



Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

ZIENTZIA
ETA TEKNOLOGIA
FAKULTATEA
FACULTAD
DE CIENCIA
Y TECNOLOGÍA



Trabajo Fin de Grado
Grado en Física

Mecánica Hamiltoniana

Ecuación de Hamilton-Jacobi

Autor:
Jagoba Barata Cabezudo
Director:
Jesús Ibáñez Medrano

Índice

1. Introducción	1
2. Espacio del sistema	2
2.1. Variedades diferenciables	2
2.2. Campos vectoriales	3
2.3. Covectores, 1-formas y productor exterior	5
2.4. Derivada de Lie	6
2.5. Variedades Riemannianas	6
3. Mecánica Lagrangiana	10
3.1. Conservación de la energía y convarianza bajo transformaciones de coordenadas.	12
3.2. Movimiento de la Partícula Libre, Transformación Gauge y Cantidades conservadas.	13
4. Mecánica Hamiltoniana	16
4.1. Hamiltoniano autónomo	16
4.2. Hamiltoniano no autónomo	19
4.3. Transformaciones canónicas y Función generatriz	20
5. Ecuación de Hamilton-Jacobi	24
5.1. Ecuación Hamilton-Jacobi para caso autónomo	26
5.2. Variables Acción-Ángulo	29
6. Aplicaciones	31
6.1. Problema de Kepler	31
6.2. De la ecuación de Schrödinger a la ecuación de Hamilton-Jacobi	33
6.3. El oscilador armónico	35
7. Conclusiones	37
Referencias	38

1. Introducción

La mecánica clásica trata de resolver el movimiento de sistemas macroscópicos y con velocidades no relativistas, esto es, velocidades que sean pequeñas cuando se comparan a la velocidad de la luz en el vacío.

La gran revolución de la mecánica y la física, vino a manos de Isaac Newton, gracias a su libro, *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, que entre muchas cosas, explicaba que la cantidad de movimiento del sistema cambia cuando es sometida a una fuerza. Más tarde, Lagrange, Hamilton y Jacobi formularon las leyes de Newton de una manera más abstracta, simplificando diversos problemas, que con la formulación Newtoniana podría ser más compleja. Aunque se podría pensar que la teoría que explica la mecánica clásica está completa, esto no es del todo cierto; por ejemplo a partir de la teoría cuántica, que desplazo a la teoría clásica, se descubrió el ángulo de Hannay. Este ángulo proviene al aplicar el teorema adiabático a la variable *ángulo*. El análogo cuántico de dicho ángulo es la fase de Berry. Por otra parte, los avances matemáticos en variedades diferenciales y geometría diferencial han contribuido al desarrollo de la mecánica clásica. Se podría decir que una de las grandes aportaciones, provienen del ámbito matemático, haciendo la mecánica clásica más formal matemáticamente hablando.

En cuanto a los objetivos del proyecto, se expondrán temas de la mecánica clásica que no se han dado en la carrera. En primer lugar, se definirá el sistema físico, es decir, el espacio de configuración y sus respectivos fibrados tangentes y cotangentes. Además, se explicarán brevemente algunos elementos y propiedades matemáticas. Una vez entendida esta parte, se empezará a desarrollar la teoría, empezando con la formulación de Lagrange. Aquí se explicarán principalmente, que la ecuación de Euler-Lagrange es covariante bajo las transformaciones de coordenadas y bajo que condiciones se obtendrán cantidades conservadas. Después, se usará el formalismo de Hamilton, aquí se empezarán a ver algunas similitudes de la mecánica cuántica con la mecánica clásica, como los corchetes de Poisson y la evolución de observables. En adición, mediante el uso de las transformaciones canónicas, se verá qué función es necesaria para poder realizar un cambio en el Hamiltoniano para así poder simplificar las ecuaciones de movimiento. Si este nuevo Hamiltoniano es constante se obtendrá la ecuación de Hamilton-Jacobi.

Para finalizar, se aplicará la teoría a tres problema diferentes. El primero, trata de una partícula sometida a un potencial central, donde se obtendrán las hipersuperficies cuyas intersecciones dan el movimiento del sistema y las frecuencias de oscilación de las variables radial y angular. El segundo, debido a algunas semejanzas entre la teoría clásica y la cuántica se obtendrá la ecuación de Hamilton-Jacobi desde la ecuación de Schrödiger, introduciendo la teoría ondulatoria en la mecánica clásica. El último ejemplo, es el oscilador armónico, donde se obtendrá la curva en el espacio de fases y se demostrará que la frecuencia del movimiento coincide con la frecuencia del potencial, la elección de este último ejemplo se ve motivado por la gran importancia de este tipo de potencial en la física.

2. Espacio del sistema

El sistema en general parte de un conjunto de N partículas, en el cual poseen masas m_1, m_2, \dots, m_N , que se sitúan en una posición respecto un sistema de referencia inercial $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$. Dicho espacio, es un espacio euclídeo de dimensión $3N$, \mathbb{R}^{3N} . En cambio, la dimensión del espacio puede ser menor si el conjunto de las partículas están sometidas a unas ligaduras. Estas ligaduras son hipersuperficies que limitan el movimiento del sistema, por ejemplo, una partícula obligada a moverse en una circunferencia (Carot and Ibañez, 2010: 30). En este trabajo se supondrá que todas las ligaduras son holónomas, es decir, ligaduras cuya función matemática no depende de las velocidades y el trabajo que realizan sus desplazamientos virtuales es nulo. Entonces, la dimensión del espacio se ve reducido a un subespacio de dimensión $n = 3N - K^1$. Esta nueva dimensión constituye el número de grados de libertad del sistema. Este nuevo subespacio, llamado **espacio de configuración** viene dado por:

$$\mathcal{M} = \{(r^1, \dots, r^{3N}) \in \mathbb{R}^{3N} \mid f_i(\mathbf{r}, t) = 0, \quad i = 1, \dots, K < 3N\} \quad (2.1)$$

Donde $f_i(\mathbf{r}, t)$ corresponde a la formulación matemática de las ligaduras holónomas. Es de gran ayuda realizar un cambio de coordenadas a unas que estén adaptadas a este nuevo subespacio. A estas nuevas coordenadas se las denominan **coordenadas generalizadas**, $q = (q^1, \dots, q^n)$. En cambio, no todos los cambios de coordenadas son validos, sólo son validos aquellas para las que el determinante del Jacobiano de las transformación de coordenadas no es nulo (Carot and Ibañez, 2010: 53).

2.1. Variedades diferenciables

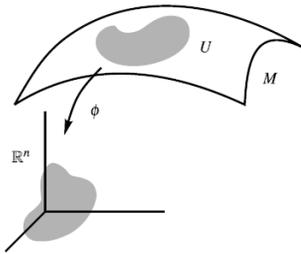


Figura 1: *Vemos como a cada punto del conjunto de U le corresponde algún punto en \mathbb{R}^n . La imagen de U bajo ϕ debe estar en un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n*

Fuente: (Torres del Castillo, 2012: 2)

En esta sección, se adentrará mas en profundidad en el espacio de configuración \mathcal{M} y el espacio de las velocidades. Sea U un subconjunto abierto de \mathcal{M} , una carta en \mathcal{M} es un par $(U, \phi) \mid \phi$ es un mapa que relaciona elementos de U con un subconjunto abierto en \mathbb{R}^n . En otras palabras, si nos encontramos en un punto de este subconjunto, este es homeomórfico al espacio euclídeo.

Esto implica, que cuando se realiza la elección de las coordenadas generalizadas se esta procediendo a definir el par (U, ϕ) en \mathcal{M} . Por una parte, una función se dice que es diferenciables de clase C^k si tiene k derivadas parciales continuas en todas sus variables.

Por otra parte, dos pares (U, ϕ) y (V, χ) se dicen que están C^k relacionadas si $U \cap V = \emptyset$ o $U \cap V \neq \emptyset$ pero para este último caso se debe cumplir que $\chi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \chi(U \cap V)$ y $\phi \circ \chi^{-1} : \chi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$. Para finalizar un atlas de clase C^k es la colección de todas las cartas $\{U_i, \phi_i\} \{U_j, \phi_j\}$ que estén C^k relacionadas y

¹Donde K es el número de ligaduras

que cubren todo \mathcal{M} .

Definición 2.1.1: Una variedad de dimensión n y clase C^k , es un conjunto \mathcal{M} con atlas C^k . Si $k > 0$ se dice que la variedad es diferenciable, en cambio si es igual a 0 se le denomina topológica ²(Torres del Castillo, 2012: 1-3).

Una vez definido el espacio de configuración, se debe definir donde actúan las velocidades. Las velocidades no se encuentran en \mathcal{M} , esto es fácil de visualizar. Supóngase que una partícula esta sometida a una ligadura holónoma, tal que, el movimiento esta restringido a moverse en \mathbb{S}^2 . Las velocidades son vectores tangentes a la trayectoria, por lo que se encuentra fuera de \mathcal{M} , como se puede ver en la **Figura 2**. Considérese un punto $p \in \mathcal{M}$, los vectores tangentes a dicho punto se encuentran en el llamado **Espacio Tangente** denotado por $\mathbf{T}_p\mathcal{M}$, en el cual, la base de dicho espacio corresponde al conjunto $\left\{\frac{\partial}{\partial q^\alpha}\right\}_p$, donde $\alpha = 1, \dots, n$. Esto es, todo vector $\dot{q} \in \mathbf{T}_p\mathcal{M}$ se puede escribir como combinación lineal de elementos de la base.³

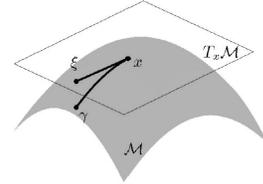


Figura 2: Visualización de una variedad diferenciable, un punto de la variedad, su vector tangente ζ , el espacio donde se encuentra el vector tangente y una curva $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$.

Fuente: (Eriksson and Hengel, 2009: 244).

$$\dot{q} = \dot{q}^\alpha(p) \left(\frac{\partial}{\partial q^\alpha} \right)_p \quad (2.2)$$

Definición 2.1.2: El **Fibrado Tangente** de \mathcal{M} es el conjunto de todos los espacios tangentes definido como $\mathbf{T}\mathcal{M} = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} \mathbf{T}_p\mathcal{M}$.

Cabe destacar, que la dimensión del fibrado tangente es $2n$, es decir, un punto del fibrado corresponde a $(q^1, \dots, q^n; \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$.

Sea \mathcal{M}, \mathcal{N} dos variedades diferenciables y $\psi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ un mapa diferenciable, $v_p \in \mathbf{T}_p\mathcal{M}$, $\psi_{*p}(v_p) \in \mathbf{T}_{\psi(p)}\mathcal{N}$ y $f \in C^\infty(\mathcal{N})$ entonces:

$$\psi_{*p}(v_p)[f] = v_p[\psi^*f] \quad (2.3)$$

Además si (x^1, x^2, \dots, x^n) e (y^1, y^2, \dots, y^n) son coordenadas de \mathcal{M} y \mathcal{N} respectivamente, entonces usando (2.3) se obtiene la siguiente relación (Torres del Castillo, 2012: 10-15):

$$\psi_{*p} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p = \psi_{*p} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p [y^j] \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right)_{\psi(p)} = \left(\frac{\partial \psi^* y^j}{\partial x^i} \right)_p \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right)_{\psi(p)} \quad (2.4)$$

2.2. Campos vectoriales

Es de suma importancia el uso de campos vectoriales. Los campos vectoriales en \mathcal{M} son funciones que dado un $p \in \mathcal{M}$, se le asigna un vector en dicho punto. Esto es, $\mathbf{X} : \mathcal{M} \rightarrow$

²A partir de este punto se supondrá que \mathcal{M} es una variedad diferenciable de clase C^∞

³ $\dot{q}^\alpha(p)$ son las componentes de la velocidad en la dirección $\frac{\partial}{\partial q^\alpha}$

$\mathbf{T}\mathcal{M}$, $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ y $\mathbf{X}_p \in \mathbf{T}_p\mathcal{M}$. Además, si a un vector le aplicamos una función $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ se obtiene un número real, por lo que se cumple la siguiente relación:

$$(\mathbf{X}f)(p) = \mathbf{X}_p(f) \quad (2.5)$$

El término $\mathbf{X}f$ de (2.5) corresponde a una función real, que cuando se sabe el punto al que se debe aplicar devuelve un valor real. En general, un campo vectorial en \mathcal{M} tiene la siguiente forma para $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ (Mann, 2018: 463) y (Torres del Castillo, 2012: 17-18):

$$\mathbf{X} = X^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \quad (2.6)$$

Por otra parte, toda curva $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$ posee un vector tangente, generalmente denotado por γ' . Si dicho vector tangente corresponde con los vectores tangente generados por $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, a las curvas γ se les denominará curvas integrales. Si se está en esta situación las componentes del campo vectorial cumplen:

$$\dot{q}^\alpha = X^\alpha \quad (2.7)$$

Esto es, las curvas en \mathcal{M} se obtienen por la resolución de una ODE de primer orden. Por lo que sustituyendo (2.7) en (2.6) se obtiene que el campo vectorial posee la siguiente expresión (Mann, 2018: 469-470):

$$\mathbf{X} = \dot{q}^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \quad (2.8)$$

Además, puede ser interesante la obtención de curvas en $\mathbf{T}\mathcal{M}$. Se realiza lo mismo empleado en (2.6), pero en este caso $\mathbf{X} : \mathbf{T}\mathcal{M} \rightarrow \mathbf{T}\mathbf{T}\mathcal{M}$, siendo $\mathbf{T}\mathbf{T}\mathcal{M}$ el doble fibrado tangente, además $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(\mathbf{T}\mathcal{M})$. Esto es, dado un punto del fibrado tangente, dicho campo le asigna a un vector de $\mathbf{T}\mathbf{T}\mathcal{M}$. Dicho campo vectorial en general tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{X} = X^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} + B^\alpha \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\alpha} \quad (2.9)$$

Además, si nos encontramos en una situación de curvas integrales, las componentes de (2.9) están dadas por:

$$\dot{q}^\alpha = X^\alpha \quad \ddot{q}^\alpha = B^\alpha \quad (2.10)$$

Como se puede ver, estamos en ODE de segundo orden. Sustituyendo (2.10) en (2.9) se obtiene la expresión (Torres del Castillo, 2012: 36-37):

$$\mathbf{X} = \dot{q}^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} + \ddot{q}^\alpha \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\alpha} \quad (2.11)$$

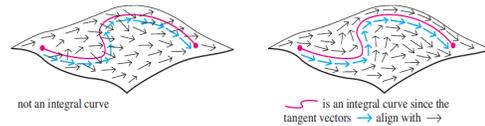


Figura 3: En esta figura se aprecia de una mejor manera la definición de curva integral. Fuente: (Mann, 2018: 470)

2.3. Covectores, 1-formas y productor exterior

Sea $f \in C^\infty(\mathcal{M})$, se define el diferencial de la función en un punto $p \in \mathcal{M}$ como:

$$df_p(v_p) = v_p(f) \quad \forall v_p \in \mathbf{T}_p\mathcal{M} \quad (2.12)$$

