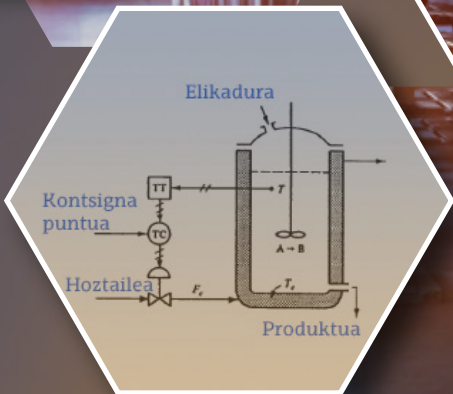


# Prozesu **kimikoen** kontrola

MIRIAM ARABIOURRUTIA GALLASTEGI  
JOSE MARÍA ARANDES ESTEBAN



eman ta zabal zazu



Universidad  
del País Vasco

Euskal Herriko  
Unibertsitatea

*CIP. Unibertsitateko Biblioteka*

**Arabiourrutia Gallastegui, Miriam**

Prozesu kimikoen kontrol [Recurso electrónico] / Miriam Arabiourrutia Gallastegui. – Datos. – Bilbao : Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea, Argitalpen Zerbitzua = Servicio Editorial, [2019]. – 1 recurso en línea : PDF (232 p.)

Modo de acceso: World Wide Web.

ISBN: 978-84-9082-472-6

1. Procesos químicos, Control de.

(0.034)66.012

UPV/EHUko Euskara Zerbitzuak sustatua eta zuzendua, Euskarazko ikasmaterialgintza sustatzeko deialdiren bitartez.

© Euskal Herriko Unibertsitateko Argitalpen Zerbitzua

ISBN: 978-84-9082-472-6

# Aurkibidea

<b>1. gaia</b>	
Sarrera .....	5
<b>2. gaia</b>	
Eredu matematikoen adibideak ingeniari-tza kimikoko sistemetan .....	25
<b>3. gaia</b>	
Laplaceren transformatua .....	57
<b>4. gaia</b>	
1. ordenako sistemen erantzuna .....	78
<b>5. gaia</b>	
Sistemen linealizazioa eta elkarrekintza .....	93
<b>6. gaia</b>	
Bigarren ordenako sistemen erantzuna .....	105
<b>7. gaia</b>	
Hildako denbora edo atzerapena .....	121
<b>8. gaia</b>	
Seinaleen neurketa eta transmisioa .....	127
<b>9. gaia</b>	
Berrelikaradun kontrola eta kontrol-ekintzak .....	139
<b>10. gaia</b>	
Bukaerako kontrol-elementua .....	151
<b>11. gaia</b>	
Transferentzia-funtzioak begizta itxian. Egonkortasun kontzeptua .....	163

<b>12. gaia</b>	
Routh-en irizpidea eta erroen kokapena .....	177
<b>13. gaia</b>	
Frekuentzietako erantzuna. Boderen eta Nyquisten egonkortasun-irizpideak .....	191
<b>14. gaia</b>	
Berrelikadura duten kontrolagailuen diseinua.....	201
<b>Oinarrizko bibliografia .....</b>	<b>233</b>

## 1. gaia

# Sarrera

### 1.1. Sarrera

Instalazio kimiko bat era sistematiko eta arrazionalen integratutako prozesu-unitateen multzo bat da (erreaktoreak, bero-trukagailuak, ponpak, destilazio-zutabeak, absorbatzaileak, lurrungailuak, tangak, etab.). Zenbait lehengai nahi diren produktu bihurtzea da instalazioaren helburua, horretarako eskuragarri dauden energia-iturriak era ekonomikoenean erabiliz.

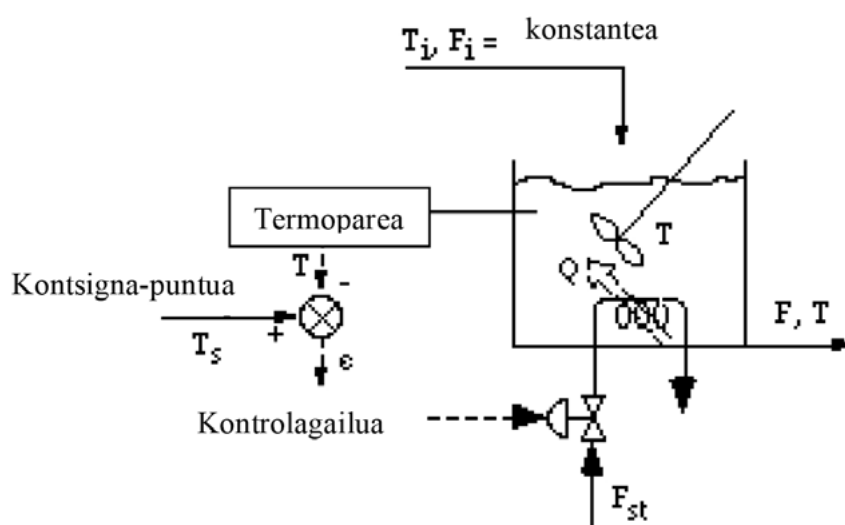
Lanean ari dela, instalazio kimiko batek diseinatzaileek eta baldintza tekniko, ekonomiko eta sozialek kanpoko eragin aldakorrak (perturbazioak) direla eta ezarritako eskakizunak bete behar ditu. Eskakizun horien artean, honako hauek daude:

- **Segurtasuna:** instalazio kimiko batean seguru lan egitea lehenbiziko beharra da instalazioaren jendearen ongizaterako eta garapen ekonomikoa bultzatzeko. Horregatik, tenperaturak, presioak, produktu kimikoen kontzentrazioak, eta abarrek baimendutako limiteen barruan egon behar dute. Adibidez, erreaktore bat 10 atm-ko presio, P, bateraino lan egiteko diseinatu bada, kontrol-sistema bat izan behar dugu P-a balio horren azpitik izateko.
- **Produktzio-espezifikazioak:** instalazio batek bukaerako produktuak nahi diren kantitate eta kalitatean ekoitzi behar ditu. Adibidez, milioi bat tona etileno %99,5eko purutasunez ekoitzi nahi badugu, kontrol-sistema bat beharrezkoa izango da produktio maila eta purutasuna ziurtatzeko.
- **Ingurumen-erregulazioak:** badaude legeak diotenak tenperaturak, produktu kimikoen kontzentrazioek eta efluenteen emariek zenbait mugaren barnean egon behar dutela. Adibidez, badaude atmosferara isur daitekeen kantitateari buruzko erregulazioak.
- **Egin beharreko lanaren murrizketak:** instalazio kimiko batean erabilitako ekipo mota guztiek badituzte beren lanari datxekien murrizketak. Adibidez, ponpek zenbait zurgapenezama neto positibo (ZZNP) izan behar dute; tangek ezin dute gainezka egin, ezta lehor geratu ere; destilazio-zutabeetan urak ezin du gainezka egin, etab. Beharrian horiek bete-tzeko, kontrol-sistemak behar dira.
- **Ekonomia:** instalazio batean egin beharreko lanek merkatuaren baldintzetan integratu behar dute. Horregatik, ekonomia maximoa lortu behar da lehengaien, energiaren, ekipoen, langileen, etabarren erabileran. Lan-baldintzak lanaren kostu minimoen, etekin maximoen eta abarren balio optimoetan kontrolatu behar dira.



Egiten ari den lana, besteak beste, elikadura-emarian eta haren tenperaturan gertatzen diren aldaketek (kanpoko faktoreak) asaldatzen dute ( $F_i$ ,  $T_i$ ). Ezer aldatuko ez balitz  $T = T_s$  eta  $V = V_s$  lortzen denean, sistema bakarrik utz genezake kontrolik gabe. Baina begibistakoa da hori ezin dela horrela izan,  $T_i$  eta  $F_i$  aldaketa jarraituen menpean baitaude. Horregatik, kontrol motaren bat behar da.

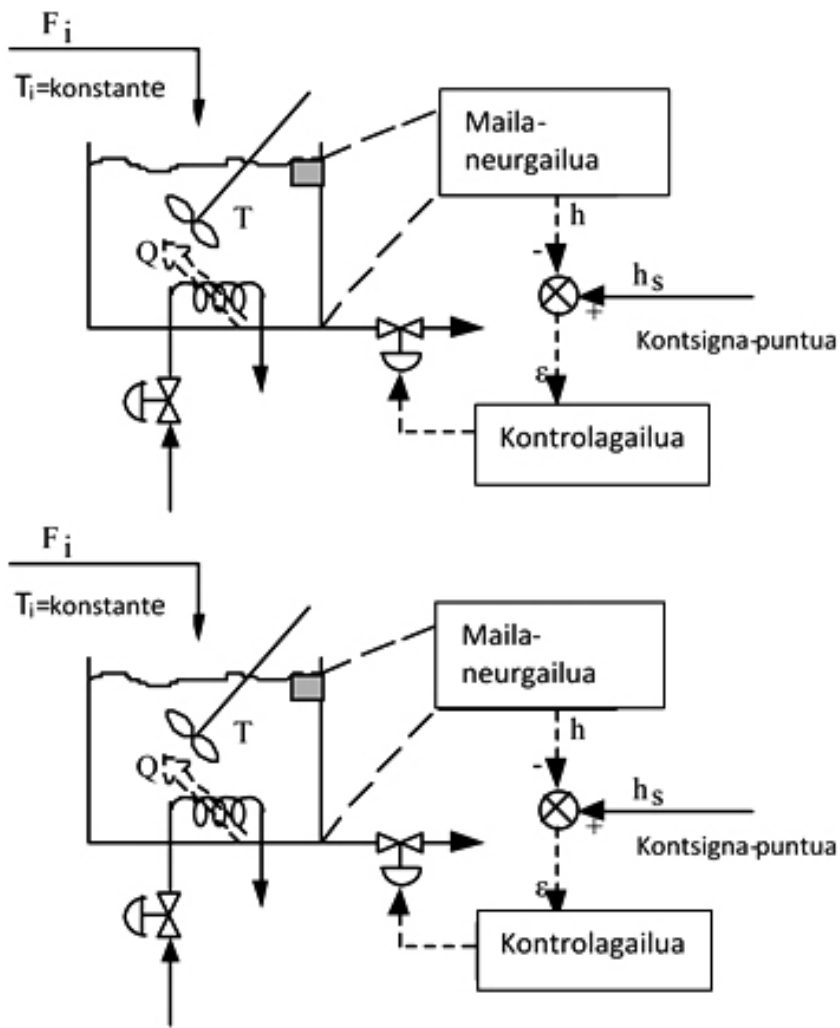
1.2 irudian, kontrol mota bat erakusten da. Termopare batek likidoak tangen duen tenperatura,  $T$ , neurtzen du eta nahi den balioarekin ( $T_s$ ) konparatzen da, eta, hala,  $\varepsilon = T_s - T$  desbideratzea lortu egiten da. Desbideratzearen balio hori kontrol-mekanismo batera bidaltzen da, zeinek erabakitzen duen zer egin.  $\varepsilon > 0$  bada, kontrolagailuak balbula irekitzen du bero gehiago emateko. Alderantziz,  $\varepsilon < 0$  bada, kontrolagailuak balbula ixten du.  $T = T_s$  denean, hau da,  $\varepsilon = 0$ , kontrolagailuak ez du ezer egiten. Sistema hori *atzeraelikaduradun edo berrelikaduradun kontrola* deitzen zaio. Nahi den balioa *kontsigna-puntua* deitzen da.



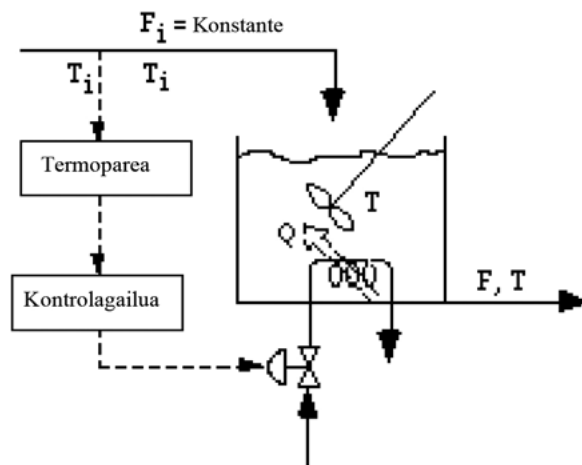
**1.2. irudia.** Atzeraelikaduradun tenperaturaren kontrola

Antzeko konfigurazioa erabil daiteke baldin eta, bolumena ( $V$ ) edo baliokidea dena likidoaren maila ( $h$ ) nahi den balioan ( $h_s$ ) mantentzeko,  $F_i$  aldatzen bada. Kasu horretan, likidoaren maila neurtzen da, eta deskargako balbula edo sarrerakoa ixten edo zabaltzen da (ikusi 1.3 irudia). 1.3. irudian erakusten diren kontrol-sistemek atzeraelikadura dute. Sistema horiek perturbazioen efektuek prozesuan eragin ondoren dute eragina.

Tangaren adibidera itzuliz, beste kontrol-disposizio bat erabil dezakegu  $T = T_s$  mantentzeko  $T_i$  aldatzen denean: sarrerako korrontearen tenperatura neurtu ( $T_i$ ) eta ur-lurrunaren balbula ireki edo itxi, bero handiagoa edo gutxiago emateko. Kontrol-konfigurazio hori «feedforward» deitzen da eta 1.4 irudian erakusten da. Kontrol mota horrek ez du perturbazioen eraginik, prozesuan narbitu arte itxaroten, baizik eta eragin egiten du efektu horri aurre eginez.



1.3. irudia. Likido mailaren kontrolaren eskema alternatiboak



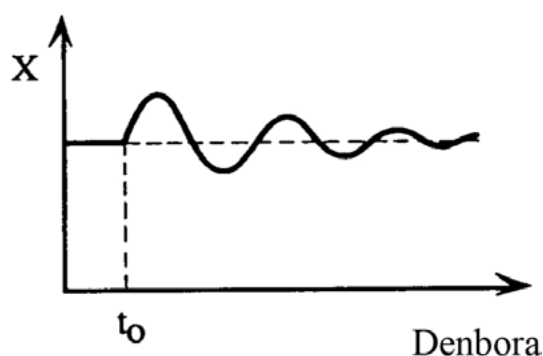
1.4. irudia. Tenperaturaren «feedforward» kontrola



Kimikagintzan, perturbazioek prozesuaren portaeran duten inpaktua ezabatzea da kontrol-sistemen beharraren arrazoi nagusia.

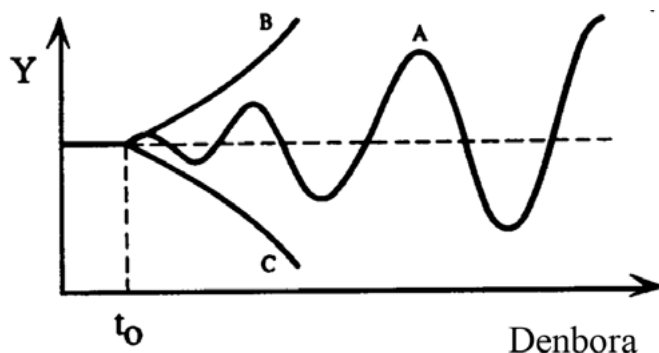
### 1.3. Prozesu baten egonkortasuna ziurtatzea

Har dezagun aintzat  $x$  aldagaiaren portaera 1.5. irudian.  $t_0$  denboran  $x$ -ren balio konstantea kanpoko faktore batek asaldaturik da, baina, denbora aurrera doan ahala,  $x$ -en balioa bere hasierako baliora itzultzen da eta han mantentzen da.  $x$  prozesu-aldagai bat bada, temperatura bat adibidez, prozesua egonkorra dela diogu eta ez du inolako kanpoko parte-hartzerik behar bere egonkortasunerako.



1.5. irudia. Sistema egonkor baten erantzuna

Aitzitik, 1.6. irudiko  $y$  aldagaia ez da bere hasierako baliora itzultzen asaldura jasan ondoren. Prozesuek joera horri jarraitzen dioten aldagaiak badituzte, ez-egonkorak deitzen dira (A, B eta C kurbak) eta kanpoko kontrol bat behar dute egonkortzeko. Hidrokarburo baten leherketa eta bikiletan ibiltzea dira prozesu ez-egonkorren adibideak.

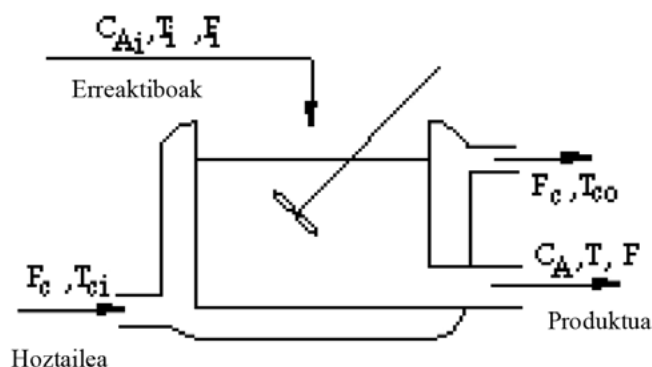


1.6. irudia. Sistema ez-egonkorren erantzunak

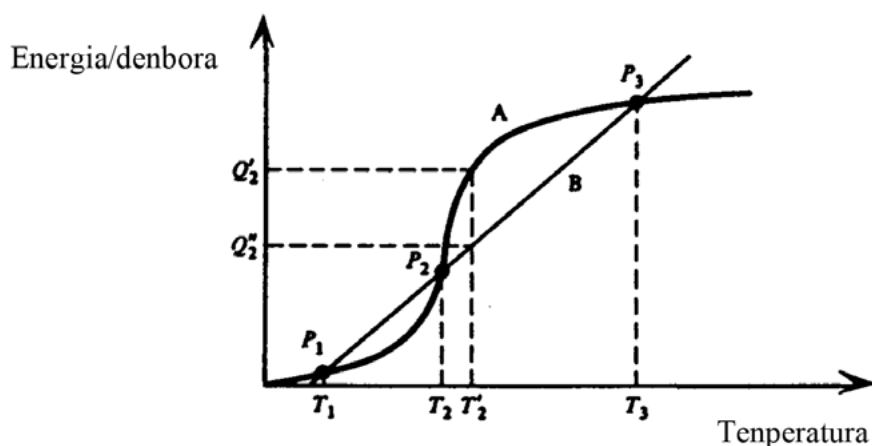
### 1.2. Adibidea

Har dezagun aintzat nahaste perfektuzko tanga jarraituko erreaktore bat (CSTR), non  $A \rightarrow B$  erreakzio exotermiko itzulezina gertatzen den. Erreakzio beroa erreaktorearen inguruko atorra ba-

tean zehar jario den errefrigeratzaile baten bidez kentzen da (1.7. irudia). Erreakzio exotermiko batek askatzen duen bero kantitatea deskribatzen duen kurba erreaktoreko tenperaturaren funtzio sigmoidal bat da (A kurba 1.8. irudian). Beste aldetik, jariakin errefrigeratzaileak kentzen duen beroa tenperaturaren funtzio lineala da (B lerroa irudi horretan). Horregatik, egoera estazionarioan sortutako beroak kendutako beroaren kantitate bera izan behar du. Horrek esan nahi du A eta B kurben intersekzioan hiru egoera estazionario daudela,  $P_1, P_2, P_3$ .

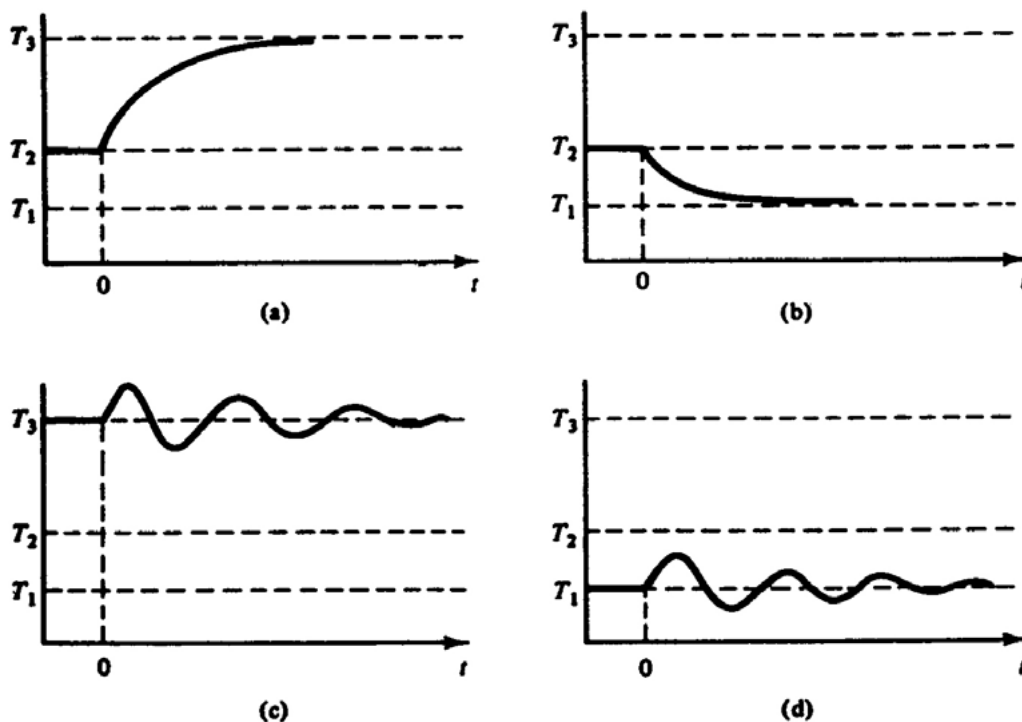


1.7. irudia. CSTR hozte-atorrarekin



1.8. irudia. CSTR baten hiru egoera estazionarioak

$P_1$  eta  $P_3$  egoera estazionario egonkorak deitzen dira;  $P_2$  aldiz, ezegonkorra da. Egonkortasun kontzeptua ulertzeko, azter dezagun  $P_2$  puntua. Demagun  $T_2$  tenperaturan eta tenperatura horri dagokion  $C_{A2}$  kontzentrazioan lan eginez has gaitzkeela. Demagun elikaduraren tenperatura ( $T_i$ ) handitu egiten dela. Horrek erreakzio-nahastearen tenperaturaren handitzea ekarriko du,  $T_2'$ , adibidez.  $T_2'$  tenperatura horretan erreakzioak askatutako beroa ( $Q_2'$ ) jariakin errefrigeratzaileak kentzen duen beroa ( $Q_2''$ ) baino handiagoa da, eta horrek erreaktorearen tenperatura igotzea eragingo du, eta, beraz, erreakzio-abiadura handitzea. Erreakzio-abiadura handitzean askatutako bero kantitatea handitzen da, eta horrek, era berean, tenperatura handitzen du, eta hala, etengabe. Hau da,  $T_1$ -ren handitze batek  $P_2$  egoera estazionarioetik urrun darama erreaktorea, eta tenperaturak  $P_3$  egoera estazionarioa lortuko du (1.9.a irudia). Gauza bera gertatzen da  $T_1$  txikitzen bada; kasu horretan,  $P_2$  puntutik  $P_1$  puntura pasatuko da (1.9.b irudia). Alderantziz,  $P_1$  edo  $P_3$  puntuetan bagaude, eta erreaktorea egiten ari den operazioa perturbatzen bada, hasierako puntura itzuliko da berez (1.9.c eta d irudia).



**1.9. irudia.** CSTR baten erantzun dinamikoa:

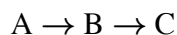
a)-k eta b)-k egiten ari den operazioaren erdiko puntu estazionarioaren ez-egonkortasuna erakusten dute, eta c) eta d)-k, berriz, beste bi puntuen egonkortasuna

#### 1.4. Prozesu kimiko baten funtzionamenduaren optimizazioa

Egin beharreko lanari dagokionez, bi helburu garrantzitsuenak segurtasuna eta produkzio espezifikazioak betetzea dira. Horiek lortuta, instalazioaren lana errentagarriagoa nola egin da hurrengo pausoa. Instalazioaren lanean eragiten duten baldintzek ez dirautela konstante kontuan izanik, lan-baldintzak alda daitezke (emariak, presioak, tenperaturak, kontzentrazioak) helburu ekonomikoa maximizatzeko. Eginkizun hori instalazioko kontrolagailuek eta horiek erabiltzen dituzten langileek egiten dute. Ikus dezagun errektore ez-jarraitu bat non bi erreakzio endotermiko eta lehen mailakoak seriean gertatzen diren.

#### 1.3. Adibidea

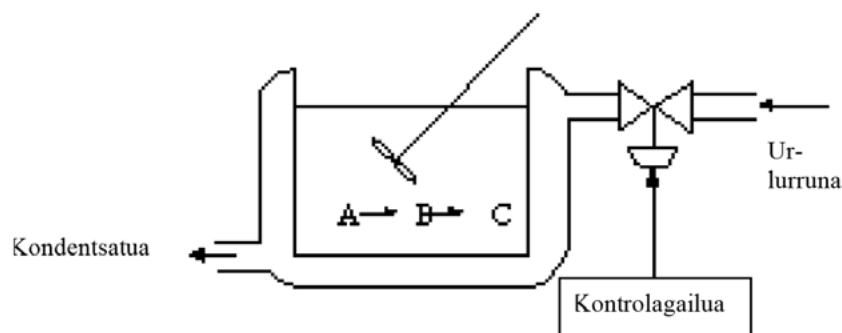
Demagun errektore ez-jarraitu bat non erreakzio hauek seriean gertatzen diren:



Bi erreakzioak endotermikoak dira eta lehen mailakoak. Erreakzioetarako beharrezko beroa errektorearen atortatik doan ur-lurrunezko emari batek ekartzen du (1.10. irudia). Nahi den produktua B da, eta C, nahi ez den hondakina. Egiten ari garen lanaren helburu-funtzio ekonomikoa, etekina ( $\Phi$ ), maximizatzea da  $t_R$  denbora-tarte batean, hau da:

$$\max \Phi = \int_0^{t_R} ([B \text{ produktuaren salmentak}] - \text{ur-lurrunaren kostua}) dt - A\text{-ren kostua}$$

non  $t_R$  erreakzio denbora den.

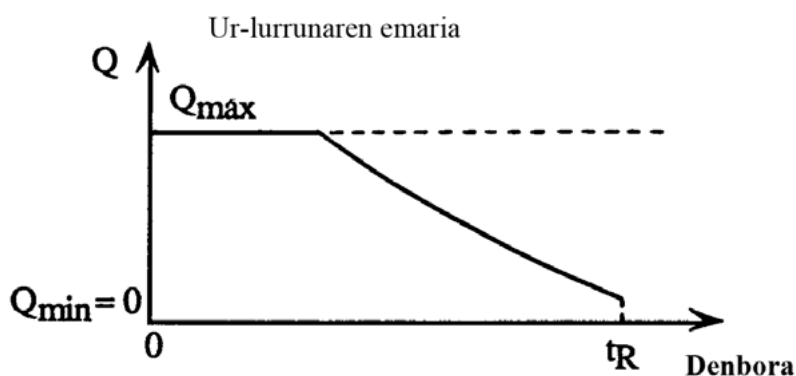


**1.10. irudia.** Erreaktore ez-jarraitua seriean gertatzen diren bi erreakzioekin

Etekin maximizatzeko era askean mugi daitekeen aldagai bakarra ur-lurrunaren emaria ( $Q$ ) da. Emari hori denboran zehar alda daiteke eta erreaktoreko temperaturari eragingo dio, eta horrek, berriz, nahi den eta nahi ez den erreakzio abiadurari. Galdera da nola aldatu behar den  $Q(t)$  denborarekin etekinak maximizatzeko. Azter ditzagun zenbait aukera:

1.  $Q(t)$ -ren balioa balio altuen gisa finkatzen bada erreakzio-denbora osoan zehar, erreakzio-tenperatura ahal den altuena izango da. Hasieran,  $C_A$  handia denean, B-ren produkzio handia egongo da, baina ur-lurrunaren truke gehiago ordaindu beharko da. Denbora aurrera doan heinean eta B-ren kontzentrazioa handituz doan heinean, C-ren produkzioa ere handitzen da. Horregatik, erreakzio-denboraren bukaeran, tenperatura jaitsi egin behar da, ur-lurrunaren emari txikiagoa behar izanik.
2.  $Q(t)$ -ren balioa posible den balio txikienean finkatzen bada erreakzio-denbora osoan zehar, ez da ezer ordaindu behar izango ur-lurrunaren truke, baina ez dugu B-ren produkziarik izango.

Muturreko bi kasu horietatik ondoriozta dezakegu  $Q(t)$ -ren balioa bere balio maximo eta minimoaren artean aldatu beharko dela erreakzio-denboran zehar. Hori egitea ez da eginkizun erraza eta lehen planteatutako problemaren soluzioa eskatzen du. 1.11 irudian, ur-lurrun emariaren joera erakusten da etekina optimatzeko. Horregatik, kontrol-sistema bat behar da: a) ur-lurrunaren emari optimoa une oro kalkulatzeko eta b) emari hori lortu ahal izateko balbula doitzeko.



**1.11. irudia.** Ur-lurrunaren emariaren perfil optimoa

### 1.5. Prozesu kimiko baten aldagaien sailkapena

Prozesu kimiko batekin loturiko aldagaiak (emariak, tenperaturak, presioak, kontzentrazioak, etab.) bi taldetan banatzen dira:

1. Sarrerakoak: prozesu kimikoan inguruaren eragina erakusten duten aldagaiak.
2. Irteerakoak: prozesuaren eragina inguruan erakusten duten aldagaiak.

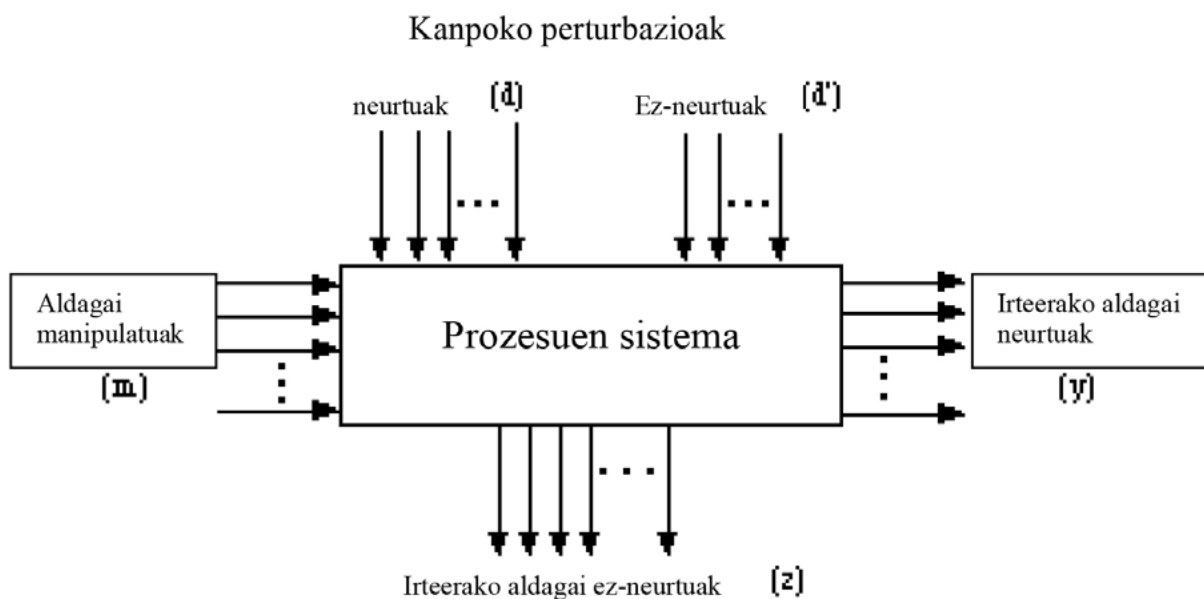
Sarrerako aldagaiak honako kategoria hauetan sailka daitezke:

1. Manipulatuak (edo doigarriak): beren balioak langileen edo kontrol-mekanismoen bidez doitu badaitezke.
2. Perturbazioak: beren balioak ez badira langile edo kontrol-sistema baten manipulazioaren ondorioa.

Irteerako aldagaiak honako kategoria hauetan sailka daitezke:

1. Irteerako aldagai neurgarriak: beren balioak neurketa zuzenen bidez ezagutzen badira.
2. Irteerako aldagai ez-neurgarriak: ez badira edo ezin badira zuzenean neurtu.

Neurtzeko aukeraren arabera, perturbazioak bi kategoriatan sailkatzen dira: neurgarriak eta ez-neurgarriak. 1.12 irudiak prozesu kimiko batean egon daitezkeen aldagai mota guztiak laburbiltzen ditu.



**1.12. irudia.** Prozesu kimiko baten sarrerako eta irteerako aldagaiak

## 1.6. Kontrol-sistema baten diseinu-elementuak

### *Kontrolaren helburuak definitu*

Edozein kontrol-konfigurazioen elementu garrantzitsuena kontrolatu nahi den prozesua bera da.

Zein helburu lortu nahi kontrol-sistema batekin egiten ari garen lanean?

Galdera horren erantzunak kontrol-helburuak determinatzen ditu: helburu hauek izan daitezke:

- Prozesuaren egonkortasuna ziurtatu, edo
- Kanpoko perturbazioen eragina ezabatu, edo
- Instalazio baten etekin ekonomikoa optimizatu, edo
- Aurrekoen konbinazio bat.

Hasieran, kontrol-helburuak era kualitatiboan definitzen dira; ondoren, kuantifikatuz doaz, normalean irteerako aldagaien arabera.

### *Neurtu behar dena aukeratu*

Kontrolaren helburua edozein izanda ere, beharrezkoa da nolabait prozesu kimikoaren jarraipena egitea. Horretarako, prozesuaren zenbait aldagairen balioak (tenperaturak, presioak, kontzentrazioak, emariak, etab.) neurtu behar dira. Orduan, bigarren galdera sortzen da:

Zer aldagai neurtu behar ditugu instalazioaren funtzionamenduari jarraipena egiteko?

Begi-bistakoa da gure kontrol-helburuak adierazten dituzten aldagaiei zuzenean jarraitu beharko geniekeela, eta hori da egiten dena ahal izanez gero. Horrelako neurketak lehen mailako neurketak deitzen dira.

Batzuetan, gure kontrol-helburuak ez dira aldagai neurgarriak, hau da, irteerako aldagai ez-neurgarrien kategorian daude. Horrelako kasuetan erraz neur daitezkeen beste aldagai batzuk neurtu behar dira. Neurketa horiek bigarren mailako neurketak deitzen dira. Orduan, erlazio matematikoak garatuko ditugu irteerako aldagai ez-neurgarrien eta bigarren mailako aldagaien artean, hau da:

$$\text{Irteerako aldagai ez-neurgarria} = f(\text{bigarren mailako neurketak})$$

eta, horri esker, irteerako aldagai ez-neurgarrien balioak determinatu ahal izango ditugu.

Irteerako aldagai neurgarrien eta ez-neurgarrien arteko erlazio matematikoak gogoeta enpiriko, experimental edo teorikoetatik abiatuta lortzen dira.

### *1.4. Adibidea*

Demagun destilazio-zutabe simple bat, non pentanoz eta hexanoz osatutako nahaste binario bat pentanoaren (destilatua) eta hexanoaren (destilazio hondarra) bi produktu-korrontetan banatu

nahi den. Kontrol-helburua destilazio-produkzioa %95eko pentano ehunekoan mantentzea da, elikaduraren konposizioan aldaketak izan arren.

Lehenengo burutazioa konposizioaren analizagailu bat erabiltzea litzateke, pentanoaren kontzentrazioa destilatuan neurtzeko eta informazio hori atzeraelikatu errefluxu-erlazioa aldatzeko eta, horrela, %95eko pentano-kontzentrazioa destilatuan mantendu ahal izateko. 1.13.a irudian, kontrol horren eskema erakusten da. Konposizioaren analizagailua elikadura-korrontean erabiltzea litzateke sistema alternatibo bat. Orduan, «feedforward» sistema batekin, errefluxua aldatu ahal izango litzateke helburua lortzeko. Kontrolaren eskema hori 1.13.b irudian erakusten da. Aipatutako bi kontrol-sistemak konposizio-analizagailuaren menpekoak dira. Gerta daiteke sistema hori oso garestia edo oso fidagarria ez izatea ingurune industrial batean (maiz honda daiteke edo ziurtasun gutxirekin neur dezake). Kasu horietan, zenbait plateretan zutabeen zehar era fidagarrian termopare batzuk erabiliz neur daiteke likidoaren tenperatura. Plater horietan, materia eta energia-balantzeak erabiliz eta likido-lurrun oreka-erlazioak erabiliz, erlazio matematiko batzuk gara daitezke, eta horiek destilatuaren konposizioa ematen dute neurtutako tenperatura horietatik abiatuta. 1.13.c irudiak eskema hori erakusten du: tenperaturaren neurketak (neurketa sekundarioak) erabiltzen ditu pentanoaren konposizioa destilazio-korrontean estimatzeko edo ondorioztatzeko.

Prozesu kimiko baten portaera jarraitzeko egin dezakegun hirugarren neurketa mota kanpoko perturbazioak zuzenean neurtzean datza. Perturbazioen neurketa hauek prozesuan sartu aurretik oso abantailatsua izan daiteke, horrela aldeztu aurretik prozesuaren portaera ezagutu eta kontrol-ekintza egokia egin ahal izango baitugu nahi ez diren ondorioak ekiditeko.

### *Aldagai manipulatuak aukeratzea*

Behin kontrol-helburuak espezifikatuta eta neurketak identifikatuta, honako galdera honek prozesuan aldaketa bat egiteko modua adierazten du:

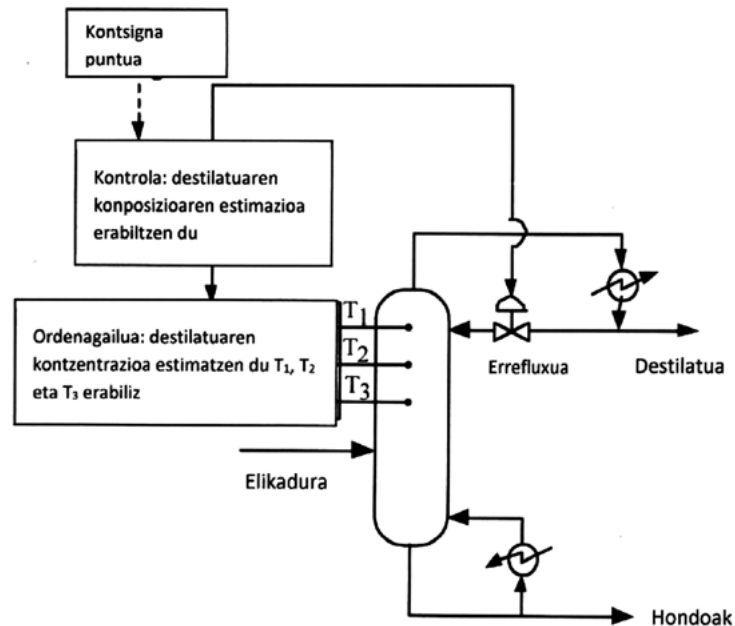
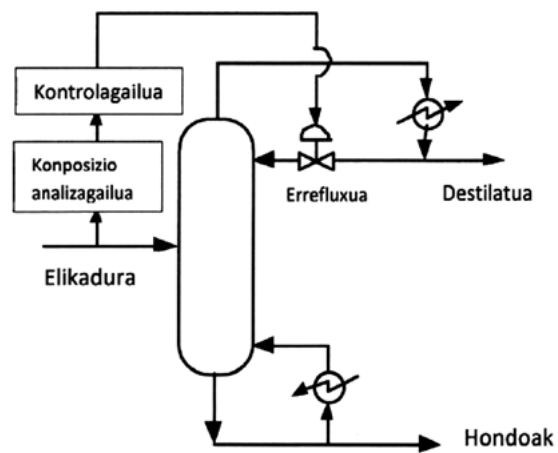
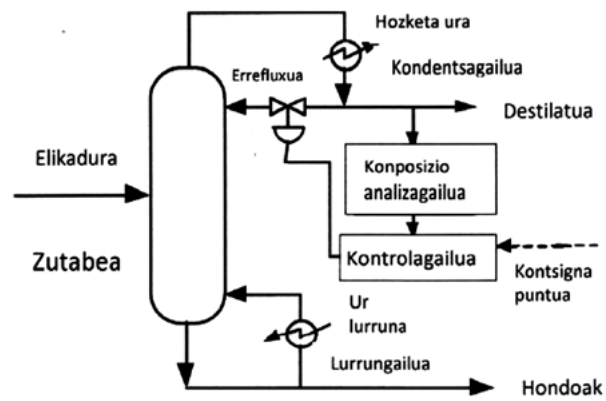
Zer aldagai manipulatu erabiliko dira prozesu kimiko bat kontrolatzeko?

Normalean, prozesu baten sarrerako aldagai kopuru bat eskuragarri dago, eta horiek era askean alda daitezke. Oso garrantzitsua da manipulatzeko zein aldagai erabiliko ditugun ongi aukeratzea, aukeraketak kontrol-ekintzaren kalitatean eragingo baitu.

### *Kontrol-konfigurazioa aukeratzea*

Ebatzi behar den azken arazoa konfigurazio-kontrola aukeratzea da. Konfigurazio bat definitu aurretik, ikus ditzagun konfigurazio ezberdinak dituzten kontrol-sistema batzuk.

1.3.a eta b irudietako kontrol-sistemek atzeraelikadura duten bi kontrol-konfigurazio osatzen dituzte. Horrela, informazio bera (likido mailaren neurketa) zenbait aldagai manipulaturara bidaltzen da ( $F$  eta  $F_c$ ). Era berean, atzeraelikadura duten 1.2 irudiko kontrol-sistemak eta 1.4 irudiko feedforward motakoak kontrol-konfigurazioen mota ezberdinak ekartzen dituzte. Kasu horietan, aldagai manipulatu bera erabiltzen da (ur-lurrunaren emaria  $F_{st}$ ), baina neurketa ezberdinak. 1.2 irudian, likidoaren tangako tenperatura erabiltzen da, eta, 1.4 irudian, sarrerako tenperatura neurtzen dugu.



1.13. irudia. Destilazio zutabe baten destilatuaren konposizioaren kontrolerako hiru sistema:  
 a) atzeraelikadura edo berrelikadura; b) «feedforward»; c) inferentziala



Adibide horiekin ikusi dugu bi kontrol-konfigurazio zertan bereiz daitezkeen:

1. Manipulatutako aldagai berari bidaltzen zaion neurtutako informazioan, edo
2. Informazioa jasotzen duen aldagai manipulatuak

Kontrol-konfigurazio bat honela defini daiteke:

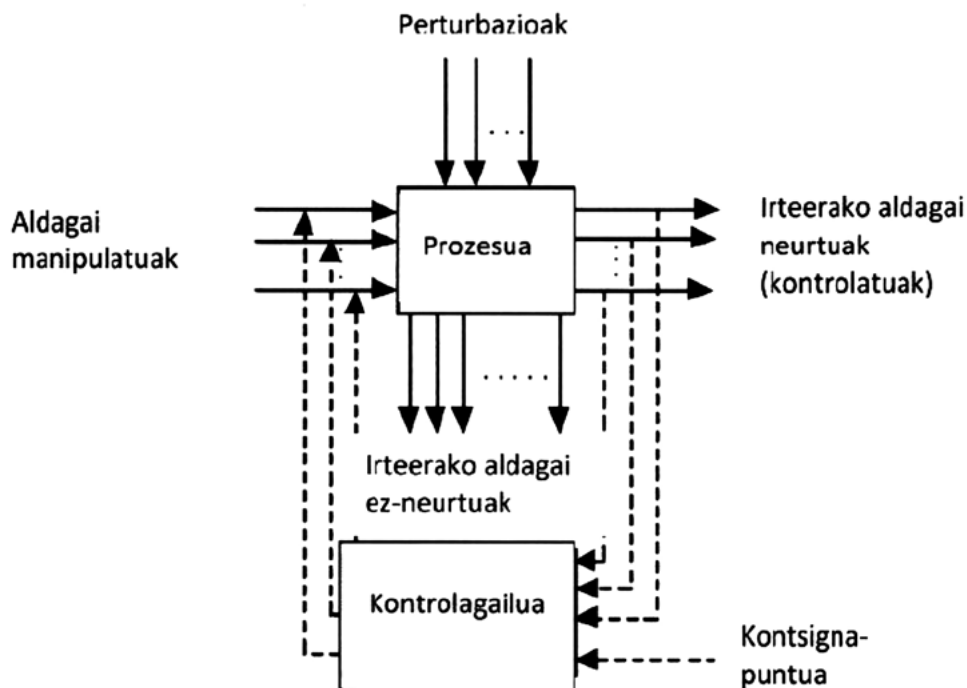
«eskuragarri dauden neurketak eskuragarri dauden aldagai manipulatuak konektatzeko erabiltzen den informazioaren egitura da kontrol-konfigurazio bat.»

Aurreko adibideak ikusita, argi geratzen da kontrol-konfigurazio ezberdinak izan ditzakegula prozesu kimiko bererako, eta horrek honako galdera hau sortzen du:

Zein da kontrol-konfigurazio onena prozesu kimiko baterako?

Galdera horren erantzuna oso garrantzitsua da kontrolaren kaliterako. Prozesu kimiko batean dauden aldagai kontrolatu eta aldagai manipulatuaren kopuruaren arabera, SISO (Single Input, Single Output) edo MIMO (Multiple Input, Multiple Output) konfigurazioak bereiz daitezke.

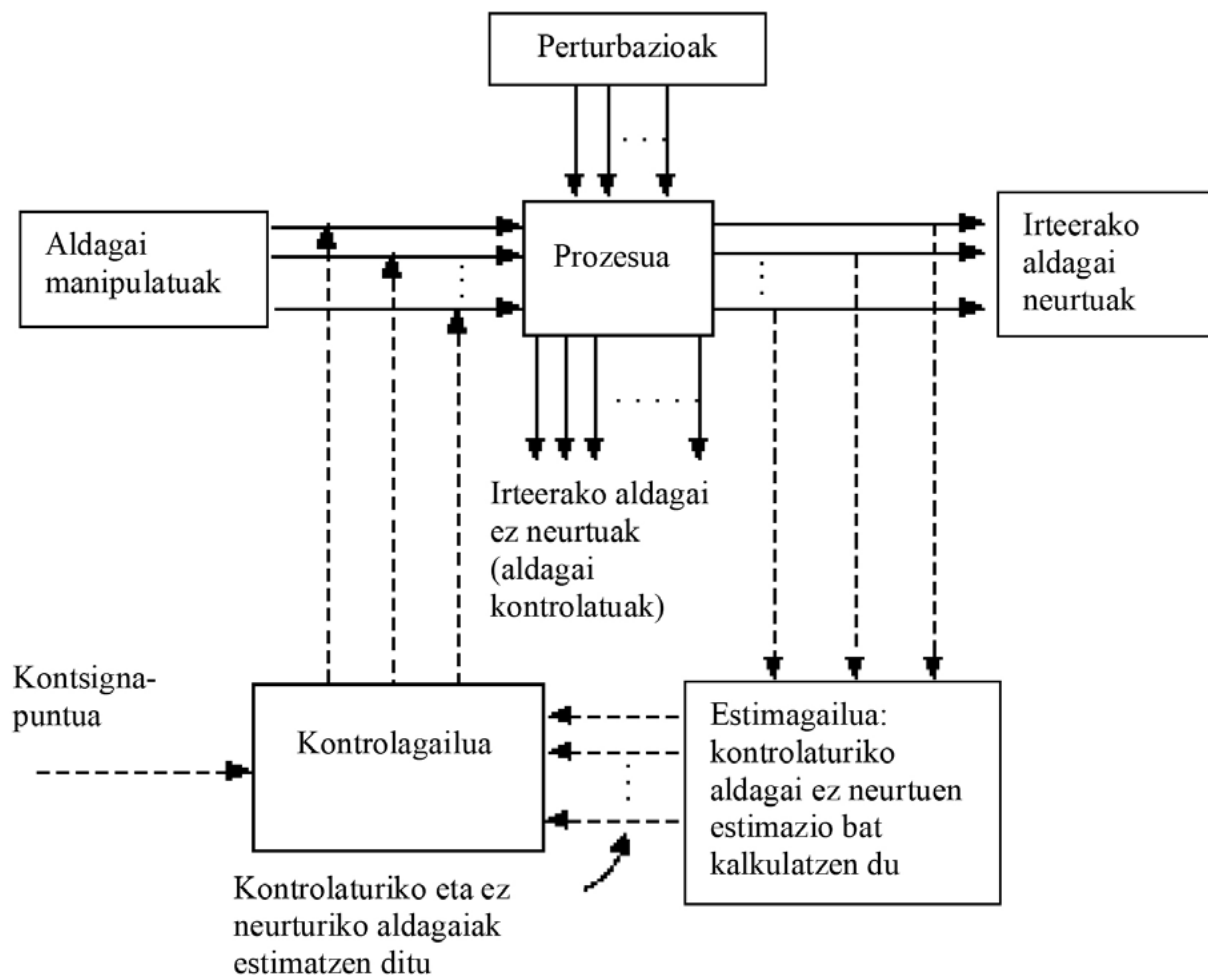
Industria kimikoan, prozesu gehienak MIMO dira. Baina, SISO sistemen diseinua errazagoa denez, ikasturtean zehar, sistema horiekin lan egingo dugu ia beti.



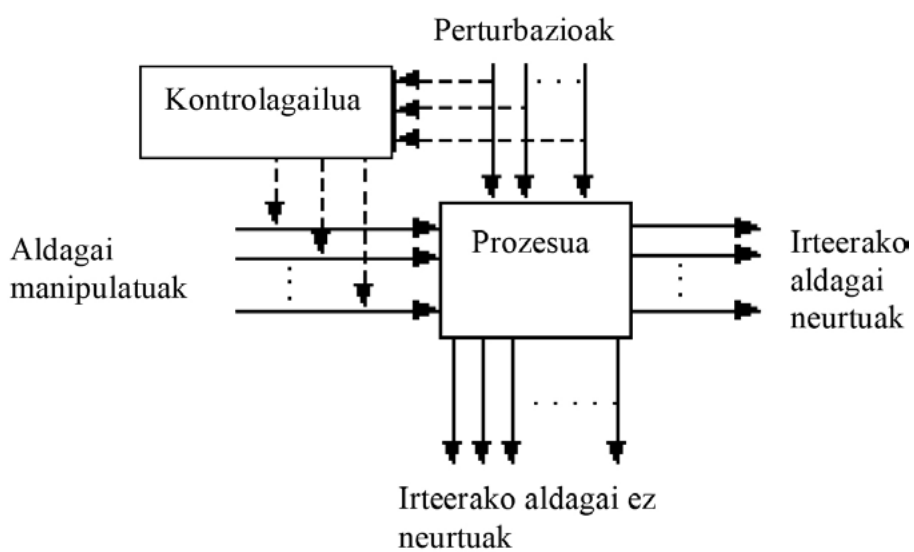
**1.14. irudia.** Atzeraelikadura duen kontrol-konfigurazio baten egitura orokorra

3 kontrol-konfigurazio mota orokor defini daitezke:

1. Atzeraelikaduradun kontrola: kasu horretan, aldagai kontrolatuen neurketa zuzenak erabiltzen dira aldagai manipulatuaren balioak doitzeko (1.14 irudia). Aldagai kontrolatua nahi den balio batean mantentzea da helburua (kontsigna-puntua).



1.15. irudia. Kontrol inferentziazko konfigurazio baten egitura orokorra



1.16. irudia. «Feedforward» kontrol-konfigurazio baten egitura orokorra

2. Inferentziazko kontrola: kasu horretan, neurketa sekundarioak erabiltzen dira (aldagai kontrolatuak ezin direlako neurtu) aldagai manipulatuaren balioak doitzeko (1.15 irudia). Aldagai kontrolatuak (neurtu gabe) aurrez finkatutako balio batzuetan mantentzea da helburua.
3. «Feedforward» kontrola: kasu horretan, perturbazioen neurketa zuzenak erabiltzen dira aldagai manipulatuaren balioak doitzeko (1.16 irudia). Aldagai kontrolatuaren balioak balio jakin batzuetan mantentzea da helburua.

### *Kontrolagailuaren diseinua*

Neurtutako aldagaien informazioa jaso eta aldagai manipulatuaren balioak doitzeko kontrol-ekintza egokia egiten duen elementu aktiboa da kontrolagailua kontrol-konfigurazio guztietan. Kontrolagailua diseinatzeko, honako galdera honi erantzun behar zaio:

Nola erabiltzen da neurtutako aldagaien informazioa aldagai manipulatuaren balioak doitzeko?

Galdera horren erantzuna kontrolaren legea deritzona da, eta kontrolagailuak automatikoki betetzen du.

### *1.5. Adibidea*

Itzul gaitezen tanga bateko likido baten  $T$  temperatura kontrolatzeko kasura (1.1. irudia)  $T_i$  sarrerako temperatura aldatzen denean. Demagun sarrerako eta irteerako emariak berdinak direla. Neurtutako aldagaia tangako temperatura izango da, eta aldagai manipulatuak, gehitutako bero kantitatea ( $Q$ ), ur-lurrunak emana. Galdera hau da: nola aldatu behar da  $Q$ ,  $T$  temperatura konstante mantentzeko  $T_i$  aldatzen denean?

Demagun sistema funtzionatzen ari dela zenbait denboran zehar eta likidoaren temperatura konstantea dela  $T_s$  balioan; bitartean, likidoaren bolumena konstantea da,  $V$  balioan. Orduan esaten dugu sistema *egoera estazionarioan* funtzionatzen egon dela. Baldintza horietan, energia-balantzea tangen honako ekuazio honek emana dator:

$$0 = F\rho C_p(T_{i,s} - T_s) + Q_s \quad (1.2)$$

non  $F$ ,  $\rho$  eta  $C_p$  sarrerako emaria (edo irteerakoa), likidoaren dentsitatea eta likidoaren bero espezifikoak diren, hurrenez-hurren.  $T_s$ ,  $T_{i,s}$  eta  $Q_s$  dagozkien balioak dira egoera estazionarioan. Demagun  $T_i$  bat-batean handitzen dela.  $Q$ -n eraginik sortzen ez bada,  $T$  temperatura handitzen hasiko da denborarekin.  $T$ -ren aldaketa denborarekin tankean aplikatzen den energia-balantze trantsitorioak (egoera ez-egonkorrean) emango du:

$$V\rho C_p \frac{dT}{dt} = F\rho C_p(T_i - T) + Q \quad (1.3)$$

(1.3) eta (1.2) ekuazioak kenduz

$$V\rho C_p \frac{d(T - T_s)}{dt} = F\rho C_p[(T_i - T_{i,s}) - (T - T_s)] + (Q - Q_s) \quad (1.4)$$

$T_s =$  konstantea denez,  $d(T - T_s)/dt = dT/dt$ .

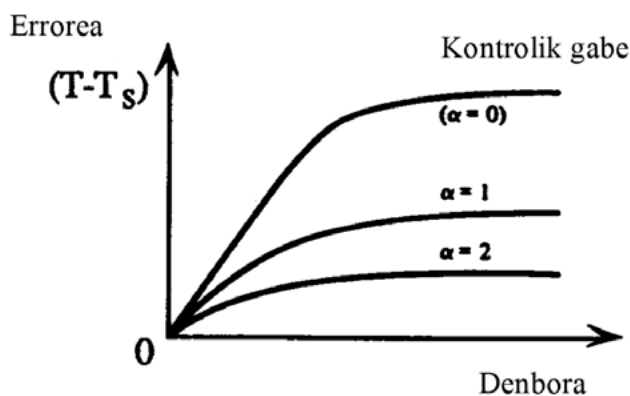
$\varepsilon = T - T_s$  diferentziak adierazten du likidoaren temperaturaren desbideratzea edo errorea zein den lortu nahi den  $T_s$  balioarekiko. Helburua errore hori zero izatea da  $Q$ -ren balioa era egokian manipulatzuz. Kontrol-lege sinpleena  $Q$ ,  $T - T_s$  errorearekin proportzionalki aldaraztea da.

$$Q = -\alpha(T - T_s) + Q_s \quad (1.5)$$

Lege horri kontrol proportzional deitzen zaio eta  $\alpha$  parametroari irabazkin proportzional deritzo. (1.5) ekuazioa (1.4) ekuazioan ordezkatzuz:

$$V\rho C_p \frac{d(T - T_s)}{dt} = F\rho C_p [(T_i - T_{i,s}) - (T - T_s)] - \alpha(T - T_s) \quad (1.6)$$

1.17 irudian, ekuazio horren soluzioa erakusten da  $\alpha$ -ren balio ezberdinetarako. Ikusten da emaitzetako bat ere ez dela egokia, kasu guztietan  $T - T_s \neq 0$  baita. Beraz, ondoriozta daiteke lege proportzionala ez dela egokia.



**1.17. irudia.** Temperaturaren erantzuna kontrol proportzionalarekin

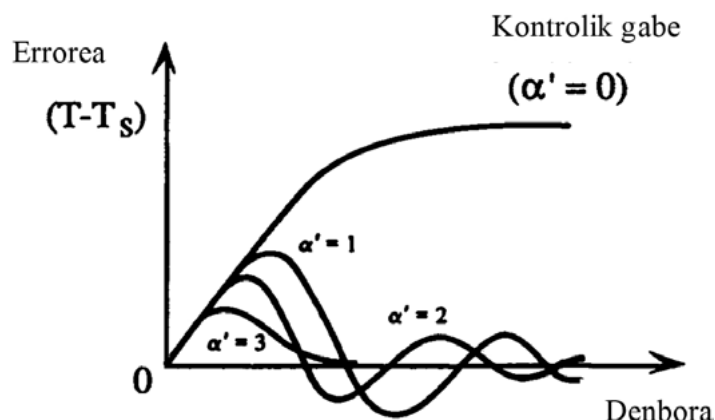
Kontrolaren kalitatea hobetu daiteke kontrol integral izeneko beste kontrol-lege bat erabiltzen badugu. Kasu horretan,  $Q$  proportzionala da  $(T - T_s)$ -ren integralarekiko denboran zehar.

$$Q = -\alpha' \int_0^t (T - T_s) dt + Q_s \quad (1.7)$$

$Q$ -ren adierazpen hori (1.4) ekuazioan ordezkatzuz:

$$V\rho C_p \frac{d(T - T_s)}{dt} = F\rho C_p [(T_i - T_s) - (T - T_s)] - \alpha' \int_0^t (T - T_s) dt \quad (1.8)$$

1.18 irudian (1.8) ekuazioaren soluzioa erakusten da  $\alpha'$ -ren balio ezberdinetarako. Kontrol integrala onargarria da, errorea beti zerora eramaten duelako.  $\alpha'$ -ren balioen arabera, erroreak denbora gehiago edo gutxiago behar du zerora iristeko, gehiago edo gutxiago oszilatzen du, etab. Alegia, kontrolaren kalitatea  $\alpha'$ -ren balioaren menpekoa da.



1.18. irudia. Temperaturaren erantzuna kontrol integralarekin

Akzio proportzionala integralarekin konbinatuz, beste kontrol-akzio bat dugu, *kontrol proporzionala-integrala* izenekoa. Lege horren arabera,  $Q$ -ren balioa honako ekuazio honek emana dator:

$$Q = -\alpha(T - T_s) - \alpha' \int_0^t (T - T_s) dt + Q_s \quad (1.9)$$

### 1.7. Instalazio kimiko baten kontrolaren alderdiak

Orain arte ikusi diren adibideak unitate bakarren kontrolarekin erlazionatuta zeuden, besteak beste, nahaste perfektuzko erreaktoreak, depositu baten beroketa eta erreaktore ez-jarraitua, etab. Argitu behar da prozesu kimiko bat ez dela unitate bakar batez osatua egoten; aitzitik, prozesu bat unitate askoz osatuta egoten da (erreaktoreak, banatzaileak, bero-trukagailuak, tangak, ponpak, konpresoreak, etab.) eta elkarren artean lotuta egoten dira material- eta energia-fluxuaren bidez. Kontrol-sistema bat diseinatzea ez da erraza eta esperientzia eta ingenieritza kimikoko ezagutza onak eskatzen ditu.

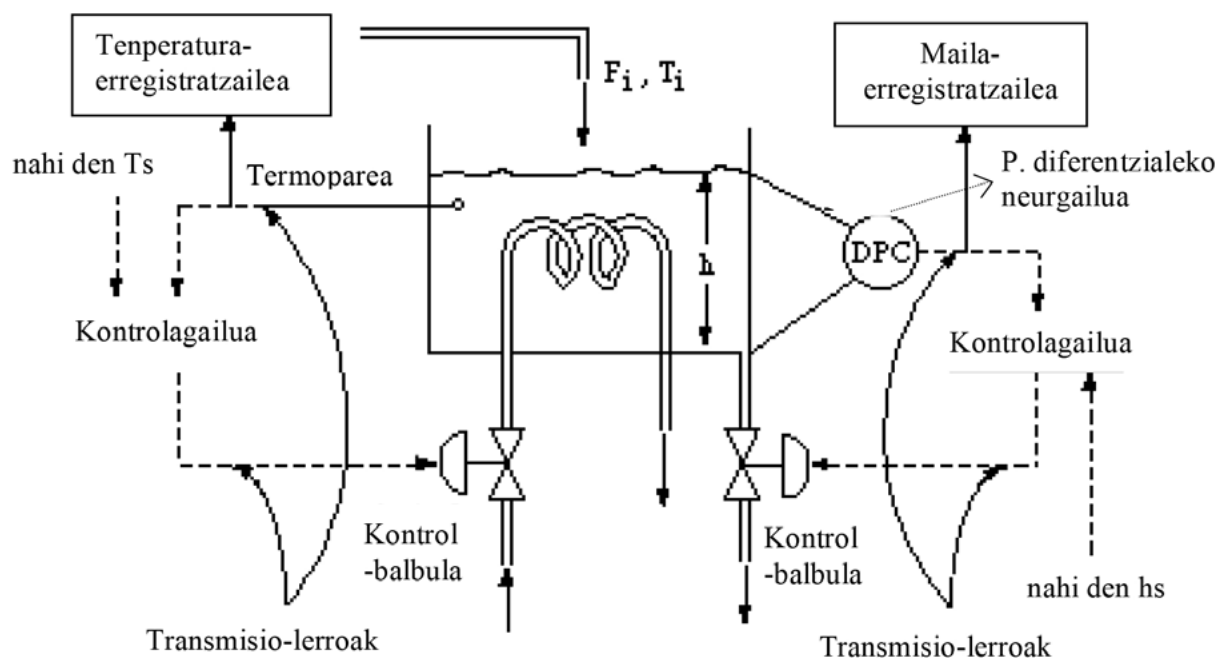
### 1.8. Kontrol-sistema baten elementuak

Kontrolaren konfigurazio guztietan, hainbat elementu bereiz daitezke:

- **prozesu kimikoa:** ekipoa eta egin beharreko lan fisiko eta/edo kimikoak adierazten ditu.
- **sentsoreak edo neurgailuak:** perturbazioak, aldagai kontrolatuak edo irteerako aldagai sekundarioak neurtzeko erabiltzen dira, eta prozesuan gertatzen denari buruzko informazio-iturri garrantzitsuen dira. Adibideak: termopareak edo erresistentziazko termometroak tenperaturak neurtzeko; venturi neurgailuak emaria neurtzeko; gas-kromatografoak, korrante baten konposizioa neurtzeko, etab. Industriaren arloan, erresistenteak eta fidagarriak izan behar dute.
- **transduktoreak:** elementu asko ezin dira zuzenean kontrolean erabili, beren neurketa era errazean transmititu ahal izateko kantitate fisiko bihurtu arte (adibidez, korrante bat, tentsio bat, etab.). Transduktoreak horretarako erabiltzen dira.

- **transmisio-lerroak:** seinaleak neurketa-elementutik kontrolagailura eramateko erabiltzen dira. Antzina transmisio-lerroak pneumatikoak ziren, baina kontrolagailu analogiko elektronikoak agertu zirenetik eta bereziki ordenagailuak erabiltzen hasi zirenetik, transmisio-lerroek seinale elektrikoak daramatzate. Kasu horietan, transmisio-lerroek amplifikatzaileak izaten dituzte, seinalearen intentsitatea handitzeko. Adibidea: termopareak.
- **kontrolatzailea:** neurketa-elementuen informazioa jasotzen du eta kontrol-akzioa «erabakitzen» du. Kontrolagailu zaharrek lan errazak bakarrik egin zitzaizkion. Gaur egun, kontroleko ordenagailuak erabiltzen direnez, kontrol-lege oso konplexuak egin daitezke.
- **kontroleko azken elementua:** kontrolatzaileak hartutako erabakiak burutzen ditu. Adibidez, kontrolagailuak «erabakitzen» badu irteerako korrante baten emaria handitu behar dela, balbulak beteko du eginkizun hori. Kontroleko balbula kontroleko azken elementu ohikoena da, baina ez bakarra. Honako hauek dira kontroleko beste azken elementu batzuk: erreleak (dena-ezer ez kontrolerako), abiadura aldakorreko ponpak, abiadura aldakorreko konpresoreak, etab.
- **elementu erregistratzaileak:** prozesu kimiko baten portaera begi-bistaz erakusteko erabiltzen dira. Normalean, zuzenean neurtzen diren aldagaiak grabatzen dira. Instalazio kimiko baten kontrol-gelan, paperean tenperatura, emariak, presioak etab. erregistratzen dituzten zenbait erregistratzaile mota egoten dira. Gaur egun, ordenagailuen erabilerak aldagai horiek erregistratzea baimentzen du pantailetan ikusita.

1.19 irudiak tanga baten beroketa kontrolatzeko erabilitako elementu fisiko guztiak erakusten ditu.



1.19. irudia. Irabiatutako tanga berotzaile baten kontrol-elementuak atzeralikadurarekin

### 1.9. Ordenagailuen erabilera prozesuak kontrolatzeko

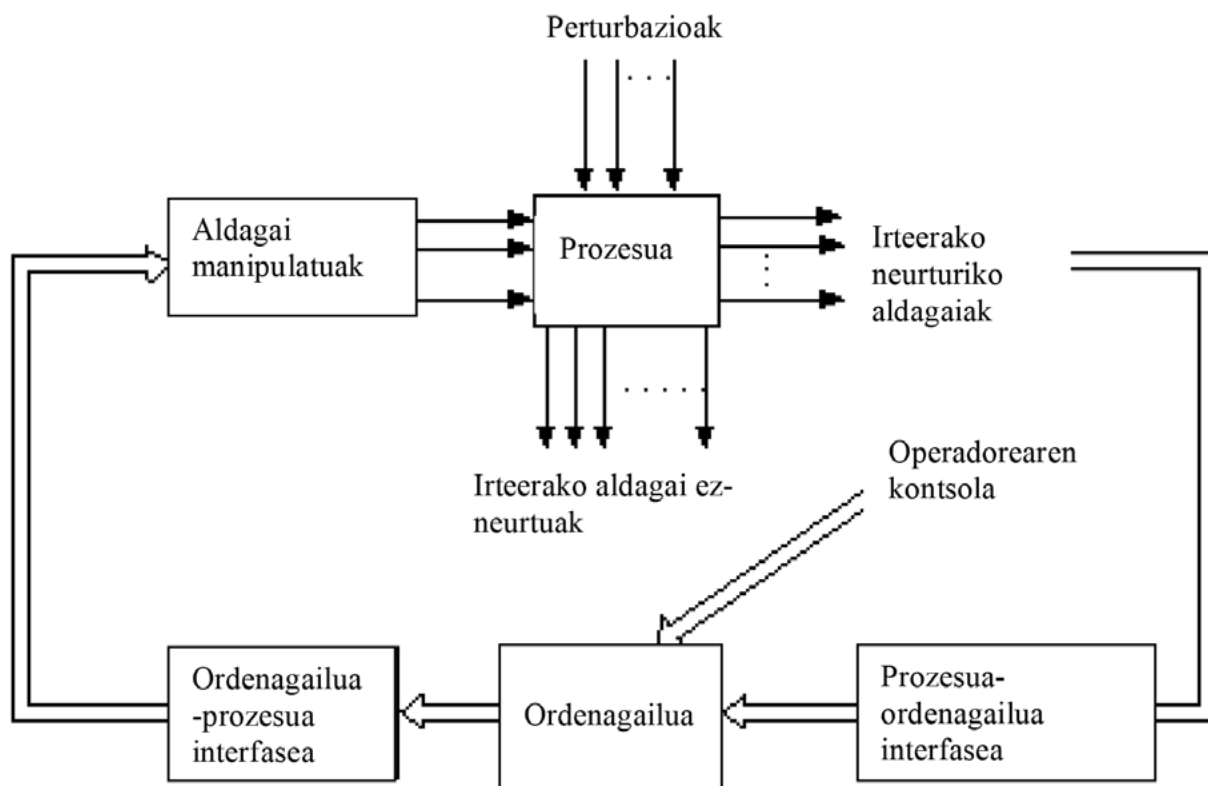
Azken 20 urteotan izan den garapen teknologikoak, teknologia horren prezio jaitsierarekin batera, sakonki eragin du instalazio kimikoen kontrolean, eta, hala, gaur egun, ordenagailua kontrol-sistema baten pieza nagusia da prozesu kimikoetarako.

Gaur egun, instalazio kimiko handiek eta ez hain handiek, kontrol digitala erabiltzen dute ordenagailuekin. Eraginak nabariak izan dira, hobeki kontrolatzea eta egin beharreko lanen kostuak txikitzea lortu baita.

Antzina, kontrolagailuek sor zituzketen kontrol-legeak oso sinpleak ziren. Ordenagailu digitaletan kontrol-legeak eratzeko mugagabeko ahalmena ekarri zuten.

Ordenagailuen bidezko kontrol motak:

- Kontrol digital zuzena (DDC): kontrolagailuak zuzenean jasotzen dituzten prozesuaren neurketak, eta, kontrol-legeetan oinarrituta (programatu direnak eta ordenagailuan daudenak), aldagai manipulatuak kalkulatu dituzte. 1.20 irudiak DDC kontrol horren ohiko konfigurazio bat erakusten du. Prozesua edozein unitate izan daiteke. Ordenagailuaren aurretik eta atzetik dauden bi interfaseak ordenagailuaren eta prozesuaren arteko komunikazioei bateragarritasuna emateko erabiltzen diren elementuak dira. Gaur egun, industria kimikoak kontrol mota hau erabiltzen du. DDC motako ohiko sistema batek 300 eta 400 tarteko kontrol-lotura edo kontrol-begizta izan ditzake etilenozko instalazio baterako.



1.20. irudia. DDC ohiko konfigurazioa





## 2. gaia

# Eredu matematikoen adibideak ingeniaritza kimikoko sistemetan

### 2.1. Sarrera

Honako hau da ingeniaritza kimikoko sistema baten eredu matematikoa garatzearen emaitza garrantzitsua: prozesua benetan zer den ulertzea. Eredu matematikoak ingeniaritza kimikoaren edozein fasetan izan daitezke baliagarriak, ikerketa eta garapenetik hasi eta instalazioko operazioraino, baita azterketa ekonomikoetan ere.

Kapitulu honetan, sistema deterministikoak bakarrik landuko ditugu, ekuazio diferentzial arrunt edo ekuazio diferentzial partzialen bitartez deskriba daitezkeenak. Ia beti, taldekatutako ereduak erabiliko ditugu (aldagai independente bakarrarekin, denbora) ekuazio diferentzial arrunt bidez deskribatuak.

Eredu matematikoetarako oinarriak oinarritzko lege fisikoak eta kimikoak dira, hala nola materiaren, energiaren eta mugimendu-kantitatearen kontserbazio-legeak.

Eredu baten garapenean, balizkoak diren suposizioak determinatzea da ingeniari kimikoak jokatzen duen paper garrantzitsua. Eredu batean, beti da beharrezkoa deskribapen zehatz baten eta soluzio onargarri baten artean konpromiso bat lortzea.

Eredu matematikoaren ekuazio guztiak idatzita, ideia ona izaten da, batez ere eredu konplexuen kasuan, aldagaien kopurua ekuazioen kopuru bera dela egiaztatzea. Halaber, egiaztatu behar da ekuazioak bat datozela unitateei dagokienez.

Eredu baten garapenean, parte garrantzitsu bat da errealitatea deskribatzen duela frogatzea.

## 2.2. Oinarrizko legeak

### 2.2.1. *Materia-balantzeak*

#### A. MATERIA-BALANTZE GLOBALA

Sistema dinamiko bati aplikaturiko materia-kontserbazioaren printzipioak honako hau dio:

$$\begin{array}{l} \text{Masa-fluxua} \\ \text{sistemara} \end{array} - \begin{array}{l} \text{sistematik irteten den} \\ \text{masa-fluxua} \end{array} = \begin{array}{l} \text{materia-aldaketaren} \\ \text{abiadura sisteman} \end{array}$$

Ohituta gaude esaten irteten dena dela egoera egonkorrean sartzen dena. Eskuineko terminoa, sistemaren barruan dagoen masaren deribatu partziala ( $\partial/\partial t$ ) edo deribatu arrunta ( $d/dt$ ),  $t$  aldagai independentearekiko izaten da.

#### B. OSAGAI BATEKIKO MATERIA-BALANTZEA

Masa ez bezala, konposatu kimikoak ez dira kontserbatzen. Erreakzio bat badago, konposatu baten mol kopurua handitu egingo da, produktu bat bada, edo txikitu egingo da, erreaktibo bat bada. Horregatik,  $j$ -garren konposatu baten jarraitutasun-ekuazioak honako hau dio:

$$\begin{array}{l} \text{Sistemara sartzen den} \\ \text{j-garren konposatuaren fluxu molarra} \end{array} - \begin{array}{l} \text{sistematik irteten den j-garren} \\ \text{konposatuaren fluxu molarra} \end{array} + \text{j-garren konposatuaren eraketa-abiadura} = \text{j-garren konposatuaren} \\ \text{aldaketa-abiadura sisteman}$$

Ekuazio horren unitateak  $j$ -garren konposatuaren molak dira denbora unitateko. Sarrerako eta irteerako fluxuak konbektiboak eta molekularrak izan daitezke. Sisteman dagoen konposatu bakoi-tzerako, ekuazio bat idatz daiteke. Hala ere, materia-balantze globala eta konposatueterako ekuazio kopurua ez dira independenteak. Normalean, KP-1 (konposatu kopurua  $-1$ ) ekuazio erabiltzen dira konposatuen balantzeetarako eta ekuazio bat materia-balantze globalerako.

### 2.2.2. *Energia-balantzea*

Termodinamikaren lehenengo legea energia-kontserbazioaren printzipioari buruzkoa da. Sistema ireki baten kasuan (non materia fluxua sistemara sartu eta irteten den), honela dio:

$$\begin{array}{l} \text{Barne-energia, e.zinetiko} \\ \text{eta e.potentzialaren fluxua} \\ \text{sistemara konbekzioz} \end{array} - \begin{array}{l} \text{sistematik irteten den} \\ \text{barne-energia,} \\ \text{e.zinetiko eta e.potentzialaren fluxua} \\ \text{konbekzioz edo difusioz} \end{array} + \begin{array}{l} \text{sistemari gehitutako beroa} \\ \text{kondukzioz, erradiazioz eta} \\ \text{erreakzioz} \end{array} - \begin{array}{l} \text{sistemak inguruan egindako lana} \end{array} = \begin{array}{l} \text{barne-energia, e.zinetiko eta e. potentzialaren} \\ \text{abiadura-aldaketa sisteman} \end{array}$$

## 2.2.3. Mugimendu-ekuazioak

Newton-en 2. legeak dio indarra masa bider azelerazioa dela  $M$  masa konstantea duen sistema baterako,

$$F = \frac{M \cdot a}{g_c}$$

non  $F$  indarra den;  $M$ , masa;  $a$ , azelerazioa, eta  $g_c$ , konbertsio konstantea unitate ingelesak erabiltzen direnean,  $32 \text{ lb}_m \text{ ft/lb}_f \text{ s}^2$ .

Hau da sistema baten mugimendu-ekuazioak idazten direnean erabiltzen den oinarritzko erlazioa. Era orokorrago batean, non masa denborarekin alda daitekeen:

$$\frac{1}{g_c} \frac{d(Mv_i)}{dt} = \sum_{j=1}^N F_{ji}$$

non  $v_i$  abiadura  $i$  norabidean den eta  $F_{ji}$ ,  $j$ . indarra  $i$  norabidean. Ekuazio horri mugimendu kantitatearen kontserbazioa deitzen zaio. Mundu errealean, 3 norabide daude,  $x$ ,  $y$  eta  $z$ , eta, beraz, 3 indar-balantze idatz daitezke sistema baterako.

*Adibidea*

Ikus dezagun ingeniarietza kimikoko ohiko adibide bat. Petrolioaren olioduktuak produktua bi punturen artean era ez-jarraituan, hau da, aldiro produktu bat garraiatzeko erabiltzen dira. Garraioaren artean kutsadura kentzeko, hoditerian guztiz egokitzen den larruzko baloi bat sartzen da. Gas inerte bat sartzen da; hark baloia bultzatzen du hoditerian geratzen den likidoa purgatzeko.

Hoditerian geratzen den likidoan indar-balantze bat idazteko, baloiak bultzatzen duen heinean, materialaren masa-aldaketa izan behar da kontuan. Demagun baloiak ez duela ez masarik ez frikziarik hoditerian dagoen likidoaren aldean. Likidoa konprimaezina da eta pistoi-fluxuan jariatzen da. Bere abiaduraren karratuarekiko eta likidoa duen hoditeriaren luzerarekiko proportzionala den frikzio-indarra eragiten du.

Frikzio-indarra =  $K_F (L - z) v^2$ ,  $L$ : hoditeriaren luzera,  $z$ : baloiak duen kokapena

Hoditeriaren zeharkako sekzioa  $A_p$  da. Hoditerian fluidoaren masa  $(L - z)A_p \rho$  da.

Baloia bultzatzen duen gas inertearen presioa konstantea da. Likidoa bultzatzen den tanga presio atmosferikoan dago. Hoditeria horizontala da. Indarren balantze batek  $x$  norabide horizontalean, honakoa ematen du:

$$\frac{1}{g_c} \frac{d}{dt} [\rho A_p v (L - z)] = P_o A_p - K_F (L - z) v^2$$

$v \, dz/dt$ -rekin ordezkaturik honakoa daukagu:

$$\frac{d}{dt} \left[ (L - z) \frac{dz}{dt} \right] = \frac{P_o g_c}{\rho} - \frac{g_c K_F}{\rho A_p} (L - z) \left( \frac{dz}{dt} \right)^2$$

### 2.2.4. Garraio-ekuazioak

Materia-, energia- eta mugimendu-kantitatearen transferentzia gobernatzen duten lege guztiek fluxu baten forma dute (transferentzia-abiadura azalera unitateko), indar-eragile batekiko proportzionala dena (kontzentrazio-, tenperatura- edo abiadura-gradiente bat). Proporzionaltasun-konstantea sistemaren propietate fisiko bat da (hala nola, difusibitatea, konduktibitate termikoa edo biskositatea).

**2.1. taula.** Garraioaren legeak

Kantitatea	Beroa	Masa	Mugimendu kantitatea
Fluxua	$q$	$N_A$	$\tau_{rz}$
<b>Garraio molekularra</b>			
Indar eragilea	$\frac{\partial T}{\partial z}$	$\frac{\partial C_A}{\partial z}$	$\frac{\partial v_z}{\partial r}$
Legea	Fourier	Fick	Newton
Propietatea	Konduktibitate termikoa	Difusibitatea	Biskositatea
	$k_T$	$D_A$	$\mu$
<b>Garraio globala</b>			
Indar eragilea	$\Delta T$	$\Delta C_A^\dagger$	$\Delta P$
Erlazioa	$q = h_T \Delta T$	$N_A = k_L \Delta C_A$	$\ddagger$

$\dagger$  indar eragilea presio partzialen edo frakzio molarren terminoetan ere erabiltzen da.  
 $\ddagger$  ohiko ariketetan, hoditerietan karga-galeraren kalkulua, frikzio-faktorearen korrelazioak erabiltzen dira,  $f = (g_c D \Delta P / L) / 2 \rho v^2$

Maila makroskopikoan, transferentzia-erlazioen forma globalak ere erabiltzen dira, adibidez, geruza-koefizienteak eta, beroaren transferentzian, koefiziente globalak. Kasu horietan, indar eragilea bi posizioen arteko propietateen diferentzia da. Proporzionaltasun -konstantea transferentziaren koefiziente globala da.

### 2.2.5. Egoera-ekuazioak

Eredu matematikoak idazteko, propietate fisikoak (batez ere, dentsitatea eta entalpia) tenperaturarekin, presioarekin eta konposizioarekin nola aldatzen diren esaten dituzten ekuazioak behar dira.

Adibidez, energia-balantzeak ezartzeko, entalpiaren ekuazio errazak erabili ditugu:

$$h = C_p T \quad H = C_p T + \lambda_v$$

Cp temperaturaren funtzioan jarritz,

$$h = \int_{T_0}^T C_p(T) dT$$

Sarritan, T-ren polinomio bat erabiltzen da Cp-rako:

$$C_p = A_1 + A_2 T$$

Orduan, entalpiaren aurreko ekuazioa honela geratzen da:

$$h = \left[ A_1 T + A_2 \frac{T^2}{2} \right]_{T_0}^T = A_1 (T - T_0) + \frac{A_2}{2} (T^2 - T_0^2)$$

Konposatuen nahasteak badaude, entalpia totala behar da. Nahaste beroa aintzat ez hartzeko modukoa bada, konposatu puruen entalpien batezbestekoak lor daitezke:

$$h = \frac{\sum_{j=1}^N x_j h_j M_j}{\sum_{j=1}^N x_j M_j}$$

non  $x_j$  j. konposatuaren frakzio molarra den;  $M_j$ , j. konposatuaren pisu molekularra, eta  $h_j$ , j. konposatuaren entalpia. Aldagai hauek nahastearen N osagai guztietarako aplikatu beharko lirateke.

Likidoen dentsitateak konstanteak direla jo daiteke sistema askotan, konposizioan eta tenperaturaren aldaketa handiak egon ezean. Gasen dentsitateak ezin dira konstantetzat jo eta PVT erlazioen bat beharrezkoa izaten da. Errazena eta erabiliena gas perfektuen legea izaten da  $PV = nRT$ . Orduan, gas perfektu baten dentsitatea ekuazio honek emana dator:

$$\rho_v = \frac{nM}{V} = \frac{MP}{RT}$$

### 2.2.6. Oreakak

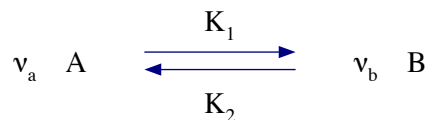
Termodinamikaren 2. legea orekan dagoen sistema baten baldintzak deskribatzen dizkiguten ekuazioetarako oinarria da.

#### A. OREKA KIMIKOA

Sistema erreakzionatzaile bat orekan dago  $\sum_{j=1}^N \nu_j \mu_j = 0$  betetzen bada.

non  $\nu_j$  j. konposatuaren koefiziente estekiometrikoa den (erreaktiboek zeinu negatiboa dute, eta produktuek, positiboa); eta  $\mu_j$  j. konposatuaren potentzial kimikoa.

Ekuazio horrekin, erreakzio baterako oreka konstante baten terminoetan lan egin ohi da. Adibidez, har dezagun aintzat gas fasean erreakzio itzulgarri bat, A-k B emateko  $k_1$  abiadura espezi-fiko batekin eta B-k A emateko  $k_2$  abiadura konstante batekin. A-ren  $v_a$  molek b-ren  $v_b$  mol emateko erreakzioaren estekiometriaren arabera erreakzionatzen dute.



Oreka gertatuko da  $v_b \mu_b - v_a \mu_a = 0$  bada. Gas perfektuen nahaste baterako potentzial kimikoak honela idatz daitezke:  $\mu_j = \mu_j^0 + RT \ln P_j$ , non  $\mu_j^0$  j.konposatuaren potentzial kimiko estandarra (edo Gibbs-en energia askea mol-eko) den;  $P_j$ , j.konposatuaren presio partziala; R, gasen konstantea, eta T, tenperatura absolutua. Ekuazio hori goiko ekuazioan ordezkatzuz,

$$\begin{aligned} v_b (\mu_b^0 + RT \ln P_B) - v_a (\mu_a^0 + RT \ln P_A) &= 0 \\ RT \ln (P_B)^{v_b} - RT \ln (P_A)^{v_a} &= v_a \mu_a^0 - v_b \mu_b^0 \\ \ln \left( \frac{P_B^{v_b}}{P_A^{v_a}} \right) &= \frac{v_a \mu_a^0 - v_b \mu_b^0}{RT} \end{aligned}$$

Eskuineko terminoa tenperaturaren funtzioa bakarrik da. Ezkerreko parentesi artean dagoen multzoa  $K_p$  oreka konstante gisa definitzen da. Produktuen eta errektiboen arteko oreka erlazioak ematen dizkigu horrek:

$$K_p = \frac{P_B^{v_b}}{P_A^{v_a}}$$

## B. FASEEN ARTEKO OREKAK

Bi faseen artean oreka gertatzen da konposatu bakoitzaren potentzial kimikoa bi faseetan berdina bada:

$$\mu_j^I = \mu_j^{II}$$

non  $\mu_j^I$  j.konposatuaren potentzial kimikoa den I. fasean, eta  $\mu_j^{II}$  j. konposatuaren potentzial kimikoa den II. fasean.

Ingeniaritza kimikoan sistema gehienek fase likido bat eta gas fase bat dutenez, likido-lurrun-erlazioak izaten dira.

Oinarrian, lurrunaren konposizioa kalkulatzeko aukera ematen digun erlazio bat behar da, likidoaren konposizioa ezagutzen bada, edo alderantziz. Ariketa arruntena burbuila-puntua kalkulatzeko da: lurrun fasearen T eta konposizioa ( $y_j$ ) kalkulatzeko, fase likidoaren konposizioa ( $x_j$ ) eta presioa (P) emanda. Normalean, kalkulu horrek soluzio iteratiboa eskatzen du, ekuazioak oso kasu errazetan bakarrik ebatz baitaitezke. Beste batzuetan, burbuila-puntua kalkulatu nahi dugu fase likidoaren tenperatura eta konposizioa alde aurretik ezagututa lurrun fasearen presioa eta konposizioa aurkitzeko. Hori errazagoa izaten da, ez baita prozesu iteratiboa izaten.

Beste batzuetan, ihintz-puntua ezagutu nahi dugu lurrun fasearen konposizioa eta presioa (edo temperatura) ezagutzen baditugu eta fase likidoaren konposizioa eta temperatura (edo presioa) kalkulatu nahi baditugu. «Flash» kalkuluak dituzten ariketak ere badaude, non ez dugun ez fase likidoaren ez lurrun fasearen konposizioa ezagutzen. Kasu horietan, oreka-erlazioak konposatu bakoitzerako materia balantzeekin eta energia balantzeekin konbinatu behar dira.

Adibideetan, lurrun fasearen jokaera ideala jo dugu (Dalton-en legea):

$$P_j = P \cdot y_j$$

Presio altuetan, zuzenketak erabili behar dira. Fase likidoan, hainbat hurbilketa erabiltzen dira, hala nola:

1. Raoult-en legea: lege horri jarraitzen dioten likidoei *idealak* deitzen zaie.

$$P = \sum_{j=1}^N x_j P_j^S$$

$$y_j = \frac{x_j P_j^S}{P}$$

non  $P_j^S$  j.konposatu puruaren lurrun presioa den. Lurrun-presioak temperaturaren funtzioa dira bakarrik. Menpekotasun hori ekuazio honen bidez deskribatzen da:

$$\ln P_j^S = A_j/T + B_j$$

2. Hegazkortasun erlatiboa: i osagaiaren hegazkortasun erlatiboa j osagaiarekiko ( $\alpha_{ij}$ ) honela definitzen da:

$$\alpha_{ij} = \frac{y_i / x_i}{y_j / x_j}$$

Hegazkortasun erlatiboak konstanteak dira (gutxi gorabehera) sistema askotan; horregatik sarri erabiltzen dira.

Sistema binario baten osagai hegazkorrenaren hegazkortasun erlatiboa ( $\alpha$ ), hegazkortasun gutxieneko osagaiarekin konparatuta, honako hau da:

$$\alpha = \frac{y/x}{(1-y)/(1-x)}$$

Birkokatuz,

$$y = \frac{\alpha x}{1 + (\alpha - 1)x}$$

3. K-ren balioak. Orekako lurrintze-erlazioak edo K balioak oso erabiliak dira, batez ere, petrolioaren industrian.

$$K_j = \frac{y_j}{x_j}$$

K-ren balioak temperaturaren eta konposizioaren funtzioak dira, eta, neurri txikiagoan, presioarenak.

4. Aktibitate-koefizienteak. Likido ez-idealetarako Raoulten legea aldatu behar da fase likidoaren ez-idealitasuna kontuan hartzeko. Erabilitako zuzenketa-faktoreei aktibitate-koefizienteak deitzen zaie.

$$P = \sum_{j=1}^N x_j P_j^s \gamma_j$$

non  $\gamma_j$  j.osagairako aktibitate koefizientea den. Aktibitate-koefizientea 1 da osagaia ideala bada.  $\gamma$ -ren balioak konposizioaren eta temperaturaren funtzioa dira.

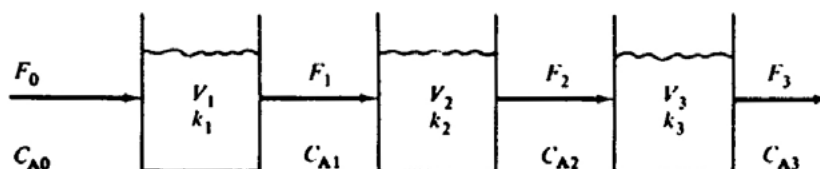
### 2.2.7. Zinetika kimikoa

Ingeniaritza kimikoan, erreaktoreak asko erabiltzen dira; beraz, erreakzio kimikoen zinetikaren deskribapenean erabiltzen diren oinarizko erlazioekin eta terminologiarekin ohitu behar dugu.

Atal honetan, Ingeniaritza Kimikoan aurkitu daitezkeen eredu matematikoen adibideak garatuko ditugu.

### 2.3. Bolumen konstantea duten CSTR (Continuous Stirred Tank Reactor) isotermoen serieak

Sistema 2.1. irudian erakusten da. Erreakzioa  $A \longrightarrow B$  da eta haren zinetika lehen mailakoa da fase likidoan. Demagun temperatura eta 3 tankeen bolumena ezberdina izan daitekeela, baina bai temperatura bai tanke bakoitzaren bolumena konstanteak dira. Dentsitatea konstantea dela jotzen da.



2.1. irudia. Seriean konektatutako CSTRak

Suposizio horiekin, eredu formula dezakegu. Dentsitatea eta bolumena konstanteak badira tanke bakoitzean, masa totala tanke bakoitzean konstantea izango da. Horrela, lehenengo erreaktorarako honako ekuazio honek emana dator materia-balantze totalaren ekuazioa:



$$\frac{d(\rho V_1)}{dt} = \rho F_0 - \rho F_1 = 0 \quad (2.1)$$

edo  $F_1 = F_0$ .

Halaber, masa-balantze totalak 2 eta 3 tankeetan izango dira:

$$F_3 = F_2 = F_1 = F_0 = F \quad (2.2)$$

non  $F$  emaria moduan definitzen den  $\text{m}^3/\text{min}$ -tan.

A errektiboaren eta B produktuaren kantitateak ezagutu nahi ditugunez, tanke bakoitzean, materia-balantzearen ekuazioak osagai bakoitzerako beharko ditugu. Sistema binarioa denez, osagai baten materia balantzearen ekuazioa bakarrik behar dugu. A edo B aukeratu daiteke. A aukeratzenean badugu, A kantitatearen aldaketa dinamikoak deskribatzen dituzten ekuazioak honako hauek dira tanke bakoitzean:

$$\begin{aligned} V_1 \frac{dC_{A1}}{dt} &= F(C_{A0} - C_{A1}) - V_1 k_1 C_{A1} \\ V_2 \frac{dC_{A2}}{dt} &= F(C_{A1} - C_{A2}) - V_2 k_2 C_{A2} \\ V_3 \frac{dC_{A3}}{dt} &= F(C_{A2} - C_{A3}) - V_3 k_3 C_{A3} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Erreakzio-abiadurek ( $k_n$ ) Arrhenius-en ekuazioari jarraitzen diote:

$$k_n = \alpha e^{-E/RT_n} \quad n = 1, 2, 3 \quad (2.4)$$

Temperaturak errektore bakoitzean ezberdinak badira, abiadurak ere ezberdinak izango dira.  $n$  tanke-zenbakia da.

$V_n$  bolumenak deribatuetatik atera daitezke, konstanteak baitira. Emariak  $F$ -ren berdinak dira, baina denborarekin alda daitezke. Ez da energiaren ekuaziorik behar, operazio isoterma dela jontzen baitugu. Egoera estazionarioko energia-balantze batetik kalkula daiteke errektoreak tenperatura isotermaan mantentzeko zenbateko berotasuna kendu edo gehitu behar den.

2.3 ekuazioak emandako lehen ordenako 3 ekuazio diferentzial arrunt ez-linealak sistemaren eredu matematikoa dira. Ezagutu behar ditugun parametroak  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  dira. Ekuazioak ebatzi baino lehen espezifikatu behar diren aldagaiak  $F$  eta  $C_{A0}$  dira. Espezifikatzeak ez du esan nahi konstanteak izan behar dutenik. Denborarekin alda daitezke, baina denboraren funtzio moduan ezagutu behar dira. Funtzio behartzaileak deitzen zaie.

Halaber, kontzentrazioen hasierako baldintzak ezagutu behar dira.

Konproba ditzagun orain sistemaren askatasun-graduak. 3 ekuazio daude eta parametroak eta funtzio behartzaileak espezifikatzen baditugu, 3 ezezagun edo menpeko aldagai bakarrik daude:  $C_{A1}$ ,  $C_{A2}$  eta  $C_{A3}$ . Beraz, soluzio bakarra dago.

Emaria konstantea bada eta tenperaturak eta bolumenak berdinak badira 3 tankeetan, (2.3) ekuazioa honela geratzen da:

$$\begin{aligned}\frac{dC_{A1}}{dt} + \left(k + \frac{1}{\tau}\right)C_{A1} &= \frac{1}{\tau}C_{A0} \\ \frac{dC_{A2}}{dt} + \left(k + \frac{1}{\tau}\right)C_{A2} &= \frac{1}{\tau}C_{A1} \\ \frac{dC_{A3}}{dt} + \left(k + \frac{1}{\tau}\right)C_{A3} &= \frac{1}{\tau}C_{A2}\end{aligned}\quad (2.5)$$

non  $\tau = V/F$  den. Funtzio behartzaile edo sarrerako aldagai bakarra dago,  $C_{A0}$ .

#### 2.4. Bolumen aldakorreko CSTRak

Aurreko adibidean errektore bakoitzeko bolumenak denborarekin alda badaitezke, material-balantze totalak eta partzialak behar lirateke errektore bakoitzerako. 1 baino orden handiagoko zinetika baten eraginak ikusteko, demagun orain erreakzioa n ordenakoa dela.

$$\begin{aligned}\frac{dV_1}{dt} &= F_0 - F_1 \\ \text{1.erreaktorea:}\end{aligned}\quad (2.6)$$

$$\frac{d}{dt}(V_1C_{A1}) = F_0C_{A0} - F_1C_{A1} - V_1k_1(C_{A1})^n$$

$$\begin{aligned}\frac{dV_2}{dt} &= F_1 - F_2 \\ \text{2.erreaktorea:}\end{aligned}\quad (2.7)$$

$$\frac{d}{dt}(V_2C_{A2}) = F_1C_{A1} - F_2C_{A2} - V_2k_2(C_{A2})^n$$

$$\begin{aligned}\frac{dV_3}{dt} &= F_2 - F_3 \\ \text{3.erreaktorea:}\end{aligned}\quad (2.8)$$

$$\frac{d}{dt}(V_3C_{A3}) = F_2C_{A2} - F_3C_{A3} - V_3k_3(C_{A3})^n$$

Orain, eredu matematikoak 1. ordenako 6 ekuazio diferentzial arrunt ez-lineal ditu.  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  eta  $n$  ezagutu behar dira. Menpeko aldagai guztietarako, hasierako baldintzak ezagutu behar dira, baita  $C_{A1}$ ,  $C_{A2}$ ,  $C_{A3}$ ,  $V_1$ ,  $V_2$  eta  $V_3$  ere. Halaber, funtzio behartzaileak eman behar dira:  $C_{A0(t)}$  eta  $F_{0(t)}$ .

Ikus ditzagun sistemaren askatasun-graduak. 6 ekuazio daude, baina 9 ezezagun:  $C_{A1}$ ,  $C_{A2}$ ,  $C_{A3}$ ,  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$ ,  $F_1$ ,  $F_2$ , eta  $F_3$ . Ez dugu espezifikatu tanke bakoitzetik irteten diren emariak nola-

koak diren. Fisikoki gerta daiteke kontrol-balbulak egotea emariak erregulatzeko. Nola erregulatu dituzte balbulek emariak? Tankeko likido mailak irteerako emaria kontrolaraztea da konfigurazio arrunt bat. Orduan, erlazio bat egongo da tankeko mailaren eta emariaren artean:

$$F_1 = f_{(v1)} \quad F_2 = f_{(v2)} \quad F_3 = f_{(v3)} \quad (2.9)$$

$f$  funtzioek maila-kontrolatzailea eta kontrol-balbula deskribatuko dituzte. Ekuazio horiek askatasun-graduaren kopurua zero izatea eragiten dute.

## 2.5. Bi tanke kalorifugatu

Aintzat har dezagun orain adibide bat non bi energia-balantze beharko ditugun sistema modelatzeko. Seriean dauden nahaste perfektuzko bi tanketan zehar zirkulatu duen fluido baten  $F$  emaria konstantea da eta  $90 \text{ ft}^3/\text{min}$ -koa. Fluidoaren dentsitatea konstantea da,  $40 \text{ lb}_m/\text{ft}^3$ , eta haren  $C_p$ ,  $0.6 \text{ Btu}/\text{lb}_m \cdot ^\circ\text{F}$ -koa. Lehenengo erreaktoreko bolumena ( $V_1$ ) konstantea da,  $450 \text{ ft}^3$ , eta bigarren erreaktorearen bolumena ( $V_2$ ) konstantea da, baita,  $90 \text{ ft}^3$ . Fluidoaren tenperatura, lehenengo tankearen sarreran,  $T_0$  da,  $150^\circ \text{F}$  zero denboran egoera estazionarioan. Bi tankeetan, tenperaturak  $T_1$  eta  $T_2$  dira. Zero denboran, egoera estazionarioan, berdinak dira eta  $250^\circ \text{F}$  baliokoak. Lehenengo tankeak ur-lurrunezko beroketa hodibihur bat du jariakin berotzaile modura. Izan bedi  $Q_1$  lehenengo tankera gehitzen den denbora-unitateko bero kantitatea.

Energia-balantze bat dago tanke bakoitzerako. 1 tankerako:

$$\frac{d(\rho C_p V_1 T_1)}{dt} = \rho C_p (F_0 T_0 - F_1 T_1) + Q_1 \quad (2.10)$$

2 tankerako energia-balantzea:

$$\frac{d(\rho C_p V_2 T_2)}{dt} = \rho C_p (F_1 T_1 - F_2 T_2) \quad (2.11)$$

Emariak konstanteak direnez:  $F_0 = F_1 = F_2 = F$ . Bolumenak, dentsitateak eta  $C_p$ -ak konstanteak direnez, 2.10 eta 2.11 ekuazioak sinplifika daitezke:

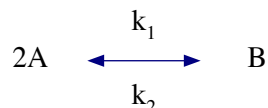
$$\rho C_p V_1 \frac{dT_1}{dt} = \rho C_p F (T_0 - T_1) + Q_1 \quad (2.12)$$

$$\rho C_p V_2 \frac{dT_2}{dt} = \rho C_p F (T_1 - T_2) \quad (2.13)$$

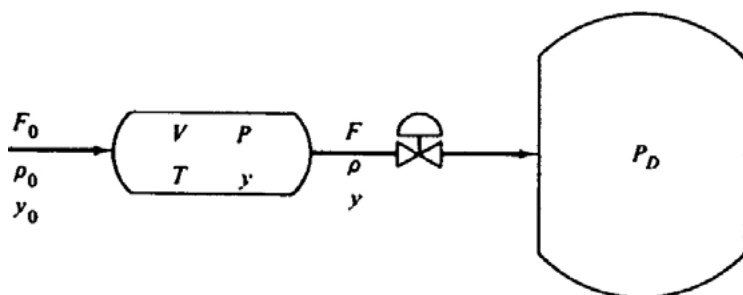
Konproba ditzagun sistemaren askatasun-graduak. Ezagutzen ditugun parametroak  $\rho$ ,  $C_p$ ,  $V_1$ ,  $V_2$  eta  $F$  dira. Lehenengo tankera gehitutako beroa ( $Q_1$ ) kontrol-balbulak ur-lurrunaren lerroan daukan posizioak finkatuko du. Bi menpeko aldagai ditugu,  $T_1$  eta  $T_2$ , eta bi ekuazio. Beraz, zero askatasun-gradu daude.

## 2.6. CSTR presurizatua gas fasean

Demagun gas-nahaste bat 2.2 irudiko moduko errektore batera elikatzen dela. Errektorea nahaste perfektuzkoa da eta erreakzio itzulgarri bat gertatzen da:



Eskuinalderanzko erreakzioa 1.5 ordenakoa da A-rekiko; ezkerralderanzko erreakzioa 1. ordenakoa da B-rekiko. A erreaktiboaren frakzio molarra  $y$  da errektorean. Izan bedi  $P$  presio absolutua errektorean.  $P$  eta  $y$  denborarekin alda daitezke. Errektorearen bolumena ( $V$ ) konstantea da.



2.2. irudia. CSTR gas fasean

Demagun sistema isoterma dela  $T$  tenperaturan, eta portaera ideala duela. Elikadura-korronteak  $\rho_0$  dentsitatea du eta A erreaktiboaren  $y_0$  frakzio molarra. Emaria  $F_0$  da.

Errektoretik irteteen den fluxua murriztutako eremu batetik (kontrol-balbula) pasatzen da beste tanke batera, eta, han,  $P_D$  presio (absolutua) konstantean dago. Irteerako emaria presioarekin eta errektore barruko konposizioarekin aldatuko da. Ekuazio honek emana dator murriztutako eremuan zehar dagoen fluxua:

$$F = C_v \sqrt{\frac{P - P_D}{\rho}} \quad (2.14)$$

$C_v$  balbularen koefizientea da. Dentsitatea presioarekin eta konposizioarekin aldatzen da ekuazio honen arabera:

$$\rho = \frac{MP}{RT} = [yM_A + (1-y)M_B] \frac{P}{RT} \quad (2.15)$$

non  $M$  batezbesteko pisu molekularra den;  $M_A$ , A-ren pisu molekularra, eta  $M_B$ , B-rena.

A-ren kontzentrazioa errektorean,

$$C_A = \frac{Py}{RT} \quad (2.16)$$

Eskuinalderanzko erreazio-abiadura ekuazio honek ematen du:

$$R_F = k_1(C_A)^{1.5} = -\frac{1}{2V}\left(\frac{dn_A}{dt}\right)_R = \frac{1}{V}\left(\frac{dn_B}{dt}\right)_R$$

Eta ezkeralderanzko erreazio-abiadura, honako ekuazio honek:

$$R_R = k_2 C_B = \frac{1}{2V}\left(\frac{dn_A}{dt}\right)_R = -\frac{1}{V}\left(\frac{dn_B}{dt}\right)_R$$

Oinarrizko ekuazio hauekin materia-balantze totala eta osagai bati dagokiona idatz daitezke:

Materia-balantze totala:

$$V \frac{d\rho}{dt} = \rho_0 F_0 - \rho F \quad (2.17)$$

A-rekiko materia-balantzea:

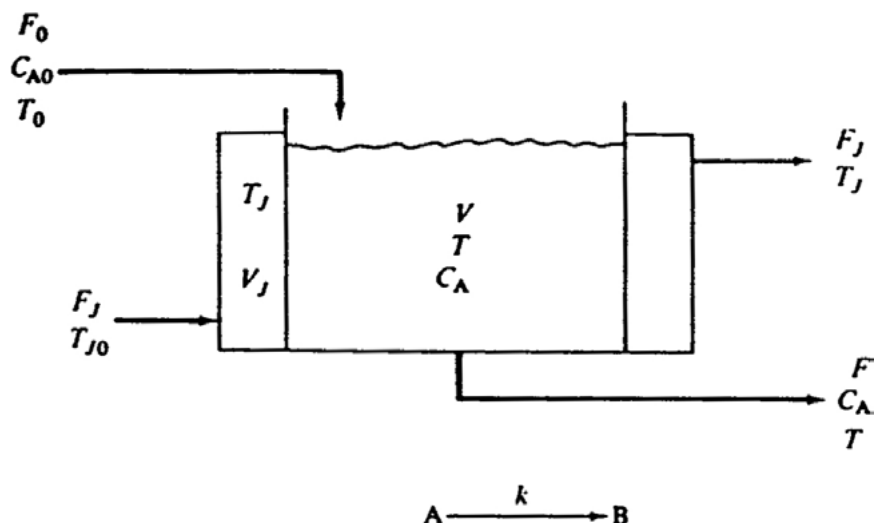
$$V \frac{dC_A}{dt} = F_0 C_{A0} - F C_A - 2V k_1 (C_A)^{1.5} + 2V k_2 C_B \quad (2.18)$$

Erreakzio-abiaduraren terminoetan, 2a A-ren koefiziente estekiometrikoari dagokio. 5 ekuazio daude 2.14tik 2.18ra. Sistemaren parametroak  $V$ ,  $C_V$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $R$ ,  $M_A$  eta  $M_B$  dira. Sarrerako aldagaiak  $P_D$ ,  $\rho_0$ ,  $F_0$  eta  $C_{A0}$  izan daitezke. Gero, menpeko 5 aldagai geratzen dira:  $C_A$ ,  $\rho$ ,  $P$ ,  $F$  eta  $y$ .

## 2.7. CSTR ez isoterinoa

Har dezagun aintzat sistema bat non temperatura denborarekin aldatzen den. Demagun CSTR errektore baten  $A \longrightarrow B$  erreakzioa gertatzen dela,  $n$  ordenakoa A erreaktiboarekiko eta  $\lambda$  bero-erreakzioa duena (Btu/erreakzionaturiko A lb mol), 2.3 irudia. Demagun bero-galerak baztergarriak direla eta dentsitateak konstanteak direla.

Erreakzio beroa kentzeko errektorearen inguruan, atorra bat dago. Atorratik urak zirkulatzen du  $F_j$  emariarekin  $T_{j0}$  sarrerako temperaturarekin. Atorran uraren bolumena  $V_j$  konstantea dela josten da eta paretaren metalikoen masa baztergarria dela. Hori, askotan, suposizio egokia da, altzairuaren  $C_p$ -a urarena baino 10 aldiz txikiagoa baita.



2.3. irudia. CSTR ez-isotermoa

A. Atorra perfektuki nahasia

Demagun atorrako puntu bakoitzaren temperatura  $T_j$  dela.  $T$  temperaturan dagoen prozesuaren eta hozte-uraren ( $T_j$  temperaturan dago) arteko bero-transferentzia bero-balantze global baten bidez deskribatzen da:

$$Q = U A_H (T - T_j)$$

non  $Q$  bero transferentzia-abiadura den;  $U$ , transferentzia-koefiziente globala, eta  $A_H$ , transferentzia-azalera diren.

Oro har, transferentzia-azalera errektorearen edukiarekin alda daiteke, azaleraren zati bat ez badago likidoarekin estalita. Sistema deskribatzen duten ekuazioak honako hauek dira:

Materia-balantze totala:

$$\frac{dV}{dt} = F_0 - F$$

Materia-balantzea A osagairako:

$$\frac{d(V C_A)}{dt} = F_0 C_{A0} - F C_A - V k (C_A)^n$$

Energia-balantzea errektorean:

$$\rho \frac{d(Vh)}{dt} = \rho (F_0 h_0 - F h) - \lambda V k (C_A)^n - U A_H (T - T_j) \quad (2.20)$$

Energia-balantzea atorran:

$$\rho_J V_J \frac{dh_J}{dt} = F_J \rho_J (h_{J0} - h_J) + UA_H (T - T_J) \quad (2.21)$$

non  $\rho_j$  hozte-uraren dentsitatea den;  $h$ , prozesuko likidoaren entalpia, eta  $h_j$ , hozte-uraren entalpia.

Dentsitateak konstanteak izanda,  $C_p = C_v$  izango da eta, horri esker, denborarekiko deribatuetan, entalpiak erabil daitezke barne-energiak ordezkatzeko.

Halaber, erlazio hidrauliko bat behar da errektorean dagoen likido kantitatearen eta irteerako fluxuaren artean. Demagun likidoaren mailaren kontrolatzaile batek emaria aldatzen duela maila zenbat igotzen edo jaisten den aintzat hartuz: zenbat eta maila altuagoa, orduan eta emari handiagoa. Fluxua itxi egingo da maila balio minimo batera ( $V_{\min}$ ) iristen denean:

$$F = K_V (V - V_{\min}) \quad (2.22)$$

Mailaren kontrolatzaileak akzio proportzionala bakarrik du.

Entalpia-datuak behar ditugu entalpiak konposizioekin eta temperaturekin erlazionatzeko. Honelako itxura sinplea dutela joko dugu:

$$h = C_p T \quad \text{eta} \quad h_j = C_j T_j \quad (2.23)$$

non  $C_p$  prozesuko likidoaren bero espezifiko den, eta  $C_j$ , hozte-uraren bero espezifikoa. 2.23 ekuazioa erabiliz eta Arrhenius-en erlazioa  $k$ -rako, prozesua deskribatzen duten ekuazioak honako hauek dira:

$$\frac{dV}{dt} = F_0 - F \quad (2.24)$$

$$\frac{d(V C_A)}{dt} = F_0 C_{A0} - F C_A - V (C_A)^n \alpha e^{-E/RT} \quad (2.25)$$

$$\rho C_p \frac{d(VT)}{dt} = \rho C_p (F_0 T_0 - F T) - \lambda V (C_A)^n \alpha e^{-E/RT} - UA_H (T - T_J) \quad (2.26)$$

$$\rho_J V_J C_J \frac{dT_J}{dt} = F_J \rho_J C_J (T_{J0} - T_J) + UA_H (T - T_J) \quad (2.27)$$

$$F = K_V (V - V_{\min}) \quad (2.28)$$

Bost ekuazio eta bost ezezagun daude:  $V$ ,  $F$ ,  $C_A$ ,  $T$  eta  $T_j$ . Bost aldagai horietarako hasierako baldintzak eman behar dira. Funtzio behartzaileak  $T_0$ ,  $F_0$ ,  $C_{A0}$  eta  $F_j$  dira. Gainera, parametro ezagunak  $n$ ,  $\alpha$ ,  $E$ ,  $R$ ,  $\rho$ ,  $C_p$ ,  $U$ ,  $A_H$ ,  $\rho_j$ ,  $V_j$ ,  $C_j$ ,  $T_{j0}$ ,  $K_V$  eta  $V_{\min}$  dira. Azalera-transferentzia errektoreko likido edukiarekin aldatzen bada, beste aldagai baten moduan kontuan hartu behar litzateke, baina beste ekuazio bat azalduko litzateke: azaleraren eta errektoreko likido edukiaren arteko erlazioa. Errektorea zilindrikoa bada, hondo leunekoa eta  $D$  diametroarekin, eta atorra alboko paretaren inguruan badago eta ez hondoa, erlazioa honako hau da:

$$A_H = \frac{4}{D}V \quad (2.29)$$

Demagun U koefiziente globala konstantea dela. Hoztaile-emariaren ( $F_j$ ) edo masa erreakzio-natzailearen konposizioaren funtzioa izan daiteke, eta beste aldagai bat eta ekuazio bat eman.

### B. Atorra pistoi-fluxuan

Aurreko eremuan, atorrako hozte-ura nahaste perfektuan dagoela jo da. Kasu askotan, suposizio hori ez da egokia. Uraren emaria nahiko altua bada bere temperatura asko ez aldatzeko, nahaste perfektua izateak ez du garrantzi handirik. Dena den, uraren temperatura asko handitzen bada, eta fluxuak pistoi-fluxu itxura badu nahaste perfektuaren itxura baino gehiago, orduan, atorraren, batezbesteko temperatura erabil daiteke:

$$T_{JA} = \frac{T_{J0} + T_{JS}}{2} \quad (2.30)$$

non  $T_{JS}$  uraren temperatura irteeran den.

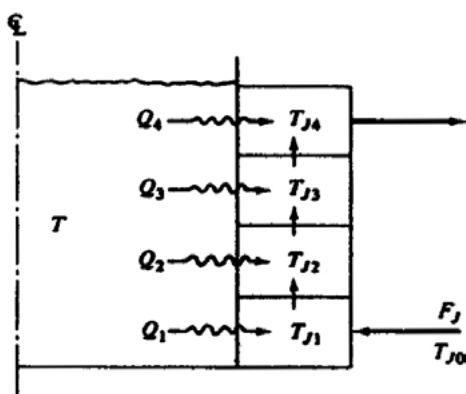
Batezbesteko temperatura beroaren transferentzia-ekuazioan erabiltzen da, eta atorraren, jariatzailearen temperatura adierazteko. 2.27 ekuazioa honako ekuazio hau bihurtzen da:

$$\rho_J V_J C_J \frac{dT_{JA}}{dt} = F_J \rho_J C_J (T_{J0} - T_{JS}) + UA_H (T - T_{JA}) \quad (2.31)$$

2.31 ekuazioa integratu egiten da,  $T_{JA}$  lortzeko uneoro, eta 2.30 ekuazioa erabiltzen da,  $T_{JS}$  kalkulatzeko denboran zehar.

### C. Atorra hoztailerako eredu taldekatua

Atorraren bolumena nahaste perfektuzko hainbat tanketan banatzea da beste aukera bat, 2.4. irudian erakusten den moduan.



2.4. irudia. Atorrarako eredu taldekatua



Tanke bakoitzerako, energia-ekuazio bat behar da. Bolumen- eta transferentzia-azalera bereko 4 tanke daudela joz gero, 4 ekuazio ditugu atorrarako:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4} \rho_J V_J C_J \frac{dT_{J1}}{dt} &= F_J \rho_J C_J (T_{J0} - T_{J1}) + \frac{1}{4} U A_H (T - T_{J1}) \\
 \frac{1}{4} \rho_J V_J C_J \frac{dT_{J2}}{dt} &= F_J \rho_J C_J (T_{J1} - T_{J2}) + \frac{1}{4} U A_H (T - T_{J2}) \\
 \frac{1}{4} \rho_J V_J C_J \frac{dT_{J3}}{dt} &= F_J \rho_J C_J (T_{J2} - T_{J3}) + \frac{1}{4} U A_H (T - T_{J3}) \\
 \frac{1}{4} \rho_J V_J C_J \frac{dT_{J4}}{dt} &= F_J \rho_J C_J (T_{J3} - T_{J4}) + \frac{1}{4} U A_H (T - T_{J4})
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

#### D. Pareta metalikoa kontuan hartzen da

Erreaktore batzuetan, batez ere P altuko erreaktoreetan, pareta metalikoen masa eta beren eragina hartu behar dira kontuan, sistemaren dinamika termikoan. Zehazki, paretarako energia-ekuazioak ekuazio diferentzial partzial bat denboran zehar eta posizio erradialean zehar izan behar du. Hurbilketa ez hain zehatza baina erabiliagoa ere badugu: metalaren masa taldekatzea eta haren osotasunean  $T_M$  tenperaturan dagoela jotzea. Suposizio hori nahiko egokia da pareta ez bada lodiegia eta metalaren konduktibitate termikoa handia bada.

Orduan, barrurako eta kanporako transferentzia-koefizienteak erabiltzen dira,  $h_i$  eta  $h_o$ . 3 energia-ekuazioak prozesurako honako hauek dira:

$$\begin{aligned}
 \rho C_p \frac{d(VT)}{dt} &= \rho C_p (F_0 T_0 - F T) - \lambda V (C_A)^n \alpha e^{-E/RT} - h_i A_i (T - T_M) \\
 \rho_M V_M C_M \frac{dT_M}{dt} &= h_i A_i (T - T_M) - h_o A_o (T_M - T_J) \\
 \rho_J V_J C_J \frac{dT_J}{dt} &= F_J \rho_J C_J (T_{J0} - T_J) + h_o A_o (T_M - T_J)
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

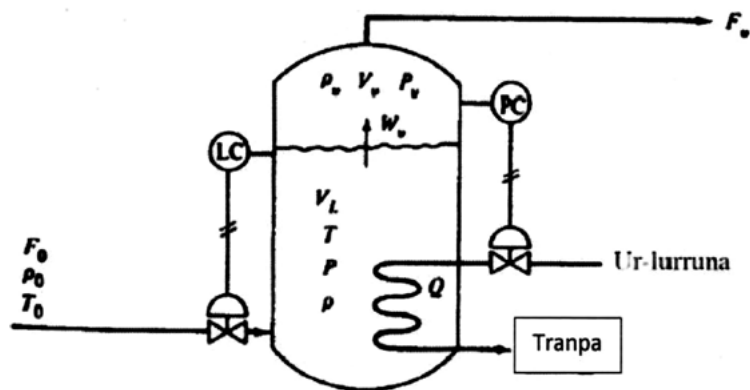
non honako hauek ditugun:  $h_o$ , kanpoko geruzako bero-transferentziaren koefizientea;  $h_i$ , barnegeruzako koefizientea;  $\rho_m$ , metalaren dentsitatea;  $C_M$ , metalaren bero espezifiko;  $V_M$ , pareta metalikoaren bolumena;  $A_i$ , bero-transferentzia gertatzen deneko azalera, barnealdean, eta  $A_o$ , bero-transferentzia gertatzen deneko azalera, kanpoaldean.

## 2.8. Konposatu puru baten lurrungailua

Irakite-sistemak ingeniartza kimikoko operazio garrantzitsuenetarikoak eta interesgarrienetarikoak dira eta modelatzeko zailenetakoak. Prozesu horiek zehazki deskribatzeko, likidorako eta

lurrunerako kontserbazio-ekuazioak idatzi behar dira. Likido fasetik lurrun fasera materialaren lurruntze-abiadura aurkitzea da oinarritzko arazoa.

Har dezagun aintzat 2.5 irudian erakusten den lurrungailua. LPG-a tanke presurizatu batera elikatzen da, non likido-bolumena mantentzen den. LPG-a produktu purua dela joko dugu: propa-  
noa. Tankeko likidoa nahaste perfektuan dagoela joko da. Beroa  $Q$  abiadura batean gehitzen da tan-  
kean nahi den presioa mantentzeko, eta, hala likidoa lurruntzen da,  $W_V$  (masa/denbora) abiadurare-  
kin. Joko dugu bero-galerak eta tankeko paretaren masa aintzat ez hartzeko modukoak direla. Gasa  
tankeko goiko aldetik irteten da  $F_V$  emariarekin.  $F_V$  funtzio behartzailea edo perturbazioa da.



2.5. irudia. LPG lurrungailua

#### A. Eredua egoera estazionarioan

Eredu sinpleenak ez du likido eta lurrun faseen dinamika kontuan hartzen, eta gas-emaria be-  
roa gehitzearekin erlazionatuko du ekuazio honen bidez:

$$\rho_V F_V (H_V - h_0) = Q \quad (2.34)$$

non  $H_V$  tanketik irteteten den lurrunaren entalpia den (Btu /lb<sub>m</sub> edo cal/g), eta  $h_0$ , elikatutako liki-  
doaren entalpia (cal/g).

#### B. Fase likidoaren eredu dinamikoa

Lurrun fasearen bolumena nahiko txikia bada beraren dinamika aintzat ez hartzeko modu-  
koa izan ahal izateko, eredu errealistagoa lor dezakegu. Likido mol gutxi batzuk bakarrik lurrundu  
behar baldin badira lurrun fasean presioa aldatzeko, demagun presio hori likidoaren lurrun-pre-  
sioaren berdina dela beti emandako tenperatura batean ( $P = P_V$ , eta  $W_V = \rho_V F_V$ ). Denboraren fun-  
tzioko likidoaren tenperatura likidorako energia-balantze batek emana dator, eta lurrun-presioa er-  
lazioak lurrungailuan presioa ematen du edozein tenperaturatan.

Likido faserako ere, materia-balantze bat behar da, gehi kontrolatzailearen bi ekuazio, presioa  
gehitutako beroarekin eta likido maila elikatutako emariarekin ( $F_0$ ) erlazionatzen dutenak. Hemen,  
bi ekuazio horiek funtzio moduan adieraziko ditugu:

$$Q = f_{1(P)}, \quad F_0 = f_{2(VL)} \quad (2.35)$$

Egoera-ekuazio bat behar da lurrunerako, horrela dentsitatea kalkulatu ahal izateko ( $\rho_v$ ), presiotik edo tenperaturatik abiatuz. Propietate bat ezagutuz ( $T$ ,  $P$  edo  $\rho_v$ ), beste biak lortzen dira osagai bat bakarrik baitago eta bi fase. Gas perfektuen ekuazioa erabiliko dugu.

Likidoa konprimaezina dela jotzen da,  $C_p = C_v$  delarik, eta haren barne-energia  $C_p T$  da. Lurrungailutik irteten den lurrunaren entalpia ekuazio honek emana dator:  $C_p T + \lambda_v$ .

Materia-balantzea:

$$\rho \frac{dV_L}{dt} = \rho_0 F_0 - \rho_v F_v \quad (2.36)$$

Energia-balantzea:

$$C_p \rho \frac{d(V_L T)}{dt} = \rho_0 C_p F_0 T_0 - \rho_v F_v (C_p T + \lambda_v) + Q \quad (2.37)$$

Egoera-ekuazioa:

$$\rho_v = \frac{MP}{RT} \quad (2.38)$$

Lurrun-presioa:

$$\ln P = \frac{A}{T} + B \quad (2.39)$$

2.35etik 2.39rako ekuazioek 6 ekuazio ematen dituzte. Ezezagunak  $Q$ ,  $F_0$ ,  $P$ ,  $V_L$ ,  $\rho_v$  eta  $T$  dira.

### C. Likidoaren eta lurrunaren eredu dinamikoa

Lurrun fasearen dinamika ezin bada arbuia (lurrun-bolumen handia badago), lurrunerako materia- eta energia-balantzeak idatzi behar dira. Tanketik irteten den lurruna ( $\rho_v F_v$ ) ez da dinamikoki lurruntze-abiaduraren ( $W_v$ ) berdina.

Orain, lurruntze-abiadurarako  $W_v$  adierazpen erraz eta arrazoizko bat aurkitzea da arazoaren gakoa. Materia-transferentzia motako adierazpen bat erabili daiteke, lurrun fasean duen  $P_v$ -a baino lurrun-presio handiagoa eragiten duelako, likidoak irakiten baitu tenperatura batean. Indar eragilea presioen gradiente hau da:

$$W_v = K_{MT} (P - P_v) \quad (2.40)$$

non  $K_{MT}$  materia-transferentzia pseudokoeffizientea den. Jakina, orekan,  $P = P_v$ . Likidoa eta lurruna orekan daudela jotzen badugu, esaten ari gara  $K_{MT}$ -k oso balio altua duela. Ekuazioak orde-nagailu batean ebazten badira,  $K_{MT}$ -ren zenbait balio erabil daitezke ez-orekako baldintzen eraginak ikusteko.

Sistema deskribatzen duten ekuazioak honako hauek dira:

*Fase likidoa:*

Materia-balantze totala:

$$\rho \frac{dV_L}{dt} = \rho_0 F_0 - W_v \quad (2.41)$$

Energia-balantzea:

$$\rho \frac{d(V_L U_L)}{dt} = \rho_0 F_0 h_0 - W_v H_L + Q \quad (2.42)$$

Lurrun-presioa:

$$P = e^{A/T+B} \quad (2.43)$$

*Lurrun fasea:*

Materia-balantze totala:

$$\frac{d(V_v \rho_v)}{dt} = W_v - \rho_v F_v \quad (2.44)$$

Energia-balantzea:

$$\frac{d(V_v \rho_v U_v)}{dt} = W_v H_L - \rho_v F_v H_v \quad (2.45)$$

Egoera-ekuazioa:

$$\rho_v = \frac{MP_v}{RT_v} \quad (2.46)$$

non  $U_L$  likidoaren barne-energia den  $T$  temperaturan;  $H_L$ , likidoan irakiten duen lurrunaren entalpia;  $U_v$ , lurrunaren barne-energia  $T_v$  temperaturan, eta  $H_v$ , entalpia lurrun fasean.

Propietate termikoen datuak behar dira entalpiak temperaturekin erlazionatzeko. 10 aldagai ditugu:  $Q$ ,  $F_0$ ,  $V_L$ ,  $W_v$ ,  $T$ ,  $V_v$ ,  $\rho_v$ ,  $T_v$ ,  $P$  eta  $P_v$ . 2.35 eta 2.40-2.46 ekuazioak zenbatuz, ikusten dugu 9 ekuazio bakarrik daudela. Ekuazio hau falta zaigu:  $V_L + V_v = \text{tankearen bolumena}$ .

#### D. Oreka termikoko eredua

Eredu horrek jotzen du fase likidoa eta lurruna oreka termikoan daudela edozein denbora-unitararako. Hau da, likidoaren eta lurrunaren tenperaturak berdinak direla:  $T = T_v$ . Horrek lurrun fasean energia-balantze baten beharra kentzen du.

Orduan, 2.42 ekuazioa honako hau bihurtzen da:

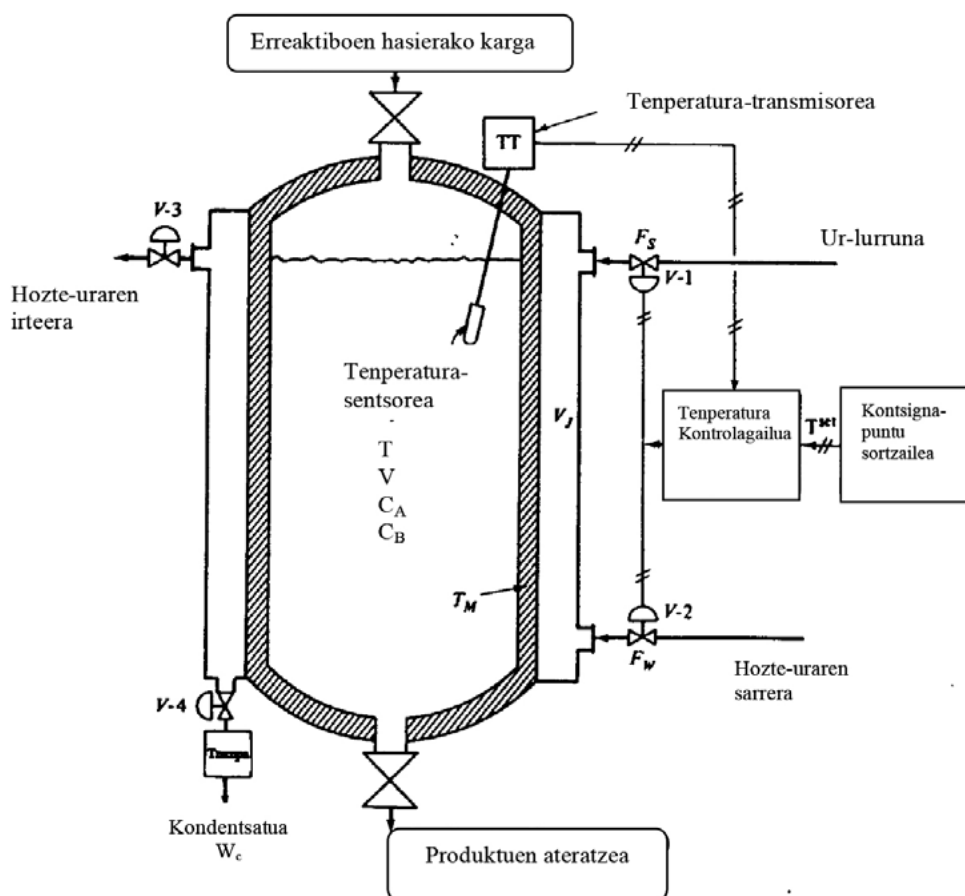
$$\rho C_p \frac{d(V_L T)}{dt} = \rho_0 F_0 C_p T_0 - W_v (C_p T + \lambda_v) + Q \quad (2.47)$$

Lehen azaldutako eredu sinpleenak (A eta B kasuak bezala) nahiko onak dira sistema jarraituetarako, non likidoaren eta gasaren bolumenaren eta tenperaturen aldaketak ez diren oso handiak. Sistema ez-jarraituetan, baliteke beharrezkoa izatea eredu zehatzagoak erabiltzea (C eta D kasuak) aldagai gehienetan gertatzen diren aldaketa handiak direla-eta.

## 2.9. Erreaktore ez-jarraitua

Produktu kimiko finen eta farmazeutikoen produkzioan, maiz erabiltzen dira prozesu ez-jarraituak. Erreaktore ez-jarraituak abantailak ditu jarraituaren aldean, erreakzio batzuen kasuan (batez ere, oso geldoak badira).

Har dezagun aintzat 2.6 irudiko erreaktorea. Erreaktiboak ontzian sartzen dira. Ur-lurrina sartzen da atorrari, erreakzio-tenperaturara iristeko. Ondoren, hozte-ura elikatzen da erreakzio exotermikoko beroa kentzeko eta erreaktorean tenperaturak nahi den tenperatura-denbora kurbari jarrai diezaion. Tenperaturaren profil hori tenperatura kontrolatzailean sartzen da konsigna-puntu modura, hau da, kontsigna-puntua denborarekin aldatu egiten da.



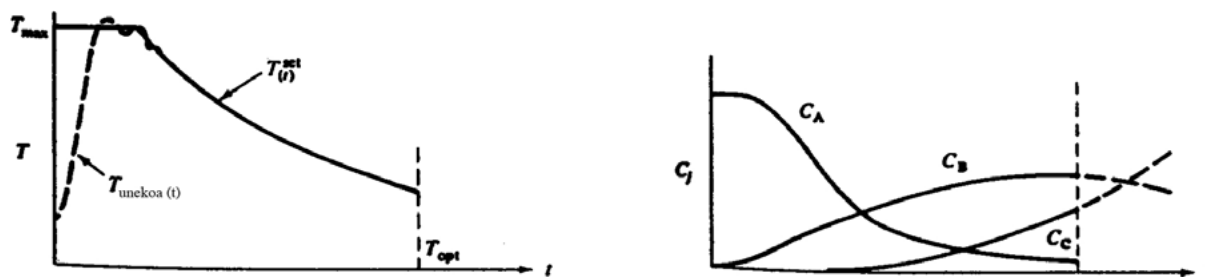
2.6. irudia. Erreaktore ez-jarraitua

Demagun erreaktorean lehen ordenako serieko erreakzio bat gertatzen dela:

$A \longrightarrow B \longrightarrow C$ . Nahi den produktua B da. Erreakzioa denbora luzez gertatzen uzten badugu, C produktua gehiegi eratuko da, hau da, etekina baxua izango da. Erreakzioa azkarregi gertatzen badugu, A-k oso gutxi erreakzionatuko du, eta bihurtze txikia lortuko da. Horregatik, denbora optimo bat egongo da erreakzioa geratzeko. Hori bat-bateko hozketaren bidez egiten da.

Temperaturaren profil optimo bat ere egon daiteke.  $k_1$  eta  $k_2$  konstante zinetikoen tenperaturarekiko menpekotasuna berdina bada (aktibazio-energia oso antzekoak), erreakzioak ahalik eta temperatura altuenean gertatu behar du. Temperatura hori murriztapenen batek ezarritako muga bat izaten da, adibidez, produktuen polimerizazioa eta/edo degradazioa, materialaren temperatura maximoa, lan-presio maximoa, etab.

$k_1$ -ek  $k_2$ -k baino aktibazio-energia handiagoa badu, ahalik eta temperatura altuenean operatu behar dugu B-rako erreakzioari laguntzeko.  $k_1$ -ek  $k_2$ -k baino aktibazio-energia txikiagoa badu, profil optimoa temperatura altuan hasten dena izango da, erreakzioa azeleratzeko, eta, gero, txikituz doana, B-ren galerak C eman ez dezan. 2.7 irudiak temperaturaren eta kontzentrazioaren profil tipikoak erakusten ditu.



2.7. irudia. Temperaturaren eta konposizioaren profilak erreaktore ez-jarraituan

Orain, prozesu horretarako eredu matematiko bat lor dezakegu. Joko dugu likido erreakzionatzailearen dentsitatea konstantea dela.

Materia-balantze totala, erreaktiboak kargatu eta erreakzio-zikloa hasi eta gero, honako ekuazio honek emana dator:

$$\frac{d(\rho V)}{dt} = 0 - 0 \quad (2.48)$$

Ez dago ez sarrerarik, ez irteerarik. P konstantea denez,  $dV/dt = 0$  da. Hau da, bolumena erreaktorean konstantea da.

A osagairako materia-balantzea:

$$V \frac{dC_A}{dt} = -V k_1 C_A \quad (2.49)$$

B osagairako materia-balantzea:

$$V \frac{dC_B}{dt} = V k_1 C_A - V k_2 C_B \quad (2.50)$$

Ekuzio zinetikoak:

$$k_1 = \alpha_1 e^{-E_1/RT} \quad k_2 = \alpha_2 e^{-E_2/RT} \quad (2.51)$$

Erreaktorearen pareta metalikorako eredu taldekatu bat eta  $h = C_p T$  entalpia-ekuazioa erabiliz, honako hauek dira likidorako eta pareta metalikorako energia-balantzeak:

Prozesuaren energia-balantzea:

$$\rho V C_p \frac{dT}{dt} = -\lambda_1 V k_1 C_A - \lambda_2 V k_2 C_B - h_i A_i (T - T_M) \quad (2.52)$$

Pareta metalikorako energia-balantzea:

$$\rho_M V_M C_M \frac{dT_M}{dt} = h_0 A_0 (T_J - T_M) - h_i A_i (T_M - T) \quad (2.53)$$

non  $\lambda_1$  eta  $\lambda_2$  erreakzioaren bero exotermikoak diren bi erreakzioetarako.

Kontuan izan behar da, erreaktorea ur-lurrunez berotzen denean,  $T_J$   $T_M$  baino handiagoa dela, eta  $T_M$ ,  $T$  baino handiagoa. Urez hozten denean, tenperatura-aldeek kontrako zeinua dute. Kanpoko geruzako koefizientea ( $h_0$ ) oso ezberdina izaten da kondentsatzen den ur-lurrunerako eta hozte-urerako.

Berotzetik hozterako pausoa operazio zaila da, batez ere  $T_{max}$  tenperatura bateraino ahalik eta azkarren berotu nahi bada baina tenperatura horretatik pasatu gabe. Normalean, tenperatura-kontrolatzaileak ur-lurrunaren balbula (V-1) irekita mantentzen du, eta (V-2) ur-balbula itxita, berotze fasean. Fase horretan, uraren irteerako balbula (V-3) itxita dago eta kondentsatuaren balbula irekita. Hoztea behar denean, tenperatura kontrolatzaileak ur-lurrunaren balbula ixten du eta ur-balbula irekitzen du erreaktoreko tenperaturak kontsigna-puntuari jarraitu ahal izateko adina. V-3 balbula zabaldu egin behar da eta V-4 balbula itxi, hozteko ura sartzen denean.

Erlazio ezagun bat dago errorearen (kontsigna puntuaren tenperatura – erreaktoreko tenperatura) eta ur-lurrun  $F_s$  eta hozteko uraren  $F_w$  emarien artean.

$$F_s = f_{1(E)} \quad F_w = f_{2(E)} \quad (2.54)$$

Atorran gertatzen dena deskribatzeko, bi ekuazio talderen beharra izan dezakegu, berotzen edo hozten ari garen. Hirugarren etapa bat ere hartu behar dugu aintzat: atorra hozteko urez betetzea. Hozteko uraren emaria altua bada eta/edo atorraren bolumena txikia bada, atorra betetzeko behar den denbora aintzat ez hartzeko modukoa izango da.

#### A. Berotze fasea

Beroketan, materia-balantze totala eta ur-lurrunerako energia-balantzea adierazten duten ekuazioen eta ur lurrunerako egoera-ekuazio baten beharra izan dezakegu.

Materi-balantze totala:

$$V_J \frac{d\rho_J}{dt} = F_s \rho_s - W_c \quad (2.55)$$

non  $\rho_J$  ur lurrunaren dentsitatea den atorrari;  $V_J$ , atorraren bolumena;  $\rho_s$ , sartzen den ur-lurrunaren dentsitatea, eta  $W_c$ , ur-lurrunaren kondentsazio-abiadura.

Joko da kondentsaturiko likidoa berehala ateratzen dela lurrun tranpa baten bidez.

Ur-lurrunerako energia-balantzea:

$$V_J \frac{d(U_J \rho_J)}{dt} = F_s \rho_s H_s - h_0 A_0 (T_J - T_M) - W_c h_c \quad (2.56)$$

non  $U_J$  ur-lurrunaren barne-energia den;  $H_s$ , lurrunaren entalpia sarrerari, eta  $h_c$ , kondentsaturiko likidoaren entalpia.

Barne-energiaren (bero sentikorra) aldaketak normalean aintzat ez hartzeko modukoak izaten dira bero latentearen efektuekin konparatzen badira. Horrela, energia-balantze algebraiko bat erabil daiteke egoera estazionarioan:

$$W_c = \frac{h_0 A_0 (T_J - T_M)}{H_s - h_c} \quad (2.57)$$

Ur-lurrunerako egoera-ekuazioak  $T_J$  temperatura eta  $P_J$  presioa kalkulatzeko erabili daitezke,  $\rho_J$  dentsitatetik abiatuta. Adibidez, gas perfektuen ekuazioa erabiltzen bada:

$$\rho_J = \frac{M}{RT_J} \exp\left(\frac{A_w}{T_J} + B_w\right) \quad (2.58)$$

non  $M$  uraren pisu molekularra den, eta  $A_w$  eta  $B_w$ , uraren lurrun presioaren konstanteak.  $T_J$  ezagututa,  $P_J$  kalkula daiteke lurrun-presioaren ekuaziotik. Normalean, 2.58 ekuazioa iteratiboki ebatz daiteke,  $T_J$  kalkulatzeko  $\rho_J$  ezagutzen bada (2.55 ekuaziotik). Normalean,  $P_J$  ezagutu behar da sarrerako balbulan zehar lurrunaren emaria kalkulatzeko, emaria balbulan zeharreko presio diferentziaren menpekoa baita. Atorra inguratzen duen metalaren masa garrantzitsua bada, metalerako energia-balantze bat izan beharko da kontuan. Joko dugu aintzat ez hartzeko moduko delako.

Atorra duten errektore edo lurrungailu gehienetan, ur-lurrunak okupaturiko bolumena nahiko txikia da lurrunaren emari bolumetrikorekin alderatuta. Horregatik, atorraren erantzun dinamikoa oso azkarra izaten da eta ekuazio algebraiko sinpleak erabil daitezke. Lurrunaren emaria kondentsatuaren emariaren berdina izango da, eta iteratiboki kalkula daiteke bero-transferentziaren ekuazioa ( $Q = UA\Delta T$ ) eta atorrari presioa eta kondentsatuaren emaria erregulatzen dituen balbularen fluxuaren ekuazioa ebatziz.



### B. Hozte fasea

Atorratik hozteko ura jariatzen den denboran zehar, beroaren balantzearen ekuazio bat bakarrik behar da atorrari, baldin eta nahaste perfektuan dagoela jotzen badugu.

$$\rho_J V_J C_J \frac{dT_J}{dt} = F_w C_J \rho_J (T_{J0} - T_J) + h_0 A_0 (T_M - T_J) \quad (2.59)$$

non  $T_J$  uraren temperatura atorrari;  $\rho_J$ , uraren dentsitatea;  $C_J$ , uraren bero espezifikoak, eta  $T_{J0}$ , uraren temperatura sarreran diren.

Berotze-etapan, 7 aldagai ditugu ( $C_A$ ,  $C_B$ ,  $T$ ,  $T_M$ ,  $T_J$ ,  $\rho_J$  eta  $W_c$ ) eta 7 ekuazio (2.49, 2.50, 2.52, 2.53, 2.55, 2.57 eta 2.58 ekuazioak). Hozte-fasean 2.59 ekuazioa dugu 2.55, 2.57 eta 2.58 ekuazioen ordean, baina  $T_J$  bakarrik dugu  $T_J$ -ren,  $\rho_J$ -ren eta  $W_c$ -ren tokian.

#### 2.10. Destilazio-zutabe binario ideala

Destilazioa prozesu kimiko askotan erabiltzen da, korranteak banatzeko eta bukaerako edo tarteko korranteak purifikatzeko.

Zutaberik gehienak osagai aniztunak dira. Dena den, asko nahaste binario edo pseudobinario gisa hurbildu daitezke.

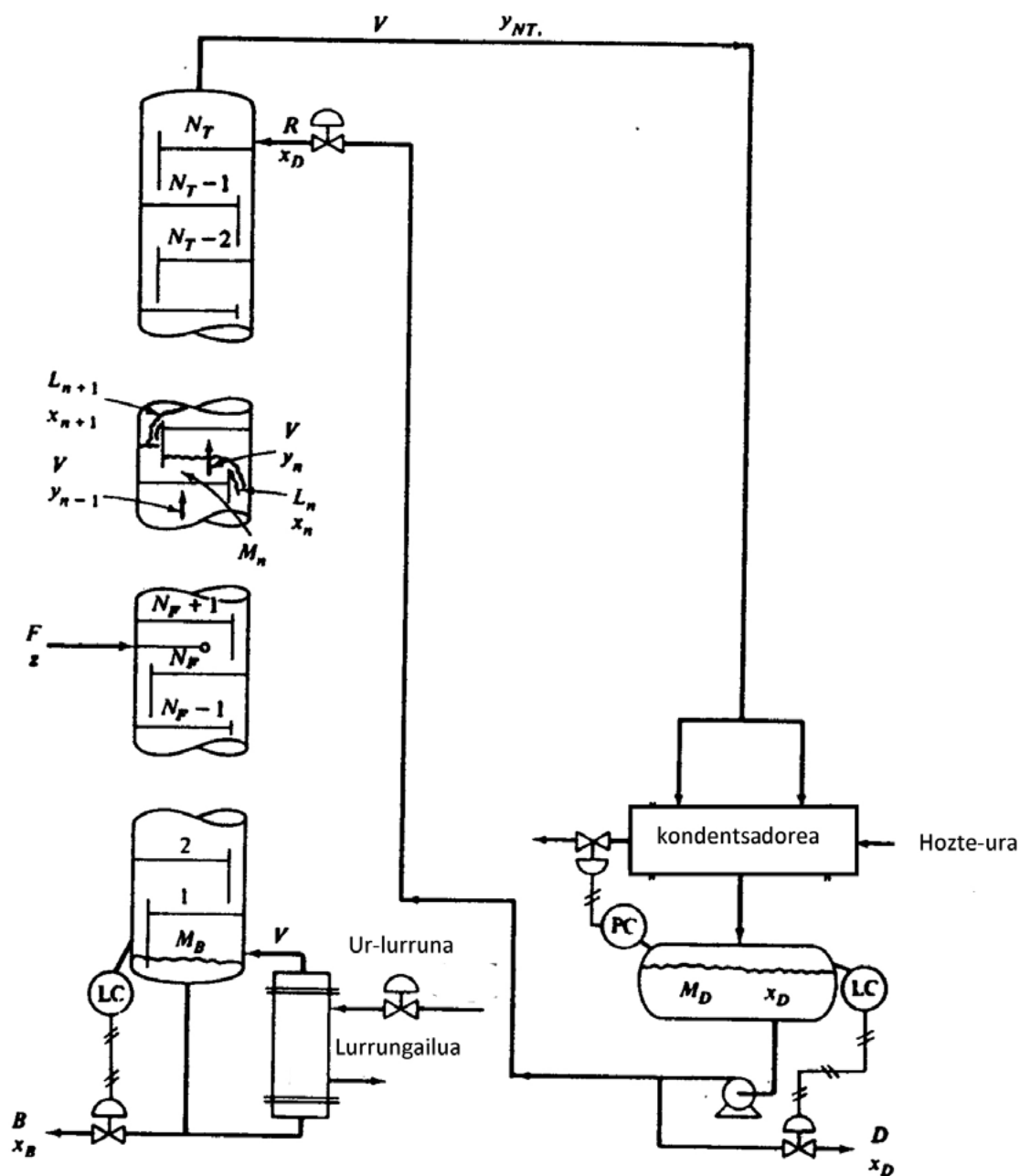
Sistema binario bat (2 osagai) dugula joko dugu, hegazkortasun erlatibo konstantearekin zutabe osoan zehar eta plater teorikoekin (%100eko eraginkortasuna), hau da, plater batetik irteten den lurruna orekan dago hor dagoen likidoarekin. Horrek adierazten du likido-lurrun orekarako erlazio erraz bat erabil daitekeela:

$$y_n = \frac{\alpha x_n}{1 + (\alpha - 1)x_n} \quad (2.60)$$

non  $x_n$  n.platerean likidoaren konposizioa (osagai hegazkorrenaren frakzio molarra) den;  $y_n$ , n.platerean lurrunaren konposizioa (osagai hegazkorrenaren frakzio molarra), eta  $\alpha$ , hegazkortasun erlatiboa.

Demagun zutabeak elikadura bakarra duela likido saturatu moduan (haren burbuila-puntuan)  $N_F$  platerean. Ikusi 2.8 irudia. Elikaduraren emaria  $F$  da (mol/min) eta konposizioa,  $z$  (osagai hegazkorrenaren frakzio molarra). Buruko lurruna erabat kondentsatzen da kondentsadore batean, eta errefluxuko danborrera doa, non likidoaren kantitate bat dagoen,  $M_D$  (molak). Danborraren edukia nahaste perfektuan dagoela joko da,  $x_D$  konposizioarekin. Likidoa bere burbuila puntuan dago danborrean. Errefluxua zutabeko buruko platerera ( $N_T$ ) ponpatzen da  $R$  emariarekin. Burutik, destilaturiko produktua  $D$  emariarekin irteten da.

Zutabearen goiko aldetik atzeraldi-danborrera doan lurrun-lerroan eta buruko platerera doan atzeraldi-lerroan, hildako-denborak ez dira aintzat hartzeko modukoak izango (normalean, zutabe errealetan, hori suposizio ona da). Kontuan izan behar da  $y_{NT}$  ez dela dinamikoki  $x_D$ -ren berdina. Biak berdina dira egoera estazionarioan bakarrik.



2.8. irudia. Destilazio binarioko zutabea

Zutabearen oinarrian, produktu likidoa B emariarekin eta  $x_B$  konposizioarekin irteten da. Lurruna, normalean, termosifoiko lurrungailu batean eraten da  $V$  emariarekin. Likidoak tutuetan zehar zirkulatzen du, zutabearen hondotik lurrungailu bertikalean, tutuetan likido-lurrun nahastearen dentsitate baxuagoa dela-eta. Joko dugu likidoak lurrungailuan eta zutabearen hondoan nahaste perfektuan daudela,  $x_B$  konposizio bera dutela eta likido kantitatea  $M_B$  (molak) dela. Emariak termosifoietan altuak izaten dira; beraz, suposizio hori egokia da. Zutabearen hondotik irteten

den lurrunaren konposizioa, eta 1 plateran sartzen dena,  $y_B$  da.  $x_B$  konposizioiko likidoarekin orekan dago.

Zutabeak, guztira,  $N_T$  plater teoriko ditu. Plater bakoitzeko likido kantitatea  $M_n$  da. Plater bakoitzean likidoa nahaste perfektuan dagoela jotzen da  $x_n$  konposizioarekin. Sistemako lurrunkantitatea aintzat ez hartzeko modukoa dela jotzen da. Lurrun-bolumena handia den arren, mol kopurua txikia da, lurrunaren dentsitatea likidoarena baino askoz txikiagoa delako. Suposizio hori ez da egokia presio handiko zutabeetan.

Fluxu ekimolarraren suposizioa ere egingo dugu. Bi osagaien lurruntze-beroak oso antzekoak badira, lurrun mol bat kondentsatzen denean, likido mol bat lurruntzen da. Jotzen da zutabeko bero-galerak eta plateretik platererako tenperatura aldaketak (bero sentikorraren eraginak) aintzat ez hartzeko modukoak direla. Suposizio horrek esan nahi du lurrunaren eta likidoaren emariak errekifikazio- eta agortze-sekzioetan konstanteak izango direla egoera estazionarioan. Mc Cabe-Thiele diagraman, operazio -lerroak lerro zuzenak dira.

Gu baldintza dinamikoetan interesaturik gaude. Aurreko suposizioek adierazten dute ezen, lurrunkantitatea aintzat ez hartzeko modukoa dela dioena kontuan harturik, lurrunaren emaria berdina dela zutabeko plateretan zehar, dinamikoki eta egoera estazionarioan.

$$V = V_1 = V_2 = V_3 = \dots = V_{NT}$$

$V$ -ren balio horiek ez dute zertan denborarekin konstanteak izan. Fluxu ekimolarra suposatzeak ondorio matematiko moduan plater bakoitzerako energia-balantzerik ez dela behar dakar.

Zutabeen zeharreko likidoaren emariak ez dira berdinak izango dinamikoki. Platereko fluidoaren mekanikaren menpekoak dira. Sarritan, formula erraz bat erabiltzen da plater bakoitzeko likido kantitatea ( $M_n$ ) platera uzten duen likido-emariarekin erlazionatzeko ( $L_n$ ).

$$F_L = 3.33 L_w (h_{ow})^{1.5} \quad (2.61)$$

non  $F_L$  gainezkatzailetik jariatzen den likido-emaria ( $\text{ft}^3/\text{s}$ ) den;  $L_w$ , gainezkatzailearen luzera ( $\text{ft}$ ), eta  $h_{ow}$ , gainezkatzailearen gainean likidoaren altuera ( $\text{ft}$ ).

Erlazio zehatzagoak lor daitezke, lurrunaren emariaren eraginak, dentsitateak eta abar kontuan hartzen dituztenak. Joko dugu erlazio funtzionala dela platereko likido kantitatearen eta emariaren artean.

$$M_n = f(L_n) \quad (2.62)$$

Azkenik, kondentsadorearen eta lurrungailuaren dinamika ez da aintzat hartzeko modukoa izango. Zutabe komertzialetan, trukagailu horien erantzun dinamikoa zutabearena baino askoz azkarragoa izaten da. Sistema batzuetan, ekipo laguntzaile horien dinamika garrantzitsua da, eta, ereduan, kontuan hartu behar da.

Sistema deskribatzen duten ekuazioak idatz ditzakegu dagoeneko:

*Kondentsadorea eta errefluxu-danborra*

Materia-balantze totala:

$$\frac{dM_D}{dt} = V - R - D \quad (2.63)$$

Osagai hegazkorrenerako materia-balantzea:

$$\frac{d(M_D X_D)}{dt} = V y_{NT} - (R + D) x_D \quad (2.64)$$

*Buruko (goiko) platera: (n = N<sub>T</sub>)*

Materia-balantze totala:

$$\frac{dM_{NT}}{dt} = R - L_{NT} \quad (2.65)$$

Osagai hegazkorrenerako materia-balantzea:

$$\frac{d(M_{NT} X_{NT})}{dt} = R x_D - L_{NT} x_{NT} + V y_{NT-1} - V y_{NT} \quad (2.66)$$

*Buruko plateraren azpian dagoen platera (n = N<sub>T</sub> - 1)*

Materia-balantze totala:

$$\frac{dM_{NT-1}}{dt} = L_{NT} - L_{NT-1} \quad (2.67)$$

Osagai hegazkorrenerako materia-balantzea:

$$\frac{d(M_{NT-1} X_{NT-1})}{dt} = L_{NT} x_{NT} - L_{NT-1} x_{NT-1} + V y_{NT-2} - V y_{NT-1} \quad (2.68)$$

*n.platera*

Materia-balantze totala:

$$\frac{dM_n}{dt} = L_{n+1} - L_n \quad (2.69)$$

Osagai hegazkorrenerako materia-balantzea:

$$\frac{d(M_n x_n)}{dt} = L_{n+1} x_{n+1} - L_n x_n + V y_{n-1} - V y_n \quad (2.70)$$

*Elikadura-platera (n = N<sub>F</sub>)*

Materia balantze-totala:

$$\frac{dM_{NF}}{dt} = L_{NF+1} - L_{NF} + F \quad (2.71)$$

Osagai hegazkorrenerako materia-balantzea:

$$\frac{d(M_{NF} x_{NF})}{dt} = L_{NF+1} x_{NF+1} - L_{NF} x_{NF} + V y_{NF-1} - V y_{NF} + F z \quad (2.72)$$

*Lehenengo platera (n = 1)*

Materia-balantze totala:

$$\frac{dM_1}{dt} = L_2 - L_1 \quad (2.73)$$

Osagai hegazkorrenerako materia-balantzea:

$$\frac{d(M_1 x_1)}{dt} = L_2 x_2 - L_1 x_1 + V y_B - V y_1 \quad (2.74)$$

*Lurrungailua eta zutabeko oinarria*

Materia-balantze totala:

$$\frac{dM_B}{dt} = L_1 - V - B \quad (2.75)$$

Osagai hegazkorrenerako materia-balantzea:

$$\frac{d(M_B x_B)}{dt} = L_1 x_1 - V y_B + B x_B \quad (2.76)$$

Plater bakoitzak eta zutabeko oinarriak orekako ekuazioak (2.60) dituzte. Era berean, plater bakoitzak ekuazio hidrauliko bat du (2.62). Beharrezkoak dira, halaber, bi ekuazio, zutabearen oinarrian eta errefluxu-danborrean maila-kontrolatzaileak adierazten dituztenak.

$$D = f_1 (M_D) \quad B = f_2 (M_B) \quad (2.77)$$

Ikus ditzagun orain sistemako askatasun-graduak. Elikadura-emaria  $F$  eta  $z$  konposizioa eza-gunak direla joko da.

Aldagai kopurua:

Plateretan konposizioak ( $x_n$ eta $y_n$ )	= $2N_T$
Plateretako likidoen emariak ( $L_n$ )	= $N_T$
Plateretan likidoa ( $M_n$ )	= $N_T$
Errefluxuko konposizioa ( $x_D$ )	= 1
Errefluxuko danborreko emariak ( $R$ eta $D$ )	= 2
Likidoa errefluxuko danborrean ( $M_D$ )	= 1
Zutabeko hondoko konposizioak ( $x_D$ eta $y_D$ )	= 2
Zutabeko hondoko emariak ( $V$ eta $B$ )	= 2
Hondoan atxikitako likidoa ( $M_B$ )	= 1
	4 $N_T$ + 9

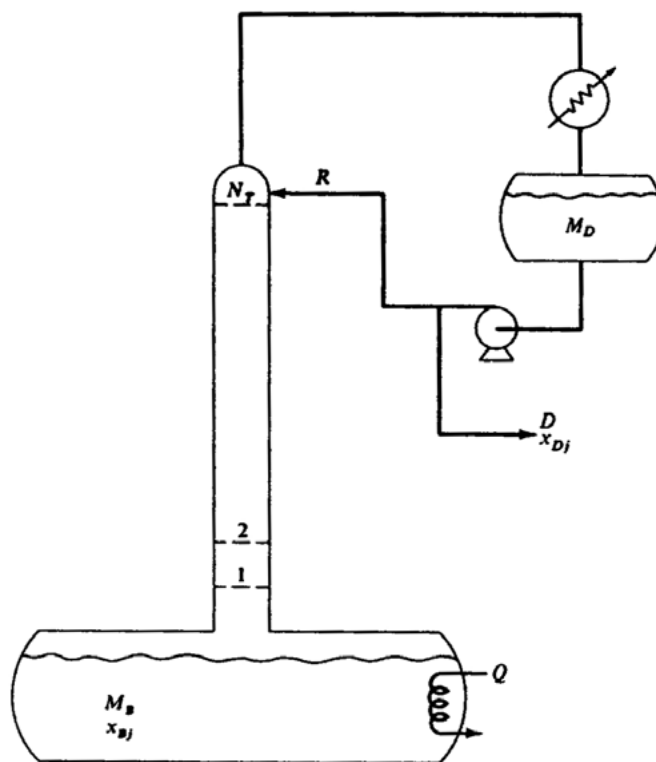
Ekuazio kopurua:

Plater bakoitzeko osagai baten materia-balantzea	= $N_T$
Plater bakoitzeko materia-balantze totala	= $N_T$
Oreka erlazioak (plater bakoitzean + hondoan)	= $N_T + 1$
Erlazio hidraulikoak	= $N_T$
Maila-kontrolatzaileak	= 2
Osagai baten materia-balantzea errefluxuan	= 1
Materia-balantze totala errefluxuko danborrean	= 1
Osagai baten materia-balantzea hondoan	= 1
Materia-balantze totala zutabeko hondoan	= 1
	4 $N_T$ + 7

Beraz, bi askatasun gradu daude. Kontrolaren ikuspuntutik horrek esan nahi du bi aldagai bakarrik daudela kontrola (finkatu) daitezkeenak. Espezifikatu behar diren bi aldagaiak  $R$  errefluxua eta termosifoiaren errotazio  $V$  lurrin kantitatea (edo lurrungailura sartutako beroa) dira. Konstante mantentzen daitezke (lotura irekiko sistema baten) edo bi kontrolatzailearen bidez aldatu egin daitezke, beste bi edozein aldagai konstante mantentzen badituzte. Adibidez, pentsa daiteke  $R$  eta  $V$  manipulatzean, buruko eta isatseko (hondarreko) konposizioak ( $x_D$  eta  $x_B$ ) kontrolatzeko.

### 2.11. Destilazio ez-jarraitua likido erretentzioarekin

Destilazio ez-jarraitua bolumen txikiko produktuetarako erabiltzen da. Zutabe bakarra erabiltzen da osagai askoko nahaste bat banatzeko,  $N-1$  zutabe jarraitu erabili beharrean. Destilazio ez-jarraituan, energia-konsumoa operazio jarraituan baino handiagoa izaten da, baina, bolumen txikiko balio gehigarridun produktuekin, kostu energetikoak ez dira garrantzitsuenak izaten.



2.9. irudia. Destilazio-zutabe ez-jarraitua

2.9 irudiak ohiko destilazio-zutabe ez-jarraitu bat erakusten du. Elikadura galdaran kargatzen da eta hori berotu egiten da irakiten hasi arte. Lurruna gorantz doa zutabearen zehar eta kondentsadorean kondentsatu egiten da. Kondentsaturiko likidoa errefluxuko danborrera doa. Likido maila jakin bat lortzen denean danborrean, likidoa zutabeko goiko platerera ponpatzen hasten da.

Zutabeak errefluxu totalen lan egiten du, osagai arinenaren (1 osagaia) konposizioak  $x_{D1}$  espezifikaturiko purutasuna lortu arte destilatuan. Orduan, produktu destilatu bat lortzen da; hori osagai arinena izango da, emari batekin. Denbora batez, 1 osagaiaren kantitatea oso balio baxuetaraino jaisten da galdaran eta destilatuaren purutasuna  $x_{D1}$  jaitsi egiten da. Denbora-tarte bat dago, non destilatuak 1 osagaiaren kantitate oso txikia duen produktu gisa erabili ahal izateko, eta 2 osagaiaren kantitate txikiegia duen hurrengo produktu astunen gisa erabili ahal izateko. Denbora-tarte horretan, ebakidura bat ateratzen da  $x_{D2}$ -k espezifikatutako balioa lortu arte. Orduan, bigarren produktua ateratzen da. Horrela, hainbat produktu atera daitezke zutabe bakar batekin.

Zutabe ez-jarraitu baten diseinu eta operazio optimoak oso zeregin interesgarriak dira. Prozesuak presio eta errefluxu aldakorretan funtziona dezake produktuen lortze-etapa bakoitzean. Zutabearen diseinu optimoa (diametroa eta plateren kopurua) eta operazio optimoa garrantzitsuak izan daitezke denborak txikitzean, horrek produktuak lortzeko ahalmena handitzen du eta/edo produktuen kalitatea hobetu.

Joko da platerak teorikoak direla, fluxua ekimolarra dela eta hegazkortasun erlatiboak konstanteak direla. Galdarara elikatutako materia kantitate totala  $M_{B0}$  (molak) da. Material hori elikadura freskoa izan daiteke,  $z_j$  konposizioduna, edo elikadura freskoaren eta bi produkturen destilazioaren artean lortutako ebakiduren nahastea. Galdararen konposizioa  $x_{B0j}$  da operazioaren hasieran. Galdarako konposizioa, denbora jakin batera,  $x_{Bj}$  da. Likido kantitatea  $M_B$  da, galdaran

denbora-instante batean. Plateretan eta errefluxuko danborrean atxikitako likidoa konstantea dela joko da. Lurrun-emia konstantea da,  $V$ , (molak/h). Errefluxuko danborra, platerak eta galdara  $x_{B0j}$  konposizioako material batez beterik daude hasieran.

Honako ekuazio hauek deskribatzen dute osagai askoko nahaste baten destilazio ez-jarraitua:

Galdara:

$$\frac{dM_B}{dt} = -D \quad (2.78)$$

$$\frac{d(M_B x_{Bj})}{dt} = R x_{1j} - V y_{Bj} \quad (2.79)$$

$$y_{Bj} = \frac{\alpha_j x_{Bj}}{\sum_{k=1}^{NC} \alpha_k x_{Bk}} \quad (2.80)$$

n platera:

$$M_n \frac{dx_{nj}}{dt} = R [x_{n+1,j} - x_{nj}] + V [y_{n-1,j} - y_{nj}] \quad (2.81)$$

$$y_{nj} = \frac{\alpha_j x_{nj}}{\sum_{k=1}^{NC} \alpha_k x_{nk}} \quad (2.82)$$

NT platera (buruko platera):

$$M_{NT} \frac{dx_{NT,j}}{dt} = R [x_{Dj} - x_{NT,j}] + V [y_{NT-1,j} - y_{NT,j}] \quad (2.83)$$

$$y_{NT,j} = \frac{\alpha_j x_{NT,j}}{\sum_{k=1}^{NC} \alpha_k x_{NT,k}} \quad (2.84)$$

Atzeraldi-danborra:

$$M_D \frac{dx_{D,j}}{dt} = V y_{NT,j} - [R + D] x_{Dj} \quad (2.85)$$

$$R = V - D \quad (2.86)$$



### 3. gaia

## Laplaceren transformatua

Gai honetan, sistema dinamikoak aztertuko dira; denborarekin aldatzen dira sistema horiek, eta beren portaera denbora-aldagai independentea duten ekuazio diferentzialen bidez deskribatzen da. Sistema edo ekuazio horiek aztertzeko, berek deskribatzen dituzten ekuazio diferentzialak ebazti beharko dira.

Ikastaro honetan landuko diren elementuak koefiziente konstantedun ekuazio diferentzial arrunt linealen bidez deskribatuko dira.

Elementuak ekuazio karakteristiko motaren arabera sailkatzen dira:

- elementu sinpleak: koefiziente konstantedun eta 2 baino ordena handiagoa ez duten ekuazio diferentzial arrunt linealen bidez deskriba daitezkeenak.
- elementu konplexuak: elementu sinpleak ez diren guztiak.

#### 3.1. Ekuazio diferentzial arruntak eta partzialak, linealak eta ez-linealak

Honela definitzen da ekuazio diferentzial arrunt bat: menpeko aldagai bat edo gehiago, aldagai independente bat eta menpeko aldagaien deribatu bat edo gehiago aldagai independentearekiko dituen berdintasuna.

$$\text{Adib. } a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = x(t) \quad (3.1)$$

non  $y(t)$  eta  $x(t)$  menpeko aldagaiak diren;  $t$  aldagai independentea da.

Honela definitzen da ekuazio diferentzial partzial bat: menpeko aldagai bat edo gehiago, aldagai independente bi edo gehiago eta aldagai independenteekiko menpeko aldagaien deribatu partzialak dituen berdintasuna.

$$\text{Adib. } \frac{\partial T}{\partial x} = k \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.2)$$

non  $T(x,t)$  menpeko aldagaia den eta  $x$  eta  $y$  aldagai independenteak diren.

Ekuazio diferentzial lineala, berriz, menpeko aldagaietan eta beren deribatuetan, lehen mailako terminoen batuketa da.

$$\text{Adib.}, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = k \frac{\partial T}{\partial t} \text{ ekuazioa lineala da.}$$

Ekuazio diferentzial ez-lineala izango da baldin eta termino guztiak ez badira lehen mailakoak.

$$\text{Adib.}, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + y = 0 \text{ edo } \frac{d^2y}{dt^2} + \cos y = 0, \text{ edo baita } \frac{d^2y}{dt^2} + x \frac{dy}{dt} + y = 0.$$

### 3.2. Laplaceren transformatua

Denboran jarraituak diren prozesuetarako egoera-aldagaiak sarrerako eta irteerako aldagaiekin erlazionatzen dituzten ekuazio diferentzialen ereduak *egoeren espazioko eredu* deitzen dira. Ekuazio diferentzial horien ebazpena denboraren eremuan egin daiteke, egoeren espazioan lan eginez. Kontrolean, batez ere ereduak sinpleak badira (ikastaro honetan erabilitakoak bezalakoak), Laplaceren eremuan lan egin daiteke. Laplaceren eremuan lan eginda, ekuazio diferentzial arruntak ekuazio algebraiko bihurtzeko daitezke, eta eskuz ebazteko errazagoak izango dira.

Ikastaroan zehar, Laplaceren eremuan lan egingo dugu ekartzen dituen erraztasunengatik. Laplaceren transformatua koefiziente konstantedun ekuazio diferentzial arrunt linealen ebazpenari aplikatzen zaion teknika da, eta transferentzia-funtzioen erako ereduak sortzen ditu (hurrengo gailan landuko ditugu).

$f(t)$  funtzio baten Laplaceren transformatua honela definitzen da:

$$L\{f(t)\} = f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt \quad (3.5)$$

Kontuan hartu behar diren hainbat puntu daude:

- $t$  aldagaiaren funtzioa Laplace aldagaiaren ( $s$ ) funtzio batean transformatzen da, eta aldagai konplexua da. Horregatik esaten da  $t$  eremutik (denbora)  $s$  eremura (edo Laplace) pasatzen dela.
- $f(s)$  Laplaceren transformatuak ez du  $f(t)$ -ri buruzko informaziorik  $t < 0$  denean. Kontrolean hori ez da garrantzitsua, denboraren balio positiboetan gertatzen dena ezagutu nahi baita. Izan ere, sistemen aldagaiak honela definitzen dira  $t < 0$  denerako:  $f(t) = 0$ .
- Laplaceren transformatua ezohiko integral edo integral inpropio batekin definitzen denez, ez da zertan  $f(t)$  funtzio guztietarako Laplaceren transformatua egon. Irakasgai honetan erabiliko diren funtzio guztiek Laplaceren transformatua izango dute.
- Laplaceren transformatua lineala da. Horrek, matematikoki, zera esan nahi du:

$$L\{af_1(t) + bf_2(t)\} = aL\{f_1(t)\} + bL\{f_2(t)\} \quad (3.6)$$

- $f(t)$  funtzioak eta dagokion  $f(s)$  transformatuak bikote bakarra osatzen dute. Horrek esan nahi du ez daudela  $f(t)$  eta  $g(t)$  bi funtzio ezberdin Laplaceren transformatu bera dutenak.

### 3.3. Oinarrizko zenbait funtzioen Laplaceren transformatuak

Atal honetan, oinarrizko zenbait funtzioen transformatuak lortuko dira, ikastaroan zehar tresna gisa balioko dutenak.

— Funtzio mailakatua

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Funtzio hori funtzio mailakatu unitarioa da, hau da, haren anplitudeak 1 balio du, eta, aurrerantzean,  $u(t)$  deituko diogu. Honako hau da haren Laplace transformatua:

$$L\{f(t)\} = L\{u(t)\} = \int_0^{\infty} 1 e^{-st} dt = \left[ -\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s} \quad (3.8)$$

Mailakatzearen anplitudea  $A$  izanez gero, haren transformatua  $A/s$  litzateke linealtasun-propietatearen ondorioz.

— Funtzio esponentziala

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-at} & t \geq 0 \end{cases} = u(t)e^{-at} \quad (3.9)$$

non  $u(t)$  funtzio mailakatu unitarioa den. Laplace transformatuaren definizioa aplikatuz,

$$L\{u(t)e^{-at}\} = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = \left[ -\frac{e^{-(s+a)t}}{s+a} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s+a} \quad (3.10)$$

$s + a > 0$  denerako, hau da,  $s > -a$ .

— Malda-funtzioa

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases} = tu(t) \quad (3.11)$$

$$L\{tu(t)\} = \int_0^{\infty} t e^{-st} dt \quad (3.12)$$

Zatika integratuz,

$$t = u \Rightarrow du = dt$$

$$e^{-st} dt = dv \Rightarrow v = -e^{-st}/s$$

$$L\{tu(t)\} = \left[ -\frac{t}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{s} e^{-st} dt = \left[ -\frac{t}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} + \left[ -\frac{1}{s^2} e^{-st} \right]_0^{\infty} = 0 + \frac{1}{s^2} \quad (3.13)$$

— Sinu-funtzioa

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \text{sen } kt & t \geq 0 \end{cases} = u(t)\text{sen } kt \quad (3.14)$$

$$L\{u(t)\text{sen } kt\} = \int_0^{\infty} \text{sen } kt e^{-st} dt \quad (3.15)$$

Zatika integratuz,

$$u = e^{-st} \Rightarrow du = -se^{-st}dt$$

$$dv = \text{sen } kt dt \Rightarrow v = -\frac{1}{k} \cos kt$$

$$\begin{aligned} L\{u(t)\text{sen } kt\} &= \left[ -\frac{1}{k} e^{-st} \cos kt \right]_0^{\infty} - \frac{s}{k} \int_0^{\infty} e^{-st} \cos kt dt = \\ &= \frac{1}{k} - \frac{s}{k} \left\{ \left[ \frac{1}{k} e^{-st} \text{sen } kt \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{s}{k} e^{-st} \text{sen } kt dt \right\} = \\ &= \frac{1}{k} - \frac{s^2}{k^2} \int_0^{\infty} e^{-st} \text{sen } kt dt = \frac{1}{k} - \frac{s^2}{k^2} L\{u(t)\text{sen } kt\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Hortaz,

$$\left(1 + \frac{s^2}{k^2}\right) L\{u(t)\text{sen } kt\} = \frac{1}{k} \Rightarrow L\{u(t)\text{sen } kt\} = \frac{1/k}{1 + s^2/k^2} = \frac{k}{s^2 + k^2} \quad (3.17)$$

— Kosinu-funtzioa

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \cos kt & t \geq 0 \end{cases} = u(t)\cos kt \quad (3.18)$$

Sinu-funtziorako erabilitako metodo bera erabiliz,

$$L\{u(t)\cos kt\} = \frac{s}{s^2 + k^2} \quad (3.19)$$

— Deribatuen transformatuak

Laplace transformatuak t-rekiko deribazio-operazioa biderketa baten (s-rekin) transformatzeko propietatea du. Zera frogatuko da:

$$L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sf(s) - f(0) \quad (3.20)$$

non  $f(s) = L\{f(t)\}$  den eta  $f(0) = f(t)$ ,  $t = 0$  denerako.

$$L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt \quad (3.21)$$

Zatika integratuz,

$$u = e^{-st} \Rightarrow du = -se^{-st} dt$$

$$dv = \frac{df}{dt} dt \Rightarrow v = f$$

Hortaz,

$$L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = [fe^{-st}]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} fe^{-st} dt = -f(0) + sf(s) \quad (3.22)$$

Kontrolean, normalean  $f(0) = 0$ ; ondorioz, lehenengo deribatuaren transformatua  $sf(s)$  izaten da.

Bigarren deribatuaren transformatua aurkitzeko, lehenengo deribatua bi aldiz erabiltzen dugu,

$$\begin{aligned} L\left\{\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right\} &= L\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dt}\right)\right\} = sL\left\{\frac{df}{dt}\right\} - \left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{t=0} = \\ &= s[sf(s) - f(0)] - f'(0) = s^2f(s) - sf(0) - f'(0) \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$t = 0 \text{ bada, } f = 0 \text{ eta } df/dt = 0 \Rightarrow L\left\{\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right\} = s^2f(s)$$

$n$  garren deribatuaren transformatua era berean ondoriozta daiteke:

$$L\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n f(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f^{(1)}(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \quad (3.24)$$

non  $f^{(i)}(0)$   $t$ -rekiko  $f(t)$ -ren  $i$ -garren deribatua den,  $t = 0$  baliorako.

### 3.4. Ekuazio diferentzialen soluzioa

Ekuazio diferentzialak ebazteko Laplace transformatuaren metodoan, funtzioak beren transformatu bihurtzen dira eta lortzen diren ekuazioak aljebraikoki ebazten dira.

Honako hau da Laplaceren transformatuen bidez koefiziente konstantedun ekuazio diferentzial lineal arruntak ebazteko prozedura:

- Ekuazioaren bi aldeetan, Laplaceren transformatuak hartu. Hasierako baldintzak deribatuen transformatuetan hartzen dira kontuan.
- Lortzen den ekuazioa aljebraikoki ebatzi funtzio ezezagunerako.
- Aurreko puntuan lortutako Laplace transformatua duen  $t$  funtzioa aurkitu. Hori da pausorik zailena; transformatuaren inbertsioa deitzen da eta hurrengo puntuan azalduko da. Beste teknika batzuk dauden arren, frakzio partzialetan, hedapena izenekoak bakarrik garrantuko da.

### 3.4.1. Frakzio partzialak

#### 1. Adibidea

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + y = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

Deskribatu den prozedimendua aplikatuz,

- ekuazioaren bi aldeetan, transformatuak hartzen dira:

$$sy(s) - y(s) = \frac{1}{s} \quad (3.26)$$

- funtzio ezezagunerako lortzen den ekuazioa aljebraikoki ebatzi:

$$y(s) = \frac{1}{s(s+1)} \quad (3.27)$$

Frakzio partzialen teoria aplikatuz, ekuazio hau honela idatz daiteke:

$$y(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} \quad (3.28)$$

non  $A$  eta  $B$  konstanteak diren. Laplace transformatuen tauletan begiratuz:

$$y(t) = A + Be^{-t} \quad (3.29)$$

$A$  eta  $B$  ezagutuko balira, emaitza izango genuke.  $A$ -k eta  $B$ -k (3.28) ekuazioko berdintasuna betetzen duten balioak izan behar dituzte.  $A$  determinatzeko (3.28) ekuazioa  $s$ -z biderkatzen dugu:

$$\frac{1}{(s+1)} = A + \frac{Bs}{s+1} \quad (3.30)$$

Berdintasun hori  $s$  guztirako denez,  $s = 0$  rako ere bete behar da.  $s = 0$  (3.30) ekuazioan ordezkatzuz, zera daukagu:

$$A = 1$$

B determinatzeko, (3.28) ekuazioaren alde biak  $(s+1)$ -z biderkatzen dira:

$$\frac{1}{s} = \frac{A}{s}(s+1) + B \quad (3.31)$$

$s = -1$  ordezkatzuz,  $B = -1$  balioa lortzen da.

Gero,

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \quad (3.32)$$

Hortaz,

$$y(t) = 1 + 1e^{-t} \quad (3.33)$$

## 2. Adibidea

$$\begin{cases} \frac{d^3y}{dt^3} + 2\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 2y = 4 + e^{2t} \\ t = 0, y(0) = 1, \frac{dy}{dt} = 0, \frac{d^2y}{dt^2} = -1 \end{cases} \quad (3.34)$$

Laplace transformatuak hartuz eta  $y(s)$ -rako ebatziz, zera dugu:

$$y(s) = \frac{s^4 - 6s^2 + 9s - 8}{s(s-2)(s^3 + 2s^2 - s - 2)} = \frac{s^4 - 6s^2 + 9s - 8}{s(s-2)(s+1)(s+2)(s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s+2} + \frac{E}{s-1} \quad (3.35)$$

A kalkulatzeko, (3.35) ekuazioaren bi aldeak  $s$ -z biderkatzen ditugu eta  $s = 0$  egiten dugu. Emaitza  $A = -2$  da. Beste konstanteak era berean determinatzen dira. Prozedura honako taula honetan laburtzen da:

Konstanteak determinatzeko	(3.35) ek. hurrengo balioez biderkatu	s balio hauekin berdindu	Emaitza
B	$s - 2$	2	$B = 1/12$
C	$s + 1$	-1	$C = 11/3$
D	$s + 2$	-2	$D = -17/12$
E	$s - 1$	1	$E = 2/3$

Orduan, emaitza:

$$y(t) = -2 + \frac{1}{12}e^{2t} + \frac{11}{3}e^{-t} - \frac{17}{12}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^t \quad (3.36)$$

*Erro konplexuak*

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = 2 \\ t = 0 \Rightarrow y(0) = 0, \frac{dy}{dt} = 0 \end{cases} \quad (3.37)$$

Laplaceren transformatuak aplikatuz,

$$y(s) = \frac{2}{s(s^2 + 2s + 2)} = \frac{2}{s(s+1+j)(s+1-j)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+1+j)} + \frac{C}{(s+1-j)} \quad (3.38)$$

Erro konplexuen presentziak ez du prozedura aldatzen, zaildu bakarrik egiten du. A lortzeko (3.38), ekuazioa  $s$ -z biderkatzen da eta  $s = 0$  egiten da.

$$A = \frac{2}{(1+j)(1-j)} = 1 \quad (3.39)$$

B lortzeko, (3.38) ekuazioa  $(s + 1 + j)$ -z biderkatu eta  $s = (-1-j)$  egiten da.

$$B = \frac{2}{(-1-j)(-2j)} = \frac{-1-j}{2} \quad (3.40)$$

C lortzeko, (3.38) ekuazioa  $(s + 1 - j)$ -z biderkatzen da eta  $s = (-1 + j)$  egiten da.

$$C = \frac{2}{(-1+j)(2j)} = \frac{-1+j}{2} \quad (3.41)$$

Gero,

$$y(s) = \frac{1}{s} + \left(\frac{-1-j}{2}\right) \frac{1}{(s+1+j)} + \left(\frac{-1+j}{2}\right) \frac{1}{(s+1-j)} \quad (3.42)$$

$y(s)$  inbertitzeko,  $1/(s + a) e^{-at}$ -ren transformatua dela erabiltzen dugu. A zenbaki konplexua izateak ez du emaitza hori baliogabetzen.

$$y(t) = 1 + \left(\frac{-1-j}{2}\right) e^{-(1+j)t} + \left(\frac{-1+j}{2}\right) e^{-(1-j)t} \quad (3.43)$$



$e^{(a+bj)t} = e^{at} (\cos bt + j \operatorname{sen} bt)$  identitatea erabilita, zera daukagu:

$$y(t) = 1 - e^{-t} (\cos t + \operatorname{sen} t) \quad (3.44)$$

Ikusi da  $y(s)$ -ren izendatzailean erro konjokatu konplexuek bi termino konplexu eman ditzutela konplexuek frakzio partzialetara hedatzean. Termino horietan, konstanteak, B eta C, konjokatu konplexuak dira. Halaber, ikusi da termino horiek identitate trigonometrikoarekin konbinatu direnean termino konplexuak ezeztatu egin direla, eta  $y(t)$ -rako emaitza erreala eman. Noski, beharrezkoa da  $y(t)$  erreala izatea, hasierako ekuazio diferentziala eta hasierako baldintzak errealak baitziren. Informazio hori izendatzailean erro konplexu konjokatuak agertzen dituzten kasuetarako orokortu daiteke. Honako hau da kasu orokorra:

$$y(s) = \frac{F(s)}{(s+k_1+jk_2)(s+k_1-jk_2)} \quad (3.45)$$

(3.45) ekuazioa frakzio partzialetan hedatuz:

$$\frac{F(s)}{(s+k_1+jk_2)(s+k_1-jk_2)} = F_1(s) + \left( \frac{a_1+jb_1}{s+k_1+jk_2} + \frac{a_2+jb_2}{s+k_1-jk_2} \right) \quad (3.46)$$

non  $a_1, a_2, b_1, b_2$  frakzio partzialetan hedatzerakoan kalkulatu behar diren konstanteak diren eta  $F_1(s)$  frakzioen serie bat den,  $F(s)$ -ren ondorio.

Aurreko adibidean,

$$a_1 = -1/2 \quad a_2 = -1/2 \quad b_1 = -1/2 \quad b_2 = 1/2 \quad F_1(s) = 1/s.$$

(3.46) ekuazioko berdintasunaren ezker aldeko terminoa erreala denez  $s$  erreala guztirako, eskuinaldeko terminoak ere erreala izan beharko du  $s$  erreala guztirako. Baturiko bi konplexu konjokatuak zenbaki erreala ematen dutenez, eskuinaldeko terminoa erreala izango da  $s$  erreala guztirako, baldin eta soilik baldin bi terminoak konplexu konjokatuak badira. Terminoetako izendatzaileak konjokatuak direnez, horrek adierazten du zenbakitzaileek ere konjokatuak izan behar dutela, hau da,  $a_2 = a_1$  eta  $b_2 = -b_1$ . Horixe lortu zen aurreko adibidean. Oro har, horren arabera, (3.46) ekuazioa honela geratuko litzateke:

$$\frac{F(s)}{(s+k_1+jk_2)(s+k_1-jk_2)} = F_1(s) + \left( \frac{a_1+jb_1}{s+k_1+jk_2} + \frac{a_1-jb_1}{s+k_1-jk_2} \right) \quad (3.47)$$

Erro konplexu konjokatuetatik datozen terminoak transformatu inbertsoan honela idatz daitezkeela ezarri da jadanik,

$$(a_1+jb_1)e^{(-k_1-jk_2)t} + (a_1-jb_1)e^{(-k_1+jk_2)t} \quad (3.48)$$

Berriro,  $e^{(C_1+jC_2)t} = e^{C_1t} (\cos C_2t + j \operatorname{sen} C_2t)$  identitatea erabiliz, (3.48) ekuazioa honela geratzen da:

$$2e^{-k_1t} (a_1 \cos k_2t + b_1 \operatorname{sen} k_2t) \quad (3.49)$$

*Erro errepikatuak*

$$\begin{cases} \frac{d^3y}{dt^3} + 2\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + y = 1 \\ t = 0 \Rightarrow y(0) = 0, \frac{dy}{dt} = 0, \frac{d^2y}{dt^2} = 0 \end{cases} \quad (3.50)$$

Laplaceren transformatuak hartuz,

$$y(s) = \frac{1}{s(s^3 + 3s^2 + 3s + 1)} \quad (3.51)$$

Faktorizatuz eta frakzio partzialetan hedatuz:

$$y(s) = \frac{1}{s(s+1)^3} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+1)^3} + \frac{C}{(s+1)^2} + \frac{D}{(s+1)} \quad (3.52)$$

Orain arte bezala, A lortzeko ekuazioaren bi aldeak s-z biderkatzen ditugu eta s = 0 egiten dugu. Honek A = 1 ematen du.

Ekuazioaren alde biak (s+1)<sup>3</sup>-z biderkatuz,

$$\frac{1}{s} = \frac{A(s+1)^3}{s} + B + C(s+1) + D(s+1)^2 \quad (3.53)$$

s = -1 eginez (3.53) ekuazioan, B = -1 lortzen da.

Orain, C kalkulatu saiatzen bagara (3.52) ekuazioa (s+1)<sup>2</sup>-z biderkatuz eta s = -1 eginez, B duen terminoa infinitua egiten da. Gauza bera gertatzen da D-ren determinazioan. Beraz, metodo alternatibo bat aurkitu behar da C eta D kalkulatzeko.

(3.53) ekuazioa s-rekiko deribatzen bada, emaitza honako hau da:

$$-\frac{1}{s^2} = \frac{A(s+1)^2(2s-1)}{s^2} + C + 2D(s+1) \quad (3.54)$$

Deribazio horren emaitza interesgarria da, B ezeztatzen duelako eta C (s + 1) faktoretik askatzen duelako, eta, bitartean, A eta D faktore horrekin uzten ditu. Orain, s = -1 eginez, (3.54) ekuazioan, C = -1 balioa lortzen da.

D lortzeko, berriro s-rekiko deribatzen dugu,

$$\frac{2}{s^3} = 2A \frac{(s+1)(s^2 - s + 1)}{s^3} + 2D \quad (3.55)$$

Orain, C ezeztatu da; D (s+1) terminotik askatu da eta A-k (s + 1)-z biderkatuta jarraitzen du. s = -1 eginez, (3.55) ekuazioan, D = -1 geratzen da.

Emaitza, beraz, honako hau da:

$$y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)^3} - \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)} \quad (3.56)$$

Laplace transformatuen tauletan begiratuta, zera lortzen da:

$$y(t) = 1 - e^{-t} \left( \frac{t^2}{2} + t + 1 \right) \quad (3.57)$$

Adibide horren emaitza orokortu egin daiteke.  $(s + a)^n$  faktorearen agerpenak,  $y(s)$ -ren frakzio partzialen hedapenean,  $n$  termino ematen ditu izendatzailean:

$$\frac{C_1}{(s+a)^n}, \frac{C_2}{(s+a)^{n-1}}, \dots, \frac{C_n}{(s+a)} \quad (3.58)$$

$C_1$  konstantea hedapena  $(s + a)^n$ -rekin biderkatuz kalkula daiteke eta  $s = -a$  eginez. Beste konstanteak biderkaduraren emaitza era jarraituan deribatuz lortzen dira. Termino horiek transformatu inbertsoa egitean, honako adierazpen hau ematen dute:

$$\left[ \frac{C_1}{(n-1)!} t^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!} t^{n-2} + \dots + C_{n-1} t + C_n \right] e^{-at} \quad (3.59)$$

### Soluzioaren izaera kualitatiboa

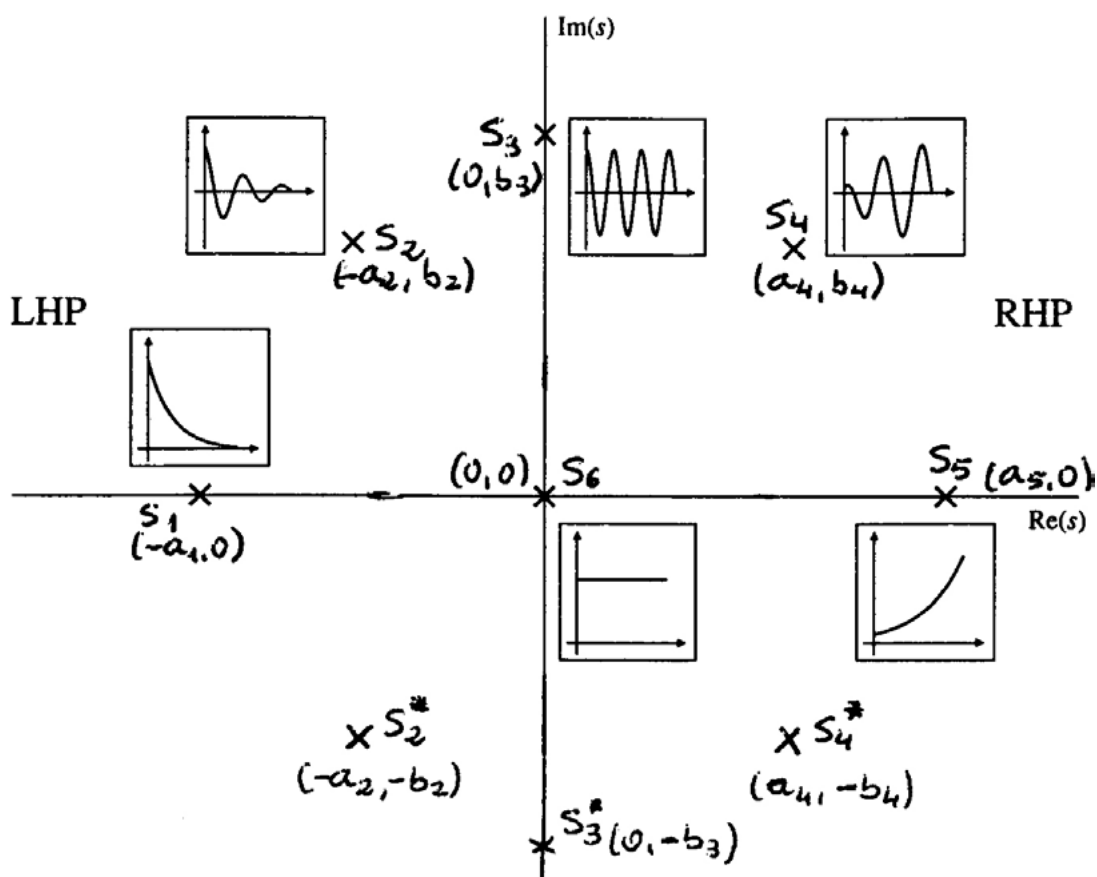
$y(t)$  soluzioaren *forman* edo *itxuran* bakarrik interesaturik egonez gero, askotan gertatzen baita,  $y(s)$ -ren izendatzailearen erroetatik zuzenean lor daiteke informazio hori.  $y(t)$  soluzioaren izaera kualitatiboa plano konplexuan erlaziona daiteke  $y(s)$ -ren izendatzailearen erroen kokapenarekin.

Har dezagun aintzat 3.1.irudia. Plano konplexuaren errepresentazio bat da, non hainbat erro tipiko kokatu diren dagozkien koordinatuekin. 3.1. taulak erro horietako bakoitzei dagozkien  $y(t)$  ekuazioko terminoen forma ematen du.  $C_1$  eta  $C_2$  konstanteak arbitrarioak dira eta lehen azaldu-tako teknikarekin kalkulatu dira.

Erro horietako edozein errepikatuta egongo balitz, 3.1. taulan emandako terminoa potentzia serie batez  $t$ -n biderkatzen da,  $K_1, K_2 t, K_3 t^2 + \dots + K_r t^{r-1}$ , non  $r$  erroaren errepikapen kopurua den eta  $K_1, K_2, \dots, K_r$  konstanteak frakzio partzialen hedapenaren bidez ebalua daitezkeen.

**3.1. taula.** Erro tipikoei dagozkien  $y(t)$  ekuazioko terminoen itxura

Erroak	$y(t)$ -n terminoak, $t > 0$ denerako
$s_1$	$C_1 e^{-at}$
$s_2, s_2^*$	$e^{-a_2 t} (C_1 \cos b_2 t + C_2 \sin b_2 t)$
$s_3, s_3^*$	$C_1 \cos b_3 t + C_2 \sin b_3 t$
$s_4, s_4^*$	$e^{a_4 t} (C_1 \cos b_4 t + C_2 \sin b_4 t)$
$s_5$	$C_1 e^{a_5 t}$
$s_6$	$C_1$



3.1. irudia. Plano konplexuan erro tipikoen kokapena

Begi-bistakoa da ardatz irudikariak erroak bi zonatan banatzen dituela. Ardatz irudikariaren ezkerrean kokaturiko erroei dagozkien terminoak, denborarekin, esponentzialki txikituz doaz eta zerorantz jotzen dute; eskuinaldean kokaturiko erroak, berriz, denborarekin, esponentzialki handituz doaz. Jatorriko erroei dagozkien terminoek potentzien serie moduan jokatu behar dute denboran zehar, konstante bat degeneraturiko potentzien serie bat dela jotzen badugu. Ardatz irudikarian kokaturiko erroei dagozkien terminoek anplitude konstantearekin oszilatzen dute erro asko egon ezean; kasu honetan, oszilazioaren anplitudea handitu egiten da, denboran zehar potentzia serie bat handitzen den bezala.

### 3.5. Laplace transformatuen beste propietate batzuk

#### 3.5.1. Bukaerako balioaren teorema

$f(s)$   $f(t)$ -ren Laplace transformatua bada, orduan:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [sf(s)] \quad (3.60)$$

baldin eta  $sf(s)$  ez bada infinitu bihurtzen  $s$ -ren edozein balio positibo errealetarako, ( $\text{Re} \geq 0$ ).

Baldintza hori ez bada betetzen,  $f(t)$ -k ez du limite batera jotzen  $t \rightarrow \infty$  doanean.

## FROGAPENA

Lehenengo deribatuaren Laplace transformatutik, zera daukagu:

$$\int_0^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt = sf(s) - f(0) \quad (3.61)$$

Gero,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} [sf(s)] - f(0) \quad (3.62)$$

Ezkerraldeko atalean, integrazio-operazioaren eta limitearen arteko ordena truka daiteke teoremaren baldintzak betetzen badira. Orduan zera daukagu,

$$\int_0^{\infty} \frac{df}{dt} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} [f(t)] - f(0) = \lim_{s \rightarrow 0} [sf(s)] - f(0) \quad (3.63)$$

Horixe frogatu nahi zen.

Ikus ditzagun adibide batzuk:

Aurkitu  $y(t)$ -ren bukaerako balioa, zeinarentzat Laplace transformatua  $y(s) = \frac{1}{s(s^3 + 3s^2 + 3s + 1)}$

den.

Bukaerako balioaren teoremaren aplikazio zuzenak zera ematen du:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [y(t)] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} = 1$$

Teoremaren baldintzak betetzen dira,  $(s + 1)^3 \neq 0$  baita  $s = -1$  ez den kasu guztietarako.

$y(t)$  funtzioaren bukaerako balioa aurkitu, zeinarentzat Laplace transformatua  $y(s) = \frac{s^4 - 6s^2 + 9s - 8}{s(s-2)(s^3 + 2s^2 - s - 2)}$  den.

Kasu honetan,  $sf(s)$  funtzioa honela idatz daiteke:

$$sf(s) = \frac{s^4 - 6s^2 + 9s - 8}{(s-2)(s+1)(s+2)(s-1)}$$

Adierazpen horrek infiniturantz jotzen du  $s = 1$  eta  $s = 2$  kasuetarako; beraz, teoremaren baldintzak ez dira betetzen eta ez du limiterik.

3.5.2. *Hasierako balioaren teorema*

$f(s)$   $f(t)$ -ren Laplace transformatua bada, orduan:

$$\lim_{t \rightarrow 0} [f(t)] = \lim_{s \rightarrow \infty} [sf(s)] \quad (3.64)$$

Edozein  $f(t)$ -tarako aplikatu daitezke.

3.5.3. *Transformatuaren translazioa*

$f(s)$   $f(t)$ -ren Laplace transformatua bada:

$$L\{e^{-at}f(t)\} = f(s+a) \quad (3.65)$$

$s$  transformatuan, aldagaia  $a$  unitate mugitzen da.

FROGAPENA

$$L\{e^{-at}f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(s+a)t} dt = f(s+a) \quad (3.66)$$

Teorema horren lehenengo erabilera transformatuen inbertsioan da. Adibidez, teorema hori erabiliz,  $y(s) = 1/(s+a)^2$ -ren transformatua berehala inberti daitezke  $y(t) = te^{-at}$ -ra.

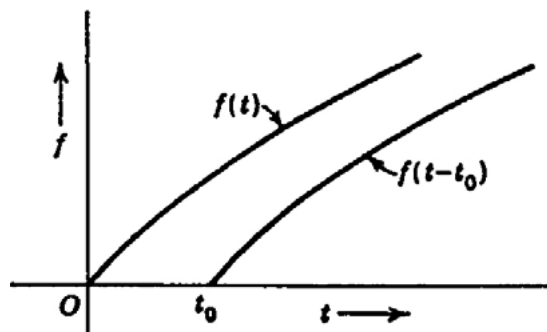
3.5.4. *Funtzioaren translazioa*

$f(s)$   $f(t)$ -ren Laplace transformatua bada, orduan:

$$L\{f(t-t_0)\} = e^{-st_0}f(s) \quad (3.67)$$

$f(t) = 0$  bada  $t < 0$  denerako.

3.2 irudian erakusten den  $f(t)$  funtzioan,  $f(t-t_0)$   $f(t)$ -ren translazio horizontala da  $t_0$  distantzia batean.



3.2. irudia.  $f(t-t_0)$ -ren eta  $f(t)$ -ren arteko erlazioa.

FROGAPENA

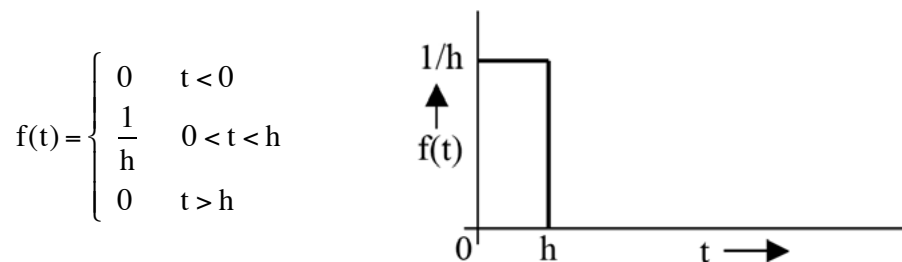
$$L\{f(t-t_0)\} = \int_0^\infty f(t-t_0)e^{-st} dt = e^{-st_0} \int_{-t_0}^\infty f(t-t_0)e^{-s(t-t_0)} d(t-t_0) \quad (3.68)$$

$f(t) = 0$  denez  $t < 0$  guztirako, integralaren beheko limitea  $t_0$ -rekin ordezkatu daiteke.  $(t-t_0)$  integrazio-aldagaia denez, integrala  $f(t)$ -ren Laplace integraltzat jo daiteke, eta horixe frogatu nahi zen.

Teorema hori baliagarria da transformatuak inbertitzeko. Hala,  $f(t)$   $f(s)$ -ren transformatu inbertsoa bada,  $e^{-st_0}f(s)$ -ren transformatu inbertsoa honako funtzio hau da:

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ f(t-t_0) & t > t_0 \end{cases} \quad (3.69)$$

Adibidea: Kalkulatu honako funtzio honen Laplace transformatua:



Funtzio hori irudian erakusten da.  $f(t)$  bi funtzioaren kenketa gisa adieraz daiteke:

$$f(t) = \frac{1}{h}[u(t) - u(t-h)]$$

non  $u(t-h)$  funtzio mailakatu unitarioa den  $h$  unitate eskuinalderantz lekualdatuta. Linealtasun-propietatea eta ikusi berri den teorema erabiliz, zera idatz daiteke:

$$f(s) = \frac{1}{h} \left[ \frac{1}{s} - \frac{e^{-hs}}{s} \right] = \frac{1}{h} \frac{1 - e^{-hs}}{s}$$

Emaitza hori oso garrantzitsua da inpulso unitario funtzioaren Laplace transformatua ezartzeko.

### 3.5.5. Bulkada unitario funtzioaren transformatua

Aurreko adibideko funtzioa aintzat hartzen badugu eta  $h$ -k zerorantz jotzea egiten badugu, puntu guztietan, zero balioa duen funtzioa lortzen dugu, jatorrian izan ezik, han infinitu baita. Dena den, garrantzitsua da adieraztea funtzio horren azpiko azalera beti 1 dela. Funtzio berri ho-

rri  $\delta(t)$  deitzen zaio; horri Dirac-en delta deitzen zaio eta bere azalera unitatea izateak honako hau esan nahi du:  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$ . Funtzio horren grafikoa altuera infinituko lerroa litzateke jatorrian.

Aurreko adibidean lortutako emaitzatik,  $\delta(t)$ -ren Laplace transformatua lor daiteke h-k zero-rantz jotzea eraginez gero. L'Hopital-en araua aplikatuz, honako hau dugu:

$$L\{\delta(t)\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-hs}}{hs} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{se^{-hs}}{s} = 1 \quad (3.70)$$

Balio hori bat dator transformatuen tauletan aurkitu daitekeen balioarekin.

Halaber, interesgarria da konturatzeko ezaugarria, aurreko adibidean  $f(t) = \frac{1}{h}[u(t) - u(t-h)]$  gisa idatzi zenez, hau da, bi funtzio mailakatu unitarioaren kenketa gisa denboran h unitatetan desfasetuta,  $\delta(t)$  honela idatz daitekeela:

$$\delta(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t) - u(t-h)}{h} \quad (3.71)$$

Hala, delta funtzioa funtzio mailakatu unitarioaren deribatu gisa azaltzen da. Bulkada unitarioaren funtzio hori, perturbazio ideal gisa, baliagarria da kontrol-sistemen analisisian eta diseinuan.

### 3.5.6. Integral baten transformatua

$f(s)$   $f(t)$ -ren Laplace transformatua bada, orduan:

$$L\left\{\int_0^t f(t) dt\right\} = \frac{f(s)}{s} \quad (3.72)$$

Teorema hori deribazioaren teoremekin erlazionatuta dago. Deribazio- eta integrazio-operazioak elkarrekiko inbertsoak direnez denboraren funtzioei aplikatzen zaizkienean, transformatuei aplikatzen zaizkienean ere, inbertsoak dira. Alegia,  $f(s)$  s-z biderkatzea  $f(t)$  t-rekiko deribatzeari dagokio, eta  $f(s)$  s-z zatitzea  $f(t)$  t-rekiko integratzeari.

### FROGAPENA

$$f(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Zatika integratzen bada:

$$u = e^{-st} \quad dv = f(t)dt$$



Orduan,

$$du = -se^{-st}dt \quad v = \int_0^t f(t)dt$$

Orduan,

$$f(s) = \left[ e^{-st} \int_0^t f(t)dt \right]_0^\infty + s \int_0^\infty \left[ \int_0^t f(t)dt \right] e^{-st}dt$$

Infinitu denborarako, eskuineko lehenengo terminoaren integrala finitua da (definizioz,  $f(t)$ -k Laplaceren transformatua  $du$ ), eta,  $e^{-st}$ -z biderkatuz, infinitu denborarako, zero ematen du emaitza moduan. Halaber, lehenengo termino horren integralaren balioak zero izan behar du  $t = 0$ -rako. Hau da, eskuineko lehenengo terminoa zero da. Horren arabera, honako hau geratzen da:

$$f(s) = s \int_0^\infty \left[ \int_0^t f(t)dt \right] e^{-st}dt = sL \left\{ \int_0^t f(t)dt \right\}$$

eta, askatuz,

$$L \left\{ \int_0^t f(t)dt \right\} = \frac{f(s)}{s}$$

3.2. taula. Laplace transformatu bikoteak

	$f(t)$	$F(s)$
1	Impultsu unitarioa $\delta(t)$	1
2	Maila unitarioa $1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	$t$	$\frac{1}{s^2}$
4	$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
5	$te^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
6	$\text{sen } \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
7	$\text{cos } \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
8	$t^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
9	$t^n e^{-at} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
10	$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
11	$\frac{1}{b-a}(be^{-bt} - ae^{-at})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
12	$\frac{1}{ab}\left[1 + \frac{1}{a-b}(be^{-at} - ae^{-bt})\right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
13	$e^{-at} \text{sen } \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
14	$e^{-at} \text{cos } \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
15	$\frac{1}{a^2}(at - 1 + e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
16	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen } \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
17	$\frac{-1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen } (\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
18	$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen } (\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$

**3.3. taula.** Funtzio transformatu berezien bikoteak zenbait ekuazio diferentzial partzialen ebazpenean erabilgarriak

No	$F(s)$	$f(t) \quad t \geq 0$	Remarks
1	$\frac{1}{\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	
2	$s^{-3/2}$	$2 \sqrt{\frac{t}{\pi}}$	
3	$\frac{s}{(s-a)^{3/2}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{at}(1+2at)$	
4	$\sqrt{s-a} - \sqrt{s-b}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}} (e^{bt} - e^{at})$	
5	$\frac{1}{\sqrt{s+a}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} -$ $ae^{at} \operatorname{cerf}(a\sqrt{t})$	$\operatorname{cerf} y \triangleq 1 - \operatorname{erf} y$ $\triangleq 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-x^2} dx$
6	$\frac{1}{\sqrt{s(s-a^2)}}$	$\frac{1}{a} e^{at} \operatorname{erf}(a\sqrt{t})$	
7	$\frac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s+a})}$	$e^{at} \operatorname{cerf}(a\sqrt{t})$	
8	$\frac{1}{(s+a)\sqrt{s+b}}$	$\frac{1}{\sqrt{b-a}} e^{-at} \operatorname{erf}(\sqrt{b-a}\sqrt{t})$	
9	$\frac{1}{s} e^{-\frac{a}{s}}$	$J_0(2\sqrt{at})$	
10	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\frac{a}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos 2\sqrt{at}$	
11	$\frac{1}{s^{3/2}} e^{-\frac{a}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sin 2\sqrt{at}$	
12	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{a/s}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cosh 2\sqrt{at}$	
13	$\frac{1}{s^{3/2}} e^{a/s}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sinh 2\sqrt{at}$	

3.3. taula. Funtzio transformatu berezien bikoteak zenbait ekuazio diferentzial partzialen ebazpenean erabilgarriak (jarraipena)

No	$F(s)$	$f(t) \quad t \geq 0$	Remarks
14	$e^{-a\sqrt{s}}$	$\frac{a}{2} \frac{e^{-a^2/4t}}{\sqrt{\pi t^3}}$	$a > 0$
15	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-a\sqrt{s}}$	$\frac{e^{-a^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}$	$a \geq 0$
16	$\frac{1}{s} e^{-a\sqrt{s}}$	$\text{cerf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$a \geq 0$
17	$\frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}}$	$J_0(at)$	
18	$\frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2} (\sqrt{s^2 + a^2} + s)}$	$\frac{1}{a} J_1(at)$	
19	$\frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2} + s}$	$\frac{1}{a} \frac{J_1(at)}{t}$	
20	$\frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2} (\sqrt{s^2 + a^2} + s)^n}$	$\frac{1}{a^n} J_n(at)$	$n$ is a non-negative integer
21	$\frac{1}{(\sqrt{s^2 + a^2} + s)^n}$	$\frac{n}{a^n} \frac{J_n(at)}{t}$	$n$ is a positive integer
22	$\frac{1}{\sqrt{s^2 - a^2}}$	$I_0(at) = J_0(iat)$	
23	$e^{a^2 s^2} \text{cerf}(as)$	$\frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2/4a^2}$	$a > 0$
24	$\frac{1}{s} e^{a^2 s^2} \text{cerf}(as)$	$\text{erf}\left(\frac{t}{2a}\right)$	$a > 0$
25	$\frac{1}{\sqrt{s}} \text{cerf}(\sqrt{as})$	0 for $0 < t < a$ $\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$ for $t > a$	
26	$e^{a^2 s^2} \text{cerf}(\sqrt{as})$	$\frac{\sqrt{a}}{\pi \sqrt{t(t+a)}}$	$a > 0$

**3.3. taula.** Funtzio transformatu berezien bikoteak zenbait ekuazio diferentzial partzialen ebazpenean erabilgarriak (jarraipena)

No	$F(s)$	$f(t) \quad t \geq 0$	Remarks
27	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{as} \operatorname{cerf}(\sqrt{as})$	$\frac{1}{\sqrt{\pi(t+a)}}$	$a > 0$
28	$\operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{s}}\right)$	$\frac{1}{\pi t} \sin 2a \sqrt{t}$	
29	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{a^2/s} \operatorname{cerf}\left(\frac{a}{\sqrt{s}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-2a\sqrt{t}}$	

**NOTE:** An extensive set of transform function pairs is available in *Fourier Integrals* by Campbell and Foster. Only those entries containing the condition  $0 < q$  or  $k < q$  where  $q \equiv t$  and  $p \equiv s$  are Laplace transforms.

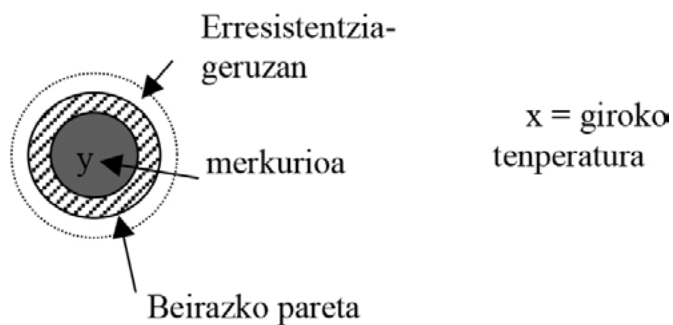
## 4. gaia

# 1. ordenako sistemen erantzuna

Kontrol-sistema oso bat analizatzen hasi aurretik, beharrezkoa da kontrol-sistema baten blokeak osatzen dituzten oinarriko sistema sinple batzuen erantzunarekin ohitzea. Gai honetan eta hurrengo hiru gaietan, oinarriko zenbait sistemaren portaera zehaztasunez deskribatuko da eta erakutsiko da hainbat sistema fisiko erreal oinarriko sistema horien konbinaketaren bidez adieraz daitezkeela.

### 4.1. Transferentzia-funtzioa

1. ordenako sistema baterako transferentzia-funtzioa garatuko da, adibide gisa merkuriozko ohiko termometro baten portaera egoera ez-estazionarioan hartuz. 4.1. irudian, merkuriozko termometroaren zeharkako sekzio bat erakusten da.



4.1. irudia. Termometroaren zeharkako sekzioa

Demagun termometroa jariakin-korronte batean kokatuta dagoela eta horren tenperatura ( $x$ ) denborarekin aldatzen dela. Ariketa termometroak adierazten duen tenperaturaren ( $y$ ) erantzuna edo aldaketa denborarekin kalkulatzeko datza  $x$ -en aldaketa jakin baterako.

Analisi horretarako, honako suposizio hauek egingo dira:

- Bero-transferentziarako erresistentzia guztia beira inguratzen duen geruzan dago (beirak eta merkurioak eragiten duten erresistentzia ez da aintzat hartzeko modukoa).

- Ahalmen termiko guztia merkurioan dago. Edozein unetan merkurio guztia tenperatura be-rean dagoela jotzen da.
- Merkurioa daukan beira ez da uzurtzen ez hedatzen erantzun iragankorrean.

Demagun hasieran termometroa egoera estazionarioan dagoela. Hau da, zero denboraren aurretik ez dago tenperaturaren aldaketarik denborarekin. Zero denboran, hura inguratzen duen jariakinaren tenperaturaren aldaketaren baten menpe ezarriko da,  $x(t)$ .

Egoera ez-estazionarioan bero-balantze bat eginez:

$$hA(x - y) - 0 = mC_p \frac{dy}{dt} \quad (4.1)$$

non  $A$  bero-transferentziaren azalera ( $m^2$ ) den;  $C_p$ , merkurioaren ahalmen kalorifikoa, ( $\text{kcal/kg } ^\circ\text{C}$ );  $m$ , merkurioaren masa ( $\text{kg}$ );  $t$ , denbora (ordu), eta  $h$ , bero-transmisio koefiziente indibiduala, ( $\text{kcal/hm}^2 \text{ } ^\circ\text{C}$ ).

$h$  koefizientea jariakinaren emariaren eta propietateen, eta bulboaren dimentsioen menpekoa izango da. Hor,  $h$  konstantea dela joko da. Emaitza orain arte 1. ordenako ekuazio diferentzial bat da. Laplaceren transformatuen bidez ebatzi aurretik, *desbideratze-aldagaien* kontzeptua sartuko da.  $x$ -en aldaketaren aurretik, termometroa egoera estazionarioan zegoen eta  $dy/dt$  deribatua zero da. Egoera estazionarioko baldintzarako, 4.1 ekuazioa honela idatz daiteke:

$$hA(x_s - y_s) = 0 \quad t < 0 \quad (4.2)$$

$s$  azpiindizea aldagaiaren balioa egoera estazionarioan adierazteko erabiltzen da. (4.2) ekuazioak  $y_s = x_s$  dela baino ez du adierazten, hau da, termometroa jariakina dagoeneko tenperatura erreala adierazten ari dela. (4.1) ekuaziotik (4.2) ekuazioa kenduz, honako hau dugu:

$$hA[(x - x_s) - (y - y_s)] = mC_p \frac{d(y - y_s)}{dt} \quad (4.3)$$

Ohartu  $d(y - y_s)/dt = dy/dt$ ,  $y_s$  konstante bat baita.

Desbideratze-aldagaiak aldagaien une oroko balioen eta aldagai horien egoera estazionarioko balioen arteko aldea dira.

$$X = x - x_s \quad \text{eta} \quad Y = y - y_s$$

Orduan, (4.3) ekuazio honela geratuko litzateke:

$$hA[X - Y] = mC_p \frac{dY}{dt} \quad (4.4)$$

$mC_p/hA = \tau$  deitzen bada, (4.4) ekuazioa honela geratuko litzateke:

$$X - Y = \tau \frac{dY}{dt} \quad (4.5)$$

(4.5) ekuazioan Laplaceren transformatuak hartuz,

$$X(s) - Y(s) = \tau s Y(s) \quad (4.6)$$

(4.6) ekuazioa  $Y(s)/X(s)$  zatidura bezala berrordenatuz,

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{\tau s + 1} \quad (4.7)$$

$\tau$  sistemako denbora konstantetzat jotzen da eta denbora-unitateak ditu. Berdin zeinuaren eskuinaldeko adierazpena sistemako *transferentzia-funtzioa* deitzen da. Termometroaren irakurpenaren desbideratzearen eta jariakinaren tenperaturaren desbideratzearen Laplaceren transformatuaren zatidura da. Sistema fisikoak aztertzen direnean, normalean, beren transferentzia-funtzioa lortzea bilatuko da. Era orokorrago batean, 1.ordenako sistema baten transferentzia-funtzioa ekuazio honek emango luke:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} \quad (4.8)$$

non  $K$  sistemaren irabazia deitzen den eta unitateak dituen.

Sistema fisiko batean irteerako eta sarrerako desbideratze-aldagaien Laplaceren transformatuaren erlazioa (4.7) ekuazioak emandako itxurakoa bada, 1. ordenakoa dela esaten da. Sistema horiek 1. ordenako ekuazio diferentzial linealen bidez deskribatzen direlako deitzen dira horrela.

Desbideratze-aldagaia kontzeptuaren sarrera dela eta, transferentzia-funtzio bat agertu da, non  $X$ -ren eta  $Y$ -ren hasierako baldintzak zero diren. Kontrol-sistemetan interesgarria da sistemako desbideratze-aldagaien balioa beren egoera estazionarioko balioarekiko dela. Desbideratze-aldagaien erabilera, beraz, ondorio natural eta gomendagarria da.

Oro har, transferentzia-funtzio batek bi aldagai erlazionatzen ditu sistema fisiko batean, aldagaietako bat kausa edo arrazoia da (sarrera) eta bestea, eragina (irteera). Adibide honetan, kausa termometroa inguratzen duen korrontean tenperaturaren aldaketa da, eta eragina termometroak adierazten duen tenperaturaren aldaketa. Honela idatz daiteke:

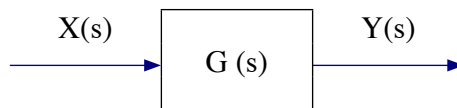
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (4.9)$$

non  $G(s)$  transferentzia-funtzio bat adierazteko erabiltzen den sinboloa den;  $X(s)$ , sarrerako Laplaceren transformatua, eta  $Y(s)$ , irteerako Laplaceren transformatua desbideratze-aldagai eran.



Transferentzia-funtzioak guztiz deskribatzen du sistema baten dinamika.  $X(t)$  aldaketa jakin bat aukeratu bada, zeinarentzat transformatua  $X(s)$  den, sistemaren erantzuna honako hau izango da:  $Y(s) = G(s)X(s)$ .  $Y(s)$ -ren alderantzizkoa kalkulatu,  $Y(t)$  erantzuna lortuko litzateke.

Transferentzia-funtzio batean dagoen erlazio funtzionala bloke-diagrama baten bidez adierazten da, irudian erakusten den moduan. Kaxan sartzen den geziak sarrerako aldagaia adierazten du eta irteerako geziak irteerako aldagaia adierazten du. Kaxaren barruan, transferentzia-funtzioa kokatzen da.  $G(s)$  transferentzia-funtzioak  $X(s)$  sarrerako aldagaiaren gainean «operatzen» du operazioaren emaitza moduan  $Y(s)$  irteerako aldagaia emateko.



## 4.2. Erantzun trantsitorioa

1. ordenako sistema baten transferentzia-funtzioa ezarri ondoren, bere erantzun trantsitorioa lor daiteke sarrerako edozein aldaketatarako. Kontrolean ohikoak diren funtzio-serie batzuekiko erantzunak aztertuko dira: mailakatua, bulkada eta sinusoidala.

### 4.2.1. Perturbazio mailakatu batekiko erantzuna

1. ordenako sistema batean  $A$  magnitudeko aldaketa mailakatu bat sartzen bada,  $X(t)$ -ren transformatua  $X(s) = A/s$  izango da. 1. ordenako sistema baten transferentzia-funtzioa honako hau da:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} \quad (4.10)$$

$X(s)$  bere balioagatik ordezkatur,

$$Y(s) = \frac{A}{s} \frac{K}{\tau s + 1} \quad (4.11)$$

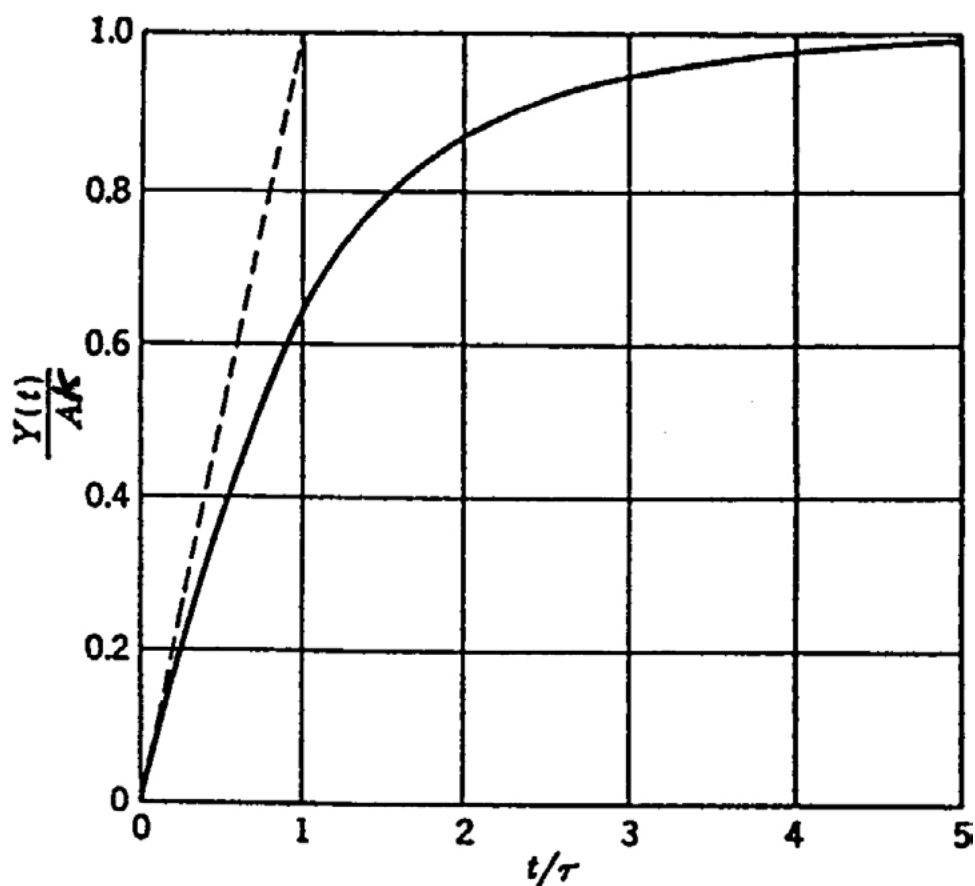
frakzio partzialetan heda daiteke honako hau emateko:

$$Y(s) = \frac{AK/\tau}{s(s+1/\tau)} = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s+1/\tau} \quad (4.12)$$

$C_1$  eta  $C_2$  aurreko gailan erakutsi den moduan kalkulatu,  $C_1 = AK$  eta  $C_2 = -AK$  lortzen da. Balio horiek (4.12) ekuazioan ordezkaturik eta alderantzizko transformatua hartuz,  $Y$ -ren erantzuna lortzen da denborarekin.

$$\begin{aligned} Y(t) &= 0 & t < 0 \\ Y(t) &= AK(1 - e^{-t/\tau}) & t \geq 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

4.2 irudian, (4.13) ekuazioa irudikatu da,  $Y(t)/AK$  eta  $t/\tau$  kantitate adimentsionalen terminoetan.



4.2. irudia. 1. ordenako sistema batek aldaketa mailakatu bati emandako erantzuna

Ikus dezagun orain ea emaitza matematikoa ikuspuntu fisiko batetik espero denarekin bat datorren. Termometroa jariakinean sartzen denean, tenperatura-aldea termometroaren merkurioaren eta inguruaren tenperaturaren artean balio maximoan dago. Planteaturiko ereduarekin, espero izatekoa litzateke beroaren fluxuak berehala eragitea, eta, hala, termometroaren tenperatura igoaraztea. Tenperatura hori igotzean, indar-eragilea (tenperaturen gradienteak) txikituz joango da eta, ondorioz, termometroaren tenperatura astiroago handituko da. Deskribapen fisiko hori (4.13) ekuazioak emandako erantzunarekin dator bat, eta hori 4.2 irudian erakusten da grafikoki.

Komeni da erantzun honen ezaugarri batzuk azpimarratzea:

- $Y(t)$ -ren erantzunak bere bukaerako balioaren %63.2ko proportzioa lortzen du igarotako denbora bere denbora konstantearen ( $\tau$ ) berdina denean. Igarotako denbora  $2\tau$ ,  $3\tau$  eta  $4\tau$  denean, erantzunaren ehunekoa %86,5, %95 eta %98koa da hurrenez hurren. Beraz, jo daiteke erantzuna osoa dela baldin eta igarotako denbora 3 edo 4 denbora konstantekoa bada.
- (4.13) ekuaziotik ondoriozta daiteke erantzun-kurbaren malda  $KA/\tau$  dela jatorrian. Horrek esan nahi du hasierako abiadura-aldaketa mantenduko balitz, erantzuna denbora konstantearen berdina den denboran beteko litzatekeela (ikus 4.2 irudiko lerro ez-jarraitua).

#### 4.2.2. Bulkada-perturbazio batekiko erantzuna

Matematikoki,  $A$  magnitudeko bulkada-funtzioa  $X(t) = A\delta$  gisa definitzen da, non  $\delta(t)$  bulkada-funtzio unitarioa den (aurreko gaian definitu da). Bulkada-funtzio hori laguntza matematiko gisa erabiltzen da, eta ez sistema fisiko baterako sarrera erreal moduan. Sistema fisiko batzuetan, zaila da bulkada-funtzio horretara hurbiltzea. Horregatik, denbora batera eliminatzen edo desagertzen den funtzio mailakatu bat erabiltzen da. Funtzio horren iraupena nahiko txikia bada, funtzio horrek «idealizaturiko» bulkada-funtzioaren oso antzeko erantzuna ematen du.

Har dezagun aintzat bulkada unitario bat, zeinetarako jadanik frogatu den Laplaceren transformatua  $X(s) = 1$  dela. Adierazpen hori (4.10) ekuazioan ordezkatzuz (1. ordenako sistema baten transferentzia-funtzioa da), honako erantzun hau lortzen da:

$$Y(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \quad (4.14)$$

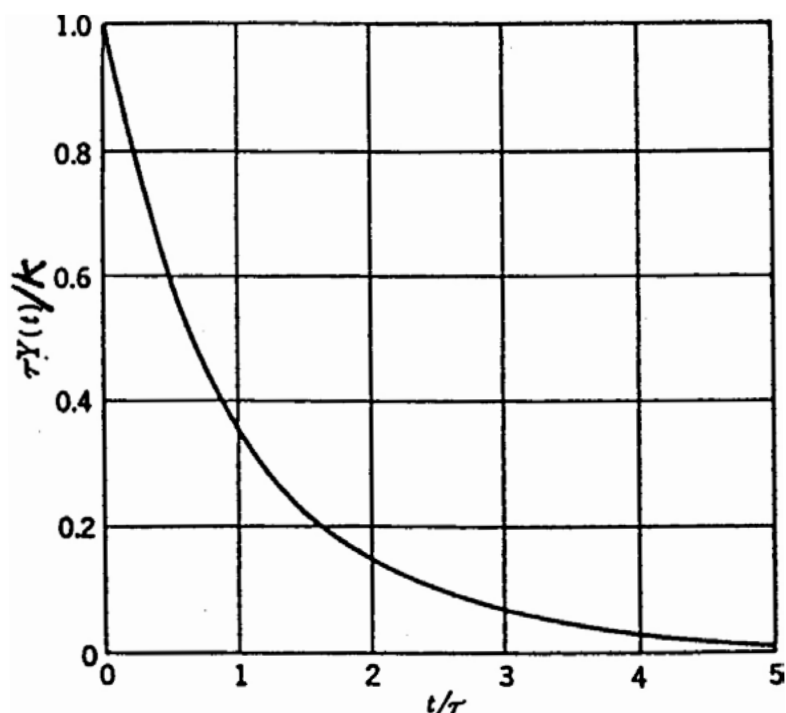
Eta honela berrordena daiteke:

$$Y(s) = \frac{K/\tau}{s + 1/\tau} \quad (4.15)$$

$Y(s)$ -ren alderantzizkoa transformatuen tauletan, zuzenean aurkitu daiteke,

$$Y(t) = \frac{K}{\tau} e^{-t/\tau} \quad (4.16)$$

4.3 irudian, ekuazio hori irudikatu da,  $\tau Y(t)/K$  eta  $t/\tau$ -ren terminoetan. Bulkada  $A$  magnitudekoa izango balitz, erantzuna  $A$ -z biderkatuta egongo litzateke.



4.3. irudia. 1. ordenako sistema batek bulkada unitario bati emandako erantzuna

Irudi honetan ikusten da erantzuna bat-batean igotzen dela 1 balioraino eta gero esponen-  
tziarki jaisten dela. Igoera hori ezinezkoa da fisikoki. Igoerak, benetan, oso malda handia du,  
baina ez infinitua.

#### 4.2.3. Perturbazio sinusoidal bati emandako erantzuna

Funtzio sinusoidala honako ekuazio honen bidez adierazten da matematikoki:

$$\begin{aligned} X(t) &= 0 & t < 0 \\ X(t) &= A \sin \omega t & t \geq 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

non  $A$  anplitudea eta  $\omega$  frekuentzia radianetan diren.  $\omega$  frekuentzia  $f$  frekuentziarekin (zikloetan  
denbora unitateko) erlazionatuta dago,  $\omega = 2\pi f$ . Transformatua  $X(s) = A \omega / (s^2 + \omega^2)$  da. Funtzio  
hori frekuentziekiko erantzuna izeneko kontrol-teoriaren oinarria da. Fisikoki, funtzio sinusoidala-  
ren mota hori lortzea funtzio mailakatu bat lortzea baino zailagoa da.

$X(s)$  transformatuaren balioa (4.10) ekuazioan ordezkatzuz, honako hau lortzen da:

$$Y(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \frac{K/\tau}{s + 1/\tau} \quad (4.18)$$

$$Y(t) = \frac{A\omega K \tau e^{-t/\tau}}{\tau^2 \omega^2 + 1} - \frac{A\omega K \tau}{\tau^2 \omega^2 + 1} \cos \omega t + \frac{AK}{\tau^2 \omega^2 + 1} \sin \omega t \quad (4.19)$$

(4.19) ekuazioa beste era baten berridatz daiteke honako identitate trigonometriko hau erabiliz:

$$p \cos A + q \sin A = r \sin(A+\theta) \quad (4.20)$$

non

$$r = \sqrt{p^2 + q^2} \quad \tan \theta = \frac{p}{q}$$

(4.20) identitatea (4.19) ekuazioan aplikatuz, honako hau dugu:

$$\frac{A\omega K\tau}{\tau^2\omega^2 + 1} e^{-t/\tau} + \frac{AK}{\sqrt{\tau^2\omega^2 + 1}} \sin(\omega t + \phi) \quad (4.21)$$

non  $\phi = \tan^{-1}(-\omega\tau) = -\tan^{-1}(\omega\tau)$ .  $t \rightarrow \infty$  doanean, (4.21) ekuazioko lehenengo batugaiak zeroranzko joera du eta bigarren batugaia bakarrik geratzen da, eta egoera estazionarioko emaitza da:

$$Y(t)|_s = \frac{AK}{\sqrt{\tau^2\omega^2 + 1}} \sin(\omega t + \phi) \quad (4.22)$$

(4.22) ekuazio hori (4.17) ekuazioarekin konparatzen bada, honako puntu hauek ikusten dira:

- Irteera seno-funtzio bat da, baita sarrerako seinalearen frekuentziaren berdina den  $\omega$  frekuentzia batekin ere.
- Irteerako eta sarrerako anplitudeen arteko zatidura  $K/\sqrt{\tau^2\omega^2 + 1}$  da, eta, beti,  $K$  baino txikiagoa da.
- Irteerako seinalea sarrerako seinalearekiko atzeraturik dago  $|\phi|$  angelu batean. Atzeraturik dago,  $\phi$ -ren zeinua beti negatiboa delako.

$K$  irabazia eta  $\tau$  denbora konstantea dituen sistema jakin baterako, anplitudearen atenuazioa eta fasearen angelua  $\omega$  frekuentziaren menpekoak dira bakarrik.

#### 4.2.4. Boderen diagrama

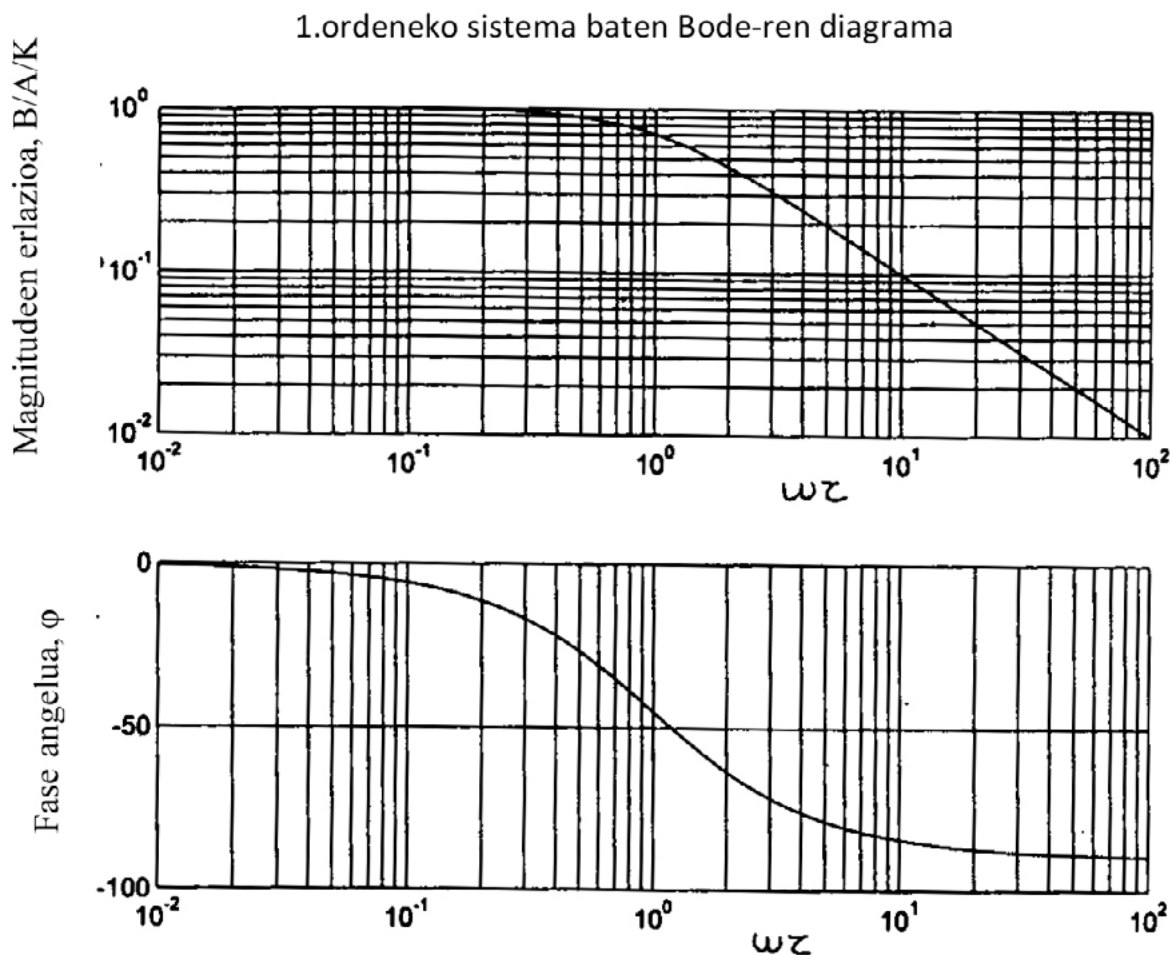
Frekuentziekiko erantzunaren informazioa laburtzeko metodarik ohikoena Hendrik Bodek asmatutako adierazpen grafikoa da eta Boderen diagrama deitzen zaio. Bi grafikotan datza:

- log (anplitudeen zatidura) vs. log  $\omega$
- $\phi$  vs. log  $\omega$

Grafiko horiek irudikatzerakoan,  $K$  irabazia eta  $\tau$  denbora-konstantea eskalatze-faktore moduan erabiltzen dira. Kasu horretan, Boderen diagrama bi grafikoz osatua dago: magnitudeen er-

lazioa, zein anplitudeen zatidura zati  $K$  den (koordinatu logaritmikoetan), eta fasearen angelua,  $\phi$  (koordinatu semilogaritmikoetan)  $\log(\omega \tau)$ ren aurrean.

4.4 irudian, 1. ordenako sistema bati dagokion Boderen diagrama erakusten da.



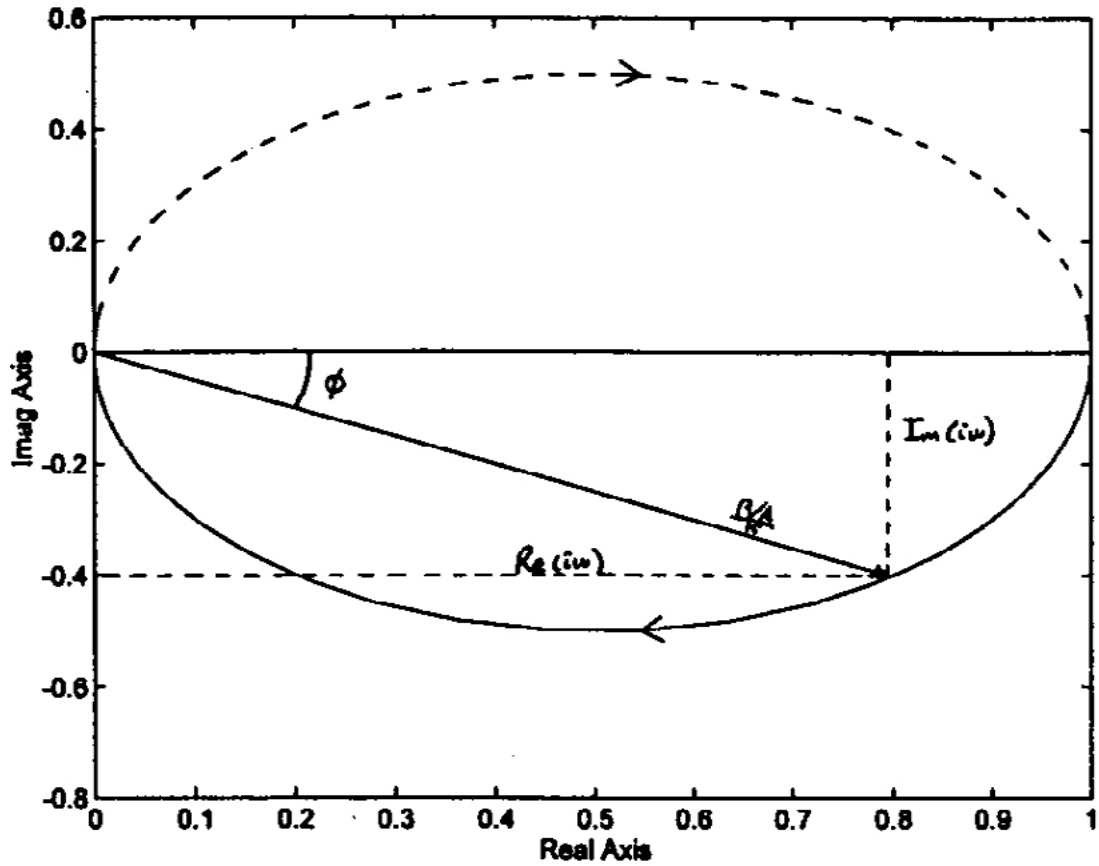
4.4. irudia. 1. ordenako sistema baten Boderen diagrama

#### 4.2.5. Nyquist-en diagramak

Beste grafiko bat dago prozesu baten frekuentzietatik erantzuna erakusteko, Nyquisten diagrama.  $G(s)$ -ren zati erreal eta irudikarien adierazpen bat baino ez da zuzenean, plano konplexuan, frekuentziaren funtzioan. Fasearen angelua ( $\phi$ ) eta anplitudeen erlazioa,  $G(j\omega)$ -ren adierazpena dira koordinatu polarretan.

Diagrama horrek ematen duen informazioa Boderen diagramaren berdina da. Kontuan izan behar da bi diagrametan erakusten diren datuak berdinak direla, hau da, sistema baten frekuentzietatik erantzuna. Aldea zera da, Boderen diagraman frekuentziaren eta erantzunaren arteko erlazioa berehalakoa dela; Nyquisten diagraman, berriz, ez da puntu bakoitzari dagokion frekuentzia islatzen.

4.5 irudian, Nyquisten diagrama bat erakusten da 1. ordenako sistema bati dagokiona.

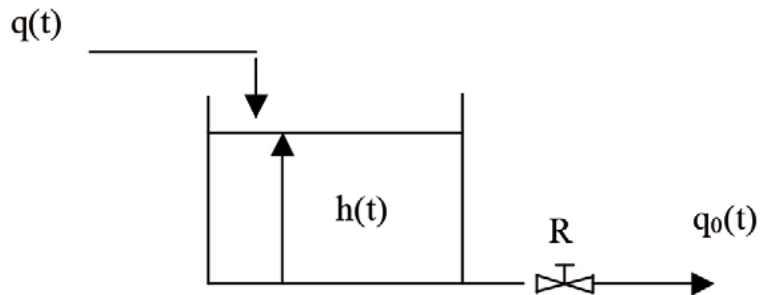


4.5. irudia. 1. ordenako sistema baten Nyquisten diagrama

### 4.3. 1. Ordenako sistemen adibide fisikoak

#### 4.3.1. Tanke baten likido maila

Har dezagun aintzat 4.6 irudiko sistema; A zeharkako sekzio uniformearen duen tanke bat da, libreki deskargatzen ari da.



4.6. irudia. Likido mailaren sistema

Deskargako fluxuak  $R$  erresistentzia bat zeharkatzen du, eta balbula gisako elementu bat izan daiteke. Demagun erresistentzian zeharreko  $q_0$  emari bolumetrikoa deposituan likidoak duen altuerarekin erlazionatuta dagoela erlazio lineal honen bidez:

$$q_0 = \frac{h}{R} \quad (4.23)$$

Tankean,  $\rho$  dentsitateko  $q$  emari bolumetrikoa sartzen ari da, eta aldakorra da denborarekin. Likidoaren maila emariarekin erlazionatzen duen transferentzia-funtzioa determinatzea da helburua.

Sistema tankearen inguruan materia-balantze bat idatziz analiza daiteke:

$$\begin{aligned} \rho q(t) - \rho q_0(t) &= \frac{d(\rho Ah)}{dt} \\ q(t) - q_0(t) &= A \frac{dh}{dt} \end{aligned} \quad (4.24)$$

(4.23) eta (4.24) ekuazioak konbinatuz  $q_0(t)$  eliminatzeko, honako ekuazio diferentzial lineal hau lortzen da:

$$q(t) - \frac{h}{R} = A \frac{dh}{dt} \quad (4.25)$$

Orain, desbideratze-aldagaiak sartuko ditugu aurrera segitu baino lehen. Hasieran, prozesua egoera estazionarioan funtzionatzen ari da; horrek  $dh/dt = 0$  dela esan nahi du, gero:

$$q_s - \frac{h_s}{R} = 0 \quad (4.26)$$

non  $s$  azpiindizeak egoera estazionarioa adierazten duen. (4.25) ekuazioa ken (4.26) ekuazioa adieraziz zera daukagu:

$$(q - q_s) = \frac{1}{R}(h - h_s) + A \frac{d(h - h_s)}{dt} \quad (4.27)$$

Desbideratze-aldagaiak honela definitzen badira:

$$\begin{aligned} Q &= q - q_s \\ H &= h - h_s \end{aligned}$$



(4.27) honela idatz daiteke:

$$Q = \frac{1}{R}H + A \frac{dH}{dt} \quad (4.28)$$

(4.28) ekuazioan transformatuak hartuz,

$$Q(s) = \frac{1}{R}H(s) + AsH(s) \quad (4.29)$$

Konturatu  $H(0)$  zero dela eta horregatik  $dH/dt$ -ren transformatua  $sH(s)$  dela. (4.29) ekuazioa honela berrordena daiteke:

$$\frac{H(s)}{Q(s)} = \frac{R}{\tau s + 1} \quad (4.30)$$

non  $\tau = AR$  den.

Adibide honen transferentzia-funtzioa merkuriozko termometroaren adibidearekin konparatzen bada,  $R$  faktorea azaltzen da zenbakitzailean. Termino hori  $h(t)$   $q(t)$ -rekin erlazionatzen duen konbertsio-faktorea da sistema egoera estazionarioan dagoenean. Horregatik, sistemaren irabazia egoera estazionarioan deitzen zaio faktore horri. Bukaerako balioaren teorema aplikatuko dugu  $H$ -ren balioa egoera estazionarioan determinatzeko,  $Q(t)$  emaria maila unitario baten eran aldatzen denean.

Orduan,  $Q(t) = u(t)$ , non  $u(t)$  maila unitario baterako sinbola den.  $Q(t)$ -ren transformatua  $Q(s) = 1/s$  da.

Gero,

$$H(s) = \frac{1}{s} \frac{R}{\tau s + 1}$$

Bukaerako balioaren teorema aplikatuz:

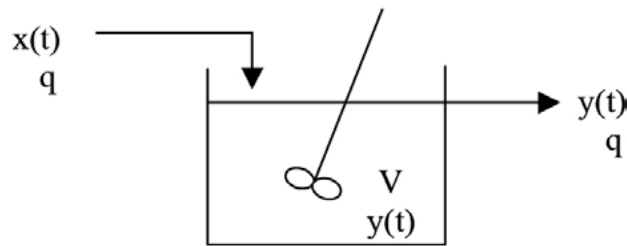
$$H(t)_{t \rightarrow \infty} = \lim_{s \rightarrow 0} [sH(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R}{\tau s + 1} = R$$

Horrek frogatzen du  $H(t)$ -n gertatzen den bukaerako aldaketa  $Q(t)$ -n unitate bateko maila aldaketa baten aurrean  $R$  dela, hortik datorkio irabazi izena.

#### 4.3.2. Nahaste-prozesua

Har dezagun aintzat 4.7 irudian erakutsitako prozesua, non solutu bat daukan disoluzio baten fluxuak  $q$  emariarekin jariatzen duen  $V$  bolumen konstantedun tanke batean.  $x$  sarrerako korron-

tean, solutuaren kontzentrazioa denborarekin aldatzen da. Irteerako kontzentrazioa ( $y$ )  $x$  sarrerako kontzentrazioarekin erlazionatzen duen transferentzia-funtzioa determinatu nahi da.



4.7. irudia. Nahaste-prozesua

Soluzioaren dentsitatea konstantea dela joz, sarrerako emariak irteerako emariaren berdina izan behar du, tankearen bolumena finkatuta baitago. Sistema soluturako materia-balantze bat idatziz analiza dezakegu:

$$qx - qy = \frac{d(Vy)}{dt} \quad (4.31)$$

Egoera estazionarioan, honako hau dugu:

$$qx_s - qy_s = 0 \quad (4.32)$$

(4.32) ekuazioa (4.31) ekuaziotik kenduz eta desbideratze-aldagaiak sartuz:

$$X = x - x_s$$

$$Y = y - y_s$$

honako hau dugu:

$$qX - qY = V \frac{dY}{dt} \quad (4.33)$$

Laplaceren transformatuak hartuz ekuazio honetan eta berrordenatuz, honako hau dugu:

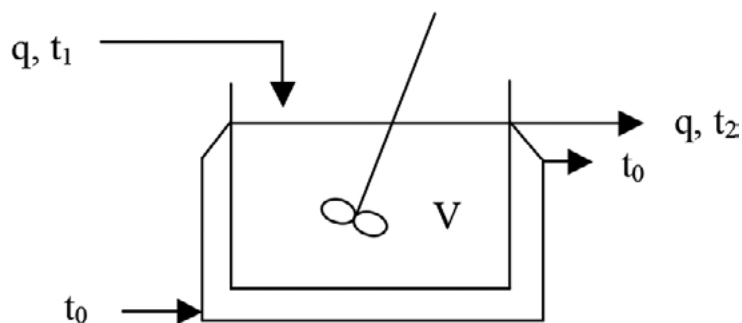
$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{\tau s + 1} \quad (4.34)$$

non  $\tau = V/q$  den.

#### 4.3.3. Berokuntza-tankea

Har dezagun aintzat 4.8 irudian erakusten den berokuntza-tankea. Tankean, dentsitate konstantedun disoluzio baten  $q$  emari konstantea sartzen ari da. Tankearen bolumena  $V$  konstantea da

eta nahaste perfektuko portaera duela jotzen da. Sarreran, disoluzioaren tenperatura  $t_1$  da. Tankeak ur-lurrunezko berotze-atorra bat du. Berotze-atorran, ur-lurrunaren bero latentea bakarrik dugu; ondorioz, tenperatura atorrako puntu guztietan berdina da eta sarrerako tenperaturaren  $t_0$  balioaren berdina. Beroketaren ondorioz, tankeko irteerako tenperatura  $t_2$  da. Ariketa honako honetan datza: tankeko tenperaturaren aldaketa sarrerako  $t_1$  eta  $t_0$  tenperaturen aldaketarekin erlazionatzen duten transferentzia-funtzioak aurkitzean.



4.8. irudia. Berokuntza-tankea

Tankean bero-balantze bat eginez, honako adierazpen hau lortzen da:

$$q\rho C_p t_1 - q\rho C_p t_2 + UA(t_0 - t_2) = V\rho C_p \frac{dt_2}{dt} \quad (4.35)$$

non  $U$  beroaren transferentzia koefiziente globala den, eta  $A$ , trukatzeko-azalera.

Egoera estazionarioan, honako hau dugu:

$$q\rho C_p t_{1s} - q\rho C_p t_{2s} + UA(t_{0s} - t_{2s}) = 0 \quad (4.36)$$

(4.36) ekuazioa (4.35) ekuaziotik kenduz eta desbideratze aldagaiak sartuz

$$T_1 = t_1 - t_{1s}$$

$$T_2 = t_2 - t_{2s}$$

$$T_0 = t_0 - t_{0s}$$

honako hau dugu:

$$q\rho C_p T_1 - q\rho C_p T_2 + UA[T_0 - T_2] = V\rho C_p \frac{dT_2}{dt} \quad (4.37)$$

(4.37) ekuazioan Laplaceren transformatuak hartuz, honako hau dugu:

$$q\rho C_p T_1(s) - q\rho C_p T_2(s) + UA[T_0(s) - T_2(s)] = V\rho C_p s T_2(s) \quad (4.38)$$

Taldekatuz eta  $\tau = \frac{V\rho C_p}{UA + q\rho C_p}$  izanik, honako hau dugu:

$$\frac{q\rho C_p}{UA + q\rho C_p} T_1(s) - T_2(s) + \frac{UA}{UA + q\rho C_p} T_0(s) = \tau s T_2(s) \quad (4.39)$$

$K_1 = \frac{q\rho C_p}{UA + q\rho C_p}$  eta  $K_2 = \frac{UA}{UA + q\rho C_p}$  definituz, (4.39) ekuazioa honela geratzen da:

$$K_1 T_1(s) - T_2(s) + K_2 T_0(s) = \tau s T_2(s) \quad (4.40)$$

$T_2(s)$  ezezaguna askatuz, honako hau dugu:

$$T_2(s) = \frac{K_1}{1 + \tau s} T_1(s) + \frac{K_2}{1 + \tau s} T_0(s) \quad (4.41)$$

$T_2(s)$   $T_1(s)$ -rekin erlazionatzen duen transferentzia-funtzioa hau izango da:

$$\frac{T_2(s)}{T_1(s)} = \frac{K_1}{1 + \tau s} = G_1(s) \quad (4.42)$$

Eta  $T_2(s)$   $T_0(s)$ -rekin erlazionatzen duen transferentzia-funtzioa:

$$\frac{T_2(s)}{T_0(s)} = \frac{K_2}{1 + \tau s} = G_2(s) \quad (4.43)$$

Oro har, sistema lineal eta aldagai aniztun (hainbat sarrera eta irteerarekin) batean, irteerako eta sarrerako aldagaien arteko erlazioa era matritzialean idatz daiteke, honela:

$$\begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \dots \\ Y_n(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1m} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{n1} & G_{n2} & \dots & G_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \dots \\ X_m(s) \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

non  $G_{11}, \dots, G_{nm}$  irteerako aldagai bakoitza sarrerako aldagaiekin erlazionatzen dituzten dagozkien transferentzia-funtzio indibidualak diren.

## 5. gaia

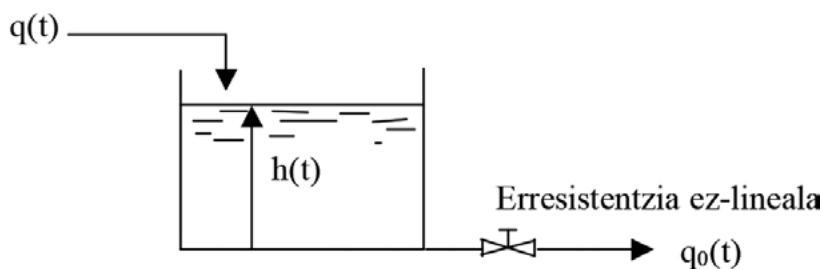
# Sistemen linealizazioa eta elkarrekintza

Orain arte aurreko gaian ikusi ditugun sistema fisikoen adibide guztiak linealak izan dira. Ingeniaritza kimikoan benetan garrantzia duten sistema fisiko gehienak ez dira linealak.

Sistema fisiko baten transferentzia-funtzio baten bidezko karakterizazioa sistema linealetarako bakarrik egin daiteke (ekuazio diferentzial linealen bidez deskriba daitezkeenak). Sistema linealetarako oso baliagarria den transferentzia-funtzioekin lan egitea, sistema ez-linealak sistema linealetara hurbiltzeko beharra sortzen da.

