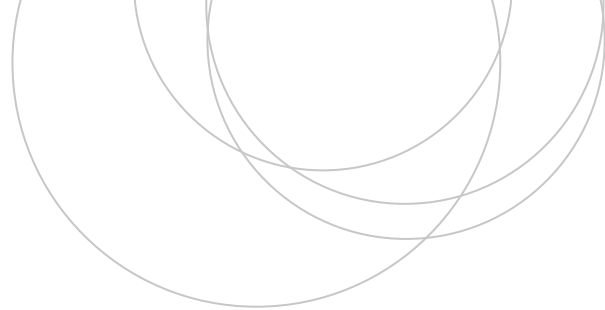




Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

ZIENTZIA
ETA TEKNOLOGIA
FAKULTATEA
FACULTAD
DE CIENCIA
Y TECNOLOGÍA



Gradu Amaierako Lana / Trabajo Fin de Grado
Fisikako Gradua / Grado en Física

Dinámica orbital newtoniana: precesión del eje de rotación terrestre

Egilea/Autor/a:
Irene Rojo Poyatos
Zuzendaria/Director/a:
Iñaki Garay Elizondo

© 2021, "Irene Rojo Poyatos"

Leioa, 2021ko ekainaren 18a /Leioa, 18 de junio de 2021

Índice

1. Introducción	1
2. Fundamentos de la gravedad newtoniana	3
2.1. Alcance de la teoría	3
2.2. Dinámica de dos masas puntuales	4
2.3. Ecuaciones de la materia continua	5
2.4. Cuerpos esféricos y no esféricos	6
2.4.1. Cuerpos esféricos	6
2.4.2. Cuerpos no esféricos	7
2.5. Tensores STF	10
2.6. Sistemas de cuerpos aislados atraídos por atracción gravitatoria	15
2.6.1. Potencial interno y externo	16
2.6.2. Expansión de Taylor para el potencial externo	17
2.6.3. Ecuaciones de movimiento para sistemas binarios	20
2.6.4. Dinámica de spin	22
2.7. Marcos de referencia	26
3. Precesión de los equinoccios	27
3.1. Causas principales	27
3.2. Consecuencias de la precesión	28
3.3. Cálculo numérico del periodo de la precesión	29
3.4. Mejoras de la teoría	32
4. Conclusiones	36

1. Introducción

La teoría de gravitación newtoniana juega un papel importante en muchos ámbitos de la física. A pesar de que el alcance de su teoría está limitado por la escala cuántica, las velocidades relativistas y situaciones concretas en las que intervengan objetos extremadamente densos, como las estrellas de neutrones o los agujeros negros, permite describir satisfactoriamente gran cantidad de fenómenos del Universo. En efecto, esta teoría permite describir con un alto grado de precisión el Sistema Solar, la estructura de estrellas como el Sol o la estructura de las galaxias.

El objetivo central de este trabajo es ofrecer una descripción completa de la teoría de la gravedad newtoniana y mostrar que su estudio va mucho más allá la conocida ley del inverso al cuadrado de la distancia o de las órbitas elípticas de Kepler. Para poder entender la relatividad general de Einstein y ser conscientes de su importancia, es necesario dominar la teoría newtoniana y estudiar las descripciones que ofrece de los cuerpos gravitatorios que rotan, los sistemas binarios o los sistemas formados por tres o más cuerpos. Como aplicación directa de la teoría, estudiaremos el caso particular de la precesión del eje de rotación terrestre, comparando el valor obtenido con el valor dado por J. G. Williams de 5028,77 as/siglo que equivale a 25778,87 años aproximadamente [1].

La Tierra presenta varios movimientos, algunos más evidentes como la traslación alrededor del Sol en un periodo de un año o la rotación alrededor de su propio eje en un periodo de 24 horas. Sin embargo, nuestro astro también ejerce otros movimientos más imperceptibles como la precesión de los equinoccios. El movimiento de precesión de la Tierra puede entenderse visualizando el movimiento de una peonza, con un periodo de unos 26000 años. Las revoluciones de los planetas hacen que la materia tienda a separarse de los ejes del movimiento. Motivo por el cual, los planetas son más achatados por los polos. En el caso particular de la Tierra, la influencia gravitatoria del Sol y la Luna sobre este abultamiento es el principal motivo de la precesión. De hecho, si la Tierra fuera una esfera perfecta, este movimiento no existiría [2].

Este fenómeno es de vital importancia a la hora de elaborar los calendarios. Afecta a la duración del año trópico¹, puesto que cada equinoccio se desplaza alrededor de un grado cada 71.6 años en el plano de la eclíptica. Esto provoca que el tiempo que tarda el Sol en ir de un equinoccio de primavera a otro varíe. Como consecuencia, el año trópico es unos veinte minutos más corto que el sidéreo². Otro de los efectos de la precesión es que la estrella más cercana al Polo Norte Celeste cambia con el tiempo. A día de hoy, esta estrella es Polaris. Alrededor del año 12000 a.C., la estrella Vega, de la constelación Lyra, era la estrella del Norte (ver Figura 1).

La precesión de los equinoccios también está relacionada con ciertos cambios en el clima de la Tierra. De hecho, la conexión de los fuertes cambios climáticos y las glaciaciones, con movimientos como la precesión fue establecida por Milanković en la década de 1920 [3]. Esta y otras consecuencias del movimiento de precesión serán tratadas con

¹Es el periodo que necesita el Sol sobre el plano de la eclíptica para recorrer dos veces el Equinoccio de primavera.

²Corresponde al periodo de revolución de la Tierra alrededor del Sol o visto de otra forma, lo que tarda el Sol en recorrer la eclíptica.

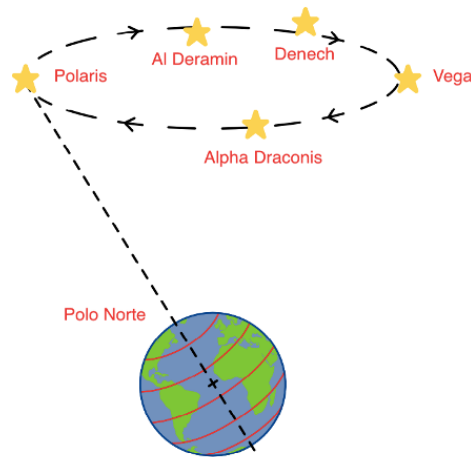


Figura 1: Cambio de la estrella del Norte.

mayor profundidad en la sección 4.

La estructura del trabajo será la siguiente. En primer lugar, para dotar el trabajo de un contexto científico adecuado, en la sección 2.1 se mencionarán los logros conseguidos gracias a la teoría newtoniana y se expondrá un criterio para determinar si esta teoría es una aproximación adecuada. En los demás apartados de la sección 2, se analizarán fundamentos de la gravedad newtoniana, presentando las principales propiedades de la teoría. El análisis comenzará con el caso sencillo de dos masas puntuales introducido en la sección 2.2, para ampliarlo en las próximas secciones. En la siguiente sección se generalizará este sistema para múltiples fuentes y materia continua. Los campos gravitatorios de cuerpos esféricos y no esféricos se analizarán en la sección 2.4. En la sección 2.5, se estudiarán en detalle las propiedades de los tensores STF, presentando importantes identidades para el estudio de sistemas de la mecánica celeste. Continuaremos la sección 2 haciendo un análisis detallado de sistemas de cuerpos aislados atraídos mutuamente por atracción gravitatoria, presentando las ecuaciones para los potenciales interno y externo y obteniendo una expresión para la ecuación de movimiento. Obtendremos también una ecuación general que nos de la variación del spin respecto al tiempo, la cual utilizaremos para el posterior cálculo de la precesión del eje de la Tierra. Finalizaremos esta sección introduciendo el marco fundamental y estableciendo las relaciones de sus vectores con los vectores propios del marco orbital.

Para finalizar el trabajo, en la sección 3 introduciremos el problema de la precesión de los equinoccios, explicando las principales características y las causas que lo producen. Utilizaremos los procedimientos matemáticos desarrollados durante la sección 2, especialmente la fórmula para la variación temporal del spin, junto con el marco de referencia fundamental, para calcular la tasa de cambio del ángulo de precesión y su periodo. Finalmente, explicaremos las consecuencias de este movimiento y posibles mejoras de la teoría.

2. Fundamentos de la gravedad newtoniana

En esta sección se hará un estudio detallado de la teoría de la gravedad newtoniana, desde el caso más sencillo de dos masas puntuales hasta sistemas más complejos como los sistemas binarios o los sistemas formados por cuerpos axialmente simétricos. Antes de tratarlos, será necesario estudiar las propiedades de los tensores STF, una herramienta matemática de gran utilidad para resolver este tipo de sistemas. Esta sección finalizará con una ecuación para el cambio temporal del spin, la cual va a resultar de vital importancia para el ejemplo de la precesión de los equinoccios que trataremos en la sección 3.

2.1. Alcance de la teoría

La teoría de la gravedad newtoniana ha conseguido describir satisfactoriamente gran cantidad de sucesos de la mecánica celeste. Edmund Halley, utilizó esta teoría para calcular la órbita de un cometa en 1682, informando que era el mismo cometa que se había observado en 1531, 1607 y que se volvería a observar en 1758. A día de hoy se conoce como el cometa Halley. Alexis Clairaut también se basó en la teoría de Newton para calcular el perihelio del cometa Halley, y escribió varios trabajos sobre la órbita de la Luna y sobre el movimiento de los cometas. Urbain Le Verrier, un matemático francés e independientemente, John Couch Adams un matemático inglés, descubrieron la existencia de Neptuno como explicación a las diferencias observadas entre los datos experimentales sobre la órbita de Urano, y los resultados predichos por la teoría newtoniana [4, 5].

Esta gran cantidad de triunfos provocaron que la confianza en la teoría de Newton fuera casi absoluta. Hasta que a mediados del siglo XIX, las observaciones de la órbita de Mercurio mostraron discrepancias con las predicciones de la gravedad newtoniana. Los astrónomos establecieron que el perihelio (máxima distancia de acercamiento al Sol) de Mercurio, avanzaba 575" por siglo, mientras que los cálculos matemáticos mostraban una diferencia de unos 40" por siglo. Actualmente, sabemos que el valor de la discrepancia es de $42,98 \pm 0,04$ " por siglo. Para estos cálculos, se tuvo en cuenta la influencia de otros planetas, principalmente Venus por su cercanía y Júpiter por su gran masa [6].

Al igual que pasó con Urano, se introdujo un nuevo planeta al que llamaron Vulcano para explicar dicha discrepancia, pero nunca fue encontrado. El problema fue resuelto en 1915, de la mano de Albert Einstein, utilizando las ecuaciones de la relatividad general. Desde entonces, sabemos que la teoría de gravitación de Newton es una teoría incompleta, sin embargo, nos proporciona una descripción detallada sobre el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra, de los planetas alrededor del Sol o de la evolución de las estrellas de la secuencia principal. En cambio, para objetos muy masivos como las estrellas de neutrones o los agujeros negros es necesario utilizar la relatividad general [6].

El criterio que se utiliza para decidir si se puede usar la teoría newtoniana o si hay que recurrir a la teoría de Einstein se basa en la magnitud de una cantidad denominada **factor de corrección relativista**, ϵ :

$$\epsilon \propto \frac{GM}{c^2 r} \propto \frac{v^2}{c^2}, \quad (2.1)$$

donde G es la constante de gravitación universal, c es la velocidad de la luz, y M, r y v representan la masa, tamaño y velocidad del sistema. Cuanto menor es este factor,

mejor es la aproximación de la teoría de gravitación de Newton.

Tabla 1: Valores de ϵ para sistemas gravitacionales [7].

Sistema gravitacional	Valor
Órbita de la Tierra alrededor del Sol	10^{-8}
Órbita del Sistema Solar alrededor de la galaxia	10^{-6}
Superficie del Sol	10^{-5}
Superficie de una enana blanca	10^{-4}
Superficie de una estrella de neutrones	0.1
Horizonte de eventos de un agujero negro	≈ 1

La Tabla (1) recopila los valores de ϵ para diferentes sistemas gravitacionales. Estos valores son los que van a determinar el nivel de precisión de la teoría de la gravedad de Newton para estos sistemas. Por ejemplo, en el caso de la Tierra orbitando alrededor del Sol, la teoría newtoniana va a proporcionar una descripción con una precisión de 10^{-8} . En el caso de las enanas blancas, la precisión va a decaer a 10^{-4} , mientras que para estrellas de neutrones y agujeros negros, la teoría se vuelve completamente inadecuada.

2.2. Dinámica de dos masas puntuales

La atracción que la fuerza de la gravedad de la Tierra ejerce sobre nosotros es un hecho de experiencia cotidiano. Algo tan simple como la caída de un bolígrafo nos recuerda la existencia de dicha fuerza. Una buena forma de adentrarnos en la teoría de la gravedad newtoniana es mediante **la ley de gravitación universal**, formulada por Isaac Newton en su libro: *Philosophiæ naturalis principia mathematica*. Esta ley anuncia lo siguiente: “la fuerza con la que se atraen dos objetos es directamente proporcional a sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa” [7, 8].

Sean M y m las masas de dos partículas puntuales situadas respectivamente en el origen de coordenadas y en \vec{r} . La fuerza que la partícula 1 ejerce sobre la partícula 2 viene dada por

$$\vec{F} = -\frac{GmM}{r^2}\hat{n}. \quad (2.2)$$

donde $\hat{n} = \vec{r}/r$ es un vector unitario que apunta en dirección opuesta a la fuerza y G es la constante de gravitación universal que posee un valor de $G = 6,67384(80) \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$. Por la tercera ley de Newton, la fuerza ejercida por la partícula 2 sobre la partícula 1, \vec{F}_{21} es de igual magnitud y de signo contrario a \vec{F}_{12} .

Otra forma de escribir esta ley es mediante el gradiente de un potencial $U = GM/r$

$$\vec{F} = m\vec{\nabla}U. \quad (2.3)$$

Nótese que normalmente $\vec{F} = -m\vec{\nabla}U$, y $U = -GM/r$, pero en este trabajo vamos a tomar la notación de la ecuación (2.3), para no tener que arrastrar dicho signo, siguiendo

la referencia [7]. Otra ley fundamental para el estudio de la dinámica orbital newtoniana es **la segunda ley de Newton**

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (2.4)$$

Mientras la masa de un objeto se mantenga constante, la aceleración que este gane será directamente proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él, siendo la masa del objeto la constante de proporcionalidad. Las ecuaciones que rigen la gravedad newtoniana vendrán dadas por

$$\vec{a} = -\vec{\nabla}U, \quad U = GM/r. \quad (2.5)$$

Sin embargo, para llegar al cálculo final de la precesión del eje de rotación terrestre o de otros casos particulares, necesitamos considerar situaciones más generales. Primero, tenemos que pasar de masas puntuales a cuerpos formados por una distribución continua de materia, de cualquier tamaño o forma y, segundo, tenemos que considerar un número arbitrario de estos cuerpos y dejar de restringirnos al caso de dos cuerpos.

2.3. Ecuaciones de la materia continua

Para comenzar, consideremos el cuerpo material como si estuviera formado por elementos de fluido, mucho más pequeños que el tamaño del cuerpo, pero mucho más grandes que la distancia intermolecular [9]. El problema puede extenderse a un sistema de varios cuerpos. Si consideramos N cuerpos puntuales, con masa M_A situados en la posición \vec{r}_A , donde $A = 1, 2, \dots, N$, el potencial total en el punto \vec{x} , producido por la superposición de los potenciales individuales de cada cuerpo vendrá dado por

$$U = \sum_A U_A = G \sum_A \frac{M_A}{|\vec{x} - \vec{r}_A|}. \quad (2.6)$$

El potencial obtenido puede aplicarse a un sistema de varios cuerpos, bajo la aproximación de masas puntuales. Sin embargo, lo que nos interesa es considerar cuerpos más generales, formados por una distribución continua de materia. Para obtener el nuevo potencial, tenemos que sustituir el sumatorio discreto $\sum_A M_A$ por una integral de la forma $\int d^3x' \rho(t, \vec{x}')$, sustituyendo además la variable discreta \vec{r}_A por la variable de integración \vec{x}' . Finalmente, se llega a una expresión para el potencial general

$$U(t, \vec{x}) = G \int \frac{\rho(t, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'. \quad (2.7)$$

Por otra parte, las situaciones en las que se vean involucradas la gravedad y distribuciones de materia pueden describirse de forma completa utilizando las ecuaciones de continuidad, Euler y Poisson que son las siguientes, tomadas de la referencia [7],

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (2.8)$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{\nabla}U - \vec{\nabla}p, \quad (2.9)$$

$$\nabla^2 U = -4\pi G \rho(t, \vec{x}). \quad (2.10)$$

2.4. Cuerpos esféricos y no esféricos

La Tierra, al igual que otros planetas, no es una esfera perfecta, sino que el movimiento de rotación alrededor de su eje hace que se asemeje más a un esferoide achatado por los polos. El concepto de Tierra esférica permite obtener modelos matemáticos simples para describir su potencial gravitatorio. Aún así, la mejor descripción de la Tierra es la de un esferoide oblato. En esta sección introduciremos el potencial interior y exterior creado por cuerpos esféricos y usaremos un desarrollo en armónicos esféricos para describir cuerpos más realistas como es el caso de la Tierra [7].

