
 &= \nabla\left[\nabla\left(\frac{1}{2}(z+h)^2\right)\nabla\cdot\vec{u} + \frac{1}{2}(z+h)^2\nabla(\nabla\cdot\vec{u})\right] + \\
 &\quad + z\left(\frac{1}{\epsilon}\nabla^2h_t + \nabla^2(\vec{u}\cdot\nabla h)\right) = \\
 &= \nabla\left[(z+h)\nabla h\nabla\cdot\vec{u} + \frac{1}{2}(z+h)^2\nabla(\nabla\cdot\vec{u})\right] + \\
 &\quad + z\left(\frac{1}{\epsilon}\nabla^2h_t + \nabla^2(\vec{u}\cdot\nabla h)\right) = \tag{1.26} \\
 &= (|\nabla h|^2\nabla\cdot\vec{u} + (z+h)\nabla^2h\nabla\cdot\vec{u} + (z+h)\nabla h\nabla(\nabla\cdot\vec{u})) + \\
 &\quad + \left((z+h)\nabla h\nabla(\nabla\cdot\vec{u}) + \frac{1}{2}(z+h)^2\nabla^2(\nabla\cdot\vec{u})\right) + \\
 &\quad + z\left(\frac{1}{\epsilon}\nabla^2h_t + \nabla^2(\vec{u}\cdot\nabla h)\right) = \\
 &= (|\nabla h|^2 + (z+h)\nabla^2h)\nabla\cdot\vec{u} + 2(z+h)\nabla h\cdot\nabla(\nabla\cdot\vec{u}) + \\
 &\quad + \frac{1}{2}(z+h)^2\nabla^2(\nabla\cdot\vec{u}) + z\left(\frac{1}{\epsilon}\nabla^2h_t + \nabla^2(\vec{u}\cdot\nabla h)\right).
 \end{aligned}$$

Integramos (1.26) respecto de z .

$$\begin{aligned}
 \phi_{2z} &= \left(z|\nabla h|^2 + \frac{1}{2}(z+h)^2\nabla^2h\right)\nabla\cdot\vec{u} + (z+h)^2\nabla h\cdot\nabla(\nabla\cdot\vec{u}) + \\
 &\quad + \frac{1}{6}(z+h)^3\nabla^2(\nabla\cdot\vec{u}) + \frac{z^2}{2}\left(\frac{1}{\epsilon}\nabla^2h_t + \nabla^2(\vec{u}\cdot\nabla h)\right) + \tag{1.27} \\
 &\quad + C_2(x, y, t).
 \end{aligned}$$

Para obtener $C_2(x, y, t)$ utilizamos la ecuación (1.20) en la que $z = -h$, sustituyendo ϕ_1 por la expresión de (1.25); es decir:

$$\begin{aligned}
 \phi_{2z} &= -\nabla\phi_1\cdot\nabla h = \nabla\left[\frac{1}{2}(z+h)^2\nabla\cdot\vec{u} + z\left(\frac{h_t}{\epsilon} + \vec{u}\cdot\nabla h\right)\right]\cdot\nabla h = \\
 &= \left[(z+h)\nabla h\nabla\cdot\vec{u} + \frac{1}{2}(z+h)^2\nabla(\nabla\cdot\vec{u}) + z\left(\frac{1}{\epsilon}\nabla h_t + \nabla(\vec{u}\cdot\nabla h)\right)\right]\cdot\nabla h.
 \end{aligned}$$

Sustituimos $z = -h$ y obtenemos:

$$\phi_{2z} = -h\left(\frac{1}{\epsilon}\nabla h_t + \nabla(\vec{u}\cdot\nabla h)\right)\cdot\nabla h. \tag{1.28}$$

Finalmente, igualamos (1.27) y (1.28) y teniendo en cuenta que $z = -h$, llegamos a que

$$C_2(x, y, t) = h|\nabla h|^2 \nabla \cdot \vec{u} - \frac{h^2}{2} \left(\frac{1}{\epsilon} \nabla^2 h_t + \nabla^2(\vec{u} \cdot \nabla h) \right) + \\ - h \left(\frac{1}{\epsilon} \nabla h_t + \nabla(\vec{u} \cdot \nabla h) \right) \cdot \nabla h.$$

En resumen,

$$\phi_{2z} = \left((z+h)|\nabla h|^2 + \frac{1}{2}(z+h)^2 \nabla^2 h \right) \nabla \cdot \vec{u} + \\ + (z+h)^2 \nabla h \cdot \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \frac{1}{6}(z+h)^3 \nabla^2(\nabla \cdot \vec{u}) + \\ + \frac{z^2 - h^2}{2} \left(\frac{1}{\epsilon} \nabla^2 h_t + \nabla^2(\vec{u} \cdot \nabla h) \right) + \\ - h \left(\frac{1}{\epsilon} \nabla h_t + \nabla(\vec{u} \cdot \nabla h) \right) \cdot \nabla h. \quad (1.29)$$

Integramos (1.29) nuevamente respecto de la variable z y obtenemos la expresión para ϕ_2 :

$$\phi_2 = \left(\frac{(z+h)^2}{2} |\nabla h|^2 + \frac{1}{6}(z+h)^3 \nabla^2 h \right) \nabla \cdot \vec{u} + \frac{(z+h)^3}{3} \nabla h \cdot \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \\ + \frac{1}{24}(z+h)^4 \nabla^2(\nabla \cdot \vec{u}) + \frac{z^3}{6} \left(\frac{1}{\epsilon} \nabla^2 h_t + \nabla^2(\vec{u} \cdot \nabla h) \right) + \\ - \frac{zh^2}{2} \left(\frac{1}{\epsilon} \nabla^2 h_t + \nabla^2(\vec{u} \cdot \nabla h) \right) + \\ - zh \left(\frac{1}{\epsilon} \nabla h_t + \nabla(\vec{u} \cdot \nabla h) \right) \cdot \nabla h + C_3(x, y, t). \quad (1.30)$$

Al igual que hemos hecho antes con la función $C_1(x, y, t)$, igualamos $C_3(x, y, t)$ a cero.

Nota: En este estudio vamos a restringir nuestra atención a términos de dispersión de hasta orden $O(\mu^2)$. Asumiremos que

$$S := \frac{\epsilon}{\mu^2} = O(1).$$

De esta forma, no prestaremos atención a términos de orden $O(\epsilon^2)$ y $O(\epsilon\mu^2)$ ya que

$$\epsilon^2 = S^2 \mu^4 = O(\mu^4), \quad \epsilon\mu^2 = S\mu^4 = O(\mu^4).$$

Dicho esto, estamos preparados para derivar las ecuaciones disipativas de Boussinesq en su forma más simple.

Para empezar, sustituimos la expansión asintótica (1.12) en la primera condición frontera de (1.11):

$$\overset{0}{\phi_{0z}} + \mu^2 \phi_{1z} + \mu^4 \phi_{2z} = \mu^2 \eta_t + \epsilon \mu^2 \nabla \phi_0 \cdot \nabla \eta + O(\mu^6 + \epsilon \mu^4), \quad z = \epsilon \eta. \quad (1.31)$$

Por una parte, sabemos que el primer término de la izquierda es 0 por (1.18). Por otra parte, podemos evaluar ϕ_{1z} y ϕ_{2z} en la superficie libre $z = \epsilon \eta$ utilizando las expresiones (1.24) y (1.29), respectivamente:

$$\begin{aligned} \phi_{1z}|_{z=\epsilon\eta} &= -(\epsilon\eta + h)\nabla \cdot \vec{u} - \frac{h_t}{\epsilon} - \vec{u} \cdot \nabla h. \\ \phi_{2z}|_{z=\epsilon\eta} &= \left((\epsilon\eta + h)|\nabla h|^2 + \frac{1}{2}(\epsilon\eta + h)^2 \nabla^2 h \right) \nabla \cdot \vec{u} + \\ &\quad + (\epsilon\eta + h)^2 \nabla h \cdot \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \frac{1}{6}(\epsilon\eta + h)^3 \nabla^2(\nabla \cdot \vec{u}) + \\ &\quad + \frac{\epsilon^2 \eta^2 - h^2}{2} \left(\frac{1}{\epsilon} \nabla^2 h_t + \nabla^2(\vec{u} \cdot \nabla h) \right) + \\ &\quad - h \left(\frac{1}{\epsilon} \nabla h_t + \nabla(\vec{u} \cdot \nabla h) \right) \cdot \nabla h = \\ &= h \left(|\nabla h|^2 + \frac{h}{2} \nabla^2 h \right) \nabla \cdot \vec{u} + h^2 \nabla h \cdot \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \\ &\quad + \frac{1}{6} h^3 \nabla^2(\nabla \cdot \vec{u}) - \frac{h^2}{2} \left(\frac{1}{\epsilon} \nabla^2 h_t + \nabla^2(\vec{u} \cdot \nabla h) \right) + \\ &\quad - h \left(\frac{1}{\epsilon} \nabla h_t + \nabla(\vec{u} \cdot \nabla h) \right) \cdot \nabla h + O(\epsilon). \end{aligned}$$

También evaluamos ϕ_1 y ϕ_{1t} (usando (1.25)) en la superficie libre, ya que las utilizaremos más adelante.

$$\phi_1|_{z=\epsilon\eta} = -\frac{1}{2}(\epsilon\eta + h)^2 \nabla \cdot \vec{u} - \epsilon\eta \left(\frac{h_t}{\epsilon} + \vec{u} \cdot \nabla h \right). \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned} \phi_{1t}|_{z=\epsilon\eta} &= -(\epsilon\eta + h)h_t \nabla \cdot \vec{u} - \frac{1}{2}(\epsilon\eta + h)^2 \nabla \cdot \vec{u}_t - \eta h_{tt} + \\ &\quad - \epsilon\eta \vec{u}_t \cdot \nabla h - \epsilon\eta \vec{u} \cdot \nabla h_t. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Sustituyendo las primeras expresiones de arriba en (1.31) y reteniendo solamente los términos de orden $O(\epsilon + \mu^2)$:

$$\begin{aligned}
& \mu^2 \left[-(\epsilon\eta + h)\nabla \cdot \vec{u} - \frac{h_t}{\epsilon} - \vec{u}\nabla h \right] + \\
& + \mu^4 \left[h \left(|\nabla h|^2 + \frac{h}{2}\nabla^2 h \right) \nabla \cdot \vec{u} + h^2\nabla h \cdot \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) \right] + \\
& + \mu^4 \left[\frac{1}{6}h^3\nabla^2(\nabla \cdot \vec{u}) - \frac{h^2}{2} \left(\frac{1}{\epsilon}\nabla^2 h_t + \nabla^2(\vec{u} \cdot \nabla h) \right) \right] + \\
& + \mu^4 \left[-h \left(\frac{1}{\epsilon}\nabla h_t + \nabla(\vec{u} \cdot \nabla h) \right) \cdot \nabla h \right] = \mu^2\eta_t + \epsilon\mu^2\nabla\phi_0 \cdot \nabla\eta.
\end{aligned}$$

Podemos simplificar esta expresión eliminando el parámetro μ^2 y recordando que para el orden cero (μ^0) hemos definido en (1.21) el vector velocidad horizontal como $\vec{u} = \nabla\phi_0$.

$$\begin{aligned}
& \eta_t + \epsilon\vec{u} \cdot \nabla\eta + (\epsilon\eta + h)\nabla \cdot \vec{u} + \frac{h_t}{\epsilon} + \vec{u} \cdot \nabla h = \\
& = \mu^2 \left[h \left(|\nabla h|^2 + \frac{h}{2}\nabla^2 h \right) \nabla \cdot \vec{u} + h^2\nabla h \cdot \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) \right] + \\
& + \mu^2 \left[\frac{1}{6}h^3\nabla^2(\nabla \cdot \vec{u}) - \frac{h^2}{2} \left(\frac{1}{\epsilon}\nabla^2 h_t + \nabla^2(\vec{u} \cdot \nabla h) \right) \right] + \\
& + \mu^2 \left[-h \left(\frac{1}{\epsilon}\nabla h_t + \nabla(\vec{u} \cdot \nabla h) \right) \cdot \nabla h \right].
\end{aligned}$$

Y reordenando algunos términos obtenemos

$$\begin{aligned}
& \eta_t + \nabla \cdot ((\epsilon\eta + h)\vec{u}) = \\
& = -\frac{1}{\epsilon} \left(1 + \frac{\mu^2 h^2}{2}\nabla^2 + \mu^2 h\nabla h \cdot \nabla \right) h_t + \frac{\mu^2 h^3}{6}\nabla^2(\nabla \cdot \vec{u}) + \\
& + \mu^2 h \left[\left(|\nabla h|^2 + \frac{h}{2}\nabla^2 h \right) \nabla \cdot \vec{u} + h\nabla h \cdot \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) \right] + \\
& - \mu^2 h \left(\nabla(\vec{u} \cdot \nabla h) \cdot \nabla h + \frac{h}{2}\nabla^2(\vec{u} \cdot \nabla h) \right). \tag{1.34}
\end{aligned}$$

La ecuación para la evolución del campo de velocidad se deriva de forma similar usando la segunda ecuación frontera de (1.11). La derivación dependerá del modelo disipativo que elijamos. Para ambos modelos, lo que hay que hacer es evaluar ϕ_1 , ϕ_{1t} y ϕ_{1zz} en la superficie libre $z = \epsilon\eta$ y sustituir estas expresiones en la forma asintótica de la segunda ecuación frontera de (1.11); es decir, de

$$\begin{aligned}
& \mu^2(\phi_{0t} + \mu^2\phi_{1t}) + \frac{\epsilon\mu^2}{2}|\nabla\phi_0|^2 + \frac{\epsilon}{2}(\phi_{0z})^2 + \mu^2\eta + \\
& + \frac{\epsilon}{R_2}(\phi_{0zz} + \mu^2\phi_{1zz}) + O(\epsilon\mu^4 + \mu^6) = 0
\end{aligned}$$

si escogemos el segundo modelo de disipación.