En la ecuación (2.12) se ve como df_p transforma elementos de $\mathbf{T}_p\mathcal{M}$ en un número real, la segunda parte de esta ecuación se definió al principio de la **Sección 2.2** que es un número real. Todos los elementos que cumplen esta propiedad se denominan **covectores**, que pertenecen al espacio dual del espacio tangente llamado **espacio cotangente** denotado por $\mathbf{T}_p^*\mathcal{M}$. Al igual que en el fibrado tangente, se puede definir de la misma manera el **fibrado cotangente** como la unión de todos los espacios cotangente de \mathcal{M} , $\mathbf{T}^*\mathcal{M} = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} \mathbf{T}_p^*\mathcal{M}$, además la dimensión de este es $2n$. Esto es, un punto del fibrado cotangente corresponde a $(q^1, \dots, q^n; p_1, \dots, p_n)$. De la misma manera que se hizo con los campos vectoriales, se pueden definir espacios covectoriales, llamadas 1-forma, que dado un punto de la variedad obtenemos un covector en dicho espacio cotangente. Además, cuando a un campo vectorial se le aplica una 1-forma se obtiene una función. A esta última propiedad se le llama **producto interior** o **contracción** y es denotado por $\alpha(\mathbf{X})$, $\mathbf{i}_\mathbf{X}\alpha$, $\langle \mathbf{X}, \alpha \rangle$ o $\mathbf{X} \lrcorner \alpha$. Sea $f \in C^\infty(\mathcal{M})$, $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, $df \in \Lambda^1(\mathcal{M})$ y $p \in \mathcal{M}$ usando las ecuaciones (2.5) y (2.12) se obtiene la siguiente expresión:

$$(df(\mathbf{X}))(p) = df_p(\mathbf{X}_p) = \mathbf{X}_p(f) = (\mathbf{X}f)(p) \Rightarrow \quad (2.13)$$

$$\Rightarrow df(\mathbf{X}) = \mathbf{X}f \quad (2.14)$$

Supóngase el vector $(\frac{\partial}{\partial q^\beta})|_p \in \mathbf{T}_p\mathcal{M}$, siendo $p \in \mathcal{M}$. La única forma de obtener un número real es que el covector posea la siguiente expresión, $dq^\beta|_p$. Por lo que la forma mas general de escribir un covector es:

$$\theta = \theta_\alpha(dq^\alpha)|_p \quad (2.15)$$

Haciendo analogía con la ecuación (2.6), un **campo covectorial**⁴, que relaciona puntos de \mathcal{M} con covectores de $\mathbf{T}^*\mathcal{M}$, tiene la siguiente expresión (Torres del Castillo, 2012: 21-22) y (Mann, 2018: 463 y 465):

$$\theta = \theta_\alpha dq^\alpha \quad (2.16)$$

Además, también se puede realizar un *lift* a esta 1-forma, esto es a puntos del fibrado cotangente se le asignará un *covector* en $\mathbf{T}^*\mathbf{T}^*\mathcal{M}$. Dicha aplicación posee la siguiente forma (Torres del Castillo 2012, 202):

$$\theta = \theta_\alpha dq^\alpha + \beta_\alpha dp_\alpha \quad (2.17)$$

Sea $f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$ y la 1-forma $\alpha \in \Lambda^1(\mathcal{M})$ con la siguiente expresión $\alpha = fdg$, su 2-forma $\omega = d\alpha \in \Lambda^2(\mathcal{M})$ se obtiene mediante el producto exterior, definido como:

$$d\alpha = df \wedge dg \quad (2.18)$$

Dicha 2-forma, cumple las siguientes propiedades: $d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta$, $d^2\alpha = 0$, $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$, siendo α una k -forma y $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$ (Curtis and Miller, 1985: 158).

⁴También llamada 1-forma

Sea $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(\mathbf{T}^*\mathcal{M})$ y $w = dq^\alpha \wedge dp_\alpha \in \Lambda^2(\mathbf{T}^*\mathcal{M})$, siendo $\mathbf{X} = X^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} + X_\alpha \frac{\partial}{\partial p_\alpha}$ e $\mathbf{Y} = Y^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} + Y_\alpha \frac{\partial}{\partial p_\alpha}$, la contracción de $\omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ y $\omega(\mathbf{X}, \bullet)$ es:

$$\omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{i}_\mathbf{Y} \mathbf{i}_\mathbf{X} dq^\alpha \wedge dp_\alpha = (\mathbf{i}_\mathbf{X} dq^\alpha)(\mathbf{i}_\mathbf{Y} dp_\alpha) - (\mathbf{i}_\mathbf{Y} dq^\alpha)(\mathbf{i}_\mathbf{X} dp_\alpha) = -Y^\alpha X_\alpha + X^\alpha Y_\alpha \quad (2.19)$$

$$\omega(\mathbf{X}, \bullet) = \mathbf{i}_\mathbf{X} \omega = \mathbf{i}_\mathbf{X} (dq^\alpha \wedge dp_\alpha) = (\mathbf{i}_\mathbf{X} dq^\alpha) dp_\alpha - (\mathbf{i}_\mathbf{X} dp_\alpha) dq^\alpha = -X_\alpha dq^\alpha + X^\alpha dp_\alpha \quad (2.20)$$

Las ecuaciones (2.19) y (2.20) serán útiles para hallar las ecuaciones de movimiento en el formalismo Hamiltoniano, por otra parte, se ve claramente que ω es completamente anti-simétrico, esto es, $\omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = -\omega(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$ (Torres del Castillo, 2012: 205) y (José and Saletan, 1998: 229).

2.4. Derivada de Lie

En física es de suma importancia saber la variación de una variable a lo largo del tiempo, para así poder predecir la situación del sistema en un instante dado. El problema reside en el numerador de la definición de $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Por ejemplo, en caso que queramos hallar la derivada de un vector, estaríamos restando dos vectores en dos puntos diferentes, esto es, de dos espacios diferentes, lo cual carece de sentido. Es por ello, que dado una curva integral γ de \mathbf{X} , al mapa $\Psi_t : \gamma(0) \rightarrow \gamma(t)$ se le denominará **flujo** generado por \mathbf{X} . Entonces sea T un campo tensorial, se define la derivada de Lie como

$$\mathcal{L}_\mathbf{X} T = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Psi_t^* T - T}{t} \quad (2.21)$$

En la ecuación (2.21) lo que realmente se está haciendo es ver como varía T sobre las curvas integrales generadas por \mathbf{X} . El término $\Psi_t^* T$ es el *pullback* de T generado por Ψ_t . Sea $f \in C^\infty(\mathcal{M})$, $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ y $\omega \in \Lambda^k(\mathcal{M})$ ⁵, la derivada de Lie de estos elementos sobre las curvas integrales de \mathbf{X} son (Mann, 2018: 470-472) y (Torres del Castillo 2012: 39):

$$\mathcal{L}_\mathbf{X} f = \mathbf{X} f \quad (2.22)$$

$$\mathcal{L}_\mathbf{X} \mathbf{Y} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \mathbf{X} \mathbf{Y} - \mathbf{Y} \mathbf{X} \quad (2.23)$$

$$\mathcal{L}_\mathbf{X} \omega = (\mathbf{i}_\mathbf{X} d\omega + d(\mathbf{i}_\mathbf{X} \omega)) \quad (2.24)$$

2.5. Variedades Riemannianas

Uno de los elementos más importantes en la geometría son el cálculo de la distancia y ángulo entre vectores (Lee, 2018: 1). En las variedades diferenciales es posible realizar estos cálculos, por lo que se introducirá algunas características de las variedades Riemannianas. Una **Métrica Riemanniana** en \mathcal{M} , es un campo 2-tensorial covariante suave. Sea $v, w \in \mathbf{T}_p \mathcal{M}$, el producto interno en el fibrado tangente es $g_p(v, w)$, siendo g la métrica descrita anteriormente. Este producto interno, se puede ver como una variante del producto escalar euclídeo en $\mathbf{T}\mathcal{M}$. Además, como todo producto interno, posee las propiedades de bilinealidad, hermiticidad y

⁵En este párrafo \mathcal{M} se refiere a una variedad diferencial, no sólo al espacio de configuración

ser definida positiva, es decir, dado $v \in \mathbf{T}_p\mathcal{M}$ $g_p(v, v) > 0$ e igual a 0 si y sólo si $v = 0$ (Lee, 2018: 11). En adición, la forma mas general de escribir esta métrica es:⁶

$$g = g_{ij}dq^i \otimes dq^j \quad (2.25)$$

Donde los elementos g_{ij} están definidos como $g(\frac{\partial}{\partial q^i}, \frac{\partial}{\partial q^j})$. Por otra parte, el tensor es simétrico, es decir, $g_{ij} = g_{ji}$.

Definición 2.5.1: *Una variedad riemanniana es una variedad diferenciable \mathcal{M} , dotado de una métrica g y que posee un producto interno en su fibrado tangente. En caso de que g no sea definido positivo se llamará variedad pseudo-Riemanniana⁷ (Torres del Castillo, 2012: 115-116).*

Al igual que pasaba en las derivadas de Lie, para dos vectores pertenecientes a distintos espacios no existe una forma natural de relacionarlos, es aquí donde entra el concepto de conexión (Lee, 2018: 3-4). La conexión es un mapa $\nabla : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ que calcula derivadas direccionales de campos vectoriales, este mapa cumple las siguientes propiedades:

$$\nabla_{\mathbf{X}}(a\mathbf{Y} + b\mathbf{Z}) = a\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} + b\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} \quad (2.26)$$

$$\nabla_{\mathbf{X}}(f\mathbf{Y}) = f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} + (\mathbf{X}f)\mathbf{Y} \quad (2.27)$$

$$\nabla_{f\mathbf{X}}\mathbf{Y} = f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} \quad (2.28)$$

$$\nabla_{a\mathbf{X}+b\mathbf{Y}}\mathbf{Z} = a\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} + b\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z} \quad (2.29)$$

$\forall a, b \in \mathbb{R}, f \in C^\infty(\mathcal{M}), \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$
Además, $\nabla_{\frac{\partial}{\partial q^i}}\frac{\partial}{\partial q^j} = \Gamma_{ji}^k\frac{\partial}{\partial q^k}$, siendo Γ_{ji}^k los **Símbolos de Christoffel**. Por otro lado, Sea $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, con las siguientes expresiones $\mathbf{X} = X^i\frac{\partial}{\partial q^i}$ e $\mathbf{Y} = Y^j\frac{\partial}{\partial q^j}$, la derivada covariante de \mathbf{Y} respecto a \mathbf{X} , usando (2.27), (2.28) y la definición $\nabla_{\frac{\partial}{\partial q^i}}\frac{\partial}{\partial q^j}$, se tiene la siguiente expresión:

$$\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = X^i\left(\frac{\partial Y^k}{\partial q^i} + \Gamma_{ji}^k Y^j\right)\frac{\partial}{\partial q^k} \quad (2.30)$$

En adición, una de las características más importantes de esta geometría son las curvas geodésicas. Este tipo de curvas son las que minimizan la distancia dados dos puntos. Por ejemplo, en \mathbb{R}^3 , la curva que minimiza la distancia es la línea recta, en cambio, en \mathbb{S}^2 es el arco de circunferencia. Otra propiedad interesante, es que la aceleración de estas curvas es nula, esto es, la velocidad es constante.

Definición 2.5.2: *Un campo vectorial es paralelo sobre una curva $q(t)$ ⁸ si $\nabla_{\dot{q}(t)}\mathbf{Y}=0$ y dicha curva es geodésica si $\nabla_{\dot{q}(t)}\dot{q}(t) = 0$.*

⁶Donde \otimes es el producto tensorial

⁷Un ejemplo de este caso es el espacio-tiempo de Minkowski, cuya métrica está definida como $g = -c^2 dt \otimes dt + dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz$

⁸Matemáticamente se usa γ

Usando la ecuación (2.30) e igualando a 0, se obtienen las siguientes expresiones cuando un campo vectorial es paralelo y cuando una curva es geodésica respectivamente (Torres del Castillo, 2012: 93-95):

$$\frac{dY^k}{dt} + \dot{q}^i Y^j \Gamma_{ji}^k = 0 \quad (2.31)$$

$$\ddot{q}^k + \dot{q}^i \dot{q}^j \Gamma_{ji}^k = 0 \quad (2.32)$$

Definido una vez la conexión, es interesante que la conexión en una variedad Riemanniana esté conectada con las propiedades de la métrica, es aquí donde entra la **Conexión de Levi-Civita**.

Teorema 2.5.1: *Sea (\mathcal{M}, g) una variedad Riemanniana, entonces existe una única conexión, ∇ , llamada conexión de Levi-Civita, donde la torsión es nula y $\nabla_{\mathbf{X}}g = 0$, tal que:*

1. $\mathbf{X}(g(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})) = g(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + g(\mathbf{Y}, \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z})$
2. $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}$
3. $g(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \frac{1}{2}(\mathbf{X}(g(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})) + \mathbf{Y}(g(\mathbf{Z}, \mathbf{X})) - \mathbf{Z}(g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) - g(\mathbf{Z}, [\mathbf{Y}, \mathbf{X}]) - g(\mathbf{Y}, [\mathbf{X}, \mathbf{Z}]) - g(\mathbf{X}, [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]))$

Donde $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

A continuación se va a relacionar los índices de Christoffel con la métrica, para ello, supóngase los campos vectoriales $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ tienen la siguiente expresión $\mathbf{X} = \frac{\partial}{\partial q^i}$, $\mathbf{Y} = \frac{\partial}{\partial q^j}$ y $\mathbf{Z} = \frac{\partial}{\partial q^k}$. Haciendo uso de la tercera propiedad del **Teorema 2.5.1**, en el cual los corchetes son 0 y teniendo en cuenta que $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial q^i}, \frac{\partial}{\partial q^j})$, se obtiene la siguiente expresión:

$$g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial q^i}} \frac{\partial}{\partial q^j}, \frac{\partial}{\partial q^k}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right) \quad (2.33)$$

Ahora, usando $\nabla_{\frac{\partial}{\partial q^i}} \frac{\partial}{\partial q^j} = \Gamma_{ji}^k \frac{\partial}{\partial q^k}$, la propiedad (2.26) y multiplicando toda la ecuación por g^{kl} , se obtiene la siguiente definición de los índices de Christoffel en función de valores de la métrica (Torres del Castillo, 2012: 131-132):

$$\Gamma_{ji}^l = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right) \quad (2.34)$$

Por otra parte, Sea el par (\mathcal{M}, g) una variedad Riemanniana y $f \in C^\infty(\mathcal{M})$, el gradiente de dicha función es un campo vectorial $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ tal que (Torres del Castillo, 2012: 117):

$$\mathbf{X} = \text{grad } f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial q^j} \quad (2.35)$$

⁹ $g^{kl} g_{lk} = 1$

Sea $t \in \Lambda^k(\mathcal{M})$ y $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, la contracción del campo tensorial con el campo vectorial es (Curtis and Miller, 1985: 156):

$$(\mathbf{i}_{\mathbf{X}}t)_p(v_p, \dots, w_p) = kt_p(\mathbf{X}_p, v_p, \dots, w_p) \quad v_p, \dots, w_p \in \mathbf{T}_p\mathcal{M} \quad (2.36)$$

Por lo que se va a realizar la contracción de la métrica, g , sobre un campo vectorial $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ ¹⁰, como la métrica se ha definido como un campo tensorial de orden 2, el valor de $k = 2$, introduciendo los datos sobre (2.36) se obtiene:

$$\mathbf{i}_{\mathbf{X}}g = 2X^i g_{ij} dq^j \quad (2.37)$$

Esto es, el resultado de (2.37) es una 1-forma. Se recuerda que la expresión general de una 1-forma $\alpha \in \Lambda^1(\mathcal{M})$ es $\alpha = \alpha_i dq^i$, por lo que, existe un único campo vectorial que cumpla:

$$\alpha = \frac{1}{2} \mathbf{i}_{\mathbf{X}}g \quad (2.38)$$

Definición 2.5.3: Sea un par (\mathcal{M}, g) una variedad Riemanniana y $f \in C^\infty(\mathcal{M})$, el gradiente de f es un campo vectorial que cumple:

$$df = \frac{1}{2} \mathbf{i}_{grad f} g \quad (2.39)$$

Además, es importante el concepto de campo vectorial de Killing. Considérese dos variedades Riemannianas \mathcal{M}_1 y \mathcal{M}_2 , ambas dotadas con métricas g_1 y g_2 . Un difeomorfismo¹¹ $\psi : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ es una isometría si:

$$\psi^* g_2 = g_1 \quad (2.40)$$

Definición 2.5.4 : Sea $\Psi_t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ el flujo generado por \mathbf{X} , entonces este campo vectorial se dice que es un **campo vectorial de Killing** si y sólo si:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}g = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Psi_t^* g - g}{t} = 0 \Rightarrow \Psi_t^* g = g \quad (2.41)$$

Esto es, si el flujo generado por el campo vectorial es una isometría (Torres del Castillo, 2012: 116-118). Una de las características que cumple un campo vectorial de Killing, \mathbf{X} , es (Torres del Castillo, 2012: 137):

$$g(\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}, \mathbf{Z}) = -g(\mathbf{Y}, \nabla_{\mathbf{Z}}\mathbf{X}) \quad (2.42)$$

Considérese dos campo vectorial \mathbf{Y} y $grad f \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, se va a calcular el producto interior de ambos campos vectoriales en el fibrado tangente, teniendo en cuenta (2.14), (2.36) y (2.39) se obtiene:

$$g(grad f, \mathbf{Y}) = \frac{1}{2} (\mathbf{i}_{grad f} g)(\mathbf{Y}) = df(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y}f \quad (2.43)$$

Denotando el gradiente como \mathbf{X} , suponiendo que es un campo vectorial de Killing. $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]f = \mathbf{X}(\mathbf{Y}f) - \mathbf{Y}(\mathbf{X}f)$, usando la ecuación (2.43) se obtiene, $g(\mathbf{X}, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]) = \mathbf{X}g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) - \mathbf{Y}g(\mathbf{X}, \mathbf{X})$.