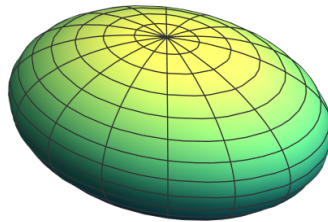


Figura 2: Esferoide oblato.

2.4.1. Cuerpos esféricos

Hacemos uso de la ecuación de Poisson (2.10), expresando el laplaciano en coordenadas esféricas

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) U = -4\pi G \rho. \quad (2.11)$$

Debido a la simetría esférica, la dependencia en las variables, θ y ϕ desaparece y la anterior ecuación se simplifica

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) = -4\pi G \rho(t, r). \quad (2.12)$$

Integrando la ecuación anterior y escogiendo la constante de integración de tal forma que la fuerza gravitatoria se anule en $r = 0$, el gradiente del potencial queda de la forma

$$\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r \rho(t, r') r'^2 dr'. \quad (2.13)$$

Si definimos la masa contenida en una esfera de radio r

$$m(t, r) := \int_0^r 4\pi \rho(t, r') r'^2 dr', \quad (2.14)$$

podemos expresar la ecuación (2.13) en términos de dicha masa

$$\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{Gm(t, r)}{r^2}. \quad (2.15)$$

La fuerza gravitatoria en el caso de cuerpos esféricos viene completamente determinada por la masa contenida en una esfera de radio r , de modo que cualquier distribución de

materia fuera de esa esfera no contribuye a la fuerza. Fuera del cuerpo, donde $m(t, r) = m(t, R) = M$, siendo R el radio del cuerpo, la ecuación (2.15) se simplifica a

$$\frac{dU}{dr} = -\frac{GM}{r^2}. \quad (2.16)$$

En este caso, la fuerza gravitatoria es independiente del tiempo y depende de la masa total del cuerpo. Integrando las dos últimas ecuaciones se puede obtener el potencial gravitatorio dentro y fuera del cuerpo.

Dentro del cuerpo para $r < R$, se integra la ecuación (2.15) desde 0 hasta r . Tal y como vemos en la Figura 3,

$$\int_0^r = \int_0^\infty - \int_r^R - \int_R^\infty. \quad (2.17)$$

Imponiendo las condiciones de contorno: $U(r = 0) = U(r = \infty) = 0$, se logra el siguiente resultado para $U(r < R)$

$$U(t, r)_{int} = \frac{GM}{R} + G \int_r^R \frac{m(t, r')}{r'^2} dr', \quad (2.18)$$

y para $U(r > R)$, se obtiene

$$U(r)_{ext} = \frac{GM}{r}. \quad (2.19)$$

Vemos que se verifica la condición de continuidad $U(r = R)_{int} = U(r = R)_{ext}$. Estas expresiones se pueden resumir en una única expresión en función de la densidad de masa $\rho(t, r)$

$$U(t, r) = \frac{Gm(t, r)}{r} + 4\pi G \int_r^R \rho(t, r') r' dr'. \quad (2.20)$$

Para el potencial exterior, esta ecuación se reduce a la ecuación (2.19), ya que $\rho = 0$ y $m = M$.

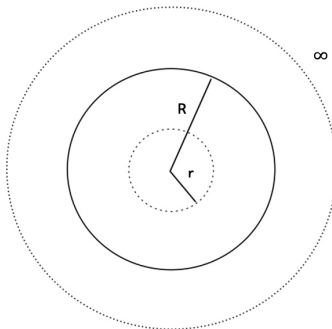


Figura 3: Cuerpo esférico de radio R .

2.4.2. Cuerpos no esféricos

La simetría esférica es una simplificación útil, pero poco realista. Ningún cuerpo en el Universo es esféricamente simétrico. La Tierra, el Sol o las galaxias no son esféricas, ya

que la rotación o las interacciones con otros cuerpos rompen dicha simetría. En los casos en los cuales las desviaciones de la simetría esférica sean pequeñas, como puede ser el caso del Sol o de la Tierra, puede utilizarse el método de expansión multipolar para describir el campo gravitatorio de estos cuerpos.

Comenzamos expresando las variables ρ y U en términos de los armónicos esféricos. Los armónicos esféricos son soluciones de la ecuación de autovalores

$$\left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) Y_{\ell m} = -\ell(\ell + 1)Y_{\ell m}. \quad (2.21)$$

En el caso de $Y_{\ell 0}$, los armónicos esféricos son independientes del ángulo ϕ y vienen dados explícitamente por

$$Y_{\ell 0}(\theta) = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi}} P_{\ell}(\cos \theta), \quad (2.22)$$

donde

$$P_{\ell}(\mu) := \frac{1}{2^{\ell} \ell!} \frac{d^{\ell}}{d\mu^{\ell}} (\mu^2 - 1)^{\ell} \quad (2.23)$$

son los polinomios de Legendre³. Por otra parte, en el caso general $Y_{\ell m}$, la expresión correspondiente es

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}} P_{\ell}^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (2.24)$$

donde

$$P_{\ell}^m(\mu) := (-1)^m (1 - \mu^2)^{m/2} \frac{d^m}{d\mu^m} P_{\ell}(\mu) \quad (2.25)$$

son los polinomios asociados de Legendre⁴. Finalmente, para $Y_{\ell m}$ con $m < 0$ se usa la fórmula

$$Y_{\ell, -m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{\ell m}^*(\theta, \phi). \quad (2.26)$$

Los armónicos esféricos forman una base de funciones ortonormales [10]

$$\int Y_{\ell m}(\theta, \phi) Y_{\ell' m'}^*(\theta, \phi) d\Omega = \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'}, \quad (2.27)$$

por lo que cualquier función $f(\theta, \phi)$ se puede expresar de la forma

$$f(\theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} f_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad (2.28)$$

donde los coeficientes vienen dados por

$$f_{\ell m} = \int f(\theta, \phi) Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) d\Omega. \quad (2.29)$$

³Los polinomios de Legendre forman una familia de polinomios ortogonales solución de las ecuaciones diferenciales de Legendre, $(1 - x^2) P_{\ell}''(x) - 2x P_{\ell}'(x) + \ell(\ell + 1) P_{\ell}(x) = 0$.

⁴Los polinomios asociados de Legendre son soluciones de la ecuación general de Legendre, $(1 - x^2) y'' - 2xy' + \left[\ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right] y = 0$ y coinciden con los polinomios de Legendre en el caso de $m = 0$.

Siguiendo el mismo procedimiento para ρ y ϕ , obtenemos

$$\rho(t, r, \theta, \phi) = \sum_{\ell m} \rho_{\ell m}(t, r) Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad U(t, r, \theta, \phi) = \sum_{\ell m} U_{\ell m}(t, r) Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad (2.30)$$

donde el sumatorio es una notación reducida para expresar el sumatorio de la ecuación (2.28). Los coeficientes que aparecen en estas dos ecuaciones siguen la forma de la ecuación (2.29)

$$\rho_{\ell m}(t, r) = \int \rho(t, r, \theta, \phi) Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) d\Omega, \quad U_{\ell m}(t, r) = \int U(t, r, \theta, \phi) Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) d\Omega. \quad (2.31)$$

Sustituimos los coeficientes $\rho_{\ell m}$ y $U_{\ell m}$ en la ecuación (2.11), teniendo en cuenta que los armónicos esféricos son solución de la ecuación de autovalores (2.21), obteniendo así un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\mathcal{L}U_{\ell m} = -4\pi Gr^2 \rho_{\ell m}, \quad \mathcal{L} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - \ell(\ell + 1). \quad (2.32)$$

en las cuales, \mathcal{L} es el operador Laplaciano efectivo. La ecuación (2.32) puede resolverse introduciendo una función de Green, $g_{\ell}(r, r')$, que sea solución de

$$\mathcal{L}g_{\ell}(r, r') = -4\pi\delta(r - r'). \quad (2.33)$$

Una vez se obtiene esta función, el potencial $U_{\ell m}$ puede calcularse de la siguiente forma

$$U_{\ell m}(t, r) = G \int g_{\ell}(r, r') \rho_{\ell m}(r, r') r'^2 dr'. \quad (2.34)$$

Podemos construir la función de Green introduciendo las funciones $U_{<}(r)$ y $U_{>}(r)$

$$g_{\ell}(r, r') = U_{<}(r) \Theta(r' - r) + U_{>}(r) \Theta(r - r'), \quad (2.35)$$

donde $\Theta(r - r')$ es la función escalón de Heavise

$$\Theta(r - r') = \begin{cases} 1 & r - r' > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \quad (2.36)$$

que tiene la propiedad $\Theta'(r - r') = \delta(r - r')$. Teniendo en cuenta las siguientes condiciones: $U_{<}(r)$ y $U_{>}(r)$ son soluciones independientes de la ecuación homogénea, es decir, $\mathcal{L}U = 0$, $U_{>}(r') - U_{<}(r') = 0$, $U'_{>}(r') - U'_{<}(r') = -4\pi/r'^2$, $U_{<}(r) \propto r^{\ell}$ para que sea finita en $r=0$ y $U_{>}(r) \propto r^{-(\ell+1)}$ para que sea finita en $r = \infty$, se obtiene la función de Green deseada

$$g_{\ell}(r, r') = \frac{4\pi}{2\ell + 1} \left[\frac{r^{\ell}}{r'^{\ell+1}} \Theta(r' - r) + \frac{r'^{\ell}}{r^{\ell+1}} \Theta(r - r') \right] = \frac{4\pi}{2\ell + 1} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}}, \quad (2.37)$$

donde $r_{<} := \min(r, r')$ y $r_{>} := \max(r, r')$.

Esta función de Green nos permite obtener una expresión para el potencial gravitatorio introduciéndola en la ecuación (2.34). Suponiendo que los límites de integración son 0 y ∞ , podemos dividir esta ecuación en dos integrales, una de ellas desde 0 hasta r y la otra desde r hasta ∞ . Teniendo en cuenta la forma de la función de Green, en la primera integral sólo va a sobrevivir el segundo término de la ecuación (2.37), ya que $r' < r$,

mientras que en la segunda integral sobrevive el primero, ya que, en este caso, $r < r'$. En vista de todo esto, el coeficiente $U_{\ell m}$ del potencial gravitatorio queda de la forma

$$U_{\ell m}(t, r) = \frac{4\pi G}{2\ell + 1} \left[r^\ell \int_r^\infty \frac{\rho_{\ell m}(t, r')}{r'^{\ell+1}} r'^2 dr' + \frac{1}{r^{\ell+1}} \int_0^r r'^\ell \rho_{\ell m}(t, r') r'^2 dr' \right]. \quad (2.38)$$

Conviene introducir las siguientes funciones, donde $p_{\ell m}(t, r)$ se define sobre una esfera de radio R que rodea la distribución de materia

$$q_{\ell m}(t, r) := \int_0^r r'^\ell \rho_{\ell m}(t, r') r'^2 dr', \quad p_{\ell m}(t, r) := \int_r^R \frac{\rho_{\ell m}(t, r')}{r'^{\ell+1}} r'^2 dr'. \quad (2.39)$$

Sustituyendo entonces esta expresión en la ecuación (2.30), se obtiene el resultado final para el potencial gravitatorio de un cuerpo esférico

$$U(t, r, \theta, \phi) = G \sum_{\ell m} \frac{4\pi}{2\ell + 1} \left[q_{\ell m}(t, r) \frac{Y_{\ell m}(\theta, \phi)}{r^{\ell+1}} + p_{\ell m}(t, r) r^\ell Y_{\ell m}(\theta, \phi) \right]. \quad (2.40)$$

Esta ecuación podrá utilizarse para cuerpos casi esféricos limitando los términos del sumatorio. La expresión para el potencial en el exterior de la materia se simplifica, ya que la densidad es nula y por consiguiente la función $p_{\ell m}$ también lo es. Por otro lado, la función $q_{\ell m}$ se evalúa en $r = R$, ya que nos encontramos fuera de la distribución de materia. Con todo ello, el potencial en el exterior queda de la siguiente manera

$$U_{\text{ext}}(t, r, \theta, \phi) = G \sum_{\ell m} \frac{4\pi}{2\ell + 1} q_{\ell m}(t, R) \frac{Y_{\ell m}(\theta, \phi)}{r^{\ell+1}}. \quad (2.41)$$

Es oportuno expresar esta ecuación en términos de los **momentos multipolares** $I_{\ell m}(t) = q_{\ell m}(t, R)$

$$I_{\ell m}(t) := \int_{V_{\text{total}}} \rho(t, \vec{x}) r^\ell Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) d^3x, \quad (2.42)$$

donde el dominio de integración se extiende sobre el volumen ocupado por la distribución de materia. De este modo, la ecuación (2.41) queda reducida a

$$U_{\text{ext}}(t, \vec{x}) = G \sum_{\ell m} \frac{4\pi}{2\ell + 1} I_{\ell m}(t) \frac{Y_{\ell m}(\theta, \phi)}{r^{\ell+1}}. \quad (2.43)$$

Resulta de gran utilidad expresar el potencial gravitatorio en términos de los momentos multipolares, puesto que resulta sencillo conocer sus valores para el caso de cuerpos esféricos o de cuerpos axialmente simétricos. En el caso de un cuerpo esférico, únicamente el momento monopolar I_{00} va a ser no nulo, ya que no depende de los ángulos θ y ϕ . Por su parte, para un cuerpo axialmente simétrico sólo van a contribuir los momentos multipolares con $m = 0$, puesto que son independientes del ángulo ϕ .

2.5. Tensores STF

Los **tensores STF** tienen la propiedad de ser simétricos bajo el intercambio de dos índices cualesquiera y de tener traza nula para cualquier par de índices. En algunas ocasiones, es más sencillo utilizar la representación en armónicos esféricos, mientras que en otras prevalece el uso de este tipo de tensores. Por ese motivo, resulta útil introducir esta

herramienta matemática, ya que podremos derivar de una manera sencilla la forma del potencial gravitatorio y las ecuaciones del movimiento. A su vez, nos va a resultar útil para calcular la precesión del eje de la Tierra [7, 11].

De aquí en adelante, vamos a utilizar la notación compacta de índices introducida por primera vez por Blanchet y Damour (1986) [11]. Un índice en mayúscula indica un multi-índice, mientras que en minúscula indica un índice individual

$$L = j_1 j_2 \dots j_\ell, \quad X_L = X_{j_1 j_2 \dots j_\ell}, \quad (2.44)$$

donde el índice Cartesiano j_i varía entre 1,2,3 o entre x, y, z . El sumatorio siempre está implícito en la notación multi-índice para índices repetidos, de tal forma que

$$S_L T_L = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_\ell} S_{j_1 j_2 \dots j_\ell} T_{j_1 j_2 \dots j_\ell}. \quad (2.45)$$

La ecuación (2.43) nos da una expresión para el potencial gravitatorio exterior producido por un cuerpo esférico en términos de los armónicos esféricos. Este potencial también puede desarrollarse haciendo uso de los tensores STF. Volviendo a la expresión para el potencial gravitatorio dada por la ecuación (2.7), podemos hacer un desarrollo de Taylor de $|\vec{x} - \vec{x}'|^{-1}$ en términos de las potencias de \vec{x}' en el caso $|\vec{x}'| < |\vec{x}|$:

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{r} - x'^j \partial_j \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{2} x'^j x'^k \partial_j \partial_k \left(\frac{1}{r} \right) \dots = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} x'^L \partial_L \left(\frac{1}{r} \right). \quad (2.46)$$

donde $x^L = x^i x^j \dots$ (L veces) y $\partial_L = \partial_i \partial_j \dots$ (L veces). Insertamos este desarrollo de Taylor en la ecuación (2.7) e introducimos la definición de los **momentos multipolares STF**

$$I^{(L)}(t) := \int \rho(t, \vec{x}') x'^L d^3 x', \quad (2.47)$$

la cual también vamos a insertar en la ecuación (2.7). En la ecuación (2.47), hemos añadido los brackets angulares que hacen alusión a un producto simétrico de traza nula. Realizando estos cambios en la ecuación (2.7), el potencial exterior en términos de los tensores STF queda de la forma

$$U_{\text{ext}}(t, \vec{x}) = G \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} I^{(L)} \partial_{(L)} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (2.48)$$

El potencial exterior se expresa como una suma sobre los momentos multipolares de la fuente. Para un cuerpo esférico, $I^{(L)}$ es cero en todos los casos excepto en el caso $\ell = 0$. Todos los índices contenidos en L , como pueden ser $ijk\dots$, están asociados con una dirección. Sin embargo, en el caso particular de un cuerpo esférico, no hay ninguna dirección privilegiada que se pueda asociar a dicho cuerpo. Por ende, todo lo que tenga índices tiene que anularse.