Recordando que $\phi_{0z} = 0$ por (1.18) y que $\nabla\phi_0 = \vec{u}$ (definido en (1.21)), la ecuación de arriba queda

$$\mu^{\mathcal{Z}}(\phi_{0t} + \mu^2\phi_{1t}) + \frac{\epsilon\mu^{\mathcal{Z}}}{2}\vec{u}^2 + \mu^{\mathcal{Z}}\eta + \frac{\epsilon\mu^{\mathcal{Z}}}{R_2}\phi_{1zz} = O(\epsilon\mu^4 + \mu^6).$$

A continuación, sustituyendo ϕ_{1t} y ϕ_{1zz} de (1.33) y (1.22), respectivamente, en la expresión de arriba:

$$\begin{aligned} \phi_{0t} + \mu^2 \left(-(\epsilon\eta + h)h_t\nabla \cdot \vec{u} - \frac{1}{2}(\epsilon\eta + h)^2\nabla \cdot \vec{u}_t - \eta h_{tt} + \right. \\ \left. -\epsilon\eta\vec{u}_t \cdot \nabla h - \epsilon\eta\vec{u} \cdot \nabla h_t \right) + \frac{\epsilon}{2}\vec{u}^2 + \eta - \frac{\epsilon}{R_2}\nabla \cdot \vec{u} = 0. \end{aligned}$$

Y suponiendo que h es constante (y por tanto, con la superficie libre $z = \epsilon\eta$ constante en cero) obtenemos la ecuación para el segundo modelo:

$$\phi_{0t} + \frac{\epsilon}{2}\vec{u}^2 + \eta - \frac{\epsilon}{R_2}\nabla \cdot \vec{u} - \frac{\mu^2}{2}h^2\nabla \cdot \vec{u}_t = 0. \quad (1.35)$$

Hacemos lo mismo para el primer modelo de disipación. La segunda ecuación frontera de (1.11) en forma asintótica es

$$\begin{aligned} \mu^2(\phi_{0t} + \mu^2\phi_{1t}) + \frac{\epsilon\mu^2}{2}|\nabla\phi_0|^2 + \frac{\epsilon}{2}(\phi_{0z})^2 + \mu^2\eta + \\ + \frac{\epsilon}{R_1}(\phi_0 + \mu^2\phi_1) + O(\epsilon\mu^4 + \mu^6) = 0. \end{aligned}$$

Sabemos que $\phi_{0z} = 0$ por (1.14) y $\nabla\phi_0 = \vec{u}$ por (1.21). Sustituyendo ϕ_1 , ϕ_{1t} y ϕ_{1zz} de (1.25), (1.33) y (1.22), respectivamente, evaluadas en $z = \epsilon\eta$ y dividiendo la ecuación de arriba por μ^2 tenemos

$$\begin{aligned} \phi_{0t} + \mu^2 \left(-(\epsilon\eta + h)h_t\nabla \cdot \vec{u} - \frac{1}{2}(\epsilon\eta + h)^2\nabla \cdot \vec{u}_t - \eta h_{tt} + \right. \\ \left. -\epsilon\eta\vec{u}_t \cdot \nabla h - \epsilon\eta\vec{u} \cdot \nabla h_t \right) + \frac{\epsilon}{2}\vec{u}^2 + \eta + \frac{\epsilon}{\mu^2 R_1}\phi_0 + \\ \frac{\epsilon}{R_1} \left(-\frac{1}{2}(\epsilon\eta + h)^2\nabla \cdot \vec{u} - \epsilon\eta \left(\frac{h_t}{\epsilon} + \vec{u} \cdot \nabla h \right) \right) = 0. \end{aligned}$$

Por último, suponemos de nuevo que h es constante y, por tanto, que la superficie libre $z = \epsilon\eta$ es constante en cero. De esta manera, obtenemos la ecuación para el primer modelo:

$$\phi_{0t} + \frac{\epsilon}{2}\vec{u}^2 + \eta + \frac{\epsilon}{\mu^2 R_1}\phi_0 - \frac{\epsilon}{2R_1}h^2\nabla \cdot \vec{u} - \frac{\mu^2}{2}h^2\nabla \cdot \vec{u}_t = 0. \quad (1.36)$$

El último paso para obtener las ecuaciones de la evolución de la velocidad es derivar (1.36) y (1.35) respecto a las coordenadas horizontales.

De esta forma, juntando la ecuación (1.34) y las (1.35) y (1.36) derivadas, las ecuaciones de Boussinesq para el primer y segundo modelo, respectivamente son las siguientes:

$$\begin{aligned} \eta_t + \nabla \cdot ((\epsilon\eta + h)\vec{u}) = & -\frac{1}{\epsilon} \left(1 + \frac{\mu^2 h^2}{2} \nabla^2 + \mu^2 h \nabla h \cdot \nabla \right) h_t + \frac{\mu^2 h^3}{6} \nabla^2 (\nabla \cdot \vec{u}) + \\ & + \mu^2 h \left[\left(|\nabla h|^2 + \frac{h}{2} \nabla^2 h \right) \nabla \cdot \vec{u} + h \nabla h \cdot \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) \right] + \\ & - \mu^2 h \left(\nabla (\vec{u} \cdot \nabla h) \cdot \nabla h + \frac{h}{2} \nabla^2 (\vec{u} \cdot \nabla h) \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{MODELO 1: } \quad \vec{u}_t + \frac{\epsilon}{2} \nabla \vec{u}^2 + \nabla \eta + \frac{\epsilon}{\mu^2 R_1} \vec{u} - \frac{\epsilon}{2R_1} \nabla (h^2 \nabla \cdot \vec{u}) + \\ - \frac{\mu^2}{2} \nabla (h^2 \nabla \cdot \vec{u}_t) = 0. \end{aligned}$$

$$\text{MODELO 2: } \quad \vec{u}_t + \frac{\epsilon}{2} \nabla \vec{u}^2 + \nabla \eta - \frac{\epsilon}{R_2} \nabla^2 \cdot \vec{u} - \frac{\mu^2}{2} \nabla (h^2 \nabla \cdot \vec{u}_t) = 0,$$

donde la primera ecuación es común en los dos casos.

En el próximo capítulo estudiaremos variantes de las ecuaciones de Boussinesq, siendo el caso de las ecuaciones acopladas las más similares a las de arriba indicadas.

Capítulo 2

Resolución analítica de Ecuaciones de Boussinesq con el método de la tangente hiperbólica

En este capítulo resolveremos analíticamente diferentes variantes de la ecuación de Boussinesq utilizando el método de la tangente hiperbólica, el cual permite encontrar soluciones con forma de ondas viajeras. Las soluciones que obtendremos serán de tipo solitón. Las variantes de Boussinesq que resolveremos son las siguientes:

La ecuación cúbica de Boussinesq:

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxxx} + 2(u^3)_{xx} = 0,$$

las ecuaciones de Boussinesq acopladas:

$$\begin{aligned}u_t + v_x + uv_x &= 0 \\v_t + (vu)_x + u_{xxx} &= 0,\end{aligned}$$

la ecuación de Boussinesq estándar:

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxxx} - (u^2)_{xx} = 0,$$

y la ecuación estándar de Boussinesq mejorada:

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xtt} - (u^2)_{xx} = 0,$$

2.1. Método de la tanh

Existen varias técnicas matemáticas para resolver la ecuación de Boussinesq. El método que estudiamos en este capítulo es el de la tangente hiperbólica.

Este método está basado en la suposición de que las soluciones de las ondas viajeras pueden expresarse en términos de la función \tanh , y se utiliza para encontrar soluciones exactas de ecuaciones diferenciales no lineales

$$P(u, u_t, u_x, u_{xx}, \dots) = 0, \quad (2.1)$$

donde P es un polinomio de u y sus derivadas.

Antes de nada, consideramos el siguiente cambio de variable: $\xi = kx - \lambda t$. De esta forma, $u(x, t) = U(\xi)$ y, con la regla de la cadena, obtenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\lambda \frac{d}{d\xi}, & \frac{\partial}{\partial x} &= k \frac{d}{d\xi}, & \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= k^2 \frac{d^2}{d\xi^2}, \\ \frac{\partial^3}{\partial x^3} &= k^3 \frac{d^3}{d\xi^3}, & \frac{\partial^4}{\partial x^4} &= k^4 \frac{d^4}{d\xi^4}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Así, la ecuación (2.1) se reduce a la ecuación diferencial ordinaria

$$Q(U, U', U'', \dots) = 0 \quad (2.3)$$

siendo Q otro polinomio.

A continuación, integramos (2.3) y elegimos que las constantes de integración sean cero ya que queremos soluciones de tipo solitón; es decir, de ondas solitarias que se propagan sin deformarse en medios no lineales y que decaen a cero para $|x| \rightarrow \infty$.

Antes se ha dicho que el método de la tangente hiperbólica está basado en la suposición de que las soluciones de las ondas viajeras pueden expresarse en términos de la función \tanh . Por esta razón, el primer paso es introducir la nueva variable independiente

$$Y(x, t) = \tanh(\xi), \quad (2.4)$$

con la que obtenemos que

$$\frac{d}{d\xi} = \frac{dY}{d\xi} \frac{d}{dY} = *(1 - Y^2) \frac{d}{dY}. \quad (2.5)$$

* $(\tanh x)' = 1 - \tanh^2 x$, resuelto en el apéndice A.1.

Utilizando la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2}{d\xi^2} &= \frac{d}{d\xi} \left((1 - Y^2) \frac{d}{dY} \right) = \\
 &= \left(\frac{d}{d\xi} (1 - Y^2) \right) \frac{d}{dY} + (1 - Y^2) \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d}{dY} \right) = \\
 &= \left(\frac{dY}{d\xi} \frac{d}{dY} (1 - Y^2) \right) \frac{d}{dY} + (1 - Y^2) \frac{dY}{d\xi} \frac{d}{dY} \left(\frac{d}{dY} \right) = \quad (2.6) \\
 &= (1 - Y^2)(-2Y) \frac{d}{dY} + (1 - Y^2)(1 - Y^2) \frac{d^2}{dY^2} = \\
 &= -2Y(1 - Y^2) \frac{d}{dY} + (1 - Y^2)^2 \frac{d^2}{dY^2}.
 \end{aligned}$$

$$\frac{d^3}{d\xi^3} = 2(1 - Y^2)(3Y^2 - 1) \frac{d}{dY} - 6Y(1 - Y^2)^2 \frac{d^2}{dY^2} + (1 - Y^2)^3 \frac{d^3}{dY^3}. \quad (2.7)$$

La resolución de la tercera derivada podemos encontrarla en el apéndice A.1.

El segundo paso es expresar la solución de la siguiente forma:

$$u(x, t) = U(\xi) = \sum_{i=0}^m a_i Y^i \quad (2.8)$$

donde el parámetro m se obtiene al igualar los términos lineales y los no lineales de mayor orden de (2.3). Por último, se determinan $k, \lambda, a_0, a_1, \dots, a_m$ sustituyendo (2.8) en (2.3) e igualando los coeficientes de Y^i con $i = 0, 1, \dots, m$ a cero.