¹⁰ $\mathbf{X} = X^i \frac{\partial}{\partial q^i}$

¹¹Homeomorfismo diferenciable con inversa diferenciable

Usando las propiedades (1), (2) y (3) del **Teorema 2.5.1**, que el tensor es simétrico, bilineal y (2.42) se obtiene:

$$g(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = g(\mathbf{X}, \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}) \Rightarrow 2g(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{X}, \mathbf{X}) = 0 \Rightarrow \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{X} = 0 \quad (2.44)$$

Esto implica que las curvas integrales de \mathbf{X} son geodésicas. Esto nos será útil para llegar a la ecuación de Hamilton-Jacobi estacionaria. Por otra parte, ¿Cómo será la evolución de $g(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ a lo largo del flujo generado por \mathbf{X} ? Usando (2.44) y la primera propiedad del **Teorema 2.5.1**:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}g(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \mathbf{X}(g(\mathbf{X}, \mathbf{X})) = g(\mathbf{X}, \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{X}) + g(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{X}, \mathbf{X}) = 2g(\mathbf{X}, \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{X}) = 0 \Rightarrow g(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = cte \quad (2.45)$$

Tenido en cuenta (2.45), $g(\text{grad } W, \text{grad } W) = cte$. Usando la ecuación (2.35) y las propiedades del producto interior se obtiene:

$$g^{ij} \frac{\partial W}{\partial q^i} \frac{\partial W}{\partial q^j} = cte \quad (2.46)$$

Derivando la ecuación (2.46) respecto a un parámetro a_k se obtiene $\text{grad } W(\frac{\partial W}{\partial a_k}) = 0 \Rightarrow \mathbf{X}(\frac{\partial W}{\partial a^k}) = \mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\frac{\partial W}{\partial a^k}) = 0$. Esto implica que $\frac{\partial W}{\partial a^k}$ es constante a lo largo de las curvas integrales de $\text{grad } W$. Definiendo una nueva variable $b_k = \frac{\partial W}{\partial a^k}$, se obtiene que las curvas geodésicas son la intersección de $n - 1$ hipersuperficies $b^k = cte$ (Torres del Castillo, 2012: 140).

3. Mecánica Lagrangiana

Las ecuaciones de Newton, pueden ser bastantes complejas de resolver, puesto que, son $3N$ ecuaciones de segundo orden. Es por ello, que se busca una formulación alternativa que pueda facilitar la resolución de las ecuaciones de movimiento. Para ello, usaremos el concepto de acción. Supóngase un sistema, en el cual, los tiempos $t_1 < t_2$ son fijos. En dichos instantes de tiempo, la posición de una partícula son q_1 y q_2 . El problema consiste en hallar la trayectoria que tomará la partícula, puesto que, existen infinitas curvas que unen dichos puntos. El **Principio de Hamilton** explica que la trayectoria física real, es aquella que minimiza cierta función. Esto matemáticamente se expresa como:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0 \quad (3.1)$$

Donde L es un funcional, llamado Lagrangiano. El Lagrangiano es una función $L : \mathbf{T}\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ si no depende explícitamente del tiempo y $L : \mathbf{T}(\mathcal{M} \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ si depende explícitamente del tiempo. El diferencial de (3.1) puede entrar dentro de la integral. Por otra parte, la expresión general de δL es $\delta L = \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta \dot{q}^\alpha + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t$, en cambio, se ha explicado que los tiempos

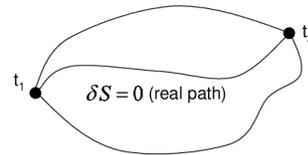


Figura 4: Posibles trayectorias entre dos puntos a un instante dado, la trayectoria física es aquella que minimiza la acción.

Fuente: (Gauthier, Hubert, Abadie, Chaillet and Lexcelent, 2018: 539)

son fijos, esto es, no hay variaciones temporales, esto implica que $\delta t = 0$, sustituyendo todo en (3.1) se obtiene:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta \dot{q}^\alpha \right) dt = 0 \quad (3.2)$$

Desarrollando el segundo término de (3.2):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta \dot{q}^\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{d}{dt} \delta q^\alpha = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta q^\alpha \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) \delta q^\alpha \quad (3.3)$$

Insertando (3.3) en (3.2):

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta q^\alpha \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) \delta q^\alpha + \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha \right) dt = 0 \quad (3.4)$$

En la ecuación (3.4), el primer término está dividido por dt , que multiplicado por dt se cancela, obteniendo la siguiente ecuación multiplicando por -1 :

$$\delta S = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta q^\alpha \right) \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) \right) \delta q^\alpha dt = 0 \quad (3.5)$$

El primer término de (3.5) es nulo, debido a que al comienzo y al final de todas las trayectorias no hay desplazamientos, los puntos están fijos, obteniendo la siguiente ecuación multiplicando por -1 :

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \right) \delta q^\alpha dt = 0 \quad (3.6)$$

Teorema 3.1 (Teorema de Gel'fand and Formin): *Sea f_α un conjunto de n funciones integrables reales de variable t y h_α un conjunto de funciones integrables que son nulas al final del intervalo, Entonces si*

$$\int_I f_\alpha h_\alpha dt = 0 \quad (3.7)$$

$f_\alpha = 0 \forall \alpha$, siendo I un intervalo.

Se recuerda que, h_α en (3.6) es nula en los extremos por lo que se aplica el **Teorema 3.1** a la ecuación (3.6), obteniendo las ecuaciones de **Euler-Lagrange**:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0 \quad (3.8)$$

Las ecuaciones de **Euler-Lagrange** son un conjunto de n ecuaciones diferenciales de segundo orden, en el que se necesitan $2n$ condiciones iniciales (José and Saletan, 1998: 108-112). Por otra parte, en caso de que las coordenadas no estén adaptadas a las ligaduras holonómicas, es necesario introducir multiplicadores de Lagrange. El nuevo Lagrangiano estará descrito por $\mathcal{L} = L + \lambda_\beta f_\beta$, donde λ_β pasa a ser una nueva coordenada de \mathcal{L} . En esta formulación se tendrán $3N$ ecuaciones diferenciales (Carot and Ibañez, 2010: 70-71). En

general, el Lagrangiano se puede expresar como, $L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q, \dot{q}, t)$, donde T es la energía cinética del sistema y V es el potencial generalizado. Este potencial generalizado, debe cumplir la ecuación de Euler-Lagrange pero igualada a la fuerza que lo produce, esto es, $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) - \frac{\partial V}{\partial q^\alpha} = F_\alpha$. En caso de estar en una situación de fuerzas conservativas que realicen trabajo, la expresión queda $F_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial q^\alpha}$, en esta situación a V se le llama potencial (Carot and Ibañez, 2010: 59-61).

3.1. Conservación de la energía y covarianza bajo transformaciones de coordenadas.

Las unidades del Lagrangiano es la energía, por lo que se puede llegar a pensar una expresión en la que se puede obtener la energía del sistema con el Lagrangiano y ver bajo que condiciones la energía se conserva.

$$T = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left[\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \right] \left[\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\beta} \dot{q}^\beta + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \right] = a(q, t) + b_\alpha(q, t) \dot{q}^\alpha + g_{\alpha\beta}(q, t) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \quad (3.9)$$

Donde los coeficientes están definidos como $a(q, t) = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \right)^2$, $b_\alpha(q, t) = \frac{1}{2} \sum_i m_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha}$ y $g_{\alpha\beta}(q, t) = \frac{1}{2} \sum_i m_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\beta}$. Entonces si, T es homogénea en sus velocidades de grado dos¹² (esto se da cuando los términos a y b son nulos) y el potencial no depende de las velocidades, la energía del sistema está dado por

$$E = \dot{q}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - L \quad (3.10)$$

En adición, puede ocurrir que E se conserve pero no sea la energía del sistema, un ejemplo, es una partícula sometida a una ligadura holónoma de un anillo girando con una velocidad angular constante respecto a su eje vertical, donde la partícula esta sometida a la interacción gravitatoria.

Teorema 3.1.1 (Teorema de Euler): Si f es homogénea de grado λ en sus variables z , entonces: $z_i \frac{\partial f}{\partial z_i} = \lambda f$.

Demostración (3.10) en el caso de que E sea la energía del sistema, usando el Teorema 3.1.1:

$$L = T - V \Rightarrow E = \dot{q}^\alpha \frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{q}^\alpha} - T + V = \dot{q}^\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} - T + V = 2T - T + V = T + V \quad (3.11)$$

Entonces, la energía se conservará cuando la derivada total de E sea 0.

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\dot{q}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - L \right) = \ddot{q}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} + \dot{q}^\alpha \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) - \dot{q}^\alpha \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \ddot{q}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial t} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (3.12)$$

Esto es, la energía se conservará cuando el Lagrangiano no dependa explícitamente del tiempo $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ (José and Saletan, 1998: 70-71).

¹²Se recuerda que f es homogénea de grado λ si $f(a\mathbf{x}) = a^\lambda f(\mathbf{x})$

Algunas veces es interesante realizar un cambio de coordenadas. Esto se debe a que en unas nuevas coordenadas, es posible obtener cantidades conservadas. Se esta considerando un cambio de coordenadas $q^i = q(\mathbf{Q}, t)$. Además, debe tener inversa, esto es, debe existir un $Q^i = Q(\mathbf{q}, t)$. Primero se va a calcular una serie de derivadas parciales

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^j} \frac{\partial \dot{Q}^j}{\partial \dot{q}^i} + \frac{\partial L}{\partial Q^j} \frac{\partial Q^j}{\partial \dot{q}^i} \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^j} \frac{\partial \dot{Q}^j}{\partial q^i} + \frac{\partial L}{\partial Q^j} \frac{\partial Q^j}{\partial q^i} \quad (3.14)$$

$$\dot{Q}^j = \frac{\partial Q^j}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial Q^j}{\partial t} \quad (3.15)$$

Como ya se ha visto, las transformaciones de coordenadas no dependen de las velocidades, esto implica que la segunda parte de (3.13) y la primera de (3.14) sea nulas. Además, derivando la ecuación (3.15) respecto a \dot{q}^k se obtiene $\frac{\partial \dot{Q}^j}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial Q^j}{\partial q^i} \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \dot{q}^k} + \frac{\partial^2 Q^j}{\partial \dot{q}^k \partial t}$. De este segundo término, se puede alternar el orden de derivación gracias al **Teorema de Clairaut** que dice:

Teorema 3.1.2 (Teorema de Clairaut): *Sea f una función que sus derivadas segundas existen y son continuas, entonces para un punto (a_1, \dots, a_n) se cumple $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a_1, \dots, a_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.*

Por lo que, aplicando el mismo razonamiento utilizado para explicar que algunos términos de (3.13) y (3.14) son nulos se obtiene $\frac{\partial \dot{Q}^j}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial Q^j}{\partial q^i}$. Aplicando (3.13), (3.14) y (3.15) en (3.8) se obtendrá que la ecuación de **Euler-Lagrange** es covariante.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} &= 0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^j} \frac{\partial \dot{Q}^j}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial Q^j} \frac{\partial Q^j}{\partial q^i} = 0 \Rightarrow \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^j} \right) \frac{\partial Q^j}{\partial q^i} - \frac{\partial L}{\partial Q^j} \frac{\partial Q^j}{\partial q^i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^j} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial Q^j}{\partial q^i} \right) &= 0 \Rightarrow \\ \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^j} \right) - \frac{\partial L}{\partial Q^j} \right] \frac{\partial Q^j}{\partial q^i} &= 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

El factor $\frac{\partial Q^j}{\partial q^i}$ siempre va a ser distinto de 0, puesto que, siempre habrá una dependencia de Q^j con el resto de las coordenadas q^i , por lo que se obtiene la ecuación de Euler-Lagrange para las nuevas coordenadas:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^j} - \frac{\partial L}{\partial Q^j} = 0 \quad (3.17)$$

Donde ahora L es una función de variables (Q^1, \dots, Q^n, t) (Mann, 2018: 100-101).

3.2. Movimiento de la Partícula Libre, Transformación Gauge y Cantidades conservadas.

Un caso de especial interés es saber que tipo de curvas sigue la partícula libre, por lo que vamos a considerar que la partícula se encuentra en una variedad Riemanniana diferenciable

(\mathcal{M}, g) . Donde $g : \mathbf{T}\mathcal{M} \times \mathbf{T}\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ es la métrica y el Lagrangiano es una función del tipo $L : \mathbf{T}\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ descrito por:¹³

$$L = \frac{1}{2}g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j \quad (3.18)$$

Para saber el tipo de curvas que sigue este Lagrangiano habrá que sustituir (3.18) en (3.8), pero antes se calculará una serie de derivadas parciales.

$$\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = \frac{1}{2}\dot{q}^i\dot{q}^j \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^\alpha} \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} = g_{ij}\dot{q}^i \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial \dot{q}^\alpha} = g_{ij}\dot{q}^i \delta_{j\alpha} = g_{i\alpha}\dot{q}^i \quad (3.20)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) = g_{i\alpha}\ddot{q}^i + \dot{q}^i \frac{dg_{i\alpha}}{dt} = g_{i\alpha}\ddot{q}^i + \dot{q}^i \dot{q}^j \frac{dg_{i\alpha}}{dq^j} = g_{i\alpha}\ddot{q}^i + \frac{1}{2} \left(\dot{q}^i \dot{q}^j \frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial q^j} + \dot{q}^i \dot{q}^j \frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial q^i} \right) \quad (3.21)$$

Sustituyendo (3.19) y (3.21) en (3.8) se obtiene:

$$g_{\alpha i}\ddot{q}^i + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha i}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{\alpha j}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^\alpha} \right) \dot{q}^j \dot{q}^i = 0 \quad (3.22)$$

Al primer término de (3.22) se le puede realizar un cambio de índices $i \rightarrow m$. Además multiplicando por $g^{\alpha m}$, la parte entre paréntesis multiplicada por $\frac{1}{2}$ se convierte en los índices de Christoffel Γ_{ji}^m , obteniendo la siguiente ecuación:

$$\ddot{q}^m + \Gamma_{ij}^m \dot{q}^i \dot{q}^j = 0 \quad (3.23)$$

La ecuación (3.23) corresponde a la ecuación de una geodésica, que como ya se vio, corresponde a la curva que minimiza la distancia y que mantiene la velocidad constante, lo cual era de esperar. Por lo que se concluye, que si tenemos un sistema como (3.18) las curvas que obtendremos son las trayectorias que minimizan la distancia según la métrica de g (Torres del Castillo, 2012: 133).