### 5.1. Linealizazio-teknikak

Sistema ez-linealen linealizazioa analizatzeko, aurretik ikusitako adibide erraz bati jarraituko zaio, likido mailaren tankea.



5.1. irudia. Likido mailaren sistema

Aurreko gaian erresistentzia lineala zela jo da. Orain, berriz, joko da altueraren eta emariaren artean erlazio koadratikoa dagoela:

$$q_0 = CH^{1/2} \quad (5.1)$$

non C konstante bat den.

Sistema, tankearen inguruan materia-balantze bat idatziz analiza daiteke:

$$\rho q(t) - \rho q_0(t) = \frac{d(\rho Ah)}{dt} \quad (5.2)$$

$$q(t) - q_0(t) = A \frac{dh}{dt}$$

(5.2) eta (5.1) ekuazioak konbinatuz  $q_0(t)$  honako ekuazio diferentzial lineal honetatik elimi-  
natzeko:

$$q - Ch^{1/2} = A \frac{dh}{dt} \quad (5.3)$$

Puntu honetara iritsita, ezin daiteke orain arteko Laplaceren transformatuak hartuz jarraitu,  $h^{1/2}$  termino ez-lineala dagoelako. Zailtasun hori honela saihestu daiteke.

$q_0(h)$  funtzioa Taylor-en serien bidez heda daiteke egoera estazionarioko balioaren inguruan ( $h_s$ ), honela:

$$q_0 = q_{0s} + q'_0(h_s)(h - h_s) + \frac{q''_0(h_s)(h - h_s)^2}{2!} + \dots + \frac{q_0^n(h_s)(h - h_s)^n}{n!} \quad (5.4)$$

non  $q'_0(h_s)$   $q_0$ -ren lehenengo deribatua den,  $h_s$ -n ebaluatua;  $q''_0(h_s)$ , bigarren deribatua, etab. (5.4) ekuazioan termino lineala bakarrik hartzen badugu,

$$q_0 \cong q_0(h_s) + q'_0(h_s)(h - h_s) \quad (5.5)$$

(5.1) ekuazioa (5.5) ekuazioan ordezkatzuz, honako hau dugu:

$$q_0 = q_0(h_s) + \frac{1}{R}(h - h_s) \quad (5.6)$$

non  $\frac{1}{R} = \frac{1}{2}Ch_s^{-1/2}$  den.

(5.6) ekuazioa materia-balantzeko (5.2) ekuazioan ordezkatzuz, honako hau dugu:

$$q - q_{0s} - \frac{h - h_s}{R} = A \frac{dh}{dt} \quad (5.7)$$

Egoera estazionarioan, tankera sartzen den emaria irteten denaren berdina da, gero

$$q_s = q_{0s} \quad (5.8)$$

Ekuazio hori (5.7) ekuazioan ordezkatzuz,

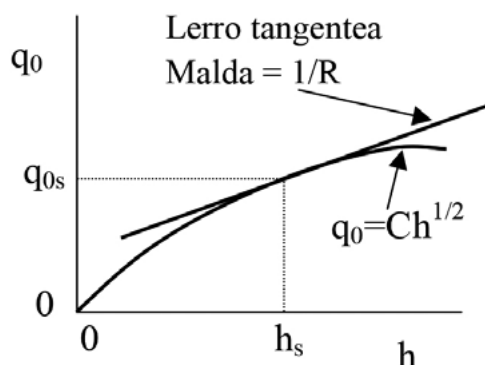
$$A \frac{dh}{dt} + \frac{h - h_s}{R} = q - q_s \quad (5.9)$$

$Q = q - q_s$  eta  $H = h - h_s$  desbideratze-aldagaiak (5.9) ekuazioan sartuz eta Laplaceren transformatuak hartuz, honako hau dugu.

$$\frac{H(s)}{Q(s)} = \frac{R}{\tau s + 1} \quad (5.10)$$

non  $\tau = RA$  den.

Itxuraz, sistema linealaren berdina den transferentzia-funtzioa lortu da. Kasu honetan,  $R$  erresistentzia sistemaren operazio-baldintzen menpekoa da egoera estazionarioan. Grafikoki, operazio-puntutik pasatzen den  $(q_{0s}, h_s)$  lerro tangentearen maldaren alderantzizkoa da, 5.2 irudian erakusten den moduan. Gainera, (5.5) ekuazioak emandako hurbilketa lineala lerro tangente horren ekuazioa da. Grafikoan estima daiteke  $h$ -n desbideratzea zenbat eta txikiagoa izan hurbilketa lineala orduan eta hobea dela.



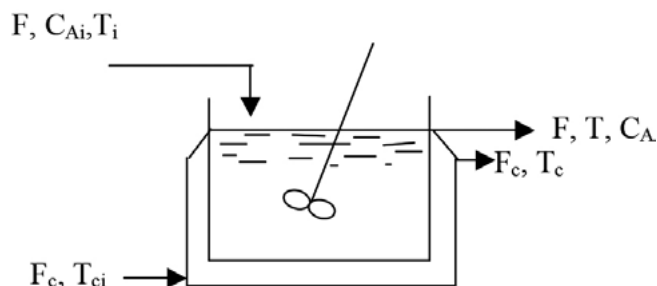
**5.2. irudia.** Irteerako emariaren eta tankeko altueraren arteko erlazio ez-lineala

Lineal bihurtutako emaitza balizko errepresentazio bat izatea sistemaren operazioaren menpekoa da. Likido maila kontrolatzaile baten bidez finkaturiko baliotik ( $h_s$ ) hurbil mantentzen bada, desbideratzeak likido mailan txikiak izango dira, eta lineal bihurtutako ekuazioa egokia izango da. Likido maila tarte oso zabal batean aldatzen bada, hurbilketa lineala oso txarra izan daiteke eta sistema asko desbidera daiteke transferentzia-funtzioaren ereduak aurretik. Orduan, analisi-metodo ez-linealak erabili beharko dira.

### *Sistema ez-linealaren adibidea*

Demagun 5.3 irudian erakutsitako erreazio-sistema dugula. Sistema irabiatutako tanke jarraituko erreaktore batean datza, non 1. ordenako  $A \rightarrow B$  erreazio exotermikoa gertatzen den. Erreaktorera korrante bat sartzen da  $F$  emariarekin,  $T_i$  tenperaturarekin eta  $C_{Ai}$  kontzentrazioarekin. Irteerako emaria  $F$  da; beraz, bolumena erreaktorean konstantea ( $V$ ) dela jotzen da. Erreaktorearen irteeran, korranteak  $F$  emaria,  $T$  tenperatura eta  $C_A$  kontzentrazioa izango ditu. Erreakzioa exotermikoa denez, badu hozteko atorra bat, eta, handik, fluido hoztaile batek zirkulatzen du  $F_c$  emariarekin eta  $T_{ci}$  sarrerako tenperaturarekin. Bai erreaktoreak bai atorrak nahaste perfektuzko erregimena dutela joko da; beraz, kontzentrazioa eta tenperatura erreaktorearen irteeran, erreaktoreko edozein puntutan daudenak izango dira eta fluido hoztailearen irteerako tenperatura

atorrako edozein puntutan dagoenaren berdina izango da. Ariketa honako honetan datza: erreaktoreko kontzentrazioaren eta temperaturaren aldaketak elikadura-korrontearen kontzentrazioaren eta temperaturaren aldaketekin eta fluido hoztailearen temperaturaren aldaketekin erlazionatzen dituzten transferentzia-funtzioak aurkitzea.



**5.3. irudia.** Atorrak hozketa duen nahaste perfektuzko tanke jarraituko erreaktorea

Sistema A osagaiarekiko erreaktorean materia-balantze bat eginez analizatzen da:

$$FC_{Ai} - FC_A - k_0 e^{-E/RT} VC_A = \frac{d(VC_A)}{dt} \quad (5.11)$$

Halaber, beharrezkoa da bero-balantzea erreaktorean kontuan hartzea:

$$FpC_p T_i - FpC_p T + (-\Delta H_R) k_0 e^{-E/RT} VC_A - UA(T - T_c) = \frac{d(V\rho C_p T)}{dt} \quad (5.12)$$

Bi ekuazio diferentzial horiek ez-linealak dira,  $e^{-E/RT} C_A$  terminoa dela eta. Termino horretan, temperatura esponentzian dago eta, gainera, esponentziala  $C_A$ -z biderkatzen da.

Eredu lineal bat eduki ahal izateko, termino hori lineal bihurtu egin beharko da lehengo adibidean erabilitako teknika berarekin, hau da,  $T_s$  eta  $C_{As}$  operazio-puntuaren inguruan lineal bihurtu egin beharko dira egoera estazionarioan.

$$\begin{aligned} e^{-E/RT} C_A &\cong e^{-E/RT_s} C_{As} + \left[ \frac{\partial(e^{-E/RT} C_A)}{\partial T} \right]_{(T_s, C_{As})} (T - T_s) + \left[ \frac{\partial(e^{-E/RT} C_A)}{\partial C_A} \right]_{(T_s, C_{As})} (C_A - C_{As}) = \\ &= e^{-E/RT_s} C_{As} + \left[ \frac{E}{RT_s^2} e^{-E/RT_s} C_{As} \right] (T - T_s) + e^{-E/RT_s} (C_A - C_{As}) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Orain,  $e^{-E/RT} C_A$  terminoa lineala da  $T$ -n eta  $C_A$ -n.

Jarraian, materia- eta bero-balantzeak egoera estazionarioan, honela geratuko liriateke:

$$FC_{Ais} - FC_{As} - k_0 e^{-E/RT_s} VC_{As} = 0 \quad (5.14)$$

$$FpC_p T_{is} - FpC_p T_s + (-\Delta H_R) k_0 e^{-E/RT_s} VC_{As} - UA(T_s - T_{Cs}) = 0 \quad (5.15)$$



Egoera ez-estazionarioan materia- eta bero-balantzeak deskribatzen dituzten ekuazioak kenduz, honako hau lortzen da:

$$\frac{dC'_A}{dt} = \frac{F}{V}(C'_{Ai} - C'_A) - \left[ \frac{k_0 E}{RT_s^2} e^{-E/RT_s} C_{As} \right] T' - (k_0 e^{-E/RT_s}) C'_A \quad (5.16)$$

$$\frac{dT'}{dt} = \frac{F}{V}(T'_i - T') + \frac{(-\Delta H_R)}{\rho C_p} k_0 \left[ \left( \frac{E}{RT_s^2} e^{-E/RT_s} C_{As} \right) T' + e^{-E/RT_s} C'_A \right] - \frac{UA}{\rho C_p V} (T' - T'_C) \quad (5.17)$$

non desbideratze-aldagaiak honela definituta dauden:

$$C'_A = C_A - C_{As}$$

$$C'_{Ai} = C_{Ai} - C_{Ais}$$

$$T' = T - T_s$$

$$T'_i = T_i - T_{is}$$

$$T'_C = T_C - T_{Cs}$$

zero izanik zero denboran.

Laplaceren transformatuak hartuz (5.16) eta (5.17) ekuazioetan:

$$sC'_A(s) = \frac{F}{V}(C'_{Ai}(s) - C'_A(s)) - \left[ \frac{k_0 E}{RT_s^2} e^{-E/RT_s} C_{As} \right] T'(s) - (k_0 e^{-E/RT_s}) C'_A(s) \quad (5.18)$$

$$sT'(s) = \frac{F}{V}(T'_i(s) - T'(s)) + \frac{(-\Delta H_R)}{\rho C_p} k_0 \left[ \left( \frac{E}{RT_s^2} e^{-E/RT_s} C_{As} \right) T'(s) + e^{-E/RT_s} C'_A(s) \right] - \frac{UA}{\rho C_p V} (T'(s) - T'_C(s)) \quad (5.19)$$

Bi ekuazioak berrordenatuz honako hau dugu:

$$\left( s + \frac{F}{V} + k_0 e^{-E/RT_s} \right) C'_A(s) = \frac{F}{V} C'_{Ai}(s) - \left[ \frac{k_0 E}{RT_s^2} e^{-E/RT_s} C_{As} \right] T'(s) \quad (5.20)$$

$$\left( s + \frac{F}{V} - \frac{(-\Delta H_R)}{\rho C_p} k_0 \frac{E}{RT_s^2} e^{-E/RT_s} C_{As} + \frac{UA}{\rho C_p V} \right) T'(s) = \frac{F}{V} T'_i(s) + \frac{(-\Delta H_R)}{\rho C_p} k_0 e^{-E/RT_s} C'_A(s) + \frac{UA}{\rho C_p V} T'_C(s) \quad (5.21)$$

$C'_A(s)$  eta  $T'(s)$  askatuz

$$C'_A(s) = \frac{\frac{F}{V}}{\left( \frac{F + V k_0 e^{-E/RT_s}}{V} s + 1 \right)} C'_{Ai}(s) - \frac{\frac{VC_{As} k_0 E}{RT_s^2}}{\left( \frac{F + V k_0 e^{-E/RT_s}}{V} s + 1 \right)} T'(s) \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned}
 T'(s) = & \frac{\left( \frac{FC_p RT_s^2}{F\rho C_p RT_s^2 - (-\Delta H_R)k_0 VC_{As} E^{-E/RT_s} + UART_s^2} \right)}{\left( \frac{\rho C_p VRT_s^2}{F\rho C_p RT_s^2 - (-\Delta H_R)k_0 VC_{As} E^{-E/RT_s} + UART_s^2} \right) s + 1} T'_i(s) + \\
 & + \frac{\left( \frac{VRT_s^2 (-\Delta H_R)k_0 e^{-E/RT_s}}{F\rho C_p RT_s^2 - (-\Delta H_R)k_0 VC_{As} E^{-E/RT_s} + UART_s^2} \right)}{\left( \frac{\rho C_p VRT_s^2}{F\rho C_p RT_s^2 - (-\Delta H_R)k_0 VC_{As} E^{-E/RT_s} + UART_s^2} \right) s + 1} C'_A(s) + \\
 & + \frac{\left( \frac{UART_s^2}{F\rho C_p RT_s^2 - (-\Delta H_R)k_0 VC_{As} E^{-E/RT_s} + UART_s^2} \right)}{\left( \frac{\rho C_p VRT_s^2}{F\rho C_p RT_s^2 - (-\Delta H_R)k_0 VC_{As} E^{-E/RT_s} + UART_s^2} \right) s + 1} T'_C(s) \quad (5.23)
 \end{aligned}$$

Gero, bi ekuazioak Laplaceren domeinuan, honela geratuko lirarteke:

$$C'_A(s) = \frac{K_1}{(\tau_1 s + 1)} C'_{Ai}(s) - \frac{K_2}{(\tau_1 s + 1)} T'(s) \quad (5.24)$$

$$T'(s) = \frac{K_3}{\tau_2 s + 1} T'_i(s) + \frac{K_4}{\tau_2 s + 1} C'_A(s) + \frac{K_5}{\tau_2 s + 1} T'_C(s) \quad (5.25)$$

non  $\tau_1$  eta  $\tau_2$  bi denbora-konstante diren eta  $K_1, \dots, K_5$  (5.22) eta (5.23) ekuazioetan agertzen diren konstanteak diren.

(5.24) eta (5.25) ekuazioak era sinplifikatuan honela idatz daitezke:

$$C'_A(s) = G_1 C'_{Ai}(s) - G_2 T'(s) \quad (5.26)$$

$$T'(s) = G_3 T'_i(s) + G_4 C'_A(s) + G_5 T'_C(s) \quad (5.27)$$

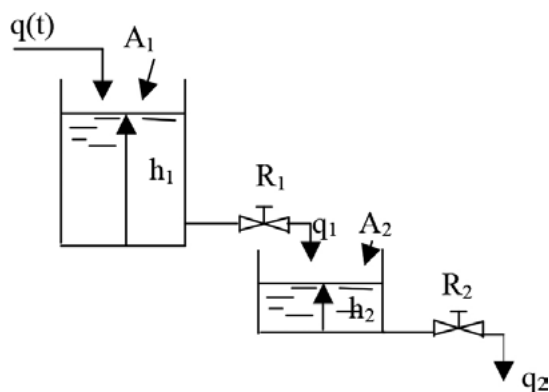
Ez  $C'_A(s)$  ez  $T'(s)$  ez dira esplizituki  $C'_{Ai}(s)$ -ren,  $T'_i(s)$ -ren eta  $T'_C(s)$ -ren funtzioan geratzen (5.26) eta (5.27) ekuazioetan. Horretarako, transformazio minimo batzuk egin behar dira, eta, hala, era matritzialean geratuko dira:

$$\begin{pmatrix} C'_A(s) \\ T'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{G_1}{1+G_2G_4} & -\frac{G_2G_3}{1+G_2G_4} & -\frac{G_2G_5}{1+G_2G_4} \\ \frac{G_1G_4}{1+G_2G_4} & \frac{G_3}{1+G_2G_4} & \frac{G_5}{1+G_2G_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C'_{Ai}(s) \\ T'_i(s) \\ T'_C(s) \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

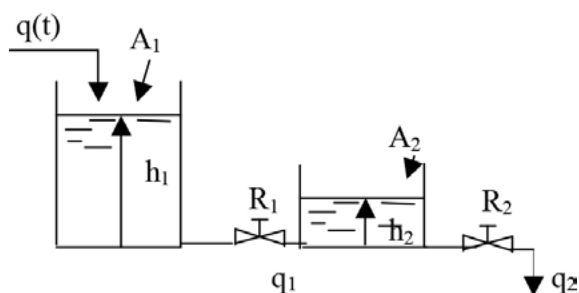
(5.28) ekuazioa lineal bihurtutako eredua da, transferentzia-funtzioen eran adierazia, planteaturiko sistema deskribatzen duena.

## 5.2. Seriean dauden 1. ordenako sistemen erantzuna

Ohikoa izaten da sistema fisiko bat seriean konektaturiko 1. ordenako hainbat prozesu gisa adieraztea. Sistema mota horiek adierazteko, 5.4 irudiko likido mailaren sistemak hartuko dira kontuan, non bi tanke kokaturik dauden eta lehenengo tanketik irteten den emaria bigarren tankera sartzen den. 5.4 irudian, bi egoera posible erakusten dira. Lehenengoan, lehenengo tankeko irteerako emariak zuzenean atmosferara deskargatzen du bigarren tankean sartu aurretik eta  $R_1$ -n zeharreko irteerako emaria  $h_1$ -n menpekoa da bakarrik.  $h_2$ -ren aldaketak bigarren tankean ez du, beraz, eraginik lehenengo tankearen erantzunean. Sistema mota hori interakziorik gabeko sistema deitzen da. Aldiz, esaten da bigarren egoeran erakutsitako sistema interakzioa duen sistema dela,  $R_1$ -n zehar zirkulatzen duen emaria  $h_1$  eta  $h_2$ -ren arteko altuera diferentziaren menpekoa delako.



5.4.a) irudia. Bi tankedun maila-sistema. Interakziorik gabe



5.4.b) irudia. Bi tankedun maila-sistema. Interakzioarekin

### 5.2.1. Interakziorik gabeko sistema

Aurreko adibideetan bezala jotzen da likidoa dentsitate konstantekoa dela, tankeek zeharkako azalera konstantea dutela eta fluxurako erresistentzia lineala dela. Bigarren tankeko altuera lehe-

nengo tankera sartzen den emariarekin erlazionatzen duen transferentzia-funtzio bat aurkitzean datza, hau da,  $H_2(s)/Q(s)$ . Horretarako, tanke bakoitzerako transferentzia-funtzioak lortuko dira,  $Q_1(s)/Q(s)$  eta  $H_2(s)/Q_1(s)$ , tanke bakoitzerako materia-balantzeen bidez.

Materia-balantzea lehenengo tankean, honako hau izango da:

$$q - q_1 = A_1 \frac{dh_1}{dt} \quad (5.29)$$

Materia-balantzea bigarren tankean, honako hau izango da:

$$q_1 - q_2 = A_2 \frac{dh_2}{dt} \quad (5.30)$$

Bi erresistentzia linealetarako erlazioak honako adierazpen hauek emanak datoz:

$$q_1 = \frac{h_1}{R_1} \quad (5.31)$$

$$q_2 = \frac{h_2}{R_2} \quad (5.32)$$

(5.29) eta (5.31) ekuazioak konbinatuz eta aurreko adibideetan bezala desbideratze-aldagaiak sartuz, honako hau dugu:

$$\frac{Q_1(s)}{Q(s)} = \frac{1}{\tau_1 s + 1} \quad (5.33)$$

non  $Q_1 = q_1 - q_{1s}$ ,  $Q = q - q_s$  eta  $\tau_1 = R_1 A_1$  diren.

Halaber, (5.30) eta (5.32) ekuazioak konbina daitezke transferentzia-funtzioa lortzeko 2 tankean:

$$\frac{H_2(s)}{Q_1(s)} = \frac{R_2}{\tau_2 s + 1} \quad (5.34)$$

non  $H_2 = h_2 - h_{2s}$ , eta  $\tau_2 = R_2 A_2$  diren.

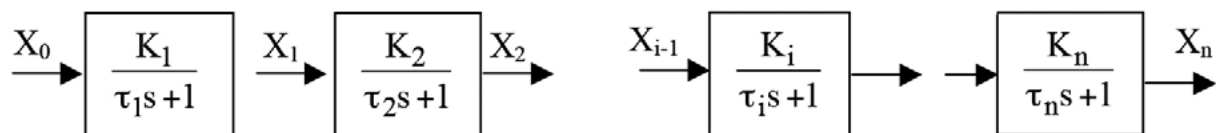
Orain,  $H_2(s)/Q(s)$  transferentzia-funtzio globala lor daiteke (5.33) eta (5.34) ekuazioak biderkatuz  $Q_1(s)$  desagerrarazteko:

$$\frac{H_2(s)}{Q(s)} = \frac{1}{\tau_1 s + 1} \frac{R_2}{\tau_2 s + 1} \quad (5.35)$$

Transferentzia-funtzio globala 1. ordenako bi transferentzia-funtzioren biderketa da, haietako bakoitza independenteki funtzionatzen duen tanke baten transferentzia-funtzioa izanik.

## 5.2.2. Interakziorik gabeko seriean dauden hainbat sistematarako orokortzea

Orain, interakziorik ez duten eta seriean dauden 1. ordenako sistemen aurreko kasua orokortu daiteke, interakziorik gabeko 1. ordenako n sistema dugula joz, 5.5 irudiko bloke diagraman erakusten den moduan.



5.5. irudia. Interakziorik gabeko 1. ordenako sistemak

Blokeen diagrama erlazio hauen baliokidea da:

$$\frac{X_1(s)}{X_0(s)} = \frac{K_1}{\tau_1 s + 1}$$

$$\frac{X_2(s)}{X_1(s)} = \frac{K_2}{\tau_2 s + 1}$$

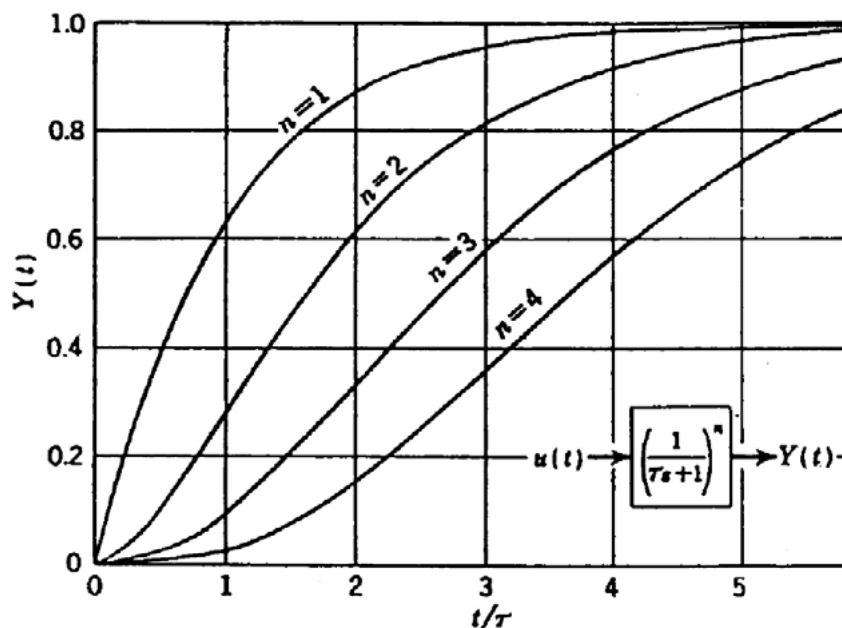
---


$$\frac{X_n(s)}{X_{n-1}(s)} = \frac{K_n}{\tau_n s + 1}$$

Transferentzia-funtzio globala lortzeko, transferentzia-funtzio indibidualak biderkatzen dira, gero

$$\frac{X_n(s)}{X_0(s)} = \prod_{i=1}^n \frac{K_i}{\tau_i s + 1} \quad (5.36)$$

5.6 irudian, etapa bat edo gehiago seriean dituzten 1. ordenako sistematarako, maila unitario batekiko erantzunaren kurbak erakusten dira. Erantzuna gero eta motelagoa egiten dela ikusten da seriean dauden 1. ordenako etapen kopurua zenbat eta handiagoa izan. Etapa bakarra dagoenean, aldaketa-abiadura maximoa da jatorrian,  $t = 0$  denean. Aldiz, seriean etapa bat baino gehiago daudenean, aldaketaren abiadura jatorrian (malda jatorrian), zero da.



5.6. irudia. Interakziorik gabeko 1. ordenako sistemek maila unitario bati emandako erantzuna

### 5.2.3. Sistema interakzioarekin

Sistema mota horiek analizatzeko, 5.4b irudian erakusten den sistemarako transferentzia-funtzioa lortuko da. Analisia tankeetarako materia-balantzeak idatziz hasiko da, interakziorik gabeko sistemaren kasurako egin zen bezala. Balantzeak berdinak dira eta (5.29) eta (5.30) ekuazioek emanak datoz. Dena den, honako hau da lehen tankerako emariaren eta altueraren arteko erlazioa:

$$q_1 = \frac{1}{R_1}(h_1 - h_2) \quad (5.37)$$

Bigarren tankean, altueraren eta emariaren arteko erlazioa lehenengo bera da eta (5.32) ekuazioak emana dator. (5.29), (5.30), (5.32) eta (5.37) ekuazioak konbinatzeko era erraz bat honako honetan datza: lehenengo desbideratze-aldagaien terminoetan adierazi, lortutako ekuazioak transformatu eta, gero, nahi ez diren aldagaiak desagerrarazteko konbinatu.

Egoera estazionarioan, (5.29) eta (5.30) ekuazioak honela idatz daitezke:

$$q_s - q_{1s} = 0 \quad (5.38)$$

$$q_{1s} - q_{2s} = 0 \quad (5.39)$$

Ekuazio horiek dagozkien (5.29) eta (5.30) ekuazioetatik kenduz, honako hau dugu:

$$Q - Q_1 = A_1 \frac{dH_1}{dt} \quad (5.40)$$

$$Q_1 - Q_2 = A_2 \frac{dH_2}{dt} \quad (5.41)$$

(5.37) eta (5.32) ekuazioak desbideratze-aldagaien terminoetan adieraziz, honako hau dugu:

$$Q_1 = \frac{H_1 - H_2}{R_1} \quad (5.42)$$

$$Q_2 = \frac{H_2}{R_2} \quad (5.43)$$

(5.40)-tik (5.43)-rako ekuazioak transformatuz honako hau lortzen da:

$$Q(s) - Q_1(s) = A_1 s H_1(s) \quad (5.44)$$

$$Q_1(s) - Q_2(s) = A_2 s H_2(s) \quad (5.45)$$

$$R_1 Q_1(s) = H_1(s) - H_2(s) \quad (5.46)$$

$$R_2 Q_2(s) = H_2(s) \quad (5.47)$$

4 ekuazio aljebraiko 5 ezezagunekin ( $Q$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $H_1$  y  $H_2$ ) daude. Ekuazio horiek konbinatu egin daitezke,  $Q_1$ ,  $Q_2$  eta  $H_1$  eliminatzeko eta aurkitu nahi den transferentzia-funtzioa lortzeko:

$$\frac{H_2(s)}{Q(s)} = \frac{R_2}{\tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2 + A_1 R_2) s + 1} \quad (5.48)$$

Kasu honetan, independenteki funtzionatzen duten tankeetarako, transferentzia-funtzioen biderketak, (5.33) eta (5.34) ekuazioak, ez du emaitza egokia ematen elkarri eragiten ari diren bi tankeetarako. Interakzioa duen sistemarako (5.48) ekuazioa eta interakziorik ez duen sistemarako (5.35) ekuazioa, transferentzia-funtzioen arteko diferentzia  $A_1 R_2$  terminoa agertzea da  $s$ -ren koefizientean.

Sistema baten erantzun trantsitorioan interakzioak duen eragina ulertzeko, har dezagun aintzat bi tankeko sistema bat non denbora-konstanteak berdinak diren ( $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ ). Tanke biek ez badiote elkarri eragiten, honako hau da bigarren tankeko irteerako emaria lehenengo tankera sartzen den emariarekin erlazionatzen duen transferentzia-funtzioa:

$$\frac{Q_2(s)}{Q(s)} = \left( \frac{1}{\tau s + 1} \right)^2 \quad (5.49)$$

Honako hau da transferentzia-funtzio horrek maila unitario bati ematen dion erantzuna:

$$Q_2(t) = 1 - e^{-t/\tau} - \frac{t}{\tau} e^{-t/\tau} \quad (5.50)$$

Bi tankeek elkarri eragiten badiote, honako hau litzateke transferentzia-funtzio globala, (5.48) ekuazioren arabera ( $A_1 = A_2$  dela joz gainera):

$$\frac{Q_2(s)}{Q(s)} = \left( \frac{1}{\tau^2 s^2 + 3\tau s + 1} \right) \quad (5.51)$$

Funtzioaren izendatzailea garatuz, honela geratuko litzateke:

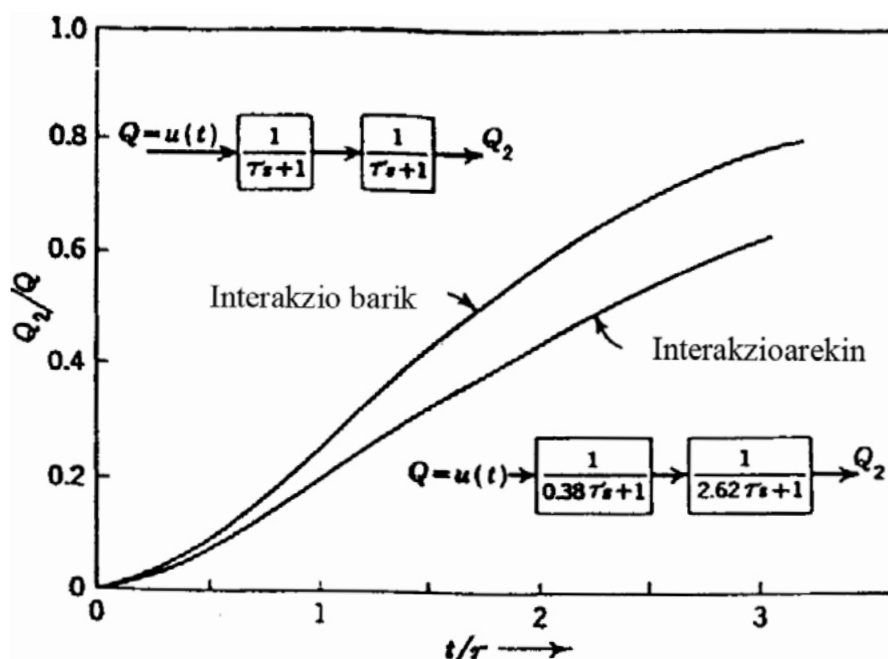
$$\frac{Q_2(s)}{Q(s)} = \left( \frac{1}{(0.38\tau s + 1)(2.62\tau s + 1)} \right) \quad (5.52)$$

Adibide honetan ikusten da interakzioak sistemaren denbora-konstante efektiboak aldarazi dituela. Denbora-konstante bat, interakziorik gabeko sistemaren kasurako, tanke bakoitzaren denbora-konstantea ( $\tau$ ) baino puskaz handiagoa egin da eta bestea, txikiagoa.

(5.52) ekuazioan, honako hau izango da maila unitario batekiko erantzuna denboran zehar:

$$Q_2(t) = 1 + 0.17e^{-t/0.38\tau} - 1.17e^{-t/2.62\tau} \quad (5.53)$$

5.7 irudian analizatu diren bi kasuetarako, erantzunak denboran zehar erakusten dira. Irudian ikus daiteke interakzioak erantzuna gelditu egiten duela, mantoarazi egiten duela. Erantzuna arrazoi fisikoengatik uler daiteke: bi sistemetan maila-aldaketa bera sartzen bada (interakzioarekin eta interakziorik gabe), interakziorik gabeko kasuan, lehen tankeko emaria ez da txikituko bigarren tankean maila handitzean. Interakzioa badago, lehen tankeko irteerako emaria txikitu egingo da bigarren tankean maila handituz doan neurrian. Une jakin batean, lehen tankeko irteerako emaria txikiagoa izango da interakzioa duen kasuan interakziorik ez duen kasuan baino, eta, emaitza moduan, bigarren tankeko altuera geldoago handitzea ekarriko du.



5.7. irudia. Maila unitario baten ondorioz interakzioak erantzunean duen eragina, seriean dauden bi tankeen adibidean

Oro har, 1. ordenako bi elementuz osatutako sistema baten interakzioaren eragina denbora-konstante efektiboen zatidura aldatzean datza. Denboran zeharreko erantzunaren terminoetan, horrek esan nahi du interakzioa duen sistema geldoagoa dela interakziorik ez duen sistema bera baino.

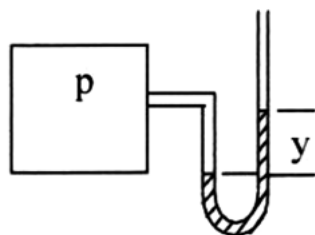


## 6. gaia

# Bigarren ordenako sistemen erantzuna

### 6.1. Transferentzia-funtzioa

Atal honetan, bigarren ordenako sistema izeneko oinarritzko sistema azalduko da. Bigarren ordenako sistema baten transferentzia-funtzioa garatuko da ingeniari kimikoko ohiko adibide bat erabiliz: presio diferentzialeko neurgailua, 6.1 irudian irudikatu den modukoa.



**6.1. irudia.** Likido-zutabedun presio diferentzialeko neurgailua

Likido-zutabedun manometro honetan,  $p$  gainpresioa da sisteman;  $A$ , likidoa dagoen tutuan zeharkako sekzioa (konstantea);  $y$ , likido-zutabearen altuera, eta  $L$ , likidoz beterik dagoen zutabe osoaren altuera.

Egoera estazionarioan indarren balantze bat adierazten duen ekuazio bat idatz daiteke, presioak eragindako indarra likido-zutabearen altuerarekin berdindu dadin:

$$P_s A = A y_s \rho g \quad (6.1)$$

non  $\rho$  likidoaren dentsitatea den;  $g$ , grabitatearen azelerazioaren konstantea, eta  $s$  azpiindizeak baliok egoera estazionarioan adierazten dituen.

Halaber, beste ekuazio bat idatz daiteke egoera estazionarioan indarren balantze bat adierazteko sistemaren presioan  $\Delta p$  unitateko aldaketa bat gertatzen denean:

$$(p_s + \Delta p) A - A \rho g (y_s + 2\Delta y) - RA \frac{d(y_s + \Delta y)}{dt} = AL\rho \frac{d^2(y_s + \Delta y)}{dt^2} \quad (6.2)$$

non  $RA \frac{d(y_s + \Delta y)}{dt}$  terminoa marruskadura-indarra den, jariakina tutuan zehar mugitzen den abiadurarekiko proportzionala dela joz.

(6.2) eta (6.1) ekuazioak kenduz eta  $y_s$ -ren lehenengo eta bigarren deribatuak denborarekiko zero direla kontutan hartuz  $y_s$  konstantea izatean, honako hau dugu:

$$\Delta pA - 2A\rho g\Delta y - RA \frac{d\Delta y}{dt} = AL\rho \frac{d^2\Delta y}{dt^2} \quad (6.3)$$

Desbideratze-aldagaiak honela deituz,

$$Y = \Delta y$$

$$P = \Delta p$$

$$PA - 2A\rho gY - RA \frac{dY}{dt} = AL\rho \frac{d^2Y}{dt^2} \quad (6.4)$$

Ekuazio hau berrordenatuz, honako hau dugu:

$$\frac{L}{2g} \frac{d^2Y}{dt^2} + \frac{R}{2\rho g} \frac{dY}{dt} + Y = \frac{P}{2\rho g} \quad (6.5)$$

Ekuazio mota hauek, egokiak izateagatik, honela idazten dira:

$$\tau^2 \frac{d^2Y}{dt^2} + 2\xi\tau \frac{dY}{dt} + Y = X(t) \quad (6.6)$$

edo, orobat,

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2Y}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_n} \frac{dY}{dt} + Y = X(t) \quad (6.7)$$

Likido-zutabedun manometroaren adibide honetan, honako hau dugu:

$$\tau^2 = \frac{1}{\omega_n^2} = \frac{L}{2g}$$

$$2\xi\tau = \frac{2\xi}{\omega_n} = \frac{R}{2\rho g}$$

$$X(t) = \frac{P(t)}{2\rho g}$$

Adibide honetarako ebatziz, honako hau dugu:

$$\tau = \sqrt{\frac{L}{2g}}$$

$$\xi = \frac{R}{4\rho g} \sqrt{\frac{2g}{L}}$$

Definizioz,  $\tau$  eta  $\xi$  positiboak dira. (6.6) ekuazioan Laplaceren transformatuak hartuz, honako transferentzia funtzio honetara heltzen da:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} \quad (6.8)$$

Hori litzateke adibide bezala erabilitako sistemaren transferentzia-funtzioa. Ikus daitekeenez, bigarren ordenako elementu hori karakterizatzen duen bi parametro behar dira:  $\tau$  eta  $\xi$ . Oro har, bigarren ordenako elementu baten transferentzia-funtzioa honako ekuazio honek emana dator:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} \quad (6.9)$$

$\tau$  eta  $\xi$  parametroei denbora-konstantea eta indargetze-faktorea deitzen zaie. Lehenengo parametroak ( $\tau$ ) denbora-unitateak ditu; bigarrena ( $\xi$ ), berriz, adimentsionala da.

## 6.2. Maila batekiko erantzuna

Sarrerako funtzioa maila unitarioa bada, haren transferentzia-funtzioa honako hau izango da:

$$X(s) = \frac{1}{s} \quad (6.10)$$

(6.10) ekuazioa (6.9) ekuazioarekin konbinatuz, honako hau dugu:

$$Y(s) = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} \frac{1}{s} \quad (6.11)$$

Izendatzaile koadratikoa bi termino linealen biderketa produktu gisa faktoriza daiteke; beraien erroak hauek dira:

$$s_1 = -\frac{\xi}{\tau} + \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau} \quad (6.12)$$

$$s_2 = -\frac{\xi}{\tau} - \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau} \quad (6.13)$$

Orduan, (6.11) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$Y(s) = \frac{K / \tau^2}{s(s-s_1)(s-s_2)} \quad (6.14)$$

non  $s_1$  eta  $s_2$  errealak edo konplexuak izan daitezkeen  $\xi$ -ren balioaren arabera.  $Y(t)$  sistemaren erantzuna (6.14) ekuazioa inbertituz kalkula daiteke. Erroen izaerak  $Y(t)$ -ren itxurari eragingo dienez, ariketa 3 kasutan bereiz daiteke:

1. *kasua*:  $\xi < 1$

Kasu honetan,  $s_1$  eta  $s_2$  bi erroak konjokatu konplexuak dira. (6.14) ekuazioaren inbertsioak honako hau ematen du:

$$Y(t) = K \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\frac{\xi t}{\tau}} \operatorname{sen} \left( \sqrt{1-\xi^2} \frac{t}{\tau} + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right) \right\} \quad (6.15)$$

2. *kasua*:  $\xi = 1$

Kasu honetan,  $s_1$  eta  $s_2$  bi erroak errealak, negatiboak eta berdinak dira. (6.14) ekuazioaren inbertsioak honako hau ematen du:

$$Y(t) = K \left\{ 1 - \left( 1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \right\} \quad (6.16)$$

3. *kasua*:  $\xi > 1$

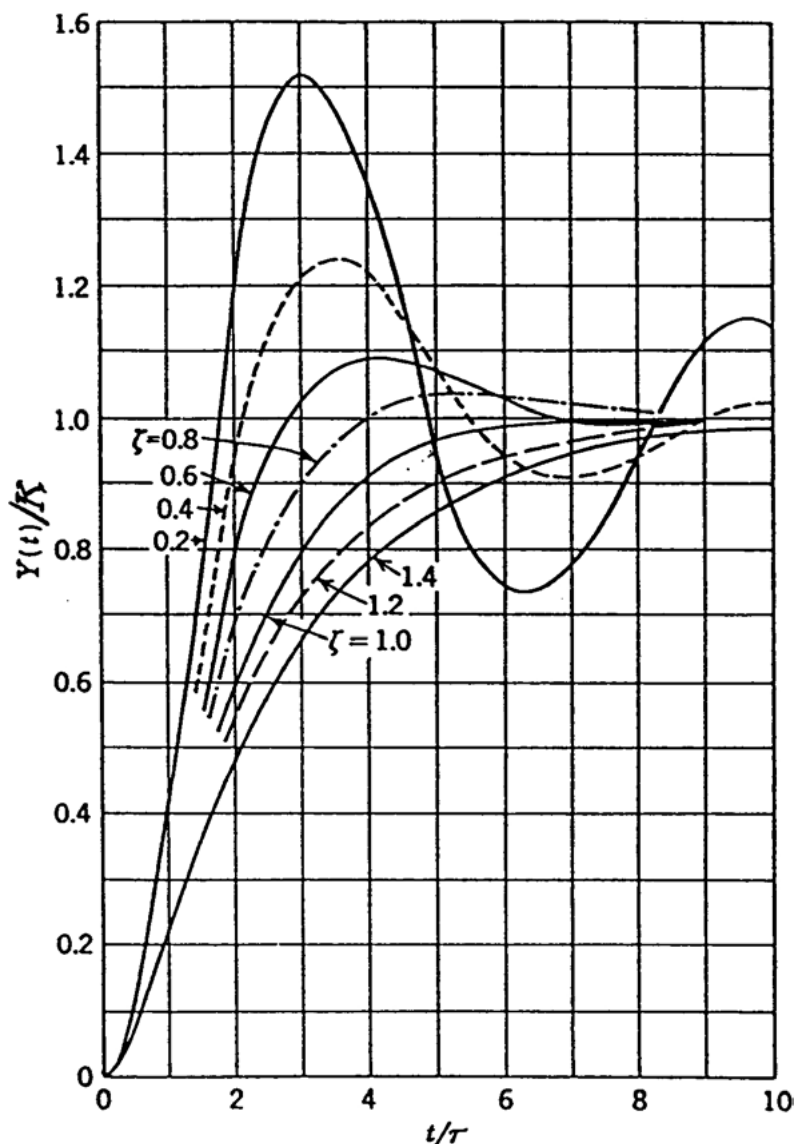
Kasu honetan,  $s_1$  eta  $s_2$  bi erroak errealak eta negatiboak dira. (6.14) ekuazioaren inbertsioak honako hau ematen du:

$$Y(t) = K \left\{ 1 - e^{-\frac{\xi t}{\tau}} \left( \cosh \sqrt{\xi^2 - 1} \frac{t}{\tau} + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \operatorname{senh} \sqrt{\xi^2 - 1} \frac{t}{\tau} \right) \right\} \quad (6.17)$$

non funtzio hiperbolikoak honela definitzen diren:

$$\operatorname{senh} a = \frac{e^a - e^{-a}}{2} \quad \text{eta} \quad \operatorname{cosh} a = \frac{e^a + e^{-a}}{2}$$

6.2 irudian,  $Y(t)/K$  erantzun frakzionala irudikatu da  $t/\tau$ -rekiko  $\xi$ -ren balio ezberdineta-rako.



**6.2. irudia.** Bigarren ordenako sistema batek maila unitario bati emandako erantzuna

Ikus liteke nola  $\xi < 1$  denerako, erantzuna gorabeheratsua den eta gutxika indargetzen den, eta,  $\xi$  handituz doan heinean, erantzunak gorabehera gutxiago dituen. Orduan esaten da  $\xi < 1$  bada sistema ez dagoela nahiko indargetua.  $\xi = 1$  bada, erantzuna ez da gorabeheratsua eta esaten da kritikoki indargetuta dagoela, hau da,  $Y/K = 1$ -ra hurbilketa azkarragoa egin daiteke gorabeherarik gabe.  $\xi > 1$  denerako, erantzunak ez du gorabeherarik eta sistema gainindargetua da.  $\xi$  zenbat eta altuagoa izan, sistemak motelago erantzuten du. Kasu guztietan, malda jatorrian zero da  $\xi$ -ren edozein baliotarako.

$\xi > 1$ -rako erantzuna ez da berria, lehen ordenako bi sistema seriean dituen sistema baten berdina da, zeinaren transferentzia-funtzioa honako hau den:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad (6.18)$$

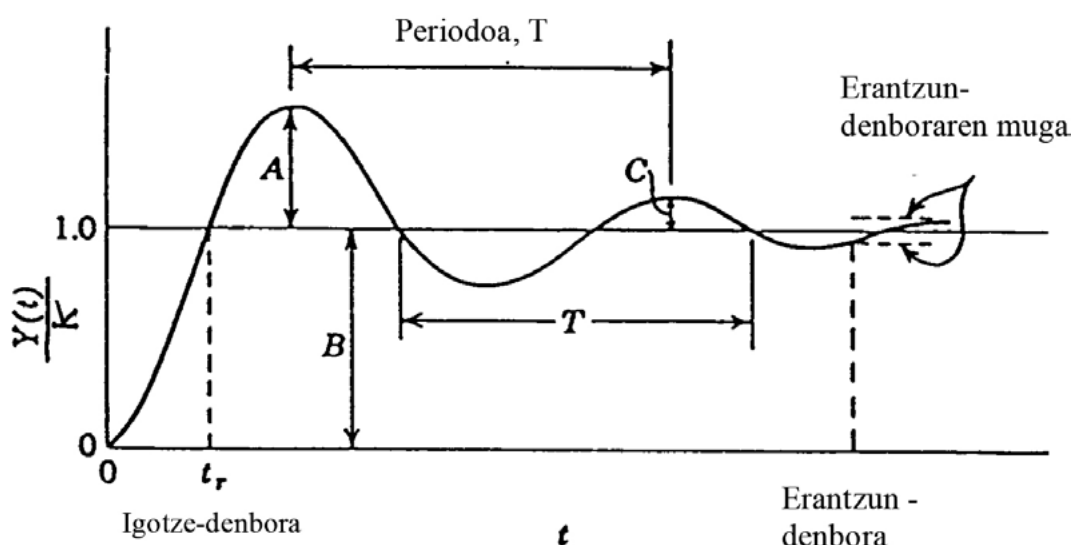
(6.18) ekuazioko izendatzailearen faktore linealak konparatuz (6.9) ekuazioarenarekin, honako hau dugu:

$$\tau_1 = (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\tau \quad (6.19)$$

$$\tau_2 = (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\tau \quad (6.20)$$

Ohartu  $\tau_1 = \tau_2$  bada,  $\tau = \tau_1 = \tau_2$  eta  $\xi = 1$ . Egiaztatu emaitza hori.

Komentatutako hiru kasuetatik, nahiko indargeturik ez dauden sistemei dagokiena maiz gertatzen da. Erantzun mota hori era kuantitatiboan deskribatzeko erabiltzen diren termino-serie batzuk ikusiko dira. Termino horiek 6.3 irudian erakusten dira.



**6.3. irudia.** Nahiko indargeturik ez dagoen erantzun bat deskribatzeko erabiltako terminoak

— Gaindikina: maila-aldaketa baten ondoren erantzunak azken balioa zenbatean gaintzen duenaren neurketa bat da, eta 6.3 irudiko  $A/B$  zatiduraren bidez adierazten da. Maila unitario baterako, gaindikina  $\xi$ -ren funtzioan emana dator.

$$\text{Gaidikina} = \exp\left(\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \quad (6.21)$$

Gaidikina handitu egiten da  $\xi$  txikitzen den heinean.

— Gainbehera-erlazioa (decay ratio): segidako goraldien arteko altueren zatidura da eta 6.3 irudian adierazitako  $C/A$  zatidurak emana dator. Haren balioa  $\xi$ -ren funtzioan emana dator honako ekuazio honetan:

$$\text{Decay ratio} = \exp\left(\frac{-2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) = \text{gaidikina}^2 \quad (6.22)$$

- Igoera-denbora: erantzunak lehenengo aldiz bukaerako balioa lortzeko behar duen denbora da.  $t_r$  gisa adierazten da.  $t_r$  handiagoa da zenbat eta  $\xi$  indargetze-faktorea handiagoa izan.
- Ezartze-denbora edo erantzun-denbora: erantzunak bere bukaerako balioaren  $\% \pm 5$  tartean egoteko eta tarte horren barruan mantentzeko behar duen denbora da.  $\% \pm 5$ -eko limitea arbitrarioa da eta beste limite batzuk defini daitezke beste testu batzuetan.
- Gorabehera-periodoa: (6.15) ekuazioan ikus daiteke frekuentzia radianetan (radian/denbora) seno terminoan  $t$  biderkatzen duen koefizientea dela, hau da

$$\omega, \text{ frekuentzia radianetan} = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau} \quad (6.23)$$

$\omega$  frekuentzia  $f$  frekuentzia ziklikoarekin erlazionatzen denez  $\omega = 2\pi f$  adierazpenaren bidez, honako hau dugu:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau} \quad (6.24)$$

non  $T$  gorabeheraren periodoa (denbora/ziklo) den. 6.3 irudiko terminoetan, bi maximoren arteko denbora da.

- Gorabehera-periodo naturala: indargetzea eliminatzen bada ( $\xi = 0$ ), sistemak era jarraituan oszilatzen du bere anplitudean moteltzerik gabe. Baldintza «natural» horietan, frekuentzia, radianetan,  $1/\tau$  da, (6.23) ekuaziotik ondoriozta daitekeenez  $\xi = 0$  denean. Frekuentzia hori frekuentzia naturala deitzen da,  $\omega_n$ .

Dagokion frekuentzia zikliko naturala,  $f_n$ , eta  $T_n$  periodoa honako ekuazio honen bidez emanak datoz:

$$f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{1}{2\pi\tau} \quad (6.25)$$

Gero,  $\tau$ -k indargetzerik gabeko periodoaren esanahia du.

Orain artekoa laburbilduz,  $\xi$  indargetze mailaren edo izaera gorabeheratsuaren neurketa bat da, eta  $\tau$  bigarren ordenako sistema baten erantzunaren periodoaren, edo abiaduraren, neurketa.

Maila batekiko erantzunaren entsegu mota hori sistema «identifikatzeko» erabil daiteke, edo, bigarren ordenako sistema baten kasu konkretu honetan, emandako sistema baten parametroak kalkulatzeko.

Sistemaren irabazia ( $K$ ) erantzunaren azkenengo balioa mailaren anplitudearekin zatituz kalkulatu daiteke. Maila unitario baten kasuan,  $K$  zuzenean sistemaren erantzunaren azkenengo balioa da;  $Y_{(t \rightarrow \infty)}$ .  $\xi$  eta  $\tau$  parametroak era ezberdinean kalkulatu dira, erantzuna nahiko indargetua ez den ala gainindargetua den aintzat hartuta.

Sistemak nahiko indargetuak ez direnean,  $\xi$  zuzenean gaidikinatik abiatuta kalkulatu da, (6.21) ekuazioa, alegia. Gaidikinararen balio hori esperimentalki ezagututa, ekuazioaren ezezagun bakarra  $\xi$  indargetze-faktorea da. Balio hori ezagututa, (6.23) edo (6.24) ekuazioak erabil daitezke

$\tau$  denbora konstantea kalkulatzeko, T periodoaren edo frekuentziaren  $\omega$  (radianetan) balioa esperimentalki ezagututa.

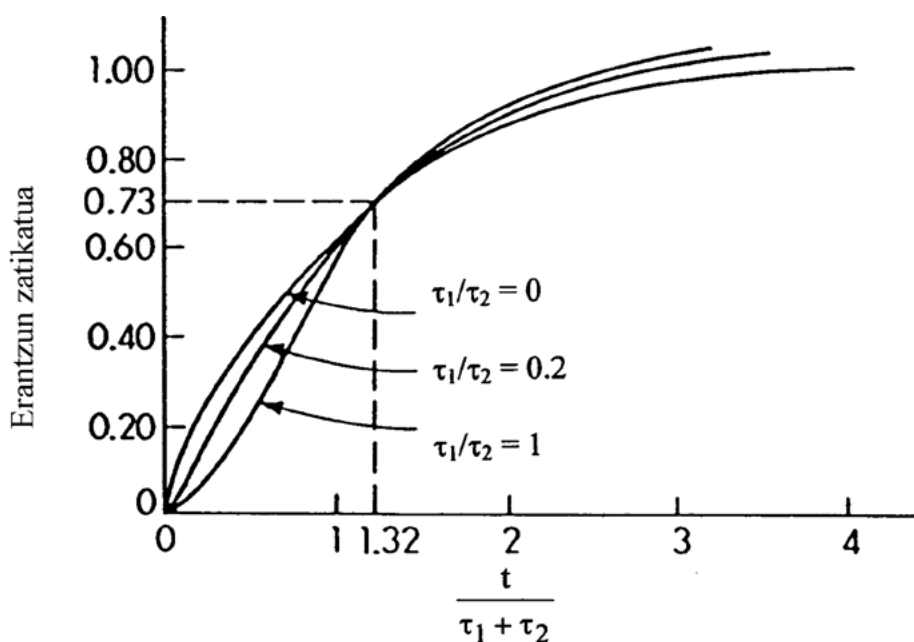
Gainindargeturik dauden sistemak direnean, berriz, prozedura ezberdina izango da, erantzuna ez baita gorabeheratsua eta, beraz, maximorik ez baitago. Kasu honetan, kalkulatu beharreko parametroak bi denbora-konstante dira, (6.18) ekuazioan erakusten den moduan.

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad (6.18)$$

Ekuazio hau (6.9) ekuazioaren analogoa da, (6.19) eta (6.20) ekuazioek  $\tau_1$ -ren,  $\tau_2$ -ren, eta  $\tau$  eta  $\xi$ -ren artean emandako baliokidetasunekin.

$Y(t)/K \frac{t}{\tau_1 + \tau_2}$ -rekiko irudikatuz (6.4 irudia) ikusten da kurba guztiak  $Y(t)/K = 0.73$  puntutik pasatzen direla;  $\frac{t}{\tau_1 + \tau_2} = 1.32$ -ri dagokio. Orduan, maila motako perturbazio batekiko erantzuna esperimentalki izanda,  $\tau_1 + \tau_2$  kalkula daiteke, erantzunaren %73 zer denboratan lortzen den ikusita; denbora hori  $t = 1.32(\tau_1 + \tau_2)$  da, eta, beraz,

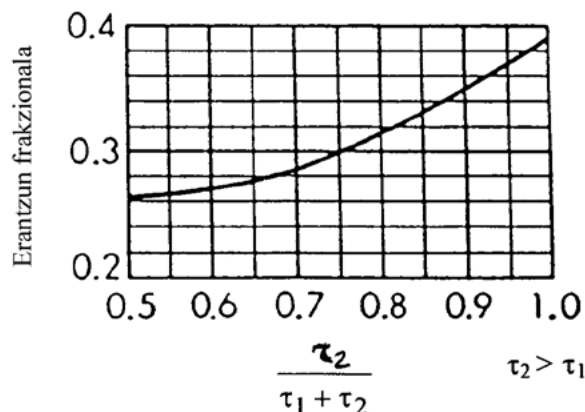
$$\tau_1 + \tau_2 = t/1.32 \quad (6.26)$$



**6.4. irudia.** Bigarren ordenako sistema baten erantzun frakzionalaren irudikapena vs.  $\frac{t}{\tau_1 + \tau_2}$

6.4 irudian interpolatuz,  $\tau_1 / \tau_2$  zatidura kalkula daiteke. Interpolazio horri laguntzeko, 6.5 irudia lortu da, non erantzun frakzionala  $Y(t)/K$  vs.  $\frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2}$ -rekiko irudikatu den,  $\frac{t}{\tau_1 + \tau_2} = 0.5$ rako .





**6.5. irudia.**  $\frac{t}{\tau_1 + \tau_2} = 0.5$ ri dagokion  $\frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2}$ -rekiko erantzun frakzionala

$\tau_1 + \tau_2$  lehenagotik kalkulatu denez, erantzun frakzionalaren grafiko esperimentalean  $\frac{t}{\tau_1 + \tau_2} = 0.5$  abzisaren baliotik sartuz, ordenatuaren balioa lortzen da. Ordenatuaren balio

horrekin, 6.5 irudira jotzen da eta dagokion  $\frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2}$  balioa lortzen da, eta, hala,  $\tau_2$ -ren balioa

askatu.  $\tau_1$ -ren balioa  $\tau_1 + \tau_2$ -ren baliotik  $\tau_2$  kenduz lortzen da. Horrela, bigarren ordenako sistema gainindargetuaren  $\tau_1$  eta  $\tau_2$  parametroak lortu dira. Bi parametroak  $\xi$ -ren eta  $\tau$ -ren forman lortu nahi badira, dagozkien (6.19) eta (6.20) ekuazioak erabiltzen dira.

### 6.3. Bulkada batekiko erantzuna

Bigarren ordenako sistema bati  $\delta(t)$  bulkada aplikatzen bazaio, honako hau da erantzunaren Laplaceren transformatua:

$$Y(s) = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} \quad (6.27)$$

Lehenago bezala, erantzunaren izaera izendatzailearen erroen menpekoea izango da, errealak ala konplexuak diren. Ariketa 3 kasutan banatzen da:

*1. kasua:*  $\xi < 1$

Kasu honetan, erro biak konjokatu konplexuak dira. (6.27) ekuazioaren inbertsioak honako hau ematen du:

$$Y(t) = K \left\{ \frac{1}{\tau\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\frac{\xi t}{\tau}} \operatorname{sen} \left( \frac{t}{\tau} \sqrt{1-\xi^2} \right) \right\} \quad (6.28)$$

6.6 irudian erantzun hori irudikatu da  $Y(t)/K$  vs.  $t/\tau$  erantzun frakzional moduan. Malda, jatorrian, 1 da  $\xi$ -ren balio guztietarako.

2. kasua:  $\xi = 1$

Kasu honetan, erro biak errealak, negatiboak eta berdinak dira. (6.27) ekuazioaren inbertsoak honako hau ematen du:

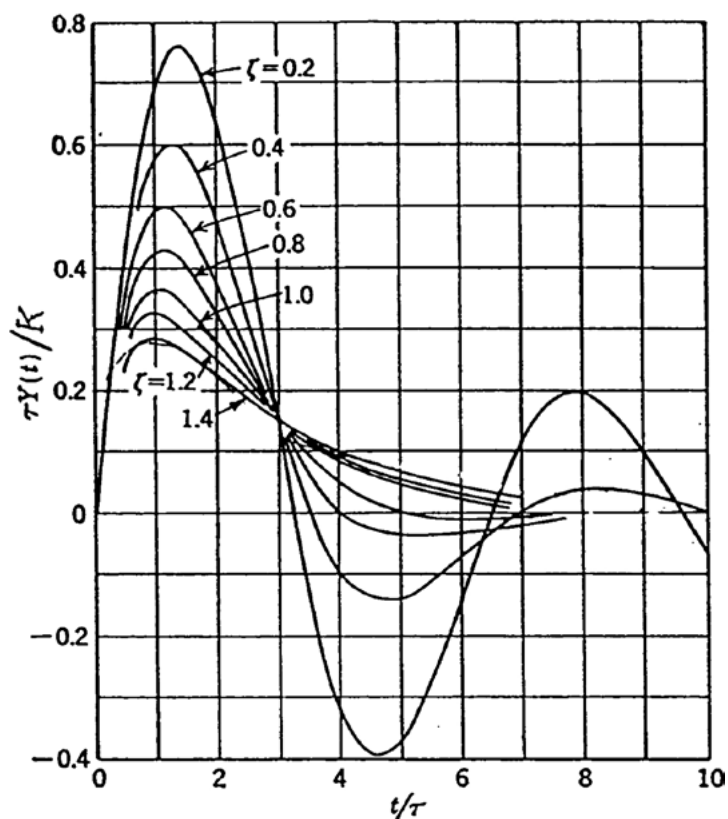
$$Y(t) = K \left\{ \frac{1}{\tau^2} t e^{-\frac{t}{\tau}} \right\} \quad (6.29)$$

6.6 irudian, erantzun frakzionala  $t/\tau$ -rekiko irudikatu da.

3. kasua:  $\xi > 1$

Sistema gainindargeturako, erantzuna honako ekuazio honek ematen du:

$$Y(t) = K \left\{ \frac{1}{\tau} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}} e^{-\frac{\xi t}{\tau}} \sinh \left( \frac{t}{\tau} \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \right\} \quad (6.30)$$



6.6. irudia. Bigarren ordenako sistema batek bulkada unitario bati emandako erantzuna

6.6 irudiko bulkada batekiko erantzunaren kurbek 6.2 irudiko maila batekiko erantzunaren kurben portaera berdina erakusten dute. Bulkada batekiko erantzuna beti hasierako zero baliora itzultzea da bien arteko aldea.

#### 6.4. Frekuentziekiko erantzuna

Bigarren ordenako sistema bati aplikaturiko funtzioa sinusoidala bada ( $X(t) = A \sin \omega t$ ), erantzunaren transferentzia-funtzioa honako hau izango da:

$$Y(s) = \frac{K}{(\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1)} \frac{A\omega}{(s^2 + \omega^2)} \quad (6.31)$$

(6.31) ekuazioaren inbertsoa aurreko adibide batzuetan erabilitako teknika erabiliz egin daiteke. Hala,  $Y(t)$ -ren balioa lortuko litzateke. Lehen ordenako sistemetan ikusi zen moduan,  $Y(t)$  termino batzuen batuketaz osatua dago, eta horietako batzuek zerorantz jotzen dute denborak infiniturantz jotzen duenean. Horrela,  $Y(t)$ -ren balioa  $t \rightarrow \infty$  doanean honako ekuazio honek emango du:

$$Y(t) = \frac{KA}{\sqrt{[1 - (\omega\tau)^2]^2 + (2\xi\omega\tau)^2}} \sin(\omega t + \phi) \quad (6.32)$$

non

$$\phi = -\tan^{-1}\left(\frac{2\xi\omega\tau}{1 - (\omega\tau)^2}\right)$$

(6.32) ekuazioaren emaitza (sistemaren erantzuna), sistemaren sarrerarekin konparatuz ( $X(t) = A \sin \omega t$ ), irteerako uhinaren eta sarrerako uhinaren arteko zatidura honako ekuazio honek emana dator:

$$\frac{B}{A} = \frac{K}{\sqrt{[1 - (\omega\tau)^2]^2 + (2\xi\omega\tau)^2}}$$

Anplitudeen erlazio hori  $K$  baino handiagoa edo txikiagoa izan daiteke,  $\xi$  eta  $\omega\tau$ -ren balioen arabera. 1. ordenako sistemetan ez zen horrelakorik gertatzen, non anplitudeen erlazioa beti  $K$  (prozesuaren irabazia) baino txikiagoa baitzen.

Halaber, ikus daiteke irteera  $|\phi|$  angelu bat atzeratuta dagoela. Angelu horrek asintotikoki  $180^\circ$ -ra jotzen du  $\omega$  handitzen den heinean., 1. ordenako sistemekin, berriz, desfaseak  $90^\circ$ -ra jotzen zuen. Orain arte bai 1.ordeneko zein bigarren ordeneko sistemetan frekuentziekiko erantzuna sistemaren transferentzia-funtzioan sarrerako funtzioaren transformatua  $X(s) = \frac{A\omega}{(s^2 + \omega^2)}$ -rekin

ordezkaturik eta  $Y(s)$ -ren inbertsoa kalkulaturik lortu da. Metodo hori oso luzea da eta erraz erratu daiteke hura burutzean.

Jarraian, metodo orokor bat ikusiko da edozein sistema linealetarako frekuentzietarako erantzuna lortzeko.

Har dezagun aintzat sistema lineal orokor bat, zeinaren transferentzia-funtzioa honako hau den:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Q(s)}{P(s)} \quad (6.33)$$

non  $Q(s)$  eta  $P(s)$   $m$  eta  $n$  ordenako  $s$ - $n$  polinomioak diren, hurrenez hurren, eta  $m < n$ . Honako hau frogatuko dugu:

- Sistema batek sarrera sinusoidal bati emandako azkeneko erantzuna beste uhin sinusoidal bat da.
- Irteerako uhinaren eta sarrerako uhinaren anplitudeen arteko zatidura frekuentziaren ( $\omega$ ) funtzio bat da eta  $G(s)$ -ren moduluak emana dator  $s = i\omega$  ordezkatzan badugu.
- Irteerako uhina sarrerako uhinarekiko  $\phi$  angelu bat desfasetuta dago ( $\omega$  frekuentziaren funtzioa) eta  $G(s)$ -ren argumentuak emana dator  $s = i\omega$  ordezkatzan badugu.

#### FROGAPENA

$X(t) = A \sin(\omega t)$  sarrera sinusoidal baterako  $X(s) = \frac{A\omega}{(s^2 + \omega^2)}$  dugu, eta, beraz, (6.33) ekuazioa honela geratzen da:

$$Y(s) = G(s) \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (6.34)$$

(6.34) ekuazioa frakzio partzialetan hedatuz,

$$Y(s) = G(s) \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} = G(s) \frac{A\omega}{(s + i\omega)(s - i\omega)} = \left[ \frac{C_1}{s - p_1} + \frac{C_2}{s - p_2} + \dots + \frac{C_n}{s - p_n} \right] + \frac{a}{s + i\omega} + \frac{b}{s - i\omega} \quad (6.35)$$

non kortexetako batugaiak  $G(s)$  frakzio partzialetan hedatzean sortutako terminoak diren eta  $p_1, p_2, \dots, p_n$   $G(s)$ -ren poloak diren.

$\left[ \frac{C_1}{s - p_1}, \frac{C_2}{s - p_2}, \dots, \frac{C_n}{s - p_n} \right]$  terminoek  $e^{p_1 t}, e^{p_2 t}, \dots, e^{p_n t}$  termino esponentzialak ematen dituzte.

$p_1, p_2, \dots, p_n$  poloek parte erreal negatiboa badute, termino esponentzial guztiek zerorantz jotzen dute  $t \rightarrow \infty$  doanean. Horregatik, (6.35) ekuazioa inbertituz, azkenengo erantzuna honako ekuazio honek emango du:

$$Y(t) \Big|_{t \rightarrow \infty} = ae^{-i\omega t} + be^{i\omega t} \quad (6.36)$$

(6.35) ekuaziotik a eta b konstanteen balioa kalkula daiteke

$$a = \frac{AG(-i\omega)}{-2i} \quad \text{eta} \quad b = \frac{AG(i\omega)}{2i}$$

Gero,

$$Y(t)\Big|_{t \rightarrow \infty} = -\frac{AG(-i\omega)}{2i} e^{-i\omega t} + \frac{AG(i\omega)}{2i} e^{i\omega t} \quad (6.37)$$

$G(-i\omega)$  eta  $G(i\omega)$  era polarrean adieraziz:

$$\begin{aligned} G(-i\omega) &= |G(-i\omega)| e^{-i\phi} = |G(i\omega)| e^{-i\phi} \\ G(i\omega) &= |G(i\omega)| e^{i\phi} \end{aligned}$$

non  $\phi = G(i\omega)$ -ren argumentua den.  $G(-i\omega)$  eta  $G(i\omega)$ -ren balio horiek (6.37) ekuazioan ordezkatzuz,

$$Y(t)\Big|_{t \rightarrow \infty} = -\frac{A|G(i\omega)|}{2i} e^{-i(\omega t + \phi)} + \frac{A|G(i\omega)|}{2i} e^{i(\omega t + \phi)} = A|G(i\omega)| \frac{e^{i(\omega t + \phi)} - e^{-i(\omega t + \phi)}}{2i} \quad (6.38)$$

edo

$$Y(t)\Big|_{t \rightarrow \infty} = A|G(i\omega)| \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \quad (6.39)$$

Azkeneko ekuazio horrek frogatu nahi zena frogatzen du.

Orokortze hori bigarren ordenako sistemen frekuentzietatik erantzuna bilatzeko aplikatuko da.

Bigarren ordenako sistema baten transferentzia-funtzioa honako ekuazio honek ematen du:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s) = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} \quad (6.9)$$

s  $i\omega$ -rekin ordezkatzuz,

$$G(i\omega) = \frac{K}{\tau^2(i\omega)^2 + 2\xi\tau(i\omega) + 1} = \frac{K}{-\tau^2\omega^2 + 2\xi\tau\omega i + 1} = \frac{K}{(1 - \tau^2\omega^2) + 2\xi\tau\omega i} \quad (6.40)$$

Konjokatuarekin biderkatu eta zatituz,

$$G(i\omega) = \frac{K(1 - \tau^2\omega^2 - 2\xi\tau\omega i)}{(1 - \tau^2\omega^2)^2 + (2\xi\tau\omega)^2} = \left[ \frac{K(1 - \tau^2\omega^2)}{(1 - \tau^2\omega^2)^2 + (2\xi\tau\omega)^2} \right] - \left[ \frac{K2\xi\tau\omega}{(1 - \tau^2\omega^2)^2 + (2\xi\tau\omega)^2} \right] i \quad (6.41)$$

Magnitudeen arteko erlazioa  $B/A = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2}$  -k ematen du, hau da,

$$\begin{aligned} \frac{B}{A} &= \sqrt{\left[ \frac{K(1-\tau^2\omega^2)}{(1-\tau^2\omega^2)^2 + (2\xi\tau\omega)^2} \right]^2 + \left[ \frac{K2\xi\tau\omega}{(1-\tau^2\omega^2)^2 + (2\xi\tau\omega)^2} \right]^2} = \\ &= \frac{\sqrt{K^2(1-\tau^2\omega^2)^2 + K^2(2\xi\tau\omega)^2}}{\left[ (1-\tau^2\omega^2)^2 + (2\xi\tau\omega)^2 \right]^{1/2}} = \frac{K\sqrt{(1-\tau^2\omega^2)^2 + (2\xi\tau\omega)^2}}{(1-\tau^2\omega^2)^2 + (2\xi\tau\omega)^2} = \\ &= \frac{K}{\sqrt{(1-\tau^2\omega^2)^2 + (2\xi\tau\omega)^2}} \end{aligned} \quad (6.42)$$

Desfase angelua  $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\text{Im}}{\text{Re}}\right)$  izango da, gero,

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{-2\xi\tau\omega}{1-\tau^2\omega^2}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{2\xi\tau\omega}{1-\tau^2\omega^2}\right) \quad (6.43)$$

B/A-ren eta  $\phi$ -ren adierazpenak bigarren ordenako sistemetarako lehenago ikusi direnen berdina dira, baina, horiek lortzeko, errazagoa den prozedura hori erabili da.

#### 6.4.1. Boderen diagrama

6.7 irudian, Boderen diagrama irudikatu da bigarren ordenako sistema baterako  $\xi$ -ren balioetarako. Goiko grafikoa, B/A/K-ren logaritmoa vs.  $\omega\tau$ -ren logaritmoa irudikatu da. Beheko grafikoa, berriz,  $\phi$  vs.  $\omega\tau$ -ren logaritmoa irudikatu da.

B/A/K-ren logaritmoa vs.  $\omega\tau$ -ren logaritmoa bi lerro asintotikoen bidez eskematiza daiteke:

- $\omega \rightarrow 0$ ,  $\log(B/A/K) \rightarrow 0$  edo  $(B/A/K) \rightarrow 1$ . Frekuentzia baxuko asintota.
- $\omega \rightarrow \infty$ ,  $\log(B/A/K) \rightarrow -2\log(\omega\tau)$ . Frekuentzia altuko asintota da hori,  $-2$  maldako lerro zuzena, eta  $B/A/K = 1$ ,  $\omega\tau = 1$  puntutik pasatzen da.

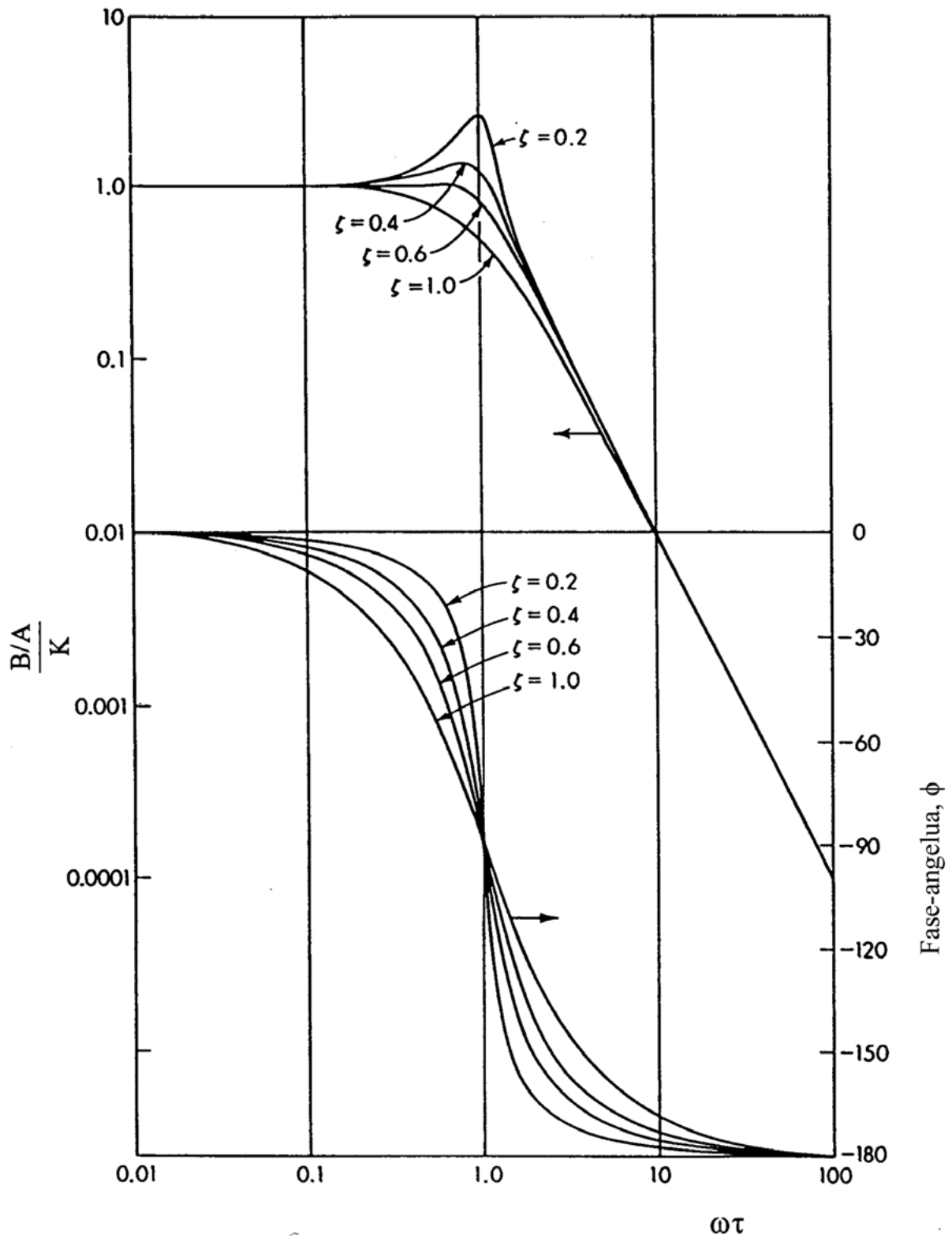
Nahiko indargeturik ez dauden sistemetarako, B/A/K 1 baino askoz altuagoa izan daiteke, eta maximo batetik pasatzen da, 6.7 irudian erakusten den moduan. (6.42) ekuazioa  $\omega\tau$ -rekiko deribatuz eta zerora berdinduz determina daiteke fenomeno hori (erresonantzia izenekoa)

$\xi < \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$ -rako gertatzen dela. Maximo horri dagokion frekuentzia, frekuentzia erresonantea

izenekoa ( $\omega_r$ ), honako hau da:

$$\omega_r = \frac{1}{\tau} \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (6.44)$$

$\xi = 0$  denerako, maximoak infinitura jotzen du. Ohartu, frekuentzia erresonanteak gorabeheraren frekuentzia naturalera ( $\omega_n = 1/\tau$ ) jotzen duela  $\xi$ -k zerora jotzen duen heinean.



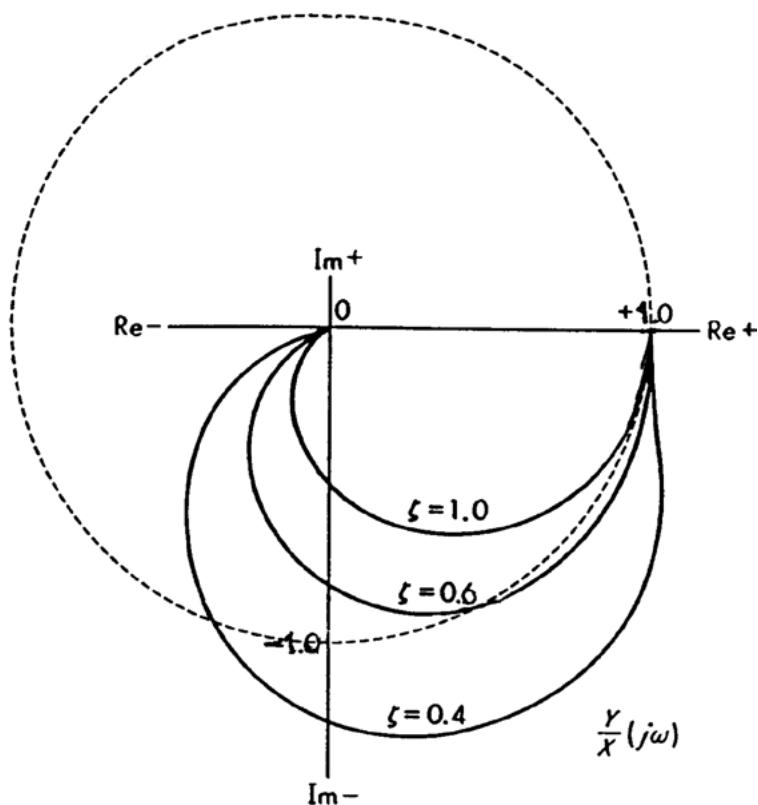
6.7. irudia. Bigarren ordenako sistemen Boderen diagrama

### 6.4.2. Nyquist-en diagrama

Nyquisten diagrama sistema batek frekuentziei ematen dien erantzunaren ezaugarriak irudikatzeke era alternatibo bat da.  $\text{Im}[G(i\omega)]$  ordenatu gisa eta  $\text{Re}[G(i\omega)]$  abzisa gisa erabiltzen ditu, ikusi dugun moduan. 6.8 irudian, bigarren ordenako sistema bati dagokion Nyquisten diagrama irudikatu da  $\xi$ -ren balioetarako.

Kasu honetan, (6.41) ekuazioko bi terminoei dagozkien parte erreal eta irudikaria irudikatu dira.

- $\omega = 0$  denean,  $B/A/K = 1$  eta  $\phi = 0$ . Gero, Nyquisten diagramaren hasiera ardatz errealaren puntu batean dago, jatorritik leko distantziara.
- $\omega \rightarrow \infty$  denean,  $B/A/K \rightarrow 0$  eta  $\phi \rightarrow -180^\circ$ , hau da, Nyquisten diagrama jatorrian bukatuko da bigarren koadrantetik etorruta.
- $\xi \geq 1$  denean,  $B/A/K \leq 1$ , eta Nyquisten diagrama zirkulu unitarioaren barruan mantenduko da.  $\xi < 1$  denean,  $B/A/K$  1 baino handiagoa da frekuentzia-tarte batean, eta, ondorioz Nyquisten diagrama zirkulu unitariotik irtengo da frekuentzia-tarte horretan.



6.8. irudia. Bigarren ordenako sistemen Nyquisten diagrama

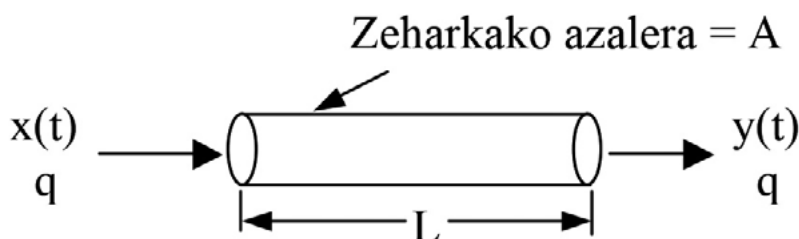


## 7. gaia

# Hildako denbora edo atzerapena

### 7.1. Hildako denbora edo atzerapena

Fluxuzko sistemetan normalean gertatzen den fenomeno da, eta prozesu kimiko gehienak fluxuzko sistemak dira. Adibide bezala, 7.1 irudian erakusten den sistema hartuko da aintzat, zein erabat isolaturik dagoen A zeharkako sekzioa eta L luzera dituen tutu batean zehar jariatzen duen likidoan ( $q$  emari bolumetriko konstantearekin) datzan.  $\rho$  dentsitatea eta  $C_p$  ahalmen kalorifikoa konstanteak direla joko da. Hipotesi gisa joko da tutuaren paretak aintzat ez hartzeko moduko ahalmen kalorifikoa duela eta abiaduraren perfila tutuan laua dela (pisto-fluxua).



7.1. irudia. Sistema atzerapenarekin

Sartzen den jariakinaren tenperatura ( $x$ ) denborarekin aldatzen da, eta irteerako tenperaturaren erantzuna  $y(t)$  bilatu nahi da transferentzia-funtzio baten terminoetan.

Beti bezala, sistema egoera estazionarioan dagoela joko da. Sistema horretan bistakoa da, sarrerako tenperatura irteerako tenperaturaren berdina dela.

$$x_s = y_s \quad (7.1)$$

$x(t)$ -n aldaketa bat egiten bada maila eran  $t = 0$  denean, irteerako tenperaturaren ez litzateke aldaketa nabarituriko  $t_d$  denbora unitate geroago arte, non  $t_d$  sartzen den jariakinak tutuaren beste aldetik irteteko behar duen denbora den. Erantzun simple hori 7.2a irudian erakusten da.

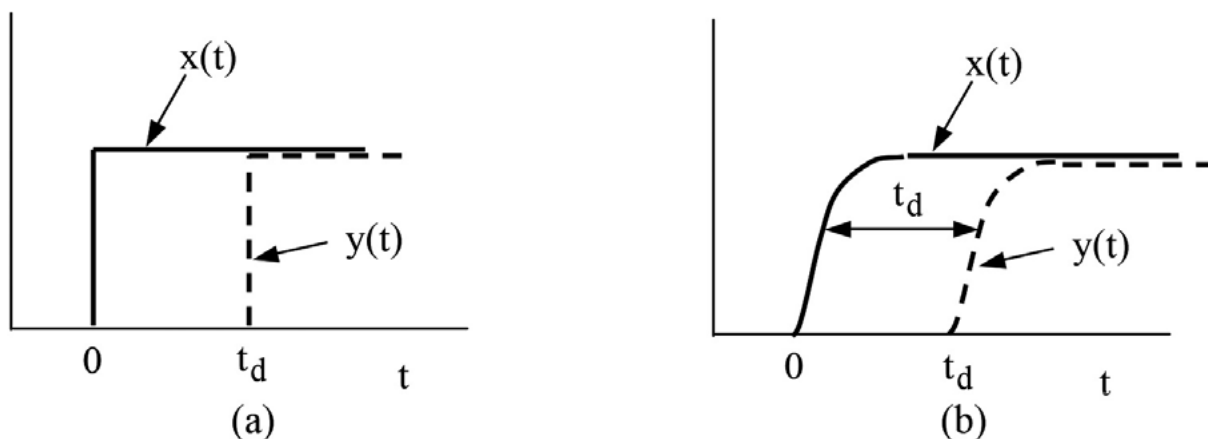
$x(t)$ -n aldaketa funtzio arbitrario bat balitz, 7.2b irudian erakusten den modukoa,  $y(t)$  erantzuna  $x(t)$ -ren berdina litzateke tutuaren irteeran, baina, berriz,  $t_d$  denbora unitate atzeratuta

egongo litzateke.  $t_d$  parametro hori jariakin partikula batek tutuaren sarreratik irteeraraino joateko behar duen denbora da, eta honako adierazpen honen bidez kalkula daiteke:

$$t_d = \frac{\text{tutuaren bolumena}}{\text{emari bolumetrikoa}} \quad (7.2)$$

edo

$$t_d = \frac{AL}{q} \quad (7.3)$$



**7.2. irudia.** Atzerapen batek sarrerako seinaleei emandako erantzuna

7.2a irudian ikus daiteke  $y(t)$  eta  $x(t)$ -ren arteko erlazioa honako hau dela:

$$y(t) = x(t - t_d) \quad (7.4)$$

(7.1) ekuazioa (7.4) ekuaziotik kenduz eta  $X = x - x_s$  eta  $Y = y - y_s$  desbideratze-aldagaiak sartuz, honako hau dugu,

$$Y(t) = X(t - t_d) \quad (7.5)$$

$X(t)$ -ren Laplaceren transformatua  $X(s)$  bada,  $X(t - t_d)$ -ren Laplaceren transformatua  $e^{-st_d}X(s)$  da (funtzio baten translazioaren teorema). Orduan, (7.5) ekuazioa honela geratuko litzateke:

$$Y(s) = e^{-st_d} X(s) \quad (7.6)$$

edo

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = e^{-st_d} \quad (7.7)$$

(7.7) ekuazioa hildako denbora edo atzerapenaren transferentzia-funtzioa da. Hildako denbora nahiko ohikoa da prozesu kimikoetan, baldin eta jariakin bat tutu batetik garraiatzen bada. Hildako denbora horiek egonda, askoz zailagoa da prozesuak kontrolatu ahal izatea. Oro har, hildako denbora ekidin egin behar da ekipoa ahalik eta hurbilen jarrita. Dena den, askotan, nahitaezkoa da atzerapenak egotea.

## 7.2. Perturbazioekiko erantzuna

A anplitudeko maila baten seinalea sartzen bada,  $X(t)$ -ren transformatua  $A/s$  izango da, eta, beraz, (7.7) transferentzia-funtzioan ordezkaturik, honako hau geratzen da:

$$Y(s) = \frac{A}{s} e^{-st_d} \quad (7.8)$$

$Y(t)$  kalkulatzeko, transformatu inbertsoa honako hau litzateke:

$$Y = 0 \quad 0 < t < t_d$$

$$Y = A \quad t > t_d$$

Aurreko galderan ikusi denez, 7.2a irudia, erantzuna sarreraren berdina da, baina  $t_d$  denbora-unitate atzeratuta.

Hildako denboraren alde oso positibo bat frekuentziei ematen dion erantzuna da. Kalkulua aurreko gaian ikusitako metodo orokorra erabiliz egingo da. Lehenengo,  $s = i\omega$ -rekin ordezkutzen da transferentzia-funtzioan.

$$G(i\omega) = e^{-i\omega t_d} \quad (7.9)$$

Euler-en identitatea erabiliz, honako hau daukagu:

$$G(i\omega) = \cos \omega t_d - i \sin \omega t_d \quad (7.10)$$

Orduan,

$$\frac{B}{A} = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2} = \sqrt{\cos^2 \omega t_d + \sin^2 \omega t_d} = 1 \quad (7.11)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\text{Im}}{\text{Re}} = \tan^{-1} \left( \frac{-\sin \omega t_d}{\cos \omega t_d} \right) = -\omega t_d \quad (7.12)$$

Hildako denbora elementuak ez du erantzunaren anplitudea aldatzen, hau da, irteerako uhinak, beti, sarrerako uhinaren anplitude bera du frekuentzia edozein dela ere. Hala ere, seinalea  $-\omega t_d$  radianetan atzeratzen du. Hildako denbora elementuaren Boderen diagrama irudikatzen bada, anplitudeen erlazioa horizontal bat da frekuentzien espektro osorako,  $B/A = 1$  baliokoa.

Angelu-fasea ( $\phi$ ) gero eta negatiboagoa da  $-\infty$ -rantz jotzen baitu frekuentzia handitzen den heinean.

### 7.3. Prozesuen elementuak oro har

Prozesuen ohiko sistema batek hainbat elementu ditu: 1. ordenako elementuak, 2. ordenako elementuak, hildako denborak, parametro aldakorreko aldagaiak, etab. Askotan, sistema bat hura deskribatzen duen ekuazio enpiriko baten bidez adierazi nahi dugu. Ereduaren era orokor bat (transferentzia-funtzio gisa) honako hau litzateke:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K_p e^{-st_d}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2^2 s^2 + 2\xi\tau_2 s + 1)} \quad (7.13)$$

Transferentzia-funtzio orokor hori hirugarren ordenako elementu bati hildako denborarekin legokioke, eta sistema gehienak enpirikoki adierazteko balio dezake.

Parametroen balio esperimentalak lortu behar lirateke; bost parametro kasu honetan:  $K_p$ ,  $t_d$ ,  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $\xi$ . Orduan, sistemaren eredu enpiriko bat litzateke transferentzia-funtzio eran. Askotan ez dira bost parametroak erabili behar eta datu esperimentalak transferentzia-funtzio errazagoi doi dakizkieke, esate baterako, 1. ordenako bat gehi hildako denbora, prozesu kimikoen sistema askoren portaera era egokian adierazten duen ekuazio tipikoa baita.

Azkenik, adierazi behar da orain arte konstantetzat jo diren parametro asko (denbora-konstanteak, hildako denbora, etab) ez direla konstanteak eta beren balioak prozesuaren operazio-baldintzak aldatzean alda daitezkeela. Hala, adibidez, tutu baten zeharreko garraioari dagokion hildako denbora bat alda daiteke jariakinaren abiadura aldatzen bada. Aldaketa horiek saihetsezinak dira, eta, hori dela eta, kontu handia izan behar dugu sistemen ereduak lortutako auresanekin, eredu horiek errealtatetik urrun egon baitaitezke sistemaren portaera baldintza jakin batzuetan bakkarik islatzean. Parametro «konstanteetan» gertatzen diren aldaketa horiek (operazio-baldintza jakin batzuetarako diseinatuak) kontrol-sistemak hain ondo ez jokatzea ekar dezakete operazio-baldintzak aldatzen direnean. Horregatik kontrol-sistema «sendoak» diseinatu behar ditugu, hau da, kontrolatzen ari diren sisteman aldaketei aurre egiteko gai izan behar dute eta kalitate-kontrol bera mantendu.

### *SISTEMA DINAMIKOAK KONTRAKO ERANTZUNAREKIN EDO ERANTZUN INBERTSOAREKIN*

Bi efektu fisikok prozesuaren irteerako aldagaian era ezberdinean eta eskala denbora ezberdinarekin eragiten dutenean gertatzen da erantzun inbertsoa.

Adibidea: likido mailaren kontrako erantzuna lurruntzaile-sistema batean.

Ura berotu egiten da erregaia erretzean ematen den beroarekin. Elikadurako ur hotzaren emaria mailakatuz handitzen bada, irakiten ari den uraren bolumena gutxitu egingo da denbora-tarte labur batez eta, ondorioz, likidoaren maila ere bai, eta gero hazten hasiko da.

Erantzun hori kontrako bi efektuen emaitza netoa da eta honela azal daiteke:

1. Elikadura-ur hotzak temperatura-jaitsiera eragiten du, eta lurrun-burbuiluen bolumenta txikitzen du. Horrek irakiten ari den likido-mailaren txikitzea dakar, 1. ordenako portaerari jarraituz (1 kurba 7.3 irudian, hau da,  $-k_1/\tau_1 s + 1$ ).
2. Beroaren emate konstantea dela eta, lurrunaren produkzioa konstante mantentzen da eta, ondorioz, irakiten ari den likido maila hazten hasiko da (2 kurba 7.3 irudian,  $k_2/s$ ).
3. Kontrako bi efektuen emaitza honako ekuazio honek emana dator:

$$\frac{k_2}{s} - \frac{k_1}{\tau_1 s + 1} = \frac{(k_2 \tau_1 - k_1)s + k_2}{s(\tau_1 s + 1)}$$

eta  $k_2 \tau_1 < k_1$ .

Bigarren terminoa  $[-k_1/(\tau_1 s + 1)]$  nagusia da hasieran, eta kontrako erantzuna dugu.

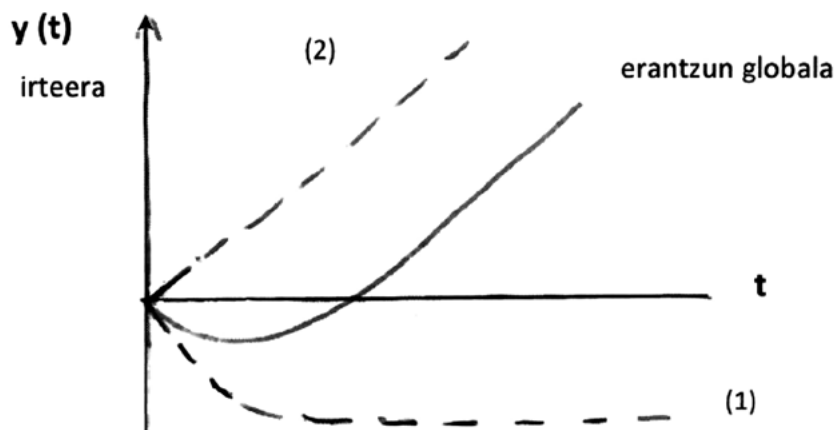
$$k_2 \tau_1 < k_1$$

bada, kontrako erantzuna dugu.

$$k_2 \tau_1 < k_1,$$

goiko ekuaziotik, transferentzia-funtzioak zero positibo bat duela lortzen da,

$$s = -k_2/(k_2 \tau_1 - k_1) > 0.$$



7.3. irudia. Kontrako erantzuna duen sistema

ADIBIDEA. 1. ORDENAKO BI KONTRAKO SISTEMEN ERANTZUN INBERTSOA

1. ordenako 2 prozesuen kontrako efektuak honako erantzun global hau ematen du:

$$\bar{y}(s) = \left( \frac{k_1}{\tau_1 s + 1} - \frac{k_2}{\tau_2 s + 1} \right) \bar{x}(s)$$

Edo

$$\bar{y}(s) = \frac{(k_1 \tau_2 - k_2 \tau_1) s + (k_1 - k_2)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \bar{x}(s)$$

Erantzun inbertsoa dugu:

Hasieran ( $t = 0_+$ ), 2 prozesuak, 1 prozesuak baino azkarrago erantzuten duenez (hau da,  $k_2/\tau_1 > k_1/\tau_2$ ), sistema globalaren erantzuna menderatzen du.

Bukaeran, 1 prozesuak balio altuagoa lortzen du egoera estazionarioan (hau da,  $k_1 > k_2$ ), eta sistema globalaren erantzuna kontrako noranzkoan behartzen du.

Oharra:  $\tau_1/\tau_2 > k_1/k_2 > 1$  bada, prozesuak kontrako erantzuna erakusten du, eta sistemaren transferentzia-funtzioak zero positibo bat du:

$$z = -\frac{k_1 - k_2}{k_1 \tau_2 - k_2 \tau_1} > 0$$

## 8. gaia

# Seinaleen neurketa eta transmisioa

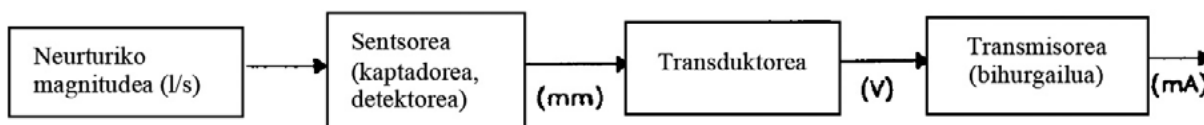
### 8.1. Prozesuko aldagaiak

Ingeniaritza kimikoan, prozesuko honako aldagai hauek neurtu behar dira: temperaturak, presioak, mailak, emariak eta konposizioak. Kontroleko ekintzak kalkulatu beharko dira eta prozesurako sarrerako aldagai batzuk manipulatu. Eginkizun horiek egiteko, tresnak 4 motatan sailkatu daitezke:

1. Neurketa-tresnak. Prozesuko aldagaiak neurtzen dituzte.
2. Eragingailuak edo aldagai manipulatuak norabide egokian mugitzeko gai diren dispositiboak.
3. Informazioaren transmisio-sistemak. Neurtutako seinaleak kontrolagailuetara daramatzate eta horien seinaleak eragingailuetara.
4. Kontrolagailuak. Egin beharreko ekintzak determinatzen dituzte jasotako informaziotik abiatuta.

Neurketa-prozesua aldagai baten balioa unitate estandar edo neurketa-eredu batekin konparatzean datza. Kasu batzuetan, konparazio hori era zuzenean egiten da: luzera zuzenean eredu batekin alderatu daiteke (erregela). Beste batzuetan, era ez-zuzenean egiten da neurketa, neurtu nahi den aldagaia neurtzeko errazagoa den beste aldagai baten magnitudearekin erlazionatzeko bidea ematen duen printzipio fisikokimikoren bat erabiliz. Adibidez, dinamometro batekin neurtutako indarra; malguki batek egiten duen distantzia neurtzen da benetan, eta mugimendu horretatik eta malgukiaren elastikotasun-konstantetik abiatuta kalkulatzen da indarra.

Neurketa, dispositibo motaren batera heldu behar da, eta, normalean, distantzia jakin batera kokaturik egongo da. Horregatik, seinalea erraz transmititu eta prozesatu behar da. 8.1 irudian, aldagai baten neurketa-sistema osatzen duten elementuak edo dispositiboak erakusten dira.



8.1. irudia. Neurketa osatzen duten elementuak

Lehenengo elementua sentsorea da. Elementu hori kontaktuan dago neurtu nahi den aldagaia-rekin. Batzuetan, elementu horri detektorea edo kaptadorea ere deitzen zaio. Hurrengo elementua transduktorea da. Sentsoreak ematen duen seinalearen izaera aldatzea da haren zeregina, era errazagoan prozesagarria izateko. Azkenengo elementua transmisorea da, eta horrek transduktoreak ematen duen seinalea kontrol-sistemara erraz transmititzen den seinale estandar bat bihurtzen du. Seinale hori normalizaturik dagoenez, edozein kontrol-sistemarekin bateragarria da, bere marka komertziala edozein izanda ere.

## 8.2. Neurketaren ezaugarriak

Tresna bat karakterizatzeko ISAk (Instrument Society of America) onartu dituen termino batzuk erabiltzen dira. Honako hauek dira neurketa-tresna baten ezaugarri nagusiak:

- Balio-tartea: neur daitekeen aldagaiaren balioen multzoa da. Beheko eta goiko limite baten bidez espezifikatzen da. Adibidez, 0-100 atm.
- Irismena: balio-tartearen goiko eta beheko balioen arteko aldea da. Adibidez, 60-200°C-ko balio-tartea duen neurketa-tresna batek 140°C-ko irismena du.
- Zerotik gorako balio-tartea: neurtutako aldagaiaren zeroa balio-tartearen beheko limitea baino handiagoa duen balio-tartea da.
- Zerorik gabeko balio-tartea: neurtutako aldagaiaren zeroa balio-tartearen beheko limitearen azpitik duen balio-tartea da.
- Zeroaren gorapena: neurtutako zeroaren eta balio-tartearen beheko limitearen arteko aldea. Irismenaren ehuneko gisa adierazten da.
- Zehaztasuna: zehaztasunak adierazten du zer mailatan hurbiltzen den tresnak ematen duen neurketa eredu-balio edo neurketa ideal batera.
- Neurketaren errorea: tresnak emandako neurketaren eta neurketa idealaren arteko aldea da.
- Ziurgabetasun maila: tresna erabiltzean egin daitekeen errore maximoa.
- Erreferentziatzko zehaztasuna edo perdoia: neurketaren errorearen limite maximoa da baldintza nominaletan. Era absolutuan edo erlatiboan adieraz daiteke:
  1. Era absolutuan ingeniari-unitateen terminoetan: adibidea, 1°C.
  2. Era erlatiboan irismenaren ehuneko gisa: adibidea, irismenaren %±1.
  3. Era erlatiboan balio-tartearen goiko limitearen ehuneko gisa.
  4. Era erlatiboan neurtutako errorearen ehuneko gisa.
- Errepikagarritasuna: tresnaren sendotasunaren maila adierazten du. Instrumentuak zein mailatan ematen dituen neurketa berdinak neurtutako aldagaiek balio bera hartzen dutenean eta neurketaren baldintzak berak direnean.
- Hildako banda: neurtutako aldagaiaren aldaketa-tartea, beren irteeran aldaketa nabarmenik eragiten ez duena.
- Sentikortasuna: tresnaren irteerako seinalearen hazkuntzaren eta dagokion neurtutako aldagaiaren hazkuntzaren artean dagoen erlazioa da. Adibidez, maila-neurtzaile batek 10 mV-ko aldaketa ematen badu altuera-metro bakoitzeko, haren sentikortasuna 10 mV/m-koa da.
- Bereizmena: tresnaren irteeran aldaketa behagarria sortzen duen neurtutako aldagaiaren handitze txikiena da. Hildako bandarekin eta sentikortasunarekin erlazioan dago. Irismenaren gaineko termino absolutu edo portzentajezkoetan adierazten da.



- Histeresia: neurtutako aldagaiaren balio berarentzat tresnak balio ezberdinak ematen ditu, aldagaia goranzko edo beheranzko noranzkoan mugitzen den. Aldagaiaren goranzko eta beheranzko noranzkoan egindako neurketen arteko aldearen balio maximoa da. Irismenaren gaineko portzentaje gisa adierazten da.
- Linealtasuna: funtzio baten lerro zuzen batekiko hurbiltze maila neurtzen du. Funtzio hori lerro zuzen batera hurbiltzean egingo litzatekeen errore maximo gisa adierazten da. Tresna guztietan, bilatzen den ezaugarria da.
- Joera: neurketa bati bere balio-tarte osoan eragiten dion errore konstantea da. Aleatorioa ez den errore bat da eta kalibrazioaren bidez zuzendu daiteke.
- Deriba: denbora-tarte jakin batean tresna batean zenbait ezaugarri jasaten duten aldaketa da. Tresnaren osagaien edo materialen aldaketek eraginak dira.
- Ataria: tresnak neurketa-seinale bat emateko neurtzen ari den aldagaiak izan beharreko balio minimoa da.
- Ezaugarri dinamikoak: aurreko definizioak ezaugarri estatikoei dagozkie. Sistema guztiek bezala, elementu horiek portaera dinamikoa dute eta jadanik ikusi diren kontzeptuen araberaren ebaluatu daitezke: igoera-denbora, denbora-konstantea, etab.

### 8.3. Neurketa-tresnen sailkapena

#### *Monitorizazio- eta kontrol-tresnak*

Monitorizazio-tresnek aldagaiaren egoera bakarrik adierazten dute; kontrol-tresnek, berriz, dagokion seinalea beste dispositibo batera bidali behar dute. Kontrol-tresnek seinale elektrikoa edo pneumatikoa ematen dute normalean. Monitorizaziokoek, aldiz, begi-bistako oharpena bakarrik ematen dute. U itxurako tutuen manometroa da horien adibide bat. Neurketa mota hori ezin dute zuzenean kontrol-dispositiboek erabili.

#### *Tresna aktibo eta pasiboak*

Neurketa-tresnek energia behar dute neurketa egiteko. Tresna pasibo batek behar duen energia neurtzen ari den prozesu fisikotik lortzen du eta ez du energiaren kanpo-iturririk behar. Merkuriozko termometroa edo U itxurako tutuen manometroa dira horren adibide. Tresna aktiboek energiaren kanpo-iturri bat behar dute.

#### *Konparazio- eta desplazamendu- tresnak*

Tresna batzuk neurtutako magnitudearen funtzioa den aldagai batek jasandako aldaketan oinarritzen dira. Dinamometro baten kasua da hori. Beste tresna batzuek neurketa-magnitudea eredu ezagunekin alderatuz egiten dute. Balantza bat litzateke horren adibidea, non pisu kalibratuak gehituz (pisuak berdindu arte) neurtzen den pisua. Tresna horiei zero desplazamenduzkoak edo nulo motakoak deitzen zaie eta lehenengoak baino zehatzagoak izaten dira, horiek beren bizitza erabilgarrian zehar propietateak galduz baitoaz. Zoritxarrez, kontrolean erabilitako tresna gehienak desplazamenduzko neurketakoak dira, eta nulo motakoak desplazamenduzkoak kalibratzeko erabiltzen dira, beren zehaztasuna handiagoa delako eta kalibrazioa noizean behin bakarrik egiten delako.

### *Neurtzaile analogiko eta digitalak*

Neurtzaile analogiko batek etengabe aldatuz doan neurketa ematen du. Tresna digital batek balio kopuru finitua har dezakeen neurketa ematen du.

#### **8.4. Neurketaren transmisioa**

Sentsoreak eta eragingailuak prozesutik hurbil daude, kontrolagailuak, aldiz, prozesutik urrun kokatuak egoten dira: eraikin berean kokaturiko kontrol-gela batean (hamarka metrora) edo beste eraikin baten kokaturiko gela batean (ehunka metrora). Horregatik neurtu den seinalea distantzia batera bidali behar da. Seinale bat bidaltzeko, seinalea garraiatu ahal izateko ingurune bat eta informazio hori interpretatzeko bidea ematen duen kode bat behar dira. Honako hauek dira transmisio-ingurune erabilienak:

1. Fluido baten propietateren bat bidaltzeko erabiltzen diren hoditeriak. Aire izaten den fluido baten presioa da normalean (transmisio pneumatikoa).
2. Propietate elektrikoren bat transmititzeko erabiltzen diren kable elektrikoak: tentsioa edo intentsitatea (transmisio elektrikoak).
3. Besteak beste, zenbait motatako uhinak, argi-izpiak eta uhin irratielektrikoak transmititzeko erabiltzen den espazioa.
4. Argi-uhinak transmititzeko erabiltzen diren zuntz optikoak.

Ingurune horietako bakoitzak bere erabilera mugatzen duten abantailak eta desabantailak ditu. Ingurune bat ebaluatzeko, honako eduki hauek behar dira izan kontuan:

1. Kanalaren ahalmena: emandako denbora-tarte batean zenbateko informazioa garraiatzeko gai den.
2. Seinalearen ahultzea: seinalea luzera unitateko ingurunetik pasatzean nola degradatzen den. Horrek determinatzen du seinalea zer luzera maximotara bidal daitekeen edo zenbat errepikagailu instalatu behar diren.
3. Zarataren eraginik eza: bidalitako informazioa zer mailatan berreraiki daitekeen era zehatzean inguneak eragin ditzakeen perturbazioak egon arren.

Irrati bidezko transmisioa kontrol-zentrotik oso urrun kokaturiko prozesuetan erabiltzen da. Ez da ohikoa instrumentazio eta kontrolean. Zuntz optikoak informazio kantitate handia transmititu behar denean (ahalmen handia) erabiltzen dira. Irrati bidezko transmisioan gertatzen den moduan, telekomunikazioen eremuan, maizago erabiltzen dira. Prozesuen kontrolean, transmisio pneumatikoa eta elektrikoak dira bi ingurune erabilienak.

##### *8.4.1. Transmisio pneumatikoa*

Duela urte batzuk, kontrol-seinale gehienak zirkuitu pneumatikoen bidez transmititzen ziren, hainbat arrazoi zirela eta:

- Instrumentazio elektronikoa garestia zen hasieran, kontsumo handikoa eta bolumen handikoa.
- Eragingailu pneumatikoak elektrikoak baino sinpleagoak dira. Gaur egun ere, industria kimikoan, pneumatikoa izaten da eragingailu ohikoena.

- Transmisio pneumatikoa segurua da ingurune arriskutsuetan.
- Indukzio elektrikoek sortutako zaratek ez dute transmisio pneumatikoan eragiten.

Transmisio pneumatikoa ISAk normalizatua dago bi tartetan: bat 0-3 psig (0.2-1 kg/cm<sup>2</sup>) tartean eta bestea 3-27 psig (0.2-1.8 kg/cm<sup>2</sup>) bitartean. Hau da, 3 psig aldagaiak balio minimoa hartzen duenean (neurketa balio-tartearen %0a), eta 15 psig balio altuena hartzen duenean (neurketa balio-tartearen %100). 3 psig-eko balio minimoa hartu zen 0 psig-en ordean, honako arrazoi hauek direla eta:

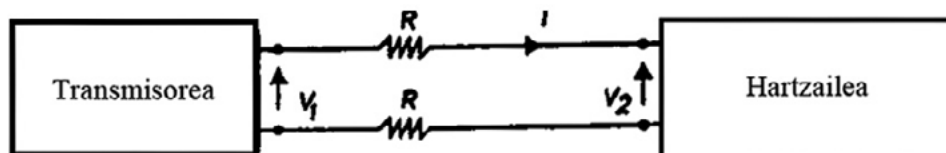
- 0 psig-eko presio batek (atmosferikoa) deskonektaturiko hoditeria bat edo funtzionatzen ari ez den sentsore bat adierazteko balio dezake.
- Errazagoa da tresna kalibratzea kalibratze puntu minimotik behera presioa dagoenean.

Tresna neumatiko horien erantzun dinamikoa presio altutan hobetzen da. Tresneriako aireak garbia eta lehorra izan behar du, partikula solidorik gabea (buxadurak) eta likidorik eta ur-lurrunik gabea (korrosioa eta/edo izozketa). ISAk honako hauek gomendatzen ditu: ingurune tenperaturatik 10°C beherago dagoen ihintz-puntuko airea, 3 µm baino gutxiagoko partikulak eta 1 ppm baino olio-eduki txikiagoa.

Transmisio pneumatikoaren dinamikarengatik, distantzia laburretan bakarrik erabil daiteke. Adibidez, ¼ pulgadako eta 150 m luzerako hoditeria baterako, maila batekiko erantzun-denbora 3 segundukoa da, eta ezartze-denbora, 7 segundukoa, eta horrek adierazten du neurketan aldaketa bortitz bat gertatu ondoren 10 s inguru itxaron behar dela irakurketa bat egin aurretik.

#### 8.4.2. Transmisio elektrikoa

Transmisio elektrikoaren lerroek transmisio neumatikokoekin baino ahalmen handiagoa dute. Transmisio elektrikoaren lerroek berehalako erantzuna duten sistemak bezala jokatzen dute, konparazioz. Tentsioa edo intentsitatea transmiti daiteke. Azken hori estandarra izaten da, jarraian azalduko diren arrazoiak direla eta.

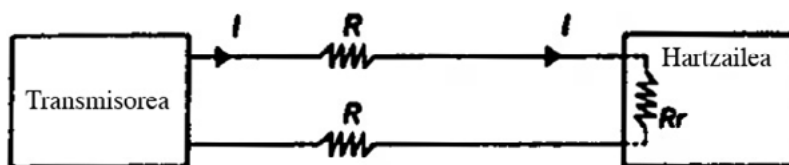


8.2. irudia. Tentsio elektrikoaren bidezko transmisioa

Demagun 8.2 irudiko bezalako transmisio elektrikoaren lerro bat dugula. Lerroaren bukaerara heltzen den tentsioa  $V_2 = V_1 - 2RI$  da. Tentsio hori transmititu nahi zena baino txikiagoa da. Tentsio-jaitziera kablearen luzeraren, haren sekzioaren eta korronearen intentsitatearen menpekoa da. I intentsitatea oso baxua bada, arazoa arindu egiten da. Dena den, aldaketa elektromagnetikoek eragindako intentsitatea ordena berekoa izan daiteke, eta, azkenean, zarata elektromagnetiko horiek eragina izango dute tentsioan. Eragindako zarata kableei pantaila batzuk jarritz gutxitu daitezke, lurrera konektaturiko sare metaliko batez inguratuz (Faradayren kaiola bezala jokatzen du).

Arazo horiek guztiak transmisioa intentsitatearen bidez eginez ekiditen dira (8.3 irudia). Hartzaileara heltzen den intentsitatea bidaltzen denaren berdina da, kableen arteko jario elektrikoak ia

nuluak baitira. Hartzailearen sarreran, transmisoreak eman dezakeen tentsio maximoak mugatzen du erresistentzia elektrikoa. Tentsio-alde maximoa, transmisorean, 20 mA-ko intentsitate maximo-rako gertatzen da, eta, ondorioz, hartzailean sarrerako erresistentzia  $R_r = V_{\max}/0,02$ -ra mugaturik dago. Hartzailean, 10 V-ko tentsio maximo baterako, hartzailearen eta kableen erresistentzia maximoa 500 ohmio-koa da.



8.3. irudia. Intentsitate elektrikoaren bidezko transmisioa

Intentsitatearen bidezko transmisio-tarte ohikoena 4-20 mA-koa da. Beheko limite gisa 4 mA erabiltzea eta ez 0 mA, transmisio pneumatikorako azaldu diren antzeko arrazoen ondorioa da.

#### 8.4.3. Presio-intentsitate bihurtzaileak

Gaur egun, seinaleen transmisio elektrikoa erabiltzen da ia eksklusiboki, honako arrazoi hauengatik: pneumatikoak baino ezaugarri dinamiko hobekak izatea, lerroen kostu baxuagoa, loturiko tresneriaren kostua baxuagoa eta prozesuen kontrol eta ikuskapenean ordenagailuak erabiltzen hasi izana, horiei informazioa seinale elektriko eran ematen baitzaie.

Hala ere, kasu batzuetan, hobe da tresneria neumatikoa erabiltzea, seguruagoa delako (ingurune arriskutsuak) edo abantailak dakartzalako. Erregulazio-balbulen eragingailu pneumatikoa da kasu horietako bat; eragingailu elektrikoa baino askoz sinpleagoa eta merkeagoa da. Horregatik, bihurtzaileak erabili behar dira: presioaren seinalea intentsitate elektriko bihurtzen dutenak edo intentsitate elektrikoa presio bihurtzen dutenak.

#### 8.4.4. Informazioa kodetzea

Informazioa kodetzeak transmisorearen eta hartzailearen artean akordio bat ezartzea esan nahi du, hala bidaltzen ari den informazioari esanahi bera emateko. Hainbat eratan egin daiteke, eta, prozesuen kontrolean, kodetze analogikoa eta digitala ditugu. Kodetze analogikoan transmititzen den magnitudea bidalitako seinale fisikoaren ezaugarri analogikoren baten balioaren bidez kodetzen da. Honako hauek dira kodetze analogiko ohikoenak:

- Anplitudearen bidezkoak: transmititzen den aldagaia transmititzen den seinalearen anplitudearen funtzio (lineala) bat da. Metodo errazena da, baina zaratarekiko segurtasun txikikoa.
- Pultsuaren zabaleraren bidezkoak: transmisio lerroaren bidez bi balio (altua eta baxua) bakarrik dituen seinale bat bidaltzen da. Bidalitako balioa, seinalea balio altuan duen zikloaren ehunekoa da. Transmisio mota horretan, zaratek askoz eragin txikiagoa dute, honek ez baitu pultsuaren zabaleran eragiten.
- Frekuentziaren bidezkoak: kanalean uhin bat sartzen da, eta haren frekuentzia transmititu nahi den balioaren funtzioa da. Hartzailean, uhinaren frekuentzia determinatzen da transmititu den balioa kalkulatzeko. Zaratek ez dute batere eraginik sistema horretan.

Kodifikazio digitala egiteko era asko daude. Informazio analogikoa digital bihurtzen da eta transmisio-lerroaren bidez bidaltzen da. Zaratek ez diote transmisio digital horri eragiten, zarata askoz ozenagoak behar baitira irakurpenak faltsuak izateko eta, gainera, kodeak erabiltzen dira erroreak detektatzeko. Errore horiek gertatzen diren komunikazio-akats gehienak detektatzeko gai dira.

### 8.5. Tresneria intelijentea

80ko hamarkadaren bukaeratik, «tresneria intelijente» (smart) terminoa erabiltzen da funtzio osagarriak egiteko gai den tresneria izendatzeko, hala nola autokalibrazioa, autodiagnostikoa, identifikazioa eta neurketa balio-tartearen autoprogramazioa.

Tresneria mota hori osagai elektronikoz hornituta dago beste funtzio osagarri horiek egin ahal izateko. Tresneria hori ez dago egin kontrol-sistema analogiko baterako, baizik eta ordenagailu bidez banatutako kontrol-sistema baterako.

### 8.6. Kalibratzea

Sistema guztietan, beharrezkoa da kontrolatu beharreko aldagaiak ongi neurtzea. Sentsorea gaizki neurtzen ari denean, prozesuko aldagaia nahi den baliotik beste balio batera eramango da. Horregatik, funtsezkoa da jakitea neurketa-gailuek nola funtzionatzen duten.

Honela definitzen da kalibratzea: tresna batek adierazitako balioen eta neurtutako aldagaiaren benetako balioen arteko erlazioa determinatzea helburu duen eragiketa multzoa. Honako hau izan daiteke kalibratzearen emaitza: tresna doitzea; kalibratze- taula edo -kurba bat, zeinaren bidez, neurketak zuzentzen diren balio zehatza lortzeko; tresnak espezifikaturiko perdoiarekin neurtzen duela adierazten duen ziurtagiri bat.

Neurketa-tresnak aldian-aldian kalibratu behar dira, funtzionatzearen ondorioz hondatzen baitira. Kalibrazioaren maiztasuna hainbat baldintzaren menpekota da. Oro har, tresna kalibratu egin da fabriketan, baina, instalatu ondoren, berriro kalibratzea gomendatzen da. Tresna bakoitzak kalibrazio-orri bat eduki behar du, eta, han, egiten diren eragiketak zehazten dira.

### 8.7. Hoditeria eta tresna-diagramak




Kontrol-sistemak hoditeria eta tresna-diagramen (P&I) bidez adierazten dira oso hedaturik dauden sinbolo sinpleak erabiliz. Tresnez gain, diagrama horiek prozesuko ekipoen, hoditerien, eta abarren adierazpen bat dute. Diagrama horiei esker, prozesuaren eta kontrol-sistemaren funtzionamendua hobeki ulertzen da.

Hainbat irudikapen-arau dauden arren, ISA da onartuena. Arau horren arabera, lerro sendoak erabiltzen dira hoditeriak adierazteko, eta lerro ez-jarraituak edo jarraituak markekin, tresnen arteko komunikazioa adierazteko.

Prozesuan neur daitekeen informazio guztia P&ID diagraman erakusten da, bandera zirkularren bidez. Horrek prozesuaren kontrol-begizta edo loturretan erregistratuko eta erabiliko den informazioa hartzen du barne. Diagraman, bandera zirkularrek adierazten dute prozesuan infor-

mazioa non lortzen den, hartutako neurketak identifikatu eta adierazi zer egiten den informazio horrekin. 8.1. taulak tresneriarekin eta kontrolarekin loturiko informazioa identifikatzeko erabiltzen diren sinboloak eta letrak laburtzen ditu.

**8.1. taula.** P&ID diagrametan tresnak identifikatzeko erabiltzen diren sinboloak eta letrak



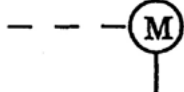
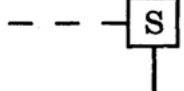





Tresnaren kokapena	
	plantan kokaturiko tresna
	kontrol-gelako panelaren aurreko aldean kokaturiko tresna
	kontrol-gelako panelaren atzeko aldean kokaturiko tresna

Identifikazio-letren esanahia XYZ	
Lehenengo letra (X)	Bigarren edo hirugarren letra (Y)
A Analisia	Alarma
B Erregailu baten garra	
C Eroankortasuna	Kontrola
D Dentsitatea edo grabitate espezifiko	
E Tentsioa	Elementua
F Emaria	
H Manuala (eskuz abiatua)	Altua
I Korrontea	Indikazioa
J Potentzia	
K Denbora edo denbora programatua	Kontrol-estazioa
L Maila	Iluminazioa edo Baxua
M Hezetasuna	Erdikoa edo Tartekoa
O	Zuloa
P Presioa edo hutsa	Puntua
Q Kantitatea edo gertaera	
R Erradioaktibitatea edo zatidura	Erregistroa
S Abiadura edo maiztasuna	Interruptorea
T Temperatura	Transmisorea
V Biskositatea	Balbula, motelgailua
W Pisia	Putzua
Y	Errelea edo kalkulua
Z Posizioa	Bultzada
Tresnen konexioen identifikazioa	
—————	Kapilarra
—//—————	Neumatikoa
.....	Elektrikoa

Kontrol-begiztetako tresnak zirkulu baten bidez adierazten dira. Zirkulu horren barruan, honako hauek egoten dira: tresna adierazten duten letra batzuk, tresna horiei dagokien begiztaren identifikazio-zenbaki bat (begizta bateko tresna guztiak zenbaki berarekin ageri dira) eta haien kokapen fisikoari dagokion adierazpen bat (kontrol-gelako taulan, etab.).



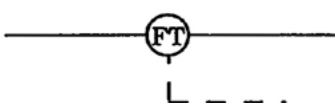
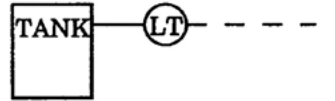
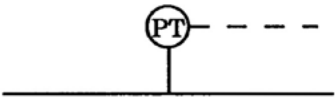
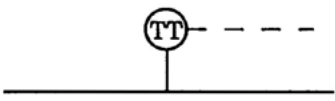
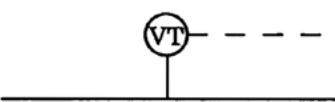
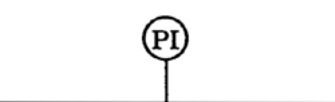
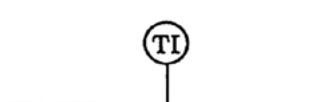


Some Actuator Symbols

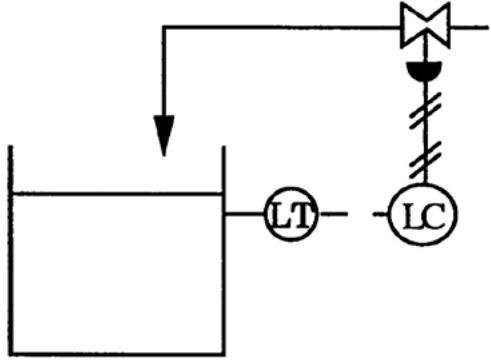
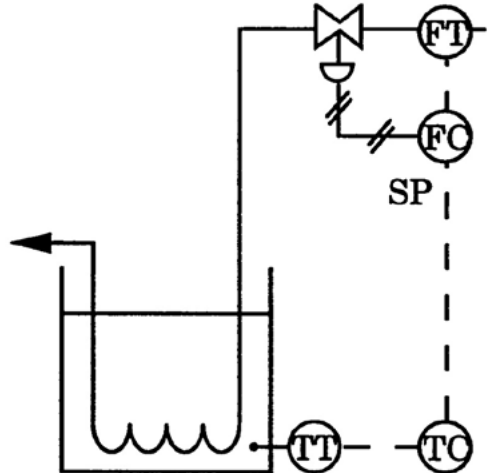
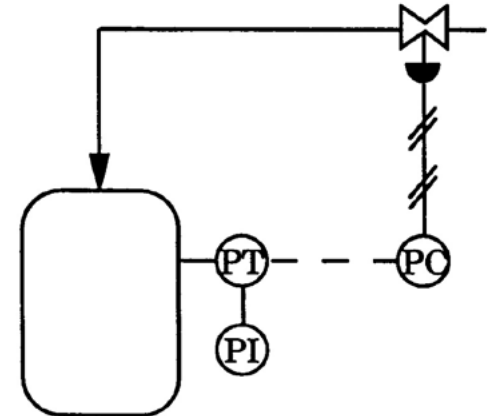
Symbol	Actuator
	Manual Control Valve
	Automatic Control Valve
	Motor
	Solenoid
	Pressure control valve, self-contained
	Pressure control valve, external pressure measurement
	Pressure relief or safety valve, angular pattern
	Pressure relief or safety valve, straight through
	Level control valve with mechanical linkage



Some Sensor Symbols

Symbol	Sensor
	Flow sensor/transmitter using orifice meter
	Flow sensor/transmitter using turbine meter
	Flow sensor/transmitter, undefined type
	Level sensor/transmitter, undefined type
	Pressure sensor/transmitter, undefined type
	Temperature sensor/transmitter, undefined type
	Viscosity sensor/transmitter, undefined type
	Pressure indicator, undefined type
	Temperature indicator, undefined type

Some Example Control Loops

Symbol	Meaning
	<p>Level measurement/transmitter, signal sent electronically to controller and actuator signal sent to valve</p>
	<p>Cascade controller: Temperature measurement/transmitter signal sent electronically as set-point to coolant flow controller, flow measurement/transmitter sent electronically to flow controller, actuator signal sent to valve</p>
	<p>Pressure measurement/transmitter with pressure indicator, signal sent electronically to pressure controller, actuator signal sent to inlet gas control valve</p>

## 9. gaia

# Berrelikaradun kontrola eta kontrol-ekintzak

### 9.1. Berrelikaduradun kontrola kontzeptua

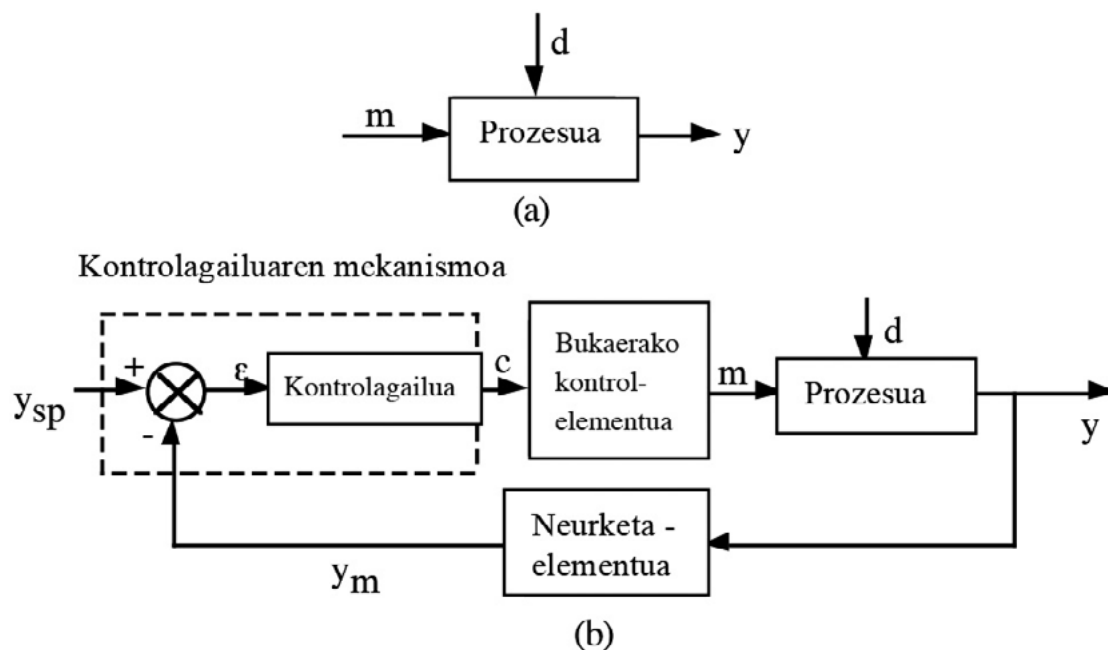
Har dezagun aintzat 9.1 irudiko prozesu orokortua. Baditu irteera bat, perturbazio posible bat (d) eta aldagai manipulatu bat (m). Perturbazioa aurreikusi ezin daitekeen era batean aldatzen da eta irteerako aldagaiaren balioa (y) nahi den balioan mantentzea da kontrol-helburua.

Berrelikaduradun kontrol-ekintza bat honako etapa hauek osatzen dute:

1. Irteerako (emaria, tenperatura, etab.) balioa neurgailu egokia erabiliz neurtzen du. Balio horri  $y_m$  deitzen diogula joko dugu.
2. Neurtutako balioa ( $y_m$ ) nahi den balioarekin ( $y_{sp}$ ) konparatzen du.  $\varepsilon = y_{sp} - y_m$  desbideratzea ezartzen du.
3. Desbideratze horren balioa kontrolagailura eramaten da. Horrek aldagai manipulatuaren balioa (m) aldatzen du, eta, hala,  $\varepsilon$  desbideratzearen balioaren magnitudea murrizten da. Normalean, kontrolagailuak ez du zuzenean aldagai manipulatuaren balioa aldatzen, tar-teko beste ekipo bat erabiltzen du, bukaerako kontrol-elementua.

Hiru pauso horiek 9.1.b irudian laburbiltzen dira. 9.1.a irudiko sistema begizta edo lotura irekia deitzen da; 9.1b irudiko sistema, berriz, begizta edo lotura itxia. Begizta edo lotura itxi terminoa iruditik erraz ondorioztatzen da.

Pentsatzen da kontrol automatikoa lorpen modernoa dela. Baina greziarrek kristo aurreko 250. urtean, jadanik, ur mailarako atzeraelikaduradun kontrol-sistemak izaten zituzten, gaur egun gure komunetako zisternak kontrolatzen dituztenen antzekoak. Atzeraelikaduradun kontrola funtsezkoa izan zen amplifikagailuen eragiketen garapenean 30eko hamarkadan; ekipo elektronikoetan erabiltzen ziren. 30eko hamarkadan, 3 motatako kontrolagailuak zeuden esku-ragarri eta kontrolari buruzko artikuluak argitaratzen hasi ziren. 40ko hamarkadan, PID kontrolagailu pneumatikoak hedatu ziren industrietan, eta elektronikoak 50eko hamarkadan agertu ziren. Ordenagailu bidezko kontrolaren lehen aplikazioak 60ko hamarkadaren hasieran egin ziren, eta, azken 40 urteetan, ordenagailu bidezko kontrolak eragin handia izan du prozesuen kontrolean.



9.1. irudia. (a) Prozesua. (b) Dagokion begizta edo lotura-kontrola atzeraelikadurarekin

## 9.2. Kontrolagailuen sailkapena

Kontrolagailuak potentzia-iturriaren arabera sailkatu daitezke: elektrikoak, pneumatikoak, hidraulikoak, mekanikoak. Erabilienak lehenengo bi taldeak dira. Orain urte gutxi, pneumatikoak findegietan eta planta kimikoetan egoten ziren, non sute eta leherketa arrisku potentziala egoten baitzen. Gaur egun, tresna elektronikoa asko hedatu da diseinuan, segurtasunaren ondorioz, eta kontrolagailuak eskusiboki elektronikoak dira.

Kontrolagailuen beste sailkapen bat dago beren kontrol-ekintzaren arabera:

1. Ez-jarraituak:
  - a) Biposizionalak.
  - b) Multiposizionalak.
2. Jarraituak. Oinarrizko kontrol-ekintzak honako hauek dira:
  - a) Proporzionala.
  - b) Integrala.
  - c) Deribatua.

## 9.3. Kontrolagailu ez-jarraituak

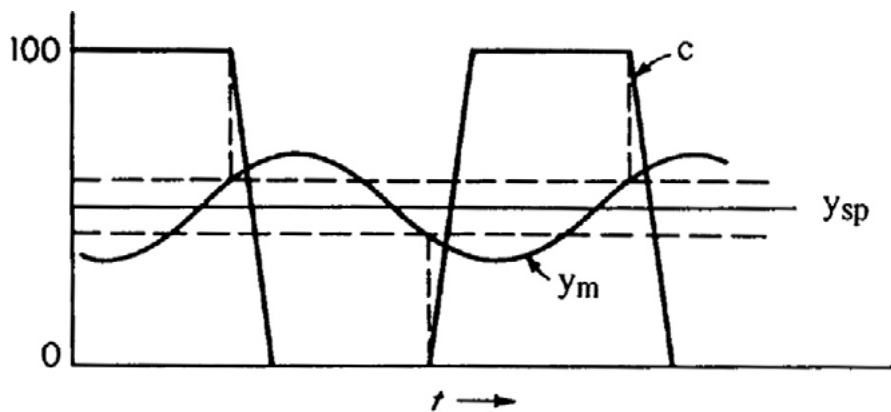
### 9.3.1. Biposizionalak

Kontrolagailuaren irteera ( $c$ ) desbideratzearen zeinuaren menpekoa da eta ez bere magnitudearen menpekoa. Hau da, kontrolagailuaren irteerak bi balio ditu: 0 eta 100, dena-ezer ez. Ho-

rregatik, dena-ezer ez edo *on-off* kontrolagailuak deitzen dira. Ekintza eragiten duen mekanismoa errele bakun bat izan daiteke:

$$c = \begin{cases} 0 & y_{sp} - y_m < 0 \\ 100 & y_{sp} - y_m > 0 \end{cases}$$

Kontrolagailu komertzialetan, jardunik gabeko zona bat egoten da, kontsigna-puntuaren %0.5ean edo %2an kokatua. Aldagai kontrolatua zona horren barruan dagoenean, ez da kontrol-ekintzarik burutzen. Ikusi 9.2 irudia.



9.2. irudia. Dena-ezer ez motako kontrolagailu baten erantzuna

Jardunik gabeko zona batek erantzuna atzerarazten du. Jardunik gabeko zonarik gabe desfasa 180°koa da eta, jardunik gabeko zonarekin, gehienez ere, 270°-ra hel daiteke. Kontrolagailuaren erantzuna ez da erabat errektangularra. Alboetako maldak alde batetik bestera joateko abiadura finituen ondorio dira. Txikiagoak lirateke erantzunean kontroleko bukaerako elementua (eragin-gailuak eta balbula barne hartuta) kontuan izango balitz.

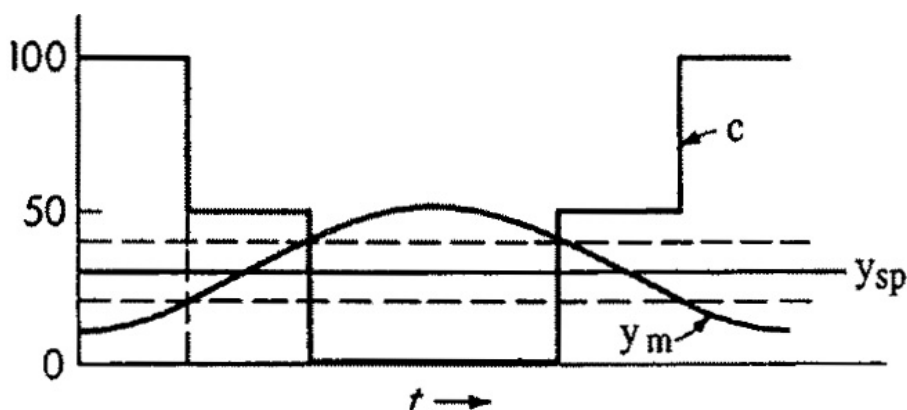
Kontrol-elementua errele bat bada, adibidez, labe bateko kontrolean bezala, maldak ia infinituak lirateke.

Dena-ezer ez kontrol mota hori da erabiliiena. Tresnak merkeak, gogorak eta erabiltzeko sinpleak dira. Askok erabiltzen dira kapazitantzia handiko sistemetan eta perturbazio txikien eraginpean daudenetan, adibidez, kalfakzio-sistemetan, bainu termostatikoetan, maila-sistemetan, etab.

Kontrol-sistema gorabeheratsua da, baina kapazitantzia handia badago, aldagaiak anplitude oso txikia izango du.

### 9.3.2. Multiposizionalak

Bi posizioko kontrolaren aldaera bat 3 posizioko kontrola da. Kontrolagailuak tarteko irteera bat ematen du aldagaia jardunik gabeko zonan erortzen bada. 9.3 irudiak argi erakusten du kontrolagailu mota horien portaera.



9.3. irudia. Hiru posizioko kontrolagailu baten erantzuna

Aurrekoaren abantaila berak ditu, eta, horrez gain, gorabeheretarako joera txikitzen du. Hiru posizio baino gehiago dituzten kontrolagailuak merkatuan existitzen diren arren, ez dira maiz erabiltzen.

#### 9.4. Oinarrizko kontrol-ekintzak

Honako hauek dira atzeraelikaduradun edo berrelikaduradun kontroleko oinarrizko 3 motak: proportzionala (P), integrala (I) eta deribatua (D). Eraikitze-zehaztasunak fabrikatzailearen menpekoak izango dira, baina beren funtzioak berak dira. Ikus dezagun ekintza horietako bakoitza baina.

##### 9.4.1. Kontrol proportzionala

Kontrolaren oinarrizko ekintza proportzionala da, eta, hor, kontrolagailuaren irteera desbideratzearekiko edo errorearekiko proportzionala da.

$$c(t) = K_c \varepsilon(t) + c_s \quad (9.1)$$

non  $K_c$  kontrolagailuaren irabazi proportzionala den eta  $c_s$ , kontrolagailuaren seinalea, desbideratzea zero denean (bias).

Honako hauek dira kontrol proportzionalaren oinarrizko kontzeptuak:

- 1 Kontrolagailuaren irabazia doitu egin daiteke kontrolagailuaren irteerako seinalean aldatetak nahi bezain sentikorrek egiteko, baldin eta desbideratzeak badaude.
- 2  $K_c$ -ren zeinua aukeratu egin daiteke kontrolagailuaren irteerako seinalea handitzeko (edo txikitzeko) desbideratzea handitzen bada.

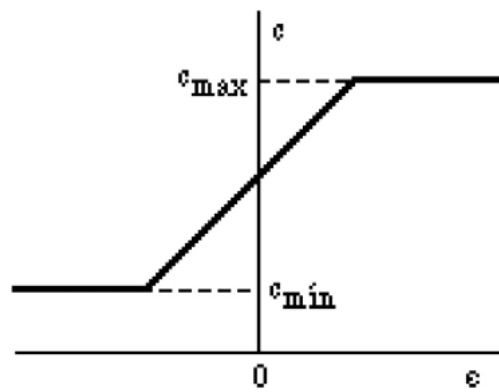
Kontrolagailu proportzionalen kasuan,  $c_s$  aldatu egin daiteke. Helburu orokorretarako kontrolagailuen kasuan,  $K_c$  adimentsionala da. Hori egia izango da beti,  $c(t)$ -k eta  $\varepsilon(t)$ -k unitate berdinak badituzte. Adibidez, unitateak voltekin, miliampereekin, atmosferekin, eta abarrekin erlazionatuta egon daitezke, edo  $c(t)$  eta  $\varepsilon(t)$  0 eta %100 bitarteko balio zenbaki gisa adieraz daitezke. Azken

hori oso gomendagarria da pantaila grafikoak edo ordenagailuak erabiltzen direnean. Dena den, kontrol-sistemak analizatzerakoan, gomendagarria da errorearen seinalea ingeniartzako unitateetan adieraztea, hala nola °C-tan eta mol/l-tan. Kasu horretan,  $K_c$ -k badauzka unitateak. Adibidez,  $\varepsilon(t)$  °C badira eta  $c(t)$ , voltak,  $K_c$ -k  $V/^\circ\text{C}$ -ko unitateak izango ditu.

Kontrolagailu batzuek, batez ere zaharrak badira, banda proportzionala dute irabaziaren ordez. Banda proportzionala (%-tan) honela definitzen da:

$$BP = 100\%/K_c \quad (9.2)$$

Definizio hori  $K_c$  adimentsionala bada bakarrik aplikatzen da. Banda txiki bat (estua) irabazi altu bati dagokio, eta banda handi bat (zabala), berriz,  $K_c$ -ren balio txiki bati dagokio. Normalean,  $1 \leq BP \leq 500$ .



9.4. irudia. Kontrol proportzionala

Kontrolagailu proportzional idealak ez du kontrolagailuaren irteerako seinalean limiterik jartzen. 9.4 irudian, irteerako seinalearen errepresentazio erreala bat erakusten da. Kontrolagailua saturatu egiten dela esaten da baldin eta beraren irteerako seinaleak limite fisiko bat lortzen badu,  $c_{max}$  edo  $c_{min}$ .

Kontrolagailu proportzional baten transferentzia-funtzioa lortzeko, perturbazio-aldagai bat definitzen da,  $c'(t) = c(t) - c$ . Orduan, honako hau geratzen da:

$$c'(t) = K_c \varepsilon(t) \quad (9.3)$$

Ez da beharrezkoa errorearen seinalerako desbideratze-aldagai bat definitzea, desbideratze eran baitago. Laplaceren transformatuak hartuz, honako adierazpen hau lortzen da:

$$\frac{C'(s)}{E(s)} = K_c \quad (9.4)$$

Kontrol proportzionalak desabantaila bat dakar: ez da gai kontsigna-puntuaren aldaketa baten ondoren edo perturbazio-aldagaian denbora luzez gertatzen den aldaketa baten ondoren gertatzen diren erroreak egoera estazionarioan elimintzeko. Hori 13. gaian frogatuko da. Diferentzia hori, offset izenekoa, eskuz elimina daiteke kontsigna-puntua edo  $c_s$  aldatuz. Hori ez da gomendagarria,

langileak parte hartzea eskatzen baitu baita kontsigna-puntuaren balioa aurkitzeko haztatze-prozedura bat egitea ere. Normalean, akzio integrala duen kontrolagailu bat erabiltzen da.

Badaude offset-ak onar ditzaketen aplikazioak, eta kontrol proportzionala erakargarria da oso erraza delako. Adibidez, mailaren kontrolaren ariketa batzuetan ez da bilatzen maila kontsigna puntu batean mantentzea, baizik eta tankeak gainezka ez egitea edo hustea.

Ondoriozta daiteke (9.4) transferentzia-funtzioaren magnitudeen erlazioa frekuentziekiko erantzunean  $K_c$  balioko lerro zuzena eta  $0^\circ$ -ko fase angelua dela.

#### 9.4.2. Akzio integrala

Kontrolagailuaren irteerako seinalea errore-seinalearen integralaren menpekoa da denboran zehar.

$$c(t) = \frac{1}{\tau_I} \int_0^t \varepsilon(t) dt + c_s \quad (9.5)$$

non  $\tau_I$  denbora integrala deitzen den eta denbora-unitateak dauzkan.  $\tau_I$  parametroa doigarria da.

Akzio integrala erabiltzen da *offset*-a eliminatzen delako. Dena den, akzio integrala ez da bakarrik erabiltzen, kontrol-akzioa txikia baita errorearen seinaleak denbora-tarte batean irauten ez badu behintzat. Alderantziz, akzio proportzionalak ekintza zuzentzaile bat eragiten du errore bat detektatu bezain azkar.

(9.5) ekuazioa denborarekiko deribatuz, kontrolagailuaren irteerako seinalearen aldaketa-abiadura, errorearen proportzionala izatea lortzen da:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\varepsilon}{\tau_I} \quad (9.6)$$

Laplaceren transformatuak hartuz:

$$G_c = \frac{\bar{c}(s)}{\bar{\varepsilon}(s)} = \frac{1}{s\tau_I} \quad (9.7)$$

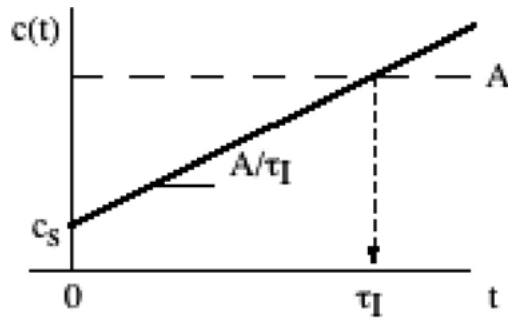
Errorea A anplitudeko maila eran aldatzen bada, honako hau izango dugu:

$$\bar{c}(s) = \frac{A}{s^2\tau_I} \quad (9.8)$$

$$c(t) = \frac{A}{\tau_I} t + c_s \quad (9.9)$$

Hurrengo irudian, ekuazio hori irudikatu da;  $A/\tau_I$  maldako lerroa da.





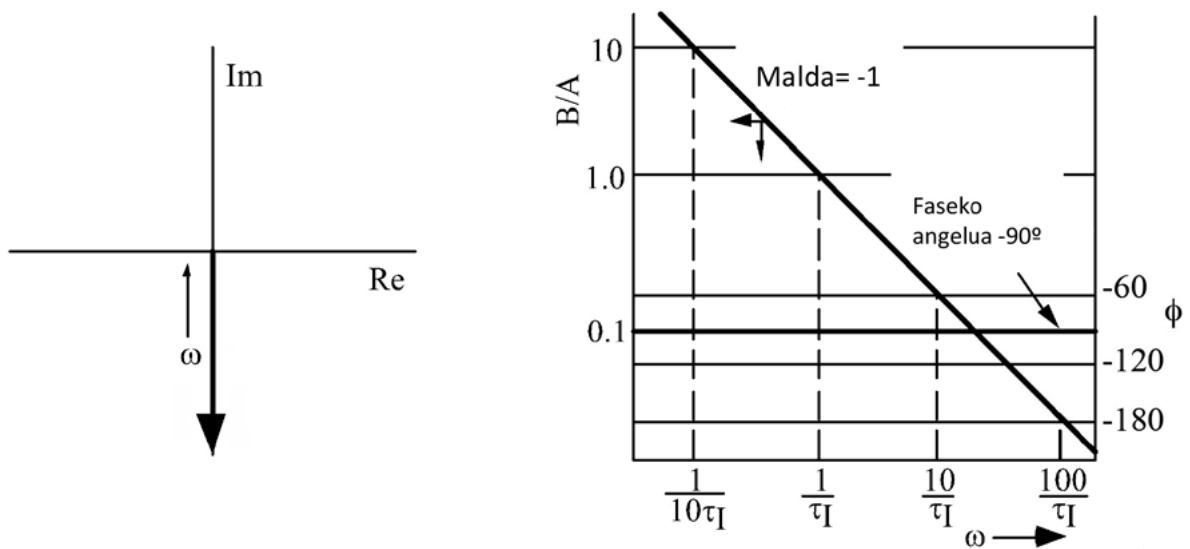
9.5. irudia. Akzio integralak errorearen maila erako aldaketa bati emandako erantzuna

(9.7) frekuentzietan, honako hau da ekuazioak emandako transferentzia-funtzioaren erantzuna:

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{\omega\tau_1}$$

$$\text{Fasearen angelua } \phi = \text{tg}^{-1}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

Boderen eta Nyquisten diagramak 9.6 irudian erakutsitakoak dira. Boderen diagraman, leerroaren malda  $-1$  da eta  $B/A$ -k  $1$  balio du  $\omega = 1/\tau_1$  denean.



9.6. irudia. (9.7) ekuazioaren Boderen eta Nyquisten diagramak

9.4.3. Akzio deribatua

Haren funtzioa errorearen etorkizuneko portaera aurrestea da, bere aldaketa-abiadura eza-gututa. Adibidez, erreaktore baten temperatura  $10\text{ }^\circ\text{C}$ -tan handitzen bada denbora tarte labu-

rrean, 3 minutuan adibidez, horrek temperaturaren oso hazkuntza handia adierazi ahal izango luke erreazio exotermiko batean. Ahalmena duen langile batek ondorioak auresan ditzake eta neurri zuzentzaile egokiak hartu. Orain arte ikusi diren kontrolagailuek ezin dute horrelakorik egin. Akzio proportzionalak ez du aldaketa hori gertatu deneko denbora kontuan hartzen, hau da, ekintza zuzentzaileak ez du aintzat hartzen  $10\text{ }^{\circ}\text{C}$  horiek 3 edo 30 minutuan igo diren. Akzio integralak ere ez luke balioko, erroreak zenbat denboran irauten duen bakarrik kontuan hartzen baitu.

Kontrolagailuaren irteera, aldagai kontrolatuaren aldaketa abiadurarekiko proportzionala izatea eragiten du akzio deribatuak.

$$c(t) = \tau_D \frac{d\varepsilon}{dt} + c_s \quad (9.10)$$

non  $\tau_D$ -k (deribatuaren denbora) denbora-unitateak dauzkan. Akzio hori, bere kabuz, ez da ezer kontrolatzeko gai, errorea konstantea bada, kontrolagailuaren irteerako seinalea ez baita aldatzen ( $d\varepsilon/dt = 0$ ).

Akzio deribatuak prozesua lotura itxian egonkortzeko joera du. Akzio integralaren joera desegonkortzailea kontrajartzeko erabiltzen da. Lotura itxian, sistemaren erantzuna hobetzen du eta ezartze-denbora txikitu. Dakarren arazoa *zarata*rena da. Prozesuak zaratatsuak badira, akzio deribatuak zarata hori anplifikatzen du, neurtutako aldagaia *iragazten* ez bada, behintzat.

### 9.5. Kontrol proportzionala akzio integralarekin

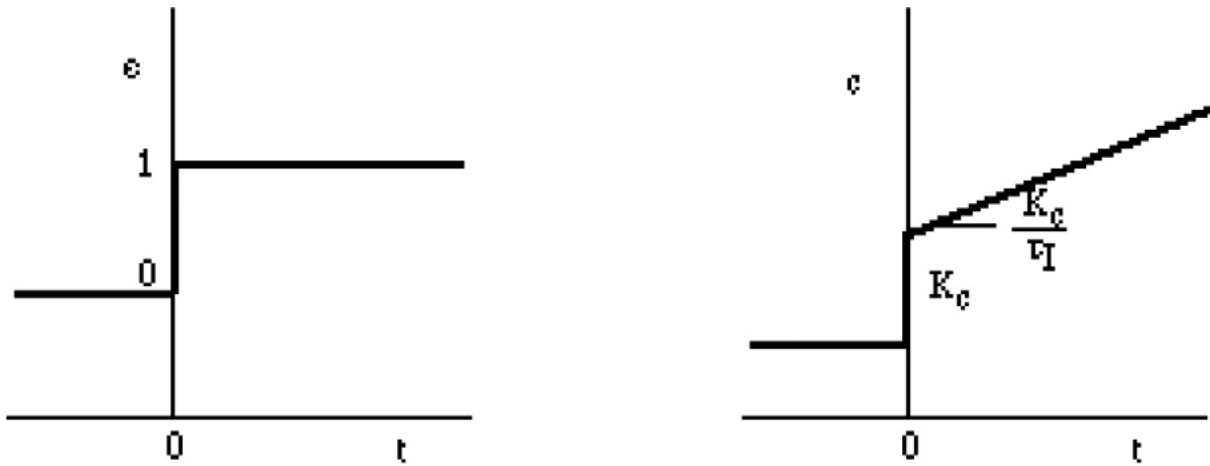
Kontrol integralaren akzioa akzio proportzionalarekin erabiltzen da; eta kontrolagailu proportzional integrala (PI) esaten zaio.

$$c(t) = K_c \varepsilon(t) + \frac{K_c}{\tau_I} \int_0^t \varepsilon(t) dt + c_s \quad (9.11)$$

Normalean,  $\tau_I$  0.1 eta 50 minutuko tartean aldatzen da. Dagokion transferentzia-funtzioa honako ekuazio honek ematen du PI kontrolatzailerako:

$$G_c(s) = K_c \left[ 1 + \frac{1}{\tau_I s} \right] \quad (9.12)$$

PI kontrolagailuak,  $\varepsilon(t)$ -n, maila unitarioaren aldaketa bati ematen dion erantzuna 9.7 irudian erakusten da. Zero denboran, kontrolagailuaren irteera berehala aldatzen da akzio proportzionalaren ondorioz. Akzio integralak irteera linealki handiarazten du  $t > 0$  rako.  $t = \tau_I$  denean, integral terminoak kontrolagailuaren seinalean termino proportzionalak eragin duen neurri berean eragin du. Hau da, akzio integralak akzio proportzionalaren balioa errepikatu du. Kontrolagailu komertzial batzuk  $1/\tau_I$  (errepikapenak minutuko) terminotan kalibraturik daude,  $\tau_I$ -tan (minutuak) egon beharrean.



9.7. irudia. PI kontrolagailu batek  $\epsilon(t)$ -n maila unitarioaren aldaketa bati ematen dion erantzuna

Ikus dezagun orain PI kontrolagailu baten transferentzia-funtzioaren erantzuna frekuentzietan.

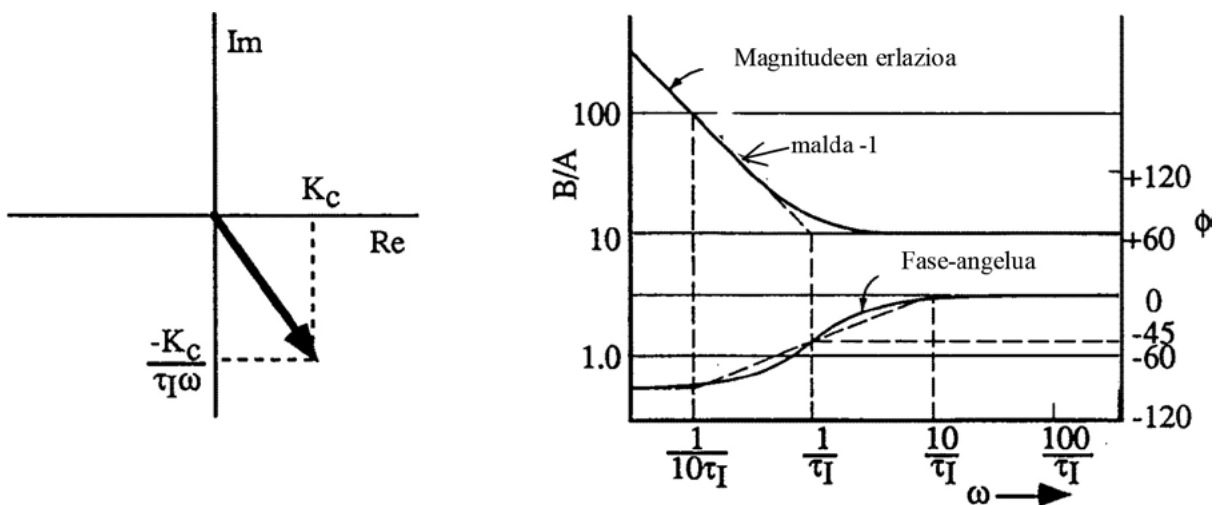
$$G(i\omega) = \frac{K_c \tau_I \omega i + K_c}{\tau_I \omega i} \quad (9.13)$$

$$G(i\omega) = \frac{K_c \tau_I^2 \omega^2 - K_c \tau_I \omega i}{\tau_I^2 \omega^2} = K_c - \frac{K_c}{\tau_I \omega} i \quad (9.14)$$

$$B/A = \sqrt{K_c^2 + \frac{K_c^2}{\tau_I^2 \omega^2}} = K_c \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\tau_I \omega}\right)^2} \quad (9.15)$$

$$\phi = \text{tg}^{-1}\left(\frac{-K_c / \tau_I \omega}{K_c}\right) = \text{tg}^{-1}\left(-\frac{1}{\tau_I \omega}\right) \quad (9.16)$$

9.8 irudian, PI kontrolagailu horren Boderen eta Nyquisten diagrama erakusten da.



9.8. irudia. PI kontrolagailu baten Boderen eta Nyquisten diagramak

### 9.6. Kontrol proportzionala akzio deribatuarekin

Lehenago komentatu da akzio deribatua ez dela bakarrik erabiltzen, akzio proportzionalari edo akzio proportzional+integralei lotuta erabiltzen baita. Akzio proportzionala+deribatua (PD) duen kontrolagailu baten kasuan, honako hau litzateke haren irteerako seinalea:

$$c(t) = K_c \varepsilon(t) + K_c \tau_D \frac{d\varepsilon}{dt} + c_s \quad (9.17)$$

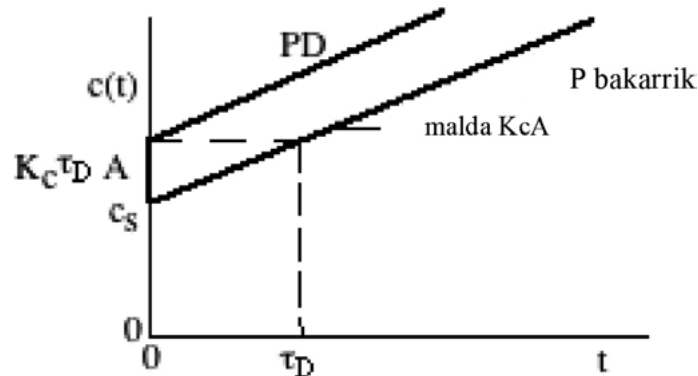
PD kontrolagailu baten transferentzia-funtzioa honako hau izango da:

$$G_c(s) = K_c [1 + \tau_D s] \quad (9.18)$$

$\tau_D$ -ren esanahia ikusteko, ezin daiteke orain arte bezala maila erako aldaketa bat erabili, akzio deribatua infinitua eta, gero, zero bailitzateke. Horregatik, arrapalan, aldaketa bat erabiliko da,  $\varepsilon(t) = A t$ . Adierazpen hori (9.17) ekuazioan ordezkatzuz, honako hau geratzen da:

$$c(t) - c_s = K_c A t + K_c \tau_D \frac{d(At)}{dt} = K_c A t + K_c \tau_D A \quad (9.19)$$

9.9 irudian, (9.19) ekuazioak emandako erantzuna erakusten da. Ikus daiteke akzio deribatua akzio proportzionalaren gaineko aurrerapen bat dela.  $\tau_D$  akzio proportzionalak akzio deribatuaren magnitude bereko seinalea eragiteko behar duen denbora da. Alegia, kontrolagailu batek aurreratzen duen denbora da akzio deribatua izateagatik akzio proportzionala bakarrik izango lukeen egoerarekin alderatuta.



**9.9. irudia.** PD kontrolagailu batek  $\varepsilon(t)$ -n A maldako arrapala bati emandako erantzuna

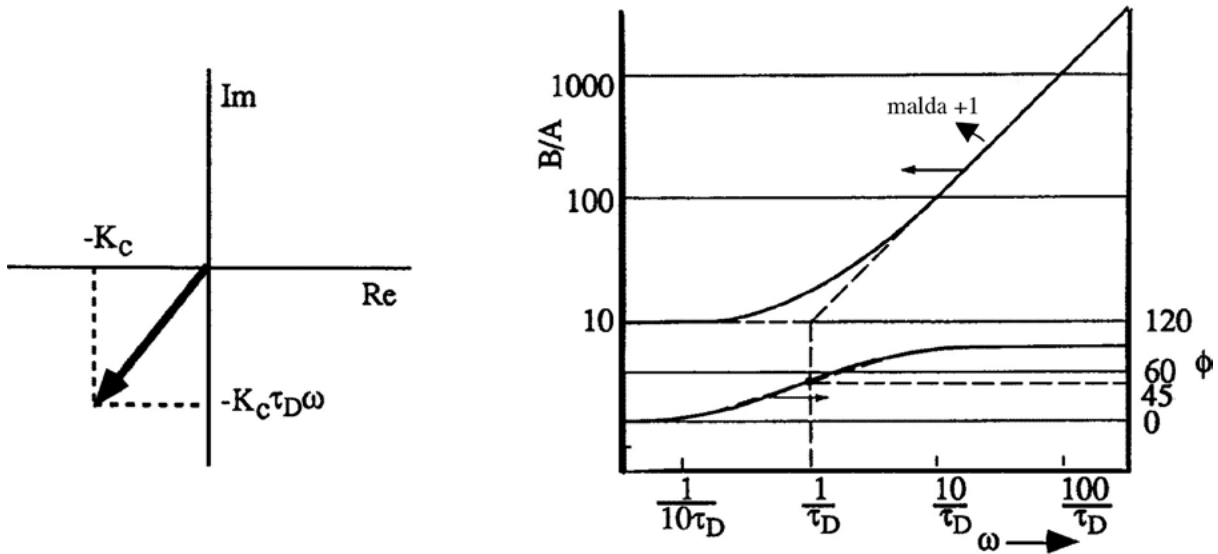
Ikus dezagun orain PD kontrolagailu baten transferentzia-funtzioaren erantzuna frekuentzietan.

$$G(i\omega) = K_c [1 + \tau_D \omega i] \quad (9.20)$$

$$B/A = \sqrt{K_c^2 + K_c^2 \tau_D^2 \omega^2} = K_c \sqrt{1 + \tau_D^2 \omega^2} \quad (9.21)$$

$$\phi = \text{tg}^{-1}(\tau_D \omega) \quad (9.22)$$

9.10 irudiak PD ideal horren Nyquisten eta Boderen diagramak erakusten ditu.



9.10. irudia. PD ideal baten Nyquisten eta Boderen diagramak

### 9.7. Akzio deribatua eta integrala duen kontrol proportzionala

Industriaren arloan, PID deitzen zaio. PID kontrolagailu idealak honako adierazpen honi erantzuten dio:

$$c(t) = K_c \varepsilon(t) + \frac{K_c}{\tau_I} \int_0^t \varepsilon(t) dt + K_c \tau_D \frac{d\varepsilon}{dt} + c_s \quad (9.23)$$

Adierazpen horretatik, erraz ondoriozta daiteke transferentzia-funtzioa:

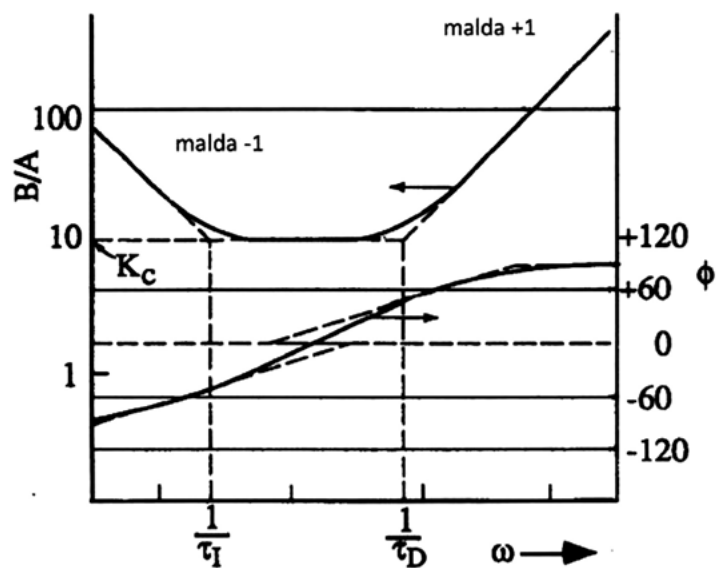
$$G_c(s) = K_c \left[ 1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s \right] \quad (9.24)$$

Erantzuna, frekuentzietan, honako adierazpen honen bidez emana dator:

$$B/A = K_c \sqrt{1 + \left( \frac{1}{\tau_I \omega} - \tau_D \omega \right)^2} \quad (9.25)$$

$$\phi = \text{tg}^{-1} \left( -\frac{1}{\tau_I \omega} + \tau_D \omega \right) \quad (9.26)$$

9.11 irudian, PID kontrolagailu horren Boderen diagrama erakusten da. Ikusten da akzio integralak frekuentzia baxuetan eragiten duela, eta akzio deribatuak, berriz, frekuentzia altuetan.



9.11. irudia. PID kontrolagailu ideal baten Boderen diagrama

Dena den, ezin da akzio deribatu ideala ematen duen ekipoa eraiki (fisikoki ezin da egin). Kontrolagailu komertzialek portaera ideal hori honako transferentzia funtzio hau erabiliz hurbiltzen dute PID errealerako:

$$G_c(s) = K_c \left( \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s} \right) \left( \frac{\tau_D s + 1}{\alpha \tau_D s + 1} \right) \quad (9.27)$$

non  $\alpha$  balio baxu bat den, normalean 0.05 eta 0.2 tartekoa. Hala, Boderen diagraman ikusten zen irabazia mugatuta geratuko da frekuentzia altuetan.

Kontrolagailu idealak honako desabantaila hau du: kontsigna-puntuaren bat-bateko aldaketa batek (eta beraz  $\varepsilon(t)$ -n) akzio deribatuak infiniturantz jotzea eragiten du. Ez dugu horrelako eraginik nahi, eta, akzio deribatua errorean baino neurtutako aldagaian eraginez ekidin daiteke. Horrela,  $d\varepsilon/dt$   $dy_m/dt$ -rekin ordezkatzuz ekiditen da arazo hori.

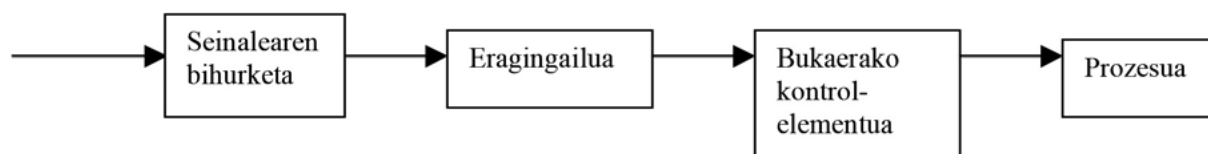
## 10. gaia

# Bukaerako kontrol-elementua

### 10.1. Bukaerako kontrol-eragiketa

Bukaerako kontrol-elementuak kontrol-akzioa burutzen duten kontrol-loturako edo -begiztako dispositiboak dira. Kontrolagailuaren irteerako seinalea jasotzen dute, eta, horren balioaren arabera, aldagai manipulatuak doitzen dute. Kontrol-seinaleak (kontrolagailu batek eratua) prozesuaren gaineko ekintza bihurtzeko beharrezko etapak hartzen ditu barne eragiketa horrek. Adibidez, kontrol-seinale tipiko batek (4-20 mA) emaria 10etik 50 m<sup>3</sup>/min-ra aldatzea badu helburu, bitarteko zenbait eragiketa behar du. Oro har, kontrol-seinale baten bihurteta kontrol-ekintzan, 10.1 irudiko etapen bidez adieraz daiteke.

Kontrol-  
seinalea



**10.1. irudia.** Bukaerako kontrol-eragiketaren etapak

- Seinaleen bihurteta: kontrol-seinaleak hurrengo etapara, eragingailua edo eragilea, heltzeko jasan behar dituen aldagetei dagokie etapa hori.
- Eragingailuak edo eragileak: seinalearen bihurtetaren emaitza seinale anplifikatua edo izaera ezberdineko seinalea da, mekanismo baten gain eragin dezakeena prozesuaren kontrol-aldagai bat aldatzeko. Eragin zuzena dispositiboren batek sortzen du, hala nola erresistentzia edo balbula batek. Eragingailua kontrol-seinalearen bihurtze bat da kontrol-elementu baten gaineko ekintza batean. Balbula baten kasuan, kontrol-seinalea balbularen irekitze- edo ixte-akzio fisikoan bihurtzen duen dispositiboa da eragingailua.
- Bukaerako kontrol-elementua: elementu horrek eragin zuzena du prozesuaren dinamikan eta prozesuaren parte integral gisa diseinatzen da. Horrela, emari bat kontrolatu behar bada, balbula (bukaerako kontrol-elementua) fluxu-sistema horren parte izanda diseinatzen da.

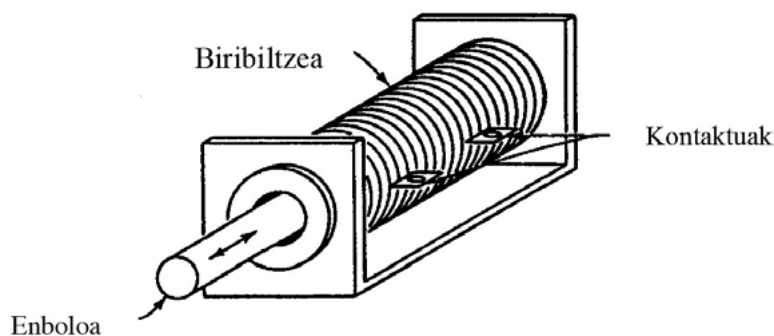
## 10.2. Eragingailuak edo eragileak

Balbula bat badugu emari bat kontrolatzeko, hori zabaltzen edo ixten duen mekanismoren bat egon beharko du. Era berean erresistentzia bat badago sistema bat berotzeko, korronea aktibatzen edo desaktibatzen duen edo haren tentsioa aldatzen duen dispositiboren bat egon beharko du.

### *Eragingailu elektrikoak*

#### SOLENOIDEAK

Seinale elektriko mugimendu mekaniko (normalean lerro zuzena) bihurtzen duen elementua da. 10.2 irudian ikusten den bezala, arroilamendu elektriko baten eta enbolo batean datza. Arroilamenduak tentsioa edo intentsitate jakineko elikadura du, korrone jarraitua edo aldizkakoa, eta enboloak bultza edo tira egiten du espezifikatutako tentsioak kitzikatzen duenean.



**10.2. irudia.** Solenoide batek seinale elektriko mugimendu bihurtzen du

#### MOTOR ELEKTRIKOAK

Sarrera elektriko bat onartu eta errotazio-mugimendu jarraitua sortzen duten elementuak dira. Egoerarik ohikoenean motorraren biratze-abiadura kontrolatu egin behar da prozesuaren aldagai bat kontrolatzeko. Korrone jarraitukoak, aldizkako korronekoak eta pausoz pausoko motorrak dira hiru mota ohikoena.

### *Eragingailu pneumatikoak*

Eragingailuak kontrol-seinale bat indar handi batean transformatu du bukaerako kontrol-elementua manipulatzeko. Eragingailu pneumatikoaren printzipioa presioa gainazal-unitateko indartzat hartzean datza. A azalerako diafragma bati presio diferentzia bat aplikatzen bazaio, diafragma horren gainean eragiten duen indarra honako ekuazio honek emango du:

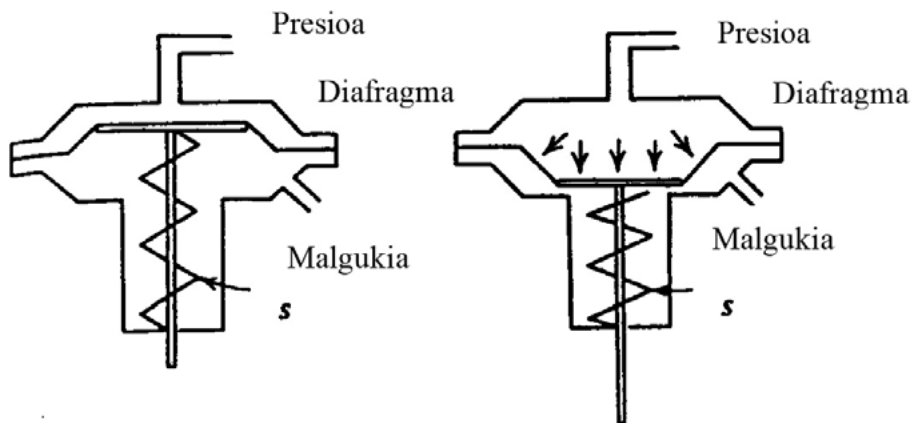
$$F = (p_1 - p_2)A \quad (10.1)$$

Presio jakin baterako indar bikoitza behar badugu, diafragmaren azalera bakarrik bikoiztu beharko da. 3-15 psi (20-100 kPa)-ko seinale estandarrekin, indar altuak lor daitezke. Eragingailu



pneumatiko mota ohikoenak kontrol-balbulekin erabiltzen dira. 10.3 irudian, eragingailu pneumatiko zuzen baten akzioa erakusten da. 10.3a irudian, kontrol-seinale baxuari (3 psi) dagokion egoera erakusten da. Kontrol-presioa handitzean, diafragman indar bat aplikatzen da eta horrek malgukian eragiten du. 10.3b irudiak kontrol-presio maximoaren kasua erakusten du. Presioak eta indarrak erlazio lineala dute, (10.1) ekuazioa, eta malguki baten konpresioa indarrarekin erlazionatuta dago zuzenean. Gero, ardatzaren posizioa aplikaturiko kontrol-presioarekin erlazionatuta dago zuzenean.

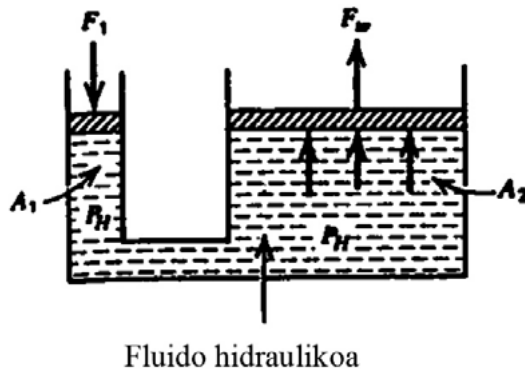
$$\Delta x = \frac{A}{k} \Delta p \tag{10.2}$$



10.3. irudia. Eragingailu pneumatikoak

*Eragingailu hidraulikoak*

Oso indar handiak behar direnean, oso altua izan behar du diafragmaren azalerak eragingailu pneumatiko batean, eta hori ez da praktikoa. Horrelako kasuetan, eragingailu hidraulikoetara jo behar da. Printzipioa Pascal prentsarena da. Eragingailu pneumatikoen berdina da oinarritzko ideia, baina, orain, fluido konprimaezin bat erabiltzen da presioa emateko. 10.4 irudian, printzipioa erakusten duen eskema irudikatzen da.



Fluido hidraulikoa

10.4. irudia. Eragingailu hidrauliko batek  $F_1$  indar txiki bat beste handiago baten,  $F_w$ , bihurtzen du

Presio hidraulikoa honako ekuazio honek emana dator:

$$p_H = \frac{F_1}{A_1} \quad (10.3)$$

Indar erresultantea (eragiten duena) honako hau izango da eskuineko pistoian:

$$F_w = p_H A_2 \quad (10.4)$$

Gero, garatutako indarra honako hau izango da:

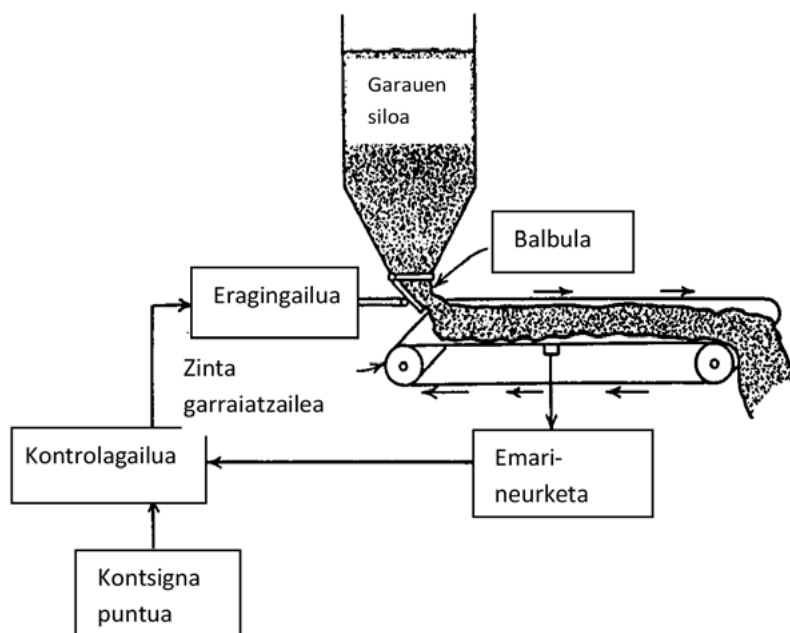
$$F_w = \frac{A_2}{A_1} F_1 \quad (10.5)$$

### 10.3. Bukaerako kontrol-elementuak

Dispositibo asko izan daitezke kontrol-zirkuitu bateko bukaerako elementuak. Jarraian, horietako batzuk erakutsiko dira adibide moduan.

#### *Mekanikoak*

Adibidez, solidoetarako konporta-balbula bat, 10.5 irudian erakusten den moduan. Kasu honetan, eragingailu batek balbula batean eragiten du garauen emaria kontrolatzeko. Eragingailua enboloaren posizioa doitzeko motor bat edo zilindro hidrauliko bat izan daiteke edo beste edozein dispositibo.



**10.5. irudia.** Bukaerako kontrol-elementu mekaniko baten adibidea

*Elektrikoak*

Motorrak dira adibide ohikoenak, eta horien abiadurak prozesuko beste aldagai bat kontrolatzen du. Tenperatura erresistentzia elektrikoaren bidez kontrolatzea da beste ohiko adibide bat (oso ohikoa laborategian). Kasu horretan, kontrol-seinalea honako hauetarako erabil daiteke: energia elektrikoa emateko, erresistentziatik energia elektrikoa deskonektatzeko edo erresistentziaren muturretan aplikaturiko tentsioa aldatzeko. Erresistentzia elektrikoa bukaerako kontrol-elementua da.

**10.4. Kontrol-balbulak**

Horrelako balbulek eragingailu mekaniko motaren bat erabiltzen dute enboloa mugitzeko, irekiz edo itxiz. Eragingailu hori korrante jarraituko edo pausoz pausoko motor bat izaten da; horrek balbula birarazten du eskuz egingo zen modu berean; edo pneumatikoki eragingindako diafragma bat ere izan daiteke, eta, horrek enboloa malgukiak eragiten duen indarraren kontra mugitzen du. Eragingailu elektrikoak (motorrak) oso balbula handietarako erabiltzen dira.

Kontrol-balbulak lehenengo fluidoaren propietateak eta emariaren nahi diren ezaugarriak aintzat hartuz aukeratzen dira, hala eraikitze-materiala eta mota aukeratzeko. Gero, eragingailurako nahi diren ezaugarriak hartzen dira kontuan. Materialaren aukeraketa fluidoaren propietate korrosiboaren menpekota da eragiketa-baldintzetan.

Kontrol-balbuletarako diseinu-ekuazioak balbularen posizioa ( $x$ ) emariarekin ( $q$ ) erlazionatzen du, eta, balbularen koefizientea,  $C_v$  izenekoarekin. Azken hori proportzionaltasun-faktorea da eta balbularen tamaina edo ahalmenaren menpekota da.

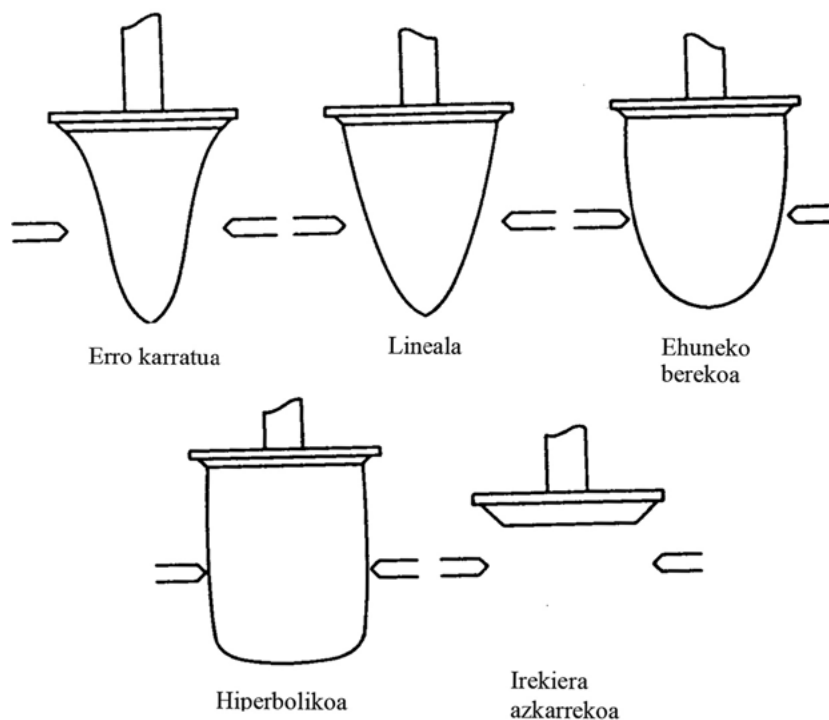
$$q = C_v f(x) \sqrt{\frac{\Delta P_v}{\rho_s}} \quad (10.6)$$

non  $q$  emaria,  $f(x)$  fluxuaren ezaugarria,  $\Delta P_v$ , karga-galera balbulan, eta  $\rho_s$ , fluidoaren grabitate espezifikoa diren.

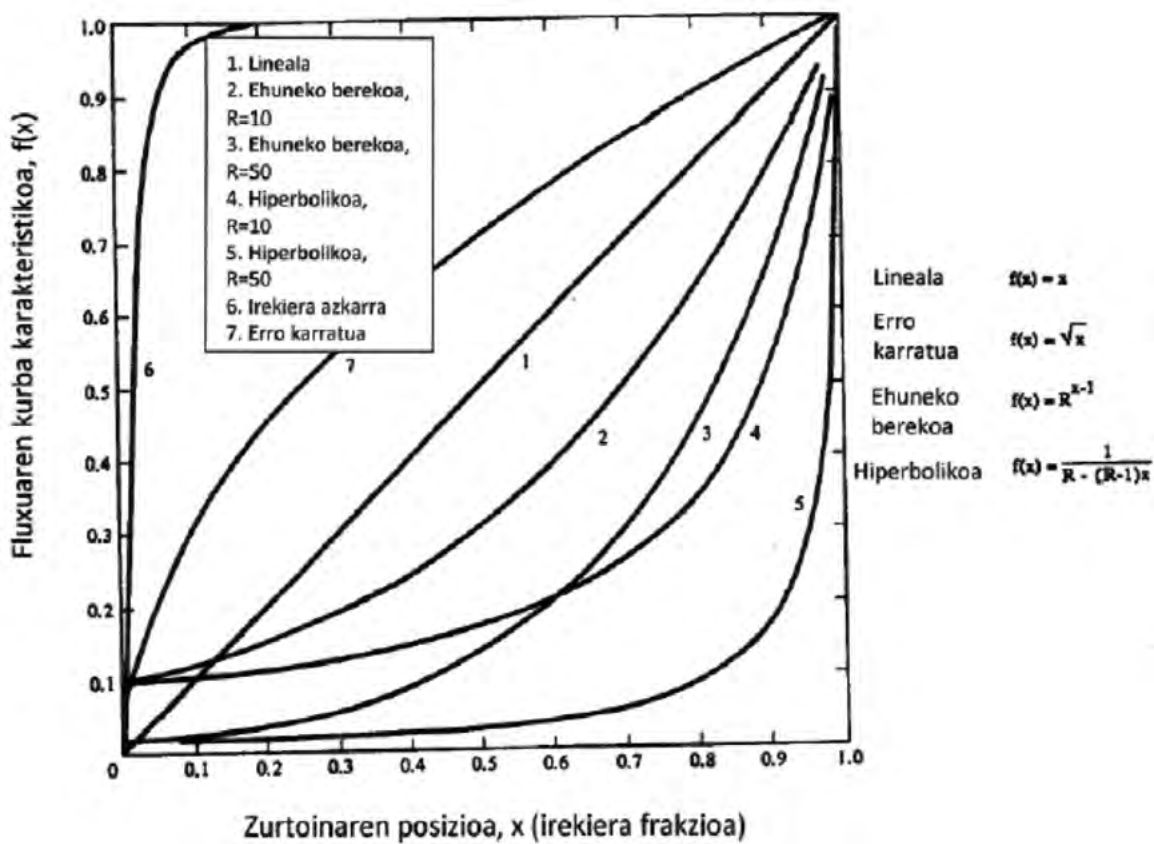
Balbularen tamainaren espezifikazioa *balbularen ezaugarria* ( $f$ ) izenekoaren menpekota da. Oinarrian, hiru ezaugarri erabiltzen dira. Balbulako karga-galera finko baterako fluxuaren ezaugarria  $f$  ( $0 \leq f \leq 1$ ) enboloaren posizioarekin ( $x$ ) erlazionatuta dago honako erlazio hauetako baten arabera:

Lineala	$f = x$
Irekiera azkarrekoa	$f = \sqrt{x}$
Ehuneko berekoa	$f = R^{x-1}$

non  $R$  balbularen diseinu-parametro bat den, 20-50 tartean egoten dena. Balbularen kurba karakteristikoa,  $f(x)$ , ixten duen enboloaren forma geometrikoaren menpekota da. 10.6 irudiak enbolo mota ohikoenak erakusten ditu, eta, 10.7 irudian, balbula mota horien fluxuaren ezaugarriak erakusten dira.



10.6. irudia. Balbula pneumatikoetarako enbolo motak



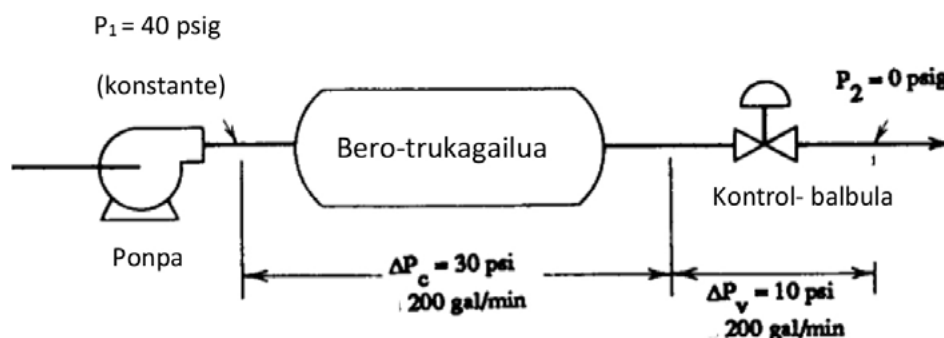
10.7. irudia. Zenbait balbula motatarako fluxuaren ezaugarriak

### 10.5. Kontrol-balbulak dimentsionatzea

Kontrol-balbulen dimentsionatzea prozesuko beste elementuen menpekoa da: ponpak, bero-trukagailuak, filtroak, eta abar; balbularekin seriean jarrita baitaude. Kontrol-helburuak bakarrik kontuan baditugu, balbula lerroan karga-galera portzentaia handiena adierazteko eran diseinatu behar litzateke. Horrela, balbulak, emaria aldatzen duten prozesuaren aldaketa guztietan, eragin handiagoa izango luke. Hala, balbula ere ahalik eta txikiena (merkeena) litzateke. Baina operazio-baldintza optimoek, ikuspuntu ekonomiko batetik, balbulak karga-galera ahalik eta txikiena izatea eskatzen dute, hala ponpaketa-kostuak minimizatzeko. Diseinu konpromisoa, karga galera balbulan diseinu baldintzetan karga galera totalaren 1/4-1/3 tartean egotea da.

#### Adibidea

Ezaugarri linealak dituen kontrol-balbula bat seriean jartzen da, bero-trukagailu batekin. Fluidoak 40 psi deskarga-presio konstanteko ponpa batekin bultzaturik dator (emaria aldatu arren). Bero-trukagailua 30 psi-ko karga-galera baterako diseinatu bada emaria 200 gal/min-koa denean (likidoaren grabitate espezifikoa 1 da), balbulak 10 psi-ko karga-galera izan beharko du. 10.8. irudiak ekipu horien konfigurazioaren eskema bat erakusten du.



10.8. irudia. Ponpa bero-trukagailu batekin seriean kokaturiko kontrol-balbula

Ponparen presio-deskarga konstantea da.

Luyben-ek dio kontrol-balbula lineala era erdi irekian ( $x = 0.5$ ) egoteko moduan diseinatu behar dela eragiketa-baldintza nominaletan. Orduan:

$$C_v = \frac{200}{0.5\sqrt{10}} = 127 \quad (10.7)$$

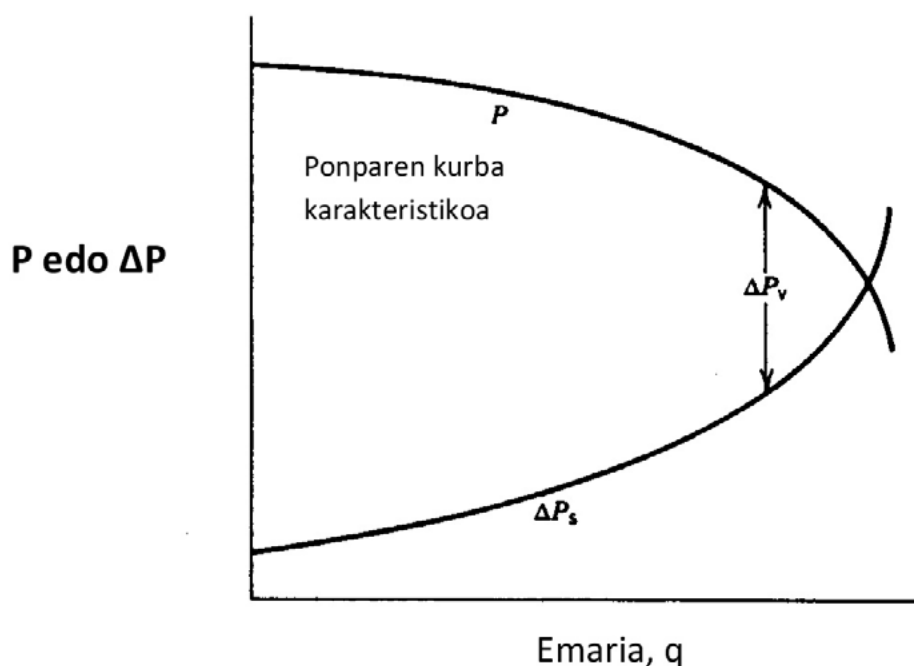
Eta fabrikatzaileen tauletan begiratu,  $C_v$  hori 4 hatzbeteko tamaina bati dagokio.

Emaria diseinuko baliotik %25eko baliora jaisten bada, hau da, 50 gal/min, bero-trukagailuko karga-galera  $30 \times 0.25^2 = 1.9$  psi-ra jaitsiko da, eta kontrol-balbulak 38.1 psi-ko karga-galera izango du. Hori aintzat hartuz,  $f$ -ren arabera,  $50/127\sqrt{38.1} = 0.06$ , hau da, ia ez da zabalik egongo.

Printzipioz ematen du ezaugarri linealeko balbula bat dela aukera onena. Baina balbula sisteman instalatu eta gero fluxuaren ezaugarria ahalik eta linealena izatea da diseinatzailearen helburua, hau da, emaria  $x$ -ekin linealki aldatzea. Karga-galera balbulan emariarekin aldatzen denez, balbula ez-lineal batek erlazio linealagoa ematen du instalatu eta gero balbula lineal batek baino. Ehuneko bereko balbula, balbulan karga-galeraren aldaketak emari ezberdinekin konpentsatzeko diseinatzen da.

Balbulak diseinatzeko arauak:

1. Ponparen ezaugarria (presioa deskargan vs. emaria) lau bada eta marruskaduraren ondorioz eragindako galerak txikiak, komeni da balbula lineala aukeratzeko. Egoera hori ez da maiz gertatzen prozesua gaindiseinaturik dagoela esan nahi baitu (ponpa eta hodieria handiegia dira).
2. Ehuneko bereko balbula aukeratzeko:
  - a) Ponparen kurba karakteristikoa eta sistemaren karga-galera  $\Delta P_s$  irudikatu, karga-galera balbulan kontuan izan gabe, 10.9 irudian erakusten den moduan. Bi kurba horien arteko aldea balbulan zeharreko karga-galera da. Balbula  $\Delta P_v/\Delta P_s$ -ren nahi den balioa lortzeko diseinatu behar da, adibidez, %25-33, diseinu-emarirako,  $q_d$ .



**10.9. irudia.**  $\Delta P_v$ -ren kalkulua ponparen ezaugarria eta sistemaren karga-galera aintzat hartuz ( $\Delta P_s$ ), balbula kontuan izan gabe

- b) Balbularen  $C_v$  nominala kalkulatu, emari altuenerako eskuragarri dagoen karga-galerarako gutxienez  $q_d$ -ren %100 ematen duen balio gisa.
- c)  $q$   $x$ -en funtzioan, kalkulatu (10.6) ekuazioa erabiliz,  $C_v$ -ren balioa eta a) atalean kalkulaturako  $\Delta P_v$ -ren balioa erabiliz.  $Q$  vs.  $x$ -ren errepresentazioak nahiko lineala izan behar du operazio-zonan. Hori horrela ez bada,  $C_v$ -ren beste balio nominal bat estimatu eta errepikatu kalkuluak.

10.1 adibidea: Luybenen adibidean, ponpak 40 psi-ko presio konstantea ematen du emarien balio-tarte osorako. Bero-trukagailuak 30 psi-ko karga-galera du 200 gal/min-ko emarirako ( $q_d$ ), eta  $q^2$ -rekiko proportzionala dela jo daiteke. Balbularen  $C_v$  nominala aukeratu eta balbularen ezau-garri instalatua irudikatu honako kasu hauetan:

- diseinuko emarirako erdi irekirik dagoen balbula lineala.
- ehuneko bereko balbula ( $R = 50$ ) diseinuko emariaren %110eko baliorako guztiz irekirik egoteko diseinatua.
- b) ataleko bera, baina han kalkulaturiko  $C_v$ -ren %20 baino altuagoa den baliorako.
- d) b) ataleko bera, baina han kalkulaturiko  $C_v$ -ren %20 baino baxuagoa den baliorako.

Karga-galera honako hau izango da bero-trukagailuan zehar:

$$\frac{\Delta P_c}{30} = \left(\frac{q}{200}\right)^2 \quad (10.8)$$

$$\Delta P_s = \Delta P_c = 30 \left(\frac{q}{200}\right)^2 \quad (10.9)$$

Ponparen presioa konstantea denez, honako hau izango da balbulako karga-galera:

$$\Delta P_v = 40 - \Delta P_c = 40 - 30 \left(\frac{q}{200}\right)^2 \quad (10.10)$$

- Lehenengoz,  $C_v$  nominala kalkulatu da:

$$C_v = \frac{200}{0.5\sqrt{10}} = 126.5 \quad (10.11)$$

$C_v = 125$ -ko balioa aukeraten da. Erlazioa lineala bada:

$$x = \frac{q}{C_v \sqrt{\Delta P_v}} \quad (10.12)$$

Ekuazio hori erabiliz eta (10.10) ekuazioko  $\Delta P_v$  balioak, instalaturiko balbularen kurba karakteristikoa lortuko da, 10.10 irudia.

- Orain,  $C_v$  nominala kalkulatu da balbula  $q_d$  emariaren %110eko baliorako irekita.

$$C_v = \frac{220}{\sqrt{3.7}} = 114.4$$

$C_v = 115$ eko balioa aukeratzen da. Ehuneko bereko balbula baten kasuan, honako hau dugu:

$$R^{x-1} = \frac{q}{C_v \sqrt{\Delta P_v}} \quad (10.13)$$

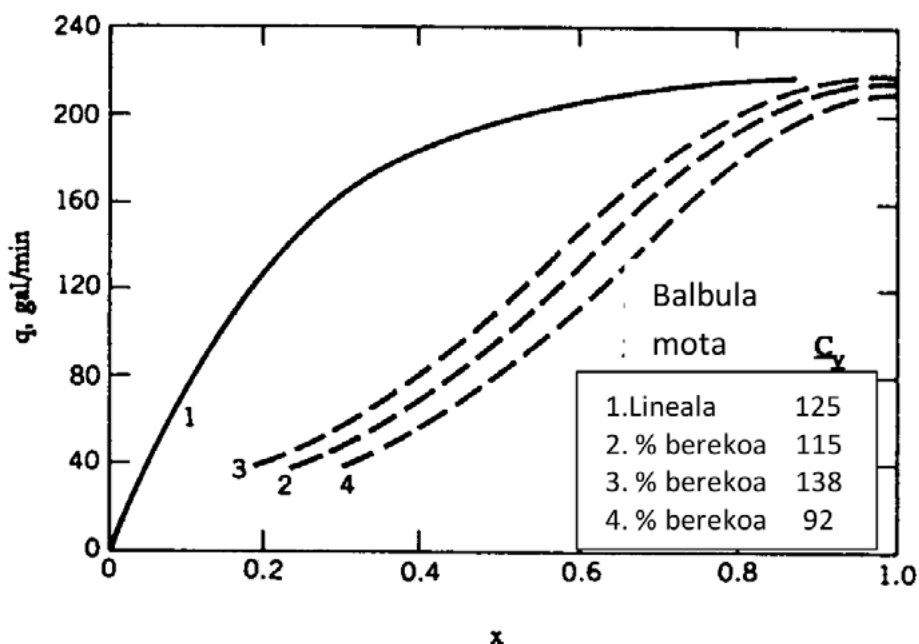
edo

$$x = 1 + \log \left( \frac{q}{C_v \sqrt{\Delta P_v}} \right) / \log R \quad (10.14)$$

$C_v = 115$ ,  $R = 50$  eta  $q$  eta  $\Delta P_v$ -ren balioak ordezkatzuz, 10.10 irudian erakusten den instalaturiko ezaugarria lortzen da.

c)  $C_v = 1.2(115) = 138$

d)  $C_v = 0.8(115) = 92$



**10.10. irudia.** 10.1 adibiderako instalaturiko balbularen ezaugarriak

Instalaturiko ezaugarriak 10.10 irudian erakusten dira. Ehuneko bereko balbula batek  $C_v = 115$ eko balio batekin instalaturiko ezaugarri nahiko lineala emango luke emari-tarte guztian, eta diseinuko emariaren %110eko balioko emarietarako ahalmen nahikoa du.

Balbulak dimentsionatzea konplexua da eta aipatu ez diren faktore asko daude. [2-4] erreferentzietan horri buruzko informazio espezifikoa aurkitu daiteke.



## Bibliografia

1. Luyben, W.L., «*Process Modeling, Simulation and Control for Chemical Engineers*», 2.<sup>a</sup> Ed., McGraw-Hill, Nueva York (1990).
2. Moore, R.W., «*Allocating pressure drops to control valves*», Instrum. Tech., 24, 102 (Oct. 1977).
3. Wolter, D.G., «*Control valve selection - A practical guide*», Instrum. Tech., 24, 55 (Oct. 1977).
4. Liptak, B.G., «*Control valves in optimized systems*», Chem. Eng., 90, 104 (Sept. 1983).

## KONTROL-BALBULEN GORPUTZA

Nahi den erregulazioa lortzeko, balbulen gorputz mota asko daude. Prozesuen industrietan, honako hauek erabiltzen dira:

- Globo-balbula: globo hitzak balbularen kanpoko itxurari egiten dio erreferentzia. Globo motako balbula batek badu ardatz bat, gorantz eta beherantz mugitzen dena tapoiaren posizioa aldatzeko. Tapoiaren posizioa aldatzean, fluidoaren zeharkatze- azalera aldatu egiten da tapoiaren eta eserlekuaren (irekidura) artean. Eserleku- eta tapoi-diseinu asko daude enbuloaren kokapenaren eta emariaren artean nahi diren erlazioak lortzeko.
- Bola-balbula: gorputz horretarako murrizketa bola solido bat da; hutsik dagoen parte bat du fluidoaren igarobiderako azalera doigarri bat izateko. Bolak bira egiten du fluidoaren kantitatea erregulatzeko. Ohiko bola-balbula batek badu bola zeharkatzen duen tunel bat, eta balbulak bira egiten du fluidoak zeharkatu dezakeen tunelaren frakzioa doitzeko.
- Tximeleta-balbula: horrelako balbulek indargetzaile bat dute, fluidoaren igarobiderako erresistentzia doitzeko bira egiten duena.
- Diafragma-balbula: balbularen zurtoinaren indarragatik deformatzen den gainazal bat du fluidoaren igarobiderako erresistentzia aldatzeko.
- Konporta-balbula: horrelako balbulek oztopo lau bat dute eta fluidoaren igarobidearen azalera aldatzeko doitzen da. Gorputz horiek, batez ere, eskuz eragindako balbuletarako eta larrialdi-geldialdi baterako balbula automatikoetarako erabiltzen dira.

## KONTROL-BALBULETAKO EKIPO GEHIGARRIA

Kontrol-balbulak ongi funtziona dezan, ekipo gehigarriak behar dira:

- Eragingailua: balbularen zurtoina eta tapoia mugitzeko erabiltzen den energia ematen du eragingailuak. Prozesuen industrietan, airea erabiltzen da energia-iturri gisa, ziuerra eta fidagarria izateko. Eragingailu asko diafragma moduan definitzen dira, seinale pneumatikoaren presioa eragingailuaren bolumenera transmititzen baita, eta hori diafragma malgu batekin zigilaturik dago.
- Anplifikadorea: aire-emaria lerro pneumatikoan ez da handia, eta baliteke denbora asko behar izatea aire kantitate nahikoa transferitzeko eragingailura bere presioa lerroko presioaren berdina izan dadin. Lerro pneumatikoan, anplifikadore bat jar daiteke balbulatik gertu, airearen fluxu bolumetrikoa handitzeko eta eragingailuaren erantzun dinamikoa azkartzeko.

- Akats-posizioa: kontrol-ekipoaren akatsik garrantzitsuenean presio baxu bat (atmosfera-koa) ematen dute eragingailurako seinale moduan, hala nola hoditeria pneumatikoaren edo konpresorearen airearen hausturak. Kontrolez kanpoko egoeretarako, balbula posizio-rik ziurrenanean geratzeko diseinatzen da; normalean, guztiz zabalduz edo itxirik izaten da.
- Kokatzailea: zurtoina eta tapoia nahi den kokagunera mugitzeko frikzioa eta inertzia gainditu behar dituen elementu mekanikoa da balbula. Normalean, balbulak ez du kontrol-seinaleak espezifikaturiko posizioa zehazki lortzen. Horregatik, kokatzaile bat erabiltzen da, eta horrek zurtoinaren neurtutako kokagunea erregulatzen du, balbularako kontrol-seinaleak espezifikaturiko balioan kokatzeko.
- Eskuzko bolantea: kontrol-balbula batzuk, noizean behin, prozesuaren ekipoko pertsonak erabili behar dituzte. Eskuzko bolante batek balbularako kontrol-seinalean eragiteko aukera ematen du.

## 11. gaia

# Transferentzia-funtzioak begizta itxian. Egonkortasun kontzeptua

### 11.1. Erantzuna begizta itxian

Har dezagun aintzat sistema orokor bat begizta itxian. Haren lau osagaietako bakoitzerako (prozesua, neurketa-elementua, kontrolagailua, eta bukaerako kontrol-elementua), dagokion transferentzia-funtzioa idatz daiteke. Transmisio-lerroen transferentzia-funtzioa aintzat ez hartzeko modukoa bada, honako hau izango dugu:

$$\text{— Prozesua:} \quad \bar{y}(s) = G_p(s) \bar{m}(s) + G_d(s) \bar{d}(s) \quad (11.1)$$

$$\text{— Neurketa-elementua:} \quad \bar{y}_m(s) = G_m(s) \bar{y}(s) \quad (11.2)$$

$$\text{— Kontrolagailua:} \quad \bar{e}(s) = \bar{y}_{SP}(s) - \bar{y}_m(s) \quad \text{konparadorea} \quad (11.3a)$$

$$\bar{c}(s) = G_c(s) \bar{e}(s) \quad \text{kontrol-ekintza} \quad (11.3b)$$

$$\text{— Bukaerako kontrol-elementua:} \quad \bar{m}(s) = G_f(s) \bar{c}(s) \quad (11.4)$$

non  $G_p$ ,  $G_d$ ,  $G_m$ ,  $G_c$  eta  $G_f$  dagozkien transferentzia-funtzioak diren.

11.1 irudiak begizta itxiko sistema baterako bloke-diagrama orokortua erakusten du.

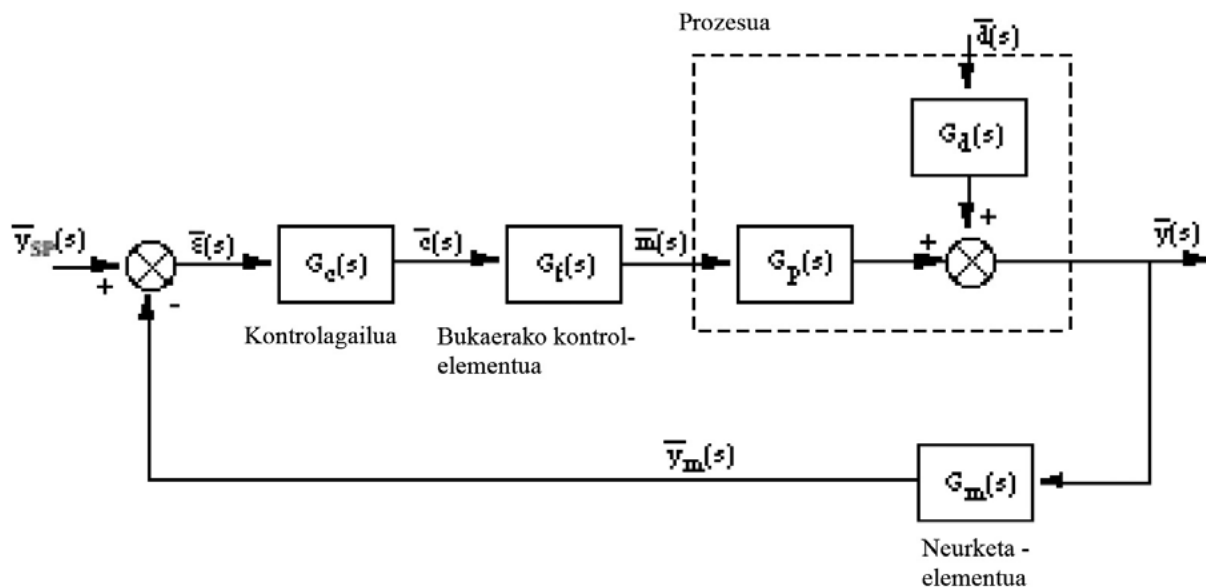
Konparadorearen eta irteera kontrolatuaren arteko ( $G_c$ ,  $G_f$  eta  $G_p$ ) blokeen multzoak bide zuzena osatzen du;  $G_m$  blokea, berriz, irteera kontrolatu eta konparadorearen arteko berrelikadura-ibilbidean dago.  $G = G_c G_f G_p$  egiten badugu, 11.2a irudiak bloke-diagrama sinplifikatua erakusten du, baina aurrekoaren baliokidea.

Aurreko ekuazioetan manipulazio aljebraiko batzuk eginez, honako hau daukagu:

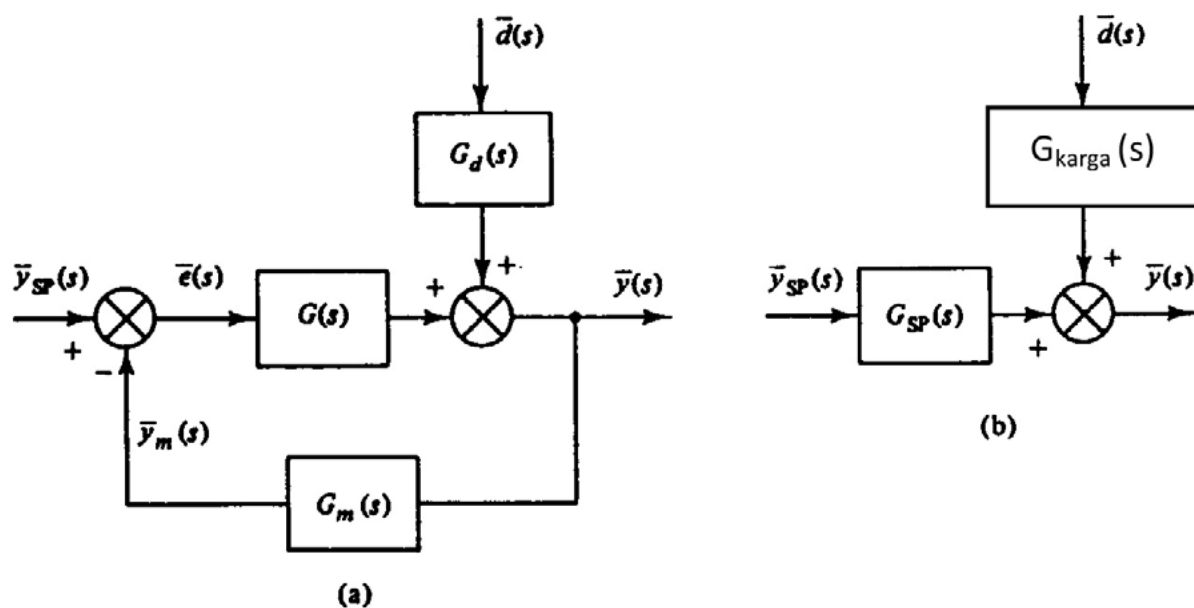
$$\bar{m}(s) = G_f(s) \bar{c}(s) = G_f(s) G_c(s) \bar{e}(s) = \quad (11.3b) \text{ ekuazioa erabiliz}$$

$$= G_f(s) G_c(s) [\bar{y}_{SP}(s) - \bar{y}_m(s)] = \quad (11.3a) \text{ ekuazioa erabiliz}$$

$$= G_f(s) G_c(s) [\bar{y}_{SP}(s) - G_m(s) \bar{y}_m(s)] \quad (11.2) \text{ ekuazioa erabiliz}$$



11.1. irudia. Begizta itxian sistema baten bloke-diagrama orokorra



11.2. irudia. Bloke-diagrama sinplifikatuak

Azken adierazpena (11.1) ekuazioan ordezkatzuz:

$$\bar{y}(s) = G_p(s) \{ G_f(s) G_c(s) [\bar{y}_{SP}(s) - G_m(s) \bar{y}(s)] \} + G_d(s) \bar{d}(s)$$

$\bar{y}(s)$  askatzuz:

$$\bar{y}(s) = \frac{G_p(s) G_f(s) G_c(s)}{1 + G_p(s) G_f(s) G_c(s) G_m(s)} \bar{y}_{SP}(s) + \frac{G_d(s)}{1 + G_p(s) G_f(s) G_c(s) G_m(s)} \bar{d}(s) \quad (11.5)$$

(11.5) ekuazioak prozesuaren erantzuna begizta itxian ematen du. Bi terminoz osatuta dago. Lehenengoak kontsigna-puntuko aldaketa baten eragina erakusten du; bigarrenak, berriz, perturbazio-aldagaiko aldaketa baten eragina erakusten du. Dagozkien transferentzia-funtzioei transferentzia-funtzioak begizta itxian deitzen zaie. Hala,

$$\frac{G_p G_f G_c}{1 + G_p G_f G_c G_m} = \frac{G}{1 + GG_m} = G_{SP} \quad (11.6)$$

kontsigna-puntuan aldaketa baterako transferentzia-funtzioa da begizta itxian, eta

$$\frac{G_d}{1 + G_p G_f G_c G_m} = \frac{G_d}{1 + GG_m} = G_{karga} \quad (11.7)$$

perturbazio-aldagaiko (karga) aldaketa baterako transferentzia-funtzioa da. 11.2b irudiak 11.2a irudiaren baliokidea den bloke-diagrama erakusten du, baina are sinplifikatuagoa.

Berrelkadura duen kontrol-sistema baten bi kontrol mota bereiz daitezke: servo mota eta erregulatzaile mota. Servo motan, kontsigna-puntua aldatu egiten da, baina ez perturbazio-aldagaia [ $\bar{d}(s) = 0$ ]. Kontrolagailuak eragin egiten du  $y_{SP}$ -tik hurbil mantentzeko (hau aldatzen ari da). Kasu honetan:

$$\bar{y}(s) = G_{SP}(s) \bar{y}_{SP}(s) \quad (11.8)$$

Mota erregulatzailean, perturbazio-aldagaia aldatu egiten da, baina ez kontsigna-puntua [ $\bar{y}_{SP}(s) = 0$ ]. Beraz:

$$\bar{y}(s) = G_{karga}(s) \bar{d}(s) \quad (11.9)$$

eta kontrolagailua kargako aldaketen eragina eliminatzen saiatuko da  $y$  konstante mantenduz.

Transferentzia-funtzioak begizta itxian ez dira bakarrik prozesuaren menpekoak, baita sensore-elementuaren, kontrolagailuaren eta bukaerako kontrol-elementuaren dinamikaren menpekoak ere.

### 11.1. adibidea. Tanke baten likido mailaren erantzuna begizta itxian

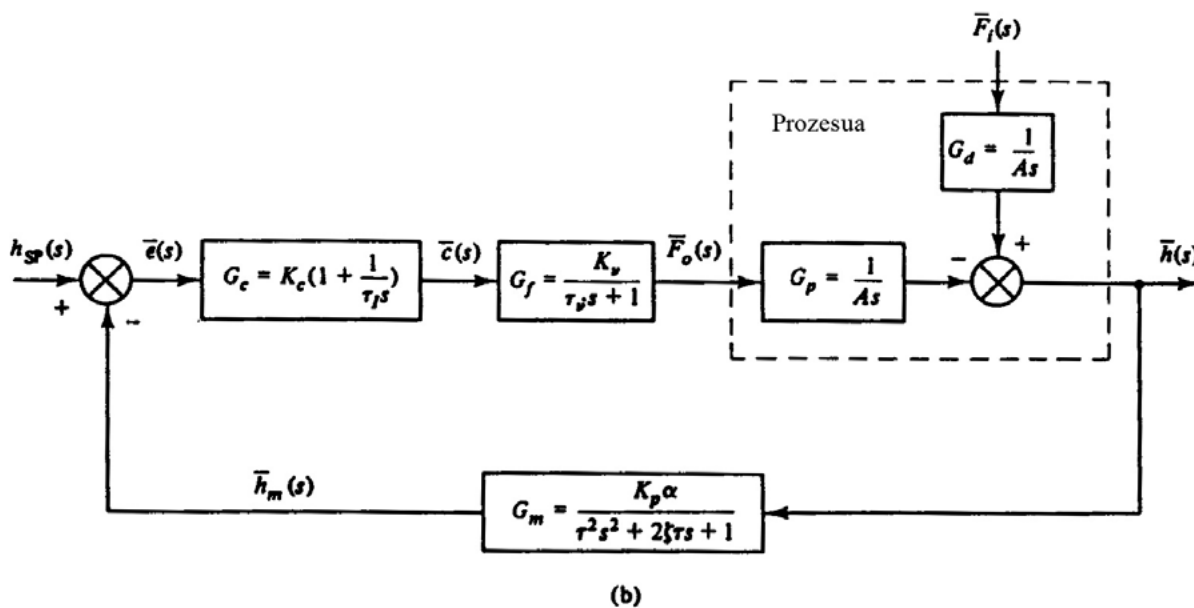
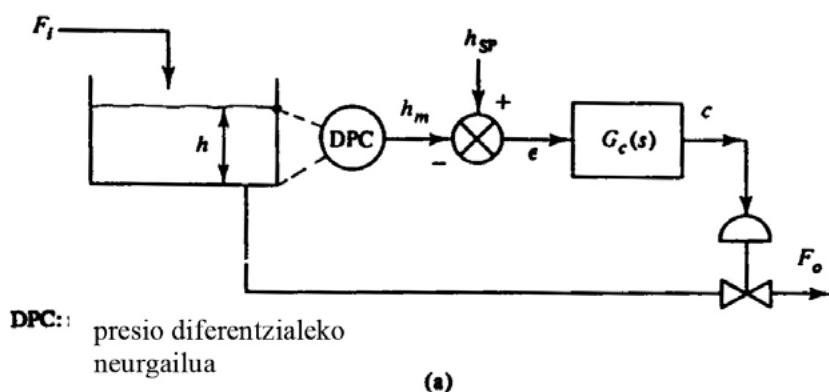
Har dezagun aintzat 11.3a irudiko tankerako mailaren kontrol sistema.  $h$  maila aldagai kontrolatua da,  $F_1$  perturbazio-aldagaia eta  $F_0$  aldagai manipulatua. Transferentzia-funtzioak honako hauek dira kontrol-begiztako elementu bakoitzerako:

Prozesua: materia-balantzeak, tankean, honako hau ematen du:

$$A \frac{dh}{dt} = F_i - F_o$$

eta, erraz, beste honetara hel daiteke:

$$\bar{h}(s) = \frac{1}{As} \bar{F}_i(s) - \frac{1}{As} \bar{F}_o(s) \quad (11.10)$$



11.3. irudia. Tanke bateko likido mailaren kontrolaren begizta itxia

Neurketa-elementua: ahalmen aldakorreko presio diferentzialeko transduttore bat izan daiteke, h altuerako likido zutabearen presioa neurtzen duena.  $\Delta p = \alpha h$  eginez, non  $\alpha$  konstante bat den, honako hau daukagu:

$$\tau^2 \frac{d^2z}{dt^2} + 2\zeta\tau \frac{dz}{dt} + z = K_p \Delta p = K_p \alpha h$$

non  $z = h_m$  (neurgailuak emandako balioa). Gero, sentsorearen transferentzia-funtzioa, honako hau izango da:

$$\bar{h}_m(s) = \frac{K_p \alpha}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} \bar{h}(s) \quad (11.11)$$

*Kontrolagailua:*  $h_{SP}$  kontsigna-puntua deituko diogu. Orduan,

$$\bar{\varepsilon}(s) = \bar{h}_{SP}(s) - \bar{h}_m(s)$$

eta PI kontrolagailu baterako:

$$\bar{c}(s) = K_c \left( 1 + \frac{1}{\tau_I s} \right) \bar{\varepsilon}(s) \quad (11.12)$$

*Kontrol-balbula:* demagun lehen ordenako sistema batek bezala erantzuten duela:

$$\bar{F}_o(s) = \frac{K_v}{\tau_v s + 1} \bar{c}(s) \quad (11.13)$$

11.3b irudiak sistemaren bloke-diagrama begizta itxian erakusten du. Likido mailaren erantzuna (11.5) ekuazioak emana dator, non transferentzia-funtzioak 11.3b irudian agertzen direnak diren. Servo arazoa  $F_i$  sarrerako emaria konstante mantentzen denean eta kontrolagailuaren kontsigna-puntua aldatzen dugunean gertatzen da. Orduan, kontrolagailuak eragiten du,  $h$  likidoaren maila  $h_{SP}$  kontsigna-puntuaren nahi den baliotik hurbil mantentzeko. Erregulatzaileraren arazoa kontsigna-puntua konstante mantentzen denean eta kontrolagailuak sarrerako  $F_i$  emariaren aldaketan eragina elimintzeko eragiten duenean sortzen da.

## 11.2. Begizta itxiko prozesu baten kontrol proportzionalaren eragina

Prozesu baten erantzuna aldatu egiten da edozein motatako akzioa duen kontrolagailu bat sartzen denean. Atal honetan, kontrolagailu proportzional bat ikusiko dugu eta zer-nolako eragina duen lehenengo eta bigarren ordenako sistemetan.

Prozesu baten erantzuna begizta itxian (11.5) ekuazioak ematen du. Analisia sinplifikatzeko,  $G_m(s) = G_f(s) = 1$  dela joko dugu. Kontrolagailu proportzional baterako,  $G_c(s) = K_c$ , eta (13.5) ekuazioa honela geratuko da:

$$\bar{y}(s) = \frac{G_p(s)K_c}{1 + G_p(s)K_c} \bar{y}_{SP}(s) + \frac{G_d(s)}{1 + G_p(s)K_c} \bar{d}(s) \quad (11.14)$$

*Lehen ordenako sistemak*

Lehen ordenako sistematarako, transferentzia-funtzioa begizta itxian:

$$\bar{y}(s) = \frac{K_p}{\tau_p s + 1} \bar{m}(s) + \frac{K_d}{\tau_p s + 1} \bar{d}(s)$$

non  $Gp(s) = \frac{K_p}{\tau_p s + 1}$  eta  $Gd(s) = \frac{K_d}{\tau_p s + 1}$  diren. Adierazpen horiek (11.14) ekuazioan ordezkatzuz:

$$\bar{y}(s) = \frac{K_p K_c}{\tau_p s + 1 + K_p K_c} \bar{y}_{SP}(s) + \frac{K_d}{\tau_p s + 1 + K_p K_c} \bar{d}(s)$$

Ekuazioa berrordenatuz, honako hau geratzen da:

$$\bar{y}(s) = \frac{K'_p}{\tau'_p s + 1} \bar{y}_{SP}(s) + \frac{K'_d}{\tau'_p s + 1} \bar{d}(s) \quad (11.15)$$

non

$$\tau'_p = \frac{\tau_p}{1 + K_p K_c} \quad (11.16a)$$

$$K'_p = \frac{K_p K_c}{1 + K_p K_c} \quad (11.16b)$$

$$K'_d = \frac{K_d}{1 + K_p K_c} \quad (11.16c)$$

$K'_p$  eta  $K'_d$  parametroak irabazi estatikoak dira begizta itxian. (11.15) ekuaziotik ondoriozta daiteke lehen ordenako sistema batek begizta itxian kontsigna-puntuaren eta kargaren aldaketek ematen dien erantzunak lehen ordenakoa izaten jarraitzen duela; denbora konstantea txikitu egin da ( $\tau'_p < \tau_p$ ), eta horrek esan nahi du erantzuna begizta itxian azkarragoa dela begizta irekian baino; irabazi estatikoak ere txikitu egin dira.

Kontrolagailu proportzionalaren eragina hobeto ikusteko, sistemaren erantzuna analiza dezakegu begizta itxian, kontsigna-puntuan edo kargan maila erako aldaketak ageri direnean. Servo arazoa sortuz gero,  $\bar{y}_{SP}(s) = 1/s$  eta  $\bar{d}(s) = 0$ . (11.15) ekuazioa honela geratuko da:

$$\bar{y}(s) = \frac{K'_p}{\tau'_p s + 1} \frac{1}{s}$$



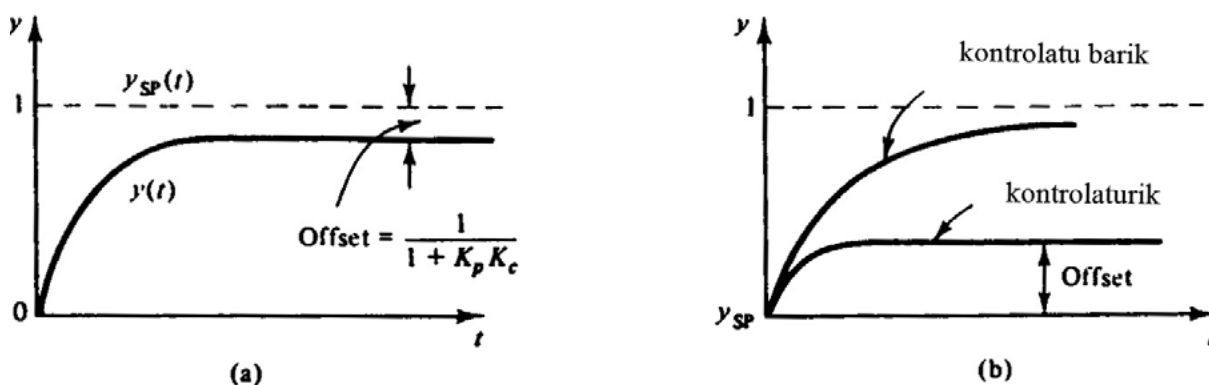
Denboraren domeinuan, horrek honako hau ematen du:

$$y(t) = K'_p (1 - e^{-t/\tau'_p}) \quad (11.17)$$

11.4a irudian, erakusten da sistemak nola erantzuten dion begizta itxian kontsigna-puntuaren maila unitario bati. Ikusten dugu ez dela lortzen kontsigna-puntuaren nahi den balioa  $t \rightarrow \infty$  jotzen duenean. Alde horri *Offset* deitzen zaio. *Offseta* kontsigna-puntuaren balioaren eta erantzunaren bukaerako balioaren arteko aldea da. Kasu honetan:

$$\text{offset} = 1 - K'_p = 1 - \frac{K_p K_c}{1 + K_p K_c} = \frac{1}{1 + K_p K_c}$$

*Offseta* kontrol proportzionalaren ezaugarri karakteristikoa da. Txikitu egiten da  $K_c$  handitzean, eta zerorantz jotzen du  $K_c$ -k infiniturantz jotzen duenean.



**11.4. irudia.** Lehen ordenako sistemen erantzunak kontrol proportzionalarekin begizta itxian.  
A) kontsigna-puntuko maila-aldaketa; b) kargako maila-aldaketa

Erregulatzaila-arazoaren kasuan,  $\bar{y}_{SP}(s) = 0$ . Jotzen badugu kargan maila unitarioko aldaketa dagoela,  $[\bar{d}(s) = 1/s]$ , (11.15) ekuazioa honako hau bihurtzen da:

$$\bar{y}(s) = \frac{K'_d}{\tau'_p s + 1} \frac{1}{s}$$

Denboraren domeinuan,  $y(t) = K'_d (1 - e^{-t/\tau'_p})$ . 11.4b irudian erantzun hori erakusten da. Lehengo kasuan bezala, ikusten da ez dela lortzen nahi den kontsigna-puntuaren balioa. Kasu horretan, *offsetak* honako hau balio du:

$$\text{offset} = 0 - K'_d = -\frac{K_d}{1 + K_p K_c}$$

Kontrolagailuaren irabazia gehitzean ( $K_c$ ) *offseta* txikitzen da eta, teorikoki, zerorantz jotzen du irabaziak infiniturantz jotzean.

*Offsetak* zerorantz jotzen duela ikusi den arren, kontrolagailuaren irabazia gehitzean, praktikan ez dira oso irabazi altuak erabiltzen egonkortasun-arazoak direla eta.

Beren transferentzia-funtzioan  $1/s$  terminoa duten prozesuek ez dute *offsetik* akzio proportzionalak kontrolatzen dituzenean eta kontsigna-puntuan aldaketa bat jasaten dutenean, baina, kargan aldaketa dagoenean, aldiz, badute *offseta*. Hori frogatuko duen adibide bat ikusiko dugu.

Har dezagun aintzat mailaren kontrol-sistema bat tanke batean. Irteerako  $F_0$  emaria konstantea da eta maila sarrerako  $F_i$  emaria manipulaturik kontrolatzen da. Perturbazioa  $F_d$  emaria da. Materia-balantze batek honako hau ematen du tankean:

$$A \frac{dh'}{dt} = F_i' + F_d'$$

Eta Laplaceren domeinuan:

$$\bar{h}'(s) = \frac{1}{As} \bar{F}_i'(s) + \frac{1}{As} \bar{F}_d'(s)$$

Orduan,

$$G_p(s) = \frac{1}{As}$$

Demagun kontrolagailu proportzional bat dugula eta  $G_m = G_f = 1$  dela.

Transferentzia-funtzioa, begizta itxian, honako hau izango da:

$$\bar{h}'(s) = \frac{1}{\frac{A}{K_c} s + 1} \bar{h}'_{SP}(s) + \frac{1/K_c}{\frac{A}{K_c} s + 1} \bar{F}_d'(s)$$

Kontsigna-puntuan maila unitarioko aldaketa bat ageri denean  $\bar{h}'_{SP}(s) = 1/s$  eta  $\bar{F}_d'(s) = 0$ , gero:

$$\bar{h}'(s) = \frac{1}{\frac{A}{K_c} s + 1} \frac{1}{s}$$

Bukaerako balioaren teorema aplikatuz:

$$h'(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [s \bar{h}'(s)] = 1$$

Gero,

$$\text{offseta} = h'_{SP} - h'(t \rightarrow \infty) = 1 - 1 = 0$$

Kargan maila unitarioko aldaketa bat ageri denean:

$$\bar{h}'(s) = \frac{1/K_c}{\frac{A}{K_c}s+1} \frac{1}{s}$$

Bukaerako balioaren teorema aplikatuz:

$$h'(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [s \bar{h}'(s)] = 1/K_c$$

Gero,

$$\text{offseta} = 0 - 1/K_c = -1/K_c$$

### Bigarren ordenako sistemak

Bigarren ordenako prozesu baterako transferentzia-funtzioa honako hau da:

$$G_p(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{m}(s)} = \frac{K_p}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1}$$

Adierazpen hori (11.14) ekuazioan ordezkaturik eta servo arazoa  $[\bar{d}(s) = 0]$  suposatuz, honako hau dugu:

$$\bar{y}(s) = \frac{K'_p}{\tau'^2 s^2 + 2\xi'\tau' s + 1} \bar{y}_{SP}(s) \quad (11.18)$$

non

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 + K_p K_c}} \quad (11.19a)$$

$$\xi' = \frac{\xi}{\sqrt{1 + K_p K_c}} \quad (11.19b)$$

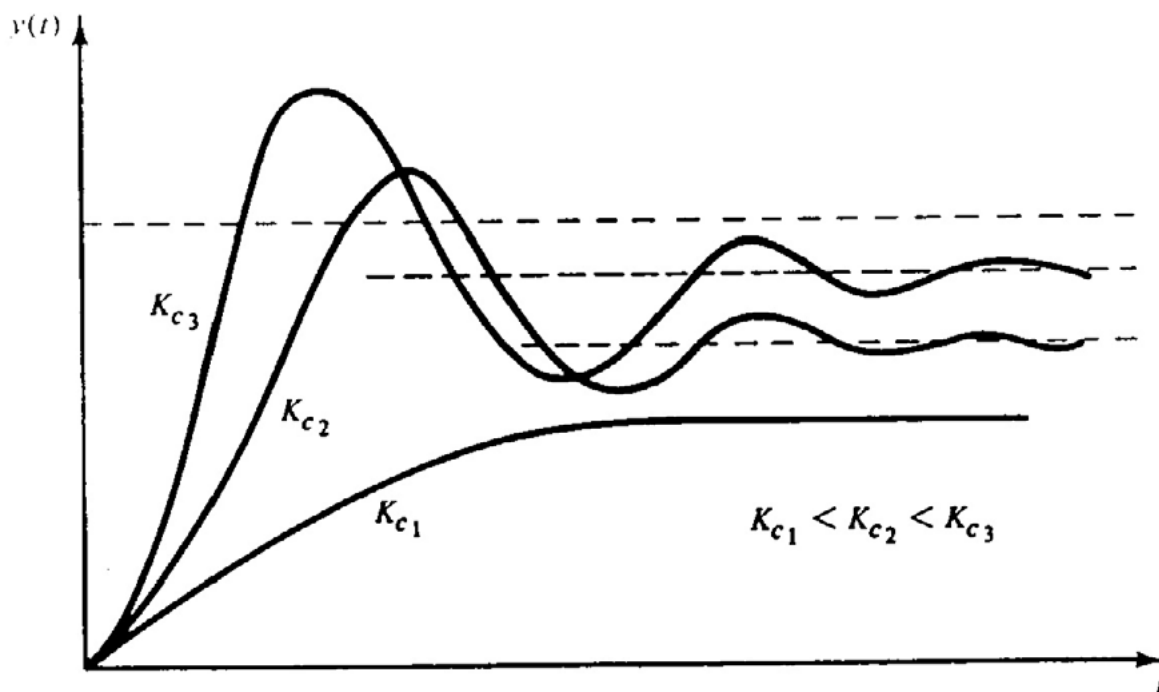
$$K'_p = \frac{K_p K_c}{1 + K_p K_c} \quad (11.19c)$$

Kontrol proportzionala duen bigarren ordenako sistema baten erantzunak, begizta itxian, bigarren ordenakoa izaten jarraitzen du; irabazi estatikoa txikitu egiten da eta periodo naturala eta indargetze-faktorea ere txikitu egiten dira. Horrek esan nahi du gainindargeturik dagoen prozesu bat azpiindargetu bihur daitekeela,  $\zeta$ -ren balioaren arabera.

$\xi$ '-rekiko independenteki,  $y(t)$ -ren bukaerako balioa bukaerako balioaren teorema eman etorriko da, gero:

$$y(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [s \bar{y}(s)] = K'_p = \frac{K_p K_c}{1 + K_p K_c}$$

Gero, berriro dugu *offset* bat. 11.5 irudian, erantzun horien ezaugarriak erakusten dira  $K_c$ -ren balioaren arabera.  $K_c$  zenbat eta handiagoa izan, *offseta* txikiagoa da, baina baita  $\zeta'$  ere, eta, horren ondorioz, erantzuna gero eta gorabeheratsuagoa izango da.



**11.5. irudia.** Kontrolagailuaren irabaziaren eragina kontrol proportzionala duen bigarren ordenako sistema baten erantzunean begizta itxian

### 11.3. Kontrol-ekintza integralaren eragina

1. ordenako sistema baterako servo kasua azalduko da.

Oro har, servo arazoa honako adierazpen honek emana etorriko da:

$$\bar{y}(s) = \frac{G_p(s) G_f(s) G_c(s)}{1 + G_p(s) G_f(s) G_c(s) G_m(s)} \bar{y}_{SP}(s) \quad (11.20)$$

Simplifikatzeko,  $G_m = G_f = 1$  dela joko dugu. 1. ordenako sistema baten kasuan,  $G_p = \frac{K_p}{\tau_p s + 1}$ , eta kontrol-ekintza integralerako,  $G_c = K_c \frac{1}{\tau_I s}$ .  $G_m$ ,  $G_p$ ,  $G_c$  eta  $G_f$  (11.20) ekuazioan ordezkatzuz, honako hau daukagu:

$$\bar{y}(s) = \frac{\left(\frac{K_p}{\tau_p s + 1}\right)\left(K_c \frac{1}{\tau_I s}\right)}{1 + \left(\frac{K_p}{\tau_p s + 1}\right)\left(K_c \frac{1}{\tau_I s}\right)} \bar{y}_{SP}(s)$$

edo

$$\bar{y}(s) = \frac{1}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} \bar{y}_{SP}(s) \quad (11.21)$$

non

$$\tau = \sqrt{\frac{\tau_I \tau_p}{K_p K_c}} \quad (11.22a)$$

$$\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\tau_I}{\tau_p K_p K_c}} \quad (11.22b)$$

(11.21) ekuazioak adierazten du akzio integralak erantzunaren ordena handitu egiten duela begizta itxian. Kontrolatu gabeko 1. ordenako prozesu baterako, erantzuna bigarren ordenakoa da begizta itxian. Gainera, ikusi da sistema baten ordena handitzean haren erantzuna motelagoa dela; ondorioz, akzio integralak sistema baten erantzuna, begizta itxian, motelarazi egiten du.

Ikus dezagun sistemak nola erantzuten dion kontsigna-puntuan mailakatze unitarioko alda-keta bati. (11.21) ekuaziotik, honako hau izango dugu:

$$\bar{y}(s) = \frac{1}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} \frac{1}{s}$$

$y(t)$  erantzunaren itxura  $\xi$ -ren balioaren menpekoa da, baina erantzunaren bukaerako balioa bukaerako balioaren teorema erabiliz kalkula daiteke:

$$y(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [s \bar{y}(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} \right] = 1$$

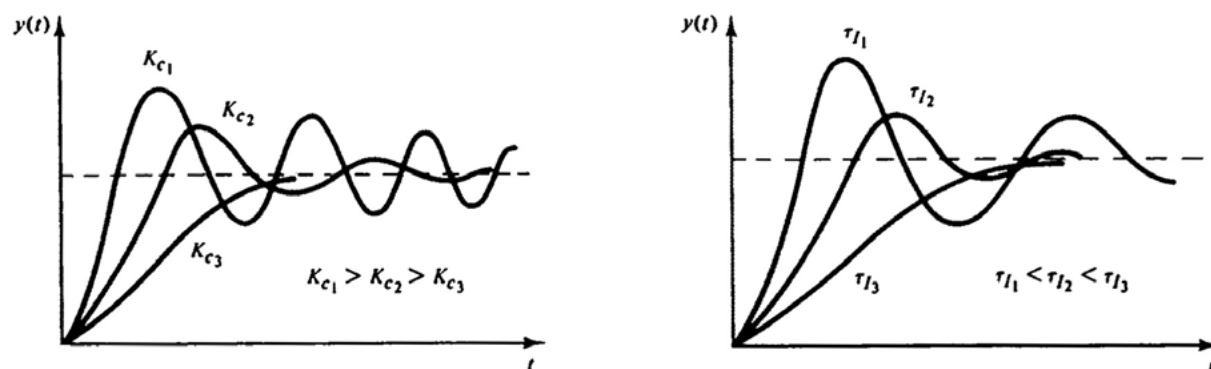
Gero

$$offseta = 1 - 1 = 0.$$

Akzio integralak *offseta* eliminatzen du.

(11.22b) ekuazioak adierazten du erantzunaren itxura kontrolagailuaren irabaziaren ( $K_c$ ) eta denbora integralaren ( $\tau_I$ ) balioen menpekoea dela begizta itxian. Halaber, ikusten da  $K_c$  handitzean  $\xi$  txikitu egiten dela, eta horrek erantzun azkarragoak baina gorabeheratsuagoak sortzen ditu, eta, hala, gaindikina eta bigarren eta lehenengo gaindikinarekin arteko erlazioa (decay ratio) handitu. Horrez gain, ikusten da  $\tau_I$  txikitzen denean  $\xi$  txikitu egiten dela eta aipatu berri direnak ditu ondorio. Laburbilduz, esan daiteke akzio integrala handituz ( $K_c$  handitzea eta/edo  $\tau_I$  txikitzea) sisteman erantzuna begizta itxian sentikorrago bihurtzen dela.

11.6 irudian, grafikoki erakusten dira ondorio horiek:



**11.6. irudia.** Kontrol integrala duten 1. ordenako sistemen erantzunetan irabaziak eta denbora integralak zer-nolako eragina duten begizta itxian

#### 11.4. Kontrol-ekintza deribatuaren eragina

Akzio deribatua duen kontrolagailu baten kasuan,  $G_c = K_c \tau_D s$  bakarrik dugu. Lehen bezala  $G_m = G_f = 1$  dela joz sinpletasunez, honako ekuazio honek emango du kontrol-ekintza deribatua duen 1. ordenako sistema baten erantzuna, begizta itxian:

$$\bar{y}(s) = \frac{\left(\frac{K_p}{\tau_p s + 1}\right)(K_c \tau_D s)}{1 + \left(\frac{K_p}{\tau_p s + 1}\right)(K_c \tau_D s)} \bar{y}_{SP}(s)$$

edo

$$\bar{y}(s) = \frac{K_p K_c \tau_D s}{(\tau_p + K_p K_c \tau_D) s + 1} \bar{y}_{SP}(s) \tag{11.23}$$

(11.23) ekuaziotik ondorioztatzen da kontrol-ekintza deribatuak ez duela erantzunaren ordena aldatzen. Halaber, ikusten da erantzunaren denbora-konstante efektiboa begizta itxian  $\tau_p$  baino handiagoa dela; gero, prozesu kontrolatuaren erantzuna 1. ordenako jatorrizko prozesuarena baino motelagoa izango da.

Bigarren ordenako prozesu baten kasuan, erantzunaren frekuentzia naturala begizta itxian konstante mantentzea lortzen da; indargetze-faktore berria, berriz, jatorrizkoa baino handiagoa da, eta horrek erantzuna indargetzen du. Indargetze hori handitu egiten da  $K_c$  edo  $\tau_D$  handitzean, eta horrek prozesu kontrolatuaren portaera sendoazten du.

### 11.5. Kontrol-ekintza konbinatuen eragina

Normalean, kontrolagailuak PI edo PID izaten dira. Ekintza proportzionala eta integrala (PI) konbinatuz, sistemaren erantzunaren ordena handitu egiten da begizta itxian (akzio integralaren eragina) eta *offseta* eliminatu egiten da (akzio integralaren eragina). Beste alde bateatik,  $K_c$  handitzean, erantzuna azkarragoa da (akzio proportzional eta integralaren eragina) eta gorabeheratsuagoa kontsigna-puntuaren aldaketekiko (akzio integralaren eragina).  $\tau_I$  txikitzean,  $K_c$  konstante mantenduz, erantzuna azkarragoa da, baina gorabeheratsuagoa (akzio integralaren eragina).

Oinarrizko hiru kontrol-ekintzak konbinatuz (PID), PI kontrol motan atzemandako ezaugarri dinamiko berak dituen erantzuna sortzen da begizta itxian. Akzio deribatua sistema egonkortzeko joera du. Akzio integrala egonda, sistemaren erantzuna motelazten da begizta itxian. Abiadura onargarria lortzeko,  $K_c$  handitu dezakegu, baina erantzuna gorabeheratsuagoa da eta sistema ezegonkorra izatea eragin dezake; akzio deribatua sartuz ekidingo dugu hori. Hala,  $K_c$  irabaziaren balio egokia aukeratu dezakegu, erantzun-abiadura egokia lortzeko sistemak gorabehera handirik izan gabe.

### 11.6. Egonkortasun kontzeptua eta irizpidea

Sistema bat egonkorra da baldin eta balio-tarte jakin bat duen edozein sarreratarako balio-tarte baten barnean erantzuna ematen badu. Sistema batek ez badu balio-tarte jakin baten barnean erantzuna ematen sarrerak balio-tarte bat duenean, esango dugu ezegonkorra dela.

Balio-tarte bat duen funtzio bat beti muga jakin batzuen artean dagoen denboraren funtzio bat da. Adibidez, funtzio mailakatuak, bulkada-funtzioak eta funtzio sinusoidalak balio-tarte bat dute.  $f(t) = t$  funtzioa ez dago balio-tarte batean mugatuta. Sistema ezegonkorraren definizio hori ikuspegi matematiko batean bakarrik da egia. Sistema fisikoek beti dituzte mugak, eta, ondorioz, erantzun guztiak daude mugatuta.

Oro har, kontrol-sistemetan ez da nahikoa horiek egonkorak diren ala ez jakitea (egonkortasun absolutua). Beharrezkoa da jakitea zein den ezegonkortasunerako hurbiltze maila, hau da, egonkortasun erlatiboaren maila. Halaber, sistema bat egonkortasunaren muga dagoenean esaten da marjinalki egonkorra dela.

Normalean, prozesu kimikoak egonkorak izaten dira. Kontrolagailua egonda, begizta itxian, kontrol-begiztaren erantzuna ezegonkorra izan daiteke, kontrolagailuen konstanteen balioak zein diren.

*Ekuazio karakteristikoa*

Egonkortasun-irizpide sinpleago bat definitzen saiatuko gara. Berrelikadura duen kontrol-sistema baten erantzuna, begizta itxian, (11.5) ekuazioak emana dator, eta honela adieraz daiteke:

$$\bar{y}(s) = \frac{G}{1+GG_m} \bar{y}_{SP}(s) + \frac{G_d}{1+GG_m} \bar{d}(s) \quad (11.24)$$

non  $GG_m$  begizta irekian transferentzia-funtzioa den.

$1 + GG_m = 0$  adierazpena kontrol-begiztaren ekuazio karakteristikoa deitzen da. Kontrol-sistema lineal bat ezegonkorra da bere ekuazio karakteristikokoaren erroren bat ardatz irudikarian edo haren eskuinean badu (hau da, parte erreal ez-negatiboa duen erroren bat badu). Hori gertatzen ez bada, sistema egonkorra da.

Ekuazio karakteristikoa berdina da kontsigna-puntuaren edo kargaren aldaketetarako.



## 12. gaia

# Routh-en irizpidea eta erroen kokapena

### 12.1. Routhen egonkortasun-irizpidea

Ekuazio karakteristikoaren zenbat errok duten parte erreal positiboa determinatzeko metodo aljebraikoa da Routhen irizpidea. Hortik determinatu daiteke sistema egonkorra den ala ez. Irizpide hori ekuazio karakteristiko polinomikoak dituzten sistemetara mugaturik dago. Beraz ezin da erabili atzerapena edo alfer-denbora duten sistemetarako.

Erroak aztertzeko prozedura ekuazio karakteristikoa honela idatziz hasten da:

$$a_0s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \dots + a_n = 0 \quad (12.1)$$

non  $a_0$  positiboa den (ez bada bi aldeak -1gatik biderkatzen dira). Erroek parte erreal positiborik ez badute, *beharrezkoa da*  $a_0, a_1, \dots, a_n$  koefiziente guztiak positiboak izatea. Koefizienteren bat negatiboa bada, sistema ezegonkorra da. Koefiziente guztiak positiboak badira, sistema egonkorra edo ezegonkorra izan daiteke. Hori determinatzeko, koefizienteak Routhen matrizearen lehenengo bi ilarak osatuz kokatu behar dira.

	Ilara		
1	$a_0$	$a_2$	$a_4 \ a_6$
2	$a_1$	$a_3$	$a_5 \ a_7$
3	$b_1$	$b_2$	$b_3$
4	$c_1$	$c_2$	$c_3$
5	$d_1$	$d_2$	
6	$e_1$	$e_2$	
7	$f_1$		
n+1	$g_1$		

Oro har, n+1 ilara daude. n bikoitia bada, lehenengo ilarak bigarrenak baino elementu bat gehiago du. Beste ilaretako elementuak honako adierazpen hauetatik eratzen dira:

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \quad b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} \quad c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$$

.....

Ilara bateko elementuak aurreko bi ilaretako elementuetatik lortzen dira. Routh-en matrizea izanda, honako teorema hauek aplikatzen dira sistemaren egonkortasuna determinatzeko:

1. Sistema egonkorra izateko, beharrezkoa eta nahikoa den baldintza bat (ekuazio karakteristikoko erro guztiek parte erreal negatiboa izatea) dugu: matrizeko lehenengo zutabeko elementu guztiak positiboak eta zero ez izatea.
2. Lehenengo zutabeko elementuren bat negatiboa bada, parte erreal positiboa duten erroen kopurua, lehenengo zutabean, zeinu-aldaketan kopuruaren berdina da.
3. Erro pare bat ardatz irudikarian badago (parte erreal nulua) eta gainerako erroek parte erreal negatiboa badute, n. lerroko elementu guztiak nuluak izango dira eta aurreko ilarako elementu bat ere ez da nulua izango. Erro irudikari parearen kokapena  $Cs^2 + D = 0$  ekuazioa ebatziz kalkula daiteke, non C eta D (n - 1) lerroko elementuak diren ezkerretik eskuinera irakurrita, hurrenez hurren.

Routhen matrizea eraikitzean, zailtasunen bat aurki dezakegu. Adibidez, matrizeko bi lerro jarraitu proportzionalak badira elementuz elementu, hurrengo ilara nulua izango da. Matrizea ebazteko, zeroen lerroa aurreko lerroko polinomioaren s-rekiko deribatuarekin ordezkatu behar da.

Beste arazo bat lerro baten lehenengo terminoan zero bat agertzea izaten da. Zenbaki positibo baxu batekin ordezkatzuz egin daiteke aurrera.

### 12.1. Adibidea

$s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 4s + 2 = 0$  ekuazio karakteristikoa emanik, Routhen irizpidearen arabera egonkortasuna determinatu.

Koefiziente guztiak positiboak direnez, sistema egonkorra izan daiteke. Hori ikusteko, Routhen matrizea eraikiko dugu:

	Ilara		
1	1	5	2
2	3	4	
3	11/3	6/3	
4	26/11	0	
5	2		

Matrizeko elementuak aipatu berri den moduan kalkulatu dira. Lehenengo zutabean ez dagoenez zeinu-aldaketarik, esan daiteke erro guztiek parte erreal negatiboa dutela, eta sistema egonkorra da.

## 12.2. Adibidea

Honako ekuazio karakteristikoko hau emanda,  $K_c$ -ren balioa determinatu, zeinerako kontrol-sistema egonkorra den:

$$\frac{1}{6}s^3 + s^2 + \frac{11}{6}s + (1 + K_c) = 0$$

Koefiziente guztiak positiboak direnez, sistema egonkorra izan daiteke. Hori ikusteko, Routhen matrizea eraikiko dugu.

	Ilara	
1	1/6	11/6
2	1	(1 + $K_c$ )
3	10 - $K_c$ /6	
4	1 + $K_c$	

$K_c$  positiboa denez,  $K_c < 10$  bada bakarrik izango da kontrol-sistema egonkorra.

Routhen irizpideak bi muga ditu: ekuazio karakteristikoa polinomiala duten sistematarako bakarrik da aplikagarria eta ez du informaziorik ematen erroen kokapenari buruz eta, batez ere, ardatz irudikarirako beren hurbiltasunari buruz. Informazio hori lortzeko, metodo asko daude; gai honetan eta hurrengoan ikusiko ditugu. Metodo horiek grafikoak dira eta erabiltzeko errazak; oinarrian, erroen kokapenaren metodoa eta frekuentzietikiko erantzunaren metodoak dira.

## 12.2. Erroen kokapenaren kontzeptua

Erroen kokapena metodo grafiko bat da ekuazio karakteristikokoaren ( $1 + G = 0$ ) erroen balioak aurkitzeko, baldin eta  $G$ -ren parametroetako bat era jarraian aldatzen bada. Parametro hori kontrol-lagailuaren irabazia ( $K_c$ ) izango da.

Ikus dezagun erroen kokapenaren kontzeptua adibide batekin. Har dezagun aintzat kontrol-sistema bat begizta itxian:

$$G_c = K_c \quad G_p = \frac{1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad G_m = \frac{1}{\tau_3 s + 1} \quad G_f = 1$$

Kasu horretan, transferentzia-funtzioa, begizta irekian, honako hau izango da:

$$G = \frac{K_c}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1)} \quad (12.2)$$

honela idatz daiteke:

$$G(s) = \frac{K}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)} \quad (12.3)$$

non

$$K = \frac{K_c}{\tau_1 \tau_2 \tau_3} \quad p_1 = -\frac{1}{\tau_1} \quad p_2 = -\frac{1}{\tau_2} \quad p_3 = -\frac{1}{\tau_3}$$

$p_1, p_2, p_3$  terminoak transferentzia-funtzioaren poloak dira begizta irekian.  $G(s)$ -ren polo bat  $s$ -ren balio bat da,  $G(s)$  infiniturantz joanarazten duena.

Sistemaren ekuazio karakteristikoa honela idatz daiteke:

$$1 + \frac{K}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)} = 0 \quad (12.4)$$

Ekuazio hori honela idatz daiteke:

$$(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3) + K = 0 \quad (12.5)$$

Adibidean jotzen badugu  $\tau_1 = 1, \tau_2 = 0.5$  eta  $\tau_3 = 1/3$  direla, honako hau dugu:

$$(s+1)(s+2)(s+3) + K = 0, \quad K = 6K_c \text{ izanik,}$$

Adierazpen hori hedatuz, honako hau dugu:

$$s^3 + 6s^2 + 11s + (K+6) = 0 \quad (12.6)$$

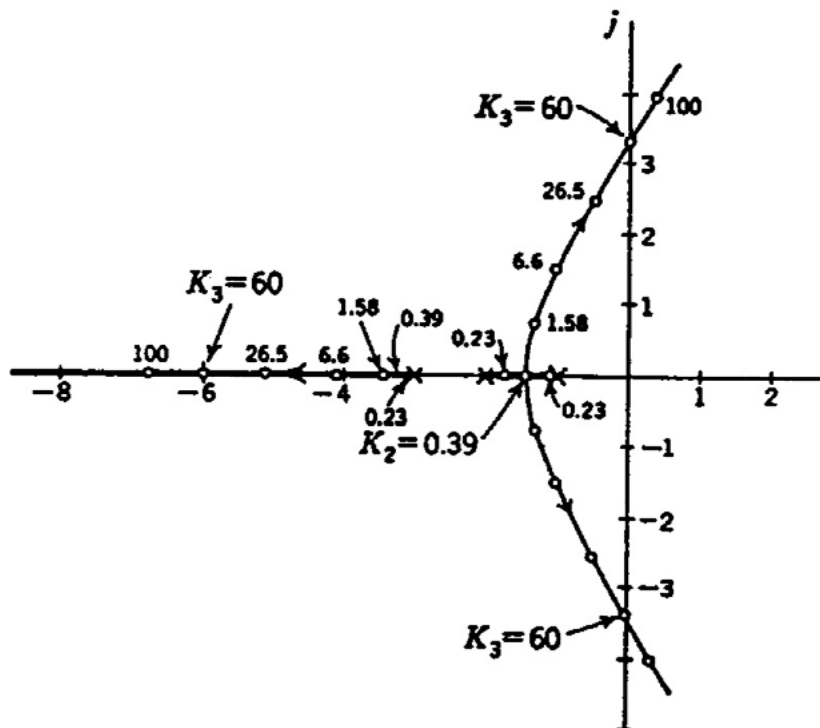
hiru ordenakoa dena.  $K_c$ -ren balio baterako ekuazio karakteristikokoaren erroak kalkula daitezke. 12.1 taulan, emaitzak erakusten dira  $K_c$ -ren balioetarako.

**12.1. taula.**  $(s+1)(s+2)(s+3) + K = 0$  ekuazio karakteristikokoaren erroak

$K = 6K_c$	$r_1$	$r_2$	$r_3$
0.00	-3.00	-2.00	-1.00
0.23	-3.10	-1.75	-1.15
0.39	-3.16	-1.42	-1.42
1.58	-3.45	-1.28 - 0.75j	-1.28 + 0.75j
6.6	-4.11	-0.95 - 1.5j	-0.95 + 1.5j
26.5	-5.10	-0.45 - 2.5j	-0.45 + 2.5j
60.0	-6.00	0.0 - 3.32j	0.0 + 3.32j
100.0	-6.72	0.35 - 4.0j	0.35 + 4.0j

Hiru erroak plano konplexuan adieraz ditzakegu  $K$ -ren balioetarako. Diagrama horri erroen kokapena deitzen zaio eta 12.1 irudian erakusten da. Hiru erroei dagozkien hiru adar daude eta

adar horiek transferentzia-funtzioaren poloetatik irteten dira begizta irekian  $(-1, -2, -3)$ . Erroen kokapenaren diagrama simetrikoa da ardatz errealekiko; beraz, goiko aldea ezagutzea bakarrik da beharrezkoa. Hori horrela da sistema fisiko errealean denbora-konstanteak errealak direlako, eta ekuazio karakteristikoaren erro konplexuek bikote konjokatu gisa agertu behar dute.



12.1. irudia. Erroen kokapenaren diagrama

Diagrama horiek abantaila dute; izan ere, kontrolagailuaren irabazia zenbat aldatzen den, erantzunaren izaeraren ideia bat ematen dute. 12.1 irudiak  $K$ -ren balio kritikoak erakusten ditu. Bat  $K_2$  da, non erroetako bi berdinak diren, eta bestea  $K_3$  da, non erroetako bik parte irudikaria bakarrik duten. Erroek parte erreala bakarrik badute,  $K < K_2$ rako gertatzen den bezala, erantzuna ez-gorabeheratsua da. Erroetako bi konplexuak badira parte erreal negatiboarekin ( $K_2 < K < K_3$ ), erantzuna gorabeheratsua izango da.  $K > K_3$  bada, erroetako bi konplexuak dira parte erreal positiboarekin eta erantzuna anplitude gorakorreko uhina izango da.

### 12.3 Erroen kokapena eraikitzea

Erroen kokapenaren diagrama eraikitzeko, sistemaren transferentzia-funtzioa begizta irekian era estandarrean idaztea da lehenengo pausoa:

$$G = K \frac{N}{D},$$

non  $K$  konstante bat den,

$$N = (s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m) \text{ eta } D = (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n).$$

$z_i$  terminoa transferentzia-funtzioaren zero bat da begizta irekian, eta  $p_i$ , berriz, polo bat da. Zero bat  $G(s)$  zero izanarazten duen edozein balio da.

$G$  idazteko era hori erabiliz, ekuazio karakteristikoa honela idatz daiteke:

$$1 + K \frac{N}{D} = 0 \quad (12.7)$$

$n \geq m$  dela joko da, eta hori egia da sistema fisiko guztietarako. Ekuazio karakteristikoa

$$K \frac{N}{D} = -1$$

moduan berridatz daiteke. Poloen eta zeroen terminoetan, honela geratuko da:

$$K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} = -1 \quad (12.8)$$

Ezkerreko terminoa oro har konplexua denez, ekuazio hori baliokidea den modulu- eta argu-mentu-itxuran idatz dezakegu. Honela:

$$K \frac{|s - z_1| |s - z_2| \dots |s - z_m|}{|s - p_1| |s - p_2| \dots |s - p_n|} = 1 \quad (12.9)$$

$$\arg(s - z_1) + \arg(s - z_2) + \dots + \arg(s - z_m) - [\arg(s - p_1) + \arg(s - p_2) + \dots + \arg(s - p_n)] = (2i + 1)\pi \quad (12.10)$$

non  $i$  zenbaki osoa (positiboa edo negatiboa) edo zero den. (12.9) eta (12.10) ekuazioak, erroen kokapena haztatuz kalkulatzeko erabil daitezke. Kokapenaren kurba (12.10) ekuaziotik kalkula daiteke, eta  $K$ -ren independentea da. Kurba marraztu eta gero,  $K$  irabazia lor daiteke kurba horren edozein puntutarako, (12.9) ekuaziotik.

Jarraian, arau multzo bat ikusiko dugu, erroen kokapenaren nondik norako bat egiten laguntzeko:

Erroen kokapenaren diagrama marrazteko arauak (berrelikadura negatiboa):

1. Kokapen edo adar kopurua poloen kopuruaren berdina da begizta irekian,  $n$ .
2. Adarrak poloetatik ateratzen dira begizta irekian eta zeroetan bukatzen dute begizta irekian.  $(n-m)$  kokapenen bukaera infinituan gertatuko da jarraian ikusiko ditugun asintota batzuei jarraituz.  $q$  ordenako polo baten kasuan, handik irteten diren  $q$  leku daude.  $q$  ordenako zero baterako, han bukatzen duten  $q$  leku daude.
3. Ardatz erreala erroen kokapenaren parte da, ardatz errealaren puntu batetik eskuinerantz poloen eta zeroen batura bakoitia bada. Parte irudikaria ez duten zeroak eta poloak bakarrik hartu behar dira kontuan, besteak beti bikoteka agertzen baitira.  $q$  ordenako polo edo zero bat  $q$  aldiz zenbatu behar da aurreko araua aplikatzen denean.  $(n - m)$  toki daude asintotikoki lerro zuzenetara hurbiltzen direnak ( $K$ -k infiniturantz jozten duenean), begizta irekian transferentzia-funtzioaren zero eta poloen grabitate zentrotik irteten direnak. Grabitatearen zentro hori honako ekuazioak emana dator:

$$\gamma = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} \quad (12.11)$$

Lerro asintotiko horiek, ardatz errealekin,  $\pi[(2k + 1)/(n - m)]$ -ko angeluak osatzen dituzte eta  $2\pi/(n - m)$  angelu-aldeekin tartekaturik daude, non  $k = 0, 1, 2, \dots, n - m - 1$  den.

4. Ondorengo ekuazioaren honako soluzio honek adierazten du zein puntutan gurutzatzen eta ardatz errealetik irteten (edo sartzen) diren, ardatz errealean elkarren ondoan dauden poloetatik irteten (edo elkarren ondoan dauden zeroetara mugitzen) diren 2 adar:

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{s - z_i} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{s - p_j} \quad (12.12)$$

Adar horiek ardatz errealetik irteten (edo sartzen) dira, eta  $\pm\pi/2$ -ko angeluak osatu. (12.12) ekuazioa haztatuz ebatzen da ardatz errealeko  $s = s_c$  hainbat puntu probatuz intereseko poloen (edo zeroen) artean.

5.  $q$  ordenako polo bakoitzetik irteten diren  $q$  adar daude begizta irekian, eta honako adierazpen honek emandako angeluak osatzen dituzte:

$$\theta = \frac{1}{q} [(2k + 1)\pi + \sum_{j=1}^n \arg(p_a - z_i) - \sum_{i=1}^m \arg(p_a - p_j)] \quad (12.13)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, q - 1$$

non  $p_a$   $q$  ordenako polo bat den. Asintotetara hurbiltzen ez den  $m$  adar bakoitzak  $m$  zeroetakoren batean bukatuko du. Zero horietara jotzen dute eta honako ekuazio honek emandako angeluak osatu:

$$\theta = \frac{1}{v} [(2k + 1)\pi + \sum_{j=1}^n \arg(z_b - p_j) - \sum_{i=1}^m \arg(z_b - z_i)] \quad (12.14)$$

non  $z_b$   $v$  ordenako zero bat den. Ardatz errealean dauden 1 ordenako polo edo zeroetarako, irteerako edo helmugako angelua  $0$  edo  $\pi$  izango da.

Prozesu kimikoen kontrol-sistemetak transferentzia-funtzio gehienek, begizta irekian, ardatz errealean dituzte beren poloak. Ezohiko kasuetan, neurketa-elementua bigarren ordenakoa denean, transferentzia-funtzioak, begizta irekian, polo konplexuak izango ditu, baina, nagusi diren poloeetatik, oso urruti kokaturik egoten dira, eta, beraz, baztertu egin daitezke.

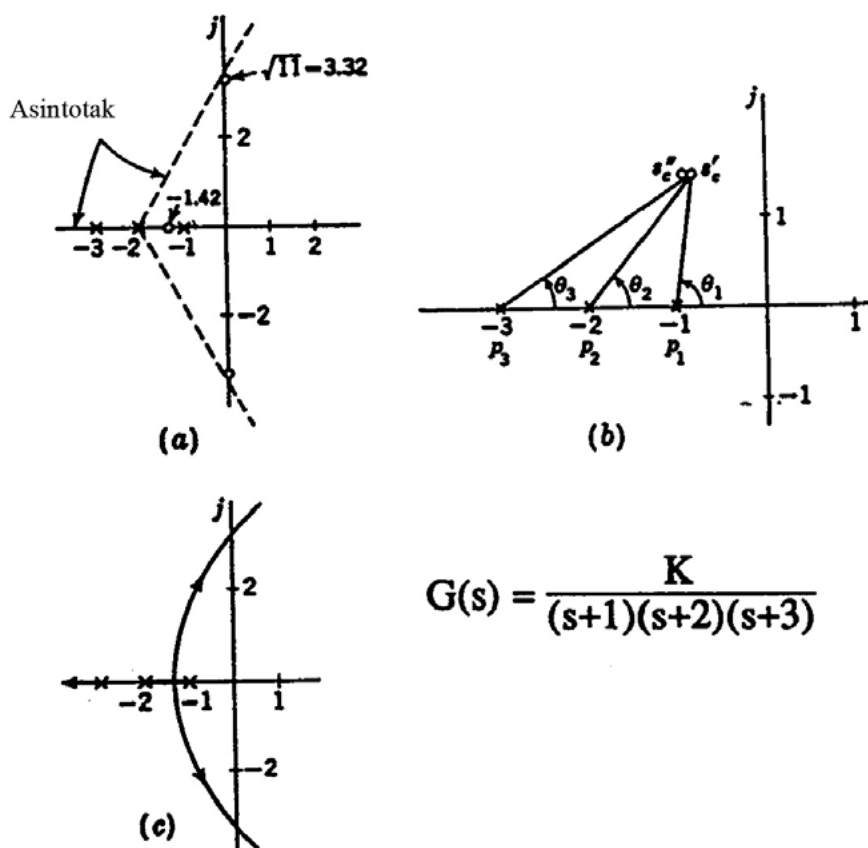
Arau hori ondo ulertzeko, bi adibide ikusiko ditugu:

### 12.3. Adibidea

Erroen kokapena marraztu honako transferentzia-funtzio honetarako begizta irekian:

$$G = \frac{K}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}$$

Lehenengo eta behin funtzioaren poloak marrazten dira, 12.2a irudian erakusten den moduan. Poloak x batekin adierazita daude. Adibide honetan ez dago zerorik.



$$G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

12.2. irudia. Erroen kokapenaren diagrama 14.3 adibiderako

1. araua: 3 polo daudenez, 3 adar egongo dira.
2. araua: erroen kokapenaren parte bat ardatz errealean dago, -1 eta -2 artean, eta beste parte bat, -3tik ezkererantz kokatuta.
3. araua:  $n-m = 3$  denez, 3 asintota egongo dira eta grabitatearen zentroa  $\gamma = (-3-2-1)/3 = -2$  egongo da. Asintota horiek osatzen dituzten angeluak, ardatz errealekin,  $\pi/3$ ,  $3\pi/3$  eta  $5\pi/3$  izango dira. 14.2a irudian, asintota horiek erakusten dira. Jadanik, erroen kokapenaren irudi bat egin dezakegu. -3tik ezkererako ardatz erreala asintota bat denez, eta adar bat polotik irteten denez -3ra, argi geratzen da adar oso bat -3tik ezkererako ardatz erreala dela. -1 eta -2 poloetatik irteten diren bi adar daudenez eta polo horien arteko ardatz erreala erroen kokapenean dagoenez, bi adar horiek bata bestearengana mugituko dira, eta, ardatz errealean, -1 eta -2 arteko punturen batean elkartzeko dira. Orain, 12.2c irudian erakusten den moduko erroen kokapena marraztu dezakegu. Bi adarrak elkartzeko diren ardatz errealeko puntua eta ardatz irudikariko ebaki-puntuak ezagutuko bagenu, zehaztasun nahikoaz izango genuke erroen kokapena.
4. araua aplikatuko dugu elkartze-puntu hori aurkitzeko.
4. araua: -1etik eta -2tik irteten diren adarrek tarteko punturen batean topo egiteko mugitzen dira eta ardatz errealetik  $\pm\pi/2$ -ko angeluak osatuz irteten dira.



Elkartze-puntua honako ekuazio honen soluzioak emango du:

$$0 = \frac{1}{s-p_1} + \frac{1}{s-p_2} + \frac{1}{s-p_3}$$

Edo

$$0 = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+3}$$

Ekuazioa ebatziz  $s = -1.42$  lortzen da.

Erroen kokapenak ardatz irudikaria zer puntutan mozten duen kalkulatzeko, Routhen irizpidea erabil daiteke. Ekuazio karakteristikoa forma polinomialean idatziz, honako hau dugu:

$$(s+1)(s+2)(s+3) + K = 0 = s^3 + 6s^2 + 11s + K + 6$$

Routhen matrizea osatzen dugu:

	Ilara	
1	1	11
2	6	K + 6
3	$b_1$	

Erro pare bat ardatz irudikarian badago eta gainontzekoek parte erreal negatiboa badute, n ilarako elementu guztiek zero izan behar dute.  $b_1$  zerora berdintzen da eta K-ren balioa askatzen da.

$$b_1 = 0 = \frac{(6)(11) - (K+6)}{6}$$

K-ren balioa askatuz,  $K = 60$ . Ardatz irudikarian erro bat aj gisa adierazten da. s aj-rekin ordezkatzuz eta K 60rekin, ekuazio karakteristikoa, honako hau dugu:

$$-a^3j - 6a^2 + 11aj + 66 = 0$$

$$(66 - 6a^2) + (11a - a^3)j = 0$$

Parte erreala edo irudikaria zerorantz berdinduz, honako hau dugu:

$$a = \pm\sqrt{11} = \pm 3.32$$

Beraz, erroen kokapenaren diagramak  $+3.32j$  eta  $-3.32j$ -n mozten du ardatz irudikaria.

Orain marraztu dezakegu erroen kokapenaren diagrama zehaztasunez. Zehaztasun handiagoz egiteko, haztatzearen bidezko metodoa erabil daiteke.

Irabazia erroen kokapenaren hainbat puntutan determinatzeko, (12.9) ekuazioa aplikatu behar da. Adibidez, irabazia  $s = -0.95 + 1.5j$  puntuan kalkulatzeko ( $s''_c$  12.2b irudian), distantzia, zuzenean, erregela batekin neur dezakegu, eta honako hau lortu:

$$|s - p_1| = 1.50; |s - p_2| = 1.82 \text{ eta } |s - p_3| = 2.52$$

Balio horiek (12.9) ekuazioan ordezkaturik, honako hau dugu:

$$\frac{K}{(1.50)(1.82)(2.52)} = 1$$

Gero,  $K = 6.8$ .

#### 12.4. Adibidea

Begizta irekian, honako transferentzia-funtzio honen erroen kokapena marraztu:

$$G = \frac{0.2K_c(1 + \tau_D s)}{0.2s^2 + 0.8s + 1}$$

Ekuazioa bere itxura estandarrean berrordenaturik,  $K N/D$ , honako hau dugu:

$$G = \frac{K(s - z_1)}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

non

$$K = K_c \tau_D \text{ den; } z_1 = -1/\tau_D; \quad p_1 = -2 + j, \text{ eta } \quad p_2 = -2 - j.$$

Demagun  $\tau_D = 1/3$  dela. Erroen kokapena lortzeko prozedura honako hau da:

1. Begizta irekian, transferentzia-funtzioaren zeroak eta poloak adierazten ditugu (14.3 irudia).
2. Bi polo daudenez, bi adar egongo dira. Adar bakoitza polo bakoitzetik irteten da.
3. Erroen kokapenaren parte bat ardatz errealean dago,  $z_1$ -ren ezkerrean.
4.  $n - m = 1$  denez, asintota bat dago, eta ardatz erreala da. Badakigu bi adarrek  $p_1$  eta  $p_2$  poloetatik irteten behar dutela eta eraren batean ardatz errealean sartu. Adar bat ardatz errealetik mugituko da  $z_1$ -erantz, eta bestea ardatz errealean mugituko da  $-\infty$ erantz. Ardatz errealerako sarrera-puntua eta poloetatik adarrak irteten direneko angeluak ezagutu beharko dira. 3. eta 4. arauekin egin ahal izango dugu hori.
5. Bi adarrak ardatz errealerara sartzeko puntua (12.12) ekuaziotik lortuko da.

$$\frac{1}{s + 3} = \frac{2(s + 2)}{(s + 2)^2 + 1^2}$$

Berrordenaturik,  $s^2 + 6s + 7 = 0$  lortzen da, eta  $s = -4.41$  eta  $-1.59$  ematen du.

Lehen ikusi dugunez,  $s = -1.59$  puntua ez dago erroen kokapenean; gero, sarrera-puntua  $s = -4.41$  izango da.

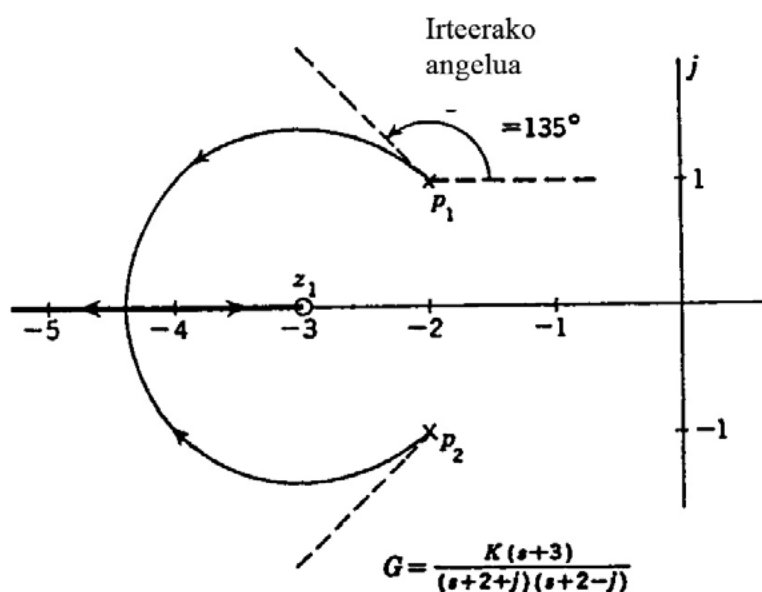
6. Bi adarrak poloetatik irteteko angelua (12.13) ekuaziotik kalkula daiteke. Kasu honetan,  $p_1$  polarako:

$$\theta = 1 \left( \pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3\pi}{4} = 135^\circ$$

Simetria dela eta, ez da beharrezkoa adarra  $p_2$  polotik irteteko angelua kalkulatzeko.

7. Gainontzeko puntuak haztatuz kalkula daitezke, (12.10) ekuazioa erabiliz. Erroen kokapen-puntuen irabazien balioak, lehengo adibidean bezala kalkulatu dira.

Adibide honetan ikusten dugu kontrol-sistema beti egonkorra dela kontrolagailuaren irabaziaren edozein baliotarako. Gainera, erantzuna gero eta indargetuagoa da  $K$  handitzean.



12.3. irudia. Erroen kokapenaren diagrama 12.4 adibiderako.

### 12.4. Erroen kokapena eraikitzean atzerapenak nolako eragina duen

Aintzat har dezagun begizta irekian honako adierazpen honekin emandako transferentzia-funtzioa:

$$G = \frac{0.03K_c e^{-0.5s}}{(s+1)(2s+1)}$$

Orain arte ez dugu aurkitu atzerapenik erroen kokapenaren eraikitzean. Atzerapenaren terminoa ezin da era arrazionalen adierazi. Hurbilketa bat honako honetan datza: termino hori serie batean hedatzea eta termino kopuru finitu batekin bakarrik geratzea. Adibidez, honela idatz daiteke:

$$e^{-\tau s} = \frac{e^{-\tau s/2}}{e^{+\tau s/2}} = \frac{1 - (\tau s/2) + \frac{1}{2}(\tau s/2)^2 - \dots}{1 + (\tau s/2) + \frac{1}{2}(\tau s/2)^2 + \dots}$$

s-n lehenengo ordenako terminoekin bakarrik geratzen bagara, hurbilketa honela geratuko da:

$$e^{-\tau s} \approx \frac{1 - (\tau s / 2)}{1 + (\tau s / 2)} = -\frac{s - 2 / \tau}{s + 2 / \tau}$$

Hurbilketa horri Pade-ren lehenengo ordenako hurbilketa deitzen zaio. Atzerapena duen transferentzia-funtzio baten erroen kokapenaren benetako diagramak adar kopuru infinitua du,  $e^{-\tau s}$  funtzio periodikoa baita.

Adibidearekin jarraitzen badugu lehenengo hurbilketa erabiliz, transferentzia-funtzioa, begizta irekian, honela geratuko da:

$$G = -0.03K_c \frac{s - 4}{s + 4} \frac{1}{(s + 1)(2s + 1)}$$

Transformatuz:

$$G = -K \frac{s - 4}{(s + 0.5)(s + 1)(s + 4)}$$

non

$$K = \frac{0.03K_c}{2}$$

Ekuazioaren – zeinuak berrelikadura positiboa duela adierazten du ardatz errealean zero batekin +4-n kokatuta. Horrek ez du esan nahi sistema ezegonkorra denik  $K_c$ -ren edozein baliotarako.

Berrelikadura positiboa badago, ekuazio karakteristikoa ez da  $1 + G = 0$ , baizik eta  $1 - G = 0$ . Orduan,  $1 - K N/D = 0$ , edo  $K N/D = +1$  izango dugu. Lehen bezala, ekuazio hori modulu eta argumentu eran idatziz, honako hau izango dugu:

$$K \frac{|s - z_1| |s - z_2| \dots |s - z_m|}{|s - p_1| |s - p_2| \dots |s - p_n|} = 1 \quad (12.15)$$

$$\arg(s - z_1) + \arg(s - z_2) + \dots + \arg(s - z_m) - [\arg(s - p_1) + \arg(s - p_2) + \dots + \arg(s - p_n)] = 2i\pi \quad (12.16)$$

Ikusten dugu (12.16) ekuazioa (12.10)aren ezberdina dela, baina (12.15) eta (12.9) ekuazioak berdinak direla. Orduan, berrelikadura negatiboa zenean erroen kokapenerako genituen arauak (batzuk) aldatu egin behar dira.

Erroen kokapenaren diagrama marrazteko arauak (berrelikadura positiboa):

1. Kokapen edo adar kopurua polo kopuruaren (n) berdina da begizta irekian
2. Adarrak begizta irekiko poloetatik irteten dira eta begizta irekiko zeroetan bukatzen dute. Zeroetan, (n - m) kokapenen bukaera infinituan gertatuko da asintota batzuei jarraituz. q ordenako polo baterako, hortik abiatzen diren q kokapen daude. q ordenako zero baterako, bertan bukatzen diren q kokapen daude.

3. Ardatz erreala erroen kokapenaren parte da ardatz errealeko puntu batetik eskuinera polo eta zero kopuruaren batuketa bikoitia bada  $(0, 2, 4, \dots)$ .  $q$  ordenako zero edo polo bat  $q$  aldiz zenbatu behar da aurreko araua aplikatzen denean.
4.  $(n - m)$  kokapen daude lerro zuzenetara asintotikoki hurbiltzen direnak ( $K$ -k infiniturantz jotzen duenean) eta begizta irekiko transferentzia-funtzioaren poloen eta zeroen grabitate-zentrotik abiatzen direnak. Grabitate-zentro hori honako ekuazio honek emana dator:

$$\gamma = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} \quad (12.11)$$

Lerro asintotiko horiek  $2\pi k/(n - m)$ -ko angeluak osatzen dituzte ardatz errealekin, non  $k = 0, 1, 2, \dots, n - m - 1$  den.

5. Honako ekuazio honen soluzioak adierazten du ardatz errealeko zer puntutan gurutzatzen eta irteten (edo sartzen) diren ardatz errealean elkarren ondoan dauden eta poloetatik irteten (edo elkarren ondoan dauden zeroetara mugitzen) diren bi adar:

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{s - z_i} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{s - p_j} \quad (12.12)$$

Adar horiek ardatz errealetik  $\pm\pi/2$ -ko angeluak osatuz irteten (edo sartzen) dira. (12.12) ekuazioa haztatuz ebazten da, ardatz errealeko  $s = sc$  hainbat puntu saiatuz intereseko poloen (edo zeroen) artean.

6. Begizta irekiko  $q$  ordenako polo bakoitzetik,  $q$  adar irteten dira, eta honako adierazpen honek emandako angeluak osatu:

$$\theta = \frac{1}{q} \left[ 2k\pi + \sum_{i=1}^m \arg(p_a - z_i) - \sum_{j=1}^n \arg(p_a - p_j) \right] \quad (12.17)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, q - 1$$

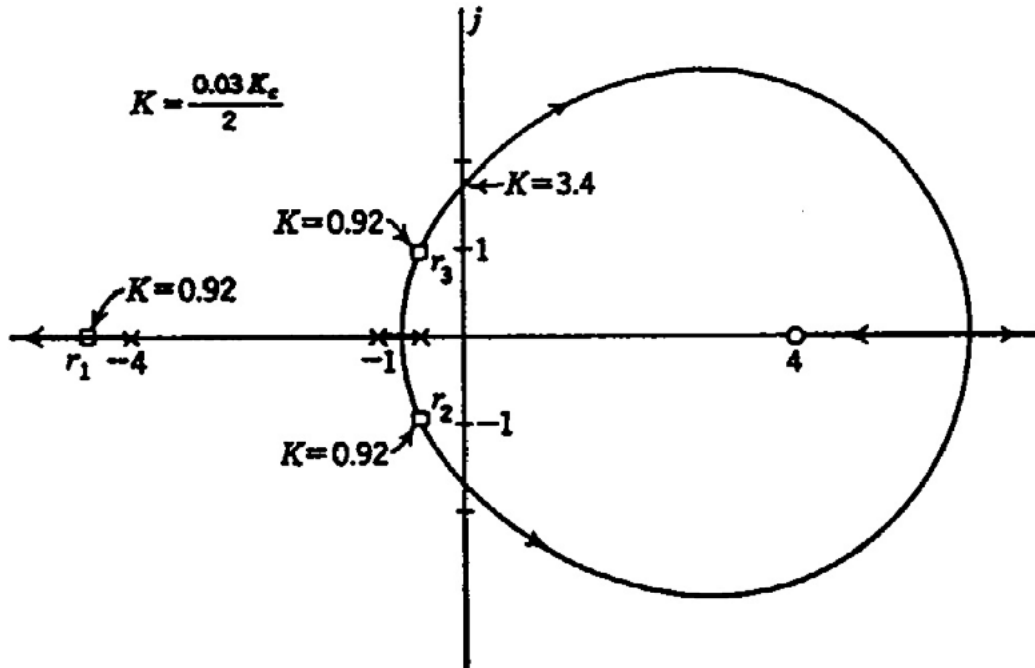
non  $p_a$   $q$  ordenako polo bat den. Asintotetara hurbiltzen ez diren  $m$  adarretako bakoitza  $m$  zeroetako batean bukatzen da. Zero horietara, honako ekuazioak emandako angeluak osatuz jotzen dute:

$$\theta = \frac{1}{v} \left[ 2k\pi + \sum_{j=1}^n \arg(z_b - p_j) - \sum_{i=1}^m \arg(z_b - z_i) \right] \quad (12.18)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, v - 1$$

non  $z_b$   $v$  ordenako zero bat den. Ardatz errealean dauden  $1$  ordenako polo edo zeroetarako, irteerako edo sarrerako angelua  $0$  edo  $\pi$  izango da.

Gure adibidera itzuliz, arau horiek aplika ditzakegu erroen kokapenaren diagrama marrazteko (12.4 irudia). Ikusten da sistema ezegonkorra egiten dela  $K > 3.4$ rako.



12.4. irudia.  $G = \frac{0.03K_c e^{-0.5s}}{(s+1)(2s+1)}$  -rako erroen kokapenaren diagrama

## 13. gaia

### Frekuentzietako erantzuna.

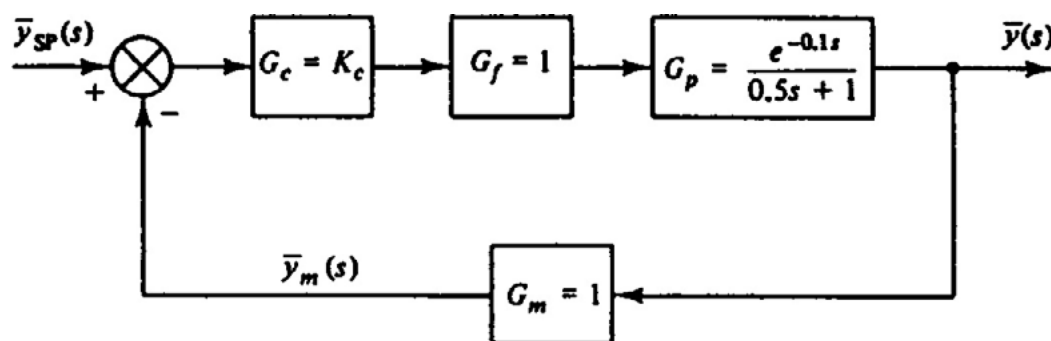
### Boderen eta Nyquisten egonkortasun-irizpideak

Kontrol-zirkuitu baten elementu guztiak aztertzean (prozesua, kontrolagailua, etab.), frekuentzietan nola erantzuten duten kalkulatu dugu, Boderen edo Nyquisten diagramak erabiliz. Gai honetan ikusiko dugu kontrol-sistemen egonkortasun absolutua eta erlatiboa nola determina dezakegun, begizta irekiko transferentzia-funtzioak frekuentzietan emandako erantzunetik lortutako informazioa erabiliz.

#### 13.1. Boderen egonkortasun-irizpidea

Har dezagun aintzat 13.1 irudiko sistema begizta itxian. Begizta irekiko transferentzia-funtzioa honako ekuazio honek emango du:

$$G(s) = \frac{\bar{y}_m(s)}{\bar{y}_{sp}(s)} = \frac{K_c e^{-0.1s}}{0.5s + 1} \quad (13.1)$$

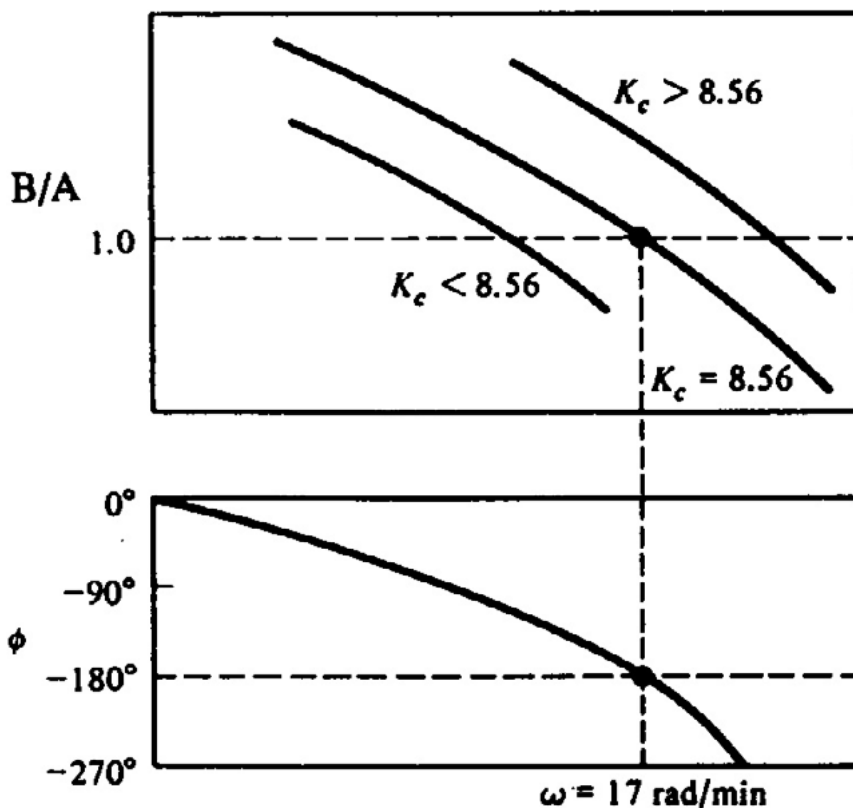


13.1. irudia. Sistema begizta itxian

$G(s)$ -rako Boderen diagrama 13.2 irudian erakusten da.  $\omega = 17.0$  rad/min denean,  $\phi = -180^\circ$  dela ikusten dugu. Frekuentzia horretarako, honako ekuazio honek emango du anplitudeen arteko erlazioa:

$$\frac{B/A}{K_c} = \frac{1}{\sqrt{(0.5 \times 17)^2 + 1}} = 0.12 \quad (13.2)$$

Gero,  $K_c = 1/0.12 = 8.56$  bada, anplitudeen arteko erlazioa 1 izango da.



13.2. irudia. 13.1 irudiko sistemarako Boderen diagrama begizta irekian

Orain har dezagun aintzat 13.3 irudiko sistema begizta irekian, non  $K_c = 8.56$  den. Diagrama horretan, konparatzailetik elementu neurtzailea deskonektatu da. Kontsigna-puntua era sinusoidalean aldatzen bada  $\omega = 17.0 \text{ rad/min}$  frekuentziarekin eta 1 anplitudearekin, hau da,  $y_{sp}(t) = 1 \text{ sen}(17.0 t)$ , honako ekuazio honek emana etorriko da  $y_m(t)$  erantzuna begizta irekian:

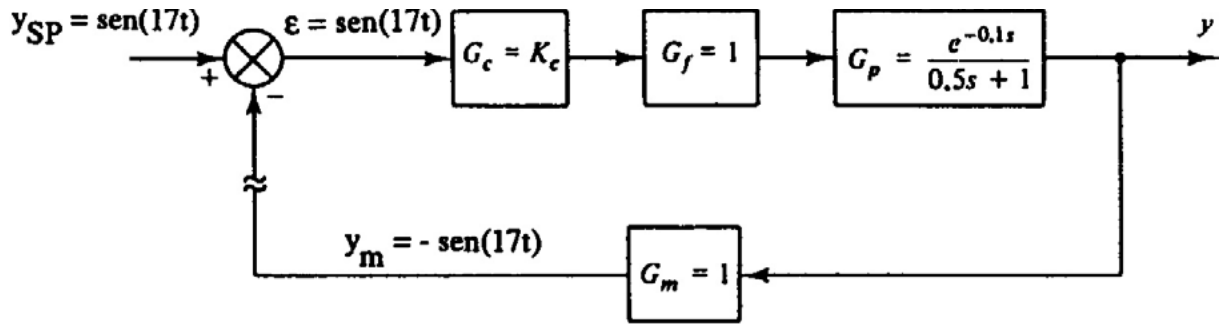
$$y_m(t) = \text{sen}(17.0 t - 180^\circ) = -\text{sen}(17.0 t)$$

Denbora-istant jakin batean  $y_{sp}$  kontsigna-puntua zero izatea lortzen da, eta, aldi berean, begizta ixten dugu (13.3b irudia). Baldintza horietan, konparatzaileak  $y_m$ -ren zeinua inbertitzen du, eta, orain, kontsigna-puntuaren eginkizun bera egiten du begizta irekirik zegoenean.  $\epsilon$  erroreak bera izaten jarraitzen du. Teorikoki, sistemaren erantzunak oszilatzeko jarraituko du anplitude konstantearekin,  $B/A = 1$  baita, nahiz eta karga eta kontsigna-puntua ez aldatu.

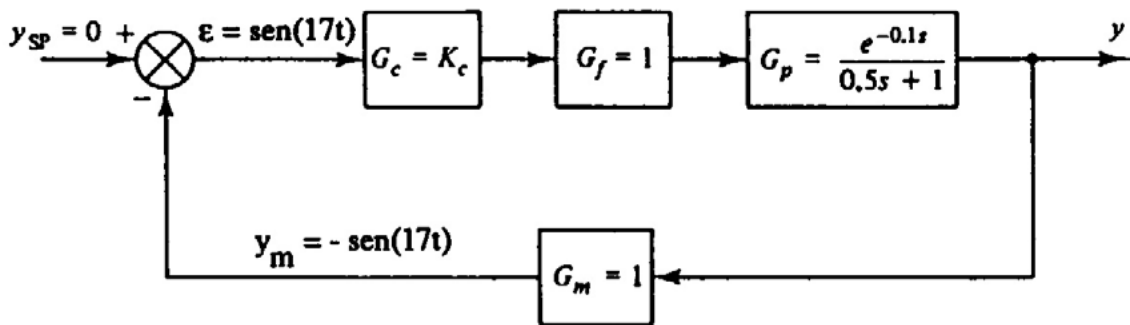
Ikus ditzagun bi kasu berezi:

1.  $K_c > 8.56$  bada,  $B/A = 1$  baino handiagoa izango da  $\phi = -180^\circ$  denean. 13.3b irudiko begizta itxiaren oszilazio jarraitua anplitude handiagoa izaten hasiko da eta sistema ezegonkorra emango du.
2.  $K_c < 8.56$  bada,  $B/A = 1$  baino txikiagoa izango da  $\phi = -180^\circ$  denean. Ondoren, 13.3b irudiko begizta itxiaren erantzun oszilakorra gero eta anplitude txikiagoa izaten hasiko da, eta gero eta oszilazio indar gutxiagoa izango duen sistema emango du.





(a)



(b)

**13.3. irudia.** a) Sistema begizta irekian, sarrera sinusoidalarekin (kontsigna-puntua);  
b) dagokion sistema begizta itxian, oszilazio jarraituarekin (sarrera nulua)

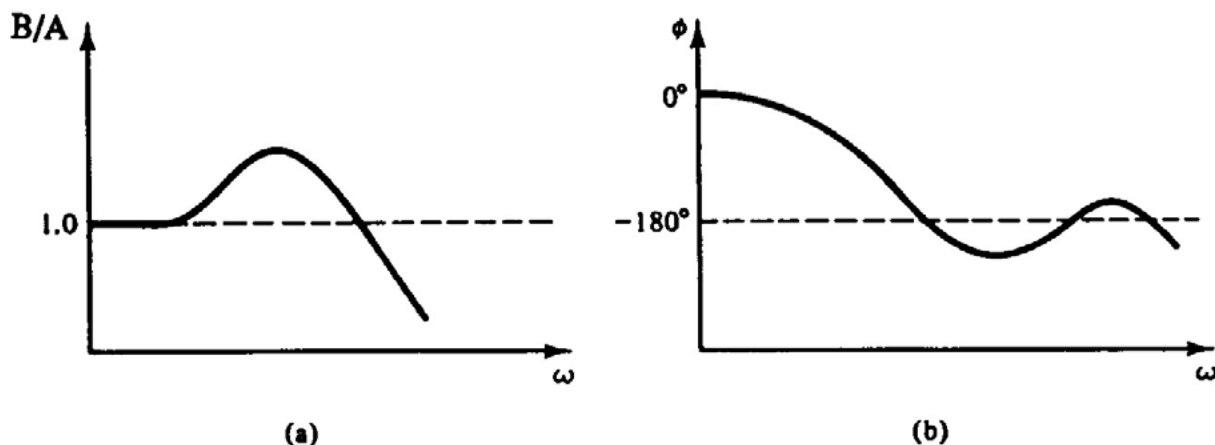
Hortik ateratzen dugun ondorioa honako hau da, eta Boderen egonkortasun-irizpidea deitzen zaio:

Berrelkadura duen kontrol-sistema bat ezegonkorra da begizta irekiko transferentzia-funtzioaren anplitudeen erlazioa 1 baino handiagoa bada fasearen angelua  $-180^\circ$ koa deneko frekuentziarako.

Oro har, prozesu kimiko gehienek frekuentzia handituz doan heinean anplitudeen erlazioa eta fasearen angelua txikitzen dituzten Boderen diagramak dituzte. Sistema horietarako, Boderen irizpideak ondorio zehatza ematen du eta oso tresna erabilgarria da egonkortasunaren analisirako.

Posible da, halaber, anplitudeen erlazioa eta fasearen angelua frekuentziarekin era jarraituan txikitzen ez dituzten sistemak egotea. Sistema horietarako, Boderen irizpideak ondorio okerrera eraman dezake. Zorionez, gutxi dira horrelako sistemak eta, oro har, Boderen irizpidea, kasu gehienetan, aplikagarria da. 13.4 irudian, sistema horietako baten Boderen diagrama erakusten da adibide moduan.

Boderen irizpidea erabiltzeko, beharrezkoa da begizta irekian kontrol-sistemaren transferentzia-funtzioaren Boderen diagrama izatea. Diagrama horiek bi eratan eraiki daitezke: a) numerikoki, kontrol-begiztaren elementuen transferentzia-funtzioak ezagutzen badira; b) esperimentalki, funtzioetako bat edo denak ezezagunak badira. Kasu honetan sistema sarrera sinusoidal batekin asaldatua da zenbait frekuentzian eta begizta irekiko erantzunaren anplitudea eta fasearen atzerapena gordetzen dira.



13.4. irudia. Boderen egonkortasun-irizpidea aplikatzea ezinezko duen sistema baten Boderen diagrama

### 13.2. Irabazi- eta fase-marjinak

Boderen egonkortasun-irizpideak adierazten du nola ezar dezakegun metodo arrazional bat kontrolagailuaren parametroak doitzeko eta begizta itxian sistemaren portaera ezegonkorra ekiditeko.

Har dezagun aintzat kontrol-sistema baten begizta irekian transferentzia-funtzioaren Boderen diagrama (13.5 irudia). Honako hauek dira diagrama horretako bi puntu garrantzitsuenak:  $\phi = -180^\circ$ koa deneko frekuentzia eta  $B/A = 1$  deneko puntua.

Izan bedi  $M$   $-180^\circ$ ko desfasea eragiten duen frekuentziarako anplitudeen arteko erlazioa. Boderen irizpidearen arabera,  $M < 1$  bada, sistema egonkorra da begizta itxian;  $M > 1$  bada, aldiz, sistema ezegonkorra da. Orduan, irabaziaren marjina honela definitzen dugu:

$$\text{Irabaziaren marjina} = \frac{1}{M} \quad (13.3)$$

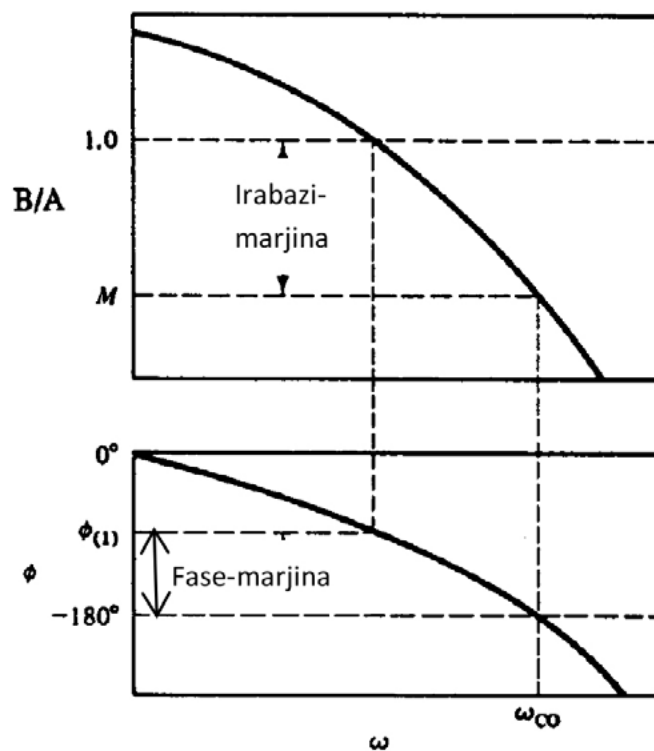
Sistema bat egonkorra izateko,  $M < 1$ , eta, orduan, irabaziaren marjina  $> 1$ . Irabaziaren marjinak sistemaren egonkortasun erlatiboaren neurketa bat osatzen du. Irabaziaren marjina zenbat eta handiagoa izan (1etik gora), begizta itxian portaera sendoagoa da, eta seguruagoa sistema kontrolatuaren operazioa. Hau da, irabaziaren marjina zenbat eta handiagoa izan, kontrolagailuaren parametroak doitzeko erabiltzen dugun segurtasun-faktorea handiagoa da.

Normalean, kontrol-begiztak 1.7 baino irabaziaren marjina handiagoak izateko diseinatzen dira. Horrek esan nahi du anplitudeen erlazioa diseinu-balioetik 1.7ko balioan handitu daitekeela sistema ezegonkorra egin baino lehen.

Irabaziaren marjinaz gain, badago beste segurtasun-faktore bat berrelikadura duten kontrol-sistemen diseinuan erabiltzen dena: fasearen marjina. 13.5 irudira itzuliz, izan bedi  $\phi_{(1)}$   $B/A = 1$  izatea eragiten duen frekuentziarako fasearen angelua. Fasearen marjina honela definitzen da:

$$\text{Fasearen marjina} = 180^\circ - \phi_{(1)} \quad (13.4)$$

hau da, sistema ezegonkortzeko behar den fasearen angelu gehigarria da. Zenbat eta fasearen marjina handiagoa izan, kontrolagailua diseinatzeko erabiltzen den segurtasun-faktorea handiagoa izango da. Fasearen marjinak  $30^\circ$ koak baino handiagoak izaten dira.



13.5. irudia. Irabaziaren eta fasearen marjinaren definizioak

### 13.1. Adibidea

Har dezagun aintzat 13.1 irudiko sistema begizta itxian. 17.0 rad/min-ko frekuentziarako ( $\phi = -180^\circ$ koa deneko frekuentzia) anplitudeen erlazioa honako hau da:

$$\frac{B}{A} = \frac{K_c}{\sqrt{(0.5 \times 17)^2 + 1}} = 0.12K_c$$

Irabaziaren marjina  $1/(0.12 K_c)$  izango da. 1.7ko irabaziaren marjina bat nahi bada, zera izango dugu:

$$\frac{1}{0.12K_c} = 1.7 \text{ edo } K_c = 4.9$$

Demagun prozesuaren atzerapena ez dela zehaztasunez estimatu eta benetako balioa 0.15 dela 0.1en orde. Begizta irekian transferentzia-funtzio berrirako Boderen diagrama marraztuko bagenu, ikusiko genuke fasearen angelua  $\phi = -180^\circ$ koa deneko frekuentzia 11.6 rad/min-koa dela. Frekuentzia horretan, B/A 0.83koa da orain  $K_c = 4.9$  bada.

$$\frac{B}{A} = \frac{K_c}{\sqrt{(\tau_p \omega)^2 + 1}} = \frac{4.9}{\sqrt{(0.5 \times 11.6)^2 + 1}} = 0.83$$

Hau da, sistemak egonkorra izaten jarraitzen du prozesuaren atzerapenaren estimazioan %50eko errorea egon arren. Ohartu, dena den, anplitude-erlazioa 1 baliotik gertuago dagoela, hau da, sistema ezegonkortasunetik hurbilago dagoela.

Har dezagun aintzat berriro 13.1 irudiko sistema. Badakigu:

$$\frac{B}{A} = \frac{K_c}{\sqrt{(0.5\omega)^2 + 1}} \text{ eta } \phi = \tan^{-1}(-0.5\omega) + (-0.1\omega)$$

Kontrolagailua doitu dugu fasearen marjina 30°koa izan dadin. Orduan:

$$K_c = \sqrt{(0.5\omega)^2 + 1} \text{ eta } 30^\circ = 180^\circ - |\tan^{-1}(-0.5\omega) + (-0.1\omega)|$$

Bigarren ekuaziotik lortzen da  $\omega = 12.5$  rad/min-koa dela. Lehenengo ekuazioan ordezkatzuz,  $K_c = 6.33$  lortzen da.

Demagun atzerapena gaizki estimatu dela, lehen bezala, eta benetako balioa 0.15 dela; desfasearen angelua 12.5 rad/min-ko frekuentziarako ( $B/A = 1$ -ri dagokiona), honako ekuazio honek emango du:

$$\phi = \tan^{-1}(-0.5\omega) + (-0.15\omega) = \tan^{-1}(-0.5 \times 12.5) + (-0.15 \times 12.5) = -188^\circ$$

Ikusten dugu sistema ezegonkorra egin dela, hau da, 30°ko fasearen marjina bat ez dela nahikoa izan segurtasun-faktore bat emateko atzerapenean errorea %50ekoa bada.

### 13.3. Frekuentzietako erantzuna begizta itxian

Kontrol-sistema batek frekuentzietan emandako erantzuna erraz lor daiteke begizta itxian, begizta irekian frekuentzietako erantzunetik abiatuta. Har dezagun aintzat kontrol-sistema bat berrelkadura-unitatea ( $G_m = 1$ ) duena. Kontsigna-puntuan aldaketa bat dela, honako ekuazio honek emana dator begizta itxian transferentzia-funtzioa:

$$\frac{\bar{y}(s)}{\bar{y}_{SP}(s)} = \frac{G}{1+G} \quad (13.5)$$

non  $G = G_c G_f G_p$  den. Izan bitez  $A$  eta  $\phi$ ,  $G$ -ren (transferentzia-funtzioa begizta irekian) magnitudea eta fasearen angelua. Orduan:

$$G(\omega j) = A(\cos \phi + j \sin \phi) \quad (13.6)$$

Adierazpen hori (13.5) ekuazioan ordezkatzuz, frekuentzien domeinuan honako hau dugu:

$$\frac{\bar{y}}{\bar{y}_{SP}}(\omega j) = \frac{A(\cos \phi + j \sin \phi)}{1 + A(\cos \phi + j \sin \phi)} \quad (13.7)$$

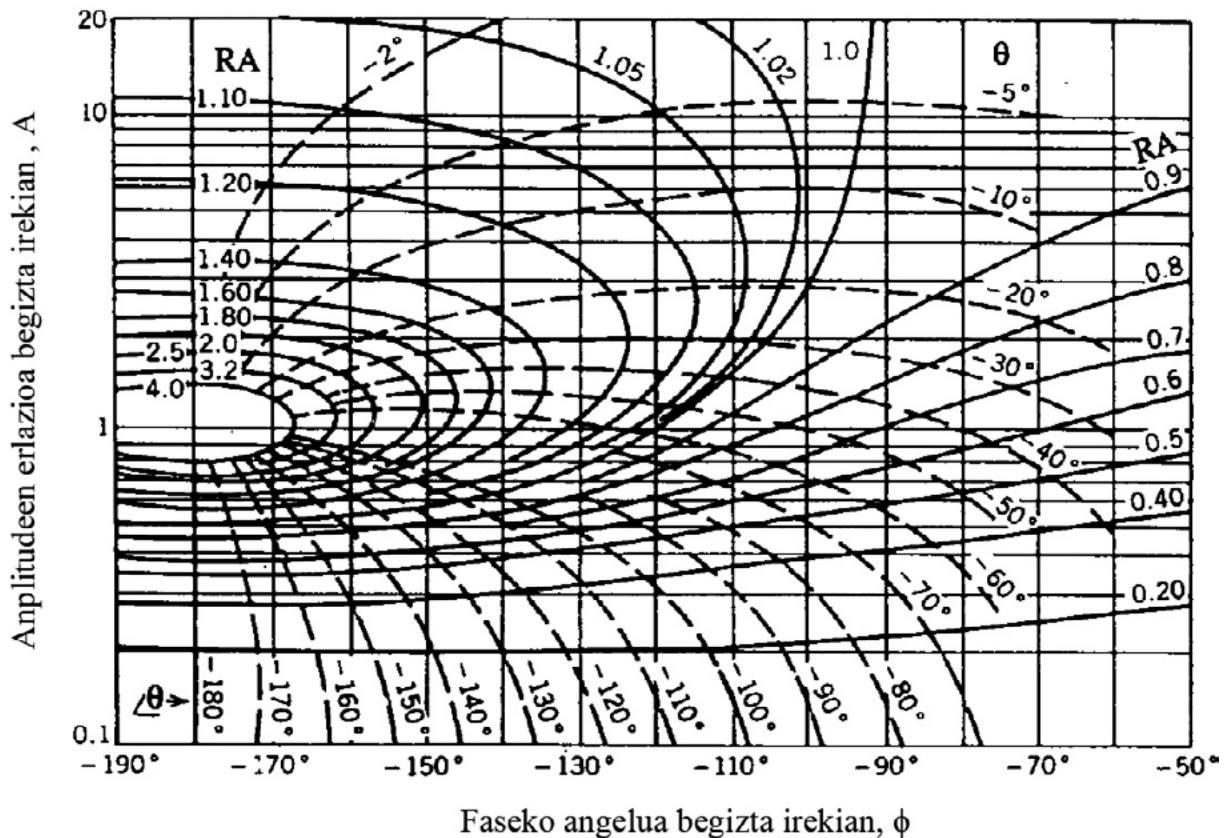
RA-ren eta  $\theta \frac{\bar{y}}{\bar{y}_{SP}}(\omega_j)$ -ren anplitudeen erlazioa eta fasearen angelua deituko ditugu hurrenez hurren. Orduan, (13.7) ekuaziotik:

$$RA = \frac{1}{\sqrt{[1 + (\cos \phi / A)]^2 + (\sin \phi / A)^2}} \quad (13.8)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left[ \frac{\sin \phi / A}{1 + \cos \phi / A} \right] \quad (13.9)$$

A eta  $\phi$  zuzenean begizta irekian transferentzia-funtzioaren Boderen diagramatik lor daitezkeenez, frekuentzietako erantzunaren magnitudeen erlazioa eta fasearen angelua zuzenean kalkula daitezke (13.8) eta (13.9) ekuazioetatik.

Praktikan, prozedura luzea eta aspergarria da kalkulu horiek frekuentzia bakoitzerako egitea. Zorionez, ez da beharrezkoa, lehengo ekuazio horien baliokidea den prozedura grafiko bat baitago, Nichols-en gutuna izenekoa (13.6 irudia).

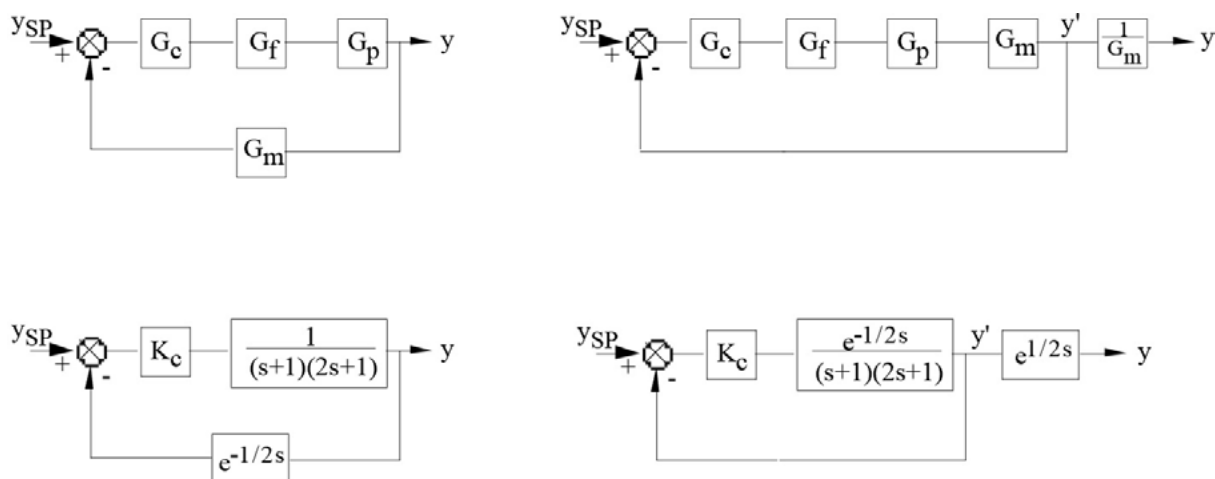


13.6. irudia. Nicholsen gutuna

Ekuazio horiek RA eta  $\theta$  konstanteen lerro moduan irudikatu dira A-ren eta  $\phi$ -ren koordena-tuetan. Grafikoan, ordenatuan, A-ren balioarekin sartu behar da; horizontalki mugitu  $\phi$  abzisarekin

ebaki-punturaino, eta RA-ren eta  $\theta$ -ren balioak irakurri, hurbilen dauden lerroen arteko interpolazioaren bidez. Operazio hori zenbait frekuentziatarako errepikatzen da, eta lortzen diren RA-ren eta  $\theta$ -ren balioak frekuentziaren aurrean irudikatzen dira; horrek, begizta itxian, Boderen diagrama ematen du, horixe lortu nahi zen.

Kontrol-sistemak ez badu unitateko berrelikadurarik, blokeen diagrama manipulatzeko da era errazena begizta itxiko zatiak unitateko berrelikadura izateko. 13.7 irudia manipulazio horren adibide bat da. Begizta itxiko zatiaren frekuentzietan emandako erantzuna ikusi berri den bezala kalkulatu da, eta, jatorrizko diagramaren frekuentzietan emandako erantzuna lortzeko, orain arte kalkulaturiko erantzuna  $1/G_m$ -ren Boderen diagramarekin bakarrik konbinatu behar da.



13.7. irudia. Bloke-diagramen manipulazioa unitateko berrelikadura-sistema baliokide bat lortzeko

### 13.4. Nyquisten egonkortasun-irizpidea

Nyquisten egonkortasun-irizpideak honela dio:

Berrelikadura duen sistema baten Nyquisten diagramak begizta irekian  $(-1,0)$  puntua hartzen badu barne, frekuentziak  $-\infty$  eta  $+\infty$  arteko balio bat hartzen duenean, erantzuna ezegonkorra da begizta itxian.

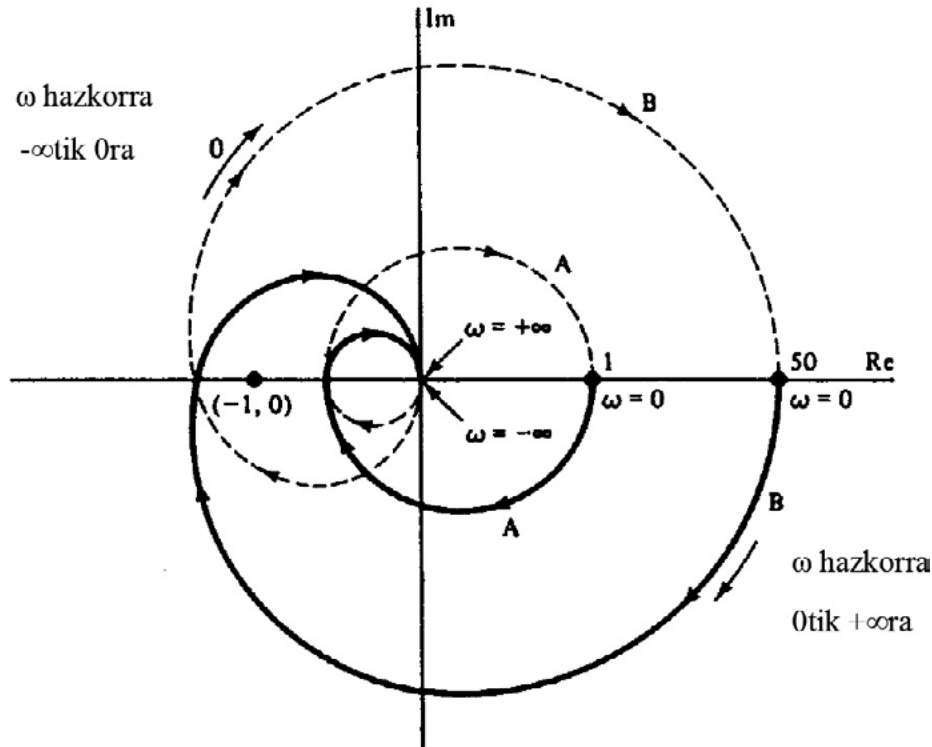
Esaldi horretan, begizta itxirako Nyquisten egonkortasun-irizpidea laburtzen da transferentzia-funtzioa begizta irekian egonkorra delako hipotesitik abiatuz. Nyquisten irizpideak honela dio: *sistema baten funtzioak begizta irekian  $P$  polo ezegonkor baditu eta  $(-1,0)$  puntua  $N$  aldiz hartzen badu barne, frekuentzia  $-\infty$  tik  $+\infty$ ra aldatzean erloju orratzen noranzkoan, polo ezegonkorren kopurua  $N+P$  izango da begizta itxian.*

### 13.2. Adibidea

Har dezagun aintzat honako transferentzia-funtzio hau begizta irekian:

$$G = \frac{K_c}{(s+1)(2s+1)(4s+1)}$$

13.8 irudiak, Nyquisten diagramak erakusten ditu  $K_c = 1$  (A kurba) eta  $K_c = 50$  (B kurba) denerako. Diagrama bakoitzerako, lerro jarraitua  $0 \leq \omega < +\infty$  frekuentzia tarterako da eta lerro ez-jarraitua  $-\infty$ tik  $0$ ra frekuentzietarako.



13.8. irudia. 13.2 adibideko transferentzia-funtziorako Nyquist-en diagramak

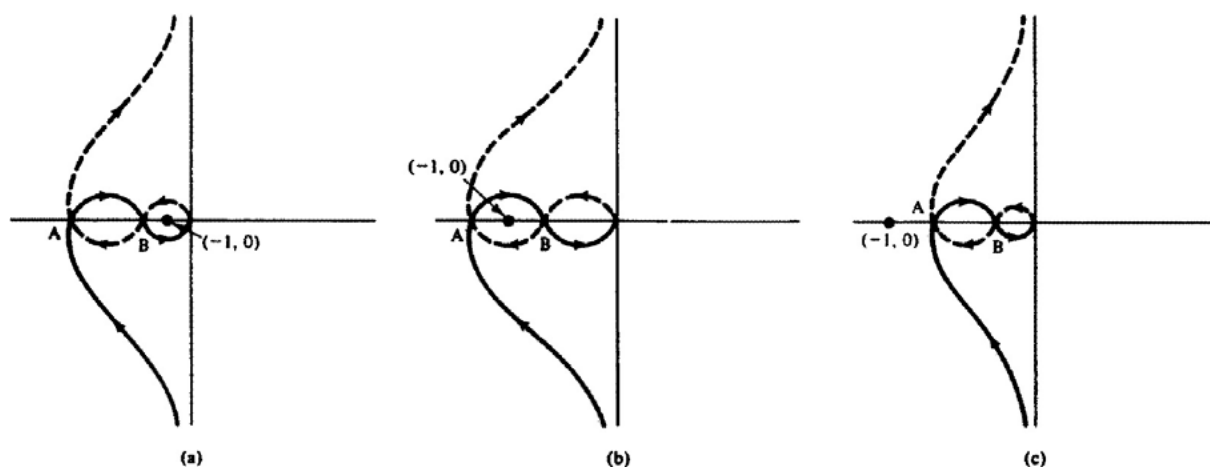
13.8 irudiak erakusten du A kurbak ez duela  $(-1,0)$  puntua barne hartzen, eta bai, berriz, B kurbak. Egonkortasun-irizpidearen arabera, A kurbaren sistema egonkorra da eta B kurbarena ezegonkorra da begizta itxian. Gero,  $K_c = 1$ erako sistema egonkorra da, eta  $K_c = 50$ erako, ezegonkorra.

### 13.3. Adibidea

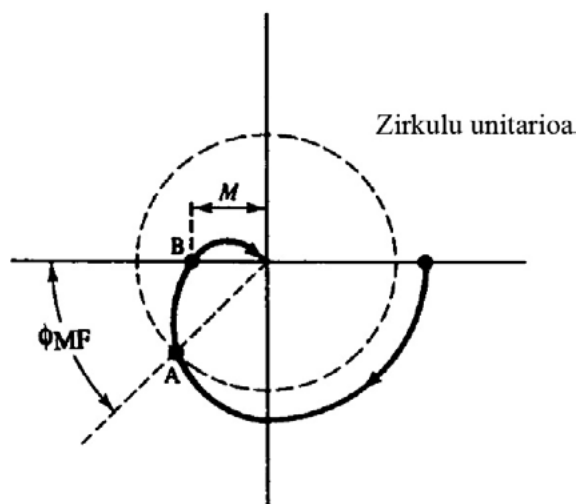
Har ditzagun aintzat 13.9 irudiko Nyquist-en diagramak. Denak dagozkio begizta irekian transferentzia-funtzio berari,  $K_c$  irabaziaren balio ezberdinekin. 13.9a eta 13.9c irudietako diagramak ez dute  $(-1,0)$  puntua barne hartzen, bai, aldiz, 13.9b irudikoek. Gero, lehenengo eta hirugarren irudiei dagozkien sistemek erantzun egonkorak dituzte begizta itxian, eta bigarren irudikoek, aldiz, ez. Irudietatik ondorioztatzen da erantzuna begizta itxian ezegonkorra dela  $K_c$ -ren balio tarte baterako, Nyquisten diagramako A eta B puntuen artean  $(-1,0)$  puntua dagoenean.  $(-1,0)$  puntua A-ren ezkerrean dagoenean (13.9c irudia) edo B-ren eskuinean (13.9a irudia), ez dago itxita Nyquisten diagramatik, eta erantzuna, begizta itxian, egonkorra da.

Irabaziaren eta fasearen marjinak ere kalkula daitezke Nyquisten diagramatik abiatuta. Har dezagun aintzat 13.10 irudiko diagrama. A puntuaren frekuentzian, Nyquisten diagramak zentroa jatorrian duen unitateko erradioa duen zirkulua ebakitzen du. A puntutik jatorrirako distantzia an-

plitudeen erlazioa denez frekuentzia horretarako, ondoriozta dezakegu  $\phi_{MF}$  angeluak fasearen marjina adierazten duela.



13.9. irudia. 13.3 adibiderako Nyquisten diagramak



13.10. irudia. Irabaziaren eta fasearen marjinen kalkulua Nyquisten diagramatik abiatuta

B puntuaren frekuentziarako, fasearen angelua  $-180^\circ$ koa da. Puntu horretan, anplitudeen erlazioa B-ren eta jatorriaren (M) arteko distantzia da. Horregatik, irabaziaren marjina  $1/M$ -k emana etorriko da.



## 14. gaia

# Berrelkadura duten kontrolagailuen diseinua

Kontrolagailu mota ezberdinek erantzun mota ezberdinak eragiten dituzte erantzutean. Kontrolagailu mota eta haren parametro optimoak aukeratzeko neurketa kuantitatibo bat behar da, alternatiba guztiak konparatzeko eta kontrolagailu mota egokiena bere parametroekin aukeratzeko. Hori egin ahal izateko, zenbait portaera-irizpide daude.

### 14.1. Portaera-irizpide sinpleak

Prozesuen kontrolean, honako portaera-irizpide hauek bereiz daitezke:

- egoera egonkorreko portaera-irizpideak
- egoera ez-egonkorreko portaera-irizpideak.

Egoera egonkorreko irizpide nagusia errorea zero izatea da.

Begizta itxiko sistema baten portaera dinamikoaren ebaluazioa bi motatako irizpideetan oinarritzen da:

- erantzunaren puntu gutxi batzuk erabiltzen dituzten irizpideak. Sinpleagoak dira, baina ez dira zehatzak.
- erantzunaren puntu guztiak ( $t = 0$ tik denbora oso handietaraino) erabiltzen dituzten irizpideak. Zehatzagoak dira, baina erabiltzeko zailagoak.

Lehenengoak begizta itxiko sistemaren erantzunaren ezaugarriren batean oinarritzen dira. Erabilienak:

- Gaindikina.
- Igoera-denbora (erantzunak nahi den baliotik  $\pm 5\%$ eko tartean mantentzeko behar duen denbora).
- Lehenengo eta bigarren gaindikinaren arteko erlazioa.
- Erantzun transitorioaren oszilazio-frekuentzia.

Kontrolagailua eta bere parametroen balioak aukeratzeko irizpide moduan erabil daiteke ezaugarri horietako bakoitza. Hau da, kontrolagailua, besteak beste, gaindikin minimoa izateko

edo igoera-denbora minimoa izateko diseina daiteke. Normalean, beharrezkoa da helburu bat baino gehiago betetzea (adibidez, gaindikina minimizatzea eta ezartze-denbora minimizatzea, etab.). Zoritxarrez, kontrolagailuaren diseinuan irizpide horietako bat baino gehiago erabiltzeak emaitza kontrajarrietara darama. Horregatik, diseinatzaileak parte hartu behar du eta bere iritzia erabili, ezaugarri kontrajarri horiek orekatzeko.

Lehen aipatutako irizpideetatik, erabiliena lehenengo eta bigarren gaindikinen arteko erlazioarena izan da. Esperientziak erakutsi du bigarren eta lehenengo gaindikinen arteko 1/4eko erlazio bat konpromisu onargarria dela igoera-denbora azkar baten eta ezartze-denbora egoki baten artean. Irizpide horri ingelesez «*one-quarter decay ratio*» deitzen zaio.

## 14.2. Portaera-irizpideak denboran zehar

$t = 0$ tik egoera egonkorra lortu arte portaera dinamikoko irizpide bat formulatzeko erabil daiteke begizta itxiko erantzunaren itxura. Irizpide horiek erantzun osoan oinarritzen dira. Honakoak dira erabilienak:

1. Errorearen integralaren karratua (ISE), non:

$$ISE = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt \quad (14.2a)$$

2. Errorearen balio absolutuaren integrala (IAE), non:

$$IAE = \int_0^{\infty} |\varepsilon(t)| dt \quad (14.2b)$$

3. Errore absolutu ponderatuaren integrala (ITAE), non:

$$ITAE = \int_0^{\infty} t|\varepsilon(t)| dt \quad (14.2c)$$

Kontrolagailu optimoa diseinatzeko arazoa honela formulatu daiteke:

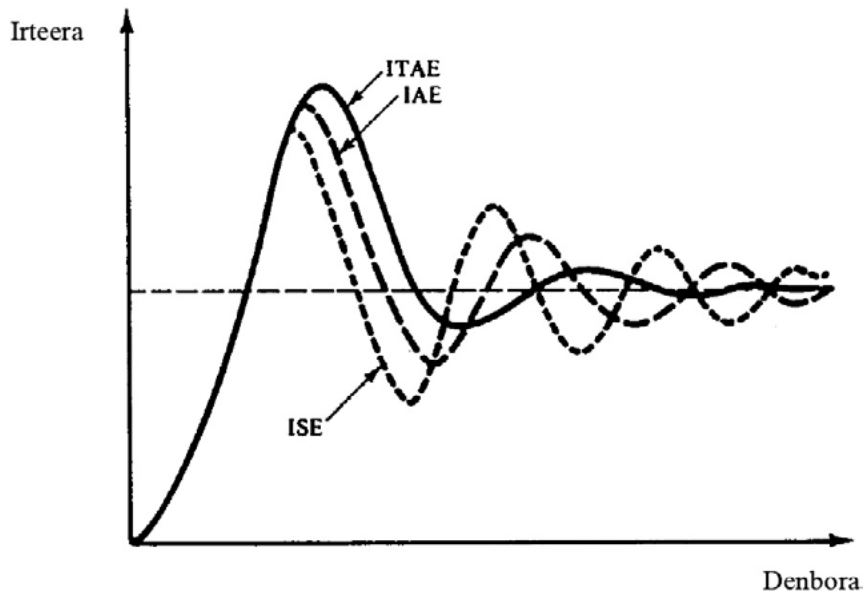
**Kontrolagailua eta haren parametroak sistemaren erantzunaren ISEa, IAEa edo ITAEa minimizatzeke eran aukeratu** behar dira

Aipatu diren hiru irizpideetatik zein erabili behar da? Kontrolatu behar dugun sistemaren ezaugarrien eta prozesuaren erantzun kontrolatuari jarriko dizkiogun eskakizun gehigarri batzuen menpekota izango da aukeraketa hori. Jarraian arau batzuk emango ditugu:

- Errore handiak eliminatu nahi badira, hobe da ISE irizpidea erabiltzea IAEa baino, lehenengoan erroreak karratura jasoak baitaude eta gehiago eragiten baitu integralaren balioan.
- Errore txikiak eliminatzeko, hobe da IAE irizpidea erabiltzea ISEa baino, 1 baino zenbaki baxuagoak karratura jasotzen direnean oraindik zenbaki baxuagoak lortzen baitira.
- Denboran zehar irauten duten erroreak eliminatzeko, ITAE irizpidea erabiltzea komeni da, integralean denbora egoteak erroreen eragina anplifikatzen baitu txikiak izan arren.

14.1 irudiak kualitatiboki erakusten du hiru irizpideak erabiltzean begizta itxiko erantzunen itxura. Kontrolagailuaren parametroak kalkulatu ditugunean, irizpide horien bitartez, bi gauza gogoratu behar dira:

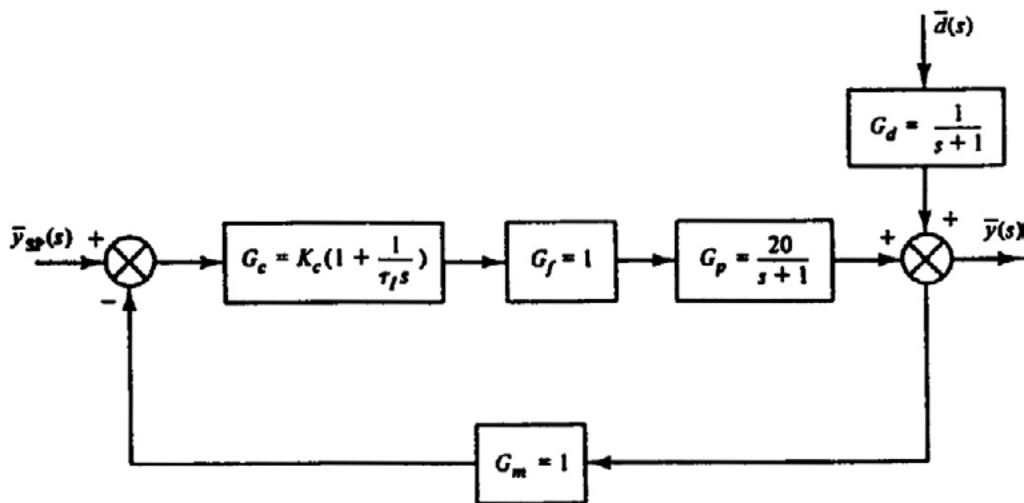
- Irizpide ezberdinek kontrolagailuaren parametro ezberdinetara daramate.
- Irizpide bererako, perturbazio mota ezberdinek kontrolagailuaren parametroen balio ezberdinetara daramate. Hau da, mailakatze-perturbazio bat eta pultsu motako beste bat erabiltzen badira, lortutako kontrolagailuaren parametroen balioak ezberdinak dira irizpide bera erabiliz.



14.1. irudia. Irizpide ezberdinak erabiliz sortutako erantzunak begizta itxian

14.2. Adibidea

Har dezagun aintzat 14.2 irudian erakutsitako sistema. Erantzuna honako hau izango da begizta itxian:



14.2. irudia. 14.2 adibideko sistema begizta itxian

$$\bar{y}(s) = \frac{\tau_I s + 1}{\frac{\tau_I}{20K_c} s^2 + \tau_I \left(1 + \frac{1}{20K_c}\right) s + 1} \bar{y}_{SP}(s) + \frac{(\tau_I / 20K_c) s}{\frac{\tau_I}{20K_c} s^2 + \tau_I \left(1 + \frac{1}{20K_c}\right) s + 1} \bar{d}(s)$$

edo

$$\bar{y}(s) = \frac{\tau_I s + 1}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} \bar{y}_{SP}(s) + \frac{(\tau_I / 20K_c) s}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} \bar{d}(s) \quad (14.3)$$

non

$$\tau = \sqrt{\frac{\tau_I}{20K_c}} \quad \text{eta} \quad \xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\tau_I}{20K_c}} (1 + 20K_c) \quad (14.4)$$

$K_c$ -ren eta  $\tau_I$ -ren balio optimoak aukeratzeko ISE, IAE, edo ITAE irizpideetako bat erabil daiteke. Gainera, jo daiteke perturbazioan edo kontsigna-puntuan badirela aldaketak. Adibidez, kontsigna-puntuan aldaketekin lan egitea aukeratu bada, zer motatako aldaketa erabiliko den erabaki behar da (mailakatzea, pultsua, sinusoidala, etab). Horrek guztiak eskura ditugun aukera kopuru handien berri ematen digu. Demagun ISE irizpidea erabiltzea erabaki dela eta kontsigna-puntuan mailakatze erako aldaketak erabiltzea. Orduan, (14.3) ekuazioa honela geratuko da:

$$\bar{y}(s) = \frac{\tau_I s + 1}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} \frac{1}{s}$$

Adierazpen hori denboraren domeinuan inbertituz, honakoa dugu ( $\xi < 1$  bada):

$$y(t) = 1 + 1 + \frac{e^{-\xi t/\tau}}{\sqrt{1-\xi^2}} \left[ \frac{\tau_I}{\tau} \operatorname{sen} \left( \sqrt{1-\xi^2} \frac{t}{\tau} \right) - \operatorname{sen} \left( \sqrt{1-\xi^2} \frac{t}{\tau} + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right) \right] \quad (14.5)$$

Orain, optimizazioaren arazoa ebatzi behar da:

$$\text{ISE} = \int_0^{\infty} [y_{SP} - y(t)]^2 dt$$

minimizatu dagozkion  $\tau$ -ren eta  $\xi$ -ren parametroak aukeratzuz,  $y(t)$  (14.5) adierazpena izanik.  $\tau$ -ren eta  $\xi$ -ren balio optimoak honako ekuazio hauen soluzioak emango ditu (minimorako baldintzak):

$$\frac{\partial(\text{ISE})}{\partial\tau} = \frac{\partial(\text{ISE})}{\partial\xi} = 0$$

Balio optimoei  $\tau^*$  eta  $\xi^*$  deitzen badiegu, dagozkien  $K_c$ -ren eta  $\tau_I$ -ren balio optimoak (14.4) ekuaziotik kalkula ditzakegu.

ITAE irizpidea aukeratu izan balitz, ebatzi beharreko arazoa antzekoa litzateke eta  $K_c$ -ren eta  $\tau_I$ -ren balio optimoen beste soluzio bat lortuko litzateke (14.4) ekuaziotik abiatuz.

Aldagai asaldatuan mailakatze erako aldaketak aintzat hartu izan balira, (14.3) ekuazioak honako hau emango luke:

$$\bar{y}(s) = \frac{(\tau_I / 20K_c)s}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} \frac{1}{s}$$

eta denbora-domeinura pasatu ondoren:

$$y(t) = \frac{(\tau_I / 20K_c)e^{-\xi t/\tau}}{\tau\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{1-\xi^2} \frac{t}{\tau}\right) \quad (14.6)$$

Orain,  $K_c$ -ren eta  $\tau_I$ -ren balio optimoak kalkula daitezke aurrekoaren antzeko prozedura bati jarraituz. Logikoa denez, lortutako balioak aurrekoen ezberdinak izango dira, minimizazio-irizpidea berdina izan arren, adierazpena denboraren domeinuan ezberdina baita.

### 14.3. Kontrolagailu motaren aukeraketa

Emandako prozesu bat kontrolatzeko, berrelikaduradun zein kontrolagailu erabili behar da? Galderari era errazean erantzun dakioke jarraian ikusiko dugun moduan:

1. Portaera-irizpide egoki bat definitu (ISE, IAE, edo ITAE).
2. Irizpidearen balioa kalkulatu kontrolagailu proportzionala, PI edo PID erabiliz,  $K_c$ -ren,  $\tau_I$ -ren, eta  $\tau_D$ -ren parametro optimoekin.
3. Aukeratutako irizpiderako balio onena ematen duen kontrolagailua aukeratu.

Prozedura honek, zehatza den arren ikuspuntu matematikotik, hainbat desabantaila ditu:

- Aspergarria da.
- Prozesuaren, sentsoreen eta bukaerako kontrol-elementuen ereductan oinarritzen da, eta horiek beti ez dira zehaztasunez ezagutzen.
- Anbiguotasuna erakusten du, hala nola zein den irizpide egokiena eta zer motatako perturbazioak (mailakatzea, pultsua, etab.) erabili.

Kontrolagailu mota egokiena kontsiderazio kualitatibo batzuk erabiliz (dagoeneko ikusi direnak) aukera dezakegu. Honela laburbil daiteke oinarritzko kontrol-ekintzek zer-nolako eragina duten erantzunean:

1. Akzio proportzionala:
  - a) Prozesu baten erantzuna azeleratzen du.
  - b) Prozesu guztietarako offseta eragiten du, beren transferentzia-funtzioan  $1/s$  terminoa duten prozesuetan izan ezik.
2. Akzio integrala:
  - a) Offseta eliminatzen du.
  - b) Offsetaren eliminazioa desbideratze maximo altuagoak izatearen kontura gertatzen da.
  - c) Denbora luzez oszilatzen duten erantzunak sortzen ditu.

- d)  $K_c$  asko handitzen bada erantzun azkarragoa sortzeko, sistema oszilakorra egiten da eta ezegonkor bihurtzeko.

3. Akzio deribatua:

- a) Etorkizuneko erroreak aurreikusten ditu eta ekintza egokia sartzen du.  
 b) Begizta itxiko prozesu baten erantzunean, efektu egonkortzailea sartzen du.

Hortik erraz ondorioztatzen da PID kontrolagailu batek onena izan behar lukeela. Hori egia da, nahi den erantzuna lortzeko malgutasun handiagoa eskaintzen duelako hiru parametro doigarri baititu. Aldi berean, hiru parametro optimoak kalkulatzearen arazoa konplexuagoa da. Nahi den erantzunaren kalitatea hiru parametro doitu beharraren konplexutasunarekin orekatzeko, honako arau hauei jarrai dakieke kontrolagailu egokiena aukeratzeko:

1. Ahal izanez gero, kontrol proportzionala erabiltzea komeni da. Kontrol hori erabil daiteke: a) offset onargarria lor badezakegu  $K_c$ -ren balio moderatuekin edo b) prozesuak akzio integrala badu ( $1/s$  terminoa transferentzia-funtzioan) eta, beraz, ez da offsetik egongo. Normalean, gas baten presioa edo likido baten maila kontrolatzeko, kontrol proportzionala bakarrik erabil daiteke.
2. Akzio proportzionala ez bada onargarria bera bakarrik, PI kontrola erabili behar da. Horregatik, PI kontrol-akzio hori emaria kontrolatzeko erabiltzen da. Fluxu-sistema baten erantzuna nahiko azkarra da, eta, ondorioz, erantzunak begizta itxian azkarra izaten jarraitzen du, nahiz eta akzio integralak motelagoa egin.
3. PID kontrolagailu bat erabili behar da begizta itxian erantzunaren abiadura handitu behar bada eta aldi berean kontrol sendoa mantendu behar bada. PI kontrolagailuak offseta eliminatzen du, baina erantzunaren abiadura txikitzen du begizta itxian. Erantzuna oso motela deneko prozesuetarako, PI kontrolagailu batek begizta itxiko erantzuna motelegia izatea eragiten du. Kasu horietan, akzio deribatua sartu beharko litzateke. Ekintza horren eragin egonkortzaileari esker, irabazi handiagoak erabil daitezke eta hori gehiegizko oszilaziorik gabeko erantzun azkarragoan bihurtzen da.

#### 14.4. Kontrolagailu baten parametroen estimazioa

Berrelkadura duen kontrol-sistema batek sistemak begizta itxian dinamika eta egoera estazionarioan ezaugarri onak lortzea du funtzioa. Idealki, kontrol-sistemak honako beharrez hauek betetzea nahi genuke:

- Sistemak egonkorra izan behar du begizta itxian.
- Perturbazioaren eragina minimizatzea.
- Erantzun azkarrak eta zakartasunik gabeak lortzea kontsigna-puntuaren aldaketekiko.
- Offseta eliminatzea.
- Gehiegizko kontrol-ekintza ekiditea.
- Kontrol-sistemak «sendoa» izan behar du, hau da, prozesuaren baldintzen aldaketekiko eta suposatutako prozesuaren ereduaren erroreekiko sentikorra ez izatea.

Kontrolagailu mota aukeratuta, kontrolagailuaren parametro optimoak aukeratu behar dira. Horretarako, hainbat hurbilketa daude; honako hauek, besteak beste:

- Sintesi zuzenaren metodoa.

- Barneko eredu batekiko kontrola.
- Doiketa-adierazpenak.
- Frekuentzietako erantzunen teknikak.
- Errealitatean oinarritutako eredu bidezko simulazioa ordenagailuz.
- Instalazioan doiketa kontrol-sistema instalatu eta gero.

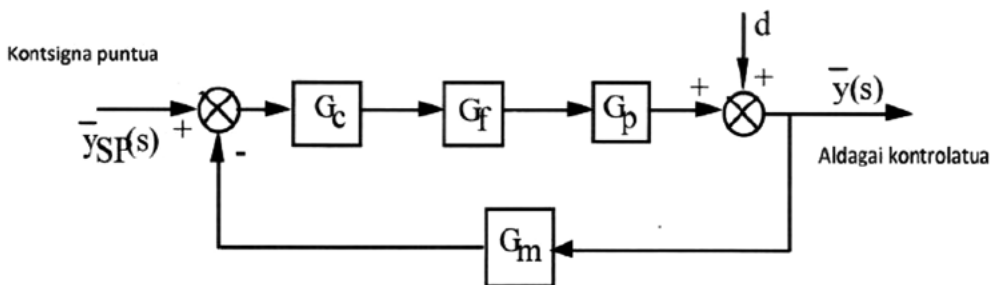
Lehenengo bost metodoak prozesuaren eruedetan oinarritzen dira, eta, beraz, kontrol-sistemak instalazioan jarri aurretik erabil daitezke, hau da, kontrol-sistemaren diseinuan. Dena den, parametroak kontrol-sistema instalatu ondoren doitu behar dira beti, prozesuaren ereduak ez baitira zehatzak, hurbilketak baizik.

Lehenengo hiru metodoak transferentzia-funtzio sinpleen eruedetan oinarritzen dira. Frekuentzietan emandako erantzunetan oinarritzen diren diseinu-teknikak edozein ordenatutako eredu linealei aplikatu dakizkieke.

*Sintesi zuzenaren metodoa*

Printzipioz kontrolagailu bat prozesuaren eredu bat erabiliz eta lortu nahi den begizta itxiko erantzuna espezifikatuz diseina daiteke. Hurbilketa hori, Sintesi Zuzena, interesgarria da, prozesuaren eta eratzten den kontrolagailuaren artean erlazio bat ezartzen duelako.

Desabantaila bat da eratzten den kontrolagailuak ez duela zertan PID egitura bat izan beharrik.



**14.3. irudia.** Berrelikadura duen sistema estandar baterako bloke-diagrama

14.3 irudiko bloke-diagramatik abiatzen bada, honako ekuazio honek emana dator transferentzia-funtzioa kontsigna-puntuaren aldaketekiko:

$$\frac{\bar{y}(s)}{\bar{y}_{sp}(s)} = \frac{G_c G_f G_p}{1 + G_c G_f G_p G_m} \tag{14.7}$$

$G = G_f G_p G_m$  deitzen badugu, aurreko ekuazioa beste hau bihurtzen da:

$$\frac{\bar{y}(s)}{\bar{y}_{sp}(s)} = \frac{G_c G}{1 + G_c G} \tag{14.8}$$

Berrordenatuz, honako adierazpen hau lortzen da berrelikadura duen kontrolagailurako:

$$G_c = \frac{1}{G} \frac{\bar{y}(s)/\bar{y}_{SP}(s)}{1 - \bar{y}(s)/\bar{y}_{SP}(s)} \quad (14.9)$$

Ekuazio horrek ez du diseinu erreal baterako balio, bi arrazoiengatik: a) ez da prozesuaren transferentzia-funtzioa ezagutzen,  $G$ ; b) begizta itxiko transferentzia-funtzioa ere ez da ezagutzen,  $\bar{y}(s)/\bar{y}_{SP}(s)$ , oraindik ez baita  $G_c$  diseinatu.  $G$  ezezaguna prozesuaren suposatutako eredu batez ordezkatzeko bada ( $\tilde{G}$ ), eta  $\bar{y}(s)/\bar{y}_{SP}(s)$  nahi den transferentzia-funtzio batez ordezkatzeko bada begizta itxian,  $[\bar{y}(s)/\bar{y}_{SP}(s)]_d$ :

$$G_c = \frac{1}{\tilde{G}} \frac{[\bar{y}(s)/\bar{y}_{SP}(s)]_d}{1 - [\bar{y}(s)/\bar{y}_{SP}(s)]_d} \quad (14.9b)$$

Prozesuaren ereduaren ezagutzen deneko kasu idealean ( $G = \tilde{G}$ ), diseinuko ekuazioa honako hau bihurtzen da:

$$G_c = \frac{1}{G} \frac{[\bar{y}(s)/\bar{y}_{SP}(s)]_d}{1 - [\bar{y}(s)/\bar{y}_{SP}(s)]_d} \quad (14.9c)$$

Prozesuaren ereduaren ezagutzen bada eta nahi den erantzunerako transferentzia-funtzio bat espezifikatzeko bada begizta itxian,  $G_c$  rako adierazpen bat lor daiteke.

Kontrolagailuak prozesuaren ereduaren transferentzia-funtzioaren inbertsoa du; horregatik, poloak zeroekin eliminatzeko ohitura izaten da nahi den transferentzia-funtzioa begizta itxian lortzeko,  $[\bar{y}(s)/\bar{y}_{SP}(s)]_d$ . Horrela,  $G G_c$  produkturako kontrolagailuaren poloak prozesuaren zeroak deuseztatzen dituzte eta kontrolagailuaren zeroak prozesuaren poloak deuseztatzen dituzte. Poloen ezabatze horiek zeroekin zehatzak izaten ez direnez ereduaren erroreak direla eta, Sintesi Zuzeneko hurbilketa hori kontuz erabili behar da polo edo zero ezegonkorak dituzten prozesuen kasuan.

Idealki, aldagai kontrolatuak kontsigna-puntuaren aldaketak berehala eta errorerik gabe jarraitzea nahi genuke. Egoera horri kontrol perfektua deitzen zaio eta  $[\bar{y}(s)/\bar{y}_{SP}(s)]_d = 1$  denean edo  $y = y_{SP}$  denean gertatzen da. Zoritxarrez, kontrol perfektua ez da posible kontrolagailuak irabazi infinitua eskatuko bailuke. Baina kontrol perfektua honela hurbildu daiteke:

Demagun  $G_c = K_c/G$ , non  $K_c$  kontrolagailuaren irabazia den. Adierazpen hori (14.44) ekuazioan ordezkatzuz, honako hau dugu:

$$\frac{\bar{y}(s)}{\bar{y}_{SP}(s)} = \frac{K_c}{1 + K_c} \quad (14.10)$$

Horrela, kontrol perfektua limitean lortuko litzateke  $K_c \rightarrow \infty$ ,  $y/y_{SP} \rightarrow 1$  baita.

Kontrolagailu hori ez da fisikoki posiblea  $G$ -k atzerapena badu edo polo kopurua zeroena baino handiagoa bada, etab.



Orain arte aintzat hartutako kontrolagailuak ez dira errealistak, prozesua egoera estazionario berrira instantaneoki heltzea baitzen diseinu-helburua. Hurbilketa praktikoa bat begizta itxian  $\bar{y}(s)/\bar{y}_{SP}(s)$  transferentzia-funtzio bat espezifikatzea da ezartze-denbora errealistak lortzeko eran. Adibidez, demagun nahi den funtzioa

$$\left[ \frac{\bar{y}(s)}{\bar{y}_{SP}(s)} \right]_d = \frac{1}{(\tau_c s + 1)}$$

dela, non  $\tau_c$  diseinu-parametro bat den. Aukeraketa horrek esan nahi du begizta itxiko kontsigna-puntuaren mailakate erako aldaketa batekiko erantzuna lehenengo ordenako elementu batena litzatekeela  $\tau_c$  denbora konstantearekin. Gero:

$$\left( \frac{\bar{y}(s)}{\bar{y}_{SP}(s)} \right)_d = \frac{G_c G}{1 + G_c G} = \frac{1}{\tau_c s + 1} \quad (14.11)$$

$G_c$  askatuz, honako hau dugu:

$$G_c = \frac{1}{G} \frac{1}{\tau_c s} \quad (14.12)$$

$1/\tau_c s$  terminoak akzio integrala ematen du, eta horrek offseta eliminatzen du.

### 14.3. Adibidea

(14.2) adierazpena erabili berrelikadura duten kontrolagailuak diseinatzeko honako prozesu hauetarako:

$$\text{a) } G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \quad \text{b) } G(s) = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

a)  $G(s)$ -ren adierazpena (14.12) ekuazioan ordezkatzuz, honako hau dugu:

$$G_c(s) = \frac{(\tau s + 1)}{K \tau_c s} = \frac{\tau}{K \tau_c} \left( 1 + \frac{1}{\tau s} \right) \quad (14.13)$$

PI kontrolagailu estandar baten itxuraren baliokidea da:

$$G_c(s) = K_c \left( 1 + \frac{1}{\tau_I s} \right) \quad (14.14)$$

non  $K_c = \tau/\tau_c K$  eta  $\tau_I = \tau$  diren. Adierazpen horien arabera, kontrolagailuaren irabazia prozesuaren irabaziarekiko inbertsoki proportzionala eta  $\tau/\tau_c$  (denbora-konstantea begizta irekian zati denbora-konstantea begizta itxian) zatidurarekiko zuzenki proportzionala da.

b) Aurreko ataleko gauza bera eginez eta berrordenatuz, honakoa lortzen da:

$$G_c(s) = \frac{(\tau_1 + \tau_2)}{K\tau_c} \left[ 1 + \frac{1}{(\tau_1 + \tau_2)s} + \frac{\tau_1\tau_2}{(\tau_1 + \tau_2)}s \right] \quad (14.15)$$

Eta PID kontrolagailu ideal baten forma estandarra da:

$$G_c(s) = K_c \left( 1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s \right) \quad (14.16)$$

$$K_c = \frac{1}{K} \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_c} \quad \tau_I = \tau_1 + \tau_2 \quad \tau_D = \frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} \quad (14.17)$$

### Atzerapena duten prozesuak

Prozesuak  $t_d$  atzerapena badu, begizta itxiko transferentzia-funtzioa honelakoa izatea komeni da:

$$\left( \frac{\bar{y}(s)}{\bar{y}_{SP}(s)} \right)_d = \frac{e^{-t_d s}}{\tau_c s + 1} \quad (14.18)$$

non  $t_c$  eta  $\tau_c$  diseinu parametroak diren.  $t_c$  parametroa  $t_c \geq t_d$  izateko aukeratu behar da, aldagai kontrolatuak ezin baitio kontsigna-puntuaren aldaketa bati  $t_d$  denbora-unitate batean baino denbora baxuagoan erantzun, atzerapena dela eta.

(14.18) eta (14.9) ekuazioak konbinatuz eta  $t_c = t_d$  eginez,  $G_c$ -ren diseinu-ekuazioa lortzen da:

$$G_c = \frac{1}{G} \frac{e^{-t_d s}}{\tau_c s + 1 - e^{-t_d s}} \quad (14.19)$$

Kontrolagailuak ez du PID baten itxura, baina fisikoki egin daiteke.

(14.19) ekuazioko adierazpena PID kontrolagailuak lortzeko erabil daiteke. Horretarako, izendatzaileko atzerapenaren terminoa 1. ordenako Taylor-en serieen hedapen baten bidez hurbildu daiteke:  $e^{-t_d s} \approx 1 - t_d s$ .

Hurbilketa hori (14.19) adierazpeneko izendatzailean ordezkatzuz eta berrordenatuz:

$$G_c = \frac{1}{G} \frac{e^{-t_d s}}{(\tau_c + t_d)s} \quad (14.20)$$

Ez da beharrezkoa zenbakitzaileko atzerapena hurbiltzea  $G(s)$ -n termino berarekin deuseztatzen delako. Jarraian, bi kasu berezi hartuko ditugu aintzat.

a kasua. 1. ordena + atzerapena duen eredua.

Har dezagun aintzat prozesuaren eredua:

$$G(s) = \frac{Ke^{-t_d s}}{\tau s + 1} \quad (14.21)$$

(14.21) ekuazioa (14.20) ekuazioan ordezkatzuz eta berrordenatuz (14.14) ekuazioko PI kontrolagailua lortzen da honako parametro hauekin:

$$K_c = \frac{1}{K} \frac{\tau}{(\tau_c + t_d)} \quad \tau_I = \tau \quad (14.22)$$

(14.13) eta (14.22) ekuazioen arteko konparazio batek erakusten du  $K_c$  txikitu egin behar dela prozesuak atzerapena duenean. Era berean, atzerapenak  $K_c$ -ren gainean goiko muga bat ezartzen du,  $\tau_c \rightarrow 0$  kasuan ere. Alderantziz, (14.13) ekuazioak  $K_c$  ez dagoela mugarik  $t_d = 0$  eta  $\tau_c \rightarrow 0$  denean adierazten du.

b kasua. 2. ordenako sistema + atzerapena duen eredua

$$G(s) = \frac{Ke^{-t_d s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad (14.23)$$

Ekuazio horiek (14.20) ekuazioan ordezkatzuz, (14.16) ekuazioko PID ideala lortzen da

$$K_c = \frac{1}{K} \frac{\tau_1 + \tau_2}{(\tau_c + t_d)} \quad \tau_I = \tau_1 + \tau_2 \quad \tau_D = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} \quad \text{izanik} \quad (14.24)$$

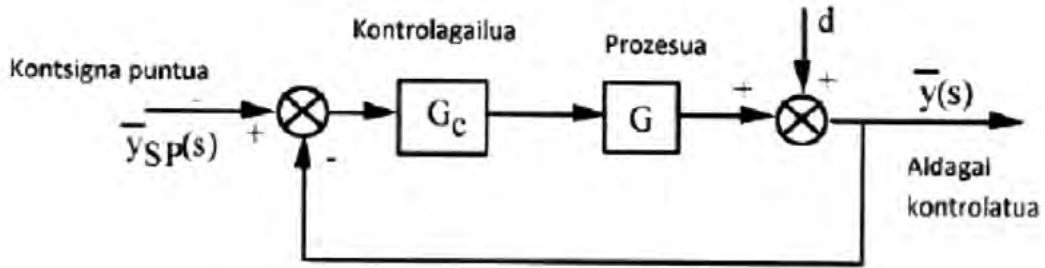
(14.22) eta (14.24) ekuazioko PID idealek atzerapena konpentsatzen dute.

Sintesi Zuzenaren metodoaren bidez lortutako kontrolagailuaren parametroak kontserbadorreagoak egin daitezke eta, hala, nahi den denbora-konstantea, ( $\tau_c$ ) handitu egiten da begizta itxian.

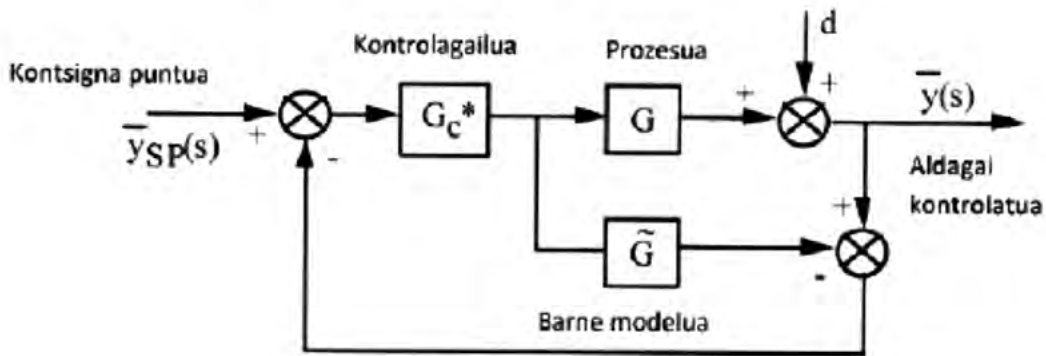
### *Barne-eredu baten bidezko kontrola*

Duela urte batzuk, Morari et al.ek (1986,1989) Barne Eredu baten bidezko Kontrola (Internal Model Control, IMC) izeneko kontrol-estrategia sortu zuten. Lehen ikusi dugun moduan, metodoak prozesuaren eredu bat suposatu eta kontrolagailuaren parametroak ereduarenarekin konparatzea du oinarri. Metodo horrek bi abantaila handi ditu: a) prozesuaren ereduaren ziurgabetasuna du kontuan, b) kontrol-sistemaren portaeraren eta haren «sendotasunaren» artean, konpromiso bat ezar daiteke, prozesuan aldaketei eta modelatzean erroreei aurre egiteko.

Metodoa 14.4 irudiko bloke-diagraman oinarritzen da.



(a) Ohiko berrelikadura duen kontrola



(b) Barne modelu bidezko kontrola

14.4. irudia

$G$  transferentzia-funtzioak prozesua eta loturiko instrumentazioa hartzen ditu barne. Prozesuaren  $\tilde{G}$  eredu bat erabiltzen da eta kontrolagailuaren irteera ( $m$ ) erabiltzen da ereduaren erantzun bat kalkulatzeko ( $\tilde{y}$ ). Erantzun hori erantzun errealetik kentzen da, eta kendura ( $y - \tilde{y}$ ) kontrolagailuaren sarrerako seinale moduan erabiltzen da. Kontrolagailuaren transferentzia-funtzioa  $G_c^*$ -k adierazten du. Oro har,  $\tilde{y} \neq y$  da, eredia prozesu errealearen hurbilketa bat delako eta ereduak kontuan hartzen ez dituen perturbazioak ( $d \neq 0$ ) badaudelako.

Irudiko bi bloke-diagramak berdinak dira baldin eta  $G_c$  eta  $G_c^*$  kontrolagailuek honako adierazpen hau betetzen badute:

$$G_c = \frac{G_c^*}{1 - G_c^* \tilde{G}} \tag{14.25}$$

14.6b irudiko bloke-diagramatik, honako adierazpen hau erator daiteke begizta itxian:

$$\bar{y}(s) = \frac{G_c^* G}{1 + G_c^* (G - \tilde{G})} \bar{y}_{SP}(s) + \frac{1 - G_c^* G}{1 + G_c^* (G - \tilde{G})} \bar{d}(s) \tag{14.26}$$

Eredua perfektua deneko kasuan ( $\tilde{G} = G$ ), honela geratzen da ekuazio hori:

$$\bar{y}(s) = G_c^* G \bar{y}_{SP}(s) + (1 - G_c^* G) \bar{d}(s) \tag{14.27}$$

Kontrolagailua bi etapetan diseinatzen da:

- 1. etapa: prozesuaren eredua bi faktoreren produktu gisa ematen da:  $\tilde{G} = \tilde{G}_- + \tilde{G}_+$ , non  $\tilde{G}_+$  terminoak atzerapenak eta parte erreal positiboko zeroak dituen.  $\tilde{G}_+$  egoera estazionarioan 1 irabaziaren bidez espezifikatzen da.
- 2. etapa: kontrolagailua honela espezifikatzen da:

$$G_c^* = \frac{1}{\tilde{G}_-} f \quad (14.28)$$

non  $f$  pasu baxuko filtro bat den egoera estazionarioan 1 irabaziarekin.  $f$  filtroak, normalean, honelako forma du:

$$f = \frac{1}{(\tau_c s + 1)^r} \quad (14.29)$$

non  $\tau_c$  nahi den denbora-konstantea den begizta itxian.  $r$  parametroa zenbaki oso positiboa da, eta  $G_c^*$  ondorengo erako transferentzia-funtzioa izateko aukeratzen da: haren izendatzailea zenbakitzailearen ordena berekoa izateko, edo (ekintza deribatu ideala nahi bada) zenbakitzailearen ordena izendatzailearen ordena baino altuagoa izan dadin unitate batean.

(14.28) ekuazioan erakusten den moduan, kontrolagailuak  $\tilde{G}_-$  ren inbertsoa du eta ez eredu totalaren inbertsoa  $\tilde{G}$ .  $\tilde{G}$  aukeratu izan balitz, kontrolagailuak  $e^{+t_d s}$  terminoa ( $\tilde{G}_+$  k  $t_d$  atzerapena izango balu) edo polo ezegonkor bat ( $\tilde{G}_+$  k parte erreal positiboko zero bat izango balu) izan behar luke. Horrela,  $G_c^*$  kontrolagailua egonkorra da eta fisikoki eraiki daiteke.

Eredua perfektua deneko kasuan ( $\tilde{G} = G$ ), (14.28) ekuazioa (14.27) ekuazioan ordezkatzuz, honako adierazpen hau lortzen da:

$$\bar{y}(s) = \tilde{G}_+ f \bar{y}_{SP}(s) + (1 - f \tilde{G}_+) \bar{d}(s) \quad (14.30)$$

Begizta itxiko transferentzia-funtzioa kontsigna-puntuan aldaketetarako ( $\bar{d}(s) = 0$ ) honako hau da:

$$\frac{\bar{y}(s)}{\bar{y}_{SP}(s)} = \tilde{G}_+ f \quad (14.31)$$

Oro har, IMC hurbilketak ez du nahitaez  $G_c$  edo  $G_c^*$  rako PID kontrolagailu bat emaitza moduan ematen. Dena den, frogatu da hurbilketa hori erabil daitekeela  $G_c$ -n PID kontrolagailu baten parametroak lortzeko prozesuaren eredu ezberdinetarako. 14.1. taulan emaitza horietako batzuk erakusten dira. Taula horren kasu bakoitzerako, begizta itxiko transferentzia-funtzioa (14.29) eta (14.31) ekuazioek emana datorrela jotzen da,  $r = 1$  izanik.

14.1. taula.  $G_c(s)$ rako PID parametroak IMCn oinarrituta

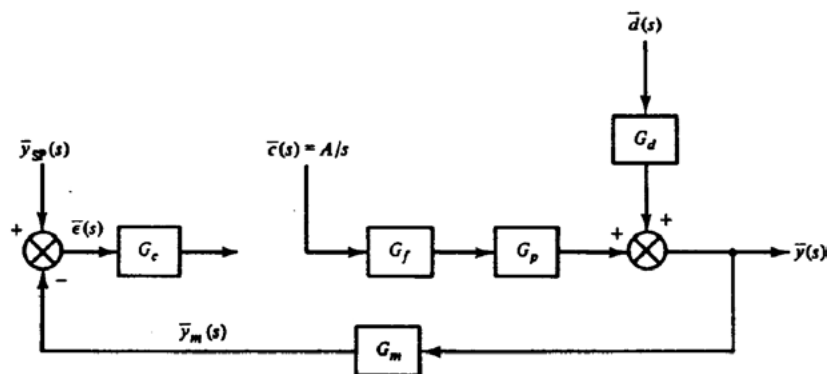
Kasua	Eredua	$K_c K$	$\tau_I$	$\tau_D$
A	$\frac{K}{\tau s + 1}$	$\frac{\tau}{\tau_c}$	$\tau$	—
B	$\frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$	$\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_c}$	$\tau_1 + \tau_2$	$\frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2}$
C	$\frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1}$	$\frac{2\xi\tau}{\tau_c}$	$2\xi\tau$	$\frac{\tau}{2\xi}$
D	$\frac{K(-\beta s + 1)}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1}; \beta > 0$	$\frac{2\xi\tau}{\tau_c + \beta}$	$2\xi\tau$	$\frac{\tau}{2\xi}$
E	$\frac{K}{s}$	$\frac{1}{\tau_c}$	—	—
F	$\frac{K}{s(\tau s + 1)}$	$\frac{1}{\tau_c}$	—	$\tau$

*Prozesuaren erreakzio-kurbaren metodoa*

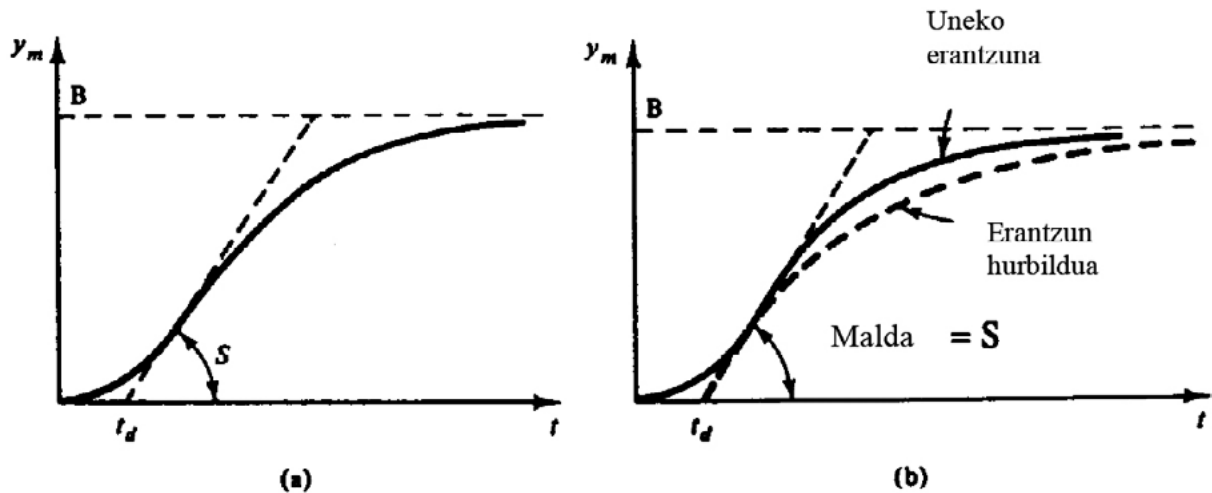
Metodo empirikoetan, erabiliena da kontrolagailu baten parametroak kalkulatzeko. Cohen-ek eta Coon-ek garatu zuten eta 14.5 irudian erakutsitako kontrol-sisteman oinarritzen da, zein «irekia» izan den kontrolagailua bukaerako kontrol-elementutik deskonektatzean. c aldagaian A anplitudeko mailakatze erako aldaketa bat sartzean datza. c aldagai horrek kontroleko bukaerako elementuan eragiten du eta irteerako balioa denboran zehar erregistratzen da.  $y_m(t)$  kurbari prozesuaren erreakzio-kurba deitzen zaio.  $y_m$  eta c artean, honako transferentzia-funtzio hau dago:

$$G_{CRP}(s) = \frac{\bar{y}_m(s)}{\bar{c}(s)} = G_f(s) G_p(s) G_m(s) \tag{14.32}$$

Ekuazio horrek erakusten du prozesuaren erreakzio-kurba ez dela prozesuaren dinamikak eragina bakarrik, baizik eta baita elementu-sentsorearen eta bukaerako kontrol-elementuaren dinamikak ere.



14.5. irudia. Kontrol-begizta irekia



**14.6. irudia.** a) Prozesuaren erreakzio-kurba.  
 b) Bere hurbilketa 1. ordena gehi atzerapena duen elementu baten bidez

Cohenek eta Coonek ikusi zuten prozesu gehienetan sarrerako aldaketa bati emandako erantzunak itxura sigmoidala zuela (14.6a irudia). Itxura hori 1. ordena gehi atzerapena duen elementu baten erantzunari hurbildu dakioke (14.6b irudian lerro ez-jarraituen bidez adierazitako kurba), eta honako hau izango da orduan:

$$G_{CRP}(s) = \frac{\bar{y}_m(s)}{\bar{c}(s)} \approx \frac{Ke^{-t_d s}}{\tau s + 1} \quad (14.33)$$

hiru parametro ditu: irabazi estatikoa (K), atzerapena ( $t_d$ ) eta denbora-konstantea ( $\tau$ ).

Erantzunetik abiatuta, erraza da hiru parametroen balioak estimatzea:

$$K = \frac{\text{irteera (egoera egonkorrean)}}{\text{sarrera (egoera egonkorrean)}} = \frac{B}{A}$$

$\tau = B/S$ , non S erantzun sigmoidalaren malda den inflexio-puntuan.

$t_d =$  igarotako denbora-sistemak erantzun arte.

Balio horiek kalkulatu eta gero, Cohenek eta Coonek kontrolagailuaren parametroen balio optimoetarako zenbait adierazpen garatu zituzten, perturbazio-aldagaien aldaketak eta zenbait portaera-irizpide erabiliz: Offset minimoa, ISEa, gaindikinen arteko  $\frac{1}{4}$  erlazioa, etab. Kontrolagailu baten parametroetarako egindako analisiaren emaitzak honako adierazpen hauek izan ziren:

— P kontrolagailua:

$$K_c = \frac{1}{K} \frac{\tau}{t_d} \left( 1 + \frac{t_d}{3\tau} \right) \quad (14.34)$$

— PI kontrolagailua:

$$K_c = \frac{1}{K} \frac{\tau}{t_d} \left( 0.9 + \frac{t_d}{12\tau} \right) \quad (14.35a)$$

$$\tau_I = t_d \frac{30 + 3t_d / \tau}{9 + 20t_d / \tau} \quad (14.35b)$$

— PID kontrolagailua:

$$K_c = \frac{1}{K} \frac{\tau}{t_d} \left( \frac{4}{3} + \frac{t_d}{4\tau} \right) \quad (14.36a)$$

$$\tau_I = t_d \frac{32 + 6t_d / \tau}{13 + 8t_d / \tau} \quad (14.36b)$$

$$\tau_D = t_d \frac{4}{11 + 2t_d / \tau} \quad (14.36c)$$

Komeni da honako hau azpimarratzea:

1. (14.34)tik (14.36)ra bitarteko ekuazioek emandako kontrolagailuaren parametroak honako suposizio honetan oinarritzen dira: prozesuaren erantzun sigmoidala, begizta irekian, 1. ordena + atzerapena duen elementu baten bidez hurbildu daiteke. Batzuetan, hori ez da horrela gertatzen eta ekuazio horiek ondorengo fintzea edo hobetzea beharko duen 1. hurbilketa gisa erabili behar dira.
2. Begizta irekiko prozesu gehienek erantzun sigmoidalak dituzte, instalazio kimiko baten prozesu fisiko gehienak 1. ordenakoak edo 1. ordenakoak seriean direlako. Izaera oszilakor azpiindargetua kontrolagailuen presentziak emana dator. Horregatik, begizta irekiztean eta kontrolagailua deskonektatzean, erantzunak itxura sigmoidal hori du, eta hori berezkoa da prozesu gainindargetu batean.
3. Kontrolagailuaren  $K_c$  irabaziaren balioak ematen dituzten (14.34), (14.35a) eta (14.36a) ekuazioetan arreta jartzen badugu, ikusten da PI kontrolagailu baten irabazia P baten bano txikiagoa dela. Hori hala gertatzen da akzio integralak sistemak ezegonkortasunerako joera izatea eragiten baitu, eta, ondorioz, irabaziak balio kontserbatzaileagoa izan behar du. PID kontrolagailuaren kasuan, ekintza deribatuaren eragin egonkortzaileak irabaziaren balio altuagoak erabiltzea eragiten du P edo PI kontrolagailuetan baino.

### *Ziegler-Nichols-en metodoa*

Metodo hori frekuentziei emandako erantzunean oinarritzen da. Ziegler-Nicholsen doikuntza-metodoa begizta itxiko prozesu bat da, eta, esperimentalki, honako hauetan oinarritzen da:

1. Sistema nahi den operazio-puntura eramaten da (diseinu-baldintzak)
2. Kontrolagailua modu automatikoan (begizta itxia) eta akzio proportzionalarekin bakarrik, aldaketa bat sartzen da kontsigna-puntuan eta irabazi proportzionala aldatzen da sistemak



era jarraituan oszilatute arte. Oszilazio horren frekuentzia limitea da (crossover),  $\omega_{co}$ . Frekuentzia horri dagokion magnitudeen erlazioari  $M$  deituko diogu.

3. Jarraian, honako parametro hauen balioak kalkulatu dira:

$$\text{Azken irabazia: } K_u = \frac{1}{M}$$

$$\text{Azken periodoa: } P_u = \frac{2\pi}{\omega_{co}} \text{ min/ziklo.}$$

4. Balio horietatik abiatuz, Zieglerrek eta Nicholsek honako parametro hauek gomendatu zituzten berrelikadura duten kontrolagailuetarako:

	$K_c$	$\tau_I$ (min)	$\tau_D$ (min)
Proporzionala	$K_u/2$	—	—
PI	$K_u/2.2$	$P_u/1.2$	—
PID	$K_u/1.7$	$P_u/2$	$P_u/8$

Balio enpiriko horiek honako irizpide arrazional hauetan oinarritzen dira:

- Kontrol proporzionalaren kasuan, 2-ko irabazi-marjina erabiltzen da.
- PI kontrolerako irabazi baxuagoa erabiltzen da akzio integralaren eragin desegonkortzaileak direla eta. Horregatik,  $K_c$  baxuago batek irabazi-marjina bera mantentzen du gutxi gorabehera.
- Akzio deribatuaren presentzia egonkortzailea dela eta,  $K_c$  irabazia handitu egin daiteke horregatik sistemaren egonkortasuna arriskuan jarri gabe.

#### 14.4. Adibidea

Har dezagun aintzat kontrol-begizta bat, non prozesua, elementu neurtzailea eta bukaerako kontrol-elementua honako transferentzia funtzio hauek ematen dituzten:

$$G_p = \frac{1}{(5s+1)(2s+1)} \quad G_m = \frac{1}{10s+1} \quad G_f = 1.0$$

Kalkulatu P, PI eta PID kontrolagailuen parametroak Ziegler-Nicholsten teknika erabiliz.

Akzio proporzionala bakarrik erabiliz, frekuentzia limitea honako adierazpen honetatik kalkulatu daiteke:

$$-180^\circ = \tan^{-1} - 5\omega_{co} + \tan^{-1} - 2\omega_{co} + \tan^{-1} - 10\omega_{co}$$

Adierazpen hori ebatziz,  $\omega_{co} = 0.415$  rad/min-ko balioa lortzen da. Frekuentzia horri dagokion magnitudeen arteko erlazioa honako adierazpen honek emana etorriko da:

$$\log B/A = \log \frac{1}{\sqrt{(5\omega_{co})^2 + 1}} + \log \frac{1}{\sqrt{(2\omega_{co})^2 + 1}} + \log \frac{1}{\sqrt{(10\omega_{co})^2 + 1}}$$

0.08-ren berdina da. Gero, azken irabazia  $K_u = 1/0.08 = 12.6$  izango da. Azken periodoa, beraz, honako hau izango da:  $P_u = 2\pi/\omega_{co} = 15.14$  min/ziklo.

Kontrolagailuen parametroak honako hauek izango dira Ziegler-Nicholsen metodoaren arabera:

- P kontrolagailua:  $K_c = 12.6/2 = 6.3$
- PI kontrolagailua:  $K_c = 12.6/2.2 = 5.7$ ,  $\tau_I = 15.14/1.2 = 12.62$ .
- PID kontrolagailua:  $K_c = 12.6/1.7 = 7.4$ ,  $\tau_I = 15.14/2 = 7.57$ ,  $\tau_D = 15.14/8 = 1.89$

Jarraian, PID kontrolagailuak sintonizatzeko ikusitako metodoen adierazpen analitikoak erakusten dira.

**14.2a. taula.** PID kontrolagailuen doiketa-erlazioak

Begizta irekiko entseguetan oinarritutako erlazioak eta 1. ordena + atzerapena duen funtzio bati doituriko erantzuna:

$$G_P = \frac{Ke^{-t_d s}}{\tau s + 1}$$

Kontrolagailua	Cohen-Coon	Ziegler-Nichols
P	$K_c K = \left( \frac{\tau}{t_d} + \frac{1}{3} \right)$	$K_c K = \left( \frac{\tau}{t_d} \right)$
PI	$K_c K = \left( 0.9 \frac{\tau}{t_d} + \frac{1}{12} \right)$ $\tau_I = t_d \frac{30 + 3(t_d / \tau)}{9 + 20(t_d / \tau)}$	$K_c K = 0.9 \frac{\tau}{t_d}$ $\tau_I = 3.3 t_d$
PID	$K_c K = \left( \frac{4}{3} \frac{\tau}{t_d} + \frac{1}{4} \right)$ $\tau_I = t_d \frac{32 + 6(t_d / \tau)}{13 + 8(t_d / \tau)}$ $\tau_D = t_d \frac{4}{11 + 2(t_d / \tau)}$	$K_c K = 1.2 \frac{\tau}{t_d}$ $\tau_I = 2 t_d$ $\tau_D = 0.5 t_d$

*ITAE minimoko irizpidea*

Kargan aldaketetarako:

$$K_c = \frac{a_1}{K} \left( \frac{\tau}{t_d} \right)^{b_1}, \quad \tau_I = \frac{\tau}{a_2} \left( \frac{t_d}{\tau} \right)^{b_2}, \quad \tau_D = a_3 \tau \left( \frac{t_d}{\tau} \right)^{b_3}$$

Kontrolagailua	a <sub>1</sub>	b <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	b <sub>2</sub>	a <sub>3</sub>	b <sub>3</sub>
P	0.490	1.084	—	—	—	—
PI	0.859	0.977	0.674	0.680	—	—
PID	1.357	0.947	0.842	0.738	0.381	0.995

Kontsigna-puntuan aldaketetarako:

$$K_c = \frac{a_1}{K} \left( \frac{\tau}{t_d} \right)^{b_1}, \quad \tau_1 = \frac{\tau}{a_2 - b_2 (t_d / \tau)}, \quad \tau_D = a_3 \tau \left( \frac{t_d}{\tau} \right)^{b_3}$$

Kontrolagailua	a <sub>1</sub>	b <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	b <sub>2</sub>	a <sub>3</sub>	b <sub>3</sub>
PI	0.586	0.916	1.030	0.165	—	—
PID	0.965	0.855	0.796	0.147	0.308	0.929

*IAE minimoko irizpidea*

Kargan aldaketetarako:

$$K_c = \frac{a_1}{K} \left( \frac{\tau}{t_d} \right)^{b_1}, \quad \tau_1 = \frac{\tau}{a_2} \left( \frac{t_d}{\tau} \right)^{b_2}, \quad \tau_D = a_3 \tau \left( \frac{t_d}{\tau} \right)^{b_3}$$

Kontrolagailua	a <sub>1</sub>	b <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	b <sub>2</sub>	a <sub>3</sub>	b <sub>3</sub>
P	0.902	0.985	—	—	—	—
PI	0.984	0.986	0.608	0.707	—	—
PID	1.435	0.921	0.878	0.749	0.482	1.137

Kontsigna-puntuan aldaketetarako:

$$K_c = \frac{a_1}{K} \left( \frac{\tau}{t_d} \right)^{b_1}, \quad \tau_1 = \frac{\tau}{a_2 - b_2 (t_d / \tau)}, \quad \tau_D = a_3 \tau \left( \frac{t_d}{\tau} \right)^{b_3}$$

Kontrolagailua	a <sub>1</sub>	b <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	b <sub>2</sub>	a <sub>3</sub>	b <sub>3</sub>
PI	0.758	0.861	1.020	0.323	—	—
PID	1.086	0.869	0.740	0.130	0.348	0.914

**14.2b. taula.** PID kontrolagailuen doiketa-erlazioak

Begizta itxiko entseuetan oinarritutako doiketa-erlazioak eta Ziegler-Nicholsen azken irabaziaren metodoa, azken irabazi proportzionalarekin ( $K_{cu}$ ) eta azken periodoarekin ( $P_u$ )

*Ziegler-Nicholsen azken irabaziaren metodoa*

Kontrolagailua

$$\begin{aligned}
 P & K_c = 0.5 K_{cu} \\
 PI & K_c = 0.455 K_{cu} \\
 & \tau_I = 0.833 P_u
 \end{aligned}$$

PID	1/4eko gainbehera-erlazioa	Gaundikin apur bat	Gaundikinik gabe
	$K_c = 0.6 K_{cu}$ $\tau_I = 0.5 P_u$ $\tau_D = 0.125 P_u$	$K_c = 0.33 K_{cu}$ $\tau_I = 0.5 P_u$ $\tau_D = 0.333 P_u$	$K_c = 0.2 K_{cu}$ $\tau_I = 0.5 P_u$ $\tau_D = 0.333 P_u$

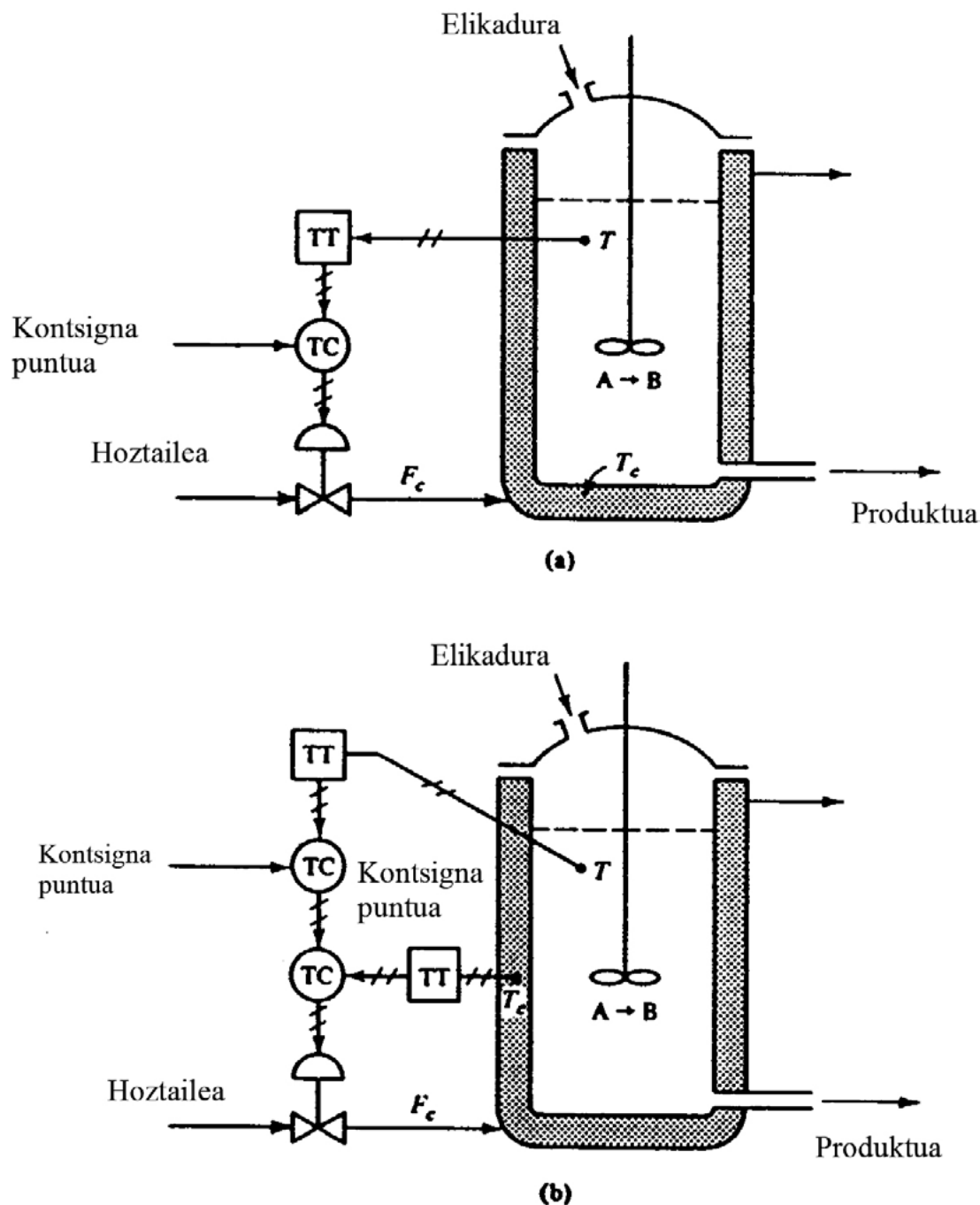
**14.3. taula.** Sintesi zuzenean edo barne-ereduko kontrolean oinarritutako PID kontrolagailuen doiketen laburpena

Eredua	Kontrolagailua	$K_c$	$\tau_I$	$\tau_D$
$\frac{K}{\tau s + 1}$	PI	$\frac{\tau}{K\tau_c}$	$\tau$	---
$\frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$	PID	$\frac{\tau_1 + \tau_2}{K\tau_c}$	$\tau_1 + \tau_2$	$\frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2}$
	PID $\tau_1 > \tau_2$ izanik	$\frac{\tau_1}{K\tau_c}$	$\tau_1$	$\tau_2$
	PID azpiindargetua	$\frac{\tau_1}{4K\xi^2\tau_2}$	$\tau_1$	—
$\frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1}$	PID	$\frac{2\xi\tau}{K\tau_c}$	$2\xi\tau$	$\frac{\tau}{2\xi}$
$\frac{K}{s(\tau s + 1)}$	PD	$\frac{1}{K\tau_c}$	—	$\tau$
$\frac{Ke^{-t_d s}}{\tau s + 1}$	PI	$\frac{\tau}{K(\tau_c + t_d)}$	$\tau$	—
	PID	$\frac{1}{K} \frac{(2\tau/t_d + 1)}{(2\tau_c/t_d + 1)}$	$\tau + \tau_d/2$	$\frac{\tau}{2\tau/t_d + 1}$
$\frac{Ke^{-t_d s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$	PID	$\frac{\tau_1 + \tau_2}{K(\tau_c + t_d)}$	$\tau_1 + \tau_2$	$\frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2}$
$\frac{K}{s}$	P	$\frac{1}{K\tau_c}$	—	—

#### 14.5. Teilakatze motako kontrola

Teilakatze motako kontrol-konfigurazio baten aldagai manipulatu bat eta neurtutako aldagai bat baino gehiago dugu. Noski, aldagai manipulatu bakar batekin, irteerako aldagai bakar bat kontrola daiteke.

Adibidea: har dezagun aintzat 14.7 irudiko nahaste perfektuko erreaktorea. Erreakzioa exotermikoa da eta erreakzio beroa erreaktorearen atorratik zirkulatzen duen hoztaile baten bidez barreiatzen da. Erreakzio-nahastearen tenperatura (T) nahi den balio baten konstante mantentzea da kontrol-helburua. Perturbazio posibleak elikaduraren tenperatura ( $T_1$ ) eta hoztailearen sarrerako tenperatura ( $T_2$ ) dira. Aldagai manipulatu hoztailearen fluxua ( $F_c$ ) da.



14.7. irudia. Nahaste perfektuko erreaktore baten tenperaturaren kontrola

Ohiko kontrol-begizta bat erabiltzen badugu,  $T$  tenperaturak askoz azkarrago erantzungo die  $T_i$ -ren aldaketei  $T_c$ -n aldaketei baino. Orduan, ohiko kontrol-begizta oso eraginkorra izango da  $T_i$ -ko aldaketak konpentsatzeko, eta ez hain eraginkorra,  $T_c$ -n aldaketak konpentsatzeko.

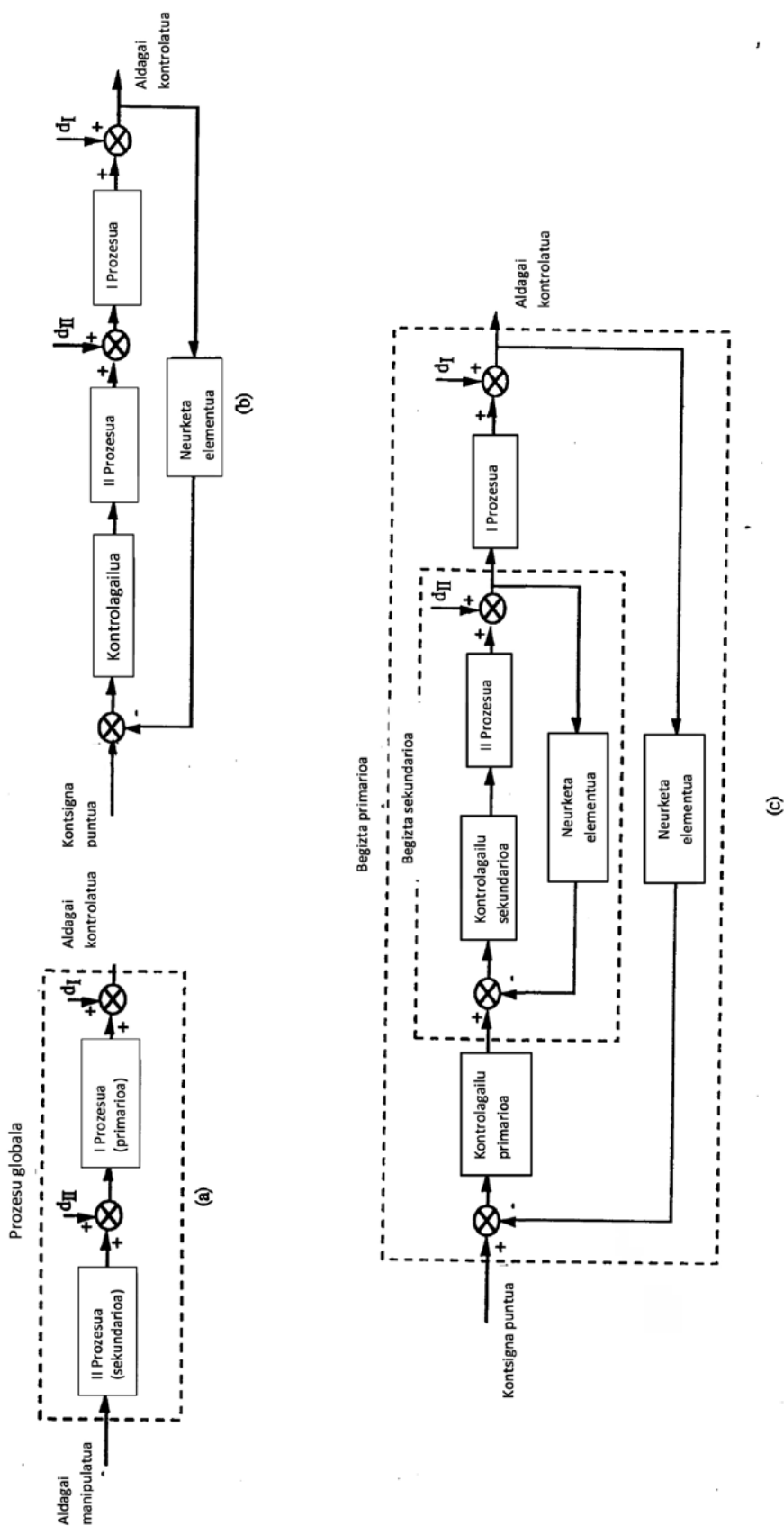
Kontrol-begizta horren erantzuna hobetu daiteke  $T_c$  neurtuz eta kontrol-ekintza bat burutuz bere eraginak erreazio nahastean nabariak izan baino lehen.  $T_c$  handitzen bada, hoztailearen emaria handitu behar dugu, eta,  $T_c$  txikitzen bada, emari hori txikitu behar dugu. Horrela, bi kontrol-

begizta izan ditzakegu bi neurketa ezberdin izanik ( $T$  eta  $T_c$ ), baina, aldagai manipulatu bera konpartituz,  $F_c$ . 14.7 irudian, bi kontrol-begizta horiek erakusten dira. Irudi horretan, honako hau ikus dezakegu:

- a)  $T$  (aldagai kontrolatua) neurtzen duen begizta nagusia edo primarioa da eta langileak emandako kontsigna-puntua erabiltzen du, bitartean,
- b)  $T_c$  neurtzen duen begiztak kontrolagailu primarioaren irteera erabiltzen du bere kontsigna-puntu moduan. Begizta horri begizta sekundarioa edo morroia deitzen zaio.

Har dezagun aintzat bi zatiz osatutako prozesu bat, 14.8a irudian erakusten den moduan. I prozesuak (primarioa) irteera moduan kontrolatu nahi den aldagaia du. II prozesuak (sekundarioa) irteera moduan kontrolatu nahi ez dugun aldagai bat du, baina kontrolatu nahi dugun aldagaian eragiten duena. 14.8b irudiak berrelkadura duen ohiko kontrol-sistema bat erakusten du eta 14.8c irudiak teilakatzeko-kontrolaren itxura orokorra erakusten du. Azken kontrolak argi frogatzen ditu teilakatzeko-kontrolaren abantailak.

Begizta sekundarioa iristen diren perturbazioak kontrolagailu sekundarioaren bidez zuzentzen dira kontrolagailu primarioak kontrolatzen duen aldagaiaren balioan eragin baino lehen

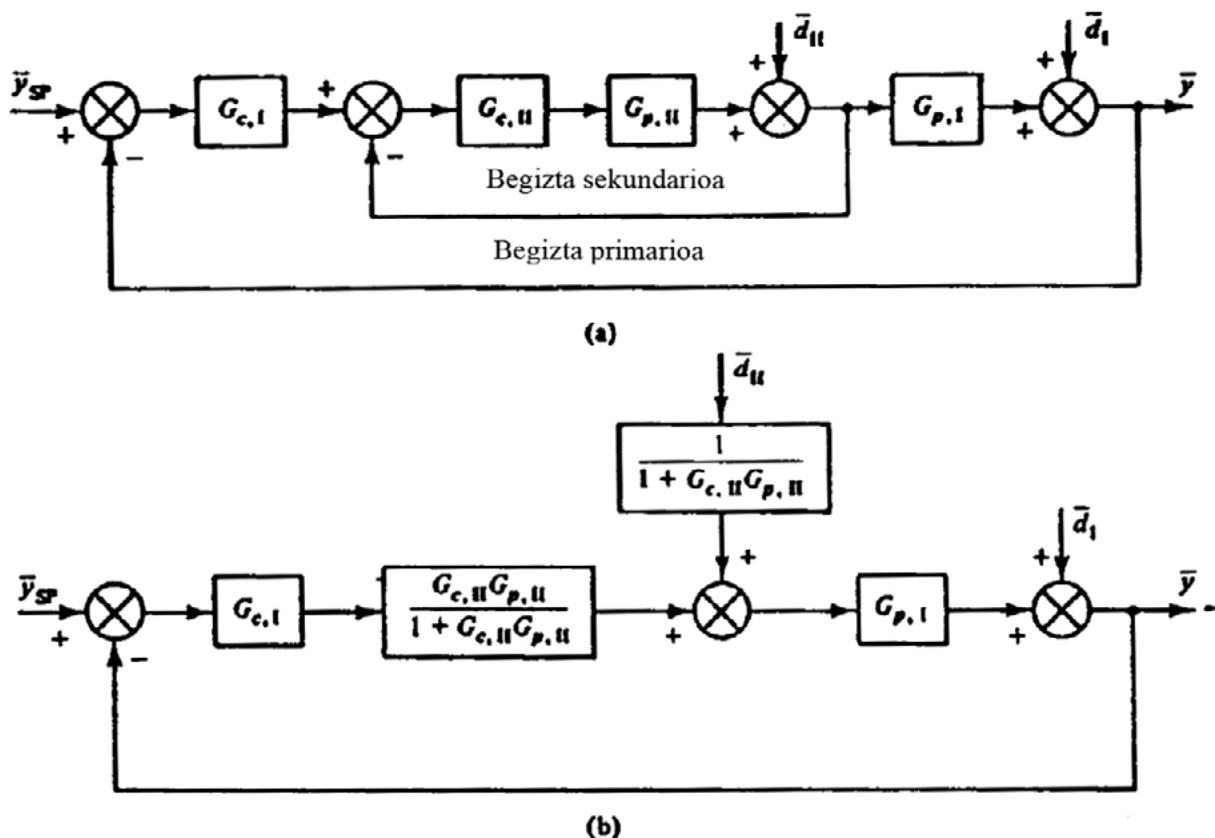


14.8. irudia. a) prozesu bat begizta irekian; b) berrelikaduradun ohiko begizta; c) teilkatze kontrola



Har dezagun aintzat 14.9 irudian erakutsitako teilakatze motako sistema baten blokeen diagrama. Sinplifikatzeko joko da neurketa-elementuen transferentzia-funtzioak 1 direla. Begizta primarioaren erantzuna begizta itxian begizta sekundarioaren dinamikak eragiten du. Azken horren begizta irekiko transferentzia-funtzioa honako hau da:

$$G_{\text{sekundarioa}} = G_{c,II} G_{p,II} \quad (14.37)$$



14.9. irudia. Teilakatze kontrol-sistema baten blokeen diagrama

Begizta sekundarioaren egonkortasuna bere ekuazio karakteristikoaren erroek determinatua dago:

$$1 + G_{c,II} G_{p,II} = 0 \quad (14.38)$$

14.9b irudiak bloke-diagrama orokorraren forma sinplifikatu bat erakusten du, non begizta sekundarioa elementutzat jotzen den. Begizta primarioarako begizta irekiko transferentzia-funtzio globala honako hau da:

$$G_{\text{primarioa}} = G_{c,I} \left( \frac{G_{c,II}G_{p,II}}{1 + G_{c,II}G_{p,II}} \right) G_{p,I} \quad (14.39)$$

Eta, ondorioz, honako hau izango da ekuazio karakteristikoa, zeinaren erroek begizta primarioaren egonkortasuna determinatuko duten:

$$1 + G_{c,I} \left( \frac{G_{c,II} G_{p,II}}{1 + G_{c,II} G_{p,II}} \right) G_{p,I} = 0 \quad (14.40)$$

### Ondorioak

Teilakatze-kontrol baten bi kontrolagailuak berrelikadura duten kontrolagailu estandarrek dira, P, PI, PID. Normalean, kontrolagailu proportzionala erabiltzen da begizta sekundarioan, baina, batzuetan, akzio integral txikia duen PI kontrolagailua erabiltzen da. Begizta sekundarioan offset apur bat egotea ez da garrantzitsua, helburua ez baita begizta horren irteerako aldagai kontrolatzea.

Begizta sekundarioaren dinamika lehenengoarena baino askoz azkarragoa da. Orduan, begizta sekundarioaren fase-atzerapena primarioarena baino txikiagoa izango da. Horrek honako ondorio hau dakar (konfigurazio mota hori erabiltzearen arrazoia dena): frekuentzia-muga begizta sekundarioarako primarioakoa baino handiagoa da. Horregatik, irabazi altuagoak erabil daitezke begizta sekundarioan sistemaren egonkortasuna arriskuan jarri gabe.

Teilakatze motako sistema baten bi kontrolagailuen doiketa bi etapetan gertatzen da:

- a) Lehenengo kontrolagailu sekundarioaren parametroak determinatzen dira orain arte ikusitako metodoen bat erabiliz. Erabili behar den transferentzia-funtzioa begizta irekian (14.37) ekuazioak emandakoa da.
- b) Jarraian lehen kalkulatu diren kontrolagailu sekundarioaren parametroekin sistema globalaren Boderen diagramatik abiatuz, frekuentzia limitea determinatzen da. Ziegler-Nicholsen metodoa erabiliz, kontrolagailu primarioaren parametroak kalkulatu dira. Begizta primarioaren transferentzia-funtzioa begizta irekian (14.39) ekuazioak emandakoa da.

### Diseinu-baldintzak

Kontrolagailu mota horien diseinu-irizpideak honako hauetan laburtu daitezke:

— Teilakatze-kontrola honako baldintza hauetan nahi da:

1. Kontrola begizta sinple batekin ez denean egokia gertatzen.
2. Neur daitekeen aldagai sekundario bat eskura dagoenean.

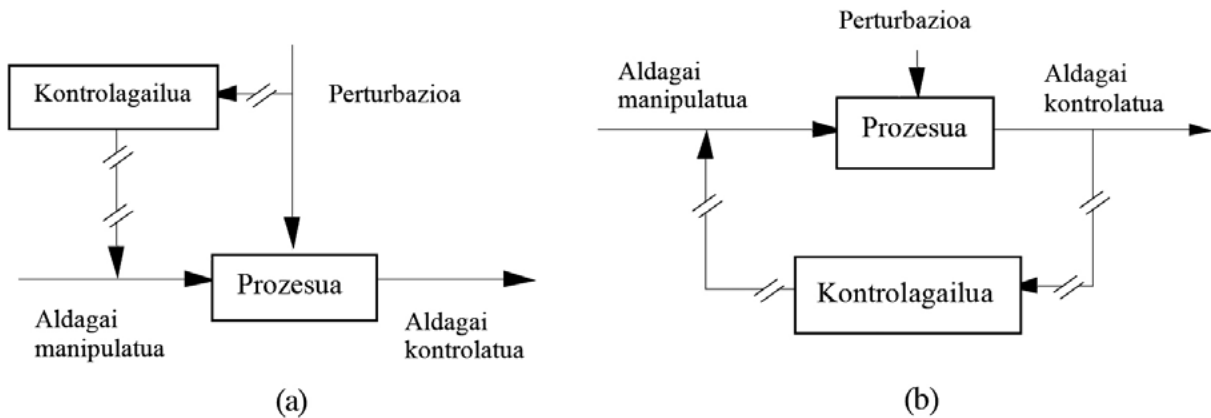
— Aldagai sekundario batek honako irizpide hauek bete behar ditu:

1. Perturbazio garrantzitsu baten gertaera adierazi behar du.
2. Aldagai manipulatuaren eta aldagai sekundarioaren artean, arrazoizko erlazio batek egon behar du.
3. Aldagai sekundarioaren dinamikak aldagai primarioarena baino azkarragoa izan behar du.

Lehenenik, bi irizpideek teilakatze motako kontrolaren aukeraketa zuzentzen dute. Kontrol-begizta sinple bat egokia ez denean bakarrik da beharrezkoa hobetzea, adibidez, teilakatze-kontrol batekin. Kontrol-begizta sinpleek portaera ona dute dinamikak azkarrak, atzerapena txikia, eta perturbazioak txikiak eta motelak direnean. Aldagai sekundario batek hiru irizpide bete behar ditu: lehenengo, adierazi behar du perturbazio garrantzitsua gertatzen ari dela. Noski, perturbazioak garrantzitsua izan behar du, hau da, eragin garrantzitsua izan behar du aldagai kontrolatua eta maiz gertatu behar du, edo ez da arrazoirik izango haren efektua arintzeko. Bigarrenik, aldagai manipulatuak aldagai sekundarioan eragin behar du. Erlazio kausal hori beharrezkoa da begizta-kontrol sekundario batek era egokian funtzionatzeko. Azkenik, bukaerako elementuaren eta aldagai sekundarioaren arteko dinamikak azkarragoa izan behar du aldagai sekundarioaren eta aldagai kontrolatu primarioaren artekoak baino. Arau orokor batek dio sekundarioak primarioak baino 3 aldiz azkarragoa izan behar duela.

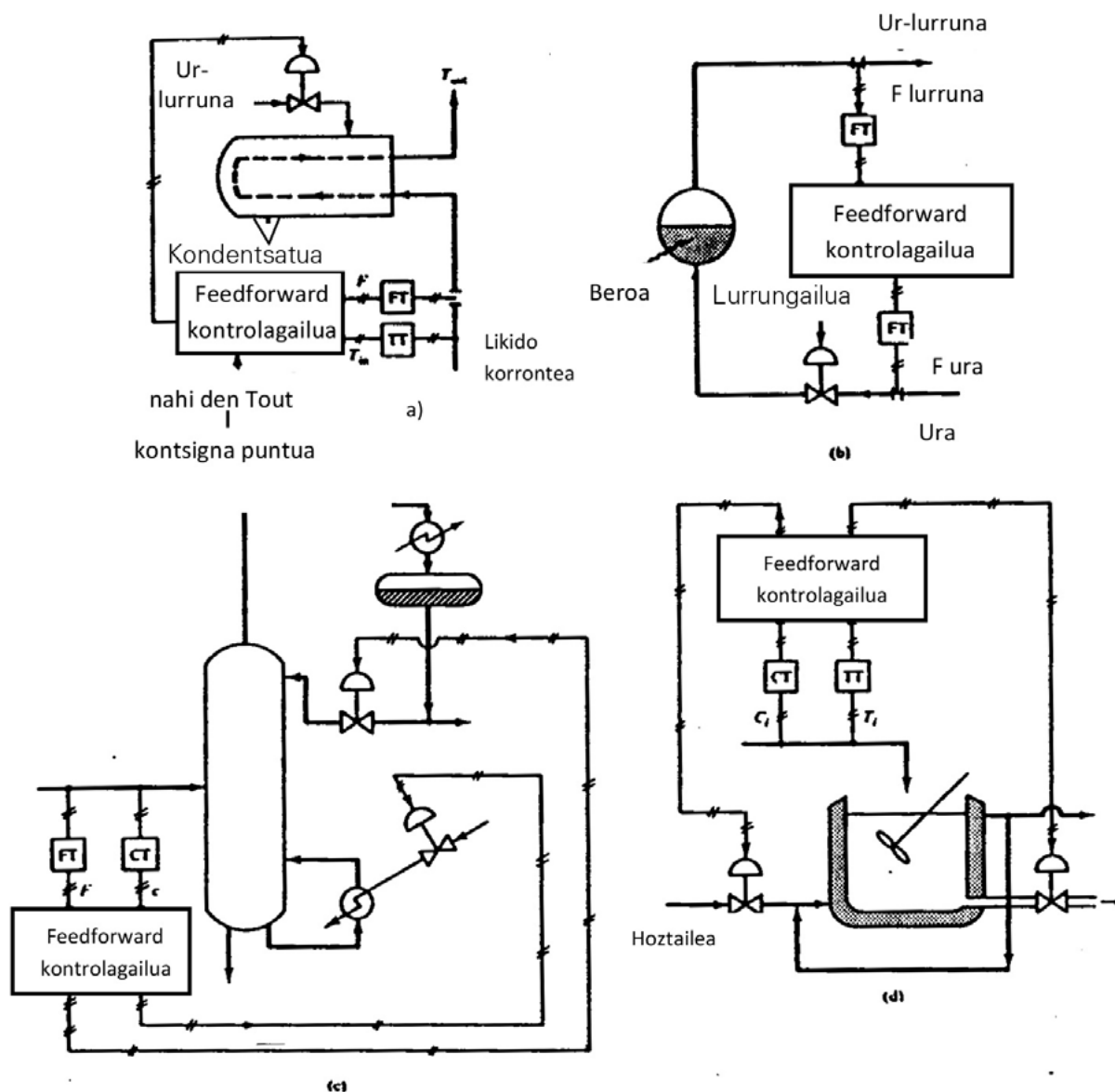
#### 14.6. Kontrola begizta zuzenean (*feedforward*)

14.10 irudian, era orokorrean, feedforward kontrol-sistema baten itxura orokorra erakusten da. Perturbazioa zuzenean neurtzen da eta prozesuan izango duen eragina aurreratzen da. Geroago, aldagai manipulatuak aldatzen da, eta, hala, perturbazioak prozesuan izango lukeen eragina erabat eliminatzen da. Kontrol-ekintza perturbazio-aldagaietan aldaketa bat nabaritu bezain azkar hasten da. Irudian ikusten den moduan, berrelikadura duen kontrol-begiztak aldagai kontrolatua aldaketa bat gertatu ondoren du eragina; feedforward begiztak, berriz, aldaketa horri aurre egiteko eran du eragina.



**14.10. irudia.** *Feedforward* kontrol-begizta baten eta berrelikadura duen beste kontrol-begizta baten egitura

14.11 irudian, prozesu kimikoetako ohiko feedforward kontrol-sistema batzuk erakusten dira.



14.11. irudia. Feedforward kontrolen adibideak

Feedforward kontrol batek zentzua izan dezan, honako irizpide hauek bete behar dira:

— Kontrola, begizta zuzenean, honako baldintza hauetan eduki nahi da:

1. kontrola berrelikadurarekin egokia bada
2. neur daitekeen aldagai bat begizta zuzenean badugu.

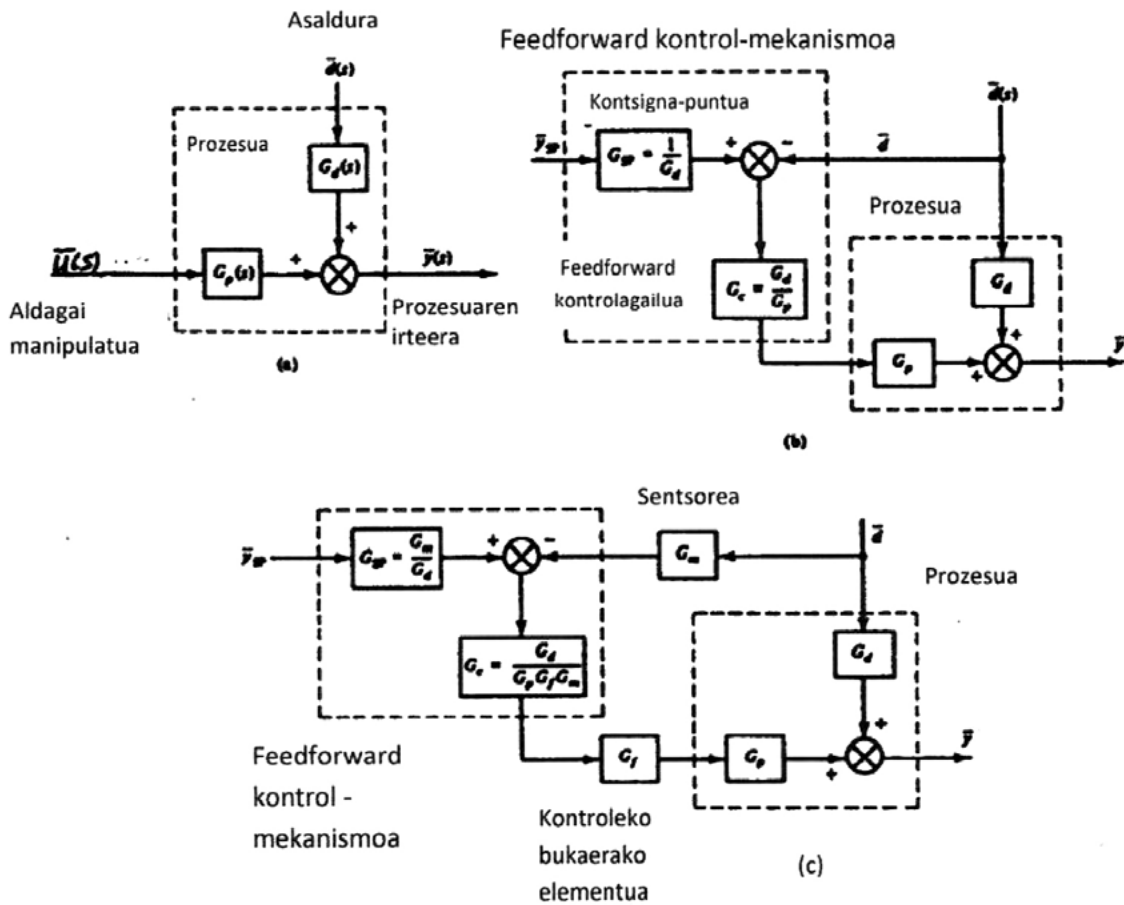
— Feedforward aldagai batek honako irizpide hauek bete behar ditu:

1. Perturbazio garrantzitsu baten gertaera adierazi behar du.
2. Ez da erlazio kausala egon behar aldagai manipulatuaren eta feedforward aldagaiaren artean.
3. Perturbazioaren dinamikak ez du aldagai manipulatu-irteerarena baino azkarragoa izan behar (kontrola berrelikadurarekin ere dagoenean).

*Feedforward* aldagaiak bete behar dituen irizpideei dagokienez, adierazi behar du lehenengo perturbazio garrantzitsu bat gertatzen ari dela, hau da, prozesuaren perturbazioaren eta neurtutako feedforward aldagaiaren artean korrelazio bat egon behar duela. Bigarrenik, feedforward aldagaia ez du aldagai manipulatuak eragin behar, ez baita berrelikadura-printzipioa erabiltzen. Azkenik, perturbazioaren dinamikak ez du aldagai manipulatuarena baino azkarragoa izan behar aldagai kontrolatuarenarekiko.

14.7. *Feedforward* kontrolagailuak diseinatzearen arazoa

Har dezagun aintzat 14.12 irudiko kontrolik gabeko prozesu baten blokeen diagrama.



14.12. irudia. Bloke-diagramak: a) prozesua; b) feedforward begizta; c) *feedforward* begizta-elementu neurtzaile eta bukaerako kontrol-elementuarekin

Prozesuaren irteera honako ekuazio honek emana dator:

$$\bar{y}(s) = G_p(s) \bar{u}(s) + G_d(s) \bar{d}(s) \tag{14.41}$$

Demagun  $\bar{y}_{sp}(s)$  prozesurako nahi den kontsigna-puntua dela.  $\bar{y}(s) = \bar{y}_{sp}(s)$  eginez, (16.5) ekuazioa honela geratuko litzateke:

$$\bar{y}_{sp}(s) = G_p(s) \bar{u}(s) + G_d(s) \bar{d}(s) \tag{14.42}$$

Ekuazioa hori  $\bar{u}(s)$ -rekiko ebatz daiteke eta aldagai manipulatuak izan behar duen balioa kalkulatu,  $\bar{y}(s) = \bar{y}_{sp}(s)$  izateko perturbazioan edo kontsigna-puntu aldaketak badaude. Orduan:

$$\bar{u}(s) = \left[ \frac{1}{G_d(s)} \bar{y}_{sp}(s) - \bar{d}(s) \right] \frac{G_d(s)}{G_p(s)} \quad (14.43)$$

(14.43) ekuazioak kontrol-sistemak izan behar duen itxura determinatzen du (14.12b irudia). Halaber, kontrol-mekanismoaren diseinua osatzen duten bi transferentzia-funtzioak  $G_c$  eta  $G_{sp}$  determinatzen ditu.

$$G_c(s) = \frac{G_d(s)}{G_p(s)} = \text{kontrolagailu nagusiaren transferentzia-funtzioa} \quad (14.44)$$

$$G_{sp}(s) = \frac{1}{G_d(s)} = \text{kontsigna-puntu elementuaren transferentzia-funtzioa} \quad (14.45)$$

Orain arte ikusitakoaz, honako hauek azpimarra ditzakegu:

- Feedforward kontrol-begiztak berrelikadura-begizta baten kanpoko ezaugarriak ditu. Kontsigna-puntuarekin konparatzen den elementu neurtzaile bat du eta konparaketa horren emaitza seinale eragilea da kontrolagailu nagusian.
- (14.44) eta (14.45) diseinu-ekuazioei erreparatzen badiegu, ikusten da feedforward kontrolagailua ezin daitekeela ohiko P, PI PID kontrolagailua izan. Helburu bereziko kalkulu makina bat da.
- Aurreko diseinu-ekuazioek erakusten dute feedforward kontrola, batez ere, prozesuaren ereduaren ( $G_p$ ,  $G_d$ ) ezagupen onaren menpekoa dela. Kontrol perfektu batek  $G_p$  eta  $G_d$ -ren ezagutza perfektua eskatuko luke, eta hori ezinezkoa da. Hori da kontrol mota horren desabantailarik nagusiena.
- 14.12b irudiko kontrol-sisteman ez da aintzat hartu perturbazioa neurtzen duen sentsore-elementua, ezta bukaerako kontrol-elementua ere. Bi elementu horiek barneratuta,  $G_c(s)$  eta  $G_{sp}(s)$  transferentzia-funtzioen diseinua aldatzen da. 14.12c irudiko sistema orokorra goa aintzat hartzen badugu, honako hau froga daiteke:

$$\bar{y}(s) = G_p G_f G_c G_{sp} \bar{y}_{sp} + [G_d - G_p G_f G_c G_m] \bar{d} \quad (14.46)$$

$G_c$  eta  $G_{sp}$  transferentzia-funtzioak honako bi eskakizun hauek betetzean kalkula daitezke:

- a) Kontrolagailuak gai izan behar du irteeran perturbazio-aldagaiaren aldaketa baten eragina guztiz elimintatzeko. Horrek ondorio gisa ekartzen du  $d$ -ren koefizienteak zero izan behar duela (14.46) ekuazioan:

$$G_d - G_p G_f G_c G_m = 0$$

edo

$$G_c = \frac{G_d}{G_p G_f G_m} \quad (14.47)$$

- b) Kontrol-mekanismoak gai izan behar du prozesuaren irteerak zehazki kontsigna-puntuaren edozein aldaketari jarrai diezaion eragiteko, hau da,  $\bar{y} = \bar{y}_{SP}$ . Horrek dakar  $\bar{y}_{SP}$ -ren koefizientea (14.46) ekuazioan 1 izan behar duela.

$$G_p G_f G_c G_{SP} = 1$$

edo

$$G_p G_f \left( \frac{G_d}{G_p G_f G_m} \right) G_{sp} = 1$$

eta, azkenik,

$$G_{sp} = \frac{G_m}{G_d} \quad (14.48)$$

(14.47) eta (14.48) ekuazioak (14.44) eta (14.45) ekuazioak baino orokorragoak dira, eta azken horiek  $G_m = G_f = 1$  denerako baliagarriak dira.

### *Feedforward kontrolagailuen diseinuko alderdi praktikoak*

Kontrolagailu horien diseinu-ekuazioek adierazten dute helburu bereziko makina-kalkuluak izango direla. Beren implementazio praktikoa oso sinplea da ordenagailu bat erabiltzen bada kontrolagailu moduan, baina oso zaila eta garestia, kontrolagailu analogikoak erailtzen badira. Hemen, kontrolagailu horien implementazio erraz batera daramaten sinplifikazio batzuk ikusiko ditugu.

Gehiago sinplifikatzeko joko dugu  $G_m = G_f = 1$ . Orduan, (14.44) eta (14.45) ekuazioak diseinurako oinarriak izango dira. Prozesuaren transferentzia-funtzioetako bakoitzak ( $G_p(s)$  eta  $G_d(s)$ ) bi elementu ditu: a) elementu estatikoa, irabazi estatikoa dena, eta b) elementu erabat dinamikoa, s-ren funtzio bat dena. Hau da:

$$G_p(s) = K_p G'_p(s) \quad \text{eta} \quad G_d(s) = K_d G'_d(s)$$

### FEEDFORWARD KONTROLAGAILUEN DISEINUA EGOERA ESTAZIONARIOAN

Feedforward kontrolagailu sinpleena eta implementatzen errazena egoera estazionariokoa da. Haren diseinurako balantzeak egoera estazionarioan erabili behar dira. Orduan, prozesuaren transferentzia-funtzioen elementu estatikoak bakarrik izan behar dira kontuan. Honela:

$$G_p = K_p \quad \text{eta} \quad G_d = K_d$$

Orduan, diseinuko transferentzia-funtzioak ( $G_c$  eta  $G_{SP}$ ) honako ekuazio hauek emango dituzte:

$$G_c = \frac{K_d}{K_p} \quad (14.49)$$

$$G_{sp} = \frac{1}{K_d} \quad (14.50)$$

eta horiek konstanteak baino ez dira.

FEEDFORWARD KONTROLAGAILU DINAMIKOEN DISEINUA

$G_p(s)$  eta  $G_d(s)$  transferentzia-funtzio zehatzak erabili beharrez, posible da hurbilketak erabiltzea eta emaitza onargarriak lortzea, eta horiek lehen ikusitako egoera estazionarioko kontrolagailuekiko hobekuntza dakarte.

Demagun  $G_p(s)$  eta  $G_d(s)$  beren 1. ordenako hurbilketen bidez adierazita datozela. Orduan:

$$G_c(s) = \frac{G_d(s)}{G_p(s)} = \frac{1/(\alpha s + 1)}{1/(\beta s + 1)} = \frac{\beta s + 1}{\alpha s + 1} \quad (14.51a)$$

eta

$$G_{sp}(s) = \frac{1}{G_d(s)} = \alpha s + 1 \quad (14.51b)$$

(14.51a) ekuazioak emandako kontrolagailua aurreratze-atzeratze elementua deitzen da  $\beta s + 1$ -k fasearen aurrerakuntza bat sartzen duelako, eta  $1/(\alpha s + 1)$  terminoak, atzeratze bat.  $\alpha$  eta  $\beta$  kontrolagailuaren parametro doigarriak dira. Elementu hori erabiliena da feedforward kontrol dinamikoan. Erraz erosten dira eta ez dira helburu bereziko kalkulu analogikoko elementuak bezain garestiak.

*Feedforward kontrolagailuak eraikitzeko posibilitate fisikoa*

Har dezagun aintzat honako transferentzia funtzio hauek dituen prozesu bat:

$$G_p = \frac{10e^{-0.5s}}{2s + 1} \quad \text{eta} \quad G_d = \frac{2e^{-0.1s}}{2s + 1}$$

Feedforward kontrolagailu nagusiaren transferentzia-funtzioa honako adierazpen honek emanda etorriko da:

$$G_c = \frac{G_d}{G_p} = \frac{1}{5} e^{0.4s}$$

Termino esponentzialak adierazten du perturbazio-aldagaiaren etorkizuneko balioak behar ditugula aldagai manipulatuaren oraingo balioak kalkulatu ahal izateko. Logikoa denez, hori ezinezkoa da. Kasu honetan, ezinezkoa da ekuazio horrek adierazitako kontrolagailua fisikoki eraikitzea eta ezin da egoera errealetan aplikatu.



# Oinarrizko bibliografia

Stephanopoulos, G. *Chemical Process Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1984).

Coughanowr, D.R. *Process Systems Analysis and Control*, 2.<sup>a</sup> ed., McGraw-Hill, New York (1991).

Seborg, D.E., Edgar, T.F., Mellichamp, D.A. *Process Dynamics and Control*, John Wiley and Sons, Nueva York (1989).

Ollero de Castro, P., Fernández, E. *Control e instrumentación de procesos químicos*, Editorial Síntesis, Madrid (1997).

Dorf, Richard C. *Sistemas modernos de control*, 2.<sup>a</sup> ed. en español, Addison-Wesley, Iberoamericana, Buenos Aires (1989).

**UNIBERTSITATEKO ESKULIBURUAK**  
**MANUALES UNIVERSITARIOS**

**INFORMAZIOA ETA ESKARIAR • INFORMACIÓN Y PEDIDOS**

UPV/EHUko Argitalpen Zerbitzua • Servicio Editorial de la UPV/EHU  
argitaletxea@ehu.eus • editorial@ehu.eus  
1397 Posta Kutxatila - 48080 Bilbo • Apartado 1397 - 48080 Bilbao  
Tfn.: 94 601 2227 • [www.ehu.eus/argitalpenak](http://www.ehu.eus/argitalpenak)

eman ta zabal zazu



Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea