

Soka-Teoriaren Paisaiaren hutsen karakterizazioa

Mikel Álvarez Urquiola

eman ta zabal zazu



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

Doktorego tesia

Fisika Saila - Teoria atala

Leioa, 2021eko iraila

Elenari eta Adriáni

Aurkibidea

Esker onak	ix
Laburpena	xi
Argitalpenen zerrenda	xvii
I Sarrera	1
1 Soka-Teoriaren Paisaia	3
1.1 Soka-Teoriari gainbegirada	3
1.2 Calabi-Yau geometrien bidezko trinkoketa	5
1.3 Teoria eraginkorra eta fluxu-trinkoketak	10
1.4 Soka-Teoriaren Paisaia	17
1.5 Hutsen egonkortasun ez-perturbatiboa	18
II Moduluen egonkortzea	29
2 Parametro bakarreko ereduak	31
2.1 Sarrera	31
2.2 Egitura Konplexu Handiko fluxu-hutsak	34
2.3 Simetria handiko fluxu-hutsak	37
2.4 zuhaitz mailako masa-espektro osoa	41
2.5 Parametro bakarreko adibidea: $\mathbb{WP}_{[1,1,1,1,4]}^4$ ereduak	48
2.6 Hutsen estatistika	52
2.7 Ondorioak	63
3 Trinkoketa orokorren masa-espektro unibertsala EKH puntuaren inguruan	67
3.1 Sarrera	67
3.2 Egitura Konplexu Handiko masa-espektro unibertsala	68
3.3 Adibidea: $\mathbb{WP}_{[1,1,1,1,6,9]}^4$ hipergainazala	72
3.4 Ondorioak	80
4 Racetrack motako potentzialak eta de Sitter Zingira-aierua	83
4.1 Sarrera	83
4.2 IIB motako trinkoketen adibide esplizituak	85

4.3	Soluzioen baliozkotasuna	91
4.4	de Sitter zela-puntuak eta Findutako de Sitter Aierua	92
4.5	Ondorioak	94
III	Paisaia eta Kosmologia	95
5	Slepian ereduak eta ausazko Paisai gausstarrak	97
5.1	Sarrera	97
5.2	Ausazko Eredu Gausstarren aurretiazkoak	100
5.3	Slepian ereduak eta baldintzatutako ausazko eremu gausstarrak	101
5.4	Sasihutsen iraungitzea ausazko gausstar Paisaietan	106
5.5	Inflazioa ausazko gausstar Paisai baldintzatueta	114
5.6	Ondorioak	120
6	Branen nukleazioa eredu supersimetrikoetan	123
6.1	Sarrera	123
6.2	Eredu-teoria supersimetriko globalak	125
6.3	Supersimetria hausten duten hutsen iraungitzea	134
6.4	Mintz lauak eta domeinu-paretak Supergrabitatean	139
6.5	Mintzen nukleazioa Supergrabitatean	143
6.6	Ondorioak	150
IV	Azken oharra	153
7	Ondorio orokorrak eta etorkizunerako ikuspegia	155
V	Eranskinak	159
A	Fluxu-bektorearen Hodge deskonposizioa	161
B	Oktikaren eskalarik gabeko zenbakizko soluzioen ekorketa	163
B.1	Paramotopy eta homotopia polinomioen jarraipena	163
B.2	Eskalarik gabeko soluzioen ekorketa parametro bakarreko eredueta	164
B.3	ETEaren erredundantziak eta soluzio bikoiztuak	165
C	Eskalarik gabeko fluxu-hutsen dentsitate-banaketa	167
C.1	Denef-Douglas banaketaren kalkulua	167
C.2	Fluxu-banaketa murriztua	170
C.3	Eskalarik gabeko huts generikoen dentsitatea	170
C.4	Huts murriztuen dentsitatea	172
D	EKH parametroaren borneak	173
D.1	Eskalarik gabeko hutsen ekuazioak EKH puntuaren inguruan	173
D.2	EKH parametroaren behe-bornea	175
D.3	EKH parametroaren goi-bornea eta instantoi-zuzenketak	176
D.4	Deskribapen estatistikoaren zehaztasuna	178

E	Slepian ereduaren eraikuntza	181
E.1	Atariko oharrak eta ausazko gausstar aldagaien ezaugarri batzuk	181
E.2	Ausazko bektore gausstar baldintzatuak	182
E.3	Ausazko eremu gausstarrak	184
E.4	Korrelazio erabilgarriak	184
E.5	Kac-Rice formula eta ausazko eremu gausstar baldintzatuak	185
E.6	Puntu kritikoak ausazko eremu gausstar baldintzatuetan	186
E.7	Inflexio-puntuak ausazko eremu gausstar baldintzatuetan	192
F	Slepian ereduaren zenbakizko implementazioa	195
F.1	Zenbakizko ausazko eremu gausstarrak: Karhunen-Loève garapena	195
F.2	Puntu kritikoen zenbakizko ebaluazioak	196
F.3	Inflexio-puntuaren zenbakizko ebaluazioak	197
G	Inflexio-puntuetako inflazioa	199
H	Hiru-forma bakarreko multipleteak	203
H.1	Hiru-forma bakarreko multipleteak eta supersimetria	203
H.2	Hiru-forma bakarreko multipleteak eta Supergrabitatea	207
	Bibliografia	213

Esker onak

Zalantzarik gabe, tesi hau ezinezkoa izango litzateke nire zuzendariak, José Juan Blanco Pilladok, nirekin izan duen pazientzia eta dedikazioagatik izan ez balitz. Hari zor diot, besteak beste, bide honekin jarraitzeko beharrezkoa den motibazioa eta kuriositatea mantentzea. Bestalde, denboraldi honetan beste hainbat ikertzaile zoragarrirekin lan egiteko aukera izan dut; Kepa Sousari, Jeremy Wachter-i eta Igor Bandosi eskerrak eman nahi dizkiet, plazer bat izan da beraiekin lan egitea.

Nire familia tesi honen ezinbesteko oinarria izan da. Hasiera-hasieratik niregan sinistu dute eta alboan egon dira lan honek dakartzan momentu ez hain politetan. Horrez gain, nire aitona-amonei besarkada bero bat eman nahi diet, beti hain berezi sentiarazi eta beso zabalik jaso nautelako. Haiei esker honaino iritsi ahal izan naiz.

Doktoretzari esker lagun pila egiteko aukera izan dut. Guztiei eskerrak eman nahi dizkiet, bereziki azken urteotako bidai kideak izan direnei: Dani, María, Fran, Asier, Aitor, Ander eta Sarari. Guztiok batera aurrera jarraitzeagatik eta hainbeste esperientzia partekatzeagatik, eskerrik asko.

Soka-Teoriari buruzko tesi bat euskaraz idaztea ez da lan arina, are gutxiago idazkia zuzentzea. Hori dela eta, Jon Medierori eta Jon Urrestillari eskerrak eman nahi dizkiet memoria hobetzen laguntzeagatik eta bertan jarri duten denbora eta ahaleginarengatik.

Azkenik, azken lerro hauek Adriáni eskaini nahi dizkiot, gehien behar izan dudanean beti alboan egoteagatik. Hainbat zentzutan batera hazi gara eta ezin dezaket inor aproposagorik imajinatu azken urte hauek (eta datozenak) batera pasatzeko.