Es evidente que si el Lagrangiano es multiplicado por una constante el nuevo Lagrangiano L' y el viejo L , relacionados por $L' = cL$, dan las mismas ecuaciones de movimiento. Como ya se sabe, el potencial escalar y el potencial vector del campo electromagnético poseen una transformación Gauge:

$$\phi' = \phi + \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad (3.24)$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda \quad (3.25)$$

Estos términos aparecen en el Lagrangiano de un electrón sometido a un campo eléctrico y magnético. El Lagrangiano está descrito por $L = T - V$, donde V es el potencial generalizado cuya expresión es $e(\phi - \dot{x}^\alpha A_\alpha)$. Sustituyendo las transformaciones de Gauge en el potencial generalizado, se obtiene (Carot and Ibañez, 2010: 60-61):

$$L' = T - e(\phi + \dot{x}^\alpha A_\alpha) - e \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x^\alpha} \dot{x}_\alpha + \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right) \Rightarrow L' = L - e \frac{d\Lambda}{dt} \quad (3.26)$$

¹³Donde la masa de la partícula está dentro de la métrica

Se ve como para este caso el Lagrangiano posee una transformación de Gauge, por lo que se puede pensar si se puede extrapolar a todos los Lagrangianos. La respuesta es si. Supongamos una función $\Lambda(q, t)$. Su derivada total respecto al tiempo es $\frac{d}{dt}\Lambda = \frac{\partial\Lambda}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial\Lambda}{\partial t}$. Derivando esta cantidad respecto a \dot{q}^i se obtiene $\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \left(\frac{d\Lambda}{dt} \right) = \frac{\partial\Lambda}{\partial q^i}$. Además si a esta cantidad se deriva respecto al tiempo se obtiene $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \left(\frac{d\Lambda}{dt} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial q^i} \frac{d\Lambda}{dt}$. Esta es la ecuación de Euler-Lagrange para una función $\frac{d\Lambda(q, t)}{dt}$, por lo que, se puede afirmar que todo Lagrangiano se puede transformar, gracias a la transformación Gauge, en otro Lagrangiano cuyas ecuaciones de movimiento son iguales, esto es:

$$L' = L + \frac{d\Lambda(q, t)}{dt} \quad (3.27)$$

Esta condición da mucha libertad en la elección de Lagrangiano, por lo que, el Lagrangiano no es único. Esta propiedad se debe reflejar en la acción, por lo que aplicando (3.1) para L' :

$$\delta S' = \delta \int_{t_1}^{t_2} L' dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(L + \frac{d\Lambda}{dt} \right) dt = \delta S + \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\Lambda}{dt} dt = \delta S + \delta\Lambda(q(t_2), t_2) - \delta\Lambda(q(t_1), t_1) \quad (3.28)$$

Donde ya se explicó que los desplazamientos en los extremos son nulos, por lo que los términos Λ son 0, obteniendo $\delta S' = \delta S$ (Mann, 2018: 121). Por otra parte, dos Lagrangianos L y L' son **equivalentes** si dan lugar a las mismas ecuaciones de movimiento, esta condición no implica que dichos Lagrangianos estén relacionados por (3.27) (Carot and Ibañez, 2010: 80-81). Al resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange, se está obteniendo la curva $q^\alpha(t)$ que seguirá la partícula. Por otra parte, también es interesante saber la velocidad que seguirá, esto es, $\dot{q}^\alpha(t)$. Así se obtendrá una curva general en el fibrado tangente $(q(t), \dot{q}(t))$. Para poder realizar esto, es necesario hacer un *lift* a la curva $q(t)$ al fibrado tangente, esta nueva curva dará información acerca de las velocidades y las posiciones del sistema. Entonces, se puede definir un **campo vectorial de Euler-Lagrange** $\mathbf{X}_L \in \mathfrak{X}(\mathbf{T}\mathcal{M})$ cuyas curvas integrales sean solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange, utilizando la ecuación (2.11):¹⁴

$$\mathbf{X}_L = \dot{q}^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} + \ddot{q}^\alpha \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\alpha} \quad (3.29)$$

Estas curvas integrales tendrán un flujo Ψ_t , por lo que se puede utilizar el concepto de la derivada de Lie para saber la evolución temporal de funciones. Entonces, una cantidad $F \in C^\infty(\mathbf{T}\mathcal{M})$ se conserva si su derivada de Lie es 0, usando (2.21)

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}_L} F = 0 \quad (3.30)$$

Esto es, el valor de F no varía sobre las curvas integrales generadas por \mathbf{X}_L , es decir, sobre la trayectoria del sistema (Mann, 2018: 280). En adición, si $\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0$ en (3.8) se obtiene $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) = 0$ por lo que la cantidad $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}$ se conserva, cuando esto ocurra se dirá que la coordenada q^α es cíclica. Además, a dicho término se le llamará momento conjugado descrito por

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \quad (3.31)$$

¹⁴En el caso de que el Lagrangiano $L \in C^\infty(\mathbf{T}\mathcal{M} \times \mathbb{R})$, el campo vectorial vendrá dado por $\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{X}_L + \frac{\partial}{\partial t}$

Cabe destacar que este término no tiene porque tener las dimensiones del momento clásico $p = mv$ (José and Saletan, 1998, 118-119). Para saber el porqué se da estas conservaciones habrá que usar el **Teorema de Noether**.

Teorema 3.2.1 (Teorema de Noether): *Para todas las simetrías continuas de un Lagrangiano, existe un momento conjugado conservado para dicha simetría* (Mann, 2018: 116).

4. Mecánica Hamiltoniana

Como ya se ha visto, las ecuaciones de Euler-Lagrange constituyen un conjunto de n ecuaciones diferenciables de segundo orden, en el que se necesitan $2n$ condiciones iniciales. Además, para saber las curvas en el fibrado tangente habrá que resolver las n ecuaciones de Euler-Lagrange y n derivadas temporales. Por lo que se puede pensar, si existe alguna formulación alternativa en el que las ecuaciones de movimiento sean de primer orden y simétricas. La respuesta se encuentra en el formalismo Hamiltoniano, que consiste en encontrar las curvas en el fibrado cotangente. Entonces, se necesitará un objeto matemático que relacione las curvas de ambos fibrados, esto es, $(q, \dot{q}) \Rightarrow (q, p)$, este objeto matemático es la **Transformada de Legendre** que se puede ver como un mapa $\mathbb{L}_{\mathcal{L}} : \mathbf{T}\mathcal{M} \rightarrow \mathbf{T}^*\mathcal{M}$, también se puede realizar inversamente, esto es, pasar del espacio de fases al espacio de velocidades mediante $\mathbb{L}_{\mathcal{H}} : \mathbf{T}^*\mathcal{M} \rightarrow \mathbf{T}\mathcal{M}$. Entonces aplicando la transformada de Legendre al Lagrangiano se obtiene el Hamiltoniano (Mann, 2018: 281) y (Carot and Ibañez, 2010: 131-134):

$$H(q, p, t) = p_\alpha \dot{q}^\alpha(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t) \quad (4.1)$$

En primer lugar se hallará las ecuaciones de movimiento y evolución de observables¹⁵ para el caso en el que el Hamiltoniano sea autónomo. Después se generalizará para el caso no autónomo, cabe destacar que la dimensión del espacio de configuración es $n + 1$, $\mathcal{M} \times \mathbb{R}$, por lo que al espacio de velocidades y al espacio de fases se les llamará espacio de velocidades extendida y espacio de fases extendida, $\mathbf{T}\mathcal{M} \times \mathbb{R}$ y $\mathbf{T}^*\mathcal{M} \times \mathbb{R}$, respectivamente y ambas de dimensión $2n + 1$.

4.1. Hamiltoniano autónomo

La función Hamiltoniana está definido en el fibrado cotangente, donde uno de los elementos son los covectores, por lo que es interesante obtener una 1-forma global para todos los fibrados. Sea $\alpha \in \Lambda^1(\mathcal{M})$ y $\theta_H \in \Lambda^1(\mathbf{T}^*\mathcal{M})$ se define la 1-forma de Poincaré-Cartman como aquella 1-forma que cancela el *pullback*, esto es, $\alpha^*\theta_H = \alpha$. Teniendo en cuenta esto, θ_H se puede escribir:

$$\theta_H = p_\alpha dq^\alpha \quad (4.2)$$

Este resultado es global para todo fibrado cotangente. Usando (2.18) y la propiedad 4 de (2.18) se puede definir una **2-forma simpléctica**, $\omega \in \Lambda^2(\mathbf{T}^*\mathcal{M})$ definido como $\omega = -d\theta_H$.

$$\omega = dq^\alpha \wedge dp_\alpha \quad (4.3)$$

¹⁵Un **observable** es una función definida en el fibrado cotangente

Esta 2-forma es cerrada, esto es, $dw = 0$. Esto se puede ver usando las propiedades 2 y 3 de (2.18). La 2-forma es no degenerada, es decir, $\omega_p(v_p, \bullet) \neq 0$ siendo $v_p \neq 0 \in \mathbf{T}_p\mathcal{M}$ y es asimétrico, por lo que el par (\mathcal{M}, ω) me define una variedad simpléctica siempre que la dimensión de \mathcal{M} sea par. Esta condición hace que las variedades de Hamiltonianos no autónomos no sean simplécticas sino de contacto. Una vez definido la 1-forma fundamental se procederá a definir el campo vectorial Hamiltoniano:

Definición 4.1.1 : Sea $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(\mathbf{T}^*\mathcal{M})$, se dice que el campo vectorial es Hamiltoniano si la 1-forma $\mathbf{i}_{\mathbf{X}}\omega$ es exacta, esto es, si para dicho campo vectorial $\exists H \in C^\infty(\mathbf{T}^*\mathcal{M}) \mid \mathbf{i}_{\mathbf{X}}\omega = dH$.

Se quiere buscar un campo vectorial \mathbf{X}_H que cumpla con la **Definición 4.1.1**¹⁶ y cuyas curvas integrales den las ecuaciones de movimiento, por lo que, el campo vectorial tendrá una forma similar a (3.29) pero adaptándolo al fibrado contangente, este campo es:

$$\mathbf{X}_H = \dot{q}^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} + \dot{p}_\alpha \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \quad (4.4)$$

Se recuerda que la función hamiltoniana es un mapa $H : \mathbf{T}^*\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, esto es, elementos (q, p) los relaciona con un número real. Entonces, la forma diferencial de esta función es:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} dq^\alpha + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} dp_\alpha \quad (4.5)$$

Igualando el resultado obtenido en (2.20) para un campo vectorial descrito por (4.4), por la 2-forma fundamental e igualando a (4.5) se obtiene:

$$-\dot{p}_\alpha dq^\alpha + \dot{q}^\alpha dp_\alpha = \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} dq^\alpha + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} dp_\alpha \quad (4.6)$$

La única solución posible en (4.6) es:

$$\dot{q}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \quad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \quad (4.7)$$

Estas son las llamadas **ecuaciones canónicas de Hamilton**, que son las ecuaciones de movimiento para este formalismo. Al final se han obtenido $2n$ ecuaciones de primer orden que necesitan $2n$ condiciones iniciales, como se ven son quasi-simétricas. Además, el campo vectorial es un **campo vectorial simpléctico** si el flujo creado por su campo vectorial es un simplectomorfismo, esto es, $\Psi_t^*\omega = \omega$. Esta comprobación se realiza mediante la derivada de Lie, $\Psi_t^*\omega - \omega = 0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Psi_t^*\omega - \omega}{t} = \mathcal{L}_{\mathbf{X}_H}\omega = 0$. Por lo que usando (2.24), el hecho que ω es cerrada y la **Definición 4.1.1**

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}_H}\omega = \mathbf{i}_{\mathbf{X}_H}d\omega + d(\mathbf{i}_{\mathbf{X}_H}\omega) = d^2H = 0 \quad (4.8)$$

Esto implica que la 2-forma no varía durante las curvas integrales generadas por el campo vectorial Hamiltoniano. En adición, se define el volumen canónico como una n -forma $\nu = \frac{\omega^{\wedge n}}{n!}$ ¹⁷. Viendo el resultado obtenido en (4.8) dicho volumen se conserva.

¹⁶Se recuerda que la 1-forma fundamental mantiene la forma en todos los fibrados cotangentes

¹⁷ $\omega^{\wedge n} = \omega \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega$ n factores

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}_H}\omega^{\wedge n} = n\omega^{\wedge n-1}\mathcal{L}_{\mathbf{X}_H}\omega = 0 \quad (4.9)$$

Eso tiene una implicación importante, el volumen canónico se mantiene constante sobre el flujo creado por el campo vectorial Hamiltoniano (Mann, 2018: 284-289) y (Bravetti and Tapias, 2015: 3).

Un **observable** es una función $f \in C^\infty(\mathbf{T}^*\mathcal{M})$, al igual que se hizo en la mecánica Lagrangiana, es interesante saber la evolución temporal de los observables (Mann, 2018: 278). La evolución temporal viene descrita por la derivada de Lie, en cambio, la definición de la derivada de Lie puede ser poco intuitiva, por lo que se usará el concepto de **corchete de Poisson**, que como ya se verá se obtendrá una ecuación muy similar a la Imagen de Heisenberg de la mecánica cuántica. Considérese dos campos vectoriales Hamiltonianos $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(\mathbf{T}^*\mathcal{M})$, cuyas funciones son $f, g \in C^\infty(\mathbf{T}^*\mathcal{M})$. Usando (2.23), la **Definición 4.1.1** y $d^2Z = 0$

$$\mathbf{i}_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]\omega} = \mathbf{i}_{\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}\omega} = \mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\mathbf{i}_{\mathbf{Y}}\omega) - \mathbf{i}_{\mathbf{Y}}\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\omega = \mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\mathbf{i}_{\mathbf{Y}}\omega) = \mathbf{i}_{\mathbf{X}}d(\mathbf{i}_{\mathbf{Y}}\omega) + d(\mathbf{i}_{\mathbf{X}}(\mathbf{i}_{\mathbf{Y}}\omega)) \quad (4.10)$$

$$\mathbf{i}_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]\omega} = d(\mathbf{i}_{\mathbf{X}}(\mathbf{i}_{\mathbf{Y}}\omega)) \quad (4.11)$$

De la ecuación (4.11) se deduce que $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \mathbf{Z}_{\mathbf{i}_{\mathbf{X}}\mathbf{i}_{\mathbf{Y}}\omega}$, donde $\mathbf{Z}_{\mathbf{i}_{\mathbf{X}}\mathbf{i}_{\mathbf{Y}}\omega}$ es el campo vectorial generado por $\mathbf{i}_{\mathbf{X}}\mathbf{i}_{\mathbf{Y}}\omega$.

