



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

ZIENTZIA
ETA TEKNOLOGIA
FAKULTATEA
FACULTAD
DE CIENCIA
Y TECNOLOGÍA



Gradu Amaierako Lana / Trabajo Fin de Grado

Ingeniaritza Elektronikoko Gradua / Grado en Ingeniería Electrónica

MODELADO Y DISEÑO DE CONTROLADORES PARA UN BRAZO FLEXIBLE ROTATORIO

Autor:

Christian Fernández Fernández

Directores:

Ibone Lizarraga Mallo

Ibon Sagastabeitia Buruaga

TABLA DE CONTENIDO

1.	INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS	1
2.	PRESENTACIÓN DEL SISTEMA Y MODELADO	2
2.1.	PRESENTACIÓN DEL SISTEMA	2
2.2.	MODELADO	3
	MODELADO DEL SERVOMOTOR	4
	MODELADO DEL SISTEMA COMPLETO	9
2.3.	OBTENCIÓN DE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA	17
	SIN DEFORMACIÓN DEL BRAZO FLEXIBLE	18
	CON DEFORMACIÓN DEL BRAZO FLEXIBLE	19
3.	DISEÑO DE CONTROLADORES Y ANÁLISIS COMPARATIVO	21
3.1.	CONTROLADORES CLÁSICOS	22
	DISEÑO DEL FILTRO NOTCH	22
	CONTROL PROPORCIONAL (P)	24
	CONTROL PROPORCIONAL INTEGRAL (PI)	26
	CONTROL PROPORCIONAL DERIVATIVO (PD)	27
	CONTROL PROPORCIONAL, INTEGRAL Y DERIVATIVO (PID)	29
	RED DE ATRASO	31
3.2.	CONTROLADORES MODERNOS	33
	CONTROL POR REALIMENTACIÓN DE VARIABLES DE ESTADO	33
	LINEAR QUADRATIC REGULAR (LQR)	36
	LINEAR QUADRATIC GAUSSIAN (LQG)	39
3.3.	COMPARACIÓN DE LOS CONTROLADORES	42
4.	CONCLUSIONES Y FUTUROS TRABAJOS	44
5.	BIBLIOGRAFÍA	47
6.	ANEXO: SIMULACIONES ANTE REFERENCIAS DISTINTAS	48
6.1.	REFERENCIA DE 0.7 RAD (40.1º)	48
6.2.	REFERENCIA DE 0.5 RAD (28.6º)	54

1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

El control de sistemas es uno de los campos fundamentales de la Electrónica. La aplicación de los diferentes métodos de modelado y diseño de controladores permite dominar el comportamiento de muchos de los diferentes dispositivos y estructuras que se emplean en la industria.

En algunos casos, existe alguna propiedad del sistema a controlar sobre la que no se tiene una acción de control directa, sino que evoluciona en función de otras características que sí son controlables. La maqueta empleada en este estudio (fabricada por Quanser) es un ejemplo de ello.

El sistema a analizar está compuesto por un servomotor que transmite el movimiento rotatorio a una rueda dentada principal, mediante una relación de engranajes; transfiriéndolo además a un brazo flexible anclado a esta rueda. De esta manera, al transmitir movimiento de giro a la rueda dentada, el brazo flexible gira con ella, provocando una deformación en esta articulación.



FIGURA 1.1: IMAGEN DEL SISTEMA A CONTROLAR.

Con el objetivo de controlar la rotación del brazo flexible, intentando reducir al máximo las vibraciones, se dispone tanto de la señal procedente de un potenciómetro del servomotor, que proporciona información sobre la posición angular de la rueda dentada principal; como de otra señal, esta vez proveniente

de una galga extensométrica situada en el propio brazo flexible, la cual indica la deformación sufrida por el propio brazo.

A lo largo de este trabajo se pretenderá diseñar un controlador que permita satisfacer todas las especificaciones que se planteen, partiendo de la modelización de los dispositivos involucrados, tanto del servomotor como del sistema completo. Se plantearán dos tipos de controladores: los clásicos, que no hacen uso la medida de la deformación del brazo flexible (simplemente intentan minimizar las perturbaciones con un Filtro Notch); y los modernos, que tienen en cuenta el modelo completo y se basan en la representación interna del mismo.

Es importante recalcar que no se han podido realizar todas las pruebas experimentales que se pretendían en un principio. De hecho, los datos experimentales se encuentran presentes hasta el modelado del sistema completo. A partir de ahí, la comprobación del funcionamiento de los controladores se realizará mediante simulaciones en Scilab (versión 6.0.2).

2. PRESENTACIÓN DEL SISTEMA Y MODELADO

2.1. PRESENTACIÓN DEL SISTEMA

La maqueta de la que se dispone consta de diferentes partes, claramente diferenciables.

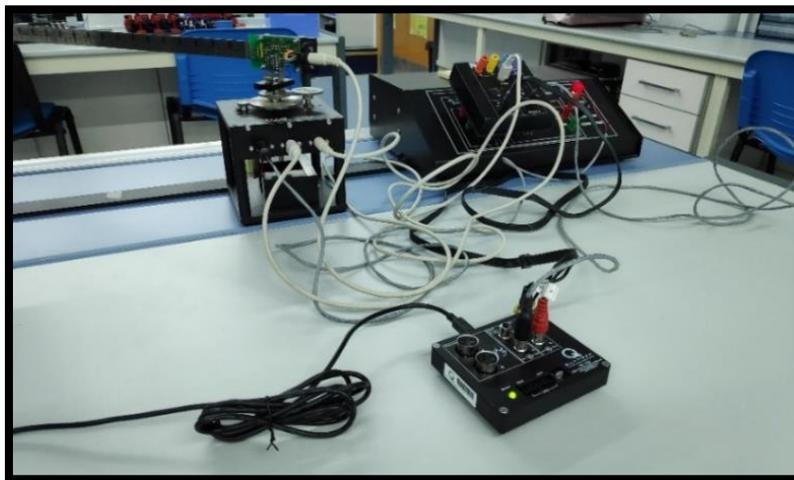


FIGURA 2.1.1: IMAGEN DEL SISTEMA COMPLETO.

En primer lugar, se tiene el soporte principal, en el que está montado el servomotor, con la rueda dentada principal en la parte superior. Sobre ella se sitúan una serie de ruedas solidarias, que permiten el anclaje del brazo flexible.

El envío de las señales de control desde el ordenador hasta la maqueta se realiza por medio de una tarjeta de adquisición (Q2-USB de Quanser), conectada mediante un cable USB. Presenta dos entradas y dos salidas, las cuales cuentan con convertidores analógico-digitales y digital-analógicos, respectivamente. Cabe recalcar que el tiempo de muestreo de estos convertidores se establece en 0.005 s, un valor cercano al límite permitido por el sistema operativo del ordenador (ya que no se trata de hardware específico para recoger y enviar señales en tiempo real).

Por otra parte, también es necesaria una etapa de amplificación (PA-0103 de Quanser), que recoge las señales de control procedentes de la tarjeta de adquisición y las amplifica, además de reunir las señales de los sensores e introducirlas adecuadamente a la tarjeta.

Finalmente, es necesario un ordenador personal para recoger las señales provenientes de los sensores y enviar la señal de control, además de cerrar el lazo e incluir los cálculos matemáticos precisos para construir el controlador. Este procedimiento se realizará mediante LabVIEW [1], junto con varios módulos adicionales, entre los que se encuentran: Quanser RCP Toolkit, NI-DAQmx, Control Design and Simulation Module y MathScript RT Module.

2.2. MODELADO

A la vista del sistema del que se dispone, se procede a analizar los distintos componentes del mismo, con el objetivo de corroborar el correcto funcionamiento y modelado de cada uno de ellos. Se comenzará con el servomotor para luego añadir el brazo flexible.

MODELADO DEL SERVOMOTOR

Aspectos Generales

De forma previa a la realización de los experimentos pertinentes, se deben indicar un par de fenómenos no lineales que afectan a las pruebas.

En primer lugar, existe una zona muerta en el rotor principal, es decir, un rango de voltajes de entrada al motor que no produce un movimiento en las ruedas dentadas. Gracias a la realización de varias pruebas, se comprueba que esta región se encuentra en torno a 0.35 V (a cada lado del origen) tanto para las situaciones en las que el sistema se halla en reposo como para aquellas en las que ya está en movimiento. El segundo efecto no lineal es una limitación en el voltaje a la entrada del motor a un máximo de 6 V, por recomendación del fabricante.

Un aspecto importante a tener en cuenta es el potenciómetro situado en el soporte principal, que permite recoger la posición del servomotor. Dado que su salida oscila entre 5 y -5 V cuando se rota 352°, resulta que la ganancia introducida por este sensor es de $K_{SENSOR\ SERVO} = 35.2\text{ }^\circ/V = 0.6144\text{ rad}/V$ (el resto pertenece a una zona muerta teórica).

Por otro lado, el potenciómetro tiene también una zona muerta experimental, situada entre -169° y 175°. Para alejar esta región de la zona de trabajo (de entre -50° y 50°) se desplaza la rueda solidaria con el potenciómetro sin rotar el engranaje principal, de manera que la medida de 0° del potenciómetro se sitúa ahora en unos -0.1° respecto de una marca de referencia realizada en la rueda dentada (lo cual se corregirá mediante software).

Modelado Teórico

Los principios teóricos que permiten modelar el servomotor se fundamentan en nociones básicas de la electricidad y la mecánica. A continuación, se explica el camino seguido para obtener las ecuaciones del

movimiento del motor, estructurado de una forma similar a la que muestra el siguiente diagrama [2] [3]:

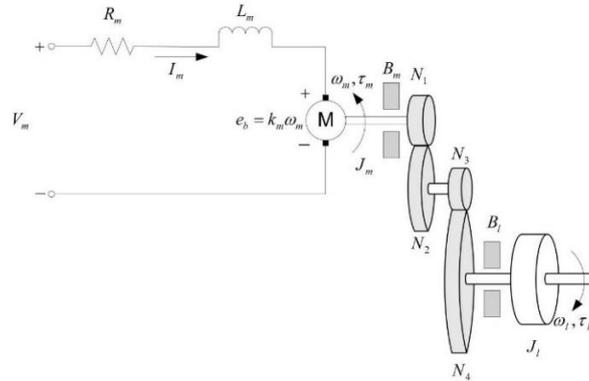


FIGURA 2.2.1: CIRCUITO ELÉCTRICO Y TREN DE ENGRANAJES DEL SERVOMOTOR.

En el plano eléctrico, empleando la Ley de Voltajes de Kirchoff, se consigue la siguiente ecuación:

$$V_m - R_m I_m - L_m \frac{dI_m}{dt} - k_m \omega_m = 0$$

Si se ignora la inductancia ($L_m \ll R_m$), la corriente que circula por el inducido es:

$$I_m = \frac{V_m - k_m \omega_m}{R_m} \quad (1)$$

En segundo lugar, se obtienen las ecuaciones mecánicas, partiendo de la segunda ley de Newton:

$$J \alpha = \tau$$

Siendo J el momento de inercia del cuerpo, α la aceleración angular y τ el torque total aplicado. Así, las ecuaciones del movimiento sobre la carga y el eje del motor quedan:

$$J_l \left(\frac{d\omega_l}{dt} \right) + B_l \omega_l = \tau_l \quad (2) \quad J_m \left(\frac{d\omega_m}{dt} \right) + B_m \omega_m + \tau_{ml} = \tau_m \quad (3)$$

Por otro lado, el torque en el eje de carga (τ_l) resulta:

$$\tau_l = \eta_g K_g \tau_{ml} \quad (4)$$

Donde K_g es la relación de engranajes, η_g su eficiencia y τ_{ml} el torque resultante que actúa sobre el eje del motor desde el torque de carga. La relación se obtiene de la siguiente manera:

$$K_g = K_{gi} K_{gc} = \frac{N_2}{N_1} \frac{N_4}{N_3}$$

Donde N_1 , N_2 , N_3 y N_4 son los dientes de cada una de las ruedas dentadas. Esto también tiene un efecto en el ángulo de giro y, por tanto, en la velocidad angular:

$$\theta_m = K_g \theta_l \qquad \omega_m = K_g \omega_l \qquad (5)$$

Así, combinando las ecuaciones (2), (3), (4) y (5) y nombrando las variables J_{eq} y B_{eq} , obtenemos una ecuación que resume la parte mecánica:

$$\begin{aligned}
 J_{eq} &= \eta_g K_g^2 J_m + J_l & B_{eq} &= \eta_g K_g^2 B_m + B_l \\
 J_{eq} \left(\frac{d\omega_l}{dt} \right) + B_{eq} \omega_l &= \eta_g K_g \tau_m & & (6)
 \end{aligned}$$

Por otro lado, el torque del motor se puede representar de la siguiente forma (empleando la ecuación (1)):

$$\tau_m = \eta_m k_t I_m = \frac{\eta_m k_t (V_m - k_m \omega_m)}{R_m} \qquad (7)$$

Donde k_t es la constante que relaciona la corriente y el torque, η_m la eficiencia del motor e I_m la corriente de la armadura. Desarrollando las ecuaciones (6) y (7) se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 B_{eq,v} &= \frac{\eta_g K_g^2 \eta_m k_t k_m + B_{eq} R_m}{R_m} & A_m &= \frac{\eta_g K_g \eta_m k_t}{R_m} \\
 J_{eq} \left(\frac{d\omega_l}{dt} \right) + B_{eq,v} \omega_l &= A_m V_m & & (8)
 \end{aligned}$$

A partir de esta ecuación es posible obtener la función de transferencia que relaciona la velocidad angular y el voltaje introducido:

$$\begin{aligned}
 J_{eq} \dot{\Omega} + B_{eq,v} \Omega &= A_m V_m & J_{eq} s \Omega(s) + B_{eq,v} \Omega(s) &= A_m V_m(s) \\
 G_{servo (velocidad)}(s) &= \frac{\Omega_l(s)}{V_m(s)} = \frac{A_m}{J_{eq} s + B_{eq,v}} = \frac{K}{\tau s + 1} & & (9)
 \end{aligned}$$

Validación Experimental

A lo largo de varios experimentos se intentarán determinar estos parámetros K y τ (ecuación (9)), empleando distintas entradas al sistema. En muchos de ellos se utilizará la velocidad del servomotor para el cálculo de estos parámetros, la cual se consigue mediante software, derivando la posición

angular. En otros se empleará directamente la posición. Además, para evitar el ruido de alta frecuencia originado por la obtención de la derivada se añade un filtro, cuya función de transferencia tiene la siguiente forma:

$$F(s) = \frac{sp}{s + p} \quad \text{con } p = 40$$

En primer lugar, se aproxima el sistema a uno de primer orden invariante en el tiempo, que responde ante una entrada sinusoidal con una salida también sinusoidal; de la misma frecuencia, pero con diferente amplitud. Así, sometiendo al sistema a entradas sinusoidales de diferentes frecuencias es posible construir su diagrama de Bode.

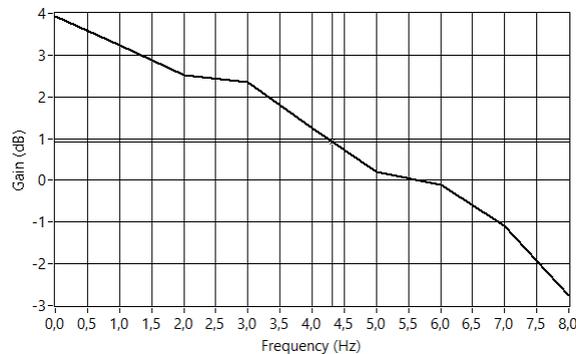


FIGURA 2.2.2.: DIAGRAMA DE BODE DEL MOVIMIENTO DEL SERVOMOTOR.

Tomando la función de transferencia que relaciona la velocidad del motor y el voltaje a su entrada se puede determinar el parámetro K (a partir de la ganancia a frecuencia nula), mientras que, si se extrae la frecuencia de corte (ω_c), es posible especificar el parámetro τ .

En segundo lugar, se introduce una entrada escalón al sistema y se analiza su velocidad, en comparación a la prevista por el modelo nominal:

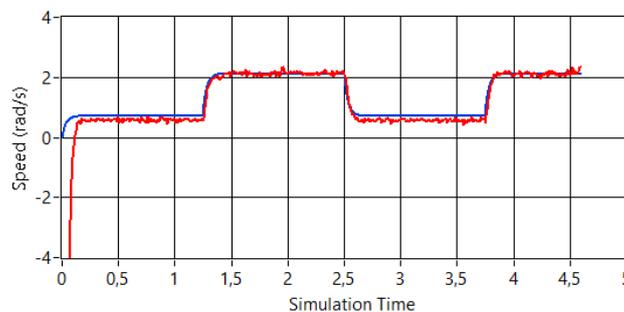


FIGURA 2.2.3: VELOCIDAD ANGULAR (EN RAD/S) TEÓRICA Y EXPERIMENTAL ANTE UNA ENTRADA ESCALÓN FRENTE EL TIEMPO (EN S).

A partir de los datos obtenidos se pueden lograr la velocidad inicial y la velocidad en estado estacionario, que permiten conseguir de nuevo los parámetros K y τ .

Por otro lado, se van modificando manualmente los parámetros K y τ hasta conseguir un modelo que prediga lo mejor posible el comportamiento del servomotor ante entradas sinusoidales, escalón, rampa...

Finalmente, se diseña un controlador PD (en lazo cerrado) para dominar el movimiento del servomotor, partiendo del modelo obtenido mediante el ajuste manual. Como los resultados predichos por el modelo no se acercan lo suficiente a la realidad, se vuelven a ajustar los parámetros K y τ en base a estos resultados. En esta ocasión se compara la posición predicha por el modelo con los resultados experimentales, por lo que la función de transferencia es de segundo orden:

$$\begin{aligned}
 J_{eq} \ddot{\theta} + B_{eq,v} \dot{\theta} &= A_m V_m & J_{eq} s^2 \Theta(s) + B_{eq,v} s \Theta(s) &= A_m V_m(s) \\
 G_{servo (posición)}(s) &= \frac{\Theta(s)}{V_m(s)} = \frac{A_m}{J_{eq} s^2 + B_{eq,v} s} = \frac{K}{\tau s^2 + s} & (10)
 \end{aligned}$$

TABLA 2.2.1: PARÁMETROS K Y τ PARA LAS DISTINTAS FORMAS DE CALCULARLOS.

Parámetros	K	τ
Nominales	1.53	0.0254
Experimento de Respuesta en Frecuencia	1.57	0.037
Experimento de Prueba de Impacto	1.564	0.05
Ajuste Manual	1.45	0.04
Ajuste con Control PD	1.5	0.023

El gran parecido existente entre los distintos valores obtenidos corrobora que el modelo teórico propuesto por el fabricante es adecuado. De esta forma, se podrán emplear los valores para J_{eq} y $B_{eq,v}$ proporcionados por Quanser, en caso de necesitarlos.

MODELADO DEL SISTEMA COMPLETO

Aspectos Generales

Al igual que ocurría con el motor, existen algunos aspectos que deben ser tratados de forma previa al modelado.

