

Gradu Amaierako Lana / Trabajo Fin de Grado
Fisikako Gradua / Grado en Física

Teoría de grupos de Lie aplicada a gravedad cuántica de lazos

Egilea/Autor:

Rubén de la Fuente Fernández

Zuzendaria/Director:

Iñaki Garay Elizondo

Leioa, 2020ko ekaina / Leioa, junio de 2020

Índice

1. Introducción	2
2. Geometría diferencial y gravedad	4
2.1. Variedades diferenciables	4
2.2. Vectores	5
2.3. Tensores y métrica	6
2.4. Curvatura	7
2.5. relatividad general	10
3. Grupos de Lie	11
3.1. Propiedades topológicas	12
3.1.1. Compacidad	12
3.1.2. Conectividad	12
3.1.3. Conectividad simple	12
3.2. Ejemplos	12
3.2.1. Grupos unitarios	12
3.2.2. Grupos ortogonales	13
3.2.3. Grupos ortogonales generalizados. El grupo de Lorentz	13
3.2.4. Grupos simplécticos	14
3.3. Exponencial de una matriz	14
3.4. Álgebras de Lie	15
3.5. Representaciones	16
3.6. $SU(2)$ y $SO(3)$	18
3.7. Grupos de Lie en física	21
3.7.1. Momento angular	21
3.7.2. Relatividad especial. El grupo de Lorentz	23
3.7.3. Mecánica analítica	24
3.7.4. Fibrados, Yang-Mills y modelo estándar	24
4. Gravedad cuántica de lazos	28
4.1. Formulación hamiltoniana de la relatividad general	29
4.1.1. Formulación lagrangiana	29
4.1.2. Descomposición 3+1 y formalismo ADM	29
4.2. Variables de Ashtekar	32
4.3. Cuantización	33
4.4. Operadores geométricos	35
4.5. Representación de Schwinger. Formalismo $U(N)$	36
5. Conclusiones	37

1. Introducción

La teoría de grupos de Lie tiene una fuerte presencia en múltiples ámbitos de la física, puesto que resulta útil en la descripción de simetrías continuas. Por tanto, su análisis y propiedades resultarán fundamentales en algunos aspectos de la física teórica en los que la simetría tome un papel central.

Esta clase de grupos están descritos por parámetros reales, así que no son grupos discretos como pueden ser los grupos de simetría de un sólido cristalino, sino que son continuos. Por ello, en su estudio pueden usarse herramientas del cálculo diferencial e integral que conocemos, así que será imprescindible la geometría diferencial [1–4].

El objetivo de este trabajo es ofrecer una descripción de los grupos de Lie desde el punto de vista tanto de la teoría de grupos como de la geometría diferencial, así como estudiar su estructura y características principales. Además, se buscará señalar algunas de sus aplicaciones en diversos ámbitos de la física teórica. En particular, se estudiará con más detenimiento la presencia de los grupos de Lie en la gravedad cuántica de lazos, y cómo sus propiedades permean en el planteamiento de esta teoría.

Para ello, se introducirán algunos conceptos y estructuras de geometría diferencial, necesarios tanto para la descripción de los grupos de Lie como para la relatividad general. Esta teoría de la gravedad, además de ilustrar con un ejemplo los conceptos introducidos, constituirá el punto de partida en la formulación de la gravedad cuántica de lazos.

Los grupos de Lie son interesantes no sólo como transformaciones de simetría, sino como objeto de estudio por sí mismos. Sus particularidades y estructura adicional que los diferencia de los grupos matemáticos generales les proporciona una profundidad conceptual añadida. Una de sus principales peculiaridades fue descubierta por el matemático noruego Sophus Lie en 1870, en honor a quien deben hoy su nombre. Se trata de la posibilidad de estudiar estos grupos a través de un objeto diferente, denominado álgebra de Lie, con el que es más simple operar [1, 5–8].

El comportamiento de estos grupos y sus álgebras como transformaciones de simetría vendrá dada por la forma en que actúan sobre espacios vectoriales. Las propiedades geométricas de los grupos determinarán la forma en que transforman los vectores. Por ejemplo, uno de los grupos de transformaciones continuas más conocido es el de las rotaciones en tres dimensiones. Este grupo no solo será capaz de transformar los vectores tridimensionales, sino que se podrá aplicar a otros espacios vectoriales, como el espacio de Hilbert de estados cuánticos. La estructura de este grupo determinará la forma de los estados de momento angular definido en mecánica cuántica [1, 5–9].

Los grupos de Lie se utilizan también como elemento de construcción de estructuras más complejas en geometría diferencial, por ejemplo los fibrados. Estos son estructuras fundamentales para la formulación de teorías de gauge local, o teorías de Yang-Mills, que describen campos de interacción. Uno de los ejemplos más representativos de este tipo de teorías es el de las interacciones entre partículas en el modelo estándar [1, 7, 10].

La aplicación en física de estos grupos a la que se prestará más atención en este trabajo

es la gravedad cuántica de lazos. Esta teoría es una de las candidatas a ofrecer una descripción cuántica del campo gravitatorio. Para ello, reformula la descripción de la gravedad dada por la relatividad general usando las llamadas variables de Ashtekar. Estas nuevas variables introducen una libertad extra a la teoría, una libertad de rotación. Además, esta libertad es local, lo que recordará a las teorías de Yang-Mills permitiendo cierta analogía en sus estructuras [11–14].

A la hora de cuantizar, esta teoría emplea la representación de lazos, en la que se introduce como base del espacio de Hilbert de los estados cuánticos unos grafos compuestos de aristas que convergen en vértices. A cada una de esas aristas se le asocia un spin. Este spin no está relacionado con el momento angular intrínseco que conocemos de mecánica cuántica, la similitud con este viene dada por el grupo de Lie subyacente [11–14].

Uno de los marcos en los que se trata la gravedad cuántica de lazos es el de la representación de Schwinger. Esta representación reescribe los operadores de spin en función de los operadores aniquilación y creación de dos osciladores armónicos desacoplados [9]. Aplicar esta representación a los grafos da lugar al denominado formalismo $U(N)$ [15].

La estructura que seguirá este trabajo será, en la sección 2 introducir los elementos necesarios de la geometría diferencial y su aplicación en la relatividad general. En la sección 3 se describirán las principales propiedades de los grupos de Lie y algunos ejemplos, además de sus álgebras y la forma en que transforman vectores. También se estudiará más en detalle el grupo de rotaciones en tres dimensiones en la sección 3.6. Se comentarán en la sección 3.7 las aplicaciones de los grupos de Lie en la teoría del momento angular en mecánica cuántica, en relatividad especial, en mecánica analítica y en la formulación de las teorías de Yang-Mills. Por último, en la sección 4, se comentará la motivación de la gravedad cuántica de lazos y se dará un breve resumen de su formulación y planteamiento, señalando la presencia de las propiedades de los grupos de Lie y comentando su importancia para la futura solución de los problemas de la teoría.

2. Geometría diferencial y gravedad

Los grupos de Lie son estudiados por la geometría diferencial, la disciplina matemática que usa herramientas del cálculo diferencial e integral y el álgebra lineal y multilineal en el estudio de la geometría. Antes de tratarlos, necesitaremos estudiar las variedades diferenciables y sus propiedades, lo que usaremos de punto de partida para hablar de relatividad general, necesaria para la gravedad cuántica de lazos [1–6, 8, 11]. En esta sección y durante todo el trabajo se empleará el convenio de Einstein para índices, en la que índices repetidos en una expresión implican un sumatorio en todo su rango.

2.1. Variedades diferenciables

Una **variedad diferenciable** n -dimensional es un conjunto que se parece localmente a \mathbb{R}^n . Es decir, podremos trasladar a estos conjuntos arbitrarios el cálculo diferencial que conocemos.

Para definir su estructura, escogeremos una serie de subconjuntos $\{O_\alpha\}$ que cubran todos los puntos de la variedad \mathcal{M} entera. Para cada uno de ellos, definiremos unas aplicaciones biyectivas $\psi_\alpha : O_\alpha \rightarrow U_\alpha$ que lleven cada punto de O_α a un subconjunto abierto U_α de \mathbb{R}^n . Llamaremos a estas aplicaciones **cartas** o **sistemas de coordenadas**.

Algunos subconjuntos O_α tendrán intersecciones no nulas en las que definiremos unas aplicaciones de cambio de coordenadas. Si consideramos la intersección $O_\alpha \cap O_\beta \neq \emptyset$, la aplicación $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ llevará puntos de $\psi_\alpha[O_\alpha \cap O_\beta] \subset U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ a puntos de $\psi_\beta[O_\alpha \cap O_\beta] \subset U_\beta \subset \mathbb{R}^n$, es decir, para un punto descrito por dos cartas, relacionará las coordenadas que le asigna ψ_α con las que asigna ψ_β . Llamaremos **atlas** al conjunto de cartas junto con las aplicaciones $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ que las “cosen”. Al ser $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ una aplicación de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n , sabemos lo que significa que sea diferenciable. Si $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ es continua e infinitamente diferenciable (C^∞) diremos que la variedad \mathcal{M} junto con el atlas es diferenciable [1–4].

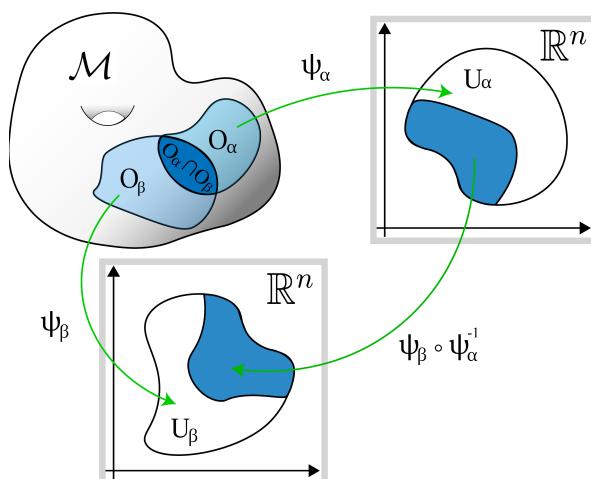


Figura 1: Diagrama representativo de las cartas y los cambios de coordenadas.

Por ejemplo, la 2-esfera $S^2 = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 | (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1\}$ es una variedad diferenciable. No podemos cubrir toda la esfera con una sola carta, pues quedarían

puntos sobredeterminados. Por ejemplo, podemos cortarla por un plano que pase por el centro de la esfera y proyectar cada hemisferio en un disco en \mathbb{R}^2 . Repetimos este proceso con dos planos con vector normal perpendicular al del primero y entre sí para cubrir todos los puntos de la esfera.

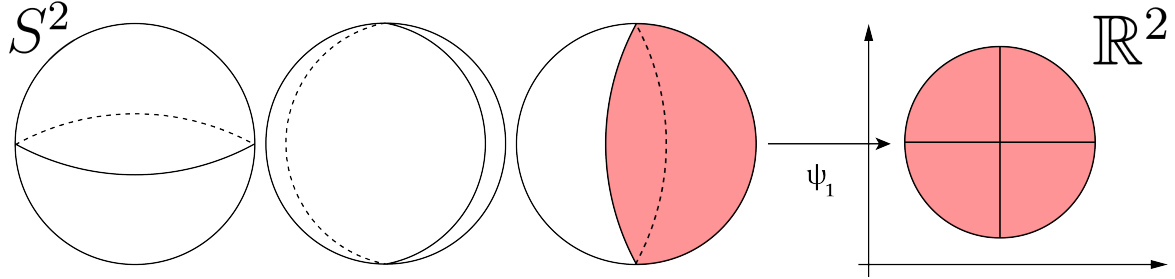


Figura 2: Diagrama de una posible configuración de cartas sobre la 2-esfera S^2 .

Entonces, podemos decir que la 2-esfera es una variedad diferenciable de dimensión 2, puesto que las cartas proyectan sus puntos sobre \mathbb{R}^2 . Un razonamiento similar se sigue para demostrar que la n -esfera es una variedad diferenciable

$$S^n = \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^3 | (x^1)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 = 1\}. \quad (2.1)$$

2.2. Vectores

Las variedades, en general, no tienen estructura de espacio vectorial. Los vectores yacerán en el **espacio tangente** a la variedad V_p en un punto p . De esta forma, lo que haremos será asociar a cada punto de la variedad un espacio vectorial de la dimensión de ésta. En principio y sin definir estructura adicional, los espacios tangentes a dos puntos distintos no tienen relación entre sí.

Siendo \mathcal{F} la colección de funciones C^∞ de \mathcal{M} en \mathbb{R} , definiremos la derivada direccional $X_\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ en un punto p como

$$X_\mu(f) = \left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} (f \circ \psi^{-1}) \right|_{\psi(p)} \quad (2.2)$$

con x^μ las coordenadas Cartesianas de \mathbb{R}^n . Los vectores tangentes X_1, \dots, X_n representan una base del espacio tangente a la variedad en p , por lo que podemos expresar cualquier vector de la forma $v^\mu X_\mu$. Denotaremos por simplicidad X_μ como $\partial/\partial x^\mu$ o simplemente ∂_μ .

Esta base, única para cada carta, se llama base coordenada. Podemos expresar los elementos de la base coordenada para una carta ψ' en función de la que ya tenemos usando la regla de la cadena

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left. \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \right|_{\psi(p)} \frac{\partial}{\partial x'^\nu}. \quad (2.3)$$

Y, entonces, las componentes v'^ν de un vector se relacionan con sus componentes en la vieja base de la forma

$$v'^\mu = v^\nu \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}, \quad (2.4)$$

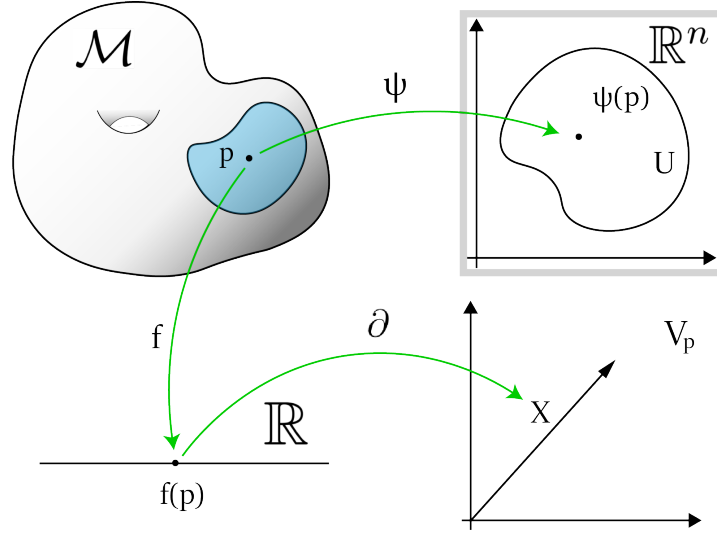


Figura 3: Diagrama de las funciones que utilizamos para la construcción del espacio tangente en la ecuación (2.2).

donde $\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu}$ serán simplemente los elementos del inverso de la matriz Jacobiana de transformación entre los dos sistemas de coordenadas.