A continuación, vamos a aplicar el método a las ecuaciones mencionadas anteriormente.

2.2. La ecuación cúbica de Boussinesq

La ecuación cúbica de Boussinesq

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxxx} + 2(u^3)_{xx} = 0, \quad (2.9)$$

describe los movimientos de ondas largas en aguas poco profundas bajo gravedad, en un modelo unidimensional.

Para resolverla [5], empezamos haciendo el cambio

$$u(x, t) = U(\xi) \quad \text{con} \quad \xi = kx - \lambda t. \quad (2.10)$$

De esta forma, usando las expresiones (2.2), la ecuación (2.9) queda transformada en

$$(\lambda^2 - k^2)U'' - k^4U'''' + 2k^2(U^3)'' = 0, \quad (2.11)$$

donde ' denota la derivada con respecto de ξ .

Integramos (2.11) dos veces y elegimos las constantes de integración igual a cero.

$$(\lambda^2 - k^2)U - k^4U'' + 2k^2U^3 = 0. \quad (2.12)$$

A continuación, basándonos en el método de la tanh, asumimos que

$$U(\xi) = \sum_{i=0}^m a_i Y^i, \quad Y(x, t) = \tanh(\xi). \quad (2.13)$$

Utilizando de nuevo los cálculos realizados en (2.5) y (2.6), pasamos de las derivadas con respecto de ξ a derivadas con respecto de Y , obteniendo la siguiente ecuación:

$$(\lambda^2 - k^2)U - k^4 \left(-2Y(1 - Y^2) \frac{dU}{dY} + (1 - Y^2)^2 \frac{d^2U}{dY^2} \right) + 2k^2U^3 = 0. \quad (2.14)$$

Para obtener el valor de m , igualamos el término lineal de mayor orden $\left(\frac{d^2U}{dY^2}\right)$ con el término no lineal de mayor orden (U^3) de (2.14). El término cúbico tendrá la potencia más alta $3m$, y el término lineal tendrá la potencia $4 + (m - 2)$ de Y^4 y de $\frac{d^2U}{dY^2}$, respectivamente. Entonces,

$$3m = 4 + m - 2 \quad \Leftrightarrow \quad m = 1.$$

Por tanto, $U(\xi) = a_0 + a_1Y$ con $a_1 \neq 0$. Sustituimos en (2.14), con $\frac{dU}{dY} = a_1$ y $\frac{d^2U}{dY^2} = 0$, y obtenemos la siguiente ecuación:

$$(\lambda^2 - k^2)(a_0 + a_1Y) - k^4(-2Y(1 - Y^2)a_1 + 2k^2(a_0 + a_1Y)^3) = 0. \quad (2.15)$$

Por último, igualamos los coeficientes de Y^i con $i = 0, 1, 2, 3$ a cero y resolvemos el sistema de ecuaciones que nos queda obteniendo así la solución a la ecuación (2.9).

$$\begin{cases} (\lambda^2 - k^2)a_0 + 2k^2a_0^3 = 0 \\ (\lambda^2 - k^2)a_1 + 2k^4a_1 + 6k^2a_0^2a_1 = 0 \\ 6k^2a_0a_1^2 = 0 \\ 2k^2a_1^3 - 2k^4a_1 = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

Cogiendo la cuarta ecuación y eligiendo $2k^2a_1$ factor común, tenemos que $2k^2a_1(a_1^2 - k^2) = 0$. Como $a_1 \neq 0$; sabemos que $a_1^2 - k^2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = \pm k$. Sabiendo esto, de la tercera ecuación podemos deducir que $a_0 = 0$. Por

último, sustituyendo los valores de a_0 y a_1 en la segunda ecuación, llegamos a que $\lambda^2 k - k^3 + 2k^5 = 0$ y obtenemos el valor de λ en función de k : $\lambda = \pm k\sqrt{1 - 2k^2}$. En resumen, la solución de (2.16) es:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \pm k, \quad \lambda = \pm k\sqrt{1 - 2k^2}.$$

En el apéndice A.2 se encuentra el programa escrito en MATHEMATICA que resuelve el sistema (2.16).

De este modo, la solución de (2.9) es:

$$u(x, t) = \pm k \tanh\left(kx \pm t\sqrt{1 - 2k^2}\right), \quad |k| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (2.17)$$

A continuación, se muestran las gráficas en 3D de la solución para dos valores distintos de k .

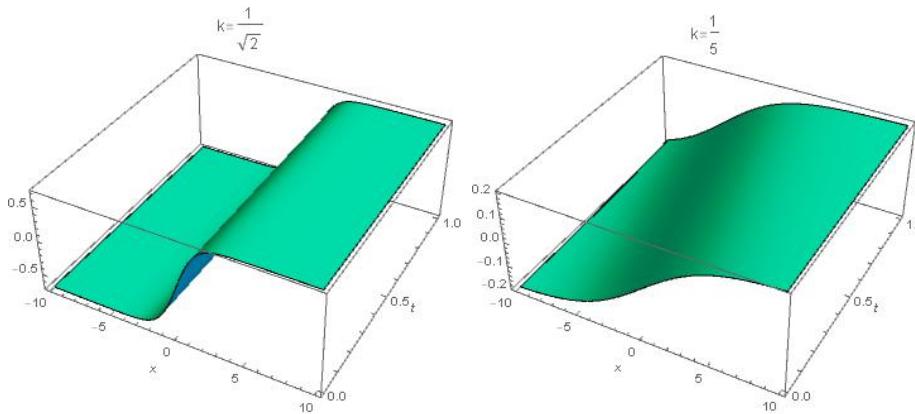


Figura 2.1: Gráfica 3D de $u(x, t)$ dada en (2.17) para $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $k = \frac{1}{5}$.

Observamos que el valor del parámetro k afecta a la amplitud y a la velocidad de la ola.

2.3. Ecuaciones de Boussinesq acopladas

Las ecuaciones de Boussinesq acopladas

$$u_t + v_x + uu_x = 0, \quad (2.18)$$

$$v_t + (vu)_x + u_{xxx} = 0, \quad (2.19)$$

se presentan en ondas de aguas poco profundas para un flujo de fluido de dos capas. Esta situación se produce, por ejemplo, cuando hay un derrame accidental de petróleo de un barco que da lugar a una capa de petróleo que

flota por encima de la capa de agua.

Comenzamos a resolverlas [5] haciendo el cambio

$$\begin{aligned} u(x, t) &= U(\xi) \\ v(x, t) &= V(\xi) \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde $\xi = kx - \lambda t$.

Aplicamos este cambio a las ecuaciones en derivadas parciales (2.18) y (2.19), obteniendo:

$$-\lambda U' + kV' + kUU' = 0, \quad (2.21)$$

$$-\lambda V' + k(V'U + U'V) + k^3U''' = 0. \quad (2.22)$$

A continuación, asumimos de nuevo que

$$U(\xi) = \sum_{i=0}^m a_i Y^i, \quad V(\xi) = \sum_{i=0}^n b_i Y^i. \quad (2.23)$$

donde $Y(x, t) = \tanh(\xi)$.

Haciendo uso de los cálculos realizados en (2.5), (2.6) y (2.7), llegamos a que el sistema de ecuaciones queda:

$$-\lambda(1 - Y^2) \frac{dU}{dY} + k(1 - Y^2) \frac{dV}{dY} + kU(1 - Y^2) \frac{dU}{dY} = 0, \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} k^3 \left[2(1 - Y^2)(3Y^2 - 1) \frac{dU}{dY} - 6Y(1 - Y^2)^2 \frac{d^2U}{dY^2} + (1 - Y^2)^3 \frac{d^3U}{dY^3} \right] + \\ - \lambda(1 - Y^2) \frac{dV}{dY} + kU(1 - Y^2) \frac{dV}{dY} + kV(1 - Y^2) \frac{dU}{dY} = 0. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Para determinar m y n , igualamos los términos lineales de mayor orden con los no lineales de mayor orden de (2.24) y (2.25). En este caso, para la primera ecuación tenemos $\frac{dU}{dY}$ y $\frac{dV}{dY}$ como términos lineales, y $U \frac{dU}{dY}$ como término no lineal. De modo que $2 + m - 1 + 2 + n - 1 = 2 + m + m - 1$. En cuanto a la segunda ecuación, el término lineal de mayor orden es $\frac{d^3U}{dY^3}$ y los no lineales son $U \frac{dV}{dY}$ y $V \frac{dU}{dY}$. Entonces, $6 + m - 3 = 2 + m + n - 1 + 2 + n + m - 1$. Resolviendo este pequeño sistema, concluimos que $m = 1$ y $n = 2$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} U(\xi) &= a_0 + a_1 Y, & a_1 &\neq 0, \\ V(\xi) &= b_0 + b_1 Y + b_2 Y^2, & b_2 &\neq 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Ya sabemos la forma que tienen U y V . Lo único que nos queda es determinar

el valor de los coeficientes. Para ello, sustituimos estas expresiones en (2.24) y (2.25), y resolvemos el sistema resultante de igualar los coeficientes de Y^i ($\forall i = 0, 1, 2, 3, 4$) a cero.

El sistema de ecuaciones no lineal que queda es el siguiente:

$$\begin{cases} ka_0a_1 + kb_1 - \lambda a_1 = 0 \\ 2kb_2 + ka_1^2 = 0 \\ -\lambda b_1 + ka_0b_1 + ka_1b_0 - 2k^3a_1 = 0 \\ -\lambda b_2 + ka_0b_2 + ka_1b_1 = 0 \\ a_1b_2 + 2k^2a_1 = 0. \end{cases} \quad (2.27)$$

Y su solución, calculada con el programa MATHEMATICA del apéndice A.3, es:

$$a_0 = \frac{\lambda}{k}, \quad a_1 = \pm 2k, \quad b_0 = 2k^2, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = -2k^2.$$

De manera que la solución de (2.18)-(2.19) es:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\lambda}{k} \pm 2k \tanh(kx - \lambda t), \\ v(x, t) &= 2k^2 \operatorname{sech}^2(kx - \lambda t). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Por último, se muestran las gráficas en 3D de las soluciones de $u(x, t)$ y $v(x, t)$.

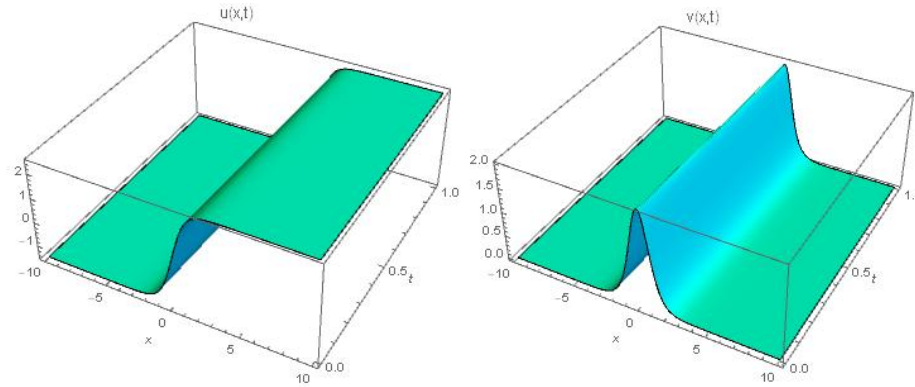


Figura 2.2: Gráfica 3D de $u(x, t)$ y $v(x, t)$ dadas en (2.28) para $k = 1$ y $\lambda = \frac{1}{2}$.