Como vamos a demostrar a continuación, $\partial_L r^{-1}$ es un tensor STF. Teniendo esto en cuenta, cabe destacar que hemos utilizado brackets para el momento multipolar $I^{(L)}$ en la ecuación (2.48) debido a la siguiente regla general para los tensores STF: un tensor cualquiera A^L , que esté multiplicado por un tensor STF $B_{(L)}$, satisface la siguiente condición

$$A^L B_{(L)} = A^{(L)} B_{(L)}, \quad (2.49)$$

donde $A^{\langle L \rangle}$ es igual a A^L al simetrizarlo y extraerle todas las trazas. Por ese motivo, $I_L \partial_{\langle L \rangle} r^{-1} = I_{\langle L \rangle} \partial_{\langle L \rangle} r^{-1}$. En otro orden de ideas, si comparamos la ecuación (2.48) con la ecuación (2.43), podemos observar que existe cierta relación entre $Y_{lm}/r^{\ell+1}$ y $\partial_L r^{-1}$ y entre $I_{\ell m}$ y $I^{\langle L \rangle}$, lo cual detallaremos en más adelante.

Procedamos ahora a demostrar que los tensores de la forma $\partial_L r^{-1}$ son tensores STF. Para ello, comenzaremos analizando las derivadas del estilo $\partial_j r^{-1}$, $\partial_{jk} r^{-1}$, $\partial_{jkn} r^{-1}$, las cuales aparecen en el desarrollo de Taylor de la ecuación (2.46). Siendo $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y $\hat{n} = \vec{r}/r$, mediante un cálculo sencillo pueden demostrarse las siguientes igualdades

$$\partial_j r^{-1} = -n_j r^{-2}, \quad (2.50)$$

$$\partial_{jk} r^{-1} = (3n_j n_k - \delta_{jk}) r^{-3}, \quad (2.51)$$

$$\partial_{jkn} r^{-1} = -[15n_j n_k n_n - 3(n_j \delta_{kn} + n_k \delta_{jn} + n_n \delta_{jk})] r^{-4}. \quad (2.52)$$

Podríamos seguir de la misma forma calculando derivadas de mayor rango, pero con estos tres ejemplos ya podemos ver cómo todos ellos forman tensores STF. Por un lado, cumplen el requisito de ser simétricos, porque las derivadas parciales conmutan entre ellas, y por otro lado, todos se anulan cuando se calcula la traza sobre cualquier par de índices, como por ejemplo, $\delta^{jk} \partial_{jkn} r^{-1} = 0 = \nabla^2 \partial_n r^{-1} = \partial_n \nabla^2 r^{-1}$. Por ende, concluimos que todos los tensores de la forma $\partial_L r^{-1}$ son tensores STF. Los tensores STF, pueden distinguirse porque se escriben con brackets $\langle \rangle$.

Una manera de obtener los tensores STF de vectores unitarios de la forma n^j , es mediante el cálculo del producto $n^j n^k$ al cual se le extraen todas las trazas. Por ejemplo, para construir el tensor $n^{\langle jk \rangle}$, calculamos $\delta_{jk} n^j n^k = 1$ y teniendo en cuenta que $\delta_{jk} \delta^{jk} = 3$ en el espacio de tres dimensiones, el tensor vendrá dado por

$$n^{\langle jk \rangle} = n^j n^k - \frac{1}{3} \delta^{jk}. \quad (2.53)$$

Haciendo lo mismo se obtiene el tensor de rango 3, $n^{\langle jkn \rangle}$

$$n^{\langle jkn \rangle} = n^j n^k n^n - \frac{1}{5} (\delta^{jk} n^n + \delta^{jn} n^k + \delta^{kn} n^j), \quad (2.54)$$

el cual también presenta traza nula para cualquier par de índices.

La fórmula general para productos STF de este estilo es

$$n^{\langle j_1 j_2 \dots j_\ell \rangle} = \sum_{p=0}^{\lfloor \ell/2 \rfloor} (-1)^p \frac{\ell! (2\ell - 2p - 1)!!}{(\ell - 2p)! (2\ell - 1)!! (2p)!!} \times \delta^{\langle j_1 j_2 \delta^{j_3 j_4} \dots \delta^{j_{2p-1} j_{2p}} n^{j_{2p+1}} n^{j_{2p+2}} \dots n^{j_\ell \rangle}, \quad (2.55)$$

donde $\lfloor \ell/2 \rfloor$ toma el valor de $\ell/2$ cuando ℓ es par y $(\ell-1)/2$ cuando es impar. Los paréntesis en las deltas indican la simetrización del tensor. Un **tensor simétrico** de rango q se define de la siguiente manera

$$C^{\langle k_1 k_2 \dots k_q \rangle} = \frac{1}{q!} (C^{k_1 k_2 \dots k_q} + \dots), \quad (2.56)$$

donde el resto de términos son posibles permutaciones de los q índices. Teniendo en cuenta lo anterior, esta fórmula puede expresarse de forma más reducida

$$n^{\langle L \rangle} = \sum_{p=0}^{\lfloor \ell/2 \rfloor} (-1)^p \frac{(2\ell - 2p - 1)!!}{(2\ell - 1)!!} [\delta^{2p} n^{L-2p} + \text{sym}(q)], \quad (2.57)$$

donde δ^{2p} representa el producto de las deltas de dirac, n^{L-2p} representa el producto de $\ell - 2p$ vectores unitarios y finalmente el término $\text{sym}(q)$ hace alusión a todos los diferentes términos que surgen de las permutaciones de los índices. El número total de términos dentro de los corchetes es $q = \ell! / [(\ell - 2p)!(2p)!!]$.

Comparando las ecuaciones (2.51) y (2.52) con (2.53) y (2.54), junto con la ecuación (2.50), encontramos las siguientes igualdades: $\partial_j r^{-1} = -n_j r^{-2}$, $\partial_{jk} r^{-1} = 3n_{\langle jk \rangle} r^{-3}$ y $\partial_{jkn} r^{-1} = -15n_{\langle jkn \rangle} r^{-4}$, de las cuales puede deducirse una regla general

$$\partial_L r^{-1} = \partial_{\langle L \rangle} r^{-1} = (-1)^\ell (2\ell - 1)!! \frac{n^{\langle L \rangle}}{r^{\ell+1}}. \quad (2.58)$$

Utilizando esta igualdad, la ecuación (2.48) vendrá dada por

$$U_{\text{ext}}(t, x) = G \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(2\ell - 1)!!}{\ell!} I^{\langle L \rangle} \frac{n^{\langle L \rangle}}{r^{\ell+1}}. \quad (2.59)$$

Vamos a introducir un par de identidades para los productos de dos vectores unitarios \hat{n} y \hat{n}' , siendo ambos tensores STF, ya que van a resultar útiles para las próximas secciones:

$$n'_{\langle L \rangle} n^{\langle L \rangle} = \frac{\ell!}{(2\ell - 1)!!} P_\ell(\mu), \quad (2.60)$$

$$n'_{\langle L \rangle} n^{\langle jL \rangle} = \frac{\ell!}{(2\ell + 1)!!} \left[\frac{dP_{\ell+1}}{d\mu} n^j - \frac{dP_\ell}{d\mu} n'^j \right], \quad (2.61)$$

donde $\mu = \hat{n} \cdot \hat{n}'$.

Mostraremos en primer lugar la ecuación (2.60). Expresamos el producto $n'_{\langle L \rangle} n^{\langle L \rangle}$ como $n'_L n^{\langle L \rangle}$, haciendo uso de la regla (2.58) y sustituimos el tensor $n^{\langle L \rangle}$ por la expresión (2.55). Al multiplicar el vector \hat{n}' por el tensor $n^{\langle L \rangle}$, $2p$ factores de \hat{n}' multiplicarán las $2p$ delta de dirac, devolviendo la unidad, mientras que los restantes $\ell - 2p$ factores, multiplicarán los vectores \hat{n} devolviendo $\mu^{\ell-2p}$. De esta forma, llegamos a la siguiente expresión

$$n'_{\langle L \rangle} n^{\langle L \rangle} = \sum_{p=0}^{\lfloor \ell/2 \rfloor} (-1)^p \frac{\ell!(2\ell - 2p - 1)!!}{(\ell - 2p)!(2\ell - 1)!!(2p)!!} \mu^{\ell-2p}. \quad (2.62)$$

Teniendo en cuenta que $(2p)!! = 2^p p!$ y que $(2\ell - 2p - 1)!! = (2\ell - 2p)! / [2^{\ell-p} (\ell - p)!]$, se obtiene

$$n'_{\langle L \rangle} n^{\langle L \rangle} = \frac{\ell!}{(2\ell - 1)!!} \sum_{p=0}^{\lfloor \ell/2 \rfloor} (-1)^p \frac{1}{2^\ell p! (\ell - p)! (\ell - 2p)!} \mu^{\ell-2p}. \quad (2.63)$$

La suma que aparece en esta ecuación es una representación de los polinomios de Legendre $P_\ell(\mu)$, demostrando así la ecuación (2.60). Esto es así ya que la forma general de los polinomios de Legendre de orden n viene dada por el siguiente sumatorio

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^M (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^m m! (n-m)! (n-2m)!} x^{n-2m}, \quad (2.64)$$

donde $M = [n/2]$. Para el caso particular de $\hat{n} = \hat{n}'$, o dicho de otra forma, $\mu = 1$, $P_\ell(\mu) = 1$ la ecuación (2.60) se reduce a

$$n'_{\langle L \rangle} n^{\langle L \rangle} = \frac{\ell!}{(2\ell-1)!!}. \quad (2.65)$$

Partiendo de esta ecuación podemos determinar el valor de la cantidad $n_j n^{\langle jL \rangle}$, ya que va a resultar de utilidad para demostrar la ecuación (2.61). En las ecuaciones (2.53) y (2.54) hemos construido tensores STF mediante la multiplicación de vectores \hat{n} . En el caso de $n_j n^{\langle jL \rangle}$ tenemos un producto de vectores \hat{n} contraídos en uno de los índices, por lo que tiene que ser proporcional al tensor $n^{\langle L \rangle}$, ya que quedan L índices libres. Utilizando la ecuación (2.65), y teniendo en cuenta que ahora $\ell \rightarrow \ell+1$, la constante de proporcionalidad que se obtiene es $(\ell+1)!/(2\ell+1)!!$. Desarrollando los factoriales obtenemos

$$n_j n^{\langle jL \rangle} = \frac{\ell+1}{2\ell+1} n^{\langle L \rangle}. \quad (2.66)$$

Para demostrar la ecuación (2.61), hay que tener en cuenta que $n'_{\langle L \rangle} n^{\langle jL \rangle}$ tiene que construirse como una combinación de n^j y n'^j , por contracción del resto de índices. Por ese motivo, lo escribiremos de la forma $(\ell+1)!(an^j + bn'^j)/(2\ell+1)!!$, donde el término $(\ell+1)/(2\ell+1)!!$ se ha introducido por conveniencia. Utilizando las ecuaciones (2.60) y (2.66), podemos obtener las condiciones que tienen que satisfacer las constantes a y b . Por un lado, si multiplicamos las partes izquierdas de estas ecuaciones y sustituimos $n'_{\langle L \rangle} n^{\langle jL \rangle}$, por la expresión anterior en términos de a y b , obtenemos la condición $a + b\mu = P_\ell(\mu)$. La segunda condición es $a\mu + b = P_{\ell+1}(\mu)$. Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos $a = (\mu P_{\ell+1} - P_\ell)/(\mu^2 - 1)$ y $b = (\mu P_\ell - P_{\ell+1})/(\mu^2 - 1)$. Utilizando una de las relaciones de recurrencia de los polinomios de Legendre, $\frac{x^2-1}{n} \frac{d}{dx} P_n = x P_n - P_{n-1}$, las constantes pueden expresarse alternativamente como $a = (\ell+1)^{-1} dP_{\ell+1}/d\mu$ y $b = -(\ell+1)^{-1} dP_\ell/d\mu$. Finalmente se obtiene la ecuación (2.61).

Una vez explicadas las propiedades de los tensores STF y tras haber deducido diversas identidades que nos van a resultar útiles en las próximas secciones, conviene establecer relaciones con los armónicos esféricos, con el fin de demostrar que ambos lenguajes son equivalentes. Comencemos definiendo el vector unitario \hat{n}

$$\hat{n} = \sin \theta \cos \phi \hat{e}_x + \sin \theta \sin \phi \hat{e}_y + \cos \theta \hat{e}_z. \quad (2.67)$$

Como se descompone en funciones de θ y ϕ , puede descomponerse en armónicos esféricos como hicimos en la ecuación (2.21). En este caso la descomposición involucra un único valor para ℓ y los $2\ell+1$ valores para m . La función $n^{\langle L \rangle}$ satisface la misma ecuación de autovalores que $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$, $r^2 \nabla^2 n^{\langle L \rangle} = -\ell(\ell+1)n^{\langle L \rangle}$, por lo que tiene que expresarse de la siguiente forma

$$n^{\langle L \rangle} = N_\ell \sum_{m=-\ell}^{\ell} \mathcal{Y}_{\ell m}^{\langle L \rangle} Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad N_\ell = \frac{4\pi \ell!}{(2\ell+1)!!}, \quad (2.68)$$

donde $\mathcal{Y}_{\ell m}$ es un tensor STF constante que satisface $\mathcal{Y}_{\ell, -m}^{(L)} = (-1)^m \mathcal{Y}_{\ell m}^{*(L)}$ y N_ℓ es una constante de normalización escogida así por conveniencia. Si multiplicamos a ambos lados de la ecuación por $Y_{\ell m}^*$ y $n'_{\langle L \rangle}$, integramos sobre toda la esfera y aplicamos la ecuación (2.61), llegamos a la siguiente expresión

$$\mathcal{Y}_{\ell m}^{(L)} n'_{\langle L \rangle} = \frac{1}{N_\ell} \int n^{(L)} n'_{\langle L \rangle} Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) d\Omega = \frac{2\ell + 1}{4\pi} \int P_\ell(\mu) Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) d\Omega. \quad (2.69)$$

Utilizamos el teorema de adición de los polinomios de Legendre, podemos sustituir $P_\ell(\mu)$ por

$$P_\ell(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad (2.70)$$

siendo en este caso $\cos \gamma = \mu$. Integrando obtenemos una expresión para los armónicos esféricos en función de los tensores STF

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \mathcal{Y}_{\ell m}^{*(L)} n_{\langle L \rangle}. \quad (2.71)$$

Utilizando la expresión (2.42) para los momentos multipolares, $I_{\ell m}$, y sabiendo la relación de los tensores STF con los armónicos esféricos, dada por las ecuaciones (2.68) y (2.71), podemos derivar las siguientes relaciones

$$I_{\ell m}(\theta, \phi) = \mathcal{Y}_{\ell m}^{(L)} I_{\langle L \rangle}, \quad (2.72)$$

$$I^{(L)} = \frac{4\pi \ell!}{(2\ell + 1)!!} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \mathcal{Y}_{\ell m}^{*(L)} I_{\ell m}. \quad (2.73)$$

Gracias a las identidades demostradas anteriormente, los tensores STF van a resultarnos herramientas matemáticas de gran utilidad a la hora de determinar el potencial gravitatorio o la aceleración relativa de los sistemas celestes que estudiemos. Finalmente, también nos serán beneficiosos para el caso de la precesión del eje de rotación terrestre, como veremos en las próximas secciones.

2.6. Sistemas de cuerpos aislados atraídos por atracción gravitatoria

En esta última sección del Capítulo 2, vamos a describir sistemas de cuerpos aislados, que se atraigan mutuamente por atracción gravitatoria, pero que estén separados entre sí. Por tal motivo, suponemos que la escala típica de los cuerpos R es menor que la separación r entre ellos, $R < r$. De esta forma, se excluyen las estrellas binarias en contacto. Por otra parte, al suponer que los cuerpos están aislados, descartamos también los fenómenos de eyección o de acreción de masa. En esta sección, vamos a limitar más el problema asumiendo que la distancia entre los cuerpos es mucho mayor que la longitud del cuerpo, $r \gg R$. A pesar de aplicar una serie de aproximaciones, las ecuaciones que consigamos van a describir una gran cantidad de fenómenos importantes de la mecánica celeste, como pueden ser la dinámica de los planetas del Sistema Solar o sistemas binarios de estrellas de la secuencia principal. Este método también podrá aplicarse al cálculo de la precesión del eje de la Tierra [7], que se tratará en la sección 3.

Para comenzar, supongamos un sistema de N cuerpos. Cada uno de ellos está asignado por $A = 1, 2, \dots, N$ y ocupa un volumen V_A delimitado por una superficie S_A . La densidad de masa ρ es igual a ρ_A dentro de V_A y cero en la región entre los cuerpos. La masa total para un cuerpo A viene dada por

$$m_A = \int_A \rho(t, \vec{x}) d^3x, \quad (2.74)$$

donde el dominio de integración se extiende un poco más allá del volumen V_A , de modo que sea lo suficientemente pequeño para no contener otro cuerpo, pero lo suficientemente grande para seguir conteniendo el cuerpo A mientras se mueve en un intervalo de tiempo dt .

Conviene definir una serie de variables asociadas al centro de masas del cuerpo A que permitan caracterizar el cuerpo como un todo en lugar de las variables de fluido (ρ, p, \vec{v}) que habíamos utilizado anteriormente. De esta manera, definimos la posición, velocidad y aceleración del centro de masas,

$$\vec{r}_A(t) = \frac{1}{m_A} \int_A \rho(t, \vec{x}) \vec{x} d^3x, \quad \vec{v}_A(t) = \frac{1}{m_A} \int_A \rho(t, \vec{x}) \vec{v} d^3x, \quad \vec{a}_A(t) = \frac{1}{m_A} \int_A \rho(t, \vec{x}) \frac{d\vec{v}}{dt} d^3x. \quad (2.75)$$

Según la ecuación (2.47), los momentos multipolares STF del cuerpo A , vienen dados por

$$I_A^{(L)}(t) := \int_A \rho(t, \vec{x}) (x - r_A)^{(L)} d^3x, \quad (2.76)$$

los cuales hacen referencia a su centro de masas \vec{r}_A . Escogiendo el centro de masas como origen de coordenadas, el momento dipolar, $I_A^j = \int_A \rho (x - r_A)^j d^3x$ se anula. Insertando la ecuación de Euler (2.9) en la ecuación para la aceleración del centro de masas dada por (2.75), obtenemos las ecuaciones de movimiento para el cuerpo A . El término correspondiente al gradiente de presión se anula utilizando el Teorema de Gauss y sustituyéndolo por $\oint p d\vec{S}$, ya que $p = 0$ en la superficie. De esta forma, se obtiene finalmente

$$m_A \vec{a}_A = \int_A \rho \vec{\nabla} U d^3x. \quad (2.77)$$

2.6.1. Potencial interno y externo

En el marco local de un cuerpo A , la acción gravitatoria es descrita por un potencial efectivo, el cual está producido en parte por el mismo cuerpo, U_A y en parte, por el resto de los cuerpos $B \neq A$, U_{-A} , tal que,

$$U = U_A + U_{-A}, \quad (2.78)$$

con

$$U_A(t, \vec{x}) = G \int_A \frac{\rho(t, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x', \quad (2.79)$$

como potencial interno producido por el cuerpo A y con

$$U_{-A}(t, \vec{x}) = \sum_{B \neq A} G \int_B \frac{\rho(t, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x', \quad (2.80)$$

como potencial externo producido por el resto de cuerpos. A continuación, vamos a demostrar que el potencial interno producido por el cuerpo A no contribuye a la ecuación (2.77). Para ello partimos de la siguiente identidad para un sistema de fluido

$$\int \rho \vec{\nabla} U d^3x = 0. \quad (2.81)$$

Esto puede demostrarse de la siguiente manera. Haciendo uso de la ecuación (2.7) para el potencial gravitatorio, se tiene que

$$\frac{\partial U}{\partial x^j} = G \int \rho' \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'. \quad (2.82)$$

Insertando esta expresión en la ecuación (2.81), obtenemos

$$\int \rho \frac{\partial U}{\partial x^j} d^3x = G \int \rho \rho' \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' d^3x. \quad (2.83)$$

Para demostrar que esta expresión es nula, vamos a renombrar las variables \vec{x} y \vec{x}' , de tal forma que \vec{x} pase a llamarse \vec{x}' y \vec{x}' pase a llamarse \vec{x} . Aplicando este cambio y reordenando los términos se obtiene

$$\int \rho \frac{\partial U}{\partial x^j} d^3x = G \int \rho' \rho \frac{\partial}{\partial x'^j} \frac{1}{|\vec{x}' - \vec{x}|} d^3x d^3x' = G \int \rho \rho' \frac{\partial}{\partial x'^j} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' d^3x. \quad (2.84)$$

La derivada respecto a x^j de $|\vec{x} - \vec{x}'|^{-1}$ es igual a $-|\vec{x} - \vec{x}'|^{-3}(x^j - x'^j)$, mientras que la derivada respecto a x'^j es $|\vec{x} - \vec{x}'|^{-3}(x^j - x'^j)$, por lo que, $\partial/\partial x'^j$ es igual a $-\partial/\partial x^j$. Sustituyendo esto en la ecuación anterior se tiene que

$$\int \rho \frac{\partial U}{\partial x^j} d^3x = -G \int \rho \rho' \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' d^3x. \quad (2.85)$$

Comparando esta ecuación con la ecuación (2.83), se ve inmediatamente que la integral (2.81) es nula. Por lo que, aplicando esta expresión únicamente al cuerpo A en lugar de a todo el fluido, se puede ver que el potencial interno no contribuye a la ecuación del movimiento predicha anteriormente (2.77). Debido a lo cual, la ecuación final obtenida es

$$m_A \vec{a}_A = \int_A \rho \vec{\nabla} U_{-A} d^3x. \quad (2.86)$$

En la siguiente sección obtendremos una expresión para el potencial interno U_{-A} y calcularemos a su vez el gradiente $\partial_j U_{-A}$ haciendo uso de los tensores STF. De esta manera, obtendremos la ecuación de movimiento para el cuerpo A en función de variables conocidas.

2.6.2. Expansión de Taylor para el potencial externo

La variable de integración \vec{x} de la ecuación (2.86) se extiende sobre la escala R_A y como el potencial externo U_A varía en la escala \vec{r}_{AB} siendo $\vec{r}_{AB} := |\vec{r}_A - \vec{r}_B|$, donde $r_{AB} \gg R_A$, es conveniente expresar el potencial externo como un desarrollo de Taylor de la variable \vec{x} , alrededor de \vec{r}_A .

$$U_{-A}(t, \vec{x}) = U_{-A}(t, \vec{r}_A) + (x - r_A)^j \partial_j U_{-A}(t, \vec{r}_A) + \frac{1}{2} (x - r_A)^{jk} \partial_{jk} U_{-A}(t, \vec{r}_A) + \dots \quad (2.87)$$

Utilizando la notación multi-índice de los tensores STF la expresión anterior se reduce a

$$U_{-A}(t, \vec{x}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} (x - r_A)^\ell \partial_L U_{-A}(t, \vec{r}_A). \quad (2.88)$$

Las derivadas parciales de U_{-A} , $\partial_L U_{-A}$ forman un tensor STF, por cumplir las dos propiedades que los caracterizan: es simétrico, porque las derivadas parciales conmutan entre ellas y además la traza es nula porque por ejemplo, $\delta^{jk} \partial_{jkn} U_{-A} = \nabla^2 \partial_n U_{-A} = \partial_n \nabla^2 U_{-A} = 0$. Por lo tanto, utilizando la condición (2.49) se puede escribir

$$(x - r_A)^\ell \partial_L U_{-A} = (x - r_A)^\ell \partial_{\langle L} U_{-A} = (x - r_A)^{\langle L} \partial_{\rangle L} U_{-A}. \quad (2.89)$$

Obtenemos así la forma final para el potencial externo,

$$U_{-A}(t, \vec{x}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} (x - r_A)^{\langle L} \partial_L U_{-A}(t, \vec{r}_A), \quad (2.90)$$

en el cual hemos eliminado los brackets redundantes en $\partial_{\langle L}$, ya que todas las derivadas de la forma $\partial_L U_{-A}$ son tensores STF. Ahora nos interesa calcular el gradiente de este potencial para sustituirlo en la ecuación dinámica (2.86),

$$\partial_j U_{-A}(t, \vec{x}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} (x - r_A)^{\langle L} \partial_{jL} U_{-A}(t, \vec{r}_A), \quad (2.91)$$

obteniendo finalmente

$$m_A a_A^j = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} I_A^{\langle L} (t) \partial_{jL} U_{-A}(t, \vec{r}_A). \quad (2.92)$$

Mediante el uso de los tensores STF, hemos llegado hasta una expresión para las ecuaciones de movimiento en función de los momentos multipolares del cuerpo A y de las derivadas parciales de U_{-A} evaluadas en $\vec{x} = \vec{r}_A$. Ahora procederemos a obtener una expresión para $\partial_{jL} U_{-A}(t, \vec{r}_A)$. Volvemos a utilizar el potencial externo U_{-A} dado por la expresión (2.80), donde la variable de integración \vec{x}' puede definirse mediante

$$\vec{x}' = \vec{r}_B(t) + \vec{z}, \quad (2.93)$$

donde $\vec{r}_B(t)$ representa el centro de masas del cuerpo B y \vec{z} un desplazamiento respecto a ese centro de masas. Entonces, el denominador de cada término de la ecuación (2.80) es de la forma $|\vec{x} - \vec{r}_B - \vec{z}|^{-1}$. Podemos hacer un desarrollo de Taylor de dicho denominador alrededor de la variable \vec{z} teniendo en cuenta que \vec{z} es mucho menor que $\vec{x} - \vec{r}_B$, ya que se extiende sobre \vec{R}_B , mientras que $\vec{x} - \vec{r}_B$ es del orden de \vec{r}_{AB} . Haciendo la expansión de Taylor y siguiendo la condición de la ecuación (2.49), al igual que se hizo en la ecuación (2.89), se obtiene

$$\begin{aligned} |\vec{x} - \vec{r}_B - \vec{z}|^{-1} &= |\vec{x} - \vec{r}_B|^{-1} - \vec{z}^p \partial_p |\vec{x} - \vec{r}_B|^{-1} + \frac{1}{2} \vec{z}^{pq} \partial_{pq} |\vec{x} - \vec{r}_B|^{-1} \dots \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \vec{z}^{\langle L} \partial_{L'} |\vec{x} - \vec{r}_B|^{-1} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \vec{z}'^{\langle L} \partial_{L'} |\vec{x} - \vec{r}_B|^{-1}. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Sustituyendo esta expresión en lugar de $|\vec{x} - \vec{r}_B - \vec{z}'|^{-1}$ en la ecuación para el potencial externo (2.7), llegamos al siguiente resultado

$$U_{-A}(t, \vec{x}) = G \sum_{B \neq A} \sum_{\ell'=0}^{\infty} \int_B \rho(t, \vec{r}_B + \vec{z}') \frac{(-1)^{\ell'}}{\ell'!} \vec{z}'^{\langle L' \rangle} \partial_{L'} |\vec{x} - \vec{r}_B|^{-1} d^3 \vec{x}', \quad (2.95)$$

que podemos expresarlo en función de los momentos multipolares de cada cuerpo B , siguiendo la definición dada por la ecuación (2.76), obteniendo así

$$U_{-A}(t, \vec{x}) = G \sum_{B \neq A} \sum_{\ell'}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell'}}{\ell'!} I_B^{\langle L' \rangle} \partial_{L'} |\vec{x} - \vec{r}_B|^{-1}. \quad (2.96)$$

Una vez obtenida la expresión para el potencial externo U_{-A} , podemos calcular el factor $\partial_{jL} U_{-A}(t, \vec{r}_A)$ para sustituirlo en las ecuaciones de movimiento (2.92). Las derivadas se evalúan en $\vec{x} = \vec{r}_A$. El resultado es

$$\partial_{jL} U_{-A}(t, \vec{x}) = G \sum_{B \neq A} \sum_{\ell'}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell'}}{\ell'!} I_B^{\langle L' \rangle} \partial_{jLL'} \left(\frac{1}{r_{AB}} \right), \quad (2.97)$$

donde $r_{AB} = |\vec{r}_A - \vec{r}_B|$. La derivada parcial $\partial_{jLL'}$ significa que se realizan $\ell + \ell' + 1$ derivadas de $|\vec{x} - \vec{r}_B|^{-1}$ evaluando \vec{x} en $\vec{x} = \vec{r}_A$. Con esta expresión se llega a la ecuación para la aceleración del centro de masas del cuerpo A

$$m_A a_A^j = G \sum_{B \neq A} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{\ell'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell}}{\ell! \ell'!} I_A^{\langle L \rangle} I_B^{\langle L' \rangle} \partial_{jLL'}^A \left(\frac{1}{r_{AB}} \right). \quad (2.98)$$

Podemos reescribir esta ecuación de forma más sencilla aislando los primeros términos de las sumas sobre ℓ y ℓ' , teniendo en cuenta que el monopolo del cuerpo A es $I_A = m_A$ y que su momento dipolar se anula al colocar el origen del sistema de coordenadas sobre el centro de masas del cuerpo, $\int \rho \vec{x} d^3 x = 0$. Se llega finalmente a

$$a_A^j = G \sum_{B \neq A} \left\{ -\frac{m_B}{r_{AB}^2} n_{AB}^j + \sum_{\ell=2}^{\infty} \frac{1}{\ell!} \left[(-1)^\ell I_B^{\langle L \rangle} + \frac{m_B}{m_A} I_A^{\langle L \rangle} \right] \partial_{jL}^A \left(\frac{1}{r_{AB}} \right) + \frac{1}{m_A} \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{\ell'=2}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell}}{\ell! \ell'!} I_A^{\langle L \rangle} I_B^{\langle L' \rangle} \partial_{jLL'}^A \left(\frac{1}{r_{AB}} \right) \right\}, \quad (2.99)$$

donde $\hat{n}_{AB} = \vec{r}_{AB}/r_{AB}$ representa un vector unitario que apunta desde un cuerpo B hasta el cuerpo A . Esta expresión describe de manera general y exacta las ecuaciones de movimiento de N cuerpos de forma arbitraria sometidos únicamente a su mutua atracción gravitatoria. Estas ecuaciones podrán resolverse una vez que las masas de los cuerpos y sus momentos multipolares en función del tiempo estén determinados, y se integrarán sabiendo las posiciones y las velocidades iniciales. De todas formas, no otorgan una descripción completa del sistema físico ya que no determinan la evolución temporal de los momentos multipolares. Esto depende en general de la estructura interna del cuerpo y de la dinámica de los cuerpos externos.

En el caso de un cuerpo perfectamente esférico, los momentos multipolares, $I_A^{\langle L \rangle}$, se anulan para $\ell \neq 0$ y se llega a las ecuaciones de movimiento familiares

$$a_A^j = - \sum_{B \neq A} \frac{G m_B}{r_{AB}^2} n_{AB}^j. \quad (2.100)$$

Sin embargo, para el resto de casos dados en general por la ecuación (2.99), también observamos términos lineales en los momentos multipolares I_A y I_B y acoplamientos entre los momentos multipolares del cuerpo A con el resto de cuerpos. El término lineal en I_B representa las deformaciones causadas por los cuerpos externos. Esto tiene sentido ya que si un cuerpo no es esféricamente simétrico y presenta momentos multipolares, es razonable pensar que estos momentos afecten al movimiento de dicho cuerpo. En estos casos, el cuerpo A se vería sometido a un potencial gravitatorio diferente al potencial creado por un cuerpo esféricamente simétrico. En resumen, el hecho de que el cuerpo B tenga un cierto tamaño y no tenga simetría esférica afecta al movimiento del cuerpo A . Por otra parte, el tercer término es un término lineal en los momentos multipolares del propio cuerpo A . Esto implica que el tamaño y forma de un cuerpo puede afectar su propio movimiento cuando se encuentra en un campo gravitatorio no uniforme. Finalmente, la aceleración del cuerpo A se ve afectada por el acoplo entre sus momentos multipolares con los momentos multipolares de los cuerpos externos. Esto no debería sorprendernos puesto que podría asemejarse a las interacciones dipolo-dipolo que encontramos en electrodinámica. Como estamos asumiendo que la distancia de separación entre los cuerpos es mucho mayor que su tamaño, estos términos se hacen más pequeños a medida que ℓ crece. Por lo tanto, en muchos casos prácticos este último término podrá despreciarse.

2.6.3. Ecuaciones de movimiento para sistemas binarios

Vamos a dedicar esta sección a resolver la ecuación (2.99) para un problema concreto: un sistema binario. El sistema binario es un caso particular del caso general de N cuerpos aislados. Este sistema estará compuesto de un primer cuerpo de masa m_1 con momentos multipolares $I_1^{(L)}$ situado en \vec{r}_1 y de un segundo cuerpo de masa m_2 con momentos multipolares $I_2^{(L)}$ situado en \vec{r}_2 . En lugar de trabajar con \vec{r}_1 y \vec{r}_2 , trabajaremos con el centro de masas, $\vec{R} = \frac{m_1}{m}\vec{r}_1 + \frac{m_2}{m}\vec{r}_2$, donde $m = m_1 + m_2$ es la masa total del sistema, y con la posición relativa $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. El vector unitario \hat{n} pasa a definirse $\hat{n} = \vec{r}/r$.

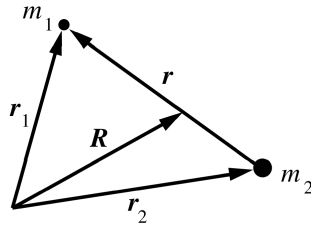


Figura 4: Problema de dos cuerpos [12].

Partiendo de la ecuación (2.99), el movimiento relativo está gobernado por

$$a^j = -\frac{Gm}{r^2}n^j + Gm \sum_{\ell=2}^{\infty} \frac{1}{\ell!} \left[\frac{I_1^{(L)}}{m_1} + (-1)^\ell \frac{I_2^{(L)}}{m_2} \right] \partial_{jL} \left(\frac{1}{r} \right) + Gm \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{\ell'=2}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell'}}{\ell!\ell'} \frac{I_1^{(L)} I_2^{(L')}}{m_1 m_2} \partial_{jLL'} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (2.101)$$

Podemos simplificar todavía más esta expresión si suponemos que uno de los dos cuerpos tiene momentos multipolares despreciables, como por ejemplo el cuerpo 1. Esto puede suceder en el caso de un satélite orbitando la Tierra, el cual es tan pequeño que no presenta

momentos multipolares apreciables o en el caso de un planeta orbitando alrededor del Sol, para el cual ocurriría lo mismo. En este caso se llega a

$$a^j = -\frac{Gm}{r^2}n^j + Gm \sum_{\ell=2}^{\infty} \frac{(-1)^\ell I_2^{(L)}}{\ell! m_2} \partial_{jL} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (2.102)$$

Supongamos ahora que el segundo cuerpo es un cuerpo rotante, simétrico alrededor de su eje de rotación. Este tipo de cuerpos se deforman por el efecto de la fuerza centrífuga causada por la rotación y se denominan **cuerpos axialmente simétricos**⁵. Supongamos que su eje de rotación está alineado con el vector unitario \hat{e} . Por simetría, el momento multipolar STF del cuerpo, $I^{(L)}$, tiene que ser proporcional al vector respecto al cual es simétrico, que en este caso es $\hat{e}^{(L)}$. Asimismo, tiene que ser proporcional a la masa del cuerpo, a ℓ veces el tamaño del cuerpo y finalmente, a una cantidad adimensional que dependa de todos los detalles del cuerpo, como su forma o su distribución de densidad. Esta cantidad adimensional se conoce como el **momento multipolar adimensional**, J_ℓ y viene dada por

$$J_\ell = -\sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} \frac{I_{\ell 0}}{MR^\ell} = -\sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} \frac{1}{MR^\ell} \int \rho(t, \vec{x}) r^\ell Y_{\ell 0}^*(\theta, \phi) d^3x, \quad (2.103)$$

donde R es el radio del cuerpo. Esta expresión podemos encontrarla, por ejemplo, en el libro de J. Jackson *Classical Electrodynamics*, [13], cuando calculamos los momentos multipolares de una distribución de carga. En el caso de $\ell = 2$, esta cantidad adimensional es de la forma

$$J_2 = \frac{C - A}{MR^2}, \quad (2.104)$$

donde $C = \int \rho(t, \vec{x})(x^2 + y^2) d^3x$ y $A = \int \rho(t, \vec{x})(y^2 + z^2) d^3x = \int \rho(t, \vec{x})(x^2 + z^2) d^3x$. El momento de inercia A puede escribirse de cualquiera de las dos formas anteriores para un cuerpo axialmente simétrico. Resumiendo, J_2 es la diferencia entre el momento de inercia a lo largo del eje alineado con el radio ecuatorial del cuerpo y el momento de inercia a lo largo de la dirección de simetría.

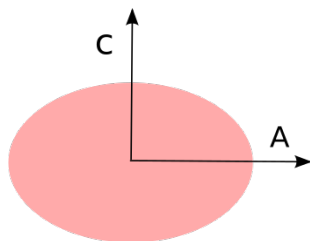


Figura 5: Cuerpo axialmente simétrico.

Como hemos dicho, los momentos multipolares del cuerpo, $I^{(L)}$, tienen que ser proporcionales al tensor STF $e^{(L)}$, para un cierto coeficiente α_ℓ , quedando de la forma $I^{(L)} = \alpha_\ell e^{(L)}$. Tomando el eje z alineado con el eje de simetría, los únicos momentos multipolares no nulos son aquellos con $m = 0$. Podemos determinar el coeficiente α_ℓ

⁵Un cuerpo es axialmente simétrico cuando su densidad de masa es invariante bajo una rotación alrededor del eje de simetría.

utilizando las ecuaciones (2.22), (2.72), (2.73) y (2.103) de la siguiente manera

$$-\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} J_\ell m R^\ell = I_{\ell 0} = \mathcal{Y}_{\ell 0}^{(L)} I_{(L)} = \frac{Y_{\ell 0}^*}{n_{(L)}} I_{(L)} = \frac{I_{(L)}}{n_{(L)}} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} P_\ell^*(\cos \theta), \quad (2.105)$$

donde θ es el ángulo entre la dirección de medida y el eje de simetría del cuerpo. Despejando $I_{(L)}$, se obtiene el valor para el coeficiente $\alpha_\ell = -m R^\ell J_\ell$ de modo que el momento multipolar para el cuerpo 2 resulta

$$I_2^{(L)} = -m_2 R_2^\ell (J_\ell)_2 e_2^{(L)}. \quad (2.106)$$

Insertando esta cantidad en la expresión para la aceleración relativa y basándonos en la ecuación (2.58) para calcular $\partial_{jL} r^{-1} = -(-1)^\ell (2\ell+1)!! / n_{(jL)} r^{\ell+2}$ se llega a

$$a^j = -\frac{Gm}{r^2} \left[n^j - \sum_{\ell=2}^{\infty} \frac{(2\ell+1)!!}{\ell!} (J_\ell)_2 \left(\frac{R_2}{r} \right)^\ell e_2^{(L)} n_{(jL)} \right]. \quad (2.107)$$

Para cuerpos suficientemente separados y poco deformados, el término $\ell = 2$ domina en el sumatorio. Utilizando la ecuación (2.61), sustituyendo el vector \hat{n}' por el vector \hat{e}_2 y teniendo en cuenta la forma de los polinomios de Legendre (2.23), la aceleración relativa se reduce a

$$\vec{a} = -\frac{Gm}{r^2} \left[\hat{n} - \frac{3}{2} (J_2)_2 \left(\frac{R_2}{r} \right)^2 \{ [5(\hat{e}_2 \cdot \hat{n})^2 - 1] \hat{n} - 2(\hat{e}_2 \cdot \hat{n}) \hat{e}_2 \} \right]. \quad (2.108)$$

Esta ecuación que hemos obtenido corresponde con la aceleración relativa de un sistema de dos cuerpos, en el cual el primero de ellos es esférico, mientras que el segundo es axialmente simétrico. La simetría esférica es una simplificación que se utiliza para describir los cuerpos astronómicos, aunque la forma real no suele ser perfectamente esférica, como consecuencia del movimiento de rotación de los astros, entre otros motivos. Esta aproximación puede describir una gran cantidad de sucesos importantes, como por ejemplo, Mercurio orbitando alrededor del Sol oblató o un satélite artificial orbitando alrededor de la Tierra, que como ya sabemos no es perfectamente esférica. Estos sucesos también pueden describirse mediante la ecuación de gravitación universal de Newton, sin embargo, con la ecuación (2.108) obtenemos una precisión mayor.

2.6.4. Dinámica de spin

Comenzamos introduciendo el momento angular intrínseco o **spin** del cuerpo A

$$S_A(t) := \int_A \rho(t, \vec{x}) (\vec{x} - \vec{r}_A) \times (\vec{v} - \vec{v}_A) d^3x. \quad (2.109)$$

El producto vectorial de dos vectores se puede escribir como

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}, \quad \iff \quad c_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_j b_k, \quad (2.110)$$

donde el símbolo de Levi-Civita viene dado por

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i, j, k) \text{ es } (1, 2, 3), (2, 3, 1) \text{ o } (3, 1, 2) \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ es } (3, 2, 1), (1, 3, 2) \text{ o } (2, 1, 3) \\ 0 & \text{de otro modo } (i = j, j = k, k = i) \end{cases} \quad (2.111)$$

Esto permite reescribir la ecuación para el spin de la siguiente manera

$$S_A^j(t) = \epsilon^{jpa} \int_A \rho (x - r_A)^p (v - v_A)^a d^3x. \quad (2.112)$$

Para el ejemplo final que vamos a tratar en este trabajo, la precesión del eje de rotación terrestre, es necesario calcular la derivada temporal del spin, $d\vec{S}/dt$. Para hacer esta derivada será interesante considerar integrales de la forma $F(t) = \int \rho(t, \vec{x}) f(t, \vec{x}) d^3x$, puesto que estas integrales satisfacen la siguiente identidad

$$\frac{d}{dt} \int \rho(t, \vec{x}) f(t, \vec{x}) d^3x = \int \rho \frac{df}{dt} d^3x, \quad (2.113)$$

donde

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \vec{\nabla} f \quad (2.114)$$

es la derivada Lagrangiana. La ecuación (2.113) puede demostrarse de la siguiente manera, donde se hace uso de la ecuación de continuidad en el segundo paso y se expresa $f \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} f) - \rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f$. La integral de volumen de la divergencia total $\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} f)$ se escribe como una integral de superficie la cual se anula porque $p = 0$ en la superficie S .

$$\frac{d}{dt} \int \rho(t, \vec{x}) f(t, \vec{x}) d^3x = \int \left(\rho \frac{\partial f}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f \right) d^3x - \oint f p \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int \rho \frac{df}{dt} d^3x. \quad (2.115)$$

Por lo tanto, utilizando todo esto, la derivada temporal del spin queda de la forma

$$\begin{aligned} \frac{dS_A^j}{dt} &= \epsilon^{jpa} \int_A \rho (v - v_A)^p (v - v_A)^a d^3x + \epsilon^{jpa} \int_A \rho (x - r_A)^p (dv/dt - a_A)^a d^3x \\ &= \epsilon^{jpa} \int_A \rho (x - r_A)^p \frac{dv^a}{dt} d^3x. \end{aligned} \quad (2.116)$$

La primera integral se anula por el producto vectorial y para la segunda integral hay que tener en cuenta que $\int_A \rho (x - r_A)^p d^3x = 0$, por definición del centro de masas. Insertando la ecuación de Euler, (2.9), podemos reescribir la ecuación anterior en términos del potencial y de la presión obteniendo

$$\frac{dS_A^j}{dt} = \epsilon^{jpa} \int_A \rho (x - r_A)^p \partial_q U d^3x - \epsilon^{jpa} \int_A (x - r_A)^p \partial_q p d^3x. \quad (2.117)$$

La integral que involucra la presión puede integrarse por partes. El término de superficie se anula puesto que $p = 0$ en S y el segundo término $\epsilon^{jpa} \delta_{pq} \int_A p d^3x$ se anula por definición del símbolo de Levi-Civita. Insertamos en la primera integral la descomposición del potencial U en términos de los potenciales interno y externo. La parte correspondiente al potencial interno se expresa de la siguiente manera

$$\epsilon^{jpa} \int_A \rho x^p \partial_q U_A d^3x - \epsilon^{jpa} r_A^p \int_A \rho \partial_q U_A d^3x. \quad (2.118)$$

Ahora vamos a demostrar que ambos términos son nulos. Empezando por la primera integral, conviene escribirla en términos del producto vectorial, insertando la definición

del potencial gravitatorio para un sistema general

$$\begin{aligned} \int \rho \vec{x} \times \vec{\nabla} U d^3x &= -G \int \rho \rho' \frac{\vec{x} \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} d^3x' d^3x = G \int \rho \rho' \frac{\vec{x}' \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} d^3x' d^3x \\ &= -\frac{1}{2} G \int \rho \rho' \frac{(\vec{x} - \vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} d^3x' d^3x = 0. \end{aligned} \quad (2.119)$$

En el segundo paso se han renombrado las variables llamando \vec{x} a \vec{x}' y viceversa ordenando el resultado. Como la integral del primer paso es igual a la segunda, se suman y se divide por dos para obtener la tercera integral, la cual se anula finalmente por el producto vectorial. Aplicando este resultado general para el caso que nos compete del cuerpo A , vemos que la primera integral de la ecuación (2.118) se hace cero. Asimismo, la segunda integral es igual a $\int_A \rho \vec{\nabla} U_A d^3x$ que ya se había demostrado anteriormente que era nula. De esta forma, la evolución del spin sólo depende del potencial gravitatorio externo creado por el resto de cuerpos

$$\frac{dS_A^j}{dt} = \epsilon^{j pq} \int_A \rho (x - r_A)^p \partial_q U_{-A} d^3x. \quad (2.120)$$

Insertando la ecuación (2.91) que nos da una expresión para $\partial_q U_{-A}$ e insertando la definición de momento multipolar, (2.76), se llega al siguiente resultado

$$\frac{dS_A^j}{dt} = \epsilon^{j pq} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} I_A^{(pL)} \partial_{qL} U_{-A}(t, r_A). \quad (2.121)$$

Insertamos ahora la ecuación (2.97) que proporciona una expresión para $\partial_{qL} U_{-A}$ obteniendo así

$$\frac{dS_A^j}{dt} = G \epsilon^{j pq} \sum_{B \neq A} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{\ell'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell'}}{\ell! \ell'!} I_A^{(pL)} I_B^{(L')} \partial_{(qLL')}^A \left(\frac{1}{r_{AB}} \right). \quad (2.122)$$

Vamos a analizar a continuación los términos que no contribuyen. Por una parte, los términos con $\ell = 0$, que hacen referencia al cuerpo A son nulos, ya que el momento multipolar es de la forma $I^{(pL)}$. Por ello, no hace referencia al término monopolar, sino al dipolar, que se anula al colocar el origen de coordenadas en el centro de masas del cuerpo. En segundo lugar, los términos con $\ell' = 0$, referidos a los cuerpos B , sólo involucran a m_B y finalmente, los términos con $\ell' = 1$ tampoco contribuyen, ya que el momento multipolar STF de los cuerpos B es de la forma $I^{(L)}$, haciendo referencia al momento dipolar del cuerpo, que se anula por las mismas razones que para el cuerpo A . Teniendo todo lo anterior en consideración, podemos reescribir la ecuación anterior más simplificada, separando por una parte los momentos lineales en A , y por otra, los productos de momentos

$$\frac{dS_A^j}{dt} = G \epsilon^{j pq} \left(\sum_{B \neq A} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell!} m_B I_A^{(pL)} \partial_{(qL)}^A \left(\frac{1}{r_{AB}} \right) + \sum_{B \neq A} \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{\ell'=2}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell'}}{\ell! \ell'!} I_A^{(pL)} I_B^{(L')} \partial_{(qLL')}^A \left(\frac{1}{r_{AB}} \right) \right). \quad (2.123)$$

Esta ecuación nos permite saber cómo se va a comportar el spin una vez sepamos cuánto valen los momentos multipolares de los cuerpos y la dinámica del centro de masas.

Para simplificar aún más el resultado, vamos a considerar un caso concreto que pueda llevarse a la práctica: un sistema de N cuerpos formado por un cuerpo A que gire con

momentos multipolares no nulos y una serie de cuerpos externos B con momentos multipolares despreciables. Suponemos que el cuerpo A es axialmente simétrico alrededor de un eje alineado con el vector \hat{e}_A . El spin, por lo tanto, puede expresarse simplemente de la siguiente manera

$$\vec{S}_A = S_A \hat{e}_A, \quad S_A = \left| \vec{S}_A \right|. \quad (2.124)$$

Realizando esta simplificación, el segundo término de la ecuación (2.123) se anula y sólo necesitaríamos calcular el valor del primer término. La derivada $\partial_{\langle qL \rangle} (r_{AB})^{-1}$ puede calcularse utilizando la regla para los tensores STF dada por la ecuación (2.58). Siguiendo esta regla y teniendo en cuenta que se realizan $\ell + 1$ derivadas parciales, la derivada STF queda de la forma $\partial_{\langle qL \rangle} (r_{AB})^{-1} = (-1)^{\ell+1} (2\ell + 1)!! n_{\langle qL \rangle} / r^{\ell+2}$. Sustituyendo este valor y la expresión para el momento multipolar de un cuerpo axialmente simétrico, (2.106), obtenemos la siguiente ecuación para la precesión del spin

$$\frac{dS_A^j}{dt} = -\epsilon^{jpa} \sum_{B \neq A} \frac{Gm_A m_B}{r_{AB}} \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell+1} \frac{(2\ell + 1)!!}{\ell!} (J_{\ell+1})_A \left(\frac{R_A}{r_{AB}} \right)^{\ell+1} e_A^{\langle pL \rangle} n_{AB}^{\langle qL \rangle}. \quad (2.125)$$

Usando las propiedades de los tensores STF, el producto de los vectores unitarios $e_A^{\langle pL \rangle} n_{AB}^{\langle qL \rangle}$, puede expresarse de la siguiente manera [7]

$$e^{\langle pL \rangle} n^{\langle qL \rangle} = \frac{\ell!}{(2\ell + 1)(2\ell + 1)!!} \left[\delta^{qp} \frac{dP_\ell}{d\mu} - (e^q e^p + n^q n^p) \frac{d^2 P_{\ell+1}}{d\mu^2} + e^{\langle qn^p \rangle} \left(2 \frac{d^2 P_\ell}{d\mu^2} + (2\ell + 1) \frac{dP_{\ell+1}}{d\mu} \right) + (2\ell + 1) e^{\langle qn^p \rangle} \frac{dP_{\ell+1}}{d\mu} \right]. \quad (2.126)$$

Hemos introducido el término $e^{\langle qn^p \rangle}$ que equivale a $e^{\langle qn^p \rangle} = 1/2(e^q n^p - e^p n^q)$. Insertamos la expresión (2.126) en la ecuación (2.125) para la precesión del spin y observamos que al multiplicar todo ello por el tensor de Levi-Civita, ϵ^{jpa} , sólo conservamos el último término. Por una parte, el primer término se anula, ya que este tensor es nulo para índices repetidos y por otra, el segundo y tercer términos se anulan por ser productos de un término antisimétrico, por un término simétrico. Desarrollando el término $e^{\langle qn^p \rangle}$ y teniendo en cuenta la fórmula del producto vectorial de dos vectores, (2.110), se obtiene $\hat{e}_A \times \hat{n}_{AB}$. Con todo ello, logramos la ecuación final que nos indica la derivada temporal del spin para un sistema de N cuerpos, donde sólo un cuerpo A tiene momentos multipolares no nulos, obteniendo así

$$\frac{d\vec{S}_A}{dt} = - \sum_{B \neq A} \frac{Gm_A m_B}{r_{AB}} (\hat{e}_A \times \hat{n}_{AB}) \sum_{\ell=2}^{\infty} (-1)^\ell (J_\ell)_A \left(\frac{R_A}{r_{AB}} \right)^\ell \frac{dP_\ell}{d\mu_{AB}}, \quad (2.127)$$

donde P_ℓ es el polinomio de Legendre y $\mu_{AB} = \hat{e}_A \cdot \hat{n}_{AB}$. Siguiendo la ecuación (2.124), $S_A = \hat{e}_A \cdot \vec{S}_A$, por lo tanto, la magnitud del spin permanece constante, ya que, $dS_A/dt = \hat{e}_A \cdot d\vec{S}_A/dt = 0$. Podemos observar también que los términos de la suma en B , es decir, el resto de cuerpos, dan lugar a una precesión del eje \hat{e}_A en la dirección \hat{n}_{AB} . Al hacer la suma, la precesión final se dará en una dirección promediada por todos los vectores \hat{n}_{AB} . La ecuación (2.127) va a resultar de vital importancia para el ejemplo que vamos a desarrollar en este trabajo sobre la precesión de los equinoccios. En este caso particular, los cuerpos externos B van a ser el Sol y la Luna, y el cuerpo A va a ser la Tierra, teniendo en cuenta su forma oblata.

2.7. Marcos de referencia

El sistema de referencia que se utiliza para describir el problema de dos cuerpos se denomina **marco orbital** con coordenadas (x, y, z) , de tal forma que el plano orbital coincide con el plano $x - y$ y el vector de momento angular está alineado en la dirección del eje z . El marco orbital viene descrito por la base de vectores constantes: \hat{e}_x , \hat{e}_y y \hat{e}_z , y por la base de vectores dependientes del tiempo: \hat{r} , $\hat{\phi}$, \hat{e}_z ,

$$\hat{r} = \cos \phi \hat{e}_x + \sin \phi \hat{e}_y, \quad \hat{\phi} = -\sin \phi \hat{e}_x + \cos \phi \hat{e}_y, \quad (2.128)$$

Esta elección de sistema de coordenadas se adapta bien al problema de dos cuerpos, sin embargo, para casos más generales conviene introducir un nuevo sistema de referencia. Por ejemplo, si queremos describir el movimiento de dos o más planetas alrededor del Sol, cada uno de los cuales se mueve en un plano orbital diferente o en el caso de un sistema de dos cuerpos perturbado por cuerpos externos, provocando variaciones en el plano orbital.

El nuevo sistema de referencia que escogemos se denomina **marco fundamental**, con coordenadas (X, Y, Z) , escogiendo el plano $X - Y$ como plano de referencia y la dirección del eje Z como dirección de referencia. En este caso, la base de vectores constantes es la siguiente: \vec{e}_X , \vec{e}_Y y \vec{e}_Z . Ambos sistemas de referencia se escogen de tal forma que coincidan en el origen, es decir, $X = Y = Z = 0$ cuando $x = y = z = 0$. La elección del marco fundamental es arbitraria y se elige por conveniencia, por ejemplo, en el caso de la dinámica del sistema solar se escoge el plano de la órbita de la Tierra alrededor del Sol, denominada eclíptica, como marco de referencia, mientras que en el caso de satélites orbitando alrededor de la Tierra conviene escoger el plano ecuatorial de esta como referencia.

Podemos describir la dinámica orbital en el nuevo marco de referencia mediante los ángulos de Euler⁶. El plano orbital interseca con el plano de referencia formando un ángulo l , denominado **inclinación**, que es también el ángulo entre la dirección de los ejes z y Z . La línea de intersección entre ambos planos se denomina **línea de nodos**, el punto inferior en el que la órbita interseca con el plano de referencia se denomina **nodo ascendente** y el punto de intersección superior se denomina **nodo descendente**. Por otra parte, los ángulos que vemos en la Figura 6, Ω , ω y f , corresponden con **la longitud del pericentro**, **la longitud del nodo ascendente** y **la true anomaly** [7].

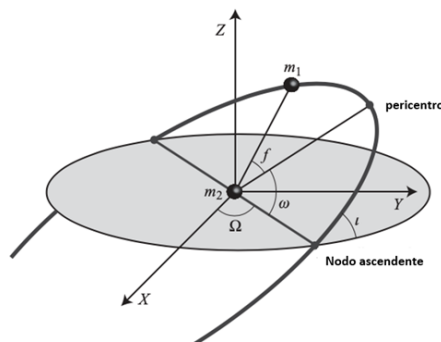


Figura 6: Dinámica orbital en el marco fundamental [7].

⁶Los ángulos de Euler son tres coordenadas angulares que permiten describir un sistema de referencia en movimiento respecto a un sistema de referencia inmóvil [14]

3. Precesión de los equinoccios

Esta última sección la dedicaremos a resolver un problema clásico de la mecánica celeste: la precesión de los equinoccios. La precesión puede describirse como la rotación del eje de la Tierra alrededor de la normal de la eclíptica en ciclos de unos 26000 años. Para comenzar, explicaremos las causas principales que producen este movimiento y las consecuencias que conlleva y finalmente realizaremos el cálculo de la tasa de precesión. Para ello, consideraremos un sistema formado por tres cuerpos: el Sol, la Tierra y la Luna y nos basaremos en la ecuación (2.127) para describir cómo la atracción del Sol y de la Luna provocan una precesión en el eje de la Tierra. Aplicaremos una serie de aproximaciones en la resolución del problema y compararemos el valor obtenido con el valor dado por J. G. Williams de 5028,77 as/siglo [1]. Finalmente, comentaremos posibles mejoras de la teoría.

3.1. Causas principales

El eje de la Tierra, el cual está inclinado $23,5^\circ$ respecto a la normal de la eclíptica, cambia gradualmente su orientación trazando un cono cada 26000 años. Este movimiento es similar al movimiento de precesión de una peonza. La peonza comienza girando con el eje perpendicular al plano del suelo, pero va perdiendo velocidad gradualmente por el rozamiento con el aire y con el suelo en el punto de contacto. La conservación del momento angular trata de mantener la posición del eje de rotación, por lo que la peonza cae describiendo un movimiento circular de oscilación. Este movimiento es el que conocemos como precesión. El movimiento de precesión que hace la Tierra es parecido, pero no hay rozamiento que frene su movimiento de rotación. Además, la enorme masa de la Tierra hace que sea complicado alterar la orientación de su eje. Por ello, es necesaria la influencia de otra masa cercana como la Luna. De hecho, la precesión es producida principalmente

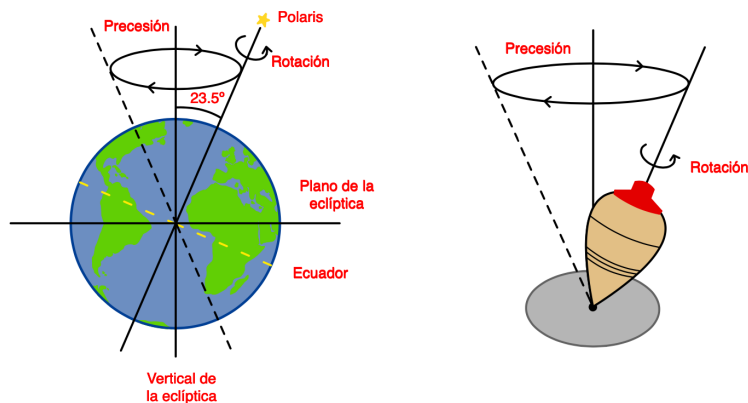


Figura 7: Movimiento de precesión Tierra-peonza.

por la atracción gravitatoria del Sol y la Luna sobre el abultamiento ecuatorial terrestre. La atracción gravitatoria que sufre una mitad de la esfera es diferente a la que sufre la otra mitad, lo que genera una fuerza de torsión que hace que el eje de la Tierra cambie de orientación.

Este descubrimiento suele atribuirse a Hiparco de Nicea en el siglo II.a.C, cuando comparó sus observaciones con otras realizadas unos 700 años a.C. Posteriormente, en 1863, se descubrió que la propia eclíptica se movía ligeramente, lo que se denominó precesión planetaria. La **precesión planetaria** se debe a la atracción gravitatoria ejercida por los planetas sobre el centro de masas de la Tierra, variando ligeramente el plano de la eclíptica. El ángulo entre la fuerza gravitatoria ejercida por otros planetas y la eclíptica, es lo que hace que esta última se desplace ligeramente. La precesión lunisolar es unas 500 veces mayor que la precesión planetaria, sin embargo, los demás planetas aparte del desplazamiento de la eclíptica, también provocan un cambio en el eje de rotación de la Tierra. Como consecuencia, desde 2006, la Unión Astronómica Internacional decidió que la componente dominante se llamara precesión del ecuador y la componente menor, precesión de la eclíptica.

3.2. Consecuencias de la precesión

La precesión de los equinoccios conlleva una serie de consecuencias observables. En primer lugar, se produce un cambio en la estrella de referencia que marca el Norte. Polaris ni fue ni será siempre la estrella del Norte. Hace 3000 años, la estrella del Norte era Dubán y dentro de 8000 será Deneb. Por otra parte, no hay ninguna estrella brillante que marque la posición del polo sur terrestre, pero con el tiempo también habrá estrellas que se conviertan en estrellas del Sur. Este desplazamiento de los polos celestes provoca que todo el campo estelar visto desde la Tierra cambie.

La precesión de los equinoccios, como su propio nombre indica, provoca el desplazamiento de los equinoccios⁷ a lo largo de la eclíptica. A medida que el eje de la Tierra precesa, el plano ecuatorial se desplaza. El ecuador celeste, que corresponde con el ecuador de la Tierra proyectado sobre la esfera celeste, se mueve a la par que el plano ecuatorial. Consecuentemente, la intersección con la eclíptica también se mueve, es decir, los equinoccios. Además del desplazamiento de los equinoccios, la precesión también provoca cambios en los solsticios⁸. Por ejemplo, consideremos el caso del solsticio de verano, cuando la inclinación axial de la Tierra apunta directamente al Sol. Cuando el Sol haya vuelto a la misma posición aparente tras realizar una órbita completa, la Tierra ya no apuntará directamente hacia el Sol, sino que el solsticio ocurrirá un poco antes. Como consecuencia, el año tropical, que mide el tiempo entre solsticios o entre equinoccios, es unos 20 minutos más corto que el año sideral, lo que se traduce en un año menos por cada 26000 años. De la misma forma, la posición aparente del Sol respecto al fondo de estrellas fijas se desplaza lentamente a través de las doce constelaciones del zodiaco, provocando una modificación del ciclo zodiacal [2].

Otra consecuencia de la precesión de la Tierra es que las coordenadas ecuatoriales de los astros, la ascensión recta y la declinación, van variando. Esto es importante a la hora de realizar catálogos estelares, los cuales se suelen modificar cada 50 años. Actualmente, se utiliza el sistema *J2000*, correspondiente a la posición del Polo Norte Celeste del 1 de enero del año 2000 a las 0 horas [15]. Sin embargo, para medidas más precisas conviene aplicar ciertas correcciones debidas a la precesión desde ese instante hasta el momento

⁷El plano del ecuador y el plano de la eclíptica intersecan en una recta y los puntos de esta recta que intersecan con la bóveda celeste son los equinoccios. Corresponden con igual horas de día y de noche.

⁸Los solsticios se encuentran a 90° de cada equinoccio desplazándonos por la eclíptica.

de la observación. De hecho, la precesión de los equinoccios es una herramienta útil para datar documentos, obras o construcciones de antiguas civilizaciones que puedan estar relacionadas con las posiciones estelares que había en ese momento. En efecto, algunas construcciones presentan una evidente orientación astronómica, como puede ser el caso de las pirámides de Egipto. Por ejemplo, las pirámides de los faraones de la dinastía IV de Dahshur y Gizeh fueron orientadas siguiendo el meridiano de las estrellas Phecda y Megrez.

La precesión de los equinoccios también conlleva consecuencias climáticas importantes. La inclinación del eje de la Tierra hace que los rayos de Sol no lleguen de la misma forma a todas partes del mundo. En el Hemisferio Norte las estaciones son más livianas que el Hemisferio Sur, ya que los rayos solares llegan perpendicularmente cuando la Tierra se encuentra en el punto más alejado del Sol y oblicuamente cuando se encuentra en el más cercano. A medida que el eje de la Tierra vaya precesando esta situación cambiará. Sin embargo, no podemos decir que dentro de 13000 años la situación vaya a invertirse provocando un clima más extremo en el Hemisferio Norte, ya que esto depende de otros factores como la cantidad de agua o las montañas [16].

En el año 1840, Louis Agassiz, un físico suizo, se percató de que en el Norte de Europa hay señales indicativas de la presencia de glaciares en el pasado. Casi un siglo después, Milutin Milanković, un astrónomo serbio, propuso que las épocas glaciares e interglaciares son producidas por las variaciones orbitales de la Tierra. Como la Tierra no sufre una glaciación cada 26000 años, es razonable suponer que la precesión no es la única causa de este fenómeno. La **oblicuidad** es otro factor importante a tener en cuenta. Se define como el cambio en el ángulo de rotación del eje terrestre, que varía entre $22,1^\circ$ y $24,5^\circ$, siendo el valor actual de $23,5^\circ$. Estos cambios en la inclinación del eje provocan que los rayos del Sol lleguen de forma más o menos directa a los polos. En las etapas en las que los rayos no llegan de forma tan directa es más probable que sucedan las glaciaciones. La **variación de la excentricidad de la órbita** es otro factor relevante. Esta variación se produce principalmente por la atracción gravitatoria que ejercen Júpiter y Saturno. La órbita de la Tierra varía su excentricidad entre 0,000055 y 0,0679, provocando también variaciones en la cantidad de energía que proviene del Sol [3].

3.3. Cálculo numérico del periodo de la precesión

En este ejemplo vamos a aplicar todo lo estudiado anteriormente para describir cómo la atracción de la Luna y el Sol provocan una precesión del eje de la Tierra alrededor de la normal de la eclíptica [7]. Esta precesión puede calcularse a partir de la ecuación (2.127), donde consideramos un cuerpo de masa m y radio R axialmente simétrico, que en este caso sería la Tierra, sujeto a la atracción gravitatoria provocada por un primer cuerpo de masa m_1 a una distancia \vec{r}_1 y un segundo cuerpo de masa m_2 a una distancia \vec{r}_2 . Consideramos que el eje de la Tierra se encuentra alineado con la dirección \hat{e} , de tal forma que, $\vec{S} = S\hat{e}$, y que la dirección de la Tierra al primer cuerpo es \hat{n}_1 , mientras que la dirección al segundo cuerpo es \hat{n}_2 .

Teniendo en cuenta la forma de los polinomios de Legendre dada por la ecuación (2.23), para el caso de $\ell = 2$, que es el que aparece en nuestra ecuación, esta expresión se reduce

a

$$P_2(\mu_{AB}) = \frac{1}{2}(3\mu_{AB}^2 - 1). \quad (3.1)$$

Por lo tanto, las derivadas que aparecen en la ecuación (2.127), $dP_2(\mu_{AB})/d\mu_{AB}$ son iguales a $3\mu_{AB}$, donde $\mu_{AB} = \hat{e} \cdot \hat{n}_1$ en el caso del primer cuerpo y $\mu_{AB} = \hat{e} \cdot \hat{n}_2$ en el caso del segundo cuerpo. Con todo ello, la precesión del spin se reduce a

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = -3GmJ_2R^2 \left[\frac{m_1}{r_1^3} (\hat{e} \cdot \hat{n}_1) (\hat{e} \times \hat{n}_1) + \frac{m_2}{r_2^3} (\hat{e} \cdot \hat{n}_2) (\hat{e} \times \hat{n}_2) \right]. \quad (3.2)$$

El movimiento de la Tierra orbitando alrededor del Sol está contenido en un plano, lo mismo que sucede con el movimiento orbital de la Luna alrededor de la Tierra. Estos dos planos presentan una diferencia de inclinación de tan sólo $5,15^\circ$ aproximadamente [1], por lo que, para simplificar los cálculos, suponemos que tanto el Sol como la Luna se mueven en un mismo plano, el plano de la eclíptica, el cual hacemos coincidir con el plano de referencia $X - Y$. Para simplificar aún más los cálculos, también suponemos que las órbitas que realizan estos astros son circulares en lugar de elípticas. Tomamos la Luna como el primer cuerpo, suponiendo que se mueve con una velocidad angular Ω_1 , siendo la dirección \hat{n}_1 de la forma

$$\hat{n}_1 = \cos(\Omega_1 t) \hat{e}_X + \sin(\Omega_1 t) \hat{e}_Y. \quad (3.3)$$

Por otro lado, hacemos coincidir el Sol con el segundo cuerpo, moviéndose con una velocidad angular Ω_2 y con una fase inicial en su órbita ψ . La dirección que apunta de la Tierra hacia el Sol es por lo tanto,

$$\hat{n}_2 = \cos(\Omega_2 t + \psi) \hat{e}_X + \sin(\Omega_2 t + \psi) \hat{e}_Y. \quad (3.4)$$

Para determinar la dirección del eje de la Tierra, hay que tener en cuenta que está inclinado un ángulo de $\alpha = 23,4^\circ$ respecto al plano de la eclíptica. Asimismo, hay que tener en cuenta el ángulo precesional, β , dependiente del tiempo. Por consiguiente, utilizando coordenadas esféricas, la dirección \hat{e} se expresa como sigue

$$\hat{e} = \sin \alpha \cos \beta \hat{e}_X + \sin \alpha \sin \beta \hat{e}_Y + \cos \alpha \hat{e}_Z. \quad (3.5)$$

Una vez obtenidas las expresiones para las tres direcciones, sólo nos queda sustituirlas en la ecuación (3.2) para conseguir finalmente la tasa de cambio del ángulo de precesión. Para ello, es necesario calcular las cantidades $(\hat{e} \cdot \hat{n}_1)$, $(\hat{e} \times \hat{n}_1)$, $(\hat{e} \cdot \hat{n}_2)$ y $(\hat{e} \times \hat{n}_2)$. Tras utilizar identidades trigonométricas, estas cantidades quedan reducidas a

$$\hat{e} \cdot \hat{n}_1 = \sin \alpha \cos(\beta - \Omega_1 t), \quad (3.6)$$

$$\hat{e} \cdot \hat{n}_2 = \sin \alpha \cos(\beta - \Omega_2 t - \psi), \quad (3.7)$$

$$\hat{e} \times \hat{n}_1 = -\cos \alpha \sin(\Omega_1 t) \hat{e}_X + \cos \alpha \cos(\Omega_1 t) \hat{e}_Y + \sin \alpha \sin(\Omega_1 t - \beta) \hat{e}_Z, \quad (3.8)$$

$$\hat{e} \times \hat{n}_2 = -\cos \alpha \sin(\Omega_2 t + \psi) \hat{e}_X + \cos \alpha \cos(\Omega_2 t + \psi) \hat{e}_Y + \sin \alpha \sin(\Omega_2 t + \psi - \beta) \hat{e}_Z. \quad (3.9)$$

Una vez insertemos estas cantidades en la ecuación (3.2) y desarrollemos los senos y cosenos de la suma/resta, teniendo en cuenta que $d\vec{S}/dt = Sd\hat{e}/dt$, sólo nos quedará promediar el resultado, donde

$$\left(\frac{d\hat{e}}{dt} \right)_{\text{sec}} = \frac{1}{P} \int_0^P \frac{d\vec{e}}{dt} dt, \quad (3.10)$$

obteniendo finalmente

$$\left(\frac{d\hat{e}}{dt}\right)_{\text{sec}} = -\frac{3GmJ_2R^2}{2S} \sin \alpha \cos \alpha \left(\frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3}\right) (-\sin \beta \hat{e}_X + \cos \beta \hat{e}_Y). \quad (3.11)$$

Para obtener la tasa de cambio del ángulo de precesión, basta con calcular la derivada temporal de la ecuación (3.5), teniendo en cuenta que α permanece constante en una escala de tiempo secular⁹, obteniendo así

$$\left(\frac{d\beta}{dt}\right)_{\text{sec}} = -\frac{3GmJ_2R^2}{2S} \cos \alpha \left(\frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3}\right). \quad (3.12)$$

El momento angular intrínseco de la Tierra se calcula usando la relación $\vec{S} = I\vec{\omega}$, donde I es el momento de inercia de la Tierra y ω su velocidad angular. Vamos a obtener una primera aproximación de este valor suponiendo que la Tierra es esférica. En ese caso, $I = 2/5M_T R_T^2$. Introduciendo los valores de $M_T = 5,97 \times 10^{24}$ kg y $R_T = 6370$ km, se obtiene un valor para el momento de inercia de $I = 9,69 \times 10^{27}$ kg. Para obtener la velocidad angular de la Tierra, debemos tener en cuenta que se realiza una rotación completa cada 24 horas, por lo tanto, $w_{\text{rot}} = 2\pi/T_{\text{rot}} = 7,27 \times 10^{-5}$ rad/s. Sustituyendo estos valores, obtenemos un resultado de $S = 7,05 \times 10^{23}$ kg · m²/s, que es bastante similar al valor real de $S = 5,86 \times 10^{23}$ kg · m²/s.

Junto a este valor, insertamos también en la ecuación (3.12) los valores de la masa de la Luna, $m_1 = 7,34 \times 10^{22}$ kg, la distancia Tierra-Luna, $r_1 = 384,0 \times 10^6$ m, la masa del Sol, $m_2 = 1,99 \times 10^{30}$ kg, la distancia Tierra-Sol, $r_2 = 1,50 \times 10^{11}$ m y el valor para el momento cuadrupolar adimensional de la Tierra, $J_2 = 1,08 \times 10^{-3}$ [17]. Finalmente obtenemos, $|(d\beta/dt)_{\text{sec}}| = 7,74 \times 10^{-12}$ rad/s. Para obtener el resultado en arcosegundos/siglo, hay que tener en cuenta el número de arcosegundos en 2π radianes ($1,30 \times 10^6/2\pi$) y el número de segundos en un siglo ($3,16 \times 10^9$). De esta forma, la tasa de cambio del ángulo de precesión es de 5040 as/siglo, que es un valor cercano al valor dado por Arthur N. Cox de 5029,09 as/siglo [17]. Ya tenemos las herramientas necesarias para calcular finalmente el periodo de la precesión del eje de la Tierra, $P_{\text{prec}} = 2\pi|(d\beta/dt)_{\text{sec}}|^{-1} = 8,12 \times 10^{11}$ s = 25700 años. Como vemos, a pesar de realizar diversas aproximaciones, como la de despreciar los momentos cuadrupolares adimensionales del Sol y de la Luna o la de despreciar la influencia del resto de planetas, obtenemos un resultado muy coherente con dado por Williams [1] de 5028,77 as/siglo que teniendo en cuenta los factores de corrección mencionados anteriormente equivale a 25788,87 años.

Una vez obtenido el valor de la precesión total, podemos calcular la contribución del Sol y de la Luna separadamente. Para el caso de la Luna, tendríamos

$$\left(\frac{d\beta}{dt}\right)_{\text{sec}} = -\frac{3GmJ_2R^2}{2S} \cos \alpha \left(\frac{m_1}{r_1^3}\right) = 5,30 \times 10^{-12} \text{rad/s} = 34,51 \text{ as/año}. \quad (3.13)$$

Y para el caso del Sol

$$\left(\frac{d\beta}{dt}\right)_{\text{sec}} = -\frac{3GmJ_2R^2}{2S} \cos \alpha \left(\frac{m_2}{r_2^3}\right) = 2,44 \times 10^{-12} \text{rad/s} = 15,85 \text{ as/año}. \quad (3.14)$$

⁹La escala de tiempo secular hace referencia a los cambios seculares. Estos cambios se acumulan con el tiempo, es decir, son cambios a largo plazo de los elementos orbitales. Más allá de perturbaciones periódicas es interesante saber si se produce un cambio neto en los elementos orbitales, o lo que es lo mismo, si algún elemento orbital cambia durante largos periodos de tiempo y si este cambio crece con el tiempo.

Como vemos, la principal responsable del cambio de orientación del eje de la Tierra es la Luna, pese a que el Sol ejerce una atracción gravitatoria mayor. Esto se debe a que la tasa del cambio del ángulo precesional decae de forma muy rápida con la distancia entre los cuerpos, ya que varía con la inversa al cubo de la distancia. Esto puede explicarse de la siguiente forma. La fuerza gravitatoria que ejercen el Sol y la Luna sobre la Tierra está dirigida en dirección radial, afectando aquellos puntos de la Tierra que se encuentren situados sobre esa dirección. Por lo tanto, la acción gravitatoria neta será la diferencia entre las atracciones gravitatorias que sufren dos puntos diametralmente opuestos de la Tierra, situados en el Ecuador. La distancia entre estos puntos es del orden de unos 12000 km, un valor muy pequeño en comparación con las distancias al Sol y a la Luna. Por ese motivo, el término newtoniano clásico de la fuerza es prácticamente igual en ambos casos, teniendo así que calcular órdenes superiores de la interacción. Por ende, el término dominante es el cúbico. Como consecuencia, la proximidad de la Luna en comparación a la del Sol, compensa su menor masa. Las atracciones de la Luna y el Sol también son las causantes de las mareas. Cuando ambos astros están alineados se produce lo que se llaman mareas vivas, mientras que, cuando forman ángulos de 90° , las fuerzas de atracción se compensan ligeramente y se producen las mareas muertas. Las mareas son un buen ejemplo ilustrativo para mostrar la mayor influencia de la Luna.

3.4. Mejoras de la teoría

Para realizar el cálculo de la precesión hemos tenido en cuenta las siguientes aproximaciones. En primer lugar, hemos considerado que tanto el Sol como la Luna realizan órbitas circulares desde el punto de vista de la Tierra, en lugar de órbitas elípticas, considerando a su vez, que estas órbitas se realizan en un mismo plano, el plano de la eclíptica. En segundo lugar, hemos despreciado los momentos cuadrupolares adimensionales del Sol y de la Luna, los cuales valen $J_2 = 2,20 \times 10^{-7}$ y $J_2 = 2,05 \times 10^{-4}$ [17], respectivamente. Como vemos, el momento cuadrupolar adimensional del Sol es prácticamente despreciable, en cambio, en el caso de la Luna, sólo es un orden de magnitud menor que el de la Tierra. En tercer lugar, hemos despreciado la influencia de la precesión planetaria.

La precesión luni-solar es mucho mayor que la precesión planetaria, sin embargo, para obtener un cálculo riguroso habría que considerar esta última. Teniendo en cuenta la cercanía a la Tierra y la masa, los planetas que más influencia pueden tener sobre la precesión del eje de la Tierra son Venus y Marte, por su cercanía, y Júpiter por su gran masa. Haciendo la ratio (m/r^3) , el mayor valor se obtiene para Venus. En este caso el valor dado por J. G. Williams es de $0,0187$ as/siglo [1], que como vemos es prácticamente despreciable en comparación con la precesión luni-solar. Las tasas de precesión para el resto de planetas se muestran en la Tabla (2).

También podríamos realizar este cálculo para los planetas del Sistema Solar, al igual que hicimos con el Sol y la Luna haciendo uso de la ecuación (3.12). Obtenemos resultados consistentes para Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno con valores de $2,46 \times 10^{-2}$, $8,82 \times 10^{-4}$, $1,41 \times 10^{-5}$ y $3,01 \times 10^{-6}$, respectivamente, en unidades de as/siglo. No obstante, para Mercurio, Venus y Marte los resultados obtenidos, que son $1,15 \times 10^{-3}$, $1,76 \times 10^{-1}$ y $5,24 \times 10^{-3}$, de nuevo en unidades de as/siglo, distan en un orden de magnitud de los resultados dados por J. G. Williams. Esta discrepancia puede deberse a diversos factores,

como por ejemplo, la inclinación de las órbitas de los planetas respecto a la eclíptica, la cual hemos despreciado en nuestros cálculos. Los planetas que presentan una inclinación mayor son precisamente, Mercurio y Venus, con ángulos de $7,00487^\circ$ y $3,39471^\circ$ [17]. De hecho, en el artículo de J. G. Williams, las tasas precesionales de los planetas se calculan teniendo en cuenta esta inclinación. Otros factores que se tienen en cuenta en este artículo son los valores de los semiejes la órbita. Justamente, Mercurio y Marte son los planetas que presentan mayor excentricidad, con valores de 0,20563 y 0,09341 [17]. Como en nuestros cálculos hemos supuesto órbitas circulares, este puede ser uno de los principales motivos de la discrepancia.

Tabla 2: Tasas de precesión para los planetas del Sistema Solar [1].

Planeta	Tasa precesional as/siglo
Mercurio	0.0003651
Venus	0.0187273
Marte	0.0005393
Jupiter	0.0116665
Saturno	0.0005177
Urano	0.0000100
Neptuno	0.0000029
Total	0.0318287

Otra forma de mejorar la precisión del resultado sería reteniendo más términos en los sumatorios de la ecuación (2.123). Sin embargo, estos valores son muy pequeños. Para la Tierra se tiene que $J_3 = -2,53 \times 10^{-6}$ y $J_4 = -1,62 \times 10^{-6}$. De hecho, realizando los cálculos y viendo los valores mostrados en la tabla (3), puede verse que J_3 no contribuye y que el efecto de J_4 es prácticamente despreciable. También podríamos considerar que las órbitas que describen tanto la Luna alrededor de la Tierra como la Tierra alrededor del Sol son elípticas. En estos casos, los vectores \hat{n}_1 y \hat{n}_2 habría que sustituirlos por los vectores de posición \vec{r}_1 y \vec{r}_2 para el caso de órbitas elípticas, los cuales están dados por

$$\vec{r} = \frac{l}{1 + \epsilon \cos \theta}, \quad (3.15)$$

siendo ϵ la excentricidad de la órbita y l el semi-lactus rectum¹⁰. Otro factor a tener en cuenta para mejorar este resultado sería la inclinación relativa entre los planos de las órbitas Tierra-Luna y Tierra-Sol. Tomando como referencia el plano de la eclíptica, tendríamos que usar coordenadas esféricas para describir la dirección de la Tierra a la Luna

$$\hat{n}_1 = \sin \theta \cos \phi \hat{e}_X + \sin \theta \sin \phi \hat{e}_Y + \cos \theta \hat{e}_Z, \quad (3.16)$$

donde los ángulos θ y ϕ varían con el tiempo.

A la hora de calcular la precesión del eje de rotación, habría que considerar la influencia del resto de movimientos que realiza la Tierra, como son la nutación, el bamboleo de

¹⁰El semi-lactus rectum se define como la distancia perpendicular respecto al semieje mayor de uno de los focos de la elipse a la curva.

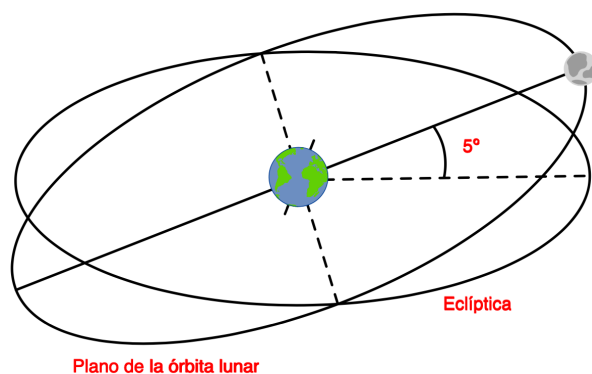


Figura 8: Inclinación relativa entre órbitas.

Chandler [18], la precesión del perihelio, la oblicuidad, la precesión de la eclíptica y la variación de la excentricidad orbital. A pesar de ser movimientos independientes, todos ellos están íntimamente relacionados y los cambios producidos por uno de ellos pueden afectar a los demás.

En primer lugar, hablaremos de la **nutación**. El movimiento de precesión viene acompañado de la nutación. La nutación puede visualizarse como un balanceo o una oscilación periódica que sufre el eje de la Tierra entorno a su posición media. El tiempo que tarda en producirse una longitud de onda es de unos 18,6 años. Como consecuencia de la nutación, se produce un ligero cambio en la inclinación del eje, lo que se conoce como **oblicuidad**, ya que existe una diferencia entre las zonas de máxima y mínima amplitud del movimiento oscilatorio que describe. Este movimiento fue descubierto por primera vez por James Bradley [1,2]. Además de por el efecto de la nutación, el eje terrestre varía su inclinación

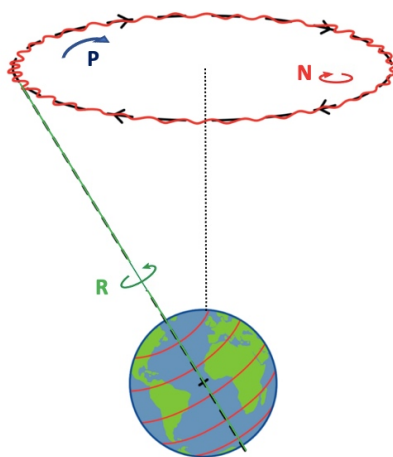


Figura 9: Movimiento de nutación de la Tierra.

entre los $22,1^\circ$ y los $24,5^\circ$ entre otros motivos por los movimientos sísmicos. Ejemplo de ello son el terremoto que afectó a Chile en 2010 de 8,8 en la escala de Richter, desviando el punto del Polo Norte unos 8 centímetros o el tsunami de 2004 que afectó al sudeste de Asia provocando una desviación de hasta 17,8 centímetros. El cambio de inclinación del

eje provoca un cambio en la cantidad de radiación solar que llega a la Tierra, lo que puede tener consecuencias directas sobre el clima. Respecto al cálculo del periodo de precesión que hemos realizado, el hecho de que la inclinación del eje varíe, conlleva que el ángulo α que aparece en la ecuación (3.12) no permanezca constante como habíamos supuesto.

Por otra parte, la Tierra también sufre el **bamboleo de Chandler**. En 1891, Seth Carlo Chandler se percató de una pequeña irregularidad en la oscilación del eje terrestre. Este movimiento origina una variación de 0,7 segundos de arco por cada 433 días. El efecto del bamboleo de Chandler junto a otros factores de menor importancia, son los principales causantes del movimiento polar¹¹. Otro de los factores que provoca cambios en el movimiento polar es el cambio climático. Como consecuencia de este cambio, se están produciendo grandes alteraciones en la masa de agua y de hielo de la superficie de la Tierra. Factores como el derretimiento del hielo, el déficit de agua o por el contrario, el incremento de estas cantidades, genera que la distribución de peso cambie, produciendo oscilaciones en el eje de la Tierra. Ejemplos ilustrativos de este fenómeno pueden ser Groenlandia que ha perdido más de 272 billones de kilos de hielo al año desde 2003 o la falta de agua de Eurasia. Estos cambios generan también un cambio en la tasa de precesión [14].

Por otro lado, hay que tener en cuenta **la precesión del perihelio**, que corresponde con el desplazamiento de uno de los focos de la elipse tomando como referencia el otro foco, el Sol. Para calcular la tasa de precesión, habría que restar el efecto del movimiento del plano de la eclíptica. Además, el plano de la eclíptica también sufre inclinaciones relativas al plano invariante del Sistema Solar¹², lo que se conoce como **precesión de la eclíptica**. Esto provoca que la inclinación con la órbita lunar también varíe, hecho que tener en cuenta en el cálculo de la precesión. Finalmente, tenemos **la variación de la excentricidad orbital**, que como su propio nombre indica corresponde con el cambio de la excentricidad de la órbita de la Tierra alrededor del Sol. Este movimiento también causa que la cantidad de radiación que proviene del Sol varíe.

En el artículo de J.G.Williams [1] se tienen en cuenta las siguientes contribuciones para calcular la tasa de precesión.

Como vemos en la Tabla (3), la corrección al tener en cuenta del momento multipolar adimensional de la Tierra J_4 , es prácticamente despreciable. Por otro lado, el efecto de la inclinación de la órbita lunar a pesar de ser pequeño, es superior a la contribución de la precesión planetaria y a la contribución de J_4 de la Tierra. También se tienen en cuenta correcciones relativistas como la precesión geodésica, la cual representa el efecto de la curvatura del espacio-tiempo predicha por la relatividad general. Finalmente, para obtener el valor de la precesión del eje de la Tierra se sustrae el efecto añadido del movimiento de la eclíptica.

¹¹El movimiento polar se define como la variación de la posición de los polos terrestres respecto a los polos geográficos.

¹²Es aproximadamente igual al plano de Júpiter

Tabla 3: Contribuciones a la tasa de precesión del eje de la Tierra [1].

Contribución	Tasa precesional as/año
Sol a primer orden	15.948870
Luna a primer orden	34.457698
Sol y Luna segundo orden	-0.000468
J_4	0.000026
Efectos de inclinación	-0.002686
Precesión planetaria	0.000318
Precesión geodésica	-0.019194
Movimiento de la eclíptica	-0.096865
Total	50.287700

4. Conclusiones

La teoría newtoniana, a pesar de que a día de hoy sabemos que es una teoría incompleta, todavía sigue siendo una teoría muy utilizada en un rango amplio de situaciones físicas, como la física del sistema solar, el movimiento de los satélites o los sistemas binarios de estrellas de la secuencia principal. De hecho, dentro de las teorías de la gravedad, exceptuando situaciones en las que estén involucradas velocidades relativistas u objetos extremadamente densos, las leyes de Newton proporcionan resultados suficientemente precisos. Un criterio para saber si la teoría newtoniana es una buena aproximación o si por el contrario hay que recurrir a la relatividad general es analizando el valor del factor de corrección relativista, ϵ . Cuanto menor sea este factor, mejor será la aproximación de la teoría de la gravedad de Newton [7].

El caso más sencillo de la teoría de la gravedad newtoniana es el de dos masas puntuales sometidas a su interacción mutua. Este caso puede generalizarse pasando de masas puntuales a cuerpos de cualquier tamaño o forma y considerando un número arbitrario de estos cuerpos. Al considerar cuerpos formados por una distribución continua de materia, conviene introducir las ecuaciones de continuidad, Euler y Poisson, junto a una ecuación de estado, para obtener una descripción física completa de estos sistemas.

Cuando pasamos de masas puntuales a cuerpos extensos, resulta conveniente introducir el potencial creado por cuerpos esféricos. La simetría esférica es una aproximación poco realista, ya que los cuerpos astronómicos sufren desviaciones de esta simetría como consecuencia de la rotación o de las interacciones con otros cuerpos. Sin embargo, es una buena aproximación para obtener modelos matemáticos sencillos. En los casos en los cuales las desviaciones de esta simetría sean pequeñas, como puede ser el caso de la Tierra o del Sol, puede obtenerse una expresión para el potencial creado por estos cuerpos mediante un desarrollo en armónicos esféricos.

El siguiente paso es considerar un número arbitrario de cuerpos, lo cual abre un abanico de posibilidades. Podemos encontrar una gran variedad de sistemas en el Universo, y muchos de ellos resultan de gran complejidad, como puede ser el caso de las binarias en contacto o de los fenómenos de eyección o acreción de masa. No obstante, para describir

sistemas más sencillos como la órbita de los planetas alrededor del Sol o el movimiento de un satélite, podemos obviar estos casos concretos y formular una teoría general que nos permita resolver una gran cantidad de fenómenos de la mecánica celeste. Para resolver este tipo de sistemas, conviene introducir el formalismo de los tensores STF. Esto resulta útil para resolver potenciales de la forma (2.7), ya que estos potenciales tras realizar un desarrollo de Taylor, involucran el factor $\partial_L(r^{-1})$, el cual es un tensor de este tipo. A lo largo de este trabajo se han realizado una serie de aproximaciones para resolver problemas astronómicos concretos y para obtener así ecuaciones de movimiento más sencillas.

Como aplicación directa de la teoría, se ha decidido estudiar el problema de la precesión del eje de la Tierra. A pesar de que este movimiento es más imperceptible que el movimiento de traslación alrededor del Sol o que el de rotación alrededor de su propio eje, no podemos obviar las consecuencias que acarrea. En primer lugar, como su propio nombre indica, la precesión tiene como resultado el desplazamiento de los equinoccios (y solsticios) a lo largo de la eclíptica. Estos hechos conllevan que el año tropical sea unos 20 minutos más corto que el año sideral. Igualmente, como la posición aparente del Sol en relación al fondo de estrellas fijas cambia, el ciclo zodiacal también va cambiando. Otra de las consecuencias más relevantes de la precesión es el cambio que se produce en la estrella que marca el Norte, la cual es utilizada por los marineros para orientarse. Adicionalmente, las coordenadas ecuatoriales de los astros también van variando, lo que hay que tener en cuenta a la hora de elaborar los catálogos estelares. Conjuntamente, la precesión también es importante en arqueología, ya que muchos monumentos antiguos presentan una orientación astronómica. Además de todo lo anterior, la precesión de los equinoccios también presenta efectos en el clima. En la década de 1920, Milutin Milanković relacionó las variaciones orbitales, en concreto, la precesión, la oblicuidad de la eclíptica y la excentricidad de la órbita, con los cambios climáticos. Estas variaciones orbitales cambian la cantidad de radiación solar que recibe la Tierra, por lo que se relacionan con la aparición de las glaciaciones [3].

Para resolver el problema de la precesión nos hemos basado en la ecuación (2.127), considerando un sistema formado por tres cuerpos: la Luna, la Tierra y el Sol. Hemos supuesto que los momentos multipolares adimensionales tanto del Sol como de la Luna son despreciables y hemos tratado la Tierra como un cuerpo axialmente simétrico. El resultado final obtenido es de 25700 años, en concordancia con el valor dado por J. G. Williams en [1] de 25778,87 años. El resultado podría mejorarse considerando órbitas elípticas en lugar de circulares como hemos hecho y teniendo en cuenta la inclinación relativa entre la eclíptica y la órbita lunar. También podríamos incluir más términos en el sumatorio de la ecuación (2.127) o no despreciar los momentos multipolares adimensionales de la Luna y el Sol. Finalmente, para obtener un resultado más preciso habría que tener en cuenta el efecto de la precesión planetaria, el movimiento de la propia eclíptica y la precesión geodésica.

Si quisiéramos obtener una solución más exacta de este problema y extender el tratamiento teórico a casos más generales, habría que utilizar las ecuaciones de la relatividad general, la cual constituye la teoría más acertada y probada de la gravedad que tenemos. No obstante, para poder entender la relevancia y profundidad de esta teoría, es necesario tener un conocimiento completo de las posibilidades y limitaciones de la gravedad newtoniana.

Referencias

- [1] James G. Williams, “Contributions to the earth obliquity rate, precession and nutation,” *The Astronomical Journal*, vol. 108, p. 711, (1994).
- [2] Véronique Dehant y Piravonu Mathews Mathews, *Precession, nutation and wobble of the Earth*. Cambridge University Press, (2015).
- [3] Guillermina Sagasti, “La sucesión rítmica de la formación agrio (cretácico inferior) en el sur de la provincia de mendoza, y su posible vinculación con ciclos de milankovitch,” *Latin American Journal of Sedimentology and Basin Analysis*, vol. 7, pp. 1–22, (2000).
- [4] Jed Buchwald y Robert Fox, *The Oxford handbook of the history of physics*. OUP Oxford, (2013).
- [5] José G. Sallarés, *Isaac Newton. Obra y contexto: una introducción*. Univ. Nacional de Colombia, (2005).
- [6] Ray D’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity*. Clarendon Press, (1992).
- [7] Eric Poisson y Clifford M. Will, *Gravity: Newtonian, post-newtonian, relativistic*. Cambridge University Press, (2014).
- [8] Jerry B. Marion, *Classical dynamics of particles and systems*. Academic Press, (2013).
- [9] Bruce R. Munson, Donald F. Young, Theodore H. Okiishi, Wade W. Huebsch, *Fundamentos de mecánica de fluidos*. Editorial Limusa S.A de C.V., (2007).
- [10] Cohen-Tannoudji, Bernard Diu y Franck Laloë, *Quantum mechanics; 1st ed*. Wiley, (1977).
- [11] Torsten Hartmann, Michael H. Soffel y Thomas Kioustelidis, “On the use of stensors in celestial mechanics,” *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, vol. 60, pp. 139–159, (1994).
- [12] Isaac Newton, *El Sistema del Mundo*. Alianza Editorial, (1983).
- [13] John D. Jackson, *Classical electrodynamics; 2nd ed*. Wiley, (1975).
- [14] Guochang Xu, *Sciences of geodesy*. Springer, (2010).
- [15] Nicole Capitaine, Patrick T. Wallace, Patrick T and Jean Chapront, “Expressions for iau 2000 precession quantities,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 412, pp. 567–586, (2003).
- [16] Javier M. Chivelet, Ricardo M. Palma, Laura Domingo y José López Gómez, “Cicloestratigrafía, cambio climático y la escala de tiempo astronómico,” *Enseñanza de las Ciencias de la Tierra*, vol. 23, pp. 136–147, (2015).
- [17] Arthur N. Cox, *Allen’s astrophysical quantities*. Springer, (2015).
- [18] Richard S. Gross, “The excitation of the chandler wobble,” *Geophysical Research Letters*, vol. 27, pp. 2329–2332, (2000).