

eman ta zabal zazu



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

Tesis doctoral

**La transferencia de contenidos matemáticos a contextos científicos:
el concepto de función**

Miren Begoñe Burgoa Etxaburu

Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales

Programa de doctorado de Psicodidáctica

Universidad del País Vasco (UPV-EHU)

Directoras:

Dra. Teresa Nuño Angós

Dra. Neus Sanmartí Puig

Leioa, abril, 2014

En recuerdo de Ama y Carles, quienes ya no pueden compartir la alegría de este día, muchas gracias a ambos porque es mucho lo que habéis legado

Urak dakarrena
urak daroa,
Zuk emandakoa
gurekin gelditzen da

El siguiente trabajo de investigación es el resultado de la interesante experiencia que resulta investigar, para lo cual ha sido fundamental la ayuda, paciencia y apoyo de bastantes personas cercanas y lejanas en distancia.

En primer lugar quisiera dar las gracias a mis dos directoras de Tesis, Teresa Nuño y Neus Sanmartí por sus orientaciones, apoyos, constancia y las horas que me han dedicado a hacer posible este proyecto y sueño, ya que para mí ha supuesto eso, un sueño hecho realidad.

A las dos profesoras compañeras Isabel y Mari José, quienes estuvieron dispuestas desde el primer momento a participar en esta labor un tanto complicada. Así mismo a la dirección del centro IES Mungia que me permitió realizar dicha investigación.

A todos los alumnos y alumnas que participaron en la investigación.

A mi compañera Mari Paz Balagué con la cual tuve que intercambiar bastantes horarios para hacer las grabaciones de audio y entrevistas.

A todas las personas que han sabido orientarme en las dudas sobre las cuestiones que les he planteado , Carmen Azcárate, Jordi Deulofeu, Luis Zaballo, Rodolfo Álvarez, José Manuel Almudí, Raimundo Rubio y Santiago Fernández.

A las personas que además me han ayudado en tareas diversas Eider Goñi y Txomin Villarroel con el sistema SPSS y la estadística, Roberto Manjón en las correcciones de los textos, Leire Gordo escribiendo al ordenador, Amaia Burgoa transcribiendo y Aitor Sanchez en la maquetación.

A mis alumnos y alumnas de diversificación curricular porque sin una vivencia con ellos y ellas, nunca hubiera sido posible hacer esta investigación.

A mi familia (Joseba, Leire, Olaia), para la cual esta investigación ha supuesto un gran esfuerzo en el día a día.

A todos ellos y ellas, muchas gracias por haberme apoyado en esta difícil carrera.

Mila esker !!!!

Tabla de contenido

INTRODUCCIÓN.....	1
-------------------	---

PARTE I: MARCO TEÓRICO

1.CAPÍTULO. ¿QUÉ SE ENTIENDE POR TRANSFERENCIA?.....	9
1.1 La transferencia como componente de la inteligencia.....	10
1.2 Teorías históricas sobre la transferencia del aprendizaje.....	13
1.2.1 Teorías ambientales (<i>environmental theories</i>).....	15
1.2.2 Teorías cognitivas (<i>Cognitive theories</i>).....	17
1.2.3 Teorías sociocognitivas (<i>Sociocognitive theories</i>).....	19
1.3 La transferencia desde la perspectiva <i>Preparation for future learning</i> (PFL).....	22
1.4 Distintos tipos de transferencia para una misma experiencia.....	24
1.5 Actor-oriented Transfer (AOT).....	29
1.6 La teoría de <i>fuzzi-trace</i> (huella difusa).....	33
1.7 La naturaleza ontológica del conocimiento transferible.....	34
1.8 Distintos conocimiento presentan distintos tipos de transferencias.....	36
1.9 ¿El alumnado transfiere?.....	39
1.9.1 ¿Qué variables obstaculizan la transferencia?.....	40
1.9.2 ¿Qué condiciones favorecen la transferencia?.....	41
1.10 Innovación y eficacia.....	44
1.11 Síntesis.....	46
2.CAPÍTULO. CONOCIMIENTO COTIDIANO vs CONOCIMIENTO CIENTÍFICO, CAMBIO CONCEPTUAL.....	47
2.1 Construcción del conocimiento científico.....	48
2.2 La resolución de problemas.....	55
2.3 La transferencia en la Educación científica basada en contextos.....	60
2.4 Género y enseñanza-aprendizaje en matemáticas y en ciencias.....	65
2.4.1 Diferencias por sexo en matemáticas.....	65
2.4.2 Patrones de género y rendimiento en matemáticas.....	69
2.4.3 Diferencias por sexo en ciencias.....	78
2.4.4 Patrones de género y rendimiento en ciencias.....	80
2.5 Expectativas del profesorado e Interacciones profesorado- alumnado.....	84
2.6 Síntesis.....	86
3CAPÍTULO. EL CONCEPTO DE TRANSFERENCIA EN LA PRESENTE INVESTIGACIÓN.....	88
3.1 Síntesis.....	91
4. CAPÍTULO. TRANSFERENCIA DESDE LAS DIDÁCTICAS.....	92
4.1 Alfabetización científica-matemática y competencias científica y matemática ...	93
4.2 Los nuevos currículos orientados hacia el desarrollo de competencias.....	97
4.3 Relación entre transferencia y competencia.....	102
4.4 Síntesis.....	105

5. CAPÍTULO . EL CONCEPTO DE FUNCIÓN Y SU USO EN LAS CIENCIAS	106
5.1 Las representaciones en matemáticas	107
5.2 Concepto de función	112
5.3 El proceso de formación del concepto función.....	114
5.4 La construcción del lenguaje algebraico.....	117
5.5 Interpretación de gráficas	118
5.6 Niveles a alcanzar por el alumnado de 15 años en el concepto de función.....	120
5.7 Tareas y acciones relacionadas con el concepto función.....	122
5.7.1 Tareas	122
5.7.2 Acciones.....	123
5.7.3 Situación.....	124
5.7.4 Variables y su naturaleza	124
5.7.5 Enfoque	125
5.8 Dificultades en el aprendizaje del concepto función y propuestas de mejora....	125
5.8.1 Las intuiciones	126
5.8.2 Formas alternativas de pensar	126
5.8.3 Dificultades y concepciones científicas alternativas y su relación con el concepto función.....	137
5.8.4 Relaciones entre las dificultades desde las matemáticas y desde las ciencias	141
5.9 Síntesis.....	143

PARTE II: ESTUDIO EMPÍRICO

6. CAPÍTULO. METODOLOGÍA.....	145
6.1 Planteamiento del problema y objetivos	146
6.1.1 Objetivos	146
6.2 Contexto de la investigación.....	148
6.2.1 Participantes	148
6.2.2 Desarrollo de la investigación.....	150
6.2.3 Proceso de recogida de datos	154
6.2.4 Diseño de la Unidad Didáctica (UD)	155
6.3 Datos y categorías de análisis	157
6.3.1 Instrumentos de recogida de datos	157
6.3.2 Categorías de análisis.....	162
6.3.3 Variables	170
6.4 Validación de resultados y verificación de conclusiones	172
7. CAPÍTULO DE RESULTADOS	174
7.1 Conocimientos del alumnado al aplicar el concepto de función	176
7.1.1 Resultados obtenidos a través del examen	178
7.1.2 Resultados obtenidos mediante el contrato de autoevaluación.....	193
7.1.3 Resultados obtenidos a través de las entrevistas	202
7.1.4 Resumen de las dificultades al aplicar el concepto de función.....	241
7.1.5 Niveles de matemáticas en relación al concepto de función.....	244
7.2 Desarrollo de la unidad didáctica en el aula	253

7.2.1	Situación de partida.....	253
7.2.2	Aplicación de la UD.....	260
7.3	Dificultades al interpretar gráficos funcionales desde las ciencias.....	296
7.3.1	Dificultades en conocimiento de cinemática.....	296
7.3.2	Dificultades en el conocimiento del concepto de solubilidad.....	304
7.4	Indicios de transferencia observados.....	308
7.4.1	En relación a las dificultades matemáticas y científicas.....	309
7.4.2	En relación con las tareas.....	313
7.4.3	En relación al modelo didáctico.....	320
7.4.4	En relación a los estilos de transferencia.....	330
7.4.5	En relación a la gestión motivacional del alumnado.....	333
7.4.6	En relación a las actividades previas que influyen en el modelo de función.....	335
7.4.7	En relación a las debilidades y fortaleza de la Unidad Didáctica.....	336
7.5	Influencia de la variable sexo en la transferencia.....	337
7.5.1	En cuanto a nivel de matemáticas.....	338
7.5.2	Respecto a la relación con los niveles de ciencias.....	352
7.5.3	Evolución de los resultados del alumnado por sexo.....	358
7.5.4	Relación entre los resultados de matemáticas y ciencias y la gestión motivacional.....	360
7.5.5	Resultados de matemáticas y ciencias y gusto por dichas áreas.....	362
7.5.6	Preferencia por tipo de tarea y su organización.....	363
7.5.7	En cuanto al grado de transferibilidad en los cuales destaca cada sexo.....	364
8.	CAPÍTULO DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES.....	366
8.1	Discusión de los resultados.....	367
8.1.1	Relación entre la transferencia y el contexto de aplicación.....	368
8.1.2	Relación entre el estilo de aprendizaje y la transferencia producida.....	391
8.1.3	Relación entre el estilo docente y la transferencia producida.....	392
8.1.4	Relación entre una contextualización del aprendizaje y la transferencia.....	407
8.1.5	Relación entre conocimiento matemático y científico.....	409
8.1.6	Actividades que promueven la transferencia.....	413
8.1.7	Relación entre las aspectos motivacionales y actitudinales y la transferencia.....	416
8.1.8	Influencia de la variable sexo y perspectiva de género en la transferencia..	418
8.2	Conclusiones generales.....	422
8.3	Limitaciones de la Investigación.....	424
8.4	Perspectivas de futuro.....	426
	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	428
	ÍNDICE DE TABLAS.....	453
	ÍNDICE DE FIGURAS.....	455
	ÍNDICE DE ANEXOS (en soporte digital).....	458

INTRODUCCIÓN

Esta investigación parte de la necesidad de profundizar sobre las relaciones entre las ciencias y las matemáticas en relación a la transferencia de conocimientos entre ambas áreas. Tal inquietud surge de los años de experiencia de la doctoranda (más de 12) trabajando con alumnado de diversificación curricular (se trabaja en el ámbito científico tecnológico: ciencias, matemáticas y tecnología) y comprobar las grandes dificultades que parecen relacionar las ciencias y las matemáticas. Además, se une a las numerosas quejas que se escuchan entre los compañeros y compañeras docentes de ciencias en el sentido de que la carencia matemática es una de las grandes causas que explican el fracaso en ciencias.

Con tal fin, la presente tesis aborda la problemática de la transferencia entre los contenidos de estas dos disciplinas separadas en el currículum, pero que están interrelacionadas, ya que los conocimientos matemáticos y los científicos se requieren biunívocamente para el desarrollo de ambos. La ciencia necesita de los saberes matemáticos para modelizar la realidad y las matemáticas adquieren mayor sentido en tanto y cuanto son útiles para esta finalidad.

La función social que se atribuye a la enseñanza en nuestros días conlleva el abandono de la escuela de carácter propedéutico y selectivo, que fomenta la reproducción de las desigualdades sociales (Perrenoud, 1997), y la búsqueda de una enseñanza para todo el alumnado, superadora de dichas desigualdades. Se trata de considerar la formación integral de la persona como objetivo básico de la educación, en lugar de una función meramente propedéutica. Para ello, uno de los problemas más importantes al que tiene que hacer frente el sistema educativo es la contradicción entre una enseñanza considerada básica y obligatoria para todo el alumnado, y los resultados finales obtenidos al término del período obligatorio.

Si bien los datos a nivel estatal indican que, tras diez años de escolarización, una cuarta parte del alumnado del Estado Español no concluye con éxito sus estudios y no obtiene el título de graduado, en la Comunidad Autónoma Vasca la situación parece bien distinta ya que un 90.86% del alumnado en el curso 2012-2013 (92.5% de chicas y un 88.0% de chicos) obtuvo el Título de Secundaria, eso sí, con un 70.16% de la población

que había aprobado todas las áreas. Las matemáticas fueron aprobadas por un 84.4% del alumnado, la Biología y la Geología por un 92.0% y por un 88.0% la Física y Química.

Además, se ha constatado a partir de estos resultados que buena parte de la ciudadanía escolarizada no es capaz de utilizar los conocimientos que teóricamente posee en situaciones o ante problemas reales, sean cotidianos o profesionales. Estos hechos, que no son específicos de nuestro sistema educativo, junto con otras razones de todo tipo, han propiciado la implantación en muchos países de un currículo que tiene como finalidad el desarrollo de competencias (LOE, Ley Orgánica 2/2006; Real decreto 1513/2006), entre las que se incluyen las competencias matemática y científica, que se analizan en esta tesis.

Un objetivo central y permanente de la educación es proveer experiencias de aprendizaje que sean útiles más allá de las condiciones específicas de la escuela; el profesorado quiere que el alumnado muestre pruebas de transferencia en una variedad de situaciones: de un problema a otro dentro de un curso, de un curso a otro, de un curso escolar al siguiente, y de sus años en la escuela a su trabajo. Así pues, la creencia en la transferencia está en el corazón del sistema educativo porque cuando se produce el *transfer* se garantiza un aprendizaje futuro y además conlleva un ahorro de tiempo y energía en el aprendizaje (Cormier y Hagman, 1987). En el contexto de la enseñanza obligatoria el término *competencia* alude al capital cultural mínimo que un ciudadano o una ciudadana tiene que haber adquirido al término de su escolarización obligatoria para poder desenvolverse adecuadamente en la sociedad actual, e integra de manera funcional los conocimientos y habilidades en contextos socioculturales variados y funcionales. Para la adquisición de esta funcionalidad es imprescindible que lo aprendido se transfiera (*transfer*) desde la situación del aprendizaje hasta el contexto donde se requiera su uso.

El pasado siglo llegaba a su fin cuando la *American Educational Research Association* (Schoenfeld, 1999) identificó la transferencia como uno de los seis campos más básicos y urgentes en los que la investigación educativa debía avanzar a lo largo del siglo XXI. Muestra de ello son los números especiales de 2012 de las revistas *Educational Psychologist* y *Journal of the Learning Sciences* dedicados a la transferencia, donde se incluyen nuevos planteamientos teóricos, basados en datos empíricos, sobre la posibilidad y el modo de alcanzar la transferencia del conocimiento. Esta cuestión también está adquiriendo un interés creciente en la comunidad investigadora de didáctica de las ciencias en el estado español, como se refleja en la revista *Didáctica de las ciencias experimentales y sociales*, en el 2012. Sin embargo, una oportuna revisión de las investigaciones realizadas

en el entorno de las ciencias cognitivas indica que sólo el 1% de los trabajos publicados en las revistas más prestigiosas se ha ocupado de la transferencia (Chen y Klahr, 2008) .

Asimismo, existe un gran debate en la comunidad investigadora en relación a los factores que actúan en la aparición de la transferencia. Su naturaleza y los tipos en que se produce en diferentes contextos han sido también motivo de estudio y controversia durante no menos de un siglo (Barnett y Ceci, 2005; Rebello et al., 2005). Los distintos puntos de vista pueden parecer contradictorios, pero, sobre el soporte de una amplia base teórica, se han ido encajando como piezas de una misma verdad.

El marco teórico que sustenta la presente investigación es el *Actor-Oriented Transfer* (AOT), propuesta por Lobato (2003). Desde este marco, para que se produzca la transferencia el o la estudiante tiene que haber adquirido un esquema o modelo teórico suficientemente general a partir de experiencias muy significativas para él o ella, y ha de ser también capaz de relacionar este modelo teórico —en esta investigación el concepto de *función*— con la representación que se haga de la nueva situación en la que tenga que transferirlo. Desde la perspectiva AOT, el énfasis recae en las similitudes que observa la o el estudiante, no en las observadas por la persona experta, docente o investigadora.

La transferencia analizada en esta tesis muestra una complejidad aún mayor, puesto que implica la aplicación de un modelo —el de función— para interpretar contextos que exigen activar otros modelos científicos (el de la mecánica newtoniana o el de la solubilidad), y exige, por lo tanto, la transferencia desde un dominio —el matemático— a otro distinto, el científico. En consecuencia, el o la estudiante necesitará de un conocimiento idóneo sobre ambos modelos para la correcta resolución de los problemas planteados.

Diversos estudios (Hammer, Elby, Scherr y Redish, 2005) basándose en la perspectiva AOT consideran que cada nuevo contexto es una ocasión para agregar nuevos elementos a posibles nuevas proyecciones del concepto. Así el concepto de función es asumido como *Clase de coordinación* para cuya construcción será necesaria la activación de conceptos como variables, pendiente, etc. Por lo tanto, la sensibilidad hacia el contexto, en lugar de ser algo que deba superarse, puede desempeñar un papel importante en la transferencia del aprendizaje.

A lo largo de esta última década se han desarrollado propuestas ricas en contextos científicos que suponen la construcción de conceptos matemáticos contextualizados, de modo que estos conceptos matemáticos pueden ser transferidos con mayor facilidad a

nuevos contextos científicos. Esta idea es recogida por la *National Research Council*, (NRC) que ya en el 2000, remarcó que se puede favorecer la transferencia trabajando la misma idea en al menos dos contextos diferentes.

El número de contextos que sean de utilidad depende de factores tales como la distribución de útiles de conocimiento ingenuo y los requisitos del concepto de que se trata, más que de algunas propiedades generales de la abstracción. Por ello se sugiere que "tener un concepto" podría ser imposible de evaluar en un contexto único y, lo que es más importante, son muchos los estados de construcción parcial que interactúan en formas muy específicas con determinados contextos.

Es por ello que en el marco de esta investigación se diseñó una U.D. caracterizada por la riqueza en contextos científicos con el fin de que los conceptos matemáticos asociados al modelo de función fueran construidos en contexto. En la misma, además, se incluyeron actividades que cubrieran todas las etapas de aprendizaje, las cuales debían realizarse con una organización de tarea determinada. La evaluación a través de la autoevaluación y la coevaluación, fue incluida como parte de la propuesta didáctica.

Esta unidad didáctica se aplicó en dos clases de 3º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) del IES Mungia situado en la población de Mungia (Bizkaia), cuya población actual es de 17.055, durante el curso escolar 2008-2009.

El estudio empírico llevado a cabo se basa en los datos recogidos en estas dos clases a partir de las respuestas del alumnado en el examen final diseñado por las profesoras y, posteriormente, y en los obtenidos de una entrevista estructurada realizada a ocho estudiantes, chicos y chicas de cada uno de estos grupos, escogidos en función de tres niveles académicos alto, medio y bajo. En la entrevista se indagó sobre su interpretación de gráficos funcionales de uso habitual en las clases de física y química pero que aún no habían sido trabajados desde esta área del currículo. Paralelamente también se entrevistó a ocho estudiantes de 3º de ESO que no todavía no se habían iniciado en el estudio de las funciones.

Por tanto, esta investigación posee una elevada complejidad ya que primero se analiza la transferencia cercana y, posteriormente, se analiza la transferencia lejana (Barnett y Ceci 2002), todo ello en diversidad de contextos y momentos, y atendiendo a una diversidad de tipologías de alumnado.

Para ello, se ha utilizado una metodología cualitativa que ha tratado de categorizar la mayoría de las respuestas dadas por el alumnado tanto en los exámenes como durante las entrevistas. Por otra parte, el análisis del contexto de aprendizaje, la caracterización del estilo docente y la relación entre el alumnado y las docentes se ha basado en las transcripciones de los videos de aula. Toda esta labor se caracteriza por ser gradual y minuciosa.

Además, se ha buscado identificar qué papel juega la motivación y su gestión para el logro de la transferencia -aspectos que habitualmente no se incluyen en este tipo de estudios pero que pueden ayudar a explicar mejor los casos de éxito y de fracaso en la transferencia (Belenky y Nokes-Malach, 2012)- mediante la aplicación de un cuestionario de gestión motivacional (Cabanach et al., 2009).

Estos factores, de carácter académico personal, podrían explicar también, la diferencia entre los resultados del logro en la obtención del título de educación secundaria (curso 2011-2012) –favorable a las chicas- y los resultados de las chicas más bajos en PISA 2012 (*Program for International Student Assessment*), donde la puntuación de los chicos en Euskadi en Competencia matemática es 14 puntos más alta que la de sus compañeras y en Competencia científica 9 puntos más, siendo estas diferencias significativas desde el punto de vista estadístico. En relación a ello esta investigación incluye además la perspectiva de género en el estudio de la capacidad de transferir ya que no hay estudios anteriores sobre el tema.

Por último, aún con estas nuevas aportaciones, un estudio que parte de aula para volver a propuestas de futuro para el aula, no debe olvidar el punto de vista del profesorado. Por ello, se ha optado por combinar el análisis del nivel y tipología de la transferencia aplicada por el alumnado con el análisis de la práctica de enseñanza en el aula. Aunque la Unidad Didáctica (UD) diseñada fue común para ambos grupos, los datos recogidos a partir de la grabación en video de las distintas sesiones de trabajo muestran una reconstrucción de dichos diseños y distintos estilos docentes de interacción. Al mismo tiempo este análisis ha posibilitado valorar los aspectos que se pueden mejorar del primer diseño.

La investigación se sitúa, por tanto, en la enseñanza-aprendizaje del concepto función en las clases de matemáticas de 3º de la ESO y, más específicamente, en el “camino” de aprendizaje que va desde un trabajo más o menos sistemático en relación a situaciones contextualizadas orientadas a construir el concepto de función, a otro más de

creación de significados en situaciones del ámbito científico que aun no se han trabajado en el aula, pero que exigen transferir lo aprendido. Es decir, se ha analizado la transferencia de contenidos desde el área de matemáticas a contextos científicos teniendo en cuenta dos ejes vertebradores diferenciados: el contexto y la perspectiva de género en función de cuatro objetivos: (1) Analizar la transferencia producida por parte del alumnado y su relación con el contexto de aplicación; (2) Relacionar el estilo docente y la transferencia del concepto de función llevado a cabo por el alumnado en situaciones contextualizadas (cotidianas y científicas); (3) Caracterizar estilos de transferencia a partir de identificar dificultades tanto científicas como matemáticas; y (4) Analizar el grado de transferibilidad desde la perspectiva de género.

Esta memoria de la investigación se divide en ocho capítulos:

- El primero, denominado *¿Qué se entiende por transferencia?*, trata de adentrarse en esta problemática, que si bien ha sido bastante estudiada desde la Psicología, hasta este siglo, no lo ha sido en la Didácticas de las Ciencias Experimentales. Para ello, se realiza un recorrido histórico que engloba las diversas perspectivas que sobre este concepto han sido manifestadas así como las nuevas perspectivas de futuro.
- El segundo capítulo, denominado *Conocimiento cotidiano vs Conocimiento científico, Cambio conceptual*, tiene por objetivos esclarecer los puntos de encuentro y las diferencias entre ambos tipos de conocimiento, así reflexionar sobre la complejidad que conlleva la transferencia del conocimiento científico a representaciones externas fundamentales para la resolución de problemas contextualizados, ya que en ello, además del aprendizaje previo del alumnado pueden influir actitudes personales (factores motivacionales, de autoconcepto y emocionales) y las interacciones profesorado-alumnado. Además, este capítulo incluye la perspectiva de género en el aprendizaje en matemáticas y ciencias, incluyendo en ello factores tales como la autoeficacia, autoconcepto, ansiedad y las distintas estrategias de ejecución utilizadas por ambos sexos en las tareas de matemáticas.

- En el tercer capítulo, denominado *El concepto de transferencia en la presenta investigación*, se define cuál de las opciones expuestas en el capítulo 1 es la utilizada para esta investigación.
 - En el cuarto capítulo, denominado *Transferencia desde las ciencias*, se exponen los distintos conceptos de alfabetización matemática y científica así como los currículos de matemáticas y ciencias que hacen referencia al concepto de competencia matemática y científica. Por otro lado se especifican en qué cursos y capítulos de dichos documentos se incluyen tanto el concepto de función como los de mecánica y solubilidad. Por último se relacionan los conceptos de competencia y transferencia.
 - El quinto capítulo, denominado *El concepto de función y su uso en las ciencias*, se adentra en la construcción del pensamiento matemático y del concepto de función. Se analizan las etapas en la construcción así como las diversas imágenes del concepto que pueden ser interiorizadas en el aprendizaje. Además, se aborda la utilización de dicho concepto en las ciencias y las concepciones alternativas del alumnado tanto sobre el concepto función como sobre los conceptos científicos – mecánica y solubilidad- presentes en la entrevista.
 - En el capítulo sexto, denominado *Metodología y Parte empírica*, se exponen los apartados propios de la investigación, se presentan las variables de estudio así como los instrumentos de medida y las categorizaciones llevadas a cabo.
 - En el capítulo séptimo, denominado *Resultados*, se concretan las transferencias identificadas organizadas por tareas –translación, predicción y clasificación-, así como las dificultades halladas.
1. En el capítulo octavo, denominado *Discusión y conclusiones*, se expone la síntesis de la investigación, las limitaciones que presenta esta investigación así como las perspectivas de futuro.

PRIMERA PARTE

MARCO TEÓRICO

1 CAPÍTULO. ¿QUÉ SE ENTIENDE POR TRANSFERENCIA?

1. La transferencia como componente de la inteligencia
2. Teorías históricas sobre la transferencia del aprendizaje
3. La transferencia desde la perspectiva *Preparation for future learning* (PFL)
4. Distintos tipos de transferencia para una misma experiencia
5. *Actor-oriented Transfer* (AOT)
6. La teoría de *fuzzi-trace* (huella difusa)
7. La naturaleza ontológica del conocimiento transferible
8. Distintos conocimientos presentan distintos tipos de transferencias
9. ¿El alumnado transfiere?
10. Innovación y eficacia
11. Síntesis

En este capítulo se define el concepto de transferencia desde su identificación como componente de la inteligencia hasta nuestros días, pasando por las distintas teorías históricas que han tratado de describirla desde muy diversos puntos de vista (teorías ambientalistas, teorías cognitivas y teorías sociocognitivas). Así mismo, se exponen distintas aportaciones como la de la transferencia desde la perspectiva *Preparation for future Learning*, la perspectiva *Actor-oriented Transfer (AOT)*, la teoría de *Fuzzi-trace* que ayudan a una interpretación más dinámica y personal de la transferencia. A continuación se destaca la naturaleza ontológica del conocimiento y en función de ella los distintos tipos de transferencia posibles. Finalmente se incluyen las variables que obstaculizan y favorecen la transferencia y qué papel tiene la innovación y la eficacia en la transferencia.

1.1 La transferencia como componente de la inteligencia

La utilización del conocimiento aprendido en una nueva situación, la transferencia, es uno de los rasgos centrales del buen aprendizaje y, por tanto, constituye uno de sus problemas más habituales, a juzgar por los resultados obtenidos en distintas evaluaciones, del *Program for International Student Assessment* conocido como evaluación PISA, por ejemplo. Sin capacidad de transferir lo aprendido a nuevos contextos, lo aprendido es inerte y muy poco eficaz. Este hecho parece ser debido a que, en contra de lo que una mayoría de aprendices y docentes creen, la transferencia no es un proceso automático que se produce necesariamente cada vez que se aprende algo.

La transferencia a nivel cognitivo ha sido estudiada por Sternberg durante muchos años (Sternberg, 1984a, 1985, 1986, 1987; Sternberg, Ketron y Powel, 1982; Sternberg y Powel, 1983a, 1983b) quien postula una organización jerárquica de la inteligencia compuesta por dos tipos componentes: los *macrocomponentes* y los *microcomponentes* (Sternberg, 1984b). Define los primeros como aquellos aspectos generales del procesamiento de la información (la inteligencia general, la inteligencia académica, la inteligencia práctica, la inteligencia fluida, la inteligencia cristalizada y la motivación), y los segundos como los elementos implicados directamente en la actuación intelectual (metacomponentes, componentes de actuación (*Performance components*) y componentes de adquisición, retención y transferencia) (Sternberg, 1984b, 1985). Cada uno de estos microcomponentes supone un grado diferente de abstracción.

Los metacomponentes presentan el grado más amplio de globalidad y por ello se ubican en la jerarquía más alta del procesamiento. Son el nivel gestor-ejecutivo de la inteligencia. Reciben la información recogida por el resto de los microcomponentes y, en función de la misma, organizan estos componentes más concretos atendiendo a las exigencias de las tareas. Los metacomponentes tienen, no obstante, una capacidad limitada de procesamiento que puede verse superada por las exigencias de la tarea.

Los componentes de actuación son los que presentan un grado menor de generalidad, y suponen procesos concretos que se emplean en la ejecución de la tarea (Sternberg, 1984b). Los componentes de adquisición, retención y transferencia se encuentran asociados a estas tareas cognitivas, pero en menor medida que los componentes de ejecución. La importancia especial de estos microcomponentes reside en su efecto sobre la generalización y la transferencia de la información y de lo aprendido a situaciones nuevas.

Cada macrocomponente se interrelaciona de un modo específico con los microcomponentes recogiendo la información que éstos producen y se nutre de la observación de la actuación de los microcomponentes. Su objeto es generar un mayor grado de amplitud y abstracción.

En este sentido, Sternberg entiende por transferencia la utilización de una acción, contenido, información o concepto, aprendida en una determinada condición, en situaciones diferentes y dispares de la situación en la que fue aprendida; en suma, se trata de la capacidad de emplear lo aprendido anteriormente en nuevas situaciones: “... the real function of learning is the transfer of what is learning in old situations to new situations” (Sternberg, 1988, p. 286).

Tal definición se puede interpretar en base a dos conceptos de transferencia:

- a) La aplicación de lo aprendido en situaciones análogas a aquellas en que se produjo el aprendizaje. En estos términos se entiende por transferencia el mantenimiento de lo aprendido a lo largo del tiempo en situaciones similares.
- b) El empleo del material aprendido para afrontar y superar situaciones y problemas diferentes de aquel en el que se adquirió tal material. Éste es el concepto de transferencia más extendido.

En efecto, a partir de este análisis sobre la organización de la inteligencia existen muchas y variadas definiciones de transferencia (Beach, 1999; Bransford, Brown y Cocking, 2000; Detterman, 1993; Lee, 1998; Royer, Mestre y Dufresne, 2005) que tienen

por fundamento el uso apropiado de conocimientos previos en nuevos contextos percibidos como similares por la persona experta: docente o investigadora, quien a su vez los ha elegido previamente por considerarlos semejantes a las situaciones en que ha tenido lugar el aprendizaje.

Sin embargo, el concepto de transferencia defendido en esta tesis comparte una perspectiva moderna basada en los tipos de conocimientos que el alumnado aporta al razonar sobre una situación concreta y en la denominada transferencia dinámica. Esta aportación en absoluto descarta el punto de vista anterior —tan ampliamente adoptado en las investigaciones—, pero trata de averiguar no sólo si la transferencia se ha producido con éxito en los términos expresados en el párrafo anterior, sino, sobre todo, en qué medida el alumnado ha sido capaz de enfrentarse a situaciones nuevas con una adaptación y flexibilidad adecuadas. En este sentido, se incorporan elementos de perspectivas procedentes principalmente de investigaciones realizadas en el campo de la enseñanza de la Física (Beach, 1999; Greeno Smith y Moore, 1993; Lobato, 2003; Rebello et al., 2005), así como otras aportaciones que se irán presentando a lo largo de este apartado (diSessa y Sherin, 1998; diSessa y Wagner, 2005; Dufresne, Mestre, Thaden-Koch, Gerace, y Leonard, 2005; Hammer et al., 2005; Rebello et al., 2005; Redish, 2004; Schwartz, Bransford, y Sears, 2005; Schwartz, Taylor, y Pfaffman, 2005). Ciertamente, ha quedado demostrado que, desde una perspectiva actual, una definición de transferencia que sólo atienda a la aplicación en nuevos contextos de conocimientos adquiridos en situaciones anteriores —tal como y es habitual en la literatura tradicional— es insuficiente para su análisis (Bransford y Schwartz, 1999; Gick y Holyoak, 1980; Rebello et al., 2005; Schwartz, Lin, Brophy, y Bransford, 1999). Schwartz et al., 2005). Por otro lado, también se ha producido un cambio metodológico en el modo de medir la transferencia. Se ha pasado de la medida directa de las declaraciones explícitas del alumnado sobre la correspondencia entre dominios de las medidas implícitas, a medidas indirectas, teniendo en cuenta que los y las estudiantes pueden ser sensibles a la relación entre las situaciones sin ser capaces de verbalizar explícitamente la base de dicha conexión. Esta visión más amplia de lo que cuenta como evidencia para el estudio de la transferencia se ha desarrollado por diversos caminos. Algunas investigaciones se han centrado en cómo aprende el alumnado a percibir los acontecimientos como manifestación de los principios, y cómo este aprendizaje le prepara para ver eventos futuros en términos de los mismos principios (Bransford y Schwartz, 1999). Otras investigaciones han buscado indicios de

cómo interpreta el alumnado las situaciones como similares con actividades anteriores bajo la influencia de estas mismas actividades (Lobato, 2003, 2012; Lobato y Seibert, 2002b). Del mismo modo, en algunas las investigaciones se ha argumentado a favor del alumnado, postulando que la transferencia ocurre al interactuar con una segunda/nueva situación utilizando el mismo sesgo interpretativo desarrollado en las interpretaciones perceptuales de una situación inicial (Day y Goldstone, 2012).

Por ello, actualmente las investigaciones tienen en cuenta que el comportamiento activo del alumnado, su perspectiva y postura en el aprendizaje, son factores críticos de la transferencia. La transferencia no se produce simplemente por la similitud entre las situaciones originales y las nuevas, sino que depende fundamentalmente de la inclinación de la persona que está aprendiendo a conectar situaciones (Lobato, 2003, 2012). El enfoque AOT se centra en el beneficio que una persona puede obtener de lo previamente aprendido para su transferencia. En este sentido, los estudios de Schwartz, Chase, y Bransford (2012) ponen la atención en la importancia de que el alumnado tenga una mentalidad orientada hacia la adaptación de sus conocimientos y no sólo a su aplicación. También en este sentido Chi y VanLehn (2012) y Lobato (2012) indican que la transferencia, implica, literalmente, la adopción de nuevas perspectivas, el desarrollo de nuevas formas de ver situaciones familiares.

1.2 Teorías históricas sobre la transferencia del aprendizaje

El término transferencia ha sido acuñado para designar la utilización del conocimiento adquirido en una situación específica en una nueva situación. Esta definición puede parecer demasiado simple y general, y sin embargo, las distintas definiciones y los análisis correspondientes a cada una de ellas han suscitado una diversidad de puntos de vista.

La literatura sobre la transferencia incluye una variedad de perspectivas aparentemente contradictorias (Barnet y Ceci, 2002; Beach, 1999; Evans, 1998; Greeno, 1997; Laboratory of Comparative Human Cognition, 1983, Lave, 1991; Packer, 2001; Toumi-Gröhn, T. y Engeström, 2003). Mientras algunas manifiestan la dificultad de encontrar pruebas de la existencia efectiva de la transferencia, como es el caso de Detterman (1993), otras la consideran omnipresente, siempre que se sepa dónde dirigir la atención (Dyson, 1999). No faltan quienes ven en ella un concepto inviable (Hammer et

al., 2005), ni tampoco quienes entienden que el aprendizaje y la transferencia son conceptualmente indistinguibles, por lo que habría que dedicar una atención especial al transfer (Campion, Shapiro y Brown, 1995).

Desde comienzos del siglo XX se han expuesto distintos puntos de vista sobre cuál sería el enfoque adecuado para abordar el estudio de la transferencia, que con sus nuevas definiciones, metáforas y métodos han hecho posible un replanteamiento del concepto:

- a) Teoría de elementos idénticos (Thorndike y Woodworth, 1901),
- b) Teoría de generalización de principios (Judd, 1908)
- c) Transferencia de las transiciones emergentes (Beach, 1999, 2003),
- d) Posibilidades y limitaciones de enfoque (Greeno, 1997; Greeno et al., 1993),
- e) Preparación para el futuro aprendizaje (Bransford y Schwartz, 1999)
- f) Modelo de transferencia orientada al actor (Lobato, 2003),
- g) Distintas perspectivas de la teoría de la actividad (Toumi-Gröhn, T. y Engeström, 2003)

Desde los inicios de la Psicología como disciplina científica a mediados de la primera década de 1800, la transferencia ha sido un tema central durante más de 100 años, y aún sigue siéndolo hoy en día. Una de las primeras preguntas de la Psicología de aquella la época inicial fue la cuestión de cómo la información aprendida en un determinado momento llega a influir en el aprendizaje posterior (Høffding, 1892). Se llegó a la conclusión de que el modo en que se conecta la nueva situación por parte de la persona pensante con la situación previa resulta ser muy peculiar y particular (Pea, 1989). En el presente trabajo, realizado desde la didáctica de las ciencias y de la matemática, se plantea la siguiente pregunta de investigación: ¿De qué modo afecta el aprendizaje del concepto *función* realizado a través de múltiples contextos a la manera en que lo utiliza el alumnado en el dominio científico cuando se enfrenta a situaciones no trabajadas en el aula? La evolución hasta llegar a la formulación de esta pregunta ha sido complicada, porque el término *transferencia* ha sido objeto de múltiples enfoques, debido a distintos factores. Por un lado, la escasez de estudios sobre transferencia en el ámbito de las ciencias cognitivas —los trabajos al respecto no han superado el 1% en la revistas más prestigiosas (Chen y Klahr, 2008), además las metodologías utilizadas para su estudio utilizaron prácticamente una sola mirada de estudio hasta principios del siglo XX, y, por otro lado, porque las posibles interrelaciones entre distintos dominios tampoco han supuesto un peso importante

en las investigaciones hasta la actualidad. Por último, cabe reseñar que los estudios con población adolescente no son numerosos y que existe la necesidad de investigaciones de este tipo con alumnado de educación secundaria obligatoria por el carácter universal de la educación en estas edades. A ello se añade la perspectiva de género por su transcendencia en todo tipo de estudio sociológico.

Hasta principios del siglo XX, la teoría dominante sobre la transferencia era denominada «*doctrina de la disciplina formal*». Esta teoría se originó en la época clásica y consideraba que la práctica de algunos ejercicios o materias tenía efectos generales, es decir, que existían ciertas disciplinas que facilitaban a la mente transferir lo aprendido. De este modo, se pensaba que su estudio y ejercicio desarrollarían las funciones mentales básicas provocando una mejora en el funcionamiento intelectual. El latín y la geometría, y posteriormente el griego y las matemáticas, conformaban estas disciplinas formales. En el caso del latín, la estructura interna de la lengua se transferiría a otras lenguas; el estudio de cursos de lógica enseñaría a pensar mejor. Así, desde esta teoría se consideraba la mente como un músculo que se ejercitaba con el entrenamiento.

Frente a estas afirmaciones, y junto al nacimiento de la nueva ciencia de la Psicología educativa a principios del siglo XX, surge una nueva visión de la transferencia basada en la teoría asociacionista. Así pues, las teorías históricas del aprendizaje se pueden dividir en tres categorías: las que hacen hincapié en el análisis de acontecimientos externos al alumno o alumna, las que hacen hincapié en el análisis de los acontecimientos internos en el alumno o alumna y las que inciden tanto en aspectos cognitivos como socioculturales. A las primeras se las ha denominado teorías ambientales (*environmental theories*), a las segundas cognitivas (*cognitive theories*) y a las terceras sociocognitivas (*sociocognitive theories*).

1.2.1 Teorías ambientales (*environmental theories*)

La primera teoría ambiental de la transferencia de aprendizaje fue propuesta por Thorndike y Woodworth (1901), y fue llamada *Teoría de elementos idénticos*. La perspectiva adoptada consistía en definir / identificar alguna similitud común a través de dos tareas y luego buscar pruebas (o falta de ellas) para su transferencia (Reed, 1993; Singley y Anderson, 1989). Esta perspectiva ha estado basada en la definición dada por Detterman (1993, pág. 4) "el grado en que el comportamiento se repita en una situación nueva". Así, la transferencia del aprendizaje se produciría cuando el aprendizaje producido

en un contexto es utilizado en otro nuevo y esto se produciría sólo cuando ambas tareas compartieran elementos idénticos. Cuando el número de elementos compartidos aumentara, se observaría un aumento en la cantidad de transferencia que se produce en las tareas, o una probabilidad cada vez mayor de que la transferencia se produjera de forma absoluta. Para ello era necesario que la persona que aprende fuera agente activo en hacerlo y mostrara una actitud consciente al aplicarla, ya que era necesaria la identificación de elementos idénticos entre las dos situaciones, activar el conocimiento apropiado y aplicarlo a la situación nueva planteada. Así, Thorndike y sus colegas fueron quienes primero utilizaron las pruebas de transferencia para examinar suposiciones acerca de los beneficios de las experiencias de aprendizaje (Thorndike y Woodworth, 1901).

Esta perspectiva guió un gran número de enfoques educativos especialmente populares desde 1940 a 1970 y conllevó la modificación del currículo educativo hacia contenidos más específicos, considerando que las habilidades básicas debían enseñarse antes que las habilidades más complejas, ya que éstas incluyen a las primeras (Carpintero, 2002).

Pero los resultados sobre esta base de análisis fueron decepcionantes. Muestra de ello fue la publicación de 1993 titulada *Transfer on trial: intelligence, cognition and instruction*, donde Detterman (1993) afirma:

Primero, la mayoría de los estudios no encuentran transferencia. Segundo, los estudios que afirman haber encontrado transferencia, solo lo hacen en base a criterios muy amplios y no encuentran transferencia en el sentido clásico de la misma (definida por Detterman como “el grado en que un comportamiento se repetirá en una nueva situación”, p.4...En resumen, tanto los estudios que afirman encontrar transferencia como los que no la encuentran no aportan evidencias que contradigan la conclusión general de Thorndike: la transferencia es rara, y la posibilidad de que se produzca está directamente relacionada con la similitud entre dos situaciones., (pp. 15).

Debido a la falta de pruebas de transferencia de la que adolecen muchos estudios basados en modelos tradicionales, son varias las críticas que ponen de manifiesto las limitaciones de la Teoría de elementos idénticos, por un lado, no tener en cuenta la actitud del alumnado, su motivación (Haskell, 2001), las estrategias o principios generales con los que éstos se transfieren (Judd, 1908), y por otro, porque tienen poco que decir sobre una serie de formas de transferencia, como las que se producen en situaciones en las que

obviamente no se comparten características del estímulo entre los acontecimientos, como es el caso de la *transferencia lateral*, la *transferencia lejana*, la *transferencia figurativa* y la *transferencia analógica* o *transferencia de tipo C*.

1.2.2 Teorías cognitivas (*Cognitive theories*)

Las teorías cognitivas tienen en cuenta la *Teoría de Generalización de Principios* de Judd (1908) y plantean la transferencia desde la perspectiva de cómo se estructura y cómo trabaja el sistema cognitivo humano. Judd analizó la transferencia de un principio general (Ley de Shell) de una situación a otra, llegando a la conclusión de que el grupo instruido superó al no instruido. Por su parte, otros investigadores (Hendrickson y Schoroeder, 1941) también llegaron a idénticos resultados, y por lo tanto, se puso en evidencia la posibilidad de transferencia de un conocimiento general a una tarea más específica, algo no admitido hasta entonces.

A medida que la revolución cognitiva se afianza a finales del siglo XX, el concepto de *elementos idénticos* se reformula como representaciones simbólicas mentales; es decir, las personas construyen representaciones simbólicas de aprendizaje inicial y en situaciones de transferencia. Así, para las teorías cognitivas la transferencia en lugar de depender de la similitud del estímulo depende de la similitud conceptual (Cox, 1997). Como consecuencia, dos eventos de aprendizaje pueden parecer muy diferentes uno de otro, pero si tienen similitudes conceptuales subyacentes, uno bien podría influir en el desempeño del otro (Bransford et al., 2000). La transferencia se produce si estas dos representaciones son idénticas, si se superponen, o si una aplicación que se pueda construir se relaciona con las características de las dos representaciones (Mayer, 1989; Reed, 1993; Royer et al., 2005; Sternberg y Frensch, 1993).

A mediados de la década de los 80 del siglo XX, los análisis se realizan desde la perspectiva del *esquema* que tiene precedentes en la obra de Piaget (1977). Los esquemas son estructuras de datos que representan eventos frecuentes que contienen los elementos iguales o similares y que se almacenan en la Memoria a largo plazo (MLP); por ello, tienen carácter estático y fijo. Activar el esquema no sólo facilita la adquisición de la nueva información que podría ser codificada en el esquema, sino que también "se añadiría a" la información que se había presentado. Gracias a esta teoría, se incluyen nuevos términos en la investigación de la transferencia, tales como relaciones isomórficas, razonamiento metafórico, razonamiento analógico, *transfer* analógico, etc. (Catrambone, 1998; Gentner,

1983; Gick y Holyoak, 1987; Vosniadou y Ortony, 1989).

Sin embargo, el concepto de esquema no parece adecuado para explicar las diferencias entre acontecimientos muy frecuentes y acontecimientos menos frecuentes. Por ello, surge una nueva teoría que incluye la construcción de situaciones singulares de sucesos y episodios que no tienen por qué ser repetidos. Desde esta perspectiva se defiende la construcción del *modelo mental* (Jonson-Laird, 1983; Gutierrez, 2005) como representación episódica que incluye personas, objetos y sucesos enmarcados en unos parámetros espaciales, temporales, intencionales y causales muy similares a los utilizados para codificar situaciones reales (Jonson-Laird, 1983; Santana, de Vega y Gómez, 1999).

La estructura del modelo mental, a diferencia de la de un esquema, mimetiza la estructura de los parámetros espacio-temporales, preserva el orden serial de los sucesos y se almacena en la Memoria a corto plazo (MCP); tiene un carácter dinámico e incremental. En general, estos modelos se basan en la causalidad física entre objetos o entre personas y objetos y los comportamientos de las sustancias materiales aunque también los hay de contenidos más abstractos.

Hoy día las modernas teorías representacionales han desplazado el énfasis desde lo estructural y estático hacia lo funcional y dinámico. Los procesos no se conciben como una recuperación de esquemas pasiva (realizada automáticamente), completa (del esquema en bloque) y estática (sin ajustarse a las demandas). Al contrario, la transferencia consiste en una recuperación activa, parcial y flexible de los trozos esquemáticos *guiada* por las condiciones de la situación y las demandas de la tarea. Ello garantiza el ajuste máximo de las representaciones del mundo a las condiciones situacionales.

Los autores y autoras que defienden estas teorías subrayan la importancia de los procesos de *metacognición*, esto es, el reconocimiento, regulación y monitorización de los procesos cognitivos que se utilizan para resolver una situación determinada. Así, la transferencia del aprendizaje se produce cuando la persona es capaz de reconocer los requerimientos de un nuevo problema, seleccionar las habilidades y el conocimiento aprendido previamente y aplicarlo al nuevo problema (Toumi-Gröhn, T. y Engeström 2003)

A medida que se va conociendo mejor el proceso de integración entre esquemas y modelos mentales (Johnson-Laird, 1983) se va viendo más claro que los cambios a corto plazo no se producirían en los esquemas, sino en los modelos mentales que se nutren de éstos. Por ello, el objetivo final del cambio de esquemas pasaría por propiciar cambios

situados en los modelos mentales del alumnado.

1.2.3 Teorías sociocognitivas (*Sociocognitive theories*)

El utillaje conceptual de las teorías cognitivas avanzaba, las herramientas seguían siendo pobres e insuficientes en muchos aspectos. Resultó difícil, por ejemplo, traducir las teorías cognitivas en experiencias educativas que se pudieran demostrar útiles para facilitar el aprendizaje posterior y que facilitaran la transferencia a una amplia gama de situaciones posibles. Por otra parte, a pesar de que la Teoría de Redes semánticas y Teoría de los Esquemas habían demostrado ser instrumentos muy útiles para la comprensión de temas como la comprensión lectora, parecían dispositivos anticuados para tratar el aprendizaje y el rendimiento en áreas como las matemáticas y la ciencia (Royer et al., 2005). Por ello, se hace necesario un instrumento conceptual dirigido al estudio de la transferencia que permita crear experiencias educativas y medir el aprendizaje de resultados lo suficientemente importantes como para suponer un cambio. Las nuevas teorías tratan de buscar un equilibrio entre las aportaciones de las nuevas teorías cognitivas, basadas en modelos mentales, la Teoría de Vygotsky y las aportaciones del *aprendizaje situado* (Lave, 1991).

Para la perspectiva del aprendizaje situado (Lave y Wenger, 1991), el proceso de aprendizaje se encuentra incluido y orientado por las circunstancias en las que tiene lugar la actividad de aprendizaje. El conocimiento no es una propiedad invariante de una persona, algo que la o el estudiante tiene en cualquier ocasión, sino que se trata de una capacidad de interactuar con las cosas y con otras personas (Greeno, et al., 1993). Por lo tanto, el aprendizaje debe entenderse como el proceso de conversión en participante activo de una comunidad de práctica y el conocimiento se encuentra ligado a la situación de participación en dicha comunidad (Greeno, 1997). La cuestión de la transferencia reside en entender cómo puede influir el aprender a participar en una actividad en una situación (positiva o negativa), entender la capacidad de participar en otra actividad diferente. Si la actividad aprendida se transfiere, entonces, tiene que haber sido aprendida de forma que sea invariante aunque se produzca cambio en la situación o que sea transformada según sea necesario.

Desde la perspectiva del aprendizaje situado, se define el concepto de *transferencia* como parte de características que comparten diferentes situaciones sociales y no como propiedades cognitivas de la estructura mental de cada persona.

Desde este punto de vista, la transferencia no depende de la percepción de propiedades físicas de las situaciones o problemas que se deben resolver, sino de condiciones facilitadoras o inhibidoras donde se encuentren las situaciones o problemas y los recursos disponibles necesarios para resolverlos. Por lo tanto, lo que se transfiere no es conocimiento o habilidades mentales de una situación a otra, sino patrones de participación a través de diferentes comunidades de prácticas. La transferencia es mediada por factores tales como las interacciones con el medio ambiente, compañeros y compañeras, docentes y otras influencias externas que conducen a la persona a estar en sintonía con las potencialidades (*affordances*) del contexto, las oportunidades que ofrece el contexto. Cuanta mayor interacción exista mayor será la probabilidad de transferencia (Greeno, 1997). Para Greeno, las representaciones cognitivas no son la única forma de transferencia. Las representaciones y habilidades mentales son un caso especial de forma de participación en determinados sistemas sociales, incluso considera que la transferencia que se realiza a través de mecanismos de abstracción y representaciones simbólicas es un caso “atípico” de transferencia.

Aquello que constituye un *affordance* no en términos absolutos sino en relación a un contexto determinado para una persona determinada. Además los *affordances* (anclajes, potencialidades) existen aunque no sean percibidos por el alumnado y no cambian cuando cambien las necesidades y metas del autor o autora (Gibson, 1979).

Desde esta visión se puede explicar cómo, aunque para las personas expertas ciertas tareas de transferencia comparten los mismos elementos estructurales de conocimiento con las tareas de aprendizaje inicial, y sólo difieren superficialmente o con relación a características *contextuales*, esas tareas parecen presentar una cierta complejidad estructural para una mayoría de estudiantes.

Mientras que el enfoque cognitivo enfatiza la importancia de las estructuras mentales creadas por las personas y el aprendizaje situado lo hace en la comunidad de práctica, desde el mundo educativo se sabe que antes, durante y después de la escolarización, el alumnado son personas normales abocadas a construir representaciones o teorías implícitas sobre el mundo que las rodea para poder interactuar eficazmente con éste. Por ello, hoy día se aboga por una tercera perspectiva, la del enfoque sociocultural, que se centra en el contexto social además de en los dos puntos de vista anteriores. Este enfoque se entiende como un sistema dinámico, cuyas transformaciones producen cambios en las personas que constituyen el sistema, del mismo modo que la transformación de las

personas produce, a su vez, modificaciones en el sistema en general. Según esta noción, "la transferencia no implica solamente la movilización de conocimientos, sino el movimiento de todo un ser humano que se mueve y, al hacerlo, reconstruye su relación con el contexto" (Toumi-Gröhn, T. y Engeström y p. 28).

Desde esta nueva perspectiva, mientras que el profesorado se centra en si el alumnado aprende y utiliza lo que se le enseña, lo que el alumnado aprende en realidad puede ser muy diferente de lo deseado. Así, las teorías actuales del cambio conceptual admiten que ambos tipos de conocimiento -cotidiano y científico- puedan encontrarse en armonía y puedan utilizarse cada uno dependiendo del contexto cultural donde se actúa.

Este hecho abre una nueva perspectiva en relación con la transferencia, la del *constructor psicológico*, donde el proceso de transferencia de las ideas previas a las correctas (desde el punto de vista científico) no tiene por qué diferir del proceso de transferencia incorrecto y no deseado. Desde este punto de vista, centrado en el conocimiento del alumnado y su razonamiento, no centrado en los objetivos didácticos, las evidencias de transferencia pueden parecer generalizadas. De hecho, el fenómeno de los conceptos erróneos que tan a menudo se ha discutido en la enseñanza de las ciencias, podría interpretarse como transferencia persistente pero no deseable, a menudo denominada *transferencia negativa* (Bransford, Brown y Cocking, 1999).

Dentro de esta nueva perspectiva se describen los aspectos clave en la transferencia: (1) el grado de pericia que se tiene sobre el dominio, un mayor grado de la misma facilita una mayor transferencia; (2) el contexto en que se produjo el aprendizaje inicial, por lo tanto, el aprendizaje en múltiples contextos favorece la transferencia (Bassok y Holyoak, 1989); (3) la instrucción que ayuda a que el alumnado represente de manera abstracta las situaciones problemáticas, destacando así el conocimiento esquemático ya que éste guía el razonamiento analógico (Solaz-Portalés y Sanjosé, 2008); (4) el asumir la transferencia como un proceso dinámico, no estático; (5) todo nuevo aprendizaje necesita transferencia, que se basa en aprendizajes previos y (6) la conexión entre los distintos aprendizajes.

En relación con los factores que afectan a la transferencia Bloom (2007) postuló tres dimensiones: (1) el contexto, (2) el nivel de cognición y (3) la sustancia de la transferencia. Como se muestra en la figura 1-1, donde cada celda muestra las interrelaciones implicadas en la transferencia: niveles de cognición, el material sustantivo de transferencia, y la distancia contextual de transferencia, la dimensión contextual la conforman seis niveles, que van desde el contexto más próximo hasta el contexto nuevo o

desconocido. El primer nivel tiene que ver con la transferencia no específica —se relaciona información en el mismo contexto— y el último nivel con la transferencia creativa —se proponen nuevos conceptos en nuevos contextos—. Este autor clasifica los niveles de cognición en un orden de menor a mayor: a) reacción valorativa b) reconocimiento c) comprensión de palabras y significados d) análisis de relaciones y asunciones e) abstracción f) transformación de ideas, puntos de vista y conceptualizaciones. Finalmente, ordena de menor a mayor los niveles de sustancia de la transferencia: a) patrones b) funciones c) significados d) interconexiones e interrelaciones e) comprensión intuitiva (*insight*) f) creatividad.

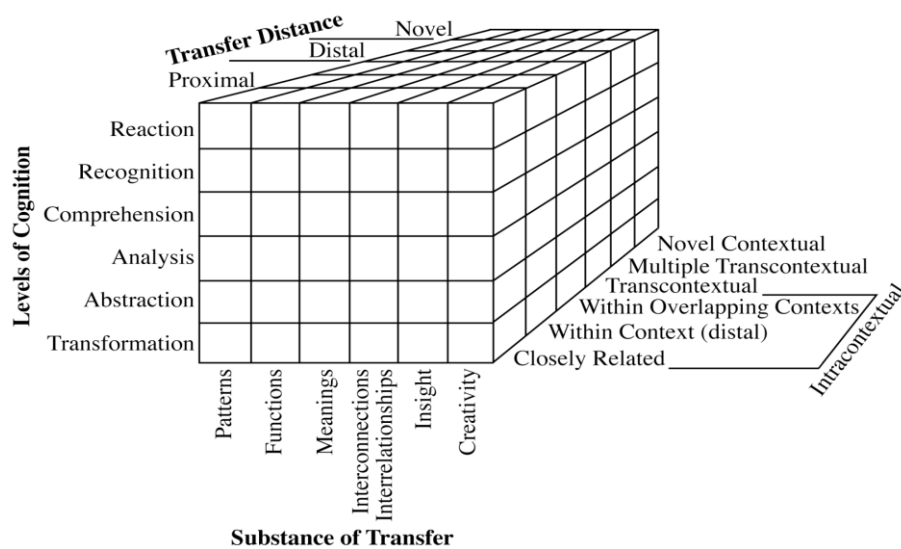


Figura 1-1. Representación de los factores que afectan a la Transferencia (Bloom, 2007).

Las teorías sociocognitivas fueron asumidas en general a partir de esas fechas, y posteriormente Lobato (2003) plantea la *Perspectiva del Actor Orientado hacia la Transferencia* (AOT), marco en el que se ha basado gran parte de esta investigación. Su teoría se presentará en otro apartado.

1.3 La transferencia desde la perspectiva *Preparation for future learning* (PFL)

Las investigaciones tradicionales sobre la transferencia demandan la aplicación de un nuevo aprendizaje a un nuevo problema o contexto (teoría de la aplicación directa, *direct application*, DA). Tal ha sido el caso de investigaciones como las de Gick y de

Holyoak (1983) sobre la transferencia analógica o sobre la resolución de problemas (Bassok, 1990; Chen, y Daehler, 1989; Thorndike y Woodworth, 1901), todas ellas basadas en una tarea final, apartada, aislada de la transferencia que implica según Bransford y Schwartz (1999) solucionar el *problema secuestrado* (SPS), sin andamiaje, disponible sin embargo en el contexto de aprendizaje. Por ello, no hay oportunidades para demostrar las capacidades de aprender a solucionar nuevos problemas buscando ayuda en los textos, con los colegas o intentando “cosas” hacia fuera, recibiendo el *feedback* y consiguiendo oportunidades para revisar. Este concepto sólo sirve para detectar la transferencia de las personas expertas, es decir de quienes han abstraído el modelo en su totalidad, pero no detecta la transferencia cuando solo se hayan producido minuciosos cambios en el aprendizaje ni su influencia para la transferencia (Bransford y Schwartz 1999).

Con la intención de ampliar los puntos de vista de la transferencia, diversos estudios (Beach, 1999; Bransford y Schwartz, 1999; Dyson, 1999; Greeno et al., 1993; Lave, 1991; Lave y Wenger, 1991) proponen ampliar el concepto de transferencia. En este contexto Bransford y Schwartz ponen el énfasis en la “preparación para el aprendizaje futuro” del alumnado (*preparation for future learning*, PFL), que implica buscar evidencias de que el conocimiento aprendido en un contexto facilita, el (re)aprendizaje de ese conocimiento o conocimientos conexos en otro contexto. La transferencia será más probable si las y los estudiantes tienen la oportunidad de reconstruir su aprendizaje en el contexto de transferencia de la misma manera a como lo hicieron en el contexto de aprendizaje.

Para investigar ese tipo de transferencia, es necesario observar además del *transfer out* el *transfer in* mediante los aspectos interpretativos con la idea de *transferir en*, diferenciándolo del *aprender a aprender*, ya que las oportunidades para recibir feedback y la mejora de su propio trabajo mejoran la apreciación del alumnado sobre la importancia de revisar el proceso de trabajo, en lugar de limitarse únicamente a las respuestas iniciales (Schwartz, Lin, Brophy y Bransford, 1999) , logrando así una representación más compatible con su situación en el contexto y con sus objetivos.

Es fundamental tener en cuenta, no solo los conocimientos de tipo “replicativo” (*replicative knowing*) y “aplicativo” (*applicative knowing*), es decir, los relativos a la adquisición de hechos concretos (*saber que*) o recordar cómo llevar a cabo un conjunto particular de acciones (*saber cómo*), sino también el conocimiento “interpretativo”

(*interpretative knowing*), *saber con* (Broudy, 1977), ya que en muchas ocasiones es este tercero el que ayuda a solucionar situaciones futuras en un mundo cambiante, donde las personas no tienen suficientes recuerdos, esquemas o procedimientos para resolver un problema, pero sí disponen de interpretaciones que ayudan a dar sentido a la situación, y tienen un efecto importante en el pensamiento posterior y en el tratamiento cognitivo (Bassok y Holyoak, 1989; Bransford y Stein, 1993; Greeno et al. 1993; National Research Council (NRC), 2000).

El enfoque PFL va más allá de evaluar si el alumnado puede generar un producto final. El foco se dirige a conocer si la persona está preparada para aprender a solucionar nuevos problemas. Por ejemplo, un determinante del hecho de aprender para el futuro lo constituyen las preguntas que el alumnado plantea sobre un asunto concreto, porque estas preguntas conforman sus metas de aprendizaje y no la tarea terminada (Bereiter y Scardamalia, 1993; Greeno et al., 1993; Lee, 1998; Wineburg, 1998).

Sin embargo, la perspectiva de *aprender a aprender* aunque es importante, tiende a enfatizar las estrategias de aprendizaje del contenido (por ejemplo, las técnicas mnemotécnicas, las técnicas de organización del conocimiento), independiente del aprendizaje de la información presentada al alumnado y no presta suficiente atención a la importancia de los conocimientos de los contenidos necesarios para dar forma a las interpretaciones que la persona hace de las nuevas situaciones, tal como proponen Broudy (1977) y Schwartz et al. (2005), ya que el entorno podría ofrecer herramientas que el estudiante podría interpretar y realizar una transferencia de carácter figurativo.

1.4 Distintos tipos de transferencia para una misma experiencia

A lo largo de esta exposición se han analizado distintos tipos de transferencia y se han propuesto numerosos referentes para graduarlos, lo que puede haber generado cierta confusión tanto con respecto a su caracterización como a su etiquetado. Con el fin de clarificar este abigarrado panorama, en este apartado se presentan en primer lugar los distintos niveles descritos por Haskell (2001), dada su conexión con el contexto, y la taxonomía propuesta por Barnett y Ceci (2002), todo ello se resume en la figura 1-2, que recoge las distintas versiones revisadas en este marco teórico.

Según Haskell (2001), durante el aprendizaje pueden producirse seis niveles de transferencia, englobados en dos dimensiones, la intracontextual y la intercontextual o

transcontextual. El primer nivel, la transferencia no específica, es el más sencillo y común en todos los aprendizajes. El último nivel, la transferencia creativa, es el más complejo, y difícilmente se consigue en los contextos académicos convencionales (Gómez, Sanjosé y Solaz-Portalés, 2012).

Intracontextual	<i>Transferencia no específica</i>	Lo que se aprende se conecta con el conocimiento previo (mecanismo interno).	- ^ Complejidad ^ +
	<i>Transferencia de aplicación</i>	Se aplica lo que se aprende en el mismo contexto	
	<i>Transferencia de contexto</i>	Se aplica lo que se aprende en un contexto no muy diferente.	
	<i>Transferencia próxima</i>	Se transfiere conocimiento previo a situaciones similares, pero no idénticas.	
Intercontextual o transcontextual	<i>Transferencia lejana</i>	Se transfiere conocimiento previo a situaciones o contextos muy diferentes	
	<i>Transferencia creativa</i>	La transferencia va más allá de la analogía simple y se crean (o utilizan) nuevos conceptos	

Figura 1-2. Niveles de transferencia de Haskell (2001).

Las críticas y desacuerdos suscitados en la literatura acerca de los resultados obtenidos se deben, según Barnett y Ceci (2002), a la falta de una estructura común en el debate sobre la transferencia, y también a un fracaso en la especificación de diferentes dimensiones que serían relevantes para determinar si efectivamente existe transferencia y en qué tipo de situaciones ocurre ésta. Este hecho hace que estimen necesaria una taxonomía de la transferencia. En este sentido, indican la dificultad de alcanzar un acuerdo respecto a lo qué significa *transferir* o sobre qué se entiende por *nuevo contexto*. Así, su taxonomía presenta dos pilares fundamentales: el contenido de la transferencia y el contexto de transferencia. El contenido de la transferencia consiste en a) la especificidad-generalidad del conocimiento y/o habilidad aprendida; b) la naturaleza del desempeño que será evaluado; c) la demanda de memoria de la tarea. El contexto de la transferencia, esto es, dónde y cuándo ocurre ésta, incluye seis aspectos: 1) El ámbito de conocimiento; 2) el contexto físico; 3) el contexto temporal; 4) el contexto funcional; 5) el contexto social; 6) la modalidad. La figura 3 ilustra las diferentes dimensiones de esta taxonomía de la transferencia (cercana-lejana).

Las habilidades aprendidas, se refieren a la especificidad-generalidad del contenido; por ejemplo, un procedimiento específico podría ser la utilización de un algoritmo para resolver un problema; una forma de representación podría ser el uso de un diagrama

jerárquico y un principio general podrían ser habilidades meta-cognitivas o principios de estadística (Barnett y Ceci, 2002).

Contenido. ¿Qué se transfiere?			
Habilidades aprendidas	Procedimientos	Representación	Principios
Desempeño	Velocidad	Precisión	Abordaje
Memoria	Ejecución	Reconocimiento y ejecución	Evocación reconocimiento y ejecución

Contexto: ¿cuándo y dónde ocurre la transferencia?					
	<i>Cerca</i>	←—————→		<i>Lejos</i>	
Ámbito de conocimiento	Ratón vs. Rata	Biología vs. Botánica	Biología vs. Economía	Ciencias vs. Historia	Ciencias vs. Arte
Contexto físico	En la misma clase en la escuela	En diferentes clases en la escuela	De la escuela a un laboratorio	De la escuela a casa	De la escuela a la vida cotidiana
Contexto temporal	En la misma sesión	Al día siguiente	Transcurridas varias semanas	Transcurridos varios meses	Transcurrido un año
Contexto de funcionamiento	Ámbos académicos	Ámbos académicos pero no evaluativos	Académico vs. Llenar formularios	Académico vs. Un cuestionario informal	Académico vs. Un juego
Contexto social	Ambos individual	Individual vs. En pareja	Individual vs. pequeños grupos	Individuales vs. grandes grupos	Individual vs. sociedad
Modalidad	Ambos en el mismo formato	Mismo formato, diferente tipo (escrito vs elección múltiple)	Lectura vs. examen oral	Lectura vs. examen práctico	Lectura vs. ejecución

Figura 1-3. Taxonomía de la transferencia de Barnett y Ceci (2002).

El contenido de la transferencia es la naturaleza del desempeño, es decir, de qué forma se prevé que se produzca la conducta esperada. Barnett y Ceci consideran que una conducta aprendida puede transferirse en términos de velocidad de ejecución, precisión o calidad de la actividad. Añaden que la mayoría de los estudios se centran en observar con cuánta precisión o velocidad de ejecución se produce una conducta para considerarla una evidencia de la transferencia, pero que se conoce poco del tipo de abordaje que se pone en juego.

La tercera dimensión del contenido se refiere al tipo de memoria que demanda la realización de la tarea, es decir, si la tarea de transferencia requiere que la persona solamente ejecute una actividad o si la tarea implica algún tipo de selección de la conducta

y luego su aplicación o si la selección implica algún tipo de estimación de cuál es el abordaje apropiado para resolverla.

Del mismo modo, especifican el contexto, tratando de responder a las preguntas sobre cuán lejos o cerca se encuentran, es decir, dónde y cuándo ocurre la transferencia. Para ello tiene en cuenta el ámbito de conocimiento, el contexto físico, el contexto temporal, el contexto funcional, el contexto social y la modalidad de dicho contexto (Rent, 2013) (Gagné, 1966; Rebello, Cui, Bennett, Zollman y Ozimek, 2007).

En la siguiente figura 4 se propone, a modo de síntesis, una comparativa entre los distintos tipos de transferencia que destacan en la educación.

Campione et al., (1995), entre otros, no ven claro que una sola teoría pueda cubrir toda la gama de fenómenos a los que el término *transferencia* puede hacer referencia o a los que se ha sido aplicado. No obstante, la corriente cognitiva comparte muchos puntos comunes sobre la perspectiva de la transferencia. En primer lugar, la suficiente formación de representaciones abstractas es una condición necesaria para la transferencia (de manera que las propiedades y relaciones se puedan reconocer en las situaciones iniciales y en las de transferencia), concebida la abstracción como un proceso de descontextualización (Fuchs, Mock, Morgan, y Young, 2003; Gentner, 1983; Singley y Anderson, 1989). En segundo lugar, las explicaciones para que se produzca la transferencia se basan en la invariancia de representaciones mentales simbólicas psicológicas (Bassok y Holyoak, 1993; Nokes, 2009; Sternberg y Frensch, 1993).

Por último, la transferencia se produce si las representaciones que la persona construye a partir del aprendizaje inicial y las situaciones de transferencia son idénticas, hay solapamiento, o pueden relacionarse a través de la cartografía (Gentner, Loewenstein y Thompson, 2003; Gick y Holyoak, 1983, 1987; Morley, Lawless y Bridgeman, 2005; Novick, 1988; Reed, 1993). Por lo tanto, desde un punto de vista cognitivo, la transferencia se caracteriza como "el conocimiento adquirido a partir de una tarea o situación que se puede aplicar a una diferente" (Nokes, 2009, p. 2).

Transferencia	Explicación	Autor/a
<i>Transferencia positiva</i>	El aprendizaje previo facilita la resolución del nuevo problema.	Novick (1988)
<i>Transferencia negativa</i>	El aprendizaje o la experiencia previa ,dificultano entorpece otro nuevo aprendizaje.	
<i>Transferencia lateral o Transferencia cercana</i>	Transferencia que se produce cuando el conocimiento adquirido previamente y la nueva tarea o problema son de la misma naturaleza y nivel de dificultad.	Gagné (1971) Royer(1978)
<i>Transferencia vertical</i>	Transferencia que tiene lugar cuando el conocimiento previamente adquirido permite comprender una nueva tarea de naturaleza o nivel de complejidad distinto al del aprendizaje previo.	
<i>Transferencia específica</i>	Transferencia entre situaciones con elementos similares evidentes.	Royer (1978)
<i>Transferencia no específica</i>	Transferencia entre situaciones que no comparten elementos similares evidentes.	
<i>Transferencia literal</i>	Aplicación de conocimientos y habilidades de forma exacta y completa.	(Broudy, 1977)
<i>Transferencia figurativa</i>	Aplicación de conocimientos y habilidades por medio de la analogía en base al conocimiento interpretativo	
<i>Transferencia de escaso recorrido (low transfer)</i>	Transferencia basada en la automatización, que se consigue gracias a la intensidad y variedad de la ejercitación de una conducta y su posterior utilización en un nuevo contexto.	Salomon y Perkins (1989)
<i>Transferencia de largo recorrido (high transfer)</i>	Transferencia basada en la abstracción consciente de principios generales adquiridos en un contexto para resolver problemas de otro contexto. Se ha producido la descontextualización consciente y metacognitivamente guiada llegando a la abstracción del concepto; la acumulación de práctica variada y flexible en contextos variados amplía y relaciona estos a todas las situaciones. Es transferencia de las personas expertas.	
<i>Transferencia analógica</i>		Van Lehn, , (1990).
<i>Transferencia intracontextual</i>	Transferencia dentro del mismo contexto (específica, de aplicación, de contexto, próxima).	Haskell (2001)
<i>Transferencia transccontextual</i>	Transferencia en otro contexto (lejana, creativa).	
<i>Transferencia cercana</i>	Transferencia entre contextos con gran similitud según determinadas dimensiones (ámbito de conocimiento, contextos: físico, temporal, funcional, social y modalidad)	Barnett y Ceci (2002)
<i>Transferencia lejana</i>	Transferencia entre contextos con poca similitud según determinadas dimensiones (ámbito de conocimiento, contextos: físico, temporal, funcional, social y modalidad).	
<i>Transferencia de réplica y aplicación</i>	Grado en que una conducta se repite en nuevas situaciones.	Schwartz et., al (2005)
<i>Transferencia como preparación para un nuevo aprendizaje</i>	La transferencia es una nueva oportunidad para desarrollar habilidades y adquirir conocimientos.	
<i>Transferencia de clase A</i> <i>Trnasferencia de clase B</i>	La transferencia realizada por una persona suficientemente preparada. La transferencia que utiliza recursos de aprendizaje y de otros disponibles en el contexto de laprueba de transferencia.	DiSessa y Wagner (2005)
<i>Transferencia de tipo C</i>	La transferencia que depende de contexto y trata de responder a la cuestión de cómo utilizan las personas el conocimiento previo.	
<i>Transferencia horizontal</i>	Transferencia que se produce cuando se extrae explícitamente la información del enunciado de un problema y ésta activa directamente algún esquema de problema completo (que alberga todas las herramientas necesarias para la resolución del problema) contenido en la memoria.	Rebello et al. (2007)
<i>Transferencia vertical</i>	Transferencia que se produce cuando se reconocen las características de la situación que intuitivamente activan elementos de su conocimiento previo, pero al contrario que en el <i>transfer</i> horizontal, en este tipo de <i>transfer</i> , la persona no posee un esquema completo para asociar al problema a resolver. Construye, entonces, un modelo mental ' <i>in situ</i> ' de la situación, mediante sucesivas construcciones y deconstrucciones de asociaciones entre la información del enunciado y su conocimiento disponible.	
<i>Transferencia remota (remote transfer)</i>	Transferencia referida a la aplicación de conceptos y estrategias en diferentes contextos tras un periodo largo de tiempo.	Chem Klahr (2008)

Figura 1-4. Tipos de transferencia según diversos autores.

1.5 Actor-oriented Transfer (AOT)

Distintas investigaciones han destacado que la cuestión de la transferencia del aprendizaje forma parte de la problemática general de las teorías del aprendizaje (De Corte, 2003; Hatano y Greeno, 1999; Toumi-Gröhn, T. y Engeström 2003). En este sentido, la noción de transferencia variará según la concepción general de aprendizaje que se adopte.

Teniendo en cuenta puntos de vista actuales relacionados con las teorías sociocognitivas, sin descartar los anteriores, Lobato (2003) plantea el modelo de transferencia orientada al actor, *actor-oriented transfer* (AOT) donde se define la transferencia como la generalización del aprendizaje, entendida ésta como la influencia de las actividades previas de la persona que aprende en su actividad en situaciones nuevas (Lobato, 2008). Desde este modelo, en la investigación se intenta identificar cómo los y las participantes en una tarea de transferencia, es decir, las y los *agentes*, ven diferentes situaciones como similares o diferentes, desplazando así el énfasis de definiciones centradas en quien investiga y/o en la persona experta hacia definiciones centradas en cada estudiante. Esta nueva perspectiva concibe la transferencia como dinámica y tiene sus antecedentes en Høffding (1892) y Lave, 1991).

Esta investigadora (Lobato, 1996) pudo demostrar que si había transferencia desde el punto de vista del alumnado en una investigación sobre el estudio de algebra y funciones lineales, mientras que no se había observado transferencia cuando el punto de vista utilizado había sido el de la persona experta; a pesar de que el alumnado investigado había obtenido puntuaciones altas en las tareas iniciales de aprendizaje relacionadas con la pendiente de los objetos, como escaleras y líneas que marcan las escaleras.

En la citada investigación de Lobato (1996) se utilizaba una unidad didáctica que comenzaba con una extensa exploración de escaleras reales, y culminaba con en el uso de matemáticas de "escaleras" para determinar la pendiente de una línea y otros objetos.

Se encontró que una alumna y un alumno respondieron que iban a encontrar la pendiente dividiendo el *aumento* de la "carrera (*run*)" con respecto a la longitud o anchura. Jarek eligió la altura de la escalera como la *subida* y la longitud de la plataforma como la *carrera* (*run*). Por el contrario, Alison se centró en la escalera y halló la *subida* como la longitud de una diagonal que se superpone entre dos peldaños en la escalera y la *carrera* como la anchura de la escalera. Aunque parte de dichas ejecuciones no fueron correctas, en ambos casos, habían generalizado sus experiencias de la unidad didáctica hacia la tarea de transferencia a través de su conexión de la pendiente con imágenes de escaleras. En

concreto, las opciones de Jarek de ascenso y carrera se encontraban basadas en un paso de la escalera mostrado en una diapositiva. Alison explicó que para encontrar la pendiente, tenía que "medir los pasos", lo que indicaba que ella percibía anclajes *affordances* para "presentar una escalera/escalinata " directamente con los peldaños de la escalera.

En otra investigación realizada por Lobato (2006) de nuevo volvió a demostrarse la conexión entre el tipo de interpretaciones realizadas por el alumnado en cuanto a la ecuación lineal y el tratamiento didáctico utilizado en la instrucción.

El análisis de la transferencia desde la perspectiva de transferencia orientada al actor (AOT) reveló evidencia significativa de la transferencia y de cómo el sistema de *iluminación* de nuevas situaciones podría estar conectado con imágenes que el alumnado ha adquirido en situaciones anteriores. La búsqueda de evidencia de la transferencia AOT hizo necesario cambiar la perspectiva de investigación desde la consideración de la comprensión desde el punto de vista de la persona experta sobre la pendiente hacia la consideración del tipo de concepciones que los y las estudiantes podrían haber desarrollado teniendo en cuenta el tratamiento didáctico aplicado.

Desde esta perspectiva, el éxito o el fracaso de la transferencia en cualquier tarea dada es inmaterial: lo que importa es comprender cómo las y los estudiantes hacen conexiones entre el aprendizaje que tuvo lugar en situaciones anteriores con las nuevas situaciones donde se encuentran ahora.

La transferencia es un proceso dinámico en el que las relaciones y similitudes se construyen de nuevo en el contexto de transferencia y no se transportan simplemente a partir del contexto de aprendizaje. Por ello, Lobato propone preguntarse qué relación de similitud se plantea y cómo es apoyada por el ambiente.

Pero, el modelo de Lobato y otros puntos de vista recientes de la transferencia, van más lejos al considerar también las influencias socioculturales en la transferencia (Beach, 1999; Greeno et al., 1993; Lave, 1991; Lave y Wenger, 1991), ya que no es simplemente algo que una persona hace de modo aislado, sino que más bien depende de factores ambientales y sociales. El aprendizaje *es situado* y, por lo tanto, consiste en el proceso de convertirse en participante de una comunidad práctica y el conocimiento se encuentra ligado a la situación de participación en esa comunidad práctica. En este sentido, lo que se transfiere no es conocimiento sino patrones de participación a través de diferentes comunidades prácticas (Greeno, 1997).

Lobato (2003) resalta ocho dimensiones a tener en cuenta para poder contrastar la

perspectiva tradicional y la transferencia orientada al actor: (1) la naturaleza del conocimiento y la representación del mismo, (2) el punto de vista de quien identifica dicha similitud de semejanza, (3) lo que se transfiere, (4) los métodos utilizados para el estudio de la transferencia y (5) los objetivos y meta, buscados.

<i>Dimensión</i>	<i>Transferencia tradicional</i>	<i>Transferencia AOT</i>
1. Definición	La aplicación de los conocimientos adquiridos en una situación a una nueva situación.	La construcción personal de las relaciones de similitud en todas las actividades, (es decir, tratar de ver las situaciones desde su propia perspectiva).
2. Perspectiva	Perspectiva del observador/a (de la persona experta)	Perspectiva del actor (del alumnado).
3. Método de investigación	Quien investiga busca mejorar el rendimiento entre el aprendizaje y las tareas de transferencia.	Quien investiga busca la influencia de la actividad anterior sobre la actividad actual y cómo los actores interpretan situaciones como similares
4. Cuestiones de la investigación	¿Se obtuvo la transferencia? ¿Qué condiciones facilitan la transferencia?	¿Qué relaciones de similitud se crean entre el aprendizaje y la transferencia? ¿Qué ha sido favorecido por el ambiente?
5. Tareas de transferencia	Aprendizaje de pares y las tareas de transferencia comparten características estructurales, pero se diferencian por las características superficiales.	Quien investiga reconoce que lo que las personas expertas consideran una característica superficial puede /ser una estructura profunda para un o una estudiante.
6. Localización de la invarianza	Las medidas de transferencia son un fenómeno de carácter psicológico.	La transferencia se distribuye a través del plano material, mental, social, y cultural.
7. Procesos de transferencia	La transferencia se produce cuando dos representaciones mentales simbólicas son idénticas o se superponen, o si se puede contriuir una correspondencia entre ellas.	Los múltiples procesos, como una iniciación a las posibilidades y limitaciones, la asimilación del lenguaje, el uso, y el "centrarse en fenómenos," lo que se denomina transferencia influenciada.
8. Metáfora	Aplicación estática de conocimientos.	Producción dinámica de <i>identidades</i> .

Figura 1-5. Supuestos teóricos de la Transferencia AOT en comparación con la transferencia tradicional (Lobato, 2003).

Greeno et al., (1993) redefinieron la transferencia para hacerla consistente con la perspectiva de la cognición situada, centrándose en las cuestiones de la invarianza y en los procesos alternativos de la transferencia (dimensiones 6 y 7 en la figura 1-5). Bajo esta redefinición, la transferencia implica una armonización de las posibilidades y limitaciones de los artefactos materiales y entornos sociales, que son invariantes entre el aprendizaje y la transferencia de las situaciones. Ambas perspectivas cognitivas, la AOT y la corriente principal sobre la transferencia, entienden que la base para la transferencia es la similitud psicológica, en lugar de las características similares físicas o de los entornos de trabajo.

Sin embargo, la perspectiva AOT pone mayor énfasis en la naturaleza de la interpretación del conocimiento, considerada también en muchos estudios realizados en el marco de la corriente principal de la perspectiva cognitiva. La AOT distingue entre el punto de vista del actor/actriz y el de la persona observadora. Adoptar el punto de vista de la persona observadora implica predeterminar la estrategia en particular, es decir, el principio o heurístico que el alumnado debe demostrar para que su trabajo, en una tarea nueva, pueda considerarse como transferencia. Para que la o el estudiante realice correctamente las tareas que una persona observadora interpreta como estructuralmente similares a las tareas de aprendizaje inicial, se efectúan inferencias para que el o la estudiante identifique la misma similitud que la persona observadora.

Cuando se toma el punto de un de vista del actor/actriz, la persona investigadora no busca la transferencia frente a un objetivo cognitivo concreto o de conducta, sino que investiga los casos en que las experiencias previas del alumnado conforman su actividad en la situación de transferencia, aunque el resultado no sea un rendimiento normativo o incorrecto.

Con el fin de proporcionar este tipo de información, la perspectiva AOT se apoya en métodos cualitativos que le permiten identificar la naturaleza del razonamiento del alumnado en situaciones de transferencia y su comprensión de las actividades de aprendizaje anteriores, de modo que la persona investigadora puede así identificar lo que se transfiere desde el punto de vista del actor/actriz (Lobato, 2008). A menudo, se utilizan los códigos inductivos que emergen de los datos en lugar de utilizar un código definido *a priori*, ya que los significados particulares que el alumnado desarrolla durante la instrucción son a menudo inesperados.

Un objetivo importante de la investigación general de la transferencia cognitiva es documentar su ocurrencia —o explicar su fracaso—, que incluye la investigación de los tipos de conocimiento que la mejoran, las condiciones que la favorecen o dificultan y los métodos de enseñanza que la apoyan (Butler, 2010; Gentner, et al., 2003; Rittle-Johnson, 2006). Por el contrario, la investigación AOT supone que las personas regularmente generalizan sus experiencias de aprendizaje, y encuentran comprensible la falta de transferencia desde la perspectiva cognitiva convencional, puesto que muchas investigaciones demuestran que las personas novatas rara vez realizan las mismas conexiones que las personas expertas (Bransford et al., 2000). Por consiguiente, el objetivo

de los estudios de AOT no es obtener la transferencia —considerada un hecho—, sino más bien comprender la naturaleza interpretativa de las conexiones que construyen las personas entre situaciones de aprendizaje y de transferencia, así como los procesos socialmente situados que dan lugar a esas conexiones (Lobato, 2012).

La perspectiva AOT implica abandonar un estándar predeterminado para juzgar la existencia de la transferencia y los supuestos de la persona observadoras con respecto a la distinción entre la superficie y la estructura, ya que lo que constituye una característica de superficie para una persona experta podría suponer una complejidad estructural para la persona principiante, a lo largo de una dimensión que no estaba prevista durante el proceso de diseño de las tareas (Lobato, 2012).

1.6 La teoría de *fuzzi-trace* (huella difusa)

El uso de estrategias no siempre es consciente; en ocasiones puede ser de gran importancia el papel de los procesos no conscientes y relativamente automáticos en el funcionamiento cognitivo en general y en la resolución de problemas en particular. En este sentido, la *teoría de la huella difusa*, o *fussy-trace theory* (Brainerd y Reyna, 1993; Wolfe, Reyna y Brainerd, 2005), plantea que la representación de determinada información en la memoria puede variar en un continuo que va desde una huella difusa, que conserva sólo algunas características esenciales, a una huella literal y precisa. Las personas somos capaces de generar y trabajar con representaciones en forma de esencias, representaciones difusas, y sólo comprender los aspectos fundamentales de una determinada información o experiencia. En la formación de tales representaciones aplicamos una regla de reducción a la esencia, por la que destilamos de la información aquellos patrones y aspectos fundamentales, conservando estas esencias e ignorando los detalles más precisos. Estas representaciones en forma de esencias (*gist*) pueden elaborarse en diversos niveles de abstracción que se sitúan en un continuo que va de lo más esencial y difuso a lo más literal. Así, de una misma información se pueden obtener representaciones independientes, unas más tendentes a lo difuso, otras más a lo literal. El sistema cognitivo tiende a preferir operar con representaciones o huellas difusas cuando éstas están disponibles, porque las representaciones difusas —o esenciales— no sólo difieren de las literales en la cantidad de detalles que incluyen y en el nivel de abstracción que implican, sino también en otros aspectos importantes, que son de más fácil acceso y requieren menos esfuerzo por parte del

sistema cognitivo, a la vez que resultan también menos vulnerables al olvido y a la interferencia que las representaciones literales. Sin embargo, la ejecución de respuestas provoca interferencias en el procesamiento que sigue a esa emisión debidas a la rapidez del procesamiento en la emisión y a que el *feedback* puede producir otros tipos de información (Wolfe et al., 2005).

Desde la teoría de la huella difusa (Wolfe et al., 2005) cabría un tipo de transferencia que tuviera similitud literal con el contexto de aprendizaje (éste podría ser el caso de la aplicación de algoritmos donde partes de una ecuación se van sustituyendo por los números correspondientes), y además una transferencia basada en las representaciones esenciales (incluida el nivel bajo de la transferencia analógica) que, sin llegar todavía a ser representaciones estructurales abstractas, posibilitarían un tipo de transferencia. La representación de lo esencial no es lo mismo que un esquema abstracto o representación estructural; el contenido esencial captura en una forma confusa, inexacta, pero facilita puentes a través de contextos que difieren desde el nivel superficial-literal hasta llegar al nivel abstracto. La capacidad de reconocer el contenido similar esencial –*gist*– de los contextos aparentemente diferentes es fundamental para la transferencia analógica.

Desde la teoría AOT se analizan los indicios que el alumnado observa conectados o asociados a una representación, bien porque forman parte de ella, bien porque estuvieron presentes en el contexto en que se construyó la representación. Cuantos menos indicios haya más difícil será la recuperación y, a su vez, cuantos más indicios están presentes en ambos contextos, más probable resultará ésta, puesto que se acercará más a una situación de reconocimiento que a una tarea de evocación. De este hecho resulta que un mayor número de contextos de aprendizaje y distintas perspectivas contribuyen a un mayor recuerdo.

El estado emocional en el que se encuentra el alumnado también afecta al momento de recuperación, cuanto más semejantes sean en ambos contextos mayor será la recuperación.

1.7 La naturaleza ontológica del conocimiento transferible

La literatura sobre la transferencia ha solido adoptar un enfoque fenomenológico, centrado en la exploración de preguntas sobre si la transferencia acontece realmente y cuándo sucede, y en este supuesto, en cómo reconocer el fenómeno. Por ello, en los

debates sobre la transferencia las discusiones han tenido por objeto la naturaleza del conocimiento o las habilidades que se espera sean transferidas, el papel de la metacognición o los andamios metacognitivos en el apoyo a la transferencia (Barnett y Ceci 2002). No obstante, en la literatura sobre la transferencia se ha prestado poca atención directa a la ontología de la estructura cognitiva. Quienes hacen una defensa tradicional del término *transferencia* describen el conocimiento como una entidad unitaria, piensan en las concepciones del alumnado como elementos sólidos, intactos en su estructura cognitiva, algo que una persona aprende en un contexto y lo aplica o no en otro contexto. Sin embargo, Hammer et al., (2005) defienden una ontología no unitaria, donde el conocimiento se concibe como conjunto de múltiples recursos. Esta opinión está motivada por las observaciones de la flexibilidad y la variabilidad en el razonamiento del alumnado, en términos de múltiples elementos cognitivos, modelos mentales que pueden responder de manera diferente en diferentes momentos. La activación de los recursos, *activating resources*, responde a una variabilidad no casual; los recursos no se activan y desactivan de forma aleatoria. Desde este punto de vista, el aprendizaje no se concibe como la adquisición o formación de un objeto cognitivo, sino más bien como un estado cognitivo de cada estudiante, que se forma en el momento y que involucra la activación de múltiples recursos. Sus consideraciones, por lo tanto, aceptan las planteadas por la investigación sobre la cognición situada. Se entiende que en la transferencia cada estudiante forma un estado similar al del aprendizaje en otro contexto diferente.

Una ontología basada en recursos, pone de relieve como la activación de conocimientos que ya posee el alumnado, genera preguntas que centran su atención en el recuerdo en los recursos que tiene disponibles, y en cómo organizan y reorganizan esos recursos.

El enfoque sobre los hechos y fórmulas surge desde la activación contextual de recursos epistemológicos concretos además de un conjunto de expectativas que una persona tiene, donde los elementos de su mente interactúan con elementos del entorno físico y social para crear conocimiento que ha sido situado o incluso distribuido.

La noción de *conocimiento distribuido* comprende el hecho de que el conocimiento útil está disperso por todo el contexto. El entorno participa en la cognición como vehículo de pensamiento, además de cómo fuente y destino de la información. Por ello, lo que se aprende subsiste no solo en la mente de quien aprende sino también en el ordenamiento del entorno.

1.8 Distintos conocimiento presentan distintos tipos de transferencias

Las teorías de *abstracción de esquema y conocimiento* sitúan la fuente última de transferencia y la transferencia analógica en la codificación o representación paralela de situaciones diferentes (Gentner, 1983; Gentner y Markman, 1997), de manera que destacan elementos estructurales comunes. La *teoría de la clase de coordinación*, en cambio, coloca esas expectativas de compatibilidad de representación sólo en los niveles superiores de procesamiento inferencial dentro de la causalidad neta. Por ello, si bien esta teoría admite el papel de la abstracción, ve necesario un análisis detallado en situaciones de transferencia donde todavía no se ha alcanzado el nivel de abstracción deseado. Por ejemplo, las situaciones de transferencia donde el alumnado trata de dar sentido al problema o a la situación planteada y en este intento transfiere ideas alternativas junto a proyecciones del concepto que pueden ser más acordes con el conocimiento científico. Muchas nociones de proyección de concepto dependen del contexto que permite —y pueden incluso demandar— muy distintas percepciones estructurales de situaciones para apoyar el uso de una clase de coordinación única. Por ello, según esta teoría, el enfoque debe desplazarse al análisis de los recursos disponibles que posee el alumnado, ya que a partir de ellos dará respuesta a demandas cognitivas diferentes que conllevan diferentes contextos y a las exigencias del concepto específico del que se trate.

En este sentido, diSessa, Sherin y Wagner, consideran que la construcción de nociones o conceptualizaciones de las personas se enmarca en una estructura compleja, donde los mismos conceptos científicos son interpretados como sistemas complejos en sí (*coordination class*) (diSessa y Sherin, 1998; diSessa y Wagner, 2005). Las clases de coordinación que, como su nombre indica, son más complejas, no intuitivas ni inmediatas, sino que implican un proceso de coordinación entre elementos en torno a una representación específica, son el resultado de mini-generalizaciones de la experiencia cuya activación depende sensiblemente del contexto (diSessa, 1993). Cada nuevo contexto es una ocasión para agregar nuevos elementos a posibles nuevas proyecciones del concepto. El número de contextos útiles depende, más que de algunas propiedades generales de la abstracción, de factores tales como la distribución de conocimientos útiles y de los requisitos del concepto de que se trate. Por ello, se sugiere que "poseer un concepto" podría ser imposible de evaluar en un contexto único y, lo que es más importante, son muchos los estados de construcción parcial que interactúan en formas muy específicas con determinados contextos.

Desde esta propuesta se establece que el concepto de *función* (concepto investigado en esta tesis) es un sistema complejo y que su adquisición para la transferencia podría venir dada por la teoría de la clase de coordinación. Su adquisición supondría un proceso de coordinación entre elementos del entorno y una representación específica, estructuralmente estable, donde la experiencia cotidiana por sí sola no ofrecería un contexto útil para la activación y la reactivación de este conjunto de elementos. Posteriormente, para que las activaciones de los recursos resulten coherentes, cada estudiante debe monitorear activamente su pensamiento, en lugar de depender de las características del contexto para mantener esa estabilidad, y lograr al final la abstracción del modelo.

La estabilidad de los recursos vendrá dada por: (1) el contexto: la activación pasiva en función de la situación, donde por *pasiva* se entiende las formas del modelo, y persiste sin que los recursos metacognitivos jueguen algún papel. Con el tiempo, el modelo puede desarrollar su propia integridad y depender menos de las señales contextuales. (2) Un segundo mecanismo es el deliberado, lo que significa que se trata de recursos epistemológicos/metacognitivos. (3) El tercer mecanismo para la estabilidad, una vez más, es el estructural. Con la reutilización, puede establecerse un conjunto de activaciones, hasta el punto de que se convierte en una especie de unidad cognitiva y, por lo tanto, en un tipo de recurso de propio derecho. Una vez activado, la coherencia interna en las activaciones de recursos es automática y estable, aunque dependiente de contexto (diSessa y Sherin, 1998).

En la presente investigación se acepta el concepto *función* como clases de coordinación donde se incluyen subconceptos como *variable*, *dependencia*, *proporcionalidad*, etc. Es este un sistema dinámico que cambiará en función de la mayor coordinación o diferente coordinación, debido al conocimiento-experiencia de l cada estudiante sobre una clase fenomenológica, por ejemplo, sobre todos aquellos fenómenos o situaciones donde aparezcan funciones.

Su dependencia respecto del contexto puede explicar distintos hallazgos de la *transferencia de tipo C* (consistente en recordar ejemplos concretos) antes de llegar a la *transferencia analógica* (cuando los ejemplos comparados manifiestan igual estructura), todas ellas dentro de *low transfer* y antes de llegar al *high transfer* o *transferencia de tipo A*, para la cual el alumno o alumna deberá haber adquirido un esquema o modelo teórico suficientemente general a partir de una experiencia o experiencias dotadas de mucho sentido para él o ella, y asimismo ha de ser capaz de interrelacionar este modelo teórico

con la representación que se hace de la nueva situación en la que ha de transferirlo (Sanmartí, Burgoa y Nuño, 2011), ya que dicha evolución ayuda al alumno o alumna a ver, a través de ellas, nuevas y diversas relaciones y perspectivas. Es decir, se interpreta el proceso comenzando por un modelo muy general —bastante confuso— para que, poco a poco, a través del ejercicio (al tratar de dar sentido a distintas situaciones, al generalizar las distintas situaciones), a través de lo destacado en la teoría de clases de coordinación, puede irse aplicando a distintos contextos.

La amplia y diversa utilización logra acumular muchos conocimientos específicos sobre la situación, en lugar de eliminar las referencias a características particulares —propuesto por la teoría *fuzzi-trace*—. Posteriormente, a través de un proceso guiado es posible la transferencia analógica interdominio, y una vez alcanzada la abstracción de los modelos —función, mecánica y solubilidad en la presente investigación—, llegar a generalizar sin necesidad de contexto. Por ello, al observar cómo los conocimientos se generalizan con el fin de aplicarlos a una amplia gama de situaciones, la respuesta dominante a esta pregunta ha sido que el conocimiento se convierte en más abstracto y, por lo tanto, separado de indicaciones de situaciones, *libre* para ser aplicado en los distintos contextos (Bassok y Holyoak, 1993; diSessa y Wagner, 2005; Gentner y Medina, 1998; Gick y Holyoak, 1983, 1987; Reed, 1993). No obstante se insiste en que son los contextos los que aportan el valor añadido al concepto o, dicho de otro modo, que la funcionalidad del concepto no existe sin el contexto.

Esta perspectiva pone de manifiesto razones totalmente comprensibles sobre por qué algunos tipos de transferencias son relativamente fáciles y se producen en todos los casos, mientras que otros pueden ser bastante difíciles; por ello las teorías debieran explicar y determinar el conocimiento, y no sólo el rendimiento. En el presente estudio se acepta la propuesta de diSessa en cuanto a que diferentes formas de conocimiento tienen propiedades diferentes en la transferencia, y que existen diferencias en el aprendizaje y en el rendimiento para los distintos tipos de conocimiento (diSessa, 2002). Mientras que la *transferencia de clase A* es la más investigada (hace referencia a si se tiene o no la suficiente preparación), y la *transferencia de clase B* evalúa si es factible su consecución en períodos aceptables de tiempo (horas, días) utilizando los recursos del aprendizaje y de otros que podrían estar disponibles en el contexto de la *prueba de transferencia*, la *transferencia de clase C* pone el acento en aquél conocimiento dependiente del contexto y trata de responder a la cuestión de cómo utilizan las personas —el alumnado—

relativamente preparadas el conocimiento previo o sus ideas alternativas en los primeros trabajos de un dominio o de otro dominio. Es en este sentido, en el que la *transferencia de clase C* permite observar cómo el alumnado reutiliza siempre sus conocimientos previos, sea de forma productiva o improductiva, y, por ello, es aquí donde las clases de coordinación entran en juego. Por lo tanto, se defiende que la *transferencia de clase C* es un fenómeno muy común (diSessa y Wagner, 2005) y adecuado para el logro de la transferencia tanto *A* como *B*.

El punto de vista del *sistema de conocimiento complejo* posee varias propiedades inusuales y posiblemente no intuitivas: (1) no se debería esperar ningún nexo fuerte entre *poseer* y *no poseer* un concepto. Ya que cuando se trate de muchos elementos y relaciones, sin duda, puede que falten algunos o que se presenten con un formato incorrecto, y aun así la persona podría exhibir un rendimiento general competente; (2) *muchas piezas y las relaciones* obviamente plantean algún tipo de especificación. El nombre *coordinación clase*, de hecho, en parte transmite precisamente esas relaciones particulares entre piezas de conocimientos.

1.9 ¿El alumnado transfiere?

La respuesta a esta cuestión no es claramente homogénea porque depende de qué tipo de transferencia se trate, de lo que se considere fracaso o no y de si lo que se ha evaluado sirve para saber si la persona está preparada para el aprendizaje futuro. Desde un punto de vista tradicional, restringido y desde el que se entiende por transferencia la aplicación del conocimiento aprendido (Detterman, 1993) los fracasos encontrados han sido abundantes. No obstante, las investigaciones han demostrado que muchas de las medidas tradicionales de transferencia no son lo suficientemente sensibles para revelar importantes experiencias de aprendizaje que apoyan la transferencia de una situación a otra. La mayoría de las evaluaciones que se usan en la investigación sobre transferencia se refieren a la resolución del denominado problema secuestrado y este tipo de evaluación representa a menudo un instrumento demasiado tosco para descubrir cuándo y por qué determinadas experiencias anteriores han preparado a la persona para transferir en un aprendizaje futuro (Bransford y Schwartz, 1999). Dentro de este tipo de evaluación se encuentran los estudios internacionales de PISA (*Program for International Student Assessment*) y TIMMS (*Trends in International Mathematics and Science Study*)

analizados con detalle en el apartado relativo a género y enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y de las ciencias. Sin embargo, desde la perspectiva de transferencia AOT, que ha sido la base de análisis en esta investigación, es necesario realizar un análisis que considere una transferencia dinámica.

Por otra parte, Hiebert y Grouws (2007) realizaron un metanálisis de los estudios en los que las características de la enseñanza estaban relacionadas empíricamente con las medidas de aprendizaje del alumnado. Llegaron a la conclusión de que la diferencia en el alto rendimiento de unos países a otros no se debía ni al tipo de problemas propuestos, ni al estilo de enseñanza, sino a los tipos de oportunidades de aprendizaje creadas por el profesorado para el alumnado, es decir, a las conexiones explícitas realizadas en la instrucción entre los procedimientos matemáticos, los problemas y los conceptos, así como, en el modo de involucrar al alumnado a favor de un interés productivo que es necesario para comprender estas conexiones de una manera profunda. En definitiva, la calidad de las oportunidades de aprendizaje que eran capaces de crear parecían ser lo común entre los resultados de los países con alto rendimiento.

1.9.1 ¿Qué variables obstaculizan la transferencia?

Varios estudios (Beltrán y Carpintero, 2006; y Carpintero y Beltrán, 2005) basándose en las investigaciones de otros autores y autoras recogen tanto las dificultades como las condiciones que favorecen la transferencia. Entre las primeras destacan:

1. Los problemas, generalmente, presentan tareas separadas de modo que el alumnado asume que son independientes y que para resolver cada problema, de modo inmediato, sólo puede utilizarse exclusivamente la información dada (Carpintero, 2002)
2. La cultura oculta que se transmite al alumnado, al ofrecerle un currículo lineal y carente de intra e interrelaciones. El alumnado acaba convenciéndose de que cualquier problema tienen una única solución y un único modo de resolverlo (Hatano y Greeno, 1999).
3. No se trabajan las relaciones entre las situaciones, tanto en los contextos intradominio como interdominio. Se proponen evaluaciones con independencia de las situaciones; todo lo contrario a la vida cotidiana (Carpintero, 2002).
4. Según la investigadoras Jetton y Alexander (1997) la necesidad impuesta al profesorado para cubrir un determinado programa y la falta de dominio de la

materia y de conocimientos pedagógicos, provoca un empleo mínimo o inexistente de tiempo en el aprendizaje-enseñanza de estrategias en profundidad, y como consecuencia de ello, se produce una superficialidad en el tratamiento de la materia “mencionar vs. enseñar” produciendo desánimo en el alumnado.

5. Parece existir un acuerdo tácito entre docentes y estudiantes, de modo que las calificaciones altas parecen depender de que las tareas se realicen adecuadamente —a menudo mecánicamente y descontextualizadas—, y no tanto del esfuerzo estratégico (Carpintero, 2002).
6. La relación que se establece entre los contenidos de un área y otra es mínima, así como las relaciones entre los conceptos y los procedimientos (Dienes y Berry, 1997). Por este motivo, el alumnado puede completar sus ciclos educativos obteniendo un diploma que lo acredite, sin saber el valor real de sus aprendizajes.
7. Los conocimientos no se encuentran situados en los contextos, y si existen, a veces es a nivel anecdótico, sin destacar la relevancia en el aprendizaje particular.
8. El alumnado no identifica como similares dos situaciones distintas, no aplica un método de resolución en un contexto diferente al aprendido, porque los contenidos se presentan de forma aislada, en general ajenos a la vida cotidiana.
9. La falta de motivación y una actitud pasiva hacia el transferencia (Carpintero y Beltrán, 2005).
10. El alumnado no tiene una percepción de la existencia de transferencia por parte del profesorado en el momento del aprendizaje (Carpintero, 2002).
11. El alumnado no cree que el concepto científico es relevante, y por consiguiente, no trata de determinarlo, porque no ve ningún marco conceptual pertinente, o bien porque cree que el concepto sí es relevante pero no puede determinar la información necesaria para llevar a cabo la transferencia; el contexto determina la información incorrecta.

1.9.2 **¿Qué condiciones favorecen la transferencia?**

Las distintas investigaciones sobre la transferencia también han ayudado a visualizar las condiciones que la favorecen.

Según Alexander y Murphy (1999) los siguientes factores favorecen la transferencia:

- Disponer de un cuerpo de conocimiento rico y contextualizado, junto con un repertorio de estrategias bien establecido. Presentar los conceptos en múltiples contextos incrementa las posibilidades de la transferencia. Esto implica que no debe limitarse a presentar un concepto en un área determinada, sino que deben favorecer las interrelaciones con otras áreas (Bransford y Schwartz, 1999; Gick y Holyoak, 1983). Conocer los principios básicos de los conocimientos y del material. Esta es una tarea de cada docente, quien debe dominar su área de conocimiento para saber seleccionar cuáles son los conocimientos principales y enseñarlos de modo adecuado, evitando caer en la superficialidad.
- Modelar y premiar la transferencia. El profesorado debe ser modelo de transferencia, para que así el alumnado sepa en qué consiste y la desarrolle. En el aula deben proponerse actividades que favorezcan la transferencia, y ésta ha de ser identificada y reconocida.

Para Brown (1990) las condiciones adecuadas requieren:

- Mostrar al alumnado la semejanza entre un problema y otro.
- Dirigir la atención del alumnado hacia la estructura fundamental de ambos problemas.
- Familiarizar al alumnado con el dominio del problema o problemas.
- Presentar ejemplos acompañados de reglas, especialmente los generados por el propio alumnado
- Contextualizar socialmente el aprendizaje, donde los principios, las explicaciones y las justificaciones estén contrastadas, y creadas.

Según Cox (1997), la transferencia debe ser enseñada y aprendida, para lo cual el profesorado debe de estar preparado.

Haskel (2001), por su parte, propone once principios para alcanzar la transferencia:

1. Adquirir gran cantidad de conocimiento o alto nivel de experiencia en el área en que la que se va a realizar la transferencia.
2. Adquirir conocimientos fundamentales en otras materias, pues favorece los enlaces con el área principal.
3. Comprender qué es la transferencia y cómo opera.

4. Conocer la historia de las áreas en las que se busca la transferencia. Si no se posee al menos una visión general del área a la que se realiza la transferencia, ésta puede fracasar.
5. Tener motivación o tener “espíritu de transferencia”.
6. Desarrollar un estilo o modo de codificación del aprendizaje en términos de transferencia, pues el modo de codificación determina la manera de recuperarla.
7. Crear culturas de transferencia que la apoyen.
8. Comprender la teoría fundamental del área a la que se transfiere.
9. Realizar prácticas y hacer ejercicios. Para que la transferencia creativa ocurra es fundamental haber practicado previamente.
10. Dejar tiempo para el desarrollo del aprendizaje. La transferencia significativa requiere un periodo de incubación, pues no ocurre de forma instantánea.
11. Observar y leer los trabajos de las personas que han sido ejemplos y maestras de la transferencia del pensamiento.

Otros estudios recogen parte de las condiciones ya expuestas y algunas otras; así destacan:

1. La motivación y la actitud son factores disposicionales, potenciadores y facilitadores de la transferencia. Además del ya citado estudio de Haskell (2001), lo remarcan también las investigaciones (Herold, Davis, Fedor, y Parsons, 2002). Esto se produce cuando el alumnado percibe la transferencia en el proceso de enseñanza. Cuanto mayor sea la percepción de la transferencia en el proceso de enseñanza mayor será la disponibilidad hacia la misma (Carpintero, 2006).
2. Un grado suficiente de aprendizaje original (Lee, 1998).
3. La forma en que se adquieren la información (Judd, 1908; (Carpintero, 2002), el aprendizaje y la comprensión (Chi, Slotta, y DeLeeuw, 1994).
4. La información presentada en el contexto de solución de problemas parece ser más utilizada de forma espontánea que la información presentada en forma de simples hechos (Lockhart, Lamon y Gick, 1988).
5. Un énfasis en la metacognición (Brown, 1997; Flavell, 1976) ayuda al alumnado a vigilar, reflexionar y mejorar sus estrategias para el aprendizaje, la

resolución de problemas y la transferencia (White y Fredrickson, 1998) 6. El uso de ejemplos concretos de aprendizaje y transferencia puede mejorar el aprendizaje inicialmente porque pueden ser elaborados y ayudan al alumnado a apreciar la pertinencia de la nueva información (Bransford y Schwartz, 1999); sin embargo, cuando hay demasiada información contextualizada ésta puede impedir la transferencia porque la información está excesivamente vinculada a su contexto original (Gick y Holyoak, 1980).

5. 7. La presentación de conceptos en múltiples contextos puede aumentar su posterior transferencia (Bransford y Schwartz, 1999; Gick y Holyoak, 1983), así como observar entornos de problemas desde múltiples perspectivas (Bransford y Schwartz, 1999).
- 8- Ayudar a las personas a representar los problemas y las soluciones apropiadas a los niveles de abstracción ayuda a la transferencia positiva evitando la excesiva contextualización (Chen y Daehler, 1989; Singley y Anderson, 1989).

1.10 Innovación y eficacia

Schwartz et al. (2005) después de analizar diferentes ejemplos de transferencia de acuerdo al tipo de conocimiento que está en juego, indican que pueden establecerse dos dimensiones de aprendizaje en las situaciones de instrucción: una dimensión de eficiencia (dimensión horizontal) y una dimensión de innovación (dimensión vertical). En cada una de ellas hay diferentes procesos por lo que no deben considerarse excluyentes.

La eficiencia tiene como núcleo central el grado de consistencia en el que el éxito es máximo y se minimiza el fracaso. Las personas que con alta eficiencia pueden recuperar rápidamente y aplicar con precisión adecuada los conocimientos, habilidades para resolver un problema o comprender una explicación. Esta dimensión sirve para situaciones estables pero, en cambio, no lo es tanto para situaciones cambiantes como las del mundo real. En los ejemplos típicos se incluyen personas expertas que tienen una gran experiencia con cierto tipo de problemas. La eficiencia parece ser importante en todos los dominios porque incluye un alto grado de coherencia, maximiza el éxito, minimiza el fracaso y libera capacidad de atención para realizar otras tareas. La mayoría de las investigaciones en educación y formación se han centrado principalmente en los resultados de eficiencia (Schwartz, et al., 2005). La mejor manera de aumentar la eficiencia es mediante pares

prácticos y trabajando componentes de tareas para que resulten rutinarias y fáciles de resolver más tarde. No obstante, existe bastante literatura donde se observa que personas muy expertas en ciertos temas no lo son tanto cuando el tipo de problemas que tiene que afrontar durante su vida no son los habituales. La instrucción que conduce a la transferencia eficiente es importante, pero también puede el estilo docente puede promover lo que Schwartz et al., (2012) denominan "exceso de celo" de transferencia, *overzealous transfer* (OZT), cuando las personas se centran principalmente en ver lo viejo en lo nuevo porque las viejas rutinas han tenido éxito antes. Como resultado, OZT puede obstaculizar las oportunidades de aprendizaje nuevo, y esto puede disminuir la transferencia adaptativa más adelante. Una rutina de enseñanza común es el método "teoría y práctica" (T y P). Richland, Stigler, y Holyoak (2012) sostienen que un uso excesivo de T y P en las escuelas puede ayudar a explicar por qué sus resultados en matemáticas son relativamente malos en Estados Unidos en las comparaciones internacionales en el aprendizaje de matemáticas.

Por otro lado, la innovación consiste en la creación de algo nuevo a partir de una combinación original de elementos nuevos y viejos. Por ejemplo, existen personas que son capaces de reorganizar su manera de razonar para resolver nuevos problemas o comprender nueva información (Schwartz et al., 2005). La innovación supone la dimensión vertical y las personas con una elevada dimensión en innovación, pueden reorganizar sus entornos y su forma de pensar para mejorar ante nuevos tipos de problemas o de información. La innovación a veces requiere un tiempo más extenso y debe liberarse previamente de tareas rutinarias. Por ello, según Bransford y Stein (1993) es necesario completar la eficiencia de forma óptima. Este tipo de aprendizaje podría estar relacionado con la denominada de transferencia lejana.

Desde la perspectiva de estos mismos los autores, la formación orientada solamente hacia la eficiencia restringiría la transferencia a situaciones similares, mientras que es necesario, además, facilitar la transferencia lejana en términos de innovación, es decir, de creatividad y resolución de problemas por medio de la comprensión. Esta forma de transferencia puede considerarse como la transferencia creativa definida por Haskell (2001), que se basa en la creación de nuevos conceptos. Las interacciones innovadoras son diferentes de las interacciones dedicadas a la eficiencia porque implican ir más allá de lo inmediatamente conocido. Para ello, el diseño de entornos de innovación requiere que se proporcione una oportunidad para que las personas prueben ideas y se dejen ir cuando sea

necesario, facilitando las interacciones que puedan revelar nueva información y orientar al alumnado a darse cuenta de ello.

La mayor parte de las investigaciones han examinado la eficiencia en la transferencia, es decir, la rapidez y la precisión con las que las personas pueden recordar y aplicar los conocimientos adecuados en un nuevo contexto a través de pruebas de replicación y aplicación con núcleo de *problema secuestrado* (SPS). Si bien esta dimensión del aprendizaje es muy importante, no es la única que debe ser analizada con respecto a la transferencia, ya que si así fuera se estaría trabajando poco en favor de un aprendizaje flexible y creativo futuro, tal como el que se ha presentado en el apartado 1.3 *La transferencia desde la perspectiva PFL* (preparación para el futuro aprendizaje, preparation for future learning). Así, la instrucción que trate de equilibrar la eficiencia y la innovación, necesaria según Schwartz et al. (2005), debe además de incluir actividades de comprensión y desarrollar habilidades de dominio, incluir oportunidades para experimentar con ideas; dentro de un aprendizaje flexible. Este tipo de experiencias requieren a menudo la oportunidad de interactuar activamente con objetos y personas ya que algunas formas de conocimiento surgen sólo a través de la interacción (Vygotsky, 1962).

1.11 Síntesis

A lo largo de este capítulo se han expuesto diversos puntos de vista tanto de la problemática de la transferencia como del modo en el cual es necesario abordar su estudio. La visión histórica presentada sugiere hoy día una perspectiva dinámica de la transferencia frente a aquella estática que ha caracterizado la mayoría de las investigaciones a lo largo del siglo pasado. Los nuevos puntos de vista además, incluyen tener en cuenta la perspectiva de la persona que transfiere, ya que es ella la que activa piezas de conocimiento en contextos determinados, bajo la influencia de las situaciones previas vividas. En este sentido el conocimiento transferible no es considerado de carácter ontológico unitario. Por último se exponen condicionantes que obstaculizan o influyen positivamente en la transferencia y el papel que en ello tienen la innovación y la eficacia.

2 CAPÍTULO. CONOCIMIENTO COTIDIANO vs CONOCIMIENTO CIENTÍFICO, CAMBIO CONCEPTUAL

1. Construcción del conocimiento científico
2. La resolución de problemas
3. La transferencia en la Educación científica basada en contextos
4. Género y enseñanza-aprendizaje en matemáticas y en ciencias
5. Expectativas del profesorado e Interacciones profesorado-alumnado
6. Síntesis

Durante muchos años se ha tratado de investigar las conexiones y diferencias entre el conocimiento cotidiano y el científico y cómo influye el primero en la construcción del segundo. El primer punto de este capítulo trata de adentrarse en esta problemática, mientras el segundo lo hace con un enfoque más específico, el de la resolución de problemas, donde la transferencia juega un papel destacado. Para ello, el estudiante deberá activar varios modelos mentales, tanto del contexto como de la representación externa, que hagan posible pasar desde la situación contextualizada hasta el modelo matemático abstracto. Así, el contexto, será determinante en muchas ocasiones para que se produzca la transferencia deseada. Además si se considera la transferencia como proceso dinámico, la persona adquiere un papel destacado; de aquí que la perspectiva de género haya sido tenida en cuenta. Por último, a la persona que aprende se encuentra influenciada por sus relaciones con el profesorado y se desea analizar si también lo es la transferencia realizada.

2.1 Construcción del conocimiento científico

En la epistemología cotidiana la construcción de teorías no es un ejercicio intelectual de aproximación a la exactitud o a la verdad para generar explicaciones y predicciones sobre fenómenos habituales de nuestro entorno y poder diseñar planes de acción. Los esquemas del conocimiento cotidiano se construyen a través de la inducción, lo que conlleva su carácter implícito y, por lo tanto, que no sean fácilmente accesibles a nuestra conciencia, y menos aun espontáneamente verbalizables. El alumnado no sabe que posee tales concepciones alternativas o previas, a pesar de que se sirve continuamente de ellas en sus interpretaciones del mundo. Por ello, las teorías implícitas no se cambian mediante procesos de comprobación de hipótesis.

Algunas investigaciones consideran que estas concepciones o teorías son representaciones más o menos complejas, coherentes e integradas, que forman parte de modelos mentales o teorías que, a pesar de ser incorrectas desde el punto de vista científico, tienen un cierto poder explicativo y predictivo. Por ello, en lugar de considerar que el conocimiento cotidiano es erróneo o científicamente desviado, se destaca su valor pragmático y su carácter fenomenológico y adaptativo (Claxton, 1987; diSessa, 1993; Pozo, 1999; Pozo, Pérez, Sanz, y Limón, 1992).

En general, existen ciertos aspectos comunes en estas ideas previas del alumnado sobre los fenómenos científicos: (1) son específicas de dominio y, con frecuencia,

dependen de la tarea utilizada para identificarla; (2) la mayoría de estas ideas no son fáciles de identificar, porque forman parte del conocimiento implícito de cada persona; (3) son construcciones personales, si bien se ha encontrado cierto grado de similitud entre las representaciones de personas procedentes de distintos medios culturales (Driver, 1989); (4) muchas de ellas están guiadas por la percepción y por la experiencia de cada estudiante en su vida cotidiana; (5) estas ideas previas no tienen todas el mismo nivel de especificidad/generalidad y por lo tanto, las dificultades de comprensión que ocasionan a los y las estudiantes no tienen la misma importancia; (6) con frecuencia estas ideas son muy resistentes y, en consecuencia, difíciles de modificar (Carretero 1997) y (7) muestran un grado de coherencia y solidez variable, puesto que pueden constituir representaciones difusas y más o menos aisladas, o bien pueden formar parte de un modelo mental explicativo con cierta capacidad de predicción. Esta posición, aunque con matices diferentes, es mantenida, entre otros y otras, por Pozo, (2003); Samarapungavan (1992); Vosniadou (1994) y Vosniadou y Brewer (1992).

Por su parte, el conocimiento científico o disciplinar cuenta con teorías, leyes y clases de coordinación, complejas por naturaleza, que requieren un proceso de reflexión sobre el propio conocimiento en una construcción explícita y deliberada de modelos, que se aleja bastante de los procesos de adquisición de las teorías implícitas (Pozo, 1989). El aprendizaje explícito se rige no sólo por procesos asociativos sino sobre todo por constructivos, y se perciben las diferencias estructurales entre ambos tipos de conocimientos, porque genera representaciones complejas, con fines explicativos e interpretativos. Así, la construcción del conocimiento científico responde a un proceso complejo, donde los factores racionales, empíricos y sociales se interrelacionan fuertemente (Gandara, de la Gil y Sanmartí, 2002). Se sabe que la percepción del mundo es subjetiva, las observaciones están influenciadas por las propias teorías, el punto de vista tradicional del método científico no se corresponde con la práctica científica y en ésta influyen de forma importante factores sociales.

Durante bastantes décadas se ha tratado de relacionar el cambio desde el conocimiento cotidiano al científico; para ello se han desarrollado gran cantidad de modelos de cambio conceptual, desde los que se ha intentado explicar cómo son las transformaciones que se generan en la estructura de conocimiento de las personas cuando aprenden, en la figura 2-1 se resumen distintos modelos de cambio conceptual según Rodríguez (2007)

Modelos fríos	Modelos calientes	Modelos situados
(Posner, Strike, Hewson y Gertzog, 1982). Modelos neo-innatistas Modelos metacognitivos Modelos centrados en la <i>peripecia</i>	(Pintrich, Marx y Boyle, 1993)	(Brown, Collins y Duguid, 1989)
Describen el cambio conceptual desde el carácter de racionalidad que atribuyen a la persona, así como por la descripción de un proceso de cambio centrado en la transformación del conocimiento declarativo. El <i>conflicto</i> es uno de los mecanismos centrales para explicar el cambio conceptual.	Describen el cambio conceptual desde el cambio de las estructuras del conocimiento declarativo y tienen en cuenta para ello elementos afectivos y motivacionales., incluidos éstos en el contexto mental	Describen el cambio conceptual dando menos importancia al conocimiento declarativo a favor del uso del conocimiento y la influencia del contexto en el aprendizaje de las personas. Enriquecen el ámbito del cambio conceptual al considerar el uso del conocimiento y el efecto del contexto.
En el cambio menor (reestructuración débil o asimilación) se produce la incorporación de nuevos aprendizajes sin cambiar sustancialmente el significado o el núcleo duro de las concepciones existentes. En el cambio mayor (reestructuración fuerte o acomodación) se produce una transformación radical de la estructura conceptual, un cambio teórico que afecta al núcleo duro y, por lo tanto, al significado central de las concepciones existentes.	El “sistema cognitivo” y “el sistema motivacional” se influyen mutuamente. Cuando las personas aprenden un contenido específico en un contexto físico y social determinado, se activan una serie de elementos del proceso motivacional: la meta, las auto-percepciones de la persona, sus expectativas de éxito...	El cambio conceptual se produce mediante la <i>aplicación multicontextual</i> . Se reconoce el valor adaptativo de las concepciones alternativas y la aceptación de su mantenimiento junto a las concepciones científicas. Con respecto al conocimiento procedimental, el cambio conceptual supone, fundamentalmente, una ampliación y diferenciación (discriminación) de los mismos que permite la adecuada aplicación de las concepciones de las personas.

Figura 2-1. Resumen de distintos modelos de cambio conceptual según Rodríguez (2007).

diSessa (1993, 2002) concibe la construcción de nociones o conceptualizaciones de las personas como estructura complejas, donde los mismos conceptos científicos son interpretados como sistemas complejos en sí (diSessa, 2002; diSessa y Sherin, 1998) denominados *primitivos fenomenológicos (p-prims)* y *clases de coordinación (coordination classes)*. Los *primitivos fenomenológicos* constituyen las ideas físicas intuitivas. Con el cambio conceptual se consigue una estructura de los *p-prims* que se coordinan en torno a leyes físicas, teorías o principios, de modo que forman parte de un sistema más complejo e integrado (Rodríguez, 2007). Las *clases de coordinación* son conceptos que dan cuenta de la interpretación de todo un dominio fenomenológico, de carácter no intuitivo y que requieren de un proceso de construcción largo, que si bien es dependiente del contexto, es transformable y el cambio conceptual implica su transformación.

En base a la Teoría fuzzi-trace (Wolfe et al., 2005), acorde con los modelos situados bajo la influencia de Vigotsky en cuanto al cambio conceptual, es necesario destacar la gran importancia del contexto como elemento explicativo de la adquisición y uso del conocimiento en personas con razonamiento moderado y que, por lo tanto, no han experimentado un cambio conceptual debido al cambio en la estructura de conocimiento.

Desde una perspectiva de posturas intermedias distintos puntos de vista no tendrían por qué ser incompatibles. Para Carretero (1997) es posible que el alumnado tenga representaciones difusas y poco coherentes respecto a algunos conceptos, probablemente los más alejados de su conocimiento y de su experiencia, mientras que respecto a otros, sobre los que tiene un mayor conocimiento, no sólo a partir de su experiencia sino también a través de la escuela, pueda ser capaz de elaborar representaciones más complejas, integradas y coherentes. Es posible que las características específicas de los contenidos y su nivel de generalidad/especificidad influyan en que el o la estudiante construya uno u otro tipo de representación.

En las teorías más clásicas sobre el cambio conceptual para la adquisición del conocimiento científico se admitía que aprender ciencia implica abandonar ciertas ideas o creencias previas, denominadas significativamente *preconceptos* o *concepciones erróneas*, pues presuponían que las *concepciones alternativas* del alumnado son incompatibles con el conocimiento científico. Sin embargo, dentro de la perspectiva actual sobre el cambio conceptual, se asume que, de producirse dicho cambio, no implica necesariamente el abandono de las teorías implícitas de la persona que aprende, tan eficaces en numerosos contextos cotidianos y en la interacción social, sino su integración jerárquica —adoptando la terminología del aprendizaje significativo— en la nueva teoría explícitamente elaborada. Al aprender se adquieren nuevas representaciones, que además son, entre las disponibles, las más adecuadas en cada contexto y en cada demanda. En general se consiguen procesos de crecimiento y ajuste de conocimientos científicos, pero no parece producirse un cambio conceptual radical (Pozo, 2007).

Pensar en el aprendizaje de la ciencia como cambio representacional y no sólo conceptual implica la idea de que adquirir conocimientos científicos requiere no sólo acceder a nuevos conceptos sino, sobre todo, incorporar nuevos formatos y sistemas de representación, diferentes a aquellos sobre los que se estructuran las teorías intuitivas. Mientras que las representaciones implícitas son internas y encarnadas, el conocimiento científico, como elaboración cultural que es, se sustenta en representaciones explícitas.

Dichas representaciones requieren de un lenguaje o código, de naturaleza simbólica o abstracta. Dicho código es descontextualizado, de carácter proposicional, y se apoya en sistemas de representación externa. Los nuevos y explícitos *sistemas externos de representación* que proporciona la ciencia, permiten reconstruir esas representaciones implícitas, reescribirlas en el marco de un nuevo sistema representacional, sin necesidad de abandonarlas. A través de estas representaciones externas se hacen explícitas las representaciones implícitas, y de este modo se pueden comparar. Ejemplos como las investigaciones de Darwin o Galileo muestran el avance del desarrollo científico apoyado en los sistemas externos de representación (Martí y García-Milá, 2007). Según Lemke (1997), el lenguaje de la ciencia es una combinación de palabras, diagramas, imágenes, mapas, ecuaciones, tablas y otras formas de expresión visual y matemática. Los conceptos científicos efectúan una interpretación de entre las realizadas mediante diversos tipos de representaciones externas, lo que permite comprender el fenómeno mediante un trabajo de equivalencias entre las representaciones; para ello es fundamental poseer la habilidad de traducir entre los distintos sistemas externos de representación.

Janvier (1987b), entre otros autores y autoras, afirma que la habilidad para traducir datos numéricos a diferentes representaciones (verbales, gráficas, algebraicas, etc.) correlaciona con el éxito tanto en la educación matemática como en la resolución de problemas. Para ello la persona ha de ser capaz de reconocer una idea independientemente del formato en que se representa, de manipularla flexiblemente, adaptarla y trasladarla al sistema que más convenga en cada momento, contexto y circunstancia. En este orden de cosas, esta investigación se propone ahondar en la transferencia de los sistemas externos de representación del concepto de *función*.

La ciencia es una actividad encaminada a producir modelos que ayuden a explicar los fenómenos que se quieren comprender. La investigación científica se caracteriza por el desarrollo, evaluación y revisión de modelos, explicaciones y teorías a través de criterios y estrategias propios de la ciencia. Considerando las etapas involucradas en este proceso, parece obvio que aprender a pensar científicamente sería aprender a desarrollar, evaluar y revisar modelos, explicaciones y teorías.

Las investigaciones en didáctica de ciencias han demostrado que en ningún caso una concepción concreta de las que están arraigadas en el alumnado ha sido totalmente extinguida o sustituida por una nueva idea. Lo que se ha demostrado es un éxito relativo ya

que las viejas ideas siguen persistiendo en contextos particulares (Rebello et al., 2005). Hoy día se asume que no ha sido adecuado el objetivo de buscar el rechazo del alumnado de sus propias ideas alternativas a favor de un modelo científico sobre una fenomenología a estudiar. Por ello, las posiciones actuales defienden que las personas partiendo de sus representaciones implícitas sobre determinados conocimientos, desembocan en la construcción de representaciones más explícitas o modelos de un determinado conocimiento con diferentes probabilidades de activación en función del contexto, contenido, grado de elaboración, etc. para enfrentarse a distintos contextos. Es en este cambio donde los *sistemas notacionales externos* son fundamentales (Pérez, Pecharromán y Postigo, 2007), y en concreto en el concepto de función las representaciones externas de tabla de valores, gráfico y expresión algebraica.

El proceso de aprendizaje en el aula debería consistir en la elaboración de una sucesión de modelos mentales del alumnado que progresivamente se irían aproximando al modelo científico escolar deseado en cada nivel educativo. Para dicho proceso sería fundamental la traducción entre los distintos sistemas de representación o notacionales externos. En este sentido, el proceso de modelización escolar ha adquirido recientemente una gran importancia como objetivo fundamental de la enseñanza de las ciencias (Caamaño, 2011; Cañal, 2004; Izquierdo, Aduriz-Bravo y Aliberas, 2004).

Para que un elemento sea transferido debe de haber sido codificado específicamente como transferible, organizado como relevante y la o el estudiante debe mostrar una actitud favorable hacia la tarea y, por lo tanto, también hacia la transferencia (Stenberg, 1993). Todo ello significa que se necesita un nivel de metacognición sobre el propio conocimiento y el control sobre el conocimiento (Flavell, 1976). Los procesos metacognitivos incluyen la planificación de la tarea, la regulación y el control, que permiten modificar el plan de solución si fuera necesario (Beltrán, 1998). De esta manera el proceso reflexivo consciente—metaconocimiento—permite convertir el saber implícito en saber explícito.

Al enfrentarse a distintas tareas dentro de distintos contextos se provoca que las estructuras condensadas se desempaqueten para aplicarse a otros contextos (Claxton, 1991) y se transfirieran. Pese a que este proceso podría aún no ser consciente, al abrir el paquete encapsulado se abre la posibilidad de una reflexión consciente, que implicaría una nueva redescripción representacional según Karmiloff-Smith, (1992) leído en Hammer et al., (2005), lo cual permitiría hacer las representaciones objeto de conocimiento, de forma que se pueda pensar en las teorías y no sólo con ellas. Así, el éxito de la transferencia se

explica cuando la persona es capaz de reconocer los requisitos y condiciones de la nueva situación, seleccionando las habilidades específicas y generales adecuadas para aplicarlas al nuevo problema, de modo que la o el estudiante es participante activo que controla la aplicación de aprendizajes previos; es decir, supone la autoobservación del propio conocimiento como paso fundamental para la posterior actuación autónoma (Hammer et al., 2005).

Este punto de vista no niega la posibilidad de que exista una transferencia producto de una automatización de lo aprendido, pero considera que este tipo de transferencia se refiere exclusivamente al mantenimiento, lejos de afectar a la generalización del empleo de la información. Se entiende por tanto que la transferencia, entendida como el uso en situaciones diferentes de la información retenida en la memoria a largo plazo, requiere un análisis de los contenidos presentes en la memoria relacionados con las demandas de la tarea (Borkowski, Carr y Pressley, 1987).

En consecuencia, en función del grado de cambio conceptual producido podrá tener lugar un tipo de transferencia-transferencia *high transfer-* (Salomon y Perkins, 1989) caracterizada por la abstracción del modelo, que es de carácter reflexivo, descontextualizado, metacognitivamente guiado o una transferencia de tipo *low transfer* dependiente de contexto y que será en gran medida la encontrada en este estudio.

Desde la cognición situada se afirma que el conocimiento conceptual no puede abstraerse de las situaciones en las que se aprende y se utiliza (Brown et al., 1989). Al igual que las nuevas palabras y sus usos se aprenden simultáneamente en su contexto de comunicación —de ahí el éxito del proceso—, el conocimiento científico no es ajeno al contexto donde tiene sentido; de ahí que, una de las causas de las dificultades experimentadas por el alumnado para utilizar el conocimiento científico en la resolución de un problema reside en que se le requiere que se valga de las herramientas de una disciplina sin que haya adoptado su cultura. Por ello, estas investigaciones proponen considerar el conocimiento conceptual como una caja o juego de herramientas”, dado que tanto conocimiento como herramientas no se comprenden por completo hasta que se utilizan, y su uso conlleva cambios en la visión del mundo, la adopción de la cultura en la que se emplean.

Sin embargo, las actividades escolares arquetípicas no suelen estar enmarcadas en la cultura de la disciplina sino en una cultura escolar estereotipada. En general, las actividades no producen un aprendizaje que pueda ser utilizado en otros contextos. Es

sabido que la transferencia analógica puede resultar difícil cuando los conceptos a emparejar tienen estructuras diferentes (Bassok, 1990) o cuando existen diferencias superficiales, pues se enmarcan en distintos contextos y la misma situación no tiene por qué suponer el mismo contexto para una persona novata y para una experta (Barnett y Ceci, (2002).

2.2 La resolución de problemas

En la enseñanza de las ciencias y de las matemáticas la resolución de problemas es la tarea por excelencia para probar el aprendizaje del alumnado, ya que activa y desarrolla diferentes tipos de conocimientos (Solaz-Portolés y Sanjosé, 2006). Comprender un problema con enunciado en ciencias y en matemáticas implica construir representaciones mentales -modelos mentales-, en diferentes niveles de abstracción, ya que la persona recupera de su memoria ejemplos resueltos antes y los usa para resolver el nuevo problema (Goldstone y Sakamoto, 2003; Barnett y Ceci, 2002). Por tanto, la *transferencia analógica* (TA) (Gentner y Markman, 1997; Gick y Holyoak, 1980) requiere el establecimiento de analogías entre los modelos mentales creados (Gentner, 1983).

Los estudios de la comprensión textual no han sido ajenos a la hipótesis de que las personas construyen representaciones en sus mentes. En este marco, a finales del siglo XX, Van Dijk y Kintsch (1983) propusieron que la comprensión de textos tanto orales como escritos requiere procesar la información textual a partir de tres niveles de representación: código de superficie, texto-base y *modelo de situación* (MS). En el marco de las ciencias, el modelo de situación (MS) construido en un problema está contenido en el conjunto de modelos mentales necesarios para representar el problema, pero en el caso de problemas con base matemática, los modelos mentales deben incluir también las abstracciones teóricas basadas en teoremas, leyes y principios científicos y, por tanto, contienen el *modelo del problema* (MP).

La representación de un problema condiciona su codificación y almacenamiento en la memoria (su clasificación) en términos de elementos o rasgos superficiales y estructurales. La codificación determina la posibilidad de reconocer o establecer vínculos analógicos con otros problemas. De aquí que el modo en que las personas construyen representaciones de los problemas es un asunto crucial en la transferencia.

La transferencia analógica implica, activar y desarrollar diferentes tipos de conocimientos (Solaz-Portolés y Sanjosé, 2006) porque una analogía supone siempre una comparación de dos dominios o situaciones específicas (Gentner et al., 2003) y no la aplicación de un esquema abstracto a un dominio o una situación particular. A través de ellas el alumnado abstrae *esquemas de problema*, que son las representaciones mentales comunes a varios problemas. Este proceso no se forma de modo autónomo e individual sino en continua interacción con el entorno escolar que rodea a cada estudiante (profesorado, alumnado, materiales,...)

Según diversos estudios (Holyoak y Koh, 1987) en un problema se diferencian dos componentes básicos: 1) su superficie, historia o contexto; y 2) su estructura. La *superficie* alude a la temática concreta o ámbito del mundo a la que pertenecen los objetos y eventos que se describen en el enunciado, que normalmente forman parte del conocimiento general de las personas. La *estructura* en los problemas algebraicos -donde se sitúa el concepto de función-, está determinada básicamente por cómo se relacionan las cantidades, las variables unas con otras, más que por cómo son esas cantidades (Novick, 1988).

Por lo tanto, la construcción del modelo de la analogía requiere de la construcción de un modelo más profundo que la mera asociación de atributos entre el problema diana y el análogo, un modelo basado en la estructura común de ambos dominios, en conexión con el contexto. Dicha aproximación asociativa se realiza mediante aproximaciones sucesivas que requieren de la confrontación sistemática con los datos de la experiencia o con otros modelos. El proceso se inicia por medio de relaciones causales y continúa hasta la fase de abstracción de semejanzas de dominio. En cuanto más generales sean los *esquemas de problema* construidos, más fácil será la transferencia a problemas nuevos.

Por otro lado, las analogías en ciencias exigen una extrapolación estructural mayor y más compleja que la mera asociación de pares de elementos entre dominios y se produce en niveles distintos (Solaz-Portolés y Sanjosé, 2012). De este modo, mientras las personas novatas parecen inclinarse por asociaciones entre los elementos superficiales, las expertas se inclinan por los elementos estructurales (teorías, modelos, etc.). Este hecho parece deberse a que las entidades de superficie de los problemas son más eficientes, activando ejemplos conocidos de la *memoria a largo plazo* (MLP), memoria que actúa como problema fuente (Solaz-Portolés Rodríguez, Gómez, y Sanjosé, 2013) quedando, así, *apantalladas* las diferencias estructurales. Tanto el factor contextual como el temporal parecen ser de gran importancia para que se produzca la transferencia analógica.

El éxito en la resolución de problemas de ciencias con enunciado matemático se logra cuando las personas construyen vínculos entre las estructuras de los problemas fuente y de los problemas diana, cuando las personas aprenden a construir isomorfismos al nivel de las representaciones MP (modelo de problema) de ambos problemas y, además, conocen los modos matemáticos de proceder para llegar al resultado correcto. Es la transferencia analógica (Van Lehn, 1990) es también llamada *transferencia lateral* (Gagné, 1971), *transferencia horizontal* (Rebello et al., 2007) o *de aplicación* o *de contexto* (Haskell, 2001).

En distintas investigaciones se ha observado que las dificultades en la resolución de problemas proceden de los procesos de construcción de las representaciones de los mismos, bien por la falta de comprensión profunda de la situación descrita en el enunciado (construcción del modelo de la situación, MS) o bien del proceso de traducción entre el lenguaje natural del enunciado y el lenguaje matemático (construcción del MP) (Gentner et al., 2003; Rebello et al., 2007; Solaz-Portalés, y Sanjosé, 2007) .

La construcción de un modelo de problema, sin embargo, no resulta ser una tarea fácil, ya que si un conjunto de problemas presenta similitudes superficiales, como los problemas de un mismo tema, sus diferencias estructurales pueden quedar enmascaradas para el alumnado. Entonces, incluso dentro de un mismo dominio temático, la transferencia entre problemas de estructura diferente resulta difícil (Rebello et al., 2007). Por el contrario, si el número de contextos es elevado podría distorsionar la extrapolación de la estructura del modelo, según han demostrado estudios que indican que la transferencia analógica está influenciada por los elementos superficiales descartando factores estructurales de mayor relevancia.

Todo ello lleva a deducir que la transferencia analógica es un proceso bastante complejo. No obstante, las personas expertas, quienes mejor resuelven los problemas, muestran capacidad de reconocimiento de diferencias estructurales en problemas con el mismo tema, pero también similitudes estructurales en problemas con temas diferentes; sus modelos mentales son predominantemente simbólicos (contienen símbolos que se aproximan a la realidad física). En cambio, quienes peor los resuelven, crean menos modelos y son predominantemente verbales.

Por lo tanto, el nivel de comprensión, parece estar relacionado con la activación de modelos. La elaboración de éstos vendrá determinada por: el enunciado del correspondiente problema, el conocimiento previo de cada estudiante y las variables

instruccionales involucradas. Las variables de conocimiento previo, estrategias de estudio y conocimiento conceptual influyen de manera estadísticamente significativa en la resolución de problemas, siendo el conocimiento conceptual el que más lo hace en aquellas situaciones donde no se requiere un modelo mental en la resolución o bien el número de modelos a activar es demasiado alto, mayor a cuatro (Solaz-Portalés y Sanjosé, 2006). Ello hace pensar que el alcance de esta pericia para la transferencia inter-dominios requiere diseños instruccionales que fomenten la formación de reglas generalizadas (Bassok y Holyoak, 1989) basadas, necesariamente, en aquello que es común a diferentes dominios, ya que resolver un auténtico problema (Gil y Martínez-Torregrosa, 1983) requiere comprensión y esto significa construir una representación mental de la situación descrita en el enunciado.

Según la teoría de *comprensión de textos* de Van Dijk y Kintsch (1983), en el proceso de resolución de un problema (con estructura matemática subyacente) con enunciado existen al menos tres niveles (Hegarty, Mayer y Monk, 1995) cada uno de los cuales puede presentar obstáculos para el alumnado:

- a) Comprensión a un nivel concreto, no abstracto, de la situación descrita en el enunciado, con sus entidades, sus relaciones y sus atributos. Es decir, la persona que resuelve un problema debe construir las representaciones del texto del enunciado en términos del contenido léxico, semántico o Base de Texto (BT) o referencial (MS). Ello incluye las reglas y las normas que rigen el funcionamiento del mundo que la persona conoce, y que sirven para que la situación descrita sea plausible una vez entendida (representada). El conocimiento general del mundo que la persona posee debe ser activado para subsumir la situación descrita en un esquema de funcionamiento conocido.
- b) Traducción de esa situación del lenguaje natural al matemático y viceversa. La persona debe pasar de un modelo mental de la situación descrita en términos concretos (objetos y eventos; atributos y características espacio-temporales) a una representación abstracta o *modelo del problema* que involucra magnitudes y fenómenos; cantidades y relaciones matemáticas; teoremas, leyes y axiomas. También en sentido contrario, a la hora de interpretar el resultado de un problema: las cantidades y abstracciones resultantes (MP) deben vincularse de nuevo con objetos y eventos del mundo (MS). El MS se construye mediante la integración del contenido textual en los esquemas de conocimiento previo, que el lector o la lectora

ha desarrollado en sus experiencias anteriores con el mundo, y puede incluir imágenes, contextos espacio-temporales, modelos analógicos de fenómenos y cadenas causales.

Según estudios de Solaz-Portolés et al., (2013), la familiaridad del contexto parece afectar al número de comparaciones estructurales entre el *problema diana* y el *problema fuente*, y a su vez, el número de comparaciones estructurales correctas también parece afectar al número de ecuaciones correctas seleccionadas por el alumnado en la selección de ecuaciones. Sin embargo, aunque la comparación de estructuras resulta ser un buen predictor de éxito en la selección de ecuaciones, parece que no sucede lo mismo al revés; por lo tanto, la comparación de estructuras parece una condición suficiente pero no necesaria para el éxito en la selección de ecuación en problemas de estructura algebraica.

- c) Manejo de las herramientas matemáticas necesarias para llegar al resultado, asociado con un conocimiento procedimental de los esquemas aritméticos, algebraicos, etc. de resolución.

Los problemas algorítmicos –que implican únicamente aplicación de definiciones, fórmulas o reglas-, no requieren para su resolución de elaboración de modelo mental alguno, y pueden ser resueltos simplemente a partir de una representación mental proposicional, lo que justifica el elevado número de estudiantes que los hacen bien, sin necesidad de ayudas instruccionales específicas. Así, muchos de los problemas de ciencias se pueden solucionar mediante la sustitución de variables o elementos de una ecuación; en la resolución de éstos al alumnado le es suficiente con la construcción de un modelo mental y por lo tanto, la asociación establecida corresponde a la asignación de la información leída del problema a elementos del conocimiento previo. En este caso se produce la *transferencia horizontal*.

Por el contrario, en la *transferencia vertical* la o el estudiante, normalmente, no tiene una estructura de conocimiento preconcebida que se alinea con el problema de la información. Es una asociación que se produce entre un elemento de conocimiento de lectura del problema con un elemento estructural del conocimiento interno de cada estudiante, que, a su vez, se basa en sus conocimientos previos. Por ello, en este tipo de transferencia, cada estudiante construye un modelo mental *in situ* a través de sucesivas construcciones y deconstrucciones de las asociaciones entre los elementos de conocimiento. En este caso, primero debe reconocer lo que sucede en la situación –modelo

mental científico- y debe elegir entre las representaciones internas o construir una nueva para esta situación. La elección de la representación interna varía, dependiendo de la situación del problema y de las características del contexto general de aprendizaje. Por su carácter no estático, Rebello et al. (2007) la denominan *transferencia dinámica*. Este tipo de transferencia es más compleja que la transferencia horizontal; así lo atestiguan investigaciones como la realizada en un estudio de la transferencia del álgebra a la física (Bassok y Holyoak, 1989), donde se encontró asimetría entre estas dos áreas de dominio, poniéndose de relieve el efecto de los factores contextuales en la transferencia del aprendizaje.

En la mayoría de los libros de ciencias y de matemáticas, son pocos los problemas, si hay alguno, que requieran la *transferencia vertical*; sin embargo, la mayoría de los problemas del mundo real requieren este tipo de transferencia. La resolución de problemas del mundo real requiere que el alumnado decida qué variables pueden dejarse de lado y también decida qué esquema o modelo mental es aplicable en los supuestos, o si es necesaria la creación de uno especialmente para la situación. Además, para ello, se requiere que el alumnado conozca las limitaciones del modelo que ha decidido utilizar y en qué condiciones hipotéticas el modelo dejaría de ser aplicable.

2.3 La transferencia en la Educación científica basada en contextos

Según Greeno (1998), el conocimiento se distribuye entre las personas, en el medio social y simbólico, en diversos objetos y artefactos que componen el universo donde éstas se desenvuelven y aprenden y, asimismo, en las comunidades. Desde este punto de vista, la transferencia no depende de la percepción de las propiedades físicas de las situaciones o de los problemas que se deban resolver, sino de las condiciones facilitadoras o inhibidoras en las que están embebidas estas situaciones o problemas y de los recursos disponibles necesarios para resolverlos (Greeno, 1997). Greeno entiende el contexto como la interpretación más o menos compartida de un sólo o de un conjunto de episodios por parte de un grupo de personas implicadas. Cada persona tiene su *texto* o interpretación de lo que sucede, que contrasta con los textos explícitos o implícitos del resto, y por ello, pueden existir distintos contextos en un mismo escenario. En el seno de los contextos que se construyen en cada escenario se genera conocimiento con características epistemológicas diferentes, puesto que responden a sujetos, objetos, instrumentos mediadores, resultados,

reglas, comunidades y roles diferentes y, como hemos visto, también en contextos mentales diferentes. En escenarios educativos, por ejemplo, el conocimiento es explícito, mientras que en escenarios familiares o de ocio es implícito; en escenarios profesionales tiene elementos combinados implícitos-explícitos. Este hecho ha llevado a afirmar a la comunidad investigadora que asume el contexto como concepto socio-cultural que no está claro que lo que se aprende en un contexto escolar se transfiera de forma automática a los otros contextos, porque el contexto es irrepetible.

Para Duranti y Goodwin (1992) un contexto es un escenario o suceso incrustado en su entorno cultural sobre el que ponemos la atención. Dicho concepto tiene cuatro características: (1) el *escenario*, marco social, espacial y temporal del episodio; (2) las *acciones* como se llevan a cabo las tareas asociadas; (3) el *lenguaje*, el uso de sistemas semióticos para compartir con otras personas los aspectos del episodio y (4) el *conocimiento* (científico o cotidiano) que pueda asociarse al episodio.

En la enseñanza de las ciencias, el término *contextos de aprendizaje* es utilizado para referirse a situaciones focalizadas y complejas que recogen hechos importantes y relevantes socialmente (con valores asociados). Forman parte del entorno cultural del alumnado y permiten captar su interés por comprenderlos y explicarlos. También se caracterizan por su potencialidad para producir un conocimiento suficientemente general y significativo desde la perspectiva de la ciencia, es decir, un conocimiento útil para interpretar los hechos relacionados con este contexto y con otros muchos más (Sanmarti, Burgoa y Nuño, 2011).

Actualmente, el diseño curricular basado en competencias considera de gran importancia los enfoques basados en el contexto porque existe una demanda para hacer frente a cinco problemas principales de la educación científica y la educación matemática (Gilbert, 2006): (1) la sobrecarga curricular generalizada con demasiados hechos aislados e inclusión de conceptos de importancia variable (Millar y Osborne, 2000), (2) el contenido del plan de estudios está tan fragmentado que existe incoherencia en y entre las conceptualizaciones alcanzadas por el alumnado, no llegando a conseguir un *mapa mental* que valga la pena, (3) el alumnado a menudo no puede transferir conocimiento a otras situaciones, excepto a aquella en la que lo adquirieron (4) el conocimiento que se imparte no es a menudo muy importante para la vida diaria del alumnado (Laugksch, 2000) y (5) hay confusión acerca de las razones de por qué el alumnado debe aprender ciencia .

En estudios sobre enseñanza-aprendizaje de la química basados en el contexto

(Bulte, Westbroek, de Jong y Pilot, 2006). Pilot y Bulte, 2006) ha quedado demostrado que existen dos grandes retos al enfrentarse a los cinco problemas planteados: formular cómo se crea el conocimiento y cómo es adaptado para su uso posterior. Sin embargo, no existe suficiente conocimiento basado en evidencias acerca de cómo se puede facilitar el desarrollo de un mapa mental coherente de conocimiento sobre un tema científico, y hay una necesidad de comprensión más profunda sobre cómo la transferencia de conocimientos entre los contextos se lleva a cabo tras el aprendizaje inicial. Además no existen estudios con alumnado de la ESO que relacionen estas cuestiones entre distintas áreas buscando la transferencia interdominio, y menos aún que hayan tenido en cuenta la perspectiva de género a la hora de abordarlo. Por todo ello, esta investigación tratará de acercarse a los dos retos antes mencionados.

Una profundización de las relaciones entre los contextos, el desarrollo de una buena comprensión de los conceptos y la transferencia de esos conocimientos, es fundamental para que los enfoques basados en contexto se aborden eficazmente en los problemas recurrentes de la educación científica. Sólo con una mejor comprensión de los temas de *conceptualización coherente y conocimientos transferibles* (problemas nº 2 y 3) se podrá abordar la cuestión de la sobrecarga curricular (problema nº 1). Por ello, la selección adecuada de contextos podrá hacer frente a los propósitos del currículo (problema nº. 5) (Gilbert, Astrid y Albert, 2011).

Gilbert et al., (2011) manifiestan que si bien la conceptualización y la transferencia se han discutido ampliamente (Chi, 2008; Van Oers, 2004), es necesario un enfoque sistemático de la transferencia desde la perspectiva particular del aprendizaje basado en el contexto. En este sentido, en los planteamientos acordes con la investigación actual según estos autores y basado en la teoría socio-cultural (Greeno, 1998), el contexto se refiere al análisis de la situación o problema complejo, relevante socialmente y basado en el entorno del alumnado, que se realiza durante un largo periodo de tiempo (en general semanal). Es decir, el contexto escogido no es una excusa para «motivar» al alumnado, sino que su sentido se deriva de su potencialidad para construir tanto saberes propios de la ciencia como otros propios del tipo de contexto escogido. Por tanto, en la selección de contextos es tan importante valorar su potencialidad para aprender un determinado modelo teórico de la ciencia o matemático como para aprender sobre el tipo de contexto.

Aunque el contexto debería constituir el eje central que guiara y estructurara la secuencia de enseñanza–aprendizaje, hoy en día todavía los diseños didácticos utilizados

en las aulas no alcanzan lo presentado anteriormente. Son varios los modelos actualmente utilizados (Gilbert, 2006; Gilbert et al., 2011): (1) el contexto como aplicación directa de los conceptos, (2) el contexto como la reciprocidad entre los conceptos y aplicaciones, (3) el contexto como promovido por la actividad mental, personal, (4) el contexto como las circunstancias sociales.

Modelo 1: El contexto como la aplicación directa de los conceptos (*Context as the Direct Application of Concepts*)

Los conceptos se presentan como abstracciones. Al final de ese proceso, por cualquier razón, se presenta su aplicación en los procesos tecnológicos y / o la vida cotidiana. Estas presentaciones son por lo general breves, a menudo ajenas a la consideración de su importancia cultural, y no están en ninguna evaluación final de los exámenes del curso. Los contextos son propósitos decorativos solamente. Este modelo es ampliamente utilizado. El tratamiento de la aplicación suele ser tan vago que no constituye una tarea de aprendizaje de alta calidad, el tratamiento no se lleva a cabo de tal manera y durante un tiempo suficiente que permita al alumnado explorar el significado de los conceptos en la situación que se le presentan, y lo que se hace, por lo general, no se relaciona con su conocimiento general de fondo, más allá de los conceptos que están bajo consideración inmediata. En general los modelos mentales creados son débiles –si los hay– sin relaciones entre los conceptos y entre éstos y los procedimientos y su transferencia. Sólo se refiere a la resolución de ejercicios que no requieren para su resolución de elaboración de modelo mental alguno, pueden ser resueltos simplemente a partir de una representación mental proposicional.

Modelo 2: El contexto como reciprocidad entre conceptos y aplicaciones (*Context as Reciprocity between Concepts and Applications*)

En este modelo, existe una situación que se ha seleccionado (por el o la docente que diseña el curso) como un vehículo a través del cual los conceptos clave se pueden enseñar. El supuesto es que existe una relación cíclica entre los conceptos y el contexto a través de la enseñanza, es decir, se les enseñan los conceptos, después se presenta su aplicación en el contexto, a continuación, un nuevo aspecto del contexto se muestra como un prelude a la enseñanza de nuevos conceptos. Este modelo tiene el peligro de que se pierda el foco de atención durante la secuencia y los conceptos se convierten en el único foco de atención.

Además, el significado de los conceptos cambia a medida que se utiliza en sus aplicaciones a contextos específicos (Layton, 1993), es decir, cualquier concepto puede adquirir varios significados diferentes, a menudo sutiles, en diferentes situaciones. Por lo tanto, la selección de la situación para el estudio será fundamental si se pretende que el alumnado vaya, posteriormente, a poder transferir lo aprendido a nuevas situaciones imprevistas. Los nuevos conocimientos adquiridos pueden o no relacionarse abiertamente con el conocimiento previo del alumnado. Podría dar lugar a la creación de una variedad de modelos mentales como resultado del aprendizaje de distintos contextos que si no son coordinados podrían dar problemas en la transferencia. El modelo de contexto escogido en la propuesta didáctica diseñada y aplicada en esta investigación podría situarse en este tipo.

Modelo 3: Contexto proporcionado por la actividad mental personal (*Context as Provided by Personal Mental Activity*)

Este modelo se fundamenta en el hecho de que el desarrollo del conocimiento por una persona reside exclusivamente en ella misma. Una persona se considera que tiene una comprensión de un concepto cuando se ha expresado -por ejemplo a través del habla- o ha permitido a otra persona formar la suya propia tal vez diferente interpretación de la misma. Este modelo de aprendizaje ha quedado en desuso frente a la creciente popularidad conseguida por los modelos que contemplan los puntos de vista socio-culturales del aprendizaje, con su principio básico de que el conocimiento es construido por las y los agentes.

Modelo 4: Contexto como circunstancias sociales (*Context as Social Circumstances*)

Este modelo se realiza cuando las condiciones para la construcción social del conocimiento, señaladas anteriormente, se cumplen plenamente (relevancia social y del entorno del alumnado). Este modelo sería el modelo a seguir en posteriores planteamientos didácticos y está apoyado en los planteamientos de Brown et al., (1989) cuando hablan de enculturación amplia del aprendizaje, modelización de conceptos-clave, lenguaje, toma de decisiones. Un contexto se sitúa como una entidad cultural en la sociedad. A través de este enfoque se crean modelos teóricos clave de las ciencias. Sin embargo, este tipo de contexto es el menos utilizado en los centros educativos en parte por su dificultad y en parte porque el profesorado focaliza simplemente en los conceptos a enseñar.

Desde las matemáticas la utilización del contexto también es necesaria porque son

en los contextos donde los nuevos conceptos adquieren sentido. La transferencia es más probable cuando los estudiantes han visto la idea dada en al menos dos contextos diferentes, o cuando reciben andamios metacognitivos (Bransford et al., 1999).

2.4 Género y enseñanza-aprendizaje en matemáticas y en ciencias

Las personas que en la actualidad se responsabilizan de las políticas educativas conceden una notoria prioridad a los asuntos relacionados con la igualdad de oportunidades entre alumnos y alumnas en la educación y, así, suelen subrayar las desventajas a las que se enfrentan las niñas, las jóvenes y las mujeres adultas en su desarrollo matemático y científico. Para progresar hacia la igualdad de resultados en el desempeño matemático y científico, es necesario identificar los factores implícitos en la práctica educativa y la manera en que la condicionan las representaciones de género del profesorado, sus creencias, los modelos femeninos/masculinos y las expectativas que ellos generan. Es asimismo necesario identificar aquellas características de la interacción entre docentes y alumnado que potencian su desempeño y desarrollo.

Son muy escasos los estudios que hayan considerado la perspectiva de género en la investigación sobre la transferencia. Sin embargo existen numerosas investigaciones que han integrado el enfoque de género en la investigación educativa. A continuación se analizan las relacionadas con la enseñanza-aprendizaje en matemáticas y en ciencias.

2.4.1 Diferencias por sexo en matemáticas

Durante las últimas décadas en distintos países se han venido realizando estudios con el objeto de conocer cómo se relacionan las diferencias de género con el aprendizaje de las matemáticas. En particular, se ha investigado si existen diferencias de género en los logros, en el desempeño y en la actitud hacia las matemáticas y, de existir, a que son debidas. (Figueiras, Molero, Salvador y Zuasti, 1998; Forgasz y Leder, 2000; Hanna, 1989; Leder, 1992; Leder 1996; Leder, 2001). También se han investigado las diferencias de género en las atribuciones causales y se ha tratado de establecer una relación entre éstas y el logro en matemáticas (Kloosterman, 1990) así como la relación entre logro y motivación (Middleton y Spanias, 1990).

En la última década del siglo XX se comenzó a estudiar cómo influía la educación diferencial que reciben los niños y las niñas en la mayoría de las culturas en el desarrollo

de las diferencias de género, es decir, cómo afecta el trato diferenciado que da el profesorado a alumnos y alumnas, y el desempeño en matemáticas (Koehler, 1990; Kuyper y Van der Werf, 1990). En esta línea, algunas investigaciones (Boaler 1996); Chronaki y Pectelidis 2012; Ursini, Sanchez, Oredain y Brutto (2004) han analizado si los distintos enfoques en la enseñanza de las matemáticas afectan de manera diferente a alumnos y alumnas. Por otro lado, durante años se ha constatado la existencia de una tendencia a considerar las matemáticas como un dominio específicamente masculino, si bien estudios posteriores (Forgasz, 2001) han indicado que esta actitud está cambiando y que el alumnado ya no percibe la matemáticas como dominio esencialmente masculino.

En lo que respecta a estudios de ámbito internacional en los Informes TIMMS (*Trends in International Mathematics and Science Study*) y PISA (*Program for International Student Assessment*) se viene observando una tendencia al equilibrio en el rendimiento matemático entre alumnas y alumnos. La evaluación TIMSS es fundamentalmente curricular, mientras que la evaluación PISA evalúa el nivel del alumnado con respecto a los conocimientos y destrezas para la vida. La evaluación TIMSS evalúa al alumnado de 2º curso de la ESO mientras que PISA evalúa a alumnado de 15 años independientemente del curso en que se encuentre en el momento de realizar la prueba.

- Informe TIMMS

En 1994-1995 el informe TIMSS de la *International Association for the Evaluation of Educational Achievement* (IEA), realizado en 16 países miembros de la OCDE, reveló la existencia de diferencias por sexo estadísticamente significativas entre el alumnado de nueve años en tres países (Japón, Corea y Holanda). En todos los casos, la diferencia favorecía a los chicos. Este mismo estudio reveló que en el ámbito de las matemáticas y en estudiantes de 13 años las diferencias significativas por sexo afectaban a seis países, y que en todos los casos favorecían igualmente a los chicos. También se encontraron amplias diferencias estadísticamente significativas por sexo en la competencia matemática del alumnado del último curso de enseñanza secundaria superior en todos los países participantes, excepto en Hungría y Estados Unidos, y una vez más, siempre a favor de los chicos. Un panorama similar, o incluso más acusado, se observó en el campo de las ciencias (Beaton et al., 1996; Mullis et al., 1998)

En posteriores estudios realizados por la IEA, TIMSS 2000 (Mullis, Martin, Fierros, Goldberg y Stemler, 2000) se constató que, en el caso español, los alumnos de 8º de EGB obtuvieron un rendimiento medio superior al de las alumnas, tanto en matemáticas como en ciencias (de la tierra, naturales, física y química). En el estudio TIMSS de 2003 la evaluación del aprendizaje de las matemáticas en 4º y 8º confirmó, una vez más, que en muchos países las diferencias por sexo no eran insignificantes: en todos los países que participaron en el estudio los hombres aventajaron a las mujeres, principalmente en los últimos años de la enseñanza secundaria.

En el estudio TIMSS 2003 (Martin, Mullis y Gonzalez, 2004; Rubio y Fernández, 2005) la participación española estuvo representada por Euskadi, y se concluyó que los alumnos de 2º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) presentaban un rendimiento medio superior, estadísticamente significativo, al de las alumnas en materias como química, física y ciencias de la tierra. Sin embargo, las alumnas destacaron significativamente en las áreas de álgebra y medida.

Sin embargo, los resultados del estudio TIMSS 2007 fueron bastante diferentes (Olson, Martin, Mullis y Arora, 2008): en la media internacional las chicas superaron en 5 puntos a los chicos, con una diferencia estadísticamente significativa en seis países. Sin embargo, en Euskadi los chicos superaron a las chicas de modo no significativo. En dicho estudio, las diferencias entre ellos y ellas, en Euskadi son significativas a favor de los chicos en el dominio del *Conocimiento* y las medias de los ambos sexos se encuentran por encima de la media internacional de su mismo sexo en los tres dominios estudiados (*Conocimiento, Aplicación y Razonamiento*).

En lo que respecta a la evolución en Euskadi según los TIMSS del periodo 2003-2007 (Alonso, Mendez, Rubio y Tambio, 2008), se constata que en el 2003 la diferencia era de 6 puntos a favor de las chicas (chicas 490 puntos y chicos 484 puntos), pero de 5 puntos a favor de los chicos en el 2007 (chicas 496 puntos y chicos (501 puntos), si bien en ambos casos no eran significativas. Ciertamente, en este período el grupo de las chicas ha mejorado en 6 puntos sus resultados, mientras que el de los chicos lo ha hecho en 17, es decir, su incremento ha sido casi tres veces superior y estadísticamente significativo. En resumen, puede afirmarse que en Euskadi, en el ámbito de las matemáticas, no hay diferencias estadísticamente significativas entre chicos y chicas, siendo los chicos significativamente mejores en *Conocimiento y Razonamiento* y similares en *Aplicación*.

No obstante, a nivel internacional, el TIMMS de 2007 muestra que las chicas superan significativamente a los chicos en los tres dominios cognitivos.

Por otra parte, el informe EURYDICE (2010), elaborado por la Comisión Europea, indica que las diferencias de género en matemáticas no son ni tan pronunciadas ni tan estables como en la lectura, donde las chicas superan a los chicos desde edades tempranas –4º curso–, margen que se mantiene estable hasta los 15 años de edad.

- Informe PISA

La evaluación PISA se aborda con mayor concreción porque el alumnado evaluado es de 15 años, bastante similar al investigado en esta Tesis.

En relación a esta evaluación se presentan los datos de las cuatro últimas evaluaciones, 2003, 2006, 2009 y 2012 desegregados por sexo y se comparan los datos de Euskadi con los de ámbito internacional (figura 2-2) (Arregi, Sainz, Tambo y Ugarriga 2005, 2011).

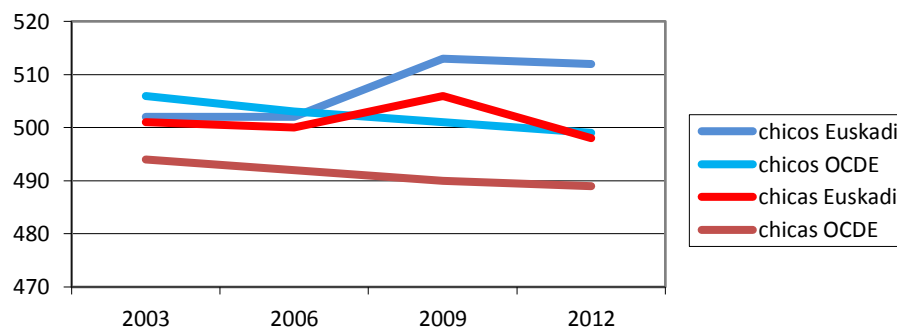


Figura 2-2. Resultados en Competencia Matemática por sexo (PISA 2003-2012).

Las diferencias de resultados entre ambos sexos en las evaluaciones de 2009 (7 puntos) y 2012 (14 puntos) son estadísticamente significativas a favor de los chicos en Euskadi. Como se muestra en el gráfico en Competencia matemática, las chicas tanto en Euskadi como en la media de la OCDE obtienen en todas las ediciones de PISA resultados más bajos que los de sus compañeros. Estas diferencias entre ambos sexos son significativas en PISA 2009 y 2012 (ISEI-IVEI, 2012).

En PISA 2012 las puntuaciones de las chicas en Euskadi no tienen significatividad estadística respecto a sus compañeras de la OCD. Las diferencias fueron significativamente más altas en PISA 2006 y PISA 2009 a favor de las chicas de Euskadi.

Las puntuaciones de los chicos de Euskadi con respecto a los de la OCDE son en PISA 2012 significativamente más altas.

Kane y Mertz (2012) tras comparar los resultados obtenidos por chicas y chicos de diferentes países en las Olimpiadas Matemáticas Internacionales de 2001 a 2010, en el estudio PISA 2009 y en el TIMSS, concluyen que los datos son muy heterogéneos y variados en función de los países, por lo que proponen la existencia de factores socioculturales que influyen en las desigualdades observadas ya que si el origen fuera biológico serían independientes del lugar y del tiempo.

Por otra parte, también otras investigaciones apoyan la influencia de los factores culturales, sociales, políticos y económicos (Herr y Arms, 2004) en los resultados. Otras investigaciones del SIMS de 1990 (Perkins y Baker, 1990) repararon ya en esta cuestión cuando analizaron las diferencias de rendimiento matemático en función del sexo, pues constataron la existencia de marcadas diferencias entre los sistemas educativos de diversos países. En efecto, si bien los datos del Informe PISA evidencian que no se puede concluir que las chicas puntúen más alto que los chicos en competencias y en conocimiento científico, tampoco se puede establecer que los chicos sean mejores. Este dato se puso de manifiesto en los anteriores informes PISA, donde no se encontraron diferencias estadísticamente significativas entre unos y otras (Pajares, 2005).

2.4.2 Patrones de género y rendimiento en matemáticas

Algunos países parecen proporcionar un entorno de aprendizaje que beneficia a chicas y chicos por igual, sea como consecuencia directa de los esfuerzos educativos o porque el contexto social es más favorable, o bien por ambas razones. La amplia variación que presentan las diferencias en función del sexo entre los países sugiere que éstas no son producto inevitable de las diferencias *naturales* entre chicos y chicas, y que las políticas y las prácticas eficaces pueden superar lo que durante mucho tiempo se ha considerado como consecuencia ineludible de las diferencias entre hombres y mujeres respecto a intereses, estilos de aprendizaje e, incluso, capacidades subyacentes. Subirats y Bruillet (1999) señalaron al respecto que la presión cultural y social que se ejerce sobre los chicos y las chicas promueve conductas diferenciadas que, al interiorizarse, conducen a creencias, actitudes y expectativas diversas. Así, estas disparidades pueden afectar al aprendizaje en general y al de las matemáticas en particular (Figueiras et al., 1998). Se han observado conductas diferenciadas en la participación activa, en la solicitud de atención y

requerimiento de ayuda, en el grado en que los alumnos y las alumnas se involucran en una actividad, en el tiempo que dedican al trabajo, en la creatividad que desarrollan y en el nivel de disciplina de su comportamiento. Tales factores son:

- factores de motivación en matemáticas (interés y gusto; motivación instrumental)
- factores de autoconcepto en matemáticas (confianza y seguridad; autoconcepto)
- factores emocionales (ansiedad)
- estrategias de control

a) Factores de motivación en matemáticas

Numerosas investigaciones sobre el rendimiento ponen de manifiesto la relación existente entre variables personales del alumnado y éxito académico (Villarreal, 2001). Entre otras, se ha estudiado cómo influyen en el aprendizaje la motivación positiva hacia el estudio, el interés en la materia y un buen autoconcepto (las creencias que un chico o una chica tienen sobre sí mismo o misma en el rendimiento de un área determinada). Se ha demostrado que estos elementos afectan a la forma en que la persona se implica en el aprendizaje, y llegan a ser indicadores y predictores de buenos resultados. Dos de estas ideas se refieren de forma específica al aprendizaje de las matemáticas: interés y gusto por ellas, o *motivación intrínseca*, y motivación instrumental hacia las matemáticas, o *motivación extrínseca*.

1) Interés y gusto por las Matemáticas

El interés por las matemáticas y la capacidad de disfrutar de ellas es uno de los aspectos de la motivación intrínseca que influye con más intensidad en el aprendizaje. La motivación y la implicación personal pueden ser consideradas como las fuerzas motrices del aprendizaje. Afectan también a la calidad de vida del alumnado durante su adolescencia e inciden en la elección exitosa de oportunidades para su educación posterior o para su inserción en el mercado laboral. Disfrutar con las matemáticas incide positivamente en el tiempo de permanencia en la tarea, en la comprensión de las estrategias de aprendizaje y en la selección de actividades adecuadas para resolver un problema concreto. También hay evidencias de que la motivación intrínseca hacia una materia o hacia el estudio en general tiene efecto positivo sobre el profesorado y sobre el clima del aula.

Dada la importancia de las matemáticas en la vida futura de las chicas y los chicos, el sistema educativo necesita asegurar la continuidad de un grado de interés y motivación

suficiente para que después del periodo de escolarización, en su vida adulta, sigan aprendiendo.

En PISA 2003 (OCDE, 2004) este factor fue analizado y en relación con el mismo, el alumnado de Euskadi muestra un interés y gusto por las Matemáticas significativamente menor que la media de la OCDE (-.18). En relación con el valor del índice, la variación de un punto en el mismo (es decir, la desviación estándar de la OCDE) hace que los resultados de Matemáticas aumenten o disminuyan una media de 11.9 puntos en la OCDE y 21 puntos en Euskadi. Esta diferencia es estadísticamente significativa; es decir, el aumento o disminución del valor del índice “interés y gusto por las Matemáticas” tiene una influencia en los resultados significativamente más alta en Euskadi que en la OCDE. En la mayoría de los países (a excepción de tres) es mayor el interés y gusto por las matemáticas por parte de los chicos, incluso cuando no obtienen mejores resultados. En Euskadi el interés es similar en ambos sexos.

2) *Motivación instrumental hacia las Matemáticas*

Más allá del interés general que el alumnado pueda tener hacia esta materia, interesa conocer cómo valoran escolares de 15 años la importancia que el estudio de las matemáticas pudiera llegar a alcanzar en sus vidas futuras. Se ha demostrado que el grado de motivación hacia una tarea específica es un importante predictor de la elección de una determinada carrera o del desarrollo de un determinado trabajo (Wigfield, Eccles y Rodriguez, 1998).

Los datos de PISA 2003 indican que los resultados en Matemáticas aumentan a medida que aumenta la motivación de cada estudiante, siendo ésta una constante que se da en la mayor parte de los países participantes. En Euskadi, el alumnado obtiene un índice de *Motivación Instrumental* de .004 de valor medio, que resulta ser prácticamente igual al de la media de los países de la OCDE. Sin embargo, la diferencia entre quienes tienen poca motivación y quienes dicen tener gran motivación es de 70 puntos en los resultados en esta área, siendo esta diferencia una de las más altas entre todos los países. La variación de un punto en el valor de esta índice hace que los resultados aumenten o disminuyan una media de 8.5 puntos en la OCDE y 25.5 puntos en Euskadi. Esta diferencia es estadísticamente significativa. No hay diferencias significativas en la motivación que muestran hacia los estudios de Matemáticas entre los chicos y las chicas de Euskadi.

b) Factores de autoconcepto en Matemáticas

Cada estudiante a lo largo de su vida se forma conceptos –*autoconceptos*– sobre su propia competencia para el aprendizaje. Se ha demostrado que los conceptos o creencias que la persona tiene sobre sí misma influyen de manera considerable en su aprendizaje. El autoconcepto de cada estudiante influye en el modo en que se marca los objetivos, en las estrategias que usa y en sus logros (Zimmerman 1999). La confianza y seguridad en sí mismo/a para enfrentarse a determinadas tareas, denominada por Bandura (1977; 1993) *autoeficacia*, correlaciona significativamente con las elecciones académicas y con el rendimiento. También los trabajos de Marsh y Craven (2006) indican que los resultados académicos se relacionan persistentemente con el autoconcepto y la autoeficacia de cada estudiante. No obstante, se ha constatado a través de diversos estudios que, aunque las chicas tengan un autoconcepto positivo, es decir, se valoren como buenas estudiantes y con un futuro académico prometedor, sin embargo, pueden percibirse negativamente en cuanto a sus capacidades para el aprendizaje de conocimientos científicos. Esta *metacognición* puede llegar a determinar sus resultados en materias como matemáticas, física o química, siendo un obstáculo para la elección de carreras técnicas o científicas en el nivel universitario. En otro trabajo de Marsh y Craven (2006) quisieron determinar si el autoconcepto académico depende del instrumento con el que se evalúa el rendimiento académico del alumnado. Los resultados de este trabajo mostraron correlaciones superiores a .50: entre el autoconcepto matemático y las calificaciones obtenidas en la asignatura de matemáticas (.71); con las puntuaciones en una prueba de rendimiento matemático (.59) y con la ejecución de cursos avanzados de matemáticas (.51).

Un aspecto positivo del rasgo de autoeficacia es su carácter evolutivo, tal como lo vienen mostrando diversos estudios. Wigfield, Eccles, y Pintrich, (1996) evaluaron la metacognición del alumnado sobre su rendimiento en la asignatura de matemáticas a lo largo de la educación obligatoria. Durante el ciclo de primaria (hasta los 11 ó 12 años), no se observaron diferencias entre los niños y las niñas en su percepción del rendimiento. En los primeros niveles de secundaria (de 11-12 hasta 14-15 años), los chicos empiezan a desarrollar una percepción más positiva de su rendimiento que las chicas. Se han hallado datos similares en otros estudios. En los trabajos de Zeldin y Pajares (2000); Zeldin, Britner y Pajares (2008), donde se compararon las creencias de chicos y chicas sobre su éxito en ciencias, matemáticas, tecnología, ingeniería, se encontró que los alumnos construyen sus expectativas de autoeficacia a partir principalmente de rendimientos

previos, mientras que en las alumnas el proceso de aprendizaje social de la infancia y adolescencia era determinante en la construcción de los rasgos de la autoeficacia. Este resultado concuerda con los obtenidos en varios estudios en los que se ha observado que las chicas, a pesar de conseguir mejores calificaciones en matemáticas o física, se consideran menos eficaces en estas mismas materias (Marsh y Craven, 2006; Sullivan y Mahalik, 2000; Whiston y Bouwkamp, 2003).

Las creencias de la persona sobre sí misma se describen en términos de *autoconfianza*, seguridad ante las tareas etc., y se da por supuesto que tales creencias son de signo positivo. La autoconfianza tiene efectos beneficiosos en dos sentidos: primero, porque es un elemento importante de motivación hacia el aprendizaje de una materia concreta; segundo, porque facilita que las tareas de aprendizaje se aborden de forma más eficaz. Además, habría que añadir el efecto de autorrefuerzo positivo y de confianza y seguridad que proporciona al alumnado el hecho de obtener buenos resultados. A conclusiones similares se llega a partir de los datos obtenidos en la evaluación PISA 2003, que tuvo como área de estudio monográfico las matemáticas, pero estos datos no pueden ser contrastados con los de informes posteriores, ya que no han abordado estas cuestiones.

1) *Confianza y seguridad en Matemáticas*

La autopercepción de la competencia ante tareas específicas —mayor o menor seguridad y confianza en sí misma/o— afecta a la actitud y disposición del alumnado para enfrentarse a tareas consideradas difíciles, lo que se traduce en un cierto grado de esfuerzo y persistencia.

Se preguntó al alumnado participante en PISA 2003 hasta qué punto confiaba en su propia destreza para resolver de forma eficaz problemas matemáticos y superar las dificultades. En todos los casos el rendimiento en matemáticas aumentaba en la medida en que crecía el índice de confianza y seguridad del alumnado. De este modo, la *Confianza y Seguridad en las tareas de matemáticas* se revela como uno de los índices más influyentes en los resultados, mostrándose asimismo muy regular en todos los países. Dicho índice, en escolares de Euskadi se sitúa en la media de la OCDE, exactamente en .00. El alumnado español muestra valores medios similares.. La variación de un punto en el valor de este índice llega a cambiar 47.2 puntos en los resultados en la media de la OCDE. En Euskadi tiene una influencia ligeramente menor, aun cuando puede llegar a cambiar 37.7 puntos. Las chicas vascas de 15 años muestran una confianza y seguridad ante las matemáticas

significativamente menor (-.10) que los chicos (.11). Sin embargo, se sienten significativamente más seguras que las chicas de la OCDE (-.17).

2) *Autoconcepto en Matemáticas*

El autoconcepto positivo es un elemento importante para el aprendizaje eficaz. Confiar en las propias aptitudes es un factor que, además de incrementar los buenos resultados, es en sí mismo un objetivo educativo, por lo que suele plantearse como una de las metas perseguidas por la política educativa. El autoconcepto correlaciona de forma positiva con los resultados del aprendizaje en matemáticas.

En PISA 2003, el valor del *Autoconcepto en matemáticas* en el alumnado de Euskadi tuvo una media de -.15, resultado significativamente más bajo que la media de los países de la OCDE. En efecto, Euskadi y España son quienes que presentan los valores más bajos. El alumnado con autoconcepto más elevado obtiene en matemáticas 80 puntos más que quienes nivel más bajo en autoconcepto. En Euskadi, la variación de un punto en el valor de este índice llega a cambiar más de 31.7 puntos los resultados. En todos los países los alumnos tienen una percepción de mayor autoeficacia y autoconcepto que las alumnas aunque éstas obtengan mejores resultados. En todos los países los alumnos tienen una percepción de mayor autoconcepto que las alumnas aunque éstas obtengan mejores resultados que ellos.

c) Factores emocionales (grado de ansiedad en Matemáticas)

Algunas investigaciones abordan este indicador como parte de las actitudes generales hacia las matemáticas, aunque generalmente se considera que los factores emocionales son aspectos distintos de las variables actitudinales, que merecen ser observados de forma específica. La ansiedad en matemáticas expresa la sensación de incapacidad y estrés emocional que puede surgir ante estas tareas, y generalmente se asocia de forma negativa con el logro académico. El rechazo a las matemáticas debido a situaciones de estrés emocional es un hecho extendido en muchos países. El miedo y la ansiedad de las personas a hacer matemáticas, más allá de la capacidad real que se posean en dicha materia, pueden ser un impedimento para su rendimiento en matemáticas. Así, en un estudio llevado a cabo en Estados Unidos por Beilock, Gunderson, Ramirez y Levine (2010) se muestra que la ansiedad ante las matemáticas de las docentes investigadas que impartían esta asignatura en la escuela primaria, tenían consecuencias negativas para el rendimiento en matemáticas de sus estudiantes. Las maestras socializaban la creencia "los

chicos son buenos en matemáticas y las niñas son buenas en lectura", es decir, adoptaban una perspectiva negativa en relación con el desempeño en este ámbito por parte de las chicas. Tanto es así que al final de curso las niñas que asumieron este estereotipo tuvieron un rendimiento significativamente peor que las que no lo hicieron y que el conjunto de los niños.

En la escuela primaria temprana, donde el profesorado es mayoritariamente femenino, la ansiedad del profesorado de matemáticas tiene efectos para el rendimiento de las niñas, influyendo en las creencias de éstas acerca de quién es bueno/a o malo/a en la materia. También otras investigaciones han demostrado que la actitud de las personas adultas influye poderosamente en el alumnado de primaria y que esta influencia es mayor cuando se trata de personas de su mismo sexo. Según Beilock et al., (2010), es posible que las niñas de primer y segundo grado sean más propensas a ser influidas por la ansiedad de sus maestras que sus compañeros de clase, dado que la mayoría del profesorado de la escuela primaria temprana son mujeres.

Asimismo, otros estudios (Ertekin, 2010; Gleason, 2007; Sánchez, Segovia y Miñán, 2011) han puesto de manifiesto que la ansiedad hacia las matemáticas es una actitud presente en el profesorado en formación. Ertekin (2010) analiza la correlación entre las creencias sobre las matemáticas y la ansiedad en su enseñanza en el futuro profesorado de primaria. En este estudio se encontraron correlaciones significativas entre la ansiedad en la formación docente y la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas. En un estudio realizado en España (Sánchez et al. 2011) se ha hallado ansiedad hacia las matemáticas en un 84.51% del futuro profesorado, que muestra temor ante esta materia y no se manifiesta a favor de ampliar sus conocimientos matemáticos. En general, sienten incomodidad cuando se relacionan con la materia, lo que pone de manifiesto la existencia de actitudes negativas. Ertekin (2010) estudian las posibles diferencias entre las creencias sobre las matemáticas y la ansiedad hacia ellas entre futuro profesorado de la materia en educación primaria y en relación a la variable sexo, concluyen que el enfoque del aprendizaje de las matemáticas es más instrumentalista en caso de las futuras maestras.

Por otro lado, según los citados estudios, las futuras maestras tienen más ansiedad que los futuros maestros. Beilock et al., (2010) indican que la ansiedad de las futuras maestras puede tener su origen en los estereotipos negativos que se transmiten en el entorno social. Estos autores sugieren que los programas de formación de docentes de primaria podrían reforzarse para exigirles una mayor preparación matemática y para

obligarles a hacer frente a sus problemas de actitud y a la ansiedad. Es interesante tener en cuenta este dato, ya que también en Euskadi la gran mayoría del profesorado de matemáticas en primaria son mujeres.

En PISA 2003 el alumnado vasco se siente más ansioso cuando realiza tareas de Matemáticas y lo hacen de forma significativa con un valor de .16. Este índice correlaciona de forma negativa con el rendimiento, es decir, a mayor grado de ansiedad, peores son los resultados que se obtienen en matemáticas. La diferencia en resultados de una persona que muestra grado de ansiedad bajo y otra alta es de 64 puntos en Euskadi, mientras que en la OCDE es de 92 puntos. Por otro lado, la variación de un punto en este índice hace bajar los resultados hasta 25.9 puntos en Euskadi frente a los 35.4 puntos en la OCDE. Las chicas vascas tienen un grado de ansiedad significativamente más alto (.32) que los chicos (-.32) cuando se enfrentan a estas tareas.

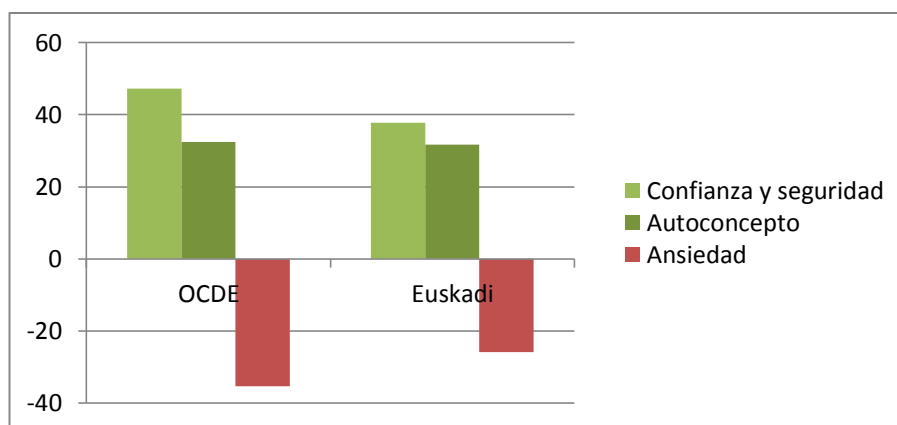


Figura 2-3. Influencia en los resultados de Matemáticas por cada punto de variación del índice de varianza, PISA 2003 (Arregi et al.; 2003).

Según PISA 2003, en Euskadi al igual que en los países de la OCDE, la “confianza y seguridad” ante las Matemáticas es la variable que tiene un mayor valor en los resultados, ya que explica el mayor porcentaje de la varianza o variabilidad de los resultados (22.7% en la OCDE y 17% en Euskadi); el “autoconcepto” se encuentra en segundo lugar tanto en la OCDE como en Euskadi y la “ansiedad” lo hace en último lugar y explica un 12.7% de la varianza, mientras que en Euskadi es el que menos impacto tiene de los tres, llegando a explicar el 7.7% de los resultados.

d) Estrategias de aprendizaje

En las situaciones de aprendizaje se requiere el desarrollo y la aplicación de diferentes tipos de estrategias que permite al alumnado alcanzar sus objetivos de aprendizaje. Entre las estrategias cognitivas se encuentran la memorización, la elaboración y las estrategias de control.

1) Memorización y control de la información

Las estrategias de memorización, mediante la representación de ejemplos, aprendizaje de hechos, etc. ayudan al alumnado en muchas de las tareas encomendadas en el aula, pero normalmente sólo conducen a la representación verbal de conocimientos de forma literal, con poco procesamiento de la nueva información. La evaluación PISA 2003 indica que el alumnado de Euskadi utiliza esta estrategia de modo similar a la que lo hace el de la OCDE. El impacto de un punto en este factor disminuye el valor de resultados de Matemáticas en la OCDE en 4.5 puntos, mientras en Euskadi pueden aumentar o disminuir los resultados en 8.3 puntos (ISEI-IVEI, 2004)..

2) Estrategias de elaboración

Estas estrategias suelen incluir relacionar la información nueva con otros conocimientos aprendidos en otros contextos. Así el alumnado debe buscar vías para relacionar el nuevo conocimiento con otros disponibles que ha aprendido a través de otros contextos. Estas estrategias se consideran que son imprescindibles para que no se produzca un aprendizaje superficial.

En alumnado vasco, a diferencia de lo que sucede con el de la OCDE, obtiene mejores resultados cuando utiliza esta estrategia. Mientras que en la OCDE al aumentar un punto el índice del mismo disminuyen los resultados en 5.3 puntos, en Euskadi aumentan en 12.9 puntos (PISA 2003).

3) Estrategias de control

Las estrategias de control ayudan al alumnado a dirigir y controlar su propio aprendizaje, comprobando si éste es el adecuado, y adoptando medidas si se detecta alguna debilidad.

PISA 2003 muestra que el alumnado con mayor ansiedad ante esta materia, utilizan en mayor medida las estrategias de control como un modo de ayuda. En Euskadi, el uso de estrategias de control tiene un valor significativamente más bajo que la media de la OCDE (-.05). Mientras que por cada punto que aumenta su valor los resultados de Matemáticas suben .06 puntos en la OCDE, en Euskadi lo hacen significativamente en 17.8 puntos.

Según esta evaluación las chicas vascas utilizan significativamente en mayor medida las estrategias de memorización y de control, mientras los chicos emplean las estrategias de elaboración significativamente en mayor medida (ISEI-IVEI, 2004)..

Por lo tanto, como conclusión en relación a las estrategias de control puede decirse que mientras éstas influyen muy poco en los países de la OCDE, en Euskadi, las estrategias de control llegan a explicar el 4.4 % de los resultados.

2.4.3 Diferencias por sexo en ciencias

La literatura científica ha señalado con frecuencia que el alumnado de ambos sexos obtiene similares puntuaciones en las materias de ciencias y que las mujeres siguen obteniendo un rendimiento académico superior en las humanidades (Gorard, Rees y Salisbury, 1999).

Al igual que se hiciera con los resultados de matemáticas se analizan a continuación las evaluaciones TIMMS y PISA.

- Informe TIMMS

Los datos del estudio TIMSS 1995 señalaron que en siete países europeos no existían diferencias por sexo significativas en el rendimiento en ciencias entre los alumnos y alumnas de 4º curso, mientras que en cinco países los chicos presentaban un rendimiento superior (Mullis et al., 2000). Sin embargo, en 8º curso se observaron diferencias por sexo en la mayoría de los países. El rendimiento de los chicos era superior, especialmente en física, química y ciencias de la tierra. En el último curso de secundaria, el nivel de conocimientos científicos de los chicos era significativamente superior al de las chicas en todos los países. No obstante, estos resultados variaban según las áreas: ellos obtenían mejores resultados en ciencias de la tierra, física y química, pero no así en biología o ciencias de la vida y en educación ambiental. En el estudio TIMSS-R1999, en ocho países europeos los chicos de 8º curso obtuvieron un rendimiento superior al de las chicas, mientras que en siete países no se hallaron diferencias (Mullis et al., 2000). Con todo, el progreso de las chicas es, de media, superior al de los chicos, especialmente a partir de 1999 (Martin et al., 2004). Así, en TIMSS 2007 la media internacional es seis puntos favorable a las chicas —469 frente a 463 de los chicos, pero hay importantes variaciones entre los diferentes países. Las alumnas obtienen mejor resultado en cinco países; sin

embargo, los alumnos las superan en muchos de los países más desarrollados, entre ellos Euskadi, donde obtienen 15 puntos más que ellas (490 frente a 505).

Refiriéndonos específicamente a Euskadi y a las áreas de contenido, según el último TIMSS 2007 el alumnado de la Comunidad Autónoma del País Vasco obtiene puntuaciones inferiores a la media en biología, física y química —en esta última es estadísticamente significativa la diferencia—, sin embargo en ciencias de la tierra consigue valores superiores. En relación con la diferencia por sexo, las chicas obtienen peores resultados en todas las áreas, y de manera significativa en tres de ellas (biología, física y ciencias de la tierra), datos que difieren notablemente de los observados en el ámbito internacional, donde las chicas obtienen valores significativamente superiores en biología y química, y los chicos de modo significativo en física.

Al examinar la evolución TIMSS 2003-2007, cabe resaltar que en Euskadi, la diferencia entre ambos sexos era de 15 puntos a favor de los ellos al inicio de ese periodo (2003), y que esta diferencia se mantiene en la evaluación del 2007. Esto indica que los resultados de Euskadi, son divergentes respecto a la media internacional. Asimismo, tanto las chicas como los chicos incrementan sus resultados en 9 puntos en ese mismo período, y en ambos grupos la mejora es estadísticamente significativa.

- Informa PISA

Tal como se ha realizado en matemáticas, se exponen los resultados de las cuatro últimas evaluaciones PISA en la figura 2-4.

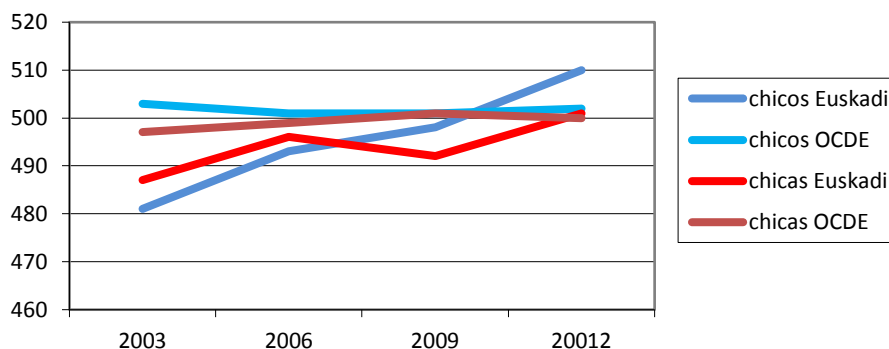


Figura 2-4. Resultados en Competencia Científica por sexo (PISA 2003-2012).

Las diferencias en la Competencia Científica fueron favorables a las chicas en las dos primeras ediciones de PISA (2003 y 2006), mientras que en el 2009 y 2012 son los

chicos quienes obtienen mejores resultados. La mayor diferencia es de 9 puntos en PISA 2012. Estas diferencias no fueron estadísticamente significativas en las tres primeras ediciones, PISA 2003 PISA 2006 y PISA 2009; sin embargo, en PISA 2012 los chicos obtienen una puntuación significativamente más alta que la de sus compañeras.

2.4.4 Patrones de género y rendimiento en ciencias

El aprendizaje de las ciencias está determinado por factores personales, como la autoeficacia, que se ponen de manifiesto durante el estudio de materias como física, química, biología, ciencias de la tierra y ciencias del ambiente. Ainley y Daly (2002) distinguen entre ciencias *duras*, tales como química, física y tecnología, y ciencias *blandas*, que incluyen disciplinas como la biología o una asignatura de ciencias en general. En la citada investigación constataron que el interés por el primer grupo de materias fue mayor entre los chicos, mientras que las chicas se interesaban principalmente por el segundo.

Tales factores son:

- factores de motivación en ciencias (interés y gusto; motivación instrumental)
- factores de autoconcepto en ciencias (confianza y seguridad; autoconcepto)
- factores emocionales (ansiedad)
- estrategias de control

a) Factores de motivación en Ciencias

Al igual que se hiciera con el factor de motivación en Matemáticas, a continuación se exponen investigaciones y resultados en relación con las Ciencias.

1) *Interés y gusto por las Ciencias*

Tal y como se ha indicado en un apartado anterior, la motivación o el interés hacia ciertas áreas de estudio suele considerarse como factor predictor del rendimiento (Renninger, Hidi y Krapp, 1992). En un estudio llevado a cabo con alumnado de último curso de secundaria obligatoria (Vázquez y Manassero, 2008, se concluyó que la percepción de las clases de ciencias por el alumnado no es claramente negativa, pero ciertamente tampoco es positiva; la actitud global es intermedia. Los rasgos de la ciencia escolar más positivamente valorados son: su utilidad para un trabajo futuro, el hecho de que gusta como tópico escolar, el tratarse de una materia interesante y su capacidad para

augmentar la curiosidad por conocer. Entre los rasgos más negativos aparecen la escasa intención de elegir una profesión relacionada con la ciencia y la tecnología y, por tanto, el exiguo deseo de estudiar ciencia en la escuela, la poca incidencia de la ciencia en la educación del sentido crítico y la dificultad percibida como asignatura. La limitada disposición para realizar estudios científicos o técnicos revela que la vocación científica no resulta atractiva al alumnado en general y menos aún a las chicas. Parece ser esta una negatividad extendida, pues es también compartida por el alumnado inglés (Vázquez y Manassero, 2008). Aún así, el alumnado percibiría en la ciencia escolar un valor general para su futuro laboral, independientemente de su falta de deseo para trabajar en profesiones científicas o tecnológicas.

En PISA 2006 el grado de interés hacia la ciencia era similar entre chicos y chicas, y no se apreciaron diferencias en ambos grupos en su intención de hacer uso de la ciencia en sus futuros estudios o trabajos (OECD, 2007b).

2) *Motivación instrumental hacia las Ciencias*

Son numerosos los estudios que señalan que el modelo de ciencia occidental margina a las mujeres y a las personas oprimidas, ya que transmite la creencia de que los y las científicas se dedican a experimentar sin ningún tipo de pasión ni sesgo, y que mediante el método científico descubren la verdad de la naturaleza. Este modelo de ciencia no reconoce los intereses personales, políticos, económicos, prejuicios... implicados en la construcción y producción de la ciencia. En la enseñanza tecno-científica el modelo de ciencia y tecnología escolar que se transmite en clases y laboratorios se presenta a las ciencias como ámbitos impersonales, y a quien las producen como seres carentes de creatividad, impersonales, libres de sentimientos, competitivos, características que se corresponden con el estereotipo masculino. De este modo se produce una asociación entre la naturaleza de la tecnociencia, es decir, entre su epistemología, y la percepción social de lo masculino. Esta perspectiva no toma en consideración los saberes y la experiencia de las mujeres, que, individualmente y de forma colectiva, han permitido el sostenimiento y desarrollo de la vida a lo largo de la historia. Una parte de estos saberes forman parte del contexto de la vida cotidiana y están relacionados con las tareas del cuidado familiar y los trabajos domésticos, siempre infravalorados en el mundo académico (Alvarez-Lires, Nuño y Solsona, 2003).. Todo ello se ve reforzado por el profesorado, los materiales curriculares y las actividades desarrolladas en las clases de ciencia y tecnología (Nuño y Ruipérez, 1996; Nuño y Ruipérez, 1997). Este modelo masculino de la epistemología de la

tecnociencia transmitido en la enseñanza afecta a la percepción individual sobre las metas y objetivos del conocimiento científico, al rol de los experimentos científicos, al modo en que cambian las ideas científicas con el tiempo y a lo que se reconoce como conocimiento validado y valioso (Sandoval, 2003), lo que provoca rechazo en gran parte del alumnado, especialmente entre la mayoría de las alumnas.

Smail (1991) encontró que a los 11 años no hay gran diferencia entre alumnas y alumnos en el rendimiento en ciencias; sin embargo, a las chicas no les interesaban las ciencias físicas y a los chicos no les interesaban las biológicas. Por otro lado, ambos sexos querían saber más sobre el estudio del cuerpo. Los distintos intereses desde edades tan tempranas entre chicas y chicos hacia temas de ciencia no han variado con el paso del tiempo, a juzgar por los similares resultados obtenidos por Reid y Skryabina (2003). Sin embargo, los programas de física siguen centrándose en áreas tradicionalmente consideradas masculinas, como la mecánica, la electricidad o el magnetismo, y prestan menos atención a áreas más susceptibles de atraer a las alumnas, como la energía nuclear, los fenómenos meteorológicos o las aplicaciones de la física en medicina o en el arte.

Cuando se pregunta por el interés por la ciencia al alumnado, la evaluación temporal de las respuestas demuestra un descenso global de las actitudes con la edad y el sexo. El interés llega a reducirse drásticamente hasta un 47% (Vázquez y Manassero, 2008).

b) Factores de autoconcepto en Ciencias

Los resultados de PISA 2006 al igual que los de PISA 2003 analizan cuestiones no solo de carácter científico sino también de índole personal académico.

1) Confianza y seguridad en Ciencias

En PISA 2006, se analiza el nivel de autoeficacia en el alumnado vasco; el valor medio en este factor es de -.22, es decir, el alumnado que tiene mayor confianza, con una variación de un punto en la varianza, al realizar tareas relacionadas con las Ciencias obtiene 76 puntos más en los resultados de esta área, siendo este resultado estadísticamente significativo. Ellos las superan también en autoeficacia, es decir, confían más en su capacidad para resolver tareas científicas concretas, y lo hacen en todos los países a excepción de Austria, Polonia y Portugal. Sin embargo, las chicas, de media, se muestran superiores a la hora de identificar cuestiones científicas, mientras que los chicos son mejores en la explicación científica de los fenómenos. No se encontraron diferencias de

género sólidas en la mayoría de los otros aspectos relacionados con las actitudes sobre los que las alumnas y alumnos dieron información acerca de sí mismas/os.

2) Autoconcepto en Ciencias

La autoeficacia se define como la opinión sobre las propias aptitudes que cada persona tiene para establecer y realizar el desempeño requerido hasta lograr determinados efectos (Bandura, 1977). No basta con tener las habilidades necesarias para realizar una tarea, además es necesario sentirse apto o apta para enfrentarse a una situación que puede representar una alta demanda de concentración, tiempo limitado y almacenamiento de numerosos datos, lo que puede generar ansiedad en el momento de ejecución de la tarea.

Las alumnas tienden a subestimar sus capacidades para la ciencia y para el razonamiento científico (Wilkins, 2004). En un análisis comparativo efectuado en varios países se deduce que existen diferencias de autoconcepto entre mujeres y hombres a favor de los hombres, y que hay una correspondencia negativa entre la edad y su autoconcepto científico. También se han observado diferencias en la autopercepción de habilidades académicas. Las chicas suelen estimar más bajas sus habilidades, rendimiento y expectativas de éxito futuro, incluso cuando rinden igual o mejor que los chicos ante tareas consideradas típicamente masculinas. No sucede así en las tareas consideradas femeninas, lo que demuestra la influencia que ejercen los estereotipos sobre el autoconcepto (Eccles, Freedman-Doan, Frome, Jacobs, y Yoon, 2000; Pastor, Balaguer y García-Merita, 2003). Otro factor diferencial se encuentra en la atribución de éxitos y fracasos en materias de ciencias y matemáticas; ellos suelen atribuir sus fracasos a factores externos, tales como la falta de esfuerzo, y sus éxitos a méritos propios, internos, mientras que con las chicas sucede lo contrario, pues atribuyen sus fracasos a su falta de capacidad y los éxitos a su esfuerzo.

En un estudio de Alvarez-Lires (2011) realizado en el curso 2009-2010 con alumnado de Galicia de segundo de bachillerato científico-tecnológico, se pusieron en evidencia los problemas presentes en la enseñanza de asignaturas de ciencias, de tecnología y en la orientación escolar, así como la persistencia social de estereotipos sexistas. Respecto a las aptitudes percibidas para cursar física, matemáticas o dibujo técnico, resulta preocupante el caso de la física, para la cual sólo se considera con aptitudes el 36.5% de las alumnas frente al 63.7% de los alumnos. Si se observa la relación entre dicha capacidad y la elección de una ingeniería, se aprecia que el porcentaje de alumnas disminuye hasta el 22% frente al 47.7% de alumnos. A la vista de estos datos cabría

preguntarse qué está ocurriendo con la enseñanza de la física, las matemáticas o el dibujo técnico.

La evaluación PISA 2006 indica que el autoconcepto del alumnado vasco tiene un valor de $-.09$ en comparación al de la OCDE. La variación de un punto en la varianza hace variar los resultados en 73 puntos en el aprendizaje de Ciencias. Esta diferencia además es estadísticamente significativa.

A pesar a que el rendimiento de las chicas es igual al de los chicos en la mayoría de los países, su autoconcepto en ciencias tiende a ser inferior al de los chicos; por ejemplo, en todos los países europeos, la confianza en sus capacidades científicas es, de media, inferior a la de los chicos.

Las dos variables de autopercepción (autoeficacia y autoconcepto), son variables que de forma aislada explican cada una en torno al 12% de la varianza. Sin embargo, no siempre es fácil diferenciar si el gusto por las ciencias es lo que influye en los resultados porque conlleva en general estudiar más o si los buenos resultados influyen en un mayor gusto por las Ciencias. Seguramente pueden darse ambos a la vez.

c) Factores emocionales (grado de ansiedad en Ciencias)

En un estudio llevado a cabo con alumnado de nivel medio superior pudo constatar que las variables *Autoeficacia general* y *Ansiedad ante las ciencias* correlacionan de manera negativa, por lo que al aumentar la primera disminuyen los niveles de ansiedad ante las ciencias y viceversa (Quintero, Péres y Correa, 2009). No obstante, no se han encontrado investigaciones que relacionen la ansiedad con el aprendizaje de las ciencias.

2.5 Expectativas del profesorado e Interacciones profesorado- alumnado

La observación de las interacciones profesorado-alumnado muestra que el profesorado de disciplinas científicas interactúa más con los alumnos que con las alumnas y refuerza en mayor medida a los chicos, con una diferencia en el trato que, además, crece a medida que aumenta el nivel educativo. Respecto al número de enunciados, la mayor parte de las preguntas que realiza el profesorado en su aula suelen estar dirigidas a alumnos y no a alumnas. En relación con la participación de alumnos y alumnas durante la clase y al incentivo por parte del profesorado para promover dicha participación, son en

mayor medida las profesoras quienes ceden la palabra, invitan a participar a las chicas y escuchan con atención a sus alumnas, a la vez que guían su aprendizaje matemático a través de preguntas específicas.

Estas diferencias en el comportamiento tienen por fundamento las diversas expectativas existentes acerca de las capacidades y posibilidades de alumnos y alumnas. Consciente o inconscientemente se tiende a valorar más la importancia de la formación científico-tecnológica para los chicos que para las chicas, y a explicar el éxito por la inteligencia en el caso de ellos y por el esfuerzo en el de ellas. En gran medida estas expectativas son también un reflejo de las diferentes actitudes de las chicas y de los chicos, que revelan su propia interiorización de los estereotipos de género (Loudet-Verdier y Mosconi, 1996). Las investigaciones sobre las actitudes y comportamiento del profesorado presentan, en general, una sobrevaloración de lo masculino en detrimento de lo femenino. La esfera pública del aula suele estar dominada por los chicos, y las chicas tienden a reducir al mínimo su participación, mostrándose incómodas cuando lo hacen frente al conjunto de la clase. De este modo, tienden a posicionarse como meras espectadoras del proceso de construcción del conocimiento, proceso cuyos protagonistas son sus compañeros y su docente. En las clases mixtas, el profesorado de ambos sexos dedica más tiempo, atención y consideración a los alumnos que a las alumnas. Estas diferentes expectativas son habitualmente compartidas por el entorno del alumnado, tanto familiar —padres y madres— como académico —profesorado— y por sus amistades. La suma de estos factores contribuye a la formación de una identidad femenina desvalorizada, en la que se interioriza la inferioridad respecto del género masculino.

Sadker, y Zittleman (2009) afirman que, aunque ni los chicos ni las chicas suelen participar demasiado en las prácticas discursivas de las clases de ciencias, las chicas son más calladas, menos activas en los trabajos de grupo, y participan menos en las discusiones del aula. Kelly (2007) sostiene que, a pesar de la escasez de estudios orientados al análisis del discurso con el objeto de investigar el modo en que los patrones de interacción en las clases de ciencias pueden discriminar a las alumnas, en los estudios revisados se han obtenido evidencias consistentes de que en las clases mixtas, por un lado, las alumnas interactúan menos con sus docentes durante las discusiones de aula y, por otro, los chicos se ven privilegiados en cantidad y calidad de experiencias discursivas. Se ha constatado que ellos tienen mayor oportunidad de practicar formas narrativas y paradigmáticas, porque en las clases de ciencias se les concede más veces el turno de

palabra y también porque el profesorado pregunta más a los chicos que a las chicas, lo que tiene por efecto una participación no equitativa. De ello resulta que se silencia más a las chicas y que los chicos gozan de mayores oportunidades para implicarse en prácticas discursivas importantes.

Por su parte Gray y Leith (2004) señalaron que en las clases de ciencias las chicas y los chicos reciben diferentes estímulos, se les ofrecen distintas oportunidades de aprendizaje y son objeto de distintos mensajes acerca de sus habilidades y de su potencial para participar en diferentes ámbitos de la vida social y profesional. Conviene resaltar que, según los datos de una investigación-acción longitudinal de 2005 a 2009, realizada en Suecia por Andersson (2012), estas diferencias de trato comienzan ya en la escuela infantil, donde, al parecer, para las niñas comienzan a actuar los factores de disuasión, pero sin que consigan aún menoscabar su interés —hecho que sí es apreciable ya en la educación secundaria—, ya que durante la educación primaria el interés hacia las ciencias de unos y otras suele ser similar, si bien las niñas se interesan más por asuntos de biología y por aspectos sociales de la ciencia y a los niños se les ve más interesados en cuestiones de física (Reid y Skryabina, 2003). Es durante la educación secundaria cuando decae el interés de ellas por la física y la tecnología, de modo que para el final de esta etapa una mayoría de las alumnas habrá *aprendido* que la tecnociencia no es para chicas —la denominada *incapacidad aprendida*—. Como indicaba Spear (1987), las expectativas del profesorado actúan como profecías que influyen en el resultado previsto. De esta manera, las mujeres, por la influencia de la sociedad y de la cultura escolar, no desarrollan la confianza en sus propias capacidades de liderazgo, autoestima, y en parte como consecuencia de ello, tienen experiencias menos positivas que los hombres en estos campos de acción. Por último, en relación a cómo influye el sexo del alumnado en la percepción del profesorado respecto al desempeño en matemáticas, Helwig, Anderson y Tindal (2001) encontraron que aparentemente el sexo del alumnado no influía en sus calificaciones.

2.6 Síntesis

A lo largo de este capítulo ha tratado de abordar la problemática de la construcción del conocimiento científico y de la resolución de problemas. La construcción de sistemas de representación externos supone un avance tanto para la construcción del conocimiento

matemático como para el científico, ya que a través de ellas las ideas puedan ser explicitadas y revisadas. En este sentido, la resolución de problemas es compleja ya que requiere la activación de diversos modelos mentales (MS y MP) y además, de la traducción de toda la información hacia los distintos sistemas de representación externos. En la medida en que este proceso sea conocido para el alumnado se habla de transferencia horizontal o cercana, frente a aquella en la cual el alumnado no tiene ningún conocimiento preconcebido, que es definido como transferencia lejana o vertical. Por otra parte, la dificultad de la tarea y por lo tanto de la transferencia no sólo parece estar supeditada al aprendizaje previo, factores tanto motivacionales, de autoconcepto como emocionales, destacan por su influencia en resultados de evaluaciones tipo PISA. Además investigaciones de diversa índole indican que las interacciones del profesorado-alumnado también influyen en los resultados.

3 CAPÍTULO. EL CONCEPTO DE TRANSFERENCIA EN LA PRESENTE INVESTIGACIÓN

En esta investigación se entiende por transferencia el proceso de construcción complejo, dinámico que lleva a la activación de recursos disponibles por parte de cada estudiante y a la aplicación del conocimiento en respuesta al contexto, bien a nivel de interpretación del mismo, bien a la hora de explicitar a través del lenguaje matemático lo sucedido en la situación o bien a realizar predicciones sobre la situación según su punto de vista. Así la transferencia se define como la generalización del aprendizaje, que también se puede entender como la influencia de las actividades previas de la persona que aprende en su actividad en situaciones nuevas (Lobato, 2008). En este sentido una persona siempre se enfrenta a nuevas situaciones/contextos, y en respuesta, activa y aplica un subconjunto de sus conocimientos existentes (Dufresne et al., 2005). Esta definición no se refiere a la conveniencia o exactitud de lo que se transfiere, como ocurre a menudo con las definiciones clásicas. No obstante, en esta Tesis tampoco se deja de lado la perspectiva clásica, por considerarse importante tanto por los colectivos responsables de política educativa como por el profesorado. Aún y todo, el foco de la investigación se dedica a la naturaleza y a las características del complejo proceso dinámico que conduce a la activación competitiva y a la aplicación de los conocimientos (diSessa y Sherin 1998 y diSessa y Wagner, 2005) además de a su relación con el proceso de aprendizaje.

La transferencia contiene dos subprocesos para el filtrado de conocimientos (Dufresne et al., 2005) las lecturas y las expectativas. Éstas interactúan para producir una representación mental de contexto coherente con los conocimientos previos. La transferencia es impulsada por el grado de compatibilidad entre las lecturas y las expectativas para dar sentido del contexto. Un nivel bajo de compatibilidad entre las lecturas y las expectativas aunque sirve para impulsar el proceso de transferencia se asocia con una representación inestable de contexto. Un nivel alto de compatibilidad lleva a un estado cuasiestable donde la representación de contexto es momentáneamente estable. Es decir, un estado de equilibrio que puede evolucionar con el tiempo, si se activan nuevas expectativas o lecturas. Cuando se alcanza el nivel cuasi, se dice que el texto tiene *sentido* para la persona usuaria de los conocimientos y que el conocimiento activado y aplicado es viable. Dicha representación mental no supone una simple suma de las expectativas y de las lecturas, ambas interactúan fuertemente retroalimentándose. De esta manera, las lecturas y las expectativas que componen la representación actual de contexto pueden

influir en gran medida en la activación de lecturas y expectativas futuras, pudiendo algunas de ellas ser modificadas o desactivadas. De resultas de ello, la formación de una representación de contexto es dinámica y fluida porque es un estado cognitivo emergente que surge en respuesta al contexto y que es sensible a los detalles contextuales. Por ello, la relación exacta entre el contexto (estímulos externos) y la representación de contexto es sumamente compleja. En general, la representación de contexto puede variar considerablemente de una vez a la siguiente y el conocimiento de un a persona usuaria a otra.

La transferencia es inherentemente no lineal y caótica. La consecuencia fenomenológica de la no-linealidad es que, en principio, una superposición (simple combinación) de características contextuales no da lugar a una superposición de los resultados de transferencia; además, bajo algunas condiciones -pequeños cambios en el contexto- pueden conducir a resultados de transferencia totalmente diferentes. No se entenderá por caótico que la activación y la aplicación de piezas de conocimiento en respuesta al contexto sea aleatoria, sino más bien que la extrema sensibilidad de transferencia se verá influenciada por la historia personal y el contexto. Esto hace difícil predecir de antemano qué conocimiento será activado y aplicado en un episodio de transferencia determinado.

El proceso de transferencia, en tanto que es impulsado por el sentido de hacer llegar a un estado de equilibrio, es para todos los efectos prácticos incompleto. Una vez que existe compatibilidad suficiente, se establece un estado de cuasiequilibrio, que no proporciona nuevas lecturas o expectativas. Al final de un episodio significativo, la persona usuaria del conocimiento tiene muchas más piezas de conocimiento a su disposición que podrían aplicarse al contexto, pero no existe ningún desequilibrio para impulsar la transferencia dinámica.

La transferencia dinámica está fuertemente influenciada por el lenguaje, ya que las palabras y las frases tienen múltiples significados en diferentes contextos. Algunos términos científicos como por ejemplo *fuerza* no son exclusivos (si bien tienen un significado unívoco a nivel científico, no lo tienen en la vida cotidiana) y dependen del contexto. Por ejemplo, el alumnado puede indicar con este mismo término a la potencia, a la velocidad, al *ímpetu* que posee el objeto,... y no ser plenamente consciente de que utiliza la misma palabra con diferente significado en diferentes contextos, que a su vez pueden tener un impacto significativo sobre la fenomenología de la transferencia. Cuando

la persona usuaria del conocimiento cambia los significados de los términos, pero deja invariante las conexiones entre ellos, pueden producirse inconsistencias internas en el proceso de transferencia.

El concepto de función, como clase de coordinación está formado por unidades más pequeñas de conocimiento y la coordinación de las piezas de conocimiento será una cuestión fundamental de la transferencia.

Además el papel central de los sistemas de representación en el progreso de la ciencia moderna ha llevado a defender la idea de que una de las características de los conceptos científicos es que siempre adoptan un registro simbólico y necesariamente se comunican y objetivan a través de diferentes sistemas de representación. Esto sugiere que el dominio de las representaciones simbólicas es importante para un aprendizaje futuro en situaciones científicas. Janvier (1987b) sugiere que una definición con una representación única no puede abarcar todo el significado de una idea, que el alumnado debe ser capaz de traducir mediante las diferentes representaciones para obtener un conocimiento más rico.

Así, en la presente investigación se da por válida la propuesta de Martí y García-Mila (2007) por la que una de las maneras de favorecer el cambio conceptual en ciencias es trabajando sobre estos registros simbólicos, lo cual constituye un mecanismo de explicitación arduo y complejo. Por lo que se considera oportuna la conversión de un registro a otro para la comprensión de fenómenos representados tanto a nivel escrito como a nivel de modelo mental.

En esta línea, en la presente tesis se analiza cómo el concepto función tanto desde la abstracción del modelo, como a través de sus distintas representaciones simbólicas ayudan al alumnado a interpretar situaciones de contextos científicos, a explicitar el pensamiento existente sobre la situación o a hallar datos relevantes a la hora de poder argumentar la situación planteada desde un punto de vista más científico. En este sentido, el concepto función y sus representaciones son entendidos en gran medida como lenguaje matemático. Este nuevo enfoque no se ha abordado en los exámenes y, por lo tanto, da pie a investigar las diferencias entre ambos tipos de transferencia.

Desde este punto de vista se considera que la transferencia ha de ser un proceso constructivo y dinámico. La activación y la aplicación de piezas de conocimiento es altamente dependiente de los detalles del contexto y del estado inicial del conocimiento (conocimientos previos) de cada estudiante (Bransford y Schwartz, 1999; Schwartz et al. 2005). Es en este sentido, en la transferencia de clase C es posible observar cómo el

alumnado reutiliza siempre sus conocimientos previos, sea de forma productiva o improductiva y es aquí, donde entran en juego las clases de coordinación. Por lo tanto, se defiende que la transferencia de clase C es un fenómeno muy común (diSessa y Wagner, 2005) y adecuado para el logro de la transferencia tanto A como B.

Cada conjunto de decisiones es único ya que, se reúnen como piezas de conocimiento, es decir, se crean nuevos conocimientos a través de procesos mentales tales como la asociación, la clasificación, la combinación y el refinamiento. Por ello, un marco para la transferencia se centraría en el proceso conducente a la activación y aplicación de conocimientos y a la representación resultante del contexto. Por el contrario, un marco de aprendizaje se centrará en los procesos de producción de cambios en los estados mentales, en la naturaleza de los cambios que se producen, y en cómo esos cambios afectan la futura activación y aplicación del conocimiento. Presumiblemente, este cambio de estado también daría lugar a una representación diferente y a la comprensión del contexto. La falta de oportunidades para el ejercicio de este proceso asegurará una baja probabilidad de activación futura y una capacidad inferior para coordinar piezas de conocimiento. En la práctica, la línea entre aprendizaje y transferencia puede resultar difusa. Dado que la activación y la aplicación de conocimientos son muy sensibles al contexto y se relacionan fuertemente con la representación sobre el contexto de la persona usuaria del conocimiento, puede ser difícil medir la magnitud de los cambios en el estado que derivan de las actividades del aprendizaje (Bransford y Schwartz, 1999; Schwartz et al. 2005).

3.1 Síntesis

La transferencia en esta tesis es considerada como un proceso complejo, dinámico donde los distintos conocimientos deben coordinarse –coordinación de clases- para que se produzca una coherencia entre la interpretación de la nueva situación y los procedimientos previos –transferencia de clase C-. Esta activación no es aleatoria y ni caótica.

4 CAPÍTULO. TRANSFERENCIA DESDE LAS DIDÁCTICAS

1. Alfabetización científica-matemática y competencias científica y matemática
2. Los nuevos currículos orientados hacia el desarrollo de competencias
3. Relación entre transferencia y competencia
4. Síntesis

Uno de los grandes objetivos de la Educación es preparar personas tanto científicamente como matemáticas para que puedan desempeñar trabajos de modo adecuado en un futuro. Por ello, han sido muchas las propuestas que se han realizado a lo largo de la historia para llegar a este cometido. A finales del siglo pasado se consensuó en qué debe consistir la alfabetización científico-matemática y el papel que desempeña la competencia en ello. La competencia lleva inherente la transferencia, ya que sin ésta no se produce la aplicación de lo aprendido.

4.1 Alfabetización científica-matemática y competencias científica y matemática

La finalidad del proceso educativo no es inmediata, sino que tiene el propósito de que aquello que ahora se enseña y se aprende en un contexto escolar, pueda ser utilizado en su día en la realidad, en el momento en que estos conocimientos, habilidades o actitudes aprendidas se hagan necesarias; consecuentemente, raramente o nunca se emplearán tal como fueron enseñadas en el aula.

Una de las finalidades del aprendizaje de conocimientos científicos es proporcionar estrategias y recursos que posibiliten su utilización para analizar críticamente hechos que suceden en nuestro entorno y actuar de modo individual y colectivo científicamente fundamentado. El desarrollo del pensamiento matemático contribuye a la competencia en cultura científica, tecnológica y de la salud porque hace posible una mejor comprensión y una descripción más ajustada del entorno. La destreza en la utilización de representaciones gráficas para interpretar la información aporta una herramienta muy valiosa para conocer y analizar mejor la realidad, y, por último, la potencialidad de modelizar matemáticamente, a través del álgebra, fenómenos físicos, químicos, biológicos y geológicos permite analizar, interpretar y predecir su evolución o desarrollo.

Esta simbiosis entre los conocimientos matemáticos y los conocimientos científicos es necesaria si se quieren resolver problemas actuales y futuros. Actualmente esta interacción entre ambas disciplinas se encuentra englobada bajo el término competencia y en cómo cada una de ellas ayuda a la adquisición de la otra.

Hoy día, fruto de más de treinta años de investigaciones, se sabe que el cómo aprendemos está estrechamente relacionado con el cómo utilizamos lo aprendido, es decir, con cómo lo transferimos. La memorización es insuficiente para la comprensión, por

consiguiente, la transferencia del conocimiento científico-matemático adquirido a otras situaciones distintas sólo es posible si, al mismo tiempo, se han llevado a cabo las estrategias de aprendizaje necesarias para que dicha transferencia se produzca.

El concepto de *competencia* en el ámbito educativo, tal como se conceptualiza actualmente, surge a finales del siglo XX, cuando en los países industrializados la educación llega a ser obligatoria para todos los chicos y chicas como mínimo hasta los 16 años. Sin embargo, como existe un alto fracaso escolar instituciones de índole muy diversa valoran que la escuela no prepara para las necesidades de la sociedad actual.

Los antecedentes sobre el término competencia se encuentran en el documento elaborado en el año 1994 a petición de la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO), por una comisión presidida por J. Delors (1996), en el cual se habla de los *cuatro pilares de la educación* (aprender a conocer, aprender a hacer, aprender a convivir, y aprender a ser). El aprender a hacer alcanza gran protagonismo en estos planteamientos como consecuencia de la disociación observada entre la teoría y la práctica, que se ve corroborada cuando se analizan las pruebas y criterios de evaluación de la mayoría de los exámenes y oposiciones. El aprendizaje va dirigido a la memorización a corto plazo y no a que pueda ser aplicado a distintas situaciones o contextos.

Como se ha descrito en apartados anteriores de esta investigación, existen muchos más marcos teóricos que se relacionan con el término competencia (aunque no se refieran explícitamente al concepto de competencia). Por ejemplo, la visión del conocimiento como resultado de una actividad que tiene lugar en un contexto cultural, en el marco en el cual se desarrolla y se utiliza *teoría del conocimiento situado* (Brown et al., 1989), o la *teoría del conocimiento distribuido* (Giere y Moffat, 2003), según la cual el saber no es individual sino que está distribuido en personas, representaciones, objetos, instrumentos, lenguajes..., que conforman una determinada cultura.

Aunque no hay una acepción universal del concepto *competencia clave o básica*, existe una coincidencia generalizada en considerar como competencias clave, esenciales, fundamentales o básicas, aquellas que son necesarias y beneficiosas para cualquier persona y para la sociedad en su conjunto, así como un cierto acuerdo común en entenderlas como *el conjunto de conocimientos, destrezas y actitudes esenciales para que todas las personas puedan tener una vida plena como miembros activos de la sociedad*.

Ser competente en un ámbito o actividad significa, desde este enfoque, ser capaz de activar y utilizar conjuntamente conocimientos relevantes y de todo tipo para afrontar determinadas situaciones y problemas relacionados con dicho ámbito. El saber hacer supone la movilización de capacidades cognitivas de orden superior, tales como analizar, interpretar, aplicar, predecir, etc. Pero esas habilidades no pueden desvincularse de los contenidos y de los aprendizajes específicos en los que se apoyan, ya que sin dicho conocimiento conceptual, la aplicación del nuevo enfoque en un contexto escolar resulta, desde el punto de vista de los procesos mentales, simplemente inviable. Y tampoco de la capacidad de aplicarlas con las demás personas, en el marco de grupos sociales diversos, y a partir de un pensamiento crítico.

La competencia comporta siempre la realización de una acción eficaz, integrada, que responda a una demanda compleja y diversa (imprevisible), y que también trata de combinar o integrar saberes muy diferentes –incluido el conocimiento disciplinar– en la actuación y ser capaz de movilizarlos adecuadamente, no de conocerlos sólo de manera separada. En este sentido, supone una evolución respecto al planteamiento habitual de los anteriores currículos, que tendían a separar los saberes conceptuales, los procedimentales y los actitudinales.

Por ello, las propuestas actuales en educación plantean una educación basada en competencias cuyas características principales son la complejidad, la funcionalidad y transferibilidad, el carácter autónomo y la evaluabilidad. El uso del término *competencia* es una consecuencia de la necesidad a nivel social de superar una enseñanza que, en la mayoría de los casos, se ha reducido al aprendizaje memorístico de conocimientos, que provoca que éstos no puedan ser aplicados, transferidos en la vida real.

Diversos estudios recogidos por Solaz-Portalés y Sanjosé (2012) hablan de distintos aspectos en el estudio de la transferencia en ciencias. Entre las cuestiones destacables al respecto en dichos estudios se encuentran: (1) la escasa transferencia a otros ámbitos de conocimientos y habilidades científicas que supuestamente se han aprendido en el aula (Keiler, 2007), (2) la necesidad de promover tanto una transferencia horizontal como la vertical para el aprendizaje de la Biología (Schönborn y Bögeholz, 2009), (3) la necesidad de enseñar de forma explícita a formular hipótesis fundamentadas, tomando como bases todas las posibles variables intervinientes en la situación problemática (Keselman, 2003), (4) la necesidad de diseñar currículos basados en el contexto de aprendizaje, *context-based courses*, ya que las estructuras mentales que se elaboran en un determinado contexto de

aprendizaje son más útiles para comprender y abordar nuevos contextos (Gilbert, Bulte y Pilot, 2011), (5) el hecho de que las simulaciones revisadas estimulan la transferencia (Day y Goldtsone, 2012), (6) el hecho de que las ayudas, consejos, textos descriptivos y retroalimentación en problemas de Física ayudan en la transferencia (Warnakulasooriya y Pritchard, 2005); así por ejemplo, la aportación de imágenes explícitas de la solución de un problema fuente mejora la transferencia de la solución de un problema diana, (7) la presentación de un mismo formato en el problema fuente y diana ayuda en la transferencia análoga en problemas de Química con base algebraica, la portación de ecuaciones, símbolos, categorización y consejos bien en el problema fuente o en el diana facilita el *mapping* o establecimiento de correspondencias y por lo tanto, la transferencia analógica (Ngu y Yeung, 2012) y los refuerzos tanto externos como internos para recuperar y generar información abstracta a partir de análogos, facilitan el proceso de transferencia, (8) el hecho de que el trabajo colaborativo y en grupo mejora los resultados en la resolución de problemas y (9) el hecho de que las dificultades en problemas de ciencias con base matemática pueden venir dadas en el proceso de traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico; esto es, en la construcción de un modelo de situación o del modelo de problema (Sanjosé, Valenzuela, Fortes del Valle, y Solaz-Portalés, 2007) o en déficits del conocimiento matemático y no en los procesos de transferencia del dominio matemático al dominio químico (Potgieter , Harding yEngelbrecht, 2008)

Desde ámbitos internacionales, como el de los Informes PISA, se insiste en el interés por las competencias definiendo la alfabetización en distintas competencias. He aquí las dos incluidas en esta investigación:

PISA 2003 (ISEI-IVEI, 2004, Pág. 26)define lo que se considera la alfabetización matemática y científica como:

la capacidad individual para identificar y comprender la función que desempeñan las matemáticas en el mundo actual, emitir juicios fundamentados y ser capaz de utilizarlas en las necesidades de la vida personal, laboral y social, actual y futura, como ciudadano constructivo, comprometido y capaz de razonar

la alfabetización científica (como “la capacidad para emplear el conocimiento científico, identificar preguntas y obtener conclusiones basadas en pruebas, con el fin de comprender y ayudar a tomar decisiones sobre el mundo natural y los cambios que la actividad humana produce en él.

Las didácticas no son ajenas a las necesidades sociales y educativas. Las didácticas de las ciencias y de las matemáticas -al igual que otras- tienen como objeto de estudio la enseñanza-aprendizaje de los contenidos específicos y el realizar propuestas de mejora respecto al aprendizaje de los mismos. En estos momentos nos encontramos en una revolución cultural ya que los conocimientos se ponen a expensas del hacer; es decir tienen sentido porque contribuyen a una finalidad que no es la de acumular leyes, datos, etc. Además dicha utilización ha de ser dinámica y flexible porque los cambios que se producen son variados y difíciles de predecir. El término competencia y el de transferencia van unidos ya que sin el segundo es imposible definir el primero y, de ahí, la necesidad de que las distintas didácticas investiguen en profundidad el tan complejo proceso de la transferencia. Sin embargo, existe una gran desmotivación en los centros educativos, que demanda una necesidad de plantear nuevas miradas y pistas de mejora.

Es por ello, que desde las didácticas tanto de las matemáticas como de las ciencias tiene especial relevancia el problema de la transferencia porque ya no es suficiente con saber una ley física o un concepto matemático, lo que interesa es la capacidad de utilizar este conocimiento, transferirlo, a la resolución de situaciones o problemas reales.

4.2 Los nuevos currículos orientados hacia el desarrollo de competencias

Los sistemas educativos de la mayoría de los países del mundo, sin distinción de ideologías, se han movilizadado para transformar sus currículos oficiales en currículos basados en competencias, a sugerencia de instancias internacionales como la Organización de Naciones Unidas (ONU), la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO) y la Organización para el Comercio y el Desarrollo Económico (OCDE).

A partir de aquí junto a la Estrategia de Lisboa y a través del Marco de Referencia Europeo común se definen las ocho competencias clave que se concretan a nivel de países y comunidades autónomas, como es el caso de la Comunidad Autónoma Vasca (CAV).

La Ley Orgánica 2/2006 de 3 de mayo, de Educación (LOE) se plantea bajo el paraguas competencial y posteriormente la CAV en el uso de sus competencias elabora los decretos correspondientes, integrando las enseñanzas mínimas establecidas con carácter básico para todo el Estado. A partir del curso 2007-08 comienza la implantación de la LOE.

En el documento marco para el Currículo Vasco (AA.VV., 2005) al precisar qué entiende por competencia establece la establecida por DeSeCo (2013):

la capacidad de responder a demandas complejas y llevar a cabo tareas diversas de forma adecuada. Supone una combinación de habilidades prácticas, conocimientos, motivación, valores éticos, actitudes, emociones y otros componentes sociales y de comportamiento que se movilizan conjuntamente para lograr una acción eficaz

Apoyados en dicha definición en el curriculum vasco (AA.VV., 2005) se indican dos matices específicos: uno semántico y otro estructural. El primero indica: la capacidad para enfrentarse con garantías de éxito a las tareas simples o complejas en un contexto determinado. Mientras que el segundo expone que “...una competencia se compone de una operación (una acción mental) sobre un objeto (que es lo que habitualmente llamamos conocimiento) para el logro de un fin determinado”

La CAV distingue ocho competencias en las etapas de educación obligatoria (Decreto 175/2007, modificado en 2010):

1. Competencia en comunicación lingüística.
2. Competencia matemática.
3. Competencia en cultura científica, tecnológica y de la salud.
4. Tratamiento de la información y competencia digital.
5. Competencia para aprender a aprender.
6. Competencia social y ciudadana.
7. Autonomía e iniciativa personal.
8. Competencia en cultura humanística y artística.

La competencia matemática,

consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y el mundo laboral”. La competencia científica, tecnológica y de la salud consiste en “la habilidad para interactuar con el mundo físico, tanto en sus aspectos naturales como en los generados por la acción humana, de tal modo que se facilita la comprensión de sucesos, la predicción de consecuencias y la actividad dirigida a la mejora de las

condiciones de vida propia, de las demás personas y del resto de los seres vivos (Decreto 175/2010, pág. 16).

Mientras que el desarrollo de la competencia matemática al final de la educación obligatoria, conlleva utilizar espontáneamente -en los ámbitos personal y social- los elementos y razonamientos matemáticos para interpretar y producir información, para resolver problemas provenientes de situaciones cotidianas y para tomar decisiones. El desarrollo de la competencia científica supone el desarrollo y aplicación del pensamiento científico-técnico para interpretar la información que se recibe y para predecir y tomar decisiones con iniciativa y autonomía personal; asimismo, implica la diferenciación y valoración del conocimiento científico al lado de otras formas de conocimiento, y la utilización de valores y criterios éticos asociados a la ciencia y al desarrollo tecnológico.

El desarrollo de las Ciencias de la Naturaleza está directamente ligado a la adquisición de la competencia matemática, ya que la utilización del lenguaje matemático aplicado -a los distintos fenómenos naturales, a la generación de hipótesis, a la descripción, explicación y a la predicción de resultados, al registro de la información, a la organización de los datos de forma significativa, a la interpretación de datos e ideas, al análisis de pautas y de relaciones, de causas y consecuencias, en la formalización de leyes naturales-, es un instrumento que ayuda a una mejor comprensión de la realidad.

Para poder desarrollar este objetivo en el área matemática, de acuerdo a estas características, se han seleccionado contenidos agrupados en los siguientes bloques: Números y Álgebra; Geometría y Medida; Funciones y Gráficas y Estadística y Probabilidad, además de los de carácter transversal: resolución de problemas, utilización de las tecnologías de la información y la comunicación, contenidos de tipo actitudinal.

El estudio de las relaciones entre variables y su representación mediante tablas, gráficas y modelos matemáticos es de gran utilidad para describir, interpretar, predecir y explicar fenómenos diversos de tipo económico, social o natural. En este bloque se desarrollan la identificación y el análisis de relaciones funcionales en sus distintas formas de representación: verbal, gráfica, numérica (tabular) y algebraica. Se busca la finalidad de desarrollar la capacidad para asimilar la información y traducirla de unas formas de representación a otras.

El estudio de las funciones comienza en 1^a ESO dentro del Bloque 4: Funciones y Gráficas donde se trabaja la correspondencia entre dos magnitudes, la identificación y verbalización de relaciones de dependencia en situaciones cotidianas, la organización de

datos en tablas de valores, la representación de gráficas sencillas a partir de un enunciado y de una tabla de valores, las relaciones de proporcionalidad directa, la identificación a partir del análisis de su tabla de valores, la interpretación puntual y global de informaciones presentadas en una tabla o representadas en una gráfica.

En 2º de la ESO la enseñanza de las funciones se encuentra también ubicada en el Bloque 4. Funciones y Gráficas y se busca profundizar en la relación entre magnitudes y la dependencia funcional, las distintas formas de expresión de una función (descripción verbal, tabular, gráfica y algebraica), las características generales de las gráficas (crecimiento y decrecimiento; continuidad y discontinuidad; puntos extremos y de corte con los ejes) y su interpretación en relación con el fenómeno estudiado y la representación gráfica de magnitudes directa e inversamente proporcionales así como la constante de proporcionalidad y la aplicación a situaciones reales.

En 3º de la ESO la enseñanza de las funciones sigue incluida en el Bloque 4: Funciones y Gráficas y tiene por objetivos de enseñanza la dependencia funcional entre magnitudes, el análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias, las formas de expresar una función (verbal, tabular, gráfica y algebraica) y sus las características generales: (dominio, continuidad, monotonía, extremos y puntos de corte con los ejes), su interpretación aplicada al fenómeno que representa la gráfica, las funciones lineales y su relación con la proporcionalidad además de la expresión algebraica y representación gráfica, la aplicación a situaciones provenientes de la vida cotidiana y diferentes ámbitos de conocimiento, la ecuación de la recta, las distintas formas de representación, la interpretación de la pendiente. Para su evaluación se establecen los siguientes criterios de evaluación relacionados con la utilización de relaciones funcionales lineales y cuadráticas para estudiar situaciones reales expresadas de distintas formas -verbal, tabular, gráfica o algebraica-, realizando la correspondiente transferencia entre ellas: 6.1. Identifica relaciones de dependencia lineal y cuadrática entre distintas magnitudes, 6.2. Construye la tabla de valores asociada a la función objeto de estudio, 6.3. Dibuja la gráfica correspondiente utilizando la escala adecuada, 6.4. Obtiene la expresión algebraica de la relación e interpreta correctamente la pendiente de la función lineal, 6.5. Extrae conclusiones a partir del modelo y las contextualiza al fenómeno estudiado.

En relación a los tres contextos planteados durante la entrevista utilizada como instrumento de medida en esta investigación: la pelota, la montaña rusa y la solubilidad,

cabe indicar los siguientes bloques:

En 1º de ESO en el Bloque 3 denominado: La materia y sus propiedades se trabajan: Las propiedades generales de la materia. Propiedades características. Magnitudes físicas y su medida. Sistema internacional de Unidades y Sistemas homogéneos y heterogéneos. Sustancias puras y disoluciones. Como criterio de evaluación a destacar se encuentran: 3. Describir las propiedades de materiales que nos rodean, tales como la masa, el volumen y los estados en los que se presentan realizando experiencias sencillas sobre las características y propiedades de la materia y el 3.6 Utiliza correctamente tablas y gráficos necesarios para representar los datos obtenidos en las experiencias.

En 2º de ESO en el Bloque 2 denominado: Los cambios en la materia se encuentran: Los cambios físicos y químicos. En los primeros se incluye el cambio de posición que engloba el movimiento, sistemas de referencia, la trayectoria, posición y espacio recorrido y la velocidad. Entre los criterios a destacar se encuentran: 1.2 Reconoce la necesidad de sistemas de referencia para el estudio del movimiento; 1.3 Interpreta movimientos de la vida real, diferenciando trayectoria y recorrido; 1.4 Realiza e interpreta gráficas posición-tiempo y velocidad-tiempo de movimientos cotidianos y sencillos y el 6.2 Representa en tablas y gráficos los datos obtenidos.

En 3º de la ESO en el Bloque 2 denominado: Unidad de estructura de la materia se incluye la revisión de conceptos en función de la hipótesis atómico-molecular, sustancias simples y compuestas, normas para la realización de pequeños diseños experimentales para la separación de sustancias de una mezcla, mezcla y sustancia compuesta: su diferencia. En el Bloque 3 denominado: Los cambios químicos se incluye la interpretación macroscópica de la reacción química como proceso de transformación de unas sustancias en otras. En cuanto a los criterios de evaluación se destacan: 2. Describir propiedades de la materia en sus distintos estados de agregación y utilizar el modelo cinético para interpretarlas, diferenciando la descripción macroscópica de la interpretación con modelos, 2.3. Realiza e interpreta gráficas en las que se relacionen la presión, el volumen y la temperatura de un gas, 3. Identificar si un material es una sustancia, simple o compuesta, o bien una mezcla utilizando distintos procedimientos basados en las propiedades características de las sustancias puras y expresar la composición de las mezclas, 3.1. Diferencia sustancia simple, sustancia compuesta y mezcla y 3.6. Resuelve ejercicios y problemas relacionados con la composición de las mezclas especialmente en el estudio de las disoluciones.

En 3º de ESO no se incluyen como bloques de contenido las situaciones de la

entrevista aunque entre los criterios de evaluación se destaca: 2.3 Realiza e interpreta gráficas en las que se relaciona la presión, el volumen y la temperatura.

4.3 Relación entre transferencia y competencia

Las características principales que conforman el concepto de competencia fundamental o básica son: (1) carácter holístico e integrado (los conocimientos, capacidades, actitudes valores y emociones no pueden entenderse de manera separada); (2) carácter contextual (se concretan y desarrollan vinculadas a los diferentes contextos de acción); (3) dimensión ética (se nutren de las actitudes, valores y compromisos que las personas van adoptando a lo largo de la vida); (4) carácter creativo de la transferencia (la transferencia debe entenderse como un proceso de adaptación creativa en cada contexto); (5) carácter reflexivo (suponen un proceso permanente de reflexión para armonizar las intenciones con las posibilidades de cada contexto) y (6) carácter evolutivo (se desarrollan, perfeccionan, amplían, o se deterioran y restringen a lo largo de la vida).

Por ello, es necesario que en la formación de las personas en competencias básicas se contemplen todas las dimensiones del desarrollo de la persona (perspectiva educativa integral) para saber transferir, actualizar, ampliar y renovar continuamente los conocimientos. Para ello, las personas han de ser capaces de movilizar recursos y tomar decisiones, escuchar otras opiniones, valorar diferentes opciones, ser conocedores de sí mismas y del mundo en el que viven, ser ciudadanas participativas y solidarias, futuras profesionales hábiles para enfrentarse con éxito a tareas diversas en contextos diversos y, también, personas capaces de expresar y regular sus propias emociones.

La capacidad para transferir competencias aprendidas a diferentes escenarios debe entenderse como un proceso de adaptación más o menos profundo o radical, es decir un proceso de nueva aplicación activa y reflexiva de conocimientos, habilidades y actitudes para comprender las peculiaridades de la nueva situación y la validez de las diferentes formas de intervención en ella. Por lo tanto, la competencia es de carácter integrador y transferible (puesto que son aplicables en múltiples situaciones y contextos tanto académicos como cotidianos). Así, la transferencia adaptativa o recreadora, supone reconocer los elementos singulares de cada situación y evaluar las posibilidades de adecuación de conocimientos, habilidades y actitudes a las nuevas exigencias en un mundo globalizado, *espíritu de transferencia* (Haskell, 2001); es decir, la plasticidad y flexibilidad

para adaptar sus competencias fundamentales a las peculiaridades cambiantes de cada escenario social y vital.

En el aprendizaje por competencias hay básicamente dos fases complementarias: la fase del aprendizaje puntual para la adquisición de los recursos (saberes, saber hacer, saber ser) y la fase de las actividades de integración y transferencia de todos los recursos. La movilización de todos los recursos de forma integrada, no yuxtapuesta, es una aportación del planteamiento de la educación por competencias en la Ley Orgánica de Educación (LOE) que enriquece el planteamiento de la tipología de contenidos de la Ley Orgánica del Sistema Educativo Educación (LOGSE) quizás demasiado estanco. En el planteamiento por competencias se resalta la importancia del uso de los conocimientos en situaciones y contextos concretos. El conocimiento, por ejemplo, de las reglas aritméticas, o del funcionamiento del cuerpo humano, es necesario, no tanto por sí mismo, sino como base para la aplicación de las reglas aritméticas en una situación de la vida real o para una mejora de la salud.

Dentro de un marco teórico sociocultural, cuyos orígenes cabe situarlos en Vigotsky y sus desarrollos posteriores en Bruner, los contextos y las relaciones son aspectos determinantes de los procesos de aprendizaje. El aprendizaje de los seres humanos se encuentra situado en escenarios físicos y culturales que se configuran como redes simbólicas que cada persona debe aprender para poder manejarse de modo eficaz primero y de manera autónoma después. Los significados se encuentran situados en los objetos y artefactos, así como en las personas, sus comportamientos y sus interacciones. Así pues, las competencias de interpretación e intervención de cada persona no residen sólo en sí misma, sino en la riqueza cultural distribuida en cada contexto físico y social.

Si las competencias se configuran en cada contexto, surgen de las peculiares interacciones que se producen en cada contexto y no pueden confundirse con las habilidades personales; la transferencia no sólo no puede ser automática, sino que será necesario reconocer que en cada actuación y en cada contexto las personas y los grupos humanos desarrollan aspectos singulares de sus competencias difícilmente repetibles en otros contextos o en situaciones diferentes del mismo contexto. En las competencias se distinguen por tanto, núcleos comunes relativamente estables y extensiones singulares que se especifican en cada contexto. Se puede ser y actuar de manera competente en un contexto y no en otro, o en una situación y no en otra. Lo verdaderamente importante desde el punto de vista educativo es que cada persona comprenda la pluralidad de aspectos o

dimensiones que entran en juego en cada situación que afronta, para comprenderlos in situ y para adaptar su intervención, recrearla y no simplemente reproducir de forma mecánica rutinas aprendidas en situaciones previas.

Siendo esto así, las situaciones juegan un papel esencial en el planteamiento por competencias; en primer lugar porque sin las situaciones concretas las competencias serían sólo virtuales y no podría darse el paso desde la potencia al acto, en segundo lugar porque las situaciones concretas son la ocasión para ejercer las competencias, de comprobar y evaluar las competencias del alumnado, en tercer lugar porque en el desempeño se desarrollan a su vez las competencias potenciales y en cuarto lugar porque el alumnado puede dar funcionalidad y sentido a lo que aprende a partir de las situaciones.

La elección de las situaciones y del contexto que sean representativos de la competencia que se quiere lograr es una decisión clave, estratégicamente la más importante, en el planteamiento de la educación por competencias ya que es el contexto el que se convierte en un verdadero instrumento para la acción. Para enfrentarse a una situación de forma eficaz será necesario realizar una serie de pasos complejos en muy poco tiempo: (1) realizar un análisis de la situación desde una visión que asuma la complejidad, para lo cual será necesario escoger los datos relevantes que ofrece la situación con el propósito de resolver las cuestiones planteadas, (2) revisar los esquemas de actuación (modelos mentales) de que se dispone, (3) seleccionar el esquema de actuación más apropiado, valorando para ello las variables reales y su incidencia en el esquema de actuación aprendido, (4) aplicar el esquema de actuación, pero siempre desde una posición estratégica, de forma flexible y adecuándolo a las características específicas de la situación real (debe realizarse una transferencia del contexto en el que fue aprendido al nuevo contexto, sabiendo que en ningún caso el nuevo es exactamente igual al aprendido). En la aplicación será necesaria la movilización de los distintos componentes de la competencia (actitudes, procedimientos, hechos, conceptos) pero siempre en relación con el dominio a ser aplicado además del dominio de aprendizaje.

Dada la complejidad de la adquisición de las competencias matemática y científica, no parece oportuno plantear lo que cada cual posee como el modo en que cada cual actúa en situaciones concretas activando para ello los recursos disponibles a su alcance y, en concreto, en esta investigación averiguar si es capaz de aprender en la nueva situación. En este sentido, la transferencia implicaría la adopción de nuevas perspectivas, desarrollando nuevas formas de ver las situaciones familiares (Chi y VanLehn, 2012; Lobato, 2012). Por

lo tanto, no se es enteramente competente o completamente incompetente. Se producen distintos grados que tienen que ver con las condiciones que intervienen en el propio proceso de aprendizaje (los esquemas de conocimiento y los conocimientos previos, la vinculación profunda entre los nuevos contenidos y los conocimientos previos, el nivel de desarrollo, la zona de desarrollo próximo, la disposición para el aprendizaje, la significatividad funcional de los nuevos contenidos, la actividad mental y el conflicto cognitivo, la actitud favorable, el sentido y la motivación, la autoestima, el autoconcepto, las expectativas, la reflexión sobre el nuevo aprendizaje, la metacognición).

El trabajo por competencias está basado en dos constataciones: (1) la transferencia y la movilización de las capacidades y conocimientos no son dadas *en marcha*, es necesario trabajarlas, involucrarse, para lo cual se necesita tiempo, gestiones didácticas y situaciones apropiadas; (2) en la escuela, no se trabajan suficientemente la transferencia y la movilización. El alumnado acumula conocimientos, pasa exámenes, pero no llega a movilizar estos acervos en las situaciones de la vida, en el trabajo y fuera (en la familia, la ciudad, el ocio, etc.). Por consiguiente, el enfoque por competencias es una manera de abordar una problemática antigua, la de la *transferencia de conocimientos* (Perrenoud, 1997).

4.4 Síntesis

En este capítulo se han expuesto los conceptos tanto de la alfabetización científica como de la matemática, ambos objetivos prioritarios para una Educación del siglo XXI. Además se han definido los conceptos de competencia matemática y científica según el curriculum vasco y en qué modo los primeros y los segundos se encuentran relacionados. Se destaca que para que una persona sea considerada como competente deberá ser capaz de transferir, proceso complejo que requiere un mecanismo de activación de recursos para poder aplicar lo aprendido e incluso aprender en la nueva situación. Para ello es necesario que desde la escuela se propicie este proceso de modo activo, ya que no hay competencia sin transferencia.

5 CAPÍTULO . EL CONCEPTO DE FUNCIÓN Y SU USO EN LAS CIENCIAS

1. Las representaciones en Matemáticas
2. Concepto de función
3. El proceso de formación del concepto función
4. La construcción del lenguaje algebraico
5. Interpretación de gráficas
6. Niveles a alcanzar por el alumnado de 15 años en el concepto de función
7. Tareas y acciones relacionadas con el concepto función
8. Dificultades en el aprendizaje del concepto función y propuestas de mejora
9. Síntesis

El desarrollo de la ciencia tradicionalmente se ha visto acompañado por creación de distintos conceptos matemáticos con sus diversos formatos representacionales o lenguajes. Entre los conceptos indispensables para el avance de la ciencia se encuentra el modelo teórico de *función*, que ha destacado en la historia de grandes campos de investigación y juega un papel fundamental en el desarrollo de muchos conceptos matemáticos, como es el caso del cálculo. Un ejemplo paradigmático del papel desempeñado por este modelo matemático y el lenguaje asociado a él para la creación de modelos científicos y lenguaje asociados a los mismos, es la estrecha relación entre la evolución de la física y de las matemáticas. Las matemáticas se han convertido, por tanto, en el lenguaje de la ciencia por excelencia o al menos en uno de los sistemas representacionales más importantes de las diversas ciencias.

5.1 Las representaciones en matemáticas

El concepto de función es transversal desde los cursos de enseñanza secundaria hasta los estudios universitarios, donde con frecuencia se utiliza para modelar procesos físicos, químicos, biológicos, sociales, de ingeniería, etc. Por otra parte, diversas investigaciones indican serias dificultades en el alumnado sobre la comprensión de este concepto.

La investigación en Didáctica de las Matemáticas hoy día tiene entre sus objetivos el estudio profundo de los procesos cognitivos implicados en la construcción de conocimiento; se observa una evolución desde el estudio de los errores y las dificultades del alumnado hacia las investigaciones más recientes que tratan de explicar el conocimiento del alumnado que subyace a dichas dificultades, porque el acto de *comprender* es inherente a cada estudiante (Azcárate, 1995; Azcárate y Camacho 2003). Tal como indica esta autora, los procesos cognitivos implicados en el pensamiento matemático serían: representar, visualizar, generalizar, clasificar, conjeturar, inducir, analizar, sintetizar, demostrar, abstraer, y formalizar (Azcárate y Camacho, 2003). Las publicaciones que se han referido a la importancia de las representaciones en la educación matemática han sido abundantes. La razón de ello estriba en que hablar de representación equivale a hablar de conocimiento, significado, comprensión y modelización, entre otros aspectos. Según Janvier (1987b), el aprendizaje matemático consiste en la capacidad de manejar un conjunto de representaciones. Estas representaciones deben ser consideradas

como una combinación de tres componentes: símbolos escritos, objetos reales e imágenes mentales, y el lenguaje adquiere un papel importante en dicha conjugación.

Los términos *representación* y *sistema de representación* para Goldin y Janvier (1998) tienen las siguientes interpretaciones:

1. Una externa, referida a la situación física o al conjunto estructurado de situaciones del entorno físico, que se puede describir matemáticamente o ser visto como la mezcla de las ideas matemáticas.
2. Una lingüística, o un sistema de la lengua, donde se plantea un problema o ideas matemáticas con énfasis en las características estructurales sintácticas y semánticas.
3. Una matemática formal, o un sistema de construcción matemática, que puede representar situaciones mediante símbolos o a través de un sistema de símbolos, que, por lo general, obedece a ciertos axiomas o conforme a definiciones precisas - incluyendo construcciones matemáticas que pueden representar aspectos de otras construcciones matemáticas-.
4. Una interna, ya sea una configuración cognitiva individual o un sistema complejo de este tipo de configuraciones, deducida a partir del comportamiento o la introspección, y que describe algunos aspectos de los procesos de pensamiento matemático y de la resolución de problemas.

En los diferentes programas de investigación en didáctica de las matemáticas se pueden encontrar dos usos del término *representación*. Por una parte, se usa este término para describir la cognición de las personas en cuyo caso suele ir acompañado del término *mental* o *interna*. Son las imágenes que se crean en la mente para representar procesos u objetos matemáticos. Este tipo de representaciones son más difíciles de describir ya que no se puede conocer directamente lo que hay en la mente de una persona.

Por otra parte, es normal utilizar el término *representación* para referirse a los sistemas de signos públicos que son las herramientas indispensables para la actividad matemática. Cuando el término *representación* se utiliza con este objetivo suele ir acompañado del término *externa* (gráficas, expresiones simbólicas, etc). La diferencia entre las respuestas del alumnado permite suponer la existencia de representaciones, consideradas normalmente como internas, que están relacionadas con las distintas respuestas de cada persona, ya que la investigación sugiere que si una persona es capaz de resolver problemas, tal vez se debe en gran parte a su habilidad de construir

representaciones mentales que le ayudan a entender la información y la relación con la situación problemática.

Podría decirse que a mayor riqueza de representaciones mentales de los conceptos matemáticos será mayor la capacidad para enfrentarse a situaciones matemáticas y, por consiguiente, también a las situaciones científicas que necesitan del marco referencial matemático para poderlas entenderlas globalmente. En este trabajo se acepta la propuesta de Azcárate (1995) en el sentido de que una representación mental es rica si refleja muchos aspectos relacionados con el concepto, y es pobre si tiene pocos elementos, ya que que existirá poca flexibilidad a la hora de afrontar la resolución de problemas científicos. Esta autora también señala que el éxito en Matemáticas se puede relacionar con la riqueza de las representaciones mentales de los conceptos matemáticos.

Así Azcárate (1995) en referencia a la utilización de representaciones mentales:

- Nivel 1: utiliza una sola representación,
- Nivel 2: utiliza más de una representación,
- Nivel 3: establece relaciones entre las representaciones paralelas,
- Nivel 4: pasa de una representación a otra con flexibilidad,
- Nivel 5: utiliza esa flexibilidad para la complementariedad de informaciones y conclusiones
- Nivel 6: el modelo gráfico de la función es visto como un objeto matemático con entidad independientemente de la situación que lo generó.

Sin embargo, para Font, Godino y D'Amore (2007), entre otras investigaciones que analizan las representaciones desde el punto de vista ontosemiótico, la diferenciación entre representaciones mentales o internas y representaciones externas no es una clasificación transparente, ya que obliga a preguntarse qué antecede a qué, si las representaciones internas a las externas o viceversa. La mayoría de las corrientes de la psicología cognitiva consideran más básicas las representaciones internas, puesto que valoran que para que las externas sean representaciones han de ser representadas mentalmente por quien las usa. Además, consideran que las representaciones mentales pueden existir sin un duplicado público ya que, por ejemplo, muchos de nuestros recuerdos no son comunicados jamás. Pero la mayoría de científicos y científicas sociales y muchas filósofas y filósofos no están de acuerdo con ello.

Para Duval (1999), las representaciones externas no sólo permiten la comunicación sino que son esenciales para la actividad cognoscitiva del pensamiento. El desarrollo de las

representaciones mentales o internas estaría mediado por la interiorización de dichas representaciones externas, ya que ello influye en diferentes funciones cognitivas como la objetivación, la comunicación propiamente dicha y el tratamiento de dichas representaciones. Para Duval, la diversificación de representaciones externas (semióticas) de un mismo objeto, aumenta la comprensión de las personas. Recíprocamente, las representaciones externas (enunciados, gráficos, etc.) son el medio mediante el cual las personas exteriorizan sus imágenes y representaciones mentales, haciéndolas accesibles a otras personas (Font, 2000). Así mismo, determinan la producción de conocimientos, pues permiten representaciones radicalmente diferentes de un mismo objeto en la medida que pueden hacer surgir sistemas semióticos totalmente diferentes. En las diversas disciplinas científicas la relación entre los distintos sistemas de representación es esencial. A menudo, el aprendizaje en un contexto se encuentra relacionado con la capacidad de llevar a cabo la traducción entre los distintos tipos de representaciones.

Las representaciones externas (tabla de datos, gráfico, expresión algebraica) ayudan a la creación del modelo de la situación o formato representacional. Así las representaciones externas, como creaciones culturales que son, tienen entre sus funciones las de cambiar la naturaleza y la forma en que funcionan nuestras representaciones sobre ciertos ámbitos o contenidos del mundo (Pozo, 2003; Pozo y Rodrigo, 2001).

Por lo tanto, los lenguajes matemáticos, como lenguajes de las ciencias, cumplen una función epistémica de carácter metarrepresentacional ya que permiten pensar sobre el propio conocimiento mediante códigos formalizados y, por lo tanto, abren la puerta a nuevas formas de conocimiento que de otra manera no serían posibles. Cuando se lleva a cabo una actividad matemática –con iniciación de lectura de enunciado–, el número de imágenes mentales es más y, por ello, para poder resolver el problema contextualizado es necesaria una coherencia total entre los diversos modelos mentales creados tanto desde el punto de vista matemático como del científico.

Por ello el aprendizaje de un concepto matemático pudiera estar relacionado con la representación externa y el lenguaje utilizados en la introducción de dicho concepto. Diversos estudios han puesto de relieve que, en determinados casos, la falta de significación de lenguaje utilizado es un obstáculo insalvable para la adquisición de un determinado concepto o para el desarrollo de cierto proceso.

Tall y Vinner (1981) dentro del Pensamiento Matemático Avanzado (PMA), tratan de establecer una relación entre dos aspectos interconectados del concepto, la definición

del concepto (*concept definition*) y la imagen del concepto (*concept image*). Cuando escuchamos o vemos el nombre de un objeto, algo es evocado en nuestra memoria; lo evocado no es la definición del concepto sino la imagen del concepto de ese objeto (Vinner, 1991). La *definición conceptual* es aquella secuencia de palabras que explica el concepto y cuya precisión varía desde las definiciones formales aceptadas por la comunidad científica, hasta las definiciones personales que se utilizan para construir o reconstruir la definición formal. La imagen del concepto (*concept image*), es algo no verbal asociado en nuestra mente con el nombre del concepto. Puede ser una representación visual del concepto, en el caso de que el concepto contenga representaciones inusuales; también puede ser una colección de impresiones o experiencias. Las representaciones, las figuras mentales, las impresiones y las experiencias asociadas con el nombre del concepto pueden ser traducidas verbalmente.- la traducción verbal no tiene por que ser la primera-. Así, cuando se escucha la palabra *función* puede evocarse una expresión $y = f(x)$ o un tipo de función $y = 3x$.

La propuesta de Vinner (1991) ha sido tomada en cuenta en las investigaciones realizadas en la Universidad Autónoma de Barcelona (UAB) dentro del proyecto *Procesos de pensamiento avanzado*, si bien Azcárate (1995) utiliza el término *esquema conceptual*, en lugar de imagen conceptual para referirse a la estructura cognitiva que una persona tiene de un concepto matemático, y se define como el conjunto de todas las imágenes mentales, donde también se incluye cualquier representación externa: forma simbólica, diagrama, gráfica, etc. asociada al concepto, conjuntamente con todas las propiedades y procedimientos que la caracterizan. Por lo tanto, se describe el esquema conceptual como algo no verbal que se asocia en nuestra mente con el nombre del concepto, es decir aquello que se recuerda cuando se escucha o se ve el nombre del concepto. Se construye a lo largo de los años a través de las experiencias de todo tipo y va cambiando según la persona madura y halla nuevos estímulos (Tall y Vinner (1981; Azcárate y Camacho, 2003).

Es importante recordar que las expresiones verbales no son siempre la primera evocación de un concepto, así la expresión $y = x$ puede visualizar una gráfica o puede visualizar un tipo de función determinado.

Sin embargo, las imágenes mentales sobre el concepto matemático, así como el proceso de su manipulación, están sustentadas en las experiencias previas (matemáticas o no) de cada estudiante. Así, muchas de dichas experiencias previas tienen relación o se

generan en el propio proceso de enseñanza en el cual se presenta en ocasiones, el conocimiento matemático sólo como un producto final y refinado. En gran medida, la clasificación del alumnado de diferentes tipos de relaciones depende tanto de la definición formal de la función que se le ha enseñado, como de las imágenes del concepto o mentales que ha desarrollado basándose en ejemplos que se le han presentado (Vinner, 1983). La investigación en didáctica de la matemática ha mostrado que algunas de las dificultades en el aprendizaje de conceptos -como el de las gráficas- son provocadas por un método de enseñanza basado en rutinas (Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990).

5.2 Concepto de función

A pesar de los numerosos estudios sobre la historia de las matemáticas, existen pocos trabajos dedicados específicamente al origen del concepto función y además las opiniones de sus autores y autoras son distintas e incluso contradictorias. Así, mientras algunas investigaciones admiten cierto carácter funcional en algunas operaciones matemáticas de la antigüedad (especialmente en trabajos de astronomía de la comunidad científica babilónica, de Ptolomeo o de la comunidad científica árabe), es en la época de Descartes, Fermat, Newton y Leybnitz (mediados del siglo XVII) cuando puede decirse con certeza que dicho concepto adquiere entidad aunque bastante restringida, ya que se reducía a funciones analíticas y poco más. Durante esta época se entiende la función como dependencia entre dos cantidades variables. Se consideraba práctica para calcular valores de fenómenos estudiados. Sin embargo, esta definición tenía algunas limitaciones, ya que expresiones distintas pueden arrojar los mismos valores y no todas las *dependencias* entre dos cantidades pueden expresarse de la misma manera. A partir del siguiente siglo, con Euler, las generalizaciones se suceden hasta llegar a las definiciones más recientes del concepto.

Así, en 1837 Dirichlet ya propuso la definición moderna de función numérica como cualquier correspondencia entre dos conjuntos numéricos, que asocia a cada número en el primer conjunto un único número en el segundo.

En el siglo XIX y XX se construye la definición actual de función como correspondencia entre dos conjuntos de objetos cualesquiera, no necesariamente numéricos.

Hoy día, desde el punto de vista cognitivo, la comprensión de un concepto matemático pasa por la integración de representaciones mentales, también de las representaciones externas asociadas al objeto (Font et al., 2007). Por ello, es impensable disociar el concepto de función de sus representaciones externas ya que éstas utilizan distintos lenguajes precisos, y son consideradas herramientas epistémicas fundamentales, porque además de permitir explicar algunos elementos del conocimiento, permiten convertir el conocimiento en objeto.

Sin embargo muchas de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas se encuentran relacionadas con la articulación entre las diferentes maneras de representar el concepto. En este sentido, Janvier (1987a) plantea la necesidad del estudio de la *traducción* (tarea de translación) entre los distintos tipos de representación (verbal, tabla, gráfica y expresión algebraica). A ello cabe añadir que Leinhardt et al. (1990) señalan dificultades en dos tipos de acciones relacionadas con dichas tareas: de interpretación, en las que el o la estudiante obtiene un significado (o información) o de construcción, en la cual debe generar una cosa nueva. Para dichos autores, las dificultades en estas dos acciones en cuanto a gráficos se refiere tienen incidencia en el proceso de aprendizaje del concepto de función, hasta el punto de que pueden convertirse en un obstáculo para el alumnado.

La primera representación externa es la más cercana al fenómeno estudiado, la menos simbólica y, la segunda, da una visión descriptiva y generalmente cualitativa de la relación funcional. La tabla de valores da una visión cuantitativa –fácilmente interpretable desde la óptica de la correspondencia- pero en la mayoría de los casos parcial e insuficiente puesto que de ella difícilmente se pueden extraer las características globales de la función (Azcárate y Deulofeu, 1996; Deulofeu, 1991).

Los dos lenguajes de mayor abstracción y por lo tanto más difíciles de interpretar - la gráfica y la fórmula o expresión algebraica-, permiten obtener una visión general y completa de la función estudiada (variaciones, periodos constantes, crecimiento, continuidad, concavidad, máximos y mínimos, periodicidad, etc.), tanto cualitativa como cuantitativa -aproximada en el caso de la gráfica-, proporcionando mayor y mejor información que los lenguajes anteriores, al mismo tiempo que posibilitan la caracterización de modelos teóricos.

La ecuación es un formato de representación externo más complejo que los anteriores ya que su determinación a través del lenguaje algebraico presupone, por un lado, el conocimiento del significado de los símbolos utilizados y, por otro, la interpretación a

través de ellos de subconceptos abstractos (pendiente, ordenada en el origen), que es posible intuir más fácilmente a través de la gráfica. Por otro lado, la ecuación permite determinar valores de ambas variables con precisión, siempre que se conozca el algoritmo de resolución de la ecuación correspondiente.

Por lo tanto, las distintas representaciones constituyen parte de la construcción del concepto de función. Desde la presente investigación se sugiere que dicho concepto es una *clase de coordinación* (diSessa y Sherin, 1998; diSessa, 2002) que engloba otra serie de conceptos que serán denominados como subconceptos en esta investigación. Los subconceptos que se han tenido en cuenta en esta tesis son: variable, pendiente y ordenada en el origen.

5.3 El proceso de formación del concepto función

Han sido varias las propuestas que tratan de analizar cómo se lleva a cabo el proceso de adquisición de un concepto matemático. Entre ellas se puede destacar la de dos secuencias de desarrollo, distintas y simultáneas, que empiezan una por la percepción de los objetos y la otra con la acción sobre ellos. La actividad matemática comienza, en general, por la percepción de los objetos en forma visoespacial, continúa con la verbal, seguida de la clasificación y por último las deducciones verbales. En este sentido Tall (1997) define el término *procepto* (procedimiento y concepto) como “el objeto mental combinado que consiste en un proceso, un concepto producido por dicho proceso, y un símbolo que se puede usar para significar cualquiera de los dos o los dos” (Azcárate y Camacho, 2003 pág 139). Un ejemplo de ello, sería la función $f(x)=3x$, que representa simultáneamente el proceso de cómo calcular la función $f(x)$ para un valor particular de x , y el objeto, es decir el concepto de función para un valor general de x . Vinner y Dreyfus (1989) se han referido a dos perspectivas (la perspectiva proceso y la perspectiva objeto) para analizar lo que significa comprenderlo. Desde la *perspectiva proceso* se considera que las funciones conectan los valores de x e y , es decir, a cada valor de x le corresponde un valor de y . Desde la *perspectiva objeto*, la función se contempla de forma global, como un todo.

La distinción de las funciones como un proceso o como un objeto ayuda a entender el proceso de formación del concepto función. Si se concibe como un proceso es una concepción operacional, mientras que cuando se considera como un objeto es una

concepción estructural, Según Stard (1991), primero se construye la concepción operacional y fuera de ella evoluciona la estructural. El proceso que promueve el paso de una concepción a otra se realiza en tres etapas (ver figura 5-1).

Etapas	Descripción
1. Interiorización	La persona entra en contacto con los procesos que eventualmente dan lugar al nuevo concepto, (por ejemplo, la identificación de variables, o el proceso de adquisición de las habilidades necesarias para hallar valores de la variable dependiente utilizando la fórmula).
2. Condensación	La persona realiza largas secuencias de operaciones en unas unidades manejables; se siente cada vez más capaz de pensar en un proceso dado como un todo, sin necesidad de considerar todos los detalles (por ejemplo, se considera el trazado de gráficas como un todo, sin fijarse en los valores específicos de las variables).
3. Cosificación	La persona es capaz de concebir la nueva noción como un objeto matemático en sí mismo. La cosificación se define como un cambio ontológico, una habilidad repentina para ver algo familiar desde una nueva perspectiva. Por ejemplo, este estado se produce cuando en las ecuaciones las incógnitas son funciones, como es el caso de las ecuaciones diferenciales, o el de la capacidad de considerar propiedades generales de diferentes procesos realizados con funciones, como son la composición o la inversión.

Figura 5-1. Etapas de construcción del concepto de función desde la representación como proceso hasta la representación como objeto matemático (Stard, 1991).

Mientras que las etapas de interiorización y de condensación son procesos graduales y cuantitativos la cosificación es instantánea. La nueva entidad cosificada se desprende del proceso que la ha producido y empieza a adquirir su significado por el hecho de pertenecer a una cierta categoría. El estadio de cosificación es el punto en el cual empieza la interiorización de unos conceptos de nivel superior, aquellos que se originan a partir de procesos sobre el objeto en cuestión.

Carlson y Oehrtman (2005) por su parte indican, al igual que otras investigaciones, que las funciones pueden ser comprendidas en tres niveles de abstracción: como acciones, como procesos y como objetos. Los estudios realizados en estudiantes de edad universitaria revelan que una minoría han progresado más allá de la comprensión de la acción y, menos aún, más allá de la comprensión de los procesos. Este hecho revela, según Carlson y Oehrtman que la mayoría del alumnado universitario considera la función como algo estático y una minoría como algo dinámico –proceso-.

Estos autores utilizan la analogía de una caja dentro de la cual, si la función es considerada como *acción*, al alumnado se le daría explícitamente una fórmula o algoritmo específico para que pudiera sustituir valores, por ejemplo. En este nivel el alumnado

comienza la comprensión de las funciones sólo como reglas o fórmulas específicas. El nivel de *proceso* se da cuando se ha producido una comprensión. Entonces la caja ya no tiene un algoritmo específico escrito en ella, pero el proceso se ha llevado a cabo dentro de la máquina de la función aunque sea desconocido. Aquí se incluirían los cambios de representaciones. Por último, en el nivel de *objeto* se excluye la maquinaria por completo, y las funciones son parejas simplemente arbitrarias; las funciones son un tipo especial de relación en la que cada coordenada x está emparejada con un solo valor y no existe como dependiente de la x .

Vinner y Dreyfus (1989) indican que el esquema conceptual del alumno o alumna es el resultado de su experiencia con ejemplos y contraejemplos del concepto. Compararon los esquemas del concepto con la definición dada por alumnado universitario y el profesorado joven de secundaria. Muchas de las definiciones, y más aún de las imágenes, eran primitivas, también entre el profesorado. Las discrepancias entre la imagen y la definición fueron frecuentes en toda la muestra investigada que daban la definición de función hoy en día aceptada. Basado en los resultados de este estudio, estos autores establecen seis categorías de imagen de concepto de función (figura 5-2).

I.	Correspondencia:	La función es una correspondencia entre dos conjuntos, a cada elemento de la primera serie se le asigna un elemento de la segunda serie.
II.	Relación de dependencia	La función es una relación de dependencia entre dos variables (y depende de x).
III.	Regla:	La función es una norma o regla que tiene cierta regularidad, mientras que en la correspondencia puede ser arbitraria. El dominio y co-dominio general no se mencionan aquí, a diferencia de la categoría I donde existen.
IV.	Operación:	La función es una operación o una manipulación (se actúa sobre un número determinado, generalmente por medio de operaciones algebraicas, con el fin de obtener su imagen).
V.	Fórmula:	La función es una fórmula, una expresión algebraica o una ecuación.
VI.	Representación.	La función es identificada en cierto modo sin significado, con una de sus representaciones gráficas o simbólicas.

Figura 5-2. Imagen de concepto de función (Vinner y Dreyfus, 1989).

Durante este proceso de abstracción cada persona va adquiriendo un esquema del concepto de función cada vez más rico, tanto en propiedades como en procedimientos asociados al concepto: la función siempre tiene una expresión algebraica, la gráfica de la función lineal pasa por el origen de coordenadas, etc.

En este cambio de currículo e instrucción, Carlson et al. (2003) proponen un marco conceptual para el estudio del razonamiento covariacional, el cual incorpora cinco acciones mentales y cinco niveles que se muestran en la figura 5-3. En este trabajo no se ha planteado el nivel, N5 referido al *Razonamiento instantáneo*, porque no corresponde al curriculum del curso 3° de la ESO.

El razonamiento covariacional entendido como un proceso que evoluciona no parece ser un proceso lineal sino recurrente sin embargo este hecho, en lugar de interpretarse como un retroceso en el nivel de razonamiento, parece ser una actividad con la cual el o la estudiante revisa y fortalece su entendimiento de la variación para continuar avanzando. Por ello, puede que no haya una transferencia inmediata ni automática de la comprensión obtenida de un sistema de representación a otra, y ello sugiere la necesidad de trabajar con distintos sistemas de representación al mismo tiempo (Villa-Ochoa, 2012).

Niveles de convariación	Descripción de la acción mental
N1. Coordinación	Coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable.
N2. Dirección	Coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra.
N3. Coordinación cuantitativa	Coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra.
N4. Razón promedio	Coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable.
N5. Razón instantánea	Coordinar la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función

Figura 5-3. Niveles de razonamiento covariacional y acciones mentales llevadas a cabo (Carlson et al., 2003).

5.4 La construcción del lenguaje algebraico

La construcción del lenguaje algebraico presenta en sí unas características añadidas a la construcción del concepto de función, cuyas dificultades (Socas, 1997) aparecen en el proceso de abstracción de los *sistemas de representación* (SRS). Como se muestra en la siguiente figura 5-4 en dicho proceso de abstracción se distinguen tres estadios.

Para Duval (1993) la adquisición de conceptos matemáticos se alcanzará en el momento que haya una coordinación, libre de contradicciones, entre las diferentes representaciones del objeto matemático en cuestión.

1. Semiótico	Estadio en el cual los signos nuevos adquieren significado y se definen a partir de los antiguos ya conocidos; el sistema nuevo de signos es caracterizado por el sistema antiguo y se reconocen los elementos de un SRS en relación con el objeto matemático a partir del significado del sistema antiguo.
2. Estructural	Estadio en el cual el sistema nuevo de símbolos se estructura según la organización del antiguo, y las dificultades para dar sentido a ciertos símbolos o propiedades se abordan considerando regularidades y patrones de comportamiento, se realizan transformaciones en el anterior SRS y conversiones entre SRS en las que hayan un sistema que el alumnado controla y facilita la conversión en otro.
3. Autónomo	Estadio en el cual el sistema nuevo adquiere significado en sí mismo, pero es una fuente de dificultades al encontrarse con elementos que no pueden ser conocidos en términos de sistema antiguo; en estos casos se produce la generalización, proceso característico de las matemáticas en el desarrollo de sus signos, se dominan diversos SRS para significar el objeto (al menos dos), y se coordinan de forma espontánea.

Figura 5-4. Estadios del proceso de construcción del lenguaje algebraico (Socas, 1997).

5.5 Interpretación de gráficas

Para Duval (1993) las gráficas son representaciones semióticas, como lo son la lengua, las figuras geométricas o la escritura algebraica. Esto significa, que las gráficas tienen leyes de organización que le son propias y que le permiten representar tanto funciones como otros objetos matemáticos. La forma de las representaciones es el representante (el trazo) y el fondo es el contenido, lo representado –la función en esta investigación-. La forma cambia según el sistema semiótico utilizado, lo que origina, según Duval, *registros de representación* (el dibujo del gráfico, su fórmula, la tabla de valores, la descripción textual) para un mismo objeto, y a los que corresponden distintos tipos de tratamiento cognitivo (Lacasta, 1999).

En las ciencias y, en particular, en esta investigación, adquiere gran importancia la interpretación de gráficas; de aquí que se dedique este apartado a analizar estudios relacionados con este tipo de representación externa. En la figura 5-5 se muestran distintos estudios que analizan niveles o tipos de procesamiento de la información relacionados con la interpretación de gráficos.

Wainer (1992)	Nivel elemental	Implica la extracción de datos o la lectura de puntos aislados
	Nivel intermedio	Implica la detección de las tendencias observadas en intervalos determinados de las gráficas
	Nivel alto	Implica la comprensión profunda sobre la estructura de los datos y su comportamiento (proceso lento de alcanzar).
Postigo y Pozo (2000)	La lectura de la información explícita o factual	Implica centrarse en los elementos visibles y directamente perceptibles (título, tipo y número de variables, valores de las variables, etc.). Constituyen los elementos más superficiales de una gráfica, texto o expresión algebraica.
	La lectura de la información implícita o sintáctica	Implica ir más allá de la lectura de los valores aislados, identificando patrones, tendencias a través del establecimiento de relaciones intra e intervariables; asimismo implica cierto grado de manejo de las convenciones de los distintos tipos de gráficas y expresiones algebraicas o verbales y de los procesos de decodificación, por lo que incluye procedimientos de traducción intercódigo.
Kerslake (1981)	La lectura conceptual	Implica establecer relaciones conceptuales del contenido concreto, a partir del análisis global de la de la información extraída en los niveles anteriores, permitiendo así realizar explicaciones o predicciones sobre el fenómeno presentado.
	Nivel 1	Implica reconocer que una recta representa una tasa de variación constante
	Nivel 2	Implica reconocer la relación entre crecimiento y pendiente
	Nivel 3	<i>Implica reconocer la relación entre la gráfica y su expresión algebraica</i>

Figura 5-5. Niveles de procesamiento de la información a través de gráficos según diversos autores.

Por otra parte, la construcción de las gráficas como herramientas científicas requiere reflexionar sobre el significado de cada uno de sus componentes en relación a la situación. Mientras que en la representación matemática, se suele ir desde una regla de una función algebraica a través de pares ordenados a una gráfica, o desde una tabla de datos de pares ordenados a una gráfica, en ciencias, se acostumbra a ir desde la observación a la formación de datos, a la identificación de pares ordenados de información, a la selección de ejes, a la construcción a escala y, quizás, como parte final del proceso a la función. Como consecuencia, a menudo el alumnado que puede resolver gráficas o funciones de problemas matemáticos parece no tener acceso a su conocimiento científico. Según Greeno, (1998) sólo porque el alumnado conozca algo de un cierto modo no quiere decir

que pueda hacer uso inmediato de ello desde una perspectiva diferente o desde una situación diferente.

Se han realizado varios estudios sobre la interpretación cualitativa de las gráficas que hace alumnado desde el punto de vista científico que ha sido recogidos en un Review por Leinhardt et al., (1990) o desde el punto de vista que deberían ofrecer las herramientas matemáticas para explicar fenómenos físicos para que el alumnado pudiera ser capaz de usar las matemáticas para este propósito (Janvier, 1983).

El análisis sobre los libros de texto de ciencias indica que el uso de gráficas presenta un uso limitado, restringido a la exposición de hechos; es decir, se hace un reducido uso de ellas para plantear problemas y como herramientas en procesos experimentales. Ello tiene varias consecuencias en términos didácticos. En primer lugar, las representaciones gráficas se presentan al alumnado como objetos o productos acabados, más que como el fruto de una actividad científica en la cual no se separan la teoría, las prácticas intelectuales, las prácticas de laboratorio y la resolución de problemas; por lo tanto, es una visión deformada del papel de las gráficas en el marco de la producción del conocimiento científico. En segundo lugar, el limitar el uso de las representaciones gráficas cartesianas sólo a la exposición de hechos, no posibilita que el alumnado pueda realizar prácticas de interpretación y construcción utilizando las representaciones cartesianas incluidas en los textos.

5.6 Niveles a alcanzar por el alumnado de 15 años en el concepto de función

La *National Council of Teachers of Mathematics* (2000) establece los niveles deseables a alcanzar, en el aprendizaje de las funciones, por todo el alumnado entre los grados 9 (equiparable al nivel educativo del alumnado de esta investigación)-12. En la figura 15 se recogen las de más interés para el objetivo de esta investigación.

Desde el enfoque de la educación científica, las gráficas y las funciones sirven como representaciones de observaciones reales y son herramientas analíticas para detectar patrones esenciales, que al cambio informan a la persona observadora y al alumnado sobre el fenómeno (el objetivo) dentro de la investigación. Las tareas más comunes asociadas con este enfoque científico son la de interpretación cualitativa, predicción (mayoritariamente cualitativa) y las tareas de escala que requieren construcción. No

obstante se aprecia una falta de conexión con los aspectos de tipo matemático, por ejemplo con el nivel algebraico, excepto en problemas de física donde a menudo se reducen a la utilización de algoritmos.

Desde distintas investigaciones se insiste en la gran importancia de la interpretación de gráficos y de su carácter gradual; sin embargo, la enseñanza de las matemáticas se ha centrado a menudo en la manipulación formal de símbolos. Esto ha llevado, entre otros motivos, a que el alumnado no vincule dichas formalizaciones con su conocimiento informal, bloqueando el acceso al significado de los contenidos matemáticos (Gómez-Granell, 1993; Resnick, 1987).

En cuanto a entender patrones, relaciones y funciones	<ul style="list-style-type: none"> • generalizar patrones usando funciones definidas explícitamente; • entender las relaciones y las funciones y seleccionar, convertir de manera flexible entre, y usar varias representaciones de ellas; • interpretar las representaciones de funciones de dos variables.
En cuanto a representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos	<ul style="list-style-type: none"> • desarrollar una comprensión conceptual sobre diferentes usos de las variables; • explorar relaciones entre expresiones simbólicas y gráficos de líneas, prestando especial a los significados de intercepto y la pendiente; • usar álgebra simbólica para representar situaciones y resolver problemas, especialmente aquellos que involucran relaciones lineales; • entender el significado de formas equivalentes de expresiones, ecuaciones, desigualdades y las relaciones.
En cuanto a usar modelos matemáticos para representar y entender relaciones cuantitativas	<ul style="list-style-type: none"> • identificar relaciones esenciales cuantitativas en una situación y determinar la clase o clases de funciones que podrían modelar las relaciones; • llegar a conclusiones razonables sobre una situación que se está modelizando.
En cuanto a analizar el cambio en varios contextos	<ul style="list-style-type: none"> • aproximar e interpretar las tasas de variación de los datos gráficos y numéricos.

Figura 5-6. Niveles a alcanzar en el aprendizaje de las funciones (National Council of Teachers of Mathematics, 2000).

El concepto de función incluye también aplicaciones al mundo real y al mundo científico pero, en general, en la disciplina de matemáticas los ejemplos contextualizados

se diseñan para ahondar en el entendimiento del alumnado de conceptos matemáticos más abstractos y, quizás, para incrementar su motivación. Así, en las aplicaciones que el profesorado de matemáticas ofrece en sus clases no siempre proporciona problemas reales en términos de cómo la matemática o la ciencia definiría un problema real ni del modo en el que lo percibe el alumnado.

5.7 Tareas y acciones relacionadas con el concepto función

Para esta investigación se ha tenido en cuenta el trabajo realizado por Janvier (1987a) recogido ampliamente por Leinhardt et al., (1990). En los citados trabajos se indica que el análisis de las funciones y gráficas puede realizarse a través de las distintas tareas encomendadas al alumnado, las cuales a su vez son definidas por cuatro perspectivas que se solapan parcialmente: la acción de la alumna o alumno, la situación, las variables y su naturaleza, y el enfoque.

5.7.1 Tareas

Las tareas hacen referencia a la labor o trabajo a realizar por el alumnado en un tiempo determinado. Son cuatro las tareas destacadas por Leinhardt et al. (1990)

- *Traslación*: se refiere principalmente a: (a) el acto de reconocer la misma función en representaciones de formas distintas, (b) identificar en una representación para una transformación específica de una función su correspondiente transformación en otra representación, (c) construir una representación de una función dando otra representación (construcción de tablas, gráficos y ecuaciones). Así las tareas de translación pueden depender tanto de la interpretación como de la construcción.
- *Predicción*: se refiere a la acción de hacer conjeturas a partir de una parte de la gráfica donde otros puntos (no dados o no trazados explícitamente) puedan ser localizados, o también a cómo deberían ser otras partes de la gráfica. Mientras algunas tareas de predicción dependen de habilidades de cálculo o de interpolación, otras dependen de la detección de patrones tanto de la situación científica contextualizada como de una situación abstracta, según Stein y Leinhardt y Bickel (1989). El modo en el que cada estudiante construye el resto de la gráfica depende enormemente en como él o ella cree que debería parecer la gráfica (qué es y qué no es una función).

- *Clasificación:* se refiere a las acciones que implican (a) decidir si una relación particular es una función (la relación puede presentarse de cualquier forma; (b) identificar una función entre otras relaciones y (c) identificar un tipo de especial de función entre otras funciones (función proporcional, afín y función constante).
- *Escalas:* requieren atención particular a los ejes y a sus escalas y a las unidades que se miden. Puede suceder que, debido a que la escala se asume o se da en las instrucciones matemáticas (normalmente la escala es la misma en cada eje), se convierta en difícil de utilizar o acceder en posteriores clases de ciencias donde la persona es quien tiene que decidir la escala conveniente para la observación del fenómeno. Además las tareas de escala están relacionadas con la unidad sobre todo en contexto científico (por ejemplo la velocidad, la solubilidad), es decir, con cuál puede ser la unidad más idónea para la representación de las variables participantes.

Las tareas de escala son una de las mayores fuentes de ilusiones gráficas visuales (Leinhardt et al., 1990), convirtiéndose en obstáculos en el proceso de abstracción desde gráficas como representaciones concretas visuales a gráficas como representaciones simbólicas. Seleccionar y construir escalas apropiadas es un tema particular de los contextos de laboratorio científicos, donde una gráfica que describe una situación se traza basándose en las observaciones que se trasladan en datos numéricos.

5.7.2 **Acciones**

La acción se refiere al ejercicio de la posibilidad de hacer algo. Son muchas las acciones requeridas tanto referidas a gráficos como a funciones. Dichas acciones pueden clasificarse en dos categorías: interpretación y construcción –estas categorías no se excluyen mutuamente-. La mayoría de los estudios tratan generalmente de tareas relacionadas con la interpretación.

- *Interpretación* se refiere a la acción mediante la cual cada estudiante da sentido o consigue nuevos significados a partir de una gráfica (o una parte de la gráfica), una ecuación funcional o una situación. La interpretación también se produce fuera de la gráfica cuando ésta describe una situación concreta, ya que requiere pasar de la representación gráfica a la situación en sí. La interpretación cualitativa en su sentido más completo requiere observar la gráfica entera (o una parte de ella) y entender las relaciones entre las dos variables y, en particular, su patrón de co-variación.

Construcción: se refiere al acto de generar algo nuevo, una gráfica o a trazar puntos desde unos datos (o desde una regla de función o tabla). La construcción puede ser simple (por ejemplo una vez que se han establecido los ejes y la escala, incorporar datos a partir de una tabla de datos ordenados) o compleja (por ejemplo, construir una ecuación que represente una gráfica previamente dada). En éste último caso, tanto el enfoque como la elección de datos para establecer la ecuación no suelen estar claros (Markovits, Eylon y Bruckheimer, 1986; Stein et al., 1989; Yerushalmy, 1989).

Las acciones de interpretación y la construcción pueden ser de carácter local o global. Además comparten una serie de características comunes, en el sentido de que la acción puede tener lugar en cualquiera de los espacios (gráfico, algebraico o de la situación), o moverse de un espacio a otro. La acción de interpretación no suele requerir la construcción; sin embargo, ésta muchas veces se basa en algún tipo de interpretación.

5.7.3 Situación

Cada tarea se puede representar en una gran variedad de situaciones en las que cabe destacar el entorno de la tarea y el contexto del problema.

- *Entorno*: se refiere a la situación en la cual se presenta la función o la gráfica. La mayoría de estudios que se centran en el estudio de las funciones lo hacen desde la perspectiva de la educación en matemáticas o, en menor medida, englobando a las disciplinas de Física y Matemáticas. Las investigaciones desde la perspectiva de interacciones entre los fenómenos físicos, químicos y sus representaciones gráficas son escasas y más aún el análisis de la transferencia del concepto matemático a los contextos científicos, como se ha abordado en esta investigación.
- *Contexto*: se refiere a la situación del problema y puede ser más o menos contextualizado o abstracto.

5.7.4 Variables y su naturaleza

Las variables son los objetos de las funciones y de las gráficas; son los datos, tanto los concretos como los abstractos. En gráficas bidimensionales las variables pueden tener formas iguales o diferentes, entendiéndose por forma la propiedad de unidad, tanto si es categórica como ordinal o de intervalo.

5.7.5 Enfoque

El enfoque se refiere a la localización de la atención dentro de una tarea específica, por ejemplo, la dirección de la gráfica o los detalles de los ejes. El enfoque puede ir cambiando desde un emplazamiento a otro, por ejemplo, encontrar un punto y luego interpretarlo. Por lo tanto, el enfoque aborda cuestiones de atención y exposición, destacando las intersecciones (punto de encuentro) y las relaciones de origen (ordenada en el origen). El enfoque es una cuestión particularmente crítica.

Las tareas de predicción requieren enfocar en la parte visible o en una parte dada de la función o gráfica que se señalan en el problema con respecto a lo que falta. Las tareas de clasificación requieren enfocar en la ecuación o gráfica como un todo con respecto a un criterio conocido (una definición). Las tareas de translación atraen el enfoque desde un rasgo particular de una función a una representación del mismo rasgo en otras representaciones (por ejemplo, la intersección y y b de una gráfica en la ecuación $y=mx+b$). Las tareas de escala están conectadas directamente con los ejes, y requieren que el enfoque se centre casi por completo en el sistema de coordenadas.

5.8 Dificultades en el aprendizaje del concepto función y propuestas de mejora

Un determinado concepto matemático raramente aparece aislado de otros ya que, en muchos casos, bajo el concepto subyacen distintos objetos. El concepto de función (en su forma más avanzada) es extremadamente complejo debido a varios factores:

- (a) normalmente está asociado con otros conceptos matemáticos complejos (por ejemplo, las variables, el desarrollo, los límites, los extremos, los significados pictoriales),
- (b) es integrativo por naturaleza, aunando varios subconceptos y campos de las matemáticas,
- (c) aparece en múltiples representaciones (Dreyfus y Eisenberg, 1982).

Es posible abordar la idea de función desde cada uno de estos conceptos, con lo cual se pondrán de relieve distintas características, diferentes visiones de lo que se entiende por función. Estos distintos enfoques, llamados *dominios semánticos* (Janvier, 1983) tienen una gran importancia para el aprendizaje, puesto que el trabajo en cada uno de ellos tiene unas características determinadas y su transferencia a otros dominios es muy difícil de realizar.

5.8.1 Las intuiciones

Las intuiciones son rasgos del conocimiento de cada estudiante sobre una parte específica de las matemáticas que surgen principalmente por las experiencias diarias, aunque en el alumnado más avanzado pueden implicar una mezcla de conocimiento diario y conocimiento formal profundo. Se poseen en general antes de llegar a las escuela (el conocimiento puede haber sido instruido o no).

Según los estudios de Piaget (1977) la existencia de un entendimiento implícito de función se sitúa a la edad de 3 años y medio; otros los sitúan entre los 5 o 6 años de edad, las y los escolares comprenden la naturaleza de dependencias funcionales, es decir, solucionan problemas que abarcan la naturaleza de dependencias funcionales, solucionando problemas que incluyen estas relaciones en una variedad de ámbitos conceptuales.

Entre las características del conocimiento intuitivo según Malik leído Leinhardt et al., (1990), se incluyen las nociones sobre la dependencia, causalidad y variación. Las y los escolares desde temprana edad se dan cuenta de que algunas cosas “van juntas” en el mundo real y esperan que las cosas cambien con el tiempo y que haya algún patrón sobre ese cambio. Mientras que estas nociones infantiles de las funciones se basan en un sentido implícito de las variables (éstas poseen atributos de ser concretas, dinámicas y continuas), la definición formal de la función es “algebraica en espíritu, que llama a una aproximación discreta y carece de un sentido para las variables”

En general las situaciones del mundo real, operan exitosamente a la hora de razonar en el ámbito de la realización de las gráficas. El alumnado recurre a sus experiencias sobre *cosas que cambian simultáneamente* con base para interpretar las gráficas; pero a veces, confunden rasgos gráficos que corresponden a niveles pictoriales con aspectos de la situación (Janvier, 1987a; Kerslake, 1981; Leinhardt et al., 1990; McDermott, Rosenquist y Van Zee, 1987).

5.8.2 Formas alternativas de pensar

Las ideas alternativas se definen como los rasgos incorrectos desde el punto de vista del conocimiento formal, repetibles y explicativos del alumnado. Una idea alternativa puede desarrollarse como resultado de la sobregeneralización de un concepto concreto o puede ser debido a la interferencia del conocimiento cotidiano.

Las ideas alternativas en el área de funciones y gráficos son diferentes de aquellas que se han documentados en los textos científicos. Mientras que las ideas alternativas en la ciencia se originan mayoritariamente en las observaciones e interpretaciones de acontecimientos del mundo real, las ideas alternativas (erróneas) sobre las funciones y gráficas a menudo se entrelazan con el aprendizaje previo formal. Por ejemplo, el concepto de función puede verse limitado debido a la carencia de ejemplos educativos variados, o puede realizarse una translación sin precisión debido a la confusión sobre la notación simbólica (Schoenfeld, 1999). Por ello, las dificultades e ideas están asociadas en general a problemas de aprendizaje.

Entre las dificultades e ideas distintas a las formales (científicas) se destacan las siguientes:

- *Qué es y qué no es una función*: el alumnado tiene un punto de vista demasiado restringido de las formas que pueden tomar las gráficas de las funciones debido a que las tareas de clasificación realizadas en el aula no amplían los tipos existentes. Ello puede conllevar a que el alumnado aunque posea la definición certera y formal de la función, puede fallar al aplicarla cuando tiene que deducir si una gráfica representa una función.

Vinner (1983) considera que se produce una división entre la *imagen de concepto* del alumnado y el concepto de definición propiamente dicho. La mayoría de los ejemplos que se muestran al alumnado, suelen ser funciones con reglas de correspondencias obvias o fáciles de detectar a la hora de ser trazadas. Por ello, el alumnado desarrolla la idea de que sólo las gráficas con patrones determinados representan funciones; las otras parecen extrañas, artificiales o no naturales (por ejemplo el caso de funciones del contexto biológico).

Algunas investigaciones (Leinhardt et al., 1990; Markovits et al., 1986) indican que hay estudiantes que a menudo asumen que las funciones deben consistir en cantidades cambiables, es decir, las funciones constantes no se toman como funciones. De hecho, la función constante es la forma más extrema de correspondencia de varias-a-una, debido a que todos los elementos de un conjunto se corresponden en otro elemento de otro conjunto.

En muchas ocasiones el alumnado compara el concepto de dependencia con el concepto de conexión causal porque tal vez se ha creado una sobredependencia de las intuiciones.

- *Correspondencia*: existe la creencia de que las funciones abarcan la correspondencia de uno-a-uno y se produce una confusión entre las correspondencias de varias-a-uno y de una-a-varias. Esta dificultad también viene dada por el tipo de instrucción seguido, bastante limitado en cuanto a correspondencias posibles. Este hecho va unido a si el alumnado considera la función constante como función.
- *Linealidad*: los estudios sugieren que el alumnado tiende a dirigirse hacia la linealidad en varias situaciones. Lovell (1971) encontró que cuando el alumnado realiza gráficas tiende a definir la función como una relación que produce un patrón lineal. Las y los estudiantes, tanto en situaciones contextualizadas como abstractas, tienden a conectar cada punto con el punto consecutivo en línea recta, no cuestionando dicha decisión. También en las tareas de translación se ha observado esta tendencia hacia los rasgos de la linealidad. Esta tendencia hacia la linealidad puede estar influenciada por la popular actividad de la escuela infantil de “conectar puntos” además del uso de la misma técnica en gráficas elementales y por tratarse de las primeras funciones trabajadas.
- *Gráficas continuas versus discretas*: decidir si una gráfica es o debería representarse de un modo continuo o discreto no es un asunto nada trivial. El alumnado ha mostrado que confunde el significado que puede atribuirse a una línea no-interrumpida de una gráfica continua. Varios estudios han apuntado que el alumnado tiende a ver sólo los puntos marcados en tales gráficas (Janvier, 1983; Mansfield, 1985; Stein, et al., 1989). Esto se relaciona con los hallazgos de Mansfield (1985), donde el alumnado a menudo interpretaba los puntos como si tuvieran una masa física, más que como entidades abstractas. En otras ocasiones se unen puntos discretos cuando es inapropiado hacerlo. Las líneas, aunque son aceptadas como partes legítimas de las funciones, parecen servir como una función conectora más que poseer un significado propio. La tendencia del alumnado a enfocar en puntos individuales puede relacionarse con lo que Janvier (1987a) llamó

la tendencia a *discretizar* gráficas. Esta tendencia está en contra de la visión de ver la gráfica como objeto o como entidad conceptual (Leinhardt et al., 1990).

- *Representación de las funciones*: se pueden utilizar varios sistemas representacionales para exponer una función (pares ordenados, ecuaciones, gráficas y descripciones verbales de las relaciones). Janvier (1987b) subraya la atención al proceso psicológico implicado en el movimiento, *translación*, de una representación a otra, ya que dichos movimientos tienen direccionalidad; por ejemplo moverse de una ecuación a una gráfica implica un proceso psicológico diferente al de moverse de una gráfica a una ecuación. Así el movimiento desde las gráficas a sus ecuaciones resulta ser una tarea más difícil, debido a que implica patrones de detección (sobre todo en funciones constantes, probablemente porque una de las variables está perdida), mientras que trazar una gráfica de una función implica una serie de pasos sencillos, es decir, generar pares ordenados, trazarlos en la cuadrícula cartesiana, y conectarlos con una línea. Además la mayor parte de la instrucción en el aula se produce en la dirección ecuación-a-gráfica.

- *Lectura e interpretaciones relativas*: cuando se analizan estas tareas se observa que el alumnado restringe su enfoque a un punto individual o grupos de puntos que se oponen a rasgos generales de la gráfica, como su forma general, intervalos de subida y bajada (Bell y Janvier, 1981; Janvier, 1993). Según Janvier este hecho también viene influenciado por el tipo de tareas trabajadas en el aula.

- *Confusión entre el intervalo y el punto*: la falta de continuidad e incluso densidad de puntos de una recta representa un obstáculo importante en estudiantes de 14 años, para poder llegar a interpretar una gráfica como la representación de una función, en la que cada punto de la curva determina un par de valores, y puede favorecer la idea de que la gráfica es un dibujo que sirve para unir unos puntos determinados. Estos puntos estarían dados por la tabla, si se trata de la construcción de la gráfica, o por los puntos relevantes de una determinada situación, en el caso de la interpretación de la misma. A menudo, el alumnado estrecha su enfoque a un solo punto, cuando lo más apropiado es enfocar en una escala de puntos (o intervalo).

- *Confusión entre pendiente y altura*: el alumnado parece confundir estos dos rasgos tanto en tareas de interpretación como en las de construcción (Bell y Janvier, 1981; Janvier, 1987a). Por ejemplo, es de destacar la asociación entre la mayor velocidad media con la representación gráfica de la ordenada de mayor altura, o con el intervalo al que le corresponden las ordenadas de mayor altura (Dolores, Alarcón y Albarracín, 2002; Doloresy Valero, 2004). Sin embargo, no hay consenso sobre la causa de estos errores.

- *Dificultad en la construcción del concepto pendiente dinámico*: Azcárate (1990) señala la construcción de tres tipos de concepto de pendiente (a) *geométrico*, la pendiente es interpretada como orientador de la recta, se posee una imagen mental gráfica en la que aparece la recta con una cierta posición con respecto a unos ejes de referencia; (b) *algorítmico u operativo*, se define la pendiente como un número; la o el estudiante explica el procedimiento que utiliza para reconocerla como el número que acompaña o multiplica la variable o bien el término independiente o da el algoritmo que permite calcularla. Las personas situadas en este perfil no explican lo que es la pendiente sino lo que se obtiene en una ecuación algebraica; además los procedimientos citados de obtención de los coeficientes no están relacionados con una imagen mental representativa de su significado gráfico; y (c) *funcional*: cuando hay más referencias a la pendiente que a la expresión algebraica. En algunos casos la definen como una relación constante entre las variaciones de las variables, lo cual supone una cierta complejidad en su esquema conceptual y una representación mental de su significado gráfico. Las expresiones sugieren que el esquema de este alumnado está construido sobre una idea cinética de la pendiente. Además las frases se componen de dos partes que parecen indicar una relación funcional de causa-efecto considerada como constante (Azcárate, 1990, 1993).

En la función $y=mx+c$ en estudiantes de 19 años se destaca (Barr, 1980): (a) confusión en la idea de que la pendiente es la razón; (b) confusión entre m (pendiente) y c (ordenada en el origen) cuando se da la ecuación; (c) confusión entre “ x sobre y ” o “ y sobre x ” en el cálculo de la pendiente a partir de los puntos dados; (f) falta de habilidad en calcular la pendiente a partir de dos puntos; y (g) falta de dominio de la sutileza de los conceptos. Todo parece indicar, según Barr,

que el alumnado haya aprendido una serie de reglas acerca de la pendiente sin entender realmente el concepto subyacente y su relación con el de tasa de variación.

- *Interpretación icónica*: el alumnado a veces interpreta una gráfica de una situación como una imagen literal de la situación (Janvier, 1987a; Stein et al. (1989) e interpreta las gráficas de desplazamiento como caminos de un viaje real. Así se asemeja a la trayectoria seguida en el caso de la caída libre de los objetos (Dolores et al., 2002; Dolores, 2004).

La interpretación icónica a veces ha sido menor en los chicos que en las chicas cuando se ha trabajado con representaciones de movimiento de coches en circuitos. En este caso la experiencia parece ser un dato importante a tener en cuenta. Sin embargo como apunta Janvier (1987a), las atracciones situacionales fuertes pueden dificultar la abstracción necesaria para llevar su conocimiento al nivel simbólico de la gráfica.

- *Concepto de variable*: La noción de variable es fundamental para entender muchas relaciones funcionales y representaciones gráficas. Existen dos posibles interpretaciones sobre este concepto. Una relativamente estática, que enfatiza la variable como una herramienta para la generalización o para describir patrones (Wagner; 1981) y que está normalmente asociada con los símbolos algebraicos (por ejemplo letras generalizadoras), y otra interpretación que tiene un sentido más dinámico que la anterior, en el sentido en el que la esencia captura la variabilidad y los cambios simultáneos, es una variable en comparación con otra (Janvier, 1983).

En general, la idea de variable es sutil, difícil y lejana de lo unitario. En muchos casos el alumnado cree que cambiar el símbolo para la variable en una ecuación funcional cambia algunos aspectos críticos de la función (Wagner, 1981). Además ven una variable como un objeto único, al cambiar las letras cambian los objetos. Por ejemplo la no aceptación de que una gráfica de coordenadas tiempo-distancia y otra de coordenadas velocidad-tiempo puedan representar el mismo movimiento (Dolores et al., 2002; Dolores, 2004). Estos hallazgos sugieren que el alumnado generalmente enfoca en situaciones arbitrarias de símbolos pero pierde la idea central de una relación funcional entre dos variables. El no reconocimiento de

las variables es causa de la mayoría de los errores de lectura e interpretación de gráficas (Socas, 1997).

La preponderancia de un determinado tipo de actividad de aprendizaje como, por ejemplo, la construcción de una gráfica a partir de la fórmula de la función (correspondiente a un modelo elemental y generalmente descontextualizado), o bien a partir de una tabla de valores, constituye un serio obstáculo para que el alumnado llegue a considerar que la(s) línea(s) que forma la gráfica define una relación de dependencia entre las dos variables; esta dependencia queda establecida por los pares de valores previamente representados, por lo que la línea es para muchos y muchas estudiantes únicamente una forma de unir aquellos puntos. Las casi exclusivas x e y enmascaran este concepto de variable, imprescindible para sacar información correcta de las gráficas en el contexto.

Esto hace pensar que el alumnado a menudo manipula letras en ecuaciones y no tiene un entendimiento sobre la variable, hecho éste importantísimo desde las ciencias.

Una parte integral de la variable es su ámbito, es decir, el conjunto de valores que pueden asociarse a ella y éste está influenciado por la situación. El carácter continuo o discreto de la variable es una cuestión complicada en muchos casos ya que aunque, por ejemplo, la temperatura es una variable continua por naturaleza, si un experimento tiene en cuenta las mediciones de temperatura en medida de unidades de 5°C , podría percibirse como una variable de intervalo y discreta. Este hecho es importante, ya que las variables contextualizadas son la mayoría de las veces continuas por naturaleza aunque no estén representadas como continuas (velocidad, tiempo, solubilidad, temperatura).

El tiempo es un caso especial en las variables, ya que la variación asociada al tiempo viene del mundo natural; el alumnado no tiene que coordinar la interrelación de dos variables cambiantes simultáneamente porque la variable tiempo se asume implícitamente y con ello, no necesita especial atención. El tiempo como variable (tanto implícitamente como explícitamente) ayuda a la comprensión. Por consiguiente, cuando la segunda variable puede representarse verticalmente (velocidad, solubilidad, precio), la habilidad del alumnado para construir gráficas precisas aumenta según Krabbendam (1982, leído en Leinhardt et al., 1990); ello hace considerar las gráficas que poseen el tiempo como variable relativamente

fáciles. Sin embargo, Janvier (1993), rectificando investigaciones anteriores, indica que las gráficas cuya variable es el tiempo son complejas, y llama *crónicas*, a las funciones que dependen explícita o implícitamente de esta variable y las distingue de las demás. Además se plantea si la crónica no es un obstáculo epistemológico tal como lo describe Brousseau y lo recoge Lacasta (1999).

- *Pensamiento covaricional*: la concepción discreta de los puntos de una recta lleva a la falta de coordinación de lo que ocurre gráficamente con las variables de la función, debido al escaso desarrollo del pensamiento covaricional (Dolores, 2004; Dolores y Cuevas, 2007) y la tendencia a centrar la atención en ciertos símbolos gráficos frente al estudio global de la gráfica, es decir, a discretizar la información que transmite la gráfica (Deulofeu, 1995; Dolores y Cuevas, 2007; Leinhardt et al., 1990).

En este sentido Carlson et al. (2003) indican la necesidad de una instrucción dirigida a propiciar un trabajo centrado en el cambio entre variables.

- *Notación*: la construcción de ejes requiere unos conocimientos y habilidades sofisticados. Se han observado problemas a la hora de establecer dos ejes para el sistema de coordenadas cartesiano además de en la noción de una escala de intervalos.

Construir una escala singular está lejos de ser algo trivial (Goldeneberg y Kliman 1988). Las dificultades en la construcción de escala hacen que la interpretación de gráficas no sea adecuada porque la inclinación y la forma de una gráfica son, en gran medida, dependientes de la escala. Se producen además cambios en la graduación de los ejes: cambios de unidad e inversión de positivos y negativos (Socas, 1997).

- *El contexto*: el contexto tiene influencia en la interpretación de significados (Socas 1997). Además los contextos científicos tienen dificultad añadida ya que el alumnado debe poseer un modelo adecuado de la situación para llevar a cabo la transferencia del modelo de función a las particularidades del contexto. En la introducción de contextos, el lenguaje habitual para favorecer la interpretación de

los signos matemáticos junto con el lenguaje matemático puede originar conflictos de precisión, confusiones semánticas, conflictos de especificidad y de socialización.

En general, diversos trabajos de investigación muestran que el alumnado de distintos niveles educativos tiene dificultades para elaborar gráficas de diferente complejidad, destacando errores importantes en la definición de escalas de los ejes o en la elección del tipo de gráfica más adecuado a los datos para su interpretación (Reuter, Barquero y Schnotz 2000; Leinhardt et al., 1990) ya que prevalecen los conocimientos y creencias del alumnado sobre la objetividad de la información (Bandiera, Dupré, Ianniello, y Viventini, 1995; Ryder y Leach, 2000). Además se observa la influencia del número y tipo de variables, constatándose (Postigo y Pozo, 2000; Nieda, Cañas, y Martín-Díaz, 2005) que cuando se incluyen más de dos variables o cuando éstas son ordinales, el alumnado hace una interpretación superficial –en muchos casos no adecuada-, al interpolar, identificar intervalos o extrapolar (Bell y Janvier, 1981; Leinhardt et al., 1990; Swan y Phillips, 1998; Núñez, Banet, Cordón, 2009).

Entre las causas que justifican que el alumnado no adquiera estas habilidades se hace referencia a sus dificultades para transferir los conocimientos matemáticos a estas formas de representación (Aberg-Bengtsson y Ottosson, 2006; Potgieter et al., 2008), a factores lingüísticos (Aberg-Bengtsson y Ottosson, 2006) y a la poca importancia que habitualmente la enseñanza concede a los contenidos procedimentales (de Pro, 2012a, 2012b).

Para mejorar la situación muchos han sido los intentos de propuestas didácticas serias para que la construcción tanto de gráficas como del concepto función sea contextualizada y tenga un carácter tanto instrumental como funcional. Así, se destacan materiales como los creados por el *Shell Centre for Mathematical Education* (1990) o los editados por la editorial Praxis de Azcárate y Deulofeu (1998-2004).

En la presente investigación son considerados tanto los subconceptos asociados al concepto función, las representaciones externas y las traducciones entre ellas, el proceso de estructuración del concepto y la relación covariacional entre otros; todos ellos visibles en la figura 5-7.

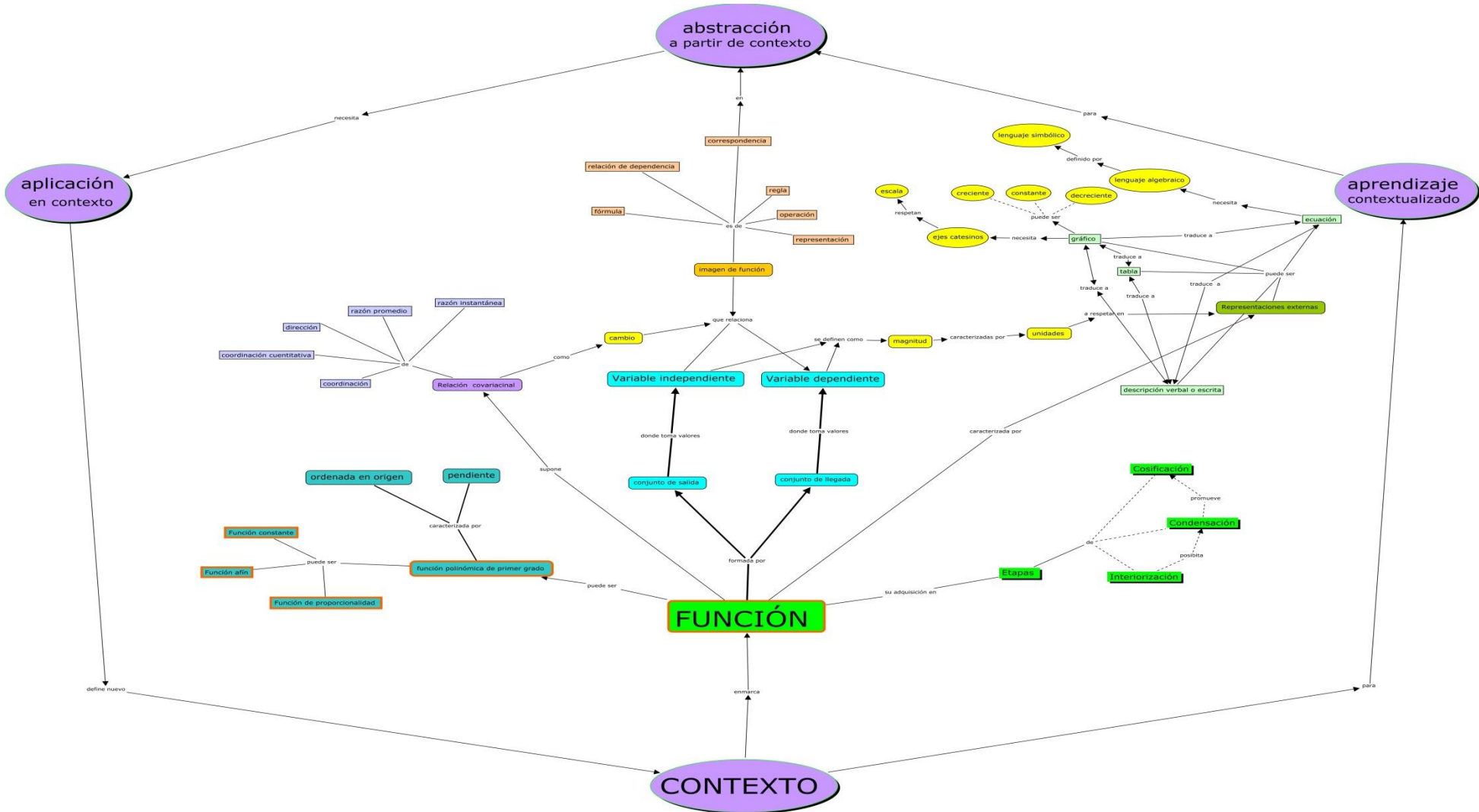


Figura 5-7. Concepto de función en contexto.

5.8.3 Dificultades y concepciones científicas alternativas y su relación con el concepto función

A medida que se han desarrollado distintos tipos de representación para explicitar los descubrimientos científicos, estas mismas representaciones son las que han posibilitado avanzar a la ciencia moderna. Lemke (1997) defiende que la ciencia no puede hablar del mundo sólo con el lenguaje de las palabras. El lenguaje de la ciencia es una combinación de palabras, diagramas, imágenes, gráficas, ecuaciones, tablas y otras formas de expresión visual. Los conceptos científicos no se corresponden con los fenómenos reales de manera unívoca. Es la interpretación de estos fenómenos, mediante diversos tipos de representaciones externas, lo que permite comprender el fenómeno mediante un trabajo de construcción de equivalencias entre ellas. Un ejemplo destacado de ello son los apuntes de Galileo en el cual se observan múltiples gráficos de parábolas construidas utilizando métodos muy distintos para entender el tiro parabólico (Renn y Damerow, 2003).

Las situaciones científicas podrán entenderse mejor a medida que el nivel de interpretación gráfica o de función sea mayor. Es decir, desde la identificación de las variables, su valor y contexto en el nivel explícito, hasta determinar qué tipo de relación se produce entre las variables. De este modo podrá realizarse una explicación, predicción o generalización del fenómeno estudiado.

Además cabe añadir también la importancia en los contextos científicos de la delimitación de la situación en el espacio y el tiempo, así como del espacio propio del gráfico y su diferenciación con el de la situación, para poder luego compararlos e identificar coincidencias o contradicciones entre ambos.

5.8.3.1 *Concepciones alternativas y dificultades relacionadas con la cinemática*

En este apartado se hace referencia tanto a las ideas previas del alumnado sobre cinemática como a las dificultades relacionadas con el movimiento y la representación del mismo a través de gráficos. Finalmente se exponen concepciones que relacionan el conocimiento en física con el conocimiento matemático.

En los muchos estudios dedicados al movimiento se han constatado concepciones alternativas entre las cuales se destacan dos por su relación directa con la presente investigación (Mora y Herrera, 2009):

- La idea de *ímpetus*, noción pre-Galileana para explicar el movimiento de los cuerpos según la cual la acción sobre un objeto les comunica un *ímpetus* que mantiene el movimiento y que poco a poco se va perdiendo.
- La idea de que es necesaria que se ejerza una fuerza para que un objeto se mantenga en movimiento.

Por otro lado, la representación de movimientos mediante gráficas que relacionan variables cinemáticas requiere procesos de abstracción y el desarrollo de habilidades de representación. Beichner (1994) indica la alta correlación entre la capacidad de utilizar indistintamente las diferentes formas de representación de un movimiento (texto escrito u oral y gráficas de posición, velocidad y de aceleración versus tiempo) y el dominio del manejo de gráficas de cinemática. No obstante, la representación de movimientos mediante gráficas de variables cinemáticas requiere procesos de abstracción y el desarrollo de habilidades de representación (Guidugli, Fernández y Benegas, 2004); además ha podido demostrarse el nivel pobre de conocimiento conceptual sobre cinemática y su representación gráfica en estudiantes que ingresan a carreras de tipo científico-tecnológico (Guidugli et al., 2004).

Algunas dificultades detectadas en distintos estudios son:

- Dificultad en la comprensión de los conceptos de posición, tiempo, velocidad y aceleración, en parte, porque se encuentran sujetos a múltiples concepciones previas que interfieren en el proceso de aprendizaje (Guidugli et al., 2004).
- Confusión generalizada entre posición y cambio de posición, por lo cual el aprendizaje conceptual del movimiento no resulta una tarea trivial (Guidugli et al., 2004)
- Dificultad en la asimilación y diferenciación de la idea de valor de la posición en un instante dado y el cambio de posición en un intervalo de tiempo.
- Dificultad en la comprensión de los conceptos velocidad y aceleración, ya que involucran procesos de abstracción e interpretación de cocientes (Guidugli et al., 2004).
- No se discrimina entre velocidad y cambio de velocidad (McDermott, 1984)
- No se asocia velocidad instantánea con un instante de tiempo (McDermott, 1984)
- Las dificultades descritas relacionadas con las variables –posición, tiempo, velocidad, aceleración- son trasladadas a la representación de las mismas de forma gráfica, dando lugar a las siguientes confusiones o dificultades: (1) confusión

generalizada por parte del 65% del alumnado al interpretar como equivalente la gráfica (x, t) con la topografía seguida por el móvil, (2) las gráficas posición y velocidad versus tiempo son consideradas equivalentes por un 77% del alumnado, (3) el 60% del alumnado considera que un movimiento tiene iguales gráficas de x , v y a versus tiempo y (4) en gráficas de velocidad, un 25% del alumnado confunde la pendiente con el valor de la magnitud en un instante dado (Guidugli et al., 2004) y (5) es difícil diferenciar entre pendiente a la curva en un punto y el valor de la ordenada (altura) en ese punto de la gráfica (6) es difícil e interpretar los cambios de pendiente y los cambios en la altura (McDermott et al., 1987)

Asimismo, Hoz y Gorodetsky (1983) identifican seis modelos observando las respuestas del alumnado al tratar de resolver dos problemas simples de movimiento uniforme, tratando de relacionar los conocimientos científico y matemático:

- Modelo *confusión* que falla en los dos aspectos físico y matemático.
- Modelo *concreto* que falla en la representación física pero tiene un modelo matemático intuitivo.
- Modelo *compensación* donde se produce una manipulación de los datos en la que también son intuitivos la representación física y los modelos matemáticos.
- Modelo *rutina* en el que tanto la representación física como el modelo matemático son intuitivos.
- Modelo *intuitivo* con una representación física completa y un modelo intuitivo, ya que los símbolos no se aplican con consistencia, las fórmulas no se explican y los cálculos aritméticos utilizan implícitamente la fórmula $t=e/v$.
- Modelo *formal*, con una representación física completa ya que el alumnado reconoce y se refiere explícitamente a los aspectos físicos de la situación, así como a los conceptos físicos y a su interrelación; por otro lado existe una formalización matemática, con un simbolismo apropiado y unos métodos correctos.

Todos estos estudios muestran, pues, que en la interpretación de gráficos funcionales que representan movimientos se entremezclarán las dificultades propias de la aplicación del concepto de función y las de la concepción de movimiento.

5.8.3.2 *Concepciones alternativas y dificultades relacionadas con la solubilidad*

En relación a los conceptos de disolución y solubilidad también se han realizado numerosos estudios sobre concepciones alternativas y dificultades del alumnado para utilizarlos de la forma en que actualmente se definen desde la ciencia, pero no se han encontrado tantos errores que se refieran a la interpretación de gráficos en los que se representen variaciones en la solubilidad.

Una de las dificultades de base viene dada por el hecho de que se sustancializan las propiedades de la materia, es decir, se considera que si un material tiene una propiedad se debe a que se le ha añadido una sustancia que la tiene. Por ejemplo, si el azúcar es dulce es porque a una materia de base sin ninguna propiedad, se le ha añadido alguna sustancia (o átomos o moléculas) que son dulces (Sanmartí, Izquierdo y Watson, 1995). Esta idea, que también forma parte de la historia de la ciencia, condiciona muchas otras dificultades observadas al hablar de disoluciones y solubilidad, ya que impide conceptualizar la idea de propiedad característica de una sustancia. Por ejemplo, el color azul del sulfato de cobre hidratado no se considera una propiedad característica de dicha sustancia, sino que se debe al tinte azul que se le ha añadido. En esta investigación esta dificultad es importante ya que la solubilidad es una propiedad característica.

Se ha constatado también que el alumnado vincula erróneamente los conceptos de concentración con los de solución saturada o diluida (Parolo, Barbieri y Chrobak, 2004) ya que presupone que si una solución es muy concentrada estará saturada y viceversa. Además tiene dificultades para imaginar cambios en la concentración de una disolución cuando aumenta la cantidad de disolvente, ya que su experiencia más habitual es la de aumentar la concentración a partir de añadir soluto (por ejemplo, más azúcar a la leche) y no la de disminuirla añadiendo disolvente. Por ello tienen dificultades para interpretar que la solubilidad es una propiedad que relaciona la cantidad de soluto que se puede disolver en una determinada cantidad de disolvente a una temperatura determinada y que ello sea una propiedad característica que diferencia una sustancia de otra. Para el alumnado más joven, si una sustancia es soluble, la cantidad de soluto que se puede disolver no tiene límite.

Lombardi, Caballero y Moreira (2009) analizan las estrategias que se requieren para leer desde las ciencias una representación externa, como es un gráfico. En concreto, leer un gráfico de variación de la solubilidad con la temperatura requiere:

- Disponer de marcos teóricos:

- Concepto de solubilidad
- La solubilidad depende de la naturaleza del soluto
- La solubilidad depende de la temperatura
- La solubilidad depende de la cantidad de disolvente
- No todos los solutos aumentan la solubilidad al aumentar la temperatura
- Identificar “pistas” en el gráfico
 - Al observar las representaciones de las variaciones de la solubilidad con la temperatura en solutos distintos posibilita reconocer que no todos se comportan igual.
- Organización de la información
 - Las variables en un gráfico se organizan en los ejes xy, y esta organización permite a) identificar relaciones entre el cambio de solubilidad para una sustancia con la temperatura y b) comparar cuando el aumento de la temperatura produce mas o menos cambios en la solubilidad.

En la lectura se han de aplicar distintos recursos para leer las etiquetas, las escalas, las unidades, los puntos y las líneas, y es a partir de ellos que se puede contextualizar la información del gráfico. Todo ello nos muestra la complejidad que comporta dicha lectura y que son reglas a aprender.

5.8.4 Relaciones entre las dificultades desde las matemáticas y desde las ciencias

Las dificultades expuestas anteriormente en cuanto a la interpretación de las gráficas y a la propia construcción del concepto función acompañadas por la falta de modelo formal científico de las situaciones planteadas en esta investigación durante la entrevista, dan lugar a un entramado complejo en cuanto a la transferencia se refiere. Si el concepto matemático está bastante alcanzado pero no el científico, el alumnado utilizará el lenguaje matemático para explicitar sus ideas científicas alternativas. En cambio, si ninguno de los dos está claro, la mezcla entre ambos dará resultados particulares, tal como se ha expuesto en el apartado de cinemática con los modelos formulados por Hoz y Gorodetsky (1983).

La interpretación de gráficas en contexto científico, pasa la utilización de procesos cognitivos superiores implicados en la visualización, ya que este proceso influye positivamente en el aprendizaje de los conceptos matemáticos. Diversos estudios han demostrado que sin este proceso, no se puede comunicar o extraer información del gráfico, así como aplicar lo aprendido sobre gráficas en las clases de matemáticas a la física o a otras materias (Dolores, et al., 2002), y por lo tanto su utilización en ciencias es bastante deficitaria.

La preponderancia de un determinado tipo de actividad de aprendizaje relacionado con las gráficas suele ser en general descontextualizada –a través de una expresión algebraica, mediante tabla de valores-; por lo tanto, los distintos conceptos no son construidos dentro del contexto y con ello el alumnado muestra grandes dificultades a la hora de interpretar, por ejemplo, que la forma de la gráfica define una relación de dependencia entre las variables –hecho éste de suma importancia en las ciencias-. Mediante este tipo de actividad difícilmente podrán aprenderse conceptos matemáticos transferibles a distintos contextos.

Por otro lado, en los libros de texto de ciencias son muy pocas las actividades relacionadas con la elaboración e interpretación de gráficas (Martínez y García, 2003; de Pro, 2007), hay una escasa conexión entre texto e imágenes (García y Perales, 2007), la mayoría de las gráficas presentan deficiencias estructurales, tanto en el interior de las mismas como en el contexto en el cual se encuentran (García y Cervantes, 2004), y su inclusión en los libros de texto está mucho más relacionada con la descripción/ilustración de información que con su enseñanza y aprendizaje como instrumento ligado al planteamiento y resolución de problemas (García, 2005).

Las investigaciones que han tratado de analizar la utilización de representaciones gráficas cartesianas en libros de texto de física y química de bachillerato en el Estado Español, han llegado a la conclusión de que la utilización en la mayoría de ellos se limita a la exposición de hechos, es decir, se hace un uso reducido de ellas para plantear problemas o como herramientas dentro de los procesos experimentales (García, 2005). García destaca entre las consecuencias de dicho uso, el que se presentan las representaciones gráficas como objetos o productos acabados, más que como fruto de la actividad científica; y en segundo lugar que se limita el uso de estas representaciones sólo a la exposición del hecho y por lo tanto no ofrece posibilidades para que el alumando puede realizar prácticas de interpretación y construcción.

García también indica que parece observarse un uso científico teórico de los gráficos, es decir, no se encuentran relacionados con grupos específicos de datos que pertenezcan a un dominio natural determinado. Así, prevalece en ellos una orientación didáctica que los muestra como herramientas matemáticas más que como instrumentos útiles para la comprensión científica de hechos. Ello puede llevar al alumnado a pensar que la representación gráfica –cuyo uso teórico es la modelización teórica- representa el comportamiento real de un grupo de datos y no el comportamiento ideal esperado sobre el

fenómeno y que, por lo tanto, la predicción del comportamiento de un fenómeno estudiado no requiera proceso de ajuste a la representación gráfica.

El autor concluye que el volúmen de información que se presenta dentro y fuera de las representaciones gráficas varía de forma importante de acuerdo al uso didáctico o científico que los autores o autoras les asignen. Así, se evidencia una tendencia a aumentar el volumen de información incluida –tanto dentro como fuera de la gráfica- cuando ésta presenta un uso didáctico instrumental; se observa una tendencia a incluir un volumen bajo de información –tanto dentro como fuera- cuando el gráfico forma parte de una situación problema, como si para resolver un problema los únicos requisitos necesarios fueran reconocer las variables implicadas y la relación que existe entre ellas. Finalmente se identifica una tendencia a esquematizar y simplificar al máximo las representaciones gráficas cuyo uso científico es teórico, tal vez para promover un elevado nivel de abstracción. Para ello se utilizan símbolos, diferentes tipos de formalizadores (García, 2005).

Por otra parte, el nivel de desempeño del alumnado de bachillerato e incluso de licenciatura en química en las tareas realizadas con gráficas muestra que si bien el alumnado de estos niveles no muestra dificultad en tareas de identificación de variables, lectura de datos y clasificación de relación entre las variables, sí presentan dificultad en tareas de identificación de la relación entre las variables, el reconocimiento de los términos incluidos en la gráfica o en la elaboración de conclusiones, explicaciones y predicciones a partir de la información gráfica (García y Perales, 2007).

5.9 Síntesis

En este capítulo se relacionan los modelos mentales o representaciones con los modelos de representación, ya que la relación entre ambos es fundamental para una construcción tanto del conocimiento matemático como del científico. La relación entre ambos hace que se construya una imagen del concepto de función que es más amplia que la definición del mismo. Además se introducen las etapas del proceso de construcción del concepto de función, el razonamiento covariacional interiorizado en dicha construcción. Por otra parte, se incluyen la interpretación de gráficos y las tareas y acciones asociadas al concepto de función. Por último se incluyen las dificultades y concepciones científicas alternativas y su relación con el concepto de función.

PARTE II

ESTUDIO EMPÍRICO

-

6 CAPÍTULO. METODOLOGÍA

1. Planteamiento del problema y objetivos
2. Contexto de la investigación
3. Datos y Categorías de análisis
4. Validación de resultados y verificación de conclusiones

En este capítulo se describe la metodología de la investigación. Para ello, se concretan los apartados correspondientes planteamiento del problema y objetivos, el contexto de la investigación, datos y categorías de análisis y la validación de resultados y verificación de conclusiones.

6.1 Planteamiento del problema y objetivos

En una enseñanza basada en competencias la cuestión de la transferibilidad de conocimientos adquiere relevancia per se. Hoy día son bastantes las evaluaciones externas que miden el nivel competencial del alumnado (por ejemplo PISA), pero son escasas las investigaciones que tratan de profundizar sobre las causas que llevan a tales resultados a excepción de las sociológicas propiamente dichas.

En esta investigación se pretende aportar conocimiento didáctico que ayude a comprender y plantear propuestas de actuación en el aula que favorezcan, en el marco de una ciencia escolar, la aplicación de conocimientos matemáticos en el desarrollo significativo de conocimientos científicos. La transferencia entre estas dos áreas pocas veces se produce en el ámbito escolar, por lo que es necesario conocer sus causas para poder avanzar hacia prácticas educativas más eficaces, con las que se obtengan mejores resultados de aprendizaje.

6.1.1 Objetivos

El objetivo general de la investigación es:

- Identificar causas de las dificultades del alumnado de 3º de Educación Secundaria Obligatoria para transferir contenidos aprendidos en clases de matemáticas - relacionados con el estudio de las funciones- a la resolución de problemas científicos, así como estudiar las estrategias didácticas que favorecen dicha transferibilidad.

Se partía de la hipótesis de que *la escasa transferibilidad de la competencia matemática –funciones- al contexto científico puede ser debida al modelo de instrucción seguido por el alumnado en las clases de matemáticas, ya que no prioriza habitualmente la contextualización de los aprendizajes.*

En función de este objetivo general y de la hipótesis de partida se han planteado los siguientes objetivos y preguntas de investigación:

- Objetivo 1. *Analizar los resultados de la transferencia de conocimientos matemáticos en la resolución de problemas en situaciones contextuales cotidianas y científicas que impliquen el concepto de función.*
 - Pregunta 1.1 *¿Qué transfiere el alumnado de lo aprendido y a qué nivel lo hace?*
 - Pregunta 1.2 *¿Influye el estilo de aprendizaje en la transferencia?*

- Objetivo 2. *Identificar las relaciones entre el estilo docente y los tipos de transferencia que presenta el alumnado de 3º de ESO en la resolución de problemas científicos que comportan aplicar el concepto de función.*
 - Pregunta 2.1 *¿Qué relación se identifica entre el estilo interactivo docente y la transferencia del concepto función en situaciones contextualizadas?*
 - Pregunta 2.2 *¿Qué relación se identifica entre una mayor o menor contextualización de la enseñanza y la transferencia del concepto función en situaciones contextualizadas?*

- Objetivo 3. *Analizar los tipos de conocimiento transferido que relacionan los conocimientos matemático y científico y los factores que los condicionan.*
 - Pregunta 3.1. *¿Se podría establecer alguna relación entre las transferencias científica y matemática?*
 - Pregunta 3.2 *¿Qué tipo de actividades didácticas son más idóneas para la transferencia?*
 - Pregunta 3-3 *¿Qué aspectos motivacionales y actitudinales influyen en la transferencia?*

- Objetivo 4. *Analizar el grado de transferibilidad desde la perspectiva de género*
 - Pregunta 4.1 *¿Cuál ha sido la incidencia de la variable sexo en la transferibilidad observada?*

6.2 Contexto de la investigación

Para dar respuesta a los objetivos de esta investigación se analiza, por un lado, cómo aprenden los y las estudiantes a partir de la aplicación de una unidad didáctica (UD) diseñada por la investigadora y que incorpora las adaptaciones realizadas por las profesoras, y por otro lado, cuáles de esos conocimientos son transferidos a nuevos contextos (de índole matemática “pura” o científicos).

La investigación utiliza una metodología predominantemente cualitativa, de tipo descriptivo-interpretativo: estudio de caso y, en menor medida, se aplica una metodología cuantitativa de carácter descriptivo-correlacional para el análisis de aspectos actitudinales.

El marco de actuación se sitúa dentro del aula. Se parte de la propuesta realizada a dos profesoras de matemáticas de 3º de ESO para que apliquen una unidad didáctica que busca promover la construcción del concepto de función teniendo como eje vertebrador situaciones contextualizadas de ciencias próximas a la vida cotidiana del alumnado. Así mismo, la propuesta pretende generar una dinámica de aula que estimule la interacción entre el alumnado y la co-y auto-regulación.

A continuación se especifican la muestra de participantes en la investigación, el proceso seguido a lo largo de los cinco años en los que se ha llevado a cabo la investigación, los procedimientos seguidos para la recogida de datos, y para el diseño de la unidad didáctica.

6.2.1 Participantes

La investigación se sitúa en Mungia, población de 17.055 habitantes situada en Bizkaia y con una renta económica media-alta, si bien el alumnado del Instituto de Educación Secundaria (IES) Mungia pertenece a una clase social de un índice económico más bajo porque gran parte de la población de nivel medio-alto estudia en la Ikastola Larramendi y prácticamente la totalidad de la población inmigrante y la de nivel socioeconómico bajo acude al citado Instituto. En el IES Mungia el nivel socioeconómico del alumnado de modelo lingüístico B (cursan en castellano la mayoría de asignaturas) es bastante inferior al del de los grupos de modelo lingüístico D (cursan todas las asignaturas en euskera a excepción de las dedicadas a los idiomas).

La muestra de alumnado participante en la investigación, elegida por conveniencia, pertenece al IES Mungia de 3º de ESO del curso académico 2008-09 (2 grupos: 1A y 1B),

que aplicaron la UD diseñada para aprender sobre el modelo de función, y un grupo (3B) del curso 2010-11, que no recibió instrucción previa sobre este tema. El grupo 3B no supone un grupo natural sino que fue elegido entre alumnado de tercero de la ESO. El alumnado de los tres grupos posee edades comprendidas entre 14-15 años y pertenecen al modelo lingüístico D. Su nivel socioeconómico y cultural, aunque no se ha analizado en profundidad, ha sido estimado por su profesorado como medio-alto.

Los dos grupos naturales 1A (formado por 8 alumnas y 10 alumnos) y 2A (formado por 10 alumnas y 9 alumnos) se dividieron en dos subgrupos (1AA, 1AB, 2AA y 2AB) para realizar desdobles de refuerzo en asignaturas instrumentales (no se tuvo en cuenta que hubiera una proporción de estudiante igual por sexo), ya que durante el curso 2008-09 había recursos para ello. La configuración de los subgrupos se realiza por las profesoras atendiendo al orden alfabético. Estos cuatro subgrupos participan en las grabaciones en video de aula que se llevan a cabo en esta investigación, en los exámenes y en el contrato de evaluación. De dichos subgrupos se seleccionan estudiantes para participar en las entrevistas. El alumnado que conforma el grupo que no ha aplicado la UD 3B (2010-11) sólo participa en las entrevistas. En paréntesis se sitúan los y las estudiantes partícipes de los grupos 1A y 2A que participan directamente en la investigación completa (a través de los exámenes, contrato de autoevaluación y entrevistas).

1AA	1AB	2AA	2AB	3B
4chicas (3)	4 chicas (1)	2 chicos (1)	9 chicos (3)	3 chicas
5 chicos (3)	5 chicos (1)	7 chicas (3)	3 chicas (1)	5 chicos

Figura 6-1. Distribución de subgrupos por sexo.

La muestra de estudiantes que participaron en las entrevistas se elige por conveniencia del siguiente modo. Se seleccionan ocho estudiantes en base a tres criterios: (a) que el número de chicos y de chicas sea el mismo, (b) que se garantice la presencia de los niveles académicos bajo, medio y alto en una proporción de 2, 4 y 2 respectivamente y (c) que el alumnado se preste voluntariamente a ser entrevistado. Las personas pertenecientes a cada nivel son elegidas por las profesoras y el profesor de cada uno de los tres grupos. El profesor participa solamente en la elección del grupo 3B. En el grupo 3B el

número de participantes de cada sexo no resulta ser equilibrado ya que varias chicas de nivel académico bajo rehúsan participar.

El profesorado participante son las profesoras de matemáticas de los grupos 1A y 2A, licenciadas en Empresariales y Matemáticas respectivamente. Ambas cuentan con más de 25 años de experiencia en la docencia de las matemáticas en la ESO y en Bachillerato y son profesoras del centro desde hace más de 20 años.

6.2.2 Desarrollo de la investigación

En este apartado se resume el proceso de investigación seguido durante los 5 años (2008-2013) que ha durado la investigación. La figura 6-2 recoge esquemáticamente dicho proceso.

Durante el curso 2008-09, tras la revisión bibliográfica sobre la transferencia, la enseñanza del concepto de función, la resolución de problemas y las metodologías activas y basadas en contextos, se empieza a diseñar una unidad didáctica (UD) sobre las funciones que tiene como marco de actuación las situaciones contextualizadas, sobre todo de carácter científico.

Durante dicho curso se solicita a dos profesoras, compañeras de la doctoranda, participar en la investigación. Para ello, se realizan dos reuniones para explicar el objetivo general de la investigación y se indica que la investigación requerirá su participación en la adaptación del diseño propuesto en la U.D. y su puesta en práctica y que sus clases serán grabadas en video.

En noviembre de 2008 se inicia la experiencia con el alumnado: las profesoras presentan a sus respectivos grupos la investigación que se piensa llevar a cabo y su propósito. Al alumnado se le informa que su participación en la investigación es voluntaria y anónima y que sus resultados no van a ser utilizados con fines ajenos a este trabajo. Además se le entrega la solicitud del permiso para que sus padres, madres o tutores/as autoricen su participación en la misma (anexo 11).

En enero de 2009 se realizan las primeras grabaciones en el aula –cuando se está trabajando el tema de ecuaciones- para analizar los estilos didácticos de las profesoras, las agrupaciones de aula y tomar contacto con el alumnado. Éste acoge con agrado el ser grabado.

En febrero (2009) se realizan sendas reuniones con las profesoras cuyo objetivo es contrastar en grupo lo observado en estas primeras grabaciones y la orientación de la

propuesta didáctica que se les solicita que apliquen. Con los resultados obtenidos del análisis inicial de las grabaciones de aula y con las ideas recogidas de las profesoras se finaliza el diseño de la unidad didáctica.

En marzo (2009), se realizan otras dos reuniones con las profesoras con el objetivo de presentar la unidad y el marco teórico que la sustenta. Se les da un plazo de 15 días para realizar las correcciones que estimen oportunas. Tras este periodo, las profesoras no aportan modificaciones al texto original y están de acuerdo en aplicarla en el aula. La puesta en práctica de la unidad didáctica se realiza desde la última semana de abril hasta la primera semana de junio (2009). En total 15 horas de clase con cada subgrupo.

La primera sesión, cada profesora la dedica a explicar de modo general la unidad, cuestiones referentes a la simbología que detalla el tipo de agrupamiento propuesto para las actividades. Los símbolos indican la organización en cada actividad:

- ♣ trabajo en equipo,
- ♠ trabajo en parejas; por lo general las actividades se turnarán en cuanto a quién la realiza y quién la supervisa,
- ♦ trabajo individual,
- △ tarea para casa; habrá que traerla realizada para el día siguiente,
- ☺ tarea a evaluar por la profesora,
- ☺ Coevaluación; tarea evaluada por el alumnado; las tareas se realizan individualmente y una vez terminadas las personas correspondientes a la misma pareja intercambian los trabajos realizados y corrigen las actividades del compañero/a. El trabajo revisado deberá reflejar los puntos débiles, los errores y las propuestas de mejora,
- ☺ Cada estudiante revisa su propia actividad de forma reflexiva y trata de elaborar una base de orientación al respecto.
- ▶ La profesora observará si se ha transferido el conocimiento a otro contexto distinto.

A lo largo del proceso, cada profesora va tomando decisiones sobre qué actividades del diseño original aplica, cuáles añade, cuáles modifica y cuáles no utiliza. En el anexo 8 se especifican las actividades que realiza cada profesora (coloreadas en verde claro), las añadidas (coloreadas en un verde más intenso), las modificadas en parte (coloreadas en ocre), las utilizadas peor desde una perspectiva distinta a la que fue diseñada (color rosa) y las que no se aplicaron (en color blanco). La tabla 6-1 recoge un fragmento de la tabla completa que se puede encontrar en dicho anexo 8.

Tabla 6-1

Fragmento de la tabla de actividades del grupo 1A (incluye ambos subgrupos)

PROPUESTAS 1A grupo		♣	♠	♦	♠	😊	😊	☹	▶	TAREAS
c										
LECTURA DE GRÁFICOS										
1. Gráficos de casa/ gráficos de prensa	EXP.	x								
2. Gráficos de tareas ya trabajadas	EXP.	x								
	EST.									
3. Gráfico de la ducha	EXP.	x			x		x			

No se pueden grabar más de 11 horas de cada subgrupo debido a incompatibilidades en los horarios y razones personales ya que es la doctoranda la única persona que realiza las grabaciones. Los días 20 y 21 de junio las profesoras pasan al alumnado el contrato de autoevaluación. La doctoranda no participa en dicho pase, aunque da las instrucciones oportunas sobre su finalidad a las profesoras.

La última quincena de junio se realizan las entrevistas individuales al alumnado voluntario que ha sido elegido. Las entrevistas se llevan a cabo en una sala de visitas del propio instituto y en horario académico, a excepción de la última entrevista que se lleva a cabo en otra aula de otro edificio del mismo instituto y fuera de horario académico.

La entrevista (anexo 18) consta de dos partes diferenciadas. En la primera se invita cordialmente al alumno o alumna a participar comunicándole que sus aportaciones son muy importantes para la investigación, no en el sentido de identificar su conocimiento sobre las funciones, sino sobre todo, para averiguar qué es lo complicado y lo fácil de las tareas solicitadas. En esta primera parte se plantean preguntas relacionadas con su autoconcepto, autoestima, expectativas de estudios futuros, gustos por las ciencias y las matemáticas, ayudas recibidas en el estudio por parte de la profesora particular, familiares, preferencia por tipo de agrupamientos para trabajar en el aula y en la unidad didáctica trabajada. En la segunda parte, se presentan las situaciones contextualizadas (problemas científicos relacionados con su vida cotidiana) y se comienza con las preguntas encaminadas a la búsqueda de transferencia por parte del alumnado; siempre tratando de que el alumnado se sienta lo más relajado posible.

Entre septiembre de 2009 y 2010 se realiza la reducción de los primeros datos y su análisis. Los resultados hacen necesaria una tercera muestra, la del denominado grupo 3B, que actúa de grupo de contraste, ya que no ha trabajado la unidad didáctica sobre funciones durante ese curso. La finalidad es poder verificar si los resultados obtenidos por el alumnado de los dos primeros grupos se explican por el proceso de aprendizaje seguido o

se podrían haber alcanzado aplicando sólo razonamientos intuitivos o producto del sentido común.

En diciembre de 2010, se aplica el Cuestionario de Gestión motivacional (CGM) de Cabanach et al., 2009 (anexo 4) para contrastar los datos con los recogidos en la primera parte de la entrevista. El cuestionario lo aplica –excepto en algún caso- la investigadora y comenta su propósito al alumnado participante.

Ese mismo mes se solicita al departamento de matemáticas y al profesor encargado de las clases de 3º de la ESO -que aún no ha empezado a trabajar el tema de las funciones- la autorización para realizar entrevistas a un grupo de alumnos y alumnas con características iguales a la de los grupos que participan en la investigación. El profesor explica al alumnado el objetivo de la entrevista y asegura que los datos sólo serán utilizados para la investigación. Al alumnado interesado se le pide también que sus madres, padres o tutoras/es den su consentimiento. En estas entrevistas no se incluye la primera parte de la entrevista referente a cuestiones actitudinales. No obstante, la doctoranda trata de cuidar al máximo la comodidad y que el alumnado se sienta relajado, ya que este grupo de estudiantes no la conocen previamente. Las entrevistas se realizan en horario académico y en una sala de entrevistas del instituto donde asisten a sus clases.

A partir de esas fechas hasta el 2012 se trabaja de forma intensa en el análisis y la categorización de datos de los tres grupos. Se crean tablas de doble entrada y se triangulan las categorías de análisis propuestas y/o el análisis realizado, con las directoras y con docentes especialistas en ciencias y matemáticas tanto de educación secundaria (Rodolfo Alvarez y Luis Zaballo) como de universidad (Jose Manuel Almuñí, Carmen Azcárate y Jordi Deulofeu).

Las categorizaciones se codifican también numéricamente, proceso también triangulado con las directoras. Para el análisis estadístico de los resultados obtenidos en el cuestionario de gestión motivacional se utiliza el programa SPSS 17 bajo la orientación de la profesora Eider Goñi y con la colaboración del profesor José Domingo Villarreal. A la luz de los resultados estadísticos surge la necesidad de proseguir la revisión bibliográfica.

Durante el año 2013 se triangulan los resultados entre la doctoranda y las directoras de la tesis, con la participación puntual de la investigadora Carmen Azcárate de la Universidad Autónoma de Barcelona.

Finalmente, se lleva a cabo la redacción de la memoria de la investigación realizada

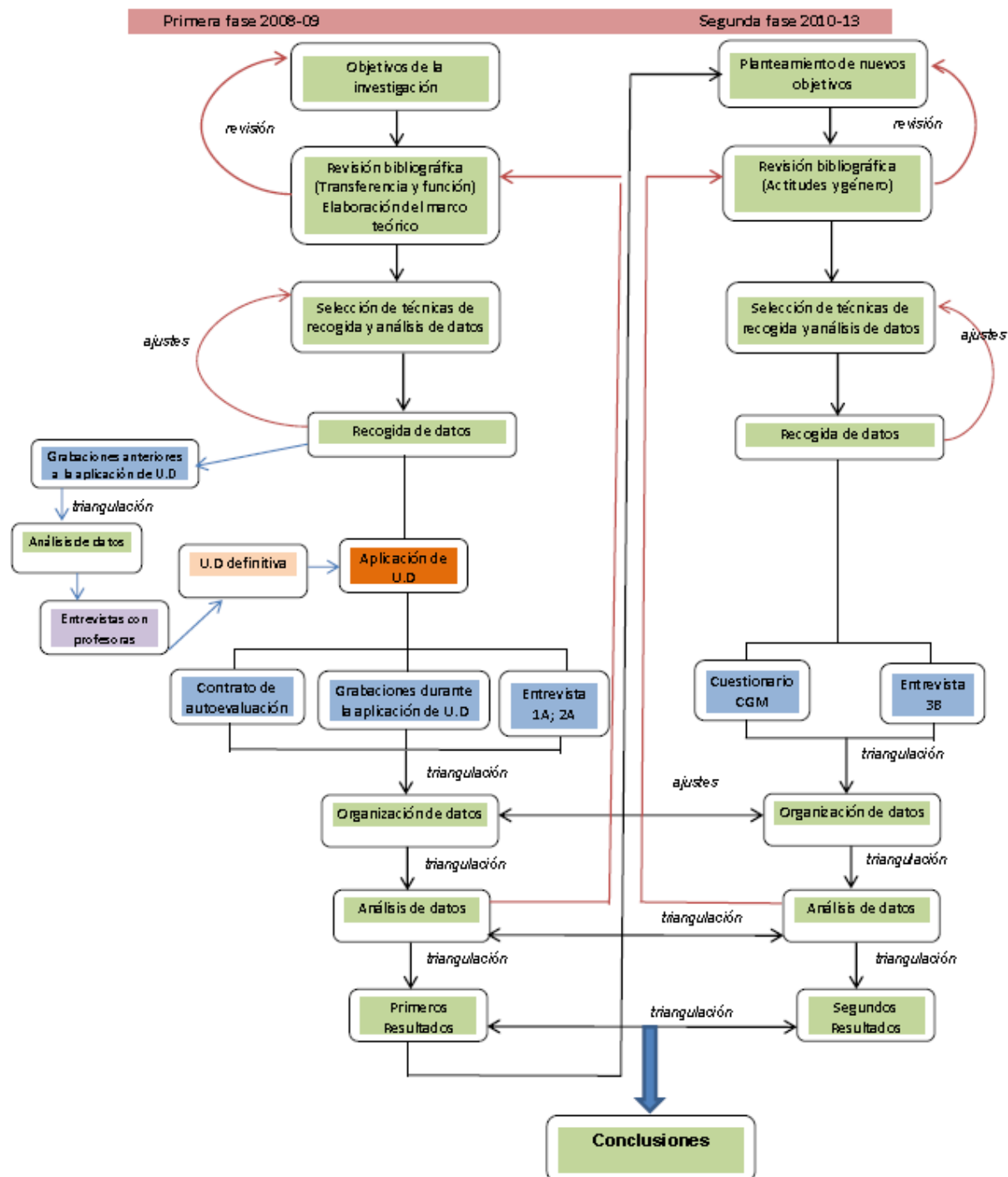


Figura 6-2. Proceso llevado a cabo en la investigación.

6.2.3 Proceso de recogida de datos

Los datos se obtienen en dos fases; en la primera, se llevan a cabo las grabaciones de aula, y se recogen las respuestas de los exámenes y del contrato de autoevaluación de

los subgrupos 1AA, 1AB, 2AA y 2B. Además, se realizan las entrevistas con el alumnado escogido perteneciente a estos grupos.

Tabla 6-2

Resumen de participantes y acciones llevadas a cabo con cada grupo de estudiantes

Resumen de participantes y acciones llevada a cabo con cada grupo de estudiantes					
	1A(8chicas + 10 chicos)		2A (10 chicas + 9 chicos)		3ESO (4 chicas y 5 chicos)
	1AA 4 chicas 5 chicos	1AB 4 chicas 5 chicos	2AA 7 chicas 2 chicos	2AB 3 chicas 9 chicos	Grupo control 3B 3 chicas 5 chicos
Solicitud de permiso para la participación en la investigación y grabación de imágenes (noviembre, 2008)	x	x	x	x	-
Grabaciones de aula (enero, 2009)	x	x	x	x	-
Grabaciones de la aplicación de la U.D (abril-junio, 2009)	x	x	x	x	-
Aplicación del contrato de autoevaluación (junio, 2009)	x	x	x	x	-
Entrevistas personales a selección de cada subgrupo (junio-julio, 2009)	x	x	x	x	-
	3 chicas 3 chicos	1 chica 1 chico	3 chicas 1 chico	1 chica 3 chicos	3 chicas 5 chicos
Cuestionario de gestión Motivacional, CGM, (diciembre, 2010)	x	x	x	x	
Solicitud de permiso para la participación en la investigación y grabación de imágenes (diciembre, 2010)	-	-	-	-	x
Entrevistas personales a la selección de 3º ESO (diciembre, 2010)	-	-	-	-	x

En la segunda fase, se recogen los datos de las entrevistas de los y las estudiantes seleccionadas del grupo 3B y las respuestas al cuestionario de gestión motivacional del alumnado que ha participado en la primera parte en las entrevistas. En apartados posteriores se describen y justifican los instrumentos utilizados para la recogida de los datos.

6.2.4 **Diseño de la Unidad Didáctica (UD)**

La unidad didáctica diseñada para ser aplicada en el marco de esta investigación tiene en cuenta, entre otras, las investigaciones de Dolores (2004) y Dolores y Cuevas (2007) favorables a desarrollar procesos de visualización para alcanzar diversos objetivos dentro del proceso de aprendizaje de las matemáticas, la consideración de Azcárate (1995) que señala la importancia del uso de diferentes representaciones de los conceptos para su aprendizaje y la relevancia de conocer las relaciones entre las mismas, la de Deulofeu (1995) que considera que la representación gráfica es la más adecuada para iniciar el

aprendizaje del concepto función y sus propiedades, y la de Sanz (2004) que destaca la contribución de la importancia de la función semiótica del lenguaje matemático.

Así mismo la propuesta manifiesta la importancia de que el aprendizaje de los conceptos parta del conocimiento del alumnado (Azcárate, 1995), o de sus intuiciones (Deulofeu, 1995).

La unidad didáctica tiene como eje vertebrador partir de situaciones contextualizadas para construir los procedimientos y conceptos asociados al modelo de función. El trabajo se inspira en dos propuestas didácticas, la primera de Jorba y Sanmartí (1990) y la segunda de Azcárate (1999) y algunas de las actividades han sido cedidas por sus autoras para su incorporación en la unidad didáctica. De la primera aportación es destacable sobre todo la contextualización científica de gráficos. La segunda aporta, además, el marco teórico que sustenta la unidad.

Por otro lado, para la estructuración de la secuencia de las actividades se tiene en cuenta la propuesta de Jorba y Sanmartí (1994) sobre las etapas del proceso de aprendizaje.

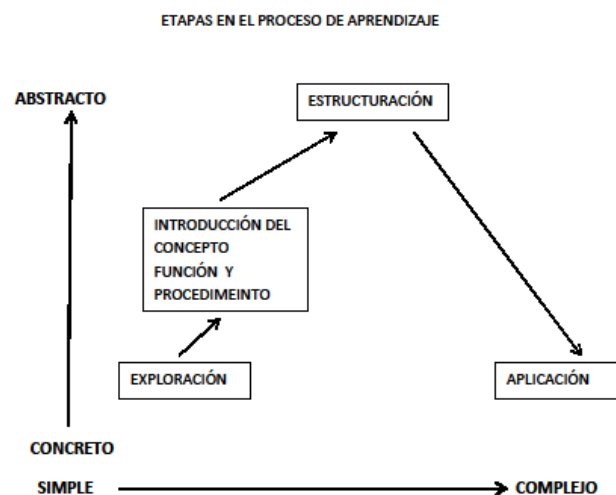


Figura 6-3. Etapas en el proceso de aprendizaje (Jorba y Sanmartí, 1994).

Por último en la unidad didáctica se destaca la importancia de la evaluación, basada en la aportación de Sanmartí (2007).

La unidad didáctica se divide en los siguientes apartados: (A) Lectura de gráficos; (B) Interpretación de gráficos; (C) Construcción de tablas y gráficos; (D) Extracción de datos a través de tabla o gráfico; (E) La proporcionalidad; (F) La recta como gráfica de una función. La función afín o la función polinómica de primer grado; (G) La hipérbola como

gráfica de una función. La función inversa y (H) La parábola como gráfica de una función. La función cuadrática.

Cada una de las actividades de cada apartado corresponde por lo menos a una de las etapas en el proceso de aprendizaje (por ejemplo la actividad 53 –entrada a patinar- se considera oportuna para la etapa de exploración y/o introducción). Para más detalles sobre la unidad didáctica y las relaciones entre las etapas de aprendizaje, los apartados y sus correspondientes actividades, ver anexos 1 y 11.

Además la unidad didáctica incorpora un sistema de organización de tareas: ♣, ♠, ♦, △, ☺, ☺c, ☹ y ► (comentadas en el apartado de procedimiento).

6.3 Datos y categorías de análisis

En este apartado, en primer lugar se describen los instrumentos utilizados para la recogida de datos, en segundo se indican y justifican las categorías de análisis y, por último, se identifican las distintas variables que se han tenido en cuenta en el análisis de los datos. Finalmente se concluye con la presentación de la metodología utilizada para la validación de resultados y verificación de conclusiones.

6.3.1 Instrumentos de recogida de datos

Para identificar cómo transfiere el alumnado conocimientos matemáticos en la resolución de problemas planteados en situaciones contextuales cotidianas y científicas se utilizaron distintos instrumentos y en distintos momentos, contextos, ámbitos de conocimiento, etc.

Barnett y Ceci (2002) proponen la necesidad de establecer una taxonomía sobre la transferencia, idea ampliamente desarrollada en el marco teórico. En esta investigación se han tenido en cuenta especialmente aspectos relacionados con el contexto de aprendizaje y el contexto de transferencia (ver figura 6-4 que han condicionado tanto los instrumentos seleccionados para la recogida de datos, como los momentos en que se recogieron.

Contexto: contexto de aprendizaje y contexto de transferencia					
	<i>Lejano</i>				<i>Cercano</i>
Ámbito de conocimiento	Ratón vs. Rata	Biología vs. Botánica	Matemáticas vs. Ciencias	Ciencias vs. Historia	Ciencias vs. Arte
Contexto físico	<i>En la misma clase en la escuela</i>	<i>En diferentes clases en la escuela</i>	De la escuela a un laboratorio	De la escuela a casa	De la escuela a la vida cotidiana
Contexto temporal	En la misma sesión	Al día siguiente	Transcurridas varias semanas	Transcurridos varios meses	Transcurrido un año
Contexto de funcionamiento	<i>Ambos académicos</i>	Ambos académicos pero no evaluativos	Académico vs. Llevar formularios	Académico vs. Un cuestionario informal	Académico vs. Un juego
Contexto social	Ambos individual	Individual vs. En pareja	Individual vs. pequeños grupos	Individuales vs. grandes grupos	Individual vs. sociedad
Modalidad	Ambos en el mismo formato	Mismo formato, diferente tipo (escrito vs elección múltiple)	Escrito vs. examen oral	Lectura vs. examen práctico	Lectura vs. ejecución

Figura 6-4. Adecuación de la Taxonomía de Barnett y Ceci (2002).

Para la recogida de datos se han utilizado los siguientes instrumentos:

6.3.1.1 Examen

El examen se planteó por cada una de las profesoras al finalizar la enseñanza del tema, sin intervención de la investigadora, y consta de cinco preguntas (ver anexo 2). Se utilizó un examen para los dos subgrupos del grupo 1A y dos exámenes distintos para los subgrupos del grupo 2A. El examen del grupo 1A consta de cuatro situaciones contextualizadas, el examen del subgrupo 2AA de tres situaciones contextualizadas, una de ellas perteneciente a pruebas de la evaluación PISA no referente a las funciones, y el examen del subgrupo 2AB consta de dos situaciones contextualizadas. La tarea de translación en el examen del grupo 1A requiere mayor demanda de conocimiento matemático que la de los subgrupos 2AA y 2AB, ya que parte de la descripción de la situación y se solicita la translación hacia el gráfico, tabla de datos o expresión algebraica. Sin embargo, en los otros subgrupos se aporta al menos la representación de los ejes cartesianos. Por otra parte, la profesora de los subgrupos 2AA y 2AB da un valor muy distinto (3 puntos y 0.75 puntos) a dos preguntas muy parecidas en cuanto a habilidades matemáticas se refiere (pregunta 4 en ambos casos). También se califican con distinta

puntuación la pregunta 5 en el subgrupo 2AA y la pregunta 3 en el subgrupo 2AB, a pesar de que la pregunta que ha sido calificada con menor puntuación ha requerido mayor conocimiento. La pregunta 6 del grupo 1A, que tiene el mismo objetivo que las preguntas 5 y 3 de los subgrupos anteriores, se califica, sin embargo, con 1 punto.

Las cuestiones planteadas en el examen, de acuerdo con los criterios recogidos en la figura 19, corresponden a una transferencia cercana y horizontal y, por lo tanto, distinta a la demandada durante la entrevista, que fue lejana y vertical.

En la investigación se analizaron los resultados de una parte de las preguntas del examen (se recogen en la tabla 10, pág. 190). Se seleccionaron en función de su idoneidad para comparar dicho análisis con el de las respuestas obtenidas en la entrevista. Las respuestas a cada una de las preguntas fueron calificadas por la investigadora en función de los criterios de la tabla 3 (por lo que sus resultados no siempre coinciden con las calificaciones dadas por las profesoras). Los valores se introdujeron en el sistema SPSS 17, con los números 1, 2, 3 y 4 respectivamente.

Tabla 6-3

Criterios de evaluación y valores aplicados para la calificación de las preguntas de los exámenes

Valores	Criterios de evaluación
0	No se ha respondido, se ha respondido totalmente mal, sin relación a lo preguntado.
1	Se ha respondido mal pero relacionado con lo preguntado.
2	El nivel de respuesta ha sido medio, se ha respondido a la mitad, se ha respondido a ejercicios pero no al problema.
3	La respuesta ha sido totalmente correcta.

6.3.1.2 Contrato de autoevaluación

El contrato de autoevaluación consta de 13 cuestiones relacionadas con distintas demandas trabajadas en el aula (ver anexo 4) y tiene como finalidades, en primer lugar, que el alumnado reflexione sobre el nivel de adquisición de un concepto o procedimiento y en el caso de existir dificultades identificarlas y, en segundo lugar, identificar el nivel de metacognición del alumnado. Para ello se preguntaba al alumnado, por ejemplo, si era capaz de *Argumentar un gráfico concreto* y si lo podía realizar con distintos grados de dificultad: (0) sin dificultad; (1) poca dificultad; (2) bastante dificultad; (3) gran dificultad. Además se solicitaba el grado de ayuda necesario para hacer frente a dicha demanda en caso de existir dificultad: (a) poca ayuda; (b) bastante ayuda y (c) gran ayuda. La profesora

del grupo 1A no insistió en esta última demanda y el alumnado de este grupo no incluyó esta parte en sus respuestas.

6.3.1.3 Entrevista

La entrevista se desarrolla en un contexto distinto al aula, transcurridas cerca de dos semanas –existen problemas de horario por parte de la investigadora como por parte de alumnado, ya que el curso se encuentra en su recta final-. La entrevista pretende tener un carácter coloquial y se busca la aplicabilidad del concepto función en situaciones contextualizadas cotidianas de carácter científico. Por lo tanto el ámbito de actuación se sitúa en un contexto medio tendente a ser lejano siguiendo la propuesta de Barnetty y Ceci (2005). Para caracterizar la transferencia dinámica del alumnado en la entrevista se utiliza el marco propuesto por Rebello et al. (2005). El modelo se basa en "creaciones personales de las relaciones de similitud" de cada estudiante, entre el aprendizaje y la transferencia de contextos, en lugar de en similitudes percibidas por la persona investigadora y por lo tanto es acorde con la perspectiva de transferencia AOT propuesta por Lobato (2003).

A excepción del esquema –que se solicita en último lugar-, toda la entrevista se realiza oralmente, la persona entrevistada no tiene que realizar nada por escrito (a no ser que él o ella lo soliciten).

La entrevista consta de dos partes diferenciadas:

- *Primera parte.* Se pregunta al alumno o alumna sobre sus intereses académicos, gustos, cuestiones referentes a su autoconcepto y autoestima; datos que serán analizados junto con los resultados académicos.
- *Segunda parte.* Se presentan tres situaciones contextualizadas: (1) se refiere al lanzamiento de una pelota al aire (se realiza el lanzamiento y se muestran gráficos v/t y ecuaciones referentes al movimiento) y se indica que no deben tenerse en cuenta los momentos en los cuales la pelota está posada en la mano; (2) referida al movimiento de la montaña rusa (se muestra una fotografía y gráficos v/t relativos al movimiento) y (3) se refiere a la variación de la solubilidad de tres sustancias (cloruro de sodio, nitrato de sodio y nitrato de potasio) en relación con la temperatura; los tres gráficos están representados en un sistema cartesiano). Los gráficos y fotografía así como las preguntas se reproducen en la y tabla 6-4 y figura 6-5.

Tabla 6-4 Preguntas básicas planteadas en relación a cada una de las situaciones en la entrevista

	En todas las entrevistas	En algunas entrevistas
1. Situación de la pelota	1. ¿Cuál de las gráficas refleja la situación? 2. ¿Cuál de las ecuaciones refleja la situación?	A1. ¿Podríamos situar a la v donde está la t y la t donde está la v, es lo mismo? A2. ¿Hay alguna relación entre las variables indicadas?
2. Situación de la montaña rusa	1. ¿Cuál de las gráficas refleja la situación?	B. ¿Hay semejanza entre la situación de la pelota y la de la montaña rusa (P-MR)? C. Una vez oídas las respuestas ¿sabrías decir por qué? D1. ¿Qué es m? D2. ¿Qué es la pendiente? D3. ¿Un ejemplo? E. ¿Qué es n?
3. Situación sobre solubilidad	1. ¿La solubilidad de las tres sustancias no tiene que ver con la temperatura? 2. ¿La solubilidad del nitrato de sodio siempre será superior a la del nitrato de potasio? 3. ¿Observas algo interesante? y/o 3b: Si quisiéramos saber cuándo tienen la misma solubilidad, ¿cómo lo sabríamos? 4. ¿Cómo hallaríamos esos puntos?	G. ¿Las matemáticas o lo que has trabajado en clase te ha ayudado a poder hallarlos? H 1 ¿Son funciones lo que vemos? H2 ¿Qué es para ti una función? H3 Podrías decirme un ejemplo de función. H4 ¿Serías capaz de hacer un esquema sobre las funciones?

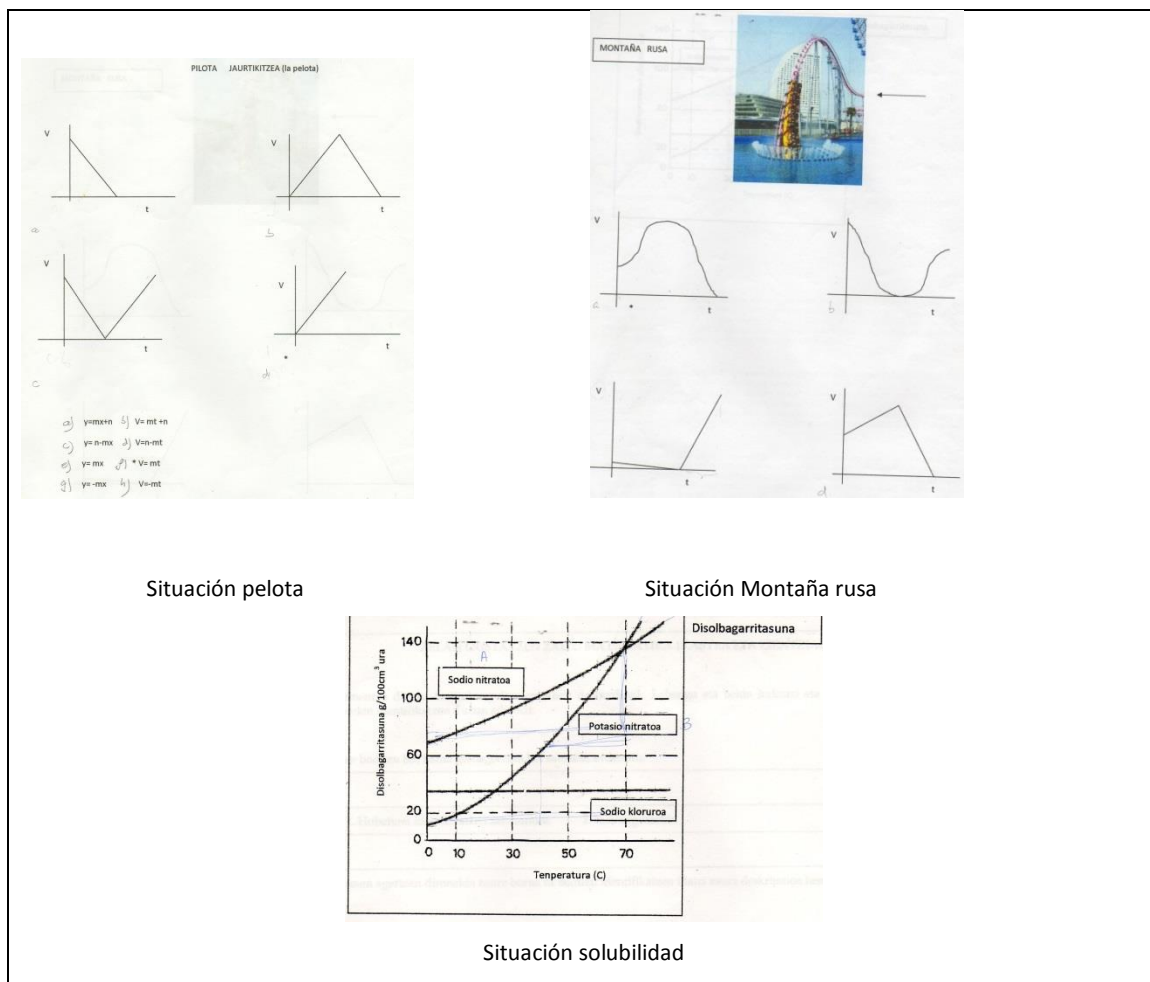


Figura 6-5. Situaciones planteadas en la entrevista.

6.3.1.4 *Cuestionario de Gestión Motivacional (CGM)*

Para analizar la gestión motivacional se utilizó el cuestionario desarrollado y validado por Cabanach et al. (2009) que está dividido en tres escalas teóricas: gestión de las creencias, gestión de los motivos y el valor y gestión afectiva. *La escala de gestión de las creencias* incluye ítems para medir: (a) activación de creencias de autoeficacia (ítems 1, 4, 6 y 7), (b) generación de expectativas positivas de resultado (ítems 2, 5, 9, 10, 11 y 12) y (c) potenciación del control percibido (ítems 3, 8 y 13). *La escala de gestión de los motivos y el valor* recoge estrategias de: (a) evocación de motivos de aprendizaje (ítems 18, 23, 30 y 33), (b) evocación de motivos de rendimiento (ítems 17, 19, 24, 25, 31 y 34), (c) evocación de motivos de aprobación social (ítems 16, 28, 29 y 32), (d) fomento del valor de la tarea (ítems 14, 20, 21 y 22) y (e) administración de refuerzos extrínsecos (ítems 15, 26 y 27). *La escala de gestión afectiva* incluye: (a) control de la ansiedad (ítems 38, 42, 43 y 46), (b) fomento de la competitividad (ítems 35, 36, 37, 41 y 47) y (c) evocación de pensamientos pesimistas (ítems 40, 44 y 45).

El cuestionario presenta un encabezamiento genérico (*Cuando estoy realizando una tarea y me cuesta mantenerme centrado/a en el estudio...*) con el que se pretende situar a cada estudiante ante una hipotética situación de baja motivación académica. Las respuestas a los ítems se realizan mediante una escala Likert de cinco puntos (1=nunca lo haces, 2=casi nunca lo haces, 3= algunas veces lo haces, 4= lo haces casi siempre y 5=lo haces siempre).

6.3.2 **Categorías de análisis**

Establecer las categorías de análisis ha sido una tarea compleja debido a la diversidad de los datos recogidos y a las distintas miradas que exigía la investigación. En primer lugar se han categorizado desde el punto de vista matemático, y en segundo lugar desde el científico. Finalmente, se han cruzado dichas categorías para llegar a otras nuevas orientadas a caracterizar los estilos de transferencia.

6.3.2.1 *Categorías de análisis desde el punto de vista matemático*

La transferencia del concepto de función se categoriza a partir de:

- Una red sistémica (Bliss, Monk y Ogborn, 1983) que incluye tanto las palabras o referencias cualitativas como los valores numéricos determinados. Esta herramienta es fundamental para que a lo largo de la investigación en cualquier

momento puedan comprobarse los datos y los resultados de cada una de las categorías de análisis establecidas. De este modo es posible analizar las características grupales además de las individuales y las interdependencias existentes entre conceptos y procedimientos (ver anexo 15).

- Una agrupación de los datos en relación a las tareas de translación, predicción y clasificación (Leinhardt et al., 1990)
- Categorías de análisis establecidas para cada tarea (Azcarate 1990, Leinhardt et al., 1990; Shell Centre for Mathematical Education, 1990).
- En las categorías de análisis de la entrevista, se definen parámetros con los que se identifican distintos niveles de adquisición, siguiendo la perspectiva de Lobato (2003). Los distintos parámetros, correspondientes a distintas categorías de análisis, se agrupan en función de si la acción principal realizada es la interpretación o si además de ésta se necesita una acción de construcción. La primera de las dos agrupaciones se define como Matemáticas I y la segunda como Matemáticas II.
- La relación entre los resultados de Matemáticas I (MI) y Matemáticas II (MII) posibilita establecer niveles de conocimiento matemático generales (M).

La tabla 6-5 resume las tareas y categorías de análisis utilizadas en el estudio de los datos obtenidos en las entrevistas. Además también se indican los parámetros y los criterios para definir los distintos niveles. Todo ello hace referencia a los puntos (2), (3) y (4) anteriores. Por otra parte la tabla 6-6 recoge los parámetros que se han tenido en cuenta para establecer las categorías Matemáticas I y Matemáticas II, en referencia al punto (5) y por último la tabla 6-7 especifica las puntuaciones que han sido consideradas en cada nivel de matemáticas.

Tabla 6-5.

Relación entre las tareas, categorías y subcategorías de análisis, parámetros asociados y niveles establecidos

Tareas y categorías de análisis				
Tareas analizadas	Categorías de análisis	Subcategorías de análisis	Parámetros	Niveles establecidos para cada subcategoría de análisis y para cada parámetro en función de los criterios de evaluación identificados <i>(Las calificaciones otorgadas a cada parámetro y situación se encuentran codificadas entre paréntesis. Para más detalles consultar anexo 23.2)</i>
Translación	Traducción desde la descripción de la situación a una representación funcional básica.	Traducción desde la descripción de la situación al gráfico	Identificación de variables	IVm3: Identifica al menos en dos situaciones de tres –pelota, montaña rusa, solubilidad-ambas variables, una de física y la otra de química (122) IVm2: La identificación de las variables ha sido a lo sumo parcial en las situaciones de física y total en la situación de química (002, 102, 112) IVm1: La identificación de las variables ha sido a lo sumo parcial en las distintas situaciones (001, 111) IVm0: NO identifica adecuadamente ninguna variable en ninguna situación planteada, ni de física ni de química
			Relación entre las variables	RVm3: Se describe relación entre ambas variables tanto en situación de física como en situación de química, indicando en esta última relación lineal (123) RVm2: NO se describe relación entre las variables de situaciones de física y Sí se describe relación lineal en situación de química (003; 113) RVm1: NO se describe relación entre las variables de situaciones de física y Sí se describe relación entre las variables en situación de química (002;102) RVm0: NO describe relación entre las variables en ninguna de las situaciones planteadas, ni de física ni de química (000; 001; 111)
			Descripción del gráfico (argumentación)	Dm4: Las descripciones no han tenido un carácter icónico en ninguna de las situaciones planteadas (222) Dm3: Ha habido una sola descripción de carácter icónico frente a dos (una de física y otra de química) donde se ha descrito la relación funcional (122) Dm2: Ha habido descripción de carácter icónico en alguna situación de física o química y también ha habido descripción caracterizada por relación lineal (112;121) Dm1: Ha sido de carácter icónico en situación de física y en química la descripción incluía en sus argumentaciones sube, baja... (111)
			Traducción desde la descripción de la situación al gráfico	TDGm4: Sí ha habido traducción en ambas situaciones de forma coherente y al gráfico adecuado (33). TDGm3: Sí ha habido traducción total en una de las situaciones del contexto de física o la traducción en las situaciones está relacionada con la adecuación de la descripción al gráfico (22, 23). TDGm2: NO ha habido traducción; bien porque ha habido una interpretación icónica o, no habiéndolo sido, no se ha habido coherencia entre lo expresado y lo representado. (11, 21). TDGm1: NO ha habido traducción (0), el o la estudiante no ha entendido lo representado.

	Traducción desde los sistemas de representación gráfico y algebraico (ecuación)	Coherencia entre las representaciones gráfica y algebraica	Elección de variables en la ecuación	EVm3: Elige variables matemática y variables de contexto EVm2: Elige variables de contexto EVm1: Elige variables matemáticas EVm 0: no escoge ecuación
			Características del lenguaje utilizado	Las características del lenguaje utilizado han sido reagrupadas en la categoría Dm
		Coherencia entre las representaciones gráfica y algebraica Construcción de la representación algebraica a partir de la representación gráfica	Ordenada en el origen	OOm4: S e utiliza el concepto de ordenada en el origen con carácter estático tanto a la hora de utilizarlo como argumento al escoger la ecuación en situación de pelota como a la hora de interpretarlo en situación de solubilidad, se sabe hallar el valor de n en situación de solubilidad (112) OOm3: Se utiliza el concepto de ordenada en el origen con carácter dinámico en alguna de las situaciones o en ambas; sin embargo no se halla n en situación de solubilidad (120,220) OOm2: Es utilizado como argumentación a la hora de escoger la ecuación en situación de pelota y su interpretación en situación de montaña rusa es de carácter icónico, no hallan valor de n en situación de solubilidad (110) OOm1: No es utilizado dicho concepto como argumento en la situación de pelota y en la situación de la montaña rusa puede darse una interpretación icónica. No se halla n en situación de solubilidad a excepción de 1A9 (000, 010, 011)
			Pendiente	Pm3: Identifica la m como pendiente, la interpretación del concepto puede estar basada en el sentido del gráfico y puede tener un sentido dinámico/funcional; a la hora de escoger la ecuación acorde a la situación de pelota se escoge adecuadamente la pendiente y sabe hallar la pendiente por lo menos en un tipo de función. (100000112, 10010011Np, 10010011Np, 100100110, 100100123, 10100412Np)(Np: no se ha preguntado). Pm2: Identifica la m como pendiente, la interpretación del concepto se realiza en base al sentido del gráfico además de modo dinámico/funcional; a la hora de escoger la ecuación acorde a la situación de pelota se escoge adecuadamente la pendiente; sin embargo, no sabe hallar la pendiente de las funciones. (101002103, 100000103). Pm1: Identifica la m como pendiente, la interpretación del concepto se realiza en base al sentido del gráfico pudiendo indicarlo de modo geométrico (inclinación) destacando que en el caso del cloruro de sodio es constante y por lo tanto no tiene pendiente; a la hora de escoger la ecuación acorde al gráfico escogido en la situación de la pelota escoge adecuadamente la pendiente; sin embargo, no sabe hallar la pendiente de las funciones. (100000101, 100100101, 101102100, 102103101). Pm0: no se identifica a la m como pendiente y no interpreta de modo adecuado el concepto; sin embargo a la hora de escoger la ecuación acorde al gráfico escogido en la situación de la pelota escoge adecuadamente la pendiente (000000100).
			Traducción desde el gráfico a la ecuación	TGEm3: En general escoge las dos ecuaciones necesarias para la gráfica optada en la situación de la pelota y saber hallar las ecuaciones correspondientes tanto para la función afín como para la función constante en la situación de solubilidad. (2222). TGEm2: Escoge al menos una ecuación (en algunos casos la única necesaria) acorde al gráfico optado en la situación de la pelota y el proceso utilizado para hallar las ecuaciones correspondientes a las funciones presentadas en la situación de la solubilidad no ha sido del todo adecuado. (1002, 210, 2010). TGEm1: Escoge al menos una ecuación (en algunos casos la única necesaria) acorde al gráfico optado en la situación de la pelota; sin embargo, no hay proceso para hallar las ecuaciones correspondientes a las funciones presentadas en la situación de la solubilidad. (200, 2000).

				TGEm0: No escoge ecuación o no la escoge adecuadamente para la gráfica optada en la situación de la pelota y tampoco sabe hallar las ecuaciones correspondientes a las funciones presentadas en la situación de la solubilidad. (000, 100, 0010, 1000).
Predicción		Identificación e interpretación del punto de encuentro		PEm3: Destaca la existencia de "punto de encuentro" y además lo interpreta adecuadamente de modo explícito (21). PEm2: Identifica punto de encuentro y además interpreta adecuadamente de modo explícito (11). PEm1: Identifica punto de encuentro, no interpreta explícitamente de modo adecuado (10). PEm0: NO identifica punto de encuentro (00).
		Cálculo del punto de encuentro		Nadie del alumnado investigado ha conseguido hallar el punto de encuentro.
Clasificación	Concepto de función	Definición de función		DFm2: Hace referencia a la relación entre unidades, magnitudes, cuando una x tiene una y DFm1: Hace referencia a que la función es un modo de representar una información DFm0: No sabe o indica tratarse de un método para relacionar ecuaciones. DFm Np: no se ha preguntado por parte de la entrevistadora.
		Esquema de función		EFm3: El esquema incluye definición de función, clasificación de funciones y proceso a seguir. EFm2: El esquema se caracteriza por (1) indicar clasificaciones de funciones acompañadas de características y o procesos o (2) El esquema incluye proceso además de subconceptos como pendiente, ordenada en origen, etc. EFm1: El esquema se caracteriza por indicar clasificaciones de funciones sólo como representaciones o expresión algebraica. EFm0: No realiza esquema.
		Imagen de concepto de función		ICFm3: La imagen corresponde a una regla o dependencia. ICFm2: La imagen corresponde a una fórmula u operación. ICFm1: La imagen de concepto corresponde a una representación. ICFm0: La imagen de concepto corresponde a método.
		Razonamiento covariacional		RCm4: Razonamiento covariacional a nivel de razón promedio. RCm3: Razonamiento covariacional a nivel de coordinación cuantitativa. RCm2: Razonamiento covariacional a nivel de dirección. RCm1: Razonamiento covariacional a nivel de coordinación.
	Tipos de función		Se extraen los resultados registrados en la coherencia entre las representaciones gráfica y algebraica (situación de la pelota) recogidos a través del análisis TGE	Escoge ecuación adecuada para la función proporcional, afín o para ambas (2 puntos). No escoge ecuación adecuada para la función proporcional o para la función afín (1 punto). No escoge ecuación para la función (0 puntos).

Tabla 6-6
Parámetros relacionados con Matemáticas I y Matemáticas II

Parámetros utilizados para definir las categorías de Matemáticas I y Matemáticas II			
Categorías	Niveles y rangos de puntuaciones medias ¹	Categorías de análisis	Parámetros tenidos en cuenta
Matemáticas I (tareas que requieren de interpretación)	MI 4 (>3)	Tarea de translación	<ul style="list-style-type: none"> Identificación de variables Relación entre las variables Descripción de la situación del gráfico (argumentación) Traducción desde la descripción de la situación al gráfico
	MI 3 (2,3-3)		
	MI 2 (1,6-2,3)		
	MI 1 (1-1,6)		
Matemáticas II (tareas que requieren construcción además de interpretación)		Tarea de predicción	<ul style="list-style-type: none"> Identificación e interpretación del punto de encuentro
	MII 4 (>3)	Tarea de translación	<ul style="list-style-type: none"> Pendiente (no incluye definición) Ordenada en el origen (no incluye definición) Reconocimiento entre representación gráfica y algebraica Construcción desde la representación gráfica a la ecuación
	MII 3 (2,3-3)		
	MII 2 (1,6-2,3)	Tarea de predicción	<ul style="list-style-type: none"> Predicción del punto de encuentro (<i>nadie del alumnado investigado lo ha logrado; por lo cual, a la hora de establecer los niveles no se ha considerado para discriminar los niveles</i>)
	MII 1 (1-1,6)		
		Tarea de clasificación	<ul style="list-style-type: none"> Concepto de función Razonamiento covariacional

La categoría Matemáticas II sólo ha sido solicitada a los grupos 1A y 2A

¹Cada parámetro se puntúa de 1-4 en función de los niveles establecidos (en la tabla 6-5). Posteriormente se obtienen las medias aritméticas en cada uno de los parámetros. Para más detalles, ver anexos 27 y 28).

Tabla 6-7
Resumen de los niveles globales de Matemáticas

Cuadro de niveles globales de matemáticas (M1, M2, M3, M4)	
Niveles de Matemáticas (se establecen teniendo en cuenta los niveles alcanzados en MI y MII)	M 4 (>3)
	M3 (2,3-3)
	M2 (1,6-2,3)
	M1 (1-1,6)

6.3.2.2 Categorías de análisis desde el punto de vista científico

Para analizar cómo interpreta el alumnado las situaciones planteadas en contextos científicos (en las entrevistas) se han tenido en cuenta los estudios sobre las concepciones alternativas del alumnado en la aplicación de los conceptos científicos al que se refieren dichas situaciones (Pozo y Gómez, 1998, así como de Lombardi et al., (2009).

Los niveles de ciencias (física y química) se han establecido en referencia a las dificultades mostradas -DF para las situaciones de física y DS para la situación de

solubilidad- (ver tabla 8). Dichos niveles se han definido en las tareas de translación y de predicción. Dentro de la primera concretamente en la categoría de análisis *Traducción desde la descripción de la situación a una representación funcional básica* y también en los parámetros *Identificación de variables* y *Relación entre variables*.

Tabla 6-8
Niveles de conocimiento científico

Tarea	Categoría de análisis	Parámetro incluido en la categoría	Niveles establecidos para el parámetro asociados a dificultades (dificultades en Física, DF y dificultades en química, DQ)
Translación	Traducción desde la descripción de la situación a una representación funcional básica.	Traducción desde el contexto de física al gráfico	<p>F1- Asociado a la presencia de la dificultad DF1, que corresponde a un modelo de la situación en el que identifica la variación de la posición como variación de velocidad, ya que el modelo corresponde a la trayectoria seguida por el móvil.</p> <p>F2- Asociado a la presencia de la dificultad DF2, que corresponde a un modelo de la situación en el que el objeto en movimiento posee propiedades (fuerza, potencia) que corresponden a características observables (el movimiento) e intrínsecas al movimiento. Dicha fuerza, potencia disminuye a medida que lo hace el movimiento y vuelve cuando de nuevo hay movimiento.</p> <p>F3- Asociado a la presencia de la dificultad DF3 o DF4. La primera dificultad corresponde a un modelo de la situación en el cual el movimiento posee un agente causal – alguien que empuja, atrae-; la segunda dificultad corresponde a un modelo de la situación parece tener en cuenta el cambio de velocidad durante el movimiento, no se consideran las propiedades físicas como potencia, fuerza, velocidad como propiedad intrínseca del cuerpo.</p> <p>F4- Asociado a la presencia de la dificultad DF4, que corresponde a un modelo de situación donde hay relación entre la velocidad y los distintos momentos, pero sin alusión constante a la variación en el tiempo; tampoco se plantea el cambio de la magnitud velocidad en el marco de un sistema en continua interacción.</p>
		Traducción desde el contexto de química al gráfico	<p>Q1- Asociado a la presencia de las dificultades DS1 y o DS2. La primera corresponde a un modelo de situación distinto al de la solubilidad, en los casos que parece corresponder al de solubilidad, ésta no se interpreta como propiedad, tampoco se entiende la unidad de medida. La segunda dificultad corresponde a un modelo de situación donde la solubilidad es relacionada con el tiempo en lugar de hacerlo con la temperatura.</p> <p>Q2- Asociado a la presencia de las dificultades DS3 y o DS4. La primera corresponde a un modelo de la situación donde el soluto no se disuelve hasta cierta temperatura o que puede estar disuelto –cloruro de sodio-. La segunda corresponde a un modelo de la situación donde identifica la velocidad de disolución –se produce antes- con el aumento de la solubilidad.</p> <p>Q3- Asociado a la presencia de la dificultad DS5, que corresponde a un modelo de la situación de facilidad de disolverse –proceso- en lugar l aumento de solubilidad como propiedad.</p> <p>Q4- Asociado a que no hay presencia de ninguna de las dificultades anteriores y corresponde a un modelo de situación adecuado de la solubilidad respecto a la temperatura.</p>

El diagrama de la figura 20 recoge el proceso seguido para la categorización de los datos hasta llegar a establecer tipologías en cuanto a transferencia se refiere.

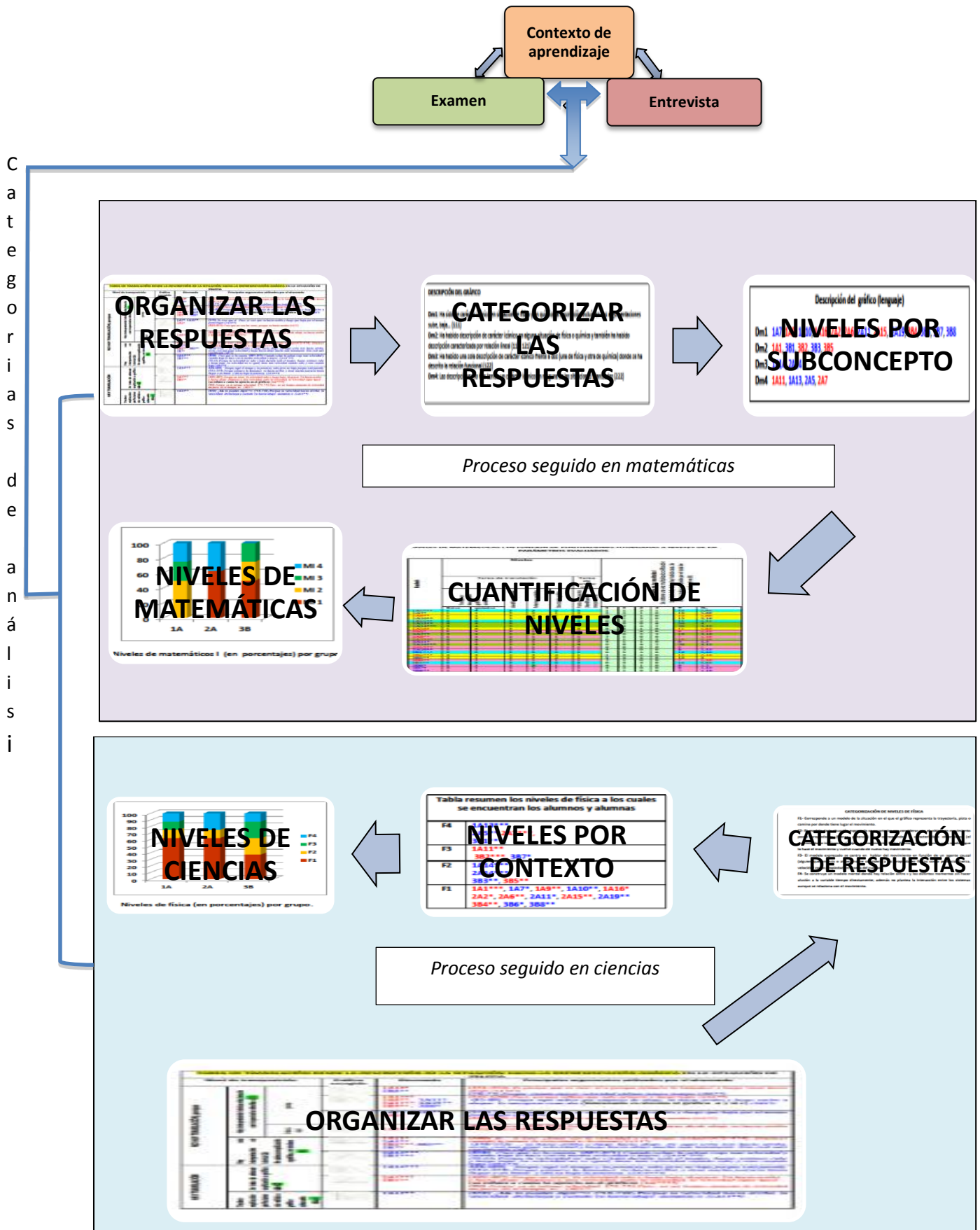


Figura 6-6. Proceso seguido para la categorización.

6.3.3 Variables

Las variables de investigación se agrupan del siguiente modo: a) variables socioeducativas (sexo y curso académico), b) nivel académico (categorizado en tres niveles académicos: bajo, medio y alto) que asume la categorización realizada por el profesorado, c) estilo de aprendizaje y d) gestión motivacional ante las tareas (gestión de las creencias, gestión de los motivos y el valor, y gestión afectiva).

6.3.3.1 Variables socioeducativas

- *Sexo*. Es una variable nominal dicotómica que se compone de las categorías mujer y hombre.
- *Curso académico*. Es una variable nominal que se compone de tres categorías: 3º de la ESO grupos (1A y 2A) que habían trabajado las funciones y grupo (3B) que no había trabajado las funciones durante la investigación.

6.3.3.2 Nivel académico

Es una variable ordinal que se compone de tres categorías: nivel académico bajo, nivel académico medio y nivel académico alto. El alumnado escogido para cada una de las categorías fue seleccionado por el profesor y las profesoras de matemáticas en función de lo que interpretaron como estudiante de nivel académico bajo, nivel académico medio o nivel académico alto.

6.3.3.3 Gestión motivacional

Esta variable de carácter ordinal se ha considerado en base a tres escalas: a) gestión de las creencias que recoge estrategias que cada estudiante puede utilizar para favorecer su motivación mediante la activación de creencias relativas a su competencia y control en las tareas, b) gestión de los motivos y el valor que recoge estrategias dirigidas a resaltar el valor intrínseco de las tareas, otorgarles valor extrínseco y recuperar o activar diferentes motivos de implicación de las mismas y c) escala de gestión afectiva que incluye estrategias para generar, evitar o controlar las emociones y afectos negativos. Concretamente, se refiere a la utilización estratégica del afecto negativo como un medio de automotivación y a los esfuerzos por gestionar emociones que interfieren en la propia actuación.

6.3.3.4 Estilo didáctico de las profesoras

El estilo didáctico de las profesoras es una variable de carácter nominal. El análisis de los estilos comunicativos puede ayudar a entender cómo se realiza la construcción de los contenidos objeto de estudio ya que ofrece una imagen de cómo se comunica el profesorado con el alumnado para desarrollar las ideas en el aula. El concepto del enfoque comunicativo se introdujo por primera vez por Mortimer y Scott (2003) y ofrece una perspectiva sobre cómo actúa el profesorado con el alumnado al desarrollar las ideas en el aula. Se centra en cuestiones tales como si la o el docente interactúa con sus estudiantes (de hacerlo, se estaría ante un *estilo interactivo* y de no hacerlo frente a un *estilo no interactivo*) y, también si el o la docente tiene en cuenta las ideas del alumnado o utiliza varias ideas en la construcción de la lección (si se tiene en cuenta más de una idea se hablaría de *estilo dialógico* frente a si sólo se centra en un punto de vista, se hablaría de *estilo autoritario*). Por otro lado, el enfoque comunicativo se define por la caracterización del diálogo entre la o el docente y el alumnado a lo largo de cada una de las dos dimensiones: interactiva-no interactiva y dialógica-autoritaria (Scott y Ametller, 2007).

Tabla 6-9

Estilos comunicativos (Scott y Ametller, 2007)

Resumen de estilos comunicativos potenciales		
	INTERACTIVO	NO INTERACTIVO
DIALÓGICO	Se recogen tanto las ideas del alumnado como las de la persona experta porque ambas se consideran necesarias Se consideran: elaborar, sondear y reformular.	El profesorado tiene en cuenta puntos de vista distintos (aportados por la ciencia y o alumnado) no los aportados por el alumnado.
AUTORITARIO	Se centra en el punto de vista científico (en este caso, matemático) y se conduce al alumnado a través de un seguimiento de preguntas y respuestas.	Se presenta un determinado punto de vista científico, en la llamada <i>clase magistral</i> .

Un patrón muy utilizado es el denominado *discurso tríadico*: iniciación-respuesta y evaluación (I-R-E) o el de iniciación-repuesta y feedback (I-R-F). En ambos casos el profesorado tiende a llevar al alumnado hacia un solo punto de vista. Por ello se suele englobar dentro del estilo autoritario-interactivo. Sin embargo, en ocasiones, la o el docente puede incluir el discurso tríadico (I-R-F) en busca de la explicitación de puntos de vista distintos; en este caso se incluiría en un estilo dialógico-interactivo.

Por otro lado, se analiza la utilización del contexto por parte de las profesoras en la realización de las actividades y durante las explicaciones dadas al alumnado (Redish, 2004 y Rebello et al., 2005). A través de este análisis se detectan los momentos en los cuales el contexto deja de utilizarse en el aula para la construcción de conceptos matemáticos. Durante el análisis de las entrevistas (momento de transferencia) se detectan los momentos en los cuales se utilizan conceptos matemáticos y si estas situaciones puedan estar relacionadas con aquellas localizadas durante el aprendizaje.

6.4 Validación de resultados y verificación de conclusiones

Las investigaciones cualitativas se fundamentan en su validez epistemológica, validez de consenso o validez “cara a cara”. Es decir, su credibilidad está suficientemente garantizada, si la investigación está correctamente triangulada, basada en indicadores naturales, adecuadamente adaptada a una teoría, es comprensiva en su enfoque, creíble en los mecanismos de control utilizados, consistente en los términos de su reflexión, y representa de forma profunda, clara y completa las características del contexto y el sentir de otras personas (Ruiz, 1996), minimizando al máximo la pérdida de información relevante. Sus criterios de verdad residen en aquella construcción que resulte mejor informada, más documentada, y sobre la que se obtiene mayor consenso en función de su adecuación a los datos y a la información que de ellos se obtiene.

Se realizan las siguientes triangulaciones:

-Triangulación de datos. Implica la utilización de más de un método de recogida de datos. Su objetivo es verificar las tendencias detectadas en un determinado grupo de observaciones. En este sentido son varias las fuentes de datos trianguladas:

- datos obtenidos a través de los exámenes, entrevistas y contrato de autoevaluación;
- datos obtenidos a través de tres situaciones contextualizadas durante la entrevista: situación de la pelota, situación de la montaña rusa y situación de la solubilidad;
- datos obtenidos a través del cuestionario de Gestión motivacional y de la primera parte de las entrevistas, donde se preguntan cuestiones sobre la autoestima y el autoconcepto, es decir actitudes hacia el aprendizaje.

-Triangulación metodológica que consiste en aplicar diferentes métodos de análisis de datos. La triangulación metodológica se lleva a cabo entre:

- la red sistémica con los cuadros de doble entrada

- los resultados de matemáticas I y matemáticas II
- los datos hallados mediante la perspectiva matemática y los hallados mediante la perspectiva científica.
- los datos de las diversas categorías de análisis y los resultados obtenidos a través del cuestionario de gestión motivacional y primera parte de la entrevista.

-Triangulación de investigadoras/es. Se fundamenta en el empleo de una pluralidad de personas observadoras frente a la técnica convencional de una sola persona observadora. La complejidad de la investigación hace necesario tener en cuenta, en momentos puntuales, las perspectivas de personas especialistas tanto en matemáticas como en física y química. En esta investigación la triangulación se lleva a cabo con las directoras de la tesis (químicas de formación y cuya perspectiva es de gran riqueza desde el punto de vista de ciencias y género) y además participa de forma puntual profesorado de universidad (Jose Manuel Almudí (UPV/EHU), Carmen Azcárate y Jordi Deulofeu (UAB) y de secundaria (Rodolfo Alvarez y Luis Zaballos). La pluralidad en esta triangulación enriquece la interpretación de resultados no sólo desde el punto de vista matemático sino también científico teniendo en cuenta siempre la perspectiva de género en la transferencia dinámica.

7 CAPÍTULO DE RESULTADOS

1. Conocimientos del alumnado al aplicar el concepto de función
2. Desarrollo de la unidad didáctica en el aula
3. Dificultades al interpretar gráficos funcionales desde las ciencias
4. Indicios de transferencia observados
5. Influencia de la variable sexo en la transferencia

En este capítulo se presentan los resultados organizados en cuatro apartados, correspondientes cada uno de ellos con cada una de las preguntas planteadas en la tesis.

El concepto de transferencia implica la utilización de conocimiento en una nueva situación diferente a la aprendida; para ello, es fundamental poseer un nivel de base inicial sin el cual no sería posible transferir. Por ello, en el primer apartado se exponen los resultados que muestra el alumnado al resolver tareas que implican aplicar el concepto de función. Se ha considerado oportuno analizar tanto los resultados de los exámenes, por si pudiera haber habido un déficit inicial de conceptos fundamentales, como las dificultades observadas por el propio alumnado que se han registrado en el contrato de autoevaluación. Además se han comparado las situaciones de aula tanto antes, como en la puesta en práctica de la UD así como los estilos didácticos de las profesoras y se han buscado las posibles relaciones entre estos hechos y los resultados obtenidos.

En el segundo apartado se ha tratado de identificar las dificultades observadas a la hora de realizar tareas que hayan necesitado la aplicación del concepto función y observar si dichas dificultades tienen alguna relación con las observadas desde las matemáticas ya analizadas en el primer apartado.

En el tercer apartado se ha tratado de analizar si, aun habiendo observado dificultades, ha habido transferencia en las tareas analizadas, en qué destacan los distintos grupos y si dicha transferencia se encuentra relacionada con las tareas realizadas en el aula dentro del modelo didáctico de aula. Además, se ha tratado de presentar distintos estilos representativos que favorezcan distintos tipos de transferencia, proporcionando así una posible vía de investigación de cara al futuro. A ello se añade el análisis de la posible mejora del conocimiento científico cuando el grado de transferencia del conocimiento matemático del concepto función haya sido mayor

Por último, en el cuarto apartado se han analizado las diferencias observadas en la transferencia entre chicos y chicas, en cuáles destacan unos y en cuáles otras, dando así respuesta a la última pregunta de la Tesis.

Los datos presentados pertenecen a la muestra elegida dentro de cada grupo formada por cuatro chicas y cuatro chicos (a excepción del grupo 3B) y pertenecientes a niveles académicos bajo, medio y alto.

7.1 Conocimientos del alumnado al aplicar el concepto de función

En este apartado se analizan en primer lugar los resultados obtenidos por el alumnado a través de: a) los exámenes, b) contrato de autoevaluación y c) las entrevistas, tratando de dar respuesta a la pregunta

Además se ha profundizado en la dinámica de aula tanto antes de la puesta en práctica de la Unidad didáctica (UD) como en su aplicación con el objetivo de buscar posibles relaciones entre las situaciones de aprendizaje y conocimientos adquiridos en las mismas y las situaciones de transferencia y los conocimientos transferidos durante la entrevista. Para ello, se han tenido en cuenta: a) la organización del aula, b) los estilos comunicativos de las profesoras, c) los estilos comunicativos del alumnado, d) el uso del euskera, e) la utilización del contexto durante el aprendizaje, f) el uso de contextos en las situaciones de aprendizaje y g) la evaluación. Además, todo ello se ha tratado de hacerlo desde la perspectiva de género.

Como se ha indicado en el apartado de metodología (capítulo seis), para el análisis de la transferencia se han considerado los tipos de tareas relacionados con la aplicación del concepto función que identificó Janvier en 1978 y fueron recogidas en la revisión realizada por Leinhardt et al., (1990) sobre gráficas y funciones. Dichas tareas se refieren a la *translación*, la *predicción*, la *clasificación* y la *escala*. Cada una de las tareas se especifica con mayor detalle antes de su análisis. La tarea se caracteriza por el tipo de *acción* llevada a cabo por la persona que aprende. Así, la acción se considera como de *interpretación* si se solicita leer y/o entender el significado de lo presentado; si por el contrario, conlleva trazar una gráfica a partir de un grupo de datos, determinar una ecuación a partir de una gráfica o crear un ejemplo de función, se considera la acción como de *construcción*.

La tarea de escala sólo se ha analizado cuando se ha podido establecer alguna relación con los datos obtenidos, ya que no se ha solicitado en la entrevista ni tampoco de modo general en los exámenes.

Cada una de las tres tareas se ha analizado mediante tres instrumentos: las preguntas seleccionadas del examen, el contrato de autoevaluación y las situaciones planteadas en la entrevista. La tabla 7-1 recoge, para cada tarea y categoría de análisis, los ítems solicitados en el contrato de autoevaluación que se refieren a ellas, así como las preguntas de los exámenes que se hayan analizado en la entrevista (ver además anexo 3) .

Tabla 7-1

Resumen de tarea, categorías, subcategorías de análisis y preguntas de examen relacionadas

TAREAS	Categorías de análisis de datos	Subcategorías de análisis de datos	Preguntas elegidas de los exámenes en función del grupo 1A/ (todo el grupo) 2AA (2A2,2A5,2A6,2A7) 2AB (2A11,2A14,2A15,2A19)	Items del contrato de autoevaluación	Analizado en entrevista
TRANSLACIÓN	Traducción desde la descripción de la situación a una representación funcional básica	(1) Argumentación en base a conceptos matemáticos utilizados	1a, 1c (grupo 1A) 1b (grupo 2AA) 1b (grupo 2AB)	Argumentar a partir de un gráfico (c)	Sí
		(2) Traducción desde la descripción a la tabla	descripción \rightarrow tabla de datos 2a,4a (subgrupo 1A) descripción + gráfico total \rightarrow tabla 3b (subgrupo 2AA) descripción + x e y indicados en tabla \rightarrow tabla 2a (subgrupo 2AB)	Interpretar a través de las matemáticas gráficos de contextos distintos al matemático (g)	No
		Traducción desde la situación \rightarrow (tabla de valores) \rightarrow gráfico	4b (grupo 1A) y 2c (grupo 2AB); no se solicita a subgrupo 2AA	Transcribir entre distintos modos de representación (escrito, de tabla, gráfico, simbólico) (b)	Sí
	Traducción entre los sistemas de representación gráfico y algebraico	(3) Reconocimiento entre el gráfico y la expresión algebraica	6 (grupo 1A; valor 1 punto) 5a (subgrupo 2AA; valor de 1.5 puntos) 3 (subgrupo 2AB; valor de 3.75 puntos)	Transcribir entre distintos modos de representación (escrito, de tabla, gráfico, simbólico) (b)	Sí
		(4) Procedimiento a nivel general seguido desde gráfico a construcción de la ecuación	2b, 4a, 3b (grupo 1A) 3b (subgrupo 2AA) 2b (subgrupo 2AB)	Llevar a cabo el procedimiento para lograr la ecuación a partir del gráfico (d)	Sí
		(5) Cálculo de la ordenada en el origen.	2,4,3 (grupo 1A) 3 (subgrupo 2AA) 2 (subgrupo 2AB)		Sí
PREDICCIÓN	Previsión en cuanto a coste o evolución de solubilidad	(6) Cálculo de la pendiente	1b, 3b, 4a (grupo 1A) 3b (subgrupo 2AA) 2a (subgrupo 2AB)	Hallar la pendiente de una función proporcional (e)	Sí
		(7) Transposición desde la descripción a la expresión algebraica	2c (grupo 1A) 3c (subgrupo 2AA) 2d (subgrupo 2AB)	Transcribir entre distintos modos de representación (escrito, de tabla, gráfico, simbólico) (b)	Sí
	Inferencia del punto de encuentro	(8) Cálculo del punto de encuentro	4c (grupo 1A) 5b (subgrupo 2AA) 5 (subgrupo 2AB)	Hallar el punto de intersección entre dos rectas (f)	Sí
		Valoración en función del punto de encuentro	4d (grupo 1A) no ha sido solicitada más que a este grupo y por lo tanto los resultados sólo tendrán en cuenta a este grupo		
CLASIFICACIÓN	Concepto de función	(9) Decisión sobre si una relación particular es una función	1c (2AA y 2AB) no ha sido solicitada más que a este grupo y por lo tanto los resultados sólo serán valorados pero no comparados	Utilizar el concepto de función en problemas de ámbito distinto al matemático (h) Definir conceptos de intervalo, pendiente, escala...y explicar su significado (a)	Sí
		(10) Identificación de un tipo de función entre otras funciones	Valoración según subcategoría 3 6 (grupo 1A; puntuación máxima 1 punto) 5a (subgrupo 2AA; puntuación máxima 1.5 puntos) 3 (subgrupo 2AB; puntuación máxima 3.75 puntos)		Sí

7.1.1 Resultados obtenidos a través del examen

El objetivo de este apartado es obtener una imagen del nivel alcanzado por el alumnado en el conocimiento del concepto de función al finalizar el estudio de la UD, para poder compararlo posteriormente con lo acontecido en la entrevista. Para ello se seleccionan 16 estudiantes (8 chicas y 8 chicos) de los grupos 1A y 2A, que han sido elegidos por las profesoras en función de las condiciones establecidas –en cuanto a sexo y nivel académico-. Este grupo de 16 estudiantes es el que se ha analizado en profundidad (se califican sus exámenes, se analizan sus valoraciones en el contrato de autoevaluación y se les entrevista).

El diseño de la UD parte del análisis de distintas situaciones contextualizadas de carácter sobre todo científico para que el alumnado aplique el concepto de función en nuevos contextos. Cada profesora ha aplicado dicha unidad con total libertad, readaptándola, y también ha diseñado sin intervención de la investigadora sendos exámenes, uno para el grupo 1A y dos distintos para cada subgrupo del grupo 2A (2AA y 2AB) (ver anexo 2). En cada examen hay algunas partes coincidentes, como la correspondencia entre la expresión algebraica y el gráfico pero, en general, las diferencias son notorias en cuanto a la utilización de contexto y las exigencias respecto a las tareas a realizar.

En todas las tablas, figuras así como en el texto de la investigación, cada alumno y alumna se identifica por el color dependiendo del sexo –chica rojo, chico azul-, además también lo están por el nivel académico en matemáticas -* nivel bajo, ** nivel medio y *** nivel alto.

Para la calificación de las respuestas en los exámenes se han aplicado los criterios definidos en la tabla 6-5 (capítulo de metodología), asignando los valores 0, 1, 2 y 3. Por ejemplo, presenta una situación contextualizada en el grupo 1A. Para ayudar a la gente que vive en la calle, la organización BKE ha realizado un periódico. Cada vendedor/a recibirá 25€ y además por cada periódico vendido 50 céntimos más. Para la subcategoría 7 *Traducción desde la descripción de la situación a la expresión algebraica* se ha evaluado la pregunta 2c *Si una persona vende 45 periódicos ¿cuántos euros ganará?*

Al estudiante 1A14*** se le han otorgado 3 puntos porque ha sabido responder con total corrección a la pregunta; a la estudiante 1A9** se le ha otorgado 1 punto porque no ha tenido en cuenta el sueldo fijo por vender y al tercero 1A7* no se le ha otorgado ningún punto porque el procedimiento que ha utilizado en este tipo de situación no ha sido el

adecuado. Este tipo de calificación se ha establecido en función de las correcciones observadas también por las profesoras para poder comparar ambos tipos de calificaciones.

Ejemplos de ejercicios con partes coincidentes

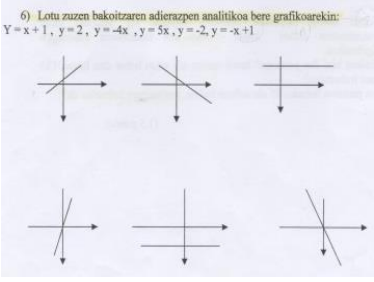
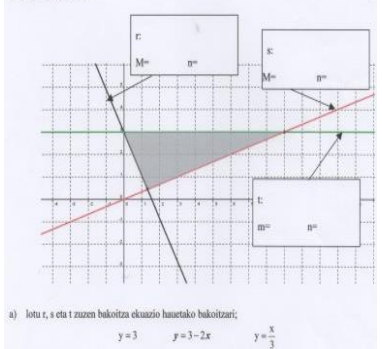
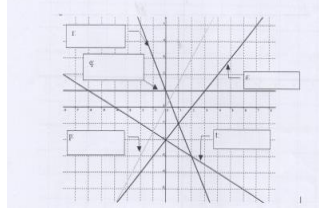
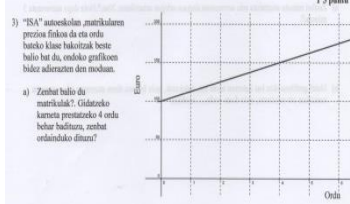
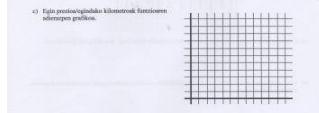
<p>6) Lotu zuzen bakoitzaren adierazpen analitiko bere grafikoarekin: $Y = x + 1, y = 2, y = -4x, y = 5x, y = -2, y = -x + 1$</p>  <p style="text-align: center;">1A</p>	<p>Grafikoaren arabera:</p>  <p>a) lotu r, s eta t zuzen bakoitza ekuazio hauetako bakoitzari: $y = 3, y = 3 - 2x, y = \frac{x}{3}$</p> <p style="text-align: center;">2AA</p>	<p>3) Kokatu lankizuzenetan r, s, t, p eta q zuzen bakoitzari dagokion ekuazioa, zuzen bakoitzari bere eta ordenatua jatorrian adieraziz:</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>$y = -\frac{1}{2}x$</td> <td>$y = 1$</td> <td>$y = \frac{3x}{2}$</td> <td>$y = -2x + 1$</td> <td>$y = x - 2$</td> </tr> <tr> <td>m°</td> <td>m°</td> <td>m°</td> <td>m°</td> <td>m°</td> </tr> <tr> <td>n°</td> <td>n°</td> <td>n°</td> <td>n°</td> <td>n°</td> </tr> </table>  <p style="text-align: center;">2AB</p>	$y = -\frac{1}{2}x$	$y = 1$	$y = \frac{3x}{2}$	$y = -2x + 1$	$y = x - 2$	m°	m°	m°	m°	m°	n°	n°	n°	n°	n°
$y = -\frac{1}{2}x$	$y = 1$	$y = \frac{3x}{2}$	$y = -2x + 1$	$y = x - 2$													
m°	m°	m°	m°	m°													
n°	n°	n°	n°	n°													
<p>2) Kalean bizi diren pertsonei laguntzeko, kalean banatzeko egunkari bat egin du BKE batek. Saltzaile bakoitzak 25 euro jasotzen ditu hilean, eta horrez gain, 50 zentimo, saldutako ale bakoitzeko.</p> <p>a) Udazti hilean saldutako egunkari kopurua eta jasotako dirua eraklaziozaten dituen balio - taula eta funtzioaren adierazpen algebrakoa.</p> <p>b) "Kalean bizi den pertsona" batek zenbat ale saldu behar ditu hilean 185 euro irabazteko?</p> <p>c) Eta pertsona horreko 45 ale saltzen baditu, zenbat euro irabaziko du?</p> <p style="text-align: right;">(1,5 puntu)</p> <p style="text-align: center;">1A</p>	<p>3) "ISA" antzekotasun merkatuaren prezio finiko da eta ordu bakoiko klase bakoitzak beste balio bat du, ondoko grafikoan biko adierazim duin erakutsi.</p>  <p>a) Zenbat balio du merkaturak? Gidatutako kargutara 4 ordu behar badituzu, zenbat ordainduko dituzu?</p> <p>b) Egitu klase-kostu (merkatu berr) funtzioaren balio-taula 2 hilekoekin gaituzte eta lotu orduaren arabera, aldatutakoan kontu adierazpen algebrakoa berrazaldu.</p> <p>c) Urtek kargutara lotzeko, 12 ordu behar izango duzu puntuatu da. Zenbat ordainduko dituzu?</p> <p style="text-align: right;">1,5 puntu</p> <p style="text-align: center;">2AA</p>	<p>2) Hile berran, txandako banaketara jatorria erabiltzen diren bakoitzak zuzen bakoitzari bere eta ordenatua jatorrian adieraziz:</p> <p>a) Biko ondoko balio-taula.</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> </tr> </table> <p>b) Hile berran, txandako banaketara jatorria erabiltzen diren bakoitzak zuzen bakoitzari bere eta ordenatua jatorrian adieraziz:</p>  <p>c) Egitu prezio-taula bakoitzaren funtzioaren adierazpen algebrakoa.</p> <p>d) Zenbat balio du 1200-en dagoen biko haren bakoitzari?</p> <p>e) Zenbat klase-kostu egin izaten duzu puntuatu da. 30 euro ordainduko dituzue pertsonak?</p> <p style="text-align: right;">2,5 puntu</p> <p style="text-align: center;">2AB</p>	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6			
1	2	3	4	5	6												
1	2	3	4	5	6												

Figura 7-1. Preguntas de examen referidas a la misma tarea.

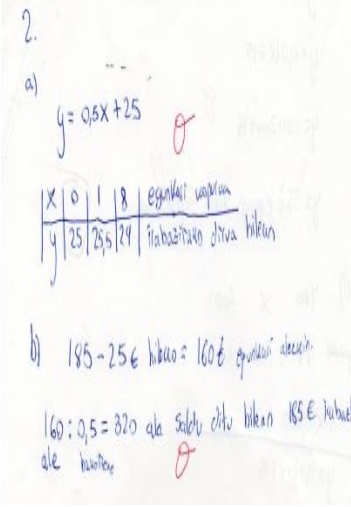
<p>2.</p> <p>a)</p> $y = 0,5x + 25$  <p style="text-align: center;">1A14 *** (3 puntos)</p>	<p>2)</p> <p>a)</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>25+</td> <td>25</td> <td>25+</td> </tr> <tr> <td>05</td> <td>052</td> <td>053</td> </tr> <tr> <td>255</td> <td>2</td> <td>265</td> </tr> </table> <p>$y = mx + n$</p> <p>$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{05 - 052}{2 - 1} = 050$</p> <p>$n = 255 - 05 \cdot 1 + n$</p> <p>$255 = 05 \cdot 1 + n$</p> <p>$255 - 05 = n$</p> <p>$25 = n$</p> <p>$y = 05x + 25$</p> <p>$255 - 25 = 230$</p> <p>$185 - 25 = 160$</p> <p>$160 : 05 = 320$</p> <p>$45 \cdot 05 = 225$</p> <p>$225 + 25 = 250$</p> <p style="text-align: center;">1A9** (1 punto)</p>	1	2	3	25+	25	25+	05	052	053	255	2	265	<p>2)</p> <p>a)</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>2550</td> <td>2550</td> <td>2550</td> </tr> <tr> <td>2550</td> <td>2550</td> <td>2550</td> </tr> </table> <p>$(2/2550) (2,51)$</p> <p>$y = mx + n$</p> <p>$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2550 - 2550}{2 - 1} = 0$</p> <p>$2550 = 0 \cdot 2 + n$</p> <p>$0 = n$</p> <p>$y = 2550x + 0$</p> <p>b)</p> <p>$185 - 25 = 160$</p> <p>$160 : 05 = 320$</p> <p>$45 \cdot 05 = 225$</p> <p>$225 + 25 = 250$</p> <p style="text-align: center;">1A7* (0 puntos)</p>	1	2	3	2550	2550	2550	2550	2550	2550
1	2	3																					
25+	25	25+																					
05	052	053																					
255	2	265																					
1	2	3																					
2550	2550	2550																					
2550	2550	2550																					

Figura 7-2. Preguntas de examen referidas al proceso desde la descripción de la situación hasta la expresión algebraica en el grupo 1A.

En el subgrupo 2AA la situación contextualizada era: *En la autoescuela ISA, el precio de la matrícula es fijo y la hora de clase tiene otro precio, tal como se refleja en el siguiente gráfico.* La pregunta evaluada para la subcategoría analizada es la 3c *Para que Urtzi logre el carnet, ha pensado que necesitará 12 horas, ¿cuánto le costará?*

En el subgrupo 2AB la situación contextualizada era: *La bajada de bandera del taxi (es el precio desde que es contratado el servicio hasta que finaliza) en una ciudad es de 10€. A partir de ahí cada kilómetro tiene un coste de 0.5€.* La pregunta evaluada para la subcategoría es la 2d *¿Cuánto costará ir y volver de un lugar situado a 12 kilómetros?*

3) "ISA" autoeskolan, matrikularen prezioa finkoa da eta ordu bateko klase bakoitzak beste balio bat du, ondoko grafikoen bidez adierazten den moduan.

a) Zenbat balio du matrikulak?. Gidatzeko karneta prestatzeko 4 ordu behar badituzu, zenbat ordainduko dituzu?

Matrikulak 100€
4 ordu behar badituzu 50€ ordainduko da.
guru 400€ matrikularen, 150€ gutxi.

b) Egizu klase-kostua (matrikula barne) funtzioaren balio-taula 2 balioekin gutxienez eta lortu orden arabera, akademiaren kostua adierazpen aljebraiko baten bidez.

* Orden 2 4
Euro 135 150

$y = \frac{15}{2}x + 60$

c) Urtzik karneta lortzeko, 12 ordu behar izango duela pentsatu du. Zenbat ordainduko ditu?

1'5 pun

2A7*** (0 puntos)

2) Hiri batean, taxi-tako banderakoa jaitea (zerbitzua hasten denean bidazitari kobratzen zaion prezio finkoa) 10 euro kostatzen da; hortik aurrera, egindako kilometroko 0'5 euro ordaindu behar du bidaztiak

a) Bete ondoko balio-taula.

Km	5	10	15	20	25	30
€	12'5	14	15'5	17	18'5	20

b) Idatzi prezioa, y, egindako kilometroekin, x, lotuko duen adierazpen aljebraikoa.

$y = 0'5x + 10$

c) Egin prezioa/egindako kilometroak funtzioaren adierazpen grafikoa.

d) Zenbat balioko du 12km-ra dagoen leku baterainoko joan-etorriak?

30 €
 $(12 \times 0'5) + 10 = 16 €$
 $16 + 10 = 26 €$

e) Zenbat kilometro egin zituen taxian guztira, 30 euro ordaindu zituen pertsonak?

Km | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 |
€ | 12'5 | 14 | 15'5 | 17 | 18'5 | 20 | 21'5 | 23

30 € ordaintzeko 40Km egin zituen.

2A14*** (2 puntos)

Figura 7-3. Calificaciones otorgadas a una misma pregunta de examen en el grupo 2A.

La alumna **2A7***** ha sido calificada con 0 puntos porque no ha sabido cómo hallarlo (no ha respondido a la pregunta 2c), además tampoco ha inferido el valor de la matrícula. El alumno **2A14***** ha sido calificado con 2 puntos y no con 3 porque se ha basado en la tabla de valores para hallar el coste requerido sin un planteamiento algebraico.

Estos valores se han utilizado para calcular la calificación de cada estudiante y grupo y el máximo de puntos por pregunta analizada y grupo es de 24 puntos (3 puntos x 8 estudiantes –muestra por grupo del conjunto de estudiantes que fue entrevistado-).

Para el análisis comparativo de los resultados de la calificación de las profesoras y de la investigadora se han tenido en cuenta los criterios de calificación explicitados utilizados durante la corrección (0-3 puntos dependiendo del nivel de respuesta). La nota media obtenida por el alumnado seleccionado para las entrevistas ha sido de 4.4 (190 puntos sobre un total de 432 puntos posibles). El grupo 1A ha obtenido un 5.4 de nota media y el grupo 2A un 3.3. Esto significa que mientras el grupo 1A ha demostrado en el examen un conocimiento matemático algo superior al aprobado, el 2A no lo ha alcanzado.

Los alumnos 2A5** y 2A11** del grupo 2A han dejado el examen prácticamente en blanco, aspecto que ha influido en las medias del grupo.

Tabla 7-2
Medias de subcategorías de análisis por grupos mediante sistema SPSS

Resultados de las subcategorías analizadas en los exámenes desglosadas por grupos										
		sc.1	sc.2	sc.3	sc.4	sc.5	sc.6	sc.7	sc.8	media
Grupo 1A	Media	2.13	3.63	3.00	3.00	3.00	2.50	2.63	1.75	2.7
	N	8	8	8	8	8	8	8	8	8
	Desv. típ.	.991	.744	1.069	.756	.756	1.069	1.506	1.389	.856
	Mínimo	1	2	1	2	2	1	1	1	1.63
	Máximo	3	4	4	4	4	4	4	4	3.88
Grupo 2A	Media	2.13	2.38	2.63	1.75	2.25	2.13	1.50	1.50	2.03
	N	8	8	8	8	8	8	8	8	8
	Desv. típ.	.835	1.188	1.188	1.165	1.035	1.356	.926	.756	.71
	Mínimo	1	1	1	1	1	1	1	1	1.11
	Máximo	3	4	4	4	4	4	3	3	3.11
	Mediana	2.00	2.00	3.00	1.00	2.00	1.50	1.00	1.00	1.83
Total	Media	2.13	3.00	2.81	2.38	2.63	2.31	2.06	1.62	2.36
	N	16	16	16	16	16	16	16	16	16
	Desv. típ.	.885	1.155	1.109	1.147	.957	1.195	1.340	1.088	.87
	Mínimo	1	1	1	1	1	1	1	1	1.11
	Máximo	3	4	4	4	4	4	4	4	3.88

Estos resultados se han comparado con los realizados por las profesoras. Sus calificaciones han sido de una nota media de 5.1 para el grupo 1A y de 3.8 para el grupo 2A (para más detalles ver anexo 6). Por lo tanto, la diferencia de puntuación entre las profesoras participantes en la investigación y la realizada por la autora de esta investigación es aproximadamente de 0.5 puntos sobre 10 puntos totales (en un caso, la puntuación es inferior y en el otro superior). El Alfa de Cronbach de los resultados

calificados ha sido de .89 y por ello la diferencia se considera asumible para esta investigación (ver anexo 7).

Por otro lado, para el análisis estadístico de las puntuaciones de cada preguntase ha utilizado el programa SPSS17, y se ha considerado la calificación de 0 puntos con valor de 1 en el sistema y así sucesivamente. Esta transformación de las diversas calificaciones – para introducirlas en SPSS- hace que los valores de las medias se modifiquen; no obstante ambas han sido adecuadas.

Para las diversas comparaciones de ahora en adelante, se utilizarán ambos tipos de calificación y en cada caso se indicará a cuál de ellas pertenece (ver anexo 7).

Tanto los mínimos como los máximos del grupo 1A son mejores que los del grupo 2A. Las desviaciones de ambos grupos indican una diferencia importante entre los resultados del alumnado del mismo grupo, hecho que se analizará más adelante.

Estos resultados muestran que los aprendizajes del alumnado respecto al concepto de función son la mitad de lo que se consideraría deseable en el caso del grupo 1A y en el caso del grupo 2A aún la diferencia con lo deseable es aún menor (para más detalles ver anexo 6).

En este sentido cabe preguntarse si estos resultados tienen alguna relación con el tipo de tarea solicitada, los instrumentos de evaluación utilizados, el diseño de laUD, la aplicación de la misma, el estilo didáctico de las profesoras o a la gestión de las motivaciones por parte del alumnado.

7.1.1.1 Conocimientos del alumnado en tareas de translación

La tarea de translación se refiere principalmente a: (a) el acto de *reconocer* la misma función en representaciones distintas (verbal, tabla, gráfica, expresión algebraica), (b) el acto de *identificar* en una representación la función y las posibilidades de transformación en otro tipo de representación y (c) la *construcción* de una representación de una función a partir de otra representación. Los actos reflejados por lo tanto, indican un continuo entre la acción de interpretación hasta llegar a la de construcción.

En el análisis de esta tarea se han identificado dos categorías de análisis: a) Traducción desde la descripción de la situación a una representación funcional básica (gráfica y/o tabla de valores) y b) Traducción entre los sistemas de representación gráfica y algebraica, a través tanto del reconocimiento de similitud entre las representaciones gráfica y algebraica como de la construcción de la representación algebraica a partir de la

representación gráfica Además, en la realización de dichas tareas se analiza el lenguaje utilizado.

7.1.1.1.1 Traducción desde la descripción de la situación a una representación funcional básica

La traducción desde la descripción de la situación a una representación funcional básica se ha analizado por separado según se tradujera a la representación gráfica o a la tabla de valores. En dicha traducción se han tenido en cuenta las argumentaciones matemáticas realizadas por el alumnado.

7.1.1.1.1.1 Traducción desde la descripción de la situación hacia la representación tabla de valores (subcategoría de análisis 2)

El análisis de este tipo de traducción se ha realizado a través de las actividades de la figura 3. Las preguntas se refieren a: (1) 2a *Escribe la tabla de datos que relaciona los periódicos vendidos y el dinero ganado y...* y 4a *Realiza la tabla de valores de cada oferta y...* (grupo 1A); (2) 3b *Realiza la tabla de valores clase-coste incluyendo la matrícula con dos valores por lo menos y halla en función de las horas la expresión algebraica que lo muestre* (subgrupo 2AA y (3) 2a *Completa la tabla de valores* (subgrupo 2AB).

Mientras en el subgrupo 2AA sólo se requiere la interpretación para llevar a cabo esta tarea, en los otros dos grupos además se necesitan la construcción, en mayor medida en el grupo 1A ya que sólo se parte de la descripción de la situación.

Los resultados de los grupos 1A y 2A son de 21 y 11 puntos respectivamente de un total de 24 puntos por grupo (medias, $X_{1A} = 3.6$ y $X_{2A} = 2.3$). Aunque la profesora del grupo 1A no facilita apoyos adicionales, ya que no se aporta gráfico o partes de la tabla de valores, los resultados de dicho grupo son bastantemejores que los del grupo 2A.

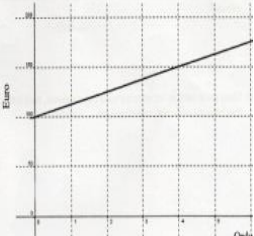
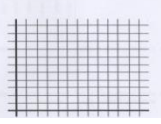
<p>2) Kalean bizi diren pertsonetegi laguntzeko, kalean banatzeko egunkari bat egin du BKE batek. Saltzaile bakoitzak 25 euro jasotzen ditu hilean, eta horrez gain, 50 zentimo, saldutako ale bakoitzeko.</p> <p>a) Udazti hilean saldutako egunkari kopurua eta jasotako dirua erlazionatzan dituen balio - taula eta funtzioaren adierazpen algebraikoa.</p> <p>b) "Kalean bizi den pertsona" batek zenbat ale saldu behar ditu hilean 185 euro irabazteko?</p> <p>c) Eta pertsona horreko 45 ale saltzen baditu, zenbat euro irabaziko du?</p> <p>(1.5 puntu)</p>	<p>3) "ISA" autoeskolaren matxialaren prezio finkoa da eta ordu bakoiko klase bakoitzak beste balio bat du, ondoko grafikoen bidez adierazten den moduan.</p>  <p>a) Zenbat balio du matxialak? Gidatzeko karneta prestatzeko 4 ordu behar badituzu, zenbat ordainduko dituzu?</p>	<p>2) Hiru botan, txakelako handerretan jaitza (zurbizua baxen deratzen bidartari kobratzen zaien prezio finkoa) 10 euro kobratzen da, herrik, azterre, egindako kilometroko 0'3 euro ordaindu behar da bitartek.</p> <p>a) Hone ondoko balio-taula.</p> <table border="1" data-bbox="1117 1601 1292 1635"> <thead> <tr> <th>Km</th> <th>0</th> <th>10</th> <th>15</th> <th>20</th> <th>25</th> <th>30</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>e</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p>b) Klasi prezioa, egindako kilometrokin, x, botako daren adierazpen algebraikoa.</p> <p>c) Egia prezioa/egindako kilometroekin. Funtzioaren adierazpen grafikoa.</p> 	Km	0	10	15	20	25	30	e						
Km	0	10	15	20	25	30										
e																
1AA	2AA	2AB														

Figura 7-4. Preguntas referidas a la traducción desde la descripción de la situación hacia el gráfico.

7.1.1.1.2 *Traducción desde la descripción de la situación hacia la representación gráfica (subcategoría de análisis 7)*

En la pregunta planteada al grupo 1A (4b) *Representa en un gráfico las representaciones gráficas*, nadie traduce correctamente las dos situaciones funcionales planteadas al gráfico, debido tal vez a un problema de escala en 5 estudiantes. En cambio, en la pregunta 3a *Realiza la representación de la función, ¿pasa por el origen de las coordenadas?*, que parte de una tabla de valores, el 87.5% del grupo traduce correctamente desde la tabla al gráfico. En ambos casos el alumnado construye el gráfico en su totalidad, si bien en la primera pregunta existen una dificultad de escala. El 50% del alumnado indica variables tanto matemáticas como contextuales en los gráficos y una alumna (1A16*) sólo las variables matemáticas.

En el subgrupo 2AB una sola persona de las cuatro que forman este subgrupo, realiza correctamente la transposición de la situación hacia el gráfico. Ninguna de ellas indica ningún tipo de variable en el gráfico.

No se poseen datos del subgrupo 2AA ya que entre las preguntas del examen no hay ninguna que solicita esta tarea.

Resulta paradójico constatar que para la profesora del grupo 2A, el subgrupo 2AA es mucho mejor que el 2AB y sin embargo, la actividad que ella plantea en el examen al subgrupo 2AB es más complicada.

Los datos mostrados sugieren que los conocimientos del grupo 1A en la tarea de traducción desde la descripción de la situación hacia la representación gráfica son superiores a los mostrados por el grupo 2A, aun habiendo sido de mayor complejidad las cuestiones planteadas (se requerían acciones de interpretación y construcción).

Por otro lado, en función de las respuestas analizadas se deduce que, en general, el alumnado no tiene dificultades en representarse la situación y sí las ha tenido en la traducción hacia el gráfico, en gran medida debido a un problema de escala.

7.1.1.1.3 *Características del lenguaje utilizado (subcategoría de análisis 1)*

Durante la traducción desde la descripción de la situación hacia los gráficos se analiza cómo argumenta el alumnado desde las matemáticas. Para ello se consideran las preguntas 1a y 1c para el grupo 1A, y la pregunta 1b para los grupos 2AA y 2AB.

Ambos grupos obtienen 9 puntos cada uno de 24 posibles (medias $X_{1A} = 2.13$, $X_{2A} = 2.13$), por lo que se deduce que el alumnado no parece ser capaz de utilizar adecuadamente argumentos matemáticos.

Por otro lado, es de destacar que las expresiones utilizadas muestran una competencia lingüística deficiente y que el nivel de expresividad y fluidez tanto en las argumentaciones como en las justificaciones en un gran número de estudiantes es escaso. Ello lleva a plantear la necesidad de dedicar tiempo a enseñar a argumentar y a la introducción del vocabulario específico en euskera, si se quiere que el alumnado sea capaz de justificar sus afirmaciones.

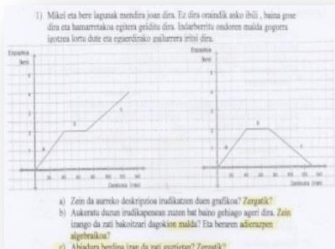
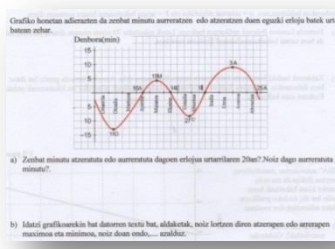
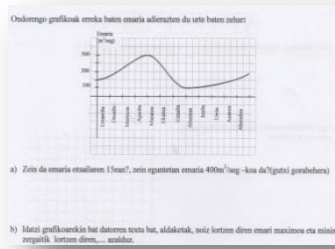
 <p>1) Mikel eta bere laganak mendira joan dira. Txirrri erabilirik ezin izanik, hain gutxiago dira eta hainbat kilometro egiten galduta dira. Inklusiboki erabilirik, mendira gogorago joatea lortu dute eta esperantza gutxiago izan dute.</p> <p>a) Zain da mendiko deskriptioa irudikatzen duen grafikoa? Zergatik? b) Azkenetako distantzia irudikatzen duen hain gutxiago ageri dira. Zain zainago da zain hainbat kilometro egiten galduta? Eta hainbat kilometro egiten galduta? c) Abiadura berbera izan da zain gogorago? Zergatik?</p> <p>Mikel y su amigo han ido al monte: No han andado mucho todavía, pero tienen hambre y se han quedado a comer el almuerzo. Después de recuperarse, han conseguido subir una gran pendiente y hacia el mediodía han llegado a la cima.</p> <p>1a: ¿Cuál de los gráficos representa la anterior descripción? ¿Por qué? 1c: ¿Han llevado la misma velocidad en todo momento?</p> <p>1A</p>	 <p>Cirafilo hontan adierazten da zehar minutu aurreratzen edo atzeratzen duen eguzki erloju baten urte baten zehar.</p> <p>a) Zehar minutu aurreratzen edo atzeratzen dagoen erlojuaren urtebete 20an? Noiz dago aurreratzen 5 minutu? b) Mikel grafikoa irudikatzen duen datuen txirrri bat, aldiaketa, zain hainbat diran atzeratzen edo aurreratzen maximo eta minimoak, noiz daude emanda... azaldu.</p> <p>En este gráfico se representa cuantos minutos se adelanta o se retrasa un reloj de sol en un año.</p> <p>1b: Escribe un texto que sea coherente con el gráfico, argumenta los cambios, cuando se dan los máximos y mínimos, cuando va bien...</p> <p>2AA</p>	 <p>Ondorengo grafikoa errika baten emaria adierazten du urte baten zehar.</p> <p>a) Zain da emaria eta baten 15ean?, zain egunetako emaria 400m³/seg-koa da? (gutxi gora-behera) b) Mikel grafikoa irudikatzen duen datuen txirrri bat, aldiaketa, zain hainbat diran emari maximo eta minimoak, zergatik, noiz daude emanda... azaldu.</p> <p>La siguiente gráfica representa el caudal de un río durante un año.</p> <p>1b: Escribe un texto que sea coherente con el gráfico, argumenta cuando el caudal alcanza el máximo y mínimo, explicando por qué se logran.</p> <p>2AB</p>
--	---	---

Figura 7-5. Preguntas referidas al lenguaje utilizado.

7.1.1.1.2 Traducción entre los sistemas de representación gráfico y algebraico

Esta traducción requiere, además de la acción de interpretación, de modo destacable la de construcción. En primer lugar se analiza el grado de reconocimiento y la relación entre ambos tipos de representación, para pasar posteriormente al análisis de la construcción.

7.1.1.1.2.1 Coherencia entre las representaciones gráfica y algebraica (subcategoría de análisis 3)

Esta cuestión se ha planteado en las preguntas 6 (grupo 1A), 5a (subgrupo 2AA) y 2b (subgrupo 2AB), donde se ha solicitado el emparejamiento entre el gráfico y la expresión algebraica.

Como puede observarse en la figura 7-6 en el examen del grupo 1A cada gráfico se encuentra situado en un grupo de ejes cartesianos distintos que no se encuentran graduados; sin embargo la profesora del grupo 2A ha opta por situar todas las gráficas en un par de ejes cartesianos graduados; por ello el cálculo de la pendiente y ordenada en el origen sería más fácil de obtener de este segundo tipo de gráfico, aunque es cierto que se introduce un número fraccionario, algo que siempre resulta más complicado para el alumnado.

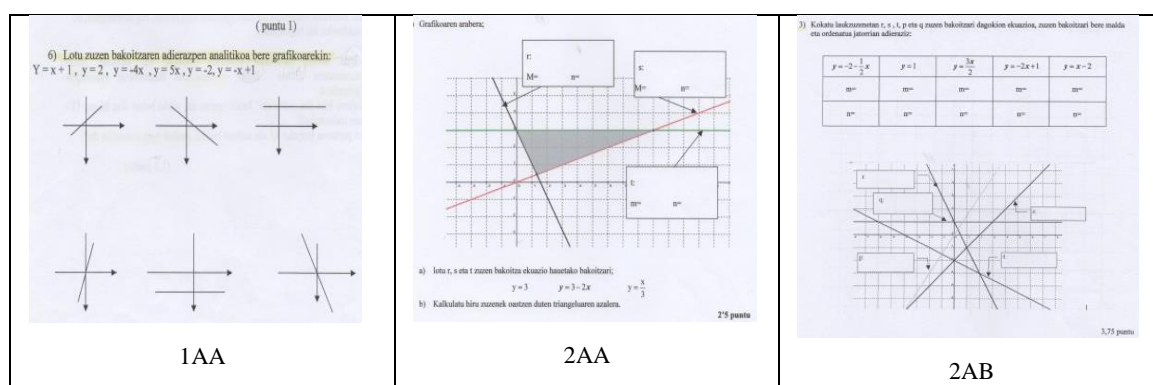


Figura 7-6. Preguntas referidas al reconocimiento entre el gráfico y la expresión algebraica.

Es importante la diferencia de puntuación máxima otorgada a cada pregunta por parte de las profesoras y más aún en el caso de la profesora del grupo 2A, ya que ha otorgaun valor máximo de puntuación de 1.5 puntos a la pregunta del subgrupo 2AA y de 3.75 para el subgrupo 2AB.

Los resultados son de 16 puntos sobre 24 para el grupo 1A y 13 puntos para el grupo 2A (con medias de $X_{1A} = 3$ $X_{2A} = 2.63$). Aunque la puntuación obtenida por el grupo 1A es más alta, las diferencias entre ambos grupos no sontan dispares como en las preguntas anteriores, lo que podría indicar que este tipo de conocimiento ha quedado mejor consolidado que los requeridos en las tareas analizadas anteriormente.

7.1.1.1.2.2 Construcción de la representación algebraica a partir de la representación gráfica (subcategorías de análisis 4, 5 y 6)

En el análisis de esta pregunta se observa hasta qué punto el alumnado deduce la expresión algebraica acorde al gráfico que describe la situación en el problema. En el grupo 1A se consideran tres preguntas que demandan esta tarea (2b, 3b y 4a) y sólo una pregunta en el grupo 2A (3b en el subgrupo 2AA y 2b en el subgrupo 2AB).

Los resultados son de 16 puntos sobre 24 en el grupo 1A y de 6 puntos en el grupo 2A (medias son $X_{1A} = 3$; $X_{2A} = 1.75$). Estos datos muestran que el grupo 1A presenta un conocimiento suficiente del proceso que parte del gráfico hasta hallar la representación analítica y no el 2A. Si estos resultados se comparan con la tarea de reconocimiento podría decirse que mientras el grupo 1A mantiene estabilidad en los resultados desde el reconocimiento a la construcción, el grupo 2A parece poseer un nivel más superficial en cuanto a la interiorización del concepto función y que, por lo tanto, su nivel de respuesta desde la identificación a la construcción desciende de modo importante.

Para esta tarea de translación se necesitan acciones de construcción tanto para hallar la pendiente como la ordenada en el origen.

- El cálculo de la ordenada en el origen (subcategoría de análisis 5) es necesario para responder a las preguntas 2, 4 y 3 en el grupo 1A, a la pregunta 3 en el subgrupo 2AA y pregunta 2 en el subgrupo 2AB. Los resultados son de 16 puntos sobre 24 para el grupo 1A y de 9 puntos para el grupo 2A (medias, $X_{1A} = 3$; $X_{2A} = 2.25$). Estos resultados parecen indicar, en principio, un nivel suficiente de conocimiento en el grupo 1A e insuficiente en el grupo 2A, más aun teniendo en cuenta que al alumnado del subgrupo 2AA se le proporciona el gráfico donde ya se muestra dicho concepto. Estos datos comparados con los anteriores podrían sugerir de nuevo que el grupo 1A mejora en resultados cuando parte de una situación contextualizada y que el alumnado del grupo 2A no se ve favorecido ante situaciones contextualizadas, ya que la mitad del grupo lo podría haber identificado directamente y no lo hace. Estos resultados son más destacables en el caso de las alumnas **2A2***, **2A7***** y **2A15****.

-El cálculo de la pendiente (subcategoría de análisis 6) se pregunta a través de varias preguntas (1b, 3b, 4a) para el grupo 1A y una pregunta para el grupo 2A (3b para el subgrupo 2AA y 2a para el subgrupo 2AB). Los resultados del grupo 1A son de 12 puntos sobre 24 frente a 9 puntos del grupo 2A (medias, $X_{1A} = 2.50$; $X_{2A} = 1.75$). Los resultados del grupo 1A, por lo tanto, son superiores a los de su homólogo, aunque indican un nivel muy justo casi insuficiente para dicho grupo e insuficiente para el grupo 2A. Pero si se analizan sólo los resultados de la pregunta 4a del grupo 1A –en ella se pide realizar la tabla de valores de las ofertas de telefonía mostradas, calcular la pendiente y construir la expresión algebraica–, este grupo obtiene un mejor resultado, ya que 5 de las ocho personas incluyen directamente en la tabla de datos el valor de la pendiente. Este hecho podría sugerir que mientras para el grupo 1A la utilización de contexto ayuda a la construcción de

la pendiente, en el grupo 2A podría suceder lo contrario; aunque la alumna 2A7*** y el alumno 2A14*** parecen no mostrar diferencias al respecto, mientras que las alumnas 2A6** y 2A15** se han visto algo favorecidas en las preguntas 4 y 3 del examen respectivamente -no contextualizadas- frente las preguntas 3 y 2 respectivamente – contextualizadas-. El resto del alumnado del grupo 2A no halla el valor de la la pendiente en ninguna de las preguntas.

Estos resultados podrían sugerir que la contextualización de las actividades favorece el aprendizaje en el alumnado del grupo 1A, tanto en la interpretación como en la construcción del concepto función, pero no en el grupo 2A -cuyos resultados son inferiores en todas las preguntas analizadas-. Este último grupo muestra, en cambio, mejores resultados en actividades que requieren del manejo de algoritmos.

7.1.1.2 Conocimientos del alumnado en tareas de predicción

La predicción se relaciona con la acción de hacer conjeturas a partir de una parte de la gráfica sobre donde se pueden localizar otros puntos (no dados o trazados explícitamente), o también sobre dónde deberían aparecer en otras partes de la gráfica. Para ello, es necesario en primer lugar, aplicar acciones de interpretación para pasar posteriormente a la construcción de la parte no explicitada.

En el análisis de esta tarea se han identificado las siguientes categorías de análisis: a) Previsión del coste de servicio y b) Inferencia del punto de encuentro.

7.1.1.2.1 Previsión de coste (subcategoría de análisis 7)

Para el análisis de esta tarea se analizan las preguntas: (1) 2c, *¿Cuánto gana si vende 45 ejemplares?* (grupo 1A); (2) 3c, *¿Cuánto tiene que pagar si necesita 12 horas para sacar el carnet?* (subgrupo 2AA) y (3) 2d, *¿Cuánto tiene que pagar para llegar a un punto situado a 12 Km de distancia?* (subgrupo 2AB).

Para responder adecuadamente a la tarea requerida, el alumnado tiene que crear un modelo de la situación, para lo cual es necesaria la acción de interpretación. Posteriormente, ha sido necesaria la construcción de modelo de problema para elaborar la expresión algebraica, condición necesaria para poder responder adecuadamente a la pregunta realizada.

Los resultados son de 13 puntos sobre 24 en el grupo 1A y de 4 puntos en el grupo 2A (medias, $X_{1A}=2.63$; $X_{2A}= 1.5$). De las cuatro personas del subgrupo 2AA, una sola escapaz de realizar una lectura correcta del gráfico. Este hecho es significativo, ya que la

respuesta se podía haber extrapolado del gráfico. Por otro lado, nadie realiza una tabla de valores y todavía menos llega a la expresión algebraica; así, ningún estudiante de este subgrupo sabe responder a la pregunta planteada.

En cuanto al subgrupo 2AB, tres responden mediante la tabla de datos, una mediante la expresión analítica correcta y dos con la regla de tres - 2A6** y 2A15** - (este procedimiento ha sido habitualmente utilizado en el aula) y tres (2A5**, 2A7*** y 2A11*) lo dejan en blanco. Destaca que para responder a algunas preguntas del examen tres personas han utilizado la regla de tres (dos del grupo 2A y una del grupo 1A) de las ocho participantes. Este hecho podría indicar cierta influencia de este algoritmo a estas edades. La utilización de este algoritmo no es correcta ya que la función representada es afín y no proporcional.

En cuanto al grupo 1A todo el grupo responde a la pregunta, utilizando la traducción desde la descripción hacia los conceptos que se aprecian en la expresión analítica de las funciones afines; proceso éste que ha sido utilizado previamente en el aula. Solo un alumno (1A7*) no responde porque tacha lo que había realizado –regla de tres-.

7.1.1.2.2 Inferencia del punto de encuentro (subcategoría de análisis 8)

Para analizar la inferencia del punto de encuentro se tienen en cuenta dos tipos de preguntas, la primera requiere de la interpretación y la segunda de la interpretación y de la construcción.

-La interpretación del punto de encuentro sólo se demanda en el grupo 1A (pregunta 4d) cuando se pregunta al alumnado cuál de las dos empresas de telefonía resulta más rentable y por qué. Esta pregunta se plantea con posterioridad a hallar el punto de encuentro, es decir no se busca que el alumnado se pregunte por la necesidad de tener que hallar este punto para saber cuál de las empresas resulta más adecuada. Así, sólo aquellos dos estudiantes –una chica y un chico- que saben hallar el punto de encuentro, utilizan la referencia del mismo (punto como tal) para realizar la argumentación; sin embargo no indican que se trate de un punto de encuentro. El resto del alumnado no sabe hallarlo y las justificaciones a lo sumo se refieren a que la empresa que no establece cuota es la más barata.

-El cálculo del punto de encuentro se analiza en base a las preguntas 4c para el grupo 1A, 5b para el subgrupo 2AA y 5 para el subgrupo 2AB, es decir, en situación contextualizada en el primer grupo y no contextualizada en los dos siguientes subgrupos.

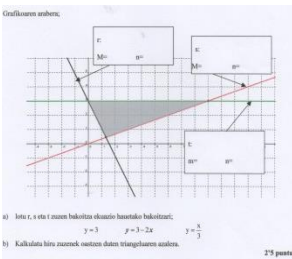
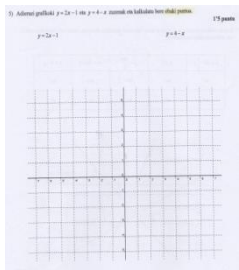
<p>4) Interneteko GUAYANDU zerbizariaren eskaria, hau da: 20 € kuota finkoa hilero, eta 0,01 € minutuko. JOMEIL zerbizariaren eskaria, hau da: kuota finkorik gabea, 0,02 € balio du minutuak.</p> <p>a) Egin eskaintza bakoitzaren balio- taula, kalkulatu maldak eta adierazpen algebrakoa.</p> <p>b) Adierazi grafiko beran funtzioen adierazpen grafikoak.</p> <p>c) Elkartzeko puntuak zehaztu. Zein da?</p> <p>d) Komentatu zein den egokiena eta zergatik</p> <p>(3 puntu)</p> <p>El servicio de internet GUAYANDU ofrece una tarifa fija de 20€ y 0.01€ por minuto. El servicio JOMEIL ofrece una tarifa de 0.02€ por minuto sin coste de servicio.</p> <p>4c) ¿Se encuentran en algún punto? ¿Cuál es?</p> <p>1A</p>	<p>Clasificarse ambos:</p>  <p>a) Iriz x eta t zuzen bakoitzaren ekuazioak idaztu.</p> <p>$y=3$ $y=3-2x$ $y=\frac{3}{2}$</p> <p>b) Kalkulatu hiruzuzen osatutako triangeluaren azalera.</p> <p>2A</p> <p>Teniendo en cuenta el gráfico</p> <p>5b) <i>Calcula el área del triángulo formado por las tres rectas.</i></p> <p>2AA</p>	<p>5) Adierazi grafiko $y=2x-1$ eta $y=4-x$ zuzenak eta kalkulatu beren elkarren puntuak.</p>  <p>17 puntu</p> <p>Representa gráficamente las rectas $y=2x-1$ e $y=4-x$, y calcula el punto de encuentro</p> <p>2AB</p>
---	--	--

Figura 7-7. Preguntas referidas a la inferencia del punto de encuentro.

Los resultados son de 6 puntos de 24 totales (logrados por la alumna **1A***** y el alumno **1A14***** en el grupo 1A y de 4 puntos para el grupo 2A (medias, $x_{1A} = 1.75$; $x_{2A} = 1.50$). Los datos indican que no se ha adquirido un nivel de conocimiento suficiente para hallar el punto de encuentro en ambos grupos. Además, la mayoría del alumnado del grupo 1A tiene dificultad a nivel de escala al construir el gráfico y como consecuencia, no representan el punto de encuentro en el gráfico.

La tarea de escala no se analiza con detalle ya que no ha sido preguntada al grupo 2A. Es destacable que las únicas personas que hallan dicho punto y lo interpretan bien no han sido conscientes de lo representado en su gráfico, ya que en el mismo no se representa dicho punto por un problema de escala.

Estos resultados llevan a preguntarse si el trabajo realizado en el aula sobre este subconcepto se ha realizado de un modo en particular, y cuál ha sido la participación del alumnado en la búsqueda del mismo cuando ha sido solicitado.

7.1.1.3 Conocimientos del alumnado en tareas de clasificación

La clasificación se refiere a las acciones que implican (a) decidir si una relación particular es una función, (b) identificar una función entre otras relaciones o (c) identificar un tipo especial de función entre otras funciones.

Las tareas de clasificación son necesarias para saber cuándo un fenómeno o situación responde mejor a unas características que a otras o, por ejemplo, cuando un mismo fenómeno en distintos momentos puede presentar distintas generalizaciones.

Para el estudio de esta tarea se identifican las siguientes subcategorías análisis: a) Decisión sobre si una relación particular es una función (subcategoría de análisis 9) y b) Identificación de un tipo de función entre otras funciones (subcategoría de análisis 10).

7.1.1.3.1 Decisión sobre si una relación particular es una función

A los subgrupos 2AA y 2AB en la pregunta 1c del examen se pregunta si el gráfico presentado corresponde a una función. Este tipo de pregunta no se realiza al grupo 1A; por lo tanto, las comparaciones se harán en referencia a los subgrupos arriba mencionados.

Entre los resultados destacan quienes no responden (2A5**, 2A11* y 2A15**), quienes indican que no es una función bien porque no responde a una relación matemática de x e y (2A2*) o bien porque no es una recta (2A14***, 2A19**) y quienes responden que sí porque al sustituir la x y la y , a cada x le corresponde una y (2A6** *Sí, sólo sucede cuando se sustituye a la x y a la y , en cada momento por un punto*) y (2A7*** *Sí, porque a cada x le corresponde una y , esto es, a cada día del año le corresponde un minuto*). Esta última alumna es la única que relaciona las variables de contexto y las variables x e y . La relación establecida en ambos casos podría decirse que es de correspondencia, si un análisis más profundo –a través de la entrevista- podría confirmar este tipo de relación covariacional. 1. Los datos indican que sólo el 25% del alumnado de este grupo considera al gráfico como una función; por lo tanto, se podría concluir que el alumnado no ha construido el concepto de función que desde la matemática formal se espera.

Los resultados mostrados dan pie a preguntarse si a través de otro tipo de evaluación podría obtenerse una concreción mejor sobre qué construcción de función ha realizado el alumnado.

7.1.1.3.1.1.1 Identificación de un tipo de función entre otras funciones

Para tratar de dar respuesta a esta cuestión se analizan las preguntas 6 del grupo 1A, 5a del subgrupo 2AA y 3 del subgrupo 2AB. Los resultados son de 16 puntos sobre 24 para el grupo 1A y 13 puntos para el grupo 2A (medias, $x_{1A} = 3$; $x_{2A} = 2.63$). Estos resultados ya se han analizado cuando se ha hablado del reconocimiento entre las representaciones gráfica y algebraica.

Estos resultados de nuevo sugieren preguntarse qué diferencias en cuanto al trabajo en el aula pueden explicar estos hechos. En este sentido parece que el grupo 1A ha trabajado en mayor medida la relación entre la función proporcional y afín a lo realizado por el grupo 2A. A modo de ejemplo, se muestra la comparación entre los dos tipos de funciones realizada por un alumno de este grupo. La tarea ha sido enmarcada en una situación contextualizada (ir a patinar).

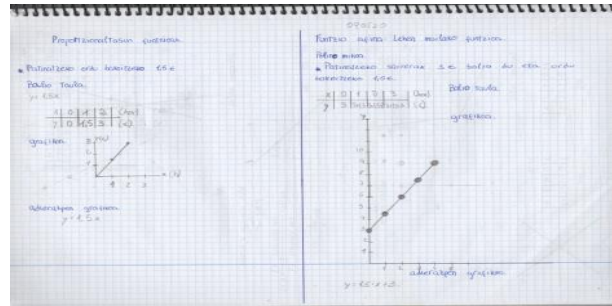


Figura 7-8. Comparación en un contexto cotidiano (ir a patinar) de la función proporcional y la función afín realizada en el grupo 1A.

7.1.1.4 Relación entre nivel de conocimiento y nivel académico

Los tres tipos de tareas (translación, predicción y clasificación) se analizan en función del grupo al que pertenece el alumnado; no obstante, es menester además de ello, tener en cuenta el nivel de partida de cada persona y, para ello, es deseable saber si el nivel académico –dato aportado por cada profesora- ha tenido alguna influencia en los resultados obtenidos.

Para la formación de cada grupo natural (1A y 2A) se ha solicitado a las profesoras que incluyeran dos estudiantes de nivel académico bajo, cuatro de nivel académico medio y dos de nivel académico alto; por lo que la investigadora no ha participado en la selección de dicho alumnado.

Tal como era esperable existe una tendencia positiva entre el nivel académico indicado por las profesoras y los resultados de los exámenes. Desde esta investigación no se afirma rotundamente la existencia de correlación estadísticamente significativa ya que la muestra analizada es muy pequeña. Destacan en esta relación positiva, la argumentación con base matemática del gráfico, hallar la pendiente, hallar la expresión algebraica una vez dado el gráfico, llegar hasta la expresión algebraica desde la descripción de una situación, hallar el punto de encuentro entre dos rectas y hallar la ordenada en el origen, y por lo tanto, también a nivel de examen global. Por lo tanto, puede decirse que la valoración

realizada por las profesoras en cuanto a conocimiento matemático y el resultado de sus exámenes son coherentes.

Tabla 7-3

Relación entre el nivel académico en matemáticas y los resultados en las distintas subcategorías de análisis

Relación entre nivel académico en matemáticas y resultados de los exámenes											
			subc. 1	subc. 2	subc. 3	subc. 4	subc. 5	subc. 6	subc.7	subc.8	medias
Rho de Spearman	Valoración de profesoras	Coefficiente de correlación	.636**	.393	.482	.636**	.673**	.718**	.544*	.783**	.769**
		Sig. (bilateral)	.008	.132	.059	.008	.004	.002	.029	.000	.001
		N	16	16	16	16	16	16	16	16	16

** Correlación significativa al nivel .01 (bilateral) * Correlación significativa al nivel .05 (bilateral)

Los resultados de los exámenes indican que los aprendizajes del alumnado en relación al concepto de función a partir de la aplicación de la UD son diferentes y, a través del análisis de las entrevistas se darán algunas explicaciones posibles sobre dichas peculiaridades.

Los resultados expuestos hasta el momento visualizan una parte de lo acontecido en el aula. A ello es importante añadir el punto de vista del alumnado en cuanto a las tareas realizadas y conocer hasta qué punto las han valorado como fáciles o difíciles. Estos nuevos datos aportarán una información valiosa sobre si el alumnado es consciente de sus dificultades a la hora de aplicar sus conocimientos matemáticos.

7.1.2 Resultados obtenidos mediante el contrato de autoevaluación

El objetivo del contrato de autoevaluación (ver anexo 4) es identificar si el alumnado es consciente del nivel de aprendizaje adquirido y de las dificultades existentes en relación a las tareas analizadas.

Dicho contrato se plantea al alumnado una vez terminada la fase de aplicación de la UD y antes de realizar el examen. Cada estudiante responde en relación a si se siente capaz de realizar los aspectos señalados en cada uno de los criterios presentados. Del contrato se escogieron 9 ítems, cada uno de ellos corresponde a una subcategoría de análisis. Además estos criterios se cotejan con las preguntas del examen seleccionadas. Los ítems seleccionados y su relación con las subcategorías de análisis se exponen en la siguiente tabla 7-4

Tabla 7-4
Relación entre las categorías de análisis y los ítems del contrato de autoevaluación

Tareas	Categorías de análisis de datos	Subcategorías de análisis de datos	Ítems del contrato de autoevaluación
TRANSLACIÓN	Traducción desde la descripción de la situación a una representación funcional básica	(1) Argumentación en base a conceptos matemáticos utilizados	Argumentar a partir de un gráfico (c)
		(2) Transposición desde la descripción a la tabla	Interpretar a través de las matemáticas gráficos de contextos distintos al matemático (g)
	Traducción entre los sistemas de representación gráfico y algebraico	Desde la situación \rightarrow (tabla de valores) \rightarrow gráfico (ref. 5.1)	Transcribir entre distintos modos de representación (escrito, de tabla, gráfico, simbólico) (b)
		(3) Reconocimiento entre el gráfico y la expresión algebraica	Transcribir entre distintos modos de representación (escrito, de tabla, gráfico, simbólico) (b)
		(4) Procedimiento a nivel general seguido desde gráfico a construcción de la ecuación.	Llevar a cabo el procedimiento para lograr la ecuación a partir del gráfico (d)
		(5) Cálculo de la ordenada en el origen (6) Cálculo de la pendiente	Hallar la pendiente de una función proporcional (e)
PREDICCIÓN	Previsión en cuanto a coste o evolución de solubilidad	(7) Transposición desde la descripción a la expresión algebraica	Transcribir entre distintos modos de representación (escrito, de tabla, gráfico, simbólico) (b)
	Inferencia del punto de encuentro	(8) Cálculo del punto de encuentro	Hallar el punto de intersección entre dos rectas (f)
CLASIFICACIÓN	Concepto de función y pendiente, ordenada en el origen y tipos de función	(9) Decisión sobre si una relación particular es una función.	Utilizar el concepto de función en problemas de ámbito distinto al matemático (h)
		(10) Identificación de un tipo de función entre otras funciones. Para ello se ha vuelto a considerar la subcategoría 3 (<i>Reconocimiento entre el gráfico y la expresión algebraica</i>)	Definir conceptos de intervalo, pendiente, escala,...y explicar su significado (a)

En dicho contrato de autoevaluación las respuestas posibles se gradúan de 0 a 3: 0= sin dificultad, 1= poca dificultad, 2= bastante dificultad y 3= mucha dificultad. Además se ha indica el grado de ayuda necesario si fuera el caso: a= pequeña ayuda, b= ayuda media, c= gran ayuda.

Destacan las autoevaluaciones del grupo 2A ya que, aun habiendo obtenido peores resultados que el grupo 1A, tienen una percepción mayor de dominio de las tareas requeridas; incluso cuando indican la existencia de dificultad manifiestan menor nivel de dificultad (ver figura 7-9). Esto indica que la percepción del alumnado del grupo 2A no es acorde con sus resultados en los exámenes.

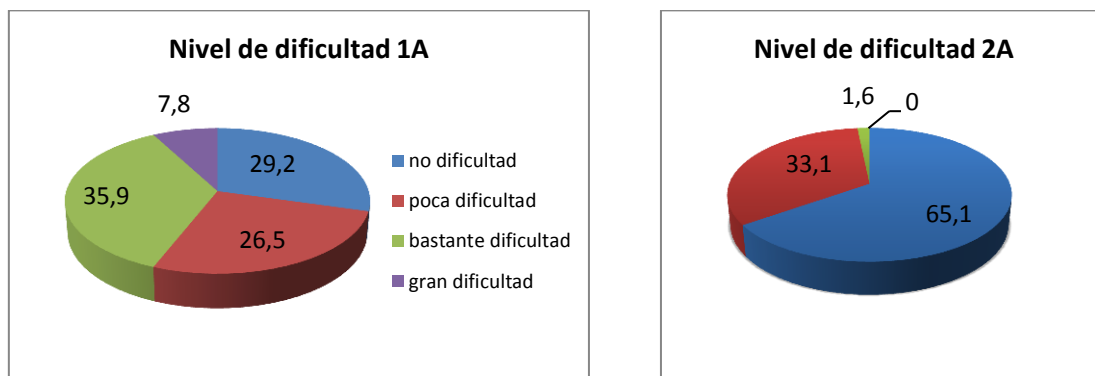


Figura 7-9. Nivel de dificultad (expresado en %) según grupos.

Por otro lado, en este estudio se analiza el nivel de dificultad percibido en función del nivel académico del alumnado.

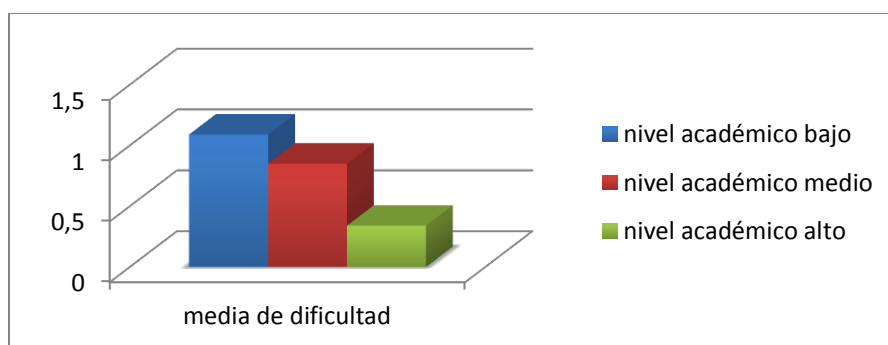


Figura 7-10. Nivel de dificultad (expresado en %) apreciada por el alumnado en función del nivel académico.

Además del contrato de autoevaluación, posteriormente se pasa al alumnado un Cuestionario de Gestión Motivacional organizado en tres escalas teóricas: gestión de las creencias, gestión de los motivos y el valor, y gestión afectiva. Las respuestas a los ítems se realizaron sobre una escala Likert de cinco puntos (1= nunca, 5=siempre). En este cuestionario también se incluyen ítems relacionados con la potenciación de control percibido. El Alfa de Cronbach de este cuestionario es de .921 (ver anexo 7).

Los resultados obtenidos del contrato de autoevaluación por grupo, son similares a los obtenidos del Cuestionario de Gestión Motivacional, donde el grupo 1A obtiene 2.4 y el grupo 2A se sitúa en 3 en potenciación del control percibido.

Por otro lado se analiza el nivel de dificultad por nivel académico de matemáticas.

Como era de esperar, el nivel de dificultad que percibe el alumnado disminuye a medida que aumenta su nivel académico y esta percepción es acorde con resultados

obtenidos en los exámenes. Paralelamente se relaciona el nivel de dificultad manifestado por el alumnado con el nivel académico (figura 7-11)..

Si bien los gráficos son acordes a lo esperado en cuanto a grado de dificultad observado en comparación con el nivel académico, ha sorprendido los porcentajes de distribución en los niveles académicos bajo y medio ya que, en el primer grupo el 68.74% (34.37% + 34.37%) indicado poca o ninguna dificultad y en el grupo de nivel medio lo señala un 70,31% (26.56% + 43.75%). La diferencia de puntuación media entre este tipo de alumnado en los exámenes (1.8 puntos) haría pensar en una diferencia mayor en cuanto a percepción de dificultad en ambos grupos. Por otra parte, si se comparan los datos entre el nivel académico medio y alto, vuelve a sorprender el nivel de dificultad apreciado por el grupo de nivel medio teniendo en cuenta que su media en resultados es de de 4.2 puntos inferior al del alumnado de nivel alto. Si se tuvieran en cuenta las medias de calificaciones del examen otorgadas por la investigadora las diferencias entre el nivel bajo y medio sería de 1.55 y entre el nivel medio y el alto 4.6. Por lo tanto, parece que es el alumnado de nivel académico alto el que posee en ambos grupos el mayor equilibrio en la percepción sobre su aprendizaje.

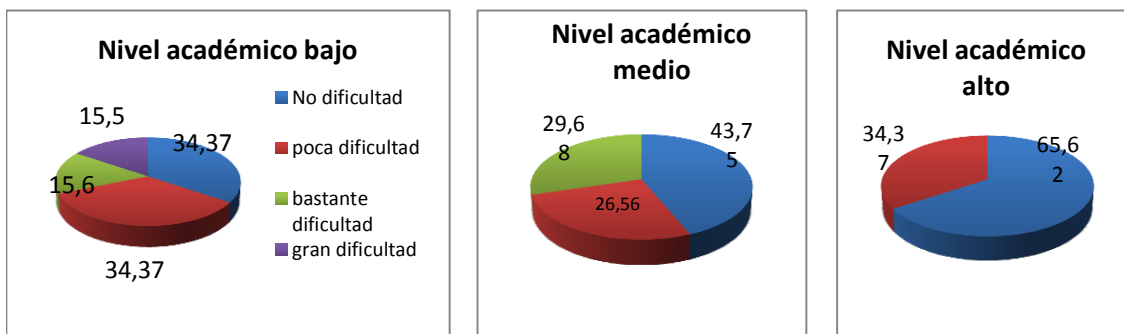


Figura 7-11. Niveles de dificultad (expresado en %) apreciados por el alumnado en función del nivel académico.

Tal como se ha expuesto anteriormente, es importante destacar la diferencia entre ambos grupos, tanto porque la dificultad manifestada varía ampliamente, como por la distribución de la población, más equilibrada en el grupo 1A. Por otro lado, las diferencias observadas respecto a cada ítem en particular se analizan en la figura 7-12 en referencia a cada subcategoría de análisis.

Tal como se ha expuesto anteriormente, es importante destacar la diferencia entre ambos grupos, tanto porque la dificultad manifestada varía ampliamente, como por la distribución de la población, más equilibrada en el grupo 1A. Por otro lado, las diferencias observadas respecto a cada ítem en particular se analizan más adelante en referencia a cada subcategoría de análisis.

En este apartado se profundiza en las dificultades observadas a partir del análisis de los exámenes tratando de relacionarlas con las percepciones del alumnado manifestadas en el contrato de autoevaluación. Las dificultades se analizan en función de las tareas y las subcategorías de análisis.

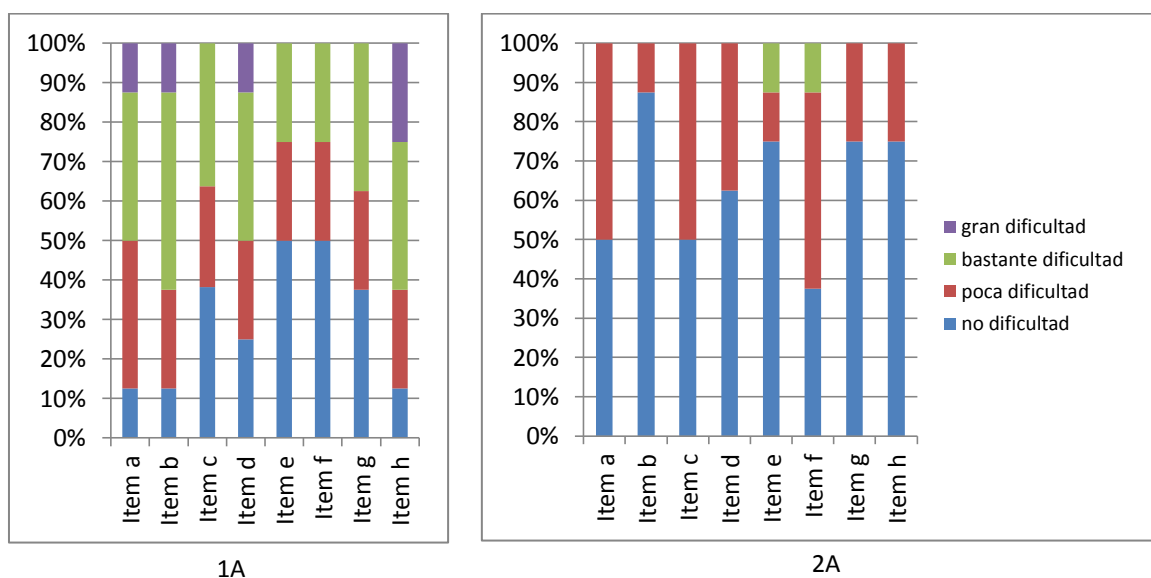


Figura 7-12. Niveles de dificultad por ítem (contrato de autoevaluación).

Los datos mostrados hasta el momento indican que de las ocho cuestiones comparadas en seis de ellas la puntuación media en el grupo 1A es superior a la de su grupo homólogo, frente a solo una cuestión en la que sucede lo contrario, es decir, tan solo en una cuestión la puntuación media del grupo 2A supera a la del 1A. Este hecho significa que ya desde un momento inicial, parece no haberse alcanzado un nivel inicial suficiente en cuanto al concepto de función se refiere; además, parecen haber existido dificultades importantes en el aprendizaje, más aún si cabe para el grupo 2A. Se indican a continuación las cuestiones superadas con más de la mitad de la puntuación (12 puntos de 24 puntos totales por grupo) para cada grupo.

Tabla 7-5
Subcategorías de análisis en las que cada grupo obtiene un nivel suficiente

Niveles aceptables obtenidos en las distintas subcategorías por grupo			
Grupo	Tarea	Subcategorías de análisis	Ítems del contrato de autoevaluación relacionados
1A	Translación	<i>Traducción desde la descripción a la tabla.</i> <i>Reconocimiento entre el gráfico y la expresión algebraica.</i> <i>Procedimiento a nivel general seguido desde gráfico a construcción de la ecuación.</i> <i>Cálculo de la ordenada en el origen</i> <i>Cálculo de la pendiente.</i>	<i>b</i> transcribir entre distintos modos de representación <i>b</i> <i>d</i> llevar a cabo el procedimiento para lograr la ecuación a partir del gráfico <i>d</i> <i>e</i> hallar la pendiente de una función proporcional
	Predicción	<i>Traducción desde el gráfico a la ecuación.</i>	<i>b</i>
2A	Translación	<i>Reconocimiento entre el gráfico y la expresión algebraica.</i>	<i>b</i>

Tal como viene indicándose, a pesar de sus peores resultados, el grupo 2A posee una percepción de mayor dominio que el grupo 1A.

La contextualización de las situaciones parece favorecer al grupo 1A en el desempeño de esta tarea, sobre todo si va acompañada por una tabla de datos. Se identifica dificultad en las argumentaciones de tipo matemático a la hora de realizar la traducción desde la descripción de la situación hacia la representación básica.

En estos momentos parece necesario analizar en profundidad las dificultades observadas en relación a las tareas solicitadas tal y como se expone a continuación.

7.1.2.1 *Relación en tareas de translación*

Dentro de la tarea de translación se consideran dos subcategorías de análisis: a) Traducción desde la descripción de la situación a una representación básica funcional y b) Traducción entre los sistemas de representación gráfico y algebraico. Para el análisis de cada subcategoría se eligieron distintos ítems.

-En la traducción desde la descripción de la situación a una representación básica funcional se escogen el ítem b (transcribir entre distintos modos de representación). Mientras el 75% del alumnado del grupo 1A considera que la dificultad de esta tarea varía desde pequeña dificultad a bastante dificultad, en el grupo 2A sólo lo considera de ese modo el 12.5% (además un 87.5% considera que no hay dificultad); no obstante, los resultados de éste grupo 2A son la mitad de buenos que los de su homólogo 1A (ver subcategoría de análisis 2).

- En la traducción entre los sistemas de representación gráfico y algebraico se consideranel ítem b (transcribir entre distintos modos de representación), el ítem d (llevar a cabo el procedimiento para lograr la ecuación a partir del gráfico) y el ítem e (hallar la pendiente de una función proporcional).

El primero de ellos (ítem b) hace referencia a analizar el grado de coherencia entre el grado de dificultad indicado por el alumnado en la subcategoría 3 (Reconocimiento entre el gráfico y la expresión algebraica). Teniendo en cuenta el nivel de dificultad expresado sobre esta tarea –ya indicado en el apartado anterior- y el nivel de logro en el examen, parece apreciarse un mayor desempeño y por lo tanto, una menor dificultad. Ahora bien, con 13 puntos sobre 24 puntos totales, se podría decir que el grupo 2A es excesivamente optimista en su valoración.

El segundo de ellos (ítem d), lo valora de poco a bastante difícil el 62,5% de la población del grupo 1A y por un 37.5% del grupo 2A. Además un 62.5% del grupo 2A indica no tener dificultad, frente al 12.5 % de su grupo homólogo que indica gran dificultad. Sin embargo, la traducción desde el gráfico a la ecuación supone de nuevo gran dificultad por el grupo 2A, que no ha logrado más de 7 puntos de los 24 totales, frente 17 puntos logrados por el grupo 1A. De nuevo, se evidencian incoherencias entre el grado de dificultad manifestado por el grupo 2A y sus resultados en el examen.

El tercero de ellos (ítem e) hace referencia a hallar la pendiente de una función proporcional. Si bien esta tarea es valorada de poco difícil a bastante difícil por el 50% del grupo 1A, frente a un 25% en el grupo 2A, también los resultados del grupo 1A (12 puntos de los 24 posibles) son más acordes a sus valoraciones que los del grupo 2A (9 puntos de 24 posibles).

No es posible realizar la comparación entre los resultados obtenidos en la tarea sobre el cálculo de la ordenada en el origen y la valoración sobre su dificultad realizada por el alumnado, ya que no se ha incluido ningún ítem en el contrato de autoevaluación que se refiera a ello.

Estos datos sorprenden tanto si se analizan con respecto a los grupos como en relación con el nivel académico. A nivel de grupo, no se esperaban las diferencias observadas entre ambos grupos –sobreevaluación de la competencia en las tareas por parte del grupo 2A-.Ello hace pensar que el trabajo en el aula ha podido influir en el ello, ya que no se supone que el alumnado sea especialmente distinto a nivel personal del alumnado del

otro grupo, y además, en ambos grupos el número de personas de distinto sexo y nivel académico ha sido el mismo.

En cuanto a la diferencia de consciencia sobre los conocimientos adquiridos y las dificultades de las tareas, si bien eran esperables por parte del alumnado de nivel académico alto, no lo eran del alumnado del nivel medio. No se esperaba la sobrevaloración general del nivel de conocimiento por parte de este colectivo.

7.1.2.2 Relación en tareas de predicción

En esta tarea se analizan dos categorías de análisis: a) Previsión de coste y b) Inferencia del punto de encuentro. Para el análisis de cada subcategoría se han elegido distintos ítems.

-En previsión de coste se escoge el ítem b (transcribir entre distintos modos de representación). Mientras el 75% del alumnado del grupo 1A considera que esta tarea tiene una dificultad que varía desde pequeña a bastante, en el grupo 2A sólo lo considera de ese modo el 12.5% (además un 87.5% considera que no tiene dificultad) ; no obstante, los resultados de éste grupo no superan los 4 puntos de los 24 posibles frente a los 13 puntos obtenidos por el grupo 1A.

-En cuanto a la inferencia del punto de encuentro, se escoge el ítem f (hallar el punto de encuentro de dos rectas). Mientras que el 50% del alumnado del grupo 1A considera que esta tarea tiene una dificultad que varía desde pequeña a bastante, en el grupo 2A el 62,5% lo considera así. A partir de los bajos resultados obtenidos por ambos grupos en los exámenes (9 puntos sobre 24 totales en el grupo 1A y 3 puntos sobre 24 totales en el 2A), parece que el alumnado del grupo 2A ha sido ligeramente más consciente de su situación –no lo suficiente-, y que el grupo 1A no ha valorado adecuadamente su nivel de competencia.

7.1.2.3 Relación en tareas de clasificación

En las tareas de clasificación se consideran dos subcategorías: a) Decisión sobre si una relación particular es una función y b) Identificación de un tipo de función entre otras funciones. Para el análisis de cada subcategoría se eligen distintos ítems.

-Para la decisión sobre si una relación particular es un función se escoge el ítem h (utilizar el concepto de función en problemas de ámbito distinto al matemático). Esta subcategoría sólo es demandada al grupo 2A (pregunta 1c), por lo que el análisis muestra

solo los resultados en este grupo. Un 75% del alumnado señalan tener dificultad en ella y un 25% una pequeña dificultad.

Este grupo 2A muestra gran dificultad en identificar el gráfico presentado como función; parece observarse gran dificultad para identificar la representación gráfica no lineal como función.

-Para la identificación de un tipo de función entre otras funciones se escoge de nuevo el ítem b (transcribir entre distintos modos de representación). Mientras el 75% del alumnado del grupo 1A considera que esta tarea tiene una dificultad entre pequeña y bastante, en el grupo 2A sólo lo ha considerado de ese modo el 12.5% (además un 87.5% considera que no tiene dificultad); no obstante, los resultados de éste grupo no superan los 4 puntos de los 24 posibles, frente a los 13 puntos sobre 24 totales obtenidos por el grupo 1A.

La función afín presenta mayores dificultades que la función proporcional para la mayoría del alumnado. Este hecho se identifica en la cuestión 3 ya que el alumnado que no responde correctamente en general lo realiza peor cuando se trata de la función afín.

La función constante no supone una dificultad extra a nivel de reconocimiento.

Como conclusión, puede afirmarse, por un lado, que no ha habido coherencia entre los resultados obtenidos por parte del grupo 2A en el examen y en el contrato de autoevaluación y, por otro, que el grupo 1A ha mostrado un nivel de reflexión sobre su propio conocimiento bastante más equilibrado que su grupo homólogo. Tal como se ha expuesto anteriormente, podría pensarse que el estilo de trabajo llevado a cabo en el aula ha podido influir en esta diferencia en autoevaluación.

Por otro lado, es necesario destacar que dos alumnos del grupo 2A (2A5** y 2A11*) han dejado el examen en blanco, y por lo tanto, esto ha influido en los resultados del grupo –aunque tampoco está claro si hubiera sido mejor o peor–.

Por otro lado, la mayoría del alumnado no ha creado un esquema coherente y diversificado sobre el concepto función que incluya otros conceptos (pendiente, ordenada en el origen,...) suficientemente estructurado para poder transferirlo posteriormente tal como espera la gran mayoría del profesorado. Además el alumnado identifica la función como una correspondencia de puntos y no como una relación covariacional. No obstante,

eso no significa que algunos elementos estructuradores (subconceptos) del concepto de función no se hayan adquirido en cierto modo, y es esto precisamente lo que se tratará de analizar a través de las entrevistas, ya que éstas suponen una nueva oportunidad más flexible para que el alumnado pueda aplicar los conceptos que ha ido construyendo.

Teniendo en cuenta la diferencia de resultados entre ambos grupos se considera oportuno analizar el alcance logrado por cada grupo en la unidad didáctica. Este análisis, además, pretende establecer un puente entre los resultados presentados hasta el momento y los resultados obtenidos de las entrevistas.

7.1.3 **Resultados obtenidos a través de las entrevistas**

Como ya se ha indicado anteriormente, la entrevista supone un medio que posibilita, a partir del diálogo entre la entrevistadora y la persona participante, ahondar en las ideas que se expresan, buscando comprender los razonamientos que conducen a ellas. Además la entrevista enmarcada en el marco teórico escogido para esta investigación, pretende no sancionar las respuestas que desde un punto de vista formal podrían calificarse de incorrectas sino avanzar hacia la construcción del propio concepto, es decir, dar oportunidad al alumnado para que también pueda aprender a lo largo de la entrevista.

Se plantean dos contextos uno de física y otro de química. En el contexto de física se concretan dos situaciones, la de la pelota y la de la montaña rusa (en situación de movimiento); en el contexto de química, se aborda la situación de la solubilidad (para más detalles, ver apartado de metodología).

Cada una de las situaciones se explica al menos dos veces para asegurar que el alumnado las entienda, así como la tarea encomendada. También se atiende a las diversas dudas que manifiesta el alumnado, tratando de evitar la excesiva intervención o dirección hacia una respuesta determinada (cuando la doctoranda interviene en exceso, se indica en su categorización e interpretación). Una vez transcritas las entrevistas se crea una red sistémica (ver anexo 15) con todas las respuestas categorizadas para posteriormente poder establecer niveles tanto en matemáticas como en ciencias.

7.1.3.1 *Conocimientos del alumnado en tareas de translación*

Se recuerda que la translación consiste en la identificación, el reconocimiento o la construcción de una representación en otra representación. Para este análisis, se tienen en cuenta las mismas categorías que las aplicadas en el análisis de los resultados del examen:

a) Traducción desde la descripción de la situación y b) Traducción entre los sistemas de representación gráfico y algebraico.

7.1.3.1.1 Traducción desde la descripción de la situación a una representación gráfica

Este tipo de traducción, a diferencia de la realizada en el examen, requiere unos conocimientos no sólo matemáticos sino también científicos. A lo largo de este apartado se realiza el análisis desde el punto de vista del conocimiento matemático y más adelante del científico, aunque no hay duda de que los dos conocimientos se condicionan mutuamente.

En este apartado se analizan: a) Traducción desde la descripción hacia la representación gráfica (TDG), b) Identificación y relación entre las variables (IV y RV) y c) Características del lenguaje utilizado y la descripción del gráfico (Dm)

Para realizar las tareas de transposición desde una situación de contexto científico a un gráfico, el alumno o la alumna tiene que construir, en primer lugar, un modelo de la situación descrita –que necesita de conocimientos físicos o químicos- y otro del gráfico representado para, posteriormente, relacionar ambos y decidir cuál de las representaciones gráficas corresponde al modelo de situación. En dichas construcciones, las ideas previas que el alumno y la alumna posean influirán en las ideas que expresen acerca de la situación, más aun cuando algunas de las situaciones analizadas -las relacionados con el movimiento de objetos-, requerirán conocimientos que aún no se han sido trabajado explícitamente.

En las dos situaciones del contexto de física se pregunta al alumnado cuál de los gráficos mostrados es más acorde a la situación expuesta y se le invita a la construcción de un nuevo gráfico si lo cree ve conveniente. En la situación de solubilidad se realizan tres preguntas.. Las preguntas del contexto de física y dos de la situación de la solubilidad (1G y 2G) tienen como objetivo indagar sobre la tarea de translación desde la descripción de la situación al gráfico (TDG). Además, en el caso de la situación de la pelota, también se incluye un pregunta para analizar la translación entre las representaciones gráfica y algebraica (TGE); en la situación de la solubilidad la tercera pregunta (3G o 3Gb) tiene como objetivo examinar la tarea de predicción (PE) (para más detalles ver apartado de metodología).

En cuanto a la muestra entrevistada, cabe recordar que se realizan entrevistas, además de al alumnado de los grupos 1A y 2A (3º de ESO), también a estudiantes de 3º de ESO que no aplican la UD.

7.1.3.1.2 Traducción desde la descripción hacia la representación gráfica (TDG)

En el análisis de esta tarea se profundiza, por un lado, desde las matemáticas, qué tipo de gráfico es el más escogido y a qué tipo de mental de la situación descrita puede estar asociada dicha elección y, por otro, desde las ciencias, los modelos de la situación son creados; además en el contexto de química, se valoran las respuestas a las preguntas 1G y 2G.



Se califican y categorizan todas las respuestas para su posterior comparación. Para ello se tiene en cuenta el lenguaje utilizado en la argumentación (ver tabla 6-5 en el apartado de metodología).

Las categorías en el contexto de física y de química se registran separadamente debido a la diversidad en las respuestas.

i. En el contexto de física

En este contexto, a diferencia del contexto de química, todo el alumnado entiende la situación expuesta.

Destaca el hecho de que las gráficas presentadas, tanto en la situación de la pelota como en la de la montaña rusa, son de una dificultad mayor a las trabajadas en el aula, ya que en ambos casos el gráfico correspondiente en su primera parte es una función inversa. Además en el curso anterior se ha trabajado la relación funcional espacio-tiempo, pero no la de velocidad-tiempo.









La mayor parte del alumnado escoge el gráfico  (14/24) o el  (7/24). Este hecho parece indicar que el modelo de situación creado se refiere a la representación del trayecto que se plasma en una interpretación icónica de la gráfica (ver tabla 7-6).



Las argumentaciones muestran distintas estrategias de traducción desde la descripción de la situación al gráfico escogido, independientemente del nivel académico al que pertenece el o la estudiante, e incluso a si se han trabajado las funciones, aplicando la UD, durante este periodo de tiempo o si no se han trabajado.

La mitad de la muestra entrevistada no se refiere a la variable velocidad y sólo hablan de que la pelota *va arriba y luego baja*; sus explicaciones se centran sólo en la trayectoria de la pelota. El resto hablan de cambios en la velocidad, aunque con significados diversos.

Tabla 7-6

Resumen referente a la traducción desde la descripción de la situación a la representación gráfica (TDG), situación de la pelota

Nivel de translación		Gráfico escogido	Alumnado	Principales argumentos utilizados por el alumnado
NO HAY TRADUCCIÓN porque	Hay interpretación icónica relacionada con trayectoria referida a pelota		1A16* 3B8**	1A16* , (351-352) <i>Yo pienso que es éste, el a porque primero lo lanzamos y luego viene hacia abajo.</i> 3B8** , (76-77) <i>Porque cuanto mayor velocidad utilizas menos tiempo.</i>
			1A1*** 2A6** , 2A11* 2A15** , 2A19** 3B4** , 3B6*	2A6** , (535-535) <i>Pues, porque refleja que sube primero y luego baja.</i> 3B6* , (85-89) <i>Porque aquí indica que empieza de abajo, va hacia arriba y luego vuelve a bajar. Yo interpreto estas dos (interesante su alusión al gráfico a y al c)</i>
			1A7* , 1A10** 2A2*	1A10** , (373-388) <i>Yo creo que sí. Pues, creo que va hacia arriba y luego que baja por el mismo punto/lugar.</i> 2A2* , (610-611) <i>Creo que no son las otras, porque va hacia arriba.</i>
	Hay una interpretación no icónica (↔) No adecua explicación a gráfica, no traduce		1A11** 2A5** 3B2*** , 3B3** 3B7*	1A11** , (466) <i>Sí... sí ésta. ¿Estas son la velocidad y el tiempo verdad? (473-474). Entonces cuando la lanzas la velocidad es la misma.</i> 3B7 , (148-152)... <i>va hacia arriba y luego hacia abajo. De aquí sería éste hacia arriba, recto, con una gran velocidad y luego hacia abajo mucho más lentamente. Éste está más equilibrado.)</i>
			2A14*** 3B1***	2A14*** , (658) <i>Creo que es la cuarta. (667-671) Cuando echas la pelota coge una velocidad y cuando baja lo hace con la misma velocidad o mayor.</i> 3B1*** , (59-62) <i>Porque la velocidad no sube y baja durante todo el tiempo; bueno, primero sube y luego baja. La velocidad no es igual, tiene una velocidad cuando sube y otra cuando baja.</i>
	HAY TRADUCCIÓN	Se trata de adecuar explicación a gráfico		1A14***
			2A7*** 3B5**	2A7*** , (492-497) <i>Porque no tiene; la velocidad sube y luego baja, despacio. Va hacia arriba y hacia abajo. Empieza a una velocidad, sube la velocidad, la velocidad sigue igual. (se refiere a como lo aprecia en el gráfico)</i> 3B5** , (60) <i>Porque va la misma velocidad. (73-75) Pues, en un tiempo aumenta la velocidad un poco, no el tiempo, es...</i>
Traduce explicación perfectamente válida a gráfico adecuado			1A13**	1A13** , (659) <i>¿Me la puedes dejar? (716-718) Porque la velocidad hacia arriba, la velocidad disminuye y cuando va hacia abajo aumenta.</i>


Una parte importante (7/24) no mantiene coherencia entre lo que argumenta y el gráfico que escoge, y por lo tanto no es capaz de traducir de una descripción al gráfico; por ejemplo, el alumno 2A5** (581-585), que escoge el gráfico  , dice “Porque cuando la tiramos tiene una gran velocidad, le das fuerza a la pelota y luego como consecuencia de la gravedad baja con fuerza, con mucha fuerza no pero si con un poco”, y el alumno 3B1***, que escoge el gráfico  , argumenta: (59-62) “Porque la velocidad no sube y baja durante todo el tiempo; bueno, primero sube y luego baja. La velocidad no es igual,

tiene una velocidad cuando sube y otra cuando baja”, lo cual nos indica que no leen lo que les muestra el gráfico sobre cómo varía la velocidad con el tiempo.

La mitad de la muestra entrevistada no se refiere a la variable velocidad y sólo hablan de que la pelota *va arriba y luego baja*; sus explicaciones se centran sólo en la trayectoria de la pelota. El resto hablan de cambios en la velocidad, aunque con significados diversos. Una parte importante (7/24) no mantiene coherencia entre lo que argumenta y el gráfico que escoge, y por lo tanto no es capaz de traducir de una descripción al gráfico; por ejemplo, el alumno 2A5** (581-585), que escoge el gráfico



, dice *“Porque cuando la tiramos tiene una gran velocidad, le das fuerza a la pelota y luego como consecuencia de la gravedad baja con fuerza, con mucha fuerza no pero si*



con un poco”, y el alumno 3B1***, que escoge el gráfico , argumenta: (59-62) *“Porque la velocidad no sube y baja durante todo el tiempo; bueno, primero sube y luego baja. La velocidad no es igual, tiene una velocidad cuando sube y otra cuando baja*”, lo cual nos indica que no leen lo que les muestra el gráfico sobre cómo varía la velocidad con el tiempo.

El alumnado (1A14***, 2A7*** y 3B5**) de nivel medio-superior parecen tratar de adecuar su modelo de la situación a la gráfica escogida, como lo muestra por ejemplo la alumna 2A7*** cuando indica (492-497) *“...la velocidad sube y luego baja, despacio. Va hacia arriba y hacia abajo. Empieza a una velocidad, sube la velocidad...”*. Es decir, no se representa el fenómeno físico observado, escoge un gráfico que se adecua a su observación (la pelota sube y baja) y centra su argumentación en explicar coherentemente el gráfico que escoge en función, principalmente, de la variable velocidad, pero no se representa la situación y cómo realmente está variando la velocidad con el tiempo.

Sólo el alumno 1A13** parece construir un modelo de la situación donde hay un cambio de la velocidad respecto del tiempo adecuado que, además, sabe traducirlo al gráfico, estableciendo relaciones válidas entre el fenómeno observado y el gráfico que lo representa. Este alumno, en la entrevista observa de nuevo el fenómeno para comprobar si su argumentación se corresponde con los hechos. Su explicación muestra que reconoce que se ha de fijar en los cambios en la velocidad, y que escoge el gráfico que refleja estos cambios (v/t), aunque no se refiere explícitamente al tiempo. Por todo ello, el argumento expuesto por este alumno se considera el máximo exponente de translación en esta situación (para más detalles ver tabla 6-6). Por otro lado, es destacable que este alumno,

aun siendo de nivel académico medio en matemáticas, presente el mayor nivel de conocimiento de física en esta situación y que, en esta muestra, no todo el alumnado perteneciente al mismo nivel de dificultad ha escogido la misma gráfica (ver tabla 7-6). Ello podría sugerir que el nivel de conocimiento en estas dos disciplinas –tan relacionadas– no siempre es el mismo, y que en situaciones que exigen pensar y aplicar conocimientos no mecánicos, estudiantes con resultados académicos medios son más competentes de lo esperado.

-En la situación de la montaña rusa –analizada en segundo lugar-, los datos se registran en la tabla 7-7.

En esta situación, al igual que sucediera en la situación de la pelota, los gráficos mayoritariamente se escogen escogidos (14/24) son aquellos que indican la representación del trayecto  y ; este último gráfico solamente lo escoge r el alumnado del grupo 3B, argumentando que no han visto antes gráficos que no lleven líneas rectas (ver tabla 7-7). Este tipo de gráficos se utiliza mucho en ciencias sociales y tal por ello, haya influido en la elección.

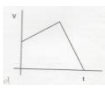
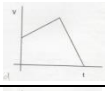
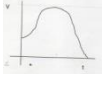




Por lo tanto, la mayor parte de la muestra construye un modelo de situación del trayecto aunque, a diferencia del caso de la pelota, hay más estudiantes que escogen el gráfico correcto.

Un grupo de estudiantes (5), también en esta ocasión, no traduce adecuadamente, es decir, no muestra coherencia entre la argumentación expuesta y el gráfico que escoge, tal como puede apreciarse en la alumna **3B2***** (ver tabla 7-7).

Por último un grupo importante (6) mantiene coherencia entre la argumentación explicitada y el gráfico que elige, que a su vez se adecúa a la situación, aunque tres seleccionan el gráfico de función proporcional ascendente.. El tipo de argumentación es distinto, y se analiza más adelante en profundidad desde las ciencias. Una muestra de ello se observa en el alumno **2A5**** (ver tabla 7-7).

Tabla 7-7

Resumen referente a la traducción desde la descripción de la situación a la representación gráfica (TDG), situación de la montaña rusa

Nivel de transposición		Gráfico escogido	Alumnado	Argumentos utilizados por el alumnado	
NO HAY TRADUCCIÓN porque	Hay interpretación icónica relacionada con trayectoria de...	carro 	3B6* 3B8**	3B6*,+MR (129-131) <i>Porque nunca he visto gráficos así; tal vez los he visto un poco rectos, pero así con curvas no.</i> (147-149) <i>porque según parece aquí sube y empieza desde abajo, llega hasta arriba y luego de nuevo hacia abajo.</i> 3B8**,-MR (118-119) <i>Porque como se ve en la foto es así y luego la bajada es recta.</i>	
			1A1***, 1A7*,1A9** 1A10**, 1A16* 2A2*,2A6**, 2A11**,2A15* 2A19** 3B4**	1A1***, -MR (609-610) <i>Porque empieza a una altura y luego sube y luego la bajada es grande.</i> 2A19**, +MR (473-474) <i>Porque según el dibujo la trayectoria es la misma.</i>	
	Hay una interpretación no icónica. No adecua explicación a gráfica, no traduce		3B7*	3B7*, - MR (177-181) <i>No. La forma no tiene nada que ver,. Porque primero la velocidad lo hace poco a poco y luego de repente aumenta en el tiempo. Es decir, en poco tiempo gran velocidad.</i>	
				1A11** 3B3**, 3B5**	1A11**, -MR (556-558) <i>Éste porque aquí se queda, como baja, la velocidad es mayor, entonces necesita menos tiempo para bajar.</i> (565) <i>Sí, por eso es así, en vez de mayor tiempo.</i> 3B3**,+MR (117-118) <i>Porque, o sea, si es la velocidad y luego coge como mucha velocidad al bajar...</i>
				3B2***	3B2***, +MR (144-145) <i>Porque cuando empieza la velocidad es mayor.</i>
	HAY TRADUCCIÓN	Se trata de adecuar explicación a gráfico		1A14***	1A14***, +MR (654-656) <i>Primero con la potencia tiene que subir la pendiente, y luego cuando está arriba va hacia abajo pero más deprisa.</i> (664-665) <i>Pues aquí, la potencia y el tiempo, en poco tiempo alcanza mucha potencia.)</i>
Traduce explicación perfectamente válida a gráfico adecuado			1A13** 2A5**, 2A14***	1A13**, +MR (844-851) <i>Porque cuando sube la velocidad va hacia abajo/disminuye y aquí cuando baja la velocidad va hacia arriba/aumenta y ha pasado el tiempo. Porque cuando está aquí tienen que ser unos segundos más tarde; entonces, aquí refleja que va hacia abajo/desciende. Entonces, cuando aquí va hacia abajo la velocidad tiene que aumentar.</i> 2A5**, +MR (655-658) <i>Que igual es éste (b) ya que por aquí ya tiene velocidad y al ascender por aquí disminuye la velocidad y luego al coger esta rampa (la rampa para descender)_vuelve a subir.</i>	
				2A7*** 3B1***	2A7***, +MR (649-651) <i>Primero va bastante despacio, luego más despacio porque hay pendiente y luego pendiente abajo alcanzando mayor velocidad.</i> 3B1***, +MR (113-115) <i>Aquí al subir la pendiente la velocidad disminuye y luego en la bajada la velocidad sube rápidamente.</i>

-MR (no ha montado en montaña rusa); + MR (ha montado en montaña rusa)

Los resultados comparando ambas situaciones se muestran en la tabla 7-8.

Tal como puede observarse, parte importante de la muestra realiza una interpretación icónica en ambas situaciones, por lo que podría inferirse que estas personas mantienen un modelo de situación de trayecto (sobre todo en el grupo 1A). Por el contrario, contrariamente a lo que cabría esperar, no todo el alumnado del grupo 3B realiza una interpretación icónica.

La mayoría de este grupo 3B muestra problemas de traducción desde la descripción de la situación al gráfico en ambas situaciones. Obsérvese a modo de ejemplo el argumento expuesto por la alumna 3B2** cuando dice al escoger la gráfica (144-145) *Porque cuando empieza la velocidad es mayor.*

Cinco estudiantes muestran un grado de translación distinto dependiendo de la situación contextualizada. En la situación de la pelota, muestran problemas de traducción o adecuación al gráfico, que superan en la situación de la montaña rusa.

Tabla 7-8

Resumen referente a la traducción desde la descripción de la situación a la representación gráfica (TDG), contexto de física por niveles TDGm (niveles en TDG)

			Traducción desde la descripción de la situación al gráfico escogido (situación montaña rusa)			
			NO HAY TRADUCCIÓN		HAY TRADUCCIÓN	
			Interpretación icónica	NO hay interpretación icónica No hay traducción	Hay adecuación del argumento al gráfico	Hay traducción perfectamente válida
Traducción desde la descripción de la situación al gráfico escogido	NO HAY TRADUCCIÓN	Interpretación ICÓNICA	1A1***/1A7*/ 1A9***/1A10**1A16* 2A2*/2A6***/2A11*/ 2A15***/2A19** 3B4***/3B6*/ 3B8** (TDGm1)			
		No hay interpretación icónica No hay traducción		1A11** 3B2***/3B3**/3B7* (TDGm2)		2A5***/ 2A14*** 3B1*** (TDGm3)
	HAY TRADUCCIÓN	Hay adecuación del argumento al gráfico		3B5** (TDGm2)	1A14(1)*** (TDGm3)	2A7*** (TDGm3)
		Hay traducción perfectamente válida				1A13** (TDGm4)

Por último, es destacable que el alumno de nivel académico medio 1A13** muestre el mayor nivel de translación en ambas situaciones, y además su nivel de argumentación es superior al expresado por el resto del alumnado.

Es necesario recordar que desde esta investigación se dan por válidas aquellas transposiciones donde hay concordancia entre la argumentación expuesta y el gráfico escogido aunque este último no sea el adecuado desde el punto de vista científico.

Los porcentajes de elección en cuanto a elección de gráfico y los momentos argumentados (subir o bajar y subir y bajar) en cada situación se encuentran representados en los siguientes gráficos. Este hecho podría interpretarse como que el alumnado en la

construcción de su modelo se situación, identifica cuando sube o bien la pelota o el carro de la montaña rusa y cuando baja; es decir, el trayecto. La identificación de un solo momento, por el contrario, sugiere un desconocimiento de la física del movimiento, ya que indica que el objeto en movimiento presenta la misma velocidad cuando sube y baja (ver figura 7-13).

La interpretación icónica es mayor mayor en la situación de la pelota.

Por otro lado, la translación desde la situación descrita al gráfico escogido ha es más elevada en la situación de la montaña rusa (seis estudiantes lo realan) que en la situación de la pelota (lo lleva acabo sólo un alumno). El alumnado de los subgrupos 1A y 2A –ha aplicado la UD- realiza en mayor medida esta esta; no se observan diferencias entre ambos grupos. El número de estudiantes que no realiza ningún tipo de translación, incluso en la situación de la montaña rusa es muy importante (18 estudiantes) y quienes no lo hacen porque realizan una interpretación icónica del gráfico suponen, en los grupos que han trabajado las funciones mediante la aplicación de la UD durante la investigación, casi el doble de estudiantes que quienes no lo han hecho.

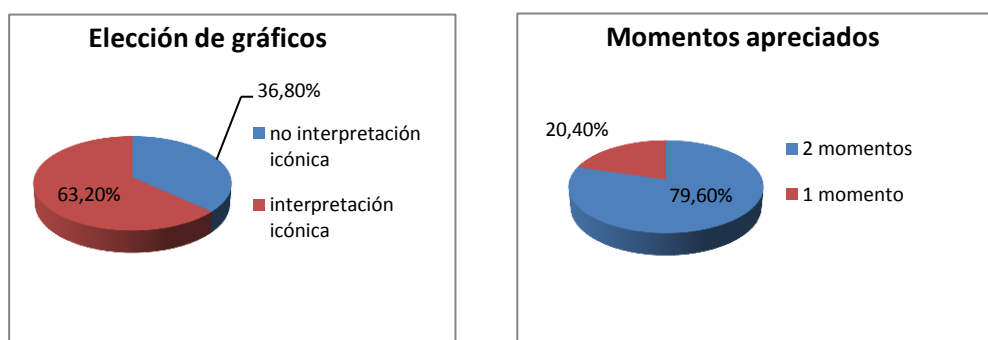


Figura 7-13. . Elección del tipo de gráfico que responde en mayor medida a una interpretación icónica o no (expresado en %) y momentos argumentados.

ii. En el contexto de química

La situación de solubilidad, al igual que las situaciones anteriores –pelota y montaña rusa- es conocida para el alumnado. Comparte un carácter cotidiano y científico a la vez, lo que ha decidido su elección para esta entrevista.. Además, la solubilidad se ha trabajado de modo cualitativo en las clases de ciencias en los tres grupos investigados mediante el proyecto APQUA. Pese a todo ello, a la mayoría del alumnado se le pregunta

si entiende el concepto; si el estudiante manifiesta dudas o desconocimiento, la investigadora da las oportunas explicaciones. El gráfico utilizado se encuentra en la figura 6-5.

En este apartado, se consideran las preguntas: a) 1G *¿La solubilidad de las tres sustancias tiene que ver con la temperatura?* y b) 2G *¿La solubilidad del nitrato de sodio será siempre superior a la del nitrato de potasio?* Para responder adecuadamente a la primera pregunta el estudiante necesita realizar un enfoque global el gráfico, y un enfoque global y local para poder hacerlo en la segunda pregunta.

Tabla 7-9

Resumen referente a la traducción desde la descripción de la situación a la representación gráfica (TDG), situación solubilidad (1G y 2G)

Nivel de translación		Alumnado	Principales argumentos utilizados por el alumnado
NO HAY TRADUCCIÓN, porque	No entiende lo representado (0), TDGm 1	1A7*/1A9** 2A2*/2A6** 2A15**/ 2A19** 3B4**/3B6* 3B7*/3B8**	1A7*, (968-1002) <i>No. Porque la temperatura sí tiene que ver. Aquí por ejemplo se necesitan 70 para disolverse. El cloruro de sodio y el nitrato de potasio. O sea ¿que hasta que se alcanza los 70 grados el cloruro de sodio no se disuelve? Y el nitrato de potasio. ¿No observas nada en el caso del nitrato de sodio? Sí, que se disuelve a 10 grados o así.</i> 2A6**, (847-902) <i>Es que esto no lo entiendo. ¿Qué no entiendes? ¿Qué refleja! ,... Entonces es ésta pero a mayor temperatura se disuelve en mayor cantidad de agua. ¿Se disuelve mayor cantidad de agua? No, se disuelve el producto. Porque esto son los gramos. Entonces ésta es... que tienes que aumentar la temperatura más de 70 si echas más gramos.</i>
	No adecuada explicación a gráfica, no traduce (lee literalmente, interpreta icónicamente no traduce) TDGm 2	1A16* 2A11*	2A11*, (781- 818) <i>Sí. Entonces la solubilidad del nitrato de sodio siempre será mayor que la del nitrato de potasio (no igual). ¿Tendrán la misma solubilidad? Sí. Entonces no estás de acuerdo, pero piensas que tendrán igual ¿Observas algo interesante aquí? Sí estos. ¿Cuáles? ¿Cómo empiezan? Sí. Porque ésta tiene mayor solubilidad cuando empieza y luego menos. ¿Y al final? La misma.</i>
		3B3**	3B3**, (264-283) <i>Pues...no. Porque el nitrato de potasio se disuelve antes. ¿Dónde lo observas? Aquí. O sea, que la curva es... ¿Siempre? Sí.</i>
HAY TRADUCCIÓN	Hay una interpretación análoga a la icónica TDGm 3	1A10**/ 1A11* 3B1*** 3B2*** 3B5**	1A10**, (734- 847) <i>No, no. Porque para que algo se disuelva hay que calentarlo y tiene que tener mayor/más temperatura... Yo creo que no. Porque aquí hay más nitrato de sodio. Sí disuelto, pero en este punto. ¿Éste? La temperatura igual es 69 (Mm) y la solubilidad unos 138. Que ahí el nitrato de potasio sube más pero que al nitrato de sodio le cuesta más subir.</i> 1A11*, (879-894) <i>No lo sé. Aquí sí es mayor. ¿Con eso te es suficiente para estar de acuerdo? Sí. (947-964) Que la solubilidad y la temperatura del nitrato de sodio y el del nitrato de potasio son iguales aquí. Sí, en ese punto; ¿y antes? Antes no. El nitrato de potasio tiene la temperatura y la disolubilidad poco a poco mayor, hacia arriba pero lentamente. ¿Y después de ese punto? Al revés, éste (se refiere al nitrato de potasio) va más rápido y el otro más despacio (se refiere al nitrato de sodio).</i>
	Traduce explicación perfectamente válida a gráfico adecuado TDGm	1A1*** 1A13** 1A14*** 2A5** 2A7*** 2A14***	2A7***, (933-942) <i>¿Cómo? Pues, cuando se juntan tienen la misma solubilidad, tienen la misma temperatura y tienen la misma solubilidad.</i> 1A14***, (886-954) <i>Pues no. ...en el caso del cloruro de sodio...aunque aumente o disminuya la temperatura la solubilidad es la misma.</i> <i>En el caso del nitrato de potasio a medida que va aumentando la temperatura la solubilidad va aumentando irregularmente, en el caso del nitrato de sodio regularmente.</i>

El análisis de las respuestas a las dos preguntas realizadas, muestra que 5 estudiantes del grupo 1A, 3 del grupo 2A y 3 del grupo 3B traducen desde la descripción de la situación al gráfico a través de un enfoque tanto global como local.

Desde un análisis tipo DA (problema secuestrado) el acierto o no de las preguntas tendría un valor importante y por lo tanto podría concluirse fácilmente cuál de los grupos ha acertado en mayor medida las preguntas (62.5% 1A > 50% 2A > 43.75% 3B); el cómputo incluye a ambas preguntas y al total de respuestas totales -16 respuestas por grupo-). Sin embargo, un análisis desde el punto de vista cualitativo profundiza hasta qué punto los monosílabos pueden ser refrendados por una verdadera translación. En este sentido podría decirse que las respuestas del grupo 1A han estado refrendadas en general por una translación del 62.5% del alumnado, en el grupo 2A se produce un desequilibrio entre una “respuesta correcta” y la translación correspondiente, ya que ésta sólo se ha llevado a cabo por un 37.5 de la muestra. En el caso del grupo 3B tampoco se habría producido una translación acorde a la pregunta “correcta” ya que un 37.5% ha realizado translación. La diferencia entre estos dos últimos grupos sería que el alumnado del grupo 2A ha realiza una translación adecuada.

Es destacable el número de estudiantes que utiliza en sus argumentaciones expresiones como *sube*, *le cuesta* que pudieran interpretarse como análogas a las dadas en la interpretación icónica en el contexto de física.

Por otra parte, se consideran todas las argumentaciones y expresiones utilizadas para categorizar niveles de traducción desde la descripción de la situación al gráfico (TDG).

Tabla 7-10
Resumen de los niveles de TDG en referencia a distintos contextos

	Contexto de física	Contexto de química
TDGm4	1A13**	1A1***, 1A13**, 1A14*** 2A5**, 2A7***, 2A14***
TDGm3	1A14*** 2A5**, 2A7***, 2A14*** 3B1***	1A10**, 1A11** 3B1***, 3B2***, 3B5**
TDGm2	1A11** 3B2***, 3B3**, 3B5**, 3B7*	1A16* 2A11* 3B3**
TDGm1	1A1***, 1A7*, 1A9**, 1A10**, 1A16* 2A2*, 2A6**, 2A11*, 2A15**, 2A19** 3B4**, 3B6*, 3B8**	1A7*, 1A9** 2A2*, 2A6**, 2A15**, 2A19** 3B4**, 3B6*, 3B7*, 3B8**

En esta situación, dado que las respuestas han sido más dispersas que en las situaciones de física, se ha analizado también la relación con el nivel académico (figura 7-14).

Tal como era esperable, existe una relación entre el nivel académico de matemáticas y el nivel de translación realizado y además en ambos contextos los resultados indican elevada tendencia. Si dichos datos fueran en una muestra más amplia podría hablarse de relación estadísticamente significativa (los índices en el contexto de física TDGf, $.585$ $p= .017$ y en el contexto de química TDGq, $.730$ $p= .001$); por lo tanto en el contexto de química la correlación es de mayor significación.

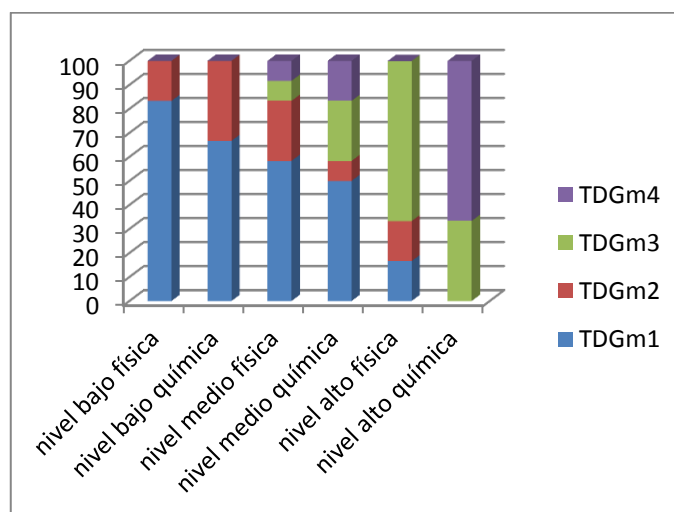


Figura 7-14. TDG en referencia a nivel académico y contextos.

7.1.3.1.3 Identificación y relación entre las variables (IV y RV)

Un análisis en mayor profundidad del concepto función, en el sentido de clase de coordinación, requiere valorar el nivel de logro en cuanto a la aplicación de subconceptos asociados a dicho concepto. En este sentido la identificación de variables (IV) es fundamental, así como la relación covariacional establecida entre ellas (RV) por el alumnado que definen cada una de las situaciones contextualizadas. Para ello, se utilizan los criterios de evaluación ya descritos en la metodología (tabla 6-5).

1. En el contexto de física

- En la situación de la pelota, la población analizada muestra un nivel de identificación de variables (IV) v , t , escaso más acusado en los grupos que han trabajado

las funciones mediante la aplicación de la UD, que en el grupo que no lo ha hecho. Este hecho tal vez pueda ser explicado porque los tres grupos han trabajado en cursos anteriores la interpretación de gráficos y tal vez, ello haya ayudado al grupo 3B; en cambio, los grupos 1A y 2A tal vez inmersos en las tareas puramente matemáticas han dejado de lado esta parte más interpretativa.

Posiblemente esta escasa identificación de las variables también se explica porque una construcción del modelo de situación que incluya una trayectoria –en el sentido físico- en principio, no está asociada más que a una imagen de concepto y, por lo tanto, la o el estudiante que lo construye, no tiene por qué incluir en ella variables abstractas como la velocidad o el tiempo. Sin embargo, el hecho de que haya estudiantes que sí han identificado por lo menos alguna de las variables –velocidad- hace pensar que podrían haber construido un modelo de situación más abstracto que el anterior, donde se incluyan conocimientos de movimiento, aunque también tenga un sentido de trayectoria. El no explicitar la variable *tiempo* podría entenderse porque por lo general, todo el alumnado parece tener implícita esta variable (ver figura 7-15).

El alumnado, en general, tiene en cuenta dos momentos en sus explicaciones - subida y bajada- , y el cambio de velocidad se relaciona siempre en referencia a ellos. Ello indica que sí existe un conocimiento del movimiento, aunque muy rudimentario.

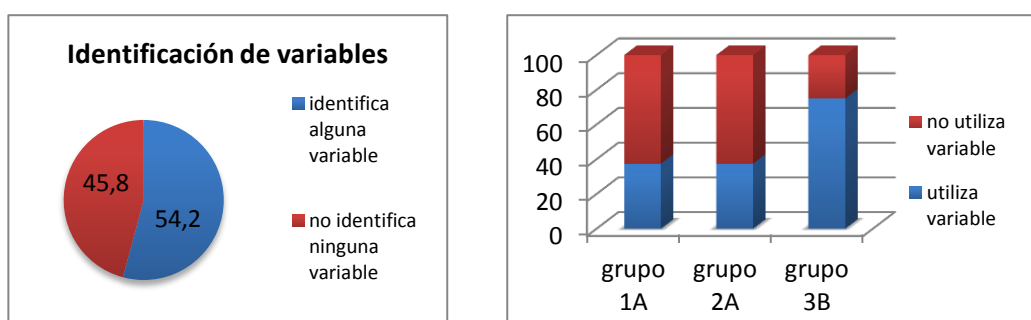


Figura 7-15. Identificación y utilización de variables (IV) en argumentación (expresado en %) en la situación de la pelota, en conjunto y por grupos.

El estudiante se encuentra muy condicionado por la experiencia –situación de pelota- y la imagen –situación de montaña rusa-, y no reflexiona sobre la información representada en el gráfico; es decir, no parece producirse una construcción de un modelo de la representación gráfica asociada al modelo de situación creado, sino que la construcción del modelo mental de la representación ha venido dada por el aprendizaje

puramente matemático.(ver anexos 14 y 15).

Sólo la alumna 3B5** identifica ambas variables (73-75) *“Pues, en un tiempo aumenta la velocidad un poco, no el tiempo,..”*; no obstante la descripción realizada parece indicar que interpreta el gráfico escogido pero no el movimiento que plantea la situación.

- En la situación de la montaña rusa, un mayor número de estudiantes explicita las variables; por lo tanto, parece que el contexto de la montaña rusa facilita en mayor medida la identificación de las mismas. En la misma, dicha, tanto los alumnos y las alumnas del grupo 1A como en el grupo 3B obtienen peores resultados mientras que el 2A los mantiene respecto a la situación de la pelota (ver figura 7-16).

En cuanto a la relación covariacional entre las variables (RV), destacan, por un lado, el alumno 3B7* cuando argumenta (177-181) *“No. La forma no tiene nada que ver. Porque primero la velocidad lo hace poco a poco y luego de repente aumenta en el tiempo. Es decir, en poco tiempo gran velocidad”*, ya que realiza una relación que podría acercarse a la covariacional, si se admite que su imagen del tiempo es aquella que siempre aumenta y lo hace hacia la derecha del gráfico-, y, por otro, el alumno 1A13** cuando dice (844-851). *Porque cuando sube la velocidad va hacia abajo y aquí cuando baja la velocidad va hacia arriba y ha pasado el tiempo. Porque cuando está aquí tiene que haber pasado unos segundos más tarde, entonces aquí refleja que va hacia abajo. Entonces, cuando aquí va hacia abajo la velocidad tiene que aumentar*, que parece mostrar un conocimiento mayor del fenómeno presentado, aunque su nivel de expresión verbal sea bastante mejorable. Todos estos datos se encuentran recogidos en los anexos 14 y 15.

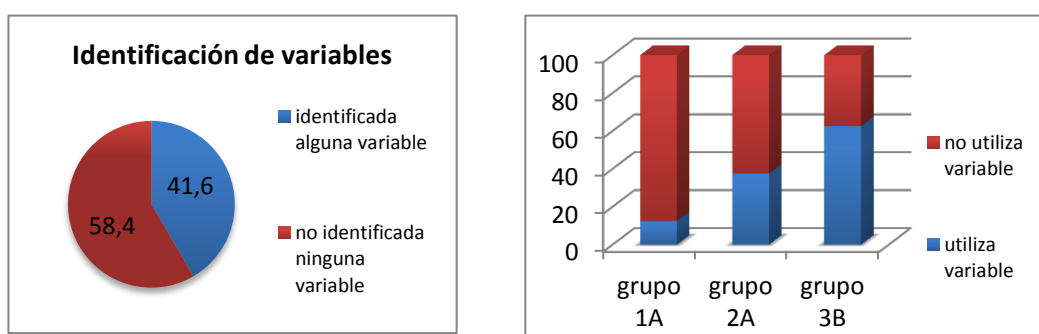


Figura 7-16. Identificación y utilización de variables (IV) en argumentación (expresado en %) en contexto de montaña rusa, en conjunto y por grupos.

2. En el contexto de química

El concepto de solubilidad, al igual que el de velocidad no es una magnitud directamente a inferir, ya que en ambos casos, se trata de la relación entre dos magnitudes. La solubilidad es una función que hace referencia a las variables gramos de soluto y cantidad de disolvente, ml (agua). Aunque todos los gráficos mostrados en la entrevista suponen la representación de una función dentro de otra función, el gráfico correspondiente a la solubilidad respecto a la temperatura, ha resultado difícil para una parte del alumnado. No está claro cuál ha podido ser el motivo de ello; tal vez, porque la variable solubilidad ha estado definida por las unidades concretas y las gráficas de velocidad sólo lo han sido presentadas cualitativamente.. Tampoco puede descartarse que el concepto de solubilidad, no muy claro para alguna parte del alumnado, haya sido un factor importante. .

La identificación de las variables (IV) en la situación de solubilidad, es superior a la mostrada en las situaciones de la pelota y de la montaña rusa (ver figura 7-17). Esta mejora en identificación de variables, tal vez haya sido debida a la diferencia de contexto, desde el físico al químico. En el primer contexto la visualización de la trayectoria condiciona en gran medida la construcción de la situación porque se lleva cabo la experiencia y la o el estudiante se fija en que la pelota sube y baja. En la representación de la situación química, el gráfico no parece interferir porque no puede ser comparable con la situación, incluso puede ayudar (en general calentar sí ayuda a disolver -conocimiento cotidiano-). No obstante, tampoco puede descartarse que las preguntas más cerradas en la situación de solubilidad hayan podido influir también.

Por otra parte, un número destacado de personas identifica la variable tiempo en lugar de la variable temperatura.

Son destacables los resultados positivos obtenidos por el grupo 1A y sorprende de nuevo los resultados del grupo 3B –no ha aplicado la UD -, ya que son mejores que los del grupo 2A, no solo en la identificación de las variables sino también en la relación entre éstas (han establecido relación de regla).

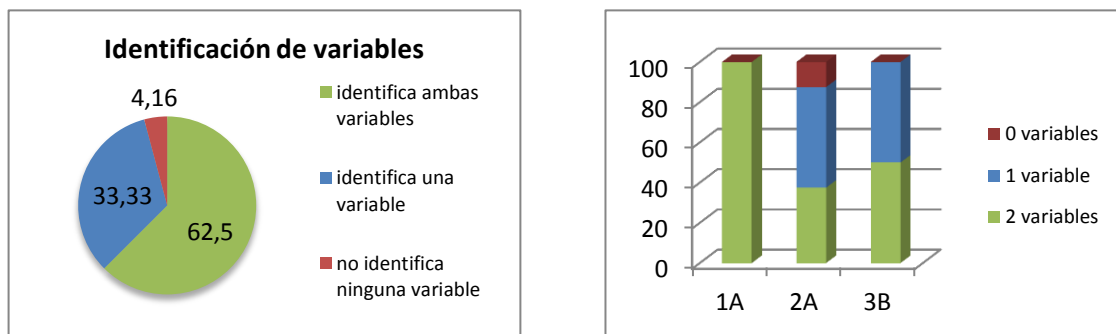


Figura 7-17. Identificación y utilización de variables (IV) en argumentación (expresado en %) en la situación de solubilidad, en conjunto y por grupos.

El 37.5% en el grupo 2A (2A2*, 2A11**, 2A15**) y el 50% en el grupo 3B (3B2***, 3B4**, 3B7* y 3B8**) indica en sus exposiciones la variable *tiempo* en lugar de la variable *temperatura*; además, la alumna 2A15** y el alumno 2A19** utilizan en sus argumentaciones las unidades de la variable solubilidad en lugar de referirse a la variable solubilidad. Estas confusiones se analizan más adelante desde las ciencias.

-La relación covariacional establecida entre las variables (RV) a través de las argumentaciones expuestas, indican que el grupo 1A no solamente utiliza a ambas variables en sus argumentaciones, sino que además la relación covariacional que establecen entre ambas es de nivel más elevado.. A modo de ejemplo se muestra lo argumentado por el alumno 1A10** cuando dice (734-796) “...cuando sube la temperatura sube la solubilidad y eso se da en el nitrato de sodio y el nitrato de potasio, pero, en el cloruro de sodio la temperatura no tiene nada que ver”.

La figura 7-19, muestra el tipo de relación establecido entre las variables.

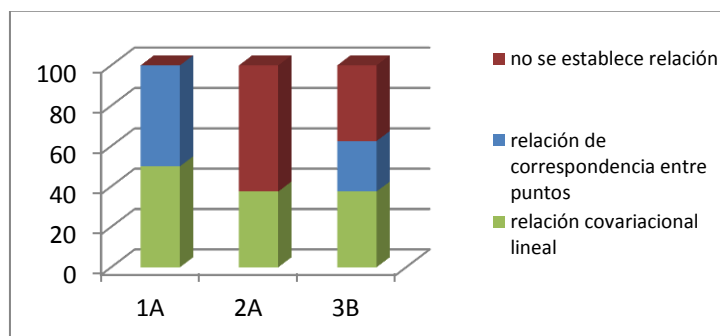


Figura 7-18. Relación establecida entre las variables (RV) por grupo.

Los datos indican que son los y las estudiantes del grupo 1A quienes obtienen los mejores resultados, ya que el alumnado en su totalidad utiliza las variables en sus argumentaciones y la mitad del grupo establece relación covariacional entre ambas. El grupo 2A responde adecuadamente a un mayor número de respuestas que el grupo 3B; sin embargo, tanto las variables identificadas como las relaciones establecidas no son de mejor calidad que las del grupo 3B. Todo esto lleva a preguntarse qué causas pueden explicar estas diferencias entre los dos grupos que han trabajado las funciones mediante la aplicación de la UD por un lado y, por otro, qué puede haber sucedido en cuanto al trabajo con el concepto de variable en el grupo 2A para que sus resultados hayan sido inferiores a los obtenidos por el grupo 3B.

Son numerosos los alumnos y alumnas que indican que la gráfica del cloruro de sodio es constante, tal como lo hace la alumna 1A1*** (768-776) “...en el caso del cloruro de sodio no tiene que ver con la temperatura. Porque es constante, no cambia aunque la temperatura sea alta o baja, continuará igual...”. Además el alumno 2A14*** indica que es constante y no tiene pendiente cuando conversas con la investigadora: (1002-1014) “Pues que en estos dos que al tener más temperatura la solubilidad también va hacia arriba,... en el caso del cloruro de sodio igual no, por ejemplo si la temperatura es alta o baja la solubilidad es igual”. (1027-1051) “¿Este gráfico te recuerda a cosas que hayas podido trabajar en clase? Ahora mismo no. Este año hemos aprendido que son constantes. Cuando no hay pendiente”.

Algunas personas, como el alumno 1A13**, señalan que existe un punto de encuentro al argumentar (1170-1180) “No. Porque aquí existe un punto de encuentro/intersección, en este punto de encuentro se ven y luego ya a partir de 70 grados el nitrato de potasio va hacia arriba, se disuelve más fácilmente”.

Otras personas se refieren al método de igualación al referirse a cómo resolverían el sistema de ecuaciones a la necesidad de hallar tanto la pendiente como la ordenada en el origen.

Por último, el alumno 1A14*** apunta un aumento de la solubilidad respecto de la temperatura de un modo diferenciado entre dos sustancias cuando dice (951-953) “En el caso del nitrato de potasio cuanto mayor temperatura pone, la solubilidad va aumentando irregularmente, en el caso del nitrato de sodio regularmente”. Este tipo de argumentación parece estar asociado a una imagen de pendiente, aunque no lo haga de modo explícito.


7.1.3.1.3.1 Características del lenguaje utilizado y la descripción del gráfico (Dm)

A la hora de escoger un gráfico en el contexto de física o de describir lo que sucede en el gráfico de solubilidad (contexto de química), el alumnado realiza una serie de descripciones que en este apartado se analizan desde una mirada general, de lenguaje y de vocabulario utilizado (Dm).

Al igual que en anteriores concreciones, los criterios utilizados para la definición de cada nivel se encuentra expuestos en el apartado de metodología (tabla 6-5).

- En la situación de la pelota el nivel de coherencia y expresiones utilizadas sugieren que la gran mayoría del alumnado realiza una interpretación icónica del gráfico. Así expresiones como las utilizadas por las alumnas 3B4** (33) “*¡Es imposible! (39) Porque la pelota no viene por aquí. (45) La pelota tiene que hacer esto, así*”, hacen referencia explícita al camino y otras como la de la 2A6** (534-535) “*Pues, porque refleja que sube primero y luego baja*”, indican movimiento, pero bajo la representación del trayecto.

Otro tipo de expresión, como la reflejada por la alumna 3B2*** cuando dice (86-87) “*Primero con una velocidad más rápida y luego cuando baja la velocidad es menor*”, orientan una mezcla entre la construcción del modelo de situación de la trayectoria con un valor añadido de conocimiento sobre cinemática –cambio de velocidad–.

También se observan incoherencias entre lo dicho y el gráfico escogido , como en el caso del alumno 2A14 *** cuando argumenta (658) “*Creo que es la cuarta. (667-671) Cuando echas la pelota coge una velocidad y cuando baja lo hace con la misma velocidad o mayor y aquí la velocidad es hacia abajo*”.

Por último, se encuentra el alumno 1A13** que si bien escoge el gráfico adecuado, al igual que el resto del alumnado, no muestra un uso preciso del vocabulario en sus argumentaciones cuando dice (716-718) “*Porque la velocidad hacia arriba, la velocidad disminuye y cuando va hacia abajo aumenta*”.

- En la situación de la montaña rusa el nivel de coherencia y las expresiones utilizadas durante la argumentación indican que tampoco se refieren ni al modelo de función ni al *modelo físico*, su lenguaje de nuevo apunta a un sentido físico de la atracción (montaña rusa). Muestra de ello son las alumnas 1A1*** cuando indica (609-

610) “*Porque empieza a una altura y luego sube y luego la bajada es grande* y la alumna 1A9** al argumentar (944-945) *A ver, por la mitad es así, porque empieza por la mitad y luego... ¡jo es la forma y todo!* (958) *Es que es lógico*”.

Otras personas utilizan expresiones no coherentes con el gráfico que escogen, ya que lo que dicen y lo que se representa no son coincidentes; así sucede con el alumno 3B3** al afirmar (117-118) *Porque, o sea, si es la velocidad y luego coge como mucha velocidad al bajar...*” No obstante, la elección del gráfico y la argumentación expuesta por parte de algunas personas es de mayor riqueza y coherencia a las efectuadas en la situación de la pelota, como es el caso de la alumna 2A7*** (649-651) *“Primero va bastante despacio, luego más despacio porque hay pendiente y luego pendiente abajo alcanzando mayor velocidad”*.

- En la situación de solubilidad el nivel de coherencia y expresiones utilizadas durante la argumentación es mayor y de mejor calidad que el identificado en las dos situaciones de física. Se han identificado dos grandes categorías. Unas personas utilizan términos muy parecidos a los ya comentados en el contexto de física; –en ellas destacan expresiones como *mismo camino, hacia arriba, se juntan,...*. Este tipo de expresiones lo muestra por ejemplo la alumna 2A2* cuando dice (1136-1156) *“Sí. Aquí. En el punto de encuentro. ¿Qué es para ti ese punto? Cuando es igual, cuando están en el mismo camino. No sé cómo explicarlo”*. Otras personas en cambio, aunque han se sirvan de expresiones iguales o parecidas a las anteriores, la aportación de otros datos, sugiere falta de vocabulario para expresar una idea sobre lo que sucede en la situación. Este podría ser el caso del alumno 1A7* cuando dice (1069-1155) *“Que aquí se juntan. ¿Qué significa que se junten? No lo sé. Aquí hay una línea. Y se junta con ésta otra. Sí. ¿Sabes qué quiere decir en este caso ¿Esto qué es? ¡Ah, claro! Aquí será igual, pero luego el otro tendrá mayor. ¿Ahora sabrías decirme qué información dan estos puntos? Que tendrán la misma solubilidad aquí (se refiere al punto de intersección). ¿Cuáles? El nitrato de sodio y el cloruro de sodio aquí (se refiere al punto de intersección)...tendrán la misma solubilidad y aquí lo tendrán el cloruro de sodio y el potasio de nitrato”*.

En algunos casos, la descripción realizada se ve influenciada por el contexto en el cual se ha solicitado la tarea. Merece especial atención la alumna de nivel académico alto 1A1*** que en el contexto de química, a diferencia del contexto de física, indica (803-807) *“No. No, porque aquí por ejemplo es mayor; pero, cuando la temperatura es un poco más pequeña que 70 la solubilidad del nitrato de potasio va aumentando. Y aquí se*

ve que luego sigue así, éste será mayor”.

A lo largo de las descripciones realizadas se han conjugan tres tipos de lenguaje: cotidiano, científico y matemático, dependiendo de cada estudiante, la situación y la tarea encomendada. Por ejemplo, la alumna anterior, 1A1*** utiliza un lenguaje cotidiano a la hora de describir la situación de la montaña rusa cuando dice (603) *“Ésta. (609-610) Porque empieza a una altura y luego sube y luego la bajada es grande”*; un lenguaje matemático cuando se le pide escoger la ecuación acorde al gráfico escogido en la situación de la pelota (556-557) *“Tal vez ésta; o sea, ésta y ésta”* (la alumna ha escogido éstas: $v=mt$ y $v= n-mt$); (573-578) *“Porque esta es la pendiente, si va hacia arriba es positiva y sale del punto de intersección de las coordenadas, no tienen n y ésta n tiene que ser mayor a 0 porque no empieza por el cero y luego la pendiente es descendiente; entonces, tiene que ser negativo”*, y lenguaje científico cuando se trata de la descripción en la situación de solubilidad, como puede leerse en el párrafo anterior.

Otro ejemplo de conjugación de los distintos lenguajes (coloquial, matemático y científico) también lo realiza el alumno 1A13** en su intervención (1170-1180) *“No. Porque aquí existe un punto de encuentro, en este punto de encuentro se ven y luego ya a partir de 70 grados el nitrato de potasio va hacia arriba, se disuelve más fácilmente”*.

Incluso la terminología va cambiando en la misma persona a lo largo de las distintas situaciones desde utilizar *hacia arriba* en la situación de la pelota, *sube* en el de la montaña rusa y *aumenta* en la de solubilidad (alumna 1A1***).

En general la poca riqueza de vocabulario añadido a las expresiones utilizadas muestran un nivel de competencia lingüística en euskera bajo por parte del alumnado.

7.1.3.1.4 Traducción entre los sistemas de representación gráfico y algebraico (TGE)





El nivel de adquisición de un concepto viene reflejado por el número de representaciones de dicho concepto que el alumno o la alumna es capaz de reconocer y relacionar. Los distintos niveles van desde la utilización de una sola representación hasta el nivel en el que el modelo gráfico de la función o la expresión analítica son vistos como objeto matemático propio. En este proceso continuo interesa analizar el grado de adecuación al pasar de una representación a otra. Esta tarea sólo ha sido requerida a los subgrupos 1AA y 2AA.

Para analizar esta categoría se consideran las siguientes subcategorías de análisis: a) Reconocimiento entre el gráfico y la expresión algebraica (subcategoría 3) y b) Construcción de la representación algebraica a partir de la representación gráfica.

7.1.3.1.4.1 Coherencia entre las representaciones gráfica y algebraica

La coherencia entre las representaciones gráfica y algebraica es analizada en la situación de la pelota. Dependiendo del gráfico escogido, la o el estudiante necesita dos ecuaciones para llevar a cabo la tarea, hecho que se ha considerado para establecer los niveles (TGE_m) ya que se valora como una tarea de mayor exigencia (ver tabla 7-11).

Tabla 7-11
Resumen referente a la coherencia entre las representaciones gráfica y algebraica en la situación de la pelota


Tabla resumen referente a la coherencia entre las representaciones gráfica y algebraica en la situación de la pelota					
<i>(En verde se ha señalado las consideradas como válidas. Algunas gráficas han necesitado dos ecuaciones; por ello la celda correspondiente aparece dividida. Las calificaciones otorgadas que posteriormente se utilizan para la categorización en niveles se expresan entre paréntesis)</i>					
					
$y = mx + n$	1A16* (0)	2A2* (1)	1A9** 2A15** (1)	1A9** 2A15** (0)	
$v = mt + n$			2A11*/2A15**(1)		
$y = n - mx$				1A14*** (2)	1A13** (2)
$v = n - mt$				1A1*** 2A11* (2)	1A13** (2)
$y = mx$		2A7*** (2)	1A14*** (2)		
* $v = mt$		1A7*/1A10**/1A11** 2A7***/2A14*** (2)	1A1*** (2) 2A5**/2A19**	2A19**(0)	
$y = - mx$					
$v = - mt$					

En la tabla 7-11, no se ha incluido a la alumna 2A6 ** porque no ha escogido ninguna expresión algebraica.

Varias personas aparecen en dos celdas ya que realcionan dos ecuaciones con el gráfico que escogen, bien porque los necesitan (1A1***, 1A13**, 2A11*) o porque los consideran homólogos, tal como puede apreciarse en la siguiente afirmación de la alumna 2A7*** al detallar (511-514) “...m creo que ya lo habéis dado. La pendiente. (520) Sí, ésta y ésta son iguales. (527-529) Porque la pendiente es positiva y n pasa por el cero, por lo tanto no tiene n. Porque son iguales. Esto es y. O sea v es y, t es x”.

De las cinco personas que no muestran coherencia entre el gráfico y la ecuación (se excluye a alumna 2A6**, porque no ha escogido ninguna expresión algebraica)- tres optan por la ecuación general de las funciones $-y= mx+n-$. Para la explicación de este hecho cabrían dos interpretaciones no antagónicas. La primera podría ser que no diferencian una función proporcional de una función afín (no saben a cuál corresponde la escogida) y, la segunda que han memorizado esta ecuación y no han llegado a reflexionar sobre la situación contextualizada planteada. Esta segunda posibilidad se basa en el argumento expuesto por la alumna 1A9** cuando dice (878) *“Ésta porque lo hemos dado; pero...”*, y la de la alumna 2A2* al expresar (635) *“Eso es lo que hemos aprendido...”*; sin embargo, no parece tan claro en la alumna 2A15**.

El gráfico requiere dos ecuaciones, la primera proporcional y la segunda no proporcional y no trabajada en el aula. Por ello, aunque desde el punto de vista matemático no sea correcta la elección de esta segunda ecuación, sí se ha da por válida en referencia al momento de bajada de la pelota. Para entender cómo llega a seleccionar la segunda ecuación se muestra el comentario del alumno 2A11** cuando dice (537-538) *“Por la velocidad, m es la pendiente, cuando está aquí t, esto es n el punto de corte”*. Parece como si trasladara la ordenada en el origen a un eje imaginario, y así pudiera situar la ordenada en el origen. Los otros dos alumnos que escogen este tipo de ecuación no realizan ningún comentario al respecto.

Los gráficos  son los más complicados ya que exigen la elección de dos expresiones algebraicas, y la segunda no ha sido trabajada en el aula además la segunda gráfica inicialmente requiere la de la función afín.

Los resultados globales sugieren que la mayoría del alumnado que ha trabajado las funciones mediante la aplicación de la UD, es coherente al escoger la expresión algebraica correspondiente al gráfico elegido; sin embargo, la diferencia entre ambos grupos es de 12.5% a favor del grupo 1ª (ver figura 9-19).

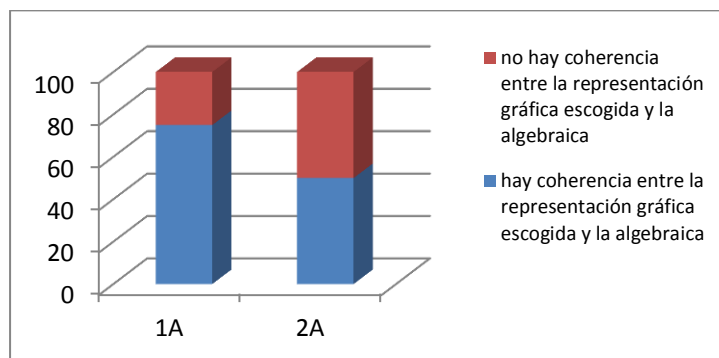


Figura 7-19. Coherencia entre las representaciones gráfica y algebraica en la situación de la pelota por grupo.

Además, las personas que han escogido dos ecuaciones complementarias (función proporcional y función afín) para los momentos de subida y bajada de la pelota pertenecen a este grupo. Por otra parte, en el grupo 2A, una alumna no ha escogido ninguna ecuación.

En el análisis de esta tarea se tienen en cuenta tres aspectos importantes para esta investigación: a) elección de variables (EV), b) la ordenada en el origen (OO) y la pendiente (Pm).

-La elección de variables (contextuales y/o matemáticos) da una idea del tipo de transferencia realizado por la persona.

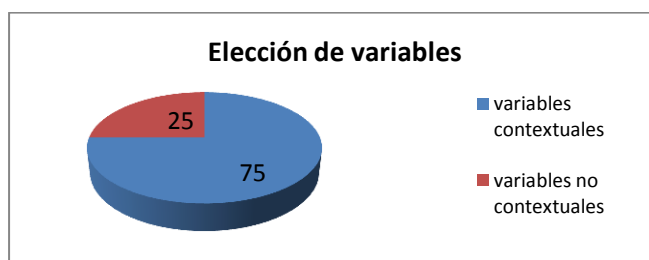


Figura 7-20. Elección de variables en el contexto de la pelota a la hora de escoger la representación algebraica (en porcentaje).

En esta investigación, la elección de variables contextuales es interpretada como una transferencia alta o lejana, ya que implica que la o el estudiante ha sido capaz de superar el ámbito matemático y situarse en el ámbito de física –en el contexto-. Además, si el alumnado opta por ambos tipos de variables y sabe razonarlo indica un nivel todavía superior al anterior, pues parece dominar el conocimiento matemático y científico de modo explícito, como por ejemplo la alumna **2A7***** (ver pág. 223). A continuación se indican los resultados generales sobre dicha elección.

La elección mayoritaria de variables de contexto parece indicar que el nivel de transferencia es alto en este aspecto. La selección de variables realizada por cada estudiante se encuentra reflejada en la siguiente tabla 7-12.

Tabla 7-12

Elección de variables en el contexto de la pelota a la hora de escoger la representación algebraica

Tabla resumen de las variables escogidas en las representaciones algebraicas por grupos y sexo (EVm)		
$y = mx+n / y = n-mx / y = mx$ (EVm1)	$v = mt+n / v = n-mt / *v = mt$ EVm2)	$y = mx+n / v = mt+n$ $y = n-mx / v = n-mt$ $y = mx / *v = mt$ (EVm3)
$1A9^{**} / 1A14(1)^{***} / 1A16^{*}$ $2A2^{*}$	$1A1(1)^{***} / 1A7^{*} / 1A10^{**} / 1A11^{**}$ $2A5^{**} / 2A11^{*} / 2A14^{***} / 2A19^{**}$	$1A13^{**}$ $2A7^{***} / 2A15^{**}$

Se indica con el * la ecuación marcada durante la entrevista.

La alumna $2A6^{**}$ no escoge ecuación (EVm0).

Es destacable que el alumnado del grupo 1A escoge en mayor medida las variables matemáticas (37.5% en el grupo 1A frente a un 12.5% en el grupo 2A) teniendo en cuenta que en el aula se ha realizado un esfuerzo importante de trabajo entorno al subconcepto variable. Sin embargo, estos resultados sugieren profundizar si las variables contextualizadas han sido utilizadas en la construcción de todo tipo de representaciones – gráfica, tabla de valores, expresión algebraica-, o por el contrario ha habido momentos en los cuales han dejado de usarse. Por otra parte, en cuanto al grupo 2A, los datos no parecen dirigir el análisis en el sentido anterior, ya que el trabajo realizado en el aula no ha resaltado la utilización de la variable contextual con el mismo énfasis que en el grupo anterior.

- La ordenada en el origen parece ser un subconcepto bastante complejo, a raíz del hecho de que varias personas lo utilizan cuando la función es proporcional. La identificación de la ordenada en el origen se relaciona con la altura tal como lo indica el alumno $1A13^{**}$ cuando dice (744-745) *“Porque desde que está en lo mejor hay que quitarle un trozo”*, o bien con su posición en el eje de coordenadas tal como lo indica la alumna $2A7^{***}$ ya comentado anteriormente.

La alumna $1A16^{*}$ que parece haberla utilizado bien, en cambio se equivoca en la pendiente.

- La elección de la pendiente se lleva a cabo siempre basada en argumentos matemáticos

referidos a la inclinación de la recta o gráfico y haciendo alusión a términos como *es descendente hacia y positiva*, etc. Así lo refleja por ejemplo la alumna 1A1*** cuando dice (573-578) *“Porque esta es la pendiente, si va hacia arriba es positiva y sale del punto de intersección de las coordenadas, no tienen n y ésta n tiene que ser mayor a 0 porque no empieza por el cero y luego la pendiente es descendiente; entonces, tiene que ser negativo”*. Este tipo de argumentación matemática se ha trabajado en ambas aulas; por lo tanto, puede afirmarse que el alumnado aplica sus conocimientos tal como fueron aprendidos.

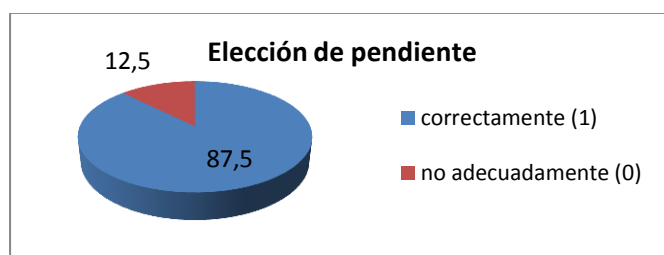


Figura 7-21. Elección de la pendiente (incluido signo) a la hora de escoger la expresión algebraica correspondiente al gráfico elegido.

No obstante, no todas las personas que escogen adecuadamente el gráfico muestran saber que es la pendiente. Este ha sido el caso del alumno 1A7* al manifestar (621) *“...porque la velocidad ¿Aquí es metro verdad? (629-630) Cuantos metros hace en un tiempo y la velocidad igual a cuantos metros hace en un tiempo”*. Este caso y el de su compañero 1A10** podrían explicarse si ambos tuvieran un conocimiento de la fórmula de velocidad aunque matemáticamente lo indicaran erróneamente, es decir en lugar de dividir los metros entre el tiempo los multiplicaran (el termino *por* serviría para ambos).

Para más detalles sobre la elección de los gráficos y las argumentaciones realizadas puede consultarse el anexo 13.. Además tanto las ecuaciones escogidas como el alcance de los conocimientos matemáticos demostrados se han recogido en los anexos 14 y 15.

Los exámenes (cuestión 3) habían sugerido que el nivel del grupo 1A era superior al del grupo 2A en cuanto a la coherencia entre las representaciones gráfica y algebraica. Durante la entrevista, el nivel de respuesta adecuada se ha mantenido en el grupo 1A, no así en el grupo 2A cuyos resultados empeoran, a pesar de que el alumno 2A5** mejora notablemente sus resultados.

7.1.3.1.4.2 Construcción de la representación algebraica a partir de la representación gráfica (TGE)

En la transferencia de contenidos matemáticos a contextos científicos no sólo interesa la traducción desde la descripción realizada a una representación gráfica y de ésta a la expresión analítica correspondiente a través de la interpretación, sino también, es deseable que las matemáticas aporten un valor añadido para que el alumno o alumna sea capaz de ir construyendo la representación analítica correspondiente al gráfico escogido, ya que ello hace posible la generalización del fenómeno observado.

La construcción de la representación analítica requiere varias aproximaciones a la situación, desde una interpretación global de la situación, para reconocer que tipo de función es, hasta el análisis detallado de los diversos subconceptos incluidos en la ecuación (pendiente, ordenada en el origen). Esta tarea sólo se ha requerido en el contexto de solubilidad. Para su análisis se han tenido en cuenta: a) la construcción de las expresiones algebraicas en su totalidad (TGE), b) la ordenada en el origen (OO) y la pendiente (Pm).

- La construcción de la expresión algebraica ha sido realizada adecuadamente por tres estudiantes (1A1***, 1A9** y 1A14***) pertenecientes al grupo 1A (37.5% de alcance en la tarea); por lo tanto, se concluye que el nivel alcanzado mostrado por el grupo 1A es escaso e inexistente en el grupo 2A.

El alumnado de nivel alto logra construir las expresiones de la función afín y constante, mientras que la alumna 1A9** lo hace sólo para la función constante a través del proceso general de construcción (ha hallado ordenada en el origen y pendiente), es decir, sin deducirlo directamente. Esta alumna no manifiesta coherencia entre las representaciones gráfica y algebraica en la situación de la pelota y el argumento expuesto por ella en la elección de la ecuación (878) “*Ésta porque lo hemos dado; pero...*”, podría explicar su proceso de construcción para la situación de solubilidad.

Por otro lado, 5 personas (1 del grupo 1A y 4 del grupo 2A) que inician, pero no hallan o correctamente la pendiente o la ordenada en el origen.

Tras el análisis de las subcategorías *Coherencia entre las representaciones gráfica y algebraica* y *Construcción de la representación algebraica a partir de la representación gráfica*, se establecen niveles para la categoría de análisis *Traducción entre los sistemas de representación gráfico y algebraico (TGE)*.

Niveles de traducción entre los sistemas de representación gráfico y algebraico

TGEm3: 1A1***, 1A14***

TGEm2: 1A9**, 1A10**, 2A5**, 2A7***, 2A11*

TGEm1: 1A7*, 1A11**, 1A13**, 2A14***, 2A19**

TGEm0: 1A16*, 2A2**, 2A6**, 2A15**

Figura 7-22. Niveles de traducción entre los sistemas de representación gráfico y algebraico.

Los datos de los exámenes ya sugerían un nivel muy precario en construcción (subcategorías 4 y7) en el grupo 2A y un nivel más adecuado con posibilidad de transferencia en el grupo 1A, si bien se preveía un mejor resultado al identificado en la entrevista.

- El análisis de la ordenada y el establecimiento de niveles (OOm) se ha realiza teniendo en cuenta los siguientes parámetros: a) su utilización e interpretación en las tres situaciones, b) su adecuada elección en la ecuación llevada a cabo en la situación de la pelota y c) cómo se ha hallado en la situación de la solubilidad. Como los análisis correspondientes al a y b ya se han expuesto, corresponde ahora analizar el punto c.

En la figura 7-23, se presentan los resultados en cuanto a la construcción de subconcepto se refiere.

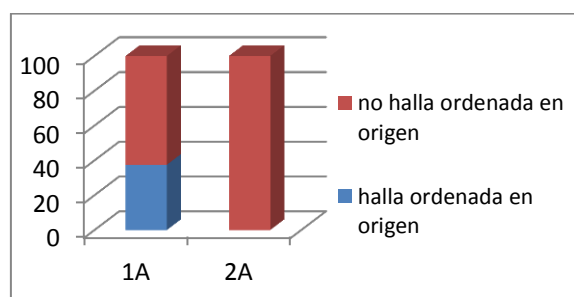


Figura 7-23. Construcción del subconcepto ordenada en el origen en la situación de solubilidad.

Aunque en el gráfico de la solubilidad, la identificación de la ordenada ha podido realizarse directamente (ver figura 6-5), es destacable que casi nadie lo haya hecho, ni la alumna 1A11** que en la situación de la pelota ha indica (505-506) *“Sí, porque no hay n, pasa por el punto 0 y no es minus porque es plus”*.

Estos resultados plantean la necesidad de analizar qué tipo de trabajo se ha llevado a cabo en el aula sobre este subconcepto para que nadie sea capaz de identificarlo en el gráfico. Por otro lado, también cabría preguntarse si en el trabajo realizado en el aula, la construcción de la ordenada en el origen se ha producido asociada al contexto o al eje de coordenadas; ya que una construcción desde la segunda difícilmente ayudaría al alumnado a interpretar una situación contextualizada. Las argumentaciones ya expuestas, parecen dirigir el análisis en este segundo sentido, es decir, que el trabajo de aula ha estado orientado a relacionar la ordenada en el origen con la posición de la recta en el eje de ordenadas.

El análisis de los datos de los exámenes (subcategoría 5) hacía pensar en unos resultados algo mejores en ambos grupos, ya que se partía de un resultado suficiente para el grupo 1A y de insuficiente alto para el grupo 2A. Entre las razones que pudieran explicar estos datos, además de la ya indicada, cabría el hecho de que el gráfico presentado ha sido muy distinto al trabajado habitualmente en el aula y de una complejidad mayor. Todas estas cuestiones se analizan con mayor profundidad en el apartado Dinámica del aula así como en los anexos 14 y 15.

Niveles en referencia a la Ordenada en el origen	
OOm4:	1A1***, 1A14****
OOm3:	2A5**, 2A7***, 1A13**
OOm2:	1A11**, 1A16*, 2A2*, 2A11*, 2A14***, 2A15**, 1A19**
OOm1:	1A7*, 1A9**, 1A10**, 2A6**

Figura 7-24. Ordenada en el origen y niveles alcanzados.

-La construcción de la pendiente en las funciones presentadas no resulta una cuestión fácil a tenor de los resultados obtenidos y mostrados en la figura 7-25.

La alumna 1A1*** y el alumno 1A14*** indican directamente la ecuación de la función constante, no es así en el caso de la alumna 1A9**. Los alumnos 2A5**, 2A14** y la alumna 2A15** a pesar que argumentan que *la gráfica del cloruro de sodio es constante, no tiene pendiente*, no saben hallarla o indicarla. Por ello, podría decirse que no han reflexionado sobre la argumentación expuesta en referencia al cloruro sódico, ya que de haberlo hecho, debieran haber inferido que el valor de la pendiente es cero y por lo tanto indicar $y=10$.

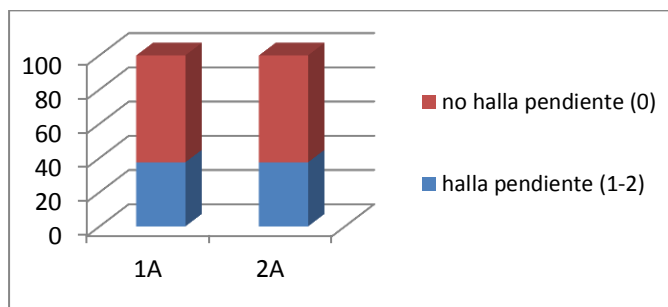


Figura 7-25. Construcción del concepto pendiente en la situación de solubilidad.

Al igual que en anteriores ocasiones, al analizar los datos han podido establecerse niveles del concepto de pendiente (Pm); para dichos niveles se tienen en consideración: a) la identificación de la m como pendiente, b) la interpretación de la pendiente al argumentar el gráfico en la situación de la pelota, c) la identificación del signo de la pendiente en la elección de la ecuación en la situación de la pelota, d) cómo se halla en las ecuaciones de la situación de la solubilidad y e) definición de pendiente, efectuada en las situaciones requeridas. Los resultados del nivel alcanzado teniendo en cuenta todos ellos se recoge en la figura 7-26.

Niveles en referencia a la pendiente	
Pm3:	1A1***, 1A9**, 1A14***, 2A6**, 2A7***, 2A11*
Pm2:	1A13**, 2A19**
Pm1:	1A11**, 2A5**, 1A16*, 2A2*, 2A14***, 2A15**
Pm0:	1A7*, 1A10**

Figura 7-26. Niveles en referencia a la pendiente.

Estos datos parecen ser acordes en general con los ya recogidos en los exámenes (subcategoría 6), cuyos resultados habían sido algo ajustados en el grupo 1A e insuficientes en el grupo 2A. No obstante, el nivel alcanzado por el grupo 2A es mayor al esperado teniendo en cuenta los resultados del examen; por el contrario en general se esperaba un resultado más exitoso por parte del grupo 1A.

Los datos aportados por el contrato de autoevaluación parecen indicar que el alumnado no ha sido consciente de la dificultad de la tarea, sobre todo en el grupo 2A.

Las categorías hasta ahora analizadas ayudan a entender cómo se produce la translación por parte del alumnado. Por otro lado, en muchas ocasiones, una vez estudiado dicho fenómeno es deseable predecir al futuro para poder tomar medidas al respecto.

7.1.3.2 Conocimientos del alumnado en tareas de predicción

Uno de los objetivos de la Educación Secundaria Obligatoria es que el alumnado ante el estudio de cualquier fenómeno, no sólo sea capaz de estudiar el presente sino también de anticipar el futuro. Así, por ejemplo, no tiene mucho sentido que el alumnado comience a realizar prácticas de laboratorio basándose en el ensayo error cuando posee instrumentos matemáticos que pueden ayudarle en la predicción de cuáles han de ser los valores alcanzables teniendo en cuenta las variables utilizadas a través de la construcción de la expresión analítica correspondiente a la situación y al fenómeno determinados.

La tarea de predicción ha sido solicitada únicamente en la situación de la solubilidad y, lo ha sido en referencia al punto de encuentro a través de dos requerimientos: a) Inferencia del punto de encuentro y b) Hallar el punto de encuentro. El punto b, sólo ha sido requerido a los grupos 1A y 2A, a los cuales además se les ha preguntado cómo lo hallarían.

-La inferencia del punto de encuentro (PE) es analizada a través de las respuestas dadas a las preguntas 2. *¿La solubilidad del nitrato de sodio siempre será superior a la del nitrato de potasio?* 3. *¿Hay algo interesante?* y/o 3b: *Si quisiéramos saber cuándo tienen la misma disolubilidad, ¿cómo lo sabríamos?* Para la respuesta a ambas preguntas el alumnado requiere de enfoque tanto local como global del gráfico.

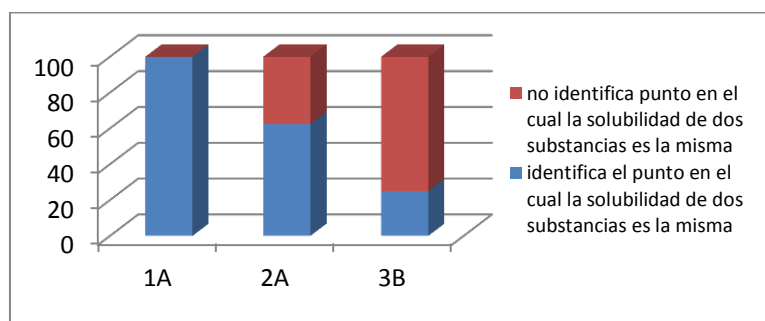


Figura 7-27. Identificación del punto en el cual la solubilidad de dos sustancias es la misma.

Las respuestas del alumnado se han categorizan en niveles (PEm) teniendo en cuenta la coherencia y la riqueza de las argumentaciones. Un número elevado de estudiantes emplean expresiones como *se juntan, pasan por un punto y hacia arriba*, para indicar cuál es el punto, algo que dependiendo de la información añadida sobre la evolución de la solubilidad, sirve para establecer los niveles que denotan cierta tendencia a la interpretación icónica sin serlo, ya que van acompañados de expresiones que también indican cambio en la solubilidad.

Niveles en referencia al punto de encuentro en la situación de solubilidad	
PEm3:	1A13**, 1A14***, 2A5**, 2A14***
PEm2:	1A1***, 2A11*, 3B5**
PEm1:	1A7*, 1A9**, 1A10**, 1A11**, 1A16*, 2A2*, 2A7***, 3B1***
PEm0:	2A6**, 2A15**, 2A19**, 3B2***, 3B3**, 3B4**, 3B6*, 3B7*, 3B8**

Figura 7-28. Niveles en punto de encuentro en la situación de solubilidad.

Los resultados indican una diferencia importante en referencia al punto de encuentro entre los grupos que han trabajado las funciones mediante la aplicación de la UD respecto del que no lo ha hecho (3B). Esta diferencia es muy importante y podría sugerir una diferencia estadísticamente (-0.535 $p = .007$) con una muestra mayor. Los datos del grupo 1A son mucho mejores que los del grupo 2A y los de este grupo mucho mejores que los del grupo 3B. Este hecho podría sugerir una correlación positiva entre el aprendizaje de este concepto en las clases de matemáticas y la identificación de dicho punto en la tarea de predicción, especialmente por parte del grupo 1A.

La tarea de predicción en referencia al punto de encuentro sólo ha sido requerida en el examen del grupo 1A (pregunta 4d, ver tabla 7-1). El alumnado de nivel académico alto en matemáticas de este grupo, es el único que halla el punto de encuentro, y que realiza una argumentación adecuada sobre el mismo una vez hallado. Este alumnado, de nuevo en la entrevista, mantiene buenos resultados, sobre todo el alumno 1A14*** que lleva ha llevado a cabo la mejor argumentación de los tres grupos. Por otro lado, el alumnado que en el examen no halla el punto de encuentro, y que por lo tanto tampoco puede interpretarlo, en esta ocasión, lo interpreta adecuadamente y explícitamente en su totalidad, es decir todo el alumnado del grupo lo realiza. No obstante, es necesario destacar - tal como se ha expuesto-, que en el examen primero hay que hallar el punto de encuentro y posteriormente interpretarlo; en esta situación el proceso es muy distinto ya que la gráfica

–gráfica representada con escala- posibilitaba en gran medida su identificación. La fase de construcción para hallar el punto de encuentro es posterior. Las referencias sobre los datos se encuentran en los anexos 14 y 15.

- La construcción total necesaria para hallar el punto de encuentro nadie la realiza.. La razón de ello parece estar en las dificultades mostradas por la mayoría del alumnado en la construcción de la representación algebraica a partir de la representación gráfica (subcategoría 4).

Por otra parte en el examen (subcategoría 8) –como se ha indicado en el punto anterior- el alumnado del grupo 1A ha tenido problemas para hallar el punto de encuentro porque no ha podido construir el gráfico debido a un problema de escala, aunque tampoco lo realiza algebraicamente. . El grupo 2A manifiesta insuficiencia muy acusada en el examen.

Por lo tanto, estos dos resultados (examen y entrevista) dan lugar a preguntarse en qué modo se ha trabajado en el aula el procedimiento a la hora de hallar el punto de encuentro o incluso a la hora de interpretarlo.

El alumnado a través del contrato de autoevaluación considera hallar el punto de encuentro del siguiente modo: el 25% del grupo 1A y el 50% del grupo 2A como poco difícil y el 25% del grupo 1A y el 12.5% del grupo 2A como de bastante difícil. El resto indica no tener problemas para hallarlo. Comparados estos datos con los resultados obtenidos, parece claro que el alumnado no ha autoevaluado adecuadamente su conocimiento en referencia a hallar el punto.

Los estudiantes señalan dos tipos de procedimiento para hallar los puntos de encuentro: a) experimental y práctico o b) matemático. El 50% del alumnado del grupo 1A (1A10**, 1A11**, 1A13**, 1A14***) lo hallaría experimental o manualmente y un 37.5% utilizaría las matemáticas trabajadas en el aula; en cambio, un 62.5% del grupo 2A lo haría utilizando conceptos trabajados en el aula y a lo sumo uno comenzaría primero utilizando la escala. El procedimiento a utilizar es independiente del nivel académico del alumnado; sin embargo está correlacionado positivamente con el sexo (se analiza en el apartado de transferencia y género), de carácter práctico en los chicos.

Entre las argumentaciones destacan las aportadas por alumnado del grupo 1A que indica que las matemáticas no les aportan nada para hallar este punto. A modo de ejemplo, se indican las conversaciones de algunos alumnos:

1A7*	(1187-1194) <i>¿Tú piensas que lo que has aprendido en matemáticas –habéis aprendido muchas cosas-, te puede ayudar a hallar cuáles son los puntos en concreto? No.</i>
1A13**	(1412- 1423) <i>Lo que os ha ayudado Itziar de cómo se hallan los puntos de intersección, ¿no te ayuda para esta situación? No. Aquí no.</i>
1A14***	(1039-1088) <i>¿...los conceptos matemáticos que has aprendido no los utilizarías? No. Desde el principio lo harías más práctico. Sí. Entonces todo lo que has aprendido sobre las funciones ¿para qué crees que vale Miguel? Tal vez para luego, para resolver problemas de bachillerato, para hacerlos mejor. Igual si en algún trabajo si te proponen para poderlo hacer, para saberlo pero respecto a la gráfica. En este caso por ejemplo, tú no realizarías ningún (no) planteamiento matemático. Teniendo el material no. ¿Si no lo tuvieras? Pues sí porque no tienes nada para hacerlo en la práctica y lo tendría que realizar con las matemáticas.</i>

Figura 7-29. Argumentaciones expuestas por el alumnado sobre la elección del método para hallar el punto de encuentro.

Los resultados del grupo 1A sobre todo llevan a preguntarse por qué el alumnado de este grupo sugiere con mayor intensidad la utilización de las matemáticas como instrumento para hallar el punto de encuentro. ¿Esto podría tener que ver con la puesta en práctica de la UD, el estilo didáctico de las profesoras o tal vez existan otras posibles razones? Estas son preguntas a las cuales se trata de dar respuesta a lo largo de esta investigación.

7.1.3.3 *Conocimientos del alumnado en tareas de clasificación*

En las tareas de clasificación se han considerados dos subcategorías: a) Decisión sobre si una relación particular es una función y b) Identificación de un tipo de función sobre otras funciones.

7.1.3.3.1 Decisión sobre si una relación particular es una función (subcategoría de análisis 9)

Para este análisis se consideran: a) La utilización de argumentos matemáticos en general, b) Definición de función, b) Esquema de función, c) Imagen de concepto de función y d) Razonamiento covariacional. Para ello, se tienen en cuenta las respuestas a todas las preguntas referentes a los contextos y las siguientes preguntas, (aunque algunas no se han planteado en ciertas entrevistas ya que por la dinámica de la conversación no ha dado lugar a ello): A1. *¿Podríamos situar a la v donde está la t y donde está la t donde está la v , es lo mismo?*; A2. *¿Hay alguna relación entre las variables indicadas? B. ¿Hay semejanza entre la situación de la pelota y la de la montaña rusa (P-MR)?; C. Una vez oídas las respuestas ¿sabrías decir por qué?; D1. ¿Qué es m ? D2. ¿Qué es la pendiente? D3; ¿Un ejemplo?; E. ¿Qué es n ?; H1. ¿Son funciones lo que vemos?; H2. ¿Qué es para ti una función?; H3. ¿Podrías indicar algún ejemplo de función? y H4. ¿Serías capaz de hacer un esquema sobre las funciones?*

-La utilización de argumentos matemáticos en general viene representada en la figura 7-30 siguiente gráfico:

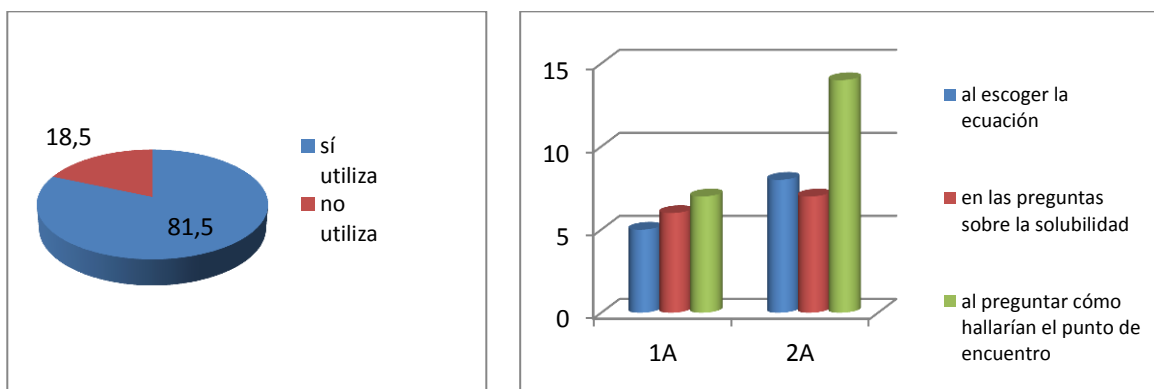


Figura 7-30. Utilización de conceptos matemáticos.

De los datos parece deducirse que el nivel de transferencia en la utilización de subconceptos matemáticos a las situaciones expuestas es elevado. Además, todo el alumnado y de distintos niveles académicos participa en ello. Este hecho indica equidad en los resultados.

De las 27 aportaciones totales, 6 se han obtenido cuando se ha insistido sobre alguna posible relación entre la pregunta y lo visto en clase o cuando se ha preguntado si en algún momento dos sustancias distintas tendrían la misma solubilidad.

Mientras que nadie argumenta matemáticamente en la traducción desde la descripción de la situación al gráfico en contexto de física, el alumnado sí lo hace en el contexto de química. Tal diferencia de resultados podría estar sustentada en la diferencia de contexto y el matiz de las preguntas realizadas –más abiertas en el contexto de física y más cerradas en las de química-. Por otro lado, la traducción desde la representación gráfica a la representación algebraica (en la situación de la pelota) es mayor cuando se explicitan mayor número de subconceptos matemáticos. Esta diferencia de resultados da lugar a preguntarse si el aprendizaje de ambos tipos de traducción en el aula ha estado basado siempre en la utilización de conceptos matemáticos, o si no lo ha estado.

Tabla 7-13

Resumen de uso de subconceptos matemáticos al argumentar sobre las distintas situaciones

ESTUDIANTES	Situación 1		Situación 2	Situación 3			
	Situación pelota		Situación MR	Situación Solubilidad			
	Al escoger gráfico	Al escoger ecuación	Al escoger gráfico	Al argumentar 1ª cuestión	Al argumentar 2ª cuestión	Al argumentar 3ª cuestión	Al argumentar 4ª cuestión ¿Cómo lo hallarías?
1A1***	0	m/n		NaCl cte.	0	0	Sistemas/método de igualdad
1A7*	0	0	0	0	0	0	0
1A9**	0	m (lo hemos dado)	0	0	0	0	Pendiente/sistema algebraico /constante
1A10**	0	n??	0	0	0	0	Identifica p.e.
1A11**	0	m/n	m MI	0	0	0	pendiente
1A13**	0	0	0	NaCl cte.	p.e.	p.e.	0
1A14***	0	0	0	0	0	p.e. (3b)	0
1A16*	0	0	0	NaCl kte.	0	0	0
2A2*	0	m (lo hemos dado)	0	0	0	0	Pendiente/p.e.
2A5**	0	0	0	m/ NaCl cte.	0	p.e.	2ª opción: función, gráficas, pendiente
2A6**	0	0	0	0	0	0	Fórmula, pendiente, p.e
2A7**	0	m(+)/n	0	0	0	0	Sistemas/método de igualdad
2A11*	0	m/n	0	0	0	0	Fórmula/m/n
2A14***	0	m/n	0	(¿de lo visto?) NaCl cte., no tiene m	0	(se insiste en relación con Mate) p.e	Método de igualdad/pendiente/n
2A15**	0	m	0	NaCl cte., no tiene m	0	0	(no se ha realizado)
2A19**	0	(no se ha realizado)	0	0	0	(se insiste en relación con Mate) NaCl es una función porque es recta	(se le preguntó si puede hallar expresión algebraica no cómo hallaría p.e.)

Subconceptos utilizados: 0 (no cita nada), m (pendiente), n (ordenada en el origen), cte. (constante), no m (no pendiente) y p.e (punto de encuentro)

Figura 7-31. Uso de subconceptos matemáticos al argumentar sobre las distintas situaciones por grupo.

También en la situación de la solubilidad se cuantifica un importante número de subconceptos matemáticos cuando se ha indica el procedimiento para hallar el punto de encuentro. El nivel de utilización por ambos grupos es desigual, (mayor en el grupo 2A), sobre todo al preguntar cómo hallarían el punto de encuentro (ver figura 7-31).

Por otro lado, en la tabla 7-14 se recogen las respuestas más destacadas en referencia a una serie de preguntas que se concretan en dicha tabla.

Tabla 7-14

Resumen de respuestas más destacables referidas a distintos subconceptos matemáticos

Concepto	Pregunta	Respuesta destacada
Variable	A1. ¿Podríamos situar a la v donde está la t y donde está la t donde está la v , es lo mismo? A2. ¿Hay alguna relación entre las variables indicadas?	1A16* (590-600) “...los problemas que hemos hecho en clase, ese problema, había que poner en un sitio para reflejarlo bien y éste también, será así para reflejarlo bien. Que hay que poner la v en su lugar y la t en su lugar y ya está”. 1A10** (981- 1004) Pues yo, si me da el tiempo siempre lo pongo en el eje x . Y luego el otro en el eje y , por ejemplo el euro u otro... ¿Y si no aparece el tiempo? Imagina los kilos y el precio. Pues los kilos en el eje x y el precio en el eje y . Porque... me arreglo mejor, y cuando va subiendo los kilos también lo hace el precio”. 2A14*** (965-981) “Pues esas son; ahora no me sale. Los datos en los ejes x e y . En este caso son la v y t . ¿Tienen algo entre ellas? Tienen que tener algo, sino no tiene sentido el gráfico o la función. Si no tienen algo entre ellas no sirven para nada. Si pones un gráfico como el que hicimos con la ducha y si pones el tiempo y la temperatura. Si pones las que no tienen nada que ver, no tiene sentido”. 1A13** (951-999) “...¿cómo sabes tú en cada eje lo que tienes que indicar? Cuál es dependiente y cuál la dependiente. Pues depende, la independiente normalmente, si hay una independiente tiene que haber una y , y así. Pues, por ejemplo una hora un euro, depende cuántas horas será una cosa y así. El tiempo es la independiente y la v la dependiente. Depende en qué tiempo una velocidad”.
Ordenada en el origen	E. ¿Qué es n ?	2A14*** (713-714) “No sé por qué, porque... empezaría desde el cero, entonces la n sería cero”. (1A1) *** (728-734) Pues que si pasa por el origen de las coordenadas, pasará por el punto (0,0), entonces si el tiempo es cero la velocidad será cero. Pero también podemos tener esto y entonces la n es eso” (La alumna ha señalado un punto distinto al punto (0,0) “No empiezas por el punto 0, puedes tener por ejemplo 15, no sé” (741-748) (en referencia al gráfico “Pues, ... pues, en el minuto 0 que ya tendrá una velocidad. Que la velocidad ya será mayor”.
Pendiente	D1. ¿Qué es m ? D2. ¿Qué es la Pendiente? D3. ¿Un ejemplo?	2A5 ** (756- 766) “La inclinación; es decir, la inclinación del gráfico. ¿Podrías decir cuáles son en este caso? Aquí, la correspondiente a esta parte es descendente y aquí ascendente. Es decir, descendente-ascendente”. 1A9** (1071-1073) Así lo hago yo, así lo haría. La pendiente igual al cambio en la y partido por el cambio en la x . ¡Así lo hacía!”. 1A1*** (710-713) “Pues en cuanto tiempo se tarda; si tardas más la pendiente es más pequeña, si el movimiento es más rápido la pendiente es más grande”.
Función	H1 ¿Son funciones lo que vemos? H2 ¿Qué es para ti una función? H3 Ejemplo de función. H4 ¿Serías capaz de hacer un esquema sobre las funciones?	2A19** (en la situación de solubilidad) (821-853) “Es una función. ¿Por qué? Bueno, esto es una función. ¿Cuál es una función? La del cloruro de sodio. ¿Por qué esa sí y las otras no? Porque las otras no... ésta es una recta... ésta es una recta, y ¿las otras? Son gráficas, están en una gráfico pero no son funciones ¿O sea, son gráficas pero no son funciones? Sí”. 1A9** (1721-1728) “¡Es que no me acuerdo de las funciones!, ¿qué es?, ¿Cómo era? ¡Yo no veo los títulos!”. 2A15** (829-833) “Un método para relacionar dos ecuaciones.”. 1A16* (621-622) “Pues que es un modo de reflejar cualquier cosa”. 2A14*** (903-905) “...Es que claro, una función es la expresión algebraica de una fórmula correspondiente a un gráfico o no lo sé”. 2A6** (689-702) “¿Una función? Dos... Dos magnitudes...que las relaciona...”.

Estos cambios de utilización –al enfrentarse a tareas distintas- reconstruyen muy a detalle el modo en que la explicitación de subconceptos matemáticos se ha llevado a cabo en el aula en ambos grupos. La práctica educativa del aula ha estado caracterizada por la alusión a estos subconceptos cuando se ha trabajado la traducción entre los distintos sistemas de representación, cuando se ha trabajado la construcción de la expresión

algebraica y cuando se ha trabajado el procedimiento para hallar el punto de encuentro. Salvo alguna excepción –al inicio de la unidad-, no se ha trabajado la construcción del lenguaje matemático en la traducción desde la situación al gráfico; lo ha sido algo, más en la traducción desde la descripción de la situación a la tabla de valores –no solicitada en la entrevista-.

En la utilización de los conceptos analizados merecen mencionarse:

- a) cinco personas indican claramente que la solubilidad del cloruro de sodio es constante y dos de ellas (2A14***, 2A15**) además inciden en su relación con la pendiente.
- b) el alumno 2A5** utiliza el subconcepto de pendiente para argumentar la diferencia de las tendencias en la solubilidad del nitrato de potasio y del nitrato de sodio.
- c) el alumno 1A13** aplica con naturalidad el subconcepto *punto de encuentro* cuando en la situación de solubilidad se ha preguntado si está de acuerdo con la pregunta *¿La solubilidad del nitrato de sodio siempre es superior a la del nitrato de potasio?*, y contesta (1170-1180) *“No. Porque aquí existe un punto de encuentro en este punto de encuentro se ven y luego ya a partir de 70 grados el nitrato de potasio va hacia arriba, se disuelve más fácilmente”*.

La utilización masiva de subconceptos matemáticos en el grupo 2A frente al grupo 1A al explicar el procedimiento para hallar el punto de encuentro, podría indicar que en este grupo, la utilización de dichos subconceptos en el momento de realizar el procedimiento ha sido mayor.

En resumen, los datos registrados en cuanto a la utilización de subconceptos matemáticos, parecen ser mejores a los esperados teniendo en cuenta los exámenes; en un momento inicial parecía partirse de un nivel bajo insuficiente en cuanto a las argumentaciones matemáticas utilizadas para a la hora de describir situaciones (subcategoría 1). Este hecho, podría hacer pensar que la entrevista ha permitido aflorar aprendizajes.

Entre los conocimientos que afloran destacan:

- i. Las argumentaciones recogidas sobre el subconcepto *variable* parecen sugerir un continuo en el nivel de abstracción alcanzado, desde aquellas que simplemente poseen recuerdos vagos sobre lo trabajado en el aula, como la dada por la

alumna 1A16*, pasando por las que se refieren al procedimiento seguido en el aula para hallarlo (1A10** y 2A14***) y, por último, la del alumno 1A13** que indica la existencia de relación entre una variable independiente y otra dependiente.

- ii. Las respuestas sobre la ordenada en origen, van en un continuo desde la que no identifica su existencia (alumna 1A9**) pasando por las de estudiantes que lo analizan desde el punto de vista estático –relacionado con el eje de coordenadas- (2A14***), para alcanzar el máximo exponente en la de la alumna (1A1 ***) que relaciona la existencia de la ordenada con el contexto cuando indica que ya tendrá una velocidad de salida.
- iii. El subconcepto de pendiente se expresa en un continuo desde quienes no reconocen la m como pendiente (1A7* y 1A10**), pasando por quienes comienzan a hablar sobre cambio entre variables (1A9**), hasta llegar a quienes lo relacionan con el cambio de la velocidad, es decir utilizando el contexto, tanto en la situación de física (1A1***) como principalmente en la situación de solubilidad (1A11** y 1A14***).
- iv. Los niveles referidos a la *imagen de concepto* (Vinner y Dreyfus, 1989), los niveles de abstracción del concepto (Melanie, 2006) y el razonamiento covariacional (Carlson et al., 2003) indican importantes diferencias entre el alumnado.. Han sido casos aislados los que han indican que algún tipo de gráfico corresponde a una función; hecho éste que ha sido confirmado en la literatura sobre este concepto. Es de destacar que el alumno 2A19** afirme exprese que la función constante es una función, a pesar de no tratarse de una función proporcional. Varias personas no definen el concepto función de modo específico, y o bien dicen no acordarse (1A9**) o bien hablan de método (2A15**); otras personas indican que se trata de un modo de representación (1A16*) acompañado en algún caso, con un sentido de dependencia (2A14***) y las personas situadas en un nivel superior, indican relación a nivel de variables (2A6**) (ver tabla 7-15).
- v. El alumnado de ambos grupos que han aplicado la UD parecen situarse

en la etapa de *interiorización* o bien en la de *condensación*; nadie ha alcanzado la etapa de *cosificación* , (Stard, 1991); por lo tanto, no se ha logrado el concepto de función como objeto matemático en su globalidad. No obstante son la presencia de los

subconceptos asociados al concepto de función los que marcan el grado dentro de la etapa de cosificación.

Tabla 7-15
Resumen de imágenes de concepto de función y niveles de razonamiento covariacional

		Estudiantes	
Imagen de concepto de función basada en el planteado por (Vinner y Dreyfus, 1989).	Fm4	VI. CORRESPONDENCIA	
	Fm3	V. DEPENDENCIA	1A1***, 1A11**, 1A13**, 1A14***, 2A14***, 2A19**,
		IV. REGLA	1A9*, 2A6**, 2A7***
	Fm2	III. OPERACIÓN	1A7, 1A10**, 2A5**, 2A11**
	Fm1	I. REPRESENTACIÓN	1A16*; 2A2*
Niveles de razonamiento covariacional mostrados basado en Carlson et al. (2003)	N5.	RAZÓN INSTANTÁNEA	
	N4.	RAZÓN PROMEDIO	1A1***, 1A9**, 1A11**, 1A13**, 1A14***, 2A7***
	N3	COORDINACIÓN CUANTITATIVA	2A5**, 2A14***
	N2.	DIRECCIÓN	2A6**,
	N1	COORDINACIÓN	1A7*, 1A10**, 1A16*, 2A2*, 2A11**, 2A15**, 2A19**,

La alumna 2A15** no se ha incluido en la imagen de concepto, ya que su visión de método no es correcta desde el punto de vista formal.

No se ha incluido el nivel N5 Razón instantánea en los niveles de razonamiento covariacional ya que este concepto no corresponde a este curso.

Los datos registrados en esta ocasión, indican una imagen de concepto así como un nivel de razonamiento covariacional mayores por parte del alumnado del grupo 1A. Cabría preguntarse si estos resultados serían los esperables en el alumnado de 3º de ESO; y si fuera así, si serían suficientes para afrontar los problemas científicos y en caso de no serlo, qué ha sucedido en el aula que pudiera explicar dicho nivel.

Para obtener mayor información del proceso de construcción de este concepto, se ha considera necesario identificar, a partir de los datos recogidos lo largo de la entrevista, las principales dificultades que se habrán de superar.

7.1.3.3.2 Identificación de un tipo de función entre otras funciones

En esta ocasión se vuelven a recoger los datos obtenidos en la situación de la pelota cuando se ha solicitado traducir desde la representación gráfica a la representación algebraica; para ello, el alumnado tiene distinguir entre la función proporcional y la función afín. En esta tarea el alumnado del grupo 1A muestra mayor nivel de coherencia

entre la representación gráfica y algebraica (75%) al mostrado por el alumnado del grupo 2A (62.5%).

Por otro lado, en la situación de solubilidad un 50% del alumnado indica que la gráfica correspondiente al cloruro de sodio es constante. Esto hace pensar que la función constante, a diferencia de lo encontrado otras investigaciones, ha sido correctamente identificada por un número importante de estudiantes.

7.1.4 **Resumen de las dificultades al aplicar el concepto de función**

Al igual que en los exámenes, durante las entrevistas también se investigan las dificultades observadas en referencia a las distintas tareas requeridas.

7.1.4.1 Dificultades del alumnado en tareas de translación

En las tareas de translación desde la descripción de la situación a una representación funcional básica, se indican las dificultades más destacadas en referencia a: a) Traducción desde la descripción de la situación a la representación gráfica, y b) Traducción entre los sistemas de representación gráfico y algebraico.

7.1.4.1.1 En cuanto a la traducción desde la descripción de la situación al gráfico (TDG)

Se identifica dificultad a la hora de traducir desde la descripción de la situación a la representación gráfica en el contexto de física, no así en el contexto de química. El contexto de química favorece a todos los grupos; en mayor medida, a aquellos que han trabajado las funciones mediante la aplicación de la UD. Entre las posibles explicaciones podrían estar el tipo de contexto (más abierto en el contexto de física y más cerrado en el contexto de química) y el tipo de gráficos expuestos (cualitativos en el contexto de física y acompañado de datos en el contexto de química).

Se ha apreciado un exceso del enfoque local del gráfico por parte del alumnado en detrimento del enfoque global, lo que podría haber llevado a que la información extraída de la gráfica haya sido parcial.

Se constata dificultad a la hora de superar la interpretación icónica de gráficos referidos a movimientos, es decir el modelo de situación creado por la mayoría del alumnado ha sido el de trayecto. En el contexto de solubilidad si bien este tipo de interpretación también se produce, lo es en menor intensidad; sin embargo, parece existir dificultad a la hora de describir la evolución de la solubilidad respecto a la temperatura. Tal vez por ello, sean tan habituales las palabras subir, bajar, para allá, etc., en lugar de indicar

que la temperatura o la solubilidad aumenta o disminuye, es decir, que a medida que aumenta la temperatura lo hace la solubilidad, etc. Dichos términos podrían estar insinuando una interiorización geométrica de la representación gráfica, si bien también parece apreciarse razonamiento covariacional por parte de parte del alumnado.

Por otra parte, parece que existe dificultad en la utilización de un lenguaje científico apropiado, y en general el alumnado afronta las explicaciones apoyándose en un lenguaje coloquial; sin embargo, en momentos puntuales el lenguaje matemático se hace explícito, lo que podría interpretarse como una interiorización progresiva del conocimiento matemático, ya que en el grupo 3B no ha sido identificado.

Existe dificultad muy importante a la hora de identificar las variables en contextos de física, mayor en los grupos que han aplicado la UD, dificultad que parece minimizarse en algunas personas en el contexto de química. La identificación de variables podría estar influenciada tanto por el trabajo realizado en el aula como por el contexto donde se enmarca la tarea.

La relación entre las variables supone una mayor dificultad en comparación con la identificación. Al igual que sucediera en ésta, tal dificultad podría estar relacionada con la tarea de aula y con la situación contextual. No obstante, algunas personas han superado esta dificultad llegando incluso a establecer una relación covariacional en la situación de solubilidad.

7.1.4.1.2 En cuanto a la traducción entre los sistemas de representación gráfico y algebraico (TGE)

La coherencia entre las representaciones gráfica y algebraica no supone dificultad importante para el alumnado en general, pero sí para algunas chicas en particular.

La utilización de variables de contexto tampoco supone una dificultad importante para el alumnado.

Por lo tanto, podría concluirse que no ha habido una dificultad importante para la transferencia en la coherencia entre las representaciones gráfica y algebraica como en la elección de variables de contexto en dicha representación algebraica.

El concepto de ordenada en el origen parece estar asociado a la altura en el gráfico o a la línea que pasa por el punto de intersección, es decir, con un sentido geométrico del mismo, y por lo, tanto a excepción de algún caso, no se identifican argumentaciones que lo relacionen con la situación expuesta. Además, es importante la dificultad mostrada por la casi totalidad del alumnado en la identificación de la ordenada en el origen en la situación

de la solubilidad –extrapolable desde gráfico- incluso por aquellas personas que durante el reconocimiento en la situación de la pelota han indicado que no tiene n (ordenada en el origen) porque pasa por el punto cero.

Hallar la pendiente supone gran dificultad para la mayoría del alumnado, a excepción de aquellas tres personas que han conseguido construir la expresión algebraica.

Tanto la dificultad en la ordenada en el origen como en la pendiente parecen estar relacionadas con el trabajo realizado en el aula.

7.1.4.2 Dificultades del alumnado en tareas de predicción

Aunque predecir el momento en que dos sustancias a una determinada temperatura tendrán la misma solubilidad supone poca dificultad para una gran parte del alumnado, un número considerable de personas tienen bastante dificultad en indicarlo. La existencia de esta dificultad podría estar relacionada con el trabajo llevado a cabo en los grupos.

El cálculo del punto al cual la solubilidad de distintas sustancias será la misma ha supuesto máxima dificultad para todo el alumnado ya que nadie ha llegado a hallarlo; no obstante la mayoría del alumnado parece conocer el procedimiento a seguir para conseguirlo. Esta dificultad parece estar relacionada con el trabajo realizado en el aula, donde el alumnado no ha tenido protagonismo a la hora de hallar el punto de encuentro.

7.1.4.3 Dificultades del alumnado en tareas de clasificación

Se ha utilizado un número considerable de conceptos durante la entrevista, lo que hace afirmar que la identificación de tipo de funciones ha resultado más exitosa de lo esperado.

Existe gran dificultad en identificar las representaciones gráficas como funciones y parece existir una imagen de concepto de función mayoritaria donde la función es identificada como representación.

Por otro lado, parece existir una interiorización de los subconceptos variable, pendiente y ordenada en el origen en un sentido de carácter estático y geométrico por parte de la mayoría del alumnado; sin embargo, la utilización de estos subconceptos por parte de algunas personas de modo más elaborado -razonamiento covariacional y sentido de imagen de función-, sugiere que el alumnado se encuentra dentro de la etapa de interiorización, si bien no habría alcanzado la cosificación del concepto función. Además la utilización de subconceptos matemáticos durante la entrevista parece afianzar esta hipótesis.

La coherencia entre las representaciones gráfica y algebraica no supone dificultad para la mayoría del alumnado, y por lo tanto, podría decirse que el reconocimiento de los tipos de funciones proporcional y afín no supone una dificultad para el alumnado. Tampoco parece haber supuesto gran dificultad la identificación de la función constante. Sin embargo, este resultado contrasta con que en la situación de solubilidad, el alumnado no ha podido identificar las ecuaciones correspondientes a las funciones afín y constante. Estos datos podrían indicar o bien que existe cierta dificultad en el reconocimiento entre las representaciones gráficas y algebraicas de las funciones afín y constante, o que existe a nivel de construcción –hecho ya argumentado- y que, por lo tanto, al no tener dichas ecuaciones junto a los gráficos –no ha sucedido así en la situación de la pelota- se deben construir, y es ésta la gran dificultad.

Estos resultados hacen necesario preguntarse cómo se ha producido el aprendizaje de estos subconceptos en el aula, si desde un punto de vista contextual y dinámico o por el contrario desde un punto de vista estático y geométrico.

Tal como se ha sugerido en otras ocasiones, la respuesta a si se ha construido un esquema de función válido que ayude en la competencia científica no puede abordarse sólo con la respuesta de un solo monosílabo (sí/no). Su complejidad, requiere el análisis, a poder ser más detallado, del alcance de los subconceptos asociados a él y, analizar posteriormente si dichos alcances han podido ayudar en la mejora en la competencia científica.

7.1.5 Niveles de matemáticas en relación al concepto de función

A partir del análisis de las respuestas del alumnado tanto en el examen como en la entrevista se deducen niveles globales de utilización, por lo tanto de transferencia, de los distintos subconceptos y del concepto de función. Por otra parte, se considera si la acción llevada a cabo mayoritariamente es de interpretación o la de interpretación junto con la de construcción. Cabe recordar que las tareas planteadas en el examen corresponden en general, a una transferencia cercana, tanto en el tiempo como por las actividades propuestas; en cambio, las situaciones planteadas en la entrevista se sitúan en una transferencia bastante lejana tanto por el tiempo transcurrido como por el tipo de preguntas y situaciones enmarcadas.

Para establecer los niveles generales de Matemáticas se engloban las tareas (translación, predicción y clasificación) en función de la acción principal llevada a cabo; por lo tanto, el enfoque varía respecto al realizado hasta el momento. Esta decisión toma en base a dos criterios: (1) poder comparar los resultados de los grupos que han trabajado las funciones a través de la aplicación de la UD con el grupo 3B que no ha trabajado esta temática durante la investigación, y (2) las tareas de translación, predicción y clasificación han requieren distintas acciones, y éstas se utilizan para agrupar las actividades llevadas a cabo en función de la acción prioritaria realizada.

Las categorías de Matemáticas establecidas son: a) Matemáticas I y b) Matemáticas II. En la de Matemáticas I se recogen los resultados del análisis en relación a las tareas que requieren interpretación y por lo tanto en primer lugar ha debido producirse la identificación. En matemáticas II se incluyen las tareas que han necesitado la construcción y por lo tanto previamente de la interpretación. Además en ésta se incluye el concepto de función creado por el alumnado. El análisis de matemáticas II se realiza en los grupos que han trabajado las funciones durante la investigación. Cada nivel se ha considera en función de las siguientes medias: M1 [1-1.6); M1 [1.6-2.3); M3 [2.3-3) y M4 (3-4].

7.1.5.1 Niveles de Matemáticas I

La categoría de matemática I se ha establecido teniendo en cuenta las dificultades en las tareas de translación y predicción que han necesitan de acciones de interpretación. Se consideran los tres gurpos. (grupos 1A, 2A y 3B).

Esta categoría es el resultado del análisis conjunto de los siguientes parámetros: a) identificación de variables (IV), b) relación entre las variables (RV), c) descripción del gráfico realizada (Dm), d) traducción desde la descripción de la situación al gráfico escogido en el contexto de física (TDG) y e) identificación e interpretación del punto de encuentro (PE). Todos ellos comparten el hecho de caracterizarse porque con la acción de interpretación es suficiente para realizar la tarea adecuadamente y por lo tanto, incluso el grupo que no ha trabajado las funciones puede llevarlo a cabo. Los detalles sobre los niveles de cada parámetro se encuentran detallados en el apartado de metodología (tabla 6-5).

El proceso llevado a cabo para situar a cada estudiante en el nivel de Matemática I ha consistido en otorgar previamente una puntuación a cada nivel de cada parámetro establecido. Dichos valores en algunos parámetros se establecen en el rango 0-3 y en otros

1-4, dependiendo de la dificultad manifestada. Posteriormente para relacionar los datos, aquellos niveles calificados con 0 se reformulan como 1 y así sucesivamente. Todas las especificaciones sobre los niveles y calificaciones otorgadas se encuentran en los anexos 14, 15, y 20). Por último, las calificaciones se han introducido en el sistema informático SPSS (anexo 19), para su estudio estadístico. En los cuadros se indica el total de puntos por grupo. Los resultados globales se encuentran en la figura 7-32.

Los datos podrían indicar un mayor nivel en Matemáticas I por parte del grupo 1A y con una distribución equilibrada por niveles. Destaca que el 62.5% del alumnado del grupo 2A se situó en cotas tan bajas a nivel de matemáticas, incluso por debajo del grupo 3B, que no ha trabajado las funciones durante la investigación. Como posible explicación a este hecho, podría pensarse que el alumnado del grupo 2A ha estado muy influenciado por el aspecto matemático, y que por ello no se ha situado adecuadamente, desde una cierta flexibilidad, en los contextos planteados. Por otro lado, no hay ninguna persona del grupo 1A en el mínimo nivel, lo cual podría hacer pensar que el trabajo en el aula ha influido positivamente en estos resultados.

En cuanto a los siguientes niveles de matemáticas parece existir un salto cualitativo en el grupo 2A, sin representación en el nivel MI 2, lo cual podría interpretarse como que en el grupo no existe una distribución equilibrada de la muestra en cuanto a nivel de matemáticas se refiere. Este hecho no se observa en el grupo 1A; por ello podría decirse que la muestra de este grupo está distribuida más equitativamente –dato éste de importancia relevante dentro de las investigaciones de carácter socioeducativos, PISA por ejemplo-.

Cuadro resumen de niveles de matemáticas I 1A= 120 puntos, 2A=98 puntos, 3B= 88 puntos	
MI 4	1A13**, 1A14*** 2A5**, 2A14***, 2A7***
MI 3	1A1***, 1A11** 3B1***, 3B5**
MI 2	1A7*, 1A9**, 1A10**, 1A16* 3B2***, 3B3**,
MI 1	2A2*, 2A6**, 2A11*, 2A15**, 2A19** 3B4**, 3B6*, 3B7*, 3B8**

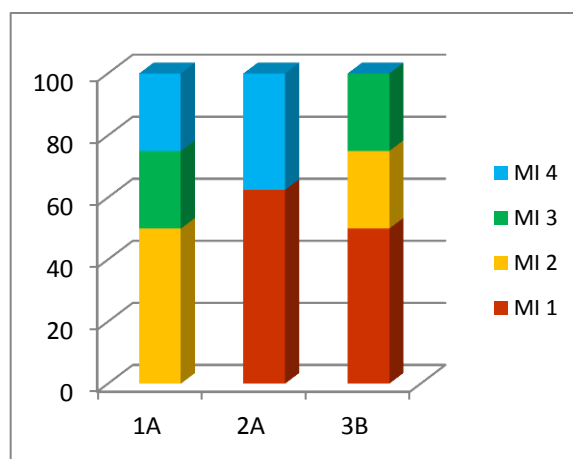


Figura 7-32. Niveles de Matemáticas I (en porcentajes) por grupos.

Son relevaladores los datos obtenidos por chicos de nivel académico medio en matemáticas 1A13**, 2A5** que manifiestan un nivel de matemática MI 4, igual al alcanzado por el alumnado de nivel académico alto en matemáticas. Por el contrario, también destaca la alumna 1A1***, situada en un nivel inferior al esperable.

A diferencia de los resultados de los exámenes, que correlacionan estadísticamente con el nivel académico de matemáticas, los resultados obtenidos en Matemáticas I de la entrevista, no correlacionan estadísticamente con el nivel académico. Esto lleva a la hipótesis de que lo que las profesoras definen como *nivel académico de matemáticas bajo, medio y alto*, ha sido refrendado en los exámenes, pero no lo ha sido en la entrevista. Podría ser que las profesoras en su elección no han considerado la capacidad de interpretación de contextos –algo habitual en el área de matemáticas- y por consiguiente, ésta hubiera sido la explicación de los resultados distintos entre el examen y la entrevista.

7.1.5.2 Niveles de Matemáticas II

La categoría de matemática II se establece teniendo en cuenta las dificultades en las tareas de translación y predicción y clasificación que han necesitado acciones de interpretación y en mayor medida acciones de construcción, llevadas a cabo por los dos grupos que han trabajado durante la investigación las funciones (grupos 1Ay 2A).

Para la categorización de las respuestas en estos grupos se sigue el procedimiento indicado en matemáticas I.

La categoría de matemáticas II es la agrupación correspondiente a: a) traducción entre los sistemas de representación gráfico y algebraico (TGE) -tanto a nivel de reconocimiento como a nivel de construcción-, b) elección de variables al escoger la ecuación en la situación de la pelota (EV), c) ordenada en el origen (OO) -incluye definición, utilización realizada, el acierto tanto en el contexto de la pelota como hallarla en el contexto de solubilidad-, d) pendiente (Pm) -incluye definición y utilización realizada-, el acierto en la situación de la pelota y cómo se halla en la situación de solubilidad, e) predicción del punto de encuentro (PE) -en referencia a si se halla o no-, f) definición de función dada (F), g) esquema de función realizado (EF), h) imagen del concepto de función (ICF) e i) razonamiento covariacional (RC). Los niveles obtenidos se recogen en la figura 7-33.

Los datos parecen mostrar resultados más equilibrados en ambos grupos en comparación a los obtenidos en Matemáticas I, aunque algo mejores en el grupo 1A. No obstante, es positivo que el grupo 2A muestre una mejora considerable, y parece reflejar una distribución más equilibrada y equitativa del alumnado en los resultados. Las alumnas que se encuentran en el nivel inferior ya han sido comentadas a lo largo de la exposición.

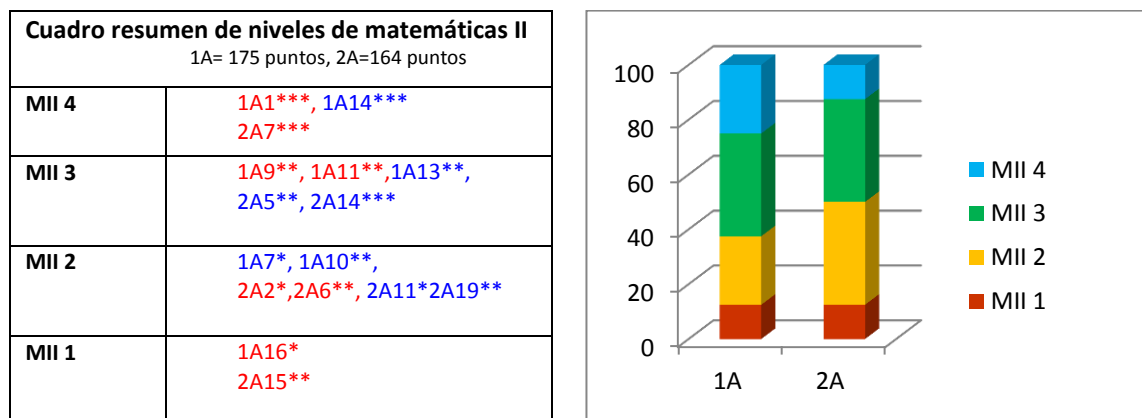


Figura 7-33. Niveles de Matemáticas II (en porcentajes) por grupo.

El alumno 2A11* ha sido situado en un nivel inferior al indicado por la media, ya que recibe ayuda de la investigadora bastantes veces, , debido a que muestra deficiencia de comprensión en euskera -se le ofrece la portunidad de realizar la entrevista en castellano, pero la rehusa. -.

Los resultados podrían indicar que el trabajo realizado en ambas aulas en referencia a las tareas recogidas en Matemáticas II, ha sido bastante parecido, ya que los resultados están muy igualados, lo que indica que no hay correlación entre los resultados y el grupo.

A lo largo del análisis del aula podrá visualizarse las actuaciones semejantes llevadas a cabo por ambas profesoras y relacionarlas con los datos obtenidos en matemáticas II.

7.1.5.3 Comparación de los resultados en Matemáticas I y II

Una vez realizadas las comparaciones entre las matemáticas I y II se fijan los niveles generales de matemáticas.

Cuadro de niveles globales de matemáticas (M1, M2, M3, M4)	
M4	1A1***, 1A13**, 1A14*** 2A5**, 2A7***, 2A14***
M3	1A11**(b)
M2	1A7*, 1A9**, 1A10**, 2A11*, 2A19**
M1	1A16* 2A2*, 2A6**, 2A15**,

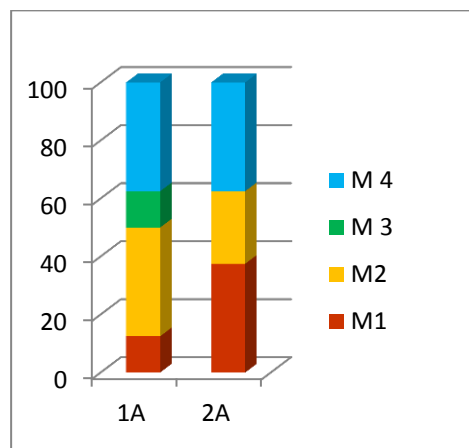


Figura 7-34. Niveles de Matemáticas (en porcentajes) por grupo.

Se incluye a la alumna 1A1*** en el nivel M4, ya que si no se contabilizara hallar el punto de encuentro –no lo ha logrado nadie- su puntuación sería la correspondiente a ese nivel.

Para realizar las comparaciones entre las matemáticas I y matemáticas II y poder categorizar a nivel global al alumnado, se opta por hallar las medias (ver anexos 20 para más detalles). La tabla 7-16 muestra los datos comparados.

Tabla 7-16

Resumen de resultados de matemáticas I y matemáticas II por grupo

	Total de puntos Matemáticas I	Total de puntos Matemáticas II	Total de puntos Matemáticas I y II	Media Matemáticas I	Media Matemáticas II	Media Matemáticas I y II
1A	120 puntos	175 puntos	295 puntos	$X_1= 2.50$	$X_2= 2.44$	$X_{1,2}= 2.47$
2A	98 puntos	164 puntos	262 puntos	$X_1= 2.04$	$X_2= 2.24$	$X_{1,2}= 2.14$
3B	88 puntos			$X= 1.83$		

Tal como era previsible, los resultados del alumnado que ha trabajado las funciones con la aplicación de la UD, son mejores a los del grupo 3B.. No obstante, sobresale el hecho de que las diferencias del grupo 2A respecto al grupo 3B son menores que las que posee con respecto al grupo 1A. Este hecho hace pensar que el aprendizaje llevado a cabo por el grupo 2A en el aula no ha ayudado suficientemente en la interpretación de situaciones.

Estos resultados parecen acordes con lo mostrado por los grupos 1A y 2A en los exámenes –mayor nivel de conocimiento matemático por parte del grupo 1A-.

Por otro lado, el grupo 2A mejora los resultados en matemáticas II y por lo tanto, podría decirse que el trabajo de aula ha estado en mayor medida dirigido a las cuestiones que se recogen en dicha categoría –actividades entendidas como más matemáticas. El grupo 1A mantiene las medias en ambas categorías, lo que haría pensar en un trabajo más equilibrado en el aula, abarcando acciones de distinta índole.

Respecto al nivel académico de matemáticas se presenta la tabla 7-17. Tal como era esperable los resultados se encuentran relacionados con el nivel académico, a mayor nivel académico mejores resultados.

Tabla 7-17

Resumen de resultados (medias) en matemáticas I y II con respecto al nivel académico de matemáticas y grupo

Niveles	Media Matemáticas I		Media Matemáticas II		Media Matemática I y II	
	*	$X_{1A,2A} = 1.53$	$X_{1A} = 1.75$ $X_{2A} = 1.42$ $X_{3B} = 1.42$	$X_{1A,2A} = 1.83$	$X_{1A} = 1.67$ $X_{2A} = 2$	$X_{1A,2A} = 1.75$
**	$X_{1A,2A} = 2.04$	$X_{1A} = 2.63$ $X_{2A} = 1.75$ $X_{3B} = 1.75$	$X_{1A,2A} = 2.29$	$X_{1A} = 2.47$ $X_{2A} = 2.11$	$X_{1A,2A} = 2.23$	$X_{1A} = 2.54$ $X_{2A} = 1.92$
***	$X_{1A,2A} = 2.89$	$X_{1A} = 3$ $X_{2A} = 3.25$ $X_{3B} = 2.42$	$X_{1A,2A} = 2.94$	$X_{1A} = 3.17$ $X_{2A} = 2.72$	$X_{1A,2A} = 3.06$	$X_{1A} = 3.08$ $X_{2A} = 3.06$

Si se tiene en cuenta que el valor mínimo introducido para realizar los cálculos es de 1 y el máximo de 4, es revelador que el alumnado del nivel académico bajo de los grupos que ha trabajado las funciones durante la investigación, no logre la media de 2; tampoco lo alcanza el del nivel académico medio del grupo 2A –cuestión importante-. Esto significa que sólo el 50% del alumnado total que aplica la UD, muestra un nivel por lo menos medio durante la entrevista, y de ese porcentaje el 75% corresponde al grupo 1A.

En cuanto a las subcategorías englobadas en matemáticas I sucede lo mismo que lo ya indicado para las matemáticas en general. Además, es revelador que el alumnado de nivel académico bajo y medio del grupo 3B iguale los resultados del grupo 2A en tareas que requieren de la interpretación. Por lo tanto, parece claro que son los niveles bajos y medios del grupo 2A los que llevan a que los resultados de estos dos grupos sean tan similares. Cabe recordar que ya en los exámenes se han identificado dificultades destacables en estos niveles académicos, y que en contra de lo sucedido en el grupo 1A, la autoevaluación realizada por este alumnado no ha sido acorde a su nivel en las subcategorías de análisis relacionadas con la translación.

En cuanto a matemáticas II el 25% de la población –corresponde a nivel académico bajo- no alcanza el mínimo garantizado para responder adecuadamente a las tareas incluidas en dicha categoría.

No obstante, a diferencia de lo que sucede en el grupo 1A, las personas de nivel académico bajo y medio del grupo 2A mejoran sus resultados en matemáticas II, lo cual hace pensar que las actividades que han requerido de la construcción de modelos mentales de representación de funciones, han sido mejor trabajadas que aquellas que requerían de la construcción del modelo de la situación. La diferencia entre los niveles académicos bajo y medio pudiera hacer suponer que el alumnado de estos niveles actúa en mayor medida a nivel memorístico y operativo con dificultades para enfrentarse, con cierta flexibilidad, a contextos donde las tareas requeridas no se asemejan las habituales de aula. Además, esta fluctuación podría sugerir que en este grupo las actividades de aula han tenido que ver más con las tareas de carácter “más matemático” y operativo, frente a las de carácter interpretativo.

En el aula 1A, los niveles bajo y medio parecen beneficiarse de aquellas actividades -ya analizadas- que ayudan a la reflexión sobre las variables. Sin embargo, parece que las actividades de construcción, al no haberse caracterizado tanto por la reflexión sino por el aprendizaje de algoritmos y el aprendizaje de procedimientos matemáticos concretos han podido llevar a este alumnado a no poseer los instrumentos necesarios para resolver cuestiones más matemáticas. Cabe recordar que en este alumnado existen dificultades al despejar la incógnita, lo que conlleva no poder construir adecuadamente una ecuación.

Por otro lado, el alumnado de nivel académico alto del grupo 2A muestra resultados mejores a su homólogo -1A- en matemáticas I, debido a que la alumna 1A1*** realiza una interpretación icónica de las situaciones contextualizadas en física. Por otra parte, el alumno 2A14*** fue el primer alumno entrevistado y no trabajó en la construcción de las ecuaciones acordes a las funciones de la situación de solubilidad durante la entrevista.

Los resultados más homogéneos en el grupo 1A en los tres niveles académicos podrían indicar un trabajo de aula más equilibrado en cuanto a actividades tanto a nivel de interpretación como de construcción.

Los resultados globales necesitan un análisis más detallado sobre qué tipo de evolución -desde las matemáticas I a matemáticas II- ha tenido cada estudiante.

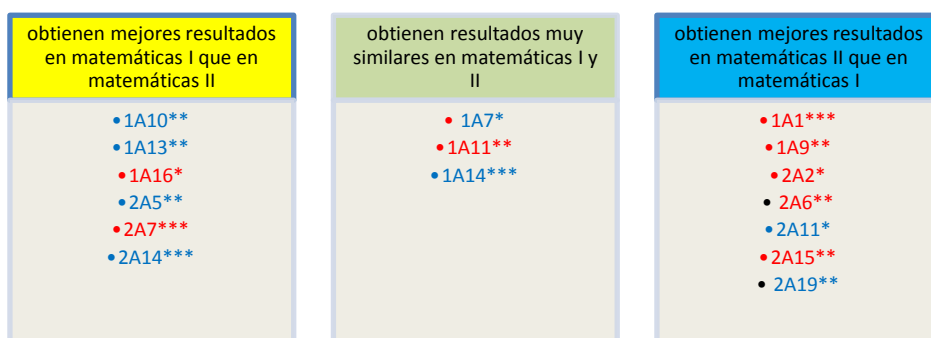


Figura 7-35. Grupos en función de la comparativa entre los resultados de matemáticas I y II

A la vista de los resultados podría decirse, que existe un tipo de alumnado, independientemente del nivel académico en matemáticas, que realiza mejor las tareas que requieren la interpretación, frente a otro grupo que lo hace mejor en las tareas que sobretodo necesitan las operaciones algorítmicas. Este hecho podría explicar por qué unas personas aun teniendo buenos resultados en matemáticas no destacan en ciencias, a no ser que el único requerimiento sea la sustitución en una fórmula –ya memorizada- de las variables que muchas veces parecen muy definidas en la descripción de la situación. Por contra, se encontraría el otro extremo, el alumnado que posee mayor facilidad en la construcción de las situaciones, pero que su conocimiento matemático no es suficiente, no podría llevar a cabo la construcción hasta la expresión algebraica.

En cuanto a los datos generales de los grupos, la tendencia parece indicar que el alumnado del grupo 1A tiende a realizar las actividades relacionadas con la interpretación algo mejor de aquellas consideradas como de construcción -dos de las personas situadas en resultados similares en matemáticas I y II registran también tendencia en este sentido-. Este hecho se refleja en el sumatorio de las medias en cada grupo (el grupo 1A -0.44 y el grupo 2A 1.88). Estos resultados podrían estar relacionados con los tipos de tareas realizados en el aula – algo más de interpretación en el grupo 1A y bastante más de construcción en el grupo 2A-.

La diferencia de resultados por sexo, se analiza en profundidad en el apartado Influencia de la variable sexo en la transferencia.

7.2 Desarrollo de la unidad didáctica en el aula

En este apartado se analizan algunos factores que han influido en la aplicación de la unidad didáctica en el aula en cada uno de los dos los grupos que han trabajado las funciones: 1A y 2A.

Cabe recordar que a las profesoras se les ha proporcionado un material didáctico con distintas actividades que han podido utilizar en mayor o menor grado en la configuración de su UD. Uno de los objetivos de la propuesta didáctica planteada es la construcción contextualizada del concepto función y, para ello, se proponen una multitud de contextos científicos a partir de los que trabajar. Por otro lado, también se ha querido innovar a nivel metodológico, especialmente en aspectos como la organización de aula y la coevaluación y evaluación –aspectos que se han considerado débiles en las grabaciones de aula realizadas previamente al trabajo sobre funciones-.

Los resultados de los análisis de los resultados expuestos hasta ahora indican un mejor nivel de la utilización del contenido matemático por parte del alumnado del grupo 1A. Por ello, parece necesario preguntarse si existe alguna relación con el tipo de trabajo realizado en el aula por cada una de las profesoras y con las distintas estrategias y metodologías utilizadas. En este apartado se busca dar respuesta a esta pregunta.

7.2.1 Situación de partida

Meses antes de la puesta en práctica de la UD se graban clases de matemáticas de los dos grupos con el objetivo de tener una visión de los modelos didácticos habituales utilizados en las aulas y, también, para que el alumnado y la profesora se familiaricen con la presencia de la investigadora (y de la cámara) dentro del aula. Los grupos naturales 1A y 2A se desdoblan en las horas de matemáticas, dando como resultados 4 subgrupos 1AA, 1AB, 2AA y 2AB. En la investigación realizada se han analizado los datos de los subgrupos 1AA y 2AA. El subgrupo 1AA ha estado formado por 4 chicas y 5 chicos. El subgrupo 2AA ha estado formado por 7 chicas y 3 chicos, aunque uno de los chicos, si bien permanece algunos días en el aula, ya ha desistido en los estudios para cuando comienza la investigación.

Han sido grabadas cuatro sesiones en el grupo 1AA y tres sesiones en el grupo 2AA. Para poder comparar ambos subgrupos se opta por escoger una de cada subgrupo, correspondiente en ambos casos a los momentos de corrección de actividades (el tema de

estudio son las ecuaciones). En el caso del subgrupo 2AA además, se enseña un procedimiento *–de cabeza–* para hallar el valor de x en ecuaciones mediante la utilización de un algoritmo. Estas transcripciones por lo tanto corresponden en el subgrupo 1AA 090112 6.ordua (anexo 18), 1AA 090112 6.ordua (anexo 18) y 2AA 090123 4.ordua (anexo 18). El análisis de los datos se realiza en referencia a: a) cómo se organiza el aula, b) cuáles son los estilos comunicativos de las profesoras, c) cómo es la participación del alumnado, d) cuál es nivel de uso del euskera, e) cómo se utilizan contextos de aprendizaje y f) qué tipo de evaluación de los aprendizajes se lleva a cabo.

Los resultados de este análisis son utilizados para incidir en posibles cambios metodológicos a introducir en la unidad didáctica, y son valorados junto con las profesoras para que los tengan en cuenta posteriormente.

7.2.1.1 La organización del aula

Desde los primeros momentos llama la atención la distribución tanto del espacio como de alumnado en el aula. En ambas aulas, en una misma tarea se observa alumnado trabajando individualmente, en parejas, en alguna ocasión en grupo o incluso un alumno o alumna situado donde él o ella escoge; sólo cuando el comportamiento es objeto de recriminación por parte de la profesora, entonces es ella la que indica donde debe situarse el citado alumno o la alumna. Se deduce, por tanto, que no se han compartido normas de trabajo, ni individual ni en grupo.



2AA



1AA

Figura 7-36. Organización habitual del aula antes de comenzar a aplicar la UD.

7.2.1.2 Los estilos comunicativos

Tal como se ha indica en el apartado de metodología, el análisis de los estilos didácticos se basa tanto en las aportaciones realizadas por Montimer y Scott (2003) como en las realizadas por Scott y Ametller (2007).

En la figura 7-38 se muestran los estilos didácticos utilizados por cada profesora teniendo en cuenta el volumen de tiempo utilizado para ello (se ha tenido en cuenta el número de líneas en la transcripción).

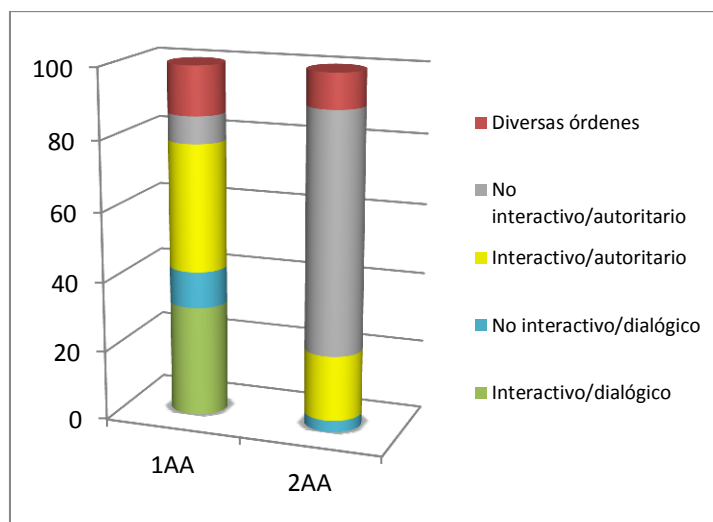


Figura 7-37. Estilos didácticos empleados por las profesoras en los subgrupos.

Los datos recogidos corresponden a la transcripción realizada del día 12 de enero de 2009 (090112) en el grupo 1AA con 1839 palabras transcritas y a la transcripción realizada del día 23 de enero del 2009 (090123) del subgrupo 2AA con 2737 palabras transcritas. Ambas sesiones corresponden a la realización de problemas y ejercicios, no son por lo tanto clases teóricas (ver anexo 18).

Los gráficos indican un estilo bastante distinto por parte de las dos profesoras, de carácter marcadamente interactivo e incluso dialógico por parte de la profesora del grupo 1AA en oposición a su compañera, con un estilo mayoritariamente no interactivo/autoritario a la hora de afrontar el trabajo con el alumnado.

7.2.1.3 La participación del alumnado

Los distintos estilos comunicativos tienen un reflejo en la participación del alumnado y en las interacciones en el aula.

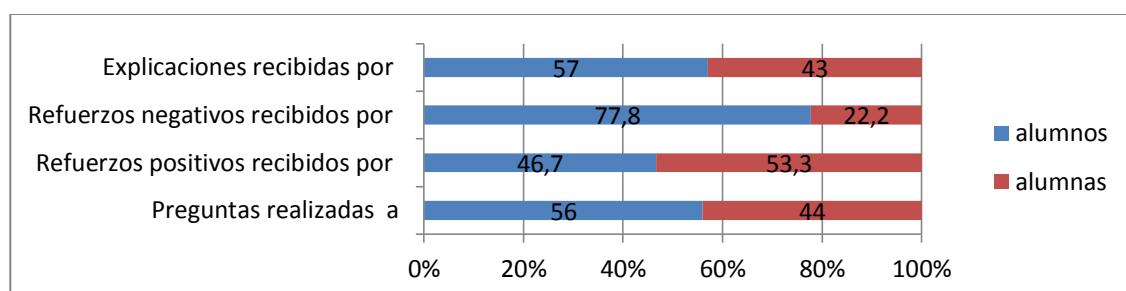
El análisis de las de las interacciones se realiza desde dos perspectivas: a) las interacciones de la profesora con las alumnas y alumnos y b) el protagonismo y participación del alumnado por sexo.

Ambos tipos de análisis corresponden a los resultados ponderados por subgrupo ya que no participan el mismo número de chicas y de chicos.

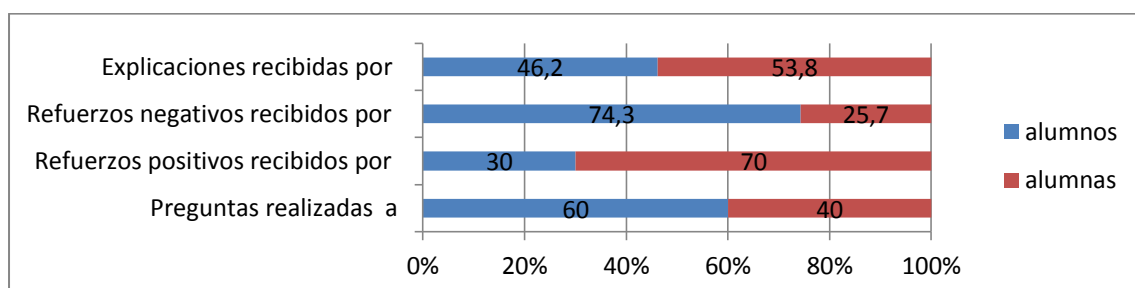
-Los resultados brutos de las interacciones de la profesora con las alumnas y alumnos se agrupan en cuatro categorías: a) preguntas realizadas al alumnado, b) refuerzos positivos recibidos por el alumnado, c) refuerzos negativos recibidos por el alumnado y d) explicaciones recibidas por el alumnado. Las interacciones registradas no incluyen el número de interacciones que las profesoras han realizado con el grupo clase en conjunto (ver figura 7-39).

En el subgrupo 1AA parece existir un número similar de preguntas realizadas al alumnado al igual que de explicaciones y refuerzos positivos dados por la profesora; sin embargo, destaca el porcentaje elevado de los refuerzos negativos recibidos por los alumnos.

En el subgrupo 2AA el nivel de preguntas realizado a los chicos ha sido superior al de las realizadas a las chicas; sin embargo las explicaciones realizadas por la profesora han sido equilibradas en número para los dos sexos. Destaca no obstante los resultados tanto en el refuerzo positivo recibido –bastante más elevado en el caso de las chicas-, como el refuerzo negativo recibido por los chicos –bastante más elevado-.



1AA



2AA

Figura 7-38. Estilos didácticos empleados por las profesoras en los subgrupos.

Parece que el refuerzo negativo a los chicos en ambos grupos ha sido muy destacado en comparación con el recibido por las chicas.

-La participación y el protagonismo del alumnado se agrupan en cuatro categorías: a) tiempo utilizado por las profesoras y el alumnado, b) las preguntas realizadas por el alumnado, c) las respuestas correctas del alumnado y d) las respuestas incorrectas del alumnado.

El protagonismo y participación de las alumnas y los alumnos en el grupo 1AA ha sido similar tanto en relación al porcentaje de preguntas realizadas, como en el porcentaje de respuestas correctas y erróneas emitidas (ver figura 7-39).

El protagonismo y participación de las alumnas y los alumnos en el grupo 2AA, ha sido similar en relación al porcentaje de preguntas que realizan. El nivel de respuestas correctas ha sido ligeramente superior en el caso de los chicos, mientras que se han encontrado grandes diferencias en relación con las respuestas erróneas, siendo el 90.3% de ellas respuestas de los chicos (ver figura 7-39).

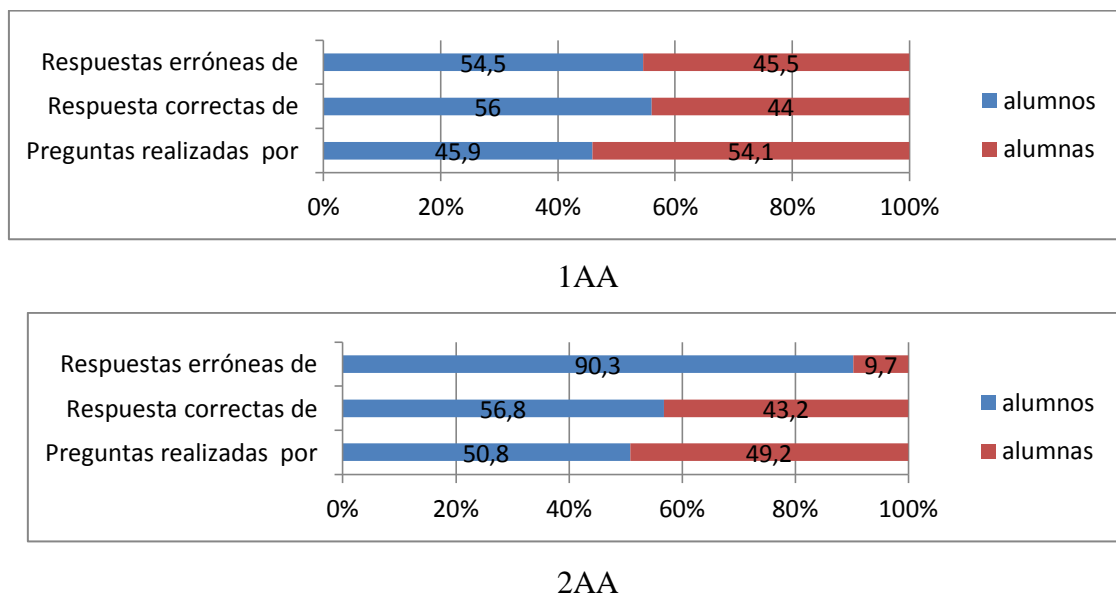
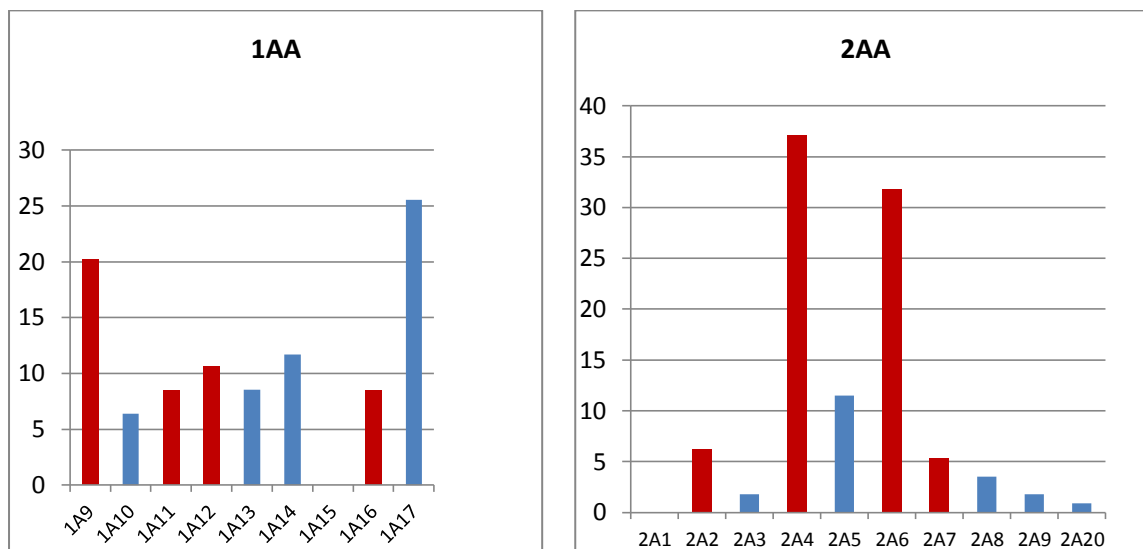


Figura 7-39. Preguntas y respuestas realizadas por el alumnado

Por otra parte, la figura 7-40, recoge la participación de cada persona.



1A15 chico, 2A1 chica.

Figura 7-40. Participación de cada estudiante

Tal como puede observarse el protagonismo se encuentra algo desequilibrado en el grupo 1A y muy desequilibrado en el grupo 2A. En el grupo 1A, la alumna 1A9 muestra bastante inseguridad y nerviosismo –incluso en cierto momento se le ha preguntado si se siente incómoda con la grabación; responde que no, que nota el cambio de colegio-. El alumno 1A17 muestra un nivel alto de conocimiento matemático y también de dinamismo en el aula; a veces se lleva tareas extra a casa para profundizar, lo que se traduce en un alto nivel de protagonismo dentro del aula. .

En cuanto al grupo 2A se refiere, las dos alumnas 2A4 y 2A6 muestran el mayor protagonismo a nivel general, y la profesora retroalimenta ese protagonismo.

7.2.1.4 El uso del euskera

La construcción de conceptos no puede dejar de lado el nivel de competencia lingüística del alumnado, y éste necesita en primer lugar ser hablado. Así, se ha cuantificado el uso del euskera como lengua vehicular en estos dos grupos de modelo D (modelo que trabaja todas las asignaturas en euskera exceptuando las de castellano e inglés).

Es necesario destacar que la utilización del castellano, ha estado supeditada en gran medida, a la intervención de ciertas personas que poseen un gran peso en sus intervenciones en el aula.

El escaso uso del euskera tanto como instrumento de comunicación como de construcción de conceptos propicia que el alumnado, aun perteneciendo al de modelo D, vaya construyendo su aprendizaje en castellano o en una mezcla entre castellano y euskera en sus intervenciones. El desequilibrio en el reparto de intervención oral del alumnado sumado a que las personas protagonistas lo hacen en castellano explica los resultados.

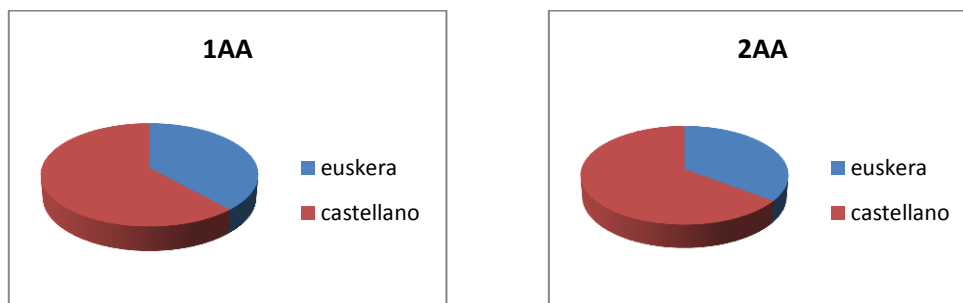


Figura 7-41. Uso del euskera como lengua vehicular (se contabilizan palabras).

7.2.1.5 *Uso de situaciones contextualizadas en el aprendizaje*

La utilización de contextos próximos al alumnado para la construcción del conocimiento matemático es mayor por parte de la profesora del grupo 1A que por parte de la profesora del grupo 2A. Así mientras la profesora del grupo 2A opta por un procedimiento abstracto para resolver ecuaciones no contextualizadas, la profesora del grupo 1A se basa en un contexto cotidiano –la venta de un reloj– para trabajar las ecuaciones. Ninguna de las dos utiliza contextos científicos para la construcción del concepto de ecuación.

7.2.1.6 *La evaluación*

La evaluación se encuentra reservada a las profesoras, todas las respuestas del alumnado las valoran ellas.. Por otra parte, no hay ninguna actividad dirigida a la autoevaluación o a la coevaluación en ninguno de los dos grupos.

7.2.1.7 *Resumen de la situación de partida*

La situación de partida, antes de la puesta en práctica de la UD refleja un estilo didáctico dispar entre ambas profesoras, de carácter más dialógico e interactivo por parte de la profesora del grupo 1A y no dialógico y autoritario en el caso de la profesora del grupo 2A interactivo Ninguna de las dos muestra grandes diferencias en las interacciones con el alumnado respecto al sexo: Por otra parte merecen resaltarse dos cuestiones en el

grupo 2A, la intervención destacada por parte de determinadas chicas y las relaciones algo deterioradas de la profesora con los dos únicos chicos que participan en toda la investigación.

La organización del aula, en principio la escoge cada estudiante, lo cual manifiesta cierto desequilibrio, ya que puede haber alumnado trabajando solo, en parejas y grupo.

La utilización del contexto, en general se limita a las actividades de aplicación en cada unidad, es decir los conceptos no son construidos a través del contexto.

7.2.2 Aplicación de la UD

La propuesta didáctica presentada pretende además de trabajar la construcción del concepto función de modo contextualizado, , tratar de incidir en algunas de las limitaciones metodológicas que han sido identificadas en las clases previas, como son la gestión del aula y el propio estilo comunicativo.

Tanto en la fase de diseño de la UD como durante su puesta en práctica, se explica a las profesoras en qué consiste la misma y cuáles son sus objetivos. También se solicita a ambas sugerencias para mejorarla y se les da la oportunidad –con tiempo suficiente- para realizar cambios. Las docentes, no obstante, aceptan la propuesta de la unidad didáctica tal como ya se encuentra redactada.

Durante la puesta en práctica de la UD sin embargo, ellas van modificando el orden y el modo de realizar las actividades, y bastantes de las actividades no son aplicadas. Las profesoras introducen otra serie de actividades nuevas para completar o profundizar cuestiones que consideraron necesarias, bien porque el material no profundiza lo suficiente según su parecer (por ejemplo, la determinación de la función dados dos puntos) o porque parece oportuno hacerlo (ver anexos 8 y 9).

La UD consta de 78 actividades. Como la la función parabólica propiamente dicha, no se trabaja, ., el número de actividades que se analizan a partir de ahora es de 73. Además se mencionan dos actividades nuevas en el grupo 1A ya que han sido introducidas como continuación de alguna planteada en la UD y otras 5 (3 a realizar por el alumnado y 2 solucionadas) en grupo 2A.

La UD se estructura en cuatro etapas principales (alguna actividad es válida para dos etapas): a) etapa de exploración, con 9 actividades; b) etapa de introducción de distintos conceptos, con 14 actividades; c) etapa de estructuración, con 27 actividades y d)

etapa de aplicación, con 29 actividades. De las 73 actividades propuestas el grupo 1AA realiza 27 y el grupo 2AA, 22. Por lo tanto, es patente que las profesoras aplican poco de la UD presentada.

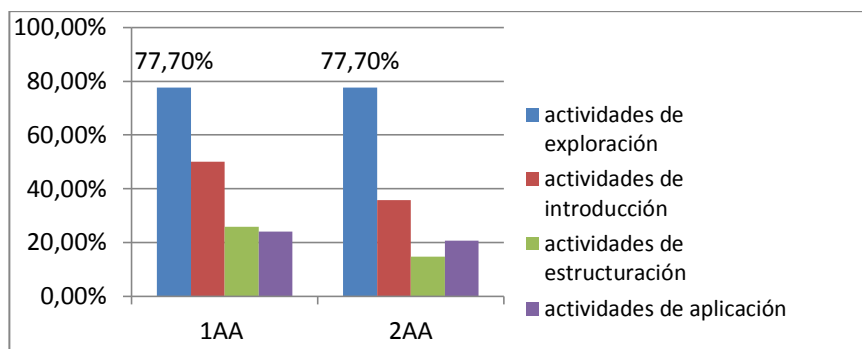


Figura 7-42. Porcentaje de actividades realizadas por cada subgrupo en referencia a cada etapa.

Los datos indican que aunque en un principio las dos profesoras optan por llevar al aula las tareas propuestas, en el orden más o menos establecido y gestionando el aula como se propone, a medida que avanza la aplicación de la UD, es menor el número de actividades realizadas y también cambia la gestión del aula. Ambos hechos aunque se producen en ambos grupos, con mayor incidencia en el grupo 2A.

Las tareas de estructuración tiene como objetivo llegar al modelo de función como objeto matemático, y por los resultados podría decirse, que el trabajo realizado al respecto no ha garantizado suficientemente dicho resultado. Se recuerda que el alumnado no ha llegado a construir el concepto de función como objeto matemático (etapa de cosificación).

En la UD, los distintos contenidos se distribuyen a lo largo de 8 periodos más específicos: (1) fase de lectura de gráfico con 3 actividades, (2) fase de introducción a la función, con 6 actividades, (3) fase de interpretación de gráficos, con 14 actividades, (4) fase de construcción de gráficos, con 8 actividades, (5) fase de extracción de datos desde la tabla y el gráfico, con 7 actividades, (6) fase de la función de proporcionalidad con 15 actividades, (7) fase de la función afín, con 6 actividades y (8) fase de la función inversa con 15 actividades. En la figura 7-44 se recoge la proporción de actividades que realiza cada grupo en cada fase.

A los datos destacados en la figura 7-44, cabe añadir que en la fase de función proporcional, la profesora del subgrupo 2AA lleva al aula 2 actividades nuevas y que en la

fase de función afín la profesora del subgrupo 1AA aporta 3 actividades nuevas (ver anexos 9 y 10).

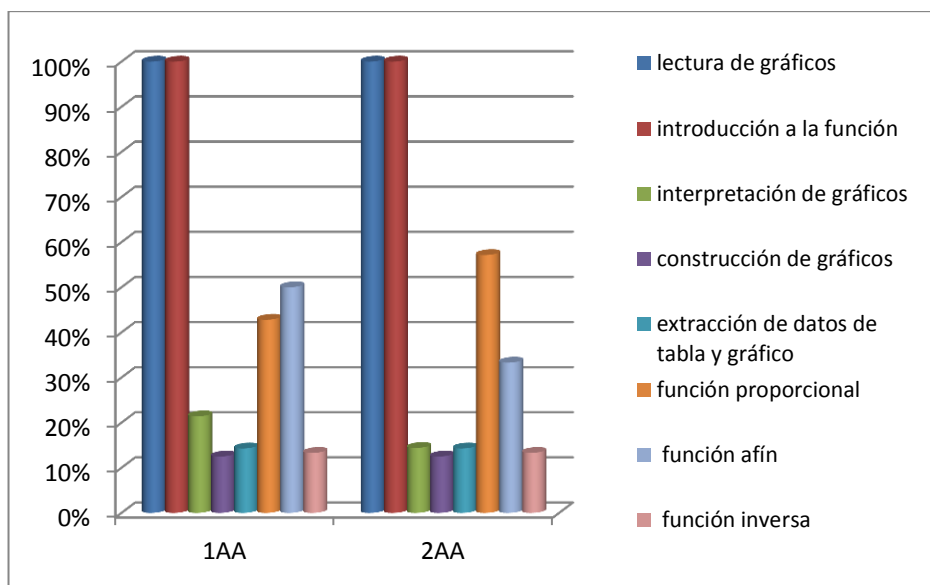


Figura 7-43. Porcentaje de actividades realizadas por cada subgrupo en referencia a cada periodo.

El análisis de los datos parece indicar igualdad de aplicación en cuanto a las tareas iniciales y además, como se ha destacado anteriormente, a partir de un diseño similar al propuesto; sin embargo, ya a partir de la fase de interpretación de gráficos, se observan cambios en las tareas seleccionadas (ver anexo 8), por lo que existe una diferencia importante entre lo que se ha presentado como propuesta didáctica a las profesoras -que busca unos objetivos determinados- y su aplicación real.

De la observación de la práctica se pueden inferir algunas de las razones que pueden explicar las diferencias:

- la UD tiene entre sus objetivos prioritarios la construcción del concepto función en contexto, utilizando básicamente contextos científicos; sin embargo el campo científico no es –según las profesoras- un ámbito donde ellas se desenvuelven con tranquilidad ya que, al igual que el alumnado, se consideran desconocedoras de un número importante de los conocimientos relacionados. Tal vez por ello no han trabajado actividades importantes dentro de la unidad (ej., 15, 17, 18, 20, 22, 29, 36, 48, 51, 56, 62, 64);

- desde la matemática formal, ellas consideran que hay déficit en ejercicios puramente matemáticos en la UD; así las actividades nuevas introducidas tratan de equilibrar este hecho;
- la metodología propuesta les resulta en ciertos momentos lenta y excesivamente novedosa; lo que conlleva que la práctica de la UD, en cuanto a la parte metodológica se refiere, quede relegada y que las profesoras de nuevo utilicen su metodología habitual. Por lo tanto, los conceptos matemáticos que desde el área de ciencias se consideran como prioritarios (interpretación de gráficos científicos, variables contextuales razonamiento covariacional, pendiente y ordenada en el origen asociados a contextos. etc.) no se trabajan en la medida en que han sido propuestos en el diseño de la UD. Tampoco, se trabajan en la proporción propuesta, actividades cuyo objetivo es la interpretación icónica de gráficos (por ejemplo, las actividades 15, 24, 33, 35), y este hecho, podría explicar parte de los resultados obtenidos en la entrevista, en los que la mayoría del alumnado tiende a interpretar los gráficos en función de una lectura icónica. Esto no significa que si se hubieran trabajado las actividades previstas no se hubiera producido dicha interpretación, pero posiblemente no se hubiera dado con tal intensidad. Los motivos de su no utilización no están claros ya que las profesoras no indican dificultad en los contextos utilizados en dichas actividades, a diferencia de lo manifestado sobre los contextos científicos.

7.2.2.1 La organización del aula

En la UD se sugiere que cada actividad se desarrolle con una organización de trabajo determinada: individual, en parejas, grupos o gran grupo, siempre con el objetivo de que la reflexión sea el núcleo del trabajo en grupo. Sólo durante la fase de exploración las propuestas sobre la organización se respetan en los dos grupos. No obstante, desde un inicio, el subgrupo 2AA no muestra buena disposición al trabajo en grupo y sobre todo las alumnas parecen más interesadas en la tarea individual. El subgrupo 1AA participa con mayor interés desde un principio, interviniendo activamente en la tarea de grupo. Una vez concluida la fase de exploración la organización del trabajo vuelve al estilo tradicional porque las profesoras no insisten en mantener la metodología propuesta en la UD. En ello. Por lo tanto, a medida que la aplicación de la UD avanza la dispersión del grupo es

una tónica general, sin una organización homogénea; hay estudiantes trabajando en solitario, en parejas y en grupo.

Este hecho hace recordar lo difícil que resulta el cambio en la organización del aula aun llevando actividades que plantean otro tipo de agrupaciones, ya que las rutinas (y los valores asociados) condicionan mucho la situación. Sin embargo, la profesora del grupo 1A muestra mayor tendencia que su compañera a animar al alumnado a trabajar por parejas.

7.2.2.2 *Los estilos comunicativos*

El estilo comunicativo que manifiestan las profesoras, a nivel general, varía poco respecto al que caracteriza la etapa previa a la aplicación de la UD. Aunque al principio, a partir de la propuesta dada, se trata de incorporar un estilo más dinámico y dialógico-interactivo, rápidamente se vuelve al estilo más autoritario o dialógico en el caso de la profesora del grupo 2A y al estilo interactivo a veces dialógico y otra autoritario por parte de la profesora del grupo 1A. Ello vuelve a poner de manifiesto la dificultad de aplicación de materiales didácticos innovadores ya que el profesorado los adapta a su propio estilo, transformando el sentido de la propuesta, por lo que difícilmente pueden observarse cambios a partir de una sola UDy, en consecuencia, validar su posible interés. Por ello, en este estudio se ha optado por analizar posibles factores que puedan explicar los resultados obtenidos en el examen y en la entrevista, a partir de incidir en las diferencias entre las dos aplicaciones.

En la figura 7-45 se muestran los estilos didácticos utilizados por cada profesora teniendo en cuenta el tiempo utilizado, que ha sido medido por el número de líneas que caracteriza a cada estilo. Los datos recogidos corresponden a las transcripciones realizadas durante los días 11 (090511) y 13 (090513) de mayo de 2009 en el subgrupo 1AA y a las transcripciones de los días 13 (090513) y 15 (090513) de mayo en el subgrupo 2AA. Ambas sesiones corresponden a la realización del ejercicio 40 –la sombra del palo-. En la primera sesión de ambos grupos la traducción al castellano se ha realizado a partir del inicio del ejercicio 40 (ver anexo 18).

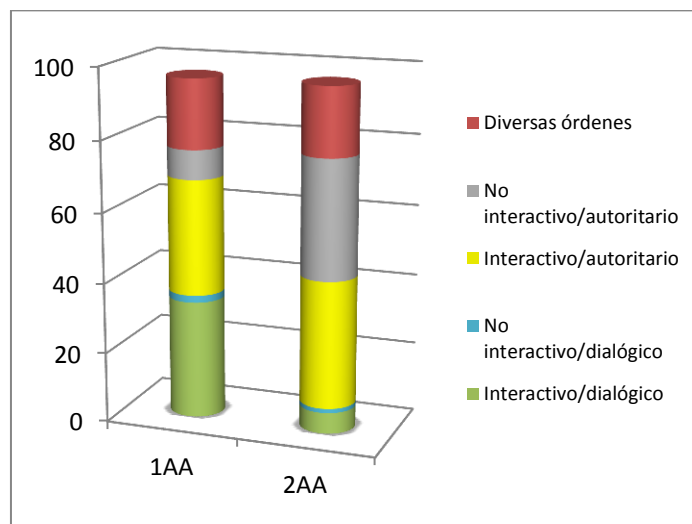


Figura 7-44. Estilos didácticos empleados por las profesoras en los subgrupos al aplicar la UD.

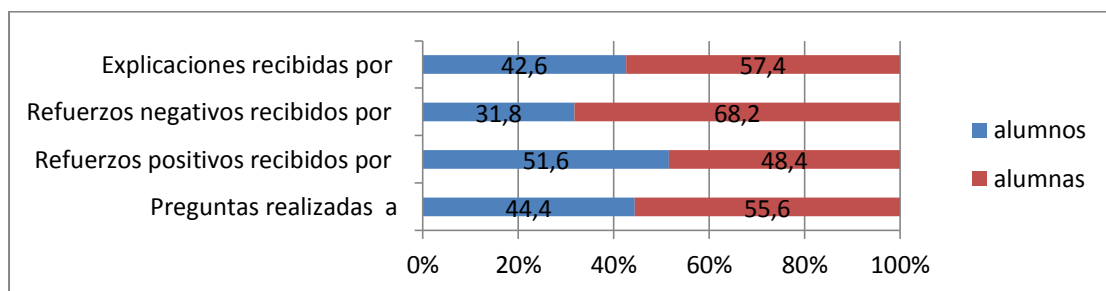
No obstante si se comparan los datos registrados durante la aplicación de la UD a los momentos previos puede destacarse cierta tendencia de las profesoras al cambio, aunque dentro del mismo estilo. Así se aprecia una sutil presencia mayor del estilo interactivo-dialógico. Mientras que el estilo no interactivo –autoritario se mantiene en el grupo 1AA, desciende de modo muy importante en el subgrupo 2AA; en cambio mientras que en el subgrupo 1AA el estilo interactivo –autoritario desciende, en el subgrupo 1AA aumenta de modo importante,. Por último el descenso en el estilo no interactivo-dialógico es más destacado en el subgrupo 1AA al realizado en el subgrupo 2AA.

7.2.2.3 La participación del alumnado

Los distintos estilos comunicativos tienen un reflejo en la participación del alumnado y en las interacciones en el aula.

El análisis de las de las interacciones se realiza desde dos perspectivas: a) las interacciones de la profesora con las alumnas y alumnos y b) el protagonismo y participación del alumnado por sexo.

-Los resultados brutos de las interacciones de la profesora con las alumnas y alumnos se agrupan en cuatro categorías: a) preguntas realizadas al alumnado, b) refuerzos positivos recibidos por el alumnado, c) refuerzos negativos recibidos por el alumnado y d) explicaciones recibidas por el alumnado. Las interacciones registradas no incluyen el número de interacciones que las profesoras realizan con el grupo clase en conjunto.



1AA

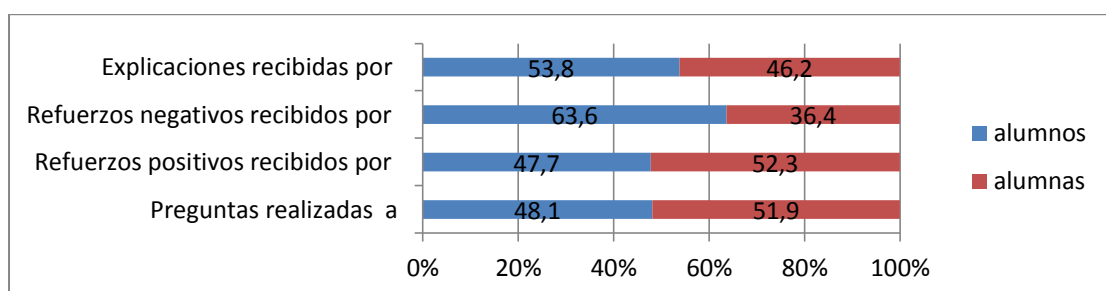


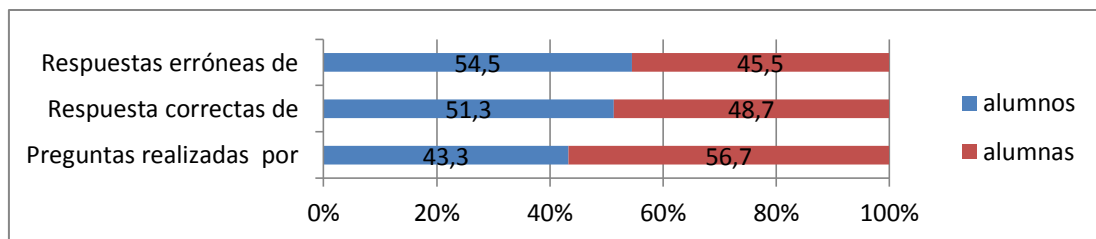
Figura 7-45. Interacciones de las profesoras con el alumnado al aplicar la UD 2AA

En cuanto al grupo 1A se podría decir que las interacciones de la profesora con el alumnado en función del sexo son similares –se equilibra el balance de las preguntas realizadas a cada sexo-, excepto en lo relativo a los refuerzos negativos, ya que el porcentaje de refuerzos negativos a los chicos era bastante superior (77.85%) al de las chicas en las sesiones iniciales sobre ecuaciones, mientras que la tendencia se invierte en la sesiones sobre funciones, donde son ellas las que reciben el mayor porcentaje de refuerzos negativos (68.2%).

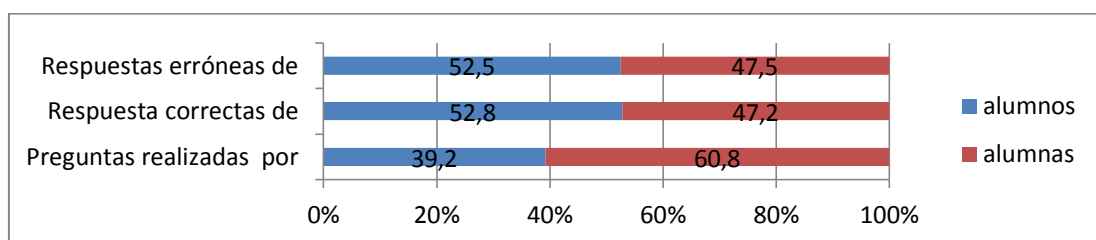
En cuanto al grupo 2A se podría decir que las interacciones de la profesora en función del grupo no son similares, excepto en lo relativo a los refuerzos negativos, ya que el porcentaje de refuerzo negativo a los chicos aunque ha disminuido con respecto a los datos de las sesiones de ecuaciones sigue siendo importante (74.3% en sesiones de ecuaciones y de 63.6 % en las sesiones de funciones). La profesora en ciertos momentos parece olvidar a los chicos, llegando incluso a no prestar atención a alguna intervención de uno de ellos y algo similar ocurre cuando se centra en el colectivo de las tres alumnas que más participan en la clase.

-La participación y el protagonismo del alumnado se agruparon en cuatro categorías: a) tiempo utilizado por las profesoras y el alumnado, b) las preguntas realizadas

por el alumnado, c) las respuestas correctas del alumnado y d) las respuestas incorrectas del alumnado.



1AA



2AA

Figura 7-46. Preguntas y respuestas realizadas por el alumnado al aplicar la UD

En el grupo subgrupo 1AA el protagonismo y participación de las alumnas y los alumnos una vez ponderados los resultados es similar tanto en relación al porcentaje de preguntas, como en el porcentaje de respuestas correctas emitidas por el alumnado y de respuestas erróneas. No se hallan diferencias sustanciales respecto a los datos obtenidos antes de la puesta en práctica de la UD.

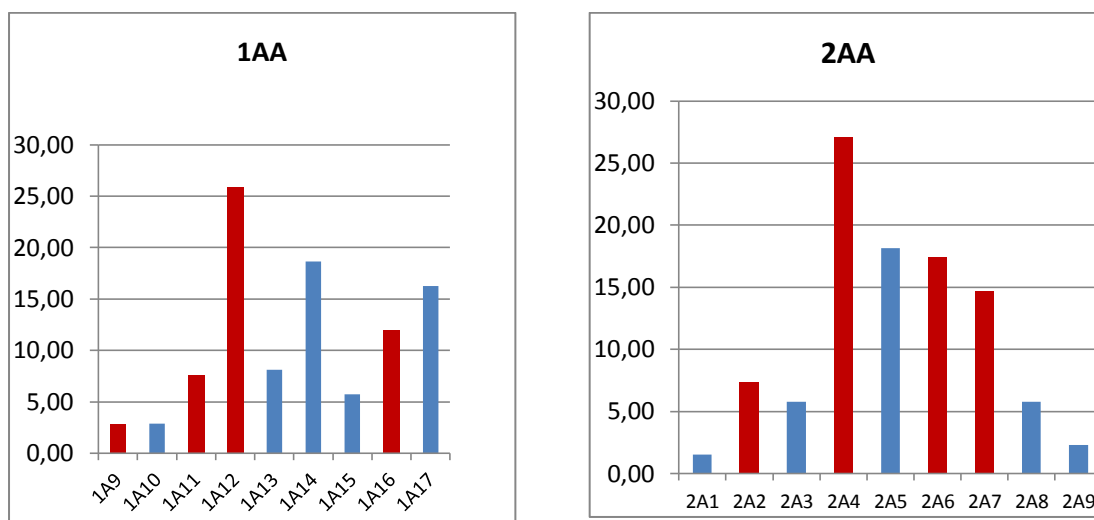
En el grupo 2AA, las chicas alcanzan mayor protagonismo que los chicos si se compara con lo registrado en el tema de ecuaciones. Por otro lado, los resultados son similares en el porcentaje de respuestas correctas y erróneas emitidas por el alumnado. Este último dato es destacado ya que el porcentaje de respuestas erróneas en el tema de ecuaciones ha sido de un 90.3% por parte de los chicos y de 9.7% por parte de las chicas.

Por otro lado, una vez analizados los datos del subgrupo 2AA, la principal conclusión sería que no se encuentran diferencias sustanciales entre chicas y chicos, ni en las interacciones de la profesora, ni en la participación de alumnado. Sin embargo, destacan los refuerzos negativos a las chicas en el grupo 1AA y los refuerzos negativos a los chicos en el subgrupo 2AA, en ambos casos muy superiores a los obtenidos por el otro sexo.

En cuanto a la participación de cada estudiante se ha obtenido el siguiente resultado.

La participación del alumnado sigue siendo algo desequilibrada en el grupo 1A y muy desequilibrada en el grupo 2A.

En el grupo 1A, la alumna 1A12 adquiere mucho protagonismo, le gusta dirigir las actividades; incluso en algún momento, la profesora le indica que no actúe de maestra con su compañera –la alumna 1A16 de nivel académico matemático bajo-, ya que es ésta la que tiene que reflexionar. En cuanto a los chicos de nivel académico alto -1A14 y 1A17- llaman la atención de la profesora con propuestas distintas a la hora de resolver actividades.



El alumno 2A20 abandonó el centro durante la investigación

Figura 7-47. Participación de cada estudiante durante la aplicación de la UD.

En el grupo 2A la alumna 2A4 sigue manteniendo protagonismo y la alumna 2A7 participa siempre aportando soluciones a las actividades –sin ánimo de protagonismo-. La alumna 2A6 parece no entender en algunas ocasiones lo que se trabaja y la profesora, en este sentido, se dirige bastante a ella para preguntarle sobre sus dudas. Por otro lado, el alumno 2A5 participa bastante –es repetidor-, parece tener conocimientos sobre las funciones. Sin embargo, la relación entre la profesora y los chicos al parecer ya se encontraba bastante deteriorada antes de la investigación. Durante ciertos momentos de la puesta en práctica de la de la UD se producen algunas escenas tensas entre la profesora y

los alumnos. El alumno 2A5 por su parte, en una entrevista realizada aparte, admite que el tema de las funciones es el que más le ha gustado durante el curso -por cómo estaba plantado-, pero que a medida que las relaciones entre la profesora y ellos van siendo peores, su interés vade cayendo.

Como conclusión general, teniendo en cuenta ambos grupos podría decirse que el hecho de que no haya diferencias sustanciales, es un dato positivo, en relación a otras investigaciones previas. Aunque la muestra es muy pequeña, por ser un estudio de caso, pero es lo que se observa.

En general la profesora del grupo 1A invita al alumnado a salir a la pizarra e ir corrigiendo los ejercicios y explicar las razones de sus decisiones; la profesora del grupo 2A decide corregir ella misma la mayoría de los ejercicios y son contadas las ocasiones en los que el alumnado sale a la pizarra (ver figura 7-49).

Mientras que la profesora del grupo 1A opta porque sea el alumnado quien decida cuál de las variables contextualizadas corresponde a cada variable matemática, la profesora del grupo 2A lo realiza ella misma y por lo tanto, el alumnado de este grupo, tiene menos oportunidades de reflexionar sobre este cometido.



1AB

1AA

2AA

Figura 7-48. Imágenes habituales en los grupo 1AA (estudiantes corrigiendo) y 2AA (profesora corrigiendo).

7.2.2.4 *El uso del euskera*

En la aplicación de la UDno se ha observa un mayor trabajo del lenguaje por parte ni de las profesoras ni del alumnado. Por lo tanto, el nivel de competencia lingüística sigue siendo bajo y abundan expresiones cotidianas como *hacia arriba*, *hacia abajo* o algunas

que han mezclado el euskera y el castellano (*en el mío se elkartua*, anexo 18, 090528; línea 66). Este nivel ya se ha presentado al analizar las tareas encomendadas en la entrevista.

7.2.2.5 *El contexto de aprendizaje*

Uno de los objetivos prioritarios de la UD es la es la utilización de contextos científicos para la construcción de conceptos matemáticos; sin embargo, como ya se ha indicado, un número importante de actividades (por ejemplo actividades 15, 17, 18, 20, 22, 29, 36, 48, 51, 56, 62, 64) no se aplican en el aula, y por otro lado, se introducen otras nuevas, contextualizadas en el grupo 1A y más académico-matemáticas en el grupo 2A.

Para la introducción de la unidad, dentro de la interpretación de gráficos, la profesora del grupo 1A incluye actividades de contextos cotidianos y cercanos (ver anexo 18, 1AA 090527; línea 14 y anexo 18, 1AA 090528); no obstante, tal como se ha expuesto, esta profesora no utiliza los contextos científicos propuestos cuando tiene que explicar la pendiente o la ordenada en el origen ni el concepto de función. Así pues, el contexto cotidiano (ir a patinar, coger un taxi o el precio de una academia) se emplea (ver anexo 18. 1A, 090520, anexo 18. 1A, 090528 y anexo 9) para la construcción del subconcepto variable -dentro de las representaciones tabla de valores y gráfica, no así en la expresión algebraica-, y para la comparación entre las funciones proporcional y afín.

En cuanto al contexto científico, parece que ha tratado evitarlo en la medida de lo posible, y muestra de ello podría haber sido no haber querido corregir la cuestión b de la actividad 71 (pág. 46 de la UD), que busca hallar la velocidad de la entrada y salida del agua de los depósitos -la pendiente de la función-. El alumnado insiste en querer corregirlo ya que lo tiene resuelto, pero ella rehusa hacerlo (ver anexo 18, 090603; línea 34).

La profesora del grupo 2A ha utiliza el contexto en menor número de ocasiones que su compañera, y cuando lo hace, no siempre indica las variables contextualizadas, ni en la tabla de valores. En otras ocasiones, cuando la profesora ha emplea contextos cotidianos para ejemplificar ideas, ha opta por colocar ella misma en la tabla de datos, las variables e indica cuál de ellas corresponde a la variable x y cuál a la variable y (anexo 9). También en dos actividades nuevas introducidas, proporciona al alumnado las variables contextualizadas y matemáticas ya identificadas - todo lo contrario a lo realizado por su homóloga, que busca expresamente que el alumnado reflexione sobre el tipo de variable a identificar-. Por otro lado, en general cuando introduce actividades insiste en el lenguaje propiamente matemático. Los máximos y mínimos en contextos -si existen-, los relaciona

con el cambio observable en el gráfico; no con el cambio de la relación entre las variables contextuales.

Esta falta de relación entre los subconceptos matemáticos y el contexto durante el aprendizaje, pudiera influir en que el alumnado no sea capaz de conectarlos. Así, por ejemplo en la actividad 71 (pág. 56 de la UD) se plantea la siguiente situación: *Dos depósitos de agua A y B funcionan de la siguiente manera: cuanto más se llene A más se vacía B como lo refleja la gráfica.* A pesar de que el alumnado del grupo 2A, indica la fórmula de la velocidad (s/t), muestra dificultad para contextualizarlo en el sentido de litros/ tiempo (ver anexo 18, 2AA, 090603; línea 35). Esto podría indicar que el cambio de una sola magnitud supone para el alumnado una dificultad añadida al concepto de velocidad tan habitualmente utilizado.

7.2.2.6 La evaluación

La profesora del grupo 1A además de realizar alguna actividad de coevaluación - planteada en la UD propuestas muy interesantes de trabajo cooperativo (ver anexo18, 1AA 090549; líneas 5-6 y anexo 18, 1AA 090520; línea 21), coevaluación (ver anexo18, 1AA 090520; líneas 1-8) y autoevaluación (ver anexo 18, 1AA 090520; línea 21). Para ello, ha compartido con sus estudiantes los siguientes criterios de evaluación: (1) ha realizado un modelo de situación adecuado, indicando además las variables descritas, (2) ha realizado la tabla de valores correctamente indicando las magnitudes y sus variables homólogas x e y, ha hallado la pendiente, (3) se ha representado gráficamente de modo correcto, (4) se ha hallado la expresión algebraica y (5) se ha realizado de forma clara, limpia y como ha estado pensada. Cada criterio de evaluación se califica con un máximo de 2 puntos (ver figura 7-49).

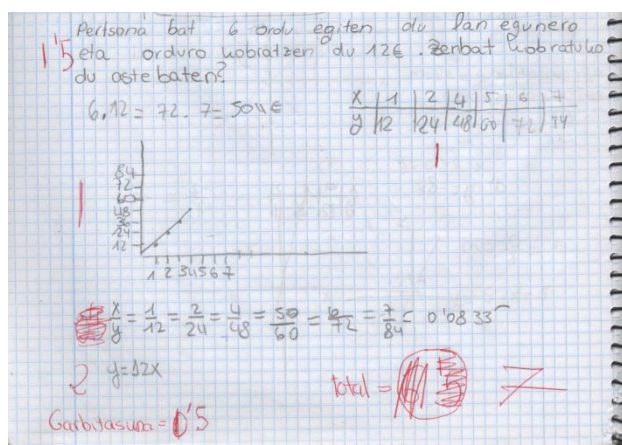


Figura 7-49. Tarea de coevaluación del alumnado del subgrupo 1AA.

La profesora del grupo 2A por su parte, no ha trabajado ninguna actividad de autoevaluación o coevaluación de las planteadas en la UD, ni tampoco ha propuesto alguna por su parte.

Estos datos podrían sugerir que el grupo 1A, aunque a nivel muy elemental, ha trabajado la autoevaluación y esto pudiera haber influido en la reflexión llevada a cabo en el contrato de autoevaluación, que parece haber sido más acorde con los resultados obtenidos - tanto en el examen como en la entrevista-. A modo de ejemplo, se indica el ítem b que se refiere a *transcribir entre distintos modos de representación (escrito, tabla, gráfico, algebraico)*. El alumnado del subgrupo 1AA manifiesta en un 12.5% no tener dificultad en dicha tarea, el 37.5% indica poca dificultad, el 37.5% bastante y el 12.5% dificultad alta; por contra, en el grupo 2AA, el 87.5% indica no tener dificultad y el 12.5% acusa poca dificultad. De los análisis de los exámenes como de las entrevistas, sin embargo, se concluye que el nivel de aprendizaje del grupo 1AA es superior al del grupo 2AA en las subcategorías de análisis relacionadas con este ítem b.

7.2.2.7 Análisis de las profesoras

En este apartado se trata de especificar con mayor detalle las características identificadas a lo largo de la aplicación de la UD respecto a cada profesora.

7.2.2.7.1 La profesora del grupo 1A

En este grupo se utilizan 16 sesiones para la puesta en práctica de la UD. De las cuales se graban y transcribieron 11, ya que la investigadora no tiene posibilidad, por cuestiones de horarios, de grabar el resto.

Esta profesora, al comienzo de la UD, concreta los modos de agrupamiento para trabajar las actividades; en cambio, no dedica tiempo a compartir los objetivos planteados en la UD.

Para explicar los distintos modos de representación de la función escoge una situación cercana al alumnado (matricularse), y dinamiza el grupo, para que sea el alumnado el que observe las ventajas de cada tipo de representación a la hora de obtener información. Posteriormente, sin haber trabajado la interpretación de algún gráfico, plantea la actividad de clasificación de gráficas -tal como se encuentra establecida en la UD-. La profesora ha dinamizado adecuadamente la tarea, que es novedosa para el alumnado. En general, las interpretaciones solicitadas necesitan de un enfoque local en lugar de global (ver anexo 18, 1AA 090430; líneas 68 y 91).

A continuación sea analiza por parte de la profesora el trabajo realizado en el aula en relación a las tareas de translación, predicción y clasificación.

7.2.2.7.1.1 *En las tareas de translación*

En este apartado se incluye el análisis de cómo se ha trabaja la traducción desde la descripción de la situación al gráfico y desde el gráfico a la expresión algebraica, la identificación de variables realizada en dichas traducciones, y el vocabulario utilizado.

a. Traducción desde la descripción de la situación a la representación gráfica

Han sido varios los momentos en los cuales la profesora anima a que el alumnado revise la adecuación entre la descripción realizada de la situación, siempre contextualizada, y el gráfico (ve figura 7-50). En este tipo de traducción, además, se impulsa la coevaluación entre el alumnado (ver anexo 18). Se pueden destacar los siguientes aspectos del proceso de enseñanza-aprendizaje aplicado:

- Para trabajar *la traducción desde la descripción de la situación al gráfico* se utilizan en varias ocasiones contextos cotidianos y cercanos al alumnado. Se plantea una situación nueva no prevista en la UD., ir desde casa al instituto de tres modos distintos: despacio, pausadamente y deprisa, o ir a la compra. El alumnado ha tenido que representar estas tres situaciones (ver anexo 18, 090504: líneas 41-51) o ir a la compra (ver anexo 18, 090506: líneas 1-8). Además la profesora plantea otra actividad nueva y original no incluida en la UD: cada persona debe pensar en cómo describir una situación acompañada de la tabla de datos correspondiente y, posteriormente por parejas, explicarla a una compañera o compañero que, una vez, mientras escucha la descripción, tiene que construir un gráfico que refleje la situación. Posteriormente (ver figura 7-50), ambos comprueban si el gráfico y los datos aportados en la tabla coinciden (ver anexo 18, 090504 líneas 6-25; líneas 41-51 y anexo 18, 05006 líneas 1- 18).

En esta tarea, desde una perspectiva cualitativa, se insiste en que se identifique la parte ascendente y descendente del gráfico con distintos colores (ver anexo 18, 1A 090504; líneas 25-26). Esta alusión a las partes ascendentes y descendentes del gráfico posteriormente ha sido identificado en la alumna 1A11** cuando dice (598-637) *“Entonces éste también está mal. No sé. Descendente. ¡Claro! Este es descendente por lo tanto minus y ésta ascendente”*. Parece por lo tanto, que al menos esta alumna ha ido interiorizando si el gráfico o función es ascendente o descendente (ver anexo 18, 1A

090527; líneas 6-7) y lo ha transferido a la tarea que ha considerado oportuna, que por otro lado, parece tener una tipología parecida a la realizada en el aula.



Figura 7-50. Estudiantes del grupo 1AA comprobando la coherencia entre la descripción de la situación y el gráfico (trabajo cooperativo, sesión 090504).

Por otra parte, no parece que en la práctica de aula insista en una reflexión en relación a las descripciones referidas a la trayectoria, tal como se propone en la primera actividad de la UD (ver anexo 18, 1AA 090430; línea 66). Así, cuando el alumno 1A13** indica que entre el tramo 2 y 3 “no se avanza”, la profesora le contesta que el tiempo si pero que la altura no cambia (ver anexo 18, 1AA 090430; línea 100). En ningún momento se impulsa la reflexión cuando el alumnado realiza una interpretación icónica del gráfico, hecho que ya se detectó en la primera actividad UD cuando los chicos y chicas hablan en sus argumentaciones de subidas y bajadas para clasificar los gráficos. Por tanto, no parece inverosímil que tanto en el examen como en las entrevistas, los estudiantes utilicen las mismas ideas y lenguaje al describir gráficos. Por ejemplo, en el examen el alumno 1A14*** indica que una parte del gráfico es constante porque “no cambia de altura, ni sube ni baja” (ver anexo 18, 1AA 090603; líneas 5-6 y 17-18).

El esquema de trabajo seguido en el aula a partir de las situaciones contextualizadas es el siguiente: a) tabla de valores, b) gráfico, c) expresiones algebraicas de las funciones d) hallar el punto de encuentro; y e) interpretación del punto de encuentro. Este procedimiento ha sido indicado por la alumna 1A9** durante la entrevista (ver anexo 18, 1A9; líneas 1544-1714). Por lo tanto, parece que ha habido una transferencia importante en cuenta a esquema de procedimiento seguido.

- En cuanto a *la identificación de las variables en la descripción del gráfico*, la profesora insiste con gran tenacidad en que la descripción de la situación tiene que ser coherente con el gráfico, y que por lo tanto, no basta con indicar en los ejes las variables x e y , sino que hace falta situar las variables de contexto para saber de qué se habla, todo ello coherente con la propuesta didáctica. Tanto en los ejes coordenados como en la tabla de valores se explicita la relación entre las variables x o y con respecto a las variables contextuales, entre paréntesis (ver anexo 18, 1AA 090511; líneas 10-12 y 17-19; anexo 18, 1AA 090513; línea 18 y anexo 18, 1AA 090520; líneas 20-21). Esto mismo ha sido realizado por el alumnado cuando han construido gráficos en el examen (ver figura 7-54). Por lo tanto, el alumnado habría transferido este aprendizaje al examen.

Sin embargo, en alguna ocasión, el estudiante indica que en los ejes tenemos los metros y los segundos, es decir las unidades, sin resaltar que son las variables altura y tiempo las que mantienen una relación y que sus valores se dan en dichas unidades.

También la profesora muestra tendencia a preguntar e indicar en la actividad analizada cuál es la variable dependiente y cuál la independiente; posibilita y dinamiza la discusión sobre si una variable es de un tipo u otro (ver anexo 18, 1AA 090511; líneas 10-12) y, cuando hay que aclarar cuál es la variable dependiente, lo razona (ver anexo 18, 1AA 090513; línea 18). El trabajo bastante sistemático por parte de la profesora con respecto a las variables, podría explicar el mejor resultado alcanzado por parte del alumnado de este grupo en las preguntas sobre solubilidad planteadas en la entrevista.

- En cuanto al *uso del lenguaje* la profesora admite que los chicos y chicas no estructuran frases completas, hecho muy acusado cuando exponen la regla de tres. Simplemente se articulan monosílabos o no se construyen las frases con todos los elementos necesarios “zentimetro bat luzera bat hogeitabost gerizpe daude” (ver anexo 18, 1AA 090513; líneas 6-7) y que, por lo tanto, no expliciten la relación entre las variables o que el nivel de la lengua sea una mezcla entre español y euskera “en el mío se elkartua” (ver anexo 18, 090528; línea 66), “¿da minus la n?” (ver anexo 18, 1AA 090603; líneas 36-37), “si se gelditua” (ver anexo 18, 1AA 090506; línea 27) etc. En general todas las frases comentadas corresponden a las mismas personas.

Además tampoco trabaja expresiones que indican la relación entre las variables, como “arabera” (“ez dugu lortzen gerizpearen luzera altueraren arabera”) (ver anexo 18, 1AA 090513; líneas 8-9). Ella misma a veces utiliza la palabra “arabera” y en otras

ocasiones “eta” “Makila baten luzera eta bere gerizpea” (ver anexo 18, 1AA 090513; líneas 52-63) y, por lo tanto, sólo informa de las dos variables sin incidir en la relación de dependencia entre ambas. Es decir, faltarían expresiones como “luzerarekiko makilaren gerizparen luzera” (la longitud de la sombra en función o con respecto a la longitud del palo) que en euskera estarían expresando la relación entre las variables. El lenguaje utilizado a veces tampoco es correcto; así por ejemplo cuando se ha indicado -en la descripción de un gráfico- que “los minutos van hacia delante y los metros van hacia abajo” (ver anexo 18, 1AA 090430; línea 140), o desde las ciencias cuando expresa “minutuak aurrera doala graduak ez dira aldatzen, horregatik grafikoa konstantea da” (los minutos van hacia delante pero los grados no cambian, por eso es constante). Desde las ciencias cabe indicar que no es que no cambien los grados, sino que se mantiene la misma temperatura (ver anexo 18, 1AA 090504; líneas 28-30). Todas estas expresiones indican que la competencia lingüística no se trabaja suficientemente y esta podría ser una de las razones que explicaran la escasa exposición argumental mostrada por la mayoría del alumnado durante la entrevista. Además el admitir este tipo de expresión podría reforzar una interpretación análoga a la icónica y por consiguiente no adecuada en contextos científicos.

La profesora utiliza una terminología específica (magnitud, variable independiente, variable dependiente y relación) que varía a medida que avanza la aplicación de la UD.

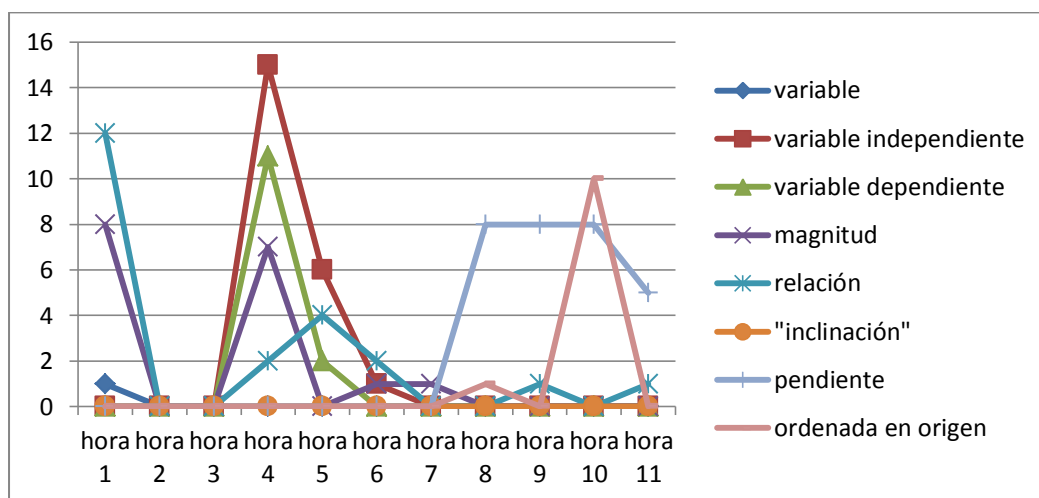


Figura 7-51. Terminología utilizada en la clase 1AA a lo largo de las sesiones. Las horas 2 y 3 se refieren a la tarea de traducción desde la descripción de la situación al gráfico.

Se observa como el primer día se insiste mucho en los términos magnitud y relación sin casi mencionar a la variable. Ese día es dedicado mayormente a la interpretación de gráfico en distintos contextos y por ello la profesora enfatiza el hecho de que debe haber una relación entre las magnitudes. Entre los días 2-3 cuando se trabaja la traducción desde la descripción de la situación al gráfico no se explicita el término relación, ni tampoco a las variables. El cuarto día la profesora da la definición de función “*Funtzioa: magnitudeen arteko menpekotasuna bat da*” (“La función es una relación de dependencia entre dos magnitudes”). Tras definir el concepto se pasa a identificar las variables independiente y dependiente en tres situaciones contextualizadas distintas. Ya al día siguiente se aprecia una evolución, y la insistencia de la profesora no es tan intensa en los conceptos del día anterior, se comienzan a trabajar los aspectos puramente matemáticos.

Aunque en la sesión 090520 (día 7) se realiza una actividad contextualizada muy interesante para comparar la función proporcional y afín –que se analiza con más detalle en la tarea de clasificación-, ya no se utilizan dichos términos, aunque si se haga mención al contexto y a que las variables x e y , tienen que estar relacionadas con aquellas (ver anexo 18).

Como conclusión, el vocabulario del aula refleja el tipo de actividad realizado y si este es contextualizado o no lo es. Los subconceptos asociados al concepto de función, como variable, destacan en aquellas explicaciones referidas a situaciones contextualizadas y desaparecen cuando el trabajo es de carácter más “matemático”.

Por otro lado, en este grupo el término *inclinación* en referencia a la pendiente no es utilizado, hecho éste que sin duda marca diferencias entre ambos grupos, porque a diferencia del alumnado del grupo 2A, las personas del 1A no hablan de inclinación en la entrevista al referirse a la pendiente.

La evolución mostrada podría explicar por qué se han utilizado los conceptos matemáticos al escoger la ecuación relacionada con el gráfico en la situación de la pelota-, y no cuando han tenido que escoger la gráfica que describe la situación de la pelota. Así mismo, de nuevo, los argumentos matemáticos aparecen en las explicaciones sobre cómo ha de hallarse el punto de encuentro en la situación de la solubilidad. Ambos momentos son análogos a los utilizados en el aula, según se ha descrito y por lo tanto podría decirse que el alumnado ha transferido el aprendizaje.

En general, ni por parte de la profesora ni por parte del alumnado se utiliza un vocabulario matemático, sino más bien cercano al cotidiano. Este hecho también podría explicar que no se haya identificado un uso del vocabulario específico, por parte de la mayoría de los estudiantes cuando se les ha solicitado la traducción desde las distintas situaciones a los gráficos correspondientes en las entrevistas. Sin embargo, algunas personas han utilizado términos matemáticos cuando se les ha preguntado por la variación de la solubilidad, lo que se interpretaría como algo muy positivo desde el punto de vista de la transferencia, ya que indicaría una transferencia lejana.

b. Traducción desde la representación gráfica a la representación algebraica

La traducción desde la representación gráfica a la expresión algebraica se caracteriza por dos hechos distintos en la translación: a) el reconocimiento entre el gráfico y la expresión algebraica correspondiente y b) la construcción de la segunda representación a partir de la primera.

-El *reconocimiento entre el gráfico y expresión algebraica* es realizado mayoritariamente por el alumnado, si bien siempre se observa la ayuda de la profesora. Es a partir del día 5, a partir del ejercicio 43 (pág. 44 de la UD) cuando se comienza con el reconocimiento de las relaciones entre la representación gráfica y la expresión algebraica. La terminología que hace alusión en cierto modo al contexto (variables y su relación) comienza a dejarse de utilizar (ver figura 7-52).

Son varias las ocasiones en las cuales se insiste en la correspondencia en cuanto a la inclinación de la recta y al signo de la pendiente (ver anexo 18, 1AA 090527; líneas 20-21; anexo 18, 090430, líneas 102-104) al indicar *“beherakorra dela eta eta malda negatiboa”* (es descendente y tiene la pendiente negativa). Estos datos son acordes con los identificados durante la entrevista cuando se ha trabajado la coherencia entre las representaciones gráfica y algebraica., donde en las argumentaciones expuestas se insiste en expresiones trabajadas en el aula Así por ejemplo la alumna 1A1*** en el reconocimiento llevado a cabo dice (573-578) *“Porque esta es la pendiente, si va hacia arriba es positiva y sale del punto de intersección de las coordenadas, no tienen n y ésta n tiene que ser mayor a 0 porque no empieza por el cero y luego la pendiente es descendente; entonces, tiene que ser negativo”*. Por lo tanto, el nivel de transferencia respecto al trabajo realizado ha sido elevado.

-La *construcción de la expresión algebraica* comienza a trabajarse en profundidad a partir del día 6 (anexo 18, 1AA 090513), y la utilización de la terminología alcanza mínimos que van manteniéndose o disminuyendo durante las sesiones posteriores (ver figura 7-51).

En el aula, han sido siempre las variables matemáticas x e y las utilizadas, no las contextualizadas, a pesar de que en el gráfico o en la tabla se recojan las propias del contexto. Así por ejemplo, cuando han tenido que hallar la pendiente en la actividad 39, pág. 41 de la UD –sobre la sombra que produce un palo-, en un principio una alumna no sitúa las variables contextuales (foto1) y es corregida por la profesora preguntándole a qué se refieren los números. Posteriormente, se indican variables de contexto en la tabla de datos y en el gráfico (foto 2); pero, finalmente se observa que la expresión algebraica no recoge las variables contextuales, sino x e y (foto3).

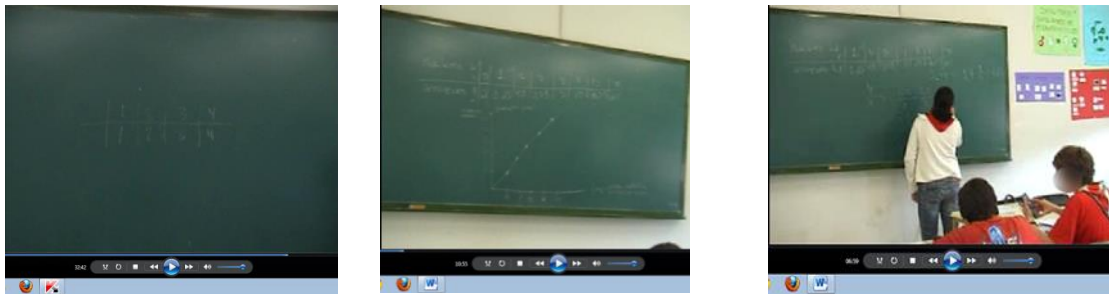


Figura 7-52. Imagen correspondiente al video 1AA 090513. Utilización de variables contextuales en distintas representaciones (anexo 18).

Este cambio en las variables también se ha observado en los exámenes (ver figura 7-53).:

2.

a)

$$y = 0,5x + 25$$

x	0	1	8	eguntatzen laguntzen
y	25	25,5	24	irabazirikoa dirua biltean

b)

185 - 25 € bilteko = 160 € eguntzen dirua biltean.

160 : 0,5 = 320 ala diruak dirua biltean 185 € irabazirikoa ala biltean.

c)

$$y = 0,5x + 25$$

$$y = 0,5 \cdot 45 + 25$$

$$y = 47,5 \text{ € irabazirikoa du } 45 \text{ alekua biltean.}$$

Figura 7-53. Examen del alumno 1A14 (corregido por la profesora).

Aunque la profesora ha insistido en la relación covariacional de las variables en las dos primeras representaciones, preguntando a la alumna “*baina hori zer den*” (¿...pero eso qué es?), no actuado del mismo modo cuando en la construcción de la ecuación.

En la elección de la ecuación en la situación de la pelota, el alumnado de este grupo ha escogido mayoritariamente variables de contexto. Si se compara este hecho con el trabajo realizado en el aula –argumentado en el párrafo anterior–, podría decirse que el alumnado ha realizado una transferencia lejana ya que ha sido capaz de pasar del ámbito matemático al contextual. Además el alumno 1A13** escoge ecuaciones tanto con variables contextuales como matemáticas, lo cual indicaría todavía un mayor grado de transferencia lejana.

A partir de la sesión 090527 (día 8) la construcción de la expresión algebraica se trabaja haciendo alusión a puntos, etc., con insistencia en el signo de la pendiente, el dominio de la función (ver anexo 18, 090528, líneas 31), los cálculos matemáticos, etc. Se aprecian problemas para despejar la incógnita en la ecuación, por ejemplo en la alumna 1A9**, aunque es una de las personas que halla la ecuación de la función en la situación relacionada con la solubilidad. Esta dificultad ha sido identificada en la mayoría del alumnado en la situación de solubilidad. Aunque en la sesión 090528 (día 9) se realiza una actividad contextualizada (comparar dos academias) la profesora indica que el objetivo es obtener la expresión algebraica de cada una de las academias “*Helburua da lortzea akademia bakoitzaren adierazpen algebraikoa*”, es decir, el objetivo no es contextual.

El alumnado del grupo 1A ha mostrado a lo largo de la investigación una tendencia seguidora de las pautas marcadas por la profesora en el procedimiento a seguir en los problemas: descripción de la situación, tabla de valores (con variables de contexto y variables matemáticas), gráfico (con variables de contexto y variables matemáticas) y expresión algebraica con variables matemáticas. También, se ha trabajado otra dirección de procedimiento –en menor medida–, analizada en el apartado siguiente. En ambos procedimientos en las expresiones algebraicas no se han considerado las variables de contexto. Tal vez este hecho haya influenciado para que este alumnado de este grupo haya escogido en mayor medida que el otro grupo, variables de matemáticas al escoger la ecuación en la situación de la pelota, durante la entrevista.

7.2.2.7.1.2 En las tareas de predicción

Las tareas de predicción llevadas a cabo en el aula han tenido como objetivo: a) inferencia del punto de encuentro y b) la construcción del punto de encuentro. No obstante, también se analiza la actividad contextualizada de “la sombra producida por un árbol” por su carácter singular en cuanto a procedimiento utilizado se refiere.

-La *inferencia del punto de encuentro* ha estado supeditada a la dirección marcada por la profesora. Ya desde un inicio (ver anexo 18, 1AA 090528; a partir de la línea 56) cuando se ha trabajado en una situación contextualizada –comparar dos academias, la primera con un coste de 30€ de matrícula más 90€ mensuales y la segunda con un coste de 15€ de matrícula y 95€ mensuales-, la profesora ha solicitado en primer lugar, hallar las expresiones algebraicas para cada función, posteriormente representar los gráficos y por último ha preguntado si se juntan los gráficos. No ha dinamizado al alumnado en la reflexión acerca de qué era necesario hallar para comparar las dos academias, sino que lo ha dirigido hacia un punto en concreto. Es ella la que indica al alumnado que vaya señalando en cada momento cuál es la academia que más conviene escoger. En general este ha sido el modo en el que se ha llevado a cabo la inferencia del punto de encuentro en las actividades que lo han requerido. Durante el trabajo en el aula, una vez hallado el punto de encuentro, la profesora pregunta focalizando localmente momentos anteriores y posteriores al punto de encuentro y en dicho punto.

Sin embargo, en la situación de solubilidad, en primer lugar se les ha preguntado si en algún momento dos sustancias tendrían la misma solubilidad y en respuesta a esta pregunta es cuando el estudiante hace una reflexión sobre lo que sucede y la importancia del punto de encuentro. Por lo tanto, podría decirse que el proceso exigido en esta ocasión es inverso al trabajado en el aula. No obstante, todo el alumnado de este grupo ha inferido el punto de encuentro, algo muy positivo, sin duda. Por lo tanto habría habido transferencia lejana también en esta tarea.

En general, se han realizado pocas actividades sobre el punto de encuentro; no obstante, las trabajadas lo han sido en situaciones contextualizadas.

- La *construcción para hallar el punto de encuentro* ha estado bastante dirigida por la profesora, es quien dirige detalladamente el logro de dicho punto. Es ella quien indica cómo hallarlo analíticamente y para ello, insiste en el método de igualdad como

procedimiento para resolver el sistema planteado. Tal vez por el escaso tiempo disponible, el alumnado no consigue una destreza suficiente para el logro de dicho punto, algo que se mantiene tanto en el examen como en la entrevista.

Además, no se insiste suficientemente en la construcción de una escala adecuada para la construcción gráfica, y consecuentemente este aprendizaje no ha quedado asentado. Ya en los exámenes se ha visto reflejado esta debilidad en el aprendizaje (por ejemplo en el alumno 1A13**). La dificultad en la escala lleva a que el alumnado –cuyo base de orientación para hallar el punto de encuentro se encuentra en el gráfico- no pueda hallar el punto de encuentro. Además, las destrezas matemáticas (despeje de incógnita, hallar pendiente, etc.) tampoco han sido suficientemente adquiridas (alumno 1A13** y alumnas 1A9**, 1A11**, 1A16*).

-La actividad denominada *La sombra producida por el árbol* (actividad 39, pág. 41) ha resultado singular, ya que el alumnado para predecir la misma utilizaba la regla de tres en lugar del procedimiento algebraico y la profesora además, lo ha dado por válido. Debido al carácter especial de este hecho han sido comparados todos los exámenes de ambos grupos (subgrupos elegidos más el resto del alumnado) y se ha identificado un caso de utilización de regla de tres en el grupo 1A frente a 6 del grupo 2A (también se ha utilizado este método para realizar la misma actividad). En el planteamiento de dicho procedimiento se aprecian unidades y no magnitudes y por último al despejar la incógnita no se registra la variable contextual.

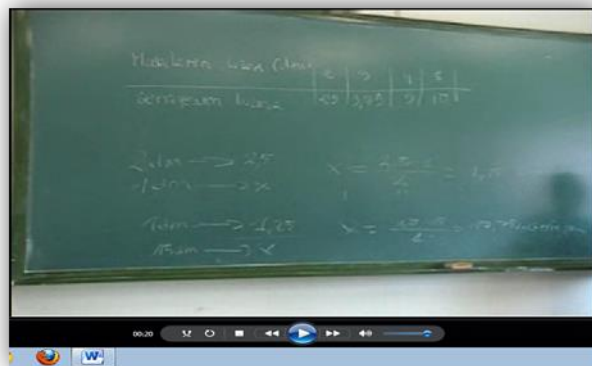


Figura 7-54. Utilización de la regla de tres para hallar la sombra del árbol (imagen correspondiente al video 1AA 090513, día 6) (anexo, 18.1)

7.2.2.7.1.3 En tareas de clasificación

Las tareas de clasificación aglutinan todas las actividades que han tenido por objetivo la estructuración del *modelo función* como objeto matemático y la identificación de distintos tipos de funciones.

El día 4, la profesora una vez recordados los tipos de representación que se han trabajado hasta ese momento, da la definición de función indicando que es una relación de dependencia entre dos magnitudes; para ello pregunta al alumnado qué entienden por dependencia (ver anexo 18, 1AA 090507, a partir de la línea 4). Insiste en esta *relación de dependencia*, entre la magnitud independiente y la dependiente, y que además, a cada valor de la magnitud independiente le *corresponde* un valor de la magnitud dependiente. Este sentido ha sido reflejado por tres alumnos durante la entrevista (1A1***, 1A13** y 1A14***). A modo de ejemplo se expone al argumentación de la alumna cuando dice (645-646) *“Yo creo que no, porque puedes poner por ejemplo kilogramos y euros y... (653-654) Por ejemplo compras algo y depende cuanto pesen tendrán un precio”*. El uso del término *“depende”* no se ha identificado en el alumnado del grupo 2AA. Posteriormente la profesora indica cómo se representa esta relación. Esta definición no ha englobado ningún contexto trabajado hasta esos momentos; por lo tanto, si bien se habla de variables independiente y dependiente, no se construye el concepto de función dentro de un contexto. A partir de ese momento, al realizar las actividades, la profesora solicita que sean identificadas las variables independiente y dependiente, las unidades, la tabla de valores y el gráfico (anexo 18, 1AA 090507, líneas 39-52) y además, cuando es necesario, la comparación entre los distintos tipos de representación (ejercicio 41, pág. 42 de la UD).

- Las *definiciones de la pendiente y la ordenada en el origen* trasladan al alumnado desde su carácter abstracto matemático, aunque englobadas en una actividad contextualizada (ver anexo 18, 1AA 090511; líneas 20-21, anexo 18, 1AA 090527; líneas 20-21). No obstante en alguna ocasión (ver anexo 18, 1AA 090513) también hay referencia al contexto cuando se halla el coeficiente que relaciona la altura del árbol y la sombra producida (ver anexo 18, 1AA 090513, líneas 18-33.). Sin embargo, al parecer el alcance de este trabajo se ha visto reflejado en las entrevistas ya que en el 62,5% del alumnado parece intuir un razonamiento covariacional de razón promedio. Un ejemplo destacado ha sido el indicado por la alumna 1A1*** cuando se le pregunta por un ejemplo relacionado con la pendiente (710-713) *“Pues en cuanto tiempo se tarda; si tardas más la pendiente es*

más pequeña, si el movimiento es más rápido la pendiente es más grande”.

-Los tipos de *funciones proporcional* y *afín* se trabajan dentro de situaciones cotidianas (se incluye dentro de las actividades nuevas planteadas por la profesora, ver anexo 9). Para ello, la profesora ha planteado una situación, ir a patinar. El alumnado tiene que comparar dos posibilidades distintas; en la primera, sólo es necesario pagar por cada hora utilizada en patinar; en la segunda, se paga un precio inicial –como entrada-, y el coste por hora es menor. En la figura 7-56, se muestra dicha tarea.