2.4. La ecuación de Boussinesq estándar

La siguiente ecuación que resolveremos es la ecuación estándar de Boussinesq:

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxxx} - (u^2)_{xx} = 0. \quad (2.29)$$

Comenzamos haciendo el cambio

$$u(x, t) = U(\xi) \quad \text{con} \quad \xi = kx - \lambda t, \quad (2.30)$$

y utilizando las expresiones (2.2), la ecuación (2.29) queda transformada en la siguiente ecuación diferencial ordinaria donde, nuevamente, ' denota la derivada con respecto de ξ :

$$(\lambda^2 - k^2)U'' - k^4U'''' - k^2(U^2)'' = 0. \quad (2.31)$$

A continuación, integramos (2.31) dos veces respecto de ξ y elegimos las constantes de integración igual a cero.

$$(\lambda^2 - k^2)U - k^4U'' - k^2U^2 = 0. \quad (2.32)$$

Basándonos en el método de la tanh, asumimos que

$$U(\xi) = \sum_{i=0}^m a_i Y^i, \quad Y(x, t) = \tanh(\xi), \quad (2.33)$$

y utilizando (2.5) y (2.6), pasamos de las derivadas con respecto de ξ a derivadas con respecto de Y . Obtenemos la siguiente ecuación:

$$(\lambda^2 - k^2)U - k^4 \left(-2Y(1 - Y^2) \frac{dU}{dY} + (1 - Y^2)^2 \frac{d^2U}{dY^2} \right) - k^2U^2 = 0. \quad (2.34)$$

Para determinar el valor de m , igualamos el término lineal de mayor orden ($\frac{d^2}{dY^2}$) y el no lineal de mayor orden (U^2) de (2.34). De este modo, el término cuadrático tendrá la potencia $2m$, y el término lineal tendrá la potencia $4 + (m - 2)$ de Y^4 y $\frac{d^2}{dY^2}$, respectivamente. En tal caso,

$$2m = 4 + m - 2 \quad \Leftrightarrow \quad m = 2.$$

Por tanto, $U(\xi) = a_0 + a_1Y + a_2Y^2$ con $a_2 \neq 0$. Sustituimos ahora en (2.34), con $\frac{dU}{dY} = a_1 + 2a_2Y$ y $\frac{d^2U}{dY^2} = 2a_2$, y obtenemos la siguiente ecuación:

$$(\lambda^2 - k^2)(a_0 + a_1Y + a_2Y^2) - k^4(-2Y(1 - Y^2)(a_1 + 2a_2Y) + 2a_2(1 - Y^2)^2) - k^2(a_0 + a_1Y + a_2Y^2)^2 = 0. \quad (2.35)$$

Por último, encontramos los valores que toman los coeficientes $a_0, a_1, a_2, k, \lambda$ resolviendo el sistema resultante de igualar los coeficientes de Y^i a cero, donde $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

$$\begin{cases} (\lambda^2 - k^2)a_0 - 2k^4a_2 - k^2a_0^2 = 0 \\ (\lambda^2 - k^2)a_1 + 2k^4a_1 - 2k^2a_0a_1 = 0 \\ (\lambda^2 - k^2)a_2 + 8k^4a_2 - k^2a_1 - 2k^2a_0a_2 = 0 \\ 2k^4a_1 + 2k^2a_1a_2 = 0 \\ 6k^4a_2 + k^2a_2 = 0. \end{cases} \quad (2.36)$$

Obtenemos dos soluciones, calculadas con MATHEMATICA en el apéndice A4, para (2.36):

$$a_0 = 2k^2, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -6k^2, \quad \lambda = \pm k\sqrt{1 - 4k^2}. \quad (2.37)$$

$$a_0 = 6k^2, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -6k^2, \quad \lambda = \pm k\sqrt{1 - 4k^2}. \quad (2.38)$$

Finalmente, tenemos dos soluciones distintas de (2.29).

CASO 1:

$$u(x, t) = 2k^2 - 6k^2 \tanh^2(k(x \mp t\sqrt{1 - 4k^2})). \quad (2.39)$$

CASO 2:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 6k^2 - 6k^2 \tanh^2(k(x \mp \sqrt{1 - 4k^2}t)) = \\ &= 6k^2 \operatorname{sech}^2(k(x \mp t\sqrt{1 - 4k^2})). \end{aligned} \quad (2.40)$$

En ambos casos, $|k| \leq \frac{1}{2}$.

A continuación, se muestran las gráficas en 3D de ambas soluciones para un valor de $k = \frac{1}{3}$.

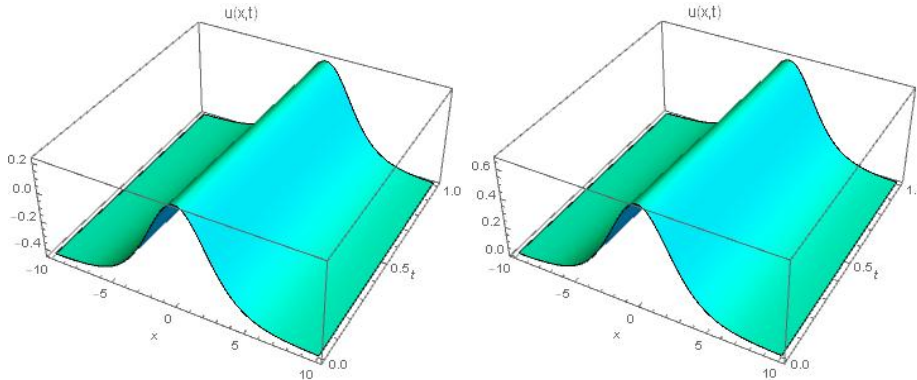


Figura 2.3: Gráfica 3D de las funciones $u(x, t)$ en (2.39) a la izquierda y $u(x, t)$ en (2.40) a la derecha, para un valor de $k = \frac{1}{3}$.

2.5. La ecuación de Boussinesq estándar mejorada

Finalmente, resolvemos la ecuación de Boussinesq mejorada,

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} - (u^2)_{xx} = 0, \quad (2.41)$$

siguiendo los mismos pasos que en los ejemplos anteriores.

Primero, hacemos el cambio

$$u(x, t) = U(\xi) \quad \text{con} \quad \xi = kx - \lambda t, \quad (2.42)$$

y utilizamos las expresiones (2.2) con el fin de que la ecuación (2.41) quede transformada en la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$(\lambda^2 - k^2)U'' - k^2\lambda^2U'''' - k^2(U^2)'' = 0, \quad (2.43)$$

en la que ' denota la derivada con respecto de ξ . Integramos (2.43) dos veces respecto de ξ con constante de integración igual a cero.

$$(\lambda^2 - k^2)U - k^2\lambda^2U'' - k^2U^2 = 0. \quad (2.44)$$

Basándonos ahora en el método que estamos utilizando, asumimos que la solución $U(\xi)$ viene dada por:

$$U(\xi) = \sum_{i=0}^m a_i Y^i, \quad Y(x, t) = \tanh(\xi). \quad (2.45)$$

De manera que utilizando los cálculos (2.5) y (2.6), pasamos a tener derivadas con respecto de Y , obteniendo así la ecuación

$$(\lambda^2 - k^2)U - k^2\lambda^2 \left(-2Y(1 - Y^2) \frac{dU}{dY} + (1 - Y^2)^2 \frac{d^2U}{dY^2} \right) - k^2U^2 = 0. \quad (2.46)$$

Como hemos hecho en otras ocasiones, para determinar m igualamos el término lineal de mayor orden $\left(\frac{d^2U}{dY^2} \right)$ y el no lineal de mayor orden (U^2) de la ecuación (2.46). De este modo,

$$2m = 4 + m - 2 \quad \Leftrightarrow \quad m = 2,$$

y por tanto, $U(\xi) = a_0 + a_1Y + a_2Y^2$ con $a_2 \neq 0$.

Sustituyendo esta última expresión en (2.46),

$$\begin{aligned} (\lambda^2 - k^2)(a_0 + a_1Y + a_2Y^2) - k^2\lambda^2(-2Y(1 - Y^2)(a_1 + 2a_2Y) + \\ + 2a_2(1 - Y^2)^2) - k^2(a_0 + a_1Y + a_2Y^2)^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.47)$$

E igualando los coeficientes de Y^i ($\forall i = 0, 1, 2, 3, 4$) a cero, conseguimos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (\lambda^2 - k^2)a_0 - 2k^2\lambda^2a_2 - k^2a_0^2 = 0 \\ (\lambda^2 - k^2)a_1 + 2k^2\lambda^2a_1 - 2k^2a_0a_1 = 0 \\ (\lambda^2 - k^2)a_2 + 8k^2\lambda^2a_2 - k^2a_1 - 2k^2a_0a_2 = 0 \\ 2k^2\lambda^2a_1 + 2k^2a_1a_2 = 0 \\ 6k^2\lambda^2a_2 + k^2a_2 = 0. \end{cases} \quad (2.48)$$

Resolvemos (2.48) mediante un programa escrito en MATHEMATICA (ver apéndice A5) y obtenemos dos soluciones:

$$a_0 = -\frac{6k^2}{-1 + 4k^2}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{6k^2}{-1 + 4k^2}, \quad \lambda = \pm \frac{k}{\sqrt{1 - 4k^2}}. \quad (2.49)$$

$$a_0 = \frac{2k^2}{1+4k^2}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{6k^2}{1+4k^2}, \quad \lambda = \pm \frac{k}{\sqrt{1+4k^2}}. \quad (2.50)$$

Finalmente, tenemos dos soluciones distintas de (2.29).

CASO 1:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= -\frac{6k^2}{-1+4k^2} + \frac{6k^2}{-1+4k^2} \tanh^2 \left(k \left(x \mp \frac{1}{\sqrt{1-4k^2}} t \right) \right) = \\ &= \frac{6k^2}{1-4k^2} \operatorname{sech}^2 \left(k \left(x \mp \frac{1}{\sqrt{1-4k^2}} t \right) \right). \end{aligned} \quad (2.51)$$

CASO 2:

$$u(x, t) = \frac{2k^2}{1+4k^2} - \frac{6k^2}{1+4k^2} \tanh^2 \left(k \left(x \mp \frac{1}{\sqrt{1+4k^2}} t \right) \right). \quad (2.52)$$

Para terminar, se muestran las gráficas en 3D de ambas soluciones para un valor de $k = \frac{1}{3}$.

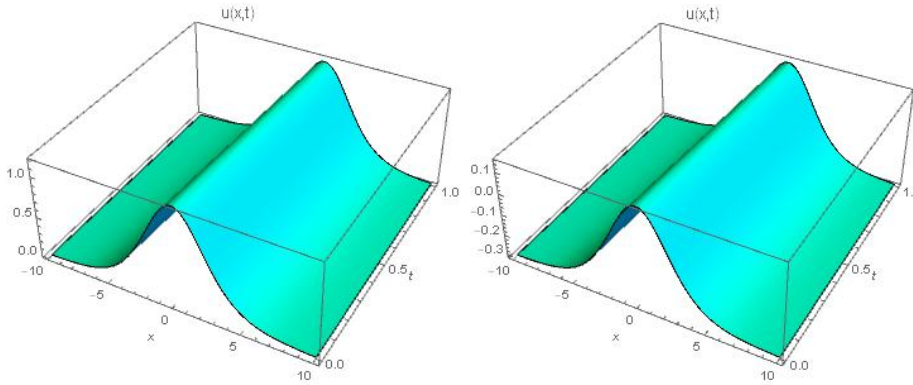


Figura 2.4: Gráfica 3D de las funciones $u(x, t)$ dada en (2.51) a la izquierda y $u(x, t)$ dada en (2.52) a la derecha, para un valor de $k = \frac{1}{3}$.

Capítulo 3

Resolución numérica de la Ecuación de Boussinesq Mejorada

Entre las ecuaciones que hemos resuelto en el capítulo anterior se encuentran la ecuación estándar y la ecuación estándar mejorada de Boussinesq. La primera de estas describe un gran número de fenómenos de las olas dispersivas no lineales como, por ejemplo, la propagación en ambas direcciones de olas largas en superficies de aguas poco profundas. Sin embargo, esta ecuación presenta una inestabilidad en olas de longitud de onda corta y, por eso, se conoce también como “la ecuación mala” de Boussinesq. Debido a este problema se propuso la ecuación de Boussinesq mejorada: una ecuación físicamente estable y apropiada para realizar simulaciones numéricas.

En este último capítulo procedemos a resolver numéricamente esta ecuación utilizando un método en diferencias finitas y terminamos con una simulación numérica de la ecuación utilizando el programa hecho con MATHEMATICA y descrito en el apéndice B, siguiendo el trabajo de Dursun Irk e Idris Dag [4].

Dicho esto, nos centramos en la ecuación de Boussinesq mejorada con las siguientes condiciones iniciales y de contorno:

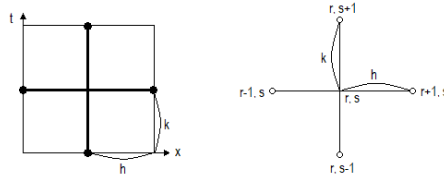
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} - (u^2)_{xx} = 0, & (x, t) \in [a, b] \times [0, T], \\ u(x, 0) = f(x), & x \in [a, b], \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \in [a, b], \\ u(a, t) = u_x(a, t) = 0, & t > 0, \\ u_x(a, t) = u_{xx}(a, t) = 0, & t > 0, \\ u_{xx}(a, t) = u_{xxx}(a, t) = 0, & t > 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

donde $u = u(x, t)$ es una función suficientemente diferenciable y los subíndices x y t denotan las derivadas parciales respecto al espacio y tiempo, respectivamente, de $u(x, t)$.

3.1. Método de Diferencias Finitas

En un método de diferencias finitas se divide el dominio de la solución del problema en una red con un número finito de puntos de malla. Después, se reemplazan todas las derivadas en cada punto por aproximaciones en diferencias finitas, convirtiendo el problema de ecuaciones diferenciales en un problema algebraico que hay que resolver [6].

En nuestro caso, discretizamos el plano espacio-tiempo $(x - t)$ con una red de paso k para el espacio y h para el tiempo.



De esta forma,

$$u(x_s, t_r) \equiv u(s k, r h) \equiv u(s \Delta x_s, r \Delta t_r) \equiv u_{s,r} \equiv u_s^r,$$

donde u_s^r representa el valor exacto de $u(x, t)$ en cada punto de malla con $r = 0, 1, 2, \dots$ y $s = 0, 1, 2, \dots, N$. También, utilizaremos la notación U_s^r para representar el valor numérico de u_s^r .

3.1.1. Discretización del tiempo

En primer lugar, aproximamos la segunda derivada respecto del tiempo mediante una aproximación en diferencias finitas central:

$$(U_{tt})^r = \frac{U^{r+1} - 2U^r + U^{r-1}}{h^2} + O(h^2),$$

donde $O(h^2)$ es el error de truncamiento de orden cuadrático.

Ahora sustituimos las derivadas respecto del espacio por una aproximación implícita con ponderación variable. Teniendo en cuenta que $(u^2)_{xx} = (2uu_x)_x = 2u_x^2 + 2uu_{xx}$, la ecuación de Boussinesq mejorada es:

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxt} - 2uu_{xx} - 2u_x^2 = 0.$$

Entonces, en diferencias finitas tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{U^{r+1} - 2U^r + U^{r-1}}{h^2} - (\alpha_1(U_{xx})^{r+1} + \alpha_2(U_{xx})^r + \alpha_3(U_{xx})^{r-1}) + \\ & - \frac{(U_{xx})^{r+1} - 2(U_{xx})^r + (U_{xx})^{r-1}}{h^2} + \\ & - 2(\alpha_1 U^{r+1} + \alpha_2 U^r + \alpha_3 U^{r-1})(\alpha_1(U_{xx})^{r+1} + \alpha_2(U_{xx})^r + \alpha_3(U_{xx})^{r-1}) + \\ & - 2(\alpha_1(U_x)^{r+1} + \alpha_2(U_x)^r + \alpha_3(U_x)^{r-1})^2 = 0, \end{aligned}$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$.

Reordenando los términos obtenemos:

$$\begin{aligned} & U^{r+1}[1 - 2h^2\alpha_1^2(U_{xx})^{r+1} - 2h^2\alpha_1\alpha_2(U_{xx})^r - 2h^2\alpha_1\alpha_3(U_{xx})^{r-1}] + \\ & + (U_x)^{r+1}[-2h^2\alpha_1^2(U_x)^{r+1} - 4h^2\alpha_1\alpha_2(U_x)^r - 4h^2\alpha_1\alpha_3(U_x)^{r-1}] + \\ & + (U_{xx})^{r+1}[-1 - h^2\alpha_1 - 2h^2\alpha_1\alpha_2 U^r - 2h^2\alpha_1\alpha_3 U^{r-1}] = \\ & = U^r[2 + 2h^2\alpha_2^2(U_{xx})^r + 2h^2\alpha_2\alpha_3(U_{xx})^{r-1}] + \\ & + U^{r-1}[-1 + 2h^2\alpha_2\alpha_3(U_{xx})^r + 2h^2\alpha_3^2(U_{xx})^{r-1}] + \\ & + (U_x)^r[2h^2\alpha_2^2(U_x)^r + 4h^2\alpha_2\alpha_3(U_x)^{r-1}] + \\ & + 2h^2\alpha_3^2(U_x)^{r-1}(U_x)^{r-1} + (h^2\alpha_2 - 2)(U_{xx})^r + \\ & + (h^2\alpha_3 + 1)(U_{xx})^{r-1}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

El error de truncamiento de la discretización del tiempo va a depender de los valores que demos a los parámetros α_i ($i = 1, 2, 3$).

$$\begin{aligned} & h^2[(u_{tt})^r - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(u_{xx})^r - (u_{xxtt})^r - 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 u^r (u_{xx})^r + \\ & - 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 (u_x)^r (u_x)^r] + h^3[(\alpha_3 - \alpha_1)(u_{xxtt})^r + \\ & - 2(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 (u_t)^r (u_{xx})^r + \\ & + 4(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 (u_x)^r (u_{xt})^r + \\ & + 2(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) u^r (u_{xxtt})^r] + h^4 \left[- 2(\alpha_3 - \alpha_1)^2 (u_{xt})^r (u_{xt})^r + \right. \\ & - (\alpha_3 + \alpha_1)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) u^r (u_{xxtt})^r + \left. \left(-\frac{\alpha_1}{2} - \frac{\alpha_3}{2} \right) (u_{xxtt})^r + \right. \\ & + \frac{(u_{xxtt})^r}{12} - 2(\alpha_3 + \alpha_1)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(u_x)^r (u_{xtt})^r + \\ & - 2(\alpha_3 - \alpha_1)^2 (u_t)^r (u_{xxt})^r - (\alpha_3 + \alpha_1)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(u_{tt})^r (u_{xx})^r + \\ & \left. - \frac{(u_{xxttt})^r}{12} \right] + \dots \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Como el error de truncamiento tiende a cero cuando $h \rightarrow 0$, el método es consistente en cuanto a la discretización del tiempo. En particular, si $\alpha_1 = \alpha_3 = 1$ y $\alpha_2 = -1$ el error de truncamiento es de orden $O(h^4)$ ya

que lo que multiplica a h^3 en la expresión de arriba se anula por los valores de α escogidos, y lo que multiplica a h^2 es cero por ser igual a la ecuación de Boussinesq mejorada. En cambio, si $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$ y $\alpha_3 = 0$ obtenemos un error de truncamiento de orden $O(h^3)$ ya que únicamente se anula lo que multiplica a h^2 en la expresión de arriba. Esto da lugar a dos variantes del método de diferencias finitas que se diferencian en el orden de la discretización del tiempo.

3.1.2. Discretización del espacio

A continuación, aproximamos la primera y segunda derivada mediante una aproximación en diferencias finitas con 5 puntos de malla espacial discretizada:

$$(U_x)_s = \frac{1}{12k}(-U_{s+2} + 8U_{s+1} - 8U_{s-1} + U_{s-2}) + O(k^4), \quad (3.3)$$

$$(U_{xx})_s = \frac{1}{12k^2}(-U_{s+2} + 16U_{s+1} - 30U_s + 16U_{s-1} - U_{s-2}) + O(k^4). \quad (3.4)$$

Sustituimos (3.3) y (3.4) en (3.2) y obtenemos la aproximación en diferencias finitas de la ecuación de Boussinesq mejorada.

$$\begin{aligned} & \lambda_1 U_s^{r+1} + \frac{\lambda_2}{12k}(-U_{s+2}^{r+1} + 8U_{s+1}^{r+1} - 8U_{s-1}^{r+1} + U_{s-2}^{r+1}) + \\ & \frac{\lambda_3}{12k^2}(-U_{s+2}^{r+1} + 16U_{s+1}^{r+1} - 30U_s^{r+1} + 16U_{s-1}^{r+1} - U_{s-2}^{r+1}) = \lambda_4, \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 - 2h^2\alpha_1^2(U_{xx})_s^{r+1} - 2h^2\alpha_1\alpha_2(U_{xx})_s^r - 2h^2\alpha_1\alpha_3(U_{xx})_s^{r-1}, \\ \lambda_2 &= -2h^2\alpha_1^2(U_x)_s^{r+1} - 4h^2\alpha_1\alpha_2(U_x)_s^r - 4h^2\alpha_1\alpha_3(U_x)_s^{r-1}, \\ \lambda_3 &= -1 - h^2\alpha_1 - 2h^2\alpha_1\alpha_2 U_s^r - 2h^2\alpha_1\alpha_3 U_s^{r-1}, \\ \lambda_4 &= U_s^r [2 + 2h^2\alpha_2^2(U_{xx})_s^r + 2h^2\alpha_2\alpha_3(U_{xx})_s^{r-1}] + \\ & \quad + U_s^{r-1} [-1 + 2h^2\alpha_2\alpha_3(U_{xx})_s^r + 2h^2\alpha_3^2(U_{xx})_s^{r-1}] + \\ & \quad + (U_x)_s^r [2h^2\alpha_2^2(U_x)_s^r + 4h^2\alpha_2\alpha_3(U_x)_s^{r-1}] + \\ & \quad + 2h^2\alpha_3^2(U_x)_s^{r-1}(U_x)_s^{r-1} + (h^2\alpha_2 - 2)(U_{xx})_s^r + (h^2\alpha_3 + 1)(U_{xx})_s^{r-1}. \end{aligned}$$

Podemos reescribir (3.5) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & U_{s-2}^{r+1} \left[\frac{\lambda_2}{12k} - \frac{\lambda_3}{12k^2} \right] + U_{s-1}^{r+1} \left[-\frac{2\lambda_2}{3k} + \frac{4\lambda_3}{3k^2} \right] + U_s^{r+1} \left[\lambda_1 - \frac{5\lambda_3}{2k^2} \right] + \\ & U_{s+1}^{r+1} \left[\frac{2\lambda_2}{3k} + \frac{4\lambda_3}{3k^2} \right] + U_{s+2}^{r+1} \left[-\frac{\lambda_2}{12k} - \frac{\lambda_3}{12k^2} \right] = \lambda_4. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ahora estamos ante un sistema de $N + 1$ ecuaciones y $N + 5$ incógnitas para $s = 0, 1, \dots, N - 1, N$.

Si tenemos en cuenta las condiciones de contorno de (3.1),

$$\begin{aligned}(U_x)_0^{r+1} &= (U_x)_N^{r+1} = 0, \\ (U_{xx})_0^{r+1} &= (U_{xx})_N^{r+1} = 0,\end{aligned}$$

podemos eliminar las variables U_{-2}^{r+1} , U_{-1}^{r+1} , U_{N+1}^{r+1} y U_{N+2}^{r+1} del sistema, quedándonos con un sistema de ecuaciones cuya matriz penta-diagonal es de dimensiones $(N + 1) \times (N + 1)$.

Como el sistema (3.6) requiere 3 pasos de tiempo, se necesitan 2 condiciones iniciales. Por lo tanto, necesitamos determinar U_s^0 y U_s^1 para $s = 0, 1, \dots, N$. La primera podemos calcularla fácilmente utilizando la condición inicial del problema (3.1),

$$u(x, 0) = f(x) \implies U_s^0 = u(x_s, 0) = f(x_s), \quad s = 0, 1, \dots, N.$$

Sin embargo, para determinar la segunda necesitamos utilizar las expansiones de Taylor

$$U_s^1 \approx u(x_s, 0) + hu_t(x_s, 0) + \frac{h^2}{2}u_{tt}(x_s, 0),$$

donde $u_{tt}(x_s, 0) = \frac{\partial}{\partial t}u_t(x_s, 0)|_{t=0}$. Una vez obtenidas estas dos condiciones iniciales, podemos encontrar los valores del resto de los parámetros U_s^{r+1} , ($r = 1, 2, 3, \dots$). Como nosotros tenemos un sistema implícito para $(U_x)_s^{r+1}$ y $(U_{xx})_s^{r+1}$, utilizamos el siguiente proceso de refinamiento iterativo para resolver el sistema.

INPUT tolerancia TOL= 0,0000001,

número máximo de iteraciones $N_0 = 50$

OUTPUT soluciones aproximadas de $(U_x)_s^{r+1}$ y $(U_{xx})_s^{r+1}$

Paso 1: **Fijar** $i = 1$

Paso 2: **Mientras** $i \leq N_0$ **hacer** Pasos 3 – 5

Paso 3: **Fijar** $(U_x)_s^{r+1} = (U_x)_s^r = (U_x)_s^i$ y

$$(U_{xx})_s^{r+1} = (U_{xx})_s^r = (U_{xx})_s^i$$

en los coeficientes λ_1 y λ_2 y

$$\text{calcular } (U_x)_s^{r+1} = (U_x)_s^{i+1} \text{ y } (U_{xx})_s^{r+1} = (U_{xx})_s^{i+1}$$

Paso 4: **Si** $|(U_x)_s^{i+1} - (U_x)_s^i| < \text{TOL}$ y

$$|(U_{xx})_s^{i+1} - (U_{xx})_s^i| < \text{TOL} \text{ entonces}$$

OUTPUT $(U_x)_s^{r+1}$ y $(U_{xx})_s^{r+1}$; (procedimiento completado con éxito)

PARAR

Paso 5: **Fijar** $i = i + 1$

Paso 6: **OUTPUT** $(U_x)_s^{r+1}$ y $(U_{xx})_s^{r+1}$

(después de N_0 iteraciones, procedimiento completado con éxito)

PARAR

3.2. Ejemplos numéricos

A continuación, presentamos soluciones numéricas de la ecuación de Bousinesq mejorada (3.1) para dos ejemplos distintos. En el primero vemos la propagación de la solución de la ecuación en forma de solitón, y en el segundo la interacción de dos soluciones de la ecuación (3.1) en forma de solitón viajando en direcciones opuestas. Ambos ejemplos los resolveremos con el método para el que $\alpha_1 = \alpha_3 = 1$ y $\alpha_2 = -1$.

3.2.1. Primer ejemplo: un único solitón

En el segundo capítulo hemos visto que la ecuación con la que estamos trabajando tiene una solución tipo solitón (2.51) con la siguiente forma :

$$u(x, t) = A \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{c} \sqrt{\frac{A}{6}} (x - ct - x_0) \right), \quad c = \pm \sqrt{1 + \frac{2A}{3}}, \quad (3.7)$$

donde A es la amplitud de la ola centrada en el punto x_0 y que viaja a una velocidad c .

Derivando (3.7) respecto del tiempo y sustituyendo en $t = 0$ obtenemos las condiciones iniciales:

$$u(x, 0) = A \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{A}{6}} \left(\frac{x - x_0}{c} \right) \right). \quad (3.8)$$

$$u_t(x, 0) = 2A \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{A}{6}} \left(\frac{x - x_0}{c} \right) \right) \tanh \left(\sqrt{\frac{A}{6}} \left(\frac{x - x_0}{c} \right) \right) \sqrt{\frac{A}{6}}. \quad (3.9)$$

Para la resolución numérica elegimos $A = 0,5$, $k = 0,1$, $h = 0,1$, $x_0 = 80$, $0 \leq x \leq 200$ y el tiempo hasta $t = 70$. Con estos datos, los valores analíticos del solitón y sus derivadas en las condiciones frontera son las siguientes:

$$\begin{aligned} u(0, 70) &= 2,38478 \cdot 10^{-35}, & u(200, 70) &= 6,2397 \cdot 10^{-9}, \\ u_x(0, 70) &= 1,19239 \cdot 10^{-35}, & u_x(200, 70) &= -3,11985 \cdot 10^{-9}, \\ u_{xx}(0, 70) &= 5,96195 \cdot 10^{-36}, & u_{xx}(200, 70) &= 1,55992 \cdot 10^{-9}. \end{aligned}$$

Podemos decir que las condiciones frontera se cumplen ya que toman valores tan pequeños que podemos considerarlos nulos.

Capítulo 3. Resolución numérica de la Ecuación de Boussinesq Mejorada 33

A continuación, mostramos las gráficas de las simulaciones realizadas para este ejemplo.

Con $\Delta t = k = 0,1$ y $N = 1999$ puntos interiores obtenemos el siguiente resultado:

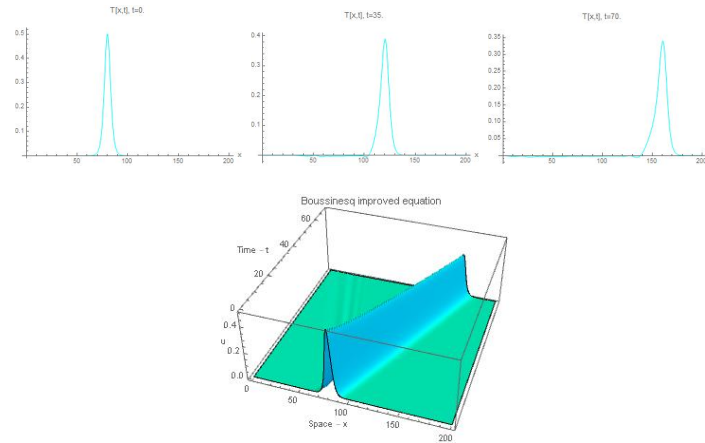


Figura 3.1: Simulación numérica para $N = 1999$.

Observamos que se la onda se mueve a lo largo del tiempo, pero decrece.

Por otra parte, con $\Delta t = k = 0,05$ y $N = 3999$ puntos interiores obtenemos:

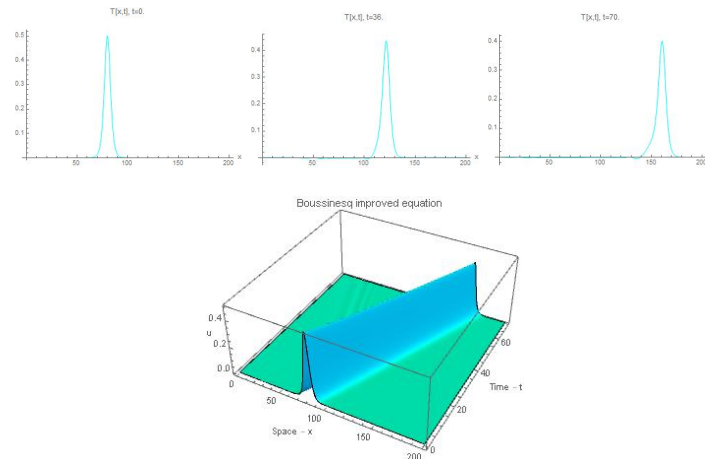


Figura 3.2: Simulación numérica para $N = 3999$.

Claramente el comportamiento de la onda en este caso es mejor, ya que esta

no decae tanto y sigue moviéndose a lo largo del tiempo. Esto es debido a que estamos resolviendo con un intervalo de tiempo menor y con un número mayor de puntos interiores.

Cabe decir que los autores, Dursun Irk e Idris Dag, obtienen muy buenos resultados en [4] para unos valores de $\Delta t = 0,05, 0,1, 0,2$ y 199999 puntos interiores. Sin embargo, una simulación de ese tipo requiere unos tiempos de ejecución muy elevados. Por esa razón, hemos realizado las simulaciones con un menor número de puntos interiores, obteniendo unos resultados bastante acertados, aunque no óptimos. En nuestro caso, se han necesitado 11488,8 segundos (3 horas y 12 minutos aproximadamente) de CPU para la primera simulación y 121189 (33 horas y 40 minutos) para la segunda.

3.2.2. Segundo ejemplo: interacción entre dos solitones

En este segundo ejemplo, la ecuación

$$u(x, t) = A_1 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{c_1} \sqrt{\frac{A_1}{6}} (x - c_1 t - x_0^1) \right) + A_2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{c_2} \sqrt{\frac{A_2}{6}} (x - c_2 t - x_0^2) \right), \quad (3.10)$$

donde $c_1 = \sqrt{1 + \frac{2A_1}{3}}$ y $c_2 = -\sqrt{1 + \frac{2A_2}{3}}$, representa dos solitones. El primero inicialmente en x_0^1 se mueve hacia la derecha con una velocidad c_1 y amplitud A_1 , y el segundo, en cambio, se encuentra inicialmente en x_0^2 moviéndose hacia la izquierda con una velocidad c_2 y amplitud A_2 .

Las condiciones iniciales son:

$$u(x, 0) = A_1 \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{A_1}{6}} \left(\frac{x - x_0^1}{c_1} \right) \right) + A_2 \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{A_2}{6}} \left(\frac{x - x_0^2}{c_2} \right) \right),$$

$$u_t(x, 0) = 2A_1 \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{A_1}{6}} \left(\frac{x - x_0^1}{c_1} \right) \right) \tanh \left(\sqrt{\frac{A_1}{6}} \left(\frac{x - x_0^1}{c_1} \right) \right) \sqrt{\frac{A_1}{6}} +$$

$$+ 2A_2 \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{A_2}{6}} \left(\frac{x - x_0^2}{c_2} \right) \right) \tanh \left(\sqrt{\frac{A_2}{6}} \left(\frac{x - x_0^2}{c_2} \right) \right) \sqrt{\frac{A_2}{6}}.$$

En este caso, para la resolución numérica elegimos $A_1 = 0,4$, $A_2 = 0,2$, $k = 0,1$, $h = 0,1$, $x_0^1 = 90$, $x_0^2 = 130$, $0 \leq x \leq 220$ y el tiempo hasta $t = 60$. Con estos datos, los valores analíticos de la solución en las condiciones

frontera son las siguientes:

$$\begin{aligned} u(0, 60) &= 4,75338 \cdot 10^{-6}, & u(220, 60) &= 4,77237 \cdot 10^{-7}, \\ u_x(0, 60) &= 8,15197 \cdot 10^{-7}, & u_x(220, 60) &= -1,07655 \cdot 10^{-5}, \\ u_{xx}(0, 60) &= 1,39805 \cdot 10^{-7}, & u_{xx}(220, 60) &= 2,46979 \cdot 10^{-6}, \end{aligned}$$

De la misma forma y por los mismos motivos del ejemplo anterior, realizamos dos simulaciones numéricas para este ejemplo de dos solitones.

Para $\Delta t = k = 0,1$ y $N = 1999$ obtenemos:

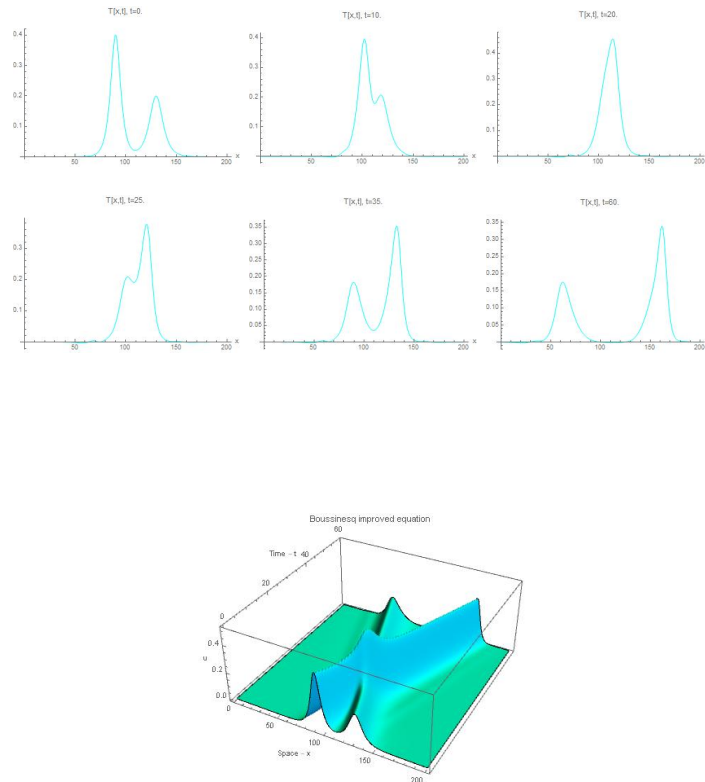


Figura 3.3: Simulación numérica para $N = 1999$.

Para $\Delta t = k = 0,05$ y $N = 3999$ obtenemos:

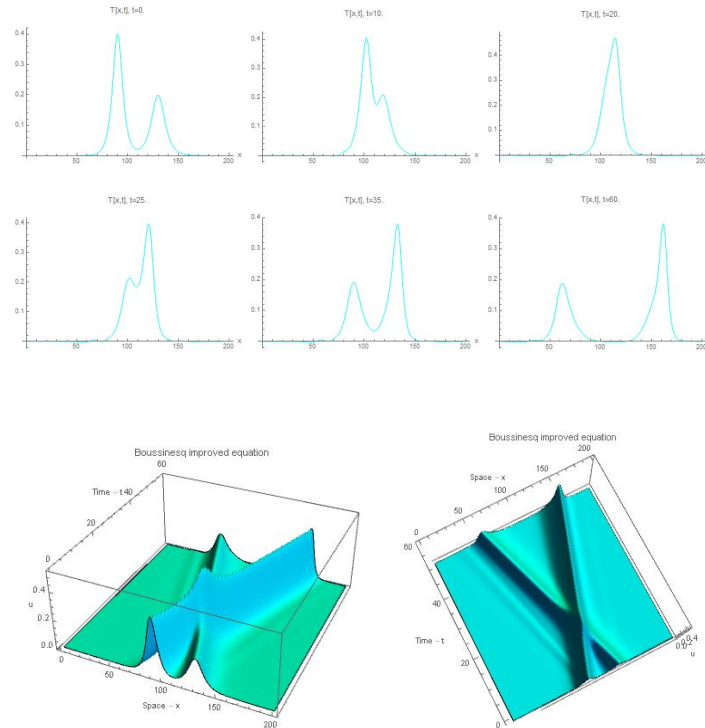


Figura 3.4: Simulación numérica para $N = 3999$.

En ambas simulaciones observamos el comportamiento de dos ondas, una de mayor amplitud que la otra, que se mueven en direcciones opuestas, interactúan en un intervalo de tiempo finito y continúan moviéndose. Podemos ver que en este ejemplo las ondas también decaen con el tiempo, aunque ligeramente menos que en el primer ejemplo. De hecho, en la simulación con 3999 puntos interiores conseguimos que la onda apenas decrezca. También podemos apreciar algo muy característico de los solitones: el desfase. En la gráfica 3D de la derecha vemos que después de que los solitones interactúen, parece que cambian un poco la dirección en la que se mueven.

Por último, comentar que en este ejemplo se han necesitado 9680,72 segundos de CPU para la simulación de 1999 puntos interiores y 98525,6 segundos para la de 3999 puntos interiores; es decir, 2 horas y 40 minutos, y 27 horas y 22 minutos, respectivamente.

Apéndice A

Solución analítica de la Ecuación de Boussinesq

A.1. Método de la tangente hiperbólica

En este primer apéndice derivamos las ecuaciones (2.5) y (2.7).

Para la primera:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\tanh x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right) = \\ &= \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \\ &= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \\ &= 1 - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = 1 - \tanh^2 x.\end{aligned}$$

Para deducir la segunda ecuación realizamos las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned}\frac{d^3}{d\xi^3} &= \frac{d}{d\xi} \left(-2Y(1 - Y^2) \frac{d}{dY} + (1 - Y^2)^2 \frac{d^2}{dY^2} \right) = \\ &= \left(\frac{d}{d\xi} (2Y^3 - 2Y) \right) \frac{d}{dY} + (2Y^3 - 2Y) \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d}{dY} \right) + \\ &\quad + \left(\frac{d}{d\xi} (1 - Y^2)^2 \right) \frac{d^2}{dY^2} + (1 - Y^2)^2 \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d^2}{dY^2} \right) = \\ &= \left(\frac{dY}{d\xi} \frac{d}{dY} (2Y^3 - 2Y) \right) \frac{d}{dY} + (2Y^3 - 2Y) \frac{dY}{d\xi} \frac{d^2}{dY^2} + \\ &\quad + \left(\frac{dY}{d\xi} \frac{d}{dY} (1 - Y^2)^2 \right) \frac{d^2}{dY^2} + (1 - Y^2)^2 \frac{dY}{d\xi} \frac{d^3}{dY^3} =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - Y^2)(6Y^2 - 2) \frac{d}{dY} - 2Y(1 - Y^2)(1 - Y^2) \frac{d^2}{dY^2} + \\
&\quad + (1 - Y^2)2(1 - Y^2)(-2Y) \frac{d^2}{dY^2} + (1 - Y^2)^3 \frac{d^3}{dY^3} = \\
&= 2(1 - Y^2)(3Y^2 - 1) \frac{d}{dY} + (-2Y - 4Y)(1 - Y^2)^2 \frac{d^2}{dY^2} + \\
&\quad + (1 - Y^2)^3 \frac{d^3}{dY^3} = \\
&= 2(1 - Y^2)(3Y^2 - 1) \frac{d}{dY} - 6Y(1 - Y^2)^2 \frac{d^2}{dY^2} + (1 - Y^2)^3 \frac{d^3}{dY^3}.
\end{aligned}$$

A.2. Solución analítica de la ecuación cúbica de Boussinesq

El pequeño programa escrito en MATHEMATICA que resuelve el sistema (2.16) es el siguiente:

```

Solve[{(l^2 - k^2)a0 + 2k^2 * a0^3 == 0,
(l^2 - k^2)a1 + 2k^4 * a1 + 6k^2 * a0^2 * a1 == 0,
6k^2 * a0 * a1^2 == 0, 2k^2 * a1^3 - 2k^4 * a1 == 0, a1 != 0}, {a0, a1, l, k},
Method -> {"UseSlicingHyperplanes" -> False}]

```

Mediante el comando *Solve* resolvemos el sistema de ecuaciones que hemos escrito en el primer argumento y cuyas variables son las del segundo argumento. La opción *Method* -> {"UseSlicingHyperplanes" -> False} nos permite resolver el sistema de ecuaciones de forma paramétrica; es decir, con la posibilidad de que alguna variable quede en función de otra.

A.3. Solución analítica de las ecuaciones de Boussinesq acopladas

El pequeño programa escrito en MATHEMATICA que resuelve el sistema (2.27) es el siguiente:

```

Solve[{k * a0 * a1 + k * b1 - l * a1 == 0, 2k * b2 + k * a1^2 == 0,
-l * b1 + k * a0 * b1 + k * a1 * b0 - 2k^3 * a1 == 0,
-l * b2 + k * a0 * b2 + k * a1 * b1 == 0,
a1 * b2 + 2k^2 * a1 == 0, a1 != 0, b2 != 0}, {a0, a1, b0, b1, b2, l, k},

```

Method → {"UseSlicingHyperplanes" → False}}

A.4. Solución analítica de la ecuación de Boussinesq estándar

El pequeño programa escrito en MATHEMATICA que resuelve el sistema (2.36) es el siguiente:

```
Solve[{(l^2 - k^2) * a0 - 2k^4 * a2 - k^2 * a0^2 == 0,
(l^2 - k^2) * a1 + 2k^4 * a1 - 2k^2 * a0 * a1 == 0,
(l^2 - k^2) * a2 + 8k^4 * a2 - k^2 * a1^2 - 2k^2 * a0 * a2 == 0,
2k^4 * a1 + 2k^2 * a1 * a2 == 0,
6k^4 * a2 + k^2 * a2^2 == 0, a2 ≠ 0}, {a0, a1, a2, l, k},
Method → {"UseSlicingHyperplanes" → False}]
```

A.5. Solución analítica de la ecuación de Boussinesq estándar mejorada

El pequeño programa escrito en MATHEMATICA que resuelve el sistema (2.48) es el siguiente:

```
Solve[{(l^2 - k^2) * a0 - 2k^2 * l^2 * a2 - k^2 * a0^2 == 0,
(l^2 - k^2) * a1 + 2k^2 * l^2 * a1 - 2k^2 * a0 * a1 == 0,
(l^2 - k^2) * a2 + 8k^2 * l^2 * a2 - k^2 * a1^2 - 2k^2 * a0 * a2 == 0,
-2k^2 * l^2 * a1 - 2k^2 * a1 * a2 == 0,
-6k^2 * l^2 * a2 - k^2 * a2^2 == 0, a2 ≠ 0}, {a0, a1, a2, l, k},
Method → {"UseSlicingHyperplanes" → False}]
```


Apéndice B

Resolución numérica de la Ecuación de Boussinesq Mejorada

El programa escrito en MATHEMATICA con el que hemos resuelto el primer ejemplo numéricos es el siguiente:

(*Hacemos el programa que resuelve el problema de la ecuación mejorada de Boussinesq (3.1) para el primer ejemplo *)

```
Clear["Global*"];
```

```
t0 = TimeUsed[];
```

```
L = 200;
```

```
N = 1999; (*1999 puntos interiores → 2000 intervalos*)
```

```
A = 0,5; (*Amplitud de la onda*)
```

```
c =  $\sqrt{1 + \frac{2*A}{3}}$ ; (*Velocidad de la onda*)
```

```
x0 = 80;
```

```
 $\Delta x = L/(N + 1)$ ; (*El paso del espacio: k*)
```

```
tfin = 70,0;
```

```
 $\Delta t = 0,1$ ; (*El paso del tiempo: h*)
```

```
niteraciones = Ceiling[tfin/ $\Delta t$ , 1];
```

(*Número de iteraciones en tiempo. Ceiling da el menor múltiplo de 1 mayor o igual a $t_{fin} \Delta t$ *)

$\alpha_1 = 1; \alpha_2 = 1; \alpha_3 = -1$; (*Valores de alfa*)

$$u[x_-, t_-] := u[x, t] = A * \left(\text{Sech} \left[\frac{1}{c} * \sqrt{\frac{A}{6}} * (x - c * t - x_0) \right] \right)^2 ;$$

$$f[x_-] := f[x] = A * \left(\text{Sech} \left[\frac{1}{c} * \sqrt{\frac{A}{6}} * (x - x_0) \right] \right)^2 ; (*u(x, 0)*)$$

(*Aproximamos la primera CI*)

$$U[s_-, 0] := U[s, 0] = f[x] / .x \rightarrow s \Delta x;$$

$$U_t[s_-, 0] := U_t[s, 0] = D[u[x, t], t] / .x \rightarrow s \Delta x / .t \rightarrow 0$$

$$U_{tt}[s_-, 0] := U_{tt}[s, 0] = D[u[x, t], \{t, 2\}] / .x \rightarrow s \Delta x / .t \rightarrow 0$$

(*Aproximamos la segunda CI*)

$$U[s_-, 1] := U[s, 1] = N \left[U[s, 0] + \Delta t * U_t[s, 0] + \frac{(\Delta t)^2}{2} * U_{tt}[s, 0] \right];$$

(*Condiciones de contorno*)

$$U[0, r_-] := 0; U[M + 1, r_-] := 0;$$

$$U_x[0, r_-] := 0; U_x[N + 1, r_-] := 0;$$

$$U_{xx}[0, r_-] := 0; U_{xx}[N + 1, r_-] := 0;$$

$$U[-1, r_-] := 0; U[N + 2, r_-] := 0;$$

$$U_x[-1, r_-] := 0; U_x[N + 2, r_-] := 0;$$

$$U_{xx}[-1, r_-] := 0; U_{xx}[N + 2, r_-] := 0;$$

(*Definimos 3.3 y 3.4*)

$$U_x[s_-, 0] := U_x[s, 0] = \frac{1}{12 * \Delta t} (-U[s + 2, 0] + 8 * U[s + 1, 0] - 8 * U[s - 1, 0] + U[s - 2, 0]);$$

$$U_{xx}[s_-, 0] := U_{xx}[s, 0] = \frac{1}{12 * (\Delta t)^2} (-U[s + 2, 0] +$$

$$16 * U[s + 1, 0] - 30 * U[s, 0] + 16 * U[s - 1, 0] - U[s - 2, 0]);$$

$$\begin{aligned} Ux[s-, 1] := Ux[s, 1] &= \frac{1}{12 * \Delta t} (-U[s + 2, 1] + 8 * U[s + 1, 1] - 8 * U[s - 1, 1] + U[s - 2, 1]); \\ Uxx[s-, 1] := Uxx[s, 1] &= \frac{1}{12 * (\Delta t)^2} (-U[s + 2, 1] + \\ &16 * U[s + 1, 1] - 30 * U[s, 1] + 16 * U[s - 1, 1] - U[s - 2, 1]); \end{aligned}$$

(*Definimos los lambdas del sistema 3.6*)

$$\begin{aligned} l1[s-, r.] := l1[s, r] &= 1 - 2 * \alpha 1^2 * (\Delta x)^2 * Uxx[s, r] - 2 * \alpha 1 * \alpha 2 * (\Delta x)^2 * Uxx[s, r - 1] - \\ &2 * \alpha 1 * \alpha 3 * (\Delta x)^2 * Uxx[s, r - 2]; \\ l2[s-, r.] := l2[s, r] &= -2 * \alpha 1^2 * (\Delta x)^2 * Ux[s, r] - 4 * \alpha 1 * \alpha 2 * (\Delta x)^2 * Ux[s, r - 1] - \\ &4 * \alpha 1 * \alpha 3 * (\Delta x)^2 * Ux[s, r - 2]; \\ l3[s-, r.] := l3[s, r] &= -1 - \alpha 1 * (\Delta x)^2 - 2 * \alpha 1 * \alpha 2 * (\Delta x)^2 * U[s, r - 1] - \\ &2 * \alpha 1 * \alpha 3 * (\Delta x)^2 * U[s, r - 2]; \\ l4[s-, r.] := l4[s, r] &= \\ &(2 + 2 * \alpha 2^2 * (\Delta x)^2 * Uxx[s, r - 1] + 2 * \alpha 2 * \alpha 3 * (\Delta x)^2 * Uxx[s, r - 2]) * U[s, r - 1] + \\ &(-1 + 2 * \alpha 2 * \alpha 3 * (\Delta x)^2 * Uxx[s, r - 1] + 2 * \alpha 3^2 * (\Delta x)^2 * Uxx[s, r - 2]) * U[s, r - 2] + \\ &(2 * \alpha 2^2 * (\Delta x)^2 * Ux[s, r - 1] + 4 * \alpha 2 * \alpha 3 * (\Delta x)^2 * Ux[s, r - 2]) * Ux[s, r - 1] + \\ &2 * \alpha 3^2 * (\Delta x)^2 * Ux[s, r - 2] * Ux[s, r - 2] + (\alpha 2 * (\Delta x)^2 - 2) * Uxx[s, r - 1] + \\ &(\alpha 3 * (\Delta x)^2 + 1) * Uxx[s, r - 2]; \end{aligned}$$

$$W4[r.] := W4[r] = \text{Table}[l4[i, r], \{i, 1, N\}];$$

(*Definimos la matriz para resolver el sistema 3.6*)

$$\begin{aligned} T[r.] := T[r] &= \text{SparseArray} \left[\{i-, j-\} /; i == j + 2 \rightarrow \left(\frac{12[i, r]}{12 * (\Delta t)} - \frac{13[i, r]}{12 * (\Delta t)^2} \right), \{N, N\} \right] + \\ &\text{SparseArray} \left[\{i-, j-\} /; i == j + 1 \rightarrow \left(-\frac{2 * 12[i, r]}{3 * (\Delta t)} + \frac{4 * 13[i, r]}{3 * (\Delta t)^2} \right), \{N, N\} \right] + \\ &\text{SparseArray} \left[\{i-, j-\} /; i == j \rightarrow \left(l1[i, r] - \frac{5 * 13[i, r]}{2 * (\Delta t)^2} \right), \{N, N\} \right] + \\ &\text{SparseArray} \left[\{i-, j-\} /; i == j - 1 \rightarrow \left(\frac{2 * 12[i, r]}{3 * (\Delta t)} + \frac{4 * 13[i, r]}{3 * (\Delta t)^2} \right), \{N, N\} \right] + \\ &\text{SparseArray} \left[\{i-, j-\} /; i == j - 2 \rightarrow \left(-\frac{12[i, r]}{12 * (\Delta t)} - \frac{13[i, r]}{12 * (\Delta t)^2} \right), \{N, N\} \right]; \end{aligned}$$

(*Proceso de refinamiento iterativo para obtener (ux)_{r+1,s} y (u_{xx})_{r+1,s}*)

```

refinamiento[N0_, TOL_, N_, Ux0_, Ux1_, AuxUx2_, Uxx0_, Uxx1_, AuxUxx2_,  $\alpha$ 1_,  $\alpha$ 2_,
 $\alpha$ 3_, iter_]:=
Module[{N0var = N0, Tolvar = TOL, Nvar = N, Ux0var = Ux0, Ux1var = Ux1,
AuxUx2var = AuxUx2, Uxx0var = Uxx0, Uxx1var = Uxx1, AuxUxx2var = AuxUxx2,
 $\alpha$ 1var =  $\alpha$ 1,  $\alpha$ 2var =  $\alpha$ 2,  $\alpha$ 3var =  $\alpha$ 3,
itervar = iter, i, s, XX, X,  $\Delta$ x, Sol, UU, j, AuxUUx2var, AuxUUxx2var,
AuxMat, AuxVect1, AuxVect2, AuxVect, l1, l2, l1new, l2new},
 $\Delta$ x = 200/(Nvar + 1);
i = 1;
XX = Table[X[s], {s, 1, 2N}];
l1 = 1 - 2 *  $\alpha$ 12 * ( $\Delta$ x)2 * Uxx1var - 2 *  $\alpha$ 1 *  $\alpha$ 2 * ( $\Delta$ x)2 * Uxx1var -
2 *  $\alpha$ 1 *  $\alpha$ 3 * ( $\Delta$ x)2 * Uxx0var;
l2 = -2 *  $\alpha$ 12 * ( $\Delta$ x)2 * Ux1var - 4 *  $\alpha$ 1 *  $\alpha$ 2 * ( $\Delta$ x)2 * Ux1var -
4 *  $\alpha$ 1 *  $\alpha$ 3 * ( $\Delta$ x)2 * Ux0var;

AuxMat:=AuxMat = SparseArray [{i_,j_}/;i==j-> (-2 *  $\alpha$ 1var2 * ( $\Delta$ x)2), {2N, 2N}];
AuxVect1:=AuxVect1 = 1 - 2 *  $\alpha$ 1var *  $\alpha$ 2var * ( $\Delta$ x)2 * Uxx1var -
2 *  $\alpha$ 1var *  $\alpha$ 3var * ( $\Delta$ x)2 * Uxx0var - l1;

AuxVect2:=AuxVect2 = -4 *  $\alpha$ 1var *  $\alpha$ 2var * ( $\Delta$ x)2 * Ux1var -
4 *  $\alpha$ 1var *  $\alpha$ 3var * ( $\Delta$ x)2 * Ux0var - l2;
AuxVect = Join[AuxVect1, AuxVect2];

While[i ≤ N0var,
itervar = i;
Print["itervar = ", itervar];
Sol = NSolve[{AuxMat.XX == AuxVect}, XX];

```

UU = XX/.Sol;

For[j = 1, j ≤ N, j++, AuxUUxx2var[j] = UU[[1, j]]];

For[j = 1, j ≤ N, j++, AuxUUx2var[j] = UU[[1, j + N]]];

AuxUx2var = Table[AuxUUx2var[s], {s, 1, N}];

AuxUxx2var = Table[AuxUUxx2var[s], {s, 1, N}];

If[Norm[AuxUxx2var – Uxx1var] < Tolvar&&Norm[AuxUx2var – Ux1var] < Tolvar,

{Print[“ Control YES”];

Return[AuxUx2var, Module];

Return[AuxUxx2var, Module];

Return[itervar, Module];

];

Print[“ Control NO”];

l1new = 1 – 2 * α1² * (Δx)² * AuxUxx2var – 2 * α1 * α2 * (Δx)² * Uxx1var–

2 * α1 * α3 * (Δx)² * Uxx0var;

l2new = –2 * α1² * (Δx)² * AuxUx2var – 4 * α1 * α2 * (Δx)² * Ux1var–

4 * α1 * α3 * (Δx)² * Ux0var;

AuxVect1:=AuxVect1 = 1 – 2 * α1var * α2var * (Δx)² * Uxx1var–

2 * α1var * α3var * (Δx)² * Uxx0var – l1new;

AuxVect2:=AuxVect2 = –4 * α1var * α2var * (Δx)² * Ux1var–

4 * α1var * α3var * (Δx)² * Ux0var – l2new;

AuxVect = Join[AuxVect1, AuxVect2];

i++];

```
Return[AuxUx2var, Module];
Return[AuxUxx2var, Module];
Return[itervar, Module];
]

N0 = 50;
TOL = 0,0000001;
XX = Table[X[s], {s, 1, N}];
(*Hacemos dos bucles para resolver nuestro sistema para cada valor de s y cada
valor de r*)
For[r = 2, r ≤ niteraciones, r++, (*AQUÍ EMPIEZA EL BUCLE TEMPORAL*)
{Print[" r = ", r],
iter = 0;

For[s = 1, s ≤ N, s++, {
UU0[s] = U[s, r - 2];
UUx0[s] = Ux[s, r - 2];
UUxx0[s] = Uxx[s, r - 2];

UU1[s] = U[s, r - 1];
UUx1[s] = Ux[s, r - 1];
UUxx1[s] = Uxx[s, r - 1];

UU2[s] = U[s, r - 1];
UUx2[s] = Ux[s, r - 1];
UUxx2[s] = Uxx[s, r - 1];
}];
```

UUx2[-1]:=0; UUx2[N + 2]:=0;

UUxx2[-1]:=0; UUxx2[N + 2]:=0;

UUUx0 = Table[Ux[i, r - 2], {i, 1, N}];

UUUxx0 = Table[Uxx[i, r - 2], {i, 1, N}];

UUUx1 = Table[Ux[i, r - 1], {i, 1, N}];

UUUxx1 = Table[Uxx[i, r - 1], {i, 1, N}];

UUUx2 = Table[Ux[i, r - 1], {i, 1, N}];

UUUxx2 = Table[Uxx[i, r - 1], {i, 1, N}];

(*Llamamos a la función refinamiento para calcular Ux y Uxx*)

refinamiento[N0, TOL, N, UUUx0, UUUx1, UUUx2, UUUxx0, UUUxx1,

UUUxx2, α_1 , α_2 , α_3 , iter];

For[j = 1, j ≤ N, j++, Ux[j, r] = UUUx2[[j]]];

For[j = 1, j ≤ N, j++, Uxx[j, r] = UUUxx2[[j]]];

W4[r] = Table[l4[i, r], {i, 1, N}];

UU:=UU = Table[0, {i, 1, N}];

AA = T[r];

bb = W4[r];

XX = Table[X[s], {s, 1, N}];

Sol = Solve[AA.XX == bb, XX];

UU = XX/.Sol;

For[s = 1, s ≤ N, s++, U[s, r] = UU[[1, s]]];

```

For [s = 1, s ≤ N, s++,
  Ux[s, r] =  $\frac{1}{12 * \Delta t} (-U[s + 2, r] + 8 * U[s + 1, r] - 8 * U[s - 1, r] + U[s - 2, r])$ ];
For [s = 1, s ≤ N, s++,
  Uxx[s, r] =  $\frac{1}{12 * (\Delta t)^2} (-U[s + 2, r] + 16 * U[s + 1, r] - 30 * U[s, r] +$ 
   $16 * U[s - 1, r] - U[s - 2, r])$ ];
}
]; (*AQUÍ TERMINA EL BUCLE TEMPORAL*)

(*GRÁFICAS*)
Plot1 = Table[ListPlot[Table[{Δxs, U[s, r]}, {s, 0, N}], Joined → True,
  PlotRange → All, AxesLabel → {x, " "}, PlotLabel → "T[x,t], t=" <> ToString[Δtr]],
  {r, 0, niteraciones, 25}]
Data3D = Table[{Δxs, 0, U[s, 0]}, {s, 0, N + 1}];
Do[Data3D = Join[Data3D, Table[{Δxs, Δtr, U[s, r]}, {s, 0, N + 1}]],
  {r, 1, niteraciones, 25}]; (* One out of 25 *)
Plot2 = ListPlot3D[Data3D, PlotRange → All, Mesh → {0, 0}, AxesLabel ->
  {"Space - x", "Time - t", u}, PlotLabel → "Boussinesq improved equation",
  PlotStyle → Cyan]

t1 = TimeUsed[];
Print[" El tiempo total empleado son ", t1 - t0, " segundos."]

```


Bibliografía

- [1] A.M. Domingo, Universidad Politécnica de Madrid, Apuntes de Mecánica de Fluidos, <http://oa.upm.es/6934/1/amd-apuntes-fluidos.pdf>.
- [2] D. Dutykh and F. Dias, Cornell University, Dissipative Boussinesq equations, <https://arxiv.org/pdf/physics/0703192.pdf>.
- [3] H. Huang, Dynamics of surface Waves in Coastal Waters, Springer, (2009), Preface.
- [4] D. Irk and I. Dag, Numerical simulations of the improved Boussinesq equation, Wiley Online Library, <https://doi.org/10.1002/num.20492>.
- [5] A.J.M. Jawad, M.D. Petkovic, P. Laketa and A. Biswas, Dynamics of shallow water waves with Boussinesq equation, Scientia Iranica B, Vol. 20, (2013), 179-184.
- [6] J.C. Strikwerda, Finite Difference schemes and Partial Differential Equations, Wadsworth and Brooks/Cole, Advanced Books & Software, 2004.
- [7] J.J. Torres Agudo, Universidad de Granada, <https://www.ugr.es/~jtorres/t7.pdf>.