En esta ocasión, también se dispone de una zona muerta en el motor. Sin embargo, esta es mucho más extensa con el brazo flexible montado, incrementándose hasta los 0.4-0.5 V. Este fenómeno, que empeora ostensiblemente la acción de los controladores que se puedan diseñar, especialmente a la hora de reducir el error tras un tiempo prudencial; se debe principalmente a la dificultad que oponen los cables del brazo al movimiento.

Calibración

Con el objetivo de mejorar la detección de la deformación del brazo flexible, se calibra la galga situada en ella según las instrucciones del fabricante [4] [5].

Para ello, se atornilla el brazo a la base de calibración y se realizan varias medidas del voltaje de salida de la galga. Así, se comprueba que, tomando como referencia la marca central, las deformaciones medidas por la galga son simétricas a cada lado de la misma. De esta forma, uno de los potenciómetros ajusta la ganancia a la salida del sensor, mientras que otro permite modificar el offset del mismo. Los resultados para las distintas marcas de la base de calibración son los siguientes:

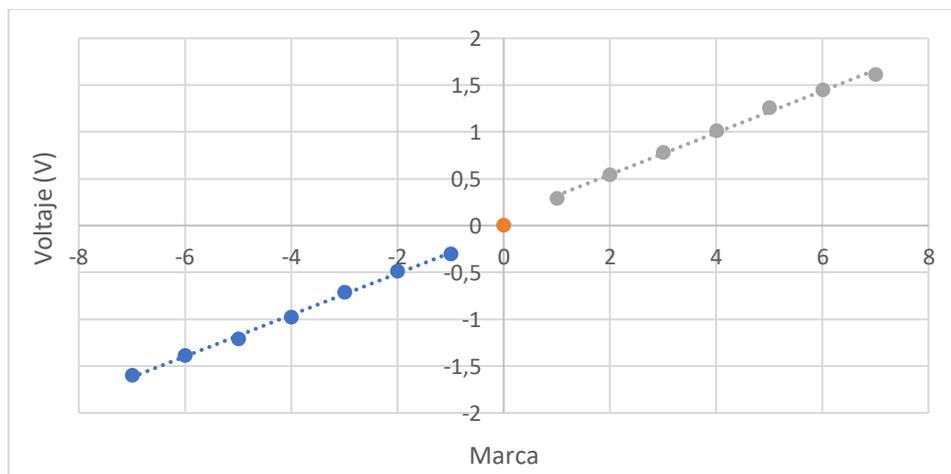


FIGURA 2.2.4: VOLTAJES DE SALIDA DEL SENSOR PARA LAS MARCAS DE LA BASE DE CALIBRACIÓN.

Cabe destacar que, debido a las continuas variaciones en el offset observadas en cada experimentación, se ha decidido compensar esta diferencia de potencial mediante software. Así, se recoge el voltaje dado por la galga al inicio de cada ejecución, suponiendo que está en reposo, y se resta esta cantidad a todas las medidas de esa misma ejecución.

Gracias a esta calibración, realizada según los pasos del fabricante, es posible emplear el valor para la ganancia de la galga extensométrica que se nos proporciona en los datos del propio fabricante ($K_{SENSOR FLEX} = 0.06 \text{ rad/V}$).

Respuesta Libre

Con el objetivo de obtener algunos parámetros que serán necesarios posteriormente para construir el modelo teórico (K_s y J_l), se observan las oscilaciones que aparecen en el brazo si se le golpea en un extremo y se deja vibrar libremente:

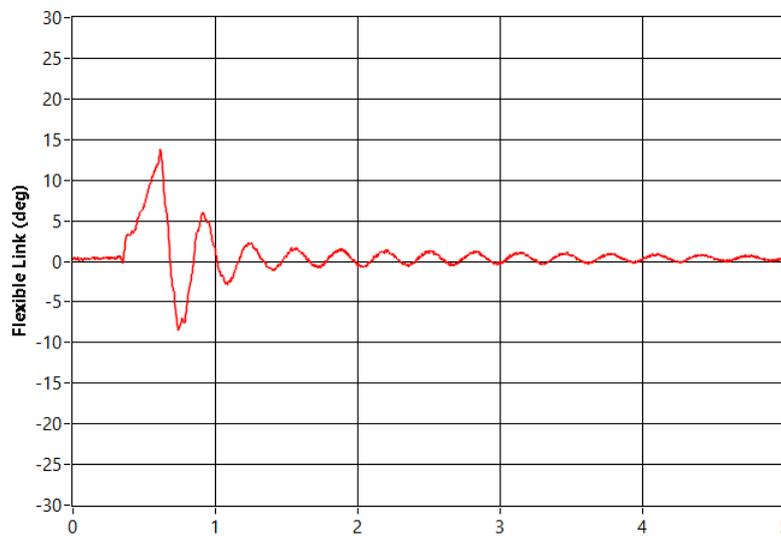


FIGURA 2.2.5: ÁNGULO DEL BRAZO FLEXIBLE PARA LA RESPUESTA LIBRE FRENTE AL TIEMPO (EN S).

De esta forma, a partir del periodo de la oscilación resultante se puede calcular la frecuencia de oscilación transitoria del brazo. Para $n = 10$ oscilaciones:

$$T_{osc} = \frac{t_{n+1} - t_1}{n} \qquad \omega_d = \frac{2\pi}{T_{osc}} = \frac{2\pi}{0.3192} = 19.684 \text{ rad/s}$$

$$T_{osc} = \frac{3.94 - 0.748}{10} = 0.3192 \text{ s} \qquad f_d = \frac{1}{T_{osc}} = 3.133 \text{ Hz}$$

En esta ocasión, ya que el amortiguamiento es prácticamente nulo, la frecuencia de oscilación transitoria del brazo puede igualarse a su frecuencia natural:

$$f_n = \frac{f_d}{\sqrt{1 - \delta^2}} \cong f_d = 3.133 \text{ Hz}$$

Con esta frecuencia angular se puede calcular el coeficiente de elasticidad del brazo flexible (suponiendo masa y longitud dadas por el fabricante):

$$J_l = 1/3 m_l L_l^2 = 0.0038 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$K_s = J_l \omega_n^2 = 1.4723 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{rad}$$

Modelado en el Espacio de Estados

Tal y como se muestra en la siguiente imagen, se considera que el ángulo del servo (θ) aumenta positivamente en sentido antihorario, al igual que el ángulo de deformación del brazo flexible (α).

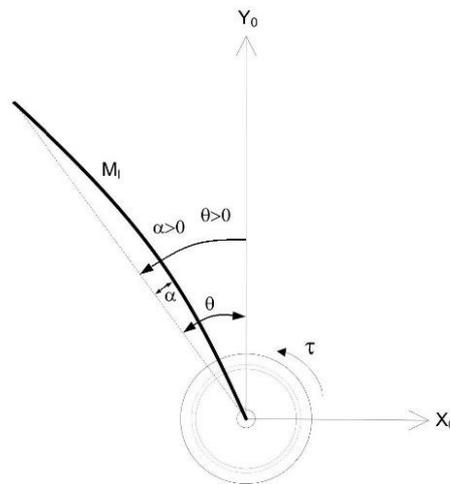


FIGURA 2.2.6: ÁNGULOS DEL BRAZO FLEXIBLE.

El sistema completo, junto con el brazo flexible, se puede representar por medio del siguiente diagrama:

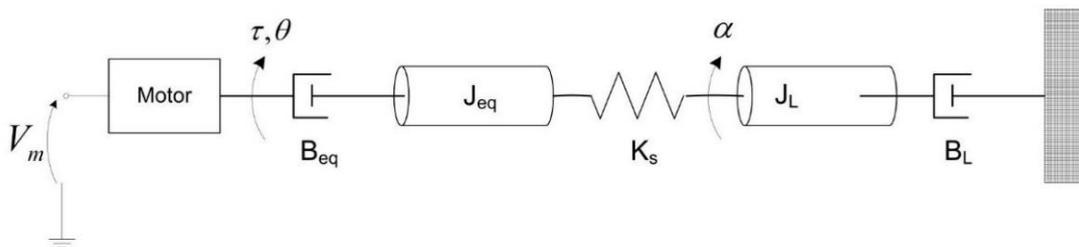


FIGURA 2.2.7: DIAGRAMA DEL SISTEMA COMPLETO.

Según este esquema, la variable de control es el voltaje de entrada (V_m), la cual genera un torque (τ). Otros parámetros que afectan al movimiento son: el coeficiente de rozamiento viscoso del servo (B_{eq}), el coeficiente de amortiguamiento viscoso del brazo (B_l), el momento de inercia sobre el centro de masas del brazo (J_l) y el coeficiente de elasticidad del brazo (K_s).

En primer lugar, se determinan las ecuaciones que definen el movimiento del sistema. Para ello, se utiliza el método de Lagrange, partiendo de la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$$

Donde q_i son las coordenadas generalizadas:

$$\mathbf{q}(t)^\top = [\theta(t) \quad \alpha(t)]$$

$$\dot{\mathbf{q}}(t)^\top = \left[\frac{\partial \theta(t)}{\partial t} \quad \frac{\partial \alpha(t)}{\partial t} \right]$$

Así, las ecuaciones de Euler-Lagrange quedan:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q_1 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = Q_2$$

Las fuerzas generalizadas Q_i se emplean para describir las fuerzas no conservativas. En este caso, la fuerza generalizada que actúa sobre el rotor (Q_1) y la que actúa sobre el brazo flexible (Q_2) son:

$$Q_1 = \tau - B_{eq} \dot{\theta} \qquad Q_2 = -B_l \dot{\alpha}$$

Además, el torque se representa de la siguiente forma:

$$\tau = \frac{\eta_g K_g \eta_m k_t (V_m - K_g k_m \dot{\theta})}{R_m} = M V_m - N \dot{\theta} \tag{11}$$

$$M = \frac{\eta_g K_g \eta_m k_t}{R_m} \qquad N = \frac{\eta_g K_g^2 \eta_m k_t k_m}{R_m}$$

Por otro lado, la Lagrangiana se define:

$$L = T - V \tag{12}$$

Siendo T la energía cinética y V la energía potencial. Estas energías se expresan de las siguientes formas, empleando la ecuación (12):

$$V = \frac{1}{2}K_s\alpha^2 \quad T = \frac{1}{2}J_{eq}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_l(\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2$$

$$L = \frac{1}{2}J_{eq}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_l(\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2 - \frac{1}{2}K_s\alpha^2$$

A continuación, se extraen los términos de las ecuaciones de Euler-Lagrange para ambas fuerzas generalizadas.

Para Q_1 :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = J_{eq} \dot{\theta} + J_l(\dot{\theta} + \dot{\alpha})$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{\theta}} = J_{eq} \ddot{\theta} + J_l(\ddot{\theta} + \ddot{\alpha})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$(J_{eq} + J_l) \ddot{\theta} + J_l \ddot{\alpha} + B_{eq} \dot{\theta} = \tau \quad (13)$$

Para Q_2 :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = J_l(\dot{\theta} + \dot{\alpha})$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{\alpha}} = J_l(\ddot{\theta} + \ddot{\alpha})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = K_s \alpha$$

$$J_l \ddot{\theta} + J_l \ddot{\alpha} + B_l \dot{\theta} + K_s \alpha = 0 \quad (14)$$

Suponiendo que el coeficiente de amortiguamiento viscoso del brazo (B_l) es nulo y combinando las ecuaciones (11), (13) y (14):

$$\ddot{\theta} = -\frac{B_{eq}}{J_{eq}} \dot{\theta} + \frac{K_s}{J_{eq}} \alpha + \frac{1}{J_{eq}} \tau = \left(-\frac{B_{eq} + N}{J_{eq}} \right) \dot{\theta} + \frac{K_s}{J_{eq}} \alpha + \frac{M}{J_{eq}} V_m \quad (15)$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{B_{eq}}{J_{eq}} \dot{\theta} - K_s \left(\frac{J_l + J_{eq}}{J_l J_{eq}} \right) \alpha - \frac{1}{J_{eq}} \tau = \left(\frac{B_{eq} + N}{J_{eq}} \right) \dot{\theta} - K_s \left(\frac{J_l + J_{eq}}{J_l J_{eq}} \right) \alpha - \frac{M}{J_{eq}} V_m \quad (16)$$

Con el objetivo de obtener el modelo del sistema en el espacio de estados, se definen las ecuaciones de estado (siendo u voltaje de entrada al motor V_m):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad \mathbf{x}^\top = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4] = [\theta \ \alpha \ \dot{\theta} \ \dot{\alpha}]$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u \quad \mathbf{y}^\top = [x_1 \ x_2] = [\theta \ \alpha]$$

Así, construyendo las ecuaciones de estado a partir de las expresiones (15) y (16):

$$\dot{x}_1 = x_3 \quad \dot{x}_2 = x_4$$

$$\dot{x}_3 = \frac{K_s}{J_{eq}} x_2 + \left(-\frac{B_{eq} + N}{J_{eq}} \right) x_3 + \frac{M}{J_{eq}} u$$

$$\dot{x}_4 = -K_s \left(\frac{J_l + J_{eq}}{J_l J_{eq}} \right) x_2 + \left(\frac{B_{eq} + N}{J_{eq}} \right) x_3 - \frac{M}{J_{eq}} u$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{K_s}{J_{eq}} & -\frac{B_{eq} + N}{J_{eq}} & 0 \\ 0 & -\frac{K_s(J_l + J_{eq})}{J_l J_{eq}} & \frac{B_{eq} + N}{J_{eq}} & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{M}{J_{eq}} \\ -\frac{M}{J_{eq}} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Introduciendo los valores dados por el fabricante ($K_s = 1.4723 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{rad}$; $J_{eq} = 0.00213 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; $J_l = 0.0038 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; $B_{eq} = 0.015 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}/\text{rad}$; $N = 0.06885 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}/\text{rad}$; $M = 0.1282 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{V}$) los resultados son los siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 691.221 & -39.3663 & 0 \\ 0 & -1078.67 & 39.3663 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 60.2049 \\ -60.2049 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Validación Experimental

Para validar el modelo obtenido, se somete al sistema a una entrada de 2 V mantenida durante 0.5 s (en lazo abierto), dando lugar a los siguientes resultados (comparándolos con las simulaciones del modelo obtenido ante la misma entrada).

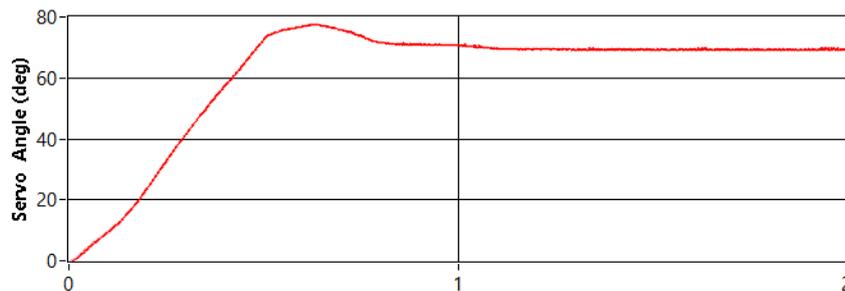


FIGURA 2.2.8: ÁNGULO DEL ROTOR (EN GRADOS) FRENTE AL TIEMPO (EN S).

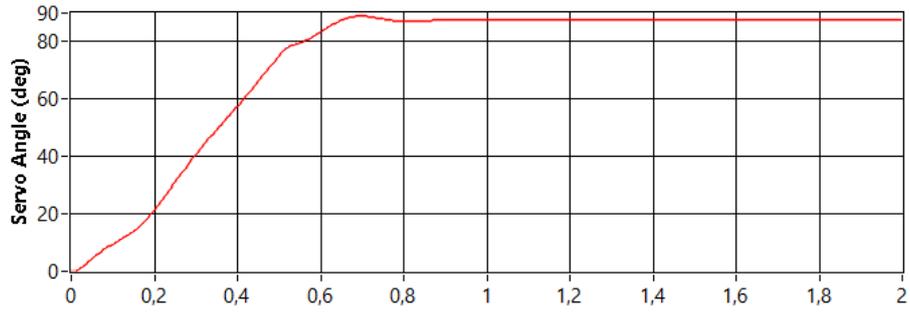


FIGURA 2.2.9: ÁNGULO DEL ROTOR SIMULADO (EN GRADOS) FRENTE AL TIEMPO (EN S).

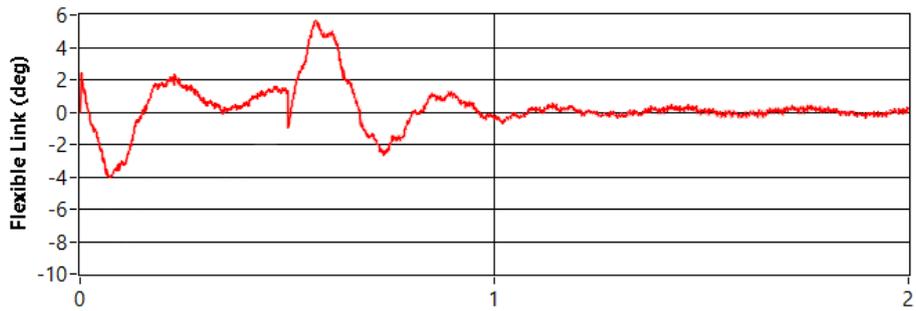


FIGURA 2.2.10: ÁNGULO DEL ÁNGULO FLEXIBLE (EN GRADOS) FRENTE AL TIEMPO (EN S).

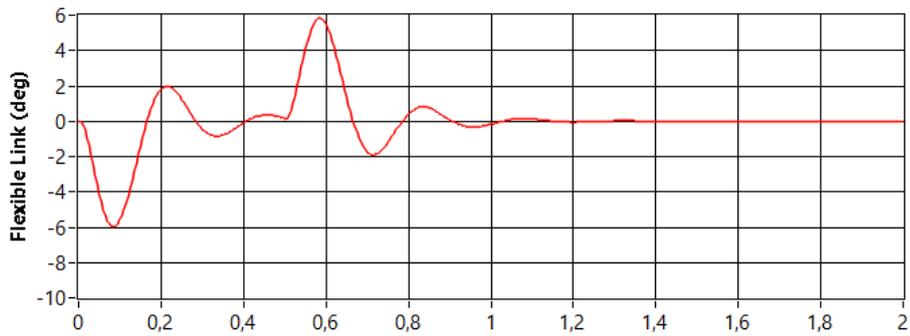


FIGURA 2.2.11: ÁNGULO DEL BRAZO FLEXIBLE SIMULADO (EN GRADOS) FRENTE AL TIEMPO (EN S).

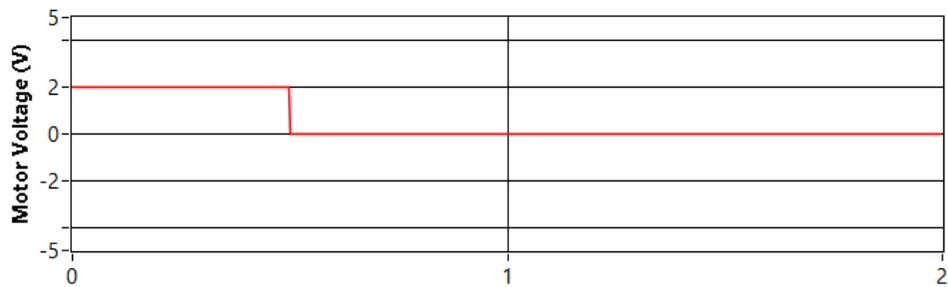


FIGURA 2.2.12: VOLTAJE DE ENTRADA AL MOTOR (EN V) FRENTE AL TIEMPO (EN S).

En estas gráficas se puede observar que el sistema real oscila de forma más lenta que el simulado. Esto puede comprobarse obteniendo la frecuencia de oscilación transitoria del sistema simulado, a partir de los polos complejos conjugados (los cuales forman parte de los autovalores de la matriz A):

$$f_{d \text{ sim } 1} = \frac{\omega_{d \text{ sim } 1}}{2\pi} = 3.96 \text{ Hz}$$

A la vista de estos resultados, es posible que estén entrando en juego algunos fenómenos físicos (tales como la existencia de un camino directo entre la entrada y la salida) que no hayan sido modelados.

En comparación con la frecuencia de oscilación transitoria obtenida experimentalmente en la respuesta libre:

$$f_d = 3.133 \text{ Hz} \qquad f_{d \text{ sim } 1} \gg f_d$$

Esta discrepancia puede deberse a varios factores. En el caso de la respuesta libre, se acompaña el movimiento del brazo durante un pequeño intervalo de tiempo, aplicando la fuerza sobre el extremo del brazo. Mientras tanto, si es el engranaje el que provoca la deformación (como en este experimento), la fuerza se sitúa en la base del sistema, junto al sensor.

Para ajustar mejor el modelo, se elige $K_s = 1.25 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{rad}$, haciendo el sistema más lento. También se corrige el valor del coeficiente de rozamiento viscoso del servomotor, escogiendo $B_{eq} = 0.024 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}/\text{rad}$. Estos valores dan lugar a las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 586.854 & -43.5916 & 0 \\ 0 & -915.802 & 43.5916 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 60.2049 \\ -60.2049 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (18)$$

Se puede ver que las simulaciones ante la misma entrada (en lazo abierto) de 2 V y durante 0.5 s son bastante similares a las obtenidas experimentalmente:

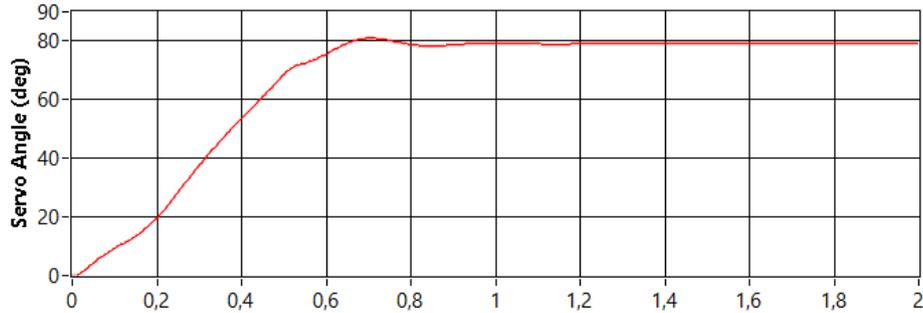


FIGURA 2.2.13: ÁNGULO DEL ROTOR SIMULADO AJUSTADO (EN GRADOS) FRENTE AL TIEMPO (EN S).

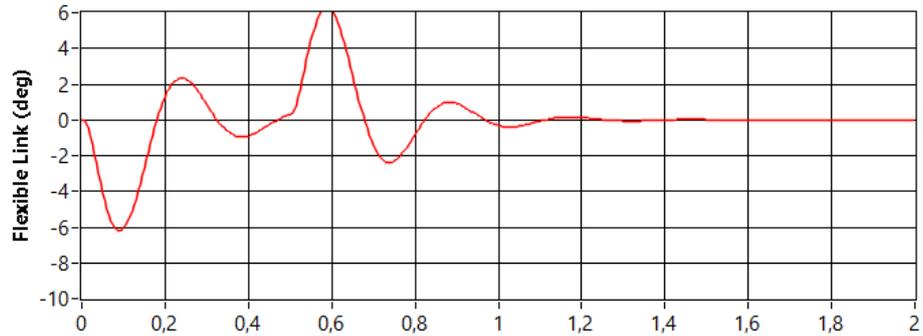


FIGURA 2.2.14: ÁNGULO DEL BRAZO FLEXIBLE SIMULADO AJUSTADO (EN GRADOS) FRENTE AL TIEMPO (EN S).

En este caso, la frecuencia de oscilación transitoria del nuevo sistema simulado es la siguiente:

$$f_{d \text{ sim } 2} = \frac{\omega_{n \text{ sim } 2}}{2\pi} = 3.34 \text{ Hz}$$

En comparación con la frecuencia de oscilación transitoria obtenida experimentalmente, se asemeja mucho más que la anterior:

$$f_d = 3.133 \text{ Hz} \qquad f_{d \text{ sim } 2} > f_d$$

2.3. OBTENCIÓN DE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

Con el objetivo de diseñar controladores para manejar el sistema, será conveniente conseguir una función de transferencia que modele el sistema completo. Para ello, se siguen distintas estrategias.

SIN DEFORMACIÓN DEL BRAZO FLEXIBLE

En una primera aproximación, se tiene en cuenta meramente la dinámica del motor, añadiendo simplemente la inercia que introduce el brazo flexible (J_{flex}) al momento de inercia total:

$$\begin{aligned}
 J_{servo} &= 0.00213 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 & J'_{eq} &= J_{servo} + J_{flex} \\
 J_{flex} &= \frac{m_l L_l^2}{3} = 0.0038 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 & J'_{eq} &= 0.00593 \text{ kg} \cdot \text{m}^2
 \end{aligned}$$

Para obtener la relación entre el voltaje y el ángulo de giro se parte de las expresiones obtenidas previamente para el movimiento del servomotor (ecuación (10)). Los datos proporcionados por el fabricante para los parámetros $B_{eq,v}$ (distinto a B_{eq}) y A_m son los siguientes:

$$\begin{aligned}
 B_{eq,v} &= \frac{\eta_g K_g^2 \eta_m k_l k_m + B_{eq} R_m}{R_m} = 0.0844 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}/\text{rad} \\
 A_m &= \frac{\eta_g K_g \eta_m k_t}{R_m} = 0.129 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{rad}
 \end{aligned}$$

Empleando estos valores, se obtiene la siguiente función de transferencia:

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{A_m}{B_{eq,v}} = 1.53 & \tau &= \frac{J'_{eq}}{B_{eq,v}} = 0.07 \\
 G(s) &= \frac{\Theta(s)}{V_m(s)} = \frac{1.53}{0.07s^2 + s} \quad (19)
 \end{aligned}$$

Con el objetivo de unos parámetros más fiables para el modelo, se realiza un ajuste manual, de la misma forma que se ha hecho previamente para el motor, probando varias entradas al sistema y ajustando los parámetros K y τ . Los resultados obtenidos son los siguientes:

$$\begin{aligned}
 K &= 1.42 & \tau &= 0.08 \\
 G_{ajustado}(s) &= \frac{1.42}{0.08s^2 + s} \quad (20)
 \end{aligned}$$

Comparando los diagramas de Bode de ambos modelos, se puede comprobar que son bastante similares:

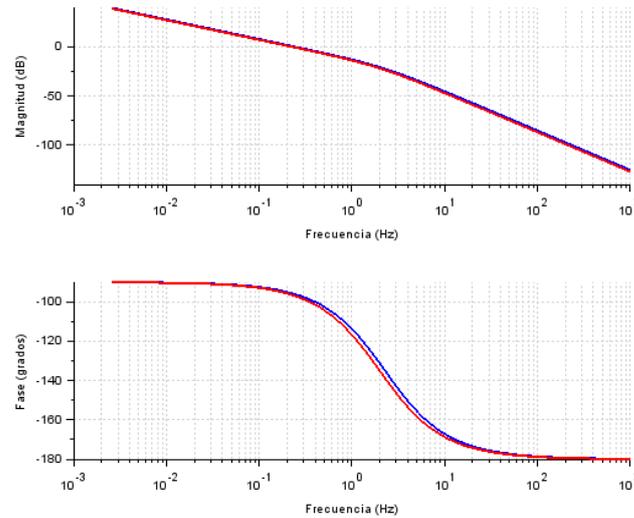


FIGURA 2.3.1: DIAGRAMAS DE BODE DE LOS MODELOS *TEÓRICO* Y *AJUSTADO* (SIN TENER EN CUENTA EL ÁNGULO DEL BRAZO FLEXIBLE).

CON DEFORMACIÓN DEL BRAZO FLEXIBLE

En este caso se tendrá en cuenta el efecto de la dinámica del brazo flexible sobre la dinámica del rotor, lo cual da lugar a un sistema de 4^º orden, modelando el sistema de forma más precisa. Para ello, se puede partir del modelo en espacio de estados obtenido previamente para el diseño en variables de estado (conjuntos de matrices (17) y (18)) y obtener las funciones de transferencia correspondientes al ángulo del servomotor y al ángulo del brazo flexible.

En este sentido, se obtiene tanto el modelo de la planta a partir del análisis matemático como el ajustado mediante experimentación:

$$G'(s) = \frac{\Theta(s)}{V_m(s)} = \frac{60.2049 s^2 + 23326.328}{s^4 + 39.3663 s^3 + 1078.67 s^2 + 15252.434 s} \quad (21)$$

$$G'_{ajustado}(s) = \frac{\Theta(s)}{V_m(s)} = \frac{60.2049 s^2 + 19804.281}{s^4 + 43.5916 s^3 + 915.802 s^2 + 14339.37 s} \quad (22)$$

Comparando los diagramas de Bode de ambos modelos:

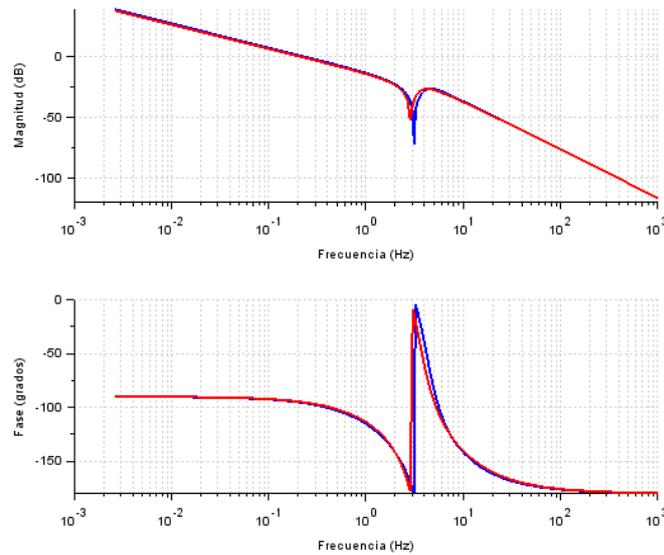


FIGURA 2.3.2.: : DIAGRAMAS DE BODE DE LOS MODELOS *TEÓRICO* Y *AJUSTADO* (TENIENDO EN CUENTA EL *ÁNGULO DEL BRAZO FLEXIBLE*).

En estas figuras se observa una antirresonancia (en 2.884 Hz) y una resonancia (en unos 4 Hz), consecuencia directa de la presencia del brazo flexible. Si se grafican también las funciones de transferencia obtenidas sin tener en cuenta el ángulo del brazo flexible, se comprueba que son similares a bajas frecuencias:

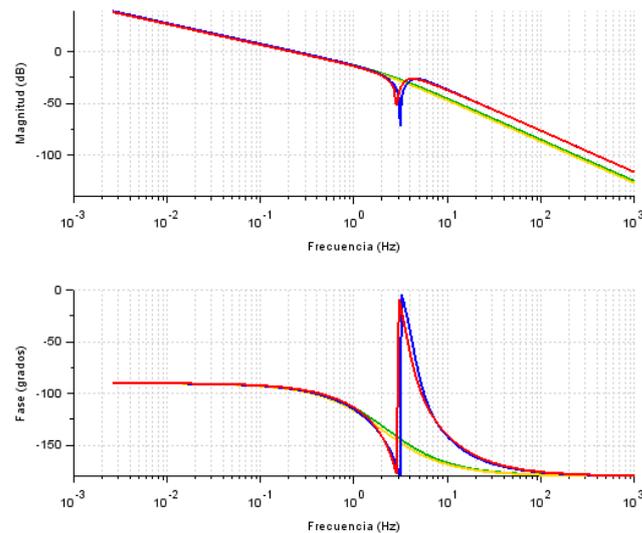


FIGURA 2.3.3.: DIAGRAMAS DE BODE DE LOS MODELOS *TEÓRICO* Y *AJUSTADO*, TENIENDO EN CUENTA EL *ÁNGULO DEL BRAZO FLEXIBLE*; Y *TEÓRICO* Y *AJUSTADO*, SIN TENER EN CUENTA EL *ÁNGULO DEL BRAZO FLEXIBLE*.

También resulta interesante obtener la función de transferencia que relaciona el ángulo del brazo flexible y el voltaje aplicado al motor:

$$F(s) = \frac{A(s)}{V_m(s)} = \frac{-60.2049 s}{s^3 + 39.3663 s^2 + 1078.67 s + 15252.434} \quad (23)$$

$$F_{ajustado}(s) = \frac{A(s)}{V_m(s)} = \frac{-60.2049 s}{s^3 + 43.5916 s^2 + 915.802 s + 14339.37} \quad (24)$$

Comparando los diagramas de Bode de ambos modelos:

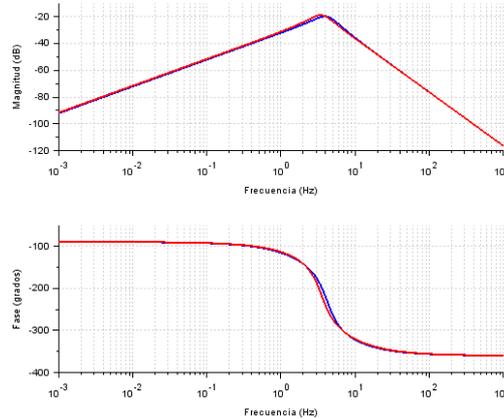


FIGURA 2.3.4: DIAGRAMAS DE BODE DE LOS MODELOS *TEÓRICO* Y *AJUSTADO* PARA EL ÁNGULO DEL BRAZO FLEXIBLE.

De esta forma, la frecuencia de resonancia aproximada del brazo flexible es de 3.95 Hz para el modelo teórico y de 3.4 Hz para el ajustado, valores similares a los que se obtenían con la oscilación libre del brazo flexible (3.133 Hz).

En este sentido, hay que tener en cuenta que el modelo experimental ajustado se ha obtenido en base a una respuesta del sistema en lazo abierto. Este hecho rebaja la fiabilidad del modelo, ya que, en lazo abierto, el sistema es muy sensible a perturbaciones, como ya se ha podido comprobar con el servomotor.

3. DISEÑO DE CONTROLADORES Y ANÁLISIS COMPARATIVO

Empleando las funciones de transferencia obtenidas previamente, se pretende diseñar un control capaz de manejar el movimiento del sistema completo minimizando las vibraciones del brazo flexible, al mismo tiempo que maximice la velocidad de giro y la precisión en el desplazamiento. Los diseños se harán en tiempo continuo, ya que se dispone de un tiempo de muestreo muy

pequeño para este sistema, pudiendo obtener cerca de 100 muestras previas al tiempo de pico de cualquier referencia razonable (el giro del servo se limitará a los ángulos de 30° y -30° , por lo que el máximo desplazamiento será de 60°).

3.1. CONTROLADORES CLÁSICOS

En ellos no se tiene en cuenta la deformación del brazo flexible a la hora de originar la señal de control, tal y como se muestra en el siguiente diagrama:

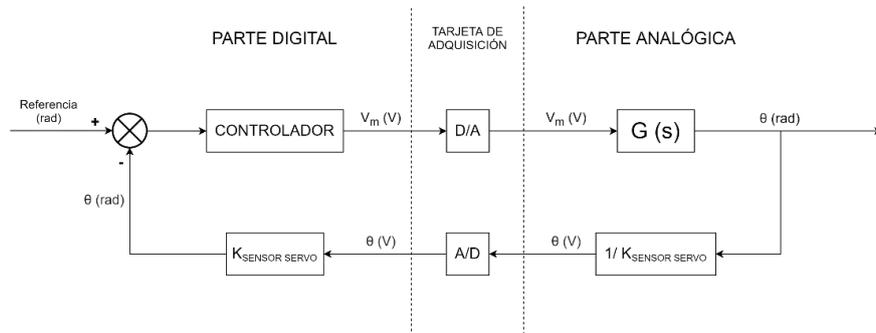


FIGURA 3.1.1: ESQUEMA DEL SISTEMA COMPLETO, CON UN CONTROLADOR QUE NO TIENE EN CUENTA LA DEFORMACIÓN DEL BRAZO FLEXIBLE.

Se diseñarán controladores P, PI, PD, PID y redes de atraso, a los cuales se añadirá un Filtro Notch para reducir las vibraciones del brazo [6] [7] [8] [9].

DISEÑO DEL FILTRO NOTCH

Con el objetivo de reducir la deformación del brazo sensible durante el movimiento, se decide introducir un Filtro Notch centrado en la frecuencia de resonancia del brazo, con la siguiente función de transferencia [7] [10]:

$$G_{NOTCH}(s) = \frac{s^2 + 2 \delta \omega_n s + \omega_n^2}{\omega_n^2} \cdot \frac{a \omega_n}{s + a \omega_n} \cdot \frac{\frac{\omega_n}{a}}{s + \frac{\omega_n}{a}} \quad (25)$$

Para centrarlo en la frecuencia de resonancia, se escoge $f_n = 3.4 \text{ Hz}$ ($\omega_n = 2\pi f_n = 21.36 \text{ rad/s}$). Por otro lado, la anchura y la profundidad del Notch se ajustan mediante los parámetros a y δ , respectivamente. Tras diferentes pruebas, se opta por elegir $a = 1$ y $\delta = 0.5$, dando lugar al siguiente filtro:

$$G_{NOTCH}(s) = \frac{456.37051 s^2 + 9749.3656 s + 208274.04}{456.37051 s^2 + 19498.731 s + 208274.04} \quad (26)$$

Su diagrama de Bode es el siguiente:

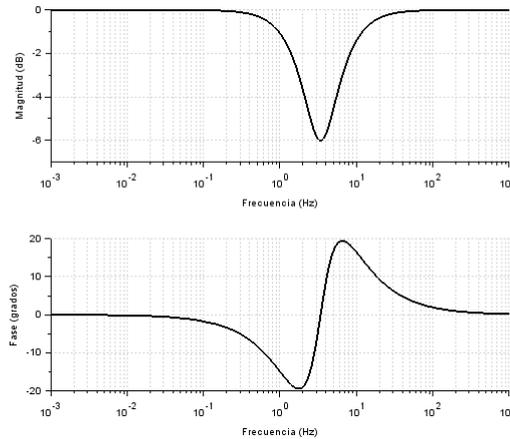


FIGURA 3.1.2: DIAGRAMA DE BODE DEL FILTRO NOTCH.

A continuación, se presentan los distintos controladores diseñados para el sistema. En todos ellos se parte del modelo ajustado de segundo orden $G_{ajustado}(s)$ (ecuación (20)), para facilitar los cálculos. Una vez planteado el controlador, se realizarán dos tipos de pruebas.

En la primera de ellas, se simulará la respuesta frente a entrada escalón, partiendo del modelo más completo posible $G'_{ajustado}(s)$ (ecuación (22)) y teniendo en cuenta la zona muerta y la saturación presentes en el sistema.

En la segunda prueba se repetirán los pasos enumerados anteriormente, pero añadiendo el Filtro Notch que se ha diseñado.

En ambos tipos de pruebas se empleará una referencia de 1 rad (57.3°) para comparar los resultados, aunque la presencia de no linealidades (zona muerta y saturación) harán que la elección de la referencia influya en ellos. Por ello, se tendrán en cuenta también simulaciones con otras referencias, como 0.5 rad (28.6°) o 0.7 rad (40.1°), a la hora de evaluar los controladores.

Las especificaciones a conseguir son las siguientes (elegidas basándose en los resultados arrojados por el control proporcional, explicado a continuación):

- ✓ Error en permanente (fijando el valor final tras 2 s) menor al 2 %.
- ✓ Rebose menor al 3 %.
- ✓ Tiempo de pico menor a 0.6 s.
- ✓ Tiempo de establecimiento (2 % alrededor del valor final, establecido tras 2 s) menor a 1 s.
- ✓ Máxima deformación del brazo flexible menor a 6°.
- ✓ Oscilaciones del brazo flexible menores a 1° tras 0.5 s.

CONTROL PROPORCIONAL (P)

En primer lugar, se puede introducir simplemente un control proporcional que permita aumentar la rapidez del sistema y reducir el error en permanente, sin disminuir demasiado el margen de fase (lo cual repercutiría en un rebose excesivo). Para cumplir la especificación de rebose (sistema de segundo orden):

$$\delta > \frac{\ln^2 \frac{\%R}{100}}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 \frac{\%R}{100}}} = 0.7448 \quad (27)$$

$$MF(^{\circ}) > \frac{360}{2\pi} \cdot \tan^{-1} \left(\frac{2\delta}{\sqrt{\sqrt{1 + 4\delta^4} - 2\delta^2}} \right) = 67.4^{\circ} \quad (28)$$

De esta forma, un salto de 11.66 dB en el diagrama de Bode del sistema daría lugar a un margen de fase de 68°, lo cual se consigue con $K = 3.8$. Sin embargo, las simulaciones muestran que este control es demasiado brusco en cuanto a la dinámica del brazo flexible, la cual no se tiene en cuenta en la acción de control. Por ello, se elige una constante proporcional algo más pequeña.

$$C_P(s) = K = 3 \quad (29)$$

A continuación, se presentan las simulaciones obtenidas:

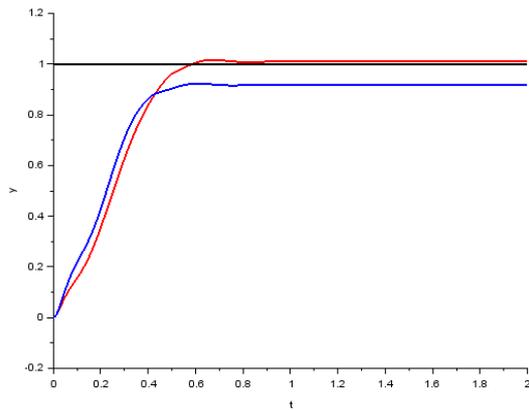


FIGURA 3.1.3: POSICIÓN DEL BRAZO A LA SALIDA DEL SISTEMA SIMULADO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA EL CONTROLADOR P.

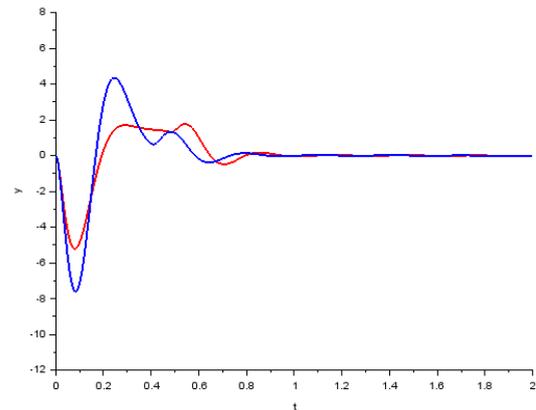


FIGURA 3.1.4: ÁNGULO DE DEFORMACIÓN DEL BRAZO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA EL CONTROLADOR P.

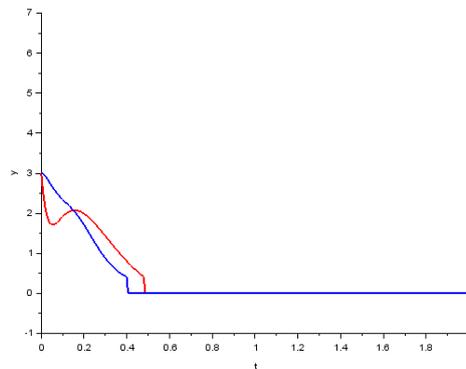


FIGURA 3.1.5: SEÑAL DE CONTROL DEL SISTEMA SIMULADO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA EL CONTROLADOR P.

Aunque se trata de un controlador muy simple, consigue obtener (con el Filtro Notch) unos resultados en lazo cerrado bastante satisfactorios. Sin embargo, el cambio en la referencia afecta demasiado al error en permanente (tras 2 s), pudiendo obtener un error del 5.6 % con una referencia de 0.5 rad (28.6°), lo cual es consecuencia de la zona muerta. En lo que respecta a las demás especificaciones, sobrepasa un poco los límites para el tiempo de pico (0.672 s) y el tiempo que tardan las oscilaciones del brazo flexible en ser menores a 1° (0.6 s), lo cual se intentará mejorar a continuación.

CONTROL PROPORCIONAL INTEGRAL (PI)

Por otro lado, la incorporación de un integrador puede ayudar a reducir el error en permanente, compensando la zona muerta. Sin embargo, las simulaciones muestran que el cero introducido no debe estar demasiado alejado, además de que se debe reducir ligeramente la ganancia proporcional; todo ello para limitar el rebose. Así, junto con el integrador se añade un cero cercano al origen (respecto a los polos complejos resultantes en lazo cerrado del control proporcional anterior), que permita suavizar la señal de control.

$$C_{PI}(s) = K \frac{s + a}{s} = 2.8 \cdot \frac{s + 0.05}{s} \quad (30)$$

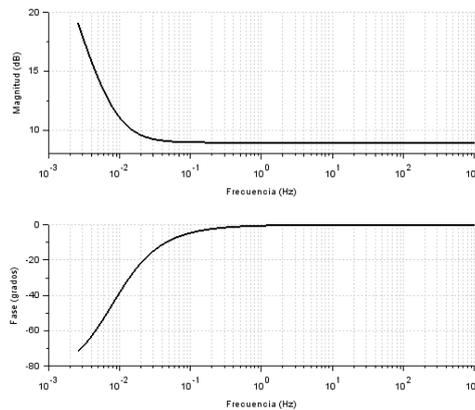


FIGURA 3.1.6: DIAGRAMA DE BODE DEL CONTROLADOR PI.

A continuación, se presentan las simulaciones obtenidas:

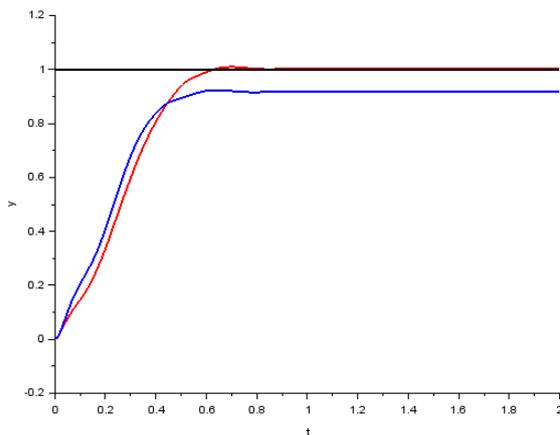


FIGURA 3.1.7: POSICIÓN DEL BRAZO A LA SALIDA DEL SISTEMA SIMULADO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA EL CONTROLADOR PI.

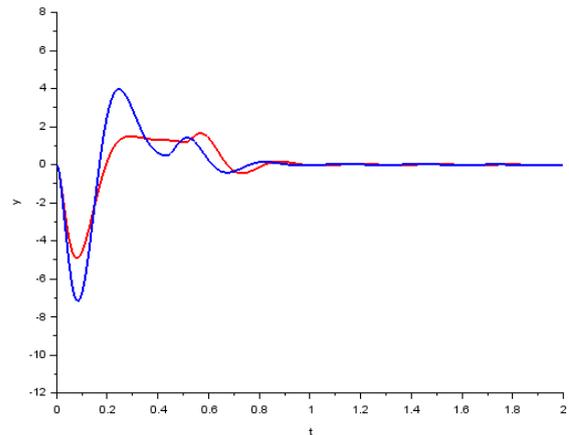


FIGURA 3.1.8: ÁNGULO DE DEFORMACIÓN DEL BRAZO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA EL CONTROLADOR PI.

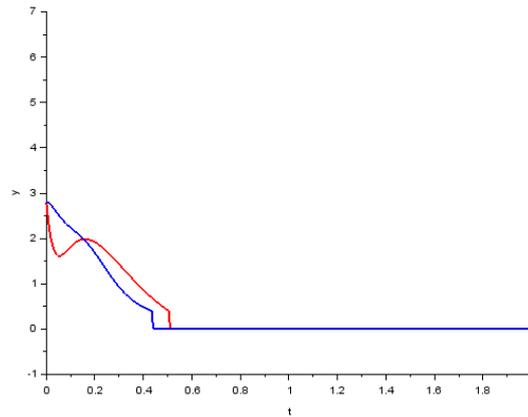


FIGURA 3.1.9: SEÑAL DE CONTROL DEL SISTEMA SIMULADO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA EL CONTROLADOR PI.

La introducción de la acción integral ha permitido (para el caso que incluye el Filtro Notch) reducir el error tras 2 s (0.3 %) para la referencia de 1 rad (57.3°), mientras que, para valores más pequeños se mantienen prácticamente los errores conseguidos mediante el control proporcional (presentando un error de 2.57 % para 0.7 rad). También hay que recalcar que la parte integral aumenta la ganancia a frecuencias bajas, lo cual se ha compensado ligeramente con una reducción de la ganancia proporcional. Sin el Filtro Notch, la acción integral no mejora demasiado el comportamiento del sistema (mantiene el error en permanente).

Como presenta los mismos problemas que el control P en cuanto a rapidez, se decide sustituir la acción integral por una derivativa.

CONTROL PROPORCIONAL DERIVATIVO (PD)

El control PD pretende acelerar el sistema, manteniendo la dinámica del sistema en estado estacionario. Sin embargo, es posible que empeore su estabilidad y, con ella, la deformación del brazo flexible.

Para diseñarlo se parte del diagrama de polos y ceros del sistema de segundo orden $G_{ajustado}(s) = G_P(s)$ (ecuación (20)), facilitando así la colocación de los polos complejos conjugados. En este sentido, el rebose esperado (muy pequeño), además de la frecuencia natural que se elija (a partir del tiempo de pico), definen el lugar en el que se sitúan estos polos, y la dinámica transitoria

deseada. Así, se ajustan la ganancia proporcional y el parámetro α , los cuales definen el PD, a partir de estos resultados. Adicionalmente, se añadirá un polo lejano (en $s = -200$), para filtrar el ruido de alta frecuencia que aparece como consecuencia de la introducción del derivador y para hacer causal en controlador. Las especificaciones propuestas son las siguientes:

$$R = 10^{-7} \% \ll 3 \%$$

$$\delta = 0.9887$$

$$T_p \leq \frac{4}{\delta \omega_n}$$

$$\omega_n \geq 4.046 \text{ rad/s (con } T_p = 1 \text{ s)}$$

$$\omega_n = 8.5 \text{ rad/s}$$

A partir de estos datos se pueden construir los polos complejos conjugados deseados:

$$s_{1,2} = -\delta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \delta^2} = -8.404 \pm j 1.274$$

Por otro lado, el parámetro α se obtiene mediante la condición del Argumento:

$$\text{Arg}(FTLA(s_1)) = \text{Arg}(PD(s_1)) + \text{Arg}(KG_p(s_1) H(s_1)) = (2q + 1)\pi$$

$$\varphi = \text{Arg}(PD(s_1)) = \pi - \text{Arg}(KG_p(s_1) H(s_1))$$

$$\alpha = \frac{\text{Im}(s_1) - \tan \varphi \text{Re}(s_1)}{\tan \varphi} = 16.413044$$

Finalmente, el parámetro K se obtiene mediante la condición del Módulo:

$$|PD(s_1) G_p(s_1) H(s_1)| = 1$$

$$K = \frac{1}{|PD(s_1) G_p(s_1) H(s_1)|} = 48.53148$$

Así, el diseño del control PD queda de la siguiente manera:

$$C_{PD}(s) = K \frac{s + \alpha}{s + 200} = 48.53148 \cdot \frac{s + 16.413044}{s + 200} \quad (31)$$

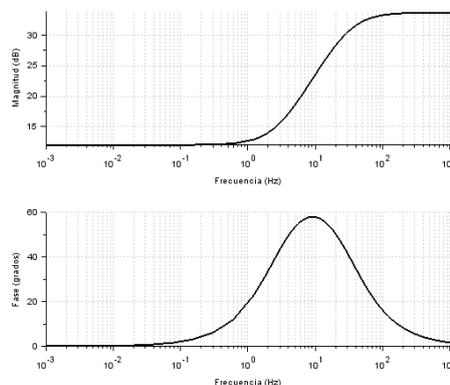


FIGURA 3.1.10: DIAGRAMA DE BODE DEL CONTROLADOR PD.

A continuación, se presentan las simulaciones obtenidas:

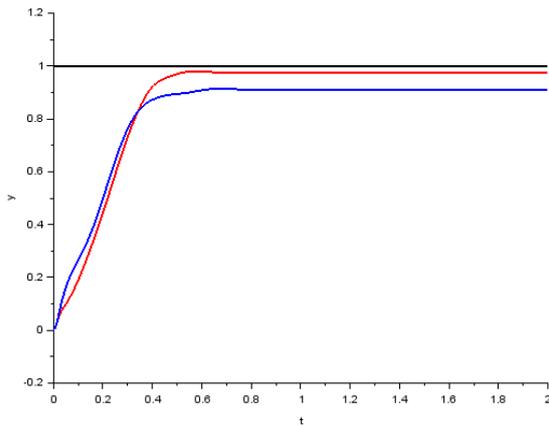


FIGURA 3.1.11: POSICIÓN DEL BRAZO A LA SALIDA DEL SISTEMA SIMULADO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA EL CONTROLADOR PD.

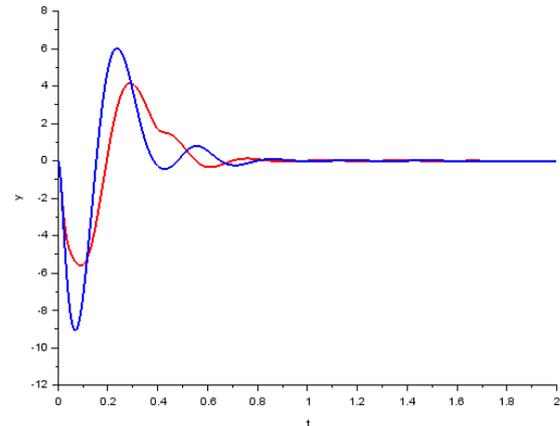


FIGURA 3.1.12: ÁNGULO DE DEFORMACIÓN DEL BRAZO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA EL CONTROLADOR PD.

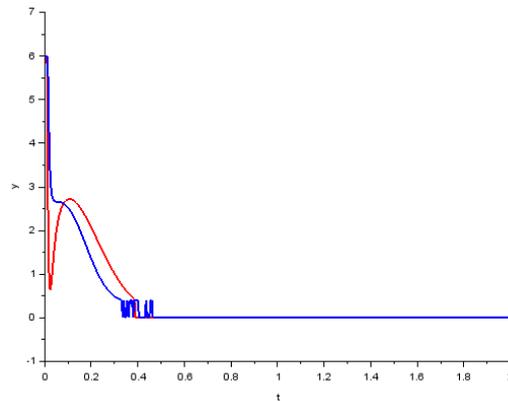


FIGURA 3.1.13: SEÑAL DE CONTROL DEL SISTEMA SIMULADO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA EL CONTROLADOR PD.

En esta ocasión, se consigue mejorar de forma sustancial la rapidez del sistema, con un tiempo de pico (en el caso que incluye el Filtro Notch) de unos 0.582 s (frente a los 0.672 s del control P). Sin embargo, el error en permanente (tras 2 s) es ligeramente superior a lo permitido (2.5 %) así que la adición de una acción integral debería mejorar su comportamiento en estado estacionario.

CONTROL PROPORCIONAL, INTEGRAL Y DERIVATIVO (PID)

Partiendo del PD diseñado anteriormente, se pretende añadir un integrador para reducir el error en permanente, consecuencia de la zona muerta del motor.

Con el objetivo de no modificar la dinámica transitoria del sistema en lazo cerrado, se introduce un integrador, además de un cero 50 veces más cerca del eje imaginario que los polos dominantes en lazo cerrado:

$$C_I(s) = \frac{s + \alpha_1}{s} = \frac{s + 0.1680796}{s} \quad (32)$$

$$C_{PID}(s) = K \frac{s + \alpha}{s + 200} \frac{s + \alpha_1}{s} = 49.498998 \cdot \frac{2.7586976 + 16.581123 s + s^2}{200 s + s^2} \quad (33)$$

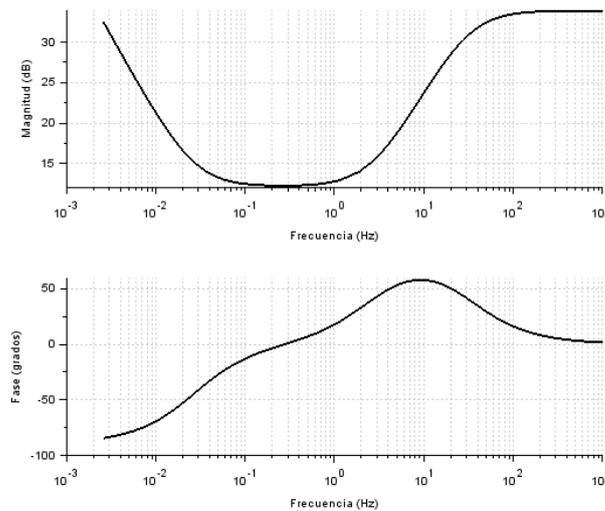


FIGURA 3.1.14: DIAGRAMA DE BODE DEL CONTROLADOR PID.

A continuación, se presentan las simulaciones obtenidas:

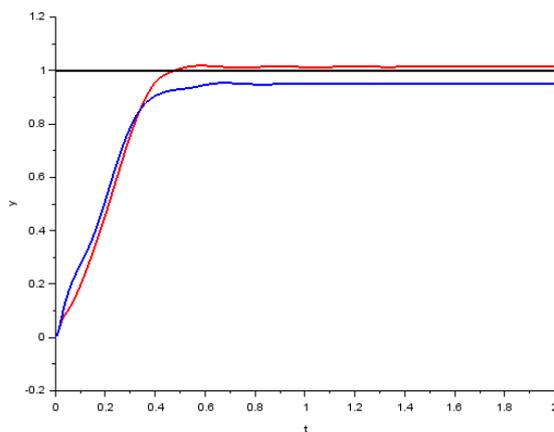


FIGURA 3.1.15: POSICIÓN DEL BRAZO A LA SALIDA DEL SISTEMA SIMULADO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA EL CONTROLADOR PID.

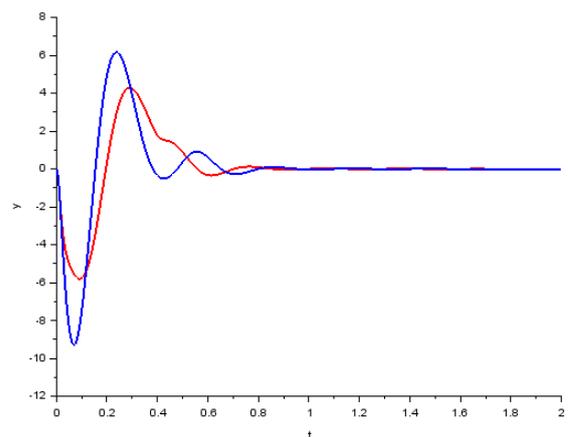


FIGURA 3.1.16: ÁNGULO DE DEFORMACIÓN DEL BRAZO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA EL CONTROLADOR PID.

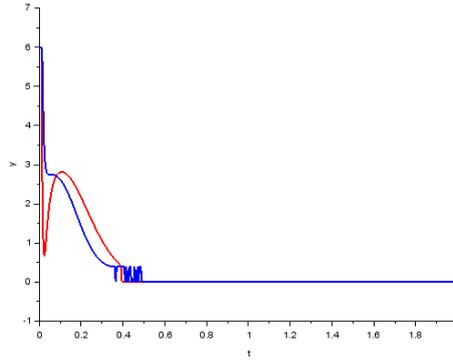


FIGURA 3.1.17: SEÑAL DE CONTROL DEL SISTEMA SIMULADO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA EL CONTROLADOR PID.

En el caso del PID que incluye el Filtro Notch, la acción integral añadida permite reducir el error tras 2 s (hasta un 1.3 %), especialmente en aquellos casos en los que la referencia es inferior a 1 rad (57.3º). Además, esta modificación permite cumplir la totalidad de las especificaciones, consiguiendo una reducción de la deformación máxima del brazo flexible hasta los 5.807º.

RED DE ATRASO

Su objetivo es atenuar el sistema para disminuir la frecuencia de ganancia crítica hacia valores con mayor margen de fase (y, por tanto, menor rebose). Esta red no modifica la ganancia a frecuencias bajas, por lo que permite mantener las especificaciones en régimen permanente. El proceso es el siguiente:

1. Se elige $K = 4.5$ para reducir lo máximo posible el error provocado por la zona muerta, sin que el control sea demasiado brusco.
2. Si se desea cumplir la especificación de rebose será necesario un margen de fase superior a 67.4º (ecuación (28)). Así, se decide situar la frecuencia de la red (f'_{gc}) en una parte del espectro que tenga un valor de fase adecuado (0.7847 Hz). Esta frecuencia requiere añadir una atenuación de 1.638 dB.
3. Así, se diseña la red de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 a &= 10^{-(ATENUACION/20)} = 0.8281328 & T &= 10 / 2\pi f'_{gc} a = 2.4491562 \\
 C_{RED DE ATRASO}(s) &= K \frac{1 + aTs}{1 + Ts} = 4.5 \cdot \frac{1 + 2.0282266 s}{1 + 2.4491562 s} & (34)
 \end{aligned}$$

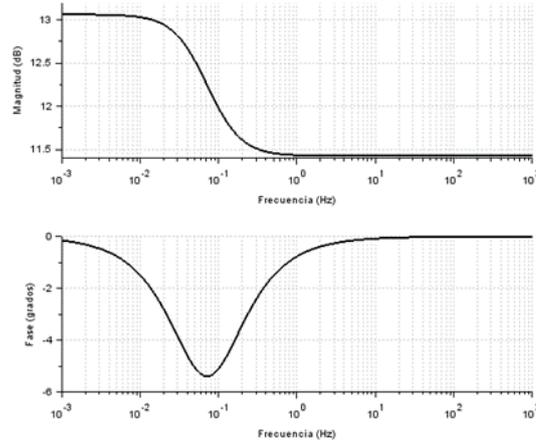


FIGURA 3.1.18: DIAGRAMA DE BODE DE LA RED DE ATRASO.

A continuación, se presentan las simulaciones obtenidas:

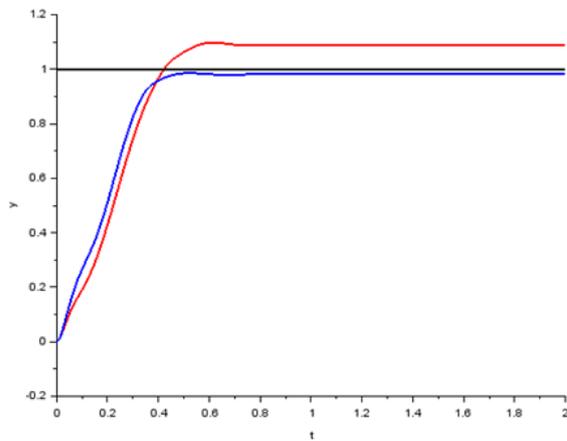


FIGURA 3.1.19: POSICIÓN DEL BRAZO A LA SALIDA DEL SISTEMA SIMULADO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA LA RED DE ATRASO.

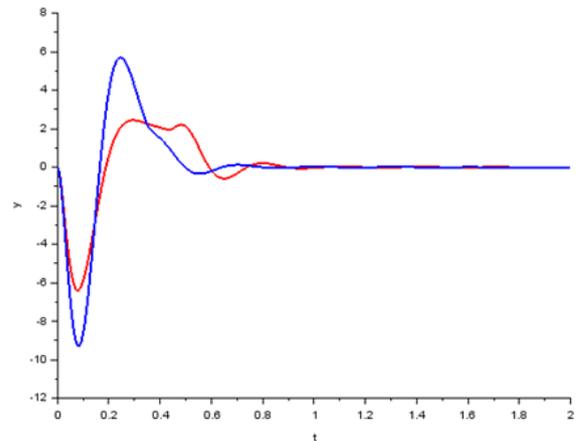


FIGURA 3.1.20: ÁNGULO DE DEFORMACIÓN DEL BRAZO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA LA RED DE ATRASO.

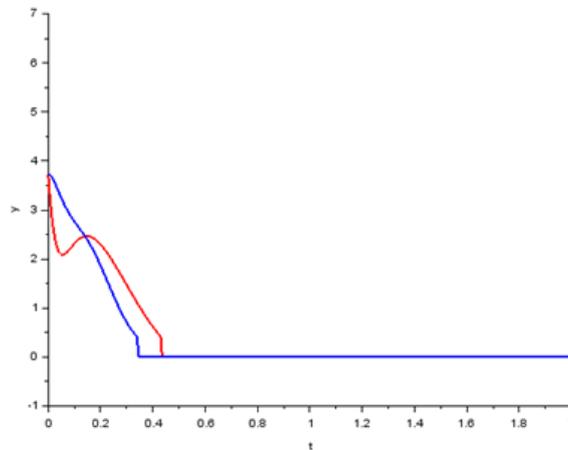


FIGURA 3.1.21: SEÑAL DE CONTROL DEL SISTEMA SIMULADO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA LA RED DE ATRASO.

Tal y como sugieren las figuras anteriores, la red de atraso se ve claramente perturbada por la introducción del Filtro Notch. En cualquier caso, se podría llegar a plantear la utilización de la red sin el filtro, si la especificación para la deformación máxima del brazo flexible no fuera tan exigente (llega a los 9.294° , frente al límite de 6°). En este sentido, otros controladores sí han permitido cumplir las especificaciones.

Por otra parte, ni siquiera se ha planteado la utilización de una red de adelanto, debido a que su construcción mediante una filosofía de diseño similar a la de la red de atraso arroja resultados muy poco beneficiosos, incluyendo un gran rebose y una inestabilidad bastante elevada.

3.2. CONTROLADORES MODERNOS

En este tipo de controladores, más modernos, sí se tiene en cuenta la deformación del brazo flexible. Se decide optar por dos tipos de controladores basados en el espacio de estados: un control por realimentación de variables de estado (sustentado por el método de Ackermann) y un control LQR. A este último se le añadirá un Filtro de Kalman, al no disponer de sensores que midan las velocidades angulares del servomotor y del brazo flexible [6] [11] [12].

No obstante, en esta ocasión no se han introducido las no linealidades asociadas a la zona muerta en la simulación. Esto se debe a que la señal de control se basa en las variaciones temporales de las diferentes coordenadas, las cuales varían bruscamente cuando la señal de control entra y sale de la zona muerta. De esta manera, estos cambios tan bruscos en la señal de control desestabilizan el sistema y empeoran enormemente los resultados.

CONTROL POR REALIMENTACIÓN DE VARIABLES DE ESTADO

En el contexto de un control mediante variables de estado, el método de Ackermann permite obtener la matriz de ganancias K que colocan los polos del

sistema en lazo cerrado en el lugar que se desee. El diagrama completo del sistema será el siguiente:

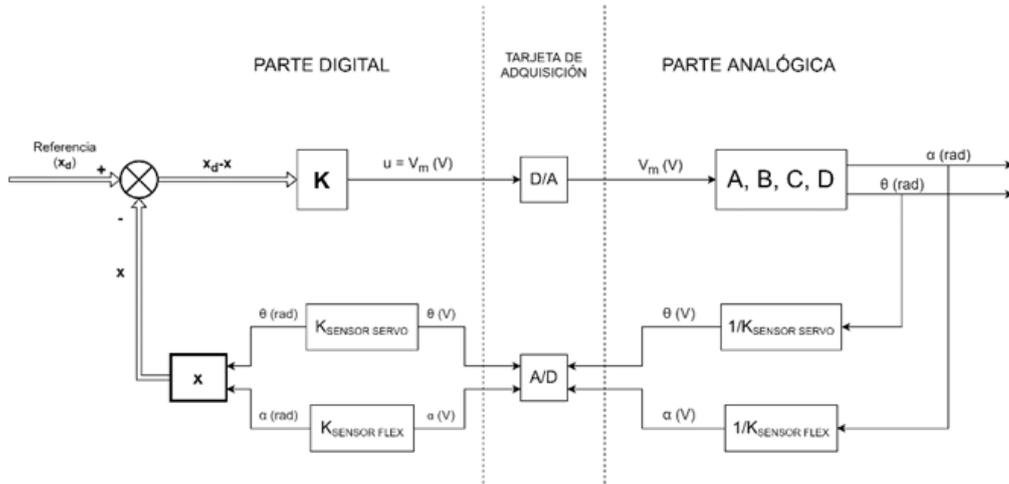


FIGURA 3.2.1: ESQUEMA DEL SISTEMA COMPLETO, CON UN CONTROL POR REALIMENTACIÓN DE VARIABLES DE ESTADO (EL BLOQUE x CONSTRUYE EL VECTOR DE ESTADO, MEDIANTE DERIVACIÓN).

De esta forma, las ecuaciones en variables de estado resultan:

$$u = \mathbf{K}(x_d - x) \quad (35)$$

$$x_d = [\theta_d \ 0 \ 0 \ 0] \quad (36)$$

$$\dot{x} = (A - BK)x + BKx_d$$

$$y = Cx + Du$$

Así, los autovalores de la matriz dinámica $A_{cl} = A - BK$, serán los polos en lazo cerrado del sistema, los cuales se podrán ubicar en un lugar u otro del plano complejo en función de las ganancias del vector \mathbf{K} . En concreto, este método utiliza una fórmula cerrada para obtener las ganancias, en función de la matriz de controlabilidad P_c y la matriz polinomial $q(A)$:

$$P_c = [B \ AB \ A^2B \ A^3B] \quad q(A) = A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \dots + \alpha_1A + \alpha_0I$$

$$\mathbf{K} = [0 \ 0 \ 0 \ 1] P_c^{-1} q(A)$$

Dado que la matriz P_c debe ser invertible, se comprueba que el sistema sea controlable:

$$P_c = [B \ AB \ A^2B \ A^3B] = \begin{bmatrix} 0 & 60.205 & -2624.4 & 79071.5 \\ 0 & -60.205 & 2624.4 & -59267.2 \\ 60.205 & -2624.4 & 79071.5 & -1906698.3 \\ -60.205 & 2624.4 & -59267.2 & 1043398 \end{bmatrix}$$

$$\det P_c = -1.422 \cdot 10^{12} \neq 0$$

Ya que el sistema a controlar es de orden 4, se decide plantear un diseño capaz de colocar dos polos complejos conjugados que se correspondan con unas especificaciones concretas para el sistema en lazo cerrado, al mismo tiempo que se incluyen otros dos polos alejados que influyan poco en la dinámica. En este caso, se elige un rebote de un 2 % y un tiempo de establecimiento menor a 1 s.

$$\delta > \sqrt{\frac{\ln^2 \frac{\%R}{100}}{\pi^2 + \ln^2 \frac{\%R}{100}}} = 0.7797$$

$$T_p \leq \frac{4}{\delta \omega_n} \qquad \omega_n \geq 5.1302 \text{ rad/s (con } T_p = 1 \text{ s)}$$

$$\omega_n = 7 \text{ rad/s}$$

$$s_{1,2} = -\delta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \delta^2} = -5.4579 \pm j 4.383 \qquad (37)$$

Por otro lado, dos polos reales alejados podrían ser los siguientes:

$$s_3 = -100 \qquad s_4 = -100$$

Así, la matriz de ganancias obtenida mediante la fórmula de Ackermann es la siguiente:

$$K = [24.742 \quad -163.22 \quad 5.2827 \quad 2.5034] \qquad (38)$$

Empleando estas ganancias se consiguen los siguientes resultados:

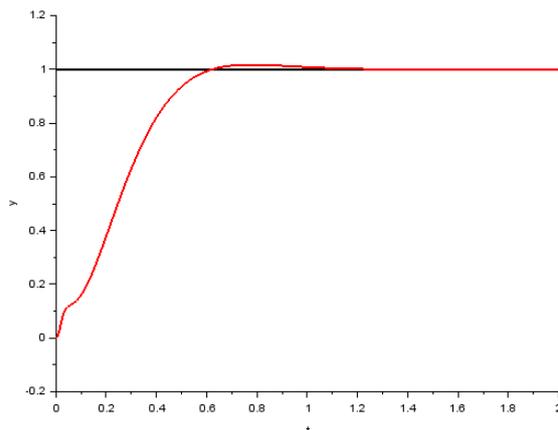


FIGURA 3.2.2: POSICIÓN DEL BRAZO A LA SALIDA DEL SISTEMA SIMULADO PARA EL CONTROL POR REALIMENTACIÓN DE VARIABLES DE ESTADO.

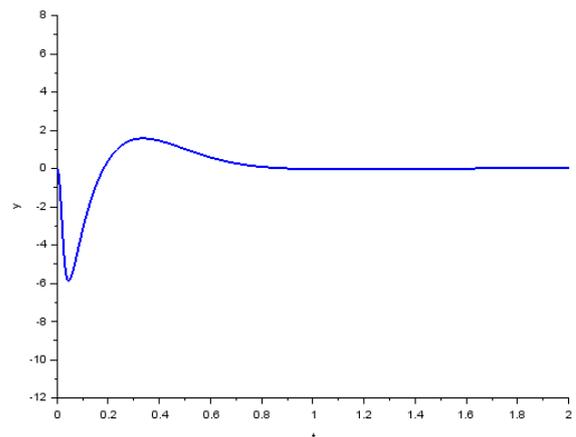


FIGURA 3.2.3: ÁNGULO DE DEFORMACIÓN DEL BRAZO PARA EL CONTROL POR REALIMENTACIÓN DE VARIABLES DE ESTADO.

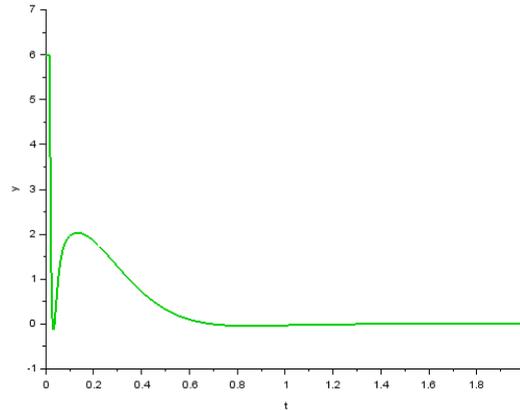


FIGURA 3.2.4: SEÑAL DE CONTROL DEL SISTEMA SIMULADO PARA EL CONTROL POR REALIMENTACIÓN DE VARIABLES DE ESTADO.

Tal y como puede verse en las gráficas, la introducción de un control que tiene en cuenta realmente el ángulo del brazo flexible a la hora de determinar la señal de control reduce en gran medida las oscilaciones del mismo. Además, con el método de Ackermann se consiguen cumplir todas las especificaciones, a excepción del tiempo de pico (0.793 s) y el tiempo necesario para obtener oscilaciones menores a 1° (0.503 s), esta última por muy poco. De esta forma, se obtiene un control bastante aceptable, aunque algo brusco en cuanto a la señal de control (saturando al inicio, lo cual no parece afectar en exceso al control).

LINEAR QUADRATIC REGULAR (LQR)

Por otro lado, el diseño del controlador también se puede realizar desde una perspectiva basada en el estado del sistema y en minimizar una función de coste concreta mientras el sistema avanza desde un estado \mathbf{x}_0 a otro estado \mathbf{x}_f . Una de las versiones más útiles de esta filosofía es el método LQR.

Este permite, empleando un esquema de control idéntico al utilizado por el control por realimentación de variables de estado, obtener unas ganancias de realimentación que minimicen los transitorios en la evolución del sistema de \mathbf{x}_0 a \mathbf{x}_f con el mínimo esfuerzo de control.

Una vez comprobada la controlabilidad del sistema, se define la función de coste que determinará el control:

$$J = \int_0^{\infty} [\mathbf{x}^T(t) Q \mathbf{x}(t) + u^T(t) R u(t)] dt \quad (39)$$

Donde Q ($n \times n$) es semidefinida positiva y R ($r \times r$) es definida positiva (r es el número de entradas al sistema). Estas matrices son parámetros de diseño libres.

Mediante este método se puede diseñar un control que permita estabilizar el servomotor en torno a una posición deseada (θ_d), mientras que se minimiza la deformación del brazo flexible. Así, se definen el estado de referencia (\mathbf{x}_d) y el controlador (u), los cuales tienen la misma forma que el control diseñado mediante el método de Ackermann.

$$\mathbf{x}_d = [\theta_d \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (40) \qquad u = \mathbf{K}(\mathbf{x}_d - \mathbf{x}) \quad (41)$$

Para simplificar el diseño del controlador, se supone que la matriz Q tiene la siguiente forma:

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 \end{bmatrix} \quad (42)$$

Por otra parte, debido a que este sistema sólo tiene una entrada, la matriz R es un escalar. De esta forma, la función de coste resulta:

$$J = \int_0^{\infty} (q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + q_3 x_3^2 + q_4 x_4^2 + Ru^2) dt \quad (43)$$

Dado que la matriz Q determina la influencia de los estados en esta función, también establece cómo será la señal de control y, por tanto, el vector \mathbf{K} . Así, el cambio en cualquiera de los elementos de la matriz Q dará lugar a modificaciones en múltiples valores del vector \mathbf{K} . Por otro lado, aumentar el parámetro R permite que la señal de control trabaje menos para minimizar J , por lo que las ganancias que se obtendrán serán menores. Finalmente, se deciden emplear los siguientes valores para Q y R :

$$Q = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$R = 0.01 \quad (45)$$

El valor tan grande elegido para el segundo lugar de la diagonal de Q , relacionado con el ángulo que caracteriza la deformación del brazo flexible (α), se debe a que se ha dado una prioridad muy grande a la limitación de estas deformaciones. También se ha potenciado la influencia del ángulo del servomotor (θ), mientras que se ha reducido la del esfuerzo de control (R bajo).

Estas matrices dan lugar a las siguientes ganancias (con P única solución simétrica y definida positiva de la ecuación de Ricatti algebraica):

$$K = R^{-1}B^T P = [63.246 \quad -417.02 \quad 15.608 \quad 1.6187] \quad (46)$$

Con este vector K se consiguen los siguientes resultados:

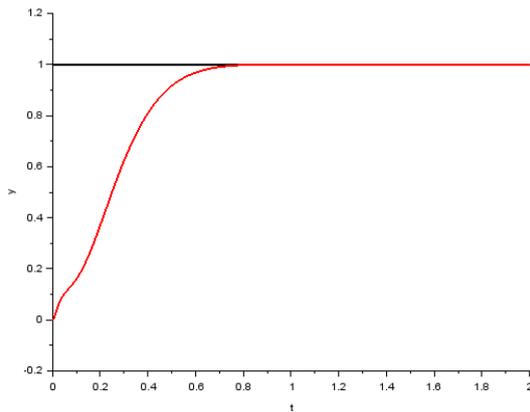


FIGURA 3.2.5: POSICIÓN DEL BRAZO A LA SALIDA DEL SISTEMA SIMULADO PARA EL CONTROL LQR.

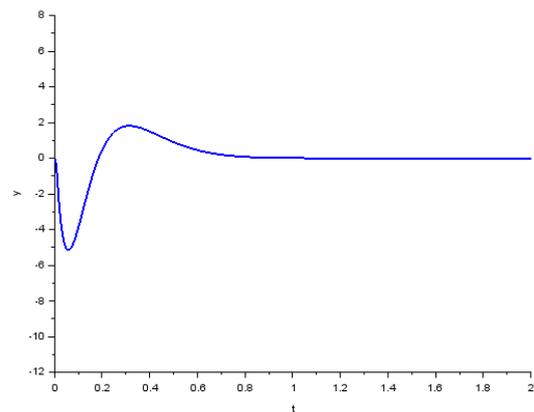


FIGURA 3.2.6: ÁNGULO DE DEFORMACIÓN DEL BRAZO PARA EL CONTROL LQR.

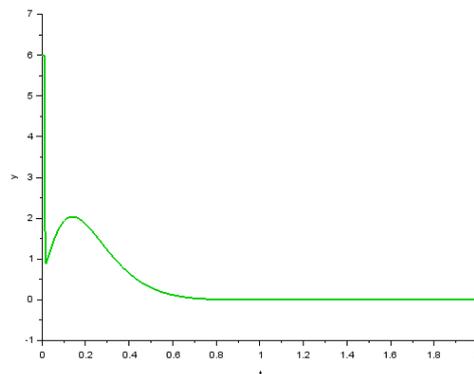


FIGURA 3.2.7: SEÑAL DE CONTROL DEL SISTEMA SIMULADO PARA EL CONTROL LQR.

En comparación con el control diseñado mediante el método de Ackermann, el control LQR presenta una respuesta mucho más suave, carente de rebose y con unas oscilaciones en el brazo flexible realmente pequeñas (con máximos de 5°). A pesar de que cumple con todas las especificaciones propuestas, supone una alternativa mucho más lenta que la gran mayoría de los controladores estándar explicados con anterioridad. Esta lentitud (con un tiempo de establecimiento que ronda los 0.6 s, 2 décimas de segundo más que para el control PD, por ejemplo), en contraposición, permite reducir al máximo las deformaciones del brazo flexible.

LINEAR QUADRATIC GAUSSIAN (LQG)

Dado que no se dispone de sensores que midan directamente las velocidades angulares de ambas coordenadas, se puede introducir un Estimador Lineal Cuadrático (LQE) o Filtro de Kalman al LQR ya diseñado. El objetivo del observador es conseguir que el estado estimado \hat{x} tienda al estado real x , siguiendo el siguiente diagrama:

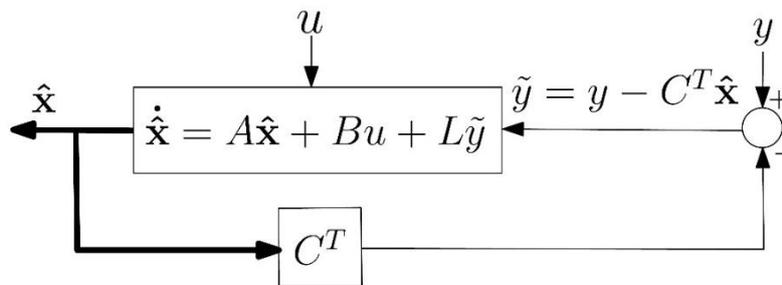


FIGURA 3.2.8: ESQUEMA DEL FILTRO DE KALMAN.

Así, el diseño del observador se basa en hallar las ganancias de realimentación que forman la matriz L :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C^T\hat{x}) \quad (47)$$

Esta matriz de ganancias L se obtiene de forma similar a la matriz K , a partir de la solución de la ecuación de Ricatti dual:

$$L = PCV^{-1} \quad AP + PA^T - PCV^{-1}C^TP + W = 0$$

De esta forma, el esquema de control del sistema completo resulta:

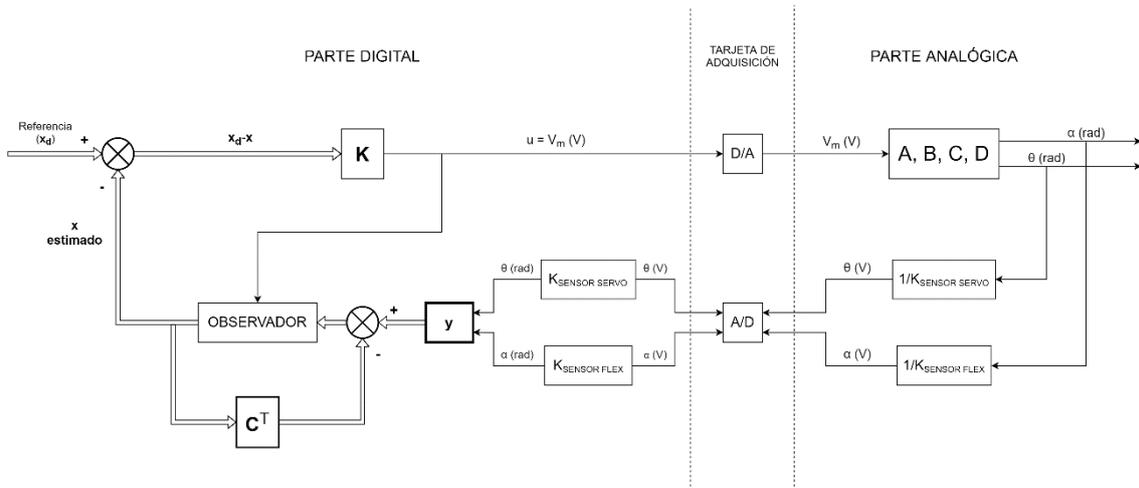


FIGURA 3.2.9: ESQUEMA DEL SISTEMA COMPLETO, CON UN CONTROL POR REALIMENTACIÓN DE VARIABLES DE ESTADO Y UN OBSERVADOR EN LA REALIMENTACIÓN.

En este caso, la incorporación del Filtro de Kalman al control LQR permite obtener un control basado en óptimos de estimación en presencia de ruido (proporcionado por el LQE), junto con óptimos de control en cuanto a transitorios de estado y esfuerzo de control (correspondientes al LQR).

Nuevamente, se dispone de dos matrices de peso (V y W). Dado que se considera que el modelo matemático obtenido no es muy fiable, pero sí lo son los sensores que miden tanto el ángulo del servomotor como el ángulo del brazo flexible, se escogerán los siguientes valores para las matrices:

$$W = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$V = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix} \quad (49)$$

De esta manera, la matriz de ganancias del observador L resulta así:

$$L = \begin{bmatrix} 100.25 & 1.5594 \\ 1.5594 & 96.584 \\ 26.622 & 362.51 \\ -55.56 & -334.57 \end{bmatrix} \quad (50)$$

Por otro lado, también se debe añadir un error de estimación inicial al observador. En este caso se ha optado por un error de 0.5 rad durante 0.01 s tanto para el ángulo del servomotor como para el ángulo del brazo flexible.

Añadiendo el Filtro de Kalman al sistema ya diseñado con un control LQR, se obtienen los siguientes resultados:

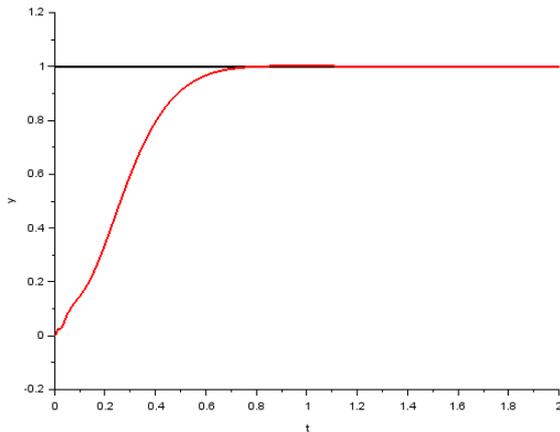


FIGURA 3.2.10: POSICIÓN DEL BRAZO A LA SALIDA DEL SISTEMA SIMULADO PARA EL CONTROL LQG.

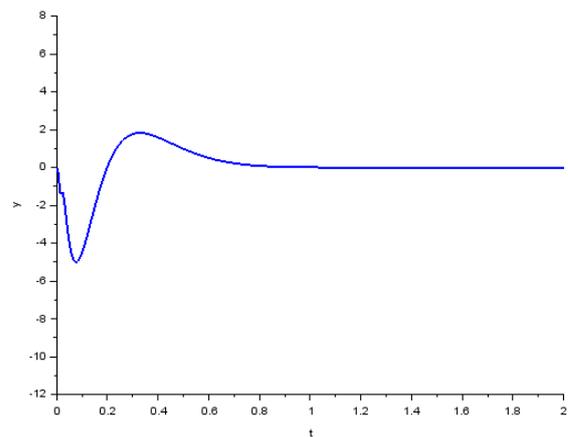


FIGURA 3.2.11: ÁNGULO DE DEFORMACIÓN DEL BRAZO PARA EL CONTROL LQG.

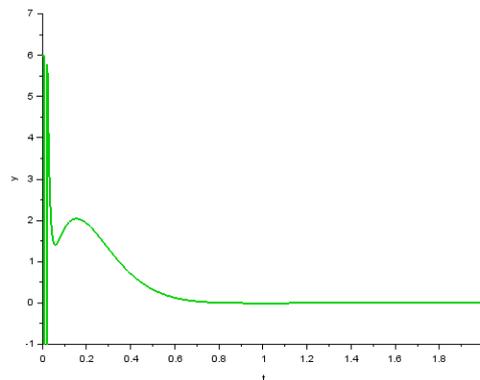


FIGURA 3.2.12: SEÑAL DE CONTROL DEL SISTEMA SIMULADO PARA EL CONTROL LQG.

La introducción del Filtro de Kalman al control LQR ha tenido una influencia muy pequeña, en términos generales. Solamente destaca una señal de control más brusca al inicio, provocada por los errores de estimación introducidos al comienzo de la simulación. De esta forma, la adición de este observador resulta perfectamente viable si no se dispone, como es el caso, de sensores que midan las velocidades angulares del servomotor y el brazo flexible.

3.3. COMPARACIÓN DE LOS CONTROLADORES

En las tablas 3.3.1 y 3.3.2 se comparan los resultados de los diferentes controladores con las especificaciones planteadas, indicando aquellos diseños que cumplen cada una de ellas. En este sentido, es necesario separar las comparaciones de los controladores clásicos y modernos, ya que en los primeros sí se tienen en cuenta los efectos no lineales de la zona muerta.

En el caso de los controladores clásicos, se puede comprobar que la adición del Filtro Notch permite reducir las oscilaciones del brazo flexible, ya que todos los diseños que lo incorporan cumplen la especificación de máxima deformación. Además, también permite rebajar el error en permanente en la mayor parte de los casos. Sin embargo, ralentiza muchos de los diseños y empeora, en gran medida, el rebose; lo cual es especialmente visible en la red de atraso.

De esta forma, solamente el controlador PID consigue cumplir todas las especificaciones propuestas, lo cual justifica su proceso de diseño (algo más laborioso que el de un control P simple).

Por otro lado, los controladores LQR y LQG funcionan de forma bastante satisfactoria (aunque en su simulación no es posible tener en cuenta la no linealidad relacionada con la zona muerta), especialmente si se comparan con el controlador obtenido por el método de Ackermann (peor en todos los sentidos, a excepción del tiempo de establecimiento). En este sentido, los resultados tan poco convenientes obtenidos mediante el método de Ackermann se deben a la gran dificultad existente en encontrar unos polos complejos conjugados adecuados para el sistema. En contraposición, este fenómeno hace patente la facilidad de diseño mediante métodos óptimos (LQR y LQG), siendo los únicos que cumplen todas las especificaciones.

Asimismo, los controladores PID, LQR y LQG deberían ser los primeros en probarse en el sistema real, ya que presentan el mejor comportamiento en las simulaciones.

TABLA 3.3.1: RESULTADOS OBTENIDOS PARA LOS DIFERENTES CONTROLADORES (1).

CONTROLADOR	Error en permanente (%)	Rebose (%)	Tiempo de pico (s)
P	8,2	0,545	0,61
P (Filtro Notch)	1,0	0,693	0,672
PI	8,2	0,654	0,64
PI (Filtro Notch)	0,3	0,598	0,699
PD	8,9	0,329	0,681
PD (Filtro Notch)	2,5	0,513	0,582
PID	5,1	0,421	0,677
PID (Filtro Notch)	1,3	0,494	0,585
RED DE ATRASO	1,9	0,510	0,525
RED DE ATRASO (Filtro Notch)	8,9	0,735	0,615
ACKERMANN	-	1,700	0,793
LQR	-	-	-
LQG	-	-	-
ESPECIFICACIONES	2	3	0,6

TABLA 3.3.2: RESULTADOS OBTENIDOS PARA LOS DIFERENTES CONTROLADORES (2).

CONTROLADOR	Tiempo de establecimiento (s)	Máxima deformación del brazo flexible (°)	Tiempo de oscilaciones menores a 1° (s)
P	0,486	7,633	0,522
P (Filtro Notch)	0,56	5,237	0,6
PI	0,522	7,188	0,558
PI (Filtro Notch)	0,581	4,923	0,622
PD	0,485	9,096	0,351
PD (Filtro Notch)	0,458	5,611	0,488
PID	0,503	9,307	0,353
PID (Filtro Notch)	0,459	5,807	0,493
RED DE ATRASO	0,405	9,294	0,434
RED DE ATRASO (Filtro Notch)	0,508	6,415	0,551
ACKERMANN	0,569	5,879	0,503
LQR	0,641	5,157	0,482
LQG	0,642	5,009	0,496
ESPECIFICACIONES	1	6	0,5

NOTA: Para las especificaciones de error en permanente y tiempo de establecimiento, el valor final se fija tras 2 s.

4. CONCLUSIONES Y FUTUROS TRABAJOS

A lo largo de este trabajo se ha seguido el esquema tradicional para obtener un controlador adecuado para un sistema en concreto. En este caso, la maqueta sobre la que se ha realizado el análisis está constituida por un servomotor anclado en un soporte, al cual se le adhiere un brazo flexible. De esta manera, los diseños se han realizado teniendo en cuenta que se dispone de una señal de control (el voltaje aplicado al motor) y de dos sensores angulares (correspondientes a las posiciones del servomotor y del brazo flexible).

En primer lugar, se han realizado varios modelados, tanto del servomotor como del sistema completo (incluyendo el brazo flexible). En el primero de ellos, se ha podido corroborar que las constantes físicas empleadas por el fabricante describen de forma adecuada la dinámica de esta parte del sistema. Así las cosas, se ha procedido a caracterizar el sistema completo de una forma similar. En una primera aproximación, basada en las ecuaciones mecánicas y eléctricas que describen la dinámica del sistema (además de las constantes proporcionadas por el fabricante), se ha comparado la respuesta del sistema real en lazo abierto con la de este primer modelo. A la vista de los resultados conseguidos, se ha decidido modificar ligeramente los valores de algunas de las constantes físicas, obteniendo así un modelo más fiel al sistema real.

Previamente al diseño de controladores, se han obtenido las funciones de transferencia de dos modelos: uno de ellos basado en el servomotor, con un simple cambio en la inercia total; y otro extraído a partir del modelo ajustado mediante experimentación.

Los controladores clásicos (basados en la “representación externa” de los sistemas dinámicos) han sido los primeros en diseñarse. Se ha optado, en primer lugar, por un control proporcional que ha arrojado excelentes resultados (a pesar de su simplicidad). Posteriormente, se han añadido etapas integrales (reduciendo

el error en permanente) y derivativas (aumentando la rapidez), de forma que sólo el control PID (el cual incluye todas ellas) consigue cumplir las especificaciones. De forma adicional, se ha construido una red de atraso, la cual no ha conseguido unos resultados muy satisfactorios, en comparación con los del PID.

Ya que en este tipo de controladores no se tiene en cuenta la deformación del brazo flexible a la hora de determinar la señal de control, se ha decidido añadir un Filtro Notch en la cadena directa. Esta etapa se construye de tal forma que, cuando el sistema opera a frecuencias cercanas a la resonancia del sistema (aquella que supone mayores vibraciones en el brazo flexible), la señal de control se ve muy atenuada, minimizando las vibraciones.

Finalmente, se ha trabajado en la consecución de controladores basados en la teoría de control moderna (fundamentada en el espacio de estados). En esta ocasión, el método de Ackermann ha arrojado unos resultados aceptables. Sin embargo, ha sido cuando los diseños se han basado en la filosofía de control óptimo (LQR y LQG) cuando se han obtenido los mejores controladores.

No obstante, se ha de tener en cuenta que, a la hora de simular estos controladores, no se ha podido introducir la zona muerta en los diagramas. Esta imposibilidad se debe, como ya se ha comentado previamente, a un problema de cálculo provocado por la forma temporal discontinua de la señal de control. En este sentido, el cambio brusco en la señal de control (al pasar de ser nulo a estar al límite de la zona muerta y viceversa) provoca que los valores del vector de estados se modifiquen también de forma repentina, inestabilizando el control y proporcionando unos resultados alejados de la realidad.

A este problema intrínseco de la simulación mediante variables de estado habría que añadirle el problema computacional que existe cuando se incluye una función de este tipo. Así, es posible que el programa funcione de manera incorrecta cuando los resultados arrojan valores cercanos al límite de la zona muerta (pequeñas cantidades que hacen que el programa conmute

continuamente entre la existencia de señal de control y la ausencia de la misma). En este aspecto, podría ser beneficiosa la creación de una etapa que, en lugar de incluir una condición tan estricta y súbita, introdujera una histéresis a ambos lados de la zona muerta, para mitigar estos problemas computacionales.

En definitiva, este trabajo ha permitido poner en práctica los métodos de diseño de diferentes controladores para una maqueta con un grado de libertad sobre el que no se tiene una acción de control directa. También se ha tratado de una excelente oportunidad para comprobar los efectos de las diferentes acciones que componen un control PID, así como corroborar que los diseños basados en la “representación interna” de los sistemas (aquella que profundiza más en su naturaleza) ofrecen muy buenas prestaciones.

A pesar de que este estudio se ha centrado en una maqueta en concreto, tanto el procedimiento de diseño como algunos de los esquemas planteados se podrían extrapolar con gran facilidad a muchos de los problemas que surgen en ambientes industriales relacionados con la automática.

Un ejemplo concreto podría ser el transporte de objetos pesados mediante grúas. En este caso, el objeto alzado por la grúa modificará la frecuencia de oscilación natural del sistema, la cual dependerá de las características físicas del cuerpo (masa, longitud, inercia...). Sabiendo esto, se puede diseñar un control PID inicial, al que se le incorpore un Filtro Notch centrado en esta frecuencia de resonancia. Esto permitirá controlar el movimiento de la grúa de forma automática, al mismo tiempo que se minimizan las oscilaciones del objeto que porta. En caso de disponer de un sensor que mida estas vibraciones, diseñar un control por realimentación de variables de estado podría resultar mucho más sencillo y directo, ya que el propio controlador intentará minimizar las oscilaciones del cuerpo transportado.

5. BIBLIOGRAFÍA

- [1] National Instruments, *LabVIEW (Laboratory Virtual Instrument Engineering Workbench)*, 2018.
- [2] Quanser Inc., *Rotary Servo Base Unit Experiment: User Manual*, Markham, Ontario, 2012.
- [3] Quanser Inc., *Rotary Servo Base Unit Experiment: Instructor Workbook*, Markham, Ontario, 2012.
- [4] Quanser Inc., *Flexible Link Experiment: User Manual*, Markham, Ontario, 2012.
- [5] Quanser Inc., *Flexible Link Experiment: Instructor Workbook*, Markham, Ontario, 2012.
- [6] G. F. Franklin, J. D. Powell and A. Emami-Naeini, "Feedback Control of Dynamic Systems", 5th ed., Englewood, NJ: Pearson Prentice-Hall, 2006.
- [7] B. C. Kuo and F. Golnaraghi, "Automatic Control Systems", 9th ed., New York: Wiley, 2009.
- [8] R. C. Dorf and R. H. Bishop, "Modern Control Systems", 10th ed., Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice-Hall, 2005.
- [9] J. Dorsey, "Continuous and Discrete Control Systems", New York: McGraw-Hill, 2002.
- [10] B. Douglas, «Control Systems in Practice, Part 5: A Better Way to Think About a Notch Filter,» The MathWorks Inc., [En línea]. Available: <https://es.mathworks.com/videos/control-systems-in-practice-part-5-a-better-way-to-think-about-a-notch-filter-1570179510885.html>.
- [11] G. C. Goodwin, S. F. Graebe y M. E. Salgado, "Control System Design", Englewood Cliffs, NJ: Pearson Prentice-Hall, 2000.
- [12] T. Kailath, "Linear Systems", 1st ed., Englewood Cliffs, NJ: Pearson Prentice-Hall, 1980.

6. ANEXO: SIMULACIONES ANTE REFERENCIAS DISTINTAS

En este apartado se presentan las simulaciones de los distintos controladores para las referencias de 0.7 rad (40.1º) y 0.5 rad (28.6º), así como una comparación de las prestaciones obtenidas (adaptando las especificaciones).

Ya que en las simulaciones de los controladores modernos no se tiene en cuenta la zona muerta, estos trabajan en régimen lineal para todas las referencias estudiadas (en este sentido, el efecto de la saturación es apenas apreciable). Por ello, sólo se mostrarán los resultados obtenidos para los controladores clásicos.

6.1. REFERENCIA DE 0.7 RAD (40.1º)

CONTROL PROPORCIONAL (P)

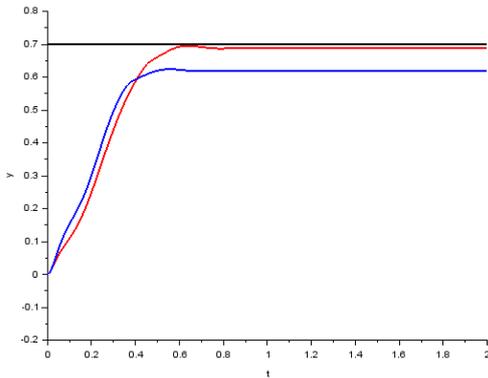


FIGURA 6.1.1: POSICIÓN DEL BRAZO A LA SALIDA DEL SISTEMA SIMULADO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA EL CONTROLADOR P (REFERENCIA DE 0.7 RAD).

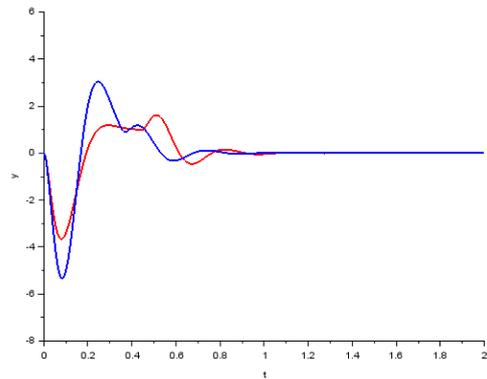


FIGURA 6.1.2: ÁNGULO DE DEFORMACIÓN DEL BRAZO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA EL CONTROLADOR P (REFERENCIA DE 0.7 RAD).

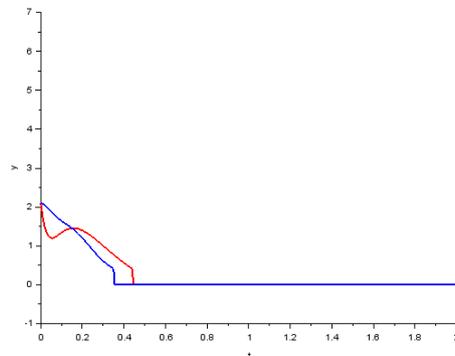


FIGURA 6.1.3: SEÑAL DE CONTROL DEL SISTEMA SIMULADO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA EL CONTROLADOR P (REFERENCIA DE 0.7 RAD).

CONTROL PROPORCIONAL INTEGRAL (PI)

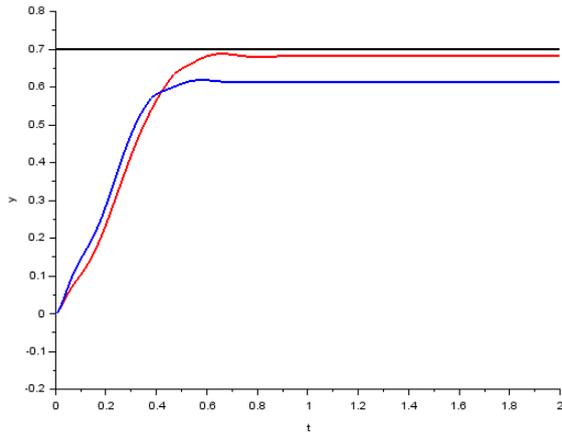


FIGURA 6.1.4: POSICIÓN DEL BRAZO A LA SALIDA DEL SISTEMA SIMULADO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA EL CONTROLADOR PI (REFERENCIA DE 0.7 RAD).

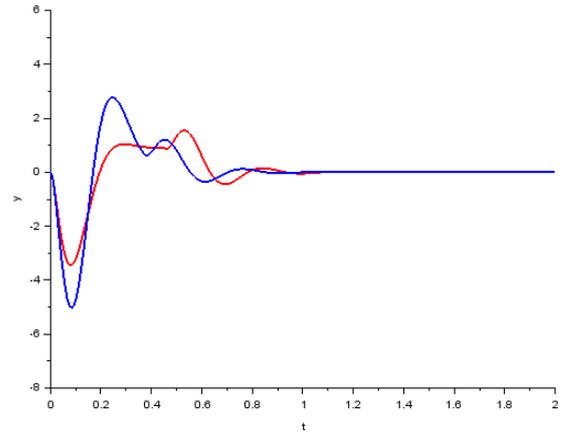


FIGURA 6.1.5: ÁNGULO DE DEFORMACIÓN DEL BRAZO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA EL CONTROLADOR PI (REFERENCIA DE 0.7 RAD).

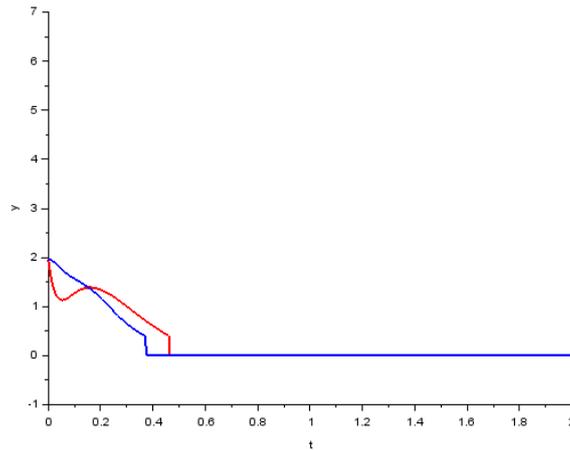


FIGURA 6.1.6: SEÑAL DE CONTROL DEL SISTEMA SIMULADO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA EL CONTROLADOR PI (REFERENCIA DE 0.7 RAD).

CONTROL PROPORCIONAL DERIVATIVO (PD)

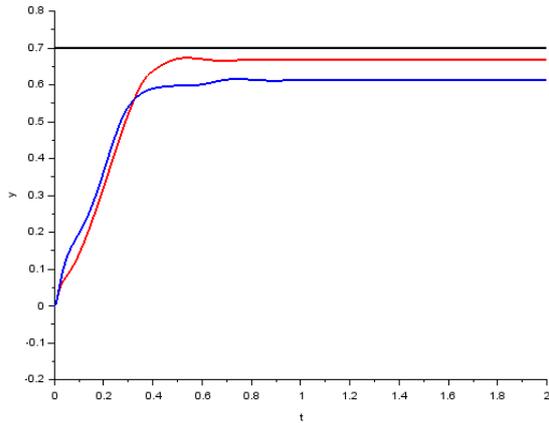


FIGURA 6.1.7: POSICIÓN DEL BRAZO A LA SALIDA DEL SISTEMA SIMULADO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA EL CONTROLADOR PD (REFERENCIA DE 0.7 RAD).

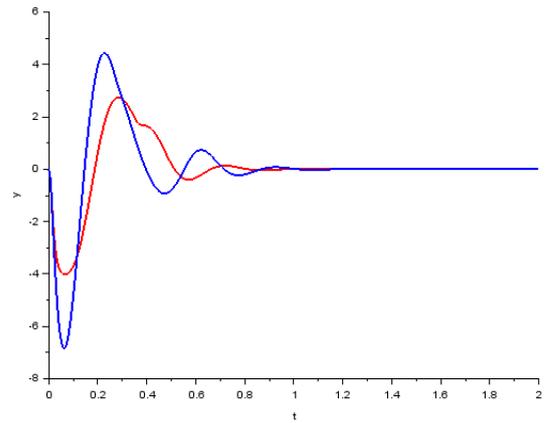


FIGURA 6.1.8: ÁNGULO DE DEFORMACIÓN DEL BRAZO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA EL CONTROLADOR PD (REFERENCIA DE 0.7 RAD).

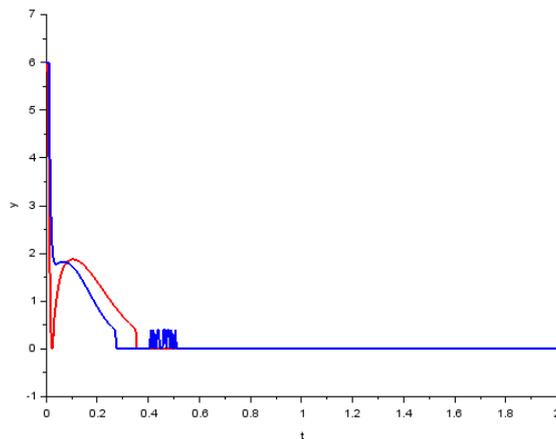


FIGURA 6.1.9: SEÑAL DE CONTROL DEL SISTEMA SIMULADO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA EL CONTROLADOR PD (REFERENCIA DE 0.7 RAD).

CONTROL PROPORCIONAL, INTEGRAL Y DERIVATIVO (PID)

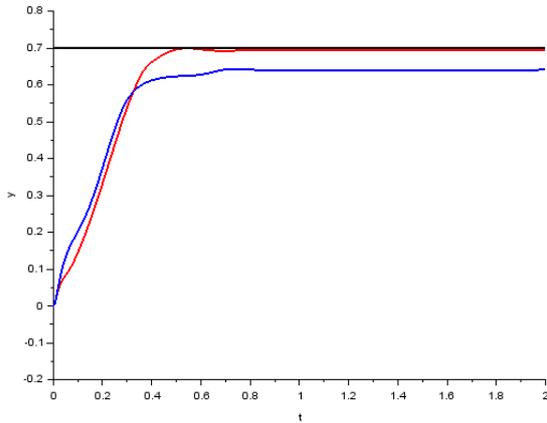


FIGURA 6.1.10: POSICIÓN DEL BRAZO A LA SALIDA DEL SISTEMA SIMULADO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA EL CONTROLADOR PID (REFERENCIA DE 0.7 RAD).

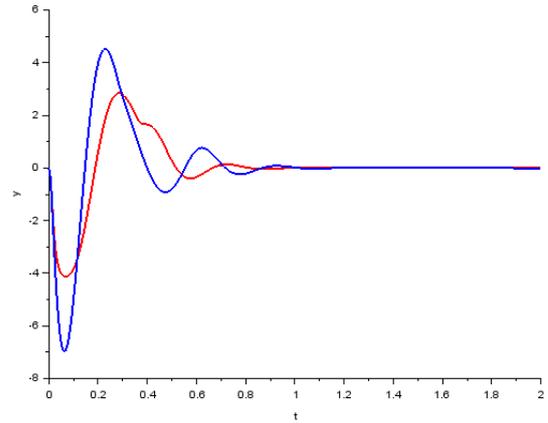


FIGURA 6.1.11: ÁNGULO DE DEFORMACIÓN DEL BRAZO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA EL CONTROLADOR PID (REFERENCIA DE 0.7 RAD).

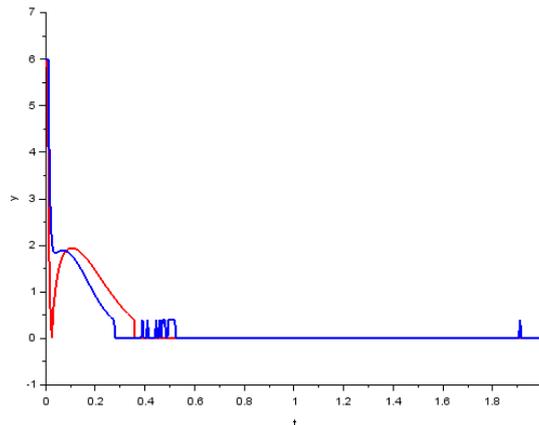


FIGURA 6.1.12: SEÑAL DE CONTROL DEL SISTEMA SIMULADO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA EL CONTROLADOR PID (REFERENCIA DE 0.7 RAD).

RED DE ATRASO

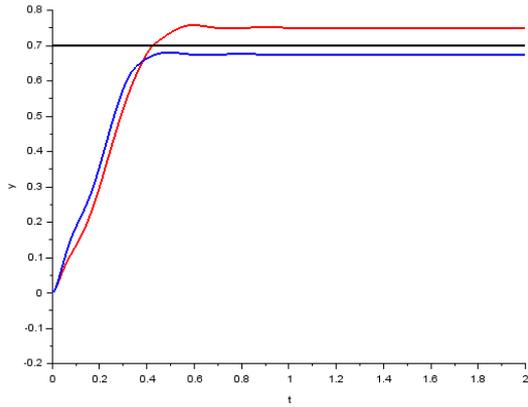


FIGURA 6.1.13: POSICIÓN DEL BRAZO A LA SALIDA DEL SISTEMA SIMULADO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA LA RED DE ATRASO (REFERENCIA DE 0.7 RAD).

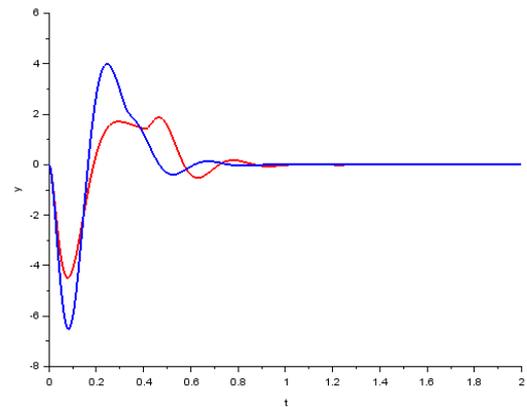


FIGURA 6.1.14: ÁNGULO DE DEFORMACIÓN DEL BRAZO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA LA RED DE ATRASO (REFERENCIA DE 0.7 RAD).

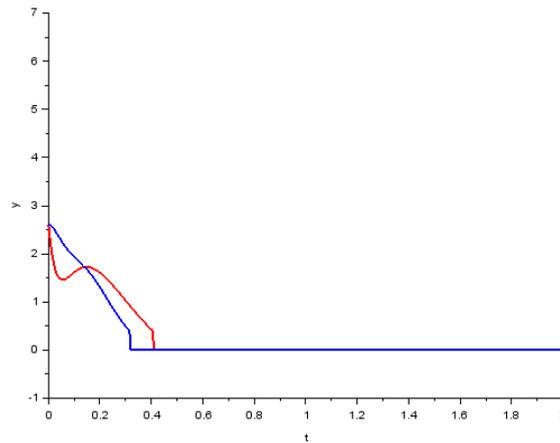


FIGURA 6.1.15: SEÑAL DE CONTROL DEL SISTEMA SIMULADO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA LA RED DE ATRASO (REFERENCIA DE 0.7 RAD).

TABLA 6.1.1: RESULTADOS OBTENIDOS PARA LOS DIFERENTES CONTROLADORES (0.7 RAD) (1).

CONTROLADOR	Error en permanente (%)	Rebose (%)	Tiempo de pico (s)
P	11,57	0,808	0,56
P (Filtro Notch)	1,57	0,871	0,642
PI	12,29	0,651	0,575
PI (Filtro Notch)	2,57	0,880	0,66
PD	12,57	0,654	0,735
PD (Filtro Notch)	4,57	0,749	0,535
PID	8,43	0,312	0,744
PID (Filtro Notch)	0,86	0,720	0,544
RED DE ATRASO	3,57	0,741	0,49
RED DE ATRASO (Filtro Notch)	7,29	0,932	0,598
ESPECIFICACIONES	4	3	0,6

TABLA 6.1.2: RESULTADOS OBTENIDOS PARA LOS DIFERENTES CONTROLADORES (0.7 RAD) (2).

CONTROLADOR	Tiempo de establecimiento (s)	Máxima deformación del brazo flexible (°)	Tiempo de oscilaciones menores a 1° (s)
P	0,446	5,343	0,458
P (Filtro Notch)	0,537	3,666	0,563
PI	0,475	5,031	0,486
PI (Filtro Notch)	0,555	3,446	0,58
PD	0,583	6,834	0,358
PD (Filtro Notch)	0,44	4,014	0,457
PID	0,606	6,975	0,36
PID (Filtro Notch)	0,441	4,126	0,461
RED DE ATRASO	0,397	6,502	0,412
RED DE ATRASO (Filtro Notch)	0,508	4,490	0,526
ESPECIFICACIONES	1	5	0,5

NOTA: Para las especificaciones de error en permanente y tiempo de establecimiento, el valor final se fija tras 2 s.

6.2. REFERENCIA DE 0.5 RAD (28.6º)

Al igual que en el caso anterior, solamente se representarán las simulaciones correspondientes a los controladores basados en la representación externa del sistema:

CONTROL PROPORCIONAL (P)

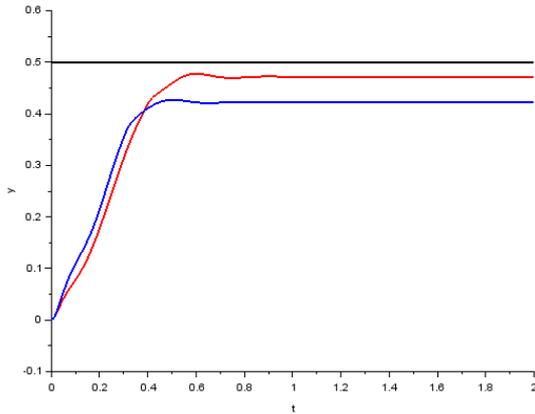


FIGURA 6.2.1: POSICIÓN DEL BRAZO A LA SALIDA DEL SISTEMA SIMULADO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA EL CONTROLADOR P (REFERENCIA DE 0.5 RAD).

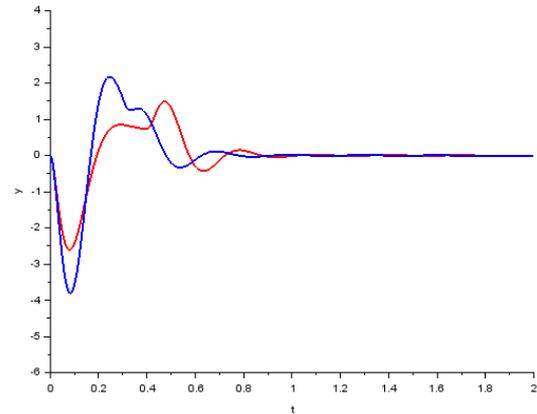


FIGURA 6.2.2: ÁNGULO DE DEFORMACIÓN DEL BRAZO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA EL CONTROLADOR P (REFERENCIA DE 0.5 RAD).

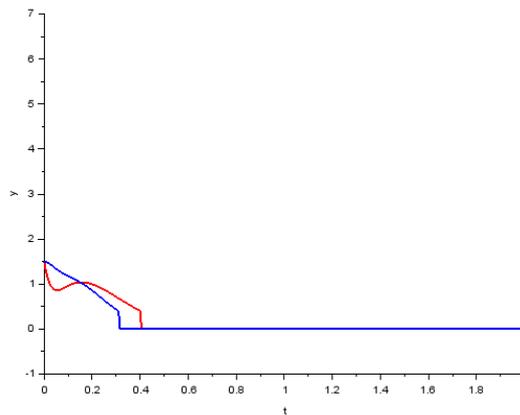


FIGURA 6.2.3: SEÑAL DE CONTROL DEL SISTEMA SIMULADO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA EL CONTROLADOR P (REFERENCIA DE 0.5 RAD).

CONTROL PROPORCIONAL INTEGRAL (PI)

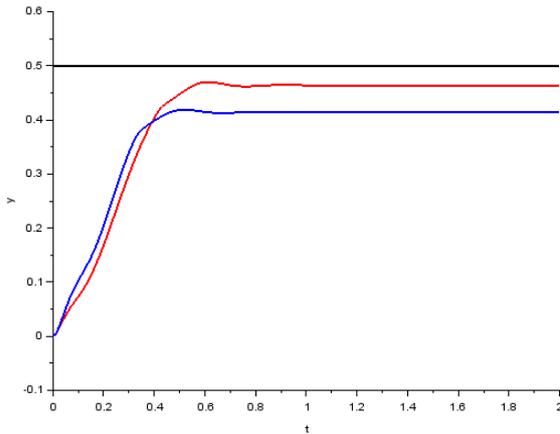


FIGURA 6.2.4: POSICIÓN DEL BRAZO A LA SALIDA DEL SISTEMA SIMULADO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA EL CONTROLADOR PI (REFERENCIA DE 0.5 RAD).

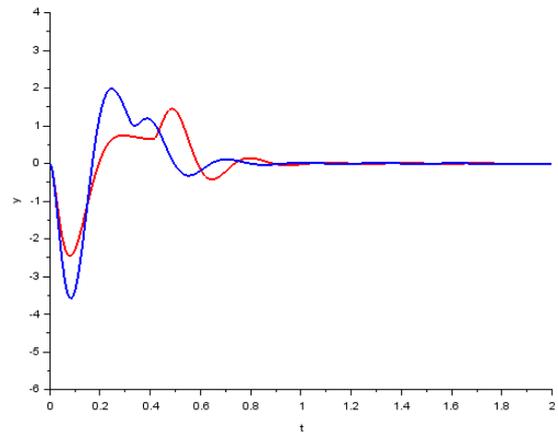


FIGURA 6.2.5: ÁNGULO DE DEFORMACIÓN DEL BRAZO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA EL CONTROLADOR PI (REFERENCIA DE 0.5 RAD).

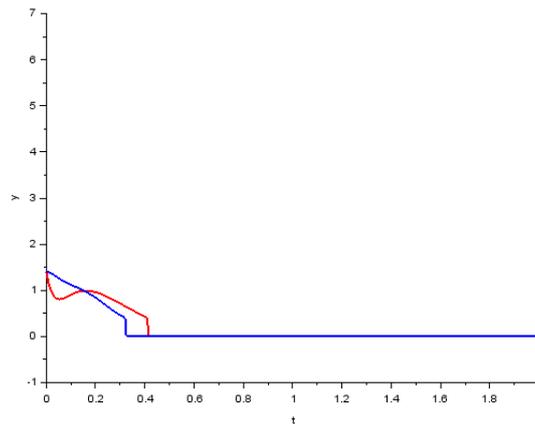


FIGURA 6.2.6: SEÑAL DE CONTROL DEL SISTEMA SIMULADO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA EL CONTROLADOR PI (REFERENCIA DE 0.5 RAD).

CONTROL PROPORCIONAL DERIVATIVO (PD)

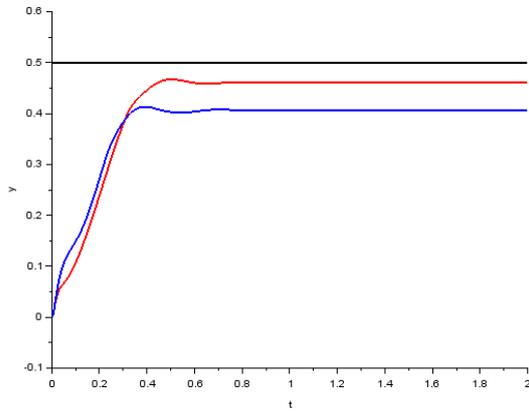


FIGURA 6.2.7: POSICIÓN DEL BRAZO A LA SALIDA DEL SISTEMA SIMULADO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA EL CONTROLADOR PD (REFERENCIA DE 0.5 RAD).

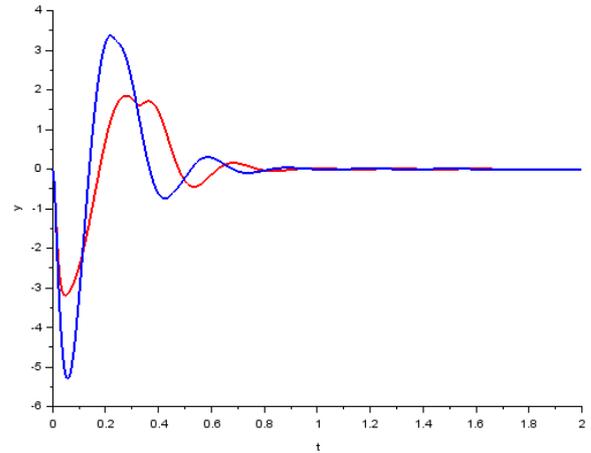


FIGURA 6.2.8: ÁNGULO DE DEFORMACIÓN DEL BRAZO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA EL CONTROLADOR PD (REFERENCIA DE 0.5 RAD).

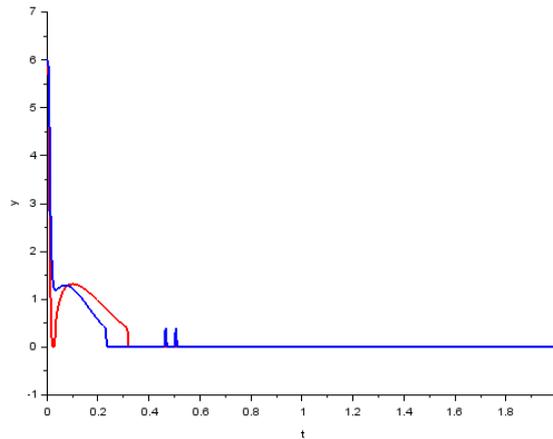


FIGURA 6.2.9: SEÑAL DE CONTROL DEL SISTEMA SIMULADO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA EL CONTROLADOR PD (REFERENCIA DE 0.5 RAD).

CONTROL PROPORCIONAL, INTEGRAL Y DERIVATIVO (PID)

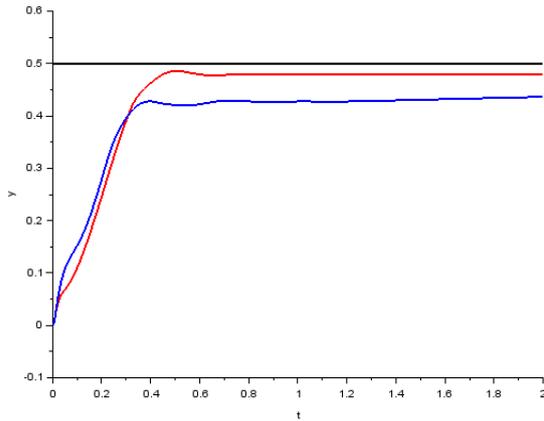


FIGURA 6.2.10: POSICIÓN DEL BRAZO A LA SALIDA DEL SISTEMA SIMULADO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA EL CONTROLADOR PID (REFERENCIA DE 0.5 RAD).

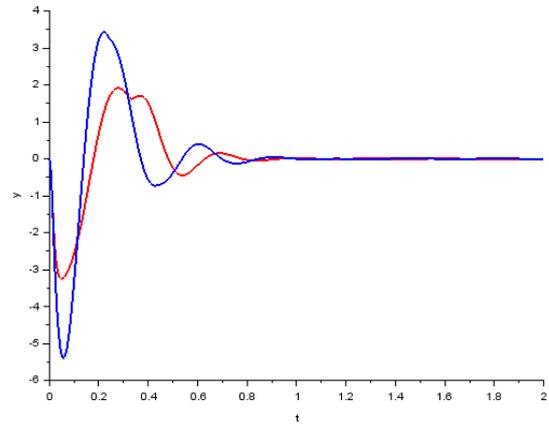


FIGURA 6.2.11: ÁNGULO DE DEFORMACIÓN DEL BRAZO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA EL CONTROLADOR PID (REFERENCIA DE 0.5 RAD).

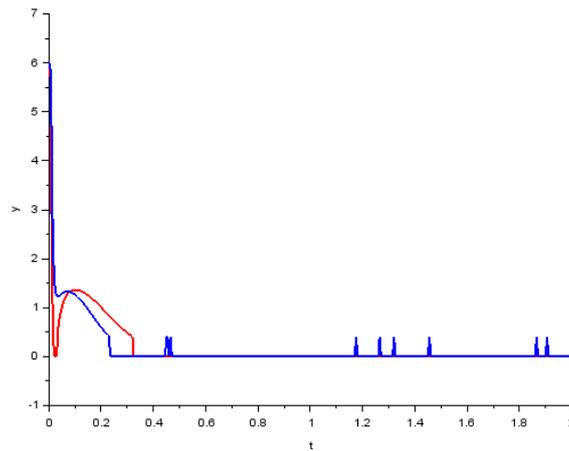


FIGURA 6.2.12: SEÑAL DE CONTROL DEL SISTEMA SIMULADO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA EL CONTROLADOR PID (REFERENCIA DE 0.5 RAD).

RED DE ATRASO

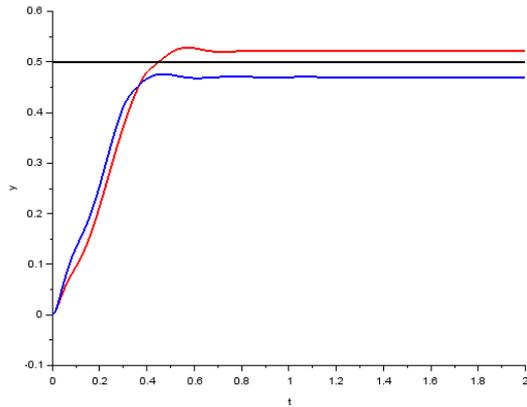


FIGURA 6.2.13: POSICIÓN DEL BRAZO A LA SALIDA DEL SISTEMA SIMULADO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA LA RED DE ATRASO (REFERENCIA DE 0.5 RAD).

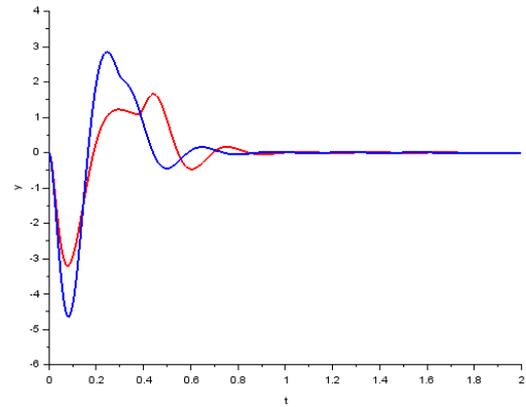


FIGURA 6.2.14: ÁNGULO DE DEFORMACIÓN DEL BRAZO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA LA RED DE ATRASO (REFERENCIA DE 0.5 RAD).

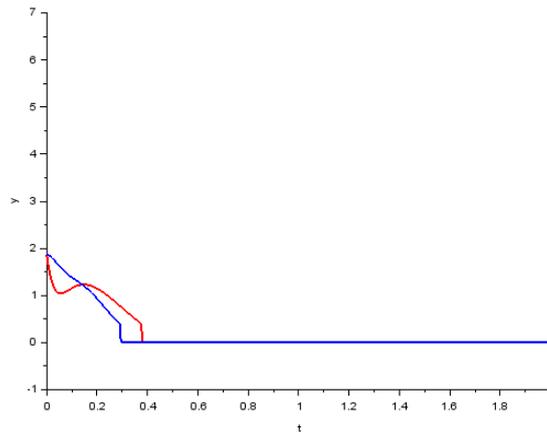


FIGURA 6.2.15: SEÑAL DE CONTROL DEL SISTEMA SIMULADO (CON Y SIN FILTRO NOTCH) PARA LA RED DE ATRASO (REFERENCIA DE 0.5 RAD).

TABLA 6.2.1: RESULTADOS OBTENIDOS PARA LOS DIFERENTES CONTROLADORES (0.5 RAD) (1).

CONTROLADOR	Error en permanente (%)	Rebose (%)	Tiempo de pico (s)
P	15,6	1,185	0,505
P (Filtro Notch)	5,6	1,271	0,6
PI	17,2	1,208	0,525
PI (Filtro Notch)	7,2	1,293	0,61
PD	18,8	1,724	0,395
PD (Filtro Notch)	7,8	1,302	0,5
PID	12,8	-	-
PID (Filtro Notch)	4,2	1,253	0,51
RED DE ATRASO	6,0	1,277	0,465
RED DE ATRASO (Filtro Notch)	4,4	1,149	0,57
ESPECIFICACIONES	7	3	0,55

TABLA 6.2.2: RESULTADOS OBTENIDOS PARA LOS DIFERENTES CONTROLADORES (0.5 RAD) (2).

CONTROLADOR	Tiempo de establecimiento (s)	Máxima deformación del brazo flexible (°)	Tiempo de oscilaciones menores a 1° (s)
P	0,412	3,816	0,41
P (Filtro Notch)	0,512	2,619	0,52
PI	0,425	3,594	0,421
PI (Filtro Notch)	0,523	2,462	0,532
PD	0,325	5,301	0,335
PD (Filtro Notch)	0,416	3,199	0,425
PID	0,661	5,391	0,338
PID (Filtro Notch)	0,418	3,241	0,429
RED DE ATRASO	0,383	4,647	0,391
RED DE ATRASO (Filtro Notch)	0,483	3,207	0,495
ESPECIFICACIONES	1	4	0,5

NOTA: Para las especificaciones de error en permanente y tiempo de establecimiento, el valor final se fija tras 2 s.