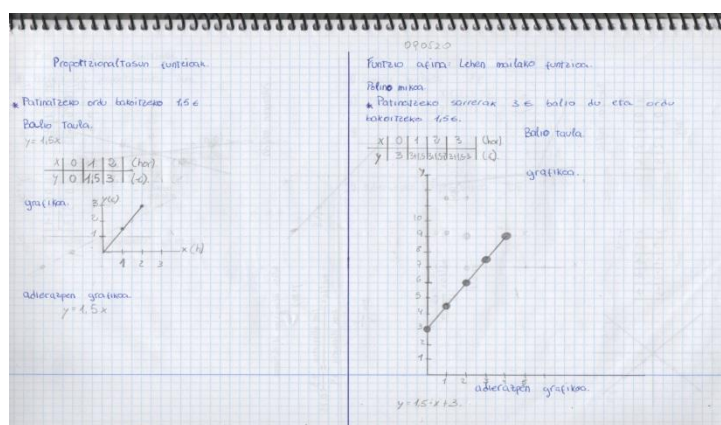


Figura 7-55. Trabajo comparativo de la función proporcional y afín del grupo 1AA

7.2.2.7.2 La profesora del grupo 2A

Esta profesora señala tanto los objetivos de la UD como la de los distintos agrupamientos propuestos a través de la lectura de los mismos.

Desde un inicio no ha conseguido dinamizar las tareas en grupo, en parte porque el grupo tampoco ha mostrado gran interés ni por la tarea en grupo, ni por las propuestas. Por ello, tiene que dirigir mucho los agrupamientos cuando se lleva a cabo la interpretación de gráficos –primera actividad-, así como durante la realización de las clasificaciones propuestas por cada grupo. Ella incluye ha incluido gráficos estadísticos en los ya propuestos y la clasificación de todos ellos ha resultado complicada para el alumnado.

En cuanto a la primera actividad propuesta, al igual que lo hiciera su homóloga, invita al alumnado a clasificar las gráficas traídas al aula; tarea sin una previa interpretación de ninguna de las gráficas. No ha llegado a explicitar la ventaja del concepto función –igual que la profesora del grupo 1A- frente a otra serie de conceptos matemáticos conocidos por el alumnado.

Muestra una atención excesiva hacia una alumna en particular (ver anexo 18, 2AA 090513; línea 28, anexo 18, 2AA 090515; línea 45). Sin embargo, parece que no es consciente de la dificultad de una alumna -muestra deficiencia auditiva- al dar las explicaciones, ya que su mirada en general no va dirigida a ella durante las explicaciones.

7.2.2.7.2.1 *En tareas de translación*

Al igual que durante el análisis del grupo 1A, se concretan las cuestiones referentes a a) traducción desde la descripción de la situación a la representación gráfica y b) la traducción desde la representación gráfica a la representación algebraica.

i. Traducción desde la descripción de la situación a la representación gráfica

En este apartado se tienen en cuenta distintos aspectos que ayudarán a entender lo mostrado posteriormente en el examen y entrevista.

-Para introducir *la traducción desde la descripción de la situación al gráfico* u otro tipo de representaciones la profesora lleva a cabo la lectura de lo plasmado en la UD y no plantea situaciones contextualizadas cercanas, tal como lo ha realizado la profesora del grupo 1A. Sobre los gráficos, la profesora explica que *se trata de un conjunto de puntos que si se puede se unen* (ver anexo 18, 2AA 090512 líneas 46-47), es decir, la explicación de la traducción desde una situación cualquiera al gráfico, no es tan elaborada como la realizado por su homóloga. Se diría que no se ha empleado suficiente tiempo analizar cómo se produce este cambio de representación- tarea muy complicada, tal como se ha inferido en los exámenes y entrevistas-.

Dentro del gráfico, los enfoques que solicita al alumnado, en general se caracterizan por ser sobre todo a nivel local o a lo sumo por partes (ver anexo 18, 2AA 090506; líneas 40-57). Por ejemplo, cuando se ha trabajado el ejercicio de la ducha (actividad 3 de la UD) la terminología utilizada es coloquial y el enfoque bastante local (anexo 18, 2AA 090506, líneas 34-57). No obstante, va completando-buscando coherencia- la descripción del gráfico a la historia propuesta por cada estudiante. La profesora es la que pregunta y responde en general.

En el enfoque local, la referencia a los máximos y mínimos se realiza respecto al cambio en las partes ascendente y descendente del gráfico (ver anexo 18, 2AA 090512; línea 87), de minus y plus (ver anexo 18, 2AA 0905199; líneas 33-34), pero sin una

interpretación de la relación existente entre las variables representadas, y tampoco se utiliza ningún contexto para ello. Además, la profesora indica claramente que son las cuestiones de máximo, mínimo, ascendente las que hay que comentar al describir un gráfico; no menciona en esta lista, la interpretación global del gráfico, ni la relación entre las variables (ver anexo 18, 2AA 090512; líneas 93-94 y anexo 18, 2AA 0905139; línea 13).

El excesivo enfoque local, tal vez sea una explicación de por qué este alumnado ha obtenido peores resultados en la segunda pregunta de la situación de la solubilidad, ya que para responder adecuadamente son necesarios ambos tipos de enfoque, local y global.

El enfoque global va dirigido a resaltar si se trata de un gráfico ascendente o descendente, casi ya desde un inicio. Este tipo de argumentación ya ha sido registrada en mayor medida por este grupo durante la entrevista (2A5**, 2A6** y 2A15**); por lo tanto, estas personas transfieren este conocimiento.

En alguna ocasión entre las cuestiones importantes a destacar en la interpretación del gráfico, la profesora indica en primer lugar los números, luego las variables. En su exposición, vuelve a remarcar la importancia de los números, para saber lo que da, aunque posteriormente vuelva a incidir en la importancia de las variables (ver anexo 18, 2AA 090512, líneas 94-99 y 115-119). Analizando esta secuencia, podría suponerse que los términos variable o magnitudes son de importancia secundaria.

Esta profesora plantea dos actividades nuevas para trabajar la traducción desde la descripción de la situación hacia la representación gráfica; para ello, primero solicita rellenar la tabla de valores –en ella se encuentran definidas tanto las variables contextuales como las y variables matemáticas-. Este procedimiento no parece ayudar a una reflexión sobre cuál de variables es la independiente y cuál de dependiente por parte del alumnado.

Han sido contadas las ocasiones en las que se sale del guion de las propuestas presentadas en la UD y cuando lo hace, es para trabajar a nivel matemático las definiciones de función, etc., o para plantear actividades puramente matemáticas. Así a excepción de algún caso puntual (por ejemplo la actividad 3 de la UD) no ha explicita la importancia de la coherencia que debe existir entre la descripción de la situación realizada y la representación escogida.

Por otro lado, es la profesora la que en general, da las respuestas a la preguntas que va realizando -actitud ya comentada en el apartado dedicado al análisis del estilo didáctico- (ver anexo 18, 2AA 090506; líneas 57, 59-60 y 64-65).

- En cuanto a *la identificación de las variables en la descripción del gráfico* puede decirse que el trabajo realizado ha sido escaso. Muestra de ello, ha sido que cuando una alumna indica los minutos como variable dependiente y no como independiente -como es lo correcto-, lo ha dado por bueno (ver anexo 18, 2AA 090519; líneas 53-54). También, en otra actividad cuando el alumnado identifica los litros en lugar del tiempo como variable independiente (anexo 18,1 2AA 090519, líneas 45-46) tampoco se discute.. Estos hechos, que sin un contexto podrían incluso admitirse desde el área de las matemáticas, tienen relevancia en el ámbito científico donde la influencia de una variable sobre otra es prioritaria en el análisis de los fenómenos. Por todo ello, podría decirse, que no ha habido insistencia para la reflexión sobre el subconcepto variable. También ha sido significativo que cuando la profesora indica que las funciones se observan en los experimentos, hable de puntos en lugar de referirse a variables. Ello podría interpretarse como si para la profesora, lo prioritario fueran las correspondencias punto a punto, y no la relación entre las variables. Dentro de esta interpretación, por lo tanto, no sería necesario aclarar cuál es la variable independiente y la dependiente (ver anexo 18, 2AA 090519; líneas 53-54).

En sus referencias utiliza la mayor parte de las veces las variables x e y . Esta falta de reflexión en torno a las variables podría explicar parte de lo sucedido en la entrevista; aunque este grupo ha identificado algo mejor una de las variables en el contexto físico – velocidad-, la identificación de variables en la situación de la solubilidad ha presentado una dificultad importante para varias personas del grupo. En cambio, todo el alumnado del grupo 1A ha identificado a ambas variables correctamente en el contexto de química.

A la hora de definir la función utiliza los términos *variable inicial* y *variable final*; a continuación, incluye las correspondencias a las variables x e y , y , en paréntesis sitúa los términos variables independiente y dependiente (ver anexo 18, 2AA 090512; líneas 61-64). Por ello, en esta ocasión, podría decirse que muestra mayor nivel de correspondencia entre los tipos de variables al realizado por su compañera (grupo 1A), que indica los términos independiente y dependiente relacionados mediante relación de dependencia (ver anexo 18, 1AA 090507, líneas 4-13).

- En cuanto al *uso del lenguaje*, puede decirse que el nivel de expresión lingüístico de esta profesora es algo más bajo que el de su homóloga. En bastantes ocasiones no termina las frases (ver anexo 18, 2AA 090512; línea 28). Además, sus frases no incluyen partículas

como *arabera* (a medida, respecto) o por ejemplo “*luzerarekiko makilaren gerizparen luzera*” (la longitud de la sombra del palo respecto a la longitud del palo).

Muestra gran permisividad cuando el alumnado se dirige a ella en castellano, bien a la hora de preguntar o de responder (ver anexo 18, 2AA 090505; líneas 20-21, anexo 18, 2AA 090505; líneas 51-52 y anexo 18, 2AA 090512; líneas 44-45). Este hecho sin bien también ha sido detectado en alguna ocasión en el grupo anterior, en este grupo se da muy frecuentemente.. En coherencia con esto, tampoco le da importancia a que el alumnado no estructure frases cuando da alguna explicación.

En cuanto a la terminología se exponen en la figura 7-56, los resultados obtenidos.

Esta profesora utiliza los términos variable, x e y . Además también habla de *abscisa* y *ordenada* –no considerados en la figura ya que no son significativos para la investigación-. En esta clase, sobre todo, la profesora alude al término *variable* el día 4; sin embargo, solamente en una ocasión se utiliza el término *relación* en dicho día. Tal como ya se ha comentado, la alusión a la relación entre las variables no se ha identificado durante la entrevista en el alumnado de este grupo.. Su argumentación se dirige a indicar la posición de variables en los ejes. Esta profesora al igual que su homóloga deja de utilizar términos de carácter dinámico a medida que avanza la UDa favor del lenguaje matemático abstracto. Ello podría interpretarse como que ambas no asocian a partir de un momento dado las variables con los contextos.

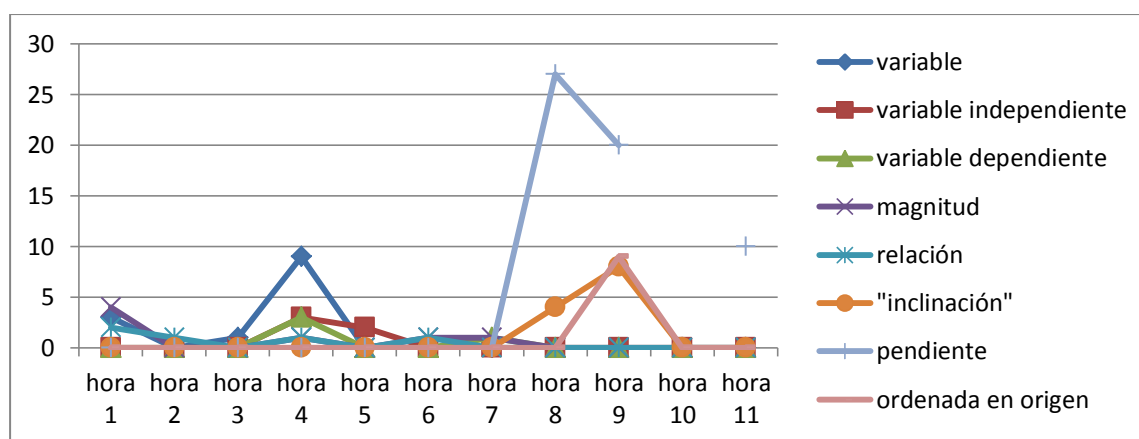


Figura 7-56. Terminología utilizada en la clase 2AA a lo largo de las sesiones (día 10, a partir del minuto 7 la grabación se ha estropeado).

Por otra parte, esta profesora, en contraposición a su compañera, muestra en general lenguaje de carácter estático. Sin embargo sus argumentaciones entre las variables

responden a una relación de correspondencia mayor que el de su compañera. Es este sentido, podría decirse que aunque ambas parecen poseer un modelo de función algo distinto, relación de dependencia por parte de la profesora del grupo 1A y relación de correspondencia por parte de la profesora del grupo 2A (observar el término *relación* en las figuras 52 y 57). Esto podría explicar por qué cuatro personas del grupo 1A frente a dos del grupo 2A manifiestan una imagen de concepto la imagen de concepto basado en la *dependencia* y por el contra, la imagen de concepto basada en una *regla* ha sido superior en el grupo 2A (ver tabla 7-15). En este sentido, podría decirse que el alumnado trata de transferir la imagen trabajada en el aula, sin llegar a conseguir el nivel de *correspondencia* (la alumna 2A7** tal vez se encuentre en ese límite). Como puede apreciarse la imagen de concepto de las profesoras parece influenciar en la imagen que el alumnado interioriza. Por lo tanto, podría decirse que ha habido un tipo de imagen de función transferido por parte del alumnado en la entrevista.

Otro de los términos destacados es el de *inclinación* asociada al subconcepto pendiente. Tal como puede observarse los días 8 y 9 son dedicados a este concepto y es cuando dicho vocablo se explicita. Este hecho ha sido muy relevante durante la entrevista ya que 62.5% del alumnado de este grupo define la pendiente en referencia a este término –inclinación de la recta, inclinación del gráfico-. Por ello, podría decirse que ha habido transferencia sobre el concepto de pendiente trabajado en el aula.

ii. Traducción desde la representación gráfica a la representación algebraica

Al igual que en el análisis del grupo 1A se analizan a continuación las cuestiones de: a) coherencia entre las representaciones gráfica y algebraica y la expresión algebraica y posteriormente la construcción de la representación algebraica.

-La *coherencia entre las representaciones gráfica y algebraica* ha sido llevada a cabo por la profesora. En dicha tarea, la utilización de variables de contexto es escasa. A pesar de que al hallar la pendiente la profesora utiliza variables de contexto ($v=3\text{km}/0,5\text{seg}=6\text{km}/\text{seg}.$), al construir la expresión algebraica pasa a las variables x , y ($y=6x$) (ver anexo 18, 2AA 090520; líneas 38-50). Siempre es la profesora la que va indicando cuáles son los tipos de variables, incluso en la actividad posterior al examen, cuando explicita que los minutos son x y los litros son y -. Por ello, ha sorprendido que el alumnado de este grupo escoja escogido en mayor medida que el alumnado del grupo 1A

variables de contexto en la situación de la pelota -en ambas aulas en la expresión algebraica se utilizan variables x e y -. Una de las explicaciones pudiera ser que los estudiantes del grupo 1A que escoge variables matemáticas –a excepción del alumno 1A14***-, muestra estilos similares de aprendizaje -basan su aprendizaje en el esquema seguido en el aula-, por lo pudieran haber estado influenciad en gran medida por la rutina de aula (en el aula las ecuaciones son definidas con variables x e y). Han sido chicas quienes lo han realizado.

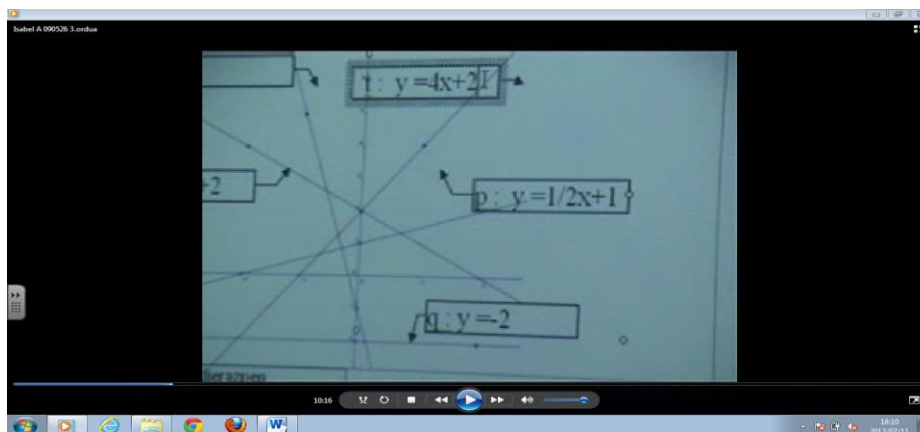


Figura 7-57. Tarea dirigida a la coherencia entre las representaciones gráfica y algebraica en el grupo 2AA (sesión 090526).

La imagen de *pendiente* que trabaja la profesora corresponde al cambio en la inclinación del gráfico, la pendiente mide la inclinación de la recta; si es mayor a cero la gráfica es ascendente y si es menor a cero descendente. Sobre esta idea, cuando se trabaja el ejercicio 49 (pág. 46 de la UD) que plantea si la velocidad del sonido al atravesar distintos materiales es la misma, la respuesta dada es que no por *la inclinación de la recta*; no hay referencia a la relación entre las variables. Esta insistencia explicaría en gran medida por qué la gran mayoría del alumnado cuando tiene que escoger el gráfico en la situación de la pelota o se le pregunta por la pendiente, evoca el vocabulario matemático utilizado en situaciones parecidas en el aula –inclinación-(anexo 18, 2AA 0905119, 64-74; anexo 18, 2AA 090520 l-líneas 8-29); no sucede así en el grupo 1A. Estos datos, podría indicar transferencia en la entrevista por parte del alumnado del grupo 2A.

En la entrevista el alumnado de este grupo indica destaca mayoritariamente la pendiente como la inclinación de la recta, función, gráfica. De nuevo, puede afirmarse que se da una transferencia elevada en cuanto a la pendiente como inclinación, se refiere. Sin

embargo, relacionado con este hecho, su utilización en términos de relación covariacional es menor al mostrado por el grupo 1A.

El procedimiento para hallar la pendiente se realiza desde un punto de vista abstracto.

La *ordenada en el origen* también tiene referencia geométrica, la altura que alcanza la recta en la ordenada OY, *zein alturatan ebakitzen duen OY ardatza* (anexo 18, 2AA 090526, línea 9).

Más adelante se trabaja con gráficos distintos en los cuales la ordenada en el origen es positiva y la pendiente negativa, así como actividades en las cuales hay que reconocer la expresión algebraica correspondiente a cada gráfica –actividad donde el alumnado muestra bastantes dificultades-. Este tipo de actividad se repite en más de una ocasión en el aula.

La gran mayoría del alumnado de este grupo, a diferencia del homólogo, utiliza tanto la argumentación de tipo geométrico de la pendiente como de la ordenada en el origen en referencia a la altura del gráfico en el eje de ordenada. Por lo tanto, la transferencia tanto de la pendiente como de la ordenada en el origen del alumnado de este grupo es acorde con aquella adquirida durante el aprendizaje de dichos subconceptos.

-La *construcción de la expresión algebraica* no ha sido trabajada en el contexto. La profesora realiza la mayor parte de las construcciones (ver por ejemplo anexo 18, 2AA 090519). En esta tarea, al igual que en el otro grupo, son las variables x e y las únicas que forman parte de la ecuación. No obstante el alumnado de este grupo escoge variables de contexto durante la situación de la pelota en mayor medida al grupo 1A, algo revelador difícilmente explicable. Por lo tanto, podría decirse que el nivel de transferencia lejana en cuanto a la elección de variables de contexto en la ecuación ha sido mayor en este grupo. Además también han sido dos las personas frente a una del grupo 1A, las que escogen ambos tipos de variables, con una argumentación adecuada por parte de la alumna 2A7*** (520) “*Sí, ésta y ésta son iguales. (527-529) Porque la pendiente es positiva y no pasa por el cero, por lo tanto no tiene n . Porque son iguales. Esto es y . O sea v es y y t es x ”.* Esto supone un nivel mayor de transferencia lejana ya que coordina ambos ámbitos de actuación –contextual y matemático–.

A lo largo de la UD, la profesora insiste en que sólo dos puntos son suficientes para construir la expresión algebraica. Como ejemplo se muestra la actividad 70 (pág. 55 de la

UD). En este problema se presenta la evolución del alcohol del agua respecto al tiempo. En la construcción de la expresión algebraica acorde a cada función, la profesora sitúa sólo dos puntos (observar tabla de valores y gráfico). La elección de solo dos puntos también ha sido detectada en el examen (4 chicas del subgrupo 2AA-dos de ellas no son entrevistadas-lo hacen así en la pregunta 3b). Por otra parte, en la tabla de valores se indican variables x e y , no contextuales. Destaca por otro lado, que en la tabla de valores no se indiquen las variables contextuales.

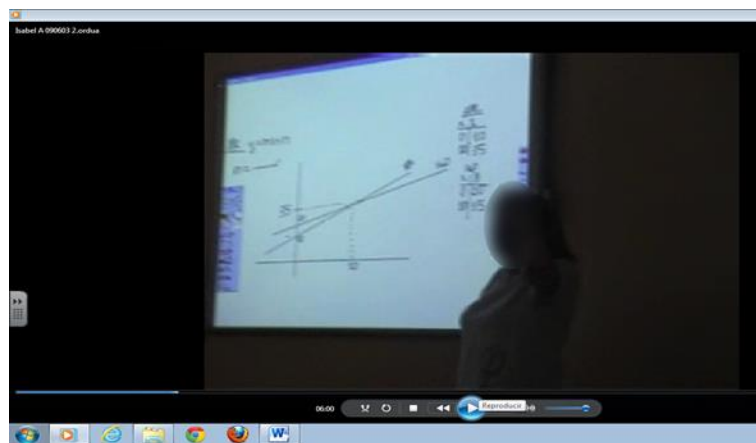


Figura 7-58. Distintas representaciones de las funciones del ejercicio 70 en el grupo 2AA (sesión 090603).

Al igual que en el grupo anterior, se detecta dificultad a la hora de despejar la incógnita en una ecuación de primer grado (ver anexo 18, 2AA 090515, línea 44-47). Las dificultades en la construcción de la ecuación son muy destacadas en este grupo tanto en los exámenes como en las entrevistas.

7.2.2.7.2.2 En tarea de predicción

Las tareas de predicción tienen recogen los siguiente puntos: a) inferencia del punto de encuentro y b) la construcción del punto de encuentro. No obstante, también se analiza la actividad contextualizada de “la sombra producida por un árbol” por su carácter singular en cuanto a procedimiento utilizado se refiere.

- La *inferencia del punto de encuentro* se solicita una vez se ha iniciado la introducción al punto de encuentro, sesión 090526 (día 9). Para dicha introducción, la profesora explica que a veces en experimentos tenemos dos rectas y queremos saber dónde *se juntan*, dónde poseen los mismos datos, donde las rectas *pasan* por el punto “a”. Por pasar por el mismo

punto, ambas gráficas cumplen el punto. Este tipo de argumentación podría sugerir, al igual que en la pendiente y ordenada en origen, una imagen de estático y geométrico en primer lugar y luego el contextual. Ha sido habitual escucharlo al alumnado cuando ha tratado de explicar qué sucede en el punto de encuentro en la situación de solubilidad.

Por otro lado, las rectas que se utilizan para demostrar el subconcepto punto de encuentro son rectas, no situadas en contexto. Ello indica que este subconcepto tampoco ha sido construido en contexto. Por el contrario, la tarea encomendada durante la situación de solubilidad ha sido contextualizada y de mayor complejidad a las trabajadas en ambos grupos (ver anexo 18, 2AA, líneas 47-55).

- La *construcción para hallar el punto de encuentro* ha estado muy dirigida por la profesora, todavía más que su homóloga. Al igual que su compañera insiste en el procedimiento de *igualdad* para resolver el sistema de ecuaciones planteado. El alumnado por su parte, repite el mismo procedimiento durante la entrevista, por lo que se entiende, que los estudiantes transfieren el conocimiento implicado en la resolución de hallar el punto de encuentro.

La escasa participación activa del alumnado sumado tal vez al escaso tiempo disponible, podrían ser razones que explicaran un peor resultado por parte de este grupo en cuanto al cálculo del punto de encuentro se refiere; datos, por muy por debajo del deseable tanto en el examen como en la entrevista.

-La actividad denominada *La sombra producida por el árbol* (actividad 39, pág. 41) también ha sido trabajado en este grupo. Al igual que sucediera el 1A, el alumnado del grupo 2A utiliza la regla de tres para resolverlo. Este procedimiento además, los utilizan en el examen p6 personas del grupo total 2A (4 chicas -2A6** y 2A15** han participado en toda la investigación-, y 2 chicos) frente a una sola persona del grupo 1A. Por lo tanto, aunque desde un punto de vista formal este proceso tal vez no se consideraría como aceptable, desde el punto de vista de transferencia, podría decirse que ésta se ha producido.

sin contexto y con un lenguaje matemático. Todos estos matices se reflejan en los apuntes, que suponen un extra a la UD (figura 7-61).

La profesora es insistente en indicar que la pendiente mide la inclinación de la recta (ver anexo 18, 2AA 090519; líneas 73-74, anexo 18, 2AA 090520; líneas 9-10, y anexo 18, 2AA 090526; líneas 40-41). A diferencia de su compañera, no evita hallar la pendiente en los contextos científicos (velocidad del sonido al atravesar distintos materiales, el caudal de entrada y de salida del agua en los depósitos); sin embargo, la argumentación expuesta para la pendiente se basa en la inclinación de la recta.

♦ Bi puntu edo adierazpen grafikoa emanda, lortu funtzio linealaren adierazpen algebrakoa.

1. Kalkulatu maldada
 $A(a,b) \Rightarrow m = \frac{d-b}{c-a}$ "y-en aldakuntza"
 $B(c,d) \Rightarrow m = \frac{d-b}{c-a}$ "x-en aldakuntza"

2. Ordezkatu $y=mx+n$ ekuazioan lortutako maldada eta punturen bat, eta askatu n.

3. Lortutako balioekin $y=mx+n$ edo $f(x) = mx+n$ idatzi.

Ariketa:

Aurkitu ondoko puntuetatik igarotzen diren zuzenen ekuazioak eta adierazi grafikoki.

a) A(2,-1) eta B(3,4) b) A(-5,2) eta B(-3,1) c) A($\frac{3}{2}$,2) eta B($1,\frac{2}{3}$) d) A(-2,-1) eta (0,-1)

♦ Bi zuzenen arteko ebaki puntua

Bi zuzenen arteko ebaki puntua kalkulatzeko, bi zuzenen ekuazioek osatzen duten sistema lineala ebartziko dugu, berdintze metodoa erabiliz.

$$\begin{cases} y = m'x + n \\ y = m''x + n'' \end{cases} \Rightarrow \text{soluzioa } x = x_0 \text{ eta } y = y_0 \Rightarrow \text{Ebaki puntua } P(x_0, y_0)$$

Figura 7-61. Apuntes dados al alumnado del grupo 2AA.

En general no hay mención a la relación entre las variables, no se habla de variables independiente y dependiente. Su énfasis por indicar si la pendiente es positiva o negativa, si la función es ascendente, parece superior a lo mostrado por la profesora del grupo 1A (ver anexo 18, 2AA 090526; líneas 16-17). El número de actividades puramente matemáticas ha sido mayor al realizado por el otro grupo y, en ellas, ha preguntado por el signo de la pendiente, si la recta es ascendente o descendente (ver anexo 18, 2AA 090519; línea 77).

Esta profesora, a diferencia de la anterior, no incluye para que el alumnado compare las funciones proporcional y afín.

7.3 Dificultades al interpretar gráficos funcionales desde las ciencias

En este apartado se analiza cómo las personas entrevistadas interpretan los gráficos de las distintas situaciones contextualizadas en función del conocimiento científico implicado. El estudio realizado no es exhaustivo sino que se centra en los aspectos que se han considerado relevantes para la presente investigación. Para ello, se consideran de modo diferenciado el contexto de física (situación de la pelota y de la montaña rusa) y el contexto de química (la solubilidad). Las dificultades han sido analizadas en las tareas de translación y de predicción.

En función del tipo de dificultad identificado, se procede a una categorización de niveles de conocimiento de física y química, cuyo detalle se encuentra en el apartado de metodología (tabla 6-8). Posteriormente, se relacionan los distintos niveles de ambas áreas, y se definen los niveles de ciencias.

7.3.1 Dificultades en conocimiento de cinemática

El alumnado que participa en la investigación no ha estudiado en profundidad cinemática; su aprendizaje, se limita a una lección del año anterior muy simple y a nivel superficial. Por lo tanto, ya desde un inicio se espera que las ideas alternativas referidas al fenómeno físico sean abundantes. En este sentido, han sido analizadas especialmente las ideas que se relacionan con la descripción del fenómeno y cómo los estudiantes lo relacionan con el gráfico que representa el movimiento de la pelota y de la vagoneta en la montaña rusa. Las gráficas vienen expresadas en la relación $v-t$.

La representación de movimientos mediante gráficas de las variables cinemáticas requiere de procesos de abstracción y del desarrollo de habilidades de representación.

En primer lugar, se analizan las dificultades identificadas en la situación de la pelota y posteriormente, en la situación de la montaña rusa. En ambas ocasiones, primeramente se exponen las argumentaciones expuestas por parte del alumnado, asociadas cada una de ellas a un tipo de dificultad, y a continuación, los gráficos escogidos para identificar cuál ha sido la base de la elección. En función de estas dificultades (DF), se definen niveles de conocimiento de física (F). Las dificultades DF3 y DF4 se engloban dentro del nivel F3.

7.3.1.1 Situación de la pelota

En esta situación la entrevistadora lanza una pelota al aire y se indicado que no se han de tener en cuenta los dos momentos, el inicial y el final -momentos en los cuales la pelota está depositada en la mano-, para escoger la gráfica correspondiente que describa el fenómeno. En la tabla 7-18 se muestran los resultados del análisis sobre cómo el alumnado describe este movimiento.

Tabla 7-18

En la situación de la pelota, dificultades identificadas desde las ciencias (DF) y niveles de conocimiento de física asociados (F)

Situación de la pelota			
Dificultades identificadas desde las ciencias (DF) y niveles de conocimiento de física asociados (F)			
Nivel	Dificultad	Alumnado	Ejemplos del alumnado
F1	DF1. Corresponde a un modelo de la situación en el que se identifica la variación de la posición como variación de velocidad, ya que el modelo corresponde a la trayectoria seguida por el móvil.	1A1***, 1A7*, 1A9**, 1A10**, 1A11**; 1A16* 2A2*, 2A6**, 2A7***, 2A11*, 2A15** 2A19* * 3B1***, 3B2***, 3B4** 3B5**, 3B6*, 3B7*, 3B8**	1A1***, (488) <i>“Primero, va arriba y luego baja”</i> 2A11*, (513-515) <i>“Porque cuando tiras la pelota va hacia arriba, luego se queda en un punto y luego viene de nuevo hacia abajo”.</i>
F2	DF2. El modelo de la situación expresado se caracteriza por considerar que el objeto en movimiento posee propiedades (fuerza, potencia) que corresponden a características observables (el movimiento) e intrínsecas al objeto en movimiento. Dicha fuerza, potencia disminuye a medida que lo hace el movimiento y vuelve cuando de nuevo hay movimiento.	1A14*** 2A14*** 3B3**	1A14***, (498-499) <i>“Porque aquí el tiempo y la potencia, sube pero no baja porque está parada”</i> y (512-514) <i>“Porque primero la lanzamos, va hacia arriba, y tiene mucha potencia hasta llegar a un límite y ahí ya baja la potencia”</i> 2A14***, (667-671) <i>“Cuando echas la pelota coge una velocidad y cuando baja lo hace con la misma velocidad o mayor y aquí la velocidad es hacia abajo”.</i> 3B3** (83-85) <i>“Pues cuando va hacia arriba coge velocidad; pero cuando va hacia arriba se detiene pues ya no tiene esa velocidad”</i>
F3	DF3. El modelo expresado se centra en hablar del movimiento en función de un agente causal (alguien que empuja o atrae).	2A5**	2A5**, (581-585) <i>“Porque cuando la tiramos tiene una gran velocidad, le das fuerza a la pelota y luego como consecuencia de la gravedad baja con fuerza, con mucha fuerza no pero si con un poco”</i>
	DF4. El modelo expresado de la situación parece tener en cuenta el cambio de velocidad durante el movimiento. No se considera a las propiedades físicas como potencia, fuerza, velocidad como propiedad intrínseca del cuerpo		
F4	DF4. Se expresa un modelo mental de la situación donde hay relación entre v y los distintos momentos pero sin hacer alusión a la variable tiempo explícitamente; Tampoco plantea el cambio de la magnitud velocidad en el marco de un sistema en continua interacción.	1A13**	1A13**, (716-718) <i>“Porque la velocidad hacia arriba, la velocidad disminuye y cuando va hacia abajo aumenta”.</i>

Como puede observarse en la tabla, los tres grupos muestran en general un nivel de conocimiento de cinemática muy parecido, ya que el 75% del alumnado de los grupos que han trabajado las funciones mediante la aplicación de la UD y el 87.5% del alumnado del grupo 3B se sitúan en el nivel más bajo. Las personas situadas en este nivel parecen construir un modelo de situación identificado como de la trayectoria seguida por la pelota. Las personas que dentro de este nivel manifiestan el menor conocimiento ni tan siquiera hablan de velocidad, tal vez porque no lo consideren necesario dentro su visualización. Otras personas, en cambio utilizan el concepto velocidad en sus argumentaciones, pero parecen identificar a la velocidad como *posición*. Unas como otras, pueden estar refiriéndose a la posición en un instante o al cambio de posición. La interpretación realizada del gráfico es de carácter iconográfico, es decir, como si fuera la topografía seguida por la pelota.

Este hecho podría tener dos explicaciones plausibles; la primera de ellas, hace referencia a la dificultad del concepto *velocidad* y su diferenciación respecto al concepto *posición*. Incluso dentro de la identificación de posición, también sería distinto si se tiene en cuenta el valor de posición en un instante dado o el cambio de posición en un intervalo, ya que la interpretación de los conceptos de velocidad y aceleración involucra procesos de abstracción e interpretación de cocientes. La segunda, tiene que ver con la consideración de una gráfica como un dibujo. Las dos podrían tener relación con ideas alternativas del alumnado, si bien la segunda, además podría tener que ver con un escaso trabajo realizado en el aula con respecto a la interpretación de gráficos, en el sentido de realizar un análisis en profundidad sobre la identificación e interpretación de variables así como del razonamiento covariacional.





El material didáctico diseñado preveía un trabajo específico sobre la interpretación icónica, en el sentido de relacionarlo con el modelo de situación creado, ya que se partía de los estudios que muestran que esta asociación -entre trayectoria y representación gráfica- es una dificultad para realizar una interpretación adecuada de gráficos, como a la hora de construir modelos de situación asociados a fenómenos científicos. Pero la mayor parte de las actividades planificadas para promover esta reflexión no se han realizado. Cuando alguna de ellas se ha llevado a cabo, simplemente se ha requerido la lectura de puntos, y no parece haber importado ni el lenguaje ni la representación mental del gráfico realizado, que el estudiante estuviera haciendo en ese momento. Durante el análisis del trabajo en aula, no ha parecido que las profesoras fueran conscientes de esta dificultad.

Por lo tanto, a la vista de los resultados, es patente la gran dificultad expuesta; no obstante, esto podría hacer indicar que si no se trabaja teniendo en cuenta esta dificultad, es difícil que el alumnado tome conciencia de ella y pueda autorregularse para una mejora. Puede concluir pues, el aprendizaje llevado a cabo en el aula en ambos grupos no ha ayudado a que el alumnado haya creado, por lo menos, un modelo de representación mental más acorde al modelo de la situación física presentado. En este sentido, podría entenderse por qué el alumnado del grupo 3B no ha obtenido peores resultados que los grupos que han trabajado las funciones, que en un principio cabría esperar.


Como puede observarse, el alumnado se sitúa entre las ideas aristotélicas y en algún caso con referencia a la *teoría del ímpetus*. Ninguna persona utiliza ambas variables en su descripción; consecuentemente ,podría decirse que aunque parece que el alumno (1A13**) posee un conocimiento de velocidad, éste no es identificado como el cociente entre el espacio recorrido y el tiempo empleado en ello. Este alumno es de naturaleza curiosa, le gusta la ciencia y probar cosas –ha sido el único que ha pedido que se le dejara la pelota y ha repetido experimento dos veces-. Tal vez, este hecho haya podido influir en su modelización de la situación.

Tabla 7-19

Relación entre el nivel de conocimiento de Física y la elección del gráfico en la situación de la pelota

		Situación de la pelota			
		Relación entre el nivel de conocimiento de Física y la elección del gráfico			
		Gráfico escogido			
					
Niveles	F1	1A16* 3B8**	1A1***, 1A9** 2A6**, 2A11*, 2A15**, 2A19**, 3B2**, 3B4**, 3B6*, 3B7*		1A7*, 1A10** 1A11** 2A2*, 2A7*** 3B1***, 3B5**
	F2		1A14*** 3B3**		2A14**
	F3		2A5**		
	F4				1A13**

Ninguna de las personas cita el concepto aceleración, si bien han indicado cambio de velocidad; por lo tanto, no han sido capaces de relacionar un término tan habitual en la vida cotidiana a una situación distinta.

No todas las personas situadas en el mismo nivel de física escogen el mismo gráfico. De las 24 respuestas, 13 (54.16%) han optado por el gráfico , mayoritariamente, aquellas situadas en el nivel F1 (58.8%), que podría asemejarse en mayor medida a un dibujo asociado a la trayectoria seguida por la pelota. El resto de gráficos escogidos por el alumnado del F1 también harían referencia al trayecto aunque desde una perspectiva un tanto distinta. Por ejemplo, el modelo de situación realizado con el gráfico podría ser el del lanzamiento de una pelota en general, es decir, el lanzamiento de una pelota con la mano hacia adelante y no hacia arriba, y entonces el trayecto de la pelota sería de arriba abajo. El gráfico podría hacer alusión a un modelo de situación de una sola vía de trayecto, de ida y vuelta. Ha sorprendido que algunas personas que han escogido este gráfico hayan indicado que la velocidad siempre es igual.

Ocho personas situadas en F1 identifican la variable velocidad, pero dicha identificación, es interpretada como si en el modelo mental construido fuera la posición la que es reconstruida. Así, lo muestra la alumna (1A9 cuando dice (978-979) *“No porque cuando lanzas la pelota empieza de cero. Sí. Porque empieza de cero”*, o en el caso de la montaña rusa cuando indica (944-945) *“Haber, por la mitad es así, porque empieza por la mitad y luego...”* *“¡jo es la forma y todo!”* (951) *¡¡ Jo es difícil!!* (958) *“Es que es lógico”*).

Podría decirse que en total son 19 las personas escogen en un sentido u otro una representación que hace pensar en la creación de un modelo de situación identificado como trayectoria.

7.3.1.2 Situación de la montaña rusa

La montaña rusa es una diversión muy apreciada y practicada por la gente joven; así pues, podría pensarse que el haber montado en ella alguna vez podría facilitar el inclinarse hacia una respuesta más adecuada desde el punto de vista del experto.

En esta situación la investigadora ofrece al estudiante la imagen de una montaña rusa, aunque no en su totalidad. Las dificultades identificadas, así como los niveles asociados son mostrados en la tabla 7-20.

Tabla 7-20

En la situación de la montaña rusa, dificultades identificadas desde las ciencias (DF) y niveles de conocimiento de física asociados (F)

Situación de la montaña rusa			
Dificultades identificadas desde las ciencias (DF) y niveles de conocimiento de física asociados (F)			
Nivel	Dificultad	Alumnado	Ejemplos
F1	DF1. Corresponde a un modelo de la situación en el que se identifica la variación de la posición como variación de velocidad, ya que el modelo corresponde a la trayectoria seguida por el móvil.	1A1***, 1A7*, 1A9**, 1A10**, 1A16*, 2A2*, 2A6**, 2A11*, 2A15**, 2A19** 3B2***, 3B4** 3B6*, 3B7*, 3B8**	2A2*, (717-718) <i>“Hace primero hacia arriba y luego hacia abajo”</i> 2A19**, (473-474) <i>“Porque según el dibujo la trayectoria es la misma”.</i>
F2	DF2. El modelo de la situación expresado se caracteriza por considerar que el objeto en movimiento posee propiedades (fuerza, potencia) que corresponden a características observables (el movimiento) e intrínsecas al objeto en movimiento. Dicha fuerza, potencia disminuye a medida que lo hace el movimiento y vuelve cuando de nuevo hay movimiento.	1A14*** 2A14** 3B3**, 3B5**	2A14***, (791-792) <i>“Y luego cuando desciende de nuevo coge velocidad”</i> 3B5** (117-118) <i>“Porque primero va a poca velocidad y luego cuando llega arriba coge velocidad”.</i>
F3	DF3. El modelo expresado se centra en hablar del movimiento en función de un agente causal (alguien que empuja o atrae).		
	DF4. El modelo expresado de la situación parece tener en cuenta el cambio de velocidad durante el movimiento. No se considera a las propiedades físicas como potencia, fuerza, velocidad como propiedad intrínseca del cuerpo	1A11**	1A11** (556-558) <i>“Éste porque aquí se queda, como baja, la velocidad es mayor, entonces necesita menos tiempo para bajar. (565) Sí, por eso es así, en vez de mayor tiempo”.</i>
F4	DF4. Se construye un modelo mental donde hay relación entre v y los distintos momentos sin hacer alusión a la variable tiempo directamente; además no plantea la interacción entre los sistemas aunque se relaciona con el movimiento.	1A13** 2A5**, 2A7*** 3B1***	2A7*** (649-651) <i>“Primero va bastante despacio, luego más despacio porque hay pendiente y luego pendiente abajo alcanzando mayor velocidad”.</i> 2A5** (655-658) <i>“Que igual es éste (b) ya que por aquí ya tiene velocidad y al ascender por aquí disminuye la velocidad y luego al coger esta rampa (la rampa para descender) vuelve a subir”.</i>

En esta situación un menor número de personas muestra la dificultad DF1, aunque sigue siendo muy importante. Esta diferencia podría ser debida a que el alumnado ha podido crear en mayor medida la situación planteada.

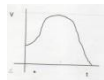



En el caso de esta investigación, entre las personas que manifiestan la dificultad DF1, un 53.3% de ellas ha montado en la montaña rusa, en los que manifiestan la dificultad DF2 un 75% ha montado, la única alumna con una dificultad DF3 no ha montado y el 100% del alumnado que muestra dificultad DF4 ha montado. Estos datos

podrían sugerir que montar en la montaña rusa ayudaría a una construcción de modelo más acorde con el fenómeno cinético estudiado. Dentro de esta hipótesis, podría explicarse por qué un mayor número de personas ha podido escoger el gráfico adecuado y un menor número de estudiantes podría haber elegido el gráfico análogo a la trayectoria del móvil.



No obstante, ha habido un menor número de estudiantes en el nivel más bajo –sólo dos– que utiliza la velocidad en sus exposiciones. Al igual que en la situación de la pelota, parecen haber construido el modelo de situación de trayectoria y por lo tanto, hablan de velocidad cuando se están refiriendo a la posición. Otras tres personas se refieren a la velocidad en sentido de *ímpetus* (F2), la alumna situada en F3 también lo utiliza al igual que las cuatro personas del nivel F4, que se refieren al cambio de la misma durante los distintos momentos. Parece apreciarse, por lo tanto, una mayor utilización del concepto velocidad en las argumentaciones expuestas a medida que el nivel de física es más elevado.

A diferencia de lo acontecido en la situación de la pelota, en ésta hay un menor número de personas que emplean el concepto de velocidad como posición. Al igual que en la situación de la pelota, es el alumnado de nivel medio en conocimiento matemático quien destaca positivamente en el conocimiento cinemática. La tabla 7-21 recoge los resultados generales de elección de gráfico y niveles de conocimiento en física en esta situación.


Tabla 7-21
Relación entre el nivel de conocimiento de Física y la elección del gráfico en la situación de la montaña rusa



		Situación de la montaña rusa			
		Relación entre el nivel de nivel de conocimiento de Física y la elección del gráfico			
		Gráfico escogido			
					
Niveles	F1	1A1***, 1A7*, 1A9**, 1A10**, 1A16* 2A2*, 2A6**, 2A11*, 2A15**, 2A19** 3B4**	*	3B2***	3B6*, 3B7* 3B8**
	F2	3B3**, 3B5**	2A14**	1A14***	
	F3	1A11**			
	F4		1A13** 2A5**	2A7*** 3B1***	

Ninguna de las personas habla de aceleración en sus explicaciones, algo que ha resultado destacado en esta situación si se tiene en cuenta que hoy día este término es muy utilizado en la vida cotidiana cuando se habla sobre coches, etc.

El número de estudiantes (14) que construye la representación del trayecto de la vagoneta mediante los gráficos  y  es inferior al realizado en la situación de la pelota (19 estudiantes). Esto podría estar relacionado con el hecho de que al alumnado ha supuesto un mayor esfuerzo la creación de un modelo no topográfico en una situación experimental –el lanzamiento de la pelota- frente a una situación más cercana y además experimentada por parte de la población.

Han sido muchas las alusiones al gráfico como algo lógico de escoger teniendo en cuenta la forma. A modo de ejemplo se exponen el comentario del alumno 2A19** cuando dice (473-474) *Porque según el dibujo la trayectoria es la misma* o incluso éste de la alumna 3B4** al referirse diciendo (84-85) *No, creo que está bien. Pues... ¿esto es por dónde va el carrito?* (157-160) *Porque, a ver por ejemplo aquí, la curva sería esta de aquí, y esto de aquí sería la curva de aquí, y estos dos imposible porque están así* (observa la forma) *o sea, sería muy en pico.*

Por otro lado, la elección del gráfico  parece indicar una particularidad a lo apuntado anteriormente, ya que quienes la escogen presentan distintas dificultades y, por lo tanto, los modelos de situación creados podrían ser distintos. Una explicación para la elección de este gráfico es que según el alumnado, no ha trabajado anteriormente con gráficas curvas; así lo atestigua el alumno alumno 3B6* cuando dice (129-131). *Porque nunca he visto gráficos así; tal vez los he visto un poco rectos, pero así con curvas no.*

Además del gráfico  -correcto-, en esta investigación también se da por válido el gráfico  porque en ambos casos, el alumnado podría haber creado los mismos modelos de situación –cambio de velocidad-, a pesar de que desde el estudio de la física del movimiento esto no sería adecuado.

Los datos parecen indicar que la situación ha sido importante para la creación del modelo de situación del problema cinemático planteado. Unos mejores resultados por parte del alumnado que ha trabajado las funciones en esta situación –en menor medida en la situación de la pelota- podrían hacer pensar que el trabajo de aula ha podido favorecer en esta mejoría. Además la utilización de la variable velocidad por parte del alumnado

que mejor lo ha realizado podría estar indicando un trabajo de identificación e interpretación de variables.

A partir de los datos expuestos, tanto en la situación de la pelota como de la montaña rusa, se han definidos los niveles de física, representados en la figura 7-63.

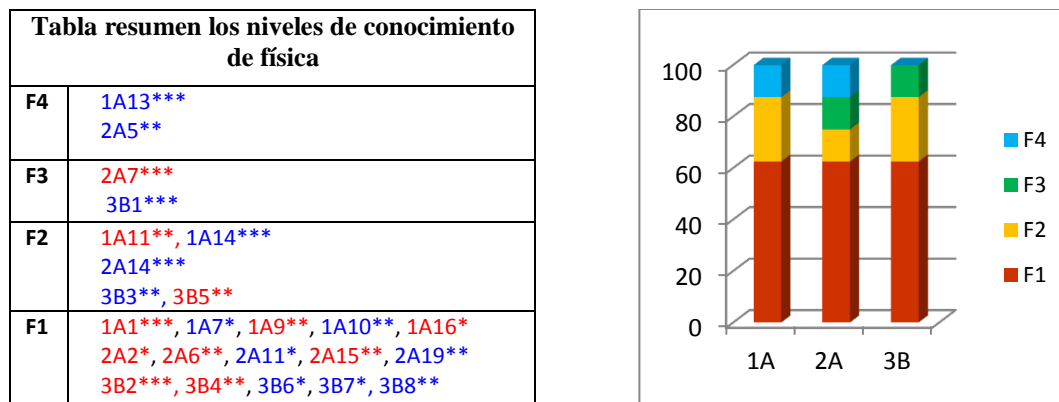


Figura 7-62. Niveles de conocimiento de física por grupo y en porcentajes.

Los resultados muestran poca diferencia en el conocimiento de cinemática entre el alumnado de los tres grupos. Destaca el alumnado de nivel académico medio que se sitúa en el nivel más alto dentro de esta categorización, ya que han mostrado los niveles más altos en cada una de las situaciones. Por ello, podría decirse que han sido quienes más adecuadamente han construido las situaciones expuestas.

7.3.2 Dificultades en el conocimiento del concepto de solubilidad

El concepto de solubilidad es elegido por tratarse de un contenido de carácter científico y a la vez cotidiano. La solubilidad ha sido trabajada en clase de ciencias a nivel cualitativo y experimental por los tres grupos, dentro del proyecto APQUA. No obstante, parece tratarse de un concepto complejo a la vista de las dificultades observadas.

Tal vez, haya sido la alumna 2A15*** la que mayor dificultad muestra, ya que en su argumentación mezcla unidades, concentraciones, tiempo, etc. En ciertos momentos parece que el modelo de situación que construye es el de concentración. Este hecho podría deberse entre otras razones, a que las variables solubilidad y temperatura, a diferencia de las de v y t en las gráficas del movimiento, se han expresado en sus unidades. Esto podría haber dado lugar a una dificultad a la hora de representarse la situación de química.

En el caso de la variable temperatura, es menester mencionar la interferencia entre temperatura y tiempo que manifiestan varias personas, por lo que podría interpretarse que los estudiantes que sustituyen la temperatura por el tiempo construyen un modelo de la situación que relaciona a la solubilidad con el tiempo –hecho éste observado a veces en la vida cotidiana-.

Al igual que en las dos situaciones de física, desde las ciencias se identifican y analizan varias dificultades, a partir de las cuales se han generado categorías de conocimiento de química. Como ha habido varias personas que han mostrado más de una dificultad, se ha optado por priorizar las dificultades a la hora establecer los niveles de conocimiento de química. Así, en el nivel Q1 se incluyen aquellos que bien muestran las dificultades DS1, DS2 o ambas, el nivel Q2 se encuentra asociado a la dificultad DS3, el nivel Q3 se interpretan distintas influencias del aumento de temperatura, todas ellas ciertas si bien no se encuentran representadas en el gráfico (dificultades DS4 y DS5) y en el nivel Q4 se engloban las personas parecen mostrar las dificultades anteriores y demuestran un buen modelo de la situación -variación de la solubilidad respecto a la temperatura (ver tabla 7-22).

Las personas etiquetadas con dificultad DS1 crean modelos de situación distintos al de la solubilidad, no entienden lo representado en el gráfico. Han podido identificarse los modelos de situación de concentración y de evaporación.

La dificultad DF2 estaría asociada a la construcción de un modelo de la situación que relaciona la solubilidad con el tiempo, como si el tiempo fuera un condicionante importante para que se diera el fenómeno.

La dificultad DS3 se encuentra asociada a un modelo de situación donde la solubilidad no se produce hasta cierta temperatura o cantidad de soluto, y así, se busca en la representación gráfica datos que ayuden a su modelo de la situación *se disuelve a partir de 60 o el cloruro de sodio ya está disuelto*.

La dificultad DS4 se relaciona con la construcción de un modelo donde es la velocidad de disolución lo representado mentalmente. Este hecho, si bien está relacionado positivamente con la temperatura en la mayoría de las sustancias solubles, no ha sido reflejado en el gráfico, y además el cloruro de sodio, ha sido un claro ejemplo de que no siempre la evolución de la solubilidad se rige por este modelo.

La DF5 se relaciona con un modelo mental también habitual en la vida cotidiana, donde no todas las sustancias tienen la misma facilidad para disolverse. Este hecho si

bien es cierto en el caso de las sustancias solubles, no ha sido el representado en el gráfico.

Tabla 7-22.

Resumen de las dificultades identificadas desde las ciencias (DS) y niveles de conocimiento de química asociados Q en la situación de solubilidad

Tabla resumen de las dificultades identificadas desde las ciencias (DS) y niveles de conocimiento de química asociados Q, Situación solubilidad			
Nivel	Dificultad	Alumnado	Ejemplos
Q1	DS1. Se construye un modelo de la situación que no corresponde al de solubilidad, y en los casos que parece hacerlo no entiende que es una propiedad, ni tampoco la unidad de medida.	1A16* 2A2*, 2A6**, 2A15**, 2A19** 3B4**, 3B7*, 3B8**	2A15** (925-998) <i>Sí pero, pero el nitrato de sodio y el nitrato de potasio necesitan más agua. Más que el cloruro de sodio. Porque están a casi a 140 y el otro a 30. ¿Qué quieres decir con eso? Pues... eh, gramo... ¿Tu entiendes el concepto de disolubilidad? Sí. Es que no entiendo muy bien el gráfico. ¿Qué no entiendes en este gráfico? Lo entiendo pero, ¿qué es que 30 gramos de cloruro de sodio se puedan en 100 cm cuadrados? Agua. No es. No lo entiendo.</i> (Explicación por parte de la entrevistadora) <i>No. Creo que esta tiene mayor concentración. El cloruro de sodio. Creo que el cloruro de sodio tiene mayor concentración porque si pueden ponerse 140 gramos y aquí 30, esto tiene que ser menor concentración...".</i> 2A19** (790-793) <i>"Sí. Porque con una pequeña solubilidad, no, porque con pocos gramos ha subido la temperatura y éste tiene más gramos y la misma temperatura más o menos".</i>
Q2	DS2. Se construye un modelo de situación que asocia la solubilidad con el tiempo en lugar de la solubilidad y la temperatura. DS3. Se construye un modelo de situación en el cual el soluto no se disuelve hasta cierta temperatura o que puede estar ya disuelto -cloruro de sodio-.	2A2*, 2A11*, 2A15**, 3B2**, 3B4**, 3B7*, 3B8** 1A7*, 1A10** 2A6** 3B4**, 3B6*, 3B7*, 3B8**	2A11** (856- 862) <i>"Que el potasio de nitrato necesita menos tiempo... ¿qué sucedería según tú? Que se disolverá antes".</i> (3B2**) (276) <i>"Porque permanece igual todo el tiempo".</i> 1A7* (968-1002) <i>"No. Porque la temperatura sí tiene que ver. Aquí por ejemplo se necesitan 70 para disolverse. El cloruro de sodio y el nitrato de potasio... Y el nitrato de potasio. Sí, que se disuelve a 10 grados o así"</i> 2A6** (823-832) <i>"En el caso del nitrato de potasio pues... a medida que sube la temperatura se disuelve mejor. ¿...en el caso del nitrato de sodio? Si aumentas la temperatura se disuelve mejor pero comienza a 60, entonces..."</i>
Q3	DS4. Se construye un modelo de la situación donde se identifica la velocidad de disolución (se produce antes) con el aumento de la solubilidad.	1A9**, 1A11**, 2A5**, 2A11* 3B3**, 3B5**, 3B6*	1A9** (1360-1363) <i>"...al calentarse la temperatura se disolverá; entonces éste se disolverá antes".</i> 2A5** (938-945) <i>"Después, en el caso del nitrato de potasio, que la temperatura tiene un efecto acelerador: es decir, que se disuelve antes con la temperatura y que en el caso del cloruro de sodio que es constante, que no le afecta la temperatura".</i>
Q4	DS5. Se construye un modelo asociado a la facilidad de disolverse (proceso) en lugar del aumento de la solubilidad como propiedad.	1A13**, 3B3**, 3B6*	3B6* (232-242) <i>"Pues, en el caso del nitrato de potasio cuanto más caliente la solubilidad será más fácil.</i> (1178-1179)(1A13**). <i>"Pues... no, porque a mayor temperatura la solubilidad es más fácil o es más fácil de disolverse. ¿Eso lo observas aquí? Mm...sí, ¿no? No lo sé. Tal vez a ésta le cuesta disolverse un poco más y ésta más..."</i>
Q4	NO DS- No se aprecian las dificultades anteriores y demuestra un buen modelo de variación de la solubilidad con respecto a la temperatura.	1A1***, 1A14*** 2A7***, 2A14*** 3B1***	1A1*** (790-793) <i>"...si la temperatura es más alta la solubilidad será mayor"</i> 2A14*** (1020-1024) <i>"Pero en el caso del nitrato de potasio a menor temperatura menor solubilidad, cuando aumenta tiene mayor, tiene mayor solubilidad que el nitrato de sodio".</i>

Las personas que no manifiestan ninguna de las dificultades identificadas, se interpreta que han creado un modelo de la situación de variación de solubilidad respecto de la temperatura coherente con el concepto científico de solubilidad.

En el caso del estudiante 1A13** cabe destacar la asociación que hace entre la definición de solubilidad y su argumentación cuando trata de explicar su modelo de representación gráfica. Cuando habla de la solubilidad indica (1095) “... *la facilidad que tiene para disolverse*” y cuando interpreta el gráfico expone (1139-1140) “*Pues, en el caso del nitrato de potasio cuanto más caliente, la solubilidad se facilitará más*”. Este hecho es relevante porque a menudo no se presta atención a las definiciones y explicaciones del alumnado, y éstas parecen expresar los modelos mentales creados.

En la figura 7-63 se exponen los resultados por niveles de conocimiento de química.

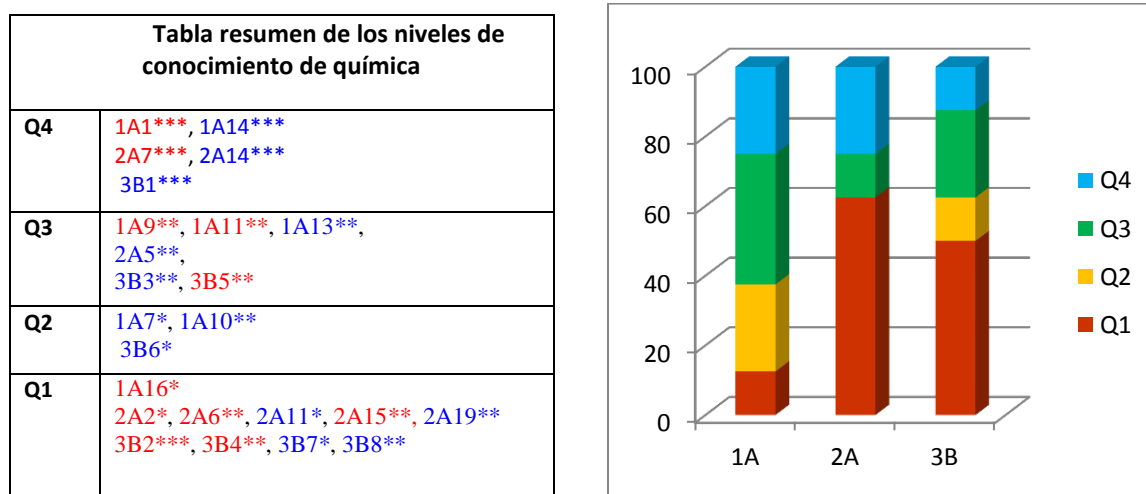


Figura 7-63. Niveles de conocimiento de química por grupo y porcentaje

Hay cinco personas (2A2*, 2A15**, 3B4**, 3B7*, 3B8**) que no se sitúan adecuadamente en este contexto desde un inicio, aun habiendo trabajado ya en ciencias la solubilidad. Tal como ya se ha expuesto, parecen haber aflorado varios modelos de la situación a la vez en algunas personas.

Los resultados del grupo 1A son mejores a los otros dos grupos de los grupos, también el grupo 2A muestra un nivel algo más adecuado en conocimiento de química al mostrado por el grupo 3B. Mientras que el trabajo en aula, podría haber influenciado en unos mejores resultados al grupo 1A, no parece que lo haya sido para el grupo 2A.

La comparativa entre los resultados de conocimiento de física y en química parece indicar una distribución de población más equilibrada en esta última, tanto a nivel de grupos como a nivel de niveles académicos. No obstante, es destacable el número de personas que se siguen situando en nivel bajo de conocimiento relacionado con la solubilidad, a pesar de haber trabajado cualitativamente dicho concepto.

Los datos indican que el contexto y situación se encuentran relacionados con los resultados. No obstante, la diferencia entre los grupos que han trabajado las funciones – mejores resultados por parte de ambos grupos en los contextos de física y química abre una nueva posibilidad de investigación, la influencia del trabajo realizado en el área de matemáticas.

7.4 **Indicios de transferencia observados**

En este apartado, en primer lugar se analizan las relaciones que se han observado entre las dificultades en matemáticas y de ciencias. Este análisis adelanta el inicio correspondiente a la transferencia. El estudio de la transferencia como tal, se realiza en base a dos perspectivas: A) la perspectiva AOT y b) la perspectiva formal. Por otro lado, dichas perspectivas son utilizadas en referencia a cada una de las tareas solicitadas (translación, predicción y clasificación).

La transferencia registrada a lo largo de la investigación se enmarca dentro de la perspectiva AOT sin obviarse la perspectiva más tradicional.

La primera de ellas de las perspectivas trata de analizar hasta qué punto los aprendizajes llevados a cabo en el aula son transferidos siguiendo el mismo patrón en que fueron aprendidos. En este sentido, se trata de comparar la construcción realizada por el alumnado en su aprendizaje, que vuelve a ser reconstruido durante la entrevista (transferencia de tipo C) . Siguiendo esta perspectiva existen conocimientos matemáticos que se dan por válidos, aunque desde una perspectiva formal de las matemáticas y física, tal vez no sean los apropiados. Ejemplo de ello ha sido en la elección de algunas ecuaciones acordes a gráficos, en los cuales el alumnado realiza una translación “imaginaria” de la ordenada en el origen y en base a ello escoge la ecuación. También a la hora de escoger el gráfico adecuado en las situaciones de física, se considera que hay translación por parte del alumnado cuando la descripción realizada es coherente con el gráfico escogido. Este tipo de consideraciones, seguramente no se tendrían en cuenta en

evaluaciones de tipo más tradicional, donde lo valorado es la respuesta acorde a lo que formalmente es aceptado.

La segunda perspectiva trata de dar un sentido más formal y aceptado por la comunidad científica y matemática dentro del concepto de transferencia. En este análisis, se trata de categorizar por niveles de conocimiento tanto matemático como científico a través de las respuestas dadas por el alumnado a lo largo de la entrevista. Posteriormente, dichos niveles son calificados para realizar comparaciones más detalladas sobre el nivel de logro de cada persona y también por grupos, nivel académico de matemáticas y sexo. Dentro de este análisis no sólo se tiene en cuenta si ha habido acierto o no a las preguntas, también se analiza desde un punto de vista cualitativo los razonamientos expuestos, tratando de valorar positivamente todos los indicios porque se entiende que existen señales dadas por el alumno o la alumna en busca de respuestas a las tareas solicitadas.

En este análisis de la transferencia destaca la escasa competencia lingüística mostrada por el alumnado; por ello, la investigadora se ha esforzado en tratar de entender lo que el alumnado quería explicar. A esto, hay que añadir que el euskera ha sido la lengua vehicular tanto en las aulas como en las entrevistas, y que tal vez, las traducciones realizadas no siempre han conseguido el tono, el matiz, ni la fuerza de las conversaciones.

7.4.1 **En relación a las dificultades matemáticas y científicas**

En este apartado se trata de relacionar las dificultades detectadas en matemáticas y ciencias.

Como ya ha sido expuesto a lo largo de la investigación, las tareas de translación, predicción que se han caracterizado por la acción de interpretación han sido englobadas bajo la categoría de matemáticas I y las tareas de translación, predicción y clasificación que se sustentan en la construcción además de la interpretación forman la categoría matemáticas II.

7.4.1.1 Relación entre Matemáticas I y las dificultades mostradas en ciencias

Se han establecido cuatro posibles grupos, teniendo en cuenta los resultados.

Los resultados parecen evidenciar una distribución de población no equilibrada por parte de los grupos 2A y 3B. Los resultados de los grupos que han trabajado las funciones mediante la aplicación de la UD, parecen ser mejores a los del grupo 3B; no obstante, los del grupo 1A han sido bastante mejores, lo que podría indicar que las dificultades

mostradas por el alumnado de este grupo han sido menores. En ello tal vez en ello haya influido el trabajo realizado en el aula. Dichos aprendizaje podría haber influido en una construcción de la situación física más acorde al fenómeno presentado.

En estas agrupaciones el máximo exponente lo representa el alumno 1A13** de nivel académico medio, cuyo estilo de aprendizaje es de carácter curioso. Por lo tanto, se aprecia una diferencia importante entre lo que se ha considerado un estudiante de académico alto en matemáticas por parte de las profesoras y el reflejo de ello en situaciones contextualizadas (ver figura 7-65). Cada parámetro por separado puede consultarse en los anexos 19 y 20.

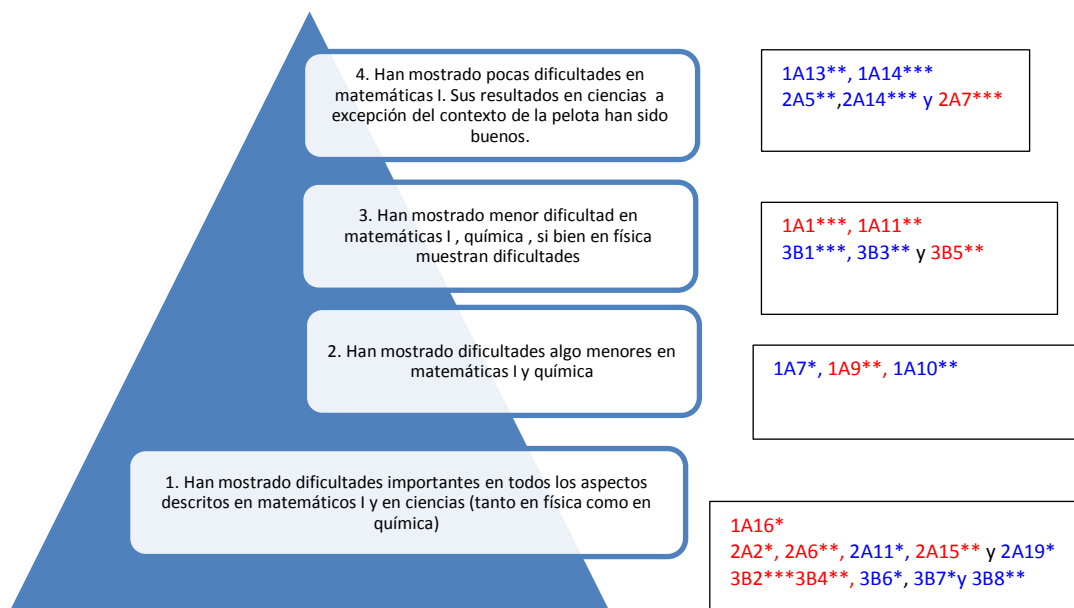


Figura 7-64. Grupos establecidos teniendo en cuenta las relaciones entre las relaciones entre ciencias y matemáticas I.

7.4.1.2 Relación entre Matemáticas II y las dificultades mostradas en ciencias

En esta ocasión se consideran los grupos que han trabajado las funciones mediante la aplicación de la 1A y 2A ya que los contenidos se refieren a los trabajados en el aula exclusivamente. El criterio seguido para las calificaciones es el mismo que se ha mostrado para los resultados de matemáticas I. Los datos detallados se encuentran en el anexos 20.

En general el grado de dificultad en matemáticas II parece estar menos asociado que las matemáticas I a las dificultades de física, y en medida a las de química. Las personas con menores dificultades en matemáticas no son las que menos dificultades presentan en física y sí en cambio en química, donde el nivel de dificultad parece ser

menor a medida que lo hace el de matemáticas II. Ello podría indicar que las cuestiones solicitadas en este contexto de química hayan tenido que ver más con aquellos contenidos trabajados en mayor profundidad en matemáticas.

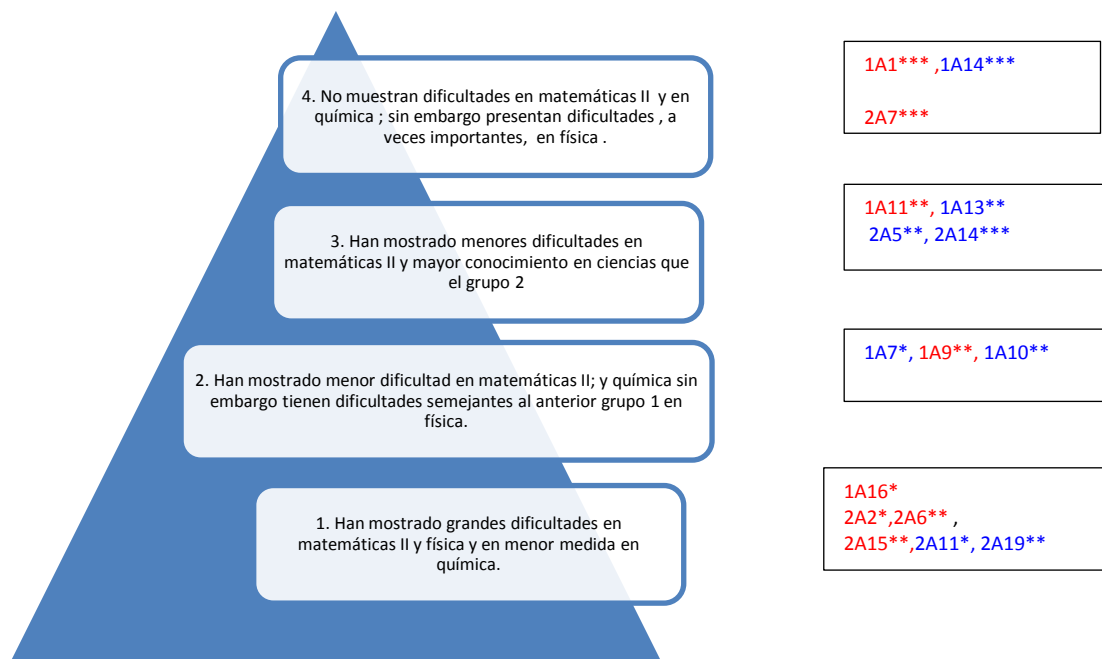


Figura 7-65. Grupos establecidos teniendo en cuenta las relaciones entre las relaciones entre ciencias y matemáticas II.

7.4.1.3 Relación con el contexto

Los análisis mostrados anteriormente han sido fruto del distinto carácter de las tareas requeridas en los distintos contextos, y que por lo tanto, otro tipo de tareas, así como otros contextos, podrían hacer que resultados fueran distintos. No obstante, los distintos contextos presentan singularidades a las cuales se ha tratado de acercarse a través de esta investigación.

A raíz de los resultados mostrados, podría indicarse que el contexto ha sido un factor fundamental a la hora de demostrar por parte del alumnado los distintos conocimientos, tanto científicos como matemáticos.

En el contexto de física aflora en general el modelo de situación de trayectoria seguida por el móvil –pelota y vagoneta de montaña rusa-. No obstante, en algunas personas también se identifica este modelo en la interpretación de la gráfica de la solubilidad aunque no hay móvil. Este modelo de situación se encuentra relacionado con

una interpretación icónica de los gráficos. Aquí se vuelve a recordar las ocasiones donde a nivel de grupo se dan por válidas expresiones que parecen indicar una interpretación icónica del gráfico (ver anexo 18, 1AA 090603; líneas 5-6 y 17-18).

Por otra parte, si bien en la situación de la montaña rusa el modelo de situación anterior también es mayoritario, un mayor número de estudiantes realiza una mejor traslación desde la descripción al gráfico escogido que desde el punto de vista científico es el adecuado. Esta diferencia tal vez tenga que ver con el hecho de que en la situación de la pelota se ha realizado el lanzamiento de la pelota y en el segundo simplemente se ha enseñado una fotografía del mismo. En el primero el alumnado podría haber estado más influenciado por el experimento que en el segundo. Tampoco debe descartarse el hecho de haber montado alguna vez en la montaña rusa.

Si bien, como ya se ha argumentado, las dificultades en física son importantes, existe dificultad de traducción desde las representaciones oral a la gráfica- mayor en el grupo 3B-.. a la hora de trasladar la descripción realizada al gráfico escogido, ha habido una. En este sentido, tal vez, podría sugerirse que el trabajo de traslación realizado en el aula haya podido influir en unos mejores resultados por parte de los grupos que han aplicado la UD. .

El contexto de química, ayuda a que afloren distintos tipos de modelos de situación, algunos de los cuales podrían estar asociados con la vida diaria. En este sentido, tal como las investigaciones han demostrado, se produce la identificación de la variable *tiempo* en lugar de la *temperatura*. En otras expresiones aunque esta variable no es explicitada, parece estar presente de modo implícito en el modelo de situación creado; así parece atestiguarlo expresiones como “*se disuelve antes*”. Sobre el concepto solubilidad se posee una idea bastante acertada; no obstante, parece existir por lo menos, una duplicidad de modelos mentales (solubilidad respecto a temperatura, solubilidad respecto al tiempo, velocidad de disolución respecto a tiempo, velocidad de disolución respecto a temperatura, facilidad de disolución respecto a temperatura, facilidad de disolución respecto a tiempo, etc.). Por otra parte, algunas personas parecen no entender el concepto de solubilidad a pesar de haberlo trabajado cualitativamente en el aula.

Sin embargo, a pesar de las dificultades indicadas sobre la solubilidad, podría decirse que hay un mayor número de personas que saben responder coherentemente a las preguntas realizadas durante la entrevista. En este sentido, el trabajo de aula podría haber ayudado a una interpretación más coherente entre lo expresado y lo representado a los grupos que han trabajado las funciones.

Por otro lado, también se ha podido analizar la diferencia, en cuanto a grupo, en lo que respecta a la información que fluye de modo indirecto desde el gráfico a las demandas de la tarea en la situación de la solubilidad. En este sentido, el alumnado que ha trabajado las funciones a través de la aplicación de la UD, extrae mayor información y de mayor calidad que el alumnado del grupo 3B..

7.4.2 En relación con las tareas

En este apartado se exponen las transferencias referentes a) Traducción, b) Predicción y c) Clasificación. Cada una de las tareas se analiza en función de dos perspectivas: 1) perspectiva AOT y b) perspectiva formal.

7.4.2.1 Tarea de traducción

La transferencia de la traducción es analizada a través de dos en dos grandes categorías: a) Matemáticas I y Matemáticas II. En la primera de ellas se han engloban todas las traducciones desde la descripción de la situación a una representación gráfica – caracterizadas mayoritariamente por la acción de interpretación-, como desde la representación gráfica a la representación algebraica –caracterizada por la construcción y supeditada a la interpretación-.

7.4.2.1.1 Transferencia de la descripción de la situación a una representación gráfica funcional

También en esta ocasión el análisis de la transferencia ha sido realizado desde dos perspectivas: a) perspectiva AOT y b) perspectiva formal.

7.4.2.1.1.1 Transferencia desde la perspectiva AOT

En este apartado se exponen los indicios entorno a las situaciones de aprendizaje que parecen estar relacionadas con las transferencias identificadas en la entrevista.

El alumnado realiza una interpretación icónica de gráficos que parece esta relacionada con este mismo tipo de interpretación que las profesoras han dado por válido en el trabajo en aula.. Muestras de ellos, serían los numerosos ejemplos que se han ido citando a lo largos de los distintos análisis expuestos. En este sentido, se diría que se ha producido transferencia de la interpretación icónica de gráficos realizada en el aula.

Así mismo, parece que el alumnado del grupo 1A transfiriere la identificación y relación que establece entre las variables ya que las características que muestran en ello son semejantes a las llevadas a cabo en el aula (participación y relación de las variables).

También, parece existir transferencia cuando el alumnado no utiliza el lenguaje matemático para traducir desde la descripción de la situación al gráfico porque así ha sido como ha sido trabajada esta traducción en el aula.

7.4.2.1.1.2 Transferencia desde la perspectiva formal

Dentro de este apartado se analizan conjuntamente: a) la traducción desde la descripción de la situación a la representación gráfica (TDG) –tanto en contexto de física como de química-, b) la identificación y relación entre las variables (IV, RV), c) la descripción realizada de los gráficos (Dm).

Los grupos que han trabajado las funciones (mayor en el grupo 1A que en el grupo 2A) han muestran un nivel de transferencia mayor al realizado por el grupo que no ha trabajado las funciones en la investigación (3B). No obstante, en parámetros como la identificación de variables y la relación entre las mismas, el grupo 3B obtiene resultados mejores que el grupo 2A. Lo destacable no es el nivel del grupo 3B -todos los grupos han trabajado con gráficos en cursos anteriores-, sino el nivel del grupo 2A, que aunque ha seguido trabajando con gráficos durante la investigación, ha obtenido resultados menores al grupo 3B.

La transferencia de la translación desde la descripción de la situación se produce en mayor medida en la situación de la montaña rusa que en el de la pelota, y en mayor medida en la situación de la solubilidad.

A mayor nivel académico de matemáticas mayor es el nivel de transferencia (ver figuras 7-63 y 7-64); no obstante, en el contexto de física, es un alumno de nivel académico medio quien mayor competencia muestra.

7.4.2.1.2 Transferencia desde la representación gráfica a la representación algebraica

En esta ocasión, al igual que en la transferencia desde la descripción de la situación a una representación gráfica formal, se exponen los resultados desde dos perspectivas: a) perspectiva AOT y b) perspectiva formal.

7.4.2.1.2.1 Transferencia desde la perspectiva AOT

En este apartado se exponen los indicios entorno a cómo las situaciones previas de aprendizaje parecen influir en los resultados de la entrevista.

Parece haber transferencia cuando el alumnado es coherente al escoger la ecuación correspondiente al gráfico escogido, porque ha sido un aprendizaje bastante trabajado en el aula, al que se le ha dado una importancia destacada.

Desde esta investigación se interpreta como transferencia lejana cuando el alumnado escoge variables de contexto y variables x , y (carácter matemático) en las ecuaciones, ya que se sobreentiende que el estudiante supera el marco de la disciplina de aprendizaje (matemáticas) y puede utilizar dicho aprendizaje en otra disciplina (ciencias). Además, podría decirse que las personas que han equiparan las ecuaciones que llevan variables de contexto con las matemáticas realizan una transferencia de nivel superior.

Parece que el grupo 2A transfiere cuando identifica la pendiente con la inclinación de la recta o del gráfico, ya que el trabajo de aula sobre dicho concepto incluye dicha definición.

Además las personas que utilizan el subconcepto de pendiente como razón promedio habrían realizado una transferencia lejana.

Parece producirse transferencia cuando la ordenada en el origen definida en referencia a si la recta pasa por el punto caro, ya que en el aula ha sido definida en base a esta característica. También podría haberse producido transferencia cuando el alumnado ha indicado que la ordenada en el origen es la altura, ya que la diferencia entre la altura de la recta y la ordenada no ha sido explicitado en el aula.

Se produce transferencia cuando el alumnado de los grupos 1A y 2A utilizan los subconceptos matemáticos en la traducción desde la representación gráfica a la algebraica, ya que ha sido en dicha traducción cuando en el aula ha sido máxima la utilización de dichos subconceptos.

7.4.2.1.2.2 Transferencia desde la perspectiva formal

En este apartado se analizan conjuntamente: a) la traducción desde la representación gráfica a la algebraica –tanto coherencia entre representaciones como construcción-, b) la elección de variables en la elección de la ecuación, c) la pendiente y d) la ordenada en el origen. Todas las tareas han sido solicitadas a los grupos que han trabajado las funciones.

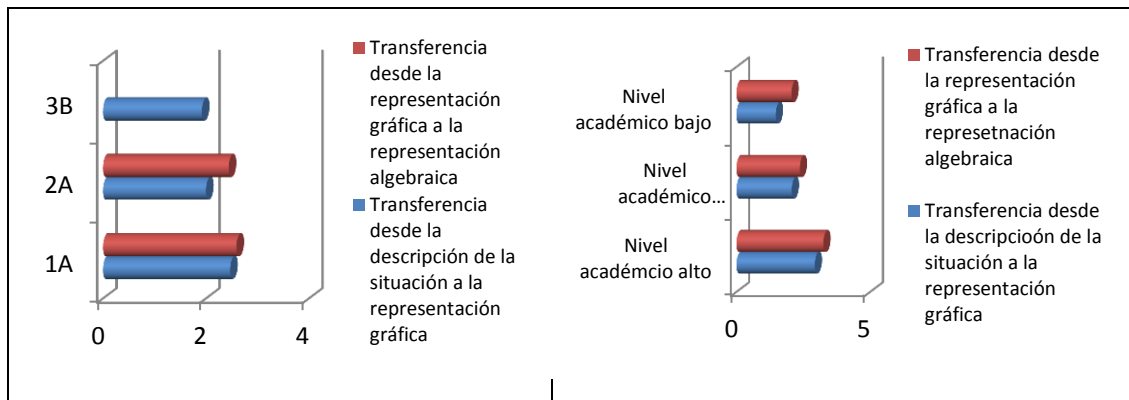


Figura 7-66. Transferencia de la tarea de translación por grupo y nivel académico.

El grupo 1A muestra mayor nivel de transferencia que el grupo 2A en la traducción desde la representación gráfica a la representación algebraica; no obstante las diferencias son mínimas. Esta transferencia se encuentra correlacionada positivamente con el nivel académico de matemáticas, a mayor nivel de matemáticas mayor translación; sin embargo no se encuentra relacionada de modo significativo con la variable sexo, a pesar de que los chicos hayan mostrado mayor nivel de transferencia.

A continuación se representa la comparativa entre los dos tipos de transferencia, desde la descripción de la situación al gráfico y desde éste a la representación gráfica.

7.4.2.2 Tarea de predicción

La transferencia de la predicción se analiza a través de las dos grandes categorías: a) Matemáticas I y Matemáticas II. A la primera de ellas corresponde la inferencia de punto de encuentro –basada en la acción de interpretación–, y a la segunda hallar el punto de encuentro- basada en la acción de construcción-.

7.4.2.2.1 Transferencia referente a la inferencia del punto de encuentro

En la situación de la solubilidad se pregunta al alumnado en qué momento la solubilidad de dos sustancias será la misma.

7.4.2.2.1.1 Transferencia desde la perspectiva AOT

Podría decirse que hay transferencia referida a la inferencia del punto de encuentro desde el aula a la tarea cuando para indicar dicho punto el alumnado ha utilizado vocabulario aceptado en el aula “donde se juntan”, “donde se cruzan”. Cuando se pregunta cómo hallaría el punto de encuentro, el alumnado además indica el procedimiento seguido en el

aula: construir la tabla de valores, construir el gráfico, construir las ecuaciones, para ello hallar la pendiente y la ordenada en origen, y resolver el sistema de ecuaciones a través del método de igualación.

7.4.2.2.1.2 *Transferencia desde la perspectiva formal*

El alumnado que ha trabajado las funciones a través de la UD transfiere la identificación e interpretación del punto de encuentro en mayor medida a lo mostrado por el alumnado del grupo 3B.

7.4.2.2.2 *Transferencia relacionada con hallar el punto de encuentro*

El cálculo del punto de encuentro ha sido una tarea trabajada en el aula; al igual que en el examen, durante la entrevista también, ha sido requerido hacerlo al alumnado.

7.4.2.2.2.1 *Transferencia desde la perspectiva AOT*

Cuando al alumnado se le ha preguntado cómo hallaría el punto de encuentro, éste señala el procedimiento seguido en el aula: construir la tabla de valores, construir el gráfico, construir las ecuaciones, para ello hallar la pendiente y la ordenada en origen, y resolver el sistema de ecuaciones a través del método de igualación. Los estudiantes sólo transfieren un nivel escaso, subconceptos como pendiente; No transfieren la ordena en origen a pesar de que podía inferirse desde el gráfico –algo que en aula parecía no suponer un dificultad importante.

7.4.2.2.2.2 *Transferencia desde el punto de vista formal*

El alumnado no transfiere conocimiento matemático suficiente para la hallar los puntos de encuentro; solamente tres estudiantes (dos chicas) han logran construir las ecuaciones correspondientes a los gráficos.

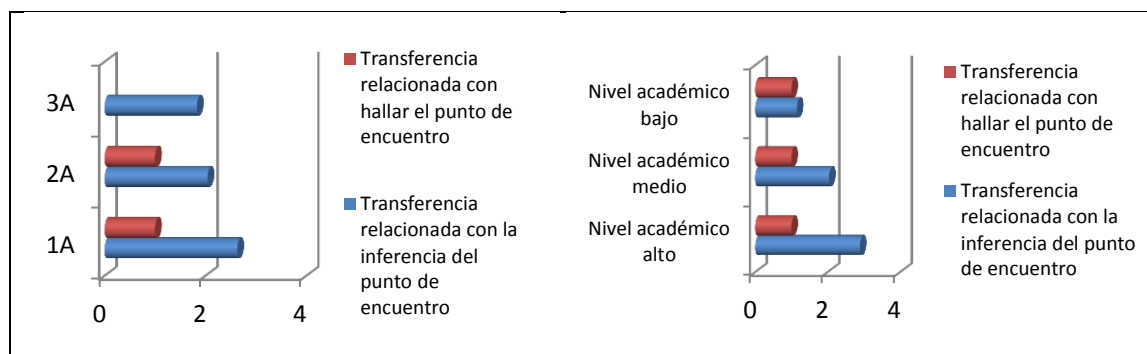


Figura 7-67. Transferencia en la tarea de predicción.

7.4.2.3 Tarea de clasificación

En las tareas de clasificación se consideran dos subcategorías: a) Decisión sobre si una relación particular es una función y b) Identificación de un tipo de función sobre otras funciones.

7.4.2.3.1 Transferencia en relación a la decisión de si una relación particular es una función

A continuación se indica las conclusiones generales sobre este punto ya que los matices han sido ya analizados en el apartado de conocimientos matemáticos.

7.4.2.3.1.1 Transferencia desde la perspectiva AOT

Parecen transferirse las siguientes imágenes de concepto de función: representación, fórmula, operación, regla y dependencia. Estas imágenes varían dependiendo del grupo. Mientras que en el grupo 1A predomina la imagen de concepto dependencia es destacada, en el grupo 2A no parece apreciarse una imagen más acentuada que las demás. No obstante, cuando se ha preguntado directamente si las gráficas corresponden a funciones, es la imagen de función como representación la que se transfiere en mayor grado, ya que sólo un alumno señala que las gráficas en la situación de solubilidad correspondan a funciones. Por lo tanto, podría decirse que la imagen de concepto no puede ser abordada simplemente a través de una sola respuesta.

7.4.2.3.1.2 Transferencia desde la perspectiva formal

Se produce transferencia al utilizar en subconceptos matemáticos –en mayor medida en el grupo 1A-, pero no la del concepto función como objeto matemático, ya que tampoco se constata en su globalidad en los grupos. Además el nivel de transferencia aumenta a media que lo hace el nivel académico. El nivel de transferencia podría indicar que el alumnado se encuentra en general en la etapa de condensación en el proceso de construcción del concepto función, lo que indicaría un nivel superior al grupo 3B que no parece encontrarse en una fase inicial de interiorización.

7.4.2.3.2 Transferencia en relación a la identificación de un tipo de función sobre otras funciones

Dentro de la tarea de clasificación es importante analizar el conocimiento del alumnado en cuanto a la identificación de distintos tipos de función.

7.4.2.3.2.1 Transferencia desde la perspectiva AOT

Parece que gran parte del alumnado (en mayor medida por parte del alumnado del grupo 1A) transfiere coherencia en relación a la identificación de un tipo de función sobre otro. Ello podría haberse producido por la insistencia en el aula de la necesidad de coherencia entre estos dos tipos de representaciones. Para llevarse a cabo esta transferencia, el alumnado se basa en subconceptos pendiente y ordenada en origen, dentro de un estilo muy semejante al trabajado en el aula. Así, cuando se produce esta transferencia es cuando mayor número de término matemáticos se explicita por parte del alumnado. A mayor nivel académico de matemáticas mayor es el nivel de transferencia.

7.4.2.3.2.2 Transferencia desde la perspectiva formal

Desde este punto de vista podría decirse que ha habido un éxito bastante importante en transferencia en el grupo 1A y bastante justo en el grupo 2A.

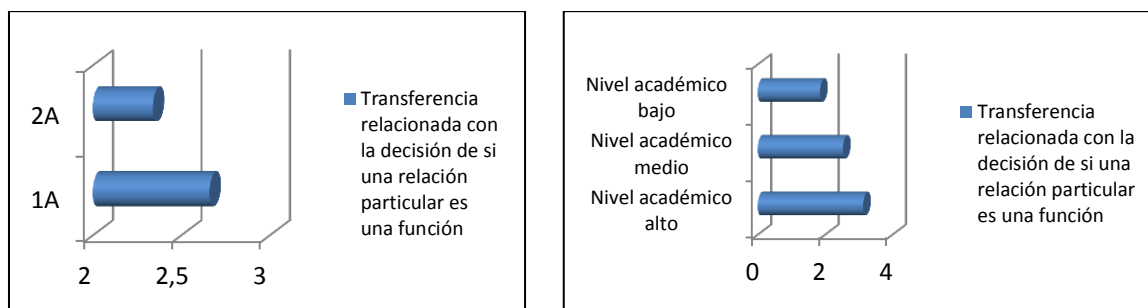


Figura 7-68. Transferencia en la tarea de clasificación referida con el concepto de función

Los resultados obtenidos bien dados de dos formas distintas; por un lado, la decisión de si una relación particular es una función se expresa con medias obtenidas, la identificación de una función sobre otro tipo de funciones se ha realizado teniendo en cuenta los porcentajes de acierto –no se ha considerado una puntuación distinta para cada tipo de función, sino si existe coherencia entre las representaciones o no-.

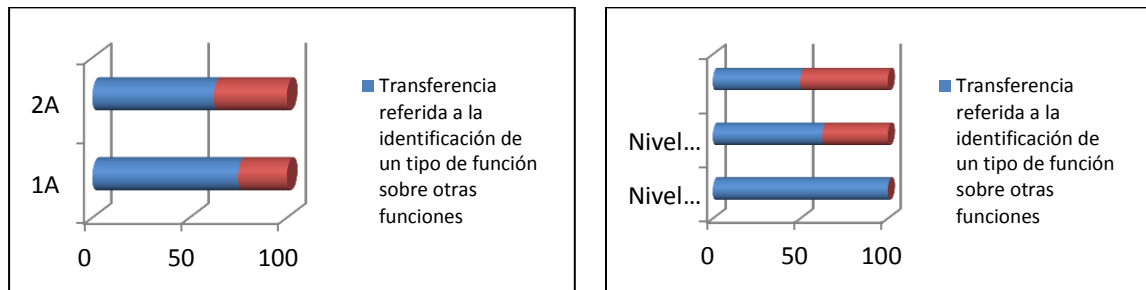


Figura 7-69. Transferencia en la tarea de clasificación referida a la identificación de un tipo de función sobre otras funciones.

7.4.3 En relación al modelo didáctico

En esta sección se trata de ofrecer una serie de resultados sobre la transferencia observada y el trabajo realizado en el aula. La transferencia dada como válida desde esta investigación no tiene por qué coincidir con aquella transferencia deseable desde las ciencias desde un punto de vista formal.

El objetivo de esta tesis es la búsqueda de indicios que expliquen qué sucede con los conocimientos trabajados en el aula cuando han de ser utilizados posteriormente. Para ello se ha optado por realizar la tabla 7-23, donde se relacionan los conocimientos, procesos, contextos, etc. trabajado en el aula y su presencia en el examen, entrevista o ambos.

Así puede observarse que cuando hay conceptos no trabajados tampoco se transfieren; pero que sin embargo desde un análisis de transferencia formal se esperaría que fueran transferidos. Por ejemplo la confusión entre trayectoria y gráfico tal vez se hubiera subsanado en parte, si en el aula se hubiera trabajado en profundidad este tipo de interpretación, o tal vez la identificación y relación entre las variables contextuales haberse transferido de un modo más adecuado si se hubiera trabajado con una mayor reflexión o tal vez si hubieran estado relacionadas en todo momento con las expresiones algebraicas un número mayor de estudiantes hubieran optado por ambos tipos de variables en la ecuación, etc.

Tabla 7-23 *Transferencia identificada en los exámenes o en las entrevistas*

Transferencia observada bien en los exámenes o en la entrevista o en ambos.				
<i>La transferencia observada se indica con EX. (Examen) y EN. (entrevista)</i>				
Procedimientos, procesos o conceptos observados en las aulas que bien han sido trabajados o no trabajados	Observado en aula		Transferencia observada en el grupo	
	1A	2A	1A	2A
Se habla de trayectoria (<i>la ordenada y es entendida como altura, por lo tanto subir o bajar; la ordenada x es entendida como si avanzara hacia delante</i>)	✓	✓	✓ EN.	✓ EN.
Enfoque local de gráfico frente al enfoque global	✓	✓	✓ EN.	✓ EN.
Enfoque local anterior a una interpretación	✓	✓	✓ EX.EN.	✓ EX.EN.
Poca interpretación de gráfico	✓	✓	✓ EX.EN.	✓ EX.EN.
Ha habido transposición desde la descripción de la situación contextualizada al gráfico	✓↑	✓↓	✓↑ EN.	✓↓ EN.
En la descripción del gráfico se trabajan cuestiones como ascendente, descendente, si m es mayor a cero la función es ascendente, plus, minus...	✓	✓↑	✓ EX.EN (37,5%)	✓ EX.EN (62.5%)
Nivel insuficiente en competencia lingüística: falta de riqueza léxica, adverbios, una mezcla entre castellano y euskera, etc.	✓	✓↑	✓ EN.	✓↑ EN.
Utilización de variedad de contextos cotidianos –además de los escogidos de la propuesta didáctica- donde se ha trabajado la relación entre las variables, clarificando cual es la variable dependiente y cual la independiente.(Se ha observado si al preguntar por la relación entre las variables se ha utilizado contexto)	✓↑		✓ (75%) EN.	✓ (sólo se ha observado en 2A14)EN.
Utilización de variedad de contextos cotidianos –además de los escogidos de la propuesta didáctica- donde se ha trabajado la relación entre las variables, clarificando cual es la variable dependiente y cual la independiente. (Se ha observado si se ha indicado una posible relación covariacional entre ambas variables)	✓↑		✓ (75%) EN.	✓ (sólo ha habido 2 casos- 2A7, 2A14 y a 3 personas no se les ha preguntado por su simplicidad en los argumentos anteriores)
En la tabla de valores ha habido indicación de las variables contextuales acompañadas de las variables x e y	✓		✓(75%) EX.	No se ha observado en ningún caso
En los ejes cartesianos ha habido indicación de las variables contextuales acompañadas de las variables x e y	✓		✓ (66,6%) EX	No se ha observado en ningún caso
La indicación sólo de las variables x e y en el gráfico (en el examen sólo se ha pedido gráfico a la mitad del grupo)		✓		No ha sido observado en ningún caso
En la expresión algebraica se trabajan las variables x, y, no las contextuales. (Se observa la utilización de variables x,y en exclusividad)	✓	✓	✓ (100%) EX. ✓ (37,5%) EN.	✓ (casi en el 100% de los que han realizado la actividad) EX. ✓ (Un caso, 2A2) EN. ✓ De 4 casos de ellos dos 2A6, 2A15) EX.
En la función proporcional se ha admitido el trabajo con la regla de tres	✓	✓↑	✓ (1A7) EX.	✓ De 4 casos de ellos dos 2A6, 2A15) EX.
Comparación simultánea entre la función proporcional y la función afín	✓↑	✓	✓ Solo ha sido observado en 2 casos 1A1 y 1A11	✓ Sólo ha sido observado en 2 casos 2A7 y 21A4
Proceso: tabla de valores, gráfico o expresión algebraica (se ha observado si se ha indicado en distintos momentos)	✓	✓	✓Se ha indicado en 2 casos 1A1 y 1A9	✓ Se ha indicado en 4 casos 50%- , pero no han citado a la tabla de valores
El trabajo para hallar ecuaciones correspondientes a los gráficos proporcional y afín	✓↑	✓↓	✓↑ EX. (6 personas) 1A1, 1A9, 1A14 EN.	✓↓
La pendiente es definida como la inclinación de la recta	✓↓	✓↑	No ha habido ningún caso.	✓ 100% de los casos en los que se ha preguntad.
Se han observado dificultades en las operaciones matemáticas tanto a nivel de ecuación como de búsqueda de punto de encuentro	✓	✓	✓	✓
El contexto no ha sido utilizado para la construcción de los conceptos (<i>se ha observado si en la definición se ha utilizado contexto</i>)	✓	✓	✓No obstante, 2 personas, 1A1 y 1A13, han utilizado contexto científico para explicarlo ↑	✓
En los contextos trabajados no se ha explicitado si son o no son una función; es decir, este hecho sólo se ha producido a nivel abstracto (<i>se ha observado el carácter no contextual en las respuestas sobre la función</i>)	✓	✓	✓No obstante, 2 personas, 1A1 y 1A14 han utilizado contexto) ↑	✓No obstante, 1 persona -1A19- ha utilizado contexto. ↑

7.4.3.1 *Respecto a la relación con los niveles de ciencias*

En este apartado se pretende relacionar el nivel de transferencia que realiza el alumando con su nivel de ciencias, para ello se tienen en cuenta: a) la relación entre los resultados de Matemáticas I y Matemáticas II con los niveles de conocimiento científico y b) la transferencia de TDG asociada a la translación y la tarea de predicción con los niveles de conocimiento científico. Para todo ello se utilizan las medias aritméticas.

7.4.3.1.1 Referido a los resultados de Matemáticas I y Matemáticas II

Los resultados en cuanto a distintos tipos de transferencia relacionados con la interpretación (Matemáticas I) y en mayor medida con la construcción (Matemáticas II) se exponen en la tabla 7-24.

Tabla7-24

Transferencia de conocimiento matemático y niveles de conocimiento científico por grupo

Relación entre el nivel de transferencia de Matemáticas I y II y el nivel de ciencias por grupos					
Grupos	Conocimiento matemático		Conocimiento científico		
	<i>Matemáticas I</i>	<i>Matemáticas II</i>	Física	Química	Ciencias
1A	2.50	2.44	1.63	2.75	2.19
2A	2.04	2.24	1.75	2	1.88
3B	1.83		1.44	2	1.72

Los grupos que han trabajado las funciones a través de la UD, muestran mejor conocimiento que el grupo 3B tanto de cinemática como de matemáticas I. Esto tal vez podría interpretarse como una influencia tanto de las matemáticas en el nivel de física como de éste en el de matemáticas. No obstante, entre los grupos 1A y 2A, puede observarse que aunque el grupo 2A posee un mayor nivel de física que el grupo 1A, éste obtiene mejores resultados en matemáticas I. Ello podría indicar un mayor nivel de transferencia por parte del grupo 1A en tareas contextualizadas que han requerido de la acción de interpretación, ya que su nivel en física es menor. Este hecho, podría ser explicado por un trabajo más profundo en la interpretación de gráficos por parte del grupo 1A, en comparación con su homólogo 2A.

El nivel de química de los grupos 2A y 3B es el mismo; sin embargo, la transferencia del grupo 2A en matemáticas I es mejor, es decir en tareas caracterizadas por

la interpretación. Dicho aprendizaje, como ha sido argumentado cuando se ha expuesto el resultado en física, sería menor al realizado por el grupo 1A.

Un mejor resultado en matemáticas I indica mayor nivel de translación desde la descripción de la situación a la representación gráfica. Este hecho podría interpretarse como que estas personas podrían estar influenciadas por esta capacidad a la hora de construir el modelo de la situación o por lo menos que no lo harían peor, algo a tener en cuenta en este análisis. Los grupos que han trabajado las funciones parecen mostrar un mayor dominio que el grupo 3B a la hora tanto de representar una situación de contexto científico como de visualizar la representación gráfica, y además, lo realizan con una coherencia adecuada desde el conocimiento científico formal, ya que el grupo 3B manifiesta en mayor medida que los otros grupos, un problema de traducción entre las representaciones externas oral y gráfica. Dicha coherencia permitiría la posibilidad de comparar la argumentación expuesta con otras, también coherentes desde el punto de vista científico.

Un mejor resultado en matemáticas II indica la construcción de representaciones gráfica y algebraica coherentes desde el punto de vista de los conocimientos matemático y científico formal, lo que ayudaría a una generalización del fenómeno científico estudiado, y por lo tanto de un mayor dominio del conocimiento científico. Un mayor nivel de física por parte del grupo 2A y sin embargo un menor nivel de matemáticas II podrían estar relacionados con un menor trabajo de aula en la acción de construcción en este grupo. Los resultados en cuanto a nivel académico se exponen en la tabla 7-25.

Tabla 7-25

Transferencia de conocimiento matemático y niveles de conocimiento científico por nivel académico

Relación entre el nivel de transferencia de conocimiento matemático y el nivel de ciencias por nivel académico					
Nivel académico	Conocimiento matemático		Conocimiento científico		
	<i>Matemáticas I</i>	<i>Matemáticas II</i>	Física	Química	Ciencias
Nivel académico alto	2.89	2.19	2	3.5	2.75
Nivel académico medio	2.04	2.29	1.71	2.08	1.90
Nivel académico bajo	1.53	1.83	1	1.33	1.17

Los datos no parecen reflejar nada destacado, ya que los mayores niveles de matemáticas parecen estar relacionados con niveles superiores de ciencias o a la inversa.

Por ello, se ha optado por analizar los resultados académicos referidos al nivel académico y si se han trabajado las funciones o no.

Tabla 7-26

Transferencia de conocimiento matemático I y niveles de conocimiento científico por nivel académico en relación a trabajo con funciones

Relación entre el nivel de transferencia en Matemáticas I y el nivel de ciencias por niveles académicos				
Nivel académico	Conocimiento matemático	Conocimiento científico		
	<i>Matemáticas I</i>	Física	Química	Ciencias
Nivel académico alto (funciones)	3.13	2	4	3
Nivel académico alto (no funciones)	2.42	2	2.5	2.25
Nivel académico medio (funciones)	2.19	1.88	2.13	2
Nivel académico medio (no funciones)	1.75	1.38	2	1.69
Nivel académico bajo (funciones)	1.58	1	1.25	1.13
Nivel académico bajo (nofunciones)	1.42	1	1.5	1.25

Los datos parecen indicar que aunque el nivel de conocimiento de física del alumnado de nivel académico alto sea el mismo, la transferencia en cuanto a matemáticas I es mayor por las personas que han trabajado las funciones, lo cual podría estar indicando que el trabajado realizado en las aulas ha podido ayudar al alumnado de este nivel académico en las tareas caracterizadas por la interpretación, es decir, por lo menos han mostrado una coherencia mayor en la descripción de la situación realizada y el gráfico escogido, y éste ha sido en mayor medida aquel aceptado científicamente. Por otra parte, el nivel de química –más elevado en el alumnado que ha trabajado las funciones- podría ser también un condicionante en los resultados de este nivel académico.

Los datos del nivel académico medio no aportan señales de una influencia de una disciplina respecto a la otra, no obstante sí parecen estar relacionados.

Los datos de nivel académico bajo parecen aportar nuevos datos, ya que aunque el nivel de ciencias del alumnado que ha trabajado las funciones es menor, sin embargo ha mostrado un mayor desempeño en las tareas que han requerido de interpretación de la situación y la coherencia entre la descripción de la situación y el gráfico escogido. Este hecho, podría estar relacionado con el trabajo de aula en la interpretación de situaciones.

Tabla 7-27

Transferencia de conocimiento matemático I y niveles de conocimiento científico por nivel académico de los grupos 1A y 2A

Relación entre el nivel de transferencia de conocimiento matemático y el nivel de ciencias de los grupos 1A y 2A					
Grupos	Conocimiento matemático		Conocimiento científico		
	<i>Matemáticas I</i>	<i>Matemáticas II</i>	Física	Química	ciencias
Nivel académico alto	3 (1A)	3.17 (1A)	1.5 (1A)	4 (1A)	2.75 (1A)
	3.25 (2A)	2.72 (2A)	2.5 (2A)	4 (2A)	3.25 (2A)
Nivel académico medio	2.63 (1A)	2.47 (1A)	2 (1A)	2.75 (1A)	2.38 (1A)
	1.75 (2A)	2.11 (2A)	1.75 (2A)	1.5 (2A)	1.63 (2A)
Nivel académico bajo	1.75 (1A)	1.67 (1A)	1 (1A)	1.5 (1A)	1.25 (1A)
	1.42 (2A)	2.00 (2A)	1 (2A)	1 (2A)	1 (2A)

En el nivel académico alto, parece que la relación entre los resultados de matemáticas y ciencias podría ser debida o bien a la influencia del conocimiento de física, al de matemáticas o a ambos, ya que el conocimiento en química es el mismo. No obstante, un menor nivel de ciencias en general por parte del grupo 1A, y con unos resultados similares en matemáticas (media entre matemáticas I y II), podría sugerir la influencia del trabajo de aula en matemáticas en este grupo, es decir habrían mostrado una transferencia en competencia matemática similar a sus compañeros y compañeras de nivel académico, aunque su nivel de ciencias sea menor.

Los resultados del nivel académico en ambos grupos no aportan datos relevantes, a excepción de que los niveles alcanzados en matemáticas I y II estarían relacionados con los niveles de ciencias.

En cuanto al nivel académico, parece que mientras en el grupo 1A un mayor nivel de ciencias podría estar más relacionado con un mejor desempeño en las tareas caracterizadas por la interpretación, en el grupo 2A (la puntuación obtenida tanto en física como en química es mínima), parece más probable inclinarse por la relación de las tareas del aula relacionadas con la construcción y la traducción entre las representaciones gráficas y algebraicas, para el desempeño de las actuaciones solicitadas.

7.4.3.1.2 Referido a las tareas de translación y predicción

Las tareas de translación suponen la construcción de modelos de situación en los contextos de física y química; mientras que la tarea de predicción la requiere en el contexto de química.

La tarea de translación comporta cinco subcategorías de análisis (IV, RV, Dm, TDGf y TDGq).

La traducción (TDG) y predicción (PE) requieren de análisis más profundos sobre lo sucedido entre el nivel de transferencia. En la tablas 7-28 y 7-29 se exponen los resultados en referencia a los grupos y en la tabla 7-30 teniendo en cuenta los niveles académicos.

Tabla 7-28

Relación entre el nivel de transferencia de las tareas de translación y predicción y el nivel de ciencias por grupos

Relación entre el nivel de transferencia y el nivel de ciencias por grupos

Grupos	Transferencia		Conocimiento científico		
	Tarea de translación	Tarea de predicción (PE)	Física	Química	Ciencias
1A	2.47	2.63	1.63	2.75	2.19
2A	2	2.25	1.75	2	1.88
3B	1.92	1.38	1.44	2	1.72

La tarea de translación parece estar influenciada en los tres grupos tanto por el conocimiento de física como por el de química; la tarea de predicción en cambio, podría estarlo con el de química. No obstante, el mismo nivel de conocimiento en esta disciplina por parte del alumnado del grupo 2A y 3B con una diferencia en el conocimiento en la tarea de predicción por ambos, hace pensar, en una influencia positiva del conocimiento matemático, aportado por el trabajo en el aula, para desempeñar con un mayor nivel de consecución la tarea de predicción por parte del grupo 2A. Un análisis más profundo se lleva a cabo en la tabla 7-29.

Tabla 7-29

Relación entre el nivel de transferencia TDG y el nivel de ciencias por grupos

Relación entre el nivel de transferencia y el nivel de ciencias por grupos

Grupos	Transferencia		Conocimiento científico		
	Tarea de translación		Física	Química	Ciencias
	Situación--->gráfico				
	TDGf	TDGq			
1A	1.75	2.75	1.63	2.75	2.19
2A	1.75	2.25	1.75	2	1.88
3B	1.75	1.75	1.44	2	1.72

Los datos dan lugar a pensar en una influencia del aprendizaje matemático en el grupo 1A en comparación con el grupo 2A, ya que aunque el nivel de física del primero es menor, logra el mismo nivel de transferencia TDGf. Si se comparan los grupos 2A y 3B, no parece que el trabajo de aula haya ayudado al alumnado que ha trabajado las funciones a llevar a cabo una mejor transferencia TDGf; sin embargo, sí parece haberlo hecho en relación a la transferencia TDGq, al igual que en la tarea de predicción.

En cuanto a nivel académico se refiere, las tablas 7-30 y 7-31 recogen los resultados asociados a las tareas de translación y predicción.

Tabla 7-30

Relación entre el nivel de transferencia de las tareas de translación y predicción y el nivel de ciencias por nivel académico

Relación entre el nivel de transferencia y el nivel de ciencias por grupos					
Nivel académico	Transferencia		Conocimiento científico		
	Tarea de translación	Tarea de predicción (PE)	Física	Química	Ciencias
Nivel académico alto	2.93	2.67	2	3.5	2.75
Nivel académico medio	2.07	2.13	1.71	2.08	1.90
Nivel académico bajo	1.47	1.83	1	1.33	1.17

Estos datos generales parecen volver a sugerir la relación entre el nivel de ciencias y las transferencias en las tareas de translación y predicción en todos los niveles académicos.

Tabla 7-31

Relación entre el nivel de transferencia de las tareas de translación y predicción por nivel académico en relación a trabajo con funciones

Relación entre el nivel de transferencia y el nivel de ciencias por grupos					
Nivel académico	Transferencia		Conocimiento científico		
	Tarea de translación	Tarea de predicción (PE)	Física	Química	Ciencias
Nivel académico alto (funciones)	3.10	3.25	2	4	3
Nivel académico alto (no funciones)	2.6	1.5	2	2.5	2.25
Nivel académico medio (funciones)	2.20	2.13	1.88	2.13	2
Nivel académico medio (no funciones)	1.8	1.5	1.38	2	1.69
Nivel académico bajo (funciones)	1.45	2.25	1	1.25	1.13
Nivel académico bajo (no funciones)	1.5	1	1	1.5	1.25

En cuanto al alumnado de nivel alto, podría decirse que si bien el nivel de química habría podido influir en los resultados de transferencia de las tareas de translación y predicción, cabe la posibilidad de la influencia del conocimiento matemático, ya que el desempeño del alumnado de este nivel académico de los grupos 1A y 2A es superior al del 3B tanto en el contexto de física como de química.

En el nivel académico medio no se observan resultados relevantes entre los grupos que han aplicado la UD y los que no lo han hecho. Sin embargo, destaca que el alumnado de este nivel académico y el alumnado del nivel alto –ninguno ha trabajado las funciones– hayan realizado una tarea de predicción similar. Este hecho podría ser entendido como una diferencia entre lo que se entiende por nivel académico alto en matemáticas y los resultados que a veces se observan desde las ciencias.

En nivel académico bajo, el alumnado de los grupos 1A y 2A lleva a cabo una mayor transferencia que el grupo 3B, en referencia a la predicción del punto de encuentro, a pesar de que su nivel de química es menor. Este mejor desempeño de la tarea podría haber estado favorecido por el trabajo realizado en el aula en el área de matemáticas.

En los niveles académicos alto y medio, parece que las transferencias de las translaciones TDGf y TDGq estarían relacionadas con los niveles de conocimiento en ambas disciplinas.

Tabla 7-32

Relación entre el nivel de transferencia TDG y el nivel de ciencias por nivel académico en relación a trabajo con funciones

Relación entre el nivel de transferencia y el nivel de ciencias por grupos					
Nivel académico	Transferencia		Conocimiento científico		
	Tarea de translación		Física	Química	Ciencias
	<i>Situación--->gráfico</i>				
	<i>TDGf</i>	<i>TDGq</i>			
Nivel académico alto (funciones)	2.5	4	2	4	3
Nivel académico alto (no funciones)	2.5	3	2	2.5	2.25
Nivel académico medio (funciones)	1.75	2.38	1.88	2.13	2
Nivel académico medio (no funciones)	1.5	1.5	1.38	2	1.69
Nivel académico bajo (funciones)	1	1.25	1	1.25	1.13
Nivel académico bajo (no funciones)	1.5	1	1	1.5	1.25

En el nivel académico bajo no se encuentra una explicación razonable de por qué el alumnado del grupo 3B realiza una mejor translación TDGf, puesto que su nivel de física es menor y también los resultados generales de matemáticas I. El mejor desempeño del alumnado de los grupos 1A y 2A en la tarea de predicción, a pesar de su menor nivel de conocimiento en química, haría pensar en una influencia del conocimiento matemático, ya que ésta es mayor. En este sentido, podría sugerirse que el trabajo realizado en el área de matemáticas ha podido ayudar.

7.4.3.1.3 Referido a los niveles de conocimiento de matemáticas y ciencias

El conocimiento matemático no subsana las dificultades identificadas relacionadas con conocimiento científico –construcción del modelo de situación de trayectoria, la construcción del modelo de situación causante de movimiento, la construcción del modelo de solubilidad respecto del tiempo, la construcción del modelo de concentración, etc.-; no obstante, podría ayudar a que aquellas personas que no poseen estas dificultades u otras en un contexto determinado pueden interpretar el fenómeno de modo más adecuado desde el punto de vista científico formal.

La diferencia entre las medias entre matemáticas y ciencias (tabla 7-33) podría dar a una visión de conjunto. Los datos positivos indican que el nivel global mostrado durante la entrevista ha superado al de ciencias. En general, los datos indican que la mayoría del alumnado muestra un nivel –a veces muy sutil- mayor en matemáticas que en ciencias. Entre las razones plausibles que expliquen estos resultados, se sugiere la labor realizada en la disciplina de matemáticas en ambos grupos. Esta mejoría habría influido sobre todo en los niveles académicos medio y bajo (+ .26 nivel académico medio y +.53 nivel académico bajo).

Tabla 7-33
Diferencias entre los conocimientos matemático y científico

Relación entre el nivel académico de matemáticas respecto del de ciencias																
estudiante	1A1	1A7	1A9	1A10	1A11	1A13	1A14	1A16	2A2	2A5	2A6	2A7	2A11	2A14	2A15	2A19
diferencia	.59	.23	.11	.53	.11	-.06	.28	.69	.50	-.48	.70	-.42	.92	.05	.28	.72

Los chicos de nivel medio 1A13** y 2A5** destacan durante la entrevista, indican por parte del primero, un equilibrio con el nivel de matemáticas y por parte del segundo un menor nivel de ciencias respecto al nivel de matemáticas. Se podría pensar que

en el caso del segundo, al igual que en el caso de la alumna 2A7 haya sido el nivel de ciencias el que ha podido influir en sus resultados.

7.4.3.1.4 En relación al lenguaje científico

El alumnado no utiliza un lenguaje formal –sobre todo el científico- en sus explicaciones, no lo cuida. Tampoco el lenguaje ha sido trabajado durante la aplicación de la UD. La explicación pudiera encontrarse en la insuficiencia de conocimiento científico por parte de las profesoras –hecho este manifestado por ambas- En cuanto al lenguaje matemático, las profesoras no muestran en ello especial interés. Esto podría estar relacionado con la cultura implícita del profesorado en general y del área de matemáticas en particular, que no considera dentro de su labor diaria la enseñanza de la lengua, a pesar de su importancia en la construcción del pensamiento. Ello explicaría por qué en muy pocas ocasiones el alumnado ha sido corregido, aunque no hubiera construcción de frases en las preguntas o respuestas, como que tampoco se reflexionara sobre las palabras utilizadas.

En cuanto a la trasposición desde el lenguaje científico al matemático es destacable la diferencia en ambos grupos, ya que la profesora del grupo 1A insiste en mayor medida que su compañera, en la utilización de variables contextuales. Sin embargo, esta insistencia se ha referido a la hora de elaborar la tabla de datos y la representación gráfica, no a la hora de construir la representación gráfica.

7.4.4 En relación a los estilos de transferencia

A lo largo de la exposición se han expuesto diferencias entre el alumnado de los grupos 1A y 2A con respecto al grupo 3B en relación a la identificación y a la relación entre las variables, la descripción de los gráficos, la traducción desde la descripción desde la situación al gráfico (todas ellas incluidas en matemáticas I) y las diferencias respecto a la pendiente, ordenada en el origen, elección de variables y la traducción desde la gráfica a la ecuación (todas ellas incluidas en matemáticas II), que se han considerado para establecer diferentes tipos de transferencia. Este apartado pretende exponer las tipologías de transferencia identificadas. Para ello, se realiza la comparativa de las transferencias entre las categorías de matemáticas I y matemáticas II y el nivel de ciencias.

En primer lugar, en la tabla 7-34 se presentan los datos comparativos entre dos tipos de traducciones, desde la descripción de la situación al gráfico y de ésta a la ecuación. Para ello, se calcula la diferencia entre las medias en cada una de las traducciones.

Tabla 7-34

Diferencias entre las transferencias (de gráfico a ecuación) - (de situación a gráfico)

Relación entre la transferencia desde la descripción de la situación al gráfico- la transferencia desde el gráfico a la ecuación (TDG-TGE)																
estudiante	1A1	1A7	1A9	1A10	1A11	1A13	1A14	1A16	2A2	2A5	2A6	2A7	2A11	2A14	2A15	2A19
diferencia	-1.15	-.15	-.9	.2	.3	1	-.3	.05	-.55	.65	-.3	-.1	-1.8	.95	-1.25	-1.1

El resultado negativo indica que la transferencia en relación a la traducción desde la gráfica a la ecuación ha sido mayor al de la traducción desde la descripción de la situación al gráfico. Como conclusión, podría decirse que el trabajo en el aula ha impulsado en mayor medida un tipo de transferencia caracterizado por la traducción entre las representaciones gráfica y algebraica.

En base a estos resultados se establecen tres tipos de alumnado: a) tipo 1, con un mayor desempeño en la transferencia desde la gráfica a la ecuación que desde la situación al gráfico; b) tipo 2, con un equilibrio en ambas transferencias y c) tipo 3, con un mayor menor desempeño en la transferencia desde la gráfica a la ecuación que desde la situación al gráfico. Todos se exponen en la figura 7-70.

Los datos parecen reflejar relación entre el tipo de transferencia realizado y el conocimiento científico; un resultado positivo en la transferencia desde la situación del gráfico con respecto a la llevada a cabo desde el gráfico a la ecuación se acompaña de un mejor nivel de ciencias. Estos datos harían preguntarse si los resultados en la entrevista han estado más influidos por el conocimiento matemático o por el nivel de ciencias. En este sentido, desde la investigación realizada se sugiere, que tal vez, no solo el nivel de conocimiento científico haya influido en una mayor transferencia desde la descripción de la situación al gráfico, sino que el nivel de matemáticas ha tenido un peso específico en ello. Siguiendo esta posible explicación, tampoco un menor nivel de ciencias sería la única razón para explicar un mayor nivel de transferencia desde el gráfico a la ecuación que desde la situación al gráfico.

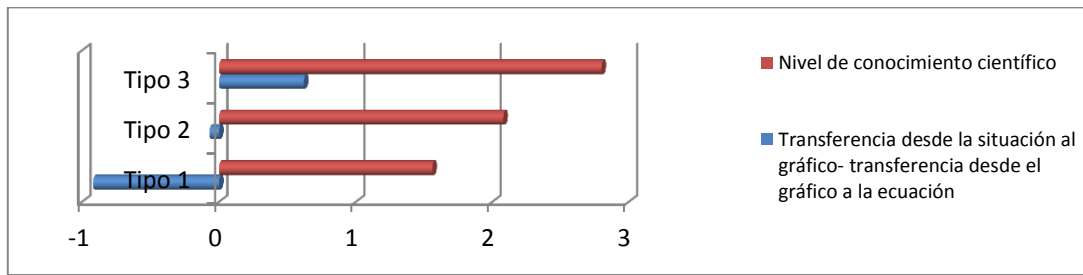


Figura 7-70. Relación entre las tipologías de transferencia y el nivel del conocimiento científico.

Estos datos junto con los resultados generales de Matemáticas I y Matemáticas II hacen posible establecer cuatro estilos de transferencia:

Estilo 1: estudiante cuyos conocimientos tanto matemáticos como científicos son escasos y que por lo tanto ante situaciones conocidas como nuevas no transfiere adecuadamente. Este persona pueden situarse en cualquiera de los tres grandes tipos mencionados (1, 2, 3) ya que aunque pueden realizar algún tipo de traducción mejor que otro, los niveles se sitúan entre 0 y 1 (1A7*, 1A16*, 2A2*, 2A6*, 2A15*, 2A11* 2A19**). En este grupo el alumnado perteneciente al grupo 2A supera al del grupo 1A que además son de nivel bajo. El ejemplo más claro durante toda la entrevista ha sido el de la alumna 2A15**, aunque su carácter personal muestra interés por el estudio, los conocimientos adquiridos han sido memorizados sin entenderlos en gran medida y consecuentemente difícilmente transferibles.

Estilo 2: estudiante cuyo conocimiento científico es bajo o muy dependiente de contexto y cuyo conocimiento matemático es tendente al carácter más formal y que por lo tanto, transferirá en aquellos contextos formalizados que requieran de la repetición o el seguimiento de procedimientos trabajados en el aula (1A1***, 1A9**, 1A10**). En este grupo se sitúan aquellas personas, en general de tipo 1, tipo 2. En los contextos de física tendríamos el ejemplo de la alumna 1A1*** quien ha mantenido un nivel muy bajo en física aún en contexto distintos y con un cambio radical en química y cuyos resultados en matemáticas han sido de los más destacados.

Estilo 3: estudiante cuyos conocimientos de matemáticas y ciencias superiores a los anteriores grupos. Su nivel de transferencia dependerá del carácter de la tarea requerida y de las carencias existentes a nivel matemático. Todas estas personas que manifiestan este estilo poseen mayor nivel en matemáticas I que en matemáticas II; consecuentemente presentan un nivel elevado en transferencia relacionado con tipo 3 (1A11**,

1A13**, 1A14***, 2A5**, 2A7***, 2A14***). Entre los ejemplos podría destacarse a la alumna 1A11** que muestra mayor nivel en ciencias que en matemáticas y que por lo tanto puede transferir algunos contenidos como utilizar variables de contexto, escoger la ecuación adecuada; pero, que ha tenido problemas de traducción desde la situación descrita al gráfico escogido. Otro ejemplo distinto lo muestra el alumno 2A5** cuyo conocimiento en aspectos más formales como hallar la ecuación es inferior al de interpretación. El alumno 1A13** muestra el mayor nivel en ciencias y en matemáticas I, no así matemáticas II (lo que ha sido concordante con su nota de examen). Esto le lleva a que no pueda obtener las expresiones analíticas de las gráficas y los puntos de encuentro, a pesar de que sea el estudiante que llega a transferir el mayor número de contenidos matemáticos a las tareas requeridas.

Estilo 4: estudiante cuyos conocimientos tanto científicos como matemáticos son bastante elevados tanto en el aspecto del propio conocimiento como del conocimiento formal requerido. Ello posibilitará que además de la interpretación correcta del fenómeno pueda utilizar los conocimientos matemáticos adecuados a las tareas científicas requeridas. Ninguna de las personas entrevistadas muestra un nivel de conocimiento científico alto, ya que en física no se ha alcanzado; el más cercano en todo caso sería el alumno 1A13

7.4.5 En relación a la gestión motivacional del alumnado

En la escala de gestión de creencias se recogen estrategias que el o la estudiante utiliza para favorecer su motivación mediante la activación de creencias relativas a su competencia y control de tareas. Así pues, por ejemplo el grupo 2A indica un mayor control de gestión de creencias que a su vez indica un mayor nivel de autoeficacia por parte del alumnado y por lo tanto un menor nivel de apreciación de dificultad en las tareas.

Por otra parte, llegado este momento parece interesante analizar si estos estilos de transferencia que se sugieren en el apartado anterior se encuentran relacionados con los niveles de autoeficacia y gusto por las asignaturas. Los datos al respecto se encuentran registrados en la tabla 7-35.

Tabla 7-35
Relación entre la autoeficacia, el gusto por las matemáticas y las ciencias y los estilos de transferencia

Resumen de autoeficacia y gusto por matemáticas y ciencias mostrado en los estilos de transferencia									
Estilo de transferencia	Alumnado	Autoeficacia en Matemáticas		Autoeficacia en Ciencias		Gusto por Matemáticas	Gusto por ciencias		
Estilo 4									
Estilo 3	1A11**	2		2		sí	sí		
	1A13**	4		4		sí	sí		
	1A14***	4	X=3.16	3	X=2.5	sí	sí		
	2A5**	2		1		sí	no		
	2A7***	4		4		sí	sí		
	2A14***	3		1		sí	sí		
Estilo 2	1A1***	4		4		sí	no		
	1A9**	1	X=3	1	X=2.3	sí	no		
	1A10**	4		2		sí	no		
Estilo 1	1A7*	2		2		sí	sí		
	1A16*	3		4		no	sí		
	2A2*	2		3		sí	no		
	2A6**	2	X= 2.14	1	X= 2.85	sí	no		
	2A11*	3		4		sí	sí		
	2A15**	2		2		sí	no		
	2A19**	1		4		sí	sí		

Según los datos si bien la autoeficacia en matemáticas podría indicar la existencia de transferencia, no parece que el nivel de autoeficacia en ciencias sugiera lo mismo. Por otro lado, en general entre las personas que no han transferido (estilo 1) existe un porcentaje importante que no muestra un gusto por ambas áreas –más acentuado en las chicas- y especialmente en relación con las ciencias, ya que solo hay una chica que no le gustan las matemáticas frente a tres chicas que no les gustan las ciencias. El estilo 2 de transferencia, caracterizado por transferir mejor aquellos aspectos más formales de las matemáticas parece estar relacionado con el gusto por las matemáticas y el no gusto por las ciencias, lo que podría explicar un mejor resultado en matemáticas II. Por último, el alumnado de estilo 3, caracterizado por una mayor transferencia tanto en matemáticas I como en matemáticas II expresa, en general, gusto por ambas áreas, excepto un alumno al que no le gustan las ciencias. Por todo ello, teniendo en cuenta que la diferencia entre los estilos 2 y 3 en autoeficacia en ciencias –menor en estilo 3- parece no explicar los datos, y que la diferencia en autoeficacia en matemáticas tampoco es importante, se sugiere que podría ser el gusto por las ciencias una de las razones posibles que ayudaran a explicar la tendencia en los resultados en este estudio de caso.

En cuanto a la preferencia por las tareas a realizar en el aula, las personas que pertenecen a uno u otro estilo parecen mostrar distintas tendencias generales. Mientras que las personas que no transfieren o han transferido mejor en tareas más formales desde las matemáticas prefieren tareas más bien mecánicas, aunque tampoco descartan otras, las personas que han transferido mejor en tareas de interpretación (a excepción de la alumna 2A7***) prefieren tareas más prácticas, aunque tampoco descartan otro tipo.

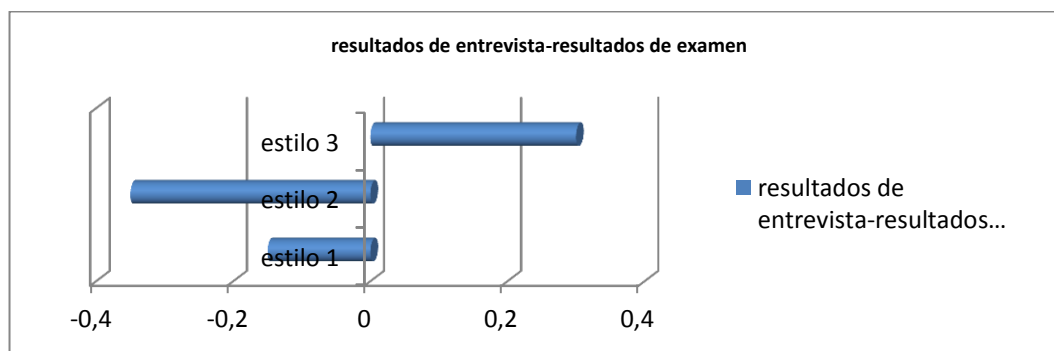


Figura 7-71. Evolución de estilos de transferencia desde el examen a la entrevista.

A la vista de los resultados parece que la entrevista ha influido positivamente en la mejora de los resultados del alumnado con estilo 3 y caracterizado por una tipo 3 porque las tareas solicitadas son en general de carácter interpretativo. En cambio aquel alumnado con bajo conocimiento matemático y científico parece mostrar mejores resultados en el examen, dato que por otra parte no es raro teniendo en cuenta que responden al procedimiento trabajado en el aula; se trataría de la repetición de lo ya realizado en el entorno de aprendizaje, transferencia más bien cercana.

7.4.6 En relación a las actividades previas que influyen en el modelo de función

A continuación se detallan aquellas actividades que pudieran haber ayudado a la construcción del modelo de función como clase de coordinación, donde se incluyen los subconceptos variable, pendiente, ordenada en origen, punto de encuentro y los distintos tipos de representación.

De la tabla 7-36 puede deducirse que son varias las actividades que ayudan a la transferencia siempre que se reflexione qué tipo de conocimiento es necesario transferir, Así por ejemplo, si se pretende que se transfieran conocimientos matemáticos a diversos

contextos es prioritario no sólo el trabajo con actividades contextualizadas sino también la construcción de dichos conocimientos matemáticos a través de los contextos.

Tabla 7-36

Resumen de actividades que influyen positivamente en los resultados

Relación entre las actividades llevadas a cabo y la influencia positiva identificada	
Actividades que han influido positivamente	Hechos en los cuales se ha identificado la influencia positiva
Actividades contextuales	Han ayudado a entender el concepto de función como la relación entre distintas variables, dentro de distintas situaciones
Actividades de traducción desde la descripción de la situación hacia el gráfico	Han ayudado a que la transferencia TDG haya sido superior a la identificada en el alumnado que no ha trabajado las funciones
Actividades de traducción desde el gráfico a las correspondientes representaciones algebraicas	Han posibilitado que una gran mayoría del alumnado haya escogido adecuadamente la ecuación correspondiente al gráfico en un contexto científico - transferencia TGE-.
Actividades que han ayudado a desarrollar la destreza a la hora de hallar los distintos componentes en la expresión algebraica	Han facilitado la transferencia de los distintos subconceptos partícipes de la expresión algebraica para producirse la transferencia TGE
Actividades dirigidas a adquirir un procedimiento ordenado en la resolución algorítmica	Han facilitado que el alumnado transfiera coherencia en la ejecución de las tareas, cuando se ha preguntado por el procedimiento para hallar el punto de encuentro
Actividades cooperativas en el grupo 1A	Han posibilitado que el alumnado sea más consciente de la necesidad de coherencia entre lo descrito y lo representado en las situaciones contextualizadas
Actividades de coevaluación	Han posibilitado al alumnado los posibles criterios de evaluación a tener en cuenta en la calidad de la respuesta
Actividad de autoevaluación	Han ayudado a la metacognición del alumnado

7.4.7 En relación a las debilidades y fortaleza de la Unidad Didáctica

Los resultados obtenidos durante la investigación hacen necesario el análisis de la propuesta didáctica en referencia al objetivo de transferencia para el cual fue diseñada.

Si bien a través de la tabla 7-37 se exponen las fortalezas y debilidades identificadas en la UD, es necesario volver a recordar que gran parte de las actividades diseñadas no se han sido llevada a la práctica, sobre todo aquellas diseñadas para la interpretación de gráficos -interpretación icónica-, y consecuentemente no se puede valorar en qué modo hubieran afectado aquellas en la mejora de la transferencia si se hubieran realizado.

La utilización de contextos se desarrolla superficialmente, ya que no se utilizan para la construcción de los subconceptos, sino como escenario para la enseñanza del conocimiento matemático.

En lo relativo a la organización de las tareas, si bien en un inicio las profesoras ponen algo de énfasis en ello, tras unas pocas sesiones la organización de aula habitual vuelve a ocupar la mayor parte del tiempo –en mayor medida en el grupo 2A-. Es destacable la tarea

de cooperación –realiza por parejas- que realiza la profesora del grupo 1A para comparar las funciones proporcional y afín.

Tabla 7-37
Fortalezas y debilidades de la Unidad Didáctica

Análisis de la U.D. teniendo en cuenta sus fortalezas y debilidades		
Fortalezas	Incluir diversidad de contextos científicos	Posibilita la construcción del modelo de función dentro de contextos científicos
	Incluir actividades dedicadas a la interpretación icónica	Posibilita un trabajo profundo sobre la interpretación de gráficos
	Nueva organización de tareas	Posibilita una dinámica nueva de aula en función del tipo de tarea a realizar
	Incluir actividades de coevaluación	Posibilita la creación de criterios de evaluación compartidos
	Incluir actividades de autoevaluación	Posibilita la metacognición
Debilidades	Incluir exceso de diversidad de contextos	Provoca inseguridad en el profesorado y esto podría provocar que el profesorado no las lleve a cabo A las dificultades en matemáticas se suma un exceso de dificultades diversas en ciencias
	No incluir suficientes actividades de síntesis y de estructuración del concepto función	Favorece pasar de una actividad contextualizada a otra, pero no ir abstrayendo el modelo teórico de función

Además, la profesora del grupo 1A utiliza la coevaluación, lo que tal vez haya influido en que el alumnado de este grupo construya en mayor medida que el alumnado del grupo 2A, criterios de evaluación sobre las características que debe cumplir la adecuación entre el modelo de situación y el de representación gráfica..

Las actividades de autoevaluación no se han utilizado a excepción del contrato de autoevaluación. Los resultados de este contrato parecen mostrar mayor nivel de metacognición en el alumnado del grupo 1A que en del grupo 2A.

Las profesoras tampoco incluyen actividades cuyo objetivo es la estructuración del modelo de función, y tal vez por ello, se han identificado distintas imágenes del concepto función, sin que ninguna de ellas represente el modelo teórico de función como objeto matemático.

7.5 Influencia de la variable sexo en la transferencia

En las investigaciones sobre transferencia consultadas no se ha encontrado un estudio específico que analice la transferencia en relación con la variable sexo; por ello se ha considerado este análisis de gran importancia en esta investigación.

A continuación se exponen los resultados obtenidos desagregados por sexo. No obstante es necesario matizar que las diferencias encontradas entre las alumnas y los

alumnos deben ser tomadas con cautela, por dos motivos principalmente: primero, hay que tener en cuenta lo reducido de la muestra –estudio de caso- y segundo, las diferencias encontradas además de ser pequeñas, no han sido estadísticamente significativas, factor que puede estar provocado también por el pequeño tamaño de la muestra. Por todo ello, las diferencias encontradas se deben considerar tendencias que servirán para estudios posteriores con muestras mayores.

7.5.1 En cuanto a nivel de matemáticas

En este apartado se exponen los resultados más destacados obtenidos a través del a) Examen, b) Contrato de autoevaluación y c) Entrevista.

7.5.1.1 Resultados obtenidos a través del examen

La puntuación inicial realizada al comienzo de la investigación da un resultado 4.58 de nota media para las chicas y de una media de 4.1 para los chicos (esta puntuación se obtiene, al igual que para los grupos, como sumatorio de todas las puntuaciones obtenidas en cada pregunta correspondiente a cada categoría de análisis). Las medias (teniendo en cuenta las medias de todas las preguntas) correspondientes son de 2.37 para las chicas de 2.26 para los chicos (ver anexo 20).

En cuanto a los resultados por grupo y sexo, se obtiene un 5.3 de media en las chicas del grupo 1A frente a un 5.6 de los chicos de dicho grupo y un 3.9 de media en las chicas del grupo 2A frente a 2.9 en los chicos de este grupo. Las puntuaciones superiores de las chicas del grupo 2A deben aceptarse con cautela ya que dos chicos (2A5** y el 2A11*) del grupo han dejado el examen casi en blanco, y así lo indican las desviaciones típicas (.804 para las chicas y de .912 para los chicos).

Ninguno de los resultados referentes a cada una de las subcategorías analizadas en el examen es estadísticamente significativo, es decir las correlaciones entre sexo y resultados no son significativas estadísticamente.

7.5.1.1.1 Conocimientos del alumnado en tareas de translación por sexo

La tarea de translación de traducción se analiza a través de las categorías de análisis

- Traducción desde la descripción de la situación a una representación funcional básica y
- Traducción entre los sistemas de representación gráfico y algebraico.

7.5.1.1.1.1 Traducción desde la descripción de la situación a una representación funcional básica (TDG)

Al igual que lo realizado en el análisis de los grupos, a continuación se destacan los resultados en cuanto a) Traducción desde la descripción de la situación hacia la tabla de valores, b) Traducción desde la descripción de la situación hacia la representación gráfica y c) Características del lenguaje utilizado.

7.5.1.1.1.1.1 Traducción desde la descripción de la situación hacia la tabla de valores (subcategoría de análisis 2)

En esta tarea analizada las chicas han mostraron un mayor nivel de logro (media de 3.15) frente a los chicos (media 2.88). Además la desviación típica es menor menor en el caso de las chicas lo cual significa una mayor equilibrio en los datos.

7.5.1.1.1.1.2 Traducción desde la descripción de la situación hacia la representación gráfica (subcategoría de análisis 7)

En esta tarea, las chicas han obtenido peores resultados que los chicos (media de las chicas 1.87 frente a 2.25 de los chicos). Además la desviación típica con referencia a las chicas se ha incrementado en .4 décimas respecto a la pregunta analizada anteriormente llegando a un valor prácticamente igual al de los chicos. Ya desde un inicio se ha indicado que prácticamente dos alumnos dejaron gran parte del examen en blanco; por lo tanto la desviación típica alta en el caso de los chicos parece estar en parte justificada por ello.

7.5.1.1.1.2 Características del lenguaje utilizado (subcategoría de análisis 1)

El lenguaje utilizado ha sido analizado en las argumentaciones realizadas por el alumnado en la tarea de translación dentro de la pregunta 1 del examen. Dichos datos indican una media de 2.25 en el caso de las chicas y de 2 en el caso de los chicos; las chicas parecen mostrar mayor nivel de argumentación aunque en ambos colectivos ésta sea bastante escasa. Las desviaciones típicas no son destacables ni tampoco indican diferencias entre ambos colectivos.

7.5.1.1.1.3 Traducción entre los sistemas de representación gráfico y algebraico (TGE)

En esta categoría de análisis se exponen los datos más destacados en referencia a: a) Coherencia entre las representaciones gráfica y algebraica (subcategoría de análisis 3) y b) Construcción de la representación algebraica a partir de la representación gráfica (subcategorías de análisis 4, 5 y 6).

7.5.1.1.3.1 *Coherencia entre las representaciones gráfica y algebraica (subcategoría de análisis 3)*

Los datos indican una mayor nivel en la coherencia entre las distintas representaciones por parte de las chicas (media de 3.13 en las chicas frente a 2.50 en los chicos); no obstante la desviación típica en las chicas ha sido algo mayor, algo lógico si se tiene en cuenta que el resultado de los chicos ha sido bastante bajo.

7.5.1.1.3.2 *Construcción de la representación algebraica a partir de la representación gráfica (subcategorías de análisis 4, 5 y 6)*

Para la construcción de la expresión algebraica se consideran la construcción global de la expresión, la ordenada en el origen y la pendiente.

-La *construcción global de la expresión algebraica* a partir de la descripción de la situación podría haber presentado mayores dificultades para las chicas si se tienen en cuenta que las medias de ellas han sido inferiores a los de los chicos (2.13 para las chicas y 2.63 para los chicos). Las desviaciones típicas de ambos grupos indican dispersión en resultados.

- Al *hallar la ordenada en el origen*, las chicas superan en media a la de los chicos (2.75 de las chicas frente a un 2.50 de los chicos). Un menor desviación típica en las chicas indica resultados menos dispersos que en los chicos.

-Al *hallar la pendiente*, las chicas superan en media a los chicos (2.50 de las chicas frente a 2.13 de los chicos). La desviación típica en ellas se ha elevado respecto a la obtenida al hallar la ordenada en origen.

7.5.1.1.2 *Conocimientos de las alumnas en tareas de predicción*

En este apartado se incluyen los resultados más destacados en cuanto a: a) Previsión de coste e b) Inferencia de punto de encuentro.

7.5.1.1.2.1 *Previsión de coste (subcategoría de análisis 7) coste de servicio*

La tarea requerida se encuentra contextualizada (ganancia por la venta de revistas y coste de servicio al utilizar un taxi). Los resultados de las chicas son inferiores a los de los chicos (media de 1.87 de las chicas frente a una media de 2.25 de los chicos). Estos resultados parecen ser acordes con los obtenidos en las preguntas correspondientes a la subcategoría 4 del examen con una media de 2.13 en el caso de las chicas y de 2.63 en los chicos.

7.5.1.1.2.2 *Inferencia del punto de encuentro (subcategoría de análisis 8)*

Ni las chicas ni los chicos llegan a obtener a una media suficiente en esta tarea (1.75 en las chicas y 1.50 en los chicos); por lo tanto, esta tarea ha presentado grandes dificultades para ambos sexos. Por otro lado las desviaciones típicas bastante elevadas en el alumnado de ambos sexos, indica una dispersión importante.

7.5.1.1.3 *Conocimientos del alumnado en tareas de clasificación por sexo*

En este apartado se exponen los resultados más destacados en cuanto a: a) Decisión sobre si una relación particular es una función, y b) Identificación de un tipo de función entre otras funciones.

7.5.1.1.3.1 *Decisión sobre si una relación particular es una función*

Sólo al grupo 2A se le ha preguntado si la gráfica representada corresponde a una función en el examen. Tal como se ha indicado cuando se han expuesto los datos generales del grupo, sólo las alumnas 2A6** y 2A7*** son las que han identificado que el gráfico presentado es una función porque al sustituir la x y la y , a cada x le corresponde una y (2A6** “*Sí, sólo sucede cuando se sustituye a la x y a la y , en cada momento por un punto*”) y (2A7*** “*Sí, porque a cada x le corresponde una y , esto es, a cada día del año le corresponde un minuto*”). Esta última alumna es la única que ha relacionado las variables de contexto y las variables x e y (ver anexo 2).

7.5.1.1.3.2 *Identificación de un tipo de función entre otras funciones*

Nuevamente se vuelven a retomar los datos referentes a la pregunta 6 del examen. En la misma, la media de las chicas (3.13) es superior a la de los chicos (2.5); sin embargo la desviación típica en ambos sexos ha sido destacable, lo que indica bastante dispersión de resultados.

7.5.1.2 *Resultados obtenidos a través contrato de autoevaluación*

En el contrato de autoevaluación las respuestas posibles han sido graduadas desde el 0= sin dificultad, 1= poca dificultad, 2= bastante dificultad y 3= mucha dificultad. Además ha sido posible señalar el grado de ayuda necesario si fuera el caso: a=pequeña ayuda, b= ayuda media, c= gran ayuda. En la figura 7-73 se recogen los resultados por nivel académico y sexo.

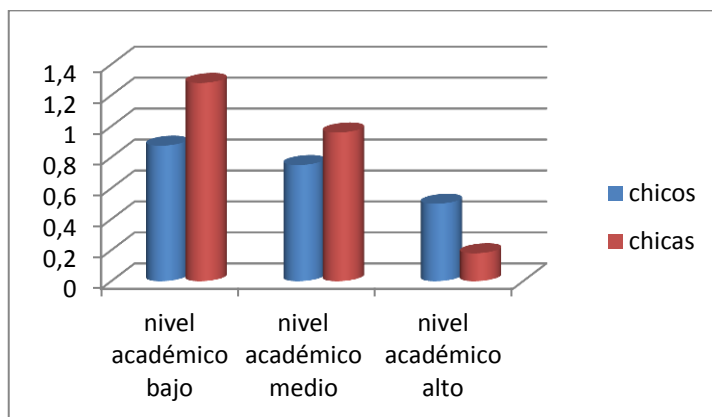


Figura 7-72. Nivel de dificultad global (expresado en valor medio) según sexo y nivel académico.

Como puede apreciarse, las chicas de nivel académico en matemáticas tanto bajo como medio indican poseer un nivel de dificultad mayor en las tareas requeridas que los chicos; sin embargo esto no ocurre en el grupo de nivel académico alto en matemáticas. En general, son los chicos de los niveles bajo y medio los que superan en bastantes cuestiones a las chicas y no así en los niveles altos donde ambos sexos quedan bastante parejos. Estos datos podrían indicar que las chicas son más conscientes de sus dificultades que los chicos. Sin embargo la diferencia en autoevaluación no se ha encontrado en todos los casos; así la alumna 2A2* señala tener menor dificultad que sus homólogos 1A7* y 2A11*, o las alumnas 1A9** con su homólogo 1A10**. Como ya se ha argumentado al inicio del análisis, la diferencia apreciada por los grupos ha sido bastante distinta; si bien el grupo 2A indica tener menos dificultades en las tareas, ha sido el grupo 1A el que mayor grado de aprendizaje ha mostrado en los exámenes. No hay diferencias significativas en función de la variable sexo y las dificultades percibidas por cada uno de los colectivos del contrato de autoevaluación.

Una vez analizados los datos de las entrevistas –referentes a las tareas de translación, predicción y clasificación-, se tratará de relacionar los datos obtenidos en el contrato de autoevaluación con datos de índole más personal relacionado con la gestión del aprendizaje y con la variable sexo.

7.5.1.3 Resultados obtenidos de las entrevistas

Las entrevistas suponen un entorno más abierto que el examen, tanto por las tareas encomendadas, como por la posibilidad de ir corrigiendo aquello que en un momento dado responde el alumnado y que luego trataba de subsanar.

7.5.1.3.1 Conocimientos del alumnado en tareas de translación por sexo

Las tareas de translación son analizadas través de las siguientes categorías de análisis a) Traducción desde la descripción de la situación a una representación funcional básica y b) Traducción entre los sistemas de representación gráfico y algebraico.

7.5.1.3.1.1 Traducción desde la descripción de la situación a una representación funcional básica (TDG)

Al igual que lo realizado en el análisis de los grupos, a continuación se destacan los resultados en cuanto a) Traducción desde la descripción de la situación hacia la representación gráfica y b) Características del lenguaje utilizado. Durante la entrevista no se ha solicitado ninguna tabla de valores.


7.5.1.3.1.1.1 Traducción desde la descripción de la situación a la representación gráfica (TDG)



Tal como se viene indicando a lo largo de la investigación, han sido dos contextos analizados –uno de física y otro de química- y tres situaciones analizadas.

- En el contexto de física

Se identifica mayor nivel de traducción en el caso de los chicos que en de las chicas a nivel general; no obstante, el contexto parece haber influido en los resultados, tal como se evidencia en la tabla 7-38.

Los resultados indican que mientras tres de los chicos mejoran sus resultados desde la situación de la pelota a la situación de la montaña rusa, las chicas mantienen los resultados en ambas situaciones. Por otro lado, un chico es el máximo exponente en la traducción desde la descripción hacia el gráfico.

En cuanto a la traducción desde la descripción hacia el gráfico en la situación de la montaña rusa se constata que un 81.18% de las chicas frente a 38.46% de los chicos escogen la gráfica  que estaría asociada a la trayectoria; en cambio los chicos

escogen las gráficas y  y .

Además, en esta situación de las 6 personas que traducen hacia el gráfico –escogen una gráfica coherente con la situación, cinco son chicos (83.3%) frente a una sola chica (la alumna **3B2***** que ha manifestado un problema de traducción) Si sólo se considerara la gráfica acorde o no sin los argumentos correspondientes podría admitirse que fueran dos las chicas frente a 5 chicos.

Tabla 7-38

Tabla resumen en relación a la traducción desde la descripción de la situación a la representación gráfica en contexto de física (TDG) por sexo, (grupos 1A, 2A y 3B)

			Traducción desde la descripción al gráfico escogido (situación montaña rusa)			
			NO HAY TRADUCCIÓN		HAY TRADUCCIÓN	
			Interpretación ICÓNICA	NO hay interpretación icónica No hay traducción	Hay adecuación del argumento al gráfico	Hay traducción perfectamente válida
Traducción desde la descripción al gráfico escogido (situación pelota)	NO HAY TRADUCCIÓN	Interpretación ICÓNICA	7 chicas / 6chicos (TDGm1)			
		No hay interpretación icónica No hay traducción		2 chicas / 2 chicos (TDGm2)		3 chicos (TDGm3)
	HAY TRADUCCIÓN	Hay adecuación del argumento al gráfico		1 chica (TDGm2)	1 chico (TDGm3)	1chica (TDGm3)
		Hay traducción perfectamente válida				1 chico (TDGm4)

Las chicas de los grupos 1A y 2A parecen mostrar mayor dificultad que los chicos de sus respectivos grupos a la hora de traducir desde la descripción de la situación al gráfico; sin embargo esta diferencia no ha sido detectada de modo tan acentuado en el grupo3B.

- En el contexto de química

La tarea de translación en la situación de la solubilidad se analiza a través de dos preguntas (1G y 2G). Para la respuesta cada estudiante necesita realizar un enfoque tanto global como local del gráfico mostrado. Los resultados se encuentran en la figura 7-73.

En este contexto y situación, en los grupos 1A y 2A , al igual que en el contexto de física, son los chicos los que logran un mayor nivel de translación; sin embargo, en el grupo que no ha trabajado las funciones durante la investigación(3B), las chicas logran mejores resultados que sus compañeros de grupo. No obstante, cabe recordar que en este grupo no han querido participar las alumnas de nivel académico bajo en matemáticas, y por lo tanto, los datos obtenidos han de ser valorados con cautela

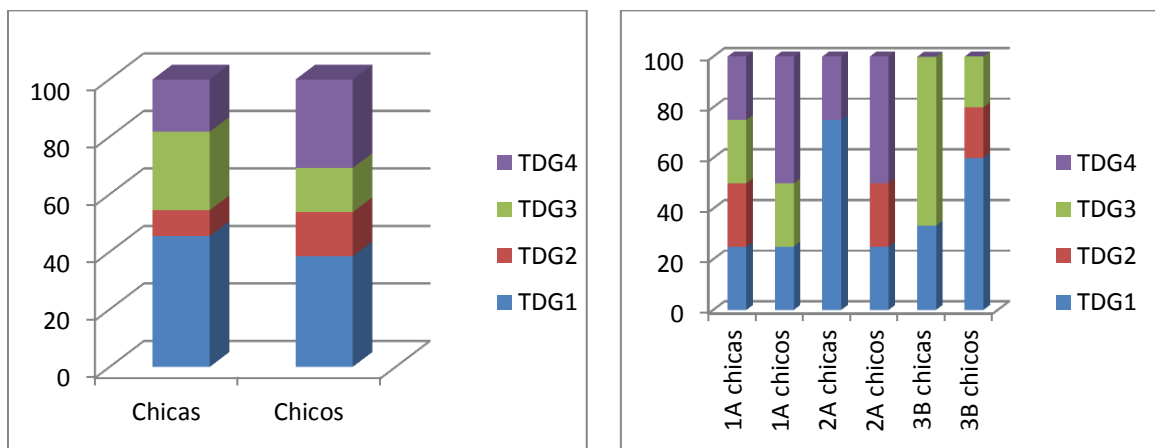


Figura 7-73. Traducción desde la descripción de la situación a la representación gráfica (TDG) en la situación de solubilidad por sexo y grupos

-La *identificación de las variables (IV)* en los contextos, que se muestra en la figura 7-74, parece indicar sutilmente que los chicos identifican en mejor medida las variables a lo realizado por las chicas (se hace referencia tanto a la identificación de una variable como a ambas variables), excepto en la situación de la pelota: No obstante, esta diferencia no es estadísticamente significativa.

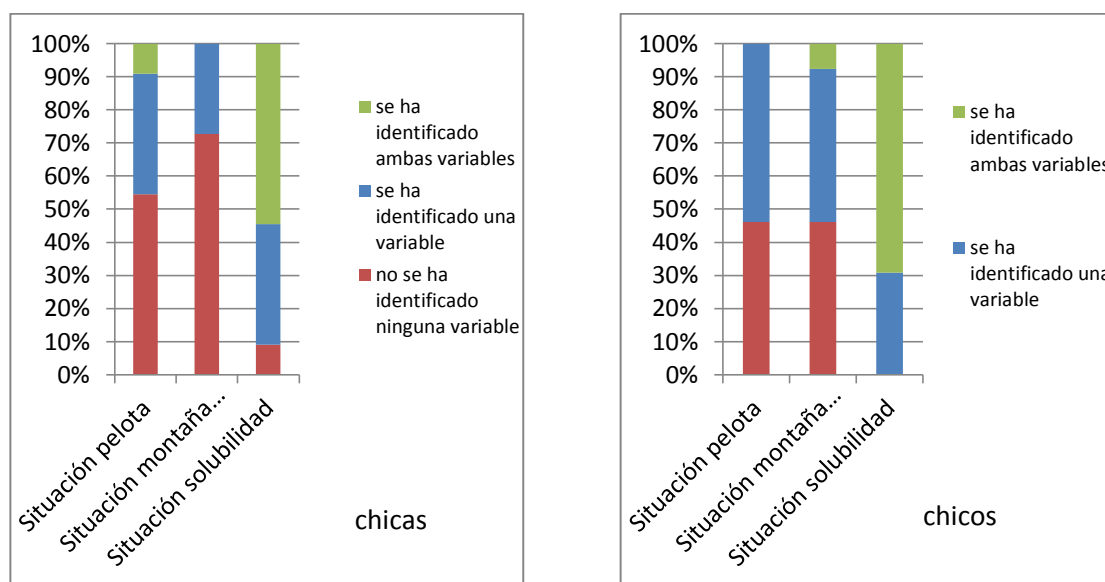


Figura 7-74. Identificación de variables por sexo y situaciones contextualizadas

-La relación que los y las estudiantes establecen entre las variables (RV) no muestran diferencias entre los sexos en la situación de la pelota; por ello, se exponen las situaciones de la montaña rusa y de la solubilidad (figura 7.75).

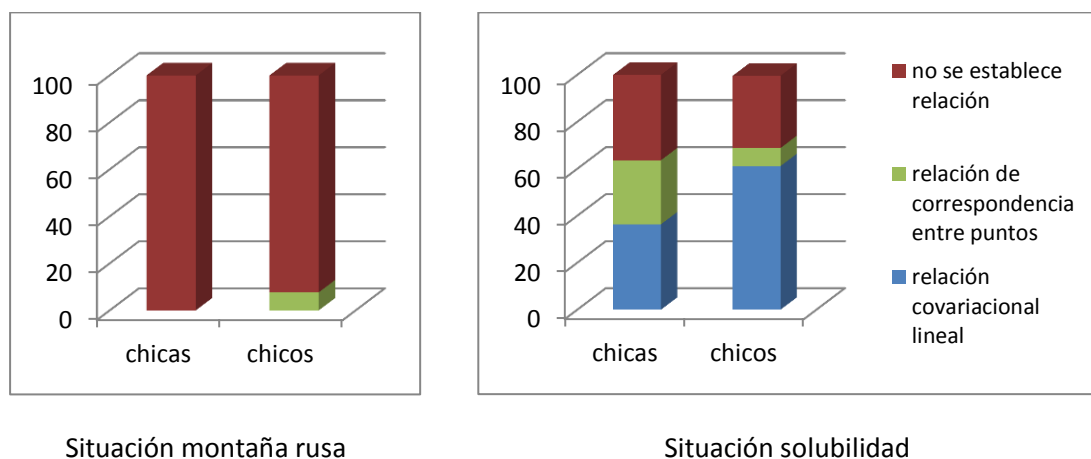


Figura 7-75. Relación establecida entre las variables por sexo.

Parece que los chicos sutilmente relacionan las variables en mayor medida que las chicas.; no obstante, al igual que en identificación de las variables, estas diferencias no son estadísticamente significativas.

7.5.1.3.2 Características del lenguaje utilizado (subcategoría de análisis 1)

No se diferencia el lenguaje que utilizan las chicas del empleado por los chicos en cuanto a tipo de expresiones realizadas, a no ser, en ocasiones puntuales cuando los chicos han hecho referencia a la existencia de potencia o fuerza en el contexto de física.

En cuanto a las descripciones de gráficos (Dm), los chicos muestran un nivel más elaborado que el de las chicas; no obstante esta diferencia no es estadísticamente significativa.

7.5.1.3.3 Traducción entre los sistemas de representación gráfico y algebraico (TGE)

En esta categoría de análisis se exponen los datos más destacados en referencia a: a) Coherencia entre las representaciones gráfica y algebraica (subcategoría de análisis 3) y b) Construcción de la representación algebraica a partir de la representación gráfica (subcategorías de análisis 4, 5 y 6).

7.5.1.3.3.1 Coherencia entre las representaciones gráfica y algebraica (subcategoría de análisis 3)

La traducción desde el gráfico a la ecuación ha supuesto un extremo en los resultados entre chicos y chicas en la situación de la pelota, tal como puede evidenciarse en la figura 7-76. Como aciertos se han considerado también los aciertos parciales (acierto de uno de los dos gráficos correspondientes al movimiento).

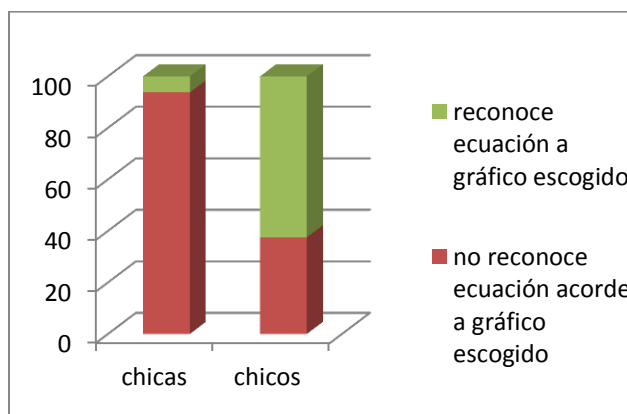


Figura 7-76. Coherencia entre las representaciones gráfica y algebraica por sexos en la situación de la pelota.

Han sido las chicas de nivel bajo y medio, en concreto, las que muestran dificultad para reconocer la ecuación acorde al gráfico escogido (1A9**, 1A16*, 2A2*, 2A6** y 2A15**). Además, la alumna 2A6** no ha escogido ninguna ecuación. Esta dificultad podría dar lugar a tres interpretaciones distintas: (a) confusión entre la función afín y la proporcional, (b) elección de la ecuación general de las funciones sin realizar ningún análisis al respecto o (c) combinación de las dos anteriores. Sin embargo, la dificultad de la alumna 1A16* no parece ser ninguna de las descritas –por lo menos en esta ocasión– sino por el concepto de pendiente. El alumno 2A11**, si bien manifiesta en una de sus elecciones la misma confusión a la identificada en las alumnas, parece que no muestra dicha confusión en su segunda elección. Estas dificultades no detectan en el resto de los chicos.

Los resultados de la entrevista difieren enormemente de los obtenidos en los exámenes donde las chicas obtienen mejores resultados que los chicos (media de 3.13 frente a 2.50). Este hecho podría hacer pensar que las chicas han transferido mejor en el examen, donde el reconocimiento entre ambos tipos de representaciones se ha realizado de modo abstracto (no contextualizado); por el contrario, en la entrevista, dicha tarea ha sido contextualizada. De nuevo podría pensarse en la importancia del contexto durante el requerimiento de tareas.

En cuanto a la elección de variables en la ecuación (EV), a la vista de los resultados que se muestran en la siguiente figura 7-79, cabría suponer que los chicos transfieren mejor en la situación contextualizada y que no se encuentran tan influenciados por las variables

aprendidas en las clases de matemáticas. Sin embargo, las diferencias por sexo en la elección del tipo de variable no son estadísticamente significativas.

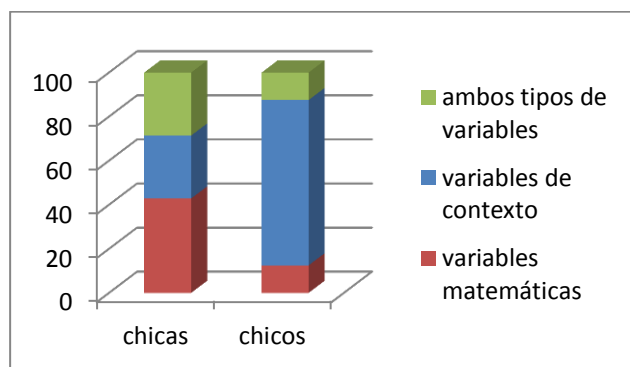


Figura 7-77. Elección de variables al escoger la ecuación (EV) en la situación de la pelota por sexo.

Los datos extraídos tanto a nivel de coherencia entre representación gráfica y algebraica como de la elección del tipo de variables podrían indicar que las chicas están más influenciadas por lo trabajado en el aula, en el sentido del estilo marcado en el aprendizaje. Esto podría explicar por qué las chicas en mayor medida que los chicos indican que hay correspondencia entre las variables matemáticas y físicas. Sin embargo, esta dependencia de lo trabajado en el aula, haría que ante situaciones no trabajadas directamente en el aula, como la transferencia directa desde la situación o gráfico a la ecuación tuvieran mayores dificultades y, por lo tanto, hayan sido menos reflexivas en la elección del gráfico. Así parecen indicarlo comentarios como el de la alumna 1A9** cuando dice (878) *“Ésta porque lo hemos dado; pero...”* y la de la alumna 2A2* al expresar (637) *“Eso es lo que hemos aprendido.”*

Cabría también otra posible explicación en el sentido de que las chicas analizan las situaciones desde un distanciamiento mayor que los chicos, y por ello, elegirían variables matemáticas.

7.5.1.3.3.2 Construcción de la representación algebraica a partir de la representación gráfica (subcategorías de análisis 4, 5 y 6)

Sólo tres estudiantes, dos chicas (1A9** y 1A1***) y un chico (1A14***), llevan a cabo la construcción de las expresiones algebraicas en la situación de la solubilidad sólo la han realizado tres estudiantes;; por lo tanto, el resultado de las alumnas es mejor que el de los alumnos. La alumna 1A9** para hallar la ecuación de la función constante parte de la

ecuación general de las funciones, lo que podría indicar, como se ha indicado anteriormente, que esta alumna sigue las pautas trabajadas en el aula.

-La *ordenada en el origen* (OO) sólo la hayan tres estudiantes en la situación de la solubilidad, dos chicas (1A9** y 1A1***) y un chico (1A14***); esta diferencia no es estadísticamente significativa.

-En cuanto a la *pendiente* (Pm) en la situación de solubilidad, los resultados, aunque también escasos, parecen indicar mejores resultados por parte de las chicas (la obtienen en algún tipo de función cuatro alumnas frente a dos alumnos). Además hay que recordar que en la situación de la pelota son dos alumnos quienes no han identifican la m como pendiente. Esta diferencia tampoco es estadísticamente significativa.

A partir de los datos mostrados se podría interpretar que las chicas, aunque también escasamente, realizan algo mejor la tarea de construcción de la expresión algebraica. Teniendo en cuenta que en la situación de la pelota el reconocimiento que han realizado ellas ha sido peor que el de ellos, se podría inferir que las chicas han utilizan el aprendizaje del aula en mayor medida que los chicos en la construcción de la ecuación. Los resultados del examen no muestran diferencias estadísticamente significativas en las subcategorías 4, 5 y 6 con relación a la variable sexo.

7.5.1.3.4 Conocimientos del alumnado en tareas de predicción por sexo

Durante la entrevista se ha preguntado a qué temperatura dos sustancias tendrán la misma solubilidad. Para ello es necesario responder a dos cuestiones a) Inferencia del punto de encuentro b) Hallar el punto de encuentro.

-La *inferencia del punto de encuentro* (PE) la realizan mejor los chicos que las chicas, ya que son los primeros los que alcanzan el nivel PEm3; sin embargo la diferencia no es estadísticamente significativa.

-*Hallar el punto de encuentro* es una tarea muy difícil a tenor de los resultados obtenidos. Nadie ha logrado calcularlo. Sin embargo, las chicas y los chicos optan por distintos procedimientos para hallarlo. Cuatro de cinco chicas se inclinan por el procedimiento

aprendido en el aula, frente a los chicos –cinco de los siete- que lo hacen por métodos más prácticos porque las matemáticas no suponen ninguna ventaja para hallarlo.

7.5.1.3.5 Conocimientos de las alumnas en tareas de clasificación (subcategorías 9 y 10)

Como se viene indicando, en la tarea de clasificación se engloban dos subcategorías: a) Decisión sobre si una relación particular es una función, y b) Identificación de tipo de función sobre otras funciones.

7.5.1.3.5.1 Decisión sobre si una relación particular es una función

Para este análisis se tienen en cuenta: a) La utilización de argumentos matemáticos en general, b) Definición de función, b) Esquema de función, c) Imagen de concepto de función y d) Razonamiento covariacional.

-La *utilización de argumentos matemáticos* en la elección de la ecuación correspondiente se realiza en mayor medida por las chicas; sin embargo fallan más a la hora de escoger la ecuación correspondiente al gráfico elegido. Esto podría interpretarse como que las chicas, en mayor medida que los chicos, se rigen por lo aprendido en el aula. Por otro lado, este aprendizaje parece ser de tipo memorístico a la vista de comentarios como los realizados por la alumna 1A9** cuando argumenta (878) *“Ésta porque lo hemos dado; pero... Sí, pero, es que sino... El gráfico se sacaba de esa forma. No lo sé.”* 2A2* (629) *“Por la pendiente y eso. (635) Eso es lo que hemos aprendido,...”*.); argumentos que los chicos no los expresan.

Es destacable que el alumno 1A14*** del grupo 1A sólo haya indicado en una ocasión la existencia del punto de encuentro ya que es el que mayor nivel matemático ha mostrado tanto en el examen como en la entrevista. Este hecho podría estar relacionado con que además de él, otra alumna y otros dos chicos más del mismo grupo, indiquen no utilizarían las matemáticas para hallar el punto de encuentro. Por todo ello, este tipo de justificación podría llevar a pensar que para una parte importante de los chicos, las matemáticas no son un instrumento necesario para hallar el punto de encuentro, puesto que se podría calcular de modo práctico, realizándolo experimentalmente o a través de contar la cuadrícula del gráfico.

En la figura 7-80 se exponen los momentos en los cuales el alumnado utiliza los desagregados por sexo.

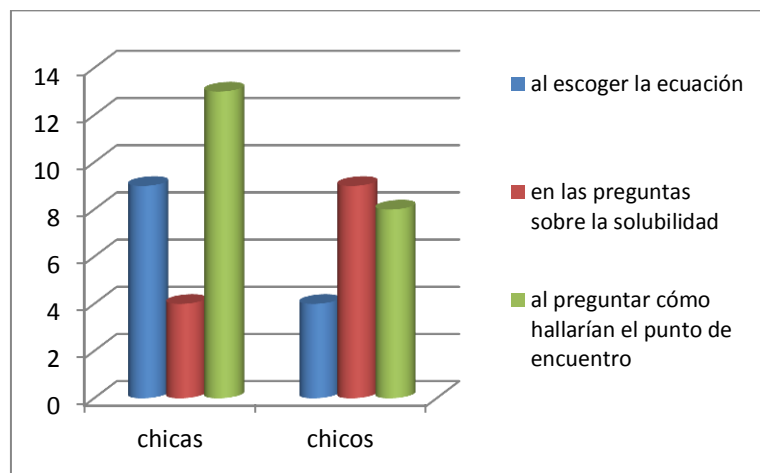


Figura 7-78. Utilización de argumentos matemáticos durante la entrevista por sexo.

Las chicas utilizan más asiduamente que los chicos los argumentos matemáticos; lo hacen sobre todo al escoger la ecuación o cuando informan sobre el procedimiento para hallar el punto de encuentro. Sin embargo, las argumentaciones se equilibran cuando la relación con el área de matemáticas no es tan evidente (preguntas sobre solubilidad). Por todo ello, parece evidenciarse que las chicas utilizan en mayor medida los conocimientos matemáticos en aquellas situaciones más formales relacionadas con lo trabajado en el aula que en situaciones más distantes de la propuesta de aula. En los chicos, esta tendencia parece ser menos acentuada.

-La *definición de función* (DF) supone un equilibrio en las respuestas de chicos y chicas; ninguno de los dos colectivos alcanza una media de 2 ($X_{chicas} = 1.75$; $X_{chicos} = 1.87$), por lo que podría inferirse que o bien no tienen una idea correcta del concepto de función o bien no saben qué es una definición (cabe señalar que varias personas se han negado a dar una definición propiamente dicha).

-El *esquema de función* (EF) que elaboran tanto las chicas como los chicos supone una mejora en comparación con los datos obtenidos en la demanda de una definición ($X_{chicas} = 2.25$; $X_{chicos} = 2.26$). Estos datos parecen reflejar que el alumnado que en principio se ha negado a dar una definición, posee mayor nivel de conocimiento sobre este concepto.

-La *imagen de concepto de función* (ICF) extraída de todas las respuestas sugiere la existe mayor nivel de conocimiento del concepto función por parte del alumnado al mostrado cuando se ha preguntado directamente por dicho concepto; diferencia algo superior en el

caso de los chicos ($X_{chicas} = 3.12$; $X_{chicos} = 3.5$), aunque las diferencias no son estadísticamente significativas. De nuevo, parece que una nueva perspectiva de análisis hace aflorar conocimientos implícitos del alumnado.

-El razonamiento covariacional supone un cambio en los resultados, ya que el nivel alcanzado es menor que el de imagen de concepto ($X_{chicas} = 2.62$; $X_{chicos} = 2.25$). Este dato podría interpretarse como que esta perspectiva se ha trabajado en menor medida en el aula; sin embargo, con esta interpretación no se puede explicar por qué las chicas habrían alcanzado un mayor nivel de razonamiento covariacional, puesto que los datos presentados en apartados anteriores, parecían indicar que ellas transfieren en mayor medida el aprendizaje de aula -tal como había sido aprendido en la misma-. Esta diferencia entre chicas y chicos no es estadísticamente significativa.

7.5.1.4 Resumen de los conocimientos del alumnado en matemáticas y ciencias desagregados por sexo

Las diferencias entre alumnas y alumnos tanto en los resultados del examen como en los de las entrevistas no han sido estadísticamente significativas en ninguna de la subcategorías analizadas en esta investigación. Esta falta de significación estadística puede ser debida al pequeño tamaño de la muestra por tratarse de un estudio de caso.

7.5.2 Respecto a la relación con los niveles de ciencias

El análisis de las dificultades está relacionado con la categorización de niveles de conocimiento de ciencias (en física –F- y en química –Q-); en este apartado, se exponen los datos más destacados sobre los niveles.

Tanto en química como especialmente en física los chicos obtienen resultados algo mejores que las chicas. El número de chicos que se encuentra en el nivel máximo en física y en química (F4 y Q4) es ligeramente superior al de chicas (23% de los chicos frente al 18% de las chicas en química y 15.4% de chicos frente a ninguna chica en física) y en el nivel más bajo (F1 y Q1) el porcentaje de chicas (54.5% en química y 72.7% en física) es superior al de chicos (30.7% en química y 53.8% en física), especialmente en física. En la figuras 7-63 y 7-64 se muestran los resultados con mayor detalle. No obstante, no hay diferencias sustanciales en las medias de ambos sexos, si bien prevalecen mejores resultados por parte de los chicos.

Tabla 7-39

Transferencia de conocimiento matemático y niveles de conocimiento científico por sexo

Relación entre el nivel de transferencia de Matemáticas I y II y el nivel de ciencias por sexo					
Sexo	Conocimiento matemático		Conocimiento científico		
	Matemáticas I	Matemáticas II	Física	Química	Ciencias
Chica	1.95	2.28	1.32	2.09	1.70
Chico	2.27	2.40	1.85	2.38	2.12

Los chicos parecen mostrar un mayor nivel de competencia tanto en ciencias –física y química- como en matemáticas; sin embargo, durante la entrevista no resulta claro en qué dirección puede haberse producido la influencia, del conocimiento científico hacia matemático o a la inversa. En el examen, los resultados de las chicas son mejores que los de los chicos; sin embargo, los dos chicos que han dejado el examen casi en blanco (2A5** y 2A11*) manifiestan una mejora importante durante la entrevista, así se sitúan en los niveles M2 y M4 en matemáticas respectivamente.

Estos resultados podrían indicar que los errores observados en las chicas en cuanto a la construcción del modelo de situación se encuentran más alejados que los de los chicos, de los conocimientos aceptados por la comunidad científica de cada disciplina. En el nivel de física, concretamente en la situación de la montaña rusa, tal vez podría haber influido el hecho de haber montado o no en dicha atracción, ya que un 54.54% de chicas ha montado frente al 69.23% de los chicos y las medias en esta situación son de 1.55 para las chicas y un 1.92 para los chicos. Sin embargo en las otras dos situaciones las razones tendrían que ser de otra índole.

Los siguientes datos pretenden profundizar en lo sucedido; por ello, se comparan los resultados en función de si se han trabajado las funciones a través de la aplicación de la UD o no.

A la vista de los datos mostrados en la tabla 7-40, se observa una relación entre el hecho de haber trabajado durante la investigación las funciones o no haberlo hecho y los conocimientos científicos, especialmente en el caso de los chicos. Sin embargo, apenas se detectan diferencias en el caso de las chicas, con resultados similares en ambos casos, excepto en química donde la diferencia entre las chicas de los grupo 1A y 2A con respecto

a las del grupo 3B es superior (.58) a la diferencia entre los chicos de los grupos 1A y 2A respecto a los del grupo 3B. (.3).

Tabla 7-40

Transferencia de conocimiento matemático I y niveles de conocimiento científico por sexo en relación al trabajo con funciones

Relación entre el nivel de transferencia de conocimiento matemático I y el nivel de ciencias por sexo				
Sexo	Conocimiento matemático		Conocimiento científico	
	Matemáticas I	Física	Química	Ciencias
Chicas (funciones)	1.96	1.38	2.25	1.81
Chicas (no funciones)	2	1.17	1.67	1.42
Chicos (funciones)	2.60	2	2.5	2.25
Chicos (no funciones)	1.73	1.6	2.2	1.9

Los datos de los alumnos parecen indicar, en mayor medida que los de las alumnas, que existe relación entre el nivel de conocimiento de matemáticas I y ciencias, pero no aporta posible direccionalidad en los resultados; es decir, no parece indicar si el nivel de matemáticas o de ciencias es el que ha influye en mayor medida en los resultados.

Es revelador el resultado de las chicas que han trabajado las funciones a través de la aplicación de la UD, ya que a pesar de tener un conocimiento mayor en ciencias –más adecuado desde el punto de vista formal– que las chicas que no han aplicado la UD, sus resultados a nivel de interpretación, son inferiores a las de sus compañeras. Una de las explicaciones posibles, seguramente no suficiente, es el hecho de que no hay ninguna alumna de nivel bajo en el grupo 3B, y en una muestra muy pequeña (estudio de caso) esto podría haber distorsionado los resultados. Por otra parte, el peor resultado de las alumnas que han trabajado la UD, se encuentra relacionado con el grupo 2A – su media ha sido bastante inferior-. Por el contrario, las alumnas del grupo 1A han superado a las del grupo 3B. Estos datos, por otra parte, reflejarían lo expuesto previamente en varias ocasiones, mientras que el trabajo realizado en el aula en el área de matemáticas sí parece haber influido positivamente en las chicas del grupo 1A no podría decirse lo mismo del grupo 2A.

Las matemáticas I engloban la tarea de translación y predicción; por todo ello, se ve necesario el desglose de ambas tareas en la siguiente tabla 7-41.

Tabla 7-41

Relación entre el nivel de transferencia y el nivel de conocimiento científico por sexo

Nivel de transferencia y nivel de ciencias por sexo						
Sexo	Transferencia			Conocimiento científico		
	Tarea de translación	de	Tarea de predicción (PE)	Física	Química	Ciencias
Chica	1.98		1.95	1.32	2.09	1.70
Chico	2.26		2.27	1.85	2.38	2.12

Los datos parecen revelar un menor nivel competencial de las chicas, menor transferencia, en la entrevista tanto en el nivel de ciencias como en el nivel de transferencia en las tareas de translación y predicción. Esta diferencia entre sexos, se analiza en la tabla 7-42 teniendo en cuenta si han trabajado previamente o no las funciones en el aula a través de la aplicación de la UD.

Tabla 7-42

Relación entre el nivel de transferencia de conocimiento matemático I y el nivel de ciencias por sexo

Nivel de transferencia de conocimiento matemático I y nivel de ciencias por sexo						
Sexo	Transferencia			Conocimiento científico		
	Tarea de translación	de	Tarea de predicción (PE)	Física	Química	Ciencias
Chicas (funciones)	1.95		1.88	1.38	2.25	1.81
Chicas (no funciones)	2.07		1.67	1.17	1.67	1.42
Chicos (funciones)	2.53		3	2	2.5	2.25
Chicos (no funciones)	1.52		1.2	1.6	2.2	1.9

A la luz de estos nuevos datos podría suponerse que las chicas que han trabajado las funciones durante la investigación muestran menor transferencia en la translación que las chicas que no han trabajado las funciones ya que el nivel de ciencias de aquellas es superior al de éstas. El resultado ha sido bastante distinto en la tarea de predicción superando las alumnas que han trabajado las funciones a las que no lo han hecho. El nivel de los chicos que han trabajado las funciones, tanto en la tarea de translación como en la de predicción es bastante superior al de sus compañeros que no han trabajado las funciones.

El análisis de lo sucedido con las alumnas de los grupos 1A y 2A podría aportar los datos que pudieran explicar las diferencias en los resultados entre las chicas que han trabajado las funciones y las que no lo han hecho.

Tabla 7-43

Relación entre el nivel de transferencia y el nivel de ciencias por sexo en los grupos 1A y 2A

Sexo y grupo	Transferencia		Conocimiento científico		
	Tarea de translación	Tarea de predicción (PE)	Física	Química	Ciencias
Chica 1A	2.2	2.25	1.25	2.75	2
Chica 2A	1.7	1.5	1.5	1.75	1.63
Chico 1A	2.75	3	2	2.75	2.38
Chico 2A	2.3	3	2	2.25	2.13

Los datos de la tabla 7-43 parecen indicar que las alumnas del grupo 2A habrían provocado un menor nivel de transferencia por parte de las chicas en las tareas de translación y de predicción, ambas caracterizadas por la interpretación.

Por otra parte, los datos de la tabla 7-44 de nuevo, parecen indicar mejor nivel de transferencia de los chicos en comparación con las chicas en cuanto a las translaciones TDGf y TDGq se refiere ; además la transferencia parece estar relacionada con el nivel en ciencias (ver tabla 7-44).

Tabla 7-44

Relación entre el nivel de transferencia y el nivel de ciencias por sexo

Sexo	Transferencia		Conocimiento científico		
	Tarea de translación		Física	Química	Ciencias
	Situación>gráfico				
	TDGf	TDGq			
Chica	1.45	2.18	1.32	2.09	1.70
Chico	2	2.31	1.85	2.38	2.12

Al igual que en otras ocasiones ya analizadas previamente, el análisis de las diferencias en los resultados entre los grupos que han trabajado las funciones y los que no

lo han hecho durante la investigación, podría dirigir su interpretación en un sentido determinado.

Tabla 7-45

Relación entre el nivel de transferencia de conocimiento matemático I y el nivel en ciencias por sexo

Sexo	Nivel de transferencia de conocimiento matemático I y el nivel en ciencias por sexo				
	Transferencia		Conocimiento científico		
	TDGf	TDGq	Física	Química	Ciencias
Chicas (funciones)	1.38	2.13	1.38	2.25	1.81
Chicas (no funciones)	1.67	2.33	1.17	1.67	1.42
Chicos (funciones)	2.13	2.88	2	2.5	2.25
Chicos (no funciones)	1.8	1.4	1.6	2.2	1.9

Según los resultados de la tabla 7-45, la transferencia en la tarea de translación TDGq podría estar relacionada con el nivel de interpretación, ya que las chicas que no han trabajado las funciones poseen menor nivel de química y sin embargo obtienen mejores resultados TDGq que las alumnas de los subgrupos 1AA y 2AA. Por otro lado, la diferencia de conocimiento en química de los chicos que han trabajado las funciones y no lo han hecho, no parece explicar la diferencia importante en resultados TDGq en los chicos. Tampoco un mayor nivel en física de las alumnas de los grupos 1A y 2A conlleva un mayor nivel de transferencia TDGf.

Por otra parte, se muestran los resultados de los grupos que han aplicado la UD por sexo.

Tabla 7-46

Relación entre el nivel de transferencia en TDGf y TDGq y el nivel en ciencias por sexo

Sexo y grupo	Nivel de transferencia en TDGf y TDGq y nivel en ciencias por sexo				
	Transferencia		Conocimiento científico		
	TDGf	TDGq	Física	Química	Ciencias
Chica 1A	1.25	2.5	1.25	2.75	2
Chica 2A	1.5	1.75	1.5	1.75	1.63
Chico 1A	2.25	3	2	2.75	2.38
Chico 2A	2	2.75	2	2.25	2.13

Los resultados referidos a las transferencias TDGf y TDGq parecen indicar que el trabajo realizado en el aula no ha ayudado al alumnado del grupo 2A y a las alumnas del

grupo 1A a superar las dificultades que han mostrado en el contexto de física: En el contexto de química, la labor del aula no parece haber ayudado a las alumnas tanto como a los chicos, de modo especial a las del grupo 2A. Parece por lo tanto, que han sido los chicos los que podrían haber tenido una influencia positiva general del trabajo realizado en las aulas.

Como conclusión se exponen los resultados de los grupos 1A y 2A y las transferencias generales mostradas en matemáticas I y II.

Tabla 7-47

Relación entre el nivel de transferencia de conocimiento matemático y el nivel de ciencias por sexo

Sexo y grupo	Conocimiento matemático			Conocimiento científico		
	Matemáticas I	Matemáticas II	Matemáticas	Física	Química	Ciencias
Chica 1A	2.21	2.44	2.32	1.25	2.75	2
Chica 2A	1.67	2.11	1.89	1.5	1.75	1.63
Chico 1A	2.79	2.44	2.61	2	2.75	2.38
Chico 2A	2.42	2.36	2.39	2	2.25	2.13

Los resultados indican un mayor nivel de transferencia por parte de los chicos en ambos grupos, aunque el nivel de química de los chicos del grupo 2A haya sido inferior al de las chicas del grupo 1A.

Mientras que el nivel global que alcanzan las chicas es similar al de ciencias en general, los chicos muestran mejoría del nivel de matemáticas respecto al de ciencias. Parece por lo tanto, que durante la entrevista los chicos utilizan en mayor medida que las chicas el trabajo realizado en el aula

Las diferencias de cada sexo a lo largo de la investigación plantean la necesidad de analizar la evolución entre chicos y chicas desde el examen a la entrevista, es decir entre una transferencia cercana que ha sido mayoritariamente analizada a través del examen y una transferencia lejana, localizada sobre todo en la entrevista.

7.5.3 Evolución de los resultados del alumnado por sexo

En este apartado se pretende ofrecer una perspectiva general de lo sucedido desde el examen hasta la entrevista. Para ello se presentan los siguientes datos.

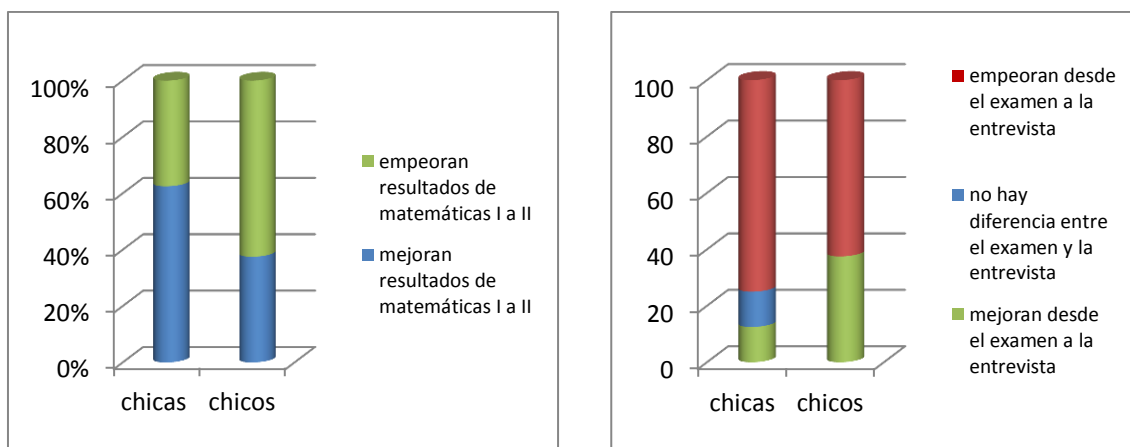


Figura 7-79. Evolución dentro de la entrevista desde Matemáticas I a Matemáticas II y desde el examen a la entrevista y por sexo.

Los resultados comparativos entre matemáticas I y II muestran una tendencia de mejora en las chicas desde las tareas de interpretación –englobadas en matemáticas I- a las tareas de construcción –englobadas en matemáticas II (.34 de media de las chicas frente a -.16 en los chicos). Los datos podrían reforzar la explicación de que las chicas se sienten más competentes en las tareas de carácter más “matemático”, entendido éste como aquellas tareas que no priorizan la interpretación de situaciones científicas. Las tareas de carácter más matemático han tenido un peso muy importante en la actividad de aula, no equilibrado, sobre todo en el grupo 2A, con las actividades referidas a la interpretación de gráficos. Este hecho podría estar relacionado con el estilo de las chicas en el aula, en el sentido de que parecen ser más continuistas con el modo en que se ha trabajado en el aula. A modo de ejemplo, se recuerda que son las chicas las que detallan el proceso a seguir para hallar el punto de encuentro, tal como ha sido aprendido en el aula, o las que a la hora de escoger la ecuación acorde al gráfico escogido en la situación de la pelota, lo razonan diciendo que es así como lo han trabajado en clase de matemáticas.

Por otro lado, los resultados de las chicas en la entrevista en general, son peores a los obtenidos en los exámenes; la entrevista ha supuesto una transferencia lejana en cuanto a tipo de tareas y transferencia media en cuanto al tiempo transcurrido hasta que se ha llevado a cabo.. Las chicas disminuyen una media de -.33 desde el examen a la entrevista, mientras que los chicos aumentan una media de .23. Como conclusión, podría decirse que la entrevista ha beneficiado a los chicos en general; no así a las chicas. No obstante, es

necesario destacar que los chicos 1A13**, 2A11* y 2A5** obtienen resultados mejores en la entrevista que en el examen.

El nivel de interacciones profesorado-alumnado durante el desarrollo de la UDha destacado por un refuerzo negativo por parte de las profesoras, distinto para cada sexo. Mientras que en el grupo 1A un 68.2% de los refuerzos negativos han sido para las chicas, en el grupo 2A lo han sido para los chicos, con un 63.6%. Las chicas del grupo 1A han sufrido una disminución de -.036 del examen a la entrevista; por ello, no podría descartarse la posible influencia del refuerzo negativo realizado por la profesora. Este tipo de interacción ha podido crear inseguridad en las alumnas a la hora de enfrentarse a situaciones nuevas. En el caso de los chicos del grupo 2A, podría sugerirse que ese refuerzo negativo no ha tenido influencia en sus resultados.

Todas estas diferencias hacen preguntarse si existe un tipo de transferencia mostrado en mayor medida por los chicos o por las chicas.

7.5.4 **Relación entre los resultados de matemáticas y ciencias y la gestión motivacional**

En este apartado se trata de explicar los resultados obtenidos y la transferencia producida teniendo en cuenta la gestión motivacional de las alumnas y los alumnos por separado. Para ello, se aportan los datos correspondientes al cuestionario de gestión motivacional realizado por el alumnado. Hay que mencionar que a este instrumento (cuestionario de gestión motivacional) ha habido un alumno que ha respondido, –a diferencia de todos los datos anteriores–, ya que no ha sido posible localizarlo porque se encuentra del centro.

El cuestionario de gestión motivacional se encuentra organizado en tres escalas teóricas: gestión de las creencias, gestión de los motivos y el valor, y gestión afectiva. Las respuestas a los ítems se realizaron sobre la escala Likert de cinco puntos (1=nunca, 5=siempre).

Las chicas muestran menores valores en las tres escalas analizadas.

Tabla 7-48

Resumen de los resultados del Cuestionario de Gestión Motivacional por sexo

Resultados del Cuestionario de Gestión Motivacional por sexo		
	chica	chico
Escala de gestión de creencias	2.94	3.11
<i>Activación de creencias de autoeficacia</i>	3.28	3.54
<i>Generación de expectativas positivas de resultado</i>	3	2.89
<i>Potenciación del control percibido</i>	2.54	2.91
Escala de gestión de los motivos y el valor	2.79	3.38
<i>Evocación de motivos de aprendizaje</i>	2.78	3.18
<i>Evocación de motivos de rendimiento</i>	3.13	3.07
<i>Evocación de motivos de aprobación social</i>	2.75	3.52
<i>Fomento del valor de la tarea</i>	2.62	3.29
<i>Administración de refuerzos extrínsecos</i>	2.83	3.67
Escala de gestión afectiva	2.18	2.82
<i>Control de la ansiedad</i>	2.88	3.71
<i>Fomento de la competitividad</i>	1.65	2.09
<i>Evocación de pensamientos pesimistas</i>	2	2.67

Por otra parte, se exponen los resultados de autoeficacia en matemáticas y ciencias; datos que se registran en la la primera parte de la entrevista.

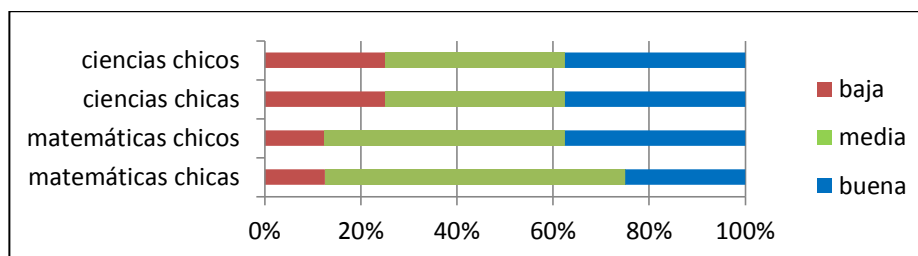


Figura 7-80. Niveles de autoeficacia en matemáticas y ciencias por sexo.

Tanto los resultados del cuestionario de gestión motivacional como los de la entrevista sugieren que la autoeficacia de las chicas es algo menor a la de los chicos, aunque en ciencias ambas sean similares. El control percibido también es mayor en los chicos; sin embargo, no parece que la gestión de creencias -no muy diferente entre ambos sexos y superior en las chicas-, pueda explicar los resultados más positivos en transferencia de los chicos tanto en Matemáticas I como en Matemáticas II.

Una explicación más plausible hace pensar en la gestión afectiva, ya que es ésta la que muestra una diferencia destacada entre ambos sexos. Un menor nivel de autoeficacia en matemáticas y en general por parte de las chicas, acompañado de un menor control de la ansiedad podría haber influido en su rendimiento en las tareas de la entrevista –medio distinto al habitual para llevar a cabo una evaluación y además con un componente

contextual no trabajado en el aula. Además los chicos manifiestan un mayor control percibido, lo que puede también haber influido en que se sientan más capaces de afrontar los nuevos retos en la entrevista. A este hecho, hay que añadir que en el grupo 1A, durante la aplicación de la UD, el 68.2 % de las críticas –refuerzo negativo de la profesora- ha estado dirigido a las chicas, y éstas (chicas del grupo 1A) han mostrado un 2.88 autoeficacia y un 2.44 en gestión de ansiedad. En este caso podría haberse dado una mayor influencia de lo sucedido en clase y posteriormente verse reflejado en la entrevista –ellas han sido las que han sufrido mayor descenso desde el examen a la entrevista, -0.36 de media por alumna). El caso de los chicos del grupo 2A sería muy distinto. Los chicos de este grupo han recibido el 63.6% de las críticas de la profesora durante la aplicación de la UD, sin embargo, estos chicos muestran 3.83 en autoeficacia y un 4.25 en gestión de ansiedad, por lo que tal vez, el refuerzo negativo de la profesora en el aula no les haya influido en sus resultados, y así hayan mejorado sus resultados desde el examen a la entrevista. Por otro lado, se hace necesario recordar que dos chicos de este grupo han dejado el examen casi en blanco.

7.5.5 Resultados de matemáticas y ciencias y gusto por dichas áreas

El gusto por las matemáticas y las ciencias muestra indicios de grandes diferencias en lo que respecta a estas dos áreas entre las chicas y los chicos, así como entre ambas disciplinas.

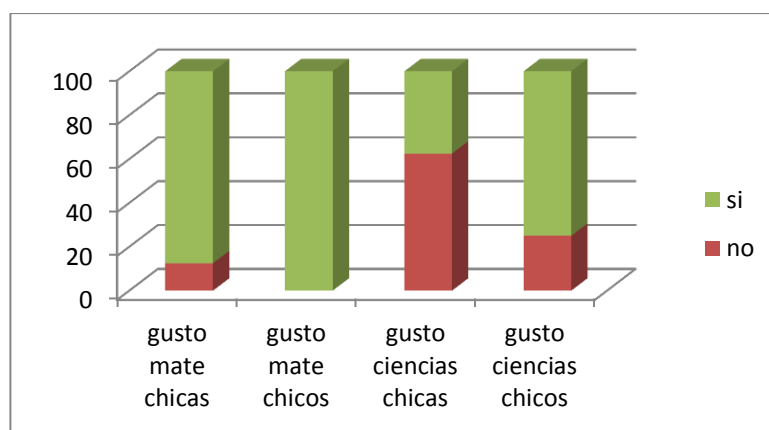


Figura 7-81. Gusto por las matemáticas y las ciencias por grupo.

Si bien la autoeficacia en ciencias ha sido parecida en ambos sexos, el escaso gusto por las ciencias de las chicas podría explicar, en parte, que ellas no se sientan cómodas en

esta área. Este dato unido a los expuestos en el apartado anterior podría haber influido en la menor transferencia desde el área de matemáticas al área científica con componente matemático en la entrevista.

La diferencia entre el gusto por las matemáticas y por las ciencias entre chicas y chicos necesitaría un nuevo tipo de análisis con cuestiones particulares sobre qué tipos de actividad gustan más a las chicas que a los chicos, y su relación con aquellas que se realizan en mayor medida en el área de matemáticas o en la de ciencias.

7.5.6 Preferencia por tipo de tarea y su organización

La diferencia entre chicos y chicas parece que no sólo estriba en el gusto hacia las asignaturas sino que también sobre el tipo de tareas y organización del aula para el desarrollo de dichas tareas.

La diferencia de preferencia entre sexos en cuanto a tipo de tareas se refiere: los chicos indican en gran medida el gusto por las actividades prácticas y las chicas prefieren las actividades de tipo puramente matemático –caracterizadas en general por el uso de algoritmos y muchas veces con mucho trabajo personal –, podría explicar, en parte, por qué ellos indican mayor gusto por las ciencias que ellas y por qué ellas se sienten más seguras en clases de matemáticas que en clases de ciencias.

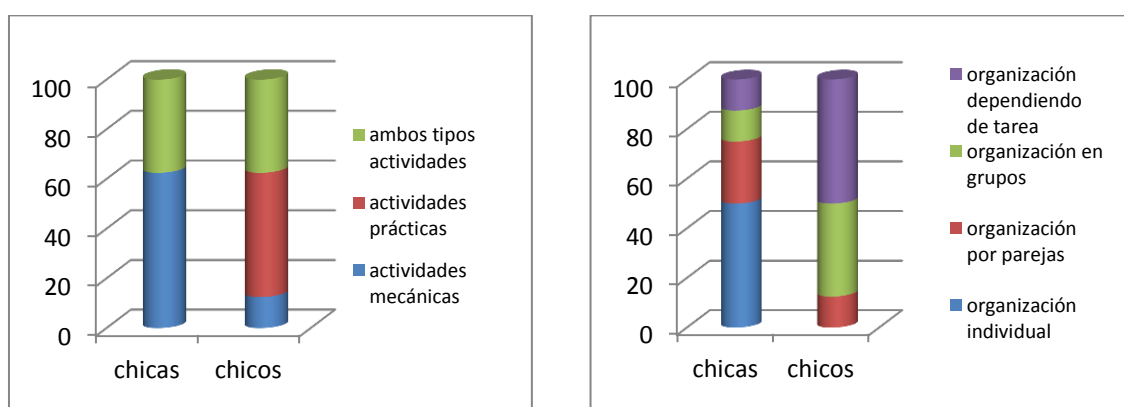


Figura 7-82. Preferencias por tipo de tarea y organización de aula para llevarla a cabo por sexo.

Por otro lado, cabría sugerir que las chicas prefieren en mayor medida, actividades de carácter mecánico, que requieren un componente memorístico importante, pero que difícilmente pueden responder correctamente cuando se plantea una nueva situación diferente a las trabajadas en el aula. Esta posible explicación se ve reforzada por los datos

que muestran cómo dos chicas indican la elección de la ecuación que lo hacen porque lo han dado así.

Por otro lado, esta diferencia de gustos, podría explicar por qué los chicos en mayor medida, hallarían el punto de encuentro de modo práctico, bien utilizando el propio gráfico o incluso realizando la práctica de laboratorio, antes que utilizando las matemáticas. Sin embargo, esta decisión no sería acertada en un experimento, ya que para ello, el alumnado tendría que utilizar también el instrumento matemático.

Por otro parte, el gusto manifestado por las chicas al preferir una organización individual a la hora de realizar las tareas, parece ser acorde con la preferencia por actividades más mecánicas; por consiguiente, no parece prioritario para algunas de ellas, la construcción conjunta del conocimiento entre varias personas. No obstante como ha podido observarse a lo largo de la investigación, han sido los momentos de intercambio comunicativo –grupo 1A- los que han ayudado a una construcción más adecuada de lo que es una variable independiente y dependiente, por ejemplo.

Si bien la mayor parte de los datos provienen de la entrevista, parece necesario analizar las fortalezas y debilidades que muestran los chicos y las chicas en la transferencia.

7.5.7 En cuanto al grado de transferibilidad en los cuales destaca cada sexo

A tenor de todos los datos mostrados anteriormente podría interpretarse que el nivel de transferencia alcanzado por las chicas ha sido menor al realizado por los chicos en casi la totalidad de las tareas propuestas; sin embargo ellas han destacado en tareas como la construcción de la ecuación acorde con las funciones del contexto de solubilidad, con un nivel algo superior al de ellos. Por otra parte, parece apreciarse una mayor utilización, por parte de ellas de argumentos matemáticos en aquellas actividades que recuerdan en mayor medida a las trabajadas en el aula y que por lo tanto tendrían, un sentido más mecánico. Sin embargo a diferencia de los alumnos, la utilización de dichos argumentos disminuye cuando la actividad no está tan relacionada con la tarea del aula.

A la hora de indicar el procedimiento seguido en el aula para hallar el punto de encuentro las alumnas son más organizadas y concretas que los alumnos.

Las chicas muestran mayor influencia de las tareas matemáticas; ejemplo de ello es que también utilizan en mayor medida variables no contextuales, pero a su vez muestran en mayor medida que los chicos, que las variables contextuales y las matemáticas significan

lo mismo y por lo tanto, que son equivalentes. Sin embargo, cuando los requerimientos son más contextualizados y más distantes de las actividades de aula muestran menor nivel de transferencia que los chicos.

En cuanto al conocimiento de física mientras los chicos parecen mostrar una tendencia a considerar la potencia, la velocidad y la fuerza como propiedades intrínsecas al objeto en movimiento, las chicas consideran la velocidad como algo extrínseco al objeto en movimiento y esto podría identificarse como un paso importante de cara a la adquisición del conocimiento científico, ya que en este caso la referencia del fenómeno no estaría, en principio, tan ligada al objeto en movimiento, sino más al principio físico.

Estas diferencias hacen necesaria una reflexión sobre las medidas a adoptar en la enseñanza de las funciones en relación a los contextos científicos para que las fortalezas que han sido demostradas sean reforzadas y las debilidades subsanadas.

8 CAPÍTULO DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

1. Discusión de los resultados

2. Conclusiones

3. Limitaciones del estudio

4. Perspectivas de futuro

8.1 Discusión de los resultados

En esta tesis se ha estudiado qué y cómo estudiantes de 15-16 años transfieren conocimientos aprendidos en el aula de matemáticas a la interpretación de gráficos funcionales en los que el contenido es propio de las clases de ciencias. Se ha tenido en cuenta, además del punto de vista de la persona experta, el punto de vista del actor que lleva a cabo la transferencia –el, la estudiante-, todo ello relacionado con el modelo didáctico del aula y con la especificidad que, desde la perspectiva de género, haya podido tener en todo ello la variable sexo.

Las conclusiones se han organizado alrededor de las preguntas de investigación relacionadas con los objetivos de la tesis:

- Objetivo 1. *Analizar los resultados de la transferencia de conocimientos matemáticos en la resolución de problemas en situaciones contextuales cotidianas y científicas que impliquen el concepto de función.*
 - Pregunta 1.1 *¿Qué transfiere el alumnado de lo aprendido y a qué nivel lo hace?*
 - Pregunta 1.2 *¿Influye el estilo de aprendizaje en la transferencia?*

- Objetivo 2. *Identificar las relaciones entre el estilo docente y los tipos de transferencia que presenta el alumnado de 3º de ESO en la resolución de problemas científicos que comportan aplicar el concepto de función.*
 - Pregunta 2.1 *¿Qué relación se identifica entre el estilo interactivo docente y la transferencia del concepto función en situaciones contextualizadas?*
 - Pregunta 2.2 *¿Qué relación se identifica entre una mayor o menor contextualización de la enseñanza y la transferencia del concepto función en situaciones contextualizadas?*

- Objetivo 3. *Analizar los tipos de conocimiento transferido que relacionan los conocimientos matemático y científico y los factores que los condicionan.*
 - Pregunta 3.1. *¿Se podría establecer alguna relación entre las transferencias científica y matemática?*
 - Pregunta 3.2 *¿Qué tipo de actividades didácticas son más idóneas para la transferencia?*
 - Pregunta 3-3 *¿Qué aspectos motivaciones y actitudinales influyen en la transferencia?*

- Objetivo 4. *Analizar el grado de transferibilidad desde la perspectiva de género*
 - o Pregunta 4.1 *¿Cuál ha sido la incidencia de la variable sexo en la transferibilidad observada?*

Por último, a la vista de los resultados se aportan algunas propuestas didácticas, sin pretensión de generalización, al haberse tratado de un estudio de caso.

8.1.1 Relación entre la transferencia y el contexto de aplicación

Durante décadas han sido muchas las investigaciones que han puesto en tela de juicio que se pueda producir una transferencia de conocimiento real a partir del proceso de enseñanza llevado a cabo en el aula. Este apartado pretende aportar datos sobre si esta concepción se ajusta a la realidad, en concreto sobre si el alumnado transfiere aprendizajes sobre el modelo de función y su relación con el contexto de aplicación. En este sentido, dos son las preguntas o dudas planteadas.

La primera se refiere a si un contexto cercano supone siempre una transferencia cercana y, al mismo tiempo, un contexto lejano una de lejana, o si la transferencia es algo más complejo que la simple asociación con un tipo de contexto. Los resultados de esta investigación, coherentes con los hallados por Lobato (2003), sugieren que el concepto de transferencia es inherentemente complejo ya que un mismo contexto cercano puede suponer una transferencia cercana para una o un estudiante y lejano para otro u otra por encontrarse fuera de la zona de desarrollo próximo (ZDP).

También cabe preguntarse si el alumnado sólo transfiere, en el sentido de aplicar lo aprendido en el nuevo contexto, o si además es capaz de aprender en el marco del nuevo contexto a partir de utilizar los conocimientos adquiridos en el aula. Los datos obtenidos indican que el alumnado que ha trabajado las funciones a partir de la aplicación de la UD propuesta (como se discutirá más adelante, con sus adaptaciones) es más capaz que el que no la ha trabajado, no sólo de transferir conocimientos asociados al modelo de función, sino también de aprender al utilizarlo en la interpretación de nuevos hechos o fenómenos en el contexto de aplicación. Este hecho indicaría que disponen de una preparación mejor para continuar y profundizar en la construcción del modelo de función.

Para validar estas afirmaciones, en este estudio se han comparado ideas y argumentos expresados por tres grupos-clase de distinto nivel en conocimiento matemático –los grupos 1A y 2A con conocimientos de 3ºESO (han trabajado la UD diseñada para esta

investigación) y el grupo 3B con conocimientos de 2º ESO- y se han identificado las transferencias realizadas por dicho alumnado en distintos contextos de aplicación.

Se han considerado como contextos cercanos los trabajados en el aula –contexto cotidiano y contexto académico-, y se relacionan con la transferencia próxima (Haskell, 2001) tanto por la cercanía en el tiempo –se preguntó a todo el alumnado de los grupos 1A y 2A inmediatamente después de haber finalizado el trabajo con la UD, mediante un examen final-, como porque los contextos planteados en el examen han sido muy parecidos a los trabajados en el aula. En cambio, se ha considerado como contexto lejano las situaciones de física y de química planteadas, que se relacionan con la transferencia lejana (Haskell, 2001) por su distancia en el tiempo (se preguntó sobre ellas 12 días después del estudio de las funciones, mediante entrevistas realizadas a una muestra de estudiantes de dichos grupos y también a estudiantes del grupo 3B) y porque los contextos planteados –cinemática (situación de la pelota y situación de la montaña rusa) y solubilidad- no se han estudiado en profundidad en las clases de ciencias, -sólo ha sido trabajado dicho concepto de modo cualitativo-, por lo que el alumnado ha partido del denominado conocimiento de “sentido común” en relación a estos contenidos científicos. Pero, la transferencia a un nuevo contexto exige activar no sólo un modelo matemático sino también un modelo científico –como es el caso que ocupa a los contextos identificados como lejanos-; por lo tanto, es de esperar que exista un obstáculo si no se han aprendido los dos modelos –matemático y científico- de forma significativa.

Por otro lado, la clasificación de tipos de transferencia expuesta no explica por sí sola los aciertos o dificultades del alumnado al intentar aplicar ideas aprendidas, ya que la transferencia depende de más variables. Así, diSessa y Wagner (2005) en referencia a la transferencia distinguen entre la *transferencia de clase A*, propia de las personas bien preparadas caracterizada porque parten de un modelo teórico suficientemente general que activan para aplicarlo a distintos contextos nuevos (es la estudiada en estudios psicológicos); la *transferencia de clase B*, que es aquella que supone un esfuerzo persistente por parte de cada estudiante, y en la que el conocimiento está suficientemente construido para que la transferencia pueda darse en periodos de tiempo aceptables (en unas pocas horas o días), utilizando para ello los recursos de aprendizaje y otros que podrían estar disponibles en el contexto de la prueba de transferencia; y la *transferencia de clase C*, que se refiere a cómo utiliza el alumnado relativamente preparado sus conocimientos previamente aprendidos en los primeros trabajos en un nuevo dominio, es decir, si el

alumnado reutiliza el aprendizaje previo mediante la asociación en el nuevo contexto, por ejemplo, de ejemplos concretos aprendidos o realizando analogías, ya que la transferencia se define como la generalización del aprendizaje. El trabajo de investigación realizado trata de profundizar en la transferencia de clase C, ya que es la que puede aportar indicadores sobre cuáles son los factores que pueden ayudar al logro de la transferencia de clase A. La transferencia de clase B se identifica mediante el examen, pero es analizada junto a la transferencia de clase C.

Para analizar la transferencia que lleva a cabo el alumnado se han tenido en cuenta sus sus respuestas del alumnado a las cuestiones propuestas en relación a las distintas situaciones planteadas, ya sea las del examen (cotidianas y académicas), ya sea las de la entrevista (contexto científico), teniendo en cuenta las tareas que se requieren al aplicar el modelo de función –traducción, predicción y clasificación-, y las acciones –interpretación y/o construcción- que sustentan cada una de dichas tareas.

En relación a ellas se han estudiado tanto los subconceptos transferidos, como los tipos de representaciones externas (descripción de la situación, tabla de datos, gráfico y expresión algebraica) y, sobre todo, las traducciones que comportan realizar transferencia y que se llevan a cabo entre estas representaciones (todos ellos caracterizan el modelo de función). Raramente se ha transferido un subconcepto en todos los contextos, ni en relación a todas las representaciones posibles, y tampoco en todas las traducciones llevadas a cabo. Existe una diferencia importante entre los conocimientos transferidos en un contexto cercano y los transferidos durante la entrevista, porque son los más cercanos en el tiempo y, además, porque son similares a los trabajados en el aula. No obstante, la transferencia de conocimientos en un contexto complejo y lejano –reflejado en el mapa (figura 8-1)-, indica que el alumnado investigado transfiere conocimientos parciales asociados al concepto de función y no transfiere el modelo globalmente como lo haría una persona experta (resultado coherente con el planteamiento de Lobato, 2003) y, además, que los transfiere en función de los conocimientos que tiene del contexto de aplicación, del modelo teórico asociado a él, y de la tarea encomendada.

La figura 8-1 muestra las transferencias –positivas (color verde) o negativas (color rojo, cuando no se produce transferencia)- que ha llevado a cabo el alumnado teniendo en cuenta tanto las tareas encomendadas, como el contexto en el cual se producen. El tipo de línea –continua, discontinua, gruesa y fina - trata de reflejar la magnitud de la transferencia, continua gruesa en el caso de que la gran mayoría del alumnado la hayan llevado a cabo y discontinua gruesa en el caso de que haya un número destacado de personas que la hayan realizado, pero sin constituir una transferencia total (por ejemplo, sólo en algunos momentos o en algunas cuestiones).

La discusión de los resultados que se presenta a continuación se lleva a cabo en función del tipo de contexto -cercano y lejano- y de la tarea realizada. Además, se añaden las dificultades asociadas al aprendizaje del concepto función (complejidad en la conceptualización del modelo con múltiples conceptos asociados, diversidad de traducciones entre representaciones, apropiación del lenguaje algebraico...), ya que se requiere de perspectivas integradas y coordinadas (diSessa y Wagner, 2005) para que un concepto pueda transferirse a contextos diversos y complejos.

a. Contexto cercano *versus* transferencia cercana

Aunque los exámenes de los grupos han sido distintos, más contextualizado en situaciones cotidianas en el grupo 1A y mayor contexto académico matemático en el grupo 2A, en ambos casos, se confirma la transferencia de partes asociadas al concepto de función, con mayor éxito por parte del grupo 1A en situaciones contextualizadas cotidianas –transferencia de clase B en el examen y de clase C durante la entrevista-.

En general, la realización del examen del grupo 1A requiere mayor autonomía que la del grupo 2A para llevar a cabo las traducciones entre las distintas representaciones externas asociadas al concepto de función. Además, en la prueba del grupo 1A se solicitan mayor número de traducciones y por el contrario, en el examen del grupo 2A, alguna de las traducciones (la tabla de datos o el gráfico) ya se da hecha en parte. Pero a pesar de que el apoyo dado en el examen al grupo 2A ha sido mayor que el recibido por el grupo 1A, como se verá, el grupo 1A lleva a cabo un nivel de transferencia más elevado.

A continuación se discute la transferencia realizada en las distintas tareas:

- La *tarea de translación* (caracterizada por la interpretación y la construcción) incluye diversas traducciones entre las diversas representaciones externas; puede decirse, que la que va desde la descripción de la situación a la tabla se produce en mayor medida que la producida desde la descripción de la situación al gráfico. El nivel de demanda para la resolución de este tipo de traducciones ha tenido características distintas en ambos grupos: mientras que el grupo 1A ha de interpretar y construir en su totalidad ambos tipos de representación, el subgrupo 2A recibe en el examen parte de la tabla realizada –se indican las variables, los kilómetros y los ejes cartesianos representados-, por lo que la interpretación y la construcción les fueron en parte facilitadas.

La construcción tanto del gráfico como de la expresión algebraica supone una complejidad mayor que la de la traducción, relativa a la coherencia entre las distintas representaciones -caracterizada por la interpretación-. La construcción del gráfico, tal como apuntan Goldenberg y Kliman (1988) lleva inherente el dominio en la construcción de la escala, algo que parece no haberse aprendido suficientemente, y que como consecuencia ha llevado a que la mayoría del alumnado del grupo 1A no haya podido calcular el punto de encuentro en la gráfica.

La complejidad de la construcción de la expresión algebraica es todavía mayor porque se necesita tener un dominio del lenguaje algebraico, tener aprendidos los conceptos de pendiente y ordenada en el origen–función afín-, y sus cálculos correspondientes, además de una interiorización correcta del lenguaje algebraico. Los resultados indican que el logro en esta tarea ha sido escaso por parte de los dos grupos.

No se han apreciado diferencias sustanciales entre la traducción desde la situación a la tabla de datos y la traducción desde el gráfico a la ecuación para un mismo contexto; no obstante, pudiera ser que el contexto cotidiano hubiera ayudado al alumnado a mostrar sutilmente mayor destreza en la primera traducción.

Durante la tarea de translación, la identificación de variables contextuales no ha supuesto dificultad para gran parte del alumnado, si bien es cierto, que el grupo 2A había recibido en el examen dichas variables expresadas en la tabla de valores o en el gráfico. Por otra parte, no se ha observado que el alumnado establezca una relación covariacional entre las variables contextuales, si bien esto no había sido un requerimiento expreso en ninguno de los exámenes. Sólo se han identificado aspectos parciales de relación entre las variables cuando se ha preguntado si el gráfico mostrado es una función (este punto se

desarrolla posteriormente en la discusión de resultados del apartado referido a la tarea de clasificación). –

- La *tarea de predicción* se ha llevado a cabo a partir de situaciones contextualizadas cotidianas y académico matemática. Primeramente, se comparan dos situaciones distintas relacionadas con la función afín (la ganancia relacionada con la venta de revistas y el coste de clases para obtener el carnet de conducir). En segundo lugar se analizan actividades que exigen hallar el punto de encuentro (en situación contextualizada cotidiana para el grupo 1A –elegir el mejor servicio de internet-, y en situación contextualizada académica para el grupo 2A).

Las tareas han supuesto bastante dificultad para el grupo 1A ya que ha alcanzado la mitad de la puntuación requerida (13 puntos de 24 puntos totales alcanzables por grupo; ver figura 8-1. Estos resultados indicarían que la tarea de predicción supone una transferencia lejana aunque el contexto en el que se ha enmarcado haya sido cercano. Este hecho podría entenderse si se tiene en cuenta que esta tarea, en mayor medida cuando se solicita calcular el punto de encuentro, necesita de la coordinación autónoma de conocimientos que el estudiante posee (diSessa y Wagner, 2005), es decir, una coordinación de clase para poder ser transferidos. Primeramente, es necesaria una interpretación coherente de la situación, posteriormente la translación de dicha interpretación a las diversas representaciones externas –tabla, gráfico y expresión algebraica- y finalmente la construcción de la expresión algebraica. Para ello, indudablemente, se ha de haber entendido el concepto de variable, así como, el de los subconceptos de pendiente y ordenada en origen. Por último, para hallar el punto de encuentro, se necesita además la destreza en la resolución de un sistema de ecuaciones que parte de haber interiorizado qué significa punto de encuentro y su relación con las dos ecuaciones construidas.

Si todo ello no se realiza, se produce una mala coordinación de clase. Ejemplos de ello, serían que gran parte del alumnado –sobre todo en el grupo 2A- haya utilizado la regla de tres para una función afín, sin tener en cuenta la ordenada en el origen, o que el alumnado no haya sabido traducir los datos de la tabla a la expresión algebraica; o los grandes problemas del grupo 2A en la construcción de expresiones algebraicas. A todo ello, cabe añadir el problema de escala identificado en el grupo 1A (éste es un requerimiento antes de hallar el punto de encuentro y, por lo tanto, básico para poder

continuar con la tarea). Goldenberg y Kliman (1988) destacan la dificultad de la escala, y supone una de las mayores fuentes de ilusiones gráficas visuales.

También ha sido relevante la dificultad del grupo 2A para construir las ecuaciones y hallar el punto de encuentro en el contexto académico matemático, ya que supone que todavía el grupo no ha conseguido superar los niveles de iniciación en la construcción matemática en el contexto mayoritariamente utilizado en el aula, hecho que podría haberse agudizado al tener que aplicar estas ideas en un contexto no matemático y lejano.

Los datos hallados son coherentes con los registrados en otras investigaciones (Markovits et al., 1986, Stein et al., 1989, Yerushalmy, 1989) en el sentido de que gran parte del alumnado, sobre todo del grupo 2A, ha tenido dificultad para identificar los datos necesarios para establecer la ecuación.

- La *tarea de clasificación* se ha analizado a partir del análisis del lenguaje matemático utilizado durante las argumentaciones expuestas y la clasificación de un tipo de función en referencia a otros. Además, se tiene en cuenta el modelo de función expresado por el alumnado del grupo 2A (sólo se ha preguntado a este grupo si la gráfica presentada es una función).

La falta de transferencia del lenguaje matemático en la mayoría de las argumentaciones expresadas al interpretar la situación planteada en un contexto cotidiano puede ser debida a dos tipos de razones, no excluyentes entre sí; la primera se relaciona con una deficiencia a nivel de instrucción –se ha utilizado poco el lenguaje matemático, tanto durante la descripción de las situaciones como durante la interpretación–, y la segunda con la posibilidad de que la utilización del lenguaje matemático en contexto requiera entender los subconceptos de un modo más integrado para poder aplicarlos a una nueva situación.

Por otra parte, el alumnado del grupo 2A manifiesta dos tipos de imagen de función descritos por Vinner y Dreyfus (1989) de *representación* y de *correspondencia*. Esto parece sugerir dos tipos de aprendizaje distintos por parte del alumnado; uno mayoritario de tipo aprendizaje memorístico-mecánico (que se queda en la superficialidad del concepto y, otro de tipo aprendizaje significativo en términos de Ausubel. El primero de ellos lo manifiesta la mayoría del alumnado frente al segundo que se ha identificado en dos alumnas. Entre estas alumnas, el caso de una de ellas era esperable, porque posee un nivel académico de matemáticas alto, mientras que el caso de la segunda no lo era tanto ya que

se trata de una estudiante de nivel académico medio. Ésta alumna ha expresado un esquema del concepto de función rico en contenidos asociados (pendiente, ordenada en el origen, ecuación general de las ecuaciones ($y=mx+n$), tipos de gráficos y características de los mismos). Sin embargo, durante la entrevista ha mostrado indicios de un aprendizaje memorístico y ha sido la única persona que no ha escogido la ecuación correcta en la situación de la pelota. Además en la situación de la solubilidad también ha manifestado problemas de interpretación, por lo que podría concluirse que se trata de una estudiante que parece que estudia bastante, pero no entiende suficientemente. Las argumentaciones dadas tanto por esta alumna como por otras y otros estudiantes en distintas demandas y situaciones demuestran, de acuerdo con diSessa y Wagner (2005) y Hammer, et al. (2005), que un análisis de la transferencia de conocimientos centrado sólo en un tipo de resultados es insuficiente para inferir el nivel de transferencia de conocimientos, ya que da lugar a conclusiones poco sustentadas en la globalidad, en la complejidad de los hechos y en la propia complejidad del conocimiento.

Como resumen se puede concluir que los resultados sobre la transferencia del concepto de función en un contexto cercano indican que no todos los subconceptos y traducciones entre las distintas representaciones poseen las mismas características, y que el éxito en la transferencia se encuentra supeditado tanto a la persona que transfiere y al tipo de tarea requerido como al contexto de aplicación. Así, el alumnado de ambos grupos ha obtenido sus mejores resultados en las traducciones desde la representación de la tabla a la representación gráfica e incluso en la coherencia entre las representaciones gráfica y la algebraica. Estos hechos indican que para ambos grupos la dificultad es mayor cuando la tarea requiere conectar el dominio matemático con otro (traducir desde la descripción de la situación al gráfico o a la tabla de datos). No obstante, el grupo 1A también mantiene niveles adecuados en este segundo tipo de traducción cuando el contexto es cotidiano.

Es decir, en estos niveles de enseñanza y a partir del trabajo realizado en el aula no se puede hablar de “transferencia del modelo función” (que sería la que caracterizaría una transferencia de tipo A), sino de transferencia de conceptos asociados a dicho modelo y de las distintas tareas que lo caracterizan (transferencia de tipo C). Pero, tampoco se transfieren siempre de la misma forma y con el mismo nivel de calidad ya que en función del tipo de contexto se transfieren mejor unos conocimientos que otros. Así, aunque los contextos del examen son considerados en esta investigación como contextos cercanos, la tarea de predicción, por ejemplo, podría considerarse como de transferencia lejana, ya que

se encuentra supeditada tanto a la interpretación de la situación como a la acción de construcción de las expresiones algebraicas correspondientes. Estas ecuaciones a su vez requieren la integración y coordinación de varios subconceptos (pendiente, ordenada en el origen) y el dominio del lenguaje algebraico para llevarlo a cabo, por lo que necesitan activarse varios modelos mentales a la vez, y coordinarlos todos.

Pero en la calidad de la transferencia también influye el estilo de aprendizaje de cada estudiante y sus características motivacionales académicas.

Consecuencias didácticas importantes serían, por un lado, que la aportación del profesorado es prioritaria para que la o el estudiante pueda desarrollar todo su potencial de aprendizaje en este proceso ya que sin una intervención que facilite el anclaje del nuevo conocimiento, lo que se trabaja en el aula parece encontrarse lejos de su zona de desarrollo potencial (ZDP). Y, por otro lado, que se profundice en cuál puede ser el enfoque inicial para la exploración de lo que se entiende por función y el papel que en ello tiene el contexto.

b. Contexto lejano *versus* transferencia lejana

Los contextos de física y química son considerados contextos lejanos porque la aplicación de conocimientos matemáticos en los mismos, requiere poseer ambos tipos de conocimiento por parte del alumnado, se encuentran alejados en el tiempo respecto al aprendizaje del modelo de función y las tareas solicitadas no son similares a las trabajadas en el aula y además para su interpretación también se necesitan conocimientos científicos. En este apartado se pretende ofrecer nuevas perspectivas respecto a las encontradas en la transferencia cercana, además de llevar a cabo una comparativa entre ambas.

La transferencia lejana llevada a cabo en los contextos científicos también indica que no se ha logrado transferencia de clase A –característica de las personas expertas– pero, sin embargo, sí se ha producido la transferencia de clase C, ya que han sido abundantes los casos de utilización del conocimiento previo por parte de la o del estudiante, aunque no siempre lo haya sido de modo productivo. Se estaría por lo tanto, ante un microcosmos donde es posible el análisis micro del proceso de aprendizaje y donde además será interesante analizar cuáles han sido las piezas de conocimiento coordinadas para que se haya producido la transferencia. El grado de transferencia, al igual que en el contexto cercano, se ha reflejado mediante líneas continuas o discontinuas en colores en la figura 1.

La diferencia de contexto no ha sido tan determinante en el contexto cercano porque la mayoría del alumnado posee un conocimiento muy parecido sobre las situaciones planteadas –ganancia sobre la venta de revistas, coste de las clases para sacar el carnet de conducir y la elección de la mejor tarifa de internet-. Sin embargo, en el contexto lejano, el alumnado ha mostrado diferencias de niveles de conocimiento tanto en referencia a la situación planteada como al modelo científico relacionado con la situación.

En este apartado dentro de cada una de las tareas analizadas, se han relacionado las transferencias identificadas con las ya descritas en el contexto cercano. Por otro lado, también se ha tratado de identificar, aunque sea de un modo micro, transferencias nuevas no señaladas en el contexto cercano. Por último, se ha comparado la transferencia realizada por los grupos en los que se ha aplicado la UD de las funciones respecto a la realizada por el grupo 3B (su nivel es el correspondiente a 2º de la ESO) a través de las tareas de translación y predicción.

- En la *tarea de translación* se han identificados niveles de transferencia distintos en función de las tres situaciones planteadas (ver trazado de líneas distinto en la figura 7-85). Los puntos más destacados en esta tarea hacen referencia a: traducción desde la descripción de la situación al gráfico y a la interpretación icónica realizada, la identificación de variables, el razonamiento covariacional y el lenguaje utilizado.

○ *La traducción desde la descripción de la situación al gráfico* de tipo icónico que lleva a cabo el alumnado en los dos contextos parece estar relacionada, según diversos estudios (McDermott et al., 1987 y Stein, et al, 1989), con la tendencia a confundir rasgos gráficos que corresponden a niveles pictoriales con aspectos de la situación, y también con el escaso trabajo llevado a cabo en ambas aulas (1A y 2A) sobre la interpretación icónica de gráficos.

En el contexto de física la traducción ha estado influenciada por un modelo de situación de trayecto –se identifica la posición como velocidad-, lo que ha llevado a la mayoría del alumnado a realizar una interpretación icónica de los gráficos (ver figura 8-1), y por lo tanto aflora poca diversidad en las ideas que tiene el alumnado sobre la velocidad y sobre las posibles traducciones entre lenguajes. La no identificación de variables del gráfico era previsible teniendo en cuenta diversas investigaciones recogidas por Leinhardt

et al. (1990). Podría decirse, que el conocimiento matemático no ha subsanado dificultades propias del conocimiento científico relacionado con el estudio de la cinemática.

La diferencia de resultados entre las dos situaciones de física –algo mejores en la situación de la montaña rusa- sugieren que la diferencia de contexto puede influir en algunas personas a la hora de reconstruir un modelo de situación cinemático. El lanzamiento de la pelota es una experiencia realizada por todas las personas en algún momento, donde el niño y la niña observan cuanto sube y baja la pelota; por lo tanto, la asociación entre la altura a la cual se encuentra la pelota–arriba y abajo- con la altura en el gráfico, podría haber dirigido enormemente la situación expuesta. La situación de la montaña rusa es conocida por las personas de esta edad y, aunque todos el alumnado no se haya montado en ella, tal vez, en algún caso, no lo hayan hecho por el miedo a una velocidad tan alta, cómo mínimo tienen una percepción de que la velocidad puede ser más o menos alta. Ello podría conducir a que el o la estudiante discerniera mejor entre trayecto y velocidad. Merecen especial mención dos alumnos de nivel académico medio que han mostrado el mayor nivel de transferencia en física. Ambos obtienen mejores resultados en la entrevista que en el examen. El primero es un alumno de carácter curioso, que pide incluso lanzar la pelota, posee alta autoeficacia en matemáticas y ciencias y además le gustan ambas áreas. El segundo, a lo largo de la aplicación de la UD pierde el interés, a pesar de gustarle las funciones, y como consecuencia de ello deja el examen prácticamente en blanco. Se trata de un alumno que se define como social –le interesa estar con sus amistades-, posee nivel de autoeficacia bajo tanto en matemáticas como en ciencias y le gustan las matemáticas, pero no las ciencias. Ambos poseen una gestión de la ansiedad elevada aunque muestran un nivel de gestión de la competitividad bajo. Este control de la ansiedad ha podido ayudarles en parte, para que sus resultados en la entrevista hayan mejorado.

La interpretación icónica identificada en la situación de solubilidad, aunque de manera menos intensa que en el contexto de física (reseñado con línea discontinua fina en figura 8-1) indica que este tipo de interpretación va más allá de la asociada a cambios en la trayectoria de un movimiento, que ha sido la estudiada mayoritariamente en las investigaciones (Leinhardt et al., 1990). Así, la estudiante 1A16* por ejemplo, indica (663-786) *“Bueno, subir no, bueno que va recto, que luego aquí la temperatura va subiendo”*. Por otra parte, no puede eliminarse la posibilidad de que esta forma de hablar que refuerza la idea de trayecto, propia del lenguaje cotidiano, se haya utilizado también en el aula o no

se haya puesto en cuestión cuando la ha utilizado el estudiante, aspecto que será analizado en el siguiente apartado.

En general, tanto las chicas como los chicos han tendido a considerar la solubilidad como proceso y no como propiedad, posiblemente debido a que en el aprendizaje del concepto se ha incidido más en la acción de disolver que en su concepción como propiedad característica de las sustancias. Así, en gran parte de la tarea de translación realizada, el alumnado implícita o explícitamente se ha referido al tiempo, no describiendo la situación representada (el gráfico muestra la relación solubilidad/temperatura). Sin embargo, a pesar de ello, la coherencia entre lo representado en el gráfico y la descripción ha sido mejor que la expresada en el contexto de física y en mayor medida por el alumnado que ha trabajado la UD

El enfoque en la interpretación de los gráficos, va desde lo más local (identificación de puntos) a lo más general. Durante la entrevista, en respuesta a la pregunta *¿La solubilidad de las tres sustancias tiene que ver con la temperatura?*, se ha identificado un enfoque gradual entre los extremos citados. Por ejemplo, el alumno 3B3** indica (207-255) *“No. Pues con la temperatura el agua se calienta y entonces es más fácil disolverse. ¿Y eso lo has observado aquí? Sí. ¿Dónde lo observas? Aquí, a 70 grados, pues éste se disuelve más y aquí a cero grados, menos.”*, mientras que la alumna 2A7*** dice (847-895) *“No. A ver, ésta tiene igual pero las otras dos no. ¿Cuál tiene la misma? Ésta, el cloruro de sodio. Las otras dos a mayor temperatura tienen mayor solubilidad”*. El alumnado del grupo 3B tiende en mayor medida que los otros dos grupos (1A y 2A) a hacerlo localmente, es decir identificando puntos en lugar de tramos del gráfico; hecho que por otro lado ha sido destacado por diversos estudios (Janvier 1983; Kerslake, 1981; Mansfield, 1985; Stein et al., 1989). Así este alumnado habría mostrado una mayor discretización de gráficos (Janvier, 1987b) lo que llevaría a no interpretar la gráfica como entidad conceptual (Leinhardt et al., 1990) y además, según Dolores y Valero (2004) y Dolores y Cuevas (2007), a una falta de coordinación de lo que ocurre con las variables – pensamiento covariacional-, lo que tiene un valor añadido cuando se trata de situaciones científicas dinámicas.

Además, esta lectura estaría asociada a ideas intuitivas y no tanto a un aprendizaje formal, mientras que el alumnado de los grupos 1A y 2A, tiende a mostrar un nivel de lectura de información en gráficos implícita o sintáctica (Postigo y Pozo, 2000), o de nivel intermedio según Wainer relacionada con una transferencia de clase B mientras que el

alumnado del grupo 3B se sitúan en un nivel de lectura de datos. Muestra de ello sería una mejor identificación de variables, y una interpretación más dinámica –mayor nivel en relación covariacional-, y más adecuada desde el punto de vista formal según el cual dos sustancias tendrán la misma solubilidad. Sin embargo los estudiantes del grupo 3B tienden a focalizar localmente, restringen el enfoque a un punto o grupo de puntos en lugar de hacerlo a rasgos generales de la gráfica (Bell y Janvier, 1981).

El conocimiento matemático adquirido por los grupos 1A y 2A parece haber ayudado a una mejor interpretación del fenómeno en las situaciones de montaña rusa y solubilidad ya que la coherencia mostrada entre la descripción de la situación y el gráfico ha sido más adecuada que la del alumnado del grupo 3B.

○ *La identificación de variables.* Toda tarea de translación necesita, en primer lugar, la identificación de variables además de su interpretación para establecer la relación covariacional entre ellas. Desde un inicio, la identificación de variables ha sido muy escasa en el contexto de física, donde muy pocas personas han identificado la variable velocidad (ver figuras 7-15 y 7-16), dato que estaría relacionado con un error de lectura e interpretación de gráficos (Socas, 1997). Una mejor interpretación en la situación de la montaña rusa hace pensar que en esta situación el alumnado, aunque en poca proporción, ha diferenciado el trayecto del cambio de velocidad, lo que podría entenderse como una pequeña superación de la dificultad en la comprensión de posición, velocidad, manifestada por (McDermott, 1984). Esta diferencia podría haberse debido, tal como se ha discutido anteriormente, a un mejor conocimiento experiencial de esta situación.

En la situación de la pelota la observación directa del lanzamiento parece haber marcado la construcción de la representación de la situación; por otro lado, la variable velocidad -en sí misma una función-, es considerada como posición por parte del alumnado. Seguramente si las variables representadas hubieran sido s y t los resultados podrían haber sido mejores ya que la variable s sería aquella que el alumnado reconstruye en el modelo de situación y la variable t podría estar implícita para el estudiante. Este supuesto podría hacer pensar que el alumnado no considera necesaria la identificación de las variables para interpretar la situación representada en un gráfico.

Una diferencia importante en identificación de variables en la situación de solubilidad (el 62,5% del alumnado identifica ambas variables), confirma la importancia del conocimiento del contexto de aplicación. Ello podría estar relacionado con el hecho de

que la solubilidad ha sido trabajada a nivel cualitativo y el estudiante ha podido crear una modelo de situación de situación más acorde a lo representado porque ha identificado mayor número de *affordances* en el contexto que le ayudan en su intención de transferir. Otra posible explicación también podría ser que la situación de solubilidad tuviera mayor similitud a una situación de física con variables s/t, y por lo tanto, también interpretable en este sentido de que la solubilidad también aumenta a medida que el gráfico se lee hacia la derecha. .

Por otro lado, la dificultad mostrada por un número importante de personas de los grupo 2A y 3B en la identificación de la variable *temperatura*, utilizando en su lugar la variable *tiempo* en las argumentaciones (37.5% del alumnado del grupo 2A y el 50% del alumnado del grupo 3B identifican la variable como tiempo) hace pensar en dos posibles explicaciones. La primera de ellas hace referencia a que en el contexto cotidiano se relaciona la solubilidad con el tiempo que tarda una sustancia en disolverse y no tanto con la temperatura como variable que puede favorecer el proceso de disolución, por lo que el alumnado habría asumido, de acuerdo con Leinhardt et al. (1990), que el tiempo se encuentra implícitamente representado; una segunda explicación apunta a la manifestada por Janvier (1993), después de revisar sus propios estudios, que concluye que la interpretación de gráficos con variable tiempo –gráficas crónicas- es compleja en sí. Esta segunda interpretación podría ser válida para ambos contextos (en el contexto de física a lo sumo se citan los momentos de subida y bajada).

Algunas de las personas que han tenido problemas con la variable tiempo también han tenido dificultades para interpretar la unidad con la que se mide variable solubilidad (g soluto/ml disolución), algo que ha sucedido a pesar de que la solubilidad, a nivel cualitativo, ya ha sido trabajada en el aula de ciencias. Todo ello pone de manifiesto la importancia de trabajar la identificación de variables y sus unidades de medida, ya que sin caracterizarlas bien es imposible que se llegue a poder pensar en posibles relaciones entre ellas. Estos resultados son coherentes con los hallados en otras investigaciones (Gentner et al., 2003; Rebello et al., 2007) que indican que una de las dificultades en la resolución de problemas con base matemáticas se encuentra en la falta de comprensión profunda de la situación descrita en el enunciado –construcción del modelo de situación-.

○ *El razonamiento covariacional.* Los resultados en razonamiento covariacional entre las variables se han producido en la situación de la solubilidad, desde el razonamiento más

superficial –coordinación entre las variables- hasta la más compleja para el alumnado de 3º ESO –razón promedio- (ver figura 8-1, línea roja en contexto de física y línea continua en verde en el contexto de química). Ello indica una mayor transferencia de este tipo de razonamiento en esta situación que en las planteadas en el examen, aún tratándose de un contexto lejano. Una posible explicación podría ser que en el examen no se ha demandado la argumentación de los gráficos, en cambio, en la entrevista se ha buscado la revisión de la respuesta, la flexibilidad en la interpretación y durante el análisis de las respuestas, se ha tratado de analizar lo que la o el estudiante trataba de relacionar. Tampoco ha habido razonamiento covariacional en el contexto de física, ya que como se ha expuesto, no ha habido identificación de ambas variables.

La representación del modelo de situación es inherente a toda interpretación coherente. Como ya viene indicándose, tanto el lanzamiento de la pelota como la fotografía de la montaña rusa han generado en general la construcción de un modelo asociado a trayecto –mayor en la situación de la pelota-, y por lo tanto, la diversidad de modelos de situación creada ha sido escasa. El haber montado en la montaña rusa parece no ser suficiente para la construcción de un modelo de situación más acorde al formal en aquellas personas que muestran una tendencia a la construcción del modelo de situación de trayectoria, pero sí que podría haber ayudado a alcanzar un modelo de situación más adecuado a aquellas que no manifiestan la anterior tendencia.

En la situación de solubilidad han aflorado mayor diversidad de representaciones – solubilidad como proceso, concentración vs solubilidad, solubilidad de las propiedades entendidas como sustancias...- asociadas con ideas alternativas. Estas ideas han tenido que relacionarse con los gráficos y para bastantes estudiantes no ha resultado ser una tarea fácil. Así, mientras que para una parte del alumnado que ha trabajado las funciones la coherencia entre el modelo de solubilidad y la interpretación de los gráficos no ha supuesto ninguna dificultad, para otra gran parte ha supuesto gran dificultad. Éste podría ser un claro ejemplo de que es posible encontrar dentro de un contexto lejano una transferencia cercana, si la demanda de la tarea está dentro de la zona de desarrollo real (ZDR) del alumnado. Por otra parte, Sin embargo, para gran parte del alumnado dicha tarea se encontraría cercana a la zona de desarrollo próxima (ZDP). Por lo tanto el logro en la tarea estaría supeditado a los apoyos, *affordances*, tanto del contexto como del profesorado, ya que leer desde las ciencias una interpretación gráfica requiere según Lombardi et al. (2009) disponer de marcos teóricos –modelo científico-, identificar “pistas en el gráfico” y

organizar la información para poder así coordinar todas las piezas de conocimiento a activar.

○ *La traducción desde el gráfico a la expresión algebraica* supone un segundo nivel de translación entre las múltiples representaciones externas que caracterizan al concepto de función. Se ha destacado el alto porcentaje de estudiantes (75% del grupo 1A y 50% del grupo 2A) que ha aplicado un buen nivel de coherencia en este tipo de traducción en la situación de la pelota (indicado con línea continua en figura 8-1), lo que indicaría una transferencia productiva según diSessa y Wagner (2005) y un paso importante hacia la construcción del problema –modelo del problema- prioritario para la resolución de problemas con base matemática (Gentner et al., 2003; Rebello et al., 2007).

Para ello, el alumnado se ha basado en los subconceptos matemáticos –pendiente, ordenada en el origen-, siempre referidos a la forma y dirección del gráfico –ascendente, descendente- y en las relaciones entre las primeras y las segundas. Así por ejemplo han sido habituales argumentos del estilo “*va hacia arriba entonces es ascendente*”, “*la m – pendiente- positiva*”. Estos subconceptos, durante la traducción, parecen poseer un carácter estático para el alumnado –tipo geométrico-, que podría entenderse si el aprendizaje llevado a cabo hubiera potenciado esa perspectiva. El carácter estático de subconceptos como la pendiente ya fue identificado por Azcárate (1990).

A la coherencia descrita se suma el que en la mayoría de los casos la ecuación seleccionada posee variables contextuales (indicado en la figura 7-20), lo cual estaría en sintonía con lo avanzado por Broudy (1977), en el sentido de que las personas tienen capacidad para aprender en el contexto de transferencia utilizando para ello el conocimiento interpretativo; por ello, podría clasificarse como transferencia productiva.

Otro resultado revelador ha sido el encontrado en la situación de solubilidad cuando se indica que la solubilidad del cloruro de sodio es constante, y que por lo tanto no tiene pendiente. Este nuevo dato amplía el registrado por Leinhardt et al., (1990) y Markovits et al. (1986) en el sentido de que las funciones constantes no suelen ser consideradas como funciones. En esta ocasión, parece que la imagen de función inferida a través de este tipo de respuesta podría dar lugar a suponer que sí se ha producido relación entre el gráfico constante y el concepto función. Tanto estas repuestas como el hecho de que el 87.5% del alumnado haya elegido bien el signo de la pendiente cuando escoge la ecuación en la situación de la pelota, sugieren un nivel de transferencia importante.

Aunque en general, la utilización del lenguaje matemático durante la tarea de translación, tanto en la descripción de las situaciones como durante las distintas traducciones llevadas a cabo, ha sido insuficiente, el hecho de que dicha utilización se haya producido en mayor medida en el contexto de la solubilidad y en la tarea de traducción entre la gráfica y la expresión algebraica, podría indicar la importancia del contexto y de la tarea encomendada. En el primer supuesto, podría pensarse en una mayor influencia de la situación en la creación de un único modelo de situación -gráfico igual a trayecto-, que no ayuda a la utilización del lenguaje matemático. En cuanto a la tarea, podría decirse que la traducción desde el gráfico a la expresión algebraica ha propiciado mayor utilización de lenguaje matemático que desde la descripción de la situación al gráfico, porque el alumnado ha encontrado más *apoyos* en la primera traducción que en la segunda, tal vez propiciado por el modelo de transferencia interiorizado durante el aprendizaje.

○ La *tarea de predicción* –solicitada en la situación de solubilidad- se especifica a través de dos requerimientos. El primero de ellos se refiere a la identificación e interpretación de la temperatura a la cual dos sustancias distintas tendrán la misma solubilidad, y la segunda, demanda hallar dicho punto.

La mayoría del alumnado que ha trabajado la UD ha identificado la temperatura a la cual dos sustancias tendrán la misma solubilidad (100% en el subgrupo 1AA, el 62.5% del subgrupo 2AA), mientras que el alumnado del grupo 3B sólo lo ha hecho en un 25%, a pesar de que en los ejes cartesianos se encuentran representados dichos puntos y de que este grupo ha trabajado gráficos en sociales y matemáticas en 2º de la ESO. La interpretación de dicho punto, en cambio, ha sido mucho menor (37.5% de los grupos 1A y 2A), lo cual indica la dificultad de la interpretación porque lleva inherente entender la situación. Un número importante de estudiantes ha preguntado qué significaba ese punto, lo cual indica que no han creado un modelo de situación coherente, poseen ideas alternativas no muy claras en torno a la solubilidad; además podrían no haberse preguntado nunca, si es posible que dos sustancias tengan a una temperatura dada la misma solubilidad.

Por último, nadie ha podido hallar dicho punto a nivel matemático (esta diferencia de resultados se ha indicado como línea discontinua en la figura 106). En el examen sólo dos estudiantes habían podido hallar el punto de encuentro en el contexto cotidiano, y no lo habían hecho en el contexto académico matemático.

Cuando se ha explicado la tarea de predicción y el requerimiento de hallar el punto de encuentro en el contexto cercano (al inicio de las conclusiones), se han expuesto las explicaciones oportunas que también son válidas para esta situación. Ésta es de gran dificultad porque supone coordinar piezas del conocimiento como el modelo de situación, el concepto de variable, los subconceptos de pendiente, ordenada en el origen y punto de encuentro, las diversas traducciones entre los sistemas de representación, la construcción de expresiones algebraicas acordes a los gráficos (Hegarty et al., 1995) y además, poseer la destreza para resolver el sistema de ecuaciones. A todo ello cabe añadir la dificultad del concepto solubilidad y de las unidades en las cuales viene definido.

A pesar de todas estas dificultades, tres estudiantes del grupo 1A (dos chicas, una de nivel académico alto y la otra de nivel académico medio, y un chico de nivel académico alto) han construido ecuaciones acordes a los gráficos en la situación de la solubilidad, pero sin llegar a hallar el punto de encuentro. Destaca la alumna de nivel académico medio, ya que ha mostrado dificultades de interpretación a lo largo de la entrevista y no ha mostrado coherencia entre el gráfico escogido y la ecuación en la situación de la pelota. No obstante, ha logrado construir una de las ecuaciones correspondientes a uno de los gráficos a través de la ecuación general de las funciones. Este hecho parece indicar que se trata de una alumna estudiosa pero con problemas en la interpretación y también de seguridad (detectados en la entrevista) que podrían estar asociados a un nivel de autoeficacia medio, y a que posee un nivel de estrategias bajo para generar, evitar o controlar emociones o afectos negativos como la ansiedad. Además a pesar de que le gustan las matemáticas pero no las ciencias, posee un nivel de autoeficacia en ambos muy bajo.

En la tarea de predicción el lenguaje matemático utilizado hace referencia al proceso requerido para hallar el punto de encuentro: hallar la pendiente, hallar la ordenada en el origen, crear las ecuaciones y resolver el sistema de ecuaciones mediante el método de igualdad. Este hecho parece indicar que durante el aprendizaje se ha insistido bastante en el procedimiento a seguir para hallar el punto de encuentro y que ello, ha sido interiorizado por el alumnado. Tal como se ha señalado previamente, esta tarea es de suma complejidad, por lo que requiere de mucho tiempo y esfuerzo por parte tanto del profesorado como del alumnado para abordarlo. Resulta sorprendente que el 50% del alumnado del grupo 1A, sobre todo chicos, haya indicado que hallaría dicho punto de modo práctico, sin utilizar las matemáticas para ello, lo que podría estar sugiriendo que ese alumnado no ha codificado el aprendizaje asociado a hallar la pendiente como transferible

y relevante, lo cual podría haber influido, además de otros factores, en una actitud negativa hacia la transferencia (Stenberg y French, 1993).

Por otro lado, esta tarea siendo la más compleja, también ha sido la última en demandarse, lo que podría haber influido en que los resultados hayan sido peores que los del contexto cercano -examen-, que también han sido insuficientes.

La tarea ha sido considerada como transferencia lejana, a pesar de haberse solicitado en un contexto cercano, por su complejidad; además esta falta de autonomía por parte del alumnado ha quedado mostrada en la entrevista ya que nadie ha construido el sistema de ecuaciones.

- La *tarea de clasificación* que ha sido analizada a través de los distintos conocimientos transferidos, sitúa el alcance de la misma en un nivel importante, ya que el 81.5% del alumnado ha utilizado algún conocimiento asociado a esta tarea y además, de todos los niveles académicos-bajo, medio y alto-han participado en ello. Dicha utilización ha sido efectuada en la situación de la pelota durante la traducción desde el gráfico, y en la situación de la solubilidad durante la traducción desde la descripción de la situación al gráfico y cuando se ha preguntado por cómo se hallaría la temperatura a la cual dos sustancias tendrían la misma solubilidad.

Las relaciones entre los tipos de transferencias llevados a cabo en las distintas tareas y en las diversas situaciones indican que el alumnado posee diversas imágenes de función –representación, regla, operación, fórmula, relación de dependencia y correspondencia- que afloran dependiendo de los contextos y de las exigencias de las tareas. Esta diversidad de imágenes estaría en coherencia con las proyecciones de concepto propuestas por diSessa y Wagner (2005) que el o la estudiante aplica en contextos particulares. Así, la aplicación de un concepto es más complejo que su simple definición, por lo que según Vinner (1983) su imagen abarcaría mayor amplitud de matices.

Un mayor nivel de transferencia en la situación de la solubilidad podría deberse, entre otras razones, a que las gráficas fueran más fáciles que las planteadas en el contexto de física –no había ninguna función inversa aunque sí constante- y a que las preguntas realizadas hayan sido más cerradas –el alumnado se encuentra más familiarizado con este tipo de preguntas-. No obstante, una notable diferencia de resultados en el subgrupo 1A sugiere además que el estilo docente también ha podido influir. Por supuesto, al tratarse de

una investigación mediante estudio de caso, el tamaño de la muestra ha podido ser otra variable decisiva.

En general, teniendo en cuenta las transferencias analizadas que el alumnado que ha trabajado la UD ha alcanzado un nivel 4, el denominado *estadio estructural* (Socas, 1997) del concepto función en cuanto a la utilización de representaciones mentales se refiere, ya que pasa de una representación a otra con flexibilidad y ha podido llevar a cabo la transformación entre los distintos sistemas de representación gráfico y algebraico. No obstante, si bien la etapa de *condensación* habría sido identificada en bastantes estudiantes, no se habría alcanzado la etapa de *cosificación* (Stard, 1991) en el aprendizaje del concepto función. Por su parte, el alumnado que no ha trabajado la UD se situaría a lo sumo en el nivel 2 en la utilización de representaciones mentales y se encontraría en la etapa de *interiorización* del concepto función.

A nivel comparativo, cabe recordar a Carlson y Oehrtman (2005), cuando indican que la mayoría del alumnado universitario considera la función como algo estático y sólo una minoría como algo dinámico, es decir muy pocas personas consideran la función como proceso, frente a la mayoría que lo hace como acción; en definitiva casi nadie lo hace como objeto matemático.

A modo de conclusión, en base a los datos aportados podría decirse de acuerdo con diSessa (2002) y Lobato (2003) que la transferencia de tipo C, aquella definida por la reutilización de los conocimientos previos, ha sido identificada ampliamente durante la entrevista. Ello sugiere la necesidad de abordar el proceso de aprendizaje desde la dinámica, en el sentido de que la perspectiva de función trabajada en el aula tiende a utilizarse de un modo muy parecido al que se enseña. Por ello, es deseable que se incorpore el punto de vista de utilización de conocimientos en un futuro variable y contextualizado durante el diseño de la secuencia didáctica.

Por otra parte, si bien la distinción entre el contexto cercano y lejano es necesaria, no parece suficiente para el análisis de la transferencia. Parece probable que en un contexto cercano pueda existir una transferencia lejana (Lobato, 2003) si el conocimiento a aplicar se encuentra lejos de la zona de desarrollo próximo del alumnado y si la coordinación de las piezas de conocimiento a transferir es compleja.

Los datos indican que esta utilización productiva de conocimientos previos por parte del alumnado que ha trabajado la UD le ha servido para obtener mejores resultados en las tareas de translación y predicción (categorizada en esta investigación como

matemáticas I) que las obtenidas por el grupo 3B, ya que los tres grupos parten de una situación similar en ciencias. Sin embargo, la pequeña diferencia que hay entre uno de los grupos que ha trabajado las funciones -2A- y el grupo 3B en la traducción desde la descripción de la situación a la representación gráfica, hace pensar en que los resultados del grupo 2A no han sido todo lo esperables, es decir, este grupo podría haber utilizado en mayor medida el aprendizaje previo o el trabajo realizado en el aula de matemáticas (ver tabla 7-23). En este sentido se plantea la necesidad de analizar el nivel de aprendizaje y el de transferencia en relación al estilo didáctico utilizado en el aula. Por otra parte un nivel de translación mayor por parte del grupo 1A, en tareas caracterizadas por la interpretación y a su vez equilibradas con las de construcción, sugiere un estilo didáctico de aula que ha sabido combinar ambos tipos de aprendizaje. Por todo ello se analiza en el apartado 8.1.3 el nivel de aprendizaje y el de transferencia en relación al estilo didáctico utilizado en el aula.

La capacidad de aprendizaje mostrado por el alumnado al transferir, por ejemplo, en relación a la elección de variables contextuales, respalda la tesis ya defendida por Bransford y Schwartz (1999) en el sentido de que es necesario analizar la transferencia desde la perspectiva de preparación para aprendizajes futuros, ya que sin esta mirada, sólo se observa aquello que la persona experta espera que se transfiera y no lo que realmente la persona es capaz de transferir y, potencialmente, puede ayudarle a aprender más.

Por otro lado, la no transferencia del modelo de función, como clase de coordinación (DiSessa y Wagner, 2005) parece encontrarse relacionada con una insuficiencia en la realización de actividades de estructuración y síntesis durante el periodo de aprendizaje, es decir en la falta de coordinación de todas las piezas del conocimiento a transferir. Esta carencia parece deberse a que la mayoría de las actividades que tenían este objetivo en la UD no se han llevado casi a la práctica (sólo lo han sido 25.9% por parte del grupo 1AA y del 14.8% por parte del grupo 2AA). El alumnado no ha transferido aquello que no ha aprendido porque no se ha enseñado.

Existen diversas causas que explicarían las decisiones que toma el profesorado a la hora de abordar un tema y aplicar un modelo didáctico. Además de las de carácter más ideológico, como son las relacionadas con la finalidad de la educación señaladas por Nuñez y Font (1995), cabría destacar las identificadas en esta investigación como son la inseguridad de las docentes en el uso de contextos científicos y su estilo didáctico.

Como conclusión, en esta investigación se ha constatado la gran diversidad de

conocimientos relacionados con el modelo de función transferidos y que su aplicación depende de las tareas y contextos donde se espera la transferencia. Pero, al mismo tiempo, la dificultad para aplicar el modelo globalmente, aunque sea en una versión simple, y la persistencia de ideas alternativas, como es la interpretación icónica de los gráficos.

Consecuencias didácticas importantes serían que el profesorado debería establecer el mapa de conceptos asociados al modelo teórico de función y sus interrelaciones, así como de cuáles son los que presentan un mayor grado de dificultad para el alumnado”. También se puede destacar el interés del uso de contextos no solo cotidianos sino también los relacionados con otras disciplinas, entre ellas las científicas, ya que tiene la ventaja de utilizar un nuevo modelo –el de función- en situaciones diversas y posibilita reconocer su amplio campo de aplicación (además de establecer conexiones entre campos del saber).

8.1.2 Relación entre el estilo de aprendizaje y la transferencia producida

A lo largo de la entrevista ha podido evidenciarse que existe una relación entre el estilo de aprendizaje del alumnado y el tipo de transferencia que se llega a producir. Por un lado, aquellas personas que en general presentan un estilo continuista con el modo en que se trabaja en el aula tienden a repetir dicho patrón siempre que pueden. Son personas que en general prefieren una organización de grupo individual y que además con tareas más mecánicas se sienten más a gusto con tareas mecánicas o reproductivas. Estas personas, si el sistema de evaluación repite el esquema trabajo en el aula, en general responden bastante bien siempre y cuando hayan entendido la lógica de los procesos de realización de las tareas. Este tipo de personas responden mejor a las tareas de construcción que incluyen la utilización de algoritmos. Por lo tanto, siempre que la transferencia que se solicite se encuentre dentro de estos previos, podrá darse una aplicación de dichos conocimientos. Este estilo ha sido identificado en mayor medida en las chicas que en los chicos. Si bien la diferencia respecto a ambos sexos se analiza en profundidad en el apartado de género, cabe señalar que algunos chicos también han mostrado este patrón. Ejemplo de ello es el alumno 2A11* que se siente más seguro en la tareas mecánicas. Sus resultados han sido mejores en matemáticas II, es decir en tareas que se han basado más en aspectos formales del modelo de función.

Por otra parte, se encuentran los estudiantes que prefieren trabajos más prácticos y grupales. Este tipo de estudiante, a veces no se habitúa tan bien como el anterior a la dinámica de aula, si es tradicional. Cuando se le ofrecen otro tipo de actividades, de

carácter más interpretativo y no tan mecánicos, puede transferir sus conocimientos. Un ejemplo destacado es el alumno 1A13 que ha mostrado el mayor nivel de transferencia sin ser de nivel académico alto en matemáticas. Si bien este estilo ha sido mayormente identificado en chicos, alguna chica también parece mostrarlo; así la alumna 1A11 prefiere trabajos prácticos y la organización por grupos. Cuando se ha preguntado por cómo se hallaría el punto de encuentro alude que lo haría de modo práctico con la regla. Esta alumna obtiene mejores resultados en matemáticas I que en matemáticas II, es decir en tareas relacionadas con la interpretación.

Por otro lado, es importante destacar que el estilo de aprendizaje también viene caracterizado por la conciencia que cada persona tenga de su propio conocimiento. Han sido muchas las ocasiones analizadas en las cuales se han destacado el hecho de que el alumnado del grupo 1A parece tener un mayor conocimiento del aprendizaje y de las dificultades de las tareas. En ello podrían haber influido positivamente las actividades de autoevaluación y coevaluación llevadas a cabo en el aula. No obstante, la mayoría del alumnado destaca por el bajo nivel de competencia lingüística mostrado durante la entrevista. Este hecho, seguramente se encuentra relacionado con que casi la totalidad del alumnado no habla nunca en euskera fuera del aula, a veces ni dentro de ella, a pesar de que las clases son en euskera y, que en las clases tampoco se ha trabajado el lenguaje matemático en euskera. Por tanto, las frases no se construyen en toda su globalidad, por lo que el alumnado no puede reflexionar sobre su nivel de conocimiento en relación a los conceptos trabajados al no verbalizarlos de forma explícita. Como ya indicó Vigotsky, el lenguaje no es sólo el instrumento para expresar el pensamiento, sino que en el proceso de buscar como comunicarlo también se reconstruye y, por tanto, se aprende. En este sentido, más recientemente Jorba, Gómez y Prat (1998) plantean la necesidad de dar importancia a las formas de hablar y escribir en cualquier aprendizaje.

8.1.3 Relación entre el estilo docente y la transferencia producida

Los resultados mostrados en el apartado anterior en referencia al grado de transferencia de mayor nivel observada en el alumnado que ha trabajado las funciones durante la aplicación de la UD, indica que la propuesta didáctica ha sido válida para lograr un avance en la aplicación de algunos conocimientos matemáticos asociados al modelo de función. Sin embargo, no se ha producido la transferencia de tipo A, ni tampoco se ha dado el mismo nivel de transferencia en todas las tareas, lo cual lleva a preguntarse cómo se ha

aplicado la UD propuesta, más si cabe, teniendo en cuenta que la diferencia de resultados obtenidos por los dos grupos investigados ha sido considerable en algunos aspectos.

Por ello, en este apartado se discute la relación entre el estilo didáctico identificado en el aula durante la aplicación de la UD y la transferencia llevada a cabo por el alumnado a partir del análisis realizado de videos de la actividad en aula y otros datos. En primer lugar, se expone el grado de aplicación de la UD junto con el alcance del aprendizaje llevado a cabo y su influencia en la transferencia producida. Posteriormente, se analiza en qué modo el alumnado reconstruye a través del contexto de transferencia las situaciones dadas en el aprendizaje.

A tenor de los resultados obtenidos parece existir relación entre el tipo de transferencia llevado a cabo por el alumnado –de carácter mas o menos interpretativo- y el estilo docente que ha caracterizado el proceso de aprendizaje.

a. Aplicación de la Unidad Didáctica y su relación con la transferencia

Un número importante de las actividades propuestas en el diseño de la UD, que fue planteado y consensuado con las profesoras, no se han realizado en el aula.

por lo que no se puede valorar, globalmente, su interés didáctico de la UD vista globalmente. Pero, en cambio, sí que si que se pueden analizar las actividades llevadas a cabo en los dos grupos-clase y los enfoques de la enseñanza del concepto función promovidos.

Las profesoras empezaron aplicando la mayoría de las actividades de exploración (en un 77.7% en ambos grupos clase, de un total de 13 actividades repartidas en distintas fases), pero a medida que ha ido avanzando el desarrollo de la UD ha disminuido la proporción hasta llegar a sólo un 20-24% en la fase de aplicación. Es de destacar que las actividades de estructuración fueron las que en menor proporción se aplicaron en el grupo 2AA (14.8%) y que éste grupo fue el que, globalmente, menos aplicó el conjunto de las actividades planificadas.

Es sabido que el profesorado tiende a reinterpretar las propuestas metodológicas innovadoras en función de sus propias concepciones sobre qué y cómo enseñar (Pinto R 2001). En este caso, las profesoras empezaron con la voluntad de adaptarse tanto a la metodología –organización de aula, trabajo cooperativo-, como a la introducción de los conceptos matemáticos a través del contexto-, pero a medida que el tema fue avanzado, se incorporaron actividades nuevas más acordes con los estilos didácticos y rutinas habituales

de cada una de ellas. La observación que se hizo de la organización del aula en un momento inicial –antes de la puesta en práctica de la UD-, poco equilibrada en la distribución del alumnado, estilo docente marcadamente autoritario (sobre todo el de la profesora del grupo 2A), o incluso una mínima utilización de contextos en el tema de ecuaciones, da lugar a pensar que la metodología propuesta ha estado lejos de su práctica habitual en los aspectos citados.

La organización del aula, al inicio de la UD, ha sido más dinámica que lo habitual; se ha aplicado algunas de las estrategias organizativas propuestas (trabajo en grupo de carácter cooperativo, organización homogénea del grupo en subgrupos), pero pronto se vuelve a la rutina (en el mismo grupo hay estudiantes trabajando en solitario, en parejas y en pequeño grupo y, por lo tanto, con una distribución no homogénea en el aula).

En cuanto a la actividades planteadas se refiere, la profesora del grupo 2A utiliza menos situaciones contextualizadas, aunque la mayoría de las realizadas son las de carácter científico –con tendencia a la instrucción de los conceptos de forma abstracta-, mientras que la profesora del grupo 1A, emplea un mayor número de situaciones que su homóloga, si bien sonde carácter cotidiano y algunas no incluidas en la UD (ir a patinar por ejemplo).

Entre las causas que han podido influir en ello se podría destacar la excesiva diversidad de contextos en la UD y el perfil de las docentes. El exceso de diversidad plantea una activación de múltiples modelos de situación diferentes, lo que requiere esfuerzo y tiempo, tanto por parte del alumnado como del profesorado. Por otra parte, el perfil profesional de las profesoras –licenciadas en empresariales (1A) y matemáticas (2A)- y con relativamente poco conocimiento científico de ciencias experimentales ha provocado inseguridad en estas docentes. Este hecho ha sido más destacado en la profesora del grupo 1A; sin embargo ésta, al estar más convencida de la importancia de trabajar a partir de contextos, optó por suplir algunos contextos científicos por otros más cotidianos.

La contextualización como reciprocidad entre conceptos y sus aplicaciones supone una dificultad para el profesorado de secundaria, especialista tan sólo en un área. Este hecho parece contradictorio con la exigencia de conocimientos que el alumnado de ESO (toda la población) debe saber, conocimientos en los que el profesorado, con un nivel cultural muy superior, se siente inseguro. Si el profesorado de matemáticas desconoce gran parte de conocimientos científicos (o de otras áreas) que ayudarían a la construcción del saber matemático con un sentido real y de mayor significatividad, difícilmente optará por la utilización de situaciones científicas contextualizadas que le producirán una inseguridad

“innecesaria” desde la perspectiva más formal. Esta decisión condiciona la construcción del concepto de función por parte del alumnado –el estudiante no aprende los diferentes matices del concepto (diSessa y Wagner, 2005)- y la codificación del mismo, para que resulte transferible a otros contextos (Stenberg y French, 1993). Cabría preguntarse por lo tanto, como solucionar este problema. Seguramente un camino sería un trabajo más coordinado entre el profesorado de distintas áreas en el marco del centro educativo.

b. Transferencia dinámica como influencia del proceso de aprendizaje

Este apartado pretende aportar datos que ayuden a entender en qué modo las transferencias identificadas se encuentran relacionadas con el trabajo de aula. Para ello, se ha tratado de entender la reconstrucción que realiza el alumnado a través del nuevo contexto. Se trata pues de la perspectiva de transferencia dinámica propuesta por Lobato (2003), perspectiva que sin duda abre nuevos horizontes en el estudio de la transferencia. Algunas de las transferencias son coherentes con el modelo formal. Otras, en cambio, a pesar de no ser coherentes con dicho modelo, también han sido consideradas como transferencias, ya que suponen una intención por parte del alumnado de transferir sus conocimientos, aunque se trate de ideas alternativas, a un nuevo contexto. En este intento, el alumnado tratará de ser coherente entre lo que dice y lo que interpreta que está representado. Por lo tanto, en esta investigación el análisis de la relación entre las transferencias que realiza el alumnado y el estilo didáctico de las profesoras, no se basa sólo en lo que debería haberse producido, sino en lo que realmente es posible que se produzca, ya que es lo que ha sido enseñado.

El profesorado posee interiorizado el modelo de función a enseñar y cuando introduce los distintos subconceptos cree que los está dando a conocer desde dicho modelo global, ya que para él cada uno de ellos tiene sentido desde esa globalidad. Pero de hecho, el alumnado se apropia de cada idea o procedimiento por separado, ya que no se le ayuda a establecer las relaciones entre todo lo que se transmite y enseña en el aula porque no son coordinados explícitamente, es decir, no se promueve una coordinación de clase tal como indica diSessa (1993, 2002), transmitiéndose un currículo lineal y escaso en intra e interrelaciones. El alumnado acaba convencido de que las tareas se resuelven mediante paquetes de conocimiento (Hatano y Greeno, 1999). Esta falta de motivación y actitud pasiva hacia la transferencia de la coordinación (Carpintero y Beltrán, 2005) hace que el alumnado no la realice, en momentos distintos al vivido en el aula. Cabe recordar que las

dificultades en el aprendizaje del modelo de función se deben en gran medida a que se encuentra asociado a conceptos matemáticos integrados por naturaleza y porque a su vez aparece en múltiples representaciones (Dreyfus y Eisenberg, 1982), con lo cual la coordinación de todo ello es indispensable. Además, será importante diseñar secuencias didácticas que cubran todas las etapas del proceso de aprendizaje haciendo especial hincapié en las de estructuración ya que son las que van cohesionando toda la diversidad de matices que a largo de un tema se van trabajando, de tal modo que pueda llevar a cabo la etapa de cosificación (Stard, 1991).

Por otro lado, es sabido que los procesos de enseñanza habituales se basan en una secuencia que empieza con la explicación del profesorado de una nueva idea o procedimiento y sigue con la realización por parte del alumnado de ejercicios de aplicación. Sin embargo, desde los puntos de vista constructivistas se postula la necesidad de que dichos procesos de enseñanza-aprendizaje respondan a ciclos con más fases. Así, por ejemplo, Jorba y Sanmarti (1994) definen cuatro etapas: exploración (en la que se explicitan ideas previas y se comparten objetivos), introducción o construcción de nuevos conocimientos, estructuración (en la que se interrelacionan, estructuran y sintetizan los nuevos saberes) y aplicación o generalización, etapa en la que se reconstruyen los nuevos aprendizajes al reconocer nuevos usos. El ciclo de aprendizaje correspondiente a dichas etapas comporta pasar de lo más concreto o contextualizado a lo más abstracto, para retornar posteriormente a lo contextualizado, y de lo más simple a lo más complejo.

La figura 8-2 muestra, por un lado, la relación entre el alcance en el aprendizaje del modelo función relacionada con estas etapas del proceso o ciclo de enseñanza-aprendizaje y, por otro lado, la transferencia de dichos aprendizajes llevada a cabo en los distintos contextos de aplicación. En el cuadro de la izquierda, parte izquierda del mapa conceptual, se sitúan las primeras tres etapas del ciclo de aprendizaje: exploración, introducción y estructuración (que en esta unidad didáctica se ha representado fuera del cuadro porque no se ha llevado a cabo)-, y por otro lado, en el cuadro de la derecha, se refleja la etapa de aplicación o transferencia.

A continuación, en primer lugar se exponen los datos más destacables de cada periodo de aprendizaje, y posteriormente, durante el análisis de la transferencia se relaciona ésta con aspectos concretos del periodo de enseñanza.

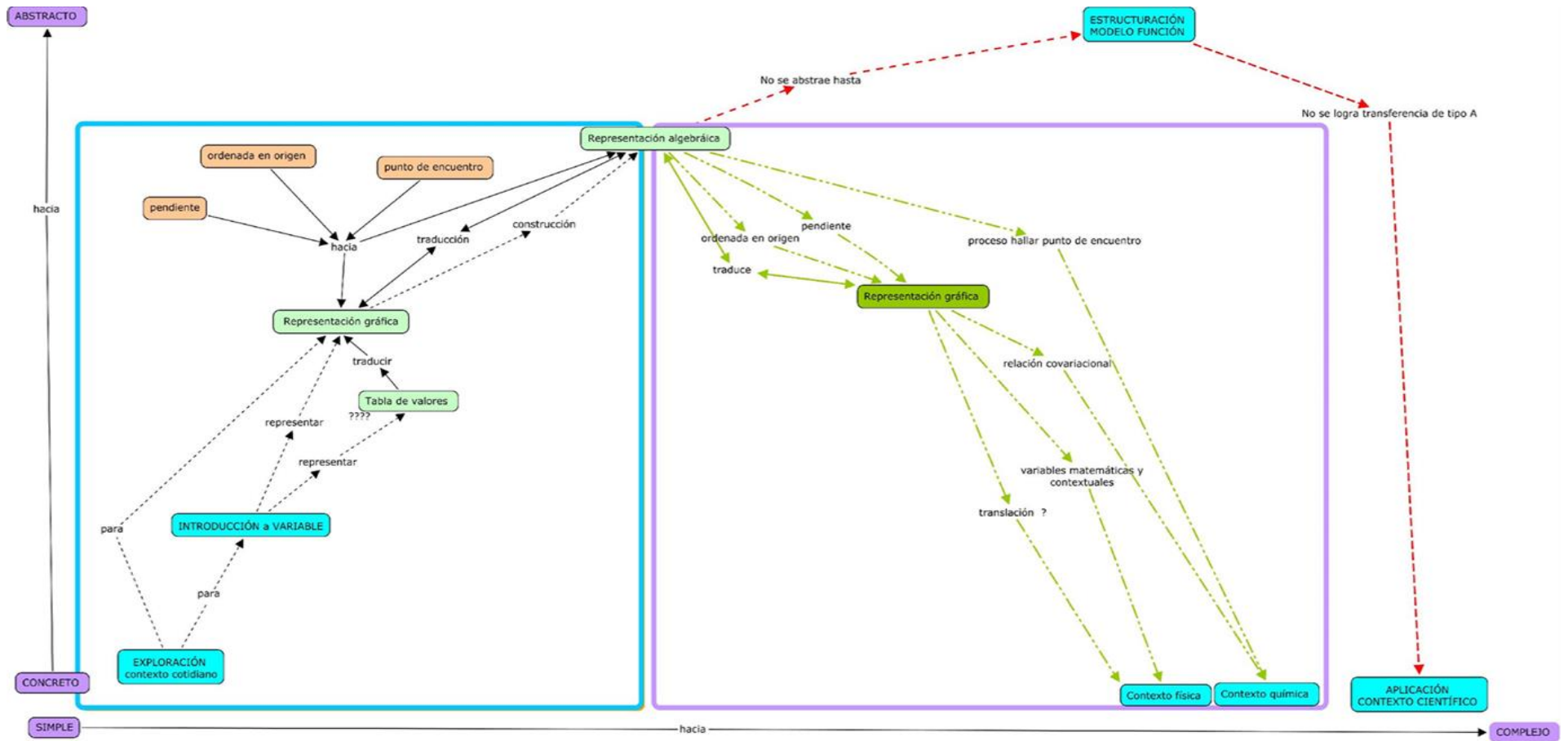


Figura 8-2. Etapas del aprendizaje y fase de transferencia.

b-1) Fases de aprendizaje

Tal como se ha expuesto, la secuencia de actividades planteada no ha posibilitado construir el modelo de función a un nivel suficientemente general, en buena parte debido a que no se han aplicado actividades de estructuración, necesarias para poder coordinar todas las piezas de conocimientos asociadas a él. Por lo tanto, la transferencia que es capaz de realizar el alumnado se relaciona con el nivel de abstracción alcanzado en cada uno de los subconceptos asociados al modelo trabajado en el aula (ver cómo en la figura 8-2), las líneas que relacionan los conocimientos transferidos no parten directamente del modelo de función sino desde posiciones menos abstractas). Estos resultados se han observado en los dos grupos.

En la figura 8-2 se puede observar que mientras que la instrucción del subconcepto *variable* ha partido desde la exploración de situaciones contextuales, los subconceptos *pendiente* y *ordenada en el origen* se han trabajado asociados al lenguaje algebraico y al gráfico, en el sentido por ejemplo de que si el gráfico desciende la pendiente es negativa – punto de vista geométrico-. Ello lleva a pensar que la pendiente depende de este hecho sin reflexionar sobre el significado de este subconcepto matemático. Por lo tanto, estos dos subconceptos se han introducido y trabajado desde un inicio asociados a un nivel de abstracción mayor al proporcionado por la descripción de la situación; no se ha aprovechado la oportunidad dada por el contexto para su construcción. Paralelamente, y siempre desde un nivel de abstracción alto, se ha realizado un trabajo sistemático de traducción entre la representación gráfica y la representación algebraica.

El trabajo de interpretación se ha relegado al inicio de la unidad, los primeros análisis de los gráficos. Dicha interpretación ha sido en general de carácter estático y, después de las primeras gráficas, sin la utilización del contexto en la argumentación después de las primeras gráficas. El enfoque del gráfico es en la mayoría de las veces local –por tramos a lo sumo-, donde se establece una relación covariacional de coordinación cuantitativa y con una imagen de concepto que va desde la regla – por parte del alumnado- hasta el de correspondencia –por parte de la profesora-, sin que sea analizada la diferencia entre estos dos extremos de imagen de concepto (ver tabla 7-15) Por otra parte, durante la etapa de interpretación se ha tratado de hacer ver al alumnado la necesidad de coherencia en la traducción entre lo descrito y lo representado (en la figura 8-2 encuentra representado con trazo continuo). Sin embargo, no se han cuestionado ninguna de las interpretaciones icónicas llevadas a cabo por el alumnado, y a veces incluso se han propiciado a partir del

lenguaje utilizado. Así, cuando el alumno 1A13** indica que entre el tramo 2 y 3 “*no se avanza*”, la profesora le contesta que el tiempo si pero que la altura no cambia (ver anexo 18, 1AA 090430; línea 100). En ningún momento se impulsa la reflexión cuando el alumnado realiza una interpretación icónica del gráfico. Al poco de la introducción del concepto función, la interpretación perdió todo el protagonismo en favor de actividades de traducción y del cálculo de la pendiente y la ordenada en el origen, además de la construcción de la expresión algebraica. Pero, las actividades relacionadas con el contexto que han requerido de la construcción no se han realizado en la medida que lo requiere la complejidad de esta tarea.

El lenguaje matemático se ha utilizado en momentos muy determinados: en la traducción desde la gráfica a la expresión algebraica, para indicar la forma del gráfico y en el proceso de hallar el punto de encuentro-.

b-2) Etapa de transferencia

En este apartado se presentan aquellos resultados, desglosados por tareas, que han podido relacionarse con el periodo de aprendizaje del aula.

- En la *tarea de translación*, además de las diferencias analizadas anteriormente, han podido evidenciarse diferencias en función del grupo. Así, el grupo 1A ha mostrado mayor nivel de transferencia que el grupo 2A en tareas caracterizadas por la interpretación (en la identificación de variables, la relación entre las variables y descripción del gráfico). Estos mejores resultados por parte del grupo 1A, parecen estar relacionados con una mayor incidencia por parte de la profesora en la acción de interpretación dentro de un estilo didáctico interactivo dialógico, que habría propiciado oportunidades para que el alumnado explicitara sus puntos de vista sobre qué tipo de variable es el conjunto de salida. La relación entre la oportunidad de realizar conexiones explícitas y los mejores resultados está en sintonía con los resultados obtenidos por Hiebert y Grouws (2007). En bastantes ocasiones la profesora propició la discusión sobre cuál de las variables era independiente o dependiente y el por qué, así como la dramatización de escenas que simulan situaciones cotidianas representadas en gráficos. Todas ellas habrían ayudado al alumnado a una interiorización del subconcepto *variable* en el sentido de relación de dependencia. Este hecho también explicaría que en el contexto de solubilidad, el 100% del alumnado de este

grupo hubiera identificado ambas variables frente a un 37.5% en el grupo 2A, así como el nivel de interpretación alcanzado.

La mayor transferencia en la coherencia entre la representación gráfica y algebraica por parte del grupo 1A (75% en el grupo 1A frente a un 50% en el grupo 2A) podría estar relacionada con el trabajo más sistemático llevado a cabo por la profesora de este grupo. Además, las actividades de coevaluación realizadas en esta aula, donde se han planteado criterios de evaluación de tipo metacognitivo en torno a la coherencia en las traducciones entre las representaciones, por un lado, descripción de situación y gráfico y, por otro lado, gráfico y expresión algebraica- podría haber influido en una interiorización de la necesidad de coherencia en el alumnado.

El alumnado utiliza el lenguaje matemático en la traducción desde el gráfico a la ecuación en la situación de la pelota; para ello, se justifica que si la gráfica es descendente la pendiente es minus, etc. Este resultado es acorde al proceso de aprendizaje, ya que ha sido precisamente en este tipo de traducciones cuando se ha llevado a cabo este tipo de argumentación matemática, y además con matices muy similares a los observados en la transferencia. El lenguaje ha tenido un sentido estático asociado a la forma del gráfico, donde se ha interpretado la ordenada en el origen como la altura –posición del móvil-, resultados que están en consonancia con los encontrados por Azcárate (1990). Este dato hace pensar que el aprendizaje del aula podría haber tenido influencia en ello, ya que no ha habido un trabajo específico para diferenciar ambas cuestiones -ordenada en el origen y altura- en situaciones contextualizadas.

Aunque ambas profesoras insistieron en el lenguaje matemático en determinados momentos (ver figuras 7-51 y 7-56), la profesora del grupo 1A lo combinó con el lenguaje cotidiano, durante la interpretación de situaciones cotidianas, lo que podría explicar un mayor nivel de transferencia del conocimiento interpretativo por parte de este grupo en comparación con su homólogo.

- En la *tarea de predicción*, concretada en saber a qué temperatura la solubilidad de las dos sustancias es la misma, se ha identificado mayor nivel de transferencia del grupo 1A, que, al igual que en la tarea de translación, se puede asociar a un trabajo más profundo de interpretación de las situaciones contextualizadas.

Sin embargo, nadie ha hallado matemáticamente dicho punto, y sólo tres estudiantes del grupo 1A han construido ecuaciones correspondientes a los gráficos. Esta

dificultad surge en gran medida porque la construcción de las ecuaciones correspondientes a los gráficos supone el formato de representación más abstracto dentro del modelo de función, ya que necesita de la identificación de los datos a traducir –pendiente, ordenada en el origen- así como su interpretación y el manejo del lenguaje algebraico, es decir, para ello, es necesario la integración de las representaciones mentales y de las representaciones externas asociadas al objeto (Font et al., 2007).

El uso del lenguaje matemático cuando se pregunta cómo se hallaría dicho punto es manifiesto. Las profesoras detallan términos matemáticos (pendiente, ordenada en el origen, ecuaciones, despejar, sistema de ecuaciones, método de igualdad) sin apenas utilizar referentes contextuales. El alumnado –sobre todo las chicas- repiten tanto el lenguaje utilizado por las docentes como el orden en el cual han sido utilizados los términos, lo cual indicaría que tanto el lenguaje como el orden de utilización ha sido codificado como transferible, principalmente por las estudiantes.

Los resultados en la entrevista, tanto en matemáticas I (categoría que engloba a tareas caracterizadas por la interpretación) como en matemáticas II (categorías que engloban tareas caracterizadas además de por la interpretación, por la construcción), indican relación entre la transferencia que lleva a cabo el alumnado y los modelos didácticos y trabajos promovidos en las aulas y, por lo tanto, confirman lo manifestado por otras investigaciones (Lobato y Siebert, 2002b; Lobato y Burns, 2002a). El alumnado del grupo 1A ha desempeñado un mayor nivel de transferencia en ambos tipos de categorías matemáticas y el estilo de aula ha estado caracterizado por un equilibrio entre las acciones de interpretación y construcción, mientras que el 62.5% del alumnado del grupo 2A ha realizado mejor la transferencia asociada a la construcción que a la interpretación, lo que parece ser coherente con el modelo de trabajo desempeñado en el aula.

- En la *tarea de clasificación* de nuevo se evidencia cómo la transferencia está condicionada por el tipo de actividad llevada a cabo en el aula. Así, mientras el 62.5% del alumnado del grupo 2A se refiere a la pendiente como inclinación de la recta mostrada en el gráfico, no hay nadie en el grupo 1A que haya hecho esta asociación, y en cambio, asocian la pendiente al cambio que se produce en las variables; así por ejemplo, la alumna 1A1***, cuando se le pregunta qué es la pendiente, indica (710-713) *Pues en cuanto tiempo se tarda; si tardas más la pendiente es más pequeña, si el movimiento es más rápido la pendiente es más grande*, lo que indicaría una mayor contextualización del

aprendizaje. Al analizar las veces que las profesoras utilizan los distintos términos matemáticos (ver figuras 7-51 y 7-56), se comprueba que la profesora del grupo 2A ha utilizado el término pendiente hasta 20 veces de las cuales en 8 ocasiones ha sido relacionado con la inclinación de la recta, sin utilizar la palabra relación. En cambio, profesora del grupo 1A, no utiliza la palabra inclinación en ninguna de sus sesiones.

Las relaciones expuestas anteriormente son una prueba de que la activación de conocimientos por parte del alumnado al transferir depende de cómo el profesorado haya planteado su aprendizaje, y es coherente con lo dicho por Hammer et al. (2005), en el sentido de que los recursos no se activan y desactivan de forma aleatoria, sino que existen desencadenantes que influyen en ello, de tal modo que el alumnado reconstruye un estado nuevo que busca la coherencia entre la interpretación que hace del contexto presente y el recuerdo que tiene del momento de aprendizaje.

Sin embargo, la activación de conocimientos no siempre implica solo la aplicación del conocimiento aprendido, a veces también tiene un carácter creativo, para lo cual la persona utiliza su conocimiento interpretativo (Broudy, 1977); esto hace que la persona pueda crear y aprender en la nueva situación. Un ejemplo de ello es que en la situación de la pelota, una buena parte del alumnado elige variables contextuales en coherencia con el gráfico escogido a pesar de que por parte de las profesoras no era algo muy habitual. Pero parece que el trabajo sistemático de traducción, que sí que se promovió, pudiera haber facilitado que durante la translación el alumnado, mayoritariamente, hubiera optado por variables contextuales, y que incluso una parte explicitara la correspondencia entre las variables contextuales y las variables matemáticas. Este ejemplo y otros hacen pensar que la transferencia debería ser medida en función de la preparación para el futuro aprendizaje (Bransford y Schwartz, 1999), y no tanto sólo en función de la aplicación de aprendizajes de forma mecánica.

Pero esta activación de recursos por parte del alumnado de los grupos analizados muestra diferencias importantes entre ellos, aunque el material didáctico utilizado para aprender haya sido prácticamente el mismo. Ello indica que el modo de aplicarlo ha sido distinto y el estilo didáctico de las profesoras ha tenido un papel importante en ello. Una diferencia importante entre ellas se refleja en el concepto función promovido por ambas profesoras. La imagen de concepto de función (Vinner, 1983) que expresa el grupo 1A, al transferirla en la interpretación de las distintas situaciones planteadas, se caracteriza por una relación de dependencia -50% del alumnado-, frente a una relación con componente de

regla y fórmula por parte del alumnado del grupo 2A -50%- (ver tabla 7-15). Incluso el nivel de alcance en el razonamiento covariacional es distinto. Según la clasificación de Carlson et al. (2003), el 62.5% del alumnado del grupo 1A frente al 12.5% del alumnado del grupo 2A alcanza un nivel de razonamiento covariacional N4 (razón promedio, el concepto de pendiente), lo cual podría indicar que el trabajo en interpretación realizado en el grupo es decisivo para explicar las diferencias en los resultados. En cambio, la visión de carácter más algebraico del concepto de función dada por la profesora del grupo 2A parece haber sido interiorizada como regla por parte de un sector importante de su alumnado, cosa que ha dificultado que se pudiera transferir dinámicamente a la interpretación de situaciones

De los datos recogidos podría concluirse que para llevar a cabo propuestas didácticas relacionadas con la interpretación de gráficos funcionales referidos a situaciones o problemas de carácter científico, sería deseable que se pudiera ayudar a construir inicialmente una imagen de dependencia entre variables, para pasar posteriormente a la correspondencia. Dar mucha preponderancia a la idea de correspondencia inicialmente conlleva que el alumnado infiera la imagen de función como una relación de regla, y no de relación entre magnitudes variables, y que por lo tanto las representaciones como las ecuaciones y las gráficas pierdan su significado, aislándose unas de otras. Sierpinska (1992) ya indicaba que introducir funciones a jóvenes estudiantes mediante su elaborada definición moderna era un error didáctico. Además desde se indica que el alumnado debe ser capaz de analizar patrones de cambio en varios contextos, porque es una vía necesaria para entender los procesos dinámicos (Carlson et al., 2003).

Estos datos llevan a la conclusión de que es necesaria una coordinación y colaboración entre el profesorado para que los aprendizajes trabajados en el aula compartan un mismo modelo y no estén tan influenciados por las trayectorias personales de cada docente que imparte la misma materia.

Por lo que se refiere al estilo didáctico utilizado por las profesoras en relación a cómo interactúan con sus alumnos y alumnas en los procesos de introducción y construcción de nuevas ideas, se ha constatado que mientras la profesora del grupo 1A combina mayoritariamente los tipos dialógico-interactivo (33.6%) y autoritario-interactivo (32.8%), su compañera lo hace con estilos autoritario-interactivo (36.1%), y autoritario-no interactivo (33.7%) mientras que en su caso el estilo dialógico sólo supone el 7.2%. Las interacciones del estilo autoritario en general siguen el patrón de pregunta-respuesta-

evaluación (I-R-E). Las preguntas acostumbran a ser cerradas, buscando que el alumnado responda con la idea que la profesora tiene en mente. Ello conlleva que la actividad en el aula se haya caracterizado por una escasa autonomía de los chicos y las chicas, tanto en el pensar como en el hacer. El alumnado busca constantemente la aprobación de las profesoras, a menudo antes de una interacción con su compañera o compañero.

En consecuencia, puede afirmarse que si bien el estilo de ambas profesoras vuelve al originario predominante antes de la aplicación de la UD, se detectan algunos cambios sutiles hacia una metodología menos autoritaria y más interactiva.

Aun así, comparando la percepción del subgrupo 1AA sobre el nivel de conocimientos alcanzado con las del subgrupo 2AA, se constata que el alumnado del primer grupo considera que las tareas solicitadas tienen un nivel de dificultad alto y valora que todavía saben poco sobre el tema trabajado, todo lo contrario a lo que manifiesta el alumnado del segundo grupo (cuando, en cambio, los resultados de aprendizaje son mejores en el grupo 1 A que en el 2A). Ello muestra que el primer grupo tiene un nivel de consciencia y adecuación a la realidad mayor (metacognición). Esta diferencia de percepción podría estar relacionada con el estilo didáctico que posee cada profesora, ya que como se ha expuesto anteriormente, la profesora del grupo 1A también refleja un estilo dialógico-interactivo de mayor calado que su homóloga (33.56% en la profesora del grupo 1A frente a 6% de la profesora del grupo 2A), hecho que podría haber propiciado mayor reflexión sobre el aprendizaje por parte del alumnado. Además, las actividades de coevaluación (ver figura 7-49), llevadas a cabo en el grupo 1A, donde se han explicitado los criterios de evaluación para las funciones proporcional y afín, habrían demandado tareas de metacognición.

A modo de conclusión puede decirse que existe relación entre cómo se aprende y cómo se lleva a cabo la transferencia y que en ello influye cómo percibe el alumnado que el profesorado promueve el uso de las ideas que enseña en contextos y situaciones diversas, siendo muy distinto si se estimula la realización de conexiones con ejemplos cotidianos o de otras disciplinas, o bien se reduce a una aplicación más bien de tipo académico y centrada en la propia asignatura, es decir, si el o la docente transfiere. A una conclusión similar ha llegado Lobato y Siebert (2002b) cuando muestra la conexión entre las interpretaciones realizadas por el alumnado en cuanto a la ecuación lineal y el tratamiento didáctico utilizado en la instrucción.

Por otra parte, tal como indican Carpintero y Beltrán (2005), una falta de motivación y actitud pasiva hacia la transferencia, manifestada en la falta de coordinación de clase por parte del profesorado, habría producido una actitud de similares características hacia la transferencia por parte del alumnado; sin embargo, las pequeñas muestras de transferencia detectadas parecen influir en que dicha transferencia no se reduzca sólo a la aplicación de conocimiento, sino también al aprendizaje dentro del nuevo contexto mediante el conocimiento interpretativo. Ejemplo de ello se ha considerado, en esta investigación, la elección de variables contextuales durante la etapa de transferencia, ya que no ha sido trabajada en el aula. Además tres estudiantes, indican la correspondencia entre las variables contextuales y matemáticas, lo que es interpretado como una mayor conexión entre el dominio matemático y científico. Tal como sugieren Hiebert y Grouws (2007) es la calidad de las oportunidades de aprendizaje que ofrece el profesorado la que ayuda a obtener un mejor rendimiento y, por lo tanto, un mayor nivel de transferencia, algo que se ha evidenciado por ejemplo en la acción de interpretación en el grupo 1A.

Consecuencias didácticas de este apartado son las que se inclinan hacia un cambio que favorezcan en mayor medida el estilo dialógico-interactivo dentro del aula para que puedan aflorar las distintas proyecciones que el alumnado construye del nuevo conocimiento y poder ayudar a regularlas. Por otra parte los conceptos deben de ser compartidos y para ello hace falta el diálogo y la discusión. Todo ello, a su vez, necesita de actividades de estructuración para que cada persona no se quede sólo en su interpretación y vaya más hacia la abstracción del concepto, pero sintiendo que ella ha aportado “algo” a ello. En este sentido podría ser interesantante plantear tareas no sólo a nivel de pequeño grupo sino también de gran grupo donde hubiera que integrar todo el trabajo realizado por los distintos grupos.

Además este apartado refleja hasta qué punto el alumnado interioriza lo que el profesorado trabaja realmente en el aula y por lo tanto se requieren propuestas que partan realmente desde el contexto cercano, para que en un proceso claro y explícito, se vayan estructurando los conocimientos más abstractos pero siempre conectados con el contexto. Por último el profesorado debe sentirse motivado en la transferencia del concepto entre distintas disciplinas –matemáticas y ciencias- y trabajarlo para que el estudiante interiorice ese hecho como parte fundamental del concepto y no como algo que sólo será válido en un futuro de continuación de los estudios –en el bachillerato-.

8.1.4 Relación entre una contextualización del aprendizaje y la transferencia

Hoy día, se considera de suma importancia adquirir competencias a través del aprendizaje basado en contextos (Gilbert, 2006; Gilbert et al, 2011) si se quiere que los conocimientos sean transferidos a nuevas situaciones. Así los datos de esta tesis también se sitúan en esta dirección ya los resultados del grupo 1A que ha trabajado en mayor medida en contexto –cotidiano- y sobre todo la discusión que se ha llevado a cabo durante la elección de variables parecen ser una de las explicaciones a los mejores resultados obtenidos por este grupo. No obstante, un planteamiento global de la contextualización de aprendizajes a nivel global no garantiza que realmente se construya un concepto a nivel de contexto. Ejemplo de ello es que no todos los subconceptos asociados al concepto función han sido construidos en contexto. La contextualización se lleva a cabo predominantemente durante la interpretación de gráficos y deja de tener una relevancia destacada sobre todo cuando se introduce el lenguaje algebraico en la ecuación. Por lo tanto, podría decirse que el concepto de función no ha sido construido en contexto y que por lo tanto no ha sido transferido a otros contextos, aunque algún subconcepto lo haya sido en determinada ocasión.

Consecuentemente, el contexto debería ser el eje vertebrador que guiara y estructurara la secuencia didáctica (Gilbert, 2006; Gilbert et al, 2011) y no simplemente episodios aislados que hacen que el estudiante no interiorice la importancia de la utilización de un nuevo conocimiento en la resolución de un problema. Cabe recordar que tanto en el aula como en el examen se han analizado los momentos en los cuales las variables contextuales dejan de utilizarse durante la expresión algebraica (ver figura 7-53). No está claro, si este cambio en la utilización del contexto y las variables asociadas podría explicar un hecho destacado por parte de un número importante de personas –sobre todo del grupo 1A- que indican que las matemáticas no aportan ninguna ventaja a la hora de hallar el punto de encuentro. Tal vez en este grupo aunque se haya utilizado en mayor medida que el grupo 2A el contexto cotidiano, el curriculum oculto no ha sido favorable a la transferencia en este punto.

Por el contrario ha sido revelador que el alumnado del grupo 2A haya escogido en mayor medida variables de contexto en la situación de la pelota ya que en el aula han sido las variables matemáticas las que han tenido un papel destacado en la mayoría de las actividades.

Por otro lado, el lenguaje es de suma importancia para la construcción de los conceptos en un contexto determinado. Tal como ha sido evidenciado a través de los datos, la competencia lingüística no ha sido abordada en las aulas –no se han trabajado las expresiones adecuadas-, consecuentemente, el alumnado no asocia el subconcepto matemático al contexto. Muestra de ello, es que el alumnado emplea el lenguaje matemático asociado además de a tareas determinadas –traducción desde la representación gráfica a la representación algebraica-, a cuestiones de índole geométrico estático, sin referencias al contexto. Consecuentemente gran parte del alumnado no entiende lo que es la pendiente o la ordenada en el origen dentro de un contexto determinado, se sabe que operación incluye.

Parece pues, que la construcción en contexto de los subconceptos asociados al concepto función supone un entramado complejo que es necesario abordar.

A diferencia de Bransford et al., (1999) quienes indican que al menos dos contextos distintos, se ve necesario trabajar el concepto de función en al menos cuatro contextos científicos distintos –uno de cada área de ciencias,- además de otros tres o cuatro de carácter cotidiano. La razón de ello estriba en que en general el concepto de función es asociado con el fenómeno físico o químico y pocas veces con el geológico y el biológico. También podría llevarse el trabajo en contextos a través de distintas áreas (sociales, tecnología,...) en un marco de conexión o de interdisciplinaridad con las ciencias y las matemáticas. En todo caso, debiera de realizarse de una forma profunda, es decir construir a través de ellas todos los subconceptos necesarios para abordar el concepto de función, de tal modo que el alumnado coordine todos los conocimientos necesarios y además quede clara la diferencia entre una representación del concepto y el propio concepto.

El alumnado debe interiorizar que el desarrollo científico se apoya en sistemas de representación (Martí y García Mila, 2007) y que el estudio de fenómenos científicos es un buen instrumento para entender los sistemas de representación. En este sentido, es destacable el trabajo realizado por ambas profesoras en cuanto a la traducción entre los distintos sistemas de representación se refiere. La gran mayoría del alumnado ha escogido la ecuación acorde al gráfico escogido en la situación de la pelota. Además, también el nivel de coherencia entre la descripción realizada por el alumnado que ha trabajado la UD ha sido superior al grupo 3B, aunque hayan sido las ideas alternativas las que han aflorado en esta tarea.

Actividades que De esta forma el alumnado podría entender por qué la función es un concepto tan importante en las ciencias. Por otra parte parece necesario propiciar dentro del marco de contextualización evaluaciones que tengan en cuenta la utilización de conocimientos matemáticos en situaciones determinadas y no considerar estos últimos con independencia del contexto (Carpintero, 2002).

Además es necesario que el alumnado entienda que la resolución de problemas científicos con base matemática necesita de la construcción de distintos modelos – científico y matemático- para llegar a resolverlo adecuadamente.

8.1.5 Relación entre conocimiento matemático y científico

En los apartados anteriores se ha discutido sobre cuáles de los conocimientos tanto científicos como matemáticos han sido transferidos y en qué modo estos últimos se encuentran relacionados con el entorno de aprendizaje. Así mismo, cabría preguntarse si existen estilos de transferencia asociados a posibles relaciones entre conocimientos matemáticos y científicos y, qué razones los pudieran explicar.

Para responder a esta última cuestión se han tenido en cuenta tanto los resultados en matemáticas como en ciencias y las tareas requeridas. Los análisis realizados sugieren la existencia de distintos estilos de transferencias asociados tanto a conocimiento de ciencias como a conocimiento de matemáticas, siendo éste, en este estudio de caso realizado, el que influye para un mismo conocimiento (conocimiento en mecánica y en solubilidad) de ciencias. Además, la diferencia en el estilo de transferencia parece estar relacionada con un gusto/interés distinto por ambas áreas manifestado por el alumnado. Dichos estilos se han basado en las traducciones entre las representaciones externas de los gráficos.

El análisis de la traducción, por un lado, desde la descripción de la situación al gráfico y, por otro, desde el gráfico a la expresión algebraica sugiere la existencia de una tipología determinada de transferencia:

- a) tipo 1, estudiante que tiene mayor desempeño en la transferencia desde la gráfica a la ecuación que desde la situación al gráfico;
- b) tipo 2, estudiante que realiza ambas transferencias de modo equilibrado; y
- c) tipo 3, estudiante que muestra menor desempeño en la transferencia desde la gráfica a la ecuación que desde la situación al gráfico.

Los datos anteriores se engloban en tareas de translación predicción y clasificación, que ha su vez se relacionan en función de las acciones de interpretación y construcción.

Una vez cruzados los desempeños matemáticos y el conocimiento en ciencias se han podido establecer los siguientes estilos de transferencia:

Estilo 1: estudiante cuyos conocimientos tanto matemáticos como científicos son escasos y consecuentemente ante situaciones conocidas como nuevas no transfiere adecuadamente. Estas personas pueden situarse en cualquiera de los tres grandes tipos de transferencia mencionados en el párrafo anterior (tipos 1, 2 y 3). Este estilo ha sido identificado en mayor medida entre el alumnado del subgrupo 2AA, y se ha observado que su principal estrategia de aprendizaje ha sido la de memorizar los conocimientos matemáticos enseñados. Dicha estrategia se explica en buena parte por el estilo didáctico de la profesora, caracterizado por interacciones de tipo no dialógico y, en general, de componente autoritario (Mortimer y Scott, 2003). Los conocimientos se explican, pero la docente no es consciente de las razones de las ideas del alumnado ni de sus necesidades y, en consecuencia, no puede promover una regulación efectiva de las dificultades y errores que se han de superar para poder entender y aplicar el nuevo conocimiento. Se puede decir que se basa en un estilo de enseñanza centrado en el profesorado y no en el alumnado (Kember, 1997; Simmons et al., 1999).

Estilo 2: estudiante cuyo conocimiento científico es bajo o muy dependiente de contexto, lo que dar lugar a que exprese muchas ideas alternativas, que le condicionan la observación o lectura del gráfico totalmente o no, y cuyo conocimiento matemático es de carácter formal. La transferencia se realizará en aquellos contextos formales que requieran la repetición o el seguimiento de procedimientos matemáticos trabajados en el aula. En este grupo se sitúan aquellas personas de tipologías 1 y 2 que presentan diferencias importantes en función del contexto de aplicación. Por lo tanto, el nivel de conocimiento científico del alumnado será muy decisivo en la transferencia. Este estilo se ha detectado en el alumnado del subgrupo 1AA (1A1***, 1A9**, 1A10**). Se trata en general de estudiantes con poco conocimiento científico y que mantiene un estilo continuador de lo trabajado para solventar la debilidad en la interpretación contextual.

Estilo 3: estudiante cuyo conocimiento científico y matemático es superior a los grupos anteriores. Su nivel de transferencia dependerá del carácter de la tarea requerida y de las dificultades a nivel matemático. Todo este alumnado ha mostrado mayor nivel en

Matemáticas I que en Matemáticas II; consecuentemente presenta un nivel elevado en transferencia relacionado con el tipo 3. Este estilo se ha identificado por igual en ambos subgrupos. Estas personas utilizan su conocimiento científico a la hora de llevar a cabo las tareas matemáticas contextualizadas. La persona que más ha destacado en este estilo ha sido un alumno nivel académico medio (1A13**), que se caracteriza por ser de estilo motivacional curioso, con un interés elevado hacia las ciencias, y con una destreza interpretativa importante. Sin embargo, es un estudiante que no responde a la tipología del éxito a nivel escolar, porque no ve en las actividades de aprendizaje que se le proponen una respuesta a su curiosidad.

Estilo 4: estudiante cuyos conocimientos científico y matemático son bastante elevados, siempre situados en un nivel inicial de abstracción matemática. Puede interpretar correctamente el fenómeno o situación planteada llevando a cabo la transferencia interrepresentacional adecuada porque dispone de las herramientas necesarias para ello.

Los datos parecen indicar que aquellas personas que poseen un mayor nivel competencial en matemáticas I (caracterizadas por la interpretación) trasladan sus ideas científicas así como fenómenos científicos a una representación –gráfica por ejemplo– dentro de la matemática formal; mientras, que aquellas personas cuyo mayor nivel competencial matemático esté cercano a las englobadas como matemáticas II (caracterizadas por la construcción) resuelven mejor los problemas científicos que requieran de aplicación de pautas a través de algoritmos matemáticos. Estas personas, a partir de un mayor trabajo de contextualización podrían alcanzar mayor dominio de la situación científica, mientras que las primeras necesitarían de un trabajo específico en algoritmos matemáticos para desempeñar en toda su globalidad las tareas requeridas.

Los resultados en el estilo de transferencia señalan que mientras el nivel académico indicado por las profesoras correlaciona de modo muy significativo estadísticamente con los resultados obtenidos de los exámenes, no lo hace de forma tan acentuada con los resultados de la entrevista; lo cual señala la necesidad de profundizar más en lo que se entiende por un nivel académico alto en un conocimiento determinado, ya que seguramente es algo mucho más complejo que la visión aplicada habitualmente. Entre los aspectos a considerar cabría tener en cuenta la capacidad de realizar una transferencia de tipo lejana al

aplicar los conocimientos aprendidos como algo que caracterizaría al alumnado de nivel de aprendizaje alto.

Entre las razones que pudieran explicar los distintos estilos de transferencia, es destacable la relación identificada entre cada estilo y el gusto por las matemáticas y las ciencias. Entre el alumnado que no ha transferido (estilo 1) existe un porcentaje importante que no muestra gusto por ninguna de las áreas, especialmente en lo relativo a las ciencias, y se encuentra más acentuado en las chicas. El estilo 2 de transferencia, -transfiere mejor aspectos más formales de las matemáticas- y muestran tendencia positiva en cuanto a gusto por las matemáticas y negativa hacia las ciencias, lo que podría explicar un mejor resultado en Matemáticas II. Por último, el alumnado de estilo 3, caracterizado por un mayor nivel de mayor transferencia tanto en matemáticas I como en Matemáticas II, expresa en general, gusto por ambas áreas. Así pues, parece que la transferencia del conocimiento matemático en contexto científico pudiera estar relacionada con el gusto en ambas áreas, además del conocimiento pertinente de cada una de ellas. Por otro lado, mientras la autoeficacia en matemáticas se encuentra relacionada con la transferencia de contenidos matemáticos en contextos científicos, la autoeficacia en ciencias no lo está.

La diferencia de resultados de cada uno de los estilos en el examen y en la entrevista –el estilo 3 transfiere mejor en la entrevista, no así los otros estilos-, podría explicarse en parte también en el gusto hacia la materia. Este grupo se siente cómodo en la entrevista porque se habla de ciencias y utiliza su conocimiento interpretativo para realizar las tareas requeridas. El estilo 2 es dependiente es mayor medida del contexto, y además, no le gustan las ciencias. Durante la entrevista se le plantean situaciones contextualizadas de ciencias que no son de su interés y, además parte de las tareas se refieren al contexto por lo que puede sentirse inseguro; pero a medida que la tarea se acerca a lo realizado en el aula adquiere mayor seguridad. La alumna 1A9** ha sido un buen exponente de este estilo, ha expresado ideas alternativas que le han llevado a una interpretación icónica en el contexto de física y a una inseguridad en la interpretación en la situación de solubilidad y, por el contrario, es capaz de construir una ecuación, siguiendo el procedimiento trabajado en el aula, aunque no pueda identificar la ordenada en el origen. Por último el estilo 1 – nivel de conocimiento bajo en matemáticas y ciencias-, que no comparte gusto simultáneo por matemáticas y ciencias, siente que en la entrevista domina menos la situación que en el examen, ya que tanto los contextos científicos como las tareas se encuentra, sobre todo al inicio, bastante alejadas a las trabajadas en el aula.

A modo de conclusión, podría decirse que existen unos estilos de transferencia de conocimientos matemáticos en contextos científicos relacionados además de con un nivel conocimiento de ciencias, con las tareas de matemáticas –de interpretación o construcción- requeridas en dichos contextos científicos. Así personas que poseen el mismo conocimiento científico pero con diferente competencia en las tareas matemáticas darán como resultado diferentes transferencias (diSessa, 1993, 2002). Además, se han encontrado relaciones entre las distintas transferencias llevadas a cabo y el gusto que el alumnado tiene por las áreas –ciencias y matemáticas-.

8.1.6 Actividades y estrategias didácticas que promueven la transferencia

Son muchas y variadas las actividades y estrategias didácticas (ver tablas 7-23 y 7-36) que promueven la transferencia y de aquí su importancia para el profesorado. Por ello es prioritario que el profesorado tenga conciencia de ello, ya que a menudo se trabajan actividades desde un enfoque determinado que no es aquel que conscientemente sería deseable para una adecuada transferencia desde el punto de vista formal de la persona experta tanto en ciencias como en matemáticas. Por otro lado, esto significa que difícilmente será transferido aquello que no se trabaje a través de una actividad y con una finalidad determinada de modo explícito difícilmente será transferido. Además es de suma prioridad el trabajo realizado con el lenguaje ya que éste marca la dirección que se lleva a cabo, es decir si el lenguaje es pobre y hay una falta de terminología y nexos adecuados, de nexos adecuados, las conexiones realizadas serán simples y poco relacionadas. Así es necesario no sólo secuenciar las actividades para que estas cubran todo el proceso de aprendizaje sino que es de igual transcendencia llegar a acuerdos sobre los enfoques en las actividades y los conocimientos a destacar. Ejemplo de ello ha sido por ejemplo que dentro de la interpretación de gráficos, la interpretación icónica no ha sido suficientemente tratada y además varias veces ha sido reforzada por las profesoras permitiendo un lenguaje que corresponde a este tipo de enfoque.

Entre las actividades y estrategias identificadas que promueven la transferencia del concepto función a contextos científicos caben destacarse:

- presentar el concepto función en múltiples contextos, tal como ha sido promovido desde la UD; siempre y cuando estos contextos se aprovechen para construir en

contexto, siendo para ello necesario favorecer las interrelaciones con otras áreas (Bransford y Schwartz, 1999; Gick y Holyoak, 1983). La variedad de contextos daría lugar a una amplia gama de capacidades de contexto específico que se recopilan y coordinan para que el concepto, pueda llevarse a cabo en una amplia variedad de situaciones (diSessa y Wagner, 2005). Durante la investigación se ha concluido que el número de contextos en la UD ha sido excesivo, los que ha llevado a que las profesoras se hayan sentido, en ocasiones inseguras, y como consecuencia de ello, no han trabajado bastantes de las actividades diseñadas – actividades sobre la interpretación icónica, el caudal de los depósitos por parte de la profesora del grupo 1A-. Por ello, parece oportuno indicar que el número de contextos diferenciados podría ser de ocho –cuatro de contexto científico y cuatro de contexto cotidiano-, porque un exceso de contextos científicos plantea problemas añadidos, ya que cada situación científica requiere a su vez la creación de al menos un modelo mental de la situación, que muchas veces en sí es compleja.

- crear un clima de transferencia en el aula, es decir tener motivación o espíritu de transferencia (Haskell, 2001) invitando al alumnado a buscar o crear ejemplos que tengan que ver con el concepto a transferir y hacer que se expliciten los argumentos que han llevado a su elección; para ello es el docente en primer lugar debe ser modelo de transferencia (Alexander y Murphy, 1999). En este sentido, ha sido muy interesante la oportunidad mostrada por la profesora del grupo 1A cuando ha solicitado que por parejas, una de las personas plantee una situación con una descripción determinada –podría incluir una tabla de datos- y la otra a medida que escuchaba tenía que crear el gráfico, posteriormente los datos son comparados (ver figura 7-50). También la profesora del grupo 2A cuando plantea la actividad de los dos depósitos de agua (actividad 71 de la UD) y promueve que el alumnado llegue a saber en qué momento tendrán los dos depósitos la misma cantidad de agua; refuerza el mensaje de la utilización de las matemáticas para hallar este momento.
- las actividades que promueven un lenguaje adecuado a la hora de llevar a cabo las explicaciones, para ello es prioritario remarcar las expresiones y vocabulario que especifiquen el tipo de relación que se establece entre las variables representadas. En este sentido, aunque el lenguaje no ha sido cultivado en las aulas, si ha habido pequeños momentos –en el grupo 1A- donde se ha insistido en la argumentación a la hora de decidir si una variable es independiente o dependiente; sin embargo, en

ello no se ha trabajado el lenguaje en sí. Para este fin sería interesante que el estudiante fuera redactando todas las operaciones que va realizando y que se forzara a la conexión con el contexto, también podrían incluirse actividades de razonamiento de verdadero y falso sobre cuál es la pendiente o la ordenada en el origen en la situación contextualizada.

- las actividades que tratan de comparar situaciones y representaciones, como las llevada a cabo por el grupo 1A (comparar la descripción que realiza un estudiante sobre un hecho y el gráfico o tabla realizado por el otro estudiante (ver figura 7-50). La insistencia de este tipo de tarea en el grupo 1A ha podido influenciar en unos mejores resultados en la acción interpretación por parte de este grupo.
- las actividades que clarifican tanto las semejanzas como las cuestiones discordantes entre los subconceptos asociados al concepto función, como por ejemplo la ordenada en el origen y la altura del gráfico. Las actividades contextualizadas planteadas en la UD podrían haber servido para ello, haciendo reflexionar al alumnado sobre la respuesta, por ejemplo cuando indican la altura del gráfico sin expresar realmente su sentido en el contexto. Así, mientras una alumna indica por ejemplo que la ordenada se refiere a cuál es la velocidad con la que se inicia el movimiento (en el momento en el que se le pregunta por su definición), otras personas destacan que no tiene n (ordenada en el origen) porque el gráfico no pasa por el origen de coordenadas. Sería deseable un diálogo en torno a este tipo de argumentaciones.
- las actividades que promueven el dialogo en torno a lo que se entiende por variable, y la identificación justificada de la variable independiente frente a la dependiente en situaciones contextualizadas, como la llevada a cabo por el grupo 1A,
- las traducciones entre las distintas representaciones (traducciones entre la representación gráfica y algebraica trabajadas en ambas aulas). Tal como se ha indicado en varias ocasiones, este tipo de tarea ha sido realizado con importante éxito por la mayoría del alumnado, ya que ha escogido adecuadamente la expresión algebraica coherente con el gráfico elegido en la situación de la pelota. Además, el alumnado se ha inclinado por las variables contextuales. Destaca además sutilmente que tres personas hayan indicado la correspondencia entre las variables contextuales y las variables matemáticas.

- ayudar al alumnado en el proceso de construcción del concepto función desde la contextualización a la abstracción evitando la excesiva contextualización (Chen y Daehler, 1989; Singley y Anderson, 1989) y también la excesiva abstracción. En este sentido son interesantes las aportaciones realizadas por la profesora del grupo 1A que incluye actividades contextualizadas, pero que sin embargo pierden importancia cuando el concepto de función empieza a trabajarse desde el plano matemático.
- promover actividades de autoevaluación y coevaluación como los llevados a cabo en el grupo 1A para que el alumnado desarrolle la capacidad de metacognición. Este tipo de actividades podrían haber favorecido que el alumnado del grupo 1A sea más consciente tanto del nivel de conocimiento poseído y de las dificultades y por lo tanto saber enfrentarse con mayor flexibilidad a las tareas encomendadas. .
- actividades de motivación y actitudinales para mejorar la autoeficacia en matemáticas y ciencias sobre todo en el alumnado que se siente menos motivado y con un autoconcepto bajo tanto en ciencias como en matemáticas; para ello es importante trabajar el gusto por las matemáticas y las ciencias. Las actividades escogidas para la UD tienen también este objetivo, ya que a menudo los libros de matemáticos plantean pocas actividades curiosas desde el punto de vista científico. Sin embargo, lo cierto es tanto el área de matemáticas como en ciencias poseen déficit de actividades tanto de motivación como aquellas que tengan por objetivo mejorar aspectos actitudinales. Los datos indican que el gusto por las ciencias es menor al gusto por las matemáticas (donde los datos son elevados), lo que hace necesario plantearse la necesidad de incorporar actividades de motivación. Por otra parte, teniendo en cuenta que el nivel de autoeficacia en matemáticas se encuentra relacionado positivamente con los resultados, se hace necesario incorporar actividades que poyen en la dirección de un trabajo personal académico.

8.1.7 **Relación entre los aspectos motivacionales y actitudinales y la transferencia**

Al igual que indican otras investigaciones (Carpintero y Beltrán 2005), en esta tesis se constata una relación entre los aspectos motivacionales y actitudinales y el nivel de transferencia desempeñado por el alumnado. Dentro de los mismos destaca en primer lugar, el gusto tanto por las matemáticas como por las ciencias. El alumnado que mejores resultados manifiesta gusto por ambas áreas –matemáticas y ciencias-, lo que estaría en

coherencia con otras investigaciones (Carpintero y Beltrán, 2005 y Haskell, 2001) ya que la persona que tiene gusto por algo se siente motivado para llevarlo a cabo. Por el contrario, aquella persona a la que sólo le gusten las matemáticas o las ciencias, podría no sentirse totalmente motivada para llevar a cabo una transferencia que implique ambos tipos de conocimiento matemático y científico-. Además del gusto, el control motivacional también es un factor determinante en la transferencia. En este sentido se han analizado la gestión de creencias, la gestión de motivos de valor y la gestión afectiva. El trabajo con todos ellos, o por lo menos con algunos de los más destacados en esta investigación – activación de creencias de autoeficacia, potenciación del control percibido, fomento del valor de la tarea, control de la ansiedad, control de la evocación de pensamientos pesimistas-, ayudarían a un mayor conocimiento del propio aprendizaje y dificultades a las cuales habría que enfrentarse. Parece que las actividades de coevaluación llevadas a cabo por el grupo 1A han podido ayudar en este sentido.

No obstante, el análisis de ambas aulas, tanto a nivel protagonismo como de participación por un lado, y del estilo didáctico de las profesoras por otro, hace necesaria la reflexión sobre los mecanismos que caracterizan el estilo de aula.

Por otra parte el cuestionario de gestión motivacional (Cabanch, 2009) aporta datos interesantes sobre la gestión de creencias, de motivos y valor y la gestión afectiva. Si bien los datos referidos a los distintos sexos se discuten en el siguiente apartado, en este se dedica atención a los resultados generales. De todos los ítems analizados, es el fomento de la competitividad el que menor valor ha obtenido en ambos grupos (media de 2.08 en el grupo 1A y media de 1.6) en el grupo 2A. Estos datos podrían explicar algunos de los peores resultados durante la entrevista o en evaluaciones externas en comparación con el examen; no puntúan para la nota. Además, el grupo 1A obtiene menor valor tanto en generación de expectativas positivas de resultado como en el fomento del valor de la tarea. Ambos, junto con el primer indicador podrían haber influenciado en que este grupo, a pesar de obtener mejores resultados que su homólogo, hubieran descendido en nivel de resultados desde el examen a la entrevista. el examen en comparación a la entrevista, o incluso en resultados en general. Por último, el grupo 1A si bien parece ser más conciente del nivel de aprendizaje y de las dificultades que posee en la diversas tareas, también un menor nivel de potenciación de control percibido con lo cual tiende a pensar que las dificultades en las tareas son más de carácter interno; por el contrario el alumnado del grupo 2A piensa que se deben en mayor medida a causas externas.

Como consecuencia didáctica podría decirse que la enseñanza de las matemáticas debería abordar el papel que las emociones y las actitudes desempeñan en el aprendizaje de conceptos matemáticos, sobre todo en relación a aquellas personas que poseen un menor nivel de autoeficacia y gestión motivacional. Para ello podrían proponerse actividades en las cuales estas personas adquirieran protagonismo. Por ejemplo podría trabajarse la tarea de antemano con ellas para que fueran estas personas las protagonistas a la hora de abordar una actividad nueva en el aula.

8.1.8 **Influencia de la variable sexo y perspectiva de género en la transferencia**

La variable sexo no ha sido contemplada en estudios tradicionales sobre la transferencia; sin embargo, investigaciones de diversa índole a nivel educativo –PISA, etc.- constatan la diferencia de resultados en función de esta variable, por lo que parece necesario preguntarse si tiene incidencia en la transferencia y de ser así, qué factores podrían explicarla. En este apartado se pretende ahondar en esta cuestión, y para ello se comparan tanto el grado de transferencia mostrado en el examen y en la entrevista por parte de ambos sexos, como diversos aspectos de índole personal académico o actitudinal que puedan ayudar a comprender estos resultados.

Los resultados generales tanto del examen como de la entrevista indican una actitud distinta entre chicas y chicos que podría haber dado como fruto un mayor nivel de transferencia por parte de las chicas durante el examen y de los chicos durante la entrevista, es decir, a nivel de transferencia cercana y lejana respectivamente

Los datos generales del examen podrían estar señalando que las chicas han realizado una transferencia cercana –en examen- más adecuada que la llevada a cabo por los chicos (.4 puntos de media más sobre 4 puntos de máxima por parte de las chicas); sin embargo, este resultado debe aceptarse con cautela ya que dos chicos (de nivel académico matemático bajo y medio) del subgrupo 2AA dejaron el examen prácticamente en blanco. En la entrevista, en cambio, los chicos podrían haber mostrado mayor nivel de transferencia (ver tabla 7-39), en primer lugar, porque estos dos chicos transfieren conocimiento matemático –uno de ellos de modo muy positivo- y porque las chicas investigadas transfieren en menor grado en las tareas de interpretación. Una de las explicaciones podría ser que ellas parecen realizar mejor las tareas englobadas en Matemáticas II (caracterizadas sobre todo por la construcción) requeridas en el examen a

las englobadas en Matemáticas I (caracterizadas por la interpretación) solicitadas en la entrevista.

La diferencia más destacada entre ambos sexos parece situarse en la acción de interpretación (ver diferencias entre matemáticas I y matemáticas II (ver tabla 7-47) en la cual, las chicas muestran menor nivel de transferencia. Así las chicas –más las que han trabajado la UD - parecen mostrar mayor dificultad que los chicos de sus respectivos grupos a la hora de traducir desde la descripción de la situación al gráfico (ver tabla 7-46) en las situaciones de la montaña rusa y de la solubilidad. Además, en este tipo de traducción ellas parecen escoger en mayor medida gráficos que hacen referencia al trayecto en montaña rusa, lo cual indicaría un nivel de conocimiento científico cinemático más alejado del formal, que tampoco habría ayudado a solventar la interpretación del gráfico. Sin embargo, ellos parecen considerar la potencia, la velocidad y la fuerza como algo intrínseco al objeto en movimiento, mientras que ellas parecen considerarlo como algo extrínseco. Esta diferencia de concepción podría ayudar en un futuro a que las chicas modelizarán con mayor facilidad el modelo científico de cinemática.

Los resultados expuestos podrían estar relacionados con el estilo didáctico interiorizado por cada sexo durante el aprendizaje. El modelo didáctico mayoritario en ambas aulas –en mayor medida en el aula 2A- ha potenciado las traducciones y construcciones puramente matemáticas y ellas podrían haber interiorizado este trabajo en mayor medida que los chicos. Prueba de ello podría ser el que las chicas utilizan mayor nivel de lenguaje matemático (algunas desvelan aprendizaje memorístico en mayor medida que los chicos), tanto en el examen como en la entrevista, en contextos de aplicación muy similares a las del contexto de aprendizaje –en la elección de la ecuación coherente con el gráfico en la situación de la pelota, cuando se pregunta cómo se hallaría el punto de encuentro-, mientras los chicos parecen utilizarlo con mayor flexibilidad en tareas interpretativas (ver figura 7-78).

También la elección de variables matemáticas x , y -un 42.85% de las chicas las escogen frente a un 12.5% de los chicos- (ver figura 7-77) en la situación de la pelota, podría indicar una mayor tendencia por parte de ellas a ser más continuistas con lo trabajado en el aula. Unido a todo ello, cuando se pregunta cómo hallarían el punto de encuentro, la mayoría de las chicas optan por indicar el procedimiento trabajado en el aula mientras que la mayoría de los chicos opta por un procedimiento de carácter práctico –no matemático-, incluso insisten que no ven útil las matemáticas para resolver esta tarea.

Estos resultados por otra parte podrían estar relacionados con las estrategias de control que en mayor medida parecen utilizar tanto los chicos como las chicas en Matemáticas; mientras ellas utilizan en mayor medida estrategias de memorización y control, ellos emplean mayoritariamente estrategias de elaboración (PISA 2003). Por último, la construcción de las ecuaciones la han realizado sólo tres estudiantes –dos chicas y un chico-; una de las chicas ha desglosado la ecuación general de las funciones hasta llegar a obtener la pendiente igual a cero.

Esta diferencia en la acción de interpretación, sin embargo, no se ha identificado en el grupo 3B, tal vez porque ninguna alumna de nivel académico bajo se ha ofrecido a participar -en su lugar lo ha hecho un alumno-, o porque las chicas de los grupo 1A y 2A se han visto más influenciadas que los chicos por la perspectiva matemática durante la entrevista.

Los resultados parecen indicar que es el nivel de competencia matemática en los chicos –no tanto el de ciencias - lo que explicaría la diferencia de resultados entre los grupos que han trabajado la UD respecto al grupo 3B. Parece que durante la entrevista, los chicos han aplicado en mayor medida que las chicas el aprendizaje matemático, lo que podría entenderse como un aprendizaje más interpretativo por parte de ellos.

No obstante las diferencias entre chicos y chicas sugieren también influencia de otra serie de factores, además de los ya expuestos, relacionados con la perspectiva de género. Por ejemplo, la diferencia de resultados en la coherencia entre la gráfica y la ecuación, analizada tanto en el examen como en la entrevista, apuntan en esta dirección. Ellas parecen ser más competentes en el contexto cercano (media de 3.13 en las chicas frente a 2.50 en los chicos) y ellos en transferencia lejana (transferencia mostrada por un 6.25% de las chicas frente a un 62.5% de los chicos).

El nivel de autoeficacia en ciencias es similar entre chicos y chicas. En matemáticas en cambio, el nivel de autoeficacia de los chicos es algo superior al de las chicas (ver figura 7-80); dato que es coherente con los hallados en PISA 2003 donde las chicas poseen una autoeficacia y autoconcepto en Matemáticas estadísticamente menor a la de los chicos. Por otra parte, las chicas evaluadas podrían tener un nivel de ansiedad significativamente mayor al de los chicos (PISA 2003) que unido a un menor control de la ansiedad (2.88 en las chicas y 3.71 en los chicos), menor activación de creencias de autoeficacia (chicas 3.28 y chicos 3.54) y una menor potenciación del control percibido (chicas 2.54 y chicos 2.91), podría haber influido en la dinámica durante la entrevista, explicando en parte una menor

transferencia por parte de ellas, dentro de la cual podría situarse el ejemplo anterior (coherencia entre gráfico y ecuación).

Además, un menor fomento de la competitividad por parte de las estudiantes (chicas 1.65 y chicos 2.09), podría haber llevado a que éstas, no sintieran la entrevista como medio de evaluación de importancia personal –no contaba para la nota- y que por lo tanto, el nivel de concentración fuera menor. Este hecho sería acorde con un menor fomento del valor de las tareas por parte de las chicas (chicas 3.28 y chicos 3.54).

Por último el gusto por matemáticas y ciencias, muestra diferencias destacadas entre chicos y chicas. El gusto por las matemáticas es superior al gusto por las ciencias en ambos sexos, mostrando un gusto muy elevado en matemáticas –mayor por parte de los chicos-. No se han apreciado diferencias destacadas en cuanto al gusto por las Matemáticas, dato este distinto al identificado en PISA 2003 –el gusto por las Matemáticas fue mayor por parte de los chicos-. El gusto por las ciencias marca grandes diferencias entre ellos y ellas (ver figura 8-81), favorable a los chicos. Esta diferencia no parece ser acorde con los datos registrados en PISA 2006, ya que en esta evaluación no se observaron diferencias entre ambos sexos, tal vez porque fue analizado junto con la intención de hacer uso de las ciencias en un futuro. Esta diferencia en gusto, sumada a todos los anteriores, podría explicar una evolución diferenciada entre chicas y chicos en relación a la transferencia.

Parece probable que todos estos factores hayan influido en una transferencia de carácter más flexible por parte de ellos y que los chicos hayan transferido una imagen de concepto de función más cercana a la aceptada formalmente (media de 3.12 en las chicas y 3.5 en los chicos) y una relación covariacional mayor al realizado por ellas.

La dificultad percibida por el alumnado en la realización de las tareas se ha evaluado a través de la plantilla de autoevaluación. Aunque a nivel general no ha habido diferencias entre chicos y chicas en cuanto a la valoración de la dificultad en las tareas; sin embargo, las chicas de nivel académico bajo y medio perciben un nivel mayor de dificultad que los chicos de sus respectivos niveles académicos, dato concordante con otros encontrados en otras investigaciones (Marsh y Craven, 2006; Sullivan y Mahalik, 2000; Whiston y Bouwkamp, 2003).

Existe diferencia por sexo en cuanto al tipo de actividades y agrupamientos de tarea en el aula. Las chicas prefieren actividades de carácter más mecánico cuya organización de tarea es individual y los chicos prefieren actividades más prácticas y no se sienten cómodos

en una organización de tarea individual. Esta preferencia de tareas sería coherente con la utilización mayoritaria de estrategias de memorización y de control de información por parte de las chicas y de elaboración por parte de los chicos (PISA 2003). Este dato parece ser coherente con el método escogido por cada sexo para hallar el punto de encuentro e incluso podría estarlo con un aprendizaje de carácter más interpretativo por parte de ellos, en el sentido de que una organización grupal favorece la discusión de la interpretación y un aprendizaje compartido.

Como conclusión podría decirse que parece identificarse una división entre las matemáticas y las ciencias en ambos sexos con características distintas. Por un lado, las chicas se encontrarían más influenciadas por el aprendizaje muy estructurado y formal, detectado en PISA 2003. Para ellas, las matemáticas serían percibidas como algoritmos, procedimientos y por lo tanto, lo difícil sería el paso desde una situación contextual al plano formal, que necesitaría una enseñanza que incidiese en estrategias de elaboración. Una vez realizada esta translación el seguimiento de un procedimiento aprendido en el aula les resultaría más fácil. Por ello, sus resultados son mejores en una situación como el examen, estructurado según lo trabajado en aula. Los chicos por el contrario, no encontrarían un encaje entre sus modos de representar la realidad con lo que las matemáticas les ofrecen en sentido formal; por ello, no encontrarían mucho sentido a la utilización de las matemáticas en algo que se podría realizar intuitivamente –hallar el punto de encuentro-. Sin embargo, esto podría indicar que se encuentran más sujetos que las chicas al momento determinado y que por lo tanto les falta la perspectiva más lejana que ofrecen las matemáticas, siendo más dependientes del contexto a la hora de actuar. Sin embargo, su flexibilidad en el aprendizaje les ayudaría a ser más adaptativos a las nuevas situaciones. Por ello, necesitarían una enseñanza que incidiese en las estrategias de abstracción y memorización significativa y, sobre todo, de control de la información. Parece por lo tanto, que las diferencias de resultados de ambos sexos se encuentran relacionadas en gran medida por patrones de género.

8.2 Conclusiones generales

A modo de conclusión general, y teniendo en cuenta la hipótesis general de partida: *la escasa transferibilidad de la competencia matemática –funciones- al contexto científico*

puede ser debida al modelo de instrucción seguido por el alumnado en las clases de matemáticas, ya que no prioriza habitualmente la contextualización de los aprendizajes, puede concluirse:

- que existe relación entre el estilo docente y el tipo de conocimiento transferido por el alumnado en situaciones contextuales, ya que se transfiere el estilo aprendido en el aula (coherencia entre la representación gráfica y representación algebraica, pero escasa transferencia desde la descripción de la situación al gráfico, por ejemplo), y que incluso se identifica a nivel de lenguaje. Esto significa que el o la estudiante activa conocimientos latentes aprendidos y los coordina con aquellos que representa en el momento de transferencia para construir una respuesta adecuada desde su punto de vista, y no tanto desde la perspectiva de la persona experta,

- que aunque dentro de una misma aula convergen varias imágenes del concepto función, parece que el estilo docente favorece en mayor medida un tipo dentro de los existentes; ello lleva a la construcción de imágenes mayoritarias pero distintas del concepto por parte del alumnado que estudia en el mismo centro,

- que la enseñanza del concepto función que parte desde la abstracción matemática formal no favorece que pueda ser aplicada a contextos científicos, al menos en un tiempo breve de tiempo, por lo que no debería ser la primera en trabajarse en el aula.

- que no se produce la transferencia dinámica del concepto función si no ha sido construido en contexto en condiciones de relación covariacional dinámica.

- que la construcción de conceptos a partir del análisis de situaciones contextualizadas supone un aprendizaje que va más allá de la mera utilización de actividades contextualizadas en el aula,

- que la transferencia es un concepto más amplio que la simple aplicación de los conocimientos, ya que el alumnado es adaptable a las distintas situaciones, y está influenciado por lo que aprende en el contexto de transferencia,

- que las relaciones entre los distintos tipos de conocimientos transferidos (matemáticos y científicos) caracterizan estilos de transferencia,

- que la transferencia se encuentra influenciada además de por el estilo docente, por factores de carácter personal académico (autoeficacia, autoconcepto, ansiedad y estrategias de control académico-personal) que no han sido considerados en las investigaciones de transferencia tradicionales,

- que las chicas y los chicos transfieren distintos tipos de conocimientos, que responden a características relacionadas con el género en los momentos de aprendizaje y de transferencia, por lo que se debiera profundizar en nuevas metodologías que tuvieran en cuenta tanto los estilos de transferencia en general como las necesidades de los chicos y de las chicas durante el aprendizaje.

8.3 Limitaciones de la Investigación

La investigación se ha visto condicionada por distintos factores, algunos de los cuales han conllevado una reorientación del trabajo desde los planteamientos iniciales, pero al mismo tiempo ha posibilitado profundizar en otros como, por ejemplo, en cómo las diferencias en la aplicación de la UD condicionan que conocimientos el alumnado es capaz de transferir. Por otro lado, los resultados también se han visto condicionados por las características de los instrumentos de recogida de datos y las condiciones de aplicación y de su análisis. Entre los que conviene destacar están:

a) Relacionados con el planteamiento y aplicación de la Unidad Didáctica (UD):

- Al plantear la UD una diversidad de contextos excesiva, ha dificultado su aplicación y, muy especialmente, que las actividades se aplicaran con el nivel de profundización que sería necesario para un buen aprendizaje.
- No se han aplicado en el aula muchas de las actividades previstas, tanto porque las profesoras no se han sentido seguras, como porque eran muchas actividades y porque el planteamiento didáctico (organización de aula, evaluación, coevaluación) estaba alejado de la rutina habitual de trabajo en el aula.
- No se han aplicado suficientes actividades de estructuración que estaban incluidas en el diseño de la UD; entre ellas, algunas que tenían por objetivo la coordinación de distintas actividades en el sentido de analizar qué aporta cada una de ellas al concepto de función.
- parte de la UD no se ha aplicado en el aula porque las profesoras no se han sentido seguras, porque eran muchas actividades y porque el planteamiento didáctico (organización de aula, evaluación, coevaluación) se ha encontrado bastante lejos de su rutina de trabajo en el aula.
- No se han aplicado suficientes actividades de estructuración que estaban incluidas en el diseño de la UD propuesto a las profesoras; entre ellas, algunas que tenían por

objetivo la coordinación de distintas actividades en el sentido de analizar qué aporta cada una de ellas al concepto de función.

-

Estas limitaciones han comportado que no se haya podido validar el diseño planteado, pero en cambio ha dado lugar a la emergencia de datos que explican características de las transferencias que el alumnado ha sido capaz de llevar a cabo.

- b) Relacionados con el trabajo de las profesoras y la coordinación con la investigadora:

- El planteamiento de la UD y de la investigación había partido de la suposición de que las profesoras podían compartir buena parte de sus objetivos y metodología. Por tanto no se ha mantenido una coordinación suficiente con la investigadora, más allá de las dos reuniones iniciales, y no se han podido regular las posibles inseguridades y los enfoques al aplicar la UD.
- Por ello, cada profesora ha llevado a cabo las actividades de la UD a partir de su propio estilo docente, con lo cual, los fines para los cuales fue diseñada han quedado bastante relegados en la práctica real, sobre todo en el grupo 2A.

-

Éstas y las anteriores limitaciones han comportado que no se ha podido validar el diseño planteado, pero en cambio ha dado lugar a la emergencia de datos que explican características de las transferencias que el alumnado ha sido capaz de llevar a cabo.

c) Relacionados con la recogida de datos:

- Los exámenes fueron diseñados por ambas profesoras sin que se pusieran de acuerdo previamente, por lo que reflejan bastantes diferencias en cuanto a los objetivos implícitos perseguidos (mayor importancia del contexto cotidiano para la profesora del grupo 1A y mayor importancia del aspecto formal matemático para la profesora del grupo 2A). Ello ha conllevado que, en relación a algunos conceptos asociados al modelo de función, los datos recogidos no fueran similares.
- Las entrevistas fueron excesivamente largas y no siempre se recogieron los mismos datos de una forma similar. Esto, que es normal en entrevistas de este tipo ya que dependen en gran parte de lo que el alumnado va expresando, se vió seguramente incrementado por la falta de experiencia de la investigadora en su realización.

- Tanto la aplicación de la UD, como la entrevista se han realizado al final del curso escolar, periodo de gran cansancio para el alumnado.
- La variedad de datos recogidos y de los instrumentos aplicados (grabaciones en video, examen, cuestionarios de autoevaluación, de gestión motivacional y entrevistas) ha comportado una gran complejidad en su análisis e interpretación – realizada muy a nivel micro-, aspecto que si bien ha enriquecido el análisis de latransferencia, al tener distintas miradas sobre lo que el alumnado piensa y hace, también ha dificultado los procesos de validación.

8.4 Perspectivas de futuro

A la vista de los resultados obtenidos en esta investigación, a continuación se esbozan algunas nuevas perspectivas de investigación enmarcadas en la mejora de la enseñanza-aprendizaje de las ciencias y las matemáticas con perspectiva de género, desde la temática de investigación sobre transferencia entre las áreas matemáticas y científicas y entre contextos formales (matemáticos o científicos) y contextos cotidianos. Para ello, se consideran necesarios:

- Realizar un estudio con mayor número de participantes que tenga por objetivo verificar los resultados obtenidos en este estudio de caso,
- Plantear nuevas investigaciones desde la perspectiva de transferencia *Actor-oriented transfer* (AOT) que incluyan la variable género para que puedan ser relacionados con evaluaciones de ámbito internacional tipo PISA,
- Profundizar en el problema de la transferencia realizando investigaciones que relacionen el área matemática y científica (en más disciplinas que la de física o química), incidiendo no sólo en cómo se trabaja en la clase de matemáticas sino también en la de ciencias, y analizando más a fondo el papel que juega en la transferencia el gusto por ambas áreas,
- Realizar estudios más profundos desde la perspectiva de género relacionadas con la transferencia desde las matemáticas hacia las ciencia y viceversa.
- Realizar estudios sobre el tema, con participación activa de profesorado de secundaria formado en conocimientos en el campo de la didáctica de las ciencias, transferencia y género, analizando qué cambios se perciben necesarios para promover un aprendizaje competencial del modelo de función.

Estas investigaciones podrían contribuir a que el concepto de transferencia pueda entenderse mejor y para que sean el profesorado y el alumnado los grandes beneficiados de ello. Por otra parte, la inclusión de la perspectiva de género sería indudablemente necesaria (como se ha comprobado en esta investigación) para que se vayan superando los estereotipos de género que históricamente han vinculado el aprendizaje de las matemáticas y de las ciencias al género masculino hegemónico. Por último, las investigaciones que incluyeran el gusto e interés por ambas áreas al mismo tiempo, sumados factores como autoeficacia, autoconcepto, estrategias de autocontrol motivacional entre otros, abrirían una nueva perspectiva tanto para el profesorado, en particular, como para la didáctica de las ciencias, en general

REFERENCIAS

- Aberg-Bengtsson, L. y Ottosson, T. (2006). What lies behind graphicacy? relating students' results on a test of graphically represented quantitative information to formal academic achievement. *Journal of Research in Science Teaching*, 43(1), 43-62.
- Ainley, J. y Daly, P. (2002). Participation in science courses in the final year of high school in australia: The influences of single-sex and coeducational schools. In Datnow, A. & Jones, D. (Ed.), *Gender in policy and practice*. (pp. 243-263). London: Routledge Falmer.
- Alexander, P.A. y Murphy, P.K. (1999). Nurturing the seeds of transfer: A domain-specific perspective. *International Journal of Educational Research*, 31(7), 561-576.
- Andersson, K. (2012). "It's funny that we don't see the similarities when that's what we're aiming for"- visualizing and challenging teachers' stereotypes of gender and science. *Research in Science Education*, 42, 281-302.
- Alonso, E. Mendez. U., Rubio, R. y Tambo, I. (2008). In ISEI-IVEI (Ed.), *TIMMS 2007. Resultados en matemáticas y ciencias en el país vasco*. Bilbao: Gobierno Vasco.
- Alvarez –Lires. (2011). *Género, educación científica y factores psicosociales en la elección de estudios de ingeniería*. Unpublished manuscript.
- Arregi, A., Sainz, A. y Ugarriza, J.R. (2011). In ISEI-IVEI (Ed.), *PISA 2009 Euskadi. 2. informe de evaluación*. Bilbao: Gobierno Vasco.
- Arregi, A., Sainz, A., Tambo, I. y Ugarriza, J. (2005). In ISEI-IVEI (Ed.), *Segundo informe de la evaluación PISA 2003. Resultados de euskadi*. Bilbao: Gobierno Vasco.
- Alvarez-Lires, M., Nuño, T. y Solsona, N (2003). *Las científicas y su historia en el aula*. Madrid: Síntesis.
- Azcárate, C. y Camacho, M. (2003). Sobre la investigación en didáctica del análisis matemático. *Edición Especial: Educación Matemática*, , 135-297
- Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1996). *Funciones y gráficas* (Matemáticas: cultura y aprendizaje ed.). Madrid: Síntesis.
- Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1998-2004). *Guías praxis para el profesorado ESO. matemáticas*. Barcelona: CIS-Praxis.
- Azcárate, C. (1990). *La velocidad: Introducción al concepto de derivada*. (Tesis Doctoral) (Unpublished Universitat Autònoma de Barcelona).

- Azcárate, C. (1993). Pendiente de una recta: Estudio de los esquemas conceptuales que tienen unos alumnos de segundo de BUP. *Enseñanza De Las Ciencias: Revista De Investigación y Experiencias Didácticas*, 11(1), 307-308.
- Azcárate, C. (1995). Sistemas de representación. *Uno: Revista De Didáctica De Las Matemáticas*, (4), 13-20.
- Azcárate, C. (1999). In Azcárate, C. y Deulofeu, J. (Ed.), *Funciones. guía para el profesorado de matemáticas de ESO*. Barcelona: Praxis-Kluwer.
- Bandiera, M., Dupré, F. Ianniello, M. y Viventini M. (1995). Una investigación sobre habilidades para el aprendizaje científico. *Enseñanza De Las Ciencias*, 13(1), 46-54.
- Bandura, A. (1977). Self-efficacy: Toward a unifying theory of behavioral change. *Psychological Review*, 84, 191-215.
- Bandura, A. (1993). Perceived self-efficacy in cognitive development and functioning *Educational Psychologist*, 28, 117-148.
- Barnett, S.M. y Ceci, S.J. (2002). When and where do we apply what we learn? A taxonomy for far transfer. *Psychological Bulletin*, 128(4), 612-637.
- Barnett, S.M. y Ceci, S.J. (2005). Reframing the evaluation of education. In J. P. Mestre (Ed.), *Transfer of learning from a modern multidisciplinary perspective* (pp. 295-312). Greenwich, CT: Information Age.
- Barr, G. (1980). Graphs, gradients and intercepts. *Mathematics in School*, 9(1), 5-6.
- Bassok, M. (1990). Transfer of domain-specific problem-solving procedures. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 16(3), 522-533. Retrieved from
- Bassok, M. y Holyoak, K.J. (1989). Interdomain transfer between isomorphic topics in algebra and physics. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, & Cognition*, 15(1), 153-166.
- Bassok, M. y Holyoak, K.J. (1993). Pragmatic knowledge and conceptual structure: Determinants of transfer between quantitative domains. In Detterman, D.K. y Sternberg, R.J. (Eds.), *Transfer on trial: Intelligence, cognition, and instruction* (pp 68-98). United States of America: Ablex Publishing.
- Beach, K. (1999). Consequential transitions: A sociocultural expedition beyond transfer in education. *Review of Educational Research*, 24, 66-100.
- Beach, K. (2003). Consequential transitions: A development view of knowledge propagation through social organizations. In Toumi-Gröhn, T. y Engeström, Y. (Ed.), *Between school and work: New perspectives on transfer and boundary-crossing* (pp. 39-62). Oxford, United Kingdom: Elsevier Science.

- Beaton, A. E., Martin, M. O., Mullis, I. V., Gonzales, E. J., Smith, T. A., y Kelly, D. L. (1996). *Science achievement in the middle school years: IEA's third international mathematics and science study (TIMSS)* Center for the Study of Testing, Evaluation, and Educational Policy, Boston College Chestnut Hill, MA.
- Beichner, R. J. (1994). Testing student interpretation of kinematics graphs. *American Journal of Physics*, 62(8), 750-762.
- Beilock, S. L., Gunderson, E. A., Ramirez, G. y Levine, S.C. (2010). Female teachers' math anxiety impacts girls' math achievement. *Proceedings of the National Academy of Sciences, USA*, 107(5), 1060-1063.
- Belenky, D. M. y Nokes-Malach, T. J. (2012). Motivation and transfer: The role of mastery-approach goals in preparation for future learning. *Journal of the Learning Sciences*, 21(3), 399-432.
- Bell, A. y Janvier, C. (1981). The interpretation of graphs representing situations. *For the Learning of Mathematics*, 2(1), 34-42.
- Beltrán, J. A (1998). *Dificultades de aprendizaje*. Madrid, Sintesis,
- Beltrán, J.A. y Carpintero, E. (2006). Análisis de las actitudes hacia el transfer de los alumnos de educación secundaria obligatoria. *EduPsykhé: Revista De Psicología y Psicopedagogía*, 5(1), 99-108. Retrieved from Bereiter, C. y Scardamalia, M. (1996). *Rethinking learning*. (pp. 485-513). Cambridge: Blackwell.
- Bliss, J., Monk, M., & Ogborn, J. y Black, P. (1983). *Qualitative data analysis for educational research: A guide to uses of systemic networks*. London: Croom Helm.
- Bloom, J. W. (2007). A theoretical model of learning for complexity: Depth, extent, abstraction, and transfer of learning. Paper presented at the *Annual Meeting of the American Educational Research Association, Chicago, April, 11*
- Boaler, J. (1996). Respuestas por géneros a enfoques matemáticos abiertos y cerrados. 20 años de investigación cooperativa en género y matemáticas—donde estamos, hacia donde vamos. *Sesiones De IOWME.Grupo De Trabajo*, 6, 101.
- Borkowski, J. G., Carr, M. y Pressley, M. (1987). “Spontaneous” strategy use: Perspectives from metacognitive theory. *Intelligence*, 11(1), 61-75.
- Brainerd, C. J. y Reyna V.F. (1993). Memory independence and memory interference in cognitive development. *Psychological Review*, 100(1), 42-67.
- Bransford, J.D. y Schwartz, D.L. (1999). Rethinking transfer: A simple proposal with multiple implications. *Review of Research in Education*, 24, 61-100.

- Bransford, J.D. y Stein, B.S. (1993). *The ideal problem solver (2nd ed)*. New York: Freeman.
- Bransford, J. D., Brown, A.L. y Cocking, R. (1999). In Donovan S., John D. Bransford, J.D. y W. Pellegrino, J. (Eds.), *How people learn: Mind, brain, experience, and school* (Washington D.C. Trans.). All rights reserved: National Research Council.
- Bransford, J. D., Brown, A.L. y Cocking, R.R. (2000). *How people learn* National Academy Press Washington, DC.
- Broudy, H. S. (1977). Types of knowledge and purposes of education. In R. C. Anderson, & Spiro, R.J. y Montague, W.E. (Eds.), *Schooling and the acquisition of knowledge* (pp. 1-17). Hillsdale, NJ.: Erlbaum.
- Brown, A. L. (1990). Domain-specific principles affect learning and transfer in children. *Cognitive Science*, 14(1), 107-133.
- Brown, A. L. (1997). Transforming schools into communities of thinking and learning about serious matters. *American Psychologist*, 52(4), 399.
- Brown, J. S., Collins, A. y Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher*, 18(1), 32-42.
- Bulte, A. M. W., Westbroek, H. B., de Jong, O. y Pilot, A. (2006). A research approach to designing chemistry education using authentic practices as contexts. *International Journal of Science Education*, 28(9), 1063–1086.
- Butler, A. C. (2010). Repeated testing produces superior transfer of learning relative to repeated studying. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 36(5), 1118-1133.
- Caamaño, A. (2011). Enseñar química mediante la contextualización, la indagación y la modelización. *Alambique: Didáctica De Las Ciencias Experimentales*, 17(69), 21-34.
- Cabanach, R.G., Valle, A., Gerpe, M.G., Rodríguez, S., Piñeiro, I. y Rosário, P. (2009). Diseño y validación de un cuestionario de gestión motivacional. *Revista De Psicodidáctica*, 14(1), 29-48.
- Campione, J.C., Shapiro, A.M. y Brown, A.L. (1995). Forms of transfer in a community of learners: Flexible learning and understanding. In A. McKeough, & Lupart, J. y Marini, A. (Eds.), *Teaching for transfer: Fostering generalization in learning* (pp. 35-69). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Cañal, P. (2004). De las concepciones a los modelos en la enseñanza de las ciencias. *Alambique: Didáctica De Las Ciencias Experimentales*, 42

- Carlson, M. y Oehrtman, M. (2005). Key aspects of knowing and learning the concept of function. *Making the connection: Research and practice in undergraduate mathematics*. Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA*, 8(2), 121-156.
- Carpintero, E. (2002). El proceso de transfer: Revisión y nuevas perspectivas. *EduPsykhé: Revista De Psicología y Psicopedagogía*, 1(1), 69-96.
- Carpintero, E. (2006). Análisis de las actitudes de los alumnos de educación secundaria obligatoria. *EduPsykhé: Revista De Psicología y Psicopedagogía*, 5(1), 99-107.
- Carpintero, E. y Beltrán, J. A. (2005). Análisis de las propiedades psicométricas del cuestionario de actitudes hacia el transfer (CAT). *EduPsykhé: Revista De Psicología y Psicopedagogía*, 4(1), 75-89.
- Carretero, M. (1997). *Introducción a la psicología cognitiva*. Buenos Aires: Aique.
- Catrambone, R. (1998). The subgoal learning model: Creating better examples so that students can solve novel problems. *Journal of Experimental Psychology: General*, 127(4), 353-376.
- Chen, Z. y Klahr, D. (2008). Remote transfer of scientific-reasoning and problem-solving strategies in children. *Advances in Child Development and Behavior*, 36, 420.
- Chen, Z. y Daehler, M. W. (1989). Positive and negative transfer in analogical problem solving by 6-year-old children. *Cognitive Development*, 4(4), 327-344.
- Chi, M. T. y VanLehn, K. A. (2012). Seeing deep structure from the interactions of surface features. *Educational Psychologist*, 47(3), 177-188.
- Chi, M. T., Slotta, J.D. y De Leeuw, N. (1994). From things to processes: A theory of conceptual change for learning science concepts. *Learning and Instruction*, 4(1), 27-43.
- Chi, M. T. y VanLehn, K. (2012). Seeing Deep Structure From the Interactions of Surface Features. *Educational Psychologist*, 47(3), 177-188.
- Chi, M. T. H. (2008). Three types of conceptual change: Belief revision, mental model transformation, and categorical shift. In S. Vosniadou (Ed.), *International handbook of research on conceptual change* (pp. 61–82). London: Routledge.
- Chronaki, A. y Pectelidis, Y. (2012). ‘Being good’ at maths: Fabricating gender subjectivity. *Journal of Research in Mathematics Education*, 3(1), 246-277.
- Claxton, G. (1987). *Vivir para aprender [Live and learning]* (C. González Trans.). Madrid: Alianza.

- Claxton, G. (1991). *Educating the inquiring mind: The challenge for school science*. Harvester Wheatsheaf London.
- Cormier, S.M. y Hagman, J.D. (1987). *Transfer of learning contemporary research and application*. Nueva York: Academic Press.
- Cox, B. D. (1997). The rediscovery of the active learner in adaptive context: A developmental-historical analysis of transfer of training. *Educational Psychologist*, 32(1), 41-55.
- De Corte, E. (2003). Transfer as the productive use of acquired knowledge, skills, and motivations. *Current Directions in Psychological Science*, 12(4), 142-146.
- Detterman, D. K. (1993). The case for the prosecution: Transfer as an epiphenomenon. In Detterman, D.K. eta Sternberg, R.J. (Ed.), *Transfer on trial: Intelligence, cognition, and instruction* (pp. 1-24). United States of America: Ablex Publishing.
- Deulofeu, J. (1991). El lenguaje de las gráficas cartesianas y su interpretación en la representación de situaciones discretas. *CL & E: Comunicación, Lenguaje y Educación*, (11), 77-86.
- Deulofeu, J. (1995). Concepciones de los alumnos de secundaria sobre distintas gráficas de funciones. *Uno: Revista De Didáctica De Las Matemáticas*, (4), 54-60.
- de Pro Bueno, A. J. (2007). De la enseñanza de los conocimientos a la enseñanza de las competencias. *Alambique: Didáctica de las ciencias experimentales*, (53), 10-21.
- Dienes, Z. y Berry, D. (1997). Implicit learning: Below the subjective threshold. *Psychonomic Bulletin & Review*, 4(1), 3-23.
- diSessa, A. (1993). Toward an epistemology of physics. *Cognition and Instruction*, 10(105), 225.
- diSessa, A. (2002). Why “conceptual ecology” is a good idea. *Reconsidering Conceptual Change: Issues in Theory and Practice*, , 29-60.
- diSessa, A. y Sherin, B.L. (1998). What changes in conceptual change? *International Journal of Science Education*, 20(10), 1155-1191.
- diSessa, A. y Wagner, J. (2005). What coordination has to say about transfer. In J. P. Mestre (Ed.), *Transfer of learning from a modern multidisciplinary perspective* (pp. 121-144). Greenwich, CT: Information Age.
- Dolores, C. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: Concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. *RELIME.Revista Latinoamericana De Investigación En Matemática Educativa*, 7(3), 195-218

- Dolores, C. y Cuevas, I. (2007). Lectura e interpretación de gráficas socialmente compartidas. *RELIME.Revista Latinoamericana De Investigación En Matemática Educativa*, 10(1), 69-96.
- Dolores, C., Alarcón, G. y. Albarracín, D. (2002). Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: El caso de la velocidad y la trayectoria. *RELIME.Revista Latinoamericana De Investigación En Matemática Educativa*, 5(3), 225-250.
- Dolores, C. y Valero, M.S. (2004). Estabilidad y cambio de concepciones alternativas acerca del análisis de funciones en situación escolar. *Epsilon: Revista De La Sociedad Andaluza De Educación Matemática "Thales"*, (58), 45-74.
- Dreyfus, T. y Eisenberg, T. (1982). Intuitive functional concepts: A baseline study on intuitions. *Journal for Research in Mathematics Education*, , 360-380.
- Driver, R. (1989). Students' conceptions and the learning of science. *International Journal of Science Education*, 11(5), 481-490.
- Dufresne, R., Mestre, J., Thaden-Koch, T., Gerace, W. y Leonard, W.D. (2005). Knowledge representation and coordination in the transfer process. In J. P. Mestre (Ed.), *Transfer of learning from a moder multidisciplinary perspective* (pp. 155-215). Greenwich, CT: Information Age.
- Duranti, A. y Goodwin, C. (1992). *Rethinking context: Language as an interactive phenomenon* Cambridge University Press.
- Duval, R. (1993). Semiosis y noesis. *Lecturas En Didáctica De La Matemática: Escuela Francesa*, , 118-144.
- Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. *Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*, Calí, Universidad del Valle.
- Dyson, A. H. (1999). Transforming transfer: Unruly children, contrary text, and the persistence of the pedagogical order. *Review of Research in Education*, 24(1), 141-171.
- Eccles, J. S., Freedman-Doan, C., Frome, P., Jacobs, J. y Yoon, K. S. (2000). Gender-role socialization in the family: A longitudinal approach. the developmental social psychology of gender. In Eckes, T. y Trautner, H. (Ed.), *The developmental social psychology of gender* (pp. 333-360). N.J.; US: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Mahwah.
- Ertekin, E. (2010). Correlations between the mathematics teaching anxieties of pre-service primary education mathematics teachers and their beliefs about mathematics. *Educational Research and Reviews*, 5(8), 446-454.

- EURYDICE. (2010). *Diferencias de género en los resultados educativos: Medidas adoptadas y situación actual en europa*. Madrid: Agencia Ejecutiva en el Ámbito Educativo, Audiovisual y Cultural P9 Eurydice M.E.
- Evans, J. (1998). Problems of transfer of classroom mathematical knowledge to practical situations. In F. Seeger, & Voigt, J. y Waschescio, U. (Eds.), *The culture of the mathematics classroom* (pp. 269-289). United States of America: Cambridge University Press.
- Figueiras, L., Molero, M., Salvador, A. y Zuasti, N. (1998). *Género y matemáticas*. Madrid: Síntesis.
- Flavell, J. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. In L.B. Resnick (Ed.), *The nature of intelligence* (pp. 231-236). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Font, V. (2000). Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 14, 1-35.
- Font, V., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). *The Onto-semiotic Approach to Representations in Mathematics Education for the Learning of Mathematics*, 27(2), 2-7.
- Forgasz, H. J. (2001). Australian and US preservice teachers' perceptions of the gender stereotyping of mathematics. In M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 2-433-2-440). Holanda: Utrecht University.
- Forgasz, H.J. y Leder, G.C. (2000). The "mathematics as gendered domain" scale. In Nakahara, T. y Koyama, M. (Ed.), *Proceedings of the 24th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 273-279). Japón: Hiroshima University.
- Fuchs, D., Mock, D., Morgan, P. y Young, C. (2003). Responsiveness-to-intervention: Definitions, evidence, and implications for the learning disabilities construct. *Learning Disabilities Research & Practice*, 18(3), 157-171.
- Gagné, R. M. (1966). *The condition of learning*. New York: Holt, Rinehart and Winston.
- Gagné, R.M. (1971) *Las condiciones del aprendizaje*. Madrid: Aguilar
- García, J. J. (2005). El uso y el volumen de información en las representaciones gráficas cartesianas presentadas en los libros de texto de ciencias experimentales. *Enseñanza De Las Ciencias: Revista De Investigación y Experiencias Didácticas*, 23(2), 181-200

- García, J. J. y Cervantes, A. (2004). Las representaciones gráficas cartesianas en los libros de texto de ciencias. *Alambique: Didáctica De Las Ciencias Experimentales*, (41), 99-108.
- García, J.J. y Perales, F.J. (2007). ¿Comprenden los estudiantes las gráficas cartesianas usadas en los textos de ciencias? *Enseñanza De Las Ciencias: Revista De Investigación y Experiencias Didácticas*, 25(1), 107-132.
- Gentner, D. (1983). Structure-mapping: A theoretical framework for analogy. *Cognitive Science*, 7(2), 155-170.
- Gentner, D. y Markman, A.B. (1997). Structure mapping in analogy and similarity. *American Psychologist*, 52(1), 45-56.
- Gentner, D., & Loewenstein, J. y Thompson, L. (2003). Learning and transfer: A general role for analogical encoding. *Journal of Educational Psychology*, 95(2), 393-408.
- Gentner, D. y Medina, J. (1998). Similarity and the development of rules. *Cognition*, 65(2-3), 263-297.
- Gibson, J. J. (1979). *The ecological approach to visual perception*. Boston: Houghton-Mifflin.
- Gick, M. L. y Holyoak, K. J. (1980). Analogical problem solving. *Cognitive Psychology*, 12(3), 306-355.
- Gick, M. L. y Holyoak, K. J. (1983). Schema induction and analogical transfer. *Cognitive Psychology*, 15(1), 1-38.
- Gick, M.L. y Holyoak, K. J. (1987). The cognitive basis of knowledge transfer. In Cormier, Stephen M. (Ed.); Hagman, Joseph D. (Ed.), (1987). *The cognitive basis of knowledge transfer*. (9-46). San Diego, CA, Estados Unidos America.
- Gilbert, J. K. (2006). On the nature of "context" in chemical education. *International Journal of Science Education*, 28(9), 957-976.
- Gilbert, J. K., Astrid, M.W. y Albert, P. (2011). Concept, development and transfer in context-based science education. *International Journal of Science Education*, 33(6), 817-837.
- Gilbert, J.K., Bulte, A. M. W., y Pilot, A. (2001) Concept Development and Transfer in Context-Based Science Education. *Journal of Science Education*, 33, 817-837
- Gleason, J. (2007). Relationships between pre-service elementary teachers' mathematics anxiety and content knowledge for teaching. *Journal of Mathematical Sciences & Mathematics Education*, 3(1), 39-47.

- Gobierno Vasco. (2007). *Decreto 175/2007; modificado 97/2010*. Vitoria-Gasteiz: Gobierno Vasco.
- Goldenberg, E. P. Y Kliman, M. (1988). Metaphors for understanding graphs: What you see is what you see. Educational Technology Center, Cambridge, MA
- Goldin, G. y. Janvier, C. (1998). Representations and the psychology of mathematics education. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), 1-4.
- Goldstone, R. L. y Sakamoto, Y. (2003). The transfer of abstract principles governing complex adaptive systems. *Cognitive Psychology*, 46(4), 414-466.
- Goldstone, R. L., y Day, S. B. (2012). Introduction to “new conceptualizations of transfer of learning”. *Educational Psychologist*, 47(3), 149-152.
- Gómez-Granell, C. y. F., J. (1993). Psicología y didáctica de las matemáticas. *Infancia y Aprendizaje*, 62(63), 101-113.
- Gomez, Sanjosé y Solaz-Portolés (2012) Una revisión de los procesos de transferencia para el aprendizaje y enseñanza de las ciencias. *Didáctica de las Ciencias Experimentales y Sociales*, 26 (199-227).
- Gorard, S., Rees, G., y Salisbury, J. (1999). Reappraising the apparent underachievement of boys at school. *Gender and Education*, 11(4), 441-454.
- Gray, C. y Leith, H. (2004). Perpetuating gender stereotypes in the classroom: A teacher perspective. *Educational Studies*, 30(1), 3-17.
- Greeno, J. G. (1997). Response: On claims that answer the wrong questions. *Educational Researcher*, 26(1), 5-17.
- Greeno, J. G. (1998). The situativity of knowing, learning and research. *American Psychologist*, 53(1), 5-26.
- Greeno, J.G., Smith, D. R. y Moore, J.L. (1993). Transfer of situated learning. In Detterman, D.K. y Sternberg, R.J. (Ed.), *Transfer on trial: Intelligence, cognition, and instruction* (pp. 99-167). Norwood, NJ.: Ablex.
- Guidugli, S., Fernández G., y Benegas, J. (2004). Aprendizaje activo de la cinemática lineal y su representación gráfica en la escuela secundaria. *Enseñanza De Las Ciencias*, 22(3), 463-472.
- Gutierrez, R. (2005). Polisemia actual del concepto de "modelo mental". consecuencias para la investigación diáctica. *Investigações Em Ensino De Ciências*, 10(2), 209-226.
- Hammer, D., Elby, A., Scherr, E. y Redish, E. (2005). Resources, framing and transfer. In J. P. Mestre (Ed.), *Transfer of learning from a modern multidisciplinary perspective* (pp. 89-119). Greenwich, CT: Information Age.

- Hanna, G. (1989). Mathematics achievement of girls and boys in grade eight: Results from twenty countries. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 225-232.
- Haskell, R. E. (2001). *Transfer of learning. cognition, instruction and reasoning*. San Diego: Academic Press.
- Hatano, G. y Greeno, J.G. (1999). Alternative perspectives on transfer and transfer studies. *International Journal of Educational Research*, 31(7), 645-654.
- Hegarty, M., Mayer, R. y Monk, C. (1995). Comprehension of arithmetic word problems: A comparison of successful and unsuccessful problem solvers. *Journal of Educational Psychology*, 87(1), 18-32.
- Helwig, R., Anderson, L. y Tindal, G. (2001). Influence of elementary student gender on teachers' perceptions of mathematics achievement. *The Journal of Educational Research*, 95(2), 93-102.
- Hendrickson, G. y Schroeder, W.H. (1941). Transfer of training in learning to hit a submerged target. *Journal of Educational Psychology*, 32(3), 205-213.
- Herold, D. M., Davis, W., Fedor, D.B. y Parsons, Ch.K. (2002). Dispositional influences on transfer of learning in multistage training programs. *Personnel Psychology*, 55(4), 851-869.
- Herr, K. y Arms, E. (2004). Accountability and single-sex schooling: A collision of reform agenda *American Educational Research Journal*, 41, 527-555.
- Hiebert, J. y Grouws, D.A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 1, 371-404.
- Høffding, H. (1892). *Outlines of psychology*, . London: Macmillan.
- Holyoak, K. J. y Koh, K. (1987). Surface and structural similarity in analogical transfer. *Memory & Cognition*, 15(4), 332-340.
- Hoz, R. y Gorodetsky, M. (1983). The effects of misconceptions, of speed and time on the solution of speed problems. Paper presented at the *Proceedings of the International Seminar, Misconceptions in Science and Mathematics*, Cornell University, Ithaca.
- Izquierdo, M., & Adúriz-Bravo, A. y Aliberas, J. (2004). Pensar, actuar i parlar a la classe de ciències: Per un ensenyament de les ciències racional i razonable.
- ISEI-IVEI (2004). *Primer informe de evaluació PISA 2003. Resultados de euskadi*. In ISEI-IVEI (Ed.), Bilbao: Gobierno Vasco.

- Pisa 2012. Análisis de Variables. Análisis por sexo del alumnado. No publicado.
- Janvier, C. (1983). Représentation et compréhension. un exemple: Le concept de fonction. *Bulletin AMQ (Association Mathématique Du Québec)*, 22-28.
- Janvier, C. (1987b). In Janvier C. (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Janvier, C. (1987a). Translation processes in mathematics education. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 27-32).
- Janvier, C. (1993). Les graphiques cartésiens: Des traductions aux chroniques," les représentations graphiques dans l'enseignement et la formation. *Les Sciences De l'Éducation Pour l'Ère Nouvelle*.1, 3, 17-37.
- Jetton, T.L. y Alexander, P.A. (1997). Instructional importance: What teachers value and what students learn. *Reading Research Quarterly*, 32(3), 290-308.
- Johnson-Laird, P. N. (1983). *Mental models: Towards a cognitive science of language, inference, and consciousness*. United States of America: Harvard University Press.
- Jorba, J. y Sanmartí, N. (1990). *Lectura i Construcció de Gràfics introducció a l'estudi del moviment i de les funcions el treball ben fet*. Plan de Formació Institucional. Ayuntamiento de Barcelona. Documento no publicado.
- Jorba, J. y Sanmartí, N. (1994). *Enseñar, aprender y evaluar: Un proceso de regulación continúa: Propuestas didácticas para las áreas de ciencias de la naturaleza y matemática* Ministerio de Educación.
- Jorba, J., Gómez, I. y Prat, Á. (1998). *Hablar y escribir para aprender*. Madrid: Síntesis.
- Judd, C. H. (1908). The relation of special training to general intelligence. *Educational Review*, 36, 28-42.
- Kane, J. M. y Mertz, J.E. (2012). Debunking myths about gender and mathematics performance. *Notices of the AMS*, 59 (1), 10-21.
- Keiler, L.S. (2007). Students' explanations of their data handling : Implications for transfer of learning. *International Journal of Science Education*, 29, 151-172
- Keselman, A. (2003). Supporting inquiry learning by promoting normative understanding of multivariate causality. *Journal of Research in Science Teaching*, 49, 898-921.

- Kelly, G. J. (2007). Discourse in science classrooms. In Abell, S. K. and Lederman, N. G. (Ed.), *Handbook of research on science education* (pp. 443-470). Mahwah, NJ.: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kember, D. (1997). A reconceptualisation of the research into university academics' conceptions of teaching. *Learning and Instruction*, 7(3), 255-275.
- Kerslake, D. (1981). Graphs. In K.M. Hart (Ed.). *Children's understanding of mathematics concepts*, London, John Murray, p. 120-136.
- Kloosterman, P. (1990). Attributions, performance following failure and motivation in mathematics. In Fennema, E. y Leder, G. C. (Ed.), *Mathematics and gender* (pp. 96-127). New York y London: Teachers College y Columbia University.
- Koehler, M. S. (1990). Classrooms, teachers and gender differences in mathematics In E. Fennema, E. y Leder, G.C. (Ed.), *Mathematics and gender* (pp. 128-148). New York: Teachers College Press.
- Kuyper, H. y Van der Werf, M.P. (1990). Math teachers and gender differences in math achievement: Math participation and attitudes towards math. In G. Booker, P. Cob y T. Mendicuti (Ed.), *Proceedings of the fourteenth conference of the international group for the psychology of mathematics educations* (pp. 143-150). México:
- Laboratory of Comparative Human Cognition. (1983). Culture and cognitive development. In P. H. Mussen (Ed.), *Handbook of child psychology: Vol. 1. history, theory, and methods* (pp. 295-356). New York: Wiley.
- Lacasta, E. (1999). Funcionamiento didáctico de los gráficos de funciones. *II Simposio De La Sociedad Española De Investigación En Educación Matemática. Pamplona*, 135-154.
- Laugksch, R. C. (2000) Scientific literacy : A conceptual overview. *Science Education*, 84 (1), 7-94
- Lave, J. (1991). *La cognición en la práctica* [Cognition in practice: Mind, mathematics, and culture in everyday life] (L. Botella Trans.). (1st ed.). Barcelona: Paidós.
- Lave, J. y Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation* Cambridge university press.
- Layton, D. (1993). *Technologys challenge to science education*. Buckingham, UK: open univerdity Press.
- Leder, G. C. (1992). Mathematics and gender: Changing perspectives. In D. A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 597-622). EEUU: National Council of Teachers of Mathematics.

- Leder, G. C. (1996). Equity in the mathematics classroom: Beyond the rhetoric. In L. H. Parker (Ed.), *Gender, science and mathematics* (pp. 95-104). Holanda: Kluwer Academic Publishers.
- Leder, G. C. (2001). Mathematics as a gender domain. new measurements tools *Annual Meeting of American Education Research Association (AERA)*. Seattle, EEUU.
- Lee, A. Y. (1998). Transfer as a measure of intellectual functioning. In S. Soraci y W.J. McIlvane (Ed.), *Perspectives on fundamental processes in intellectual functioning: A survey of research approaches*. United States of America: Ablex.
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O. y Stein, M.K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1-64.
- Lemke, J. (1997). *Aprender a hablar ciencia* [Talking science: language, learning, and values] (García, A., García, B., Díaz, F., Rigo, A. y Hernández, G. Trans.). (Temas de educación ed.). Barcelona: Paidós.
- Lobato, J. (1996). *Transfer reconceived: How "sameness" is produced in mathematical activity*. Unpublished University of California, Berkeley.
- Lobato, J. (2003). How desing experiments can inform a rethinking of transfer and vice versa. *Educational Researcher*, 32(1), 17-20.
- Lobato, J. (2006). Alternative perspectives on the transfer of learning: History, issues, and challenges for future research. *The Journal of the Learning Sciences*, 15(4), 431-449.
- Lobato, J. (2008). On learning processes and the national mathematics advisory panel report. *Educational Researcher*, 37(9), 595-601.
- Lobato, J. (2012). The actor-oriented transfer perspective and its contributions to educational research and practice. *Educational Psychologist*, 47(3), 232-247.
- Lobato, J. eta Burns, A. (2002a). The teacher's role in supporting students' connections between realistic situations and conventional symbol systems. *Mathematics Education Research Journal*, 14(2), 99-120.
- Lobato, J. y Siebert, D. (2002b). Quantitative reasoning in a reconceived view of transfer. *Journal of Mathematical Behavior*, 21(1), 87-116.
- Lockhart, R. S., Lamon, M. y Gick, M. (1988). Conceptual transfer in simple insight problems. *Memory & Cognition*, 16(1), 36-44.
- Lombardi, G., Caballero, M. y Moreira, M. A. (2009). El concepto de representación externa como base teórica para generar estrategias que promuevan la lectura significativa del lenguaje científico. *Revista De Investigación*, (66), 147-186.

- Loudet-Verdier, J. y Mosconi, N. (1996). In UNESCO (Ed.), *Les interactions enseignant (e) s-élèves (filles ou garçons) dans des cours de mathématiques*. Paris: Liris ed.
- Lovell, K. (1971). Some aspects of growth of the concept of a function. In M.F. Roskopf, L.P. Steffe, & S. Taback (Eds). *Piagetian cognitive development research and mathematical education* (pp. 12-33). Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics.
- Mansfield, H. (1985). Points, lines, and their representations. *For the Learning of Mathematics*, 5(3), 2-6.
- Markovits, Z., Eylon, B. y B., M. (1986). Functions today and yesterday. *For the Learning of Mathematics*, 6(2), 18-28.
- Marsh, H. W., y Craven, R. (2006). Reciprocal effects of self-concept and performance from a multidimensional perspective: Beyond seductive pleasure and unidimensional perspectives. *Perspectives on Psychological Science*, 1, 133-163.
- Martí, E. y García-Milá, M. (2007). Cambio conceptual y cambio representacional desde una perspectiva evolutiva. la importancia de los sistemas externos de representación. *Cambio conceptual y representacional en el aprendizaje y la enseñanza de las ciencias* (pp. 91-106) A. Machado Libros.
- Martin, M. Mullis, I. y Gonzalez, E. (2004). *Trends in international of mathematics and science study*. Boston: Lynch School of Education.
- Martínez, C. y García, S. (2003) Las actividades de primaria y ESO incluidas en libros escolares. ¿Qué objetivo persiguen? ¿Qué procedimientos enseñan? *Enseñanza de las Ciencias*, 21(2), 243-264.
- Mayer, R. E. (1989). Models for understanding. *Review of Educational Research*, 59(1), 43-64.
- McDermott, L. C. (1984). Research on conceptual understanding in mechanics. *Physics Today*, 37, 24.
- McDermott, L. C., Rosenquist, M. L. y Van Zee, E. H. (1987). Student difficulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics. *American Journal of Physics*, 55(6), 503-513.
- Middleton, J.A. y Spanias, P.A. (1999). Motivation for achievement in mathematics: Findings generalizations and criticism of the research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30, 65-88.
- Millar, R. y Osborne, J. (2000). *Beyond 2000: Science education for the future*. London, UK: School of education, King's College London.

- Mora, C., y Herrera, D. (2009). Una revisión sobre ideas previas del concepto de fuerza. *Latin-American Journal of Physics Education*, 3(1), 72-86.
- Morley, M. E., Lawless, R.R. y Bridgeman, B. (2005). Transfer between variants of mathematics test questions. *Transfer of Learning from a Modern Multidisciplinary Perspective*, 313-336.
- Mortimer, E. y Scott, P. (2003). *Meaning Making in Secondary Science Classrooms*. Philadelphia, USA: MacGraw-Hill International.
- Mullis, I., Martin, M., Beaton, A., Gonzalez, E., Kelly, D., Smith, T., Coll, B. y Hill, C. (1998). *Mathematics and science achievement in the final year of secondary school: IEA's third international mathematics and science study (TIMSS)* ERIC.
- Mullis, I., Martin, M., Fierros, E., Goldberg, A. y Stemler, S. (2000). In Chestnut Hill, MA: TIMSS y PIRLS International Study Center (Ed.), *Gender differences in achievement: IEA's third international mathematics and science study (TIMSS)*. Boston: Boston College.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics* (Vol. 1). Natl Council of Teachers of.
- National Research Council (NRC). (2000). In Bransford J. D., Brown, A.L. y Cocking, R.R. (Eds.), *Learning and transfer*. Washington, DC: National Academy Press.
- Ngu, B. Y Yeung, A. (2012) Fostering analogical transfer: The multiple components approach to algebra word problem solving in a chemistry context. *Contemporary Educational Psychology* 37 (1), 14-32.
- Nieda, J., Cañas, A. y Martín-Díaz, M.J. (2005). Actividades para evaluar ciencias en secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, n° extra*.
- Nokes, T. (2009). Mechanisms of knowledge transfer. *Thinking & Reasoning*, 15 (1), 1-36
- Novick, L. R. (1988). Analogical transfer, problem similarity, and expertise. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, & Cognition*, 14(3), 510-520.
- Núñez, F., Banet, E. Cordón, R. (2009). Capacidades del alumnado de educación secundaria obligatoria para la elaboración e interpretación de gráficas. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(3), 447-462.
- Nuñez, J.M. y Font, V. (1995). Aspectos ideológicos en la contextualización de las matemáticas: Una aproximación histórica. *Revista De Educación*, (306), 293-314.
- Nuño, T. y Ruipérez, T. (1996). Análisis de las concepciones del profesorado sobre la ciencia desde una perspectiva de género *Revista De Psicodidáctica*, 2, 81-103.

- Nuño, T. y Ruipérez, T. (1997). Análisis de los libros de texto desde una perspectiva de género. *Alambique*, 11, 55-64.
- Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de educación,
- OCDE. (2004). Learning for Tomorrow's world-first results from PISA 2003.
- OECD. (2007b). PISA 2006. Recuperado el 30 de abril de 2011 de http://www.oecd.org/document/2/0,3343,en_32252351_32236191_39718850_1_1_1_1,00.html
- Olson, J. F., Martin, M. O., Mullis, I. V. y Arora, A. (2008). *TIMSS 2007 technical report* IEA TIMSS & PIRLS.
- Packer, M. (2001). The problem of transfer, and the sociocultural critique of schooling. *The Journal of the Learning Sciences*, 10, 493-514.
- Pajares, R. (2005). Resultados en España del estudio PISA 2000. *Conocimientos y Destrezas de los alumnos de 15 años*. Madrid: INECSE/MEC.
- Parolo, M. E., Barbieri, L.M. y Chrobak, R. (2004). La metacognición y el mejoramiento de la enseñanza de química universitaria. *Enseñanza De Las Ciencias*, 22(1), 79-92.
- Pastor, Y., Balaguer, I. y García-Merita, M. L. (2003). El autoconcepto y la autoestima en la adolescencia media: Análisis diferencial por curso y género. *Revista De Psicología Social*, 18(2), 141-159.
- Pea, R. (1989). *Socializing the knowledge transfer problems*. Palo Alto, CA: Institute for Research on Learning.
- Pérez, M.P., Pecharromás, A. y Postigo, Y. (2007). Los sistemas de representación externa en el aprendizaje: La habilidad para traducir información a distintos formatos. *Cambio conceptual y representacional en el aprendizaje y la enseñanza de la ciencia* (pp. 107-122) A. Machado Libros.
- Perkins, D. y Baker, D. (1990). Creating gender differences. In Westbury, I. y Travers, K. (Ed.), *Second international mathematics study* (pp. 85-117). Illinois: Champaign: College of Education. University of Illinois.
- Perrenoud, P. (1997). *Construire des compétences dès l'école. pratiques et enjeux pédagogiques*. Paris: ESF.
- Piaget, J. (1977). *Epistemology and psychology of functions*. The Netherlands: Springer.
- Pinto R (2001) (Coordinación). *Teachers Implementing Innovations: Transformations Trends* (Autonomous University of Barcelona) STTIS Report RW4

- Pintrich, P. R., Marx, R.W. y Boyle, R.A. (1993). Beyond cold conceptual change: The role of motivational beliefs and classroom contextual factors in the process of conceptual change. *Review of Educational Research*, 63(2), 167-199.
- Posner, G. J., Strike, K. A., Hewson, P. W. y Gertzog, W. A. (1982). Accommodation of a scientific conception: Toward a theory of conceptual change. *Science Education*, 66(2), 211-227.
- Postigo, Y. y. Pozo, J.I. (2000). Cuando una gráfica vale más que 1.000 datos: La interpretación de gráficas por alumnos adolescentes. *Infancia y Aprendizaje*, 90, 89-110.
- Potgieter, M., Harding, A. y Engelbrecht, J. (2008). Transfer of algebraic and graphical thinking between mathematics and chemistry. *Journal of Research and Science Teaching*, 45(2), 153-271.
- Pozo, J. I. (1989). *Teorías cognitivas del aprendizaje* Madrid: Ediciones Morata.
- Pozo, J. I. (1999). Más allá del cambio conceptual: El aprendizaje de la ciencia como cambio representacional. *Enseñanza De Las Ciencias*, 17(3), 513-520.
- Pozo, J. I. (2003). *Adquisición de conocimiento*. Madrid: Ediciones Morata.
- Pozo, J. I. (2007). Ni cambio ni conceptual: La reconstrucción del conocimiento científico como un cambio representacional. *Cambio conceptual y representacional en el aprendizaje y la enseñanza de las ciencias* (pp. 73-89) A. Machado Libros.
- Pozo, J.I. y Gómez, M.A. (1998). *Aprender y enseñar ciencia*. Madrid: Ediciones Morata.
- Pozo, J.I. y Rodrigo, M.J. (2001). Del cambio de contenido al cambio representacional en el conocimiento conceptual. *Infancia y Aprendizaje*, 24(4), 407-423.
- Pozo, J. I., Pérez, M. P., Sanz, Y.A. y Limón, M. (1992). Las ideas de los alumnos sobre la ciencia como teorías. *Infancia y aprendizaje* (57), 3-22.
- Real decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por la que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la educación secundaria obligatoria, (2007).
- Rebello, N., Zollman, D., Allbaugh, A., Engelhardt, P., Gray, K., Hrepic, Z. y Itza-Ortiz, S. (2005). Dynamic transfer. In J. P. Mestre (Ed.), *Transfer of learning from a modern multidisciplinary perspective* (pp. 217-250). Greenwich, CT: Information Age.
- Rebello, N., Cui, L., Bennett, A. Zollman, D. eta Ozimek, D. (2007). Transfer of learning in problem solving in the context of mathematics and physics. *Learning to solve complex scientific problems*, 223-246.

- Redish, E. F. (2004). A theoretical framework for physics education research: Modeling student thinking. *ArXiv Preprint physics/0411149*.
- Rodriguez, M. (2007). El proceso de cambio conceptual: Componentes cognitivos y motivacionales. *Cambio conceptual y representacional en el aprendizaje y la enseñanza de la ciencia*. (pp. 53-72) A. Machado Libros.
- Reed, S. K. (1993). A schema-based theory of transfer. In Detterman, D. K. y Stemberg, R. (Ed.), *Transfer of trial* (pp. 39-67). Norwood: Ablex.
- Reid, N. y Skryabina, E. A. (2003). Gender and physics. *International Journal of Science Education*, 25(4), 509-535.
- Renn, J., y Damerow, P. (2003). The Hanging Chain: A Forgotten “Discovery” Buried in Galileo’s Notes on Motion. In *Reworking the Bench* (pp. 1-24). Springer Netherlands.
- Renninger, K. A., Hidi, S. y Krapp, A. (1992). In Renninger K. A., Hidi, S. y Krapp, A. (Eds.), *The role of interest in learning and development*. Hillsdale, NJ, England: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Rent, A. I. (2013). *La transferencia del aprendizaje en contexto de formación profesional para el trabajo y el empleo*. (Unpublished Universitat Rovira i Virgili (Departamento de Pedagogía), Tarragona).
- Resnick, L. B. (1987). The 1987 presidential address: Learning in school and out. *Educational Researcher*, 16(9), 13-54.
- Reuter, S., Barquero, B. y S.W. (2000). Adolescents' and adults' skills to visually communicate knowledge with graphics (habilidades en la comunicación visual de conocimientos mediante gráficos en adolescentes y adultos). *Infancia y Aprendizaje*, (90), 71-88.
- Richland, L. E., Stigler, J.W. y Holyoak, K.J. (2012). Teaching the conceptual structure of mathematics. *Educational Psychologist*, 47(3), 189-203.
- Rittle-Johnson, B. (2006). Promoting transfer: Effects of self-explanation and direct instruction. *Child Development*, 77(1), 1-15.
- Royer, J., Mestre, J. y Dufresne, R. (2005). Framing the transfer problem. In J. P. Mestre (Ed.), *Transfer of learning from a modern multidisciplinary perspective* (pp. vii-xxiv). Greenwich, CT: Information Age.
- Rubio, R. y Fernández, A. (2005). In ISEI-IVEI (Ed.), *Evaluación internacional de matemáticas y ciencias TIMMS 2003*. Bilbao: Gobierno Vasco.

- Ryder, J. y Leach, J. (2000). Interpreting experimental data: The views of upper secondary school and university science students. *International Journal of Science Education*, 22(10), 1069-1084.
- Royer, J. M. (1978). *Theories of learning transfer*. (No. Technical Report Nro. 79). Washintong: The National Institute of Education.
- Sadker, D., y Zittleman, K. R. (2009). *Still failing at fairness: How gender bias cheats girls and boys in school and what we can do about it*. New York: Simon y Schuster.
- Salomon, G. y Perkins, D.N. (1989). Rocky roads to transfer: Rethinking mechanisms of a neglected phenomenon. *Educational Psychologist*, 24(2), 113-142.
- Samarapungavan, A. (1992). Children's judgments in theory choice tasks: Scientific rationality in childhood. *Cognition*, 45(1), 1-32.
- Sánchez, J., Segovia, I. y Miñán, M. (2011). Exploración de la ansiedad hacia las matemáticas en los futuros maestros de educación primaria. *Profesorado.Revista De Currículum y Formación De Profesorado*, 15(3), 297-312.
- Sandoval, W. (2003). Conceptual and epistemic aspects of students' scientific explanations. *The Journal of Learning Sciences*, 12(1), 5-51.
- Sanjosé, V., Valenzuela, T., Fortes, M.C., y Solaz-Portolés, J.J. (2007). Dificultades algebraicas en la resolución de problemas por transferencia. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias* 538-561.
- Sanmartí, N. (2007). *10 ideas clave. Evaluar para aprender* (Vol 1). Barcelona: Graó
- Sanmartí, N., Burgoa, B. y Nuño, T. (2011). ¿Por qué el alumnado tiene dificultad para utilizar sus conocimientos científicos escolares en situaciones cotidianas? *Didáctica De Las Ciencias Experimentales. Alambique, enero-febrero-marzo(67)*, 62-69.
- Sanmartí, N., Izquierdo, M. y Watson, R. (1995). The substantialisation of properties in pupils' thinking and in the history of science. *Science & Education*, 4(4), 349-369.
- Santana, I., de Vega, M. y Gómez, J. M. (1999). Procesamiento del discurso. Paper presented at the *Psicolingüística Del Español*, 271-306.
- Sanz, I. (2004). Expresiones gráficas del lenguaje matemático. *Uno: Revista De Didáctica De Las Matematicas*, (35), 9-22.
- Schoenfeld, A. H. (1999). Looking toward the 21st century: Challenges of educational theory and practice. *Educational Researcher*, 28(7), 4-14.

- Schönborn, K. J. y Bögeholz, S. (2009). Knowledge transfer in biology and translation across external representations: Experts' views and challenges for learning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 7(5), 931-955.
- Schwartz, D.L., Bransford, J.D. y Sears, D. (2005). Efficiency and innovation in transfer. In J. P. Mestre (Ed.), *Transfer of learning from a modern multidisciplinary perspective* (pp. 1-54). Greenwich, CT: Information Age.
- Schwartz, D.L., Taylor, M. y Pfaffman, J. (2005). How mathematics propels the development of physical knowledge. *Journal of Cognition and Development*, 6(1), 65-88.
- Schwartz, D. L., Lin, X., Brophy, S. y Bransford, J. D. (1999). Toward the development of flexibly adaptive instructional designs. *Instructional-Design Theories and Models: A New Paradigm of Instructional Theory*, 2, 183-213.
- Schwartz, D. L., Chase, C.C. y Bransford, J.D. (2012). Resisting overzealous transfer: Coordinating previously successful routines with needs for new learning. *Educational Psychologist*, 47(3), 204-214.
- Scott, P. y Ametller, J. (2007). Teaching science in a meaningful way: striking a balance between opening up and closing down classroom talk. *School Science Review*, 88(324), 77-83.
- Shell Centre for Mathematical Education. (1990). *El lenguaje de funciones y gráficas* [The Language of Functions and Graphs] (F. Alayo Trans.). Bilbo: Euskal Herriko Unibertsitateko Argitalpen-Zerbitzua.
- Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, 25, 23-58.
- Simmons, P., Emory, A., Carter, T., Coker, T., Finnegan, B., Crockett, D., Craven, J. y Tillotson, J. (1999). Beginning teachers: Beliefs and classroom actions. *Journal of Research in Science Teaching*, 36(8), 930-954.
- Singley, M. y Anderson, J. (1989). *The transfer of cognitive skill* Harvard University Press.
- Smail, B. (1991). In Subdirección General de Formación del profesorado (Ed.), *Cómo interesar a las chicas por las ciencias*. Madrid: MEC.
- Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (1st ed., pp. 125-154) Horsori : Universitat de Barcelona, Instituto de Ciencias de la Educación.
- Solaz-Portalés, J. J. y Sanjosé, V. (2006). ¿Podemos predecir el rendimiento de nuestros alumnos en la resolución de problemas? *Revista de Educación*, 339(1), 693-710.

- Solaz-Portales, J.J. y Sanjosé, V. (2007) Resolución de problemas, modelos mentales e instrucción. *Revista electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, 6(1), 70-86.
- Solaz-Portalés y Sanjosé, V. (2008). Conocimiento previo, modelos mentales y resolución de problemas: un estudio con alumnos de bachillerato. *Revista electrónica de investigación educativa*, 10(1), 1-16
- Solaz-Portalés, J.J. y Sanjosé, V. (2012). Conocimientos y procesos cognitivos en la resolución de problemas de ciencias: consecuencias para la enseñanza. *Magis. Revista Internacional de Investigación en Educación*, 1 (1).
- Solaz-Portalés, J.J., Rodríguez, C., Gómez, A. y Sanjosé, V. (2013). Conocimiento metacognitivo de las estrategias y habilidades mentales utilizadas para resolver problemas: un estudio con profesores de ciencias de la información. *Didáctica de las Ciencias Experimentales y Sociales*.
- Spear, M. (1987). Science teacher's perceptions of the appeal of science subjects to boys and girls. *International Journal of Science Education*, 9(3), 287-296.
- Stard, A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
- Stein, M. K. y Leinhardt, G. y Bickel, W. (1989). Instructional issues for teaching students at risk. *Effective Programs for Students at Risk*, 145-194.
- Sternberg, R. J. (1984a). Toward a triarchic theory of human intelligence. *Behavioral and Brain Sciences*, 7, 269-315.
- Sternberg, R. J. (1984b). Macrocomponents and microcomponents of intelligence: Some proposed loci of mental retardation. In P. H. Brooks, & Sperber, R. eta McCauley, C. (Eds.), *Learning and cognition in mentally retarded* . New Jersey: Lawrence Erlbaum.
- Sternberg, R. J. (1985). *Beyond IQ. A triarchic theory of human intelligence*. Nueva York: Cambridge University Press.
- Sternberg, R. J. (1986). *The triarchic mind. A new theory of human intelligence*. Nueva York: Penguin.
- Sternberg, R. J. (1987). Most vocabulary is learned from context. In Mckeown, M.G. y Curtis, M.E. (Ed.), *The nature of mathematical thinking* (pp. 89-105).
- Sternberg, R. J. (1988). *The triarch mind: A new theory of human intelligence*. New York: Viking.

- Sternberg, R.J. y Frensch, P.A. (1993). Mechanisms of transfer. In Detterman, D.K. y Sternberg, R.J. (Ed.), *Transfer on trial: Intelligence, cognition and instruction* (pp. 25-38). Norwood, New Jersey: Ablex.
- Sternberg, R.J. y Powell, J.S. (1983a). Comprehending verbal comprehension. *American Psychologist*, 38, 878-894.
- Sternberg, R.J. y Powell, J.S. (1983b). The development of intelligence. In Flavell, J.H. y Markman, E.M. (Ed.), *Handbook of child psychology (vol.3, cognitive development)*. New York: John Wiley & Sons.
- Sternberg, R. J., Ketron, J.L. y Powell, J. S. (1982). Componential approaches to the training of intelligence. In Detterman, D.K. y Sternberg, R.J. (Ed.), *How and how much can intelligence be increased?* . Norwood, N.J.: Ablex.
- Subirats, M. y Bruillet, C. (1999). In Belausteguigotia , M. y A. Mingo, A. (Ed.), *Géneros prófugos: Feminismo y educación*. México: Paidós.
- Sullivan, K. R. y Mahalik, J. R. (2000). Increasing career self-efficacy for women: Evaluation a group intervention *Journal of Counseling & Development*, 78(1), 54-62.
- Swan, M y Phillips, R. (1998). Graph interpretation skills among lower-achieving school leavers. *Research in Education*, 60, pp. 10-20.
- Tall, D. (1997). Functions and calculus. *International handbook of mathematics education* (pp. 327-370) Springer.
- Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.
- Thorndike, E. L. y Wooddworth, R.S. (1901). The influence of improvement in one mental function upon the efficiency of other functions. *Psychological Review*, 8(6), 553-564.
- Toumi-Gröhn, T. y Engeström, Y. (2003). Conceptualizing transfer: From standart notions to developmental perspectives. In Toumi-Gröhn, T. y Engeström, Y. (Ed.), *Between school and work: New perspectives on transfer and boundary-crossing* (pp. 19-38). New York: Pergamon.
- Ursini, S., Sanchez, G., Oredain, M. y Brutto, C. (2004). El uso de la tecnología en el aula de matemáticas. diferencias de género desde la perspectiva de los docentes. *Enseñanza De Las Ciencias*, 22(3), 409-424.
- Van Dijk, T. A., Kintsch, W.(1983) *Strategies of discourse comprehension*. New York: Academic Press.

- Van Lehn, K. (1990). *Mind bugs: origins of procedural misconceptions*. Cambridge, Mass.: MIT Press Simon y C. A. Kaplan [Eds.]. *Foundations of Cognitive Science*. Cambridge, MA: Harvard University Press
- Van Oers, B. (2004, April). *Rethinking abstraction and decontextualization in relationship to the 'transfer dilemma'*. Paper presented at the AERA: San Diego, CA.
- Vázquez, Á. y Manassero, M.A. (2008). El declive de las actitudes hacia la ciencia de los estudiantes: Un indicador inquietante para la educación científica. *Revista Eureka Sobre Enseñanza y Divulgación De Las Ciencias*, 5(3), 274-292.
- Villa-Ochoa, J. (2012). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. *Tecné, Epistemé y Didaxis-TED*, (31), 9-25.
- Villaruel, V. (2001). Relación entre autoconcepto y rendimiento académico. *Psykhé Revista De La Escuela De Psicología*, 10(1), 3-18.
- Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 14(3), 293-305.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.
- Vinner, S. y Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 356.
- Vosniadou, S. (1994). Capturing and modeling the process of conceptual change. *Learning and Instruction*, 4(1), 45-69.
- Vosniadou, S. y Brewer, W.F. (1992). Mental models of the earth: A study of conceptual change in childhood. *Cognitive Psychology*, 24(4), 535-585.
- Vosniadou, S. y Ortony, A. (1989). In Vosniadou D. y O., A. (Ed.), *Similarity and analogical reasoning*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Vygotsky, L. (1962). *Thought and language*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Wagner, S. (1981). Conservation of equation and function under transformations of variable. *Journal for Research in Mathematics Education*, 12(2), 107-118.
- Wainer, H. (1992). Understanding Graphs and Tables. *Educational Researcher*, 21(1), 14-23.
- Warnakulasooriya, R., y Pritchard, D. (2005). Learning and problem-solving transfer between physics problems using web-based homework tutor. Paper presented at the *World Conference on Educational Multimedia, Hypermedia and Telecommunications*, 2005(1) 2976-2983.

- Whiston, S. C., y Bouwkamp, J. C. (2003). Ethical implicatons of career assessment with women. *Journal of Career Assessment*, 11(1), 59-75.
- White, B.Y. y Frederickson J. (1998). Inquiry, modeling, and metacognition: Making science accessible to all students. *Cognition and Instruction*, 16(1), 3-118.
- Wigfield, A., Eccles, J. S. y Pintrich, P. R. (1996). Development between the ages of 11 and 25. In D. Berliner y Calfee, R. (Ed.), *Handbook of educational psychology*. New York: Macmillan.
- Wigfield, A., Eccles, J., y Rodriguez, D. (1998). The development of children's motivation in school contexts. *Review of Research in Education in Education*, 23, 73-118.
- Wilkins, J. L. M. (2004). Mathematics and science self-concept. an international investigation. *Journal of Experimental Education*, 72(4), 331-346.
- Wineburg, S. (1998). Reading abraham lincoln: An Expert/Expert study in the interpretation of historical texts. *Cognitive Science*, 22(3), 319-346.
- Wolfe, R., Reyna, F. y Brainerd, J. (2005). Fuzzy-trace theory: Implications for transfer in teaching and learning. In J. P. Mestre (Ed.), (pp. 53-87). United States of America: Information Age.
- Yerushalmy, M. (1989). The use of graphs as visual interactive feedback while carrying out algebraic transformations. Paper presented at the *13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Paris.
- Zeldin, A. y Pajares, F. (2000). Against the odds: Self-efficacy beliefs of women in mathematical, scientific, and technological careers. *American Educational Research Journal*, 37(1), 215-246.
- Zeldin, A., Britner, S., y Pajares, F. (2008). A compartive study of the self-efficacy beliefs of successful men and women in mathematics, science, and technology careers. *Journal of Research in Science Teaching*, 45(9), 1036-1058.
- Zimmerman, B. J. (1999). Commentary: Toward a cyclically interactive view of self-regulated learning. *International Journal of Educational Research*, 31(6), 545-551.

INDICE DE TABLAS

Tabla 6-1	<i>Fragmento de la tabla de actividades del grupo IA</i>	152
Tabla 6-2	<i>Resumen de participantes y acciones llevadas a cabo con cada grupo de estudiantes</i>	155
Tabla 6-3	<i>Criterios de evaluación y valores aplicados para la calificación de las preguntas de los exámenes</i>	159
Tabla 6-4	<i>Preguntas básicas planteadas en relación a cada una de las situaciones en la entrevista</i>	161
Tabla 6-5	<i>Relación entre las tareas, categorías y subcategorías de análisis, parámetros asociados y niveles establecidos</i>	164
Tabla 6-6	<i>Parámetros relacionados con Matemáticas I y Matemáticas II</i>	167
Tabla 6-7	<i>Resumen de los niveles globales de Matemáticas</i>	167
Tabla 6-8	<i>Niveles de conocimiento científico</i>	168
Tabla 6-9	<i>Estilos comunicativos</i>	171
Tabla 7-1	<i>Resumen de tarea, categorías, subcategorías de análisis y preguntas de examen relacionadas</i>	177
Tabla 7-2	<i>Medias de subcategorías de análisis por grupos mediante sistema SPSS</i>	181
Tabla 7-3	<i>Relación entre el nivel académico en matemáticas y los resultados en las distintas subcategorías de análisis</i>	193
Tabla 7-4	<i>Relación entre las categorías de análisis y los ítems del contrato de autoevaluación</i>	194
Tabla 7-5	<i>Subcategorías de análisis en las que cada grupo obtiene un nivel suficiente</i>	198
Tabla 7-6	<i>Resumen referente a la traducción desde la descripción de la situación a la representación gráfica (TDG), situación de la pelota</i>	205
Tabla 7-7	<i>Resumen referente a la traducción desde la descripción de la situación a la representación gráfica (TDG), situación de la montaña rusa</i>	208
Tabla 7-8	<i>Resumen referente a la traducción desde la descripción de la situación a la representación gráfica (TDG), contexto de física por niveles TDGm (niveles en TDG)</i>	¡Error! Marcador no definido.
Tabla 7-9	<i>Resumen referente a la traducción desde la descripción de la situación a la representación gráfica (TDG), situación solubilidad (1G y 2G)</i>	211
Tabla 7-10	<i>Resumen de los niveles de TDG en referencia a distintos contextos</i>	212
Tabla 7-11	<i>Resumen referente a la coherencia entre las representaciones gráfica y algebraica en la situación de la pelota</i>	222
Tabla 7-12	<i>Elección de variables en el contexto de la pelota a la hora de escoger la representación algebraica</i>	225
Tabla 7-13	<i>Resumen de uso de subconceptos matemáticos al argumentar sobre las distintas situaciones</i>	236
Tabla 7-14	<i>Resumen de respuestas más destacables referidas a distintos subconceptos matemáticos</i>	237
Tabla 7-15	<i>Resumen de imágenes de concepto de función y niveles de razonamiento covariacional</i>	240
Tabla 7-16	<i>Resumen de resultados de matemáticas I y matemáticas II por grupo</i>	249
Tabla 7-17	<i>Resumen de resultados (medias) en matemáticas I y II con respecto al nivel académico de matemáticas y grupo</i>	250
Tabla 7-18	<i>En la situación de la pelota, dificultades identificadas desde las ciencias (DF) y niveles de conocimiento de física asociados (F)</i>	297
Tabla 7-19	<i>Relación entre el nivel de conocimiento de Física y la elección del gráfico en la situación de la pelota</i>	299

Tabla 7-20 En la situación de la montaña rusa, dificultades identificadas desde las ciencias (DF) y niveles de conocimiento de física asociados (F).....	301
Tabla 7-21 <i>Relación entre el nivel de conocimiento de Física y la elección del gráfico en la situación de la montaña rusa</i>	302
Tabla 7-22. <i>Resumen de las dificultades identificadas desde las ciencias (DS) y niveles de conocimiento de química asociados Q en la situación de solubilidad</i>	306
Tabla 7-23 <i>Transferencia identificada en los exámenes o en las entrevistas</i>	321
Tabla 7-24 <i>Transferencia de conocimiento matemático y niveles de conocimiento científico por grupo</i>	322
Tabla 7-25 <i>Transferencia de conocimiento matemático y niveles de conocimiento científico por nivel académico</i>	323
Tabla 7-26 <i>Transferencia de conocimiento matemático I y niveles de conocimiento científico por nivel académico en relación a trabajo con funciones</i>	324
Tabla 7-27 <i>Transferencia de conocimiento matemático I y niveles de conocimiento científico por nivel académico de los grupos 1A y 2A</i>	325
Tabla 7-28 <i>Relación entre el nivel de transferencia de las tareas de translación y predicción y el nivel de ciencias por grupos</i>	326
Tabla 7-29 <i>Relación entre el nivel de transferencia TDG y el nivel de ciencias por grupos</i> ...	326
Tabla 7-30 <i>Relación entre el nivel de transferencia de las tareas de translación y predicción y el nivel de ciencias por nivel académico</i>	327
Tabla 7-31 <i>Relación entre el nivel de transferencia de las tareas de translación y predicción por nivel académico en relación a trabajo con funciones</i>	327
Tabla 7-32 <i>Relación entre el nivel de transferencia TDG y el nivel de ciencias por nivel académico en relación a trabajo con funciones</i>	328
Tabla 7-33 <i>Diferencias entre los conocimientos matemático y científico</i>	329
Tabla 7-34 <i>Diferencias entre las transferencias (de gráfico a ecuación) - (de situación a gráfico)</i>	331
Tabla 7-35 <i>Relación entre la autoeficacia, el gusto por las matemáticas y las ciencias y los estilos de transferencia</i>	334
Tabla 7-36 <i>Resumen de actividades que influyen positivamente en los resultados</i>	336
Tabla 7-37 <i>Fortalezas y debilidades de la Unidad Didáctica</i>	337
Tabla 7-38 <i>Tabla resumen en relación a la traducción desde la descripción de la situación a la representación gráfica en contexto de física (TDG) por sexo, (grupos 1A, 2A y 3B)</i>	344
Tabla 7-39 <i>Transferencia de conocimiento matemático y niveles de conocimiento científico por sexo</i>	353
Tabla 7-40 <i>Transferencia de conocimiento matemático I y niveles de conocimiento científico por sexo en relación al trabajo con funciones</i>	354
Tabla 7-41 <i>Relación entre el nivel de transferencia y el nivel de conocimiento científico por sexo</i>	355
Tabla 7-42 <i>Relación entre el nivel de transferencia de conocimiento matemático I y el nivel de ciencias por sexo</i>	355
Tabla 7-43 <i>Relación entre el nivel de transferencia y el nivel de ciencias por sexo en los grupos 1A y 2A</i>	356
Tabla 7-44 <i>Relación entre el nivel de transferencia y el nivel de ciencias por sexo</i>	356
Tabla 7-45 <i>Relación entre el nivel de transferencia de conocimiento matemático I y el nivel en ciencias por sexo</i>	357
Tabla 7-46 <i>Relación entre el nivel de transferencia en TDGf y TDGq y el nivel en ciencias por sexo</i>	357

Tabla 7-47 <i>Relación entre el nivel de transferencia de conocimiento matemático y el nivel de ciencias por sexo</i>	358
Tabla 7-48 <i>Resumen de los resultados del Cuestionario de Gestión Motivacional por sexo</i>	361

INDICE DE FIGURAS

<i>Figura 1-1.</i> Representación de los factores que afectan a la Transferencia (Bloom, 2007).....	22
<i>Figura 1-2.</i> Niveles de transferencia de Haskell (2001).....	25
<i>Figura 1-3.</i> Taxonomía de la transferencia de Barnett y Ceci (2002).....	26
<i>Figura 1-4.</i> Tipos de transferencia según diversos autores.....	28
<i>Figura 1-5.</i> Supuestos teóricos de la Transferencia AOT en comparación con la transferencia tradicional (Lobato, 2003).....	31
<i>Figura 2-1.</i> Resumen de distintos modelos de cambio conceptual según Rodríguez (2007).	50
<i>Figura 2-2.</i> Resultados en Competencia Matemática por sexo (PISA 2003-2012).	68
<i>Figura 2-3.</i> Influencia en los resultados de Matemáticas por cada punto de variación del índice de varianza, PISA 2003(Arregi et al.; 2003).	76
<i>Figura 2-4.</i> Resultados en Competencia Científica por sexo (PISA 2003-2012).	79
<i>Figura 5-1.</i> Etapas de construcción del concepto de función desde la representación como proceso hasta la representación como objeto matemático (Stard, 1991).	115
<i>Figura 5-2.</i> Imagen de concepto de función (Vinner y Dreyfus, 1989).....	116
<i>Figura 5-3.</i> Niveles de razonamiento covariacional y acciones mentales llevadas a cabo (Carlson et al., 2003).....	117
<i>Figura 5-4.</i> Estadios del proceso de construcción del lenguaje algebraico (Socas, 1997).	118
<i>Figura 5-5.</i> Niveles de procesamiento de la información a través de gráficos según diversos autores.....	119
<i>Figura 5-6.</i> Niveles a alcanzar en el aprendizaje de las funciones (National Council of Teachers of Mathematics, 2000).	121
<i>Figura 5-7.</i> Concepto de función en contexto.	135
<i>Figura 6-1.</i> Distribución de subgrupos por sexo.	149
<i>Figura 6-2.</i> Proceso llevado a cabo en la investigación.	154
<i>Figura 6-3.</i> Etapas en el proceso de aprendizaje (Jorba y Sanmartí, 1994).	156
<i>Figura 6-4.</i> Adecuación de la Taxonomía de Barnett y Ceci (2002).	158
<i>Figura 6-5.</i> Situaciones planteadas en la entrevista.....	161
<i>Figura 6-6.</i> Proceso seguido para la categorización.	169
<i>Figura 7-1.</i> Preguntas de examen referidas a la misma tarea.	179
<i>Figura 7-2.</i> Preguntas de examen referidas al proceso desde la descripción de la situación hasta la expresión algebraica en el grupo 1A.	180
<i>Figura 7-3.</i> Calificaciones otorgadas a una misma pregunta de examen en el grupo 2A.	180
<i>Figura 7-4.</i> Preguntas referidas a la traducción desde la descripción de la situación hacia el gráfico.	183
<i>Figura 7-5.</i> Preguntas referidas al lenguaje utilizado.	185
<i>Figura 7-6.</i> Preguntas referidas al reconocimiento entre el gráfico y la expresión algebraica. .	186
<i>Figura 7-7.</i> Preguntas referidas a la inferencia del punto de encuentro.....	190
<i>Figura 7-8.</i> Comparación en un contexto cotidiano (ir a patinar) de la función proporcional y la función afín realizada en el grupo 1A.	192
<i>Figura 7-9.</i> Nivel de dificultad (expresado en %) según grupos.	195

<i>Figura 7-10.</i> Nivel de dificultad (expresado en %) apreciada por el alumnado en función del nivel académico.	195
<i>Figura 7-11.</i> Niveles de dificultad (expresado en %) apreciados por el alumnado en función del nivel académico.	196
<i>Figura 7-12.</i> Niveles de dificultad por ítem (contrato de autoevaluación).	197
<i>Figura 7-13.</i> Elección del tipo de gráfico que responde en mayor medida a una interpretación icónica o no (expresado en %) y momentos argumentados.	210
<i>Figura 7-14.</i> TDG en referencia a nivel académico y contextos.	213
<i>Figura 7-15.</i> Identificación y utilización de variables (IV) en argumentación (expresado en %) en la situación de la pelota, en conjunto y por grupos.	214
<i>Figura 7-16.</i> Identificación y utilización de variables (IV) en argumentación (expresado en %) en contexto de montaña rusa, en conjunto y por grupos.	215
<i>Figura 7-17.</i> Identificación y utilización de variables (IV) en argumentación (expresado en %) en la situación de solubilidad, en conjunto y por grupos.	217
<i>Figura 7-18.</i> Relación establecida entre las variables (RV) por grupo.	217
<i>Figura 7-19.</i> Coherencia entre las representaciones gráfica y algebraica en la situación de la pelota por grupo.	224
<i>Figura 7-20.</i> Elección de variables en el contexto de la pelota a la hora de escoger la representación algebraica (en porcentaje).	224
<i>Figura 7-21.</i> Elección de la pendiente (incluido signo) a la hora de escoger la expresión algebraica correspondiente al gráfico elegido.	226
<i>Figura 7-22.</i> Niveles de traducción entre los sistemas de representación gráfico y algebraico.	228
<i>Figura 7-23.</i> Construcción del subconcepto ordenada en el origen en la situación de solubilidad.	228
<i>Figura 7-24.</i> Ordenada en el origen y niveles alcanzados.	229
<i>Figura 7-25.</i> Construcción del concepto pendiente en la situación de solubilidad.	230
<i>Figura 7-26.</i> Niveles en referencia a la pendiente.	230
<i>Figura 7-27.</i> Identificación del punto en el cual la solubilidad de dos sustancias es la misma.	231
<i>Figura 7-28.</i> Niveles en punto de encuentro en la situación de solubilidad.	232
<i>Figura 7-29.</i> Argumentaciones expuestas por el alumnado sobre la elección del método para hallar el punto de encuentro.	234
<i>Figura 7-30.</i> Utilización de conceptos matemáticos.	235
<i>Figura 7-31.</i> Uso de subconceptos matemáticos al argumentar sobre las distintas situaciones por grupo.	236
<i>Figura 7-32.</i> Niveles de Matemáticas I (en porcentajes) por grupos.	246
<i>Figura 7-33.</i> Niveles de Matemáticas II (en porcentajes) por grupo.	248
<i>Figura 7-34.</i> Niveles de Matemáticas (en porcentajes) por grupo.	249
<i>Figura 7-35.</i> Grupos en función de la comparativa entre los resultados de matemáticas I y II.	252
<i>Figura 7-36.</i> Organización habitual del aula antes de comenzar a aplicar la UD.	254
<i>Figura 7-37.</i> Estilos didácticos empleados por las profesoras en los subgrupos.	255
<i>Figura 7-38.</i> Estilos didácticos empleados por las profesoras en los subgrupos.	256
<i>Figura 7-39.</i> Preguntas y respuestas realizadas por el alumnado.	257
<i>Figura 7-40.</i> Participación de cada estudiante.	258
<i>Figura 7-41.</i> Uso del euskera como lengua vehicular (se contabilizan palabras).	259
<i>Figura 7-42.</i> Porcentaje de actividades realizadas por cada subgrupo en referencia a cada etapa.	261

<i>Figura 7-43.</i> Porcentaje de actividades realizadas por cada subgrupo en referencia a cada periodo.....	262
<i>Figura 7-44.</i> Estilos didácticos empleados por las profesoras en los subgrupos al aplicar la UD.....	265
<i>Figura 7-45.</i> Interacciones de las profesoras con el alumnado al aplicar la UD.....	266
<i>Figura 7-46.</i> Preguntas y respuestas realizadas por el alumnado al aplicar la UD.....	267
<i>Figura 7-47.</i> Participación de cada estudiante durante la aplicación de la UD.....	268
<i>Figura 7-48.</i> Imágenes habituales en los grupo 1AA (estudiantes corrigiendo) y 2AA (profesora corrigiendo).....	269
<i>Figura 7-49.</i> Tarea de coevaluación del alumnado del subgrupo 1AA.....	271
<i>Figura 7-50.</i> Estudiantes del grupo 1AA comprobando la coherencia entre la descripción de la situación y el gráfico (trabajo cooperativo, sesión 090504).....	274
<i>Figura 7-51.</i> Terminología utilizada en la clase 1AA a lo largo de las sesiones. Las horas 2 y 3 se refieren a la tarea de traducción desde la descripción de la situación al gráfico.....	276
<i>Figura 7-52.</i> Imagen correspondiente al video 1AA 090513. Utilización de variables contextuales en distintas representaciones (anexo 18).....	279
<i>Figura 7-53.</i> Examen del alumno 1A14 (corregido por la profesora).....	279
<i>Figura 7-54.</i> Utilización de la regla de tres para hallar la sombra del árbol (imagen correspondiente al video 1AA 090513, día 6) (anexo, 18.1).....	282
<i>Figura 7-55.</i> Trabajo comparativo de la función proporcional y afín del grupo 1AA.....	284
<i>Figura 7-56.</i> Terminología utilizada en la clase 2AA a lo largo de las sesiones (día 10, a partir del minuto 7 la grabación se ha estropeado).....	288
<i>Figura 7-57.</i> Tarea dirigida a la coherencia entre las representaciones gráfica y algebraica en el grupo 2AA (sesión 090526).....	290
<i>Figura 7-58.</i> Distintas representaciones de las funciones del ejercicio 70 en el grupo 2AA (sesión 090603).....	292
<i>Figura 7-59.</i> Examen de la alumna 2A6** del grupo 2AA, muestra regla de tres.....	294
<i>Figura 7-60.</i> Definición de función del grupo 2AA.....	294
<i>Figura 7-61.</i> Apuntes dados al alumnado del grupo 2AA.....	295
<i>Figura 7-62.</i> Niveles de conocimiento de física por grupo y en porcentajes.....	304
<i>Figura 7-63.</i> Niveles de conocimiento de química por grupo y porcentaje.....	307
<i>Figura 7-64.</i> Grupos establecidos teniendo en cuenta las relaciones entre las relaciones entre ciencias y matemáticas I.....	310
<i>Figura 7-65.</i> Grupos establecidos teniendo en cuenta las relaciones entre las relaciones entre ciencias y matemáticas II.....	311
<i>Figura 7-66.</i> Transferencia de la tarea de translación por grupo y nivel académico.....	316
<i>Figura 7-67.</i> Transferencia en la tarea de predicción.....	317
<i>Figura 7-68.</i> Transferencia en la tarea de clasificación referida con el concepto de función ...	319
<i>Figura 7-69.</i> Transferencia en la tarea de clasificación referida a la identificación de un tipo de función sobre otras funciones.....	320
<i>Figura 7-70.</i> Relación entre las tipologías de transferencia y el nivel del conocimiento científico.....	332
<i>Figura 7-71.</i> Evolución de estilos de transferencia desde el examen a la entrevista.....	335
<i>Figura 7-72.</i> Nivel de dificultad global (expresado en valor medio) según sexo y nivel académico.....	342
<i>Figura 7-73.</i> Traducción desde la descripción de la situación a la representación gráfica (TDG) en la situación de solubilidad por sexo y grupos.....	345
<i>Figura 7-74.</i> Identificación de variables por sexo y situaciones contextualizadas.....	345
<i>Figura 7-75.</i> Relación establecida entre las variables por sexo.....	346

<i>Figura 7-76.</i> Coherencia entre las representaciones gráfica y algebraica por sexos en la situación de la pelota.	347
<i>Figura 7-77.</i> Elección de variables al escoger la ecuación (EV) en la situación de la pelota por sexo.	348
<i>Figura 7-78.</i> Utilización de argumentos matemáticos durante la entrevista por sexo.	351
<i>Figura 7-79.</i> Evolución dentro de la entrevista desde Matemáticas I a Matemáticas II y desde el examen a la entrevista y por sexo.	359
<i>Figura 7-80.</i> Niveles de autoeficacia en matemáticas y ciencias por sexo.	361
<i>Figura 7-81.</i> Gusto por las matemáticas y las ciencias por grupo.	362
<i>Figura 7-82.</i> Preferencias por tipo de tarea y organización de aula para llevarla a cabo por sexo.	363
<i>Figura 8-1.</i> Transferencias realizadas por el alumnado.	371
<i>Figura 8-2.</i> Etapas del aprendizaje y fase de transferencia.	397

INDICE DE ANEXOS

Anexo 1. Unidad didáctica
Anexo 2. Exámenes
Anexo 3 Cuestionario de examen versus tareas
Anexo 4. Contrato de autoevaluación
Anexo 5. Preguntas contestadas por el alumnado y puntuación obtenida
Anexo 6. Notas de los exámenes calificadas por las profesoras
Anexo 7. Alfa de Cronbach
Anexo 8. Actividades propuestas y realizadas
Anexo 9. Actividades nuevas de los grupos
Anexo 10. Apuntes del grupo 1A
Anexo 11. Permiso de participación
Anexo 12. Influencia de haber montado en bicicleta
Anexo 13. Transcripciones de las entrevistas
Anexo 14. Criterios de evaluación en la entrevista
Anexo 15. Red sistémica
Anexo 16. Hallar el punto de encuentro, alumnado
Anexo 17 Imagen de concepto
Anexo 18. Transcripciones de las sesiones grabadas
Anexo 19. SPSS
Anexo 20. EXCEL. Medias
Anexo 21. Categorías contempladas en matemáticas
Anexo 22. Niveles de matemáticas en función de las puntuaciones otorgadas a niveles de parámetros evaluados