Eskerrik asko guztioi lau urte hauengatik, guztiz ahaztezinak izan dira.

Laburpena

Grabitate kuantikoaren teoria bateratzailea da Soka-Teoria. Aitzitik, teoriaren tinkotasuna bermatzeko 10 espazio-denborako dimentsiotan deskribatu behar dugu. Jakina, Soka-Teoria fenomenologikoki onargarria izan dadin, energia baxuko eremu-teoria eraginkorra 4 dimentsiotan deskribatu beharko dugu. Horretarako, espazio-denboraren gehiegizko dimentsio horiek nolabait trinkotu behar ditugu; adibidez, IIB motako Soka-Teoriaren gehiegizko 6 dimentsioen geometria *Calabi-Yau espazioen* bidez deskribatu ohi dira. Trinkoketa horien inguruko zenbait aspektu fenomenologiko aztertzea da tesi honen helburu nagusia.

Barne-geometriaren oinarritzko ezaugarriak erabiliz, zuzenean frogatu daitezke trinkoketa horiek hainbat eratarik deformatu daitezkeela energia-kosturik gabe. Horrenbestez, barne-geometria deskribatzen dituzten ehunka parametroak (*moduluak*) masarik gabeko eremu bezala joko dira lau dimentsioko ikuspuntu behagarriarengandik, eta hori bateraezina da gaur egungo behaketekin. Hori dela eta, nahitaezkoa zaigu modulu horiei masa ematea eta nolabait egonkortzea. Hartara, 1. kapituluaren deskribatutakoaren arabera, teoriarik bertan ageri diren fluxuak erabili daitezke moduluen potentzial eskalar bat osatzeko. Ehunka dimentsioko potentzial eskalar horri *Paisaia* deritzo, horren egitura konplexua dela eta. Paisaiaren minimoek Soka-Teoriaren barne-geometriaren egoera egonkorak adierazten dituzte; hortaz, horien inguruko ezagutza tinkoa izatea ezinbestekoa zaigu Soka-Teoriaren eredu fenomenologikoki zuzenak eraikitzeke.

Tesiaren I. atalean IIB motako Soka-Teoriaren eta horren energia baxuko eremu-teoria eraginkorra den IIB Supergrabitatearen oinarriak bildu ditugu. Horiekin, geometria konplexuaren oinarritzko zenbait nozio erabiliz, Paisaia nola eraiki daitezkeen laburbildu dugu. Paisaia bi modulu motez osatuta dago, hotz, egitura konplexuaren moduluez eta Kähler moduluez. Lehenengok barne-geometriaren *ixura* adierazten dute intuitiboki; bigarrenak, aldiz, trinkoketaren *tamainarekin* dute zerikusia. Guzti horiek egonkortzea ez da batere erraza, eta sektore bakoitzaren inguruko xehetasunak eman ditugu, tesian zehar behin eta berriro aplikatu ditugunak.

Arestian esan bezala, Paisaiaren fenomenologia ikertzea ezinbestekoa da teoriaren ondorio behagarriak ondo ulertzeko. Tesi honetan Paisaiaren zenbait aspektu kosmologikoetan jarri dugu arreta, *inflazioan* eta *sasihutsaren iraungitzean*, hain zuzen ere, eta horien inguruko sarrera eman dugu kapitulu horren bukaeran.

Tesiaren II. zatia barne-geometriaren moduluen egonkortze-prozeduren inguruan datza, 1. kapituluako osagaiak erabiliz. Zehatzago esanda, 2. eta 3. kapituluetan axiodilatoia eta egitura konplexuaren modulu *guztien* egonkortzea aztertzeraz jo dugu. Bestalde, 4. kapituluaren Kähler sektorearen inguruko eztabaida egingo dugu. Hauxe da zati horretako kapitulu

bakoitzean landu dugunaren laburpena:

2. kapitulua

Arestian esan bezala, Calabi-Yau geometrien modulu kopurua, orokorrean, $\mathcal{O}(100)$ da. Jakina, guztiz kalkulazina zaigu dimentsio horretako funtzioen minimoak (edota bestelako puntu berezien ezaugarriak) aztertzea. Hori dela eta, Paisaiaren hutsen deskribapen analitiko lortzeko potentzial hori nolabait sinplifikatu beharra dugu. Ondorengo kapituluetan, sinplifikazio hori *trunkamendu supersimetriko tinkoen* bidez egin dugu. Horietan, trinkoketen simetria-taldeak erabiliz modulu-espektroaren zati bat ekintza eraginkorretik baztertu dezakegu. Eredu horietan, simetriarekiko inbarianteak diren fluxuak bakarrik pizten baldin badira, egitura konplexuaren modulu-kopuru handi bat *hoztu* ahal izango dugu fluxuek sortutako potentzial eskalarraren hutsetan. Beraz, Eredu-Teoria Eraginkorra (ETeEa) murriztu ahal izango dugu, hots, eremu gutxi batzuen bidez deskribatu ahal izango da fisika guztia.

Trunkatze hori literaturan zeharo aztertu den arren, operazio horretan hozten diren eremuen ezaugarriak nekez ikertu dira inon. Lan honen helburua da trunkatutako modulu-sektorearen ezaugarriak hobeto ulertzea, simetria handiko ereduetan. Garrantzitsua da nabarmentzea trunkatutako moduluak ez direla teoria eraginkorretik integratzen; hain zuzen ere, horrela lortu dezakegun ETEa energia baxuko teoria osoaren *trunkamendu supersimetriko tinkoa* da, zuhaitz mailan behintzat.

IIB motako supersoken Calabi-Yau trinkoketen zuhaitz mailako hutsak aztertu ditugu oraingo honetan, Egitura Konplexu Handiko (EKH) eskualdean. Bestalde, geometria sinpleenak erabili ditugu hemen, hots, murriztutako egitura konplexuaren sektorea modulu bakarrez osatuta dutenak. Horrela, EKH eskualdean zuhaitz mailako masa-espektroa kalkulatu dugu axiodilatoiarentzat eta egitura konplexuaren modulu-eremu guztientzat, *trunkatutakoak barne*. Horrez gain, hutsen zenbait ezaugarrien estatistikak lortu ahal izan ditugu Denef-Douglas hurbilketa, alegia, fluxu jarraituen hurbilketa, erabiliz.

Lan honetan proposatu ditugun aurreikuspen analitiko guztiak berresteko $\mathbb{W}\mathbb{P}_{[1,1,1,1,4]}^4$ Calabi-Yau orientatea (*orientifold*) erabili dugu trinkoketa gisa, eta horren zenbakizko fluxu-hutsen ekorketa egin dugu, bertatik lortutako datuen estatistikak kalkulatu ahal izateko. Hipergainazal-familia horren egitura konplexuaren modulu-espazioa $h^{2,1} = 149$ dimentsiokoa da; aitzitik, EKH eskualdeko geometriaren simetria-maila handia dela eta, moduluen inguruko fisika osoa eremu bakarrera murriztu dezakegu era tinkoan. Eredu horren teoria eraginkor murriztua erabiliz, fluxu-huts multzo handia lortu ahal izan dugu, eta horren bitartez ondorengo kapituluan ere erabiliko ditugun masa-espektroak egiaztatu ahal izan ditugu. Azpimarratzekoa da horrela aurkitu dugun huts bakoitzaren trunkatutako 148 eremuen masak lor ditzakegula gure emaitzak erabiliz, *ETE osora jo beharrik gabe*.

Kapitulu hau ondorengo artikuluan oinarritzen da:

J.J. Blanco-Pillado, K. Sousa, M.A. Urkiola & J.M. Wachter

Towards a complete mass spectrum of type-IIB flux vacua at large complex structure

J. High Energ. Phys. **04** (2021) 149

arXiv: 2007.10381 [hep-th]

3. kapitulua

Kapitulu honetan aurreko eztabaida edonolako Calabi-Yau geometrietara zabaldu dugu, arestiko analisisian egitura konplexuaren modulu bakarra (trunkaketa supersimetrikoa bideratu ostean) duten Calabi-Yau orientateen inguruko emaitzak erabiliz.

Kapitulu honetan zera frogatu dugu: EKH eskualdean, fluxu egokiak erabiliz, era tinkoan trunkatu dezakegula *Calabi-Yau trinkoketa orokorren* ETEa, egitura konplexuaren modulu bakar batera. Aurreko kapituluan ez bezala, ez dugu isometria taldeen beharrik izango, EKH puntuaren inguruko monodromia transformazioak baitira gure emaitzen oinarria.

Bestalde, trunkamendua bizirauten duen eremua monodromia-norabidearen arabekoa da. Hartara, aldaezintasun-ezaugarri horiek erabiliz, huts-sorta handia eraiki dugu, axiodilatoiarene eta egitura konplexuaren moduluen masa-espektroaren gaineko kontrol analitiko paregabea mantenduz.

Aurreko kapituluko adierazpen analitikoak erabiliz, zuzenean frogatu ahal izango ditugu kapitulu honetako emaitza nagusiak. Hori ez ezik, guzti horiek $WP_{[1,1,1,6,9]}^4$ Calabi-Yau orientatearen fluxu-hutsen zenbakizko ekorketa baten bidez berretsi ahal izan ditugu.

Kapitulu honen oinarria ondorengo artikulua da:

J.J. Blanco-Pillado, K. Sousa, M.A. Urkiola & J.M. Wachter
Universal Class of Type-IIB Flux Vacua with Analytic Mass Spectrum
 Phys. Rev. D **103** (2021) 106006
 arXiv: 2011.13953 [hep-th]

4. kapitulua

Kapitulu honetan Kähler sektorearen egonkortzea ikertzera jo dugu, *de Sitter Zingira-aieruaren* ikuspuntutik. Hain zuzen ere, duela pare bat urte formulatutako Zingira-aieru horren arabera, grabitate kuantikoarekiko tinkoa den edozein potentzial eskalarretan ezin daiteke existitu de Sitter motako huts metaegonkorrik. Hori ez ezik, aieruak edonolako de Sitter puntu kritikoren existentzia ere debekatzen du, zela-puntuak barne.

Gauzak horrela, soka-trinkoketen de Sitter zela-puntuaren existentzia aztertu dugu, de Sitter aierua murriztaileegia den ala ez frogatzeko. Horretarako, Kähler modulu bakarra duen trinkoketa-eredua erabili dugu. Eremu hori, axiodilatoia eta egitura konplexuaren moduluak egonkortu ahal izan ditugu aurreko kapituluetako fluxuak erabiliz, eta ekarpen ez-perturbatiboen eragina ere kontuan hartuz superpotentzialean. Osagai horiekin guztiekin *Racetrack* motako potentziala sortu dugu eredu horren moduluak egonkortzeko.

Eredu horren zenbait soluzio jakin abiapuntutzat hartuz, ekarpen ez-perturbatiboak eta fluxuak doitu ditugu anti-deSitter huts supersimetrikoak eta de Sitter zela-puntuak dituzten ereduak sortzeko. Hori ez ezik, huts horiek zenbait tinkotasun baldintza betetzen dituztela frogatu dugu; hortaz, horrela lortutako soluzioak fenomenologikoki tinkoak dira eta eredu konplexuagoetako hutsak bilatzeko baliagarriak izan daitezke.

Azkenik, gure soluzioak de Sitter zingira-aieruaren bertsio ahulagoarekin aldaratu ditugu

eta aieru berri horrekin bat datozela nabaritu dugu.

Kapitulu honen emaitzak ondorengo artikulu zientifikoan jaso ditugu:

J.J. Blanco-Pillado, M.A. Urkiola & J.M. Wachter
Racetrack potentials and the de Sitter swampland conjectures
 J. High Energ. Phys. **01** (2019) 187
 arXiv: 1811.05463 [hep-th]

Tesiaren III. zatia Paisaiaren aspektu kosmologikoei buruz datza. Lehen esan bezala, Paisaiak sasihutsen iraugitzea ahalbidetzen du, eta baita prozesu inflazionarioak gertatzea ere. Ondorengo bi kapituluetan prozesu fisiko horiek zeharo aztertu ditugu Paisaiaren zenbait eredu erabiliz.

5. kapitulua

Lehen aipatu dugun bezala, Paisaiaren ohiko eremu-kopurua $\mathcal{O}(100)$ da. Horren ondorioz, potentzialaren azterketa zehatza erabat ezinezkoa da eta horrek eremu-espazioa nolabait trunkatzera behartzen gaitu. Bestalde, eredu horiek aztertzeko alternatiba interesgarria metodo estatistikoak erabiltzean datza, non potentzial eskalarra ausazko eremutat hartzen den.

Kapitulu honetan, Ausazko Eremu Gausstarren (AEGen) bidez deskribatutako potentzialak izango ditugu aztergai. Horiek erabiltzeko motibazio nagusia da hainbat terminoren gehiketa bezala jo dezakegula 4 dimentsioko potentziala. Termino horiek jatorri klasikoa edo kuantikoa izan dezakete trinkoketa-mekanismoan, eta horiek guztiak aintzat hartzerakoan sortuko den potentzial konplexua ausazko eremu gausstartzat jo dezakegu.

Soka-Teoriaren Paisaiaren fenomenologia aztertzea, Kosmologiaren ikuspuntutik, ezinbestekoa da. Izan ere, Unibertso Goiztiarreko energia altuko fisikak Soka-Teoriaren ondorio behagarrietan izugarritzko eragina izan dezake. Horren inguruko Paisaiaren ikerketek potentzialaren puntu jakin batzuen ezaugarriak ezagutzean oinarritzen dira, adibidez, konstante kosmologiko jakin bateko minimoetan, edo deribatu jakin batzuk dituen inflexio-puntuetan, horietan inflazioa gerta litekeelako. Aitzitik, puntu horietan inposatzen ditugun murrizketen arabera, oso zaila izan daiteke ezaugarri horiek dituen potentziala aurkitzea, ausazko funtzio horren hainbat iterazio eginda ere. Hain zuzen ere, de Sitter huts metaegonkorrak edota behaketa fenomenologikoekin bat datozen inflexio-puntu inflazionarioak oso arraroak dira Paisai orokorretan. Kapitulu honetan potentzial horiek sortzeko estrategia berri bat aurkeztuko dugu; horren bitartez, potentzialak forma jakin bat izatera baldintzatuko ditugu lokalki, ausazko Paisaiaren ezaugarri globalak guztiz errespetatuz. Horiexek dira *Slepian ereduak*.

Hemen aurkeztu ditugun teknika matematikoak erakusteko, guk doitutako puntu kritikoak (maximo, minimo edo zela-puntuak) edota inflexio-puntuak dituzten baldintzatutako AEGak eraikiko ditugu eta horien inguruko informazio estatistiko garrantzitsua lortuko dugu.

Alde batetik, baldintzatutako minimoak dituzten potentzialak erabiliz, horien sasihutsen iraugitzea aztertu ahal izan dugu AnyBubble Mathematicako paketea erabiliz. Horrekin,

prozesu horien estatistikak kalkulatu ahal izan ditugu bi dimentsioko ausazko potentzialetan. Gainera, tuneleatze horiek kalkulatzeko zenbait hurbilketa baieztatu ditugu, iraungitzeen gertatze-tasa dimentsio altuagoko potentzialetan kalkulatu ahal izateko.

Potentzialen baldintzatze-metodoen bigarren aplikazioa inflexio-puntuen doikuntzan datza, horien inguruko prozesu inflazioak ikertzeko. Zehatzago esanda, parametro inflazionario behagarrien menpekotasuna ikertu dugu eremu eskalarren hasierako baldintzekiko eta inflexio-puntuaren egitura lokalarekiko. Hartara, eremuen hasierako baldintza horiek inguruko sasihuts baten iraungitzearen irteera-puntuen bidez definitu ditugu. Kontuan izan horrelako analisia bideratzeko ezinbestekoa zaigula inflexio-puntuaren inguruko potentziala ezagutzea eta baita hortik gertu egon daitezkeen minimoen informazioa jakitea. Horri esker, gure metodoa oso baliagarria izango da ikerketa horretarako, potentzialaren ezaugarri estatistiko globalen eta lokalen informazio osoa ezagutzea ahalbidetzen baitu. Azpimarragarria da hauxe dela literaturan lehen aldiz ageri den inflexio-puntuentzako Slepian eredua.

Kapitulu hau ondorengo artikuluan oinarritzen da:

J.J. Blanco-Pillado, K. Sousa & M.A. Urkiola
Slepian models for Gaussian random landscapes
 J. High Energ. Phys. **05** (2020) 142
 arXiv: 1911.07618 [hep-th]

6. kapitulua

Aurreko kapituluetan, sasihutsen iraungitzea ohiko eremu eskalarren potentzialen testuinguruan landu dugu, Coleman-deLuccia iraungitzeak deritzenak. Nahiz eta prozesu horiek zeharo aztertu diren literaturan, Paisaiaren oinarritzko osagaiak bateratzen dituzten bestelako iraungitze-mekanismoak aztertzea garrantzitsua da.

Horren harira, Coleman-deLuccia iraungitzeen antzeko prozesuak ditugu Brownek eta Teitelboimek aztertutakoak. Azken horietan fluxuak eta mintzak dira ekintzaren osagai nagusiak. Hortaz, energetikoki posiblea izan daiteke espazioaren eskualderen bat 3-formek sortutako fluxu-huts batetik beste batera tuneleatzea, fluxu horri akoplatutako mintz baten nukleazioaren bidez.

Aurreko osagai guztiak bateratzen dituzte Soka-Teoriaren trinkoketek, non 3-formen fluxuak erabiltzen diren teoriaren gehiegizko dimentsioak barietate trinko batean egonkortzeko. Lehenengo kapituluan aipatu dugunaren arabera, fluxuak naturalki akoplatzen dira, adibidez, IIB Soka-Teorian ageri diren D-branetara. Bestalde, badakigu trinkoketa-prozesuan ehunka modulu ageri direla, barne-barietatearen geometria parametrizatzen dutenak. Hortaz, oso esanguratsua izan daiteke osagai guzti horiek barneratzen dituzten iraungitzeak aztertzea eremu-teoria eraginkorraren ikuspuntutik, $\mathcal{N} = 1$ supergrabitatearen ikuspuntutik, hain justu, $D = 4$ dimentsiotan.

Lan honetan, 3-formak eta mintzak teoria supersimetriko batean nola barneratu daitezkeen pausoz-pauso azaldu dugu lehenbizi (bai grabitatea arbuiatuz, bai grabitatea kontuan hartuta). Ondoren, fluxuek osatutako hutsen arteko egonkortasun ez-perturbatiboa aztertu dugu; horretarako, Coleman-deLuccia eta Brown-Teitelboim prozeduren konbinazio jakin

bat erabiliz. Noski, lehen esan bezala, huts supersimetrikoak guztiz egonkorak izan behar dira sasihutsaren iraungitzeekiko. Hortaz, gure lagrange-arretan supersimetria samurki hausten dituzten terminoak barneratu ditugu. Azken horiek nahi bezain txikiak egin daitezke, eta sasihutsen iraungitzea horien arabera aztertu dugu. Horrelako teoria emanda, sasihutsa eremu eskalar isotropo eta eskalar batez eta baita \mathbb{Z} -forma baten balio jakin batez osatuta dagoela suposatuta dugu. Bestalde, instantoi soluzioa forma-eremuari akoplatutako mintz esferiko batez osatuta dagoela suposatuta dugu, non mintzaren barnealdea eta kanpoaldea fluxu-balio ezberdinez osatuta dauden (Brown-Teitelboim instantoian bezala). Ondorioz, mintzaren alde bakoitza potentzial *ezberdin* batek deskribatzen du. Horrelako prozesuak energetikoki bideragarriak direla baieztatuko dugu, eta zenbait adibide eman ditugu, bai grabitatea kontutan hartuz, bai grabitatea arbuiatuz. Bestalde, supersimetria hausten duten parametroak txikiagotu ahala, mintz-erradioa handiagotzen dela ikusi dugu, limite supersimetrikoaren erradio infinituko soluzioarekin (alegia, domeinu-pareta lauarekin) bat datorrena.

Kapitulu horretako emaitzak ondorengo artikuluan oinarritzen dira:

I. Bandos, J.J. Blanco-Pillado, K. Sousa & M.A. Urkiola

Brane nucleation in supersymmetric models

Prestatzen

Azkenik, tesiaren IV. zatian lan guzti horien zenbait ondorio orokor bildu ditugu.

Argitalpenen zerrenda

Argitaratutako artikulak

J.J. Blanco-Pillado, M.A. Urkiola & J.M. Wachter
Racetrack potentials and the de Sitter swampland conjectures
J. High Energ. Phys. **01** (2019) 187
arXiv: 1811.05463 [hep-th]

J.J. Blanco-Pillado, K. Sousa & M.A. Urkiola
Slepián models for Gaussian random landscapes
J. High Energ. Phys. **05** (2020) 142
arXiv: 1911.07618 [hep-th]

J.J. Blanco-Pillado, K. Sousa, M.A. Urkiola & J.M. Wachter
Towards a complete mass spectrum of type-IIB flux vacua at large complex structure
J. High Energ. Phys. **04** (2021) 149
arXiv: 2007.10381 [hep-th]

J.J. Blanco-Pillado, K. Sousa, M.A. Urkiola & J.M. Wachter
Universal Class of Type-IIB Flux Vacua with Analytic Mass Spectrum
Phys. Rev. D **103** (2021) 106006
arXiv: 2011.13953 [hep-th]

Prestatzen

I. Bandos, J.J. Blanco-Pillado, K. Sousa & M.A. Urkiola
Brane nucleation in supersymmetric models
Prestatzen

I. atala

Sarrera

1. kapitulua

Soka-Teoriaren Paisaia

Kapitulu honetan Soka-Teoriaren ezaugarriarik garrantzitsuenak eta teoria horren energia baxuko deskripzioa, supergrabitatea, laburki deskribatuko ditugu. IIB motako supergrabitarearen osagaiak berrikusi ondoren, teoria lau espazio-denborako dimentsiotara nola trinkotu dezakegun azalduko dugu. Prozedura horren ondoriorik garrantzitsuenetakoa dugu masarik gabeko ehunka eremu eskalarren agerpena, moduluak izenekoak. Fluxu-trinkoketen gorabeherak aztertuko ditugu, eta horien bidez moduluak egonkortzeko erabiliko dugun potentzial eskalarra aurkeztu, hots, Paisaia. Potentzial horren ondorio fisiko batzuk zerrendatuko ditugu, eta tesi honetan behin eta berriro aztertuko ditugun prozesu fisikoekin Paisaiak duen loturan sakonduko dugu gure eztabaida, alegia, Unibertso Goiztiarreko inflazio garaiarekin duen lotura eta potentzial honen minimo lokalen iraungitze erdiklasikoekin duen lotura.

1.1 Soka-Teoriari gainbegirada

Soka-Teoria¹, 60ko hamarkadan interakzio bortitza azaltzeko teoria gisa hasi zena [5], grabitate kuantikoaren teoria bateratzaile nagusienetakoa dugu gaur egun. Horren bidez hainbat eremuren dinamika deskribatu ahal dugu era autotinkoan eta parametro aske bakar baten bidez, hots, soken tentsioaren bitartez. Horri $T = (2\pi\alpha')^{-1}$ deritzogu, non α' Regge malda dugun. Parametro horren bitartez soken kitzikapenen masa-eskala definitu dezakegu, $M_s = 1/\sqrt{\alpha'}$, eta baita luzera-eskala karakteristikoa ere, $\ell_s = 2\pi\sqrt{\alpha'}$.

Soken modu bibrazioanalak kuantizatzeak eremu bosonikoak sortzen ditu, eta horien masarik gabeko espektroan grabitoia aurkitu dezakegu. Haatik, soka bosonikoak hainbat arazo dauzka. Lehenik eta behin, soka bosonikoaren kuantizazioaren bidez soilik lortuko ditugu eremu bosonikoak, eta horien artean takioiak ere badaude. Hori ez ezik, teoriaren anomaliak ekiditeko, $D = 26$ dimentsioko espazio-denbora inposatu behar dugu [6].

Aurreko arazo guztiak zuzendu (edo, behintzat, arindu) ditzakegu, teorian supersimetria inposatuz. Besteak beste, teoria supersimetrikoak ez du takioirik, eta espazio-denboraren dimentsioa $D = 10$ izango dugu. Supersimetria hainbat eratan tinkoki barneratu dezakegu Soka-Teorian; ondorioz, beste hainbeste Supersoka-Teoria izango ditugu, hots: I mota, $SO(32)$ heterotikoa eta $E_8 \times E_8$ heterotikoa, IIA mota eta IIB mota. Horiek guztiak dualitateen

¹Gai zabal honi buruzko erreferentzia estandarrak dira, besteak beste, [1–4].

bidez daude erlazionatuta eta 11 dimentsioko M teoriaren limite perturbatiboak dira [7, 8]. Gainera, energia baxutan (hau da, α' garapenaren lehen ordena soilik kontuan hartuz), masarik gabeko espeketroari dagokionez, Supersoka-Teoria bakoitza supegrabitare teoria baten bidez deskribatu daiteke $D = 10$ edo 11 dimentsiotan.

Noski, azken batez teoriaren emaitzak gure lau dimentsioko errealitatean aplikatu nahi baldin baditugu, ezinbestekoa zaigu Soka-Teoriaren “soberako” dimentsioekin zer egin ahal dugun aztertzea. Prozedurarik arruntena 6 (edo 7) dimentsio horiek *trinkotzean* datza, Soka-Teoriaren aspektu fenomenologikoen azterketaren oinarri nagusienetakoa dena.

Tesi honen aztergai nabariak izango ditugu IIB motako Soka-Teoria eta horren Supergrabitare limiteak, eta horien fluxuen bidezko trinkoketak aztertuko ditugu, lehen aldiz [9–11] lanetan aztertutakoak. Zer esanik ez, trinkoketak bideratzeko beste hainbat prozedura badaude, ikus adibidez [12–14] xehetasun gehiagorako.

Lehen aipatu bezala, IIB Soka-Teoriaren energia baxuko limitea dugu IIB Supergrabitaretea. Azken horren ekintza bosononikoa hauxe dugu, [4] liburuaren konbentzioak erabiliz eta Einstein-markoan:

$$S_{\text{IIB}} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-G} \left[R - \frac{\partial_M \tau \partial^M \bar{\tau}}{2(\text{Im } \tau)^2} - \frac{|G_3|^2}{2(\text{Im } \tau)} - \frac{|F_5|^2}{4} \right] + \frac{1}{8i\kappa_{10}^2} \int \frac{C_4 \wedge G_3 \wedge \bar{G}_3}{\text{Im } \tau} + S_{\text{loc}} \quad (1.1)$$

non $2\kappa_{10}^2 = (2\pi)^7 (\alpha')^4$ den, eta S_{loc} iturri lokalizatuen ekarpenak barneratzen dituen. Teoriaren eremu-edukia ondorengoa da:

- Lehenik eta behin, G_{MN} metrika dugu, 10 dimentsiokoa, eta horri dagokion R Ricci eskalarra. Espazio-denboran $M_4 \times X_6$ banaketa ezarriz, non M_4 gure lau dimentsioko espazio-denbora dugun eta X_6 barietate trinkoa (eta Ricci-laua) den, κ_{10} ohiko lau-dimentsioko Planck masarekin erlazionatu ahal izango dugu. Zehatzago esanda, erraz froga daiteke $M_{\text{Pl}}^2 = \mathcal{V} / (g_s \kappa_{10})^2$ izango dugula, non \mathcal{V} barietate trinkoaren bolumena den eta g_s soka-markoko soka-akoplamendua dugun.
- τ eremuari *axiodilatoi* deritzo eta C_0 0-formaren eta Φ *dilatoia*ren konbinazio konplexua da. Azken horrek soka-akoplamendua kontrolatzen du; izan ere, Φ eremua konstantetzat hartuz, $g_s = e^\Phi$ izango dugu. Hartara, $\tau = C_0 + i e^{-\Phi}$ definitzen da. Oro har, $g_s \ll 1$ limite perturbatiboan lan egingo dugu eta, ondorioz, $\text{Im } \tau \gg 1$ izango dugu.
- C_0 0-formaz gain, IIB motako Supergrabitareak baditu bestelako forma-eremuak; besteak beste, Neveu-Schwarz-Neveu-Schwarz (NS-NS) B_2 2-forma izango dugu, eta Ramond-Ramond (RR) 2- eta 4-formak, hots, C_2 eta C_4 . Azken horiei Ramond-Ramond p -formak deritzegu, eta supersokaren sektore fermioikoaren baldintza periodiko jakin batzuk aukeratzeagatik agertzen dira. Forma horiek guztiak (1.1) ekintzan ageri dira, euren eremu-indarrekin konbinatuta:

$$F_3 = dC_2, \quad H_3 = dB_2, \quad G_3 = F_3 - \tau H_3, \quad F_5 = dC_4 - \frac{1}{2} C_2 \wedge H_3 + \frac{1}{2} B_2 \wedge F_3 \quad (1.2)$$

Gure ondorengo azterketaren arabera, konbinazio horiek ekintzaren simetriak esplizituki erakusten dituzte (1.1) ekintza mailan, eta baita hortik lortuko dugun lau dimentsioko teoriarenak ere.

Azkenik, IIB motako supergrabitaeen aurkitu daitezkeen iturri lokalizatuen artean, D3-branak dira nabariena gure eztabaidarako. Hiru dimentsioko objektu hedatuak ditugu horiek, eta soka irekiak bertan izango dituzte euren muturrak. Ikuspuntu fenomenologikotik oso interesgarriak dira; izan ere, espazio-denboraren 3 dimentsio ez-trinkoetan heda daitezke D3-branak. Hartara, brana horiek euren mundu-bolumenean gauge-askatasun mailak dituztenez [15, 16], lokalizatutako N D3-brana pilaketan mundu-bolumenean $SU(N)$ gauge-teoria bat sorraraziko dute espazio-denbora ez-trinkoan.

Hauxe dugu D3-brana baten ekintza, α' garapenaren ordena baxuenean [4]:

$$S_{D3} = \mu_3 \int_{\mathcal{W}_4} C_4 - T_3 \int_{\mathcal{W}_4} d^4x \sqrt{-g}, \quad (1.3)$$

non \mathcal{W}_4 4 dimentsioko mundu-bolumena den (eta, lehen aipatu bezala, orokorrean, M_4 espazio-denbora ez-trinkoarekin bat egingo duen), μ_3 branaren 4-formarekiko akoplamendu elektrikoa adierazten duen, eta T_3 branaren tentsioa den. Azken bi kantitate horiek erlazionatuta daude: $\mu_3 = g_s T_3 = 2\pi \ell_s^{-4}$.

1.2 Calabi-Yau geometrien bidezko trinkoketa

Gure lau dimentsioko unibertsoa Soka-Teoriarekin bateratzeko, nolabait IIB supergrabitaearen 10 dimentsioak *trinkotu* beharko ditugu 4ra murrizteko. Hori bideratzeko modurik errazena dugu $M_4 \times X_6$ biderkadura zuzena erabiltzea, non M_4 lau dimentsioko espazio simetrikotik hedatua dugun eta X_6 6 dimentsioko espazio *trinkoa* dugun.²

Azken finean, $D = 4$ $\mathcal{N} = 1$ supergrabitae-teoria izan nahiko dugu espazio ez-trinkoan, horri esker kontrol perturbatibo paregabea ziurtatuko baitugu eremu-teoria mailan eta, ikuspuntu matematikotik, analisia askoz errazagoa izango baita. Zer esanik ez, supersimetria hautsi beharko dugu prozesu osoaren amaieran, behaketa fenomenologikoekin bat etortzearen.

1.2.1 Calabi-Yau barietateak

Soka-trinkoketen eredu garrantzitsu askok *Calabi-Yau barietateak* erabiltzen dituzte, 4-D espazio-denboran 10 dimentsioko supersimetriaren kargen laurdena mantentzen baitituzte horien simetriek. Geometria hauek [17] artikuluan proposatu ziren lehen aldiz supersoka heterotikoen trinkoketen inguruan. Harrezkero, eraikuntza hauek nagusitu dira trinkoketak bideratzeko eta beste Supersoka-teorietan aplikatu dira.

²Ansatz simple hori ez da bateragarria fluxuek eta branek hondoan sortzen duten atzera-erreakzioarekin [11]. Orokorrean, produktu bihurritu baten bidez adierazten da 10 dimentsioko metrika, $ds_{10}^2 = e^{2A(y)} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + e^{-2A(y)} g_{mn} dy^m dy^n$, non $A(y)$ dimentsio trinkoen araberakoa den eta indize greko eta latinek barietate ez-trinko eta trinkoaren koordinatuak adierazten dituzten, hurrenez hurren.

Lehenik eta behin, Calabi-Yau espazioak barietate *konplexuak* dira,³ hots, koordinatu-mapek barietatearen $U_\alpha \in X$ azpimultzoak \mathbb{C}^n -ra eramaten dituzte, non n barietatearen dimentsioa adierazten duen.⁴ Orokorrean, edonolako $2n$ dimentsioko barietate erreal bat ezin daiteke n dimentsioko barietate konplexu batekin mapeatu. Identifikazio hori bideratzeko, *egitura konplexu* delako objektuaren existentzia bermatu beharko dugu. *Egitura ia-konplexua* $\mathcal{J} : TX \rightarrow TX$ mapa bat da, non X barietate erreal baten zuzketa tangenziala adierazten duen TX -k, eta $\mathcal{J}^2 = -1$ bete behar den. X -ren U_α azpimultzo guztietan $z^{\mu_1}, \dots, z^{\mu_n}$ koordenatu konplexuak eta horien $\bar{z}^{\bar{\mu}_1}, \dots, \bar{z}^{\bar{\mu}_n}$ konjokatuak aukeratu ahal baldin baditugu non, osagaika, $\mathcal{J}_v^\mu = i\delta_v^\mu$ eta $\mathcal{J}_v^{\bar{\mu}} = -i\delta_v^{\bar{\mu}}$ betetzen diren, \mathcal{J} -ri *egitura konplexu* deritzogu eta X barietate konplexua da.

Aurreko definizioak erabiliz, zuzenean ikus dezakegu barietate konplexuen hainbat egitura (bektoreek, formek...) euren indizeen arabera sailkatu ahal izango ditugula, horiek holomorfoak edo antiholomorfoak izan baitaitezke. Hain zuzen ere, gure eztabaidan sarri ageriko zaizkigu (p,q) -*formak*, horrela definitutakoak:

$$\omega = \frac{1}{p!q!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p \bar{\nu}_1 \dots \bar{\nu}_q} dz^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dz^{\mu_p} \wedge d\bar{z}^{\bar{\nu}_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{\bar{\nu}_q} \in A^{p,q} \quad (1.4)$$

non (p,q) -formen espazioari $A^{p,q}$ deritzogun. Forma errealeen ohiko d kanpo-deribatua forma konplexuetara orokortu daiteke $\partial : A^{p,q} \rightarrow A^{p+1,q}$ eta $\bar{\partial} : A^{p,q} \rightarrow A^{p,q+1}$ mapen bidez. Horiek, betiere, $\partial^2 = \bar{\partial}^2 = 0$ bete beharko dute, kasu errealean bezala. Deribatu erreal eta konplexuak horrela daude lotuta:

$$d = \partial + \bar{\partial} \quad (1.5)$$

Argi dago, beraz, edozein forma $\bar{\partial}$ -zehatza, $F_{p,q} = \bar{\partial} C_{p,q-1}$, $\bar{\partial}$ -itxia izango dela, hau da, $\bar{\partial} F_{p,q} = 0$ beteko duela. Ezaugarri horretan oinarritzen da X barietate konplexuaren *Dolbeaut kohomologia-taldea*, ondorengo baliokidetasun-klasearen bidez definituta:

$$H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X, \mathbb{C}) = \frac{Z^{p,q}(X)}{\bar{\partial} A^{p,q-1}(X)} \quad (1.6)$$

non $Z^{p,q}(X)$ (p,q) -forma $\bar{\partial}$ -itxien espazioa den eta $\bar{\partial} A^{p,q-1}(X)$ (p,q) -forma $\bar{\partial}$ -zehatzen espazioa den. Funtsean, edozein bi forma itxi baliokideak izango dira baldin eta euren diferentzia forma zehatz bat bada, kohomologia errealean bezala. Dolbeaut kohomologia-taldearen dimentsioa *Hodge zenbakien* bitartez adierazten da:

$$h^{p,q} = \dim H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X, \mathbb{C}) \quad (1.7)$$

Zenbaki horiek harreman estua izango dute geroxeago aztertuko dugun Soka-Teoriaren Paisaiarekin. Izan ere, energia baxuko teorian ageriko zaizkigun masarik gabeko eremu kopurua horixe izango dugu.

Barietate eta forma konplexuen oinarriak berrikusita, espazio hauen metrika aztertzeraz

³Geometria konplexuaren eta, zehazki, Calabi-Yau barietateen sarrera sakonak dira, adibidez, [4,18].

⁴Tesi osoan zehar $n = 3$ erabiliko dugu, 6 dimentsio errealeko geometria trinkoa adierazten baitu kasu horrek.

joko dugu orain. Kontzeptu zentrala da *metrika hermitiarra*, hots, koordenatu lokaletan ondorengo baldintza betetzen duen metrika:

$$g = g_{\mu\bar{\nu}} dz^\mu \otimes d\bar{z}^\nu + g_{\bar{\mu}\nu} d\bar{z}^\mu \otimes dz^\nu \quad (1.8)$$

non $g_{\mu\bar{\nu}} = \overline{g_{\nu\bar{\mu}}}$ den. Mota horretako metrika duen barietate konplexuari hermitiarra deritzo. Metrika horrek (1,1)-forma berezia eraikitzea ahalbidetzen du, *Kähler forma* delakoa:

$$\omega = i g_{\mu\bar{\nu}} dz^\mu \wedge d\bar{z}^\nu. \quad (1.9)$$

Paisaiaren fisikan garrantzi handia izango du objektu matematiko horrek, aurrerago ikusiko dugun bezala.

Bestalde, Kähler forma itxia duten eta hermitiarrak diren barietateei *Kähler barietatea* deritze. Horietan, definizioz,

$$d\omega = 0 \quad (1.10)$$

izango dugu. Definizio horren ondorio zuzena dugu barietatearen $g_{\mu\bar{\nu}}$ metrika horrela adierazi dezakegula lokalki:

$$g_{\mu\bar{\nu}} = \partial_\mu \partial_{\bar{\nu}} K, \quad (1.11)$$

non K funtzioari *Kähler potentziala* deritzon. Potentzial hori hainbatetan ageriko zaigu tesian zehar, zehazki $\mathcal{N} = 1$, $D = 4$ supergrabitarearen ekintza landuko dugun bakoitzean; izan ere, teoria horren eremu-espazioaren metrika kählerarra da.

Metrika eskuan, Ricci kurbadura tentsorea eta eskalarra eraiki daiteke, kasu errealan bezala. Ricci tentsorea hauxe da:

$$R_{\mu\bar{\nu}} = -\partial_\mu \partial_{\bar{\nu}} (\log \det g) \quad (1.12)$$

Zehazki, barietate *Ricci-laua* esaten diogu $R_{\mu\bar{\nu}} = 0$ baldintza betetzen duenari bere domeinua-
ren edozein koordenatu-kartatarako. Kähler forma eraiki dugun bezala, *Ricci forma* horrela definitu dezakegu:

$$\mathcal{R} = i R_{\mu\bar{\nu}} dz^\mu \wedge d\bar{z}^\nu = -i \partial \bar{\partial} (\log \det g). \quad (1.13)$$

Ricci forma itxia da $d = \partial + \bar{\partial}$ kanpo-deribatu errealekiko, zuzenean egiaztatu daitekeen bezala. Aitzitik, ez du forma zehatza zertan izan, $\det g$ ez-tribialki transformatzen baita koordenatu-aldaketekiko. Hartara, ondorengo baliokidetasun klasea eraiki dezakegu:

$$c_1 = -\frac{i}{2\pi} [\mathcal{R}] \in H^2(X, \mathbb{R}), \quad (1.14)$$

lehen Chern klasea deritzona.

Prest gaude Calabi-Yau barietatearen definizioa adierazteko. Lehen Chern klasea nulua duten Kähler barietate trinkoak dira Calabi-Yau espazioak. Espazio interesgarri hauen xehetasunetan barneratuko ez garen arren, horien ezaugarri erabilgarrienak deskribatuko

ditugu ondorengo lerroetan.

Lehenik eta behin, lehen Chern klase nuluaren ondorioz zuzenena da barietatea Ricci-laua izango dela (eta, hortaz, hutseko Einsteinen ekuazioak beteko dituela). Horrez gain, Yau-k frogatu zuenaren arabera [19], Ricci-lau metrika bakarria atxikitu ahal zaio Kähler formari; hala eta guztiz ere, gaur egun oraindik ez da espazio hauen metrika espliziturik lortu. Hartara, nahiz eta Calabi-Yau eraikuntza mordoa aurkitu diren [20], euren ezaugarri topologikoen bidez deskribatu daitezke soilik. Edonola, aurrerago ikusi dugun bezala, metrika horren *deformazioak* aztertzea izango da gure eztabaidaren funtsa, metrika propioan ez bezala.

Calabi-Yau barietate bakoitzean inon nulua ez den $(3,0)$ -forma *bakarria* (kohomologikoki) eraiki ahal izango dugu, Ω deritzoguna. Gainera, forma konplexuen arteko dualitatez eta simetriez baliatuz (Hodge eta Poincaré dualitateak, besteak beste), hauek ditugu barietatearen Hodge-zenbaki ez nulua: $h^{0,0} = h^{3,3} = h^{3,0} = h^{0,3} = 1$, $h^{1,1} = h^{2,2}$ eta $h^{1,2} = h^{2,1}$. Beraz, barietatearen kohomologia konplexu osoa bi zenbakik besterik ez dute zehazten: $h^{1,1}$ eta $h^{2,1}$.

Calabi-Yauen holonomia taldea $SU(3)$ dugu. Horren ondorioa da espinore kobarianteki konstante baten existentzia espazio trinkoan [9], 10 dimentsioko supersimetriaren laurden bat soilik hausten ez duena $D = 4$ espazio ez-trinkoan. Ondorioz, $\mathcal{N} = 1$ supersimetria 10 dimentsioetan (16 superkargaduna) $\mathcal{N} = 1$, $D = 4$ supersimetriara murriztuko da trinkoketa bideratzerakoan. Bestalde, IIB motako supergrabitateak $\mathcal{N} = 2$ supersimetriaren bitartez deskribatzen dugu 10 dimentsiotan (hots, 32 superkarga ditu); hori dela eta, trinkotu ondoren $\mathcal{N} = 2$, $D = 4$ supersimetria izango dugu bukaeran. Geroxeago azalduko dugun bezala, orientate-proiekzioen bidez $\mathcal{N} = 1$, $D = 4$ supergrabitatea lortuko dugu ondoriozko teorian.

1.2.2 Calabi-Yau barietateen modulu-espazioa

Arestian azaldu dugunaren arabera, Ricci-lautasuna da Calabi-Yau espazioen ezaugarriarik nagusia. Haatik, baldintza hori betetzen duten metrikak ez dira unibokoak. Adibidez, Ricci-laua den $g_{\bar{\mu}\nu}$ metrika emanda, berreskalatutako $g_{\bar{\mu}\nu} \rightarrow \lambda g_{\bar{\mu}\nu}$ metrika ere Ricci-laua izango da. Hartara, zilegizkoa da ondorengo galdera erantzun nahi izatea: egitura konplexuarekiko definitu dugun metrika bat emanda, posiblea al da barietate konplexuaren ezaugarri topologikoak kontserbatzen dituen metrikaren deformazioak definitzea Ricci-lautasuna mantenduz? Hau da

$$R_{\bar{\mu}\nu}(g) = 0 \rightarrow R_{\bar{\mu}\nu}(g + \delta g) = 0 \quad (1.15)$$

non δg metrikaren deformazio lineala dugun:

$$\delta g = \delta g_{\bar{\mu}\nu} dz^\mu d\bar{z}^\nu + \delta g_{\mu\bar{\nu}} dz^\mu dz^\nu + \text{k.k.} \quad (1.16)$$

Ricci-lautasunarekin bateragarriak diren metrika-deformazioek Calabi-Yau barietatearen *modulu-espazioa* osatzen dute [21].

$\delta g_{\bar{\mu}\nu}$ eta $\delta g_{\mu\bar{\nu}}$ deformazioak desakoplatuta daudela frogatu daiteke; ondorioz, deformazio klase independenteak osatzen dituzte. Zuzenean nabaritu dezakegu lehenengoak Kähler

forma deformatzeagatik sortzen direla:

$$\delta\omega = i\delta g_{\mu\bar{\nu}} dz^\mu \wedge d\bar{z}^{\bar{\nu}}. \quad (1.17)$$

Yau-ren teorema dela eta, edonola deformatutako $\omega + \delta\omega$ Kähler forma Ricci-laua den Kähler bariedade bati dagokiola badakigu. Beraz, deformazio horiek t^I , $I = 1, \dots, h^{1,1}$, $(1,1)$ -formek osatzen duten oinarrian garatu ditzakegu:

$$\delta g_{\mu\bar{\nu}} = b_I(x) t_{\mu\bar{\nu}}^I. \quad (1.18)$$

Horrela, lau dimentsioko espazio-denboran $h^{1,1}$ eremu eskalar ($b_I(x)$) izango ditugu, Kähler formaren deformazioek sortutakoak.

Bestalde, arestiko eztabaida gogoan izanda, badirudi $\delta g_{\mu\nu}$ deformazioak bateraezinak direla metrika hermitiarrarekin. Aitzitik, kontuan eduki beharra dugu metrika osatzen dituzten koordenatu konplexu lokalak idazteko egitura konplexua erabili behar izan dugula. Ondorioz, indize guztiz (anti)holomorfitakoak dituzten metrikaren deformazioak ez daude gure jatorrizko egitura konplexuarekiko definituta. Hartara, egitura konplexuaren deformazioei dagozkie $\delta g_{\mu\nu}$ eta $\delta g_{\mu\bar{\nu}}$. Horiek z^a eremu eskalar konplexuak erabiliz parametrizatu daitezke:

$$\delta g_{\mu\nu} = \frac{i}{\|\Omega\|^2} \bar{z}^a (\chi_a)_{\mu\bar{\nu}} \Omega^{\bar{\mu}\bar{\nu}} \quad (1.19)$$

non Ω Calabi-Yau bariedadearen $(3,0)$ -forma bakarra dugun, $\|\Omega\|^2 = \frac{1}{3!} \Omega_{\mu\nu\rho} \bar{\Omega}^{\mu\nu\rho}$, eta χ_a formek $H_{\bar{0}}^{1,2}(X, \mathbb{C})$ espazioaren oinarria osatzen duten. Ondorioz, egitura konplexuaren deformazioek $h^{2,1}$ eremu eskalar konplexu sorraraziko dituzte.

1.2.3 Calabi-Yau orientateak

Aurreko eztabaida jarraituz, badakigu Calabi-Yau trinkoketek jatorrizko 10 dimentsioko superkargen laurdena kontserbatuko dituztela. Hau da, IIB motako supergrabitarearen ikuspegitik, 4 dimentsioko teoria eraginkorra $\mathcal{N} = 2$ supergrabitarearen bidez deskribatu beharko dugu. Horretarako, bai eremu bosoiko eta fermioiko guztien Kaluza-Klein moduak, bai Kähler eta egitura konplexuaren moduluak, multiplete supersimetrikoetan jaso beharko ditugu (ikus [22] ekintza eraginkorrari eta horren osagaiei buruzko xehetasunei buruz jakiteko).

Azken batean, 4 dimentsioko $\mathcal{N} = 1$ supersimetrikoa den lagrangeak eraginkorra lortu nahiko dugu. Horretara iristeko, beste eragiketa gehigarri batekin egin ohi da murrizketa dimentsionala, *orientate-ekintza (orientifolding)* delakoa [23]. IIB motako supergrabitarean, orientate-ekintzek sokaren mundu-orriaren orientazioa alderantzikatu, eta $\Omega(3,0)$ -formaren zeinua aldatzen dute espazio trinkoan, betiere Kähler forma eta egitura konplexua berdin mantenduz. Simetria honekiko inbariante mantentzen diren 10 dimentsioko espazio-denboraren puntu finkoek *orientate planoak (Op-planoak)* osatzen dituzte (*orientifold planes*). Objektu horiek ez-dinamikoak dira, Ramond-Ramond p-formekiko karga negatiboa dute, eta funtsezkoak izango dira gure hurrengo eztabaidetan. Hain zuzen ere, guri interesatzen

zaizkigun kasuetan, espazio trinkoan besterik ez izango du eragina orientate-ekintzak, eta horren puntu finkoak X_6 -ren 4-zikloak edo puntuak izango dira; hartara, $O3/O7$ -planoak izango dira sortuko direnak.⁵

Lehen aurreratu dugun bezala, Calabi-Yau bariatateen bidezko trinkoketak orientate-ekintzekin bateratzean (*Calabi-Yau orientateak* direlakoak) jatorrizko 4 dimentsioko superkargen erdia mantenduko dituzte besterik ez, eta ondorioz, dimentsio ez-trinkoen fisika $\mathcal{N} = 1$ supergrabitateren bidez deskribatu ahal izango dugu. Noski, simetria horrek jatorrizko hainbat eremu ezabatuko ditu; hartara, geratzen diren eremu guztiak supermultiplete kiraletan antolatu beharko ditugