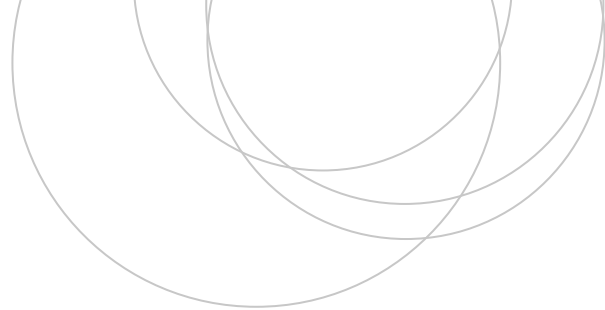




Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

ZIENTZIA
ETA TEKNOLOGIA
FAKULTATEA
FACULTAD
DE CIENCIA
Y TECNOLOGÍA



Gradu Amaierako Lana / Trabajo Fin de Grado
Fisikako Gradua / Grado en Física

Cuantización Faddeev-Jackiw

Formalismo para cuantizar Lagrangianos de primer orden

Egilea/Autor/a:

Aitor Fernández García

Zuzendariak/Directores/as:

Iñigo Luis Egusquiza

Enrique Rico

Índice

1. Introducción	2
1.1. Mecánica Lagrangiana y Hamiltoniana	3
1.2. Derivada funcional	6
1.3. Teoría clásica de campos	6
1.4. Cuantización canónica	8
1.5. Sistemas <i>gauge</i>	9
1.6. Método de Dirac para Lagrangianos singulares	10
2. Formalismo de Faddeev-Jackiw	11
2.1. Sistema mecánico	12
2.2. Extensión a teorías de campos	16
3. Aplicación del método a varios ejemplos	18
3.1. Sistemas de mecánica clásica	18
3.1.1. Ejemplo <i>gauge</i>	18
3.1.2. Buen sistema Hamiltoniano	21
3.1.3. Hojman-Urrutia	24
3.2. Ejemplo de campos	26
3.2.1. Campo de Schrödinger acoplado a un campo vectorial	26
4. Conclusiones	30

1. Introducción

En la mecánica cuántica, el punto de partida es el operador de evolución, que está determinado por el Hamiltoniano. Como el Hamiltoniano es una función que también aparece en el contexto de la mecánica clásica, se abren varios caminos hacia la cuantización de un sistema físico una vez conocida esta función en la versión clásica, entre los que destacan la Cuantización Canónica y la Integral de Caminos de Feynman.

Una de las principales guías para modelizar un sistema físico es la estructura de simetrías que posee. Por ello, es más sencillo modelizar un sistema desde la formulación Lagrangiana que desde la Hamiltoniana, ya que se puede hacer uso del Teorema de Emmy Noether, que relaciona cantidades conservadas con simetrías del sistema. Tras haber encontrado un Lagrangiano que sirva para describir el sistema físico, el paso siguiente es obtener el Hamiltoniano, tarea sencilla en caso de que el Lagrangiano no sea singular, ya que este proceso consiste en realizar una transformada de Legendre.

Cuando el Lagrangiano es singular, cosa que ocurre para los de primer orden en particular, se dice que da lugar a un sistema dinámico ligado. Tradicionalmente, el método que se usa para tratar estos sistemas ligados es el método que propuso Dirac. Sin embargo, existen otras propuestas más novedosas que han tratado de simplificar el análisis de Dirac, y una de esas propuestas es el cada vez más extendido formalismo de Faddeev y Jackiw.

El presente trabajo tiene como objetivo comprender la cuantización de sistemas clásicos singulares de una manera simple, sin considerar la cuantización geométrica y sin introducir los *fantasmas* de Faddeev-Popov necesarios para una formulación de integral de caminos consistente. De esta manera, se adquirirán conocimientos técnicos sobre métodos aplicables a sistemas de tecnologías cuánticas.

Para ello, en primer lugar se presenta un breve repaso de la Mecánica Lagrangiana y Hamiltoniana [1] con el fin de dejar todos los ingredientes preparados para hacer la traducción “Teoría Clásica \rightarrow Teoría Cuántica”. La sección 1.2. es un pequeño paréntesis matemático que sirve para establecer algunas cuestiones referentes a la derivada funcional que serán necesarias en la sección 1.3., que trata sobre teoría clásica de campos. En la sección 1.4. se presenta brevemente en qué consiste la Cuantización Canónica [2] cuando previamente se ha obtenido una descripción Hamiltoniana del sistema clásico. Antes de presentar los métodos para tratar Lagrangianos singulares, en la sección 1.5 se dan algunas nociones sobre sistemas *gauge*, ya que estos están íntimamente relacionados con algunas teorías singulares. Tras esto, en la sección 1.6. se describe el método que desarrolló Dirac [3, 4] para tratar Lagrangianos singulares, con el objetivo de poder compararlo posteriormente con el formalismo de Faddeev y Jackiw [5, 6, 7], explicado con detalle en la sección 2., tanto para mecánica como para teoría de campos. A continuación, en la sección 3. se aplica este formalismo a varios ejemplos, entre los que se incluye uno de campos, que dan cuenta de todas las circunstancias que se pueden dar al tratar con un Lagrangiano de primer orden. Finalmente, en la sección 4. se compararán ambos métodos, con el fin de poner de manifiesto las diferencias entre ellos.

1.1. Mecánica Lagrangiana y Hamiltoniana

La mecánica Lagrangiana es una formulación alternativa de la mecánica de Newton. Parte del principio de D'Alembert, y llega a las ecuaciones de Euler-Lagrange que, para un sistema mecánico, tienen la siguiente forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \quad (1.1)$$

donde $L(q, \dot{q}; t)$ es el Lagrangiano del sistema (diferencia entre la energía cinética y la energía potencial para sistemas conservativos), q^i son las n coordenadas generalizadas del *espacio de configuraciones*, y \dot{q}^i las velocidades generalizadas, es decir, la derivada temporal de las coordenadas generalizadas. Es importante notar que estas dos variables, a pesar de ser una la derivada temporal de la otra, son argumentos independientes del Lagrangiano. Otra característica notable es que añadir una derivada temporal total al Lagrangiano no modifica las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Desde un punto de vista geométrico [1], el *espacio de configuraciones* \mathbb{Q} tiene estructura de variedad diferenciable, y q^i son las coordenadas de un punto q de esa variedad. Si $q^i(t)$ define una trayectoria en \mathbb{Q} , las velocidades generalizadas \dot{q}^i serán las componentes del vector tangente a la trayectoria en el punto q . De esta manera, en cada punto $q \in \mathbb{Q}$ de la variedad de configuraciones se puede construir un espacio vectorial tangente $\mathbf{T}_q\mathbb{Q}$, donde “vivirán” todas las velocidades generalizadas \dot{q}^i posibles en q . Uniendo todos los espacios tangentes en cada punto de la variedad, se obtiene el fibrado tangente (o variedad tangente) $\mathbf{T}\mathbb{Q}$. En esta nueva variedad, cada punto está especificado por las coordenadas (q^i, \dot{q}^i) , de modo que el Lagrangiano es una función en $\mathbf{T}\mathbb{Q}$ sobre los reales¹.

La formulación Lagrangiana se sobrepone a la mecánica Newtoniana en varias cuestiones. Por una parte, la segunda Ley de Newton es una relación vectorial, por lo que la forma de las ecuaciones de cada componente dependerá de las coordenadas elegidas para describir el sistema. Esto no ocurre en la formulación Lagrangiana, ya que la forma de las ecuaciones (1.1) es la misma para cualquier elección de coordenadas. Por otro lado, para poder hacer una descripción Newtoniana de un sistema mecánico necesitamos conocer todas las fuerzas involucradas, incluidas las fuerzas de ligadura (en caso de que existan), tarea ardua en ocasiones. Sin embargo, en la formulación Lagrangiana no es necesario conocer las fuerzas de ligadura, sino cuáles son las ligaduras en sí. Además, una vez resueltas las ecuaciones dinámicas, podemos obtener también información acerca de las fuerzas que causan esas ligaduras, por lo que las ventajas son considerables.

Otra característica importante de las ecuaciones de Euler-Lagrange es que surgen de un problema variacional. Es decir, si tuviéramos un funcional S de unas ciertas funciones $q^i(t)$

$$S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t), \dot{q}(t); t) \quad (1.2)$$

¹ Más concretamente, se trata de una función en $\mathbf{T}\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ sobre los reales, ya que $t \in \mathbb{R}$ también puede ser un argumento del Lagrangiano.

y quisiéramos encontrar cuáles son las funciones que hacen que S sea extremal respecto a pequeñas variaciones² de $q^i(t)$, las ecuaciones que tendrían que satisfacerse son precisamente las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.1). Este hecho permite formular la física desde un punto de vista diferente, más fundamental, que resulta más adecuado y ventajoso para describir sistemas en los que es más complicado conocer cuáles son las fuerzas que actúan. En vez de partir del principio de D'Alembert, lo que se hace es postular una acción S que sea invariante bajo las transformaciones de simetría que caracterizan al sistema físico que queremos estudiar. Después, partiendo del principio de acción estacionaria o principio de Hamilton, se encuentran las ecuaciones dinámicas. El principio de Hamilton establece que la evolución de un sistema físico está dada por las trayectorias $q^i(t)$ que hacen que la acción (1.2) sea extremal.

Otra función que resulta muy útil a la hora de tratar un sistema físico es el Hamiltoniano. Partiendo de un Lagrangiano, la manera de obtenerlo es realizando una transformada de Legendre. Esta transformación hace que la nueva función H esté definida sobre el fibrado cotangente $\mathbf{T}^*\mathbb{Q}$, que da estructura matemática al espacio de fases, donde cada punto estará especificado por las coordenadas (q^i, p_i) , siendo p_i el momento canónico conjugado a la coordenada generalizada q^i , definido como

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}. \quad (1.3)$$

Si expresamos ahora el Lagrangiano en función de (q, p) en lugar de (q, \dot{q}) , el Hamiltoniano del sistema es

$$H(q, p) = p_i \dot{q}^i(q, p) - L(q, \dot{q}(q, p)). \quad (1.4)$$

Como puede verse en esta definición, para poder construir el Hamiltoniano es necesario poder escribir las velocidades generalizadas en función de los momentos. Es decir, es necesario que la función (1.3) sea invertible³. En caso de que esto no se pueda hacer, estaremos tratando con un **Lagrangiano singular**.

Cuando sí se puede construir limpiamente el Hamiltoniano, las ecuaciones dinámicas que surgen son las llamadas *ecuaciones canónicas de Hamilton*

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q^i} \\ \dot{q}^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

² Variaciones que se anulen en $t = t_1$ y $t = t_2$.

³ La condición para que esto suceda es que el rango de la matriz Hessiana $[\partial^2 L / (\partial \dot{q} \partial \dot{q})]$ sea máximo, lo que es equivalente a que su determinante sea distinto de cero.

de modo que las n ecuaciones de segundo orden de Euler-Lagrange (1.1) se convierten en $2n$ ecuaciones de primer orden.

La evolución temporal de cualquier variable dinámica $f(q, p)$ definida en el espacio de fases, siempre y cuando se cumplan las ecuaciones de Hamilton (1.5), está dada por ⁴

$$\frac{df(q, p)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i = \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} = \{f, H\}_P, \quad (1.6)$$

donde $\{A, B\}_P$ es el corchete de Poisson⁵ canónico, definido de la siguiente manera para dos funciones cualesquiera en el espacio de fases

$$\{A(q, p), B(q, p)\}_P = \frac{\partial A}{\partial q^i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q^i}. \quad (1.7)$$

Resulta útil agrupar todas las coordenadas del espacio de fases $\xi^a = (q^i, p_i)$, $a = 1, \dots, 2n$, de manera que el corchete de Poisson de dos funciones cualesquiera se puede escribir como

$$\{A(\xi), B(\xi)\}_P = \frac{\partial A}{\partial \xi^a} \omega^{ab} \frac{\partial B}{\partial \xi^b}, \quad (1.8)$$

donde $[\omega^{\cdot\cdot}] = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{n \times n} \\ -\mathbb{1}_{n \times n} & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz simpléctica canónica.

Si se particulariza la expresión (1.6) para estas nuevas coordenadas, las ecuaciones (1.5) se pueden condensar en

$$\dot{\xi}^a = \{\xi^a, H\}_P = \{\xi^a, \xi^b\}_P \frac{\partial H}{\partial \xi^b} = \omega^{ab} \frac{\partial H}{\partial \xi^b}, \quad (1.9)$$

donde la segunda igualdad se sigue de (1.8).

Como caso particular, el corchete de Poisson de las coordenadas del espacio de fases está dado por

$$\{q^i, p_j\}_P = \delta_j^i. \quad (1.10)$$

⁴ Si f también depende explícitamente del tiempo, se añade el término $\partial f / \partial t$ en la ecuación (1.6).

⁵ Tres características fundamentales del corchete de Poisson es que es bilineal, antisimétrico y satisface la identidad de Jacobi; propiedades que definen una estructura de álgebra de Lie.

1.2. Derivada funcional

Antes de empezar la sección de teoría clásica de campos, conviene hacer un breve paréntesis para establecer ciertas herramientas matemáticas que se van a necesitar en el resto del trabajo. Sea $F[\psi(x), \chi(x), \dots]$ un funcional de varios campos. La derivada funcional de F con respecto a uno de ellos está dada por

$$\frac{\delta F[\psi(x), \chi(x), \dots]}{\delta \psi(x')} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(F[\psi(x) + \varepsilon \delta(x, x'), \chi(x), \dots] - F[\psi(x), \chi(x), \dots] \right). \quad (1.11)$$

Un tipo de funcional muy frecuente, y por lo tanto de especial interés, es el que tiene la forma $F[\psi(x), \chi(x), \dots] = \int dx \mathcal{F}(\psi(x), \chi(x), \dots)$. Para este tipo de funcionales, (1.11) se convierte en

$$\begin{aligned} \frac{\delta F[\psi(x), \chi(x), \dots]}{\delta \psi(x')} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int dx \left(\mathcal{F}(\psi(x) + \varepsilon \delta(x, x'), \chi(x), \dots) - \mathcal{F}(\psi(x), \chi(x), \dots) \right) = \\ &= \int dx \delta(x, x') \frac{\partial}{\partial \psi(x)} \left(\mathcal{F}(\psi(x), \chi(x), \dots) \right) = \frac{\partial}{\partial \psi(x')} \left(\mathcal{F}(\psi(x'), \chi(x'), \dots) \right). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Una función de uno o varios campos también se puede interpretar como un funcional que devuelve el valor de dicha función en cierto punto. Por ejemplo,

$$\mathcal{F}(\psi(y), \chi(y), \dots) = \Phi[\psi(x), \chi(x), \dots] = \int dx \delta(x, y) \mathcal{F}(\psi(x), \chi(x), \dots), \quad (1.13)$$

y su derivada funcional, según (1.12), es

$$\frac{\delta \mathcal{F}(\psi(y), \chi(y), \dots)}{\delta \psi(x')} = \delta(y, x') \frac{\partial}{\partial \psi(x')} \left(\mathcal{F}(\psi(x'), \chi(x'), \dots) \right). \quad (1.14)$$

1.3. Teoría clásica de campos

En teoría de campos, la acción deja de ser un funcional de las trayectorias y pasa a serlo de los propios campos. Al igual que en los sistemas mecánicos, se construye como la integral temporal del Lagrangiano

$$S[\phi(x, t)] = \int dt L[\phi(x, t), \dot{\phi}(x, t)], \quad (1.15)$$

que ahora dejará de ser una función para convertirse en un funcional de $2n$ campos indepen-

dientes ϕ^i y $\dot{\phi}^i$, y se construye de la siguiente manera

$$L[\phi(x, t), \dot{\phi}(x, t)] = \int d^N x \mathcal{L}\left(\phi(x, t), \nabla\phi(x, t), \dot{\phi}(x, t)\right), \quad (1.16)$$

donde \mathcal{L} es la **densidad Lagrangiana**, función de los argumentos aquí explícitos. ∇ hace referencia a derivadas espaciales de los campos, y N es el número de dimensiones espaciales en las que “viven” los campos.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para el caso de teoría de campos, al igual que en el caso mecánico, se derivan de imponer que la acción (1.15) sea estacionaria bajo pequeñas variaciones de los campos $\phi^i(x, t)$. Hay que tener en cuenta que, aunque ϕ y $\dot{\phi}$ sean argumentos independientes del Lagrangiano, cuando se haga una variación de los campos ϕ a la acción, $\dot{\phi}$ también cambiará, al ser $\dot{\phi}^i(x, t) = \partial\phi^i(x, t)/\partial t$. Con estas consideraciones, se obtiene que las ecuaciones que tienen que cumplirse son

$$\frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi^i(x, t)} = \frac{\delta L[\phi, \dot{\phi}]}{\delta\phi^i(x, t)} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta L[\phi, \dot{\phi}]}{\delta\dot{\phi}^i(x, t)} \right) = 0. \quad (1.17)$$

El hecho de tomar ϕ y $\dot{\phi}$ como campos independientes del funcional Lagrangiano permite definir un momento conjugado como

$$\pi_i(x, t) = \frac{\delta L[\phi, \dot{\phi}]}{\delta\dot{\phi}^i(x, t)}, \quad (1.18)$$

es decir, el momento conjugado a $\phi^i(x, t)$ es la derivada funcional del Lagrangiano con respecto al campo $\dot{\phi}^i(x, t)$. De manera análoga al caso discreto, se puede definir una densidad Hamiltoniana⁶

$$\mathcal{H}\left(\phi(x, t), \pi(x, t)\right) = \pi_i(x, t)\dot{\phi}^i\left(\phi(x, t), \pi(x, t)\right) - \mathcal{L}\left(\phi(x, t), \pi(x, t)\right), \quad (1.19)$$

cuya integral espacial es el Hamiltoniano $H[\phi, \pi]$. De las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.17), con la definición de los momentos conjugados (1.18), las ecuaciones de Hamilton para los campos son

$$\begin{aligned} \dot{\phi}^i(x, t) &= \frac{\delta H}{\delta\pi_i(x, t)} \\ \dot{\pi}_i(x, t) &= -\frac{\delta H}{\delta\phi^i(x, t)}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

También se puede definir un corchete de Poisson para campos, que permita calcular la evo-

⁶ Siempre y cuando se pueda invertir (1.18) y escribir $\dot{\phi} = \dot{\phi}[\phi, \pi]$.

lución temporal de una variable dinámica mediante su “conmutación” con el Hamiltoniano. Siendo $\psi(y, t)$ y $\chi(z, t)$ campos evaluados en dos puntos espaciales distintos y en el mismo instante temporal, el corchete de Poisson viene dado por

$$\{\psi(y, t), \chi(z, t)\}_P = \int d^N x \left(\frac{\delta\psi(y, t)}{\delta\phi^i(x, t)} \frac{\delta\chi(z, t)}{\delta\pi_i(x, t)} - \frac{\delta\psi(y, t)}{\delta\pi_i(x, t)} \frac{\delta\chi(z, t)}{\delta\phi^i(x, t)} \right). \quad (1.21)$$

Haciendo $\xi^a(x, t) = (\phi^i(x, t), \pi_i(x, t))$, las ecuaciones de Hamilton pueden ser escritas como

$$\begin{aligned} \dot{\xi}^a(x, t) &= \{\xi^a(x, t), H\}_P = \int d^N y \{\xi^a(x, t), \xi^b(y, t)\}_P \frac{\delta H}{\delta \xi^b(y, t)} = \\ &= \int d^N y \omega^{ab}(x, y) \frac{\delta H}{\delta \xi^b(y, t)}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$\text{con } [\omega^{ab}(x, y)] = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{n \times n} \\ -\mathbb{1}_{n \times n} & 0 \end{pmatrix} \delta(x, y).$$

1.4. Cuantización canónica

En lo que a cuantización se refiere, la formulación Lagrangiana y Hamiltoniana resultan muy útiles, ya que partiendo de un Lagrangiano clásico se abren caminos para llegar a una descripción cuántica del sistema. La expresión (1.6) tiene una clara similitud con la ley de evolución de un observable en la imagen de Heisenberg de la mecánica cuántica [2], donde en vez de aparecer los corchetes de Poisson, aparece el conmutador de operadores. Más específicamente, la sustitución es

$$\{A, B\}_P \rightarrow -\frac{i}{\hbar} [\hat{A}, \hat{B}]. \quad (1.23)$$

Además, bajo esta sustitución, la expresión (1.10) se convierte en las relaciones canónicas de conmutación de la mecánica cuántica.

Este paralelismo aporta un camino bastante directo a la cuantización, denominado *cuantización canónica*, que consiste en obtener un Hamiltoniano clásico escrito en términos de variables con corchete de Poisson canónico, convertir las variables del espacio de fases en operadores⁷, e imponer relaciones de conmutación canónicas entre ellos, es decir

$$H(q, p) \rightarrow \hat{H}(\hat{q}, \hat{p}) \quad \text{y} \quad [\hat{q}^i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_j^i. \quad (1.24)$$

⁷ Esta forma de cuantización es ambigua debido a, por ejemplo, problemas de ordenación [8]. Sin embargo, no es el objetivo de este trabajo tratar estas cuestiones.

1.5. Sistemas *gauge*

Antes de presentar el método propuesto por Dirac para tratar Lagrangianos singulares, merece la pena comentar de manera breve qué son los sistemas *gauge* [4], ya que estos cobran especial relevancia en el contexto de sistemas ligados o singulares.

Un sistema *gauge* es un sistema cuya descripción posee más grados de libertad de los que son físicamente significantes, por eso una característica de estos sistemas es que en la solución general a las ecuaciones dinámicas aparecen funciones arbitrarias del tiempo. Una de las razones principales a la hora de describir un sistema con más grados de libertad de los que tienen significado físico es hacer la descripción más simple o más manifiestamente simétrica. Por ejemplo, el Lagrangiano para el campo electromagnético es manifiestamente invariante-Lorentz cuando está escrito en función del potencial vector A^μ , pero esta invariancia no se ve tan fácilmente cuando se escribe en función de los campos físicos, es decir, los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} . Otro motivo por el que se hace que una teoría sea *gauge* es para hacer que una simetría global se convierta en local. Un ejemplo para entender esta cuestión es la densidad Lagrangiana asociada a la ecuación de Schrödinger

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}(\psi^* \dot{\psi} - \dot{\psi}^* \psi) - \frac{1}{2m} \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi - V \psi^* \psi. \quad (1.25)$$

Esta densidad Lagrangiana es invariante bajo la transformación global $\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi$, donde α es una constante. En cambio, si α dependiera del punto del espaciotiempo $\alpha(x, t)$, la transformación local o *gauge* $\psi \rightarrow e^{i\alpha(x,t)} \psi$ ya no sería una simetría de (1.25). Las transformaciones *gauge* son aquellas que relacionan distintas maneras de describir **el mismo** estado físico, a diferencia de las transformaciones globales de simetría, que relacionan dos estados distintos pero equivalentes, es decir, que poseen las mismas propiedades. Mediante el teorema de Emmy Noether, las transformaciones de simetría (continuas) corresponden a cantidades conservadas.

Una manera de hacer que esta transformación *gauge* sí sea una simetría de la densidad Lagrangiana, y que por lo tanto el sistema sea invariante bajo el grupo de simetría $U(1)$, es introducir una derivada covariante. En el caso de $U(1)$, la derivada covariante que hay que introducir es $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$, donde g es la constante de acoplamiento y A_μ son los *campos gauge*. Los nuevos campos, que pueden tanto tener dinámica como ser campos de fondo, han de cambiar a la vez que ψ para que (1.25) sea invariante *gauge* cuando esté escrita con la derivada covariante en lugar de la ordinaria. Para que esto sea así, tiene que suceder $D_\mu \psi \rightarrow e^{i\alpha(x,t)} D_\mu \psi$, que se cumple si $A_\mu \rightarrow A_\mu + g^{-1} \partial_\mu \alpha$. Entonces, una transformación *gauge* para (1.25) es

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha(x,t)} \psi \quad (1.26)$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + g^{-1} \partial_\mu \alpha(x, t). \quad (1.27)$$

Siendo $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, que es invariante *gauge*, la dinámica más habitual de los campos *gauge* abelianos está dada por el término $-F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}/4$ en la densidad Lagrangiana, que es un término invariante-Lorentz.

1.6. Método de Dirac para Lagrangianos singulares

En la sección 1.1. se ha visto cómo se puede obtener un Hamiltoniano partiendo de un Lagrangiano no singular. Sin embargo, en el caso de que la matriz Hessiana $[\partial^2 L/(\partial\dot{q}\partial\dot{q})]$ no sea de rango máximo, no se puede invertir (1.3) y definir el Hamiltoniano limpiamente como función únicamente de los momentos y las coordenadas generalizadas, por lo que tampoco funciona el método de cuantización planteado en la sección 1.4.

Para solucionar este asunto, Dirac propuso el siguiente método [3, 4]: Siendo m el rango de la matriz Hessiana, eliminar m velocidades generalizadas en favor de los momentos mediante transformadas de Legendre, e introducir el resto de condiciones impuestas por (1.3), cuyo número es el corrancho de la matriz Hessiana, al Hamiltoniano a modo de *ligaduras primarias*

$$\Omega_I(q, p) = 0 \quad (1.28)$$

mediante multiplicadores de Lagrange⁸ λ^I . Estas expresiones son tales que (1.28) se convierte en una identidad cuando se sustituye (1.3) en ella. De esta manera, se sigue que un Lagrangiano singular es equivalente a un Hamiltoniano con ligaduras.

En este contexto, Dirac introduce la noción de igualdades *débiles* y *fuertes*. Cuando una igualdad se da únicamente en la subvariedad en la que se cumplen las ligaduras, se dice que es una igualdad *débil*, y se utiliza el símbolo “ \approx ”, de modo que (1.28) se expresa

$$\Omega_I(q, p) \approx 0. \quad (1.29)$$

En cambio, si una igualdad se da en todo el espacio de fases, y no solo en la subvariedad descrita por (1.29), se dice que es una igualdad *fuerte*, y se usa el símbolo “ $=$ ”.

Para cada ligadura primaria puede haber una *ligadura secundaria*, que surge al exigir que sea preservada durante la evolución del sistema. A esto se le llama *condición de consistencia*

$$\dot{\Omega}_I \approx 0 \implies {}^9\{\Omega_I, H\}_P + \lambda^J\{\Omega_I, \Omega_J\}_P \approx 0. \quad (1.30)$$

La diferencia entre las ligaduras primarias y secundarias reside en que las primarias son una mera consecuencia de la no invertibilidad de (1.3), mientras que las secundarias son también consecuencia de las ecuaciones dinámicas. De las ligaduras secundarias pueden surgir *ligaduras terciarias* al aplicarles también la condición de consistencia.

Otro concepto que se introduce es la *clase* de una función del espacio de fases. Una función del espacio de fases $f(q, p)$ se dice que es de *primera clase* si su corchete de Poisson con todas

⁸ Los multiplicadores de Lagrange son variables auxiliares que sirven para introducir ligaduras en problemas variacionales.

⁹ Recordemos que la evolución de una función del espacio de fases está dada por (1.6). El Hamiltoniano que aparece en esta expresión surge de aplicar la definición (1.4) únicamente para las velocidades generalizadas que sí sean invertibles.

las ligaduras se anula de manera débil

$$\{f, \Omega_I\}_P \approx 0, \quad \forall I. \quad (1.31)$$

Si existe una ligadura tal que su corchete de Poisson con f no se anula de manera débil, se dice que f es de *segunda clase*. Las ligaduras en sí también se pueden clasificar en ligaduras de primera clase γ^a o de segunda clase χ^b . En ocasiones, la existencia de ligaduras es una manifestación de libertad *gauge*, de hecho un sistema *gauge* es un sistema Hamiltoniano ligado, aunque lo contrario no es siempre cierto.

Se puede demostrar que las ligaduras primarias de primera clase generan transformaciones *gauge*. Aunque no se pueda inferir que todas las ligaduras secundarias de primera clase también lo hagan, se postula que sea así (*Conjetura de Dirac*)¹⁰.

Antes de cuantizar, es necesario eliminar las simetrías fijando el *gauge* e introduciéndolo como una nueva ligadura. Cuando se elimina correctamente, todas las ligaduras que quedan son de segunda clase. Con todos estos ingredientes, se define una nueva estructura llamada *Corchete de Dirac*, que permite imponer reglas de conmutación consistentes con las ligaduras cuando se cuantiza

$$\{f, g\}_D = \{f, g\}_P - \{f, \chi_a\}_P C^{ab} \{\chi_b, g\}_P, \quad (1.32)$$

donde C^{ab} es tal que $C^{ab} \{\chi_b, \chi_c\}_P = \delta_c^a$.

2. Formalismo de Faddeev-Jackiw

Como alternativa al, en ocasiones, excesivamente laborioso método de Dirac, Faddeev y Jackiw propusieron en 1988 [5, 6] un método para cuantizar de manera más eficiente Lagrangianos de primer orden, es decir, aquellos en los que las velocidades generalizadas aparecen únicamente de forma lineal.

A pesar de que esta consideración parece bastante restrictiva, cualquier Lagrangiano se puede convertir en uno de primer orden siguiendo el siguiente procedimiento sistemático:

1. Partimos de un Lagrangiano $L(q, Q, \dot{q}, \dot{Q})$, cuyo espacio de configuraciones tiene dimensión n y sus coordenadas generalizadas son: q^a , $a = 1, \dots, n - m$ y Q^b , $b = 1, \dots, m$, donde m es el rango de la matriz Hessiana. Esto significa que, tras definir los momentos canónicos conjugados mediante (1.3), solo hay m velocidades generalizadas que se pueden despejar, y son estas las coordenadas a las que llamamos Q^b , de modo que tenemos $\dot{Q}_b = \dot{Q}_b(q, Q, \dot{q}, P)$.

¹⁰ De hecho se pueden construir contraejemplos, sección 1.2.2. de [4]. En la sección 1.2.1. de la misma referencia se dan varios motivos para adoptar este postulado.

2. Obtener el Routhiano ¹¹ para Q^b

$$R(q, Q, \dot{q}, P) = P_b \dot{Q}^b(q, Q, \dot{q}, P) - L(q, Q, \dot{q}, \dot{Q}(q, Q, \dot{q}, P)). \quad (2.1)$$

3. Obtener el Lagrangiano de primer orden en \dot{Q} “deshaciendo” el Routhiano

$$\begin{aligned} L'(q, Q, P, \dot{q}, \dot{Q}, \dot{P}) &= P_b \dot{Q}^b - R(q, Q, \dot{q}, P) = \\ &= P_b \dot{Q}^b - P_b \dot{Q}^b(q, Q, \dot{q}, P) + L(q, Q, \dot{q}, \dot{Q}(q, Q, \dot{q}, P)). \end{aligned} \quad (2.2)$$

4. Para que (2.2) sea de primer orden también en \dot{q} , tiene que ocurrir

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L'}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} = 0 &= -P_b \frac{\partial^2 \dot{Q}^b}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} + \frac{\partial \dot{Q}^c}{\partial \dot{q}^j} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^c} \right) = \\ &= -P_b \frac{\partial^2 \dot{Q}^b}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} + \frac{\partial^2 \dot{Q}^c}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} P_c = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

es decir, el rango de la matriz de componentes $\partial^2 L / (\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j)$ tiene que ser nulo. Si el rango fuera $m' \neq 0$, se tendría que aplicar el mismo procedimiento para m' de las $n - m$ coordenadas q , hasta que finalmente el rango de la matriz Hessiana sea cero, y por lo tanto el Lagrangiano resultante sea de primer orden en todas las coordenadas del espacio de configuraciones.

Nótese que el espacio de configuraciones de (2.2) está dado por $\xi^i = (q^a, Q^b, P_b)$. Es decir, el espacio de configuraciones del Lagrangiano de primer orden que se obtiene incluye también los momentos canónicos conjugados de algunas coordenadas generalizadas del Lagrangiano de orden superior original.

2.1. Sistema mecánico

Podemos, entonces, partir de un Lagrangiano de primer orden, cuyas coordenadas del espacio de configuraciones son ξ^a , con $a = 1, \dots, n$, y su forma más general es

$$L = A_a(\xi) \dot{\xi}^a - H(\xi). \quad (2.4)$$

El primer sumando se conoce como la **parte simpléctica** del Lagrangiano y $A_a(\xi)$ como la **uno-forma canónica**. Esta uno-forma tiene el carácter de un potencial vector para una teoría *gauge* abeliana, ya que hacer una transformación $A_a(\xi) \rightarrow A_a(\xi) + \partial\theta / \partial \xi^a$ añade una derivada temporal total al Lagrangiano, por lo que la dinámica no cambia. Si se realiza una transformada de Legendre a (2.4) se puede ver por qué se ha llamado $-H(\xi)$ al segundo sumando.

¹¹ El Routhiano consiste en eliminar solo algunas de las velocidades generalizadas en favor de los momentos correspondientes mediante una transformada de Legendre.

Al aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange a (2.4), se obtiene

$$F_{ab}\dot{\xi}^b = \frac{\partial H}{\partial \xi^a}, \quad (2.5)$$

donde F_{ab} es la **dos-forma simpléctica**, y está dada por

$$F_{ab} = \frac{\partial A_b}{\partial \xi^a} - \frac{\partial A_a}{\partial \xi^b}. \quad (2.6)$$

Es antisimétrica en sus índices, e invariante bajo una transformación $A_a(\xi) \rightarrow A_a(\xi) + \partial\theta/\partial\xi^a$. Para poder despejar las derivadas temporales de las variables dinámicas en (2.5) es necesario que F_{ab} sea invertible, es decir, no-singular. Como es antisimétrica, su dimensión tiene que ser par para que esto se cumpla¹².

Si resulta que F_{ab} es singular, tendrá N modos-cero¹³ z_I^a (autovectores con autovalor 0) indexados por $I = 1, \dots, N$, tal que $z_I^a F_{ab} = 0$, o matricialmente $[z_I^a][F_{ab}] = [0]_{1 \times n}$, donde $[z_I^a]$ es un vector fila cuyas n componentes son z_I^a , $[F_{ab}]$ es una matriz $n \times n$ cuyo elemento en la fila a y columna b es F_{ab} , y $[0]_{1 \times n}$ es un vector fila con n ceros. Cada modo cero está asociado a una ligadura del sistema $\Omega_I = 0$, que se puede encontrar contrayendo (2.5) con z_I^a :

$$\Omega_I = z_I^a \frac{\partial H}{\partial \xi^a} = 0. \quad (2.7)$$

El método de Faddeev y Jackiw consiste en “transportar” estas ligaduras $\Omega_I = 0$, que aparecen de manera implícita en el Lagrangiano, a la parte simpléctica de este. Para ello, como viene detallado en [9], se introducen las ligaduras $\dot{\Omega}_I = 0$ al Lagrangiano mediante multiplicadores de Lagrange λ^I . Estas son las conocidas como relaciones de consistencia, que aseguran que las ligaduras $\Omega_I = 0$ se preserven a lo largo de la evolución temporal. Introducir $\lambda^I \dot{\Omega}_I$ al Lagrangiano es equivalente¹⁴ a introducir $\dot{\lambda}^I \Omega_I$, luego, si se considera a λ^I como una nueva variable dinámica que extiende el espacio de configuraciones $\xi'^\alpha = (\xi^a, \lambda^I)$, $\alpha = 1, \dots, n+N$, la ligadura Ω_I entra en el Lagrangiano como parte de la uno-forma canónica extendida $A'_\alpha = (A_a, \Omega_I)$. De esta forma, se obtiene un nuevo Lagrangiano

$$L' = L + \dot{\lambda}^I \Omega_I = A'_\alpha \xi'^\alpha - H(\xi), \quad (2.8)$$

del cual se puede obtener una nueva dos-forma simpléctica $F'_{\alpha\beta}$ aplicando (2.6) a la nueva

¹² $F_{ab} = -F_{ba} \rightarrow \det[F_{ab}] = \det(-[F_{ab}]^T) = (-1)^n \det[F_{ab}]$, donde n es la dimensión de la matriz. Si n es impar, el único caso en el que se cumple la igualdad es si el determinante es nulo, es decir, si F_{ab} es singular.

¹³ En función de la topología de la variedad, el número de modos-cero puede variar de un punto a otro de la misma, sin embargo, esta es una sutileza que no vamos a tratar.

¹⁴ Salvo una derivada total (que no influye a la dinámica) y un signo que se puede absorber redefiniendo el multiplicador de Lagrange.

uno-forma canónica A'_α , que tendrá nuevas componentes, y matricialmente resulta ser

$$[F'_{..}] = \left(\begin{array}{c|c} [F_{..}] & \left[\frac{\partial \Omega_{..}}{\partial \xi^c} \right] \\ \hline - \left[\frac{\partial \Omega_{..}}{\partial \xi^c} \right]^T & [0]_{N \times N} \end{array} \right), \quad (2.9)$$

donde $[\partial \Omega_{..} / \partial \xi^c]$ es una matriz $n \times N$ cuyo elemento en la fila a y columna I es $\partial \Omega_I / \partial \xi^a$. Esta nueva dos-forma simpléctica da lugar a tres posibilidades:

- a. La nueva dos-forma simpléctica $F'_{\alpha\beta}$ ya no es singular, luego existe $F'^{\alpha\beta}$ tal que

$$F'^{\alpha\beta} F'_{\beta\gamma} = F'_{\gamma\beta} F'^{\beta\alpha} = \delta_\gamma^\alpha. \quad (2.10)$$

Matricialmente $[F'^{\alpha\beta}] = [F'_{..}]^{-1}$.

- b. $F'_{\alpha\beta}$ sigue siendo singular, pero no se pueden encontrar nuevas ligaduras, ya que la expresión (2.7) se satisface idénticamente, es decir, se cancelan los términos. En este caso, los modos-cero corresponden a generadores de simetrías *gauge* de la teoría, y el procedimiento continúa eligiendo una fijación *gauge* e imponiéndola mediante un multiplicador de Lagrange adicional, como se ha descrito previamente. Esta elección tiene que ser tal que la nueva dos-forma simpléctica deje de ser singular.
- c. La dos-forma simpléctica sigue siendo singular, y tras obtener sus modos-cero se pueden encontrar más ligaduras mediante (2.7). En este caso, el procedimiento se repite hasta que ocurra a. o b.

Una vez obtenida una dos-forma simpléctica no singular F_{ab} , se puede invertir en (2.5) para encontrar las ecuaciones dinámicas

$$\dot{\xi}^a = F^{ab} \frac{\partial H}{\partial \xi^b}. \quad (2.11)$$

El siguiente paso para cuantizar el sistema de forma canónica consiste en extraer de esta ecuación la expresión del corchete de la teoría, para después promoverlo al conmutador de operadores. Comparando con (1.9), se ve que hay que tomar

$$\{\xi^a, \xi^b\} = F^{ab} \rightarrow [\xi^a, \xi^b] = i\hbar F^{ab}. \quad (2.12)$$

Otra apreciación que hace Jackiw [6] es que, debido al Teorema de Darboux, cualquier uno-forma A_a cuya dos-forma simpléctica F_{ab} no sea singular (y por tanto de dimensión $2n \times 2n$)

¹⁵ Esto implica que $F'^{\alpha\beta}$ también es antisimétrica en sus índices.

se puede escribir localmente, mediante una transformación de coordenadas $\xi^a \rightarrow \tilde{\xi}^a$, como

$$\tilde{A}_a = \frac{1}{2} \tilde{\xi}^c \omega_{ca}, \quad (2.13)$$

donde $[\omega..] = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1}_{n \times n} \\ \mathbb{1}_{n \times n} & 0 \end{pmatrix}$. La dos-forma simpléctica correspondiente a esta uno-forma es $\tilde{F}_{ab} = \omega_{ab}$, y se relaciona con la anterior de la siguiente manera

$$F_{ab} = \omega_{cd} \frac{\partial \tilde{\xi}^c}{\partial \xi^a} \frac{\partial \tilde{\xi}^d}{\partial \xi^b}. \quad (2.14)$$

Dada la forma de ω_{ab} , las nuevas coordenadas $\tilde{\xi}^a = (q^i, p_i)$ se conocen como coordenadas canónicas, ya que en estas coordenadas el Lagrangiano toma la forma¹⁶ $L = p_i \dot{q}^i - H(q, p)$ y sus ecuaciones del movimiento son exactamente las ecuaciones canónicas de Hamilton (1.5). En ocasiones no es fácil encontrar la transformación de coordenadas $\xi^a \rightarrow (q^i, p_i)$, aunque Jackiw y B. Zwiebach dan un procedimiento para encontrarla en el apéndice de [6].

Sin embargo, como notó Toms [7], esta transformación resulta útil en el contexto del formalismo de *integral de caminos* [2, 10] aunque no sea conocida la forma explícita de la transformación. Esto se debe a que la medida de la *integral de caminos* puede ser escrita como

$$d\mu = \prod_a^{2n} [d\tilde{\xi}^a] = \left(\prod_a^n [dq^i] \right) \left(\prod_a^n [dp_i] \right), \quad (2.15)$$

pero también se puede escribir como

$$d\mu = \left(\prod_a^{2n} [d\xi^a] \right) J, \quad (2.16)$$

donde J es el Jacobiano de la transformación. Tomando el determinante de la expresión (2.14), se obtiene $\det[F..] = J^2$, ya que $\det[\omega..] = 1$. Por lo tanto, se puede escribir la medida en las coordenadas originales, que resulta ser

$$d\mu = \left(\prod_a^{2n} [d\xi^a] \right) \sqrt{\det[F..]}, \quad (2.17)$$

y la función de partición de la *integral de caminos* toma la forma

$$Z = \int d\mu \exp \left\{ i \int dt L \right\} = \int \left(\prod_a^{2n} [d\xi^a] \right) \sqrt{\det[F..]} \exp \left\{ i \int dt \left(A_a(\xi) \dot{\xi}^a - H(\xi) \right) \right\} \quad (2.18)$$

¹⁶ Salvo una derivada total $d(p_i q^i)/dt$.

2.2. Extensión a teorías de campos

En teoría de campos, el Lagrangiano de primer orden¹⁷ más general es

$$L[\xi, \dot{\xi}] = \int d^N x A_a(x) \dot{\xi}^a(x) - H[\xi], \quad (2.19)$$

donde $A_a(x)$ es una función de los campos ξ^a y sus derivadas espaciales $\partial_i \xi^a$ evaluados en el punto espacial x y en un tiempo t . $H[\xi]$ es el Hamiltoniano, cuya densidad no tiene dependencia en las derivadas temporales de los campos.

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.17) al Lagrangiano (2.19), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta \xi^a(x)} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{\xi}^a(x)} \right) &= 0 \\ \int d^N x' \frac{\delta A_b(x')}{\delta \xi^a(x)} \dot{\xi}^b(x') - \frac{\delta H}{\delta \xi^a(x)} - \frac{d}{dt} \int d^N x' A_b(x') \delta_a^b \delta(x, x') &= 0 \\ \int d^N x' \frac{\delta A_b(x')}{\delta \xi^a(x)} \dot{\xi}^b(x') - \frac{dA_a(x)}{dt} &= \frac{\delta H}{\delta \xi^a(x)} \\ \int d^N x' \left(\frac{\delta A_b(x')}{\delta \xi^a(x)} - \frac{\delta A_a(x)}{\delta \xi^b(x')} \right) \dot{\xi}^b(x') &= \frac{\delta H}{\delta \xi^a(x)}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde en el último renglón se ha utilizado

$$\frac{dA_a(x)}{dt} = \int d^N x' \frac{\delta A_a(x)}{\delta \xi^b(x')} \dot{\xi}^b(x'). \quad (2.21)$$

Si se define la dos-forma simpléctica¹⁸ como

$$F_{ab}(x, x') = \frac{\delta A_b(x')}{\delta \xi^a(x)} - \frac{\delta A_a(x)}{\delta \xi^b(x')}, \quad (2.22)$$

las ecuaciones de Euler-Lagrange para un Lagrangiano de primer orden en teoría de campos se escriben de la siguiente manera

$$\int d^N x' F_{ab}(x, x') \dot{\xi}^b(x') = \frac{\delta H}{\delta \xi^a(x)}, \quad (2.23)$$

que es la expresión equivalente a (2.5).

¹⁷ El orden de un Lagrangiano siempre hace referencia al orden de la derivada temporal.

¹⁸ La dos-forma simpléctica es antisimétrica, en el sentido de $F_{ab}(x, x') = -F_{ba}(x', x)$.

La dos forma simpléctica puede ser invertible [11], existiendo $F^{ab}(x, x')$ tal que

$$\int d^N x' F^{ab}(x, x') F_{bc}(x', y) = \int d^N x' F_{ab}(x, x') F^{bc}(x', y) = \delta_c^a \delta(x, y). \quad (2.24)$$

En este caso, las ecuaciones de Euler-Lagrange se convierten en

$$\dot{\xi}^a(x, t) = \int d^N x' F^{ab}(x, x') \frac{\delta H}{\delta \xi^b(x', t)}, \quad (2.25)$$

y, comparando con (1.22), la manera en la que hay que tomar el corchete de la teoría es

$$\{\xi^a(x, t), \xi^b(x', t)\} = F^{ab}(x, x'), \quad (2.26)$$

con versión cuántica

$$[\xi^a(x, t), \xi^b(x', t)] = i\hbar F^{ab}(x, x'). \quad (2.27)$$

Sin embargo, al igual que en el caso discreto, puede ocurrir que la dos-forma simpléctica no sea invertible. El procedimiento que hay que seguir para solucionar este asunto es equivalente: encontrar los modos-cero de la dos-forma simpléctica, encontrar las ligaduras asociadas a ellos, e introducirlos a la parte simpléctica del Lagrangiano mediante multiplicadores de Lagrange (que ahora serán campos).

Los modos-cero $z_I^a(x)$, que cumplen

$$\int d^N x z_I^a(x) F_{ab}(x, x') = 0, \quad (2.28)$$

pueden implicar la existencia de ligaduras

$$\int d^N x \Omega_I(x) = \int d^N x z_I^a(x) \frac{\delta H}{\delta \xi^a(x)} = 0, \quad (2.29)$$

que se introducirían al nuevo Lagrangiano mediante multiplicadores de Lagrange, tal que el nuevo Lagrangiano es

$$L' = L + \int d^N x \lambda^I(x) \Omega_I(x). \quad (2.30)$$

3. Aplicación del método a varios ejemplos

En esta sección se recogen y desarrollan detalladamente ejemplos de Lagrangianos singulares tratados con el método de Faddeev y Jackiw. En primer lugar, los Lagrangianos son escritos en primer orden siguiendo el procedimiento explicado en la sección 2., para posteriormente encontrar las ligaduras del sistema analizando la invertibilidad de la dos-forma simpléctica. Tras esto, en los casos posibles, se obtienen las ecuaciones dinámicas y se escriben en su forma Hamiltoniana mediante el cambio de variables que convierte las coordenadas en canónicas.

El ejemplo 3.1.1. es un sistema *gauge*, correspondiente al caso b. de la sección 2.1., analizado con todo detalle haciendo énfasis en su carácter *gauge*.

El ejemplo 3.1.2. corresponde al caso a., lo que da lugar a un sistema invertible para el que se pueden hallar las reglas de conmutación. Además, se obtiene de manera explícita el cambio de coordenadas que lleva a las coordenadas canónicas.

En el ejemplo 3.1.3. se construye un Lagrangiano de primer orden a partir de un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden, para el cual no existe Lagrangiano de segundo orden. Esta construcción se realiza analizando las ecuaciones diferenciales e interpretándolas físicamente.

Por último, en la subsección 3.2. se describe cualitativamente la aplicación del formalismo de Faddeev y Jackiw para un ejemplo de campos y se calculan las relaciones de conmutación para estos.

3.1. Sistemas de mecánica clásica

3.1.1. Ejemplo *gauge*

Consideremos el siguiente Lagrangiano

$$L_s = \frac{1}{2}(\dot{x} - y)^2. \quad (3.1)$$

Sus ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\dot{x} - y) = 0 &\rightarrow \ddot{x} - \dot{y} = 0 \\ \dot{x} - y = 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

cuya solución es

$$x(t) = x_0 + \int_0^t ds \varphi(s) \quad (3.3)$$

$$y(t) = \varphi(t), \quad (3.4)$$

es decir, hay una libertad *gauge* de elegir cualquier función $\varphi(t)$.

El Lagrangiano (3.1) es claramente singular, ya que no es posible definir un momento conjugado a la coordenada generalizada y al no aparecer \dot{y} . Esto hace que no pueda obtenerse un Hamiltoniano de forma directa.

Como la velocidad generalizada de la coordenada x aparece al cuadrado, para poder aplicar el formalismo de Faddeev y Jackiw, es necesario convertir el Lagrangiano en uno de primer orden de la manera explicada al principio de la sección 2. Para ello, se introduce como nueva coordenada el momento conjugado a x

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} - y \quad \rightarrow \quad \dot{x} = p + y. \quad (3.5)$$

Con esto, se puede hacer una transformada de Legendre cambiando únicamente la variable \dot{x} en función de p , y se obtiene el Routhiano

$$R = \dot{x}p - L_s = (p + y)p - \frac{1}{2}p^2 = \frac{1}{2}p^2 + yp. \quad (3.6)$$

El último paso para hallar el Lagrangiano de primer orden, cuyo espacio de configuraciones viene dado por $\xi^a = (x, y, p)$, es

$$L = p\dot{x} - R = p\dot{x} - \frac{1}{2}p^2 - yp. \quad (3.7)$$

Se puede comprobar que las ecuaciones de movimiento son equivalentes a las de (3.1).

Como la coordenada y aparece únicamente de forma lineal en (3.7), es una variable auxiliar que fuerza la ligadura $p = 0$, es decir, actúa como un multiplicador de Lagrange. Por tanto, se puede “transportar” a la parte simpléctica renombrando $y \rightarrow \dot{\lambda}$ y extendiendo el espacio de configuraciones con la nueva coordenada λ , de modo que el Lagrangiano queda

$$L = p\dot{x} - \dot{\lambda}p - \frac{1}{2}p^2, \quad (3.8)$$

con $\xi^a = (x, \lambda, p)$, $A_a = (p, -p, 0)$ y el Hamiltoniano únicamente

$$H = \frac{1}{2}p^2. \quad (3.9)$$

De nuevo, las ecuaciones de movimiento de (3.8), junto con la ligadura $p = 0$, son las mismas que las de (3.1).

Con la ordenación anterior $\xi^a = (x, \lambda, p)$ la forma simpléctica correspondiente a (3.8) tiene

la matriz de componentes

$$[F..] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

y tiene un modo cero dado por $z^a = (1, 1, 0)$. La ligadura asociada a este modo cero se calcula como

$$\Omega = z^a \frac{\partial H}{\partial \xi^a} = (1 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix} \equiv 0. \quad (3.11)$$

El hecho de que sea idénticamente cero implica que el Lagrangiano sigue siendo singular a pesar de no haber nuevas ligaduras, por lo que la teoría tiene una simetría *gauge*. El modo cero $z^a = (1, 1, 0)$ corresponde a la transformación *gauge* infinitesimal que deja invariante el Lagrangiano (3.1):

$$\begin{aligned} \delta x &= \epsilon(t) \\ \delta \lambda = \epsilon(t) &\Rightarrow \delta \dot{\lambda} = \frac{d\epsilon(t)}{dt} \Rightarrow \delta y = \frac{d\epsilon(t)}{dt}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Veamos de dónde puede surgir el Lagrangiano (3.1). Si se parte del Lagrangiano de una partícula libre en una dimensión $L = \dot{x}^2/2$, este tiene una simetría global de traslación, es decir, $x \rightarrow x' = x + \epsilon$, donde ϵ es una constante. Expresando la coordenada x en un vector columna \mathbf{x} , utilizando un 1 auxiliar,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix},$$

el generador de la transformación resulta ser

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

y la transformación está dada por la exponencial del generador, utilizando ϵ como parámetro

$$T = \exp(i\epsilon G) = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Podemos, entonces, escribir la transformación de simetría global como $\mathbf{x}' = T\mathbf{x}$, que implica $x' = x + \epsilon$. Para hacer que esta simetría global sea local, es decir, dependa del tiempo, es necesario introducir una derivada covariante D_t . Esta derivada covariante involucra, además

de la derivada ordinaria ∂_t , a una nueva variable *gauge*, que vive en el álgebra del grupo de simetría. En este caso, el álgebra del grupo afín está dado por un único generador (3.13), de modo que, usando la variable y , la derivada covariante es

$$D_t = \partial_t - iyG = \begin{pmatrix} \partial_t & -y \\ 0 & \partial_t \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Esta nueva variable también se va a transformar al hacer una transformación local (o *gauge*), y lo tiene que hacer tal que

$$D'_t \mathbf{x}' = T(t)D_t \mathbf{x} \longrightarrow (\partial_t - iy'G)T(t)\mathbf{x} = T(t)(\partial_t - iyG)\mathbf{x} \longrightarrow \\ \begin{pmatrix} \partial_t & -y' \\ 0 & \partial_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + \epsilon(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_t & -y \\ 0 & \partial_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} + \dot{\epsilon}(t) - y' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} - y \\ 0 \end{pmatrix},$$

por lo tanto se obtiene que la variable *gauge* y tiene que cambiar $y \rightarrow y' = y + d\epsilon(t)/dt$, que es lo obtenido en (3.12). Si se sustituye la derivada ordinaria por la derivada covariante (3.15) en el Lagrangiano de la partícula libre unidimensional, este resulta

$$L = \frac{1}{2}(D_t \mathbf{x})^T (D_t \mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\partial_t x - y)^2, \quad (3.16)$$

que es (3.1).

3.1.2. Buen sistema Hamiltoniano

Analicemos ahora el siguiente Lagrangiano singular

$$L_s = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}x^2\dot{y} - \frac{1}{2}x^2y. \quad (3.17)$$

De nuevo, para escribirlo como un Lagrangiano de primer orden, es necesario añadir una nueva coordenada

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} \quad (3.18)$$

tal que el Routhiano es

$$R = \dot{x}p - L_s = \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}x^2\dot{y} + \frac{1}{2}x^2y, \quad (3.19)$$

y el Lagrangiano de primer orden asociado, cuyo espacio de configuraciones está dado por

$\xi^a = (x, y, p)$, es

$$L = \dot{x}p - R = \dot{x}p + \frac{1}{2}x^2\dot{y} - \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}x^2y. \quad (3.20)$$

La uno-forma canónica de este Lagrangiano tiene las componentes $A_a = (p, x^2/2, 0)$, y el Hamiltoniano es

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}x^2y. \quad (3.21)$$

Las componentes de la dos-forma simpléctica se recogen en la siguiente matriz

$$[F..] = \begin{pmatrix} 0 & x & -1 \\ -x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Como la dimensión es impar, es singular, y tiene un modo cero $z^a = (0, 1, x)$ que da cuenta de la ligadura

$$\Omega = z^a \frac{\partial H}{\partial \xi^a} = (0 \quad 1 \quad x) \begin{pmatrix} xy \\ \frac{1}{2}x^2 \\ p \end{pmatrix} = \frac{1}{2}x^2 + px = 0. \quad (3.23)$$

Se introduce esta ligadura en la parte simpléctica del Lagrangiano, extendiendo el espacio de configuraciones con la coordenada λ , de modo que el nuevo Lagrangiano es

$$L' = L + \dot{\lambda} \left(\frac{1}{2}x^2 + px \right) = \dot{x}p + \frac{1}{2}x^2\dot{y} + \dot{\lambda} \left(\frac{1}{2}x^2 + px \right) - \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}x^2y \quad (3.24)$$

La nueva dos-forma simpléctica resulta ser

$$[F'..] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & x+p & & \\ & & & 0 & & \\ & & & x & & \\ \hline -(x+p) & 0 & -x & 0 & & \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 0 & x & -1 & x+p \\ -x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x \\ -(x+p) & 0 & -x & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

con $\det[F'..] = x^4$, luego ya no es singular (salvo en $x = 0$), por lo que tiene una inversa

$$[F'..]^{-1} \equiv [F'^{..}] = \begin{pmatrix} 0 & -1/x & 0 & 0 \\ 1/x & 0 & -(x+p)/x^2 & -1/x^2 \\ 0 & (x+p)/x^2 & 0 & -1/x \\ 0 & 1/x^2 & 1/x & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Entonces, se pueden escribir las ecuaciones de movimiento como

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{p} \\ \dot{\lambda} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1/x & 0 & 0 \\ 1/x & 0 & -(x+p)/x^2 & -1/x^2 \\ 0 & (x+p)/x^2 & 0 & -1/x \\ 0 & 1/x^2 & 1/x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xy \\ x^2/2 \\ p \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -x/2 \\ y - p/x - p^2 - x^2 \\ (x+p)/2 \\ 1/2 + p/x \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

que son, junto con la ligadura $x^2/2 + px = 0$, las mismas ecuaciones de movimiento que las de (3.17). Al cuantizar el sistema, las reglas de conmutación que se obtienen son

$$[\xi^a, \xi^b] = i\hbar F^{ab}, \quad (3.28)$$

donde F^{ab} son las componentes de (3.26). Por ejemplo

$$[x, y] = -\frac{i\hbar}{x}, \quad [y, p] = -\frac{i\hbar(x+p)}{x^2} \dots \quad (3.29)$$

Estas coordenadas $\xi'^a = (x, y, p, \lambda)$ no son muy cómodas a la hora de cuantizar, ya que las relaciones de conmutación que surgen son bastante complicadas. Fijándonos en la parte simpléctica de (3.24), vemos que se puede escribir como

$$A'_a \dot{\xi}'^a = \dot{x}p + \frac{1}{2}x^2\dot{y} + \dot{\lambda} \left(\frac{1}{2}x^2 + px \right) = \dot{x}(p - xy) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}x^2y \right) + \dot{\lambda} \left(\frac{1}{2}x^2 + px \right), \quad (3.30)$$

donde la derivada total se puede ignorar, ya que no afecta a las ecuaciones dinámicas. Si hacemos un cambio de coordenadas $\xi'^a = (x, y, p, \lambda) \rightarrow \tilde{\xi}^a = (u, v, p_u, p_v)$ dado por

$$u = x \quad (3.31)$$

$$v = \lambda \quad (3.32)$$

$$p_u = p - xy \quad (3.33)$$

$$p_v = \frac{1}{2}x^2 + xp, \quad (3.34)$$

la parte simpléctica toma la forma canónica $A'_a \dot{\xi}'^a = \tilde{A}_a \tilde{\xi}^a = \dot{u}p_u + \dot{v}p_v$, luego las relaciones de conmutación para estas nuevas coordenadas son las canónicas

$$[u, p_u] = [v, p_v] = i\hbar, \quad \text{el resto son cero.} \quad (3.35)$$

En estas nuevas coordenadas, el Hamiltoniano (3.21) es¹⁹

$$H(u, v, p_u, p_v) = \frac{1}{2} \frac{p_v^2}{u^2} - \frac{1}{8} u^2 - \frac{1}{2} u p_u, \quad (3.36)$$

y vemos que la singularidad que tenía la dos-forma simpléctica en $x = 0$ se traduce en una singularidad en $u = 0$ del Hamiltoniano.

3.1.3. Hojman-Urrutia

Hay casos en los que la construcción del Lagrangiano de un sistema no consiste en escribir la diferencia entre la energía cinética y la potencial, sino que se parte de las ecuaciones dinámicas y se intenta construir un Lagrangiano cuyas ecuaciones de Euler-Lagrange las reproduzca. Sin embargo, está demostrado [12] que hay sistemas de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden que no son extremales, es decir, no hay un Lagrangiano para estos sistemas.

Hojman y Urrutia [13] proponen un método sistemático para construir Lagrangianos de primer orden dados estos sistemas, con intención de poder cuantizarlos (ellos usan el método de Dirac). En la sección 5 de dicho artículo aparece, como ejemplo de esto, el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\ddot{x} + \dot{y} = 0 \quad , \quad \ddot{y} + y = 0, \quad (3.37)$$

que se puede escribir como un sistema de cuatro ecuaciones de primer orden

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p & , & & \dot{y} &= q, \\ \dot{p} &= -q & , & & \dot{q} &= -y. \end{aligned} \quad (3.38)$$

En este caso, no es necesario utilizar el procedimiento de Hojman-Urrutia, ya que no resulta complicado identificar los grados de libertad elementales utilizando intuición física.

La pareja (y, q) describe claramente un oscilador armónico, cuyo Lagrangiano de primer orden se puede escribir como

$$L_{OA} = q\dot{y} - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}q^2. \quad (3.39)$$

Por otro lado, la combinación $s = x - q$ describe una partícula libre²⁰ con Lagrangiano de primer orden

$$L_{PL} = r\dot{s} - \frac{1}{2}r^2, \quad (3.40)$$

¹⁹ A la hora de cuantizar, sería necesario simetrizar el último término para que sea hermítico: $u p_u/2 \rightarrow (u p_u + p_u u)/4$.

²⁰ $\ddot{s} = \ddot{x} - \ddot{q} = \dot{p} + \dot{y} = -q + q = 0$

donde r es el momento conjugado a s . Al tratarse de una partícula libre, el momento será la derivada temporal de la coordenada s , es decir $r = \dot{s} = \dot{x} - \dot{q} = p + y$. Expresando la suma de (3.39) y (3.40) en función de x, y, p y q , se obtiene

$$L = q\dot{y} + (p + y)(\dot{x} - \dot{q}) - \frac{1}{2}(y + p)^2 - \frac{1}{2}(y^2 + q^2). \quad (3.41)$$

Con $\xi^a = (x, y, p, q)$ y $A_a = (p + y, q, 0, -p - y)$, la dos-forma simpléctica es

$$[F..] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.42)$$

que no es singular, y tiene como inversa

$$[F..]^{-1} \equiv [F^{\cdot\cdot}] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento están dadas por

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{p} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2y + p \\ y + p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ -q \\ y \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

En este caso, no resulta complicado encontrar el cambio de coordenadas que convierte la dos-forma en su versión canónica. De hecho, son las coordenadas que hemos utilizado para justificar la forma del Lagrangiano, es decir, un oscilador armónico simple y una partícula libre. El cambio de coordenadas $\xi^a \rightarrow \tilde{\xi}^a$ está dado por

$$\begin{pmatrix} s \\ y \\ r \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ p \\ q \end{pmatrix}, \quad (3.45)$$

con lo que el Lagrangiano (3.41) toma la forma

$$L = r\dot{s} + q\dot{y} - \frac{1}{2}(r^2 + y^2 + q^2) = r\dot{s} + q\dot{y} - H. \quad (3.46)$$

Con esto, las ecuaciones de movimiento son Hamiltonianas, es decir,

$$\dot{\tilde{\xi}}^a = \omega^{ab} \frac{\partial H}{\partial \tilde{\xi}^b}, \quad (3.47)$$

con

$$[\omega^{\cdot\cdot}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

Además, estas nuevas coordenadas cumplen las reglas de conmutación canónicas

$$[\tilde{\xi}^a, \tilde{\xi}^b] = i\hbar\omega^{ab}. \quad (3.49)$$

Este es un ejemplo simplificado, cuyo objetivo es hacer ver que no todos los sistemas simples tienen Lagrangiano o Hamiltoniano a primera vista, y que el uso de Lagrangianos de primer orden permite tratar estos sistemas mediante el método de Faddeev y Jackiw.

3.2. Ejemplo de campos

Tras haber analizado con detalle varios ejemplos mecánicos, pasamos a estudiar un ejemplo de teoría de campos. En particular, se trata de un sistema para el cual el límite sin masa da lugar a una simetría *gauge* de tipo $U(1)$.

3.2.1. Campo de Schrödinger acoplado a un campo vectorial

En las secciones III. B y C del artículo [7], Toms aplica el procedimiento de Faddeev-Jackiw a un campo de Schrödinger Ψ acoplado a un campo vectorial B_μ masivo, cuyo campo de fuerzas es $W_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$. Además, se define la derivada covariante $D_\mu = \partial_\mu + ieB_\mu$ y se usa la métrica del espaciotiempo de Minkowski $(N + 1)$ -dimensional con signatura $(-, +, \dots, +)$. Con estas consideraciones, la densidad Lagrangiana viene dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \frac{i}{2} \left(\Psi^\dagger D_0 \Psi - (D_0 \Psi)^\dagger \Psi \right) - \frac{1}{2m} (\mathbf{D}\Psi)^\dagger (\mathbf{D}\Psi) - V\Psi^\dagger \Psi + \\ - \frac{1}{4} W^{\mu\nu} W_{\mu\nu} - \frac{1}{2} m^2 B^\mu B_\mu, \end{aligned} \quad (3.50)$$

donde todos los campos están evaluados en un punto espacial x a un tiempo t . El hecho de que las derivadas temporales y espaciales del campo Ψ aparezcan con distinto orden justifica por qué se trata de un campo de Schrödinger y no de Dirac.

El primer paso para aplicar el formalismo de Faddeev y Jackiw es escribir la densidad Lagrangiana en primer orden. La parte que involucra al campo de Schrödinger ya está en primer orden, pero este no es el caso para las componentes espaciales B_i del campo vectorial, luego es necesario introducir nuevos campos, i.e. sus momentos canónicos conjugados

$$\pi^i(x) = \frac{\delta L}{\delta \dot{B}_i(x)} = \dot{B}^i(x) - \partial^i B_0(x). \quad (3.51)$$

Tras escribir la densidad Lagrangiana en primer orden e introducir la ligadura

$$\partial_k \pi^k + m^2 B_0 - e \Psi^\dagger \Psi = 0, \quad (3.52)$$

a la parte simpléctica mediante la extensión del espacio de configuraciones con el campo λ , las coordenadas generalizadas son $\xi^a = (\Psi, \Psi^\dagger, B_i, \pi^i, B_0, \lambda)$. La dos-forma simpléctica ya no es singular, por lo que todos los campos tendrán una evolución bien determinada, es decir, el sistema no es *gauge*.

Cuando el potencial vector no tiene masa ($m^2 = 0$), desarrollando el término $W^{\mu\nu}W_{\mu\nu}$, se puede ver que la variable B_0 aparece únicamente multiplicando a $(\partial_k \pi^k - e \Psi^\dagger \Psi)$ en la densidad Lagrangiana (3.50). Esto significa que actúa como una variable auxiliar que fuerza la ligadura²¹ $\partial_k \pi^k - e \Psi^\dagger \Psi = 0$, o lo que es lo mismo, un multiplicador de Lagrange. Resulta que la dos-forma simpléctica que se obtiene tras escribir la densidad Lagrangiana (3.50) en primer orden se mantiene singular sin encontrar nuevas ligaduras cuando $m^2 = 0$. De hecho, el modo cero que surge $z^a = (-ie\Psi\theta, ie\Psi^\dagger\theta, \partial_i\theta, 0, \theta)$ es precisamente una transformación *gauge* infinitesimal, que de forma finita es

$$\begin{aligned} \Psi &\longrightarrow e^{-ie\theta}\Psi \\ \Psi^\dagger &\longrightarrow e^{ie\theta}\Psi^\dagger \\ B_i &\longrightarrow B_i + \partial_i\theta. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Esto es una manifestación de simetría *gauge*. Para eliminar esta redundancia, Toms elige el *gauge* de Coulomb $\partial^k B_k = 0$, y lo añade a la parte simpléctica mediante un nuevo campo λ , tal que $\xi^a = (\Psi, \Psi^\dagger, B_i, \pi^i, B_0, \lambda)$ y $A_a = (\frac{i}{2}\Psi^\dagger, -\frac{i}{2}\Psi, \pi^i, \partial_k \pi^k - e \Psi^\dagger \Psi^\dagger, \partial^k B_k)$. Las componentes

²¹ Esta ligadura no es más que la ley de Gauss para el campo π^i , donde la densidad de carga está dada por $e|\Psi|^2$. Como se puede ver en (3.51), si B_μ es el potencial vector electromagnético, π^i sería la componente i del campo eléctrico.

de la nueva dos-forma simpléctica no singular son

$$[F_{\cdot\cdot}(x, x')] = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & -e\Psi^\dagger(x') & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & -e\Psi(x') & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta_j^i & 0 & \partial'^i \\ 0 & 0 & \delta_i^j & 0 & \partial'_i & 0 \\ e\Psi^\dagger(x) & e\Psi(x) & 0 & -\partial_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\partial^j & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(x - x').^{22,23} \quad (3.54)$$

Para hacer referencia a una componente (o conjunto de componentes) en particular, tanto de la uno-forma como de la dos-forma, conviene utilizar las propias coordenadas como subíndices. Como ejemplo de cálculo y notación,

$$\begin{aligned} F_{B_i\lambda}(x, x') &= \frac{\delta A_\lambda(x')}{\delta B_i(x)} - \frac{\delta A_{B_i}(x)}{\delta \lambda(x')} = \\ &= \frac{\delta}{\delta B_i(x)} \int d^N x \delta(x - x') \partial^k B_k(x) - \frac{\delta}{\delta \lambda(x')} \int d^N x' \delta(x - x') \pi^i(x') = \\ &= -\frac{\delta}{\delta B_i(x)} \int d^N x B_k(x) \partial^k (\delta(x - x')) = -\partial^i (\delta(x - x')) = \partial'^i (\delta(x - x')). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Toms centra su análisis en aplicar el método de Faddeev-Jackiw al formalismo de *integral de caminos*, por lo que calcula el determinante de la dos-forma simpléctica para hallar la medida. Si se quisiera seguir el procedimiento canónico, para encontrar los corchetes (o reglas de conmutación) de la teoría es necesario encontrar la inversa de la dos-forma, que cumple

$$\int d^N x' F^{ab}(x, x') F_{bc}(x', y) = \delta_c^a \delta(x - y). \quad (3.56)$$

Como $F^{ab}(x, x')$ tiene que ser antisimétrica, en el sentido $F^{ab}(x, x') = -F^{ba}(x', x)$, se propone

$$[F^{\cdot\cdot}(x, x')] = \begin{pmatrix} 0 & a & b_i & c^i & d & f \\ -a' & 0 & g_i & h^i & l & n \\ -b'_j & -g'_j & 0 & p_j^i & q_j & r_j \\ -c'^j & -h'^j & -p_i'^j & 0 & s^j & t^j \\ -d' & -l' & -q'_i & -s'^i & 0 & u \\ -f' & -n' & -r'_i & -t'^i & -u & 0 \end{pmatrix}.^{24} \quad (3.57)$$

²² $\partial'_i \equiv \partial/\partial x'^i$.

²³ Cada componente de la matriz actúa sobre $\delta(x - x')$.

²⁴ $a \equiv a(x, x')$ y $a' \equiv a(x', x)$. Similar para el resto de componentes.

Además, se usa²⁵

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{4\pi|x-x'|} \right) = -\delta(x-x') \quad \text{y} \quad \partial^i \left(\frac{1}{|x-x'|} \right) = -\frac{(x-x')^i}{|x-x'|^3}.$$

Dentro del operador Laplaciano se podría añadir otra función $w(x, x')$ tal que $\nabla^2 w(x, x') = 0$. Sin embargo, la única función que cumple esa condición y decrece con suficiente rapidez en el infinito es $w(x, x') = 0$. Se pueden aplicar argumentos similares para la segunda identidad. Con estas consideraciones, las componentes de la inversa de la dos-forma simpléctica resulta ser²⁶

$$[F^{\cdot\cdot}(x, x')] = \begin{pmatrix} 0 & i\nabla^2 & 0 & -ie\Psi(x)\partial^i & 0 & -ie\Psi(x) \\ -i\nabla'^2 & 0 & 0 & ie\Psi^\dagger(x)\partial^i & 0 & ie\Psi^\dagger(x) \\ 0 & 0 & 0 & -\delta_j^i\nabla'^2 + \partial^i\partial_j & 0 & \partial_j \\ ie\Psi(x')\partial^j & -ie\Psi^\dagger(x')\partial^j & \delta_i^j\nabla'^2 - \partial^j\partial'_i & 0 & \partial^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\partial'^i & 0 & 1 \\ ie\Psi(x') & -ie\Psi^\dagger(x') & -\partial'_i & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \quad (3.58)$$

$$\times \frac{1}{4\pi|x-x'|},$$

de cuyas componentes se puede inferir el corchete de la teoría según

$$\{\xi^a(x, t), \xi^b(x', t)\} = F^{ab}(x, x'). \quad (3.59)$$

Como caso de particular interés,

$$\begin{aligned} \{B_i(x, t), \pi^j(x', t)\} &= F^{B_i\pi^j}(x, x') = (-\delta_j^i\nabla'^2 + \partial^i\partial_j) \left(\frac{1}{4\pi|x-x'|} \right) = \\ &= \delta_j^i\delta(x-x') + \partial^i\partial_j \left(\frac{1}{4\pi|x-x'|} \right) = \delta_j^i\delta(x-x') - \partial^i\partial'_j \left(\frac{1}{4\pi|x-x'|} \right), \end{aligned} \quad (3.60)$$

que es el mismo resultado obtenido, por ejemplo, en la sección 11.3 de [2] utilizando el método de Dirac.

²⁵ Restringiéndonos a $N = 3$.

²⁶ Hay que entender la matriz como un operador diferencial que actúa sobre $(4\pi|x-x'|)^{-1}$.

4. Conclusiones

Como se ha podido comprobar en comparación con el método de Dirac, el método de Faddeev y Jackiw resulta más simple a la hora de tratar Lagrangianos singulares, en especial de primer orden. No requiere de una clasificación de ligaduras, ni de la noción de igualdades *débiles* o *fuertes*. Todas las ligaduras se tratan por igual, y la clasificación de los distintos tipos de sistemas se hace en función únicamente de la invertibilidad de la dos-forma simpléctica.

Otra diferencia clave es que el método de Dirac es un método Hamiltoniano, mientras que el de Faddeev y Jackiw es Lagrangiano. En este contexto, Jackiw rechaza la idea de considerar los sistemas de primer orden como singulares o ligados, ya que esta noción de “singular” aparece al intentar obtener el Hamiltoniano mediante una transformada de Legendre, cosa que no se realiza en su formalismo. De hecho, los Lagrangianos que surgen a la hora de describir grados de libertad fermiónicos son de primer orden de forma natural, como por ejemplo el Lagrangiano de la Ecuación de Schrödinger o de Dirac, y Jackiw considera que caracterizar estos sistemas como singulares o ligados carece de sentido físico.

En el pasado, la búsqueda de alternativas para cuantizar sistemas con ligaduras estuvo motivada por la utilización de teorías *gauge* para describir la física en el contexto de altas energías, o en propuestas para gravedad cuántica. Sin embargo, cada vez son más los sistemas cuánticos para los que se utiliza este tipo de teorías, como, por ejemplo, sistemas de materia condensada. Otra situación en la que se pueden incorporar estos métodos es en la descripción de sistemas cuánticos macroscópicos, como en los circuitos superconductores, fundamentales hoy en día en la construcción de ordenadores cuánticos.

Por todos estos motivos, el estudio realizado en este trabajo de fin de grado ha servido para adquirir familiaridad con estas técnicas, con la disposición de aplicarlas a sistemas físicos de interés tecnológico. Aparte de recopilar información bibliográfica con el fin de hacer este trabajo lo más autocontenido posible, se han realizado cálculos originales. Por ejemplo, se ha presentado un procedimiento sistemático y general para escribir Lagrangianos en su forma de primer orden, que no aparece de manera explícita en la literatura. Se han traducido paso a paso las ecuaciones mecánicas del método de Faddeev y Jackiw a su versión de campos, utilizando la derivada funcional. Además, se han resuelto de manera íntegra algunos ejemplos, profundizando más que en la bibliografía y calculando las coordenadas canónicas en los casos pertinentes. Por último, se ha realizado el cálculo de las relaciones de conmutación para el sistema Schrödinger-potencial vector, invirtiendo la dos-forma simpléctica.

Referencias

- [1] Jorge José y Eugene Saletan. *Classical dynamics: a contemporary approach*. 2000.
- [2] Steven Weinberg. *Lectures on quantum mechanics*. Cambridge University Press, 2015.
- [3] Paul Adrien Maurice Dirac. “Generalized hamiltonian dynamics”. En: *Canadian journal of mathematics* 2 (1950), págs. 129-148.
- [4] Marc Henneaux y Claudio Teitelboim. *Quantization of gauge systems*. Princeton university press, 2020.
- [5] L Faddeev y R Jackiw. “Hamiltonian reduction of unconstrained and constrained systems”. En: *Physical Review Letters* 60.17 (1988), pág. 1692.
- [6] R Jackiw. “(Constrained) quantization without tears”. En: *arXiv preprint hep-th/9306075* (1993).
- [7] David J Toms. “Faddeev-Jackiw quantization and the path integral”. En: *Physical Review D* 92.10 (2015), pág. 105026.
- [8] Paul Adrien Maurice Dirac. “The fundamental equations of quantum mechanics”. En: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* 109.752 (1925), págs. 642-653.
- [9] J Barcelos-Neto y C Wotzasek. “Faddeev-Jackiw quantization and constraints”. En: *International Journal of Modern Physics A* 7.20 (1992), págs. 4981-5003.
- [10] Alexander Altland y Ben D Simons. *Condensed matter field theory*. Cambridge University Press, 2010.
- [11] C Prescod-Weinstein y Edmund Bertschinger. “An extension of the Faddeev–Jackiw technique to fields in curved spacetimes”. En: *Classical and Quantum Gravity* 32.7 (2015), pág. 075011.
- [12] Jesse Douglas. “Solution of the inverse problem of the calculus of variations”. En: *Transactions of the American Mathematical Society* 50.1 (1941), págs. 71-128.
- [13] Sergio Hojman y Luis F Urrutia. “On the inverse problem of the calculus of variations”. En: *Journal of Mathematical Physics* 22.9 (1981), págs. 1896-1903.