Las componentes del vector tangente T a una curva descrita de forma paramétrica por sus coordenadas $x^\mu(t)$ vendrán dadas por:

$$T^\mu = \frac{dx^\mu}{dt}. \quad (2.5)$$

Definiremos también el **espacio cotangente** V_p^* . Éste es el espacio vectorial formado por las aplicaciones lineales $f : V_p \rightarrow \mathbb{R}$. Es decir, es el espacio dual al espacio tangente. Usualmente nos referiremos a los vectores en V_p como vectores contravariantes y a los vectores en V_p^* como vectores covariantes. Una vez se ha escogido una base para V_p , la denominada base dual a ella de V_p^* es aquella que cumple que $f^\mu(X_\nu) = \delta_\nu^\mu$, donde $\delta_\nu^\mu = 1$ si $\mu = \nu$ y 0 si no. Usando la base coordenada para V_p , la base de V_p^* que escogeremos será dx^μ , de forma que un vector covariante se escribe $\omega = \omega_\mu dx^\mu$ [1–4]. Al cambiar de carta, sus coordenadas cambian de la forma

$$\omega'_\nu = \omega_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}, \quad (2.6)$$

operando de forma análoga a la ecuación (2.3) [1–4].

2.3. Tensores y métrica

Un **tensor** (k, l) es una aplicación multilinear $T : \underbrace{V_p^* \times \dots \times V_p^*}_k \times \underbrace{V_p \times \dots \times V_p}_l \rightarrow \mathbb{R}$.

Es decir, dados k vectores covariantes y l vectores contravariantes, T produce un número actuando de forma lineal en cada entrada. Un tensor $(0, 1)$ es un vector covariante, y un tensor $(1, 0)$ es un vector contravariante.

Si usamos la base coordenada de V_p , un tensor se escribe usando sus componentes de la forma

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_k} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_k}, \quad (2.7)$$

y estas se transforman al cambiar de carta

$$T'^{\mu'_1 \dots \mu'_k}_{\nu'_1 \dots \nu'_l} = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x^{\nu'_l}}. \quad (2.8)$$

Para operar con tensores, usaremos habitualmente la notación de índices, por lo que la emplearemos para explicar dos importantes operaciones. La contracción de un tensor consiste en rebajar su rango de (k, l) a $(k-1, l-1)$ con respecto a un índice covariante y uno contravariante igualando ambos $T^{\mu_1 \dots \sigma \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \sigma \dots \nu_l}$. Por ejemplo, la contracción de un tensor $(1, 1)$ con respecto a sus dos únicos índices es simplemente la traza de la matriz que lo representa. El producto exterior de dos tensores es una operación que toma un tensor (k, l) T y un tensor (k', l') T' para dar como resultado un tensor $(k+k', l+l')$ S , $S^{\mu_1 \dots \mu_{k+k'}}_{\nu_1 \dots \nu_{l+l'}} = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} T'^{\mu_{k+1} \dots \mu_{k+k'}}_{\nu_{l+1} \dots \nu_{l+l'}}$. Por ejemplo, la operación $T^{\mu\sigma\lambda}_{\sigma\rho} v^\rho S_{\lambda\nu}$ da como resultado un tensor $(1, 1)$.

Hemos definido los tensores a partir del espacio tangente a un punto de la variedad, por tanto, tienen carácter local. Si asignamos un tensor a cada punto de la variedad obtenemos un campo tensorial, que diremos que es suave si sus coordenadas son funciones suaves al moverse por la variedad.

Un tipo especial de tensor es el tensor métrico, o simplemente **métrica**. Una métrica g es un tensor $(0, 2)$ simétrico ($g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$) y no degenerado (ninguno de sus autovalores es 0) que nos da información sobre cómo medir distancias en la variedad. El llamado elemento de línea ds , la distancia infinitesimal, se calcula

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.9)$$

La métrica, como tensor $(0, 2)$, es una aplicación de V_p en V_p^* . Esta aplicación es invertible, y su inversa se denota $g^{\mu\nu}$. Entonces, la métrica asigna a cada vector covariante un vector contravariante de forma unívoca, y viceversa. Notacionalmente se expresa con la acción de subir o bajar índices. $g_{\mu\nu} v^\nu = v_\mu$, $g^{\mu\nu} \omega_\nu = \omega^\mu$ [2-4].

2.4. Curvatura

Intuitivamente, podemos distinguir una superficie curva de una plana en \mathbb{R}^3 . Esta noción de curvatura de una variedad en referencia a otra de dimensión mayor en la que está contenida se denomina curvatura extrínseca. Buscamos una definición de **curvatura intrínseca** que no haga referencia a variedades en las que nuestra variedad pueda yacer. En una variedad curva, la geometría no se comporta de manera intuitiva, por ejemplo, la suma de ángulos de un triángulo no será 180° . En el caso de una esfera si transportamos un vector a lo largo de una curva cerrada como se ilustra en la figura 4, el vector resultante no coincidirá con el inicial. Esta forma de transportar un vector se denomina transporte

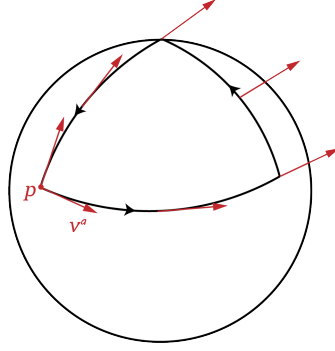


Figura 4: Transporte paralelo de un vector v^μ a lo largo de una curva cerrada sobre la esfera.

paralelo, y necesitaremos definirlo para establecer la curvatura intrínseca. Antes se debe definir un nuevo operador, el operador **derivada covariante** ∇ [2–4].

La derivada covariante lleva un campo tensorial (k, l) suave a otro campo tensorial $(k, l + 1)$ suave y ha de cumplir las siguientes propiedades:

1. Linearidad: $\nabla_\rho(\alpha T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} + \beta S^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}) = \alpha \nabla_\rho T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} + \beta \nabla_\rho S^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}$.
2. Regla de Leibnitz: $\nabla_\rho(T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} S^{\eta_1 \dots \eta_{k'}}_{\gamma_1 \dots \gamma_{l'}}) = (\nabla_\rho T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}) S^{\eta_1 \dots \eta_{k'}}_{\gamma_1 \dots \gamma_{l'}} + T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \nabla_\rho(S^{\eta_1 \dots \eta_{k'}}_{\gamma_1 \dots \gamma_{l'}})$.
3. Conmutatividad con la contracción: $\nabla_\rho(T^{\mu_1 \dots \eta \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \eta \dots \nu_l}) = \nabla_\rho T^{\mu_1 \dots \eta \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \eta \dots \nu_l}$.
4. Consistencia con la identificación de vectores tangentes como derivadas direccionales de campos escalares: $t(f) = t^\mu \nabla_\mu f$.
5. Torsión nula: $\nabla_\mu \nabla_\nu f - \nabla_\nu \nabla_\mu f = 0$. Esta condición no es necesaria, sin embargo, solo usaremos la derivada covariante en relatividad general, y esta teoría emplea derivadas libres de torsión.

De estas propiedades se deduce que la derivada covariante toma la forma

$$\nabla_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu v^\rho, \quad (2.10)$$

$$\nabla_\mu \omega_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \omega_\rho, \quad (2.11)$$

siendo $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ un campo tensorial¹ $(1, 2)$ suave simétrico respecto a sus índices covariantes $\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\nu\mu}^\rho$ sobre el que tenemos libertad de elección y que se denomina conexión o símbolos de Christoffel.

Podemos ahora definir la noción de transporte paralelo. Decimos que un vector v^μ se transporta paralelamente a lo largo de una curva con vector tangente t^μ si la relación

$$t^\mu \nabla_\mu v^\nu = 0 \quad (2.12)$$

¹Decimos tensorial en el sentido de que es una aplicación multilineal sobre vectores, sin embargo no se transforma como lo hacen los tensores (ecuación 2.8), al igual que la derivada parcial. No obstante, las contribuciones no deseadas al cambio de coordenadas de estas dos se cancelan y la derivada covariante sí se transforma correctamente.

se cumple a lo largo de toda la curva.

Para hacer una elección de los símbolos de Christophel, exigiremos que el producto escalar de dos vectores se mantenga invariante al transportarlos paralelamente a lo largo de cualquier curva, es decir

$$t^\mu \nabla_\mu (g_{\nu\rho} v^\nu w^\rho) = 0 \Rightarrow t^\mu (\nabla_\mu g_{\nu\rho}) v^\nu w^\rho + t^\mu (\nabla_\mu v^\nu) g_{\nu\rho} w^\rho + t^\mu (\nabla_\mu w^\rho) g_{\nu\rho} v^\nu = 0. \quad (2.13)$$

Como estamos en situación de transporte paralelo, v^μ y w^ρ vectores que satisfacen (2.12), por lo que la condición se reduce a

$$\nabla_\mu g_{\nu\rho} = 0. \quad (2.14)$$

Ahora sí, la conexión queda unívocamente determinada y toma la forma

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\eta} [\partial_\mu g_{\nu\eta} + \partial_\nu g_{\mu\eta} - \partial_\eta g_{\mu\nu}], \quad (2.15)$$

que se denomina conexión de Levi-Civita [2, 3].

Como hemos dicho, en una variedad curva el transporte paralelo a lo largo de una línea cerrada no coincide con el vector inicial. Esta definición de curvatura viene dada por el **tensor de curvatura de Riemann**, que se identifica como el conmutador de dos derivadas covariantes sucesivas

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \omega_\rho - \nabla_\nu \nabla_\mu \omega_\rho = R_{\mu\nu\rho}{}^\eta \omega_\eta \quad (2.16)$$

o, en términos de los símbolos de Christophel,

$$R_{\nu\rho\eta}{}^\mu = \partial_\rho \Gamma_{\nu\eta}^\mu - \partial_\nu \Gamma_{\rho\eta}^\mu + \Gamma_{\nu\eta}^\gamma \Gamma_{\gamma\rho}^\mu - \Gamma_{\rho\eta}^\gamma \Gamma_{\gamma\nu}^\mu. \quad (2.17)$$

A partir del tensor de curvatura se definen el tensor de Ricci $R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}{}^\rho$, el escalar de curvatura $R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$ y el tensor de Einstein $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$. Si el tensor de Riemann es nulo, la variedad será intrínsecamente plana. Si no es nulo, será curva [2, 3].

Conociendo las propiedades de curvatura de una variedad, podemos establecer una clase especial de curva, las **geodésicas** o curvas de mínima distancia, las curvas más rectas posibles. Es claro que en el espacio plano estas curvas serán líneas rectas, pero tendrán formas más variadas en variedades curvas. Estas curvas son aquellas cuyo vector tangente se propaga paralelamente a sí mismo. Es decir, el vector tangente cumple la ecuación (2.12) $t^\mu \nabla_\mu t^\nu = t^\mu \partial_\mu t^\nu + t^\mu \Gamma_{\mu\lambda}^\nu t^\lambda = 0$. Usando la ecuación 2.5 para escribir las componentes del vector tangente en función de las coordenadas de la curva y el parámetro t que la describe, la ecuación para las coordenadas de una geodésica queda

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \Gamma_{\sigma\nu}^\mu \frac{dx^\sigma}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 0. \quad (2.18)$$

En el caso en el que la conexión sea nula vemos que se reduce simplemente a la ecuación diferencial que describe una línea recta [2-4].

Se puede definir también otro tipo de derivada sobre los tensores, la **derivada de Lie**. Para esta clase de derivada no hace falta introducir una conexión, sino que se introduce

una congruencia de curvas que no se cortan entre sí. La derivada de Lie nos da una idea de cómo varía un tensor a lo largo de esas curvas [2, 4]. Si $t^\mu(x)$ es el campo vectorial que en cada punto coincide con el vector tangente a la curva que pasa por él, la derivada de Lie de campos vectoriales covariantes y contravariantes es

$$L_t v^\mu = t^\nu \partial_\nu v^\mu - v^\nu \partial_\nu t^\mu \quad ; \quad L_t \omega_\mu = t^\nu \partial_\nu \omega_\mu + \omega_\nu \partial_\mu t^\nu. \quad (2.19)$$

2.5. relatividad general

La **relatividad general** es una teoría de la gravedad formulada por Albert Einstein en 1915, la más acertada y probada teoría de la gravedad que tenemos, por lo que será el punto de partida para tratar la gravedad cuántica de lazos. Se basa en dos principios básicos: el principio de equivalencia, que estipula que localmente un sistema bajo la acción de un campo gravitatorio es indistinguible de uno siendo acelerado, y el principio de covariancia, que plantea que las leyes físicas han de tener la misma forma en todo sistema de referencia. Esta teoría plantea el espacio-tiempo como una variedad diferenciable en general curva. La gravedad entonces no es una fuerza real, sino una fuerza ficticia debida a que las trayectorias de los cuerpos por la variedad no serán líneas rectas, sino geodésicas. La conexión actuará como una aceleración ficticia análoga a las aceleraciones centrífuga y de coriolis en sistemas en rotación. Además, siempre podremos escoger unas coordenadas en las que localmente la conexión se anule [2-4].

La curvatura del espacio-tiempo viene dada por las ecuaciones de Einstein

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.20)$$

donde T_{ab} es el tensor de energía-momento, que contiene información de la distribución de materia y energía en nuestro espacio-tiempo. Estas son 10 complicadas ecuaciones diferenciales no lineales acopladas de segundo orden en las componentes de la métrica, que nos dan información de las geometrías posibles en un espacio-tiempo físico y a qué distribuciones de materia corresponden. Es decir, la materia curva el espacio-tiempo y el espacio-tiempo define el movimiento de la materia.

3. Grupos de Lie

Empezaremos recordando el concepto de grupo. Un **grupo** G es un conjunto dotado de una operación interna (\cdot) que combina dos elementos del grupo para dar lugar a otro. Esta operación es tal que existe el elemento recíproco y un elemento neutro I .

$$g \cdot g' = g'' \quad (3.1)$$

$$g \cdot I = g = I \cdot g \quad (3.2)$$

$$g \cdot g^{-1} = I \quad (3.3)$$

con g, g^{-1}, g', g'' y $I \in G$. La operación de grupo cumple la propiedad asociativa. Usualmente omitiremos el símbolo \cdot , puesto que trabajaremos con grupos de matrices en los que la operación de grupo es simplemente la multiplicación de matrices.

Un **grupo de Lie** es un grupo que también es una variedad diferenciable, puesto que la operación de grupo y la inversión son C^∞ . Un simple ejemplo es el de los números complejos de módulo unidad

$$\{z \in \mathbb{C} ; |z|^2 = (Re(z))^2 + (Im(z))^2 = 1\}. \quad (3.4)$$

Es claro que este es un grupo con la multiplicación usual pudiendo expresarlo de la forma $e^{i\theta}$ con $\theta = \arctan\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right)$. Además, por analogía con la ecuación (2.1), es también una 1-esfera (un círculo), por lo que también es una variedad diferenciable [5–8].

Discutiremos solo una clase de grupos de Lie, los llamados grupos de Lie de matrices. Estos son todos subgrupos del **grupo lineal general**, el grupo de las matrices invertibles $n \times n$. Denominaremos a este grupo $GL(n, \mathbb{R})$ si las entradas son reales y $GL(n, \mathbb{C})$ si son complejas. Llamaremos grupo lineal especial $SL(n, \mathbb{C})$ al subgrupo de matrices de $GL(n, \mathbb{C})$ con determinante unidad.

Los elementos de un grupo de Lie de matrices pueden identificarse con un número finito de parámetros reales. El mínimo número de parámetros que pueden usarse para identificar un elemento del grupo es la dimensión de éste. Por ejemplo, el grupo de los números complejos de módulo unidad (3.4) tiene dimensión 1, puesto que puede ser descrito por un único parámetro θ . La dimensión de las matrices de un grupo no tiene por qué coincidir con la dimensión del grupo.

Definiremos una clase concreta de aplicaciones entre grupos de Lie, los **homomorfismos de grupos de Lie**. Un homomorfismo entre grupos es una aplicación que lleva elementos de un grupo a otro conservando la operación de grupo, lo que obliga a que la aplicación lleve la identidad del primer grupo a la identidad del segundo. Si esta aplicación es además continua, diremos que es un homomorfismo de grupos de Lie. Además, si el homomorfismo es biyectivo y su inversa es también continua, diremos que es un **isomorfismo de grupos de Lie** [1, 5–7].

3.1. Propiedades topológicas

Como hemos dicho, los grupos de Lie son una clase de variedad diferenciable, y como tal pueden (o no) presentar ciertas propiedades topológicas, algunas de las cuales serán comentadas a continuación [5].

3.1.1. Compacidad

Un conjunto compacto es aquel con fronteras (cerrado), y además sus fronteras están contenidas en el conjunto (acotado). En el caso de los grupos de matrices, esto se traduce en que el módulo de cada elemento de las matrices que lo componen esán siempre por debajo de un cierto número C , $|A_{ij}| \leq C$. Por ejemplo, los conjuntos $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$ y $SU(n)$ son grupos compactos, con $|A_{ij}| \leq 1$.

3.1.2. Conectividad

Una variedad es conexa si para cualquier par de elementos de la variedad g y h existe una curva $\gamma(t)$ continua que cumple que $\gamma(0) = g$ y $\gamma(a) = h$, es decir, la curva une de forma continua los elementos de la variedad.

Definiremos la componente identidad de un grupo de Lie como el subconjunto de matrices g conectadas con la identidad, es decir, $\gamma(0) = I$ y $\gamma(a) = g$. Evidentemente en un grupo conexo la componente identidad será el grupo completo.

3.1.3. Conectividad simple

Una variedad es simplemente conexa si podemos deformar de forma continua cualquier curva cerrada para dar lugar a un punto.

3.2. Ejemplos

Si bien hay multitud de grupos de Lie, comentaremos algunos de los ejemplos más recurrentes en física.

3.2.1. Grupos unitarios

Una matriz g de dimensión $n \times n$ pertenece al grupo unitario $U(n)$ si sus vectores columna son ortonormales usando el producto interno estándar en \mathbb{C}^n $\langle x, y \rangle = \delta_{ij} \bar{x}^j y^i$

$$\bar{g}_{li} g_{lj} = g^{\dagger}_{il} g_{lj} = \delta_{ij} \quad (3.5)$$

donde \bar{g}_{li} es el complejo conjugado de g_{li} y g^{\dagger} es la matriz adjunta de g , es decir su traspuesta conjugada. Equivalentemente, $g^{\dagger}g = I$, por lo tanto,

$$g^{\dagger} = g^{-1}. \quad (3.6)$$

Además, las matrices unitarias preservan el producto interno estándar en \mathbb{C}^n

$$\langle gx, gy \rangle = \langle g^{\dagger}gx, y \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Una matriz es unitaria si y solo si preserva el producto en \mathbb{C}^n .

Dado que para una matriz M general, $\det M^\dagger = \overline{\det M}$, en el caso unitario $\det(g^\dagger g) = \overline{\det g} \det g = |\det g|^2 = \det I = 1$. Por tanto, si $g \in U(n)$ entonces $\det g = \pm 1$. El subgrupo correspondiente al signo positivo se denomina grupo unitario especial $SU(n)$. Es claro que (3.4) representa el grupo $U(1)$, puesto que $\overline{(e^{i\theta})} = e^{-i\theta} = (e^{i\theta})^{-1}$ [5–7].

3.2.2. Grupos ortogonales

Siguiendo un razonamiento análogo al caso unitario, una matriz real g de dimensión $n \times n$ pertenece al grupo ortogonal $O(n)$ si sus vectores columna son ortonormales usando el producto escalar euclídeo en \mathbb{R}^n $(x, y) = \delta_{ij} x^j y^i$

$$\delta_{kl} g^{ki} g^{lj} = \delta_{kl} g^{Tik} g^{lj} = \delta_{ij} \quad (3.7)$$

donde g^T es la matriz traspuesta de g . En este caso podemos expresar la condición como $g^T g = 1$. Entonces

$$g^T = g^{-1} \quad (3.8)$$

Como en el caso unitario, una matriz será ortogonal si y solo si preserva el producto escalar euclídeo en \mathbb{R}^n

$$(gx, gy) = (g^T gx, y) = (x, y).$$

Las matrices ortogonales también cumplen que $\det g = \pm 1$, y si nos restringimos al caso positivo obtenemos matrices pertenecientes al grupo ortogonal especial $SO(n)$. Los elementos de $SO(n)$ representan rotaciones, mientras que los de $O(n)$ representan bien rotaciones o bien combinaciones de rotaciones y reflexiones. Podemos repetir el procedimiento permitiendo entradas complejas en las matrices, llegando a la conclusión de que las matrices complejas pertenecen a $O(n, \mathbb{C})$ si y solo si $g^T g = 1$. Estas matrices tienen determinante $\det g = \pm 1$ y podemos seleccionar aquellas con determinante unidad obteniendo elementos de $SO(n, \mathbb{C})$ [5–7].

3.2.3. Grupos ortogonales generalizados. El grupo de Lorentz

Se puede generalizar el concepto de matriz ortogonal usando en lugar del producto euclídeo la forma bilineal

$$(x, y)_{n,n'} = -x_1 y_1 - \dots - x_n y_n + x_{n+1} y_{n+1} + \dots + x_{n+n'} y_{n+n'} = \eta_{ij} x^j y^i \quad (3.9)$$

con x e y vectores de $\mathbb{R}^{n+n'}$ y η una matriz diagonal con menos unos en sus n primeros elementos y unos en los n' siguientes

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & -1 & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Las matrices g de dimensión $(n+n') \times (n+n')$ que lo preservan $(gx, gy)_{n,n'} = (x, y)_{n,n'}$ constituyen el grupo ortogonal generalizado $O(n, n')$. Equivalentemente, una matriz g pertenece a $O(n, n')$ si y solo si $g^T \eta g = \eta$. Esto además impone que $(\det g)^2 \det \eta = \det \eta \Rightarrow \det g = \pm 1$. Igual que en el resto de casos, restringirnos al caso del determinante positivo da lugar al grupo $SO(n, n')$. En concreto, el grupo $O(1, 3)$ se denomina grupo de Lorentz, que tiene un interés particular en el estudio de la relatividad especial [5].

3.2.4. Grupos simplécticos

Un grupo real simpléctico $Sp(n; \mathbb{R})$ de matrices $2n \times 2n$ está constituido por matrices que preservan la forma bilineal

$$\omega(x, y) = \Omega_{ij} x^i y^j \quad (3.11)$$

siendo $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ y x e y vectores de \mathbb{R}^{2n} . Las matrices que lo forman cumplen $-\Omega g^T \Omega = g^{-1}$. Equivalentemente se define el grupo complejo simpléctico como el grupo de las matrices que preservan la misma forma ω tomando vectores en \mathbb{C}^{2n} . Todas las matrices simplécticas tienen determinante unidad [5].

3.3. Exponencial de una matriz

La exponencial de matrices juega un papel central en el estudio de los Grupos de Lie, puesto que constituye la herramienta que relaciona el grupo con su espacio tangente. Se define la exponencial de una matriz X de dimensión $n \times n$ mediante su serie de Taylor

$$e^X = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{X^m}{m!}. \quad (3.12)$$

Esta serie converge para cualquier matriz de entradas complejas. Además, dado que X^m es una función continua de X , la exponencial también lo es [5–8].

Por ejemplo, si $X = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$, vemos que $X^2 = \begin{pmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{pmatrix}$, $X^3 = \begin{pmatrix} 0 & a^3 \\ -a^3 & 0 \end{pmatrix}$ y $X^4 = \begin{pmatrix} a^4 & 0 \\ 0 & a^4 \end{pmatrix}$. Como X^4 es proporcional a la identidad, el resto serán recurrentes excepto el factor de proporcionalidad, por lo tanto la suma quedará

$$e^X = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{X^m}{m!} = \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m a^{2m}}{2m!} & -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m a^{2m+1}}{(2m+1)!} \\ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m a^{2m+1}}{(2m+1)!} & \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m a^{2m}}{2m!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}.$$

La exponencial cumple las siguientes propiedades para dos matrices X e Y cualesquiera:

1. $e^0 = I$.
2. $(e^X)^\dagger = e^{X^\dagger}$.
3. e^X es invertible y $(e^X)^{-1} = e^{-X}$.
4. $\det(e^X) = e^{\text{tr}(X)}$

5. $e^{X^T} = (e^X)^T$
6. $e^{(\alpha+\beta)X} = e^{\alpha X} e^{\beta X}$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
7. $e^{X+Y} = e^X e^Y$ si y solo si $XY = YX$.
8. $e^{gXg^{-1}} = g e^X g^{-1}$ siendo g invertible.

3.4. Álgebras de Lie

Los grupos de Lie son variedades, en general curvas, cuyas propiedades pueden ser codificadas en su mayoría en un espacio vectorial con estructura adicional, el álgebra del grupo. Un **álgebra de Lie** \mathfrak{g} es un espacio vectorial sobre el que se define una aplicación bilineal antisimétrica denominada corchete de Lie $[\cdot, \cdot]$, que asocia dos elementos del álgebra con un tercero. Esta aplicación ha de cumplir la identidad de Jacobi $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. Hay un amplio rango de aplicaciones que pueden ser usadas como corchete para definir un álgebra, por ejemplo, \mathbb{R}^3 con el producto vectorial es un álgebra de Lie [5–8]. Sin embargo, para los álgebras de los grupos de matrices que usaremos, siempre definiremos el corchete de Lie como el conmutador $[X, Y] = XY - YX$.

Dada una base del álgebra $\{Y_i\}$, definimos las **constantes de estructura** c_{ij}^k como las constantes únicas para cada álgebra que satisfacen $[Y_i, Y_j] = c_{ij}^k Y_k$.

El álgebra se relaciona con el grupo mediante la aplicación exponencial e^{tY} . El álgebra \mathfrak{g} de un grupo G es el conjunto de las matrices que cumple que $e^{tY} = g$ con $Y \in \mathfrak{g}$ y $g \in G$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$. Dado que la exponencial conforma una curva continua en el grupo parametrizada por t , y cuando $t = 0$ se cumple que $e^{0 \cdot Y} = I$, mediante la exponencial de elementos del álgebra solo generaremos los elementos del grupo conectados con I , es decir, la componente identidad del grupo. Esto implica que el álgebra solo generará el grupo completo si este es conexo [5].

Si llamamos a la curva exponencial $\gamma(t) = e^{tY}$, de forma que $\gamma(0) = I$, el vector tangente a la curva será $\frac{d\gamma(t)}{dt} = Y e^{tY}$ según la ecuación (2.5), que para $t = 0$ quedará simplemente $\frac{d\gamma(t)}{dt} \Big|_{t=0} = Y$. Por lo tanto, los elementos Y del álgebra forman el **espacio tangente al grupo en la identidad** [5–8].

Esta propiedad permea a los homomorfismos de grupo. Si $\Phi : G \rightarrow H$ es un homomorfismo del grupo de Lie G al grupo de Lie H , existe una única aplicación $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ que relaciona las álgebras correspondientes a cada grupo, de forma que $\Phi(e^Y) = e^{\phi(Y)}$. En concreto, ϕ será la derivada de Φ en la identidad, dado que los homomorfismos de grupo han de relacionar las identidades de los grupos. Entonces $\phi(Y) = \frac{d\Phi(e^{tY})}{dt} \Big|_{t=0}$ con Y un elemento de \mathfrak{g} . Llamaremos a ϕ **homomorfismo de álgebras de Lie** [5].

Al tratar con aplicaciones en física se suele utilizar otro convenio para la aplicación exponencial, añadiéndola un factor i , quedando $e^{itX} = g$, de modo que el nuevo álgebra se relaciona con el anterior de la forma $iX = Y$. También cambiarán las constantes de estructura $[Y_i, Y_j] = [iX_i, iX_j] = -[X_i, X_j] = i c_{ij}^k X_k$, entonces las nuevas se relacionarán con las anteriores multiplicando por $-i$. Durante el resto del trabajo emplearemos este

convenio.

Por ejemplo, el álgebra de $U(n)$, $\mathfrak{u}(n)$, es el espacio de las matrices X de dimensión $n \times n$ que satisfacen $X^\dagger = -X$, las matrices hermíticas, lo que se demuestra usando las propiedades de la exponencial

$$(e^{iX})^\dagger = (e^{-iX})^{-1} \Rightarrow e^{X^\dagger} = e^X \Rightarrow X^\dagger = -X. \quad (3.13)$$

El álgebra de $SU(n)$ es $\mathfrak{su}(n)$, y lo componen las matrices de $\mathfrak{u}(n)$ con traza nula. Como el determinante de las matrices de $SU(n)$ es 1, $\det(e^{iX}) = e^{i\text{tr}(X)} = e^0 = 1$.

En el caso de los grupos ortogonales, el álgebra de $O(n)$ es el espacio de las matrices X de dimensión $n \times n$ que cumplen $X^T = -X$, lo cual se demuestra de forma análoga al caso unitario

$$(e^{iX})^T = (e^{iX})^{-1} \Rightarrow e^{iX^T} = e^{-iX} \Rightarrow X^T = -X. \quad (3.14)$$

Este tipo de matrices, las matrices antisimétricas, tienen traza cero por definición (de hecho, cada elemento de la diagonal es nulo), por tanto este también es el álgebra de $SO(n)$ y lo denominaremos $\mathfrak{so}(n)$.

3.5. Representaciones

En las aplicaciones físicas, lo que nos interesará de los grupos serán la forma en la que transforman los vectores. Siendo V un espacio vectorial sobre \mathbb{R} de dimensión n arbitrario, las transformaciones lineales invertibles sobre las coordenadas de los vectores dada una determinada base serán elementos del grupo $GL(n, \mathbb{R})$, o $GL(n, \mathbb{C})$ si tenemos un espacio vectorial sobre \mathbb{C} . Por otra parte, el espacio de los operadores lineales que llevan vectores de V a sí mismo será $\mathfrak{gl}(V) \equiv \text{End}(V)$ que, además, será un álgebra de Lie [5–7].

Una **representación de un grupo de Lie** G es un homomorfismo de grupos de Lie Π que lleva elementos del grupo a $GL(n, \mathbb{R})$ en el caso real y a $GL(n, \mathbb{C})$ en el caso complejo

$$\Pi : G \rightarrow GL(n, \mathbb{R}) \quad ; \quad \Pi : G \rightarrow GL(n, \mathbb{C}). \quad (3.15)$$

Una **representación de un álgebra de Lie** \mathfrak{g} es un homomorfismo de álgebras de Lie π que lleva elementos del álgebra a $\mathfrak{gl}(V)$

$$\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V) \quad (3.16)$$

Una representación de cualquiera de los dos tipos es una representación fiel si el homomorfismo es biyectivo, es decir, la representación constituye un grupo (o un espacio vectorial en el caso de la representación de álgebra) isomorfo al grupo de Lie (o al álgebra).

Dado que los grupos que trataremos siempre serán de matrices, la acción de una representación sobre un vector se reducirá a la acción de una matriz sobre el vector de coordenadas.

Tenemos ahora una nueva forma de clasificar subespacios de V atendiendo a como una representación actúa sobre él. Diremos que un subespacio W de V es **invariante** ante

la acción de una representación Π de G si al actuar ésta sobre vectores de W da como resultado otro vector de este mismo subespacio $\Pi(g)w \in W \forall w \in W, g \in G$. Además, W es **no trivial** si es distinto de cero. Si la representación no tiene subespacios invariantes no triviales diremos que es una **representación irreducible**. Todos estos conceptos se definen de igual forma para representaciones de álgebras.

En términos de representaciones, la propiedad del álgebra de ser el espacio tangente al grupo en la identidad aparece otra vez. Dada una representación Π de un grupo G siempre existe una representación π de su álgebra \mathfrak{g} que cumple $\Pi(e^X) = e^{\pi(X)} \forall X \in \mathfrak{g}$ y que corresponde a la derivada en la identidad de la representación del grupo

$$\pi(X) = \left. \frac{d}{dt} \Pi(e^{itX}) \right|_{t=0}. \quad (3.17)$$

La inversa no es siempre cierta. Uno no puede siempre construir Π a partir de π , sólo es posible si G es un grupo simplemente conexo. La demostración excede el propósito de este trabajo, pero puede encontrarse en la referencia [5].

Dado que el álgebra \mathfrak{g} de un grupo G tiene estructura de espacio vectorial, podemos establecer sobre él representaciones tanto del grupo como del propio álgebra. Esta clase de representaciones se denominan **representaciones adjuntas**. La representación adjunta del grupo, denotada Ad_g viene dada por $Ad_g(Y) = gYg^{-1}$, con $g \in G$ e $Y \in \mathfrak{g}$. $Ad_g(Y)$, al ser lineal en Y , pertenece también al álgebra, puesto que si calculamos su exponencial obtenemos $e^{igYg^{-1}} = ge^{iX}g^{-1}$ que es un elemento del grupo. La representación adjunta del álgebra es $ad_X(Y) = [X, Y]$, con $X, Y \in \mathfrak{g}$. En el caso de las representaciones adjuntas siempre se cumple que $e^{i ad_X} Y = Ad_{e^{iX}} Y$.

A partir de representaciones conocidas, existen mecanismos que nos permiten construir otras nuevas. Uno de ellos es la **suma directa** \oplus de representaciones. La suma directa de las representaciones Π_1, \dots, Π_m de G en los espacios V_1, \dots, V_m está definida como

$$(\Pi_1(g) \oplus \dots \oplus \Pi_m(g))(v_1, \dots, v_m) = (\Pi_1(g)v_1, \dots, \Pi_m(g)v_m) \quad (3.18)$$

con $g \in G$. Se define de forma análoga la suma directa de representaciones de álgebras. Estas sumas directas son representaciones por sí mismas.

Otro mecanismo es el del **producto tensorial**. El producto tensorial de un espacio vectorial V de dimensión n y otro U de dimensión m , es un espacio vectorial $V \otimes U$ construido con vectores de V y de U que tiene dimensión $n \cdot m$. El producto tensorial de dos vectores de V y U lo denotaremos $v \otimes u$. Entonces, si $\{v_i\}$ es una base de V y $\{u_j\}$ es una base de U , $\{v_i \otimes u_j\}$ constituye una base del espacio producto. Nótese que no todo vector del espacio producto puede expresarse como el producto tensorial de un vector de V con otro de U , sino que algunos solo podrán escribirse como combinación lineal de varios productos. Si tenemos una representación Π_1 de un grupo de Lie G sobre V y otra Π_2 de H sobre U , el producto tensorial de las dos representaciones es una representación $\Pi_1 \otimes \Pi_2$ de $G \times H$ que actúa sobre $V \otimes U$ de la forma

$$(\Pi_1 \otimes \Pi_2)(g, h)v \otimes u = (\Pi_1(g)v) \otimes (\Pi_2(h)u) \quad (3.19)$$

La representación de álgebras asociada es

$$(\pi_1 \otimes \pi_2)(X, Y) = \pi_1(X) \otimes I + I \otimes \pi_2(Y) \quad (3.20)$$

con $X \in \mathfrak{g}$ e $Y \in \mathfrak{h}$. Si tomamos el producto tensorial de dos representaciones del mismo grupo G , esta puede ser vista tanto como una representación de G como de $G \times G$, aunque cuando tratemos productos de este tipo siempre usaremos el primer punto de vista. Se puede demostrar que, aunque Π_1 y Π_2 sean representaciones irreducibles de G , su producto tensorial no tiene por qué serlo. Podemos preguntarnos si es posible expresarlo como la suma directa de otras representaciones irreducibles [5–7]. Esta idea se desarrolla en la teoría de Clebsch-Gordan, que veremos en más profundidad en la sección 3.7.

3.6. $SU(2)$ y $SO(3)$

Los grupos $SU(2)$ y $SO(3)$ aparecen en diversas áreas de la física. Estos grupos están relacionados de una forma particular. En esta sección estudiaremos sus propiedades por separado y la relación entre ellos para ilustrar todo lo visto hasta el momento [5–8].

Las matrices de $SU(2)$ son de la forma

$$g = \begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ -c + id & a - ib \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

con $a, b, c, y d$ parámetros reales. Esta clase de matrices cumple la condición (3.6) de unitariedad. La condición de $\det g = 1$, en este caso, se expresa como

$$\det g = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \quad (3.22)$$

que, comparando con la ecuación (2.1), vemos que corresponde a la ecuación de una 3-esfera. Es por esto por lo que podemos decir que $SU(2)$ es, como variedad, isomorfo a S^3 , así que es compacto, conexo y simplemente conexo. Dado que podemos identificar cada matriz del grupo con 4 parámetros y tenemos una ligadura, la del determinante, el grupo tiene dimensión 3. El álgebra $\mathfrak{su}(2)$ consiste en el espacio vectorial de las matrices hermíticas 2×2 , como demostramos en la ecuación (3.13). Una base de este espacio es

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad [\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ij}^k \sigma_k. \quad (3.23)$$

Estas son las conocidas como matrices de Pauli, y ϵ_{ij}^k son los símbolos de Levi-Civita, que es 0 si hay índices repetidos, -1 si hacemos una permutación impar de los índices y 1 en cualquier otro caso.

En el caso de $SO(3)$, sus elementos están generados por la multiplicación de matrices, todas de determinante unidad, de tres tipos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

con α, β y γ parámetros reales. Como vemos, son las matrices de rotación en \mathbb{R}^3 alrededor de los tres ejes cartesianos, así que $SO(3)$ tiene también dimensión 3.

El álgebra $\mathfrak{so}(3)$ es el espacio vectorial de las matrices antisimétricas 3×3 de entradas imaginarias, que podemos generar con la base

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \Sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad [\Sigma_i, \Sigma_j] = i\epsilon_{ij}^k \Sigma_k. \quad (3.25)$$

Como vemos tiene las mismas constantes de estructura, a excepción de un factor 2, que $\mathfrak{su}(2)$, lo que hace evidente que son isomorfas, y en estos términos diremos que $SU(2)$ y $SO(3)$ tienen el mismo álgebra.

Para dar con la relación entre los grupos haremos uso de la representación adjunta de $SU(2)$. Tenemos que Ad es una aplicación $Ad : SU(2) \rightarrow GL(3, \mathbb{R})$, puesto que $\mathfrak{su}(2)$ es de dimensión 3, y que relaciona cada elemento de $SU(2)$ con una transformación lineal sobre el álgebra de la forma $Ad_g X = gXg^{-1}$ con $g \in SU(2)$ y $X \in \mathfrak{su}(2)$.

Calcularemos determinante de una matriz $X = X^1\sigma_1 + X^2\sigma_2 + X^3\sigma_3$

$$\det X = \begin{vmatrix} X^3 & X^1 + iX^2 \\ X^1 - iX^2 & -X^3 \end{vmatrix} = -((X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2) = -\delta_{ij}X^iX^j \quad (3.26)$$

que, como vemos, es menos la norma euclídea de las coordenadas de X como vector. Calculemos ahora el determinante de un vector de $\mathfrak{su}(2)$ transformado mediante un elemento de la representación adjunta

$$\det(Ad_g X) = \det(gXg^{-1}) = \det(g) \det(X) \det(g^{-1}) = \det X \quad (3.27)$$

donde hemos usado que $\det g = 1 \forall g \in SU(2)$. De esta relación y de (3.26) extraemos la conclusión de que las transformaciones Ad_g preservan la norma euclídea de \mathbb{R}^3 , es decir, son transformaciones ortogonales. Así que Ad es un homomorfismo $Ad : SU(2) \rightarrow O(3)$. Sin embargo, sabemos que los elementos de $O(3)$ son bien rotaciones o bien rotaciones con inversión, según si su determinante es 1 o -1, y no podemos pasar de forma continua de un tipo al otro. Por tanto, dado que el primer tipo constituye $SO(3)$ y este contiene la identidad, $SO(3)$ es la componente identidad de $O(3)$. Ad tiene que relacionar la identidad de $SU(2)$ con la de $SO(3)$, y además tiene que ser una aplicación continua, luego no hay forma de que haya elementos de $O(3)$ fuera de $SO(3)$ en la imagen de Ad , puesto que hemos visto que $SU(2)$ es un grupo conexo. Así que la representación adjunta de $SU(2)$ es de la forma

$$Ad : SU(2) \rightarrow SO(3). \quad (3.28)$$

Esta relación, sin embargo, no es un isomorfismo. Se demuestra fácilmente de la siguiente forma

$$Ad_{-g} X = (-g)X(-g^{-1}) = gXg^{-1} = Ad_g X, \quad (3.29)$$

luego Ad relaciona g y $-g$ con el mismo elemento de $SO(3)$. Así que Ad recubre dos veces $SO(3)$. Se dice que $SU(2)$ es el recubridor universal de $SO(3)$, es decir, un grupo conexo y simplemente conexo que lo recubre completamente.

Usaremos esta relación para describir las propiedades de $SO(3)$ como variedad. Sabemos que $SU(2)$ es isomorfo a S^3 y que existe una aplicación que relaciona los elementos g y $-g$ de $SU(2)$ con un mismo elemento de $SO(3)$. Entonces, podemos relacionar cada par de elementos diametralmente opuestos, es decir, antipodales de la 3-esfera con un elemento de $SO(3)$. Decimos entonces que $SO(3)$ es isomorfo a la 3-esfera con los puntos antipodales identificados, así que como variedad se comporta de la misma forma. Dado que los puntos antipodales están identificados podemos describirlo como una semiesfera, siendo cuidadosos con el corte puesto que los elementos del borde estarán identificados. Para describir las propiedades de esta variedad usaremos el caso de la semiesfera de S^2 para poder visualizarlo, pero el razonamiento para S^3 es equivalente.

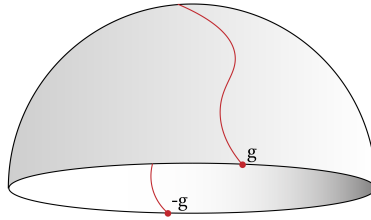


Figura 5: Diagrama de la semiesfera de S^2 con los puntos antipodales identificados en el corte y una curva cerrada sobre ella.

En la figura 5 observamos que, si bien es una variedad compacta y conexa, si establecemos una curva cerrada que pasa por el corte no podemos deformarla hasta obtener un punto, puesto que si movemos el punto g en sentido antihorario, tendremos que mover $-g$ en el mismo sentido dado que son el mismo punto. Entonces, podemos decir que $SO(3)$ es un grupo compacto y conexo, pero no simplemente conexo. Podemos ver ahora la utilidad de la relación que hemos establecido entre estos dos grupos, siendo capaces de deducir propiedades de $SO(3)$ usando propiedades de $SU(2)$, que es matemáticamente más simple de tratar [5, 7].

Las representaciones de estos grupos tienen un gran interés, en particular en el estudio del momento angular. Para introducirlas, denotaremos como V_j , siendo j un número semientero o entero positivo, el espacio vectorial de polinomios de grado $2j$ en \mathbb{C}^2 que son combinación lineal de términos del tipo $x^p y^q$ con $x, y \in \mathbb{C}$ y $p+q = 2j$ siendo p y q números naturales. Este espacio tendrá dimensión $2j+1$. Denotaremos los elementos de este espacio como $v \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = v^{+j} x^{2j} + v^{+j-1} x^{2j-1} y + \dots + v^{-j} y^{2j}$ Entonces, una representación Π_j de $SU(2)$ será de la forma

$$\Pi_j(g)v \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = v \left[g^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right]. \quad (3.30)$$

Estas representaciones se denominan representaciones de spin- j , y son representaciones irreducibles de $SU(2)$. Además, puede demostrarse que todas las representaciones irreducibles de este grupo son isomorfas a estas [5]. Para que una de ellas sea también representación de $SO(3)$, dado que hemos demostrado que la relación entre este y $SU(2)$ es dos a uno, se debe cumplir que $\Pi_j(g) = \Pi_j(-g)$, y en concreto para $g = I$. Además, dado que todos los homomorfismos de grupos relacionan la identidad de un grupo con la del otro,

ha de cumplirse que $\Pi_j(I) = \Pi_j(-I) = I$. Según la definición que hemos dado de Π_j ,

$$\Pi_j(-I)v \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = (-1)^{2j}v \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

Es decir, Π_j solo será una representación irreducible de $SO(3)$ cuando el spin sea entero.

En cuanto a las representaciones de las álgebras son las mismas para ambos casos, dado que como hemos dicho, son el mismo. Usando las coordenadas v^m de los vectores de V_j , las representaciones π_j del álgebra darán lugar a transformaciones que actuarán como matrices de la dimensión apropiada multiplicando al vector de coordenadas. Por ejemplo, para spines 1/2 y 1 la representación de σ_3 operará de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \pi_{1/2}(\sigma_3)v &= \pi_{1/2}(\Sigma_3)v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^{+1/2} \\ v^{-1/2} \end{pmatrix} \\ \pi_1(\sigma_3)v &= \pi_1(\Sigma_3)v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^{+1} \\ v^0 \\ v^{-1} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

donde hemos nombrado los índices con una notación apropiada para relacionar estos vectores con los estados de momento angular. Dado que $SU(2)$ es simplemente conexo, para estas representaciones se cumple que $\Pi_j(e^{iX}) = e^{i\pi_j(X)}$ es una representación de este grupo. Sin embargo, $\Pi_j(e^{iX}) = e^{i\pi_j(X)}$ solo es una representación de $SO(3)$ si j es entero [5, 7, 8].

3.7. Grupos de Lie en física

Las propiedades de los grupos de Lie se aplican en multitud de ámbitos de la física. Comentaremos a continuación algunos de los ejemplos más representativos.

3.7.1. Momento angular

En mecánica cuántica, los estados de las partículas se representan mediante vectores en un espacio de Hilbert de funciones complejas de cuadrado integrable. Este es un espacio vectorial de dimensión infinita, cuyos elementos serán representados en notación de Dirac como kets. El espacio dual al espacio de Hilbert tiene como elementos los bras, de forma que el producto de un ket por un bra dará como resultado un escalar. En este espacio podemos establecer representaciones irreducibles de $SU(2)$ usando como espacio vectorial un subespacio de dimensión $2j+1$ con spin- j . Estos serán por sí mismos espacios invariantes ante la acción del grupo y del álgebra [7, 9]. Se construyen sobre estos subespacios los llamados operadores de momento angular, proporcionales a las representaciones de $\mathfrak{su}(2)$

$$S_x^j = \frac{\hbar}{2}\pi_j(\sigma_1) \quad , \quad S_y^j = \frac{\hbar}{2}\pi_j(\sigma_2) \quad , \quad S_z^j = \frac{\hbar}{2}\pi_j(\sigma_3). \quad (3.33)$$

Escribiremos los estados del subespacio en cuestión usando como base los autoestados de S_z^j , que serán en notación de bra-kets $|j, m\rangle$ con $m = j, j-1, \dots, (-j+1), -j$. Estos

estados son isomorfos a los polinomios definidos en la sección anterior, de forma $|j, m\rangle \equiv x^{j+m}y^{j-m}$. Para el caso de spin-1/2 tenemos

$$S_z^j v = \frac{\hbar}{2} \sigma_3 v = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^{+1/2} \\ v^{-1/2} \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

Dado que los estados han de estar normalizados, observamos que los autovalores de $|1/2, +1/2\rangle$ y $|1/2, -1/2\rangle$ son $\frac{\hbar}{2}$ y $-\frac{\hbar}{2}$ respectivamente. Estos son los posibles valores de momento angular en la dirección z de un sistema con spin-1/2. Haciendo actuar S_x^j y S_y^j sobre estos estados se obtienen los autoestados de momento angular en x y en y cuyos autovalores serán los mismos que en dirección z . Estos autovectores lo son también de un operador $(S^j)^2 = S_x^j S_x^j + S_y^j S_y^j + S_z^j S_z^j$ con autovalor, para todos los casos, $\hbar^2 j(j+1)$. Es decir el valor de $(S^j)^2$ solo depende de la representación en la que trabajemos.

En cuanto a las representaciones del grupo, actúan como la exponencial de los operadores de momento angular $e^{\alpha \frac{i}{\hbar} \vec{S}^j \cdot \hat{n}}$. Lo que representa este operador es la acción de una rotación de ángulo α alrededor de un eje en dirección \hat{n} sobre los vectores del subespacio de spin j .

Para describir el caso de varios sistemas con spin diferente, el estado que describe el sistema total es el producto tensorial de los estados de los sistemas por separado, y la representación que tendremos que usar será el producto tensorial de representaciones individuales. Esta nueva representación no será irreducible en general, pero en el caso de $SU(2)$ siempre podremos expresarla como suma de representaciones irreducibles. Si tenemos dos estados de momento angular $|j_1 m_1\rangle$ y $|j_2 m_2\rangle$, el estado que describe al conjunto será $|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle \equiv |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$. Sabemos que las representaciones irreducibles están descritas por un único j , luego intentaremos expresar este estado como combinación lineal de estados $|j, m\rangle$. Así

$$|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle = \sum_{j, m} \langle j, m | j_1 j_2 m_1 m_2 \rangle |j, m\rangle, \quad (3.35)$$

donde $\langle j, m | j_1 j_2 m_1 m_2 \rangle$ son los llamados Coeficientes de Clebsh-Gordan. Estos son nulos excepto si $m = m_1 + m_2$ y $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$, lo que asegura la conservación del momento angular [7, 9].

Existe una relación entre los operadores y autovectores de momento angular y aquellos correspondientes a dos osciladores armónicos desacoplados. Si denotamos a estos osciladores como $+$ y $-$, definiremos los autoestados del hamiltoniano total $|n_+, n_-\rangle$ y los conocidos operadores creación, aniquilación y número como

$$N_+ |n_+, n_-\rangle = n_+ |n_+, n_-\rangle \quad , \quad N_- |n_+, n_-\rangle = n_- |n_+, n_-\rangle, \quad (3.36)$$

$$a_+^\dagger |n_+, n_-\rangle = \sqrt{n_+ + 1} |n_+ + 1, n_-\rangle \quad , \quad a_-^\dagger |n_+, n_-\rangle = \sqrt{n_- + 1} |n_+, n_- + 1\rangle, \quad (3.37)$$

$$a_+ |n_+, n_-\rangle = \sqrt{n_+} |n_+ - 1, n_-\rangle \quad , \quad a_- |n_+, n_-\rangle = \sqrt{n_-} |n_+, n_- - 1\rangle. \quad (3.38)$$

Ahora, se pueden identificar estos operadores con los de momento angular de la forma

$$S_+ \equiv S_x + S_y \equiv \hbar a_+^\dagger a_- \quad , \quad S_- \equiv S_x - S_y \equiv \hbar a_-^\dagger a_+ \quad , \quad S_z \equiv \frac{\hbar}{2} (N_+ - N_-), \quad (3.39)$$

Usando estas definiciones se obtiene

$$[S_z, S_{\pm}] = \pm \hbar S_{\pm} \quad , \quad [S_+, S_-] = 2\hbar S_z, \quad (3.40)$$

que son las relaciones de conmutación de los operadores de momento angular. Los autovalores de los estados $|n_+, n_-\rangle$ se relacionan con los autovalores de momento angular de la forma

$$n_+ \equiv j + m \quad , \quad n_- \equiv j - m. \quad (3.41)$$

Esta forma de expresar el momento angular mediante los autoestados y operadores de dos osciladores armónicos desacoplados se denomina representación de Schwinger [9].

3.7.2. Relatividad especial. El grupo de Lorentz

La relatividad especial explica la dinámica de los cuerpos en un espacio-tiempo plano. La métrica para observadores inerciales, denominada métrica de Minkowski, tiene la forma

$$\eta_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

en coordenadas cartesianas. En este trabajo se trabajará con métricas de signatura $(-1, 1, 1, 1)$. Como vimos en 3.2.3, las matrices Λ que preservan esta métrica son las que constituyen el grupo $O(1, 3)$. Este grupo tiene 4 componentes conexas, según si $\det \Lambda = 1$ (transformaciones propias) o $\det \Lambda = -1$, o bien si $\Lambda_{00} \geq 1$ (transformaciones ortocronas) o $\Lambda_{00} \leq -1$. Estaremos interesados en la componente que cumple que $\det \Lambda = 1$ y $\Lambda_{00} \geq 1$, que es el denominado grupo restringido de Lorentz $SO^+(1, 3)$. Las transformaciones de este grupo serán, o bien elementos de $SO(3)$ en las coordenadas espaciales, es decir rotaciones espaciales, o bien boosts en cualquier dirección espacial [2–5]. Las matrices tienen la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & SO(3) & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta & 0 & 0 \\ \sinh \theta & \cosh \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

La primera matriz es una rotación espacial, mientras que la segunda representa un cambio a un sistema de referencia que se mueve a velocidad $v = \tanh \theta$ en el eje x en unidades naturales. Este grupo tiene dimensión 6, puesto que $SO(3)$ tiene dimensión 3 y podemos hacer boosts en las tres direcciones independientes del espacio.

En el caso del resto de las componentes conexas de $O(1, 3)$, físicamente representan lo mismo. La diferencia es que si $\det \Lambda = -1$ la transformación también involucra una inversión espacial, y si $\Lambda_{00} \leq -1$ involucra una inversión temporal [2–4].

Las transformaciones de Lorentz, además de ser una simetría de la cinemática en relatividad especial, también lo son de las ecuaciones de Maxwell, de la ecuación de Dirac y del modelo estándar de la física de partículas.

3.7.3. Mecánica analítica

La mecánica analítica usa el formalismo lagrangiano y el hamiltoniano para calcular las ecuaciones de movimiento de los sistemas. Cada sistema se caracterizará por un número n de coordenadas generalizadas q^i . En el formalismo Lagrangiano la relación entre coordenadas y momentos se da minimizando un funcional denominado acción

$$\mathcal{S} = \int L(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n, t) dt, \quad (3.44)$$

donde t es un parámetro que si trabajamos con trayectorias de cuerpos generalmente será el tiempo. L es el denominado lagrangiano del sistema. Las trayectorias $q^i(t)$ del sistema serán aquellas que minimicen \mathcal{S} , y serán las dadas por las ecuaciones de Euler-Lagrange que se obtienen mediante el principio de mínima acción

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q^i}. \quad (3.45)$$

En el formalismo hamiltoniano se asocia a cada coordenada un momento generalizado $p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$. Usaremos una notación en la que $q^i = \xi^i$ y $p_i = \xi^{n+i}$, de forma que tenemos el sistema descrito por $2n$ coordenadas ξ^i . Estas coordenadas conforman el espacio de fases. Para obtener las ecuaciones de movimiento este formalismo utiliza otra función, el hamiltoniano $H = p_i \dot{q}^i - L$. Las ecuaciones que describen el sistema son las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{\xi}^i = \frac{\partial H}{\partial \xi^{n+i}} \quad ; \quad \dot{\xi}^{n+i} = -\frac{\partial H}{\partial \xi^i}, \quad (3.46)$$

que se pueden escribir usando la aplicación bilineal ω definida en (3.11) de la forma

$$\xi^\mu = \Omega^{\mu\nu} \partial_\nu H \quad (3.47)$$

donde los índices μ y ν recorren de 0 a $2n$. Entonces, cualquier transformación que pertenezca a una representación del grupo simpléctico sobre las coordenadas mantendrá la forma de estas ecuaciones. Estas transformaciones son las denominadas transformaciones canónicas, y son de crucial importancia en el estudio de la mecánica analítica [16].

3.7.4. Fibrados, Yang-Mills y modelo estándar

Una de las aplicaciones de los grupos de Lie es la construcción de las llamadas teorías de campos gauge. Para comprender su formulación antes hay que definir el concepto de fibrado [1, 7]. Un **fibrado** es una variedad diferenciable de dimensión $n + n'$ que se construye a partir de los siguientes elementos:

1. Una variedad de base M de dimensión n llamada espacio base.
2. Otra variedad F de dimensión n' de la que asociamos copias idénticas en cada punto de M , a la que llamamos fibra.
3. El espacio total E , que es el conjunto de todas las fibras junto con la base.

4. Una aplicación $f : E \rightarrow M$ llamada proyección, que identifica un punto en el espacio total con un punto en el espacio base, es decir, es la aplicación que identifica cada fibra con un punto en M .
5. Un grupo de Lie G llamado grupo de estructura. Este grupo se introduce como un grupo de transformaciones sobre F .

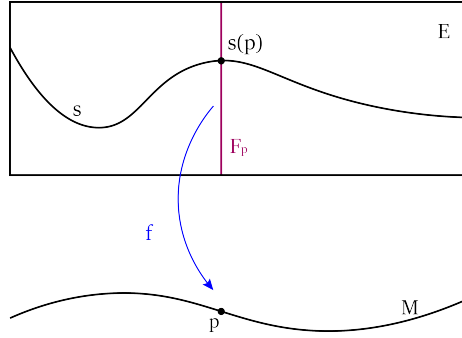


Figura 6: Diagrama de los elementos de un fibrado.

Por ejemplo, el espacio tangente a una variedad en un punto es una clase de fibra, y el conjunto de la variedad con todos los espacios tangentes en cada punto es el fibrado tangente.

Si en cada punto escogemos un solo elemento de la fibra correspondiente, formamos una sección $s(p)$. En el fibrado tangente las secciones son los campos vectoriales.

Los fibrados en los que estaremos interesados en este apartado son los llamados fibrados principales P , que son aquellos en los que se escoge como fibra el grupo de estructura que, como grupo de Lie, también es una variedad. Para formular las teorías de Yang-Mills usaremos esta clase de fibrados, y como espacio base se escogerá el espacio-tiempo de Minkowski.

Podemos construir el espacio tangente $T_u P$ al fibrado, con u un punto del fibrado, puesto que es una variedad. Tendrá dos partes, el subespacio vertical $V_u P$, que es la parte de $T_u P$ que es también tangente a la fibra. Puesto que la fibra es un grupo de Lie, este subespacio será isomorfo al álgebra. El subespacio horizontal $H_u P$ será aquel que cumple $T_u P = H_u P \oplus V_u P$. La construcción que separa los elementos de las dos partes de $T_u P$ se denomina conexión del fibrado. Con esta conexión y una sección arbitraria se construye un potencial vector $\mathcal{A} = \mathcal{A}^i T_i$, que será un elemento del álgebra, siendo T_i un elemento de la base del álgebra. \mathcal{A} también es un cuadrivector covariante, luego podemos escribirlo como $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu dx^\mu$. Denotaremos las componentes en ambas bases como $\mathcal{A} = A_\mu^i dx^\mu T_i$. Si cambiamos la sección escogida, siempre podemos encontrar elementos del grupo que cumplan $s'(p) = s(p)g(p)$. El potencial vector construido con la nueva sección se relaciona con el primero de la forma

$$\mathcal{A}'_\mu = g^{-1}(p)\mathcal{A}_\mu(p)g(p) + g^{-1}(p)\partial_\mu g(p). \quad (3.48)$$

Esta es la llamada transformación gauge, y los campos de Yang-Mills son invariantes ante ellas [1, 7, 10].

Dado el potencial vector se construye el llamado tensor de curvatura del fibrado o tensor de fuerzas del campo de la forma

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + \theta[\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu], \quad (3.49)$$

donde θ es la llamada constante de acoplo, que estará relacionada con la intensidad de la interacción. $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ también es un elemento del álgebra, luego podemos escribirlo como $\mathcal{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^i T_i$. También se construye la derivada covariante

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + i\theta \mathcal{A}_\mu^i T_i \quad (3.50)$$

respecto a la cual \mathcal{F} cumple la identidad de Bianchi

$$\mathcal{D}\mathcal{F} = d\mathcal{F} + \theta[\mathcal{A}, \mathcal{F}] = 0. \quad (3.51)$$

Con el tensor de fuerzas se construye la acción más simple posible

$$\mathcal{S} = \frac{1}{4} \int F_{\mu\nu}^i F^{\mu\nu i} d^4x. \quad (3.52)$$

Trataremos solo el caso de las soluciones en vacío, puesto que es el caso más simple. Las ecuaciones de Euler-Lagrange de \mathcal{S} obtenidas por el principio variacional son

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} + \theta[\mathcal{A}_\mu, \mathcal{F}^{\mu\nu}] = 0, \quad (3.53)$$

que junto con la identidad de Bianchi forman las ecuaciones de Yang-Mills que describen la dinámica del campo en cuestión [1, 7]. Estas ecuaciones se simplifican enormemente si el grupo con el que tratamos es abeliano, puesto que en este caso son ecuaciones lineales.

Si escogemos como grupo de estructura y fibra el grupo $U(1)$, que es abeliano, obtenemos que la transformación de gauge queda

$$\mathcal{A}'_\mu(p) = \mathcal{A}_\mu(p) + \partial_\mu \Lambda(p), \quad (3.54)$$

con $\Lambda(p)$ una función real, puesto que en este caso, el álgebra del grupo es $\mathfrak{u}(1) = \mathbb{R}$. Al escribir el tensor de fuerzas denotaremos sus componentes usando dos vectores espaciales, \vec{E} y \vec{B}

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.55)$$

Las ecuaciones de Yang-Mills se expresan de forma más sencilla usando estos vectores de la forma

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 & \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{E} &= 0 & \nabla \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Como vemos, estas son las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético en unidades naturales². Decimos entonces que el campo electromagnético tiene una libertad gauge $U(1)$.

La interacción nuclear débil responde a una teoría de Yang-Mills del grupo $SU(2)$. Esta es la razón por la que podemos construir operadores de isospín débil cuando se tratan desintegraciones mediadas por la interacción débil. Hay tres tipos de mediadores de interacción débil, los bosones Z , W^+ y W^- , debido a que $\mathfrak{su}(2)$ tiene dimensión 3 y los mediadores son el resultado de cuantizar el potencial vector. En el caso de la interacción nuclear fuerte, el grupo de gauge es $SU(3)$, de dimensión 8. Los gluones, mediadores de esta interacción, muestran 8 combinaciones independientes de color debido a la dimensión del álgebra $\mathfrak{su}(3)$. El modelo estándar de la física de partículas plantea las interacciones entre partículas, excluyendo la gravitatoria, como una teoría de Yang-Mills del grupo $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ [1, 7, 10, 17].

Cualquier observable de una teoría de Yang-Mills puede expresarse en función de unas cantidades llamadas holonomías. Si $\gamma(t)$ es una curva cerrada en la variedad de base, un vector E^μ se transporta paralelamente a lo largo de ella si $\dot{\gamma}^\mu(t)\mathcal{D}_\mu E^\nu(t) = 0$ según (2.12). La holonomía, o propagador de transporte paralelo $\mathcal{P}_\gamma[\mathcal{A}]$, cumple $E^a(t) = \mathcal{P}_\gamma[\mathcal{A}]E^a(0)$, y tiene la forma

$$\mathcal{P}_\gamma[\mathcal{A}] = P \left[\exp \left(-i\theta \oint_\gamma \dot{\gamma}^\mu(t)\mathcal{A}_\mu(t)dt \right) \right], \quad (3.57)$$

donde $P(\mathcal{A}_{\mu_2}(t_2)\mathcal{A}_{\mu_1}(t_1)\dots\mathcal{A}_{\mu_n}(t_n)) = \mathcal{A}_{\mu_1}(t_1)\mathcal{A}_{\mu_2}(t_2)\dots\mathcal{A}_{\mu_n}(t_n)$ es el denominado producto ordenado en el camino. Las holonomías son matrices pertenecientes al grupo $SU(2)$, dado que son la exponencial de una suma de elementos del álgebra. La traza de este objeto será por lo tanto invariante gauge debido a la propiedad cíclica de la traza³ $\text{Tr}(g\mathcal{P}_\gamma[\mathcal{A}]g^{-1}) = \text{Tr}(g^{-1}g\mathcal{P}_\gamma[\mathcal{A}]) = \text{Tr}(\mathcal{P}_\gamma[\mathcal{A}])$ con $g \in SU(2)$. Estas trazas constituyen una base para construir cualquier observable de la teoría [11].

²Las unidades naturales son aquellas en las que $c = \hbar = G = 1$

³ $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(CAB) = \text{Tr}(BCA)$

4. Gravedad cuántica de lazos

Como sabemos, la relatividad general describe la interacción gravitatoria de forma correcta a escalas de energía relativamente bajas. Por otra parte, la teoría cuántica de campos (QFT) ha tenido un gran éxito al explicar la dinámica y el comportamiento de las partículas elementales y las interacciones entre ellas, excluyendo la gravedad. Sin embargo, tienen problemas, puesto que en las soluciones de las ecuaciones de Einstein aparecen singularidades, por ejemplo en el centro de los agujeros negros, y en QFT aparecen divergencias que se evitan mediante renormalizaciones. Además, hay situaciones en las que ninguna de las dos ofrece una respuesta satisfactoria, puesto que tanto la gravedad como los efectos cuánticos tienen importancia. Es esta la principal motivación de las teorías de gravedad cuántica [11, 12].

Los fenómenos que estas teorías pretenden explicar ocurren a muy altos órdenes de energía, aproximadamente quince órdenes de magnitud mayor que los que el acelerador de partículas LHC del CERN es capaz de conseguir, o a muy cortas distancias, del orden de la escala de Planck $l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1,6 \times 10^{-35} m$. En la naturaleza estos efectos son los que se dan en las singularidades de la relatividad general, la evaporación de agujeros negros, la entropía de estos o el universo en los primeros instantes tras el Big Bang. La falta casi absoluta de datos experimentales obliga a que el avance de estas teorías tenga que ser puramente teórico y haya que prestar especial atención al rigor matemático.

Como hemos visto en la sección 3.7.4, en el caso de las interacciones del modelo estándar la geometría del espacio-tiempo juega un papel pasivo, es decir el campo a describir no influye en la geometría. Sin embargo, la relatividad general postula que la gravedad y la geometría son lo mismo, así que esta vez la geometría tendrá un papel dinámico. Lo que se deberá cuantizar es la geometría del espacio-tiempo, y este es el principal propósito de la teoría de la gravedad cuántica de lazos [11–13].

Esta teoría trata de usar los principios de la cuantización canónica para cuantizar, de forma no perturbativa, la gravedad. Para ello, se buscará una formulación hamiltoniana de las ecuaciones de Einstein, para después adoptar unas nuevas variables, las llamadas variables de Ashtekar, que se promoverán a operadores cuánticos sobre un apropiado espacio de Hilbert. Uno de los principios centrales de la teoría es el de la independencia de fondo, que impone que la definición de las ecuaciones ha de ser independiente de la forma del espacio-tiempo sobre el que se definen.

Sin embargo, presenta varios problemas. Uno de ellos es que aún no se ha logrado implementar la dinámica en la teoría. Puede dar una descripción espacial estática de un estado cuántico de la gravedad pero no se ha conseguido avanzar en el tiempo. Otro es que no se ha encontrado un límite clásico en el que esta teoría reproduzca la relatividad general. Sin embargo, aunque continúan siendo problemas abiertos, en los últimos años ha habido avances en su resolución.

Por otra parte, la gravedad cuántica de lazos también ha conseguido algunos esperanzadores resultados. Por ejemplo, es posible calcular la entropía y los microestados de un agujero negro usando su área [14, 18].

4.1. Formulaci3n hamiltoniana de la relatividad general

Para establecer el hamiltoniano del campo gravitatorio en relatividad general, antes hablaremos de la descripci3n lagrangiana y de un mecanismo necesario para introducir las variables de Ashtekar, la descomposici3n 3+1 [2, 11–14]. Trabajaremos en todo momento con la descripci3n en vac3o por simplicidad y para centrarnos 3nicamente en los aspectos gravitatorios y geom3tricos.

4.1.1. Formulaci3n lagrangiana

Las ecuaciones de Einstein se pueden obtener de las ecuaciones de Euler-Lagrange de un lagrangiano que se escribe en t3rminos de las componentes de la m3trica [2, 3]. No definiremos el lagrangiano completo sino la densidad espacial lagrangiana \mathcal{L} . Operaremos de igual forma cuando usemos el hamiltoniano

$$L = \int \mathcal{L} d^3 \vec{x} \quad ; \quad H = \int \mathcal{H} d^3 \vec{x}. \quad (4.1)$$

El lagrangiano apropiado es

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} R \quad (4.2)$$

donde $g = \det g_{ab}$. Para obtener las ecuaciones de Einstein, tomaremos una variaci3n de \mathcal{L} usando la regla de Leibnitz

$$\partial \mathcal{L} = (\sqrt{-g}) \partial R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} + \partial(\sqrt{-g}) R + (\sqrt{-g}) R_{\mu\nu} \partial g^{\mu\nu} \quad (4.3)$$

donde se ha tenido en cuenta que $R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$. No tendremos en cuenta el primer t3rmino, puesto que solamente contribuye en la frontera y se har3 nulo al integrar la densidad. Adem3s el segundo t3rmino es

$$\partial(\sqrt{-g}) R = -\frac{1}{2} \partial(\sqrt{-g}) R g_{\mu\nu} \partial g^{\mu\nu}, \quad (4.4)$$

entonces, la variaci3n de la densidad lagrangiana se escribe

$$\partial \mathcal{L} = \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}) \partial g^{\mu\nu}. \quad (4.5)$$

Planteamos ahora las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} = 0, \quad (4.6)$$

que coinciden con las ecuaciones de Einstein (2.20) cuando $T_{\mu\nu} = 0$, es decir, en vac3o [2, 3].

4.1.2. Descomposici3n 3+1 y formalismo ADM

Hemos visto en la secci3n 3.7.3 que para usar el formalismo hamiltoniano tenemos que establecer las variables de configuraci3n y sus momentos, cuyas trayectorias vendr3n dadas como funci3n del tiempo. Esto entra en conflicto con la visi3n relativista de un espacio-tiempo unificado, de hecho, es una de las principales cr3ticas del planteamiento de esta teor3a [11].

La descomposición 3+1 asume que el espacio-tiempo se puede descomponer en una hipersuperficie tridimensional Σ y una curva, de forma que la variedad completa se expresa como $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times \Sigma$. Asumiremos que existe una curva con parámetro t cuyo vector tangente t^μ es siempre de tipo tiempo, $t^\mu t^\nu g_{\mu\nu} < 0$, de modo que las hipersuperficies $t = cte$. Σ_t son de tipo espacio, y que satisfaga $t^\mu \nabla_\mu t = 1$. Introducimos ahora un campo vectorial suave n^μ normal en cada t a Σ_t , y una métrica definida positiva inducida en la hipersuperficie espacial que se relaciona con la espacio-temporal de la forma

$$q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu. \quad (4.7)$$

Podemos escribir entonces el campo t^μ en sus componentes normal y tangencial a Σ_t de la forma

$$t^\mu = N n^\mu + N^\mu. \quad (4.8)$$

El vector N^μ es un vector tridimensional, luego su componente N^0 será nula. N se conoce como la función *lapse*, y \vec{N} como el vector *shift* [2, 11].

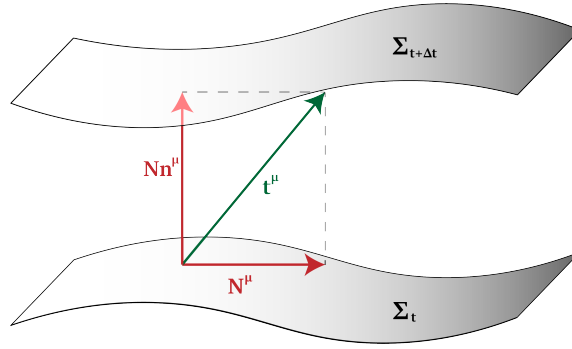


Figura 7: Diagrama de la descomposición 3+1 esquematizando Σ_t como una superficie bidimensional, y mostrando la descomposición de t^μ en sus componentes normal y tangencial a ella.

Podemos escribir la métrica tetradimensional en términos de estas nuevas cantidades

$$ds^2 = (-N^2 + N_a N^a) dt^2 + 2N_a dt dx^a + q_{ab} dx^a dx^b, \quad (4.9)$$

donde los índices latinos recorren de 1 a 3. Tomaremos como derivada temporal de la métrica espacial la derivada de Lie con respecto al vector t^μ

$$\dot{q}_{\mu\nu} \equiv L_t q_{\mu\nu} = 2N L_n q_{\mu\nu} + L_{\vec{N}} q_{\mu\nu}. \quad (4.10)$$

En la sección 2.4 diferenciamos la curvatura intrínseca de la extrínseca, siendo la segunda debida a la consideración de la variedad como parte de otra de mayor dimensionalidad. $L_n q_{ab}$ nos da la variación de la métrica de Σ_t a lo largo de una curva normal a la variedad Σ_t . Esta es la razón de definir $L_n q_{ab} \equiv K_{ab}$ como el tensor de curvatura extrínseca [2, 11].

Es también posible relacionar la derivada covariante sobre el espacio tangente a Σ_t con la derivada covariante en la variedad completa, de la forma

$$D_\rho T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} = q^{\mu_1}_{\lambda_1} \dots q^{\mu_k}_{\lambda_k} q^{\gamma_1}_{\nu_1} \dots q^{\gamma_l}_{\nu_l} q^\sigma_\rho \nabla_\sigma T^{\lambda_1 \dots \lambda_k}_{\gamma_1 \dots \gamma_l}, \quad (4.11)$$

y, definiendo el tensor de Riemann como el conmutador de dos derivadas covariantes sucesivas, en la referencia [2] se demuestra que toma la forma

$${}^{(3)}R_{abc}{}^d = q^i{}_a q^j{}_b q^k{}_c q^d{}_l R_{ijk}{}^l - K_{ac}K^d{}_b + K_{bc}K^d{}_a. \quad (4.12)$$

Este es el tensor de curvatura intrínseca de la variedad Σ_t .

Podemos escribir el lagrangiano de la ecuación (4.2) en función de las componentes de la métrica tridimensional q_{ab} , del *shift* y del *lapse*

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}R = \sqrt{q}N({}^{(3)}R + K_{ab}K^{ab} - K^2), \quad (4.13)$$

con $q = \det q_{ab}$. Escribiendo el tensor de curvatura en función de q_{ab} , N y N^a se demuestra que en este lagrangiano no aparecen derivadas temporales de N ni de N^a , lo que implica que actúan como multiplicadores de Lagrange y no como variables dinámicas [2]. Para calcular el hamiltoniano debemos establecer los momentos conjugados de las variables de configuración

$$\pi^{ab} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{ab}} = \sqrt{q}(K^{ab} - Kq^{ab}), \quad (4.14)$$

siendo $K = K_{ab}q^{ab}$. La formulación hamiltoniana de la relatividad general en estas variables se denomina formalismo ADM. La densidad hamiltoniana queda

$$\mathcal{H} = \pi^{ab}\dot{q}_{ab} - \mathcal{L} = N\sqrt{q} \left[-{}^{(3)}R + \frac{\pi^{ab}\pi_{ab}}{q} - \frac{\pi^2}{2q} \right] - 2N_b\sqrt{q}D_a \left(\frac{\pi^{ab}}{\sqrt{q}} \right), \quad (4.15)$$

donde se han despreciado los términos que implican derivadas totales, puesto que se anulan en la frontera [2]. Como hemos dicho, el *lapse* y el *shift* actúan como multiplicadores de Lagrange por lo que lo que vaya multiplicado por ellos serán ligaduras. Entonces, el hamiltoniano en estas variables está compuesto únicamente de cuatro ligaduras

$$C^b \equiv \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial N_b} = -2\sqrt{q}D_a \left(\frac{\pi^{ab}}{\sqrt{q}} \right) = 0 \quad (4.16)$$

$$C \equiv \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial N} = \sqrt{q} \left[-{}^{(3)}R + \frac{\pi^{ab}\pi_{ab}}{q} - \frac{\pi^2}{2q} \right] = 0. \quad (4.17)$$

La primera expresión corresponde a la ligadura vectorial, relacionada con la libertad de cambios de coordenadas en Σ , mientras que la segunda es la llamada ligadura escalar o hamiltoniana relacionada con la evolución temporal. El hecho de que los momentos conjugados del *lapse* y del *shift* sean nulos constituyen otras cuatro ligaduras. Tenemos diez coordenadas generalizadas en el hamiltoniano, N , las tres componentes de N^a y las seis componentes independientes de q_{ab} por ser simétrica. Dado que tenemos diez variables y ocho ligaduras en total, habrá únicamente dos grados de libertad en cada punto del espacio. Además, como el hamiltoniano es solo una ligadura, el hamiltoniano total (sin ligaduras) es cero [2, 11].

4.2. Variables de Ashtekar

La cuantización canónica del hamiltoniano dado por el formalismo ADM no lleva a ninguna solución concluyente. Sin embargo, se puede intentar cuantizar usando unas nuevas variables, las variables de Ashtekar. Para introducirlas, empezaremos definiendo las tríadas. Primero, para un punto fijado, consideraremos una base de vectores sobre Σ , ortonormales respecto a la métrica q_{ab} , descrita por E_a^i [11–14]. En un punto fijo esta base siempre se puede escribir. La i indica de cual de los tres vectores de la base se trata y la a sus componentes. Se cumple entonces que

$$q_{ab} = E_a^i E_b^j \delta_{ij}. \quad (4.18)$$

E_a^i son las tríadas y, escritas como matriz, no son más que la matriz de cambio de base entre aquella en que esté escrita q_{ab} y una base ortonormal. Esta base dependerá del punto en Σ_t y del tiempo. Por razones de integración en volumen que no se discutirán en este trabajo, las tríadas tienen densidad de peso $+1$, esto es, habrá que multiplicar por \sqrt{q} una vez para integrarlas. Los objetos con densidad de peso $+n$ habrán de ser multiplicados n veces por \sqrt{q} , y si tienen densidad $-n$, divididos. Trabajaremos con las tríadas densitizadas $\tilde{E}_a^i = \sqrt{q} E_a^i$, de modo que la expresión (4.18) queda

$$\tilde{q}_{ab} = q q_{ab} = \tilde{E}_a^i \tilde{E}_b^j \delta_{ij}, \quad (4.19)$$

donde la cantidad de virgulillas representa la densidad de peso, positiva si están encima y negativa si están debajo. Las tríadas densitizadas constituyen la primera mitad de las variables de Ashtekar [11].

Se define una nueva derivada para trabajar con los índices internos, los que representan el elemento de la base, y se exige que la derivada de las tríadas sea nula, de modo que

$$D_a E_i^b = \partial E_i^b - \Gamma_a^j{}_i E_j^b + \Gamma^b{}_{ac} E_i^c = 0. \quad (4.20)$$

En este caso, $\Gamma_a^j{}_i$ es la llamada conexión de spin [11–14].

Dado que los vectores de la base ortonormal son las soluciones al problema de auto-vectores de la matriz q_{ab} y todos tienen el mismo autovalor, 1, podremos rotar a placer esta base y seguirá cumpliéndose (4.18). Dado que son vectores tridimensionales, una rotación de estos vendrá dada por un elemento de $SO(3)$. Entonces, al usar estas variables añadimos una libertad extra, un gauge $SO(3)$, que como hemos visto en la sección 3.6 podemos considerarlo un gauge $SU(2)$. Esta libertad gauge en las variables recuerda a las teorías de Yang-Mills, por lo que algunas de las herramientas empleadas en estas podrán trasladarse a la descripción de la gravedad en estas variables [11].

Entonces, siguiendo el procedimiento de la sección 3.7.4, Definimos un potencial vector al que llamaremos A_a^i . Esta vez, los índices a, b, \dots serán los índices espaciales y los índices i, j, \dots serán los índices del álgebra. La derivada covariante en el fibrado será

$$\mathcal{D}_a = \partial_a - i\theta A_a^i \sigma_i, \quad (4.21)$$

y el tensor de fuerzas

$$F_{ab}^i = \partial_a A_b^i - \partial_b A_a^i + \theta \epsilon^i{}_{jk} A_a^j A_b^k. \quad (4.22)$$

El potencial vector, usualmente llamado conexión de Ashtekar, se relaciona con la conexión de spin

$$A_a^i \equiv \Gamma_a^i + \beta K_a^i, \quad (4.23)$$

con $\Gamma_a^i = \Gamma_a^j \epsilon_j^{ki}$, $K_a^i = \frac{K_{ab} \tilde{E}^{ai}}{\sqrt{q}}$, y β el parámetro de Barbero-Immirzi, que puede tomar cualquier valor complejo no nulo, aunque para la gravedad cuántica de lazos se toma real. Estas A_a^i son la segunda mitad de las variables de Ashtekar [11–14].

El hamiltoniano en función de estas nuevas variables, siendo A_a^i las variables de configuración y \tilde{E}_a^i sus momentos conjugados, está formado por tres clases de ligaduras. Primero, la ligadura gaussiana,

$$\mathcal{G}^i = \mathcal{D}_a \tilde{E}_i^a = 0 \quad (4.24)$$

análoga a la ley de Gauss en electromagnetismo. Esta ligadura es la que da cuenta de la libertad gauge $SU(2)$ que hemos introducido con las nuevas variables. Los otros dos tipos son la ligadura vectorial y la hamiltoniana, que en estas variables toman la forma

$$C_b = \tilde{E}_i^a F_{ab}^i = 0, \quad (4.25)$$

$$C = \epsilon^{ij} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b f_{ab}^k + 2 \frac{\beta^2 + 1}{\beta^2} (\tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b - \tilde{E}_j^a \tilde{E}_i^b) (A_a^i - \Gamma_a^i) (A_b^j - \Gamma_b^j) = 0. \quad (4.26)$$

En esta expresión se observa que la primera tentativa podría ser escoger $\beta = i$, puesto que la simplifica enormemente. Sin embargo se demuestra que hay que escogerlo real para poder construir un producto escalar para el espacio de Hilbert a la hora de cuantizar. Entonces, el hamiltoniano es

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\beta} (NC + N^a C_a + \lambda_i \mathcal{G}^i), \quad (4.27)$$

siendo λ_i , al igual que N y N^a , multiplicadores de Lagrange [11–14].

4.3. Cuantización

Para cuantizar esta teoría se plantea un espacio de Hilbert de funciones de la conexión $\Psi(A_a^i)$. Tanto estas como las tríadas densitizadas se promueven a operadores sobre este espacio

$$\hat{A}_a^i \Psi(A) = A_a^i \Psi(A) ; \hat{\tilde{E}}_i^a \Psi(A) = -i \frac{\partial \Psi(A)}{\partial A_a^i} ; [\hat{A}_a^i(\vec{x}), \hat{\tilde{E}}_i^a(\vec{x}')] = i \beta \delta_a^b \delta_j^i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (4.28)$$

Sin embargo, esta clase de funciones y operadores presentan problemas a la hora de tratar la ligadura hamiltoniana. Dado que esta ligadura es la que genera la evolución temporal, no tiene una acción geométrica clara sobre la superficie espacial. Además aparecen dos tríadas multiplicando, lo que genera problemas al implicar derivadas segundas sobre las funciones de onda dado que aparecen términos del tipo $\delta^{(3)}(x - x)$, que no es una cantidad bien definida [11].

El propio espacio de Hilbert también presenta problemas debido a que en principio no tenemos un producto interno, necesario para que la teoría tenga poder predictivo. Para intentar evitar estos problemas se utiliza la representación de lazos [11–14].

La representación de lazos usa la noción introducida en la sección 3.7.4 de que cualquier observable de una teoría de Yang-Mills puede expresarse como suma de trazas $W_\gamma[A]$ de holonomías. En concreto, podremos expresar las funciones del espacio de Hilbert de esta forma

$$\Psi[A] = \sum_{\gamma} \Psi[\gamma] W_\gamma[A] \quad (4.29)$$

donde, como definimos en la sección 3.7.4,

$$W_\gamma[A] = \text{Tr} \left(P \left[\exp \left(-i\theta \oint_{\gamma} \dot{\gamma}^\mu(t) \mathcal{A}_\mu(t) dt \right) \right] \right). \quad (4.30)$$

La descripción que demos entonces para las funciones $\Psi[\gamma]$ ha de ser equivalente a aquella para las $\Psi[A]$, igual que en mecánica cuántica es equivalente la descripción usando funciones de la posición o del momento. La expansión 4.29 se denomina transformada de lazos.

Las funciones $\Psi[\gamma]$ son funciones invariantes ante deformaciones suaves de los lazos. Las trazas de holonomías no son todas independientes entre sí, existen relaciones no lineales que las relacionan, lo que implica que la base de lazos está sobredimensionada. Una de las ventajas de esta representación es que las funciones cumplen, por construcción, tanto la ligadura gaussiana como la vectorial [11–14].

Para solventar este problema se utilizan propiedades de las teorías de Yang-Mills y las propiedades de las representaciones de álgebras de Lie. Sabemos que las funciones han de ser invariantes $SU(2)$. Por ello, podemos establecer representaciones irreducibles de $SU(2)$ sobre el espacio de Hilbert de las funciones $\Psi[\gamma]$. Como vimos en la sección 3.6, toda representación irreducible de este grupo ha de ser isomorfa a las representaciones de spin. Es por eso por lo que podemos organizar los lazos en las denominadas redes de spin, compuestas de nodos denominados vértices en los que confluyen aristas. A cada arista le corresponderá un spin j . Entonces, si establecemos un lazo cerrado en esta red, en una arista con spin j las holonomías y las conexiones serán matrices $(2j+1) \times (2j+1)$. Cuando pasamos por un vértice, para que no haya problemas con la dimensión de las matrices para calcular la holonomía, se usará un objeto denominado entrelazador que, si en el vértice se unen tres aristas, se escribe en términos de los coeficientes de Clebsch-Gordan. En el caso de vértices de orden mayor, existe más libertad a la hora de construir los entrelazadores [11–14].

Los estados de redes de spin constituyen una base apropiada en la que expresar nuestro estado de gravedad cuántica, y representan el estado cuántico de la geometría de Σ_t en un instante de tiempo t . Denominaremos grafo a cada estado de red. Aunque tengamos una base, para construir un espacio de Hilbert se necesita también un producto interno. Usualmente se define el producto de Ashtekar-Lewandowski, que es 1 si los grafos son difeomorfos y 0 si no. En estas redes, que sean difeomorfas quiere decir que pueden deformarse de forma continua para convertir una en la otra [11].

En cuanto a los operadores, aquellos que actuarán sobre las aristas serán equivalentes a los operadores de momento angular definidos en la sección 3.7.1, proporcionales a la

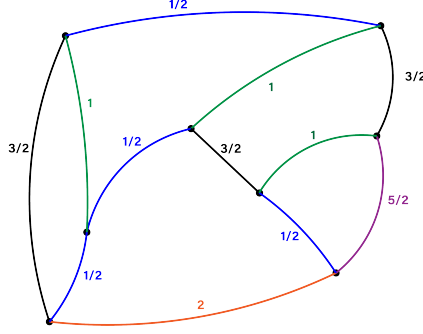


Figura 8: Ejemplo de red de spin con vértices de orden 3.

representación del álgebra correspondiente, además del operador $(S^j)^2$ con autovalores $j(j+1)$. Los operadores sobre vértices tienen forma más complicada, y se construyen usando combinaciones de los operadores de spin de las aristas entrantes y los coeficientes de Clebsch-Gordan [12].

4.4. Operadores geométricos

En gravedad cuántica de lazos, dos de los operadores más importantes que se han logrado construir son los operadores de área y volumen. El operador área nos da el área de una superficie que tomemos a la que el grafo atraviese. Actuará sobre las aristas que atraviesen la superficie como $(S^j)^2$, y si la superficie contiene vértices, se empleará la suma de momento angular. Por ejemplo, si la superficie es atravesada por una única arista, tendrá un área

$$\hat{A} = 8\pi\beta l_P^2 \sqrt{j(j+1)}. \quad (4.31)$$

Si la superficie es atravesada por varias aristas sumaremos las contribuciones al área de cada una. Si la superficie contiene un vértice convergencia de aristas con spines $j^{(u)}$, $j^{(d)}$ y $j^{(u+d)}$, donde la suma de índices denota una suma Clebsch-Gordan de los spines, la contribución al área total del vértice es

$$\hat{A} = 4\pi\beta l_P^2 \sqrt{2j^{(u)}(j^{(u)}+1) + 2j^{(d)}(j^{(d)}+1) - 2j^{(u+d)}(j^{(u+d)}+1)}. \quad (4.32)$$

La construcción de estos operadores puede encontrarse en la referencia [12], y casos más complejos de disposición de las superficies sobre el grafo en [14]. Lo que estos operadores y sus autovalores quieren decir es que el área tiene un espectro cuantizado, cuyos cuantos son extremadamente pequeños, del orden de l_P^2 , lo que era de esperar dado que es a estos órdenes de magnitud en los que se presentan efectos de gravedad cuántica. Además, dado que aparece el parámetro de Barbero-Immirzi, es claro que se deberá escoger un valor real para él, que deberá ajustarse en futuras medidas experimentales.

El operador volumen actúa sobre vértices, y su construcción y forma son más complejas que el área, así que nos limitaremos a señalar que se construyen mediante términos de tipo $\epsilon^{ijk} S_i^{j_1} S_i^{j_2} S_i^{j_3}$ donde los índices de las j indican tres de las aristas que llegan al vértice, y que el operador es proporcional a $(8\pi\beta l_P^2)^{3/2}$. Su forma funcional y construcción se desarrollan en las referencias [12–14]. Puede demostrarse que el volumen asociado a un

vértice será nulo si este es de orden 3 o inferior. En analogía con las redes de los sólidos podemos visualizarlo tomando los planos de red alrededor de un vértice y considerar el volumen que estos planos encierran. El volumen más simple que se puede construir es con un vértice de 4 aristas, formando un tetraedro.

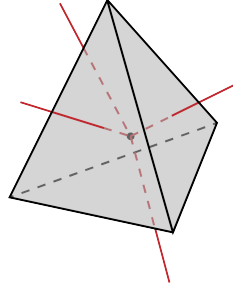


Figura 9: Representación de un tetraedro encerrando un vértice con 4 aristas. El área de cada cara del tetraedro dependerá del spin de las aristas que las atraviesan, y su volumen lo determinará el entrelazador.

Estos dos operadores ilustran la idea de que la geometría está cuantizada. El volumen y el área tendrán un espectro de valores que podrán adoptar, así que son excitaciones de nuestro sistema [11–14].

4.5. Representación de Schwinger. Formalismo $U(N)$

Recientes trabajos en LQG han usado nuevas formulaciones de la teoría para intentar abordar sus problemas. Uno de los enfoques adoptados es el de los modelos $U(N)$. El planteamiento consiste en escribir un espacio de Hilbert de los entrelazadores en los vértices, y usar la representación de Schwinger para descomponer las funciones de onda de las N aristas que convergen en los vértices. El resultado es una descripción de las aristas en forma de $2N$ osciladores desacoplados. Entonces, se definen unos operadores sobre el espacio de los entrelazadores que actúan sobre parejas de aristas

$$E_{ij} = (a_+^\dagger)_i (a_+)_j + (a_-^\dagger)_i (a_-)_j \quad , \quad E_{ij}^\dagger = E_{ji} \quad , \quad F_{ij} = (a_+)_i (a_-)_j - (a_+)_j (a_-)_i \quad , \quad F_{ji} = -F_{ij}. \quad (4.33)$$

Estos operadores son todos invariantes $SU(2)$ y forman un álgebra cerrada [15]. Además, los operadores E_{ij} forman un álgebra del grupo $U(N)$ por sí solos. Esta reformulación es apropiada para mostrar relaciones entre la gravedad cuántica de lazos y la cosmología y puede ser usada para resolver modelos basados en grafos simples, como el resuelto en la referencia [15] de dos vértices y un número fijo de aristas.

5. Conclusiones

Los grupos de Lie son una herramienta matemática crucial en física, además de ser objetos de estudio interesantes por sí mismos. Debido a su estructura de variedades diferenciables se encuentran en la intersección de dos ramas de las matemáticas, la geometría diferencial y la teoría de grupos. Por ello, es necesario un estudio previo de geometría diferencial para abordar su descripción.

Las propiedades de estos grupos pueden codificarse en su mayoría en su álgebra, un espacio vectorial con una operación bilineal interna definida, el corchete de Lie. El álgebra, además, coincide con el espacio tangente en la identidad del grupo, y está relacionada con éste a través de la aplicación exponencial [1, 5–8].

Especialmente relevantes en física, las representaciones de un grupo o de un álgebra de Lie establecen cómo actúa el grupo o álgebra como transformación de los vectores de un espacio vectorial cualquiera. Dado que el álgebra tiene estructura de espacio vectorial podemos establecer representaciones sobre él, siendo estas las llamadas representaciones adjuntas [5, 6].

Una de las clases de transformaciones continuas más recurrentes son las transformaciones de rotación en el espacio tridimensional, que conforman el grupo $SO(3)$. Se ha demostrado que existe una fuerte relación entre este grupo y $SU(2)$, teniendo ambos grupos además el mismo álgebra. En términos de representaciones, introducimos las representaciones de spin- j . Todas las representaciones de esta clase serán representaciones irreducibles de las álgebras de los dos grupos y de $SU(2)$, pero de $SO(3)$ solo lo serán aquellas con spin entero [5–7].

En cuanto a las aplicaciones en física, en mecánica cuántica se emplean estas representaciones de spin- j para construir los estados de momento angular. Los subespacios de estados cuánticos con el número cuántico j definido serán subespacios invariantes ante la acción de $SU(2)$, y los operadores de momento angular correspondientes a cada representación se construirán con elementos del álgebra $\mathfrak{su}(2)$. Además, se puede usar una representación alternativa para construir los estados y operadores de momento angular, a partir de dos osciladores armónicos desacoplados, denominada representación de Schwinger [9].

En relatividad especial, toma importancia el grupo de Lorentz. Este grupo aúna las transformaciones bajo las que la métrica de Minkowski es invariante exceptuando transformaciones, es decir, boosts relativistas y rotaciones espaciales [2–4].

En mecánica analítica, cuando se trata la formulación hamiltoniana, se introduce una forma simpléctica sobre las coordenadas del espacio de fases. Las transformaciones de coordenadas que preservan esta forma simpléctica conforman el grupo simpléctico [16].

También se pueden usar los grupos de Lie para construir estructuras denominadas fibrados. En el contexto de los fibrados se formulan las teorías de Yang-Mills, que plantean campos de interacción entre partículas. Estos campos poseen una libertad gauge, es decir, son invariantes ante transformaciones de su potencial vector mediadas por elementos

del grupo con el que se construye. El modelo estándar de la física de partículas está planteado como una teoría de Yang-Mills del grupo $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$, y es junto con la relatividad general uno de las teorías físicas con más éxito hasta la fecha [1, 7, 10, 17].

Por último, se presenta la influencia de los grupos de Lie en la gravedad cuántica de lazos. Ésta es una teoría de cuantización de la gravedad que usa un enfoque hamiltoniano de la relatividad general para usar técnicas de cuantización canónica. Para ello, separa el espacio-tiempo en una hipersuperficie espacial y una dirección temporal, usando los parámetros de esta separación y la métrica en la superficie tridimensional como nuevas variables [2, 11]. A partir de ahí, sustituye las variables de la métrica por las coordenadas de los vectores que la diagonalizan, denominadas tríadas que, como poseen una libertad de rotación $SO(3)$, la teoría adquiere grados de libertad extra. De este modo, el hamiltoniano en las nuevas variables posee una simetría gauge $SU(2)$, lo que recuerda a las teorías de Yang-Mills, de las que se extraen algunas estructuras para tratarlo. La conexión de la teoría de Yang-Mills correspondiente y las tríadas constituyen las llamadas variables de Ashtekar en las que se formula la gravedad cuántica de lazos. Sin embargo, esta teoría difiere del planteamiento de las teorías de Yang-Mills en que el campo descrito influye en la geometría de la variedad de base, mientras que en las teorías de Yang-Mills la geometría juega un papel pasivo. Esta influencia del campo y la geometría se manifiesta en una ligadura en el hamiltoniano, la ligadura hamiltoniana, que aún no se ha podido implementar en la teoría satisfactoriamente [11–14].

Para construir un espacio de Hilbert apropiado se emplea la representación de lazos, y se usan como base los denominados grafos. Los grafos son conjuntos de nodos denominados vértices en los que confluyen aristas, de modo que podemos dibujar curvas cerradas usando aristas. A cada arista se le asigna un spin, análogo al momento angular, puesto que cada arista constituye una representación irreducible de $SU(2)$. Se construyen además dos operadores geométricos, de área y de volumen, que actúan sobre los grafos. Estos operadores pueden ser expresados en función de los operadores de momento angular. Se da entonces un carácter cuántico a la geometría espacial, siendo cantidades como el volumen o el área excitaciones de un estado base con un espectro relacionado con el spin de las representaciones de $SU(2)$ [11–14].

Más recientes modelos plantean usar la representación de Schwinger para estudiar los estados de los entrelazadores expresando los estados de las N aristas que convergen en el vértice como $2N$ osciladores armónicos desacoplados. Esto da lugar al formalismo $U(N)$, un nuevo enfoque de la teoría que permite resolver modelos de grafos simples [15].

Los grupos de Lie son objetos matemáticos de gran riqueza estructural cuyo estudio es interesante por sí mismo. Además, son una herramienta esencial en el estudio de las transformaciones continuas y el trasfondo geométrico de diversas áreas de la física teórica, como la descripción cuántica del momento angular, la relatividad especial, la mecánica analítica o el modelo estándar. En particular, su estudio es imprescindible en la gravedad cuántica de lazos. Debido a la ausencia de datos experimentales, las teorías de cuantización de la gravedad han de basarse en estructuras matemáticas bien definidas, y los grupos de Lie proporcionan un marco sobre el que poder establecer nuevos modelos.

Bibliografía

- [1] Mikio Nakahara (2003), “Geometry, topology and physics”, Institute of physics publishing
- [2] Robert M. Wald (1984), “General Relativity”, The University of Chicago Press
- [3] Sean M. Carroll (2003), “Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity”, Pearson Education
- [4] Ray D’Inverno (1992), “Introducing Einstein’s Relativity”, Oxford University Press
- [5] Brian C. Hall (2003), “Lie groups, Lie algebras and representations”, Springer
- [6] Chris J. Isham (1999), “Modern Differential Geometry for Physicists”, World Scientific
- [7] John Baez y Javier P. Muniain (1994), “Gauge fields, knots and gravity”, World Scientific
- [8] Peter Woit (2010), “Quantum Theory, Groups and Representations. An Introduction”, Springer
- [9] Jun J. Sakurai (1994), “Modern Quantum Mechanics”, Addison-Wesley Publishing
- [10] Michael E. Peskin y Daniel V. Schroeder (1995), “An introduction to quantum field theory”, Addison-Wesley Publishing
- [11] Jorge Pullin y Rodolfo Gambini (2012), “Un primer curso en Gravedad Cuántica de Lazos”, Editorial Reverté
- [12] J. Fernando Barbero G. (2008), “Quantum Geometry and Quantum Gravity”, AIP Conference Proceedings 1023 no.1, 3-33 [[arXiv:0804.3726](#)]
- [13] Norbert Bodendorfer (2016), “An elementary introduction to loop quantum gravity”, [[arXiv:1607.05129](#)]
- [14] Abhay Ashtekar y Jerzy Lewandowski (2004), “Background Independent Quantum Gravity: A Status Report”, Class. Quant. Grav. 21 R53 [[arXiv:gr-qc/0404018](#)]
- [15] Enrique F. Borja, Jacobo Díaz-Polo, Iñaki Garay y Etera R. Livine (2010), “Dynamics for a 2-vertex quantum gravity model”, Class. Quant. Grav. 27 235010 [[arXiv:1006.2451](#)]
- [16] Jorge V. José y Eugene J. Saletan (1998), “Classical dynamics: a contemporary approach”, Cambridge University Press
- [17] David Griffiths (2008), “Introduction to Elementary Particles”, Wiley-VCH
- [18] Abhay Ashtekar, John C. Baez y Kirill Krasnov (2000), “Quantum Geometry of Isolated Horizons and Black Hole Entropy”, Adv. Theor. Math. Phys. 4 1-94 [[arXiv:gr-qc/0005126](#)]