Definición 4.1.2: Sea f, g dos observables, cuyos campos vectoriales cumplen la **Definición 4.1.1** el corchete de Poisson de f y g , denotado por $\{f, g\}$, usando (2.14), es:¹⁸

$$\{f, g\} = \mathbf{i}_{\mathbf{X}}\mathbf{i}_{\mathbf{Y}}\omega = \mathbf{i}_{\mathbf{X}}dY = dY(\mathbf{X}) = \mathbf{X}Y \quad (4.12)$$

La ecuación (4.12) en conclusión es la aplicación del campo vectorial generado por la función f sobre la función g . Debido a que estos campos vectoriales cumplen con la **Definición 4.1.1** dicho campo vectorial se puede escribir como:

$$\mathbf{X}_f = \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \frac{\partial}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial f}{\partial q^\alpha} \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \quad (4.13)$$

Esto es insertado (4.13) en (4.12) se obtiene que el corchete de Poisson viene descrito por:

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \frac{\partial g}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial f}{\partial q^\alpha} \frac{\partial g}{\partial p_\alpha} \quad (4.14)$$

Esto de ver el corchete de Poisson como la aplicación de un campo vectorial sobre una función, lleva a relacionarlo con la derivada de Lie, usando (2.22):

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}_f}g = \mathbf{X}_fg = \{f, g\} \quad (4.15)$$

Este resultado es de suma importancia, puesto que, esta informando que para Hamiltonianos autónomos, la evolución de un observable sobre las curvas integrales generadas por un campo vectorial, viene dado por (4.14). En general, sea una función Hamiltoniano cuyo

¹⁸La relación entre el corchete de Poisson y los conmutadores de la mecánica cuántica es $[a, b] \rightarrow i\hbar\{a, b\}$

campo vectorial es \mathbf{X}_H , la evolución a lo largo del tiempo de un observable viene descrito por:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}_H} f = \{H, f\} \quad (4.16)$$

Por lo que un observable es constante a lo largo del tiempo si $\{H, f\} = 0$. De esta última ecuación se deduce que para todo Hamiltoniano autónomo la energía se conserva, puesto que, $\{H, H\} = 0$. Esta definición, tiene un gran parentesco con la imagen de Heisenberg como ya se explicó anteriormente, la evolución temporal de un observable que no depende explícitamente del tiempo es $\frac{dO^{\mathcal{H}}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H^{\mathcal{H}}, O^{\mathcal{H}}]$. Por otra parte, estas son algunas de las relaciones más importantes del corchete de Poisson $\{f, f\} = 0$, $\{f, g\} = -\{g, f\}$, esto es obvio puesto que la 2-forma es antisimétrica, $\{\lambda f + \beta g, h\} = \lambda\{f, h\} + \beta\{g, h\}$ y $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$, esto es, cumple la identidad de Jacobi (Torres del Castillo, 2012: 206-207) y (José and Saletan, 1998: 231). Además se definirán los corchetes de Poisson fundamentales como (Goldstein, 1988: 484-487):

$$\begin{cases} \{q^\alpha, p_\beta\} = \delta_{\alpha\beta} \\ \{q^\alpha, q^\beta\} = 0 \\ \{p_\alpha, p_\beta\} = 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

4.2. Hamiltoniano no autónomo

En esta sección se va a proceder al estudio de funciones Hamiltonianas que tengan una dependencia explícita del tiempo. En esta ocasión, el Hamiltoniano no pertenece a una variedad simpléctica. Esto es debido a la dimensión del espacio, se explicó que una de las condiciones para que una variedad posea una estructura simpléctica es que la dimensión sea par $2n$. En cambio, al añadir la dependencia temporal, la dimensión total pasa a ser $2n + 1$, es decir, impar por lo que en esta ocasión no se podrá usar el espacio de fases, sino como ya se comentó anteriormente, el espacio de fases extendido $\mathbf{T}^*\mathcal{M} \times \mathbb{R}$, este nuevo espacio posee una estructura de contacto. En adición, para poder resolver los casos de fuerzas disipativas es necesario usar este formalismo. En esta ocasión la 1-forma no viene descrita por (4.2), además tampoco se puede utilizar la **Definición 4.1.1**, puesto que el sistema no se encuentra en una variedad simpléctica. Entonces para poder hallar las curvas integrales generadas por el campo vectorial Hamiltoniano en esta geometría, se debe utilizar la propiedad del **campo vectorial de Reeb**:

$$\mathbf{i}_{\bar{\mathbf{X}}} d\eta = 0 \quad (4.18)$$

Donde η es la 1-forma con la expresión:

$$\eta = p_\alpha dq^\alpha - H dt \quad (4.19)$$

Además, se introducirá que el nuevo campo vectorial cumpla $\mathbf{i}_{\bar{\mathbf{X}}} dt = 1$, para que las curvas integrales estén parametrizadas respecto la variable temporal. Usando (2.18) en (4.19) e introduciendo en (4.18) se obtiene que el único campo vectorial que cumple dichas condiciones es:¹⁹

$$\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{X}_H + \frac{\partial}{\partial t} \quad (4.20)$$

¹⁹Donde \mathbf{X}_H es el campo vectorial Hamiltoniano expresado por (4.4) que cumple con las ecuaciones canónicas de Hamilton

El campo vectorial Hamiltoniano, \mathbf{X}_H , cuyas componentes son curvas integrales tiene una expresión general:

$$\bar{\mathbf{X}} = \dot{q}^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} + \dot{p}_\alpha \frac{\partial}{\partial p_\alpha} + \dot{t} \frac{\partial}{\partial t} \quad (4.21)$$

Por lo que comparando (4.21) con la ecuación (4.20), se obtienen las curvas integrales para las coordenadas (q, p, t) , que vienen dadas por:²⁰

$$\dot{q}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \quad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \quad \dot{t} = 1 \quad (4.22)$$

A su vez, es interesante la evolución temporal de los observables. Al igual que se utilizó el concepto de derivada de Lie en el apartado de Hamiltonianos autónomos, se utilizará aquí también calculando la evolución temporal del observable sobre las curvas integrales generadas por el campo vectorial Hamiltoniano.

$$\mathcal{L}_{\bar{\mathbf{X}}}g = (\mathbf{X}_H + \frac{\partial}{\partial t})g \quad (4.23)$$

La ecuación (4.23) se puede ver como la aplicación del campo vectorial Hamiltoniano del caso no autónomo sobre el observable, por lo que $\mathbf{X}_H g$ es el corchete de Poisson $\{H, g\}$, introduciendo este término en (4.23) se obtiene:

$$\mathcal{L}_{\bar{\mathbf{X}}}g = \{H, g\} + \frac{\partial g}{\partial t} \quad (4.24)$$

De (4.24) se deduce que un observable se conserva si y sólo si se cumple $\{H, g\} = -\frac{\partial g}{\partial t}$. Además, se llega a la conclusión que el Hamiltoniano se conserva si y sólo si $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, esto es, cuando no depende explícitamente del tiempo. Esto es de esperar, puesto que, si no depende explícitamente del tiempo el fibrado cotangente sería una variedad simpléctica, que como ya se vio la energía permanece constante. Entonces, este apartado se puede considerar como el caso general de los Hamiltonianos no autónomos (Bravetti, Cruz and Tapias, 2017: 20-21) y (Asorey, Cariñena and Ibort, 1983: 2745).

4.3. Transformaciones canónicas y Función generatriz

En la mecánica Lagrangiana, se intenta buscar unas coordenadas que sean cíclicas para así poder obtener cantidades conservadas y que las ecuaciones de movimiento tengan menor dificultad. La finalidad de esta sección es encontrar unas coordenadas que cambien el Hamiltoniano para que así la resolución de (4.22) sea más sencilla. Como ya se vio, el caso de Hamiltoniano no autónomo es el caso general del autónomo, por lo que se trabajará en el espacio de fases extendido. Primero serán necesarias introducir un teorema y una definición acerca de que curvas representan un sistema Hamiltoniano.

Teorema 4.3.1: *Sea (q, p) unas curvas en el espacio de fases extendido, dichas curvas corresponde a un sistema Hamiltoniano, si y sólo si, para dos pares de observables se cumple (Carot and Ibañez, 2010: 145):*

²⁰Aquí se puede entender mejor el porqué exigir la condición $\mathbf{i}_{\bar{\mathbf{X}}}dt = 1$

$$\mathcal{L}_{\bar{\mathbf{x}}}\{f, g\} = \{\mathcal{L}_{\bar{\mathbf{x}}}f, g\} + \{f, \mathcal{L}_{\bar{\mathbf{x}}}g\} \quad (4.25)$$

Definición 4.3.1: Un conjunto de coordenadas q^α, p_α se dicen que son **canónicas**, si la 2-forma se escribe como: $\omega = dq^\alpha \wedge dp_\alpha + dH \wedge dt$. (Torres del Castillo, 2012: 248)

Definición 4.3.2: Sea q^α, p_α un conjunto de coordenadas canónicas de partida y Q^α, P_α un conjunto de coordenadas canónicas finales, a la transformación $\Phi : (q^\alpha, p_\alpha) \rightarrow (Q^\alpha, P_\alpha)$ se le denomina **transformación canónica**. Si el fibrado cotangente tiene estructura de contacto, dicha transformación canónica debe ser un difeomorfismo $\Phi^*\omega_t = \omega_t$ ²¹. En cambio si posee una estructura simpléctica un **simplectomorfismo** $\Phi^*\omega = \omega$ (Mann, 2018: 290).

Supóngase, que se pasa a unas nuevas coordenadas (Q, P) , es factible pensar como cambiará el corchete de Poisson. El corchete de Poisson de las nuevas coordenadas se anotará con η y ξ para las antiguas. Se puede demostrar que la relación que cumplen es:

$$\{f, g\}^\eta = a\{f, g\}^\xi \quad (4.26)$$

Demostración:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}_K}\{f, g\}^\eta = a\mathcal{L}_{\mathbf{x}_H}\{f, g\}^\xi = a\{\mathcal{L}_{\mathbf{x}_H}f, g\}^\xi + a\{f, \mathcal{L}_{\mathbf{x}_H}g\}^\xi = \{\mathcal{L}_{\mathbf{x}_K}f, g\}^\eta + \{f, \mathcal{L}_{\mathbf{x}_K}g\}^\eta \quad (4.27)$$

Por otra parte, se podrá asignar la constante $a = 1$, para poder realizar esto sólo habrá que redefinir la transformación canónica absorbiendo dicha constante, que será el método a seguir en este trabajo, por lo que la relación entre los corchetes de Poisson para diferentes coordenadas será (José and Saletan, 1998: 234):

$$\{f, g\}^\eta = \{f, g\}^\xi \quad (4.28)$$

El problema radica en hallar el Hamiltoniano en las nuevas variables (Q, P) , en general no será una simple sustitución. Para ello se necesitará una función llamada función generatriz.

Definición 4.3.3: Sea α una 1-forma cerrada, $d\alpha = 0$, entonces $\exists f \mid \alpha = df$.

Usando la **Definición 4.3.2**, suponiendo que la transformación es canónica, es decir, es un difeomorfismo, recordando que $\omega = -d\alpha$ y usando la **Definición 4.3.3** se obtiene:

$$\Phi^*\omega = \omega \Rightarrow \Phi^*d\alpha = d\alpha \Rightarrow d(\alpha - \Phi^*\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha - \Phi^*\alpha = dF \quad (4.29)$$

Sustituyendo (4.19) en (4.29) y dividiendo respecto dt se obtienen (José and Saletan, 1998: 241) y (Braveetti, Cruz and Tapias, 2017: 21):²²

$$p_\alpha dq^\alpha - H dt - P_\alpha dQ^\alpha + K dt = dF \quad (4.30)$$

$$\frac{dF}{dt} = p_\alpha \dot{q}^\alpha - H - (P_\alpha \dot{Q}^\alpha - K) \quad (4.31)$$

²¹El subíndice t indica que ω tiene la forma de la **Definición 4.3.1**

²²Donde K es el Hamiltoniano en las nuevas variables

$$\frac{dF}{dt} = L(q, \dot{q}, t) - L(Q, \dot{Q}, t) \quad (4.32)$$

De esta última ecuación se puede obtener la función generatriz solamente restando los Lagrangianos correspondientes a cada sistema de coordenadas, la función dependiente del tiempo que se crea al integrar la ecuación diferencial se puede tomar como nula, por lo que sabiendo la función generatriz se podrá hallar el nuevo Hamiltoniano. Además se puede ver como una transformación Gauge. Por otra parte, se puede clasificar el tipo de transformaciones según que coordenadas canónicas son independientes. Se pueden diferenciar 4 tipos de transformaciones principales, en el que los cálculos se simplifican notablemente:

1. **Tipo I:** Las coordenadas (q, Q, t) son independientes, esto es, podemos escribir p_α y P_α en función de (q, Q, t) .
2. **Tipo II:** Las coordenadas (q, P, t) son independientes, estos es, podemos escribir p_α y Q^α en función de (q, P, t)
3. **Tipo III:** Las coordenadas (p, Q, t) son independientes, esto es, podemos escribir q^α y P_α en función de (p, Q, t)
4. **Tipo IV:** Las coordenadas (p, P, t) son independientes, esto es, podemos escribir q^α y Q^α en función de (p, P, t)

En primer lugar se desarrollará las transformaciones de **Tipo I**. Como (q, Q, t) son independientes, la 1-forma de la función generatriz se puede escribir de la siguiente manera:²³

$$dF^1 = \frac{\partial F^1}{\partial q^\alpha} dq^\alpha + \frac{\partial F^1}{\partial Q^\alpha} dQ^\alpha + \frac{\partial F^1}{\partial t} dt \quad (4.33)$$

Igualando (4.33) con (4.30) se obtiene:

$$p_\alpha dq^\alpha - H dt - P_\alpha dQ^\alpha + K dt = \frac{\partial F^1}{\partial q^\alpha} dq^\alpha + \frac{\partial F^1}{\partial Q^\alpha} dQ^\alpha + \frac{\partial F^1}{\partial t} dt \quad (4.34)$$

A continuación se agrupan los términos según los diferenciales obteniendo:

$$(p_\alpha - \frac{\partial F^1}{\partial q^\alpha}) dq^\alpha - (P_\alpha + \frac{\partial F^1}{\partial Q^\alpha}) dQ^\alpha + (K - H - \frac{\partial F^1}{\partial t}) dt = 0 \quad (4.35)$$

La única condición posible para que (4.35) sea igual a 0 es que cada elementos entre paréntesis sea nulo, obteniendo:

$$\begin{cases} p_\alpha = \frac{\partial F^1}{\partial q^\alpha} \\ P_\alpha = -\frac{\partial F^1}{\partial Q^\alpha} \\ K = H + \frac{\partial F^1}{\partial t} \end{cases} \quad (4.36)$$

Este procedimiento sencillo se puede extrapolar para los otros tipos de transformaciones, sólo debemos tener en cuenta que coordenadas son independientes para escribir la 1-forma

²³Cabe destacar que F y F^1 no es exactamente los mismo $F(q, p, t) = F(q, p(q, Q, t), t) = F^1(q, Q, t)$, esto se extrapolará para cada tipo de transformación

según estas nuevas coordenadas además de poner los diferenciales de las coordenadas según las coordenadas independientes si estos últimos no lo fueran. Se mostrará el ejemplo en las transformaciones de **Tipo II**. Como las coordenadas independientes son q, P la 1-forma de la función generatriz será:

$$d\bar{F}^2 = \frac{\partial \bar{F}^2}{\partial q^\alpha} dq^\alpha + \frac{\partial \bar{F}^2}{\partial P_\alpha} dP_\alpha + \frac{\partial \bar{F}^2}{\partial t} dt \quad (4.37)$$

La 1-forma correspondiente a la coordenada Q se escribe como:

$$dQ^\beta = \frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\alpha} dq^\alpha + \frac{\partial Q^\beta}{\partial P_\alpha} dP_\alpha + \frac{\partial Q^\beta}{\partial t} dt \quad (4.38)$$

Como se realizó en las transformaciones de **Tipo I**, igualando (4.37) con (4.30) e introduciendo (4.38) se obtiene:

$$(p_\alpha - P_\beta \frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial \bar{F}^2}{\partial q^\alpha}) dq^\alpha - (P_\beta \frac{\partial Q^\beta}{\partial P_\alpha} + \frac{\partial \bar{F}^2}{\partial P_\alpha}) dP_\alpha + (K - H - P_\beta \frac{\partial Q^\beta}{\partial t} - \frac{\partial \bar{F}^2}{\partial t}) dt = 0 \quad (4.39)$$

Retocando la segunda parte de la expresión $P_\beta \frac{\partial Q^\beta}{\partial P_\alpha} = \frac{\partial}{\partial P_\alpha} (P_\beta Q^\beta) - Q^\alpha$

$$(p_\alpha - \frac{\partial}{\partial q^\alpha} (P_\beta Q^\beta + \bar{F}^2)) dq^\alpha - (\frac{\partial}{\partial P_\alpha} (P_\beta Q^\beta + \bar{F}^2) - Q^\alpha) dP_\alpha + (K - H - \frac{\partial}{\partial t} (P_\beta Q^\beta + \bar{F}^2)) dt = 0 \quad (4.40)$$

Para mantener la forma general de las ecuaciones se realizará el siguiente cambio:

$$F^2 = P_\beta Q^\beta + \bar{F}^2 \quad (4.41)$$

Sustituyendo (4.41) en (4.40) se obtiene una ecuación muy similar a las transformaciones de **Tipo I**:

$$(p_\alpha - \frac{\partial F^2}{\partial q^\alpha}) dq^\alpha - (\frac{\partial F^2}{\partial P_\alpha} - Q_\alpha) dP_\alpha + (K - H - \frac{\partial F^2}{\partial t}) dt = 0 \quad (4.42)$$

La solución a la ecuación anterior tiene la misma forma que las transformaciones anteriores, despejando se obtiene:

$$\begin{cases} p_\alpha = \frac{\partial F^2}{\partial q^\alpha} \\ Q^\alpha = \frac{\partial F^2}{\partial P_\alpha} \\ K = H + \frac{F^2}{\partial t} \end{cases} \quad (4.43)$$

En las transformaciones de **Tipo III** las variables independientes eran (p, Q, t) , por lo que, siguiendo los pasos del anterior tipo y definiendo $F^3 = \bar{F}^3 - p_\beta q^\beta$:

$$d\bar{F}^3 = \frac{\partial \bar{F}^3}{\partial p_\alpha} dp_\alpha + \frac{\partial \bar{F}^3}{\partial Q^\alpha} dQ^\alpha + \frac{\partial \bar{F}^3}{\partial t} dt \quad (4.44)$$

$$dq^\beta = \frac{\partial q^\beta}{\partial p_\alpha} dp_\alpha + \frac{\partial q^\beta}{\partial Q^\alpha} dQ^\alpha + \frac{\partial q^\beta}{\partial t} dt \quad (4.45)$$

Sustituyendo estos valores en (4.30) y teniendo en cuenta la definición de F^3 se obtienen los siguientes resultados

$$\begin{cases} q^\alpha = -\frac{\partial F^3}{\partial p_\alpha} \\ P_\alpha = -\frac{\partial F^3}{\partial Q^\alpha} \\ K = H + \frac{\partial F^3}{\partial t} \end{cases} \quad (4.46)$$

Por último, las transformaciones de **Tipo IV** se deben realizar los mismos pasos pero considerando que las variables (p, P, t) son independientes, realizando los mismo pasos anteriores se obtienen las siguientes ecuaciones (Carot and Ibañez, 2010: 161-166):

$$\begin{cases} Q^\alpha = \frac{\partial F^4}{\partial P_\alpha} \\ q^\alpha = -\frac{\partial F^4}{\partial p_\alpha} \\ K = H + \frac{\partial F^4}{\partial t} \end{cases} \quad (4.47)$$

5. Ecuación de Hamilton-Jacobi

Si se obtienen unas coordenadas canónicas nuevas (Q, P) , tal que el nuevo Hamiltoniano $K = 0$, según (4.22) se deduce que son constantes del movimiento. En esta idea es la que se basa el método de Hamilton-Jacobi, imponer unas coordenadas canónicas (Q, P) para que $K = 0$. Se recuerda que las nuevas coordenadas deben cumplir con el **Teorema 4.3.1** y la **Definición 4.3.1**. Para realizar este cambio se necesitara la función generatriz, en esta ocasión se utilizarán las de **Tipo I**. Por lo que imponiendo $K = 0$ en (4.36) se obtiene:

$$K(Q, P, t) = 0 = H(q, p, t) + \frac{\partial F^1(q, Q, t)}{\partial t} \Rightarrow H(q, p, t) = -\frac{\partial F^1(q, Q, t)}{\partial t} \quad (5.1)$$

Por tradición, a $F^1(q, Q, t)$ se asignará $S(q, Q, t)$. A esta función se la denomina **función principal de Hamilton**. Por otra parte, las transformaciones de **Tipo I**, ofrecen un valor para p_α , este valor según (4.36) es $p_\alpha = \frac{\partial S(q, Q, t)}{\partial q^\alpha}$, por lo que sustituyendo en (5.1):

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = -\frac{\partial S}{\partial t} \quad (5.2)$$

A (5.2) se le denomina la **Ecuación de Hamilton-Jacobi**. Es una ecuación en derivadas parciales de la función principal de Hamilton. Recopilando, las ecuaciones de **Euler-Lagrange** son n EDO de segundo orden, las **ecuaciones canónicas de Hamilton** son $2n$ EDO de primer orden y la **ecuación de Hamilton-Jacobi** son EDP. La obtención de las curvas en el fibrado cotangente se basa en encontrar las soluciones (q, p) , las $2n$ CI hallarán las constante de movimiento (Q, P) . Supóngase que se obtiene la función completa de la función principal de Hamilton, en este punto se saben las constante Q , para obtener las constante resultantes se obtienen con (4.36), $P_\alpha = -\frac{\partial S}{\partial Q^\alpha}$, una vez obtenida las expresiones, se debe invertir esta última para obtener $q^\alpha = q(Q^\alpha, P_\alpha)$, esto sólo es posible si $\left|\frac{\partial^2 S}{\partial q^\alpha \partial Q^\beta}\right| \neq 0$. Una vez obtenida q^α , sustituir esta expresión en p_α que se obtienen con (4.36) $p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q^\alpha}$ (José and Salletan, 1998: 284-286). Se ha usado la acción para obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange,

la pregunta es ¿Se puede llegar a la ecuación de Hamilton-Jacobi partiendo de la acción? La respuesta es afirmativa. Supóngase que las trayectorias satisfacen (3.8), además se va a realizar un desplazamiento temporal dt en t_2 , dando lugar a un dq en la posición final, como se puede ver en la **Figura 5**.

Este cambio en el tiempo final, hace que δq en el instante final no sea nula, la variación en las posiciones en los extremos cumple:

$$\delta q(t = t_0) = 0 \quad \delta q(t = t_1) = dq \quad (5.3)$$

Retomando (3.2), insertando $\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}$ y tenido en cuenta la derivada del producto es fácil llegar a la expresión:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta q^\alpha \right) dt = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta q^\alpha \right|_{t_1} - \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta q^\alpha \right|_{t_0} \quad (5.4)$$

Insertando (5.3) en (5.4):

$$dS = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} dq^\alpha \quad (5.5)$$

De esta última ecuación, teniendo en cuenta (3.31):

$$\frac{\partial S}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} = p_\alpha \quad (5.6)$$

Se ve claramente que la ecuación anterior corresponde a una de las ecuaciones de las transformaciones canónicas de **Tipo I**. Como la partícula contempla la trayectoria óptima, se cumple $dS = Ldt$.

$$dS = Ldt = \frac{\partial S}{\partial q^\alpha} dq^\alpha + \frac{\partial S}{\partial t} dt \quad (5.7)$$

Insertando (5.6) en (5.7):

$$Ldt = p_\alpha dq^\alpha + \frac{\partial S}{\partial t} dt = (p_\alpha \dot{q}^\alpha + \frac{\partial S}{\partial t}) dt \quad (5.8)$$

Por lo tanto, usando la transformada de Legendre para el paso del Lagrangiano al Hamiltoniano, (4.1), se obtiene:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = L - p_\alpha \dot{q}^\alpha = -H \quad (5.9)$$

Por lo que se concluye que la función principal de Hamilton la acción (Houchmandzadeh, 2020: 354-355).

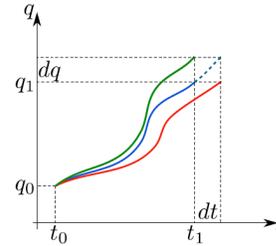


Figura 5: Trayectorias que realiza el sistema variando el instante final.

Fuente: (Houchmandzadeh, 2020: 355)

5.1. Ecuación Hamilton-Jacobi para caso autónomo

En ésta parte se verá como resolver la ecuación de HJ para el caso autónomo. La condición que debe cumplir S para estar en esta situación es trivial, basta por derivar respecto al tiempo el Hamiltoniano que como es autónomo será 0.

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0 \quad (5.10)$$

Se propone como solución un *ansatz* de esta forma:

$$S(q, Q, t) = W(q, Q) + T(t) \quad (5.11)$$

Donde $W(q, Q)$ es la llamada **función característica de Hamilton**. Sustituyendo (5.11) en (5.2):

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = -\frac{dT(t)}{dt} \quad (5.12)$$

Como se ve, se ha realizado la técnica de separación de variables, en la parte izquierda de (5.12) es independiente de las coordenadas de la derecha y viceversa, esto impone que las dos partes debe ser igual a una constante, que se denotará por Q^1 . Resolviendo la parte temporal:²⁴

$$\frac{dT(t)}{dt} = -Q^1 \Rightarrow T(t) = -Q^1 t \quad (5.13)$$

Esto es común para todo sistema autónomo, por lo que, la solución general viene dada por:

$$S(q, Q, t) = W(q, Q) - Q^1 t \quad (5.14)$$

Para todo este tipo de sistemas, se puede centrar únicamente en la resolución de la llamada **ecuación de Hamilton-Jacobi estacionaria** que viene dada por (José and Saletan, 1998: 287):

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = Q^1 \quad (5.15)$$

En esta ecuación, están incluidas todas las constantes Q^α , se puede intentar resolver la ecuación mediante separación de variables proponiendo *ansatz* para cada situación. Si (5.15) se puede separar completamente en sus variables, se obtendrán n ecuaciones diferentes derivadas de primer orden²⁵ de la siguiente forma:

$$H_\alpha(q^\alpha, \frac{\partial W_\alpha}{\partial q^\alpha}) = Q^\alpha \quad (5.16)$$

Si se obtiene esta situación, la función característica de Hamilton es $W = \sum_\alpha W_\alpha(q^\alpha, Q)$. Como se ve en la ecuación (5.16), las constantes Q^α son las constante que se añaden al

²⁴Se ha supuesto la condición $T(t=0) = 0$

²⁵Las otras n provienen de $p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q^\alpha}$

realizar la separación de variables. Además las demás variables vienen descritas por (José and Saletan, 1998: 292):

$$p_\alpha = \frac{\partial W_\alpha}{\partial q^\alpha} \quad P_\alpha = -\frac{\partial W}{\partial Q^\alpha} + \delta_{1\alpha}t \quad (5.17)$$

Ahora, se aplicará los conceptos descritos en el apartado de variedades Riemannianas para llegar a (5.15) y así hallar la primera constante Q^1 . Para ello, Considérese un campo vectorial Hamiltoniano como (4.4) $\mathbf{X}_H \in \mathfrak{X}(\mathbf{T}^*\mathcal{M})$. Como ya se ha visto anteriormente, la energía se conserva en Hamiltonianos autónomos, esto implica que su derivada de Lie es 0, por lo que usando (2.21) para el caso la función Hamiltoniana se obtiene:²⁶

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}_H}H = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Psi_t^*H - H}{t} = 0 \Rightarrow \Psi_t^*H = H \quad (5.18)$$

A continuación, la partícula libre en el formalismo Hamiltoniano después de realizar la transformada de Legendre de (3.18) es:

$$H = \frac{1}{2}\pi^*g^{ij}p_ip_j \quad (5.19)$$

Además, en la **Sección 3.2** ya se vio que las curvas en \mathcal{M} son geodésicas, esto implica que las curvas de (5.19) también lo son. En vez del cálculo de la ecuación geodésica (3.23) se va a calcular dicha ecuación haciendo uso de (2.46). Para ello se necesita que el campo vectorial cuyas curvas integrales son geodésicas cumpla con (2.41). Pero antes se van a realizar unas serie de cálculos:

Sea \mathcal{M}_1 y \mathcal{M}_2 dos variedades diferenciables y $\psi : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ un difeomorfismo, entonces se define $\Psi : \mathbf{T}^*\mathcal{M}_1 \rightarrow \mathbf{T}^*\mathcal{M}_2$ como:

$$\Psi(\alpha_p) = \alpha_p \circ (\psi^{-1})_{*\psi(p)} \quad \forall \alpha_p \in \mathbf{T}_p^*\mathcal{M}_1 \quad (5.20)$$

Además, siendo π_1 y π_2 las proyección canónicas para los dos fibrados cotangentes, se cumple las siguientes dos relaciones:

$$(\pi_2 \circ \Psi)(\alpha_p) = \psi(p) = (\psi \circ \pi_1)(\alpha_p) \quad (5.21)$$

$$\pi_2 \circ \Psi = \psi \circ \pi_1 \quad (5.22)$$

Más adelante se necesitará saber el valor de Ψ^*p_i , por lo que se hallará dicho cálculo, por lo que usando (2.4), (5.20) y (5.21) (Torres del Castillo, 2012: 203-204):

$$\begin{aligned} (\Psi^*p_i)(\alpha_p) &= p_i(\Psi(\alpha_p)) = \Psi(\alpha_p) \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \right)_{\psi(p)} = \left(\frac{\partial(x^k \circ \psi^{-1})}{\partial x^i} \right)_{\psi(p)} \alpha_p \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right) \right)_p \\ &= \left(\frac{\partial(x^k \circ \psi^{-1})}{\partial x^i} \right)(\psi(p)) p_k(\alpha_p) = \left(\frac{\partial(x^k \circ \psi^{-1})}{\partial x^i} \right)(\psi(\pi_1(\alpha_p))) p_k(\alpha_p) \\ &= \left(\left(\left(\frac{\partial(x^k \circ \psi^{-1})}{\partial x^i} \right) \circ \psi \right) \circ \pi_1 \right) p_k(\alpha_p) = \left(\pi_1^* \psi^* \left(\frac{\partial(x^k \circ \psi^{-1})}{\partial x^i} \right) p_k \right)(\alpha_p) \Rightarrow \end{aligned} \quad (5.23)$$

²⁶El flujo es una aplicación $\Psi_t : \mathbf{T}^*\mathcal{M} \rightarrow \mathbf{T}^*\mathcal{M}$

$$\Rightarrow \Psi^* p_i = \pi_1^* \left(\psi^* \frac{\partial(x^k \circ \psi^{-1})}{\partial x^i} \right) p_k \quad (5.24)$$

Por otra parte, se verá que habrá que calcular el término $\psi^* g^{ij}$, primero supongamos que la métrica viene dada por $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$, calculemos el término $g' = \psi^* g$:

$$\begin{aligned} g'_{ij} dx^i \otimes dx^j &= (\psi^* g_{ij}) d(\psi^* x^i) \otimes d(\psi^* x^j) = (\psi^* g_{ij}) \frac{\partial(x^i \circ \psi)}{\partial x^k} \frac{\partial(x^j \circ \psi)}{\partial x^l} dx^k \otimes dx^l \Rightarrow \\ &\Rightarrow \psi^* g^{ij} = g^{kl} \frac{\partial(x^i \circ \psi)}{\partial x^k} \frac{\partial(x^j \circ \psi)}{\partial x^l} \end{aligned} \quad (5.25)$$

A continuación, se desarrollará la ecuación (5.18), para ello usaremos el resultado obtenido en (5.22), (5.24) y (5.25):

$$\begin{aligned} \Psi_t H &= \frac{1}{2} ((\pi \circ \Psi_t)^* g^{ij}) (\Psi_t^* p_i) (\Psi_t^* p_j) = \frac{1}{2} \pi^* \left((\psi_t^* g^{ij}) \left(\psi_t^* \frac{\partial(x^k \circ \psi_t^{-1})}{\partial x^i} \right) \left(\psi_t^* \frac{\partial(x^l \circ \psi_t^{-1})}{\partial x^j} \right) \right) p_k p_l \\ &= \frac{1}{2} \pi^* g'^{kl} p_k p_l \end{aligned} \quad (5.26)$$

Para que se cumpla (5.18), sólo es posible que $g' = g$, es decir, $\psi_t^* g = g$. Entonces, se cumple (2.41), por lo que \mathbf{X} , el campo vectorial al que se le aplicó un *lift* para obtener \mathbf{X}_H , es un campo vectorial de Killing. En general, la forma más habitual de escribir un Hamiltoniano es de la siguiente manera:

$$H = \frac{1}{2} \pi^* g^{ij} p_i p_j + \pi^* V \quad (5.27)$$

Por lo que sería interesante transformar esta ecuación a otra de la forma (5.19), ya que sus curvas en el espacio de configuración son geodésicas. La respuesta es que si se puede y lo explica el principio de Jacobi.

Teorema 5.1.1 (Principio de Jacobi): *Las ecuaciones de tipo (5.27) posee unas orbitas en el espacio de configuración que son las curvas geodésicas de la métrica $g = (E - V)g_{ij} dq^i \otimes dq^j$.*

Donde E es el valor de H en las condiciones iniciales. Asumiendo que $dH|_{H=E} \neq 0$, el nuevo Hamiltoniano vendrá descrito por:

$$h = \frac{H - \pi^* V}{E - \pi^* V} \quad (5.28)$$

Viendo su forma diferencial, esto es, el campo vectorial generado por el nuevo Hamiltoniano se obtiene:

$$\mathbf{X}_{dh} = \frac{1}{(E - \pi^* V)^2} (E - \pi^* V \mathbf{X}_{dH} + (H - E) \mathbf{X}_{d\pi^* V}) \quad (5.29)$$

Sólo interesa la hipersuperficie donde $H = E$, por lo que sustituyendo dicho valor se obtiene la siguiente relación:

$$\mathbf{X}_{dh} = \frac{1}{E - \pi^*V} \mathbf{X}_{dH} \Rightarrow \mathbf{X}_{dH} = (E - \pi^*V) \mathbf{X}_{dh} \quad (5.30)$$

En (5.30) se ve que los campos vectoriales son colineales, esto es, las curvas integrales sólo difieren en la parametrización. Las curvas integrales de \mathbf{X}_{dH} su parámetro es el tiempo t , mientras que las curvas integrales de \mathbf{X}_{dh} su parámetro es τ . Esta nueva variable es $\tau = I(t)$, donde I cumple la siguiente condición si es colineal:

$$\frac{dI}{dt} = (E - \pi^*V) \circ C \quad (5.31)$$

Donde C son las curvas integrales de \mathbf{X}_{dH} y $\sigma = C(I^{-1}(\tau))$ las curvas integrales de \mathbf{X}_{dh} . Por lo que, sustituyendo (5.27) en (5.28) se obtiene la expresión:

$$h = \frac{1}{2} \pi^* \left(\frac{g^{ij}}{E - V} \right) p_i p_j \quad (5.32)$$

Para hallar las curvas integrales de (5.32) se podría usar la ecuación (2.32). En cambio, el cálculo puede ser bastante farragoso debido a los símbolos de Christoffel, es por ello que se utilizará (2.46), en el que se vio que las curvas integrales de $\mathbf{X} = \text{grad } W$ son geodésicas. Las componente g^{ij} de (2.46) corresponde a $\frac{g^{ij}}{E-V}$ de (5.32), realizando la sustitución se obtiene:

$$\frac{g^{ij}}{E - V} \frac{\partial W}{\partial q^i} \frac{\partial W}{\partial q^j} = cte \quad (5.33)$$

Donde ya se explico que las curvas en el espacio de configuración son las intersecciones de hipersuperficies $b^k = cte$. Poniendo la cte como 2 y manipulando un poco la ecuación se obtiene:

$$\frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial W}{\partial q^i} \frac{\partial W}{\partial q^j} + V = E \quad (5.34)$$

(5.34) corresponde a la ecuación (5.15), donde se concluye que la primera constante Q^1 es el valor del Hamiltoniano al aplicar las condiciones iniciales (Torres del Castillo, 2012: 218-221).

5.2. Variables Acción-Ángulo

Como ya se vio en la anterior sección, en un sistema en el que se pueda separar completamente las coordenadas para la función característica de Hamilton, el momento, p_α , es una función de la coordenada, q^α . Esto implica que cada curva C_α estará en una subvariedad perteneciente al espacio de fases definidas por $2n - 2$ ecuaciones de tipo $p_\beta = cte$ y $q^\beta = cte'$ $\forall \beta \neq \alpha$. Cada curva C_α se puede ver como la proyección del movimiento en dicha subvariedad. En adición, este tipo de variables sólo es posible utilizarlas en **órbitas libracionales** y **órbitas rotacionales**. Las **órbitas libracionales** corresponden a movimientos homotópicos a las de un péndulo con una energía igual o menor a $\frac{1}{2}kA^2$, mientras que las **órbitas rotacionales** son las que poseen una energía mayor a dicho valor como se puede ver en la **Figura 6**. Toda curva cerrada, es homotópica a \mathbb{S}^1 , esto implica que el movimiento general

estará en un toroide de dimensión n $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$.

Estas nuevas coordenadas vienen dadas por (ϕ, J) ²⁷, donde el nuevo momento, J_α , me especifica el toro. Además, el toroide a lo largo del tiempo no cambiará de forma, debido a que el Hamiltoniano es autónomo, los nuevos momentos deben ser constante de movimiento debido a la especificación del toro. Esto implica que las coordenadas ϕ^α no debe aparecer en el Hamiltoniano debido a (4.7).

$$\dot{J}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial \phi^\alpha} = 0 \quad (5.35)$$

Esto es, $H = H(J)$, por lo que la ecuación para el *ángulo* viene determinadas por:

$$\dot{\phi}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial J_\alpha} = \nu^\alpha(J) \quad (5.36)$$

Donde a la variable *ángulo* se le va a imponer la siguiente condición de normalización cuando la curva cumpla un periodo:

$$\oint_{C_\alpha} d\phi^\alpha = 2\pi \quad (5.37)$$

Resolviendo (5.36), se obtendrá una ecuación como la del movimiento curvilíneo:

$$\phi^\alpha = \nu^\alpha t + \Theta^\alpha \quad (5.38)$$

Donde ν^α son las frecuencias en las que es recorrida las curva cerradas \mathbb{S}_α^1 . Los periodos se pueden calcular de manera trivial y vienen dadas por $T_\alpha = \frac{2\pi}{\nu^\alpha}$. Por construcción, las variables son canónicas debido a que se ha impuesto que cumplan con (4.7), esto implica que existe una función Hamiltoniana según la **Definición 4.1.1** además de cumplir con (4.3) y (4.17). En esta ocasión se utilizará las transformaciones de **Tipo II** cuya función generatriz se escribirá como $\tilde{W}(q, J)$. Usando (4.43):

$$p_\alpha = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial q^\alpha} \quad \phi^\alpha = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial J_\alpha} \quad (5.39)$$

Sustituyendo la variable *ángulo* de (5.39) en (5.37) teniendo en cuenta su ecuación de momento y que hasta el apartado de Aplicaciones no se usará el convenios de índices repetidos:

$$2\pi = \oint_{C_\alpha} \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial q^\alpha \partial J_\alpha} dq^\alpha = \frac{\partial}{\partial J_\alpha} \oint_{C_\alpha} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial q^\alpha} dq^\alpha = \frac{\partial}{\partial J_\alpha} \oint_{C_\alpha} p_\alpha dq^\alpha \Rightarrow J_\alpha = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_\alpha} p_\alpha dq^\alpha \quad (5.40)$$

Por otra parte, debe existir una relación con la función característica de Hamilton. Por lo que, insertando (4.36) en (5.40):

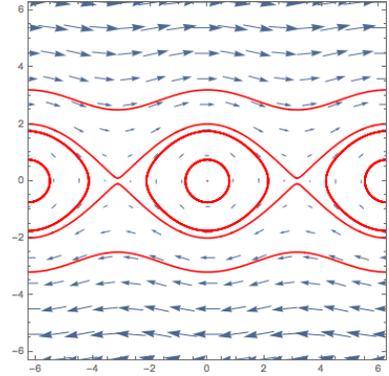


Figura 6: *Diferentes tipos de órbitas cerradas.*

Fuente: (Nonlinear Pendulum, 2009)

²⁷A estas coordenadas se les llama ángulo y acción respectivamente

$$2\pi J_\alpha = \oint_{C_\alpha} \frac{\partial W}{\partial q^\alpha} dq^\alpha = 2\pi \bar{J}_\alpha(Q) \quad (5.41)$$

Si se cumple $\left| \frac{\partial J_\alpha}{\partial Q^\beta} \right| \neq 0$, se puede invertir (5.41) obteniendo Q^α en función de J . Una vez obtenida esta cantidad:

$$W(q, Q) = W(q, Q(J)) = \tilde{W}(q, J) \Rightarrow \frac{\partial W}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial q^\alpha} = p_\alpha \quad (5.42)$$

Entonces, una vez obtenido \tilde{W} , se puede obtener la variable *ángulo* mediante (5.39) y las frecuencias por (5.36) (José and Saletan, 1998: 307-313).

6. Aplicaciones

A continuación, se expondrán unos cuantos ejemplos donde se verán las aplicaciones de toda la teoría expuesta. Se resolverán potenciales de Kepler, como llegar a la ecuación de Schrödinger y el oscilador armónico.

6.1. Problema de Kepler

Considérese una partícula sometida a un potencial de tipo, $V(r) = -\frac{k}{r}$. Este potencial, proviene de una fuerza central que es conservativa y además $\mathbf{F} = -\nabla V(r)$. Esto hace, que el momento angular en la dirección Z se conserve debido a que $\mathbf{M} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$. Entonces de antemano se puede prever que el movimiento de partículas sometidas a fuerzas centrales serán en un plano, por lo que la dimensión de \mathcal{M} es $n = 2$. En primer lugar, se supondrá el caso de $E = 0$. Para este primer ejemplo se usará las coordenadas parabólicas (u, v) que vienen dadas por $x = u^2 - v^2$ e $y = 2uv$. Obteniendo la siguiente métrica:

$$g = 4m(u^2 + v^2)(du \otimes du + dv \otimes dv) \quad (6.1)$$

Como el Hamiltoniano es autónomo debido a que ni el potencial ni la métrica depende del tiempo, usando (5.27) se obtiene que el Hamiltoniano viene dado por:

$$H = \frac{1}{8m} \frac{p_u^2 + p_v^2}{(u^2 + v^2)} - \frac{k}{u^2 + v^2} \quad (6.2)$$

Este tipo de Hamiltonianos, se pueden transformar por un *Hamiltoniano* h , dado por (5.32) cuyas curvas geodésicas se resuelven mediante (5.34). Estas curvas, mediante una reparametrización obtienen el movimiento en \mathcal{M} , sustituyendo (6.2) en (5.34)

$$\frac{1}{8m(u^2 + v^2)} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial v} \right)^2 \right] - \frac{k}{u^2 + v^2} = 0 \quad (6.3)$$

Esta ecuación admite una separación de variables mediante $W(u, v) = W_u(u) + W_v(v)$, sustituyendo en (6.3) se obtienen las siguientes dos ecuaciones:

$$\left(\frac{dW_u}{du}\right)^2 - 4mk = a \quad (6.4)$$

$$\left(\frac{dW_v}{dv}\right)^2 - 4mk = -a \quad (6.5)$$

Resolviendo (6.4) y (6.5) con la condición $W_u(0) = 0$ y $W_v(0) = 0$ se obtiene que la función característica de Hamilton es:

$$W = u\sqrt{4mk + a} + v\sqrt{4mk - a} \quad (6.6)$$

Como $n = 2$, sólo se obtendrá un parámetro b^k que vendrá dado por $b = \frac{\partial W}{\partial a}$, realizando esta operación se obtiene una familia de curvas parabólicas, donde los parámetros a y b indican la orientación del eje de la parábola y la distancia focal, que cumplen la siguiente ecuación (Torres del Castillo, 2012: 221):

$$\frac{u}{2\sqrt{4mk + a}} - \frac{v}{2\sqrt{4mk - a}} = b \quad (6.7)$$

Ahora considérese que las curvas que da el sistema son para valores de $E < 0$, esto implica que las curvas serán cerradas, mas concretamente elipses o circunferencias. Es por ello, que se utilizará un cambio de métrica a la métrica para una circunferencia:

$$g = m(dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta) \quad (6.8)$$

Sustituyendo en (5.34):

$$H = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 - \frac{k}{r} = E \quad (6.9)$$

De primeras se sabe que θ es una coordenada cíclica, por lo que se espera que una constante de movimiento sea el momento p_θ . (6.9) se le puede realizar una separación de variables $W = W_r + W_\theta$ obteniendo las siguientes dos ecuaciones:

$$\frac{dW_\theta}{d\theta} = p_\theta \quad (6.10)$$

$$\frac{dW_r}{dr} = \sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{p_\theta^2}{r^2}} \quad (6.11)$$

Al ser curvas cerradas se pueden usar las variables de *acción-ángulo*, para obtener las *acciones* se hace uso de (5.41):

$$J_\theta = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{dW_\theta}{d\theta} d\theta = p_\theta \quad (6.12)$$

$$J_r = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{dW_r}{dr} dr = \frac{1}{2\pi} \oint \left(\sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{p_\theta^2}{r^2}} \right) dr \quad (6.13)$$

(6.13) se puede resolver en el plano complejo mediante residuos, sustituyendo $p_\theta = J_\theta$ se obtiene que el valor de J_r es:²⁸

$$J_r = -|J_\theta| + k\sqrt{-\frac{m}{2E}} \quad (6.14)$$

Ahora si se invierte (6.14) se va a obtener la energía en función de las acciones, por lo que las frecuencias se podrán obtener mediante (5.36) (José and Saletan, 1998: 318-319):

$$Q^1 = E = H(J) = -\frac{k^2 m}{2(J_r + |J_\theta|)^2} \quad (6.15)$$

$$\nu^r = \frac{\partial H}{\partial J_r} = \sqrt{-\frac{8E^3}{k^2 m}} \quad (6.16)$$

$$\nu^\theta = \frac{\partial H}{\partial J_\theta} = \sqrt{-\frac{8E^3}{k^2 m}} \quad (6.17)$$

Una aplicación, de estas frecuencias es la siguiente. Considérese un sistema aislado Tierra-sol, en el cual $m = \mu \approx M_\oplus$, $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$, la masa solar $M_\odot = 1,988500 \cdot 10^{30} kg$ y el semieje mayor de la órbita terrestre $a = 1,4960 \cdot 10^9 m$ (Williams, 2018) y (Williams, 2020). Sabiendo que la energía de una órbita viene dado por $E = -\frac{k}{2a}$ y que una vuelta equivale a un ángulo $\phi = 2\pi$, despejando el tiempo de (5.38) con la frecuencia de (6.17):

$$t = \frac{2\pi}{\nu} = 2\pi\sqrt{\frac{8a^3 k^2 M_\oplus}{8k^3}} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_\odot}} = 365,37 \text{ días} \quad (6.18)$$

Comparando con los datos de la tierra, la tierra tarda en realizar una traslación 365,24 días, esto es, la suposición teórica es de $2h \ 43min \ 39s$ mayor, esta diferencia se debe a que no se han tenido en cuenta las demás interacciones gravitatorias como la provocada por la luna.

6.2. De la ecuación de Schrödinger a la ecuación de Hamilton-Jacobi

Durante este trabajo se ha ido viendo la semejanza entre algunas fórmulas cuánticas con la mecánica clásica, por ejemplo los corchetes de Poisson con los conmutadores o la evolución temporal de un observable con la imagen de Heisenberg. Debido a que la mecánica cuántica tiene un formalismo ondulatorio, ¿Se puede obtener un formalismo análogo en la mecánica clásica?

Para simplificar el procedimiento, se restringirá al sistema de una partícula $H \in C^\infty(\mathbf{T}^*\mathbb{R}^3)$. Esto implica que la acción viene determinada por (5.14)²⁹. Tanto S como W representan hipersuperficies, por lo que si $S(t=0) = a \Rightarrow W = a$. En cambio, si se deja correr el tiempo,

²⁸Se recuerda que la energía es negativa, por lo que el valor dentro de la integral es positivo

²⁹Ya se vio que Q^1 corresponde a E en las condiciones iniciales

W irá cambiando según $W(t = dt) = a + Edt$ manteniéndose $S(t = dt) = a$. Esto es, la hipersuperficie $S = a$ ha pasado en un tiempo dt de $W = a \Rightarrow W = a + Edt$. Este movimiento se asemeja a la propagación de frentes de onda, donde esta propagación se realiza en \mathbb{R}^3 . Debido a esta analogía, se puede definir la velocidad de propagación de la onda. Dicha velocidad se define como la longitud en el que se desplaza la superficie $S = cte$ en un transcurso de tiempo dt (ds) entre el tiempo empleado dt , esto es:

$$u = \frac{ds}{dt} \quad (6.19)$$

La hipersuperficie W en dicho tiempo ha variado $W \rightarrow W + dW$, donde $dW = Edt$. Por otra parte, el desplazamiento dW se puede escribir como $dW = |\nabla W|ds$, entonces juntando todo se obtiene:

$$u = \frac{E}{|\nabla W|} \quad (6.20)$$

Despejando ∇W de (5.34) y sustituyendo en (6.20)³⁰ se obtiene la siguiente ecuación:

$$u = \frac{E}{\sqrt{2m(E - V)}} = \frac{E}{\sqrt{2mT}} = \frac{E}{p} \quad (6.21)$$

Igualando (6.20) y (6.21) se obtiene que $\mathbf{p} = \nabla W$. Esta condición, implica que el movimiento de la partícula es paralelo al gradiente de W , esto es, perpendicular a las hipersuperficies $S = cte$, el análogo de la óptica sería el rayo de luz, que es perpendicular al frente de onda. Para realizar la semejanza con la óptica, se va a considerar que el índice de refracción n no sea constante, sino que varíe lentamente en el espacio, esto implica que los frentes de onda se deformarán, que es la situación planteada anteriormente. Se va a proponer como solución general la siguiente función de onda:³¹

$$\phi = \exp(A(\mathbf{r}) + ik_0(L(\mathbf{r}) - ct) \quad (6.22)$$

Donde el término que contiene $A(\mathbf{r})$ modula la amplitud mientras que el término $L(\mathbf{r})$ contiene el índice de refracción, sustituyendo (6.22) en la ecuación de onda que viene dada por $\nabla^2 \phi = \left(\frac{n}{c}\right)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$, se obtienen las siguiente dos ecuaciones:

$$\nabla^2 A + (\nabla A)^2 + k_0^2(n^2 - (\nabla L)^2) = 0 \quad (6.23)$$

$$\nabla^2 L + 2\nabla A \cdot \nabla L = 0 \quad (6.24)$$

A continuación, se hará la siguiente aproximación, se va a considerar que el índice de refracción varía poco con la distancia. Es decir, la longitud de onda es más pequeña que la distancia en la que cambia n . Esta suposición se traduce en que el término del número de onda en el vacío de (6.23) es el predominante, por lo que (6.23) se transforma en:

$$(\nabla L)^2 = n^2 \quad (6.25)$$

³⁰El espacio de configuración es el espacio tridimensional euclídeo cuya métrica viene determinada por $g = \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j$

³¹ k_0 es el número de onda en el vacío

Esta ecuación es la llamada **ecuación Eikonal**, que explica que las superficies L se propagan en el espacio como frentes de ondas y los rayos son perpendiculares a dichos frentes. Se puede ver la gran similitud entre (6.25) y $(|\nabla W|)^2 = 2m(E - V)$, por lo que $L \rightarrow W$ y $n^2 \rightarrow 2m(E - V)$. Debido a la caracterización de L con W implica que la fase total de la onda se debe relacionar con S .

$$k_0(L - ct) = 2\pi\left(\frac{L}{\lambda_0} - \nu t\right) \rightarrow W - Et \quad (6.26)$$

Entonces, se obtiene que $E \propto \nu$, dicha constante de proporcionalidad se denotará como h y además $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, multiplicando y dividiendo por h en (6.26) se obtiene:

$$\frac{1}{\hbar}\left(\frac{Lh}{\lambda_0} - Et\right) = \frac{S}{\hbar} \Rightarrow W = \frac{Lh}{\lambda_0} \quad (6.27)$$

sustituyendo el resultado obtenido en (6.27) en (6.22) se obtiene que la función de onda asociada a la partícula es:

$$\psi = \psi_0 e^{iS/\hbar} \quad (6.28)$$

Las funciones de onda, satisfacen la ecuación de Schrödinger, dicha ecuación viene dada por:

$$\left(-\hbar\frac{\nabla^2}{2m} + V\right)\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (6.29)$$

Sustituyendo (6.28) en (6.29) se obtiene trivialmente la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{2m}(\nabla S)^2 + V + \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\nabla^2 S \quad (6.30)$$

De (6.30) se deduce que para que esta ecuación cumpla con (5.2) el término $\frac{i\hbar}{2m}\nabla^2 S \rightarrow 0$, para poder realizar esta suposición se debe cumplir que $\hbar\nabla^2 S \ll (\nabla S)^2$ o $\hbar\nabla \cdot \mathbf{p} \ll p^2$ ³². Por otra parte, $\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{E/p}{E/\hbar} \Rightarrow \frac{\lambda}{2\pi p} \nabla \cdot \mathbf{p} \ll 1$, entonces se podrá aplicar esta aproximación si la longitud de onda es tan corta que el momento no varíe notablemente en una distancia igual a la longitud de onda, es decir, que el potencial que es aplicado en el sistema no cambie mucho en dicha distancia. Si se da esta condición, (6.30) se transforma en:

$$\frac{1}{2m}(\nabla^2 S) + V = -\frac{\partial S}{\partial t} \Rightarrow H = -\frac{\partial S}{\partial t} \quad (6.31)$$

Que es precisamente la ecuación de Hamilton- Jacobi. Por lo que se deduce que la ecuación de Hamilton-Jacobi no es más que la aproximación clásica de la ecuación de Schrödinger (Goldstein, 1988: 588-596).

6.3. El oscilador armónico

Uno de los problemas más importantes en física, es la resolución del problema del oscilador armónico. Esto se debe a que todo potencial que posea un mínimo, si el sistema se encuentra en lugares próximos a este, se puede aproximar a este potencial mediante serie de Taylor:

³² $\mathbf{p} = \nabla W = \nabla S$

$$V(x) = V(x_0) + \frac{dV(x)}{dx} \Big|_{x=x_0} (x-x_0) + \frac{d^2V(x)}{dx^2} \Big|_{x=x_0} (x-x_0)^2 + \mathcal{O}(x-x_0)^3 \approx V(x_0) + \frac{d^2V(x)}{dx^2} (x-x_0)^2 \quad (6.32)$$

Que es un potencial armónico, por lo que, considérese $H \in C^\infty(\mathbf{T}^*\mathcal{M})$, esto implica que el Hamiltoniano es autónomo cuya forma es:

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad (6.33)$$

Debido a que (6.33) coincide en forma con (5.27) para obtener las curvas geodésicas se puede usar (5.34) con métrica $g = dx \otimes dx$.

$$\frac{dW}{dx} = \sqrt{2mE - m^2\omega^2 x^2} \quad (6.34)$$

Debido a que las trayectorias de este sistema son como las de la **Figura 6**, se podrán usar las variables *acción-ángulo*. Usando (5.40) y (5.42)

$$J_x = \frac{1}{2\pi} \oint dx \sqrt{2mE - m^2\omega^2 x^2} = \frac{E}{\omega} \text{³³} \Rightarrow E = \omega J_x \quad (6.35)$$

Usando (5.36) se obtienen las frecuencias del movimiento en la variable ángulo, obteniendo $\nu^x = \omega$, lo cual era lo previsible, porque en el oscilador armónico la frecuencia del movimiento viene dado por ω . Por otro lado, la solución de la ecuación diferencial (6.34) es:

$$W = \frac{E}{\omega} \left[\arcsen \left(x \sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}} \right) + x \sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}} \sqrt{1 - \frac{m\omega^2}{2E} x^2} \right] \quad (6.36)$$

Sustituyendo (6.35) en (6.36) y utilizando la fórmula de la parte angular de (5.39) se obtiene:

$$\phi^x = \arcsen \left(x \sqrt{\frac{m\omega}{2J_x}} \right) \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2J_x}{m\omega}} \text{sen} \phi^x \quad (6.37)$$

Para obtener el momento se realiza lo siguiente:

$$J_x = \frac{E}{\omega} = \frac{p_x^2}{2m\omega} + \frac{2mJ_x\omega}{2m\omega} \text{sen}^2 \phi^x \Rightarrow p_x = \sqrt{2m\omega J_x} \text{cos} \phi^x \quad (6.38)$$

Para finalizar, las curvas en el fibrado cotangente vienen dadas por el par (x, p_x) , sustituyendo (5.38) con $\nu = \omega$ obteniendo (Carot and Ibañez, 2010: 207-209):

$$x(t) = \sqrt{\frac{2J_x}{m\omega}} \text{sen}(\omega t + \Theta) \quad (6.39)$$

$$p_x(t) = \sqrt{2m\omega J_x} \text{cos}(\omega t + \Theta) \quad (6.40)$$

³³Para realizar la integral se sugiere el cambio de variable $x = \sqrt{\frac{2mE}{m^2\omega^2}} \text{sen} t$

7. Conclusiones

Como se ha visto, los distintos formalismos simplifican de manera notable la resolución de los sistemas mediante el uso de coordenadas generalizadas que si son adaptadas al espacio del sistema pueden llegar a la obtención de cantidades conservadas, que son de gran importancia en la física. También es curioso que mediante transformaciones canónicas se puede llegar a un Hamiltoniano nulo en el cual todas las nuevas variables canónicas se conservan. Por otra parte, no deja de sorprender la conexión entre la cuántica y la mecánica clásica, dos teorías que a primera vista parecen contradictorias como la mecánica analítica es el límite clásico de la cuántica.

Debido a la limitación de extensión del trabajo no se ha podido profundizar más en otros ámbitos, como la teoría de perturbaciones, la teoría del caos o sistemas en las que actúan fuerzas disipativas. En este último caso, ya se ha dado un avance y si se quiere profundizar más en este tema se recomienda la lectura de [1], [5] y [9] de la referencias, donde se explican los distintos Hamiltonianos tanto para fuerzas conservativas y no conservativas y su desarrollo matemático.

Referencias

- [1] Asorey, M., Cariñena, J. F. and Ibort, L. A. (1983). *Generalized canonical transformations for time-dependent systems*. Journal of Mathematical Physics, **24**(12), 2745-2750.
- [2] Bravetti, A., Cruz, H. and Tapias, D. (2017). *Contact Hamiltonian mechanics*. Annals of Physics, **376**, 17-39.
- [3] Bravetti, A. and Tapias, D. (2015). *Liouville's theorem and the canonical measure for nonconservative systems from contact geometry*. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, **48**(24), 245001.
- [4] Carot, J. and Ibañez J. (2010). *Mecánica Teórica*. Editorial Reverté.
- [5] Curstis, W. D. and Miller, F. R. (1985). *Differential Manifolds and Theoretical Physics*. Academic Press.
- [6] Eriksson, A. and Hengel, A. (2009). *Optimization on the manifold of multiple homographies; Optimization on the manifold of multiple homographies*. 2009 IEEE 12th International Conference on Computer Vision Workshops, ICCV Workshops. 242-249.
- [7] Gauthier, J.-Y., Hubert, A., Abadie, J., Chaillet, N., and Lexcellent, C. (2008). *Nonlinear Hamiltonian modelling of magnetic shape memory alloy based actuators*. Sensors and Actuators A: Physical, **141**(2), 536-547.
- [8] Goldstein, H. (1988). *Mecánica Clásica*. Editorial Reverté.
- [9] Houchmandzadeh, B. (2020). *The Hamilton–Jacobi equation: An alternative approach*. American Journal of Physics, **88**(5), 353-359.
- [10] José, J. V. and Saletan, E. J. (1998). *Classical Dynamics*. Cambridge University Press.
- [11] Lee, J. M. (2018). *Introduction to Riemannian Manifolds*. Springer.
- [12] Mann, P. (2018). *Lagrangian and Hamiltonian Dynamics*. Oxford University Press.
- [13] Torres del Castillo, G. F. (2012). *Differentiable Manifolds*. Birkhäuser Boston.
- [14] Williams, D. (23 Febrero, 2018). *Sun Fact Sheet*, <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/sunfact.html> [Accedido 1 Septiembre 2020].
- [15] Williams, D. (2 Abril, 2020). *Earth Fact Sheet*, <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html> [Accedido 1 Septiembre 2020].
- [16] (29 Marzo, 2009). *Nonlinear Pendulum*, <https://mathematicalgarden.wordpress.com/2009/03/29/nonlinear-pendulum/> [Accedido 1 Septiembre 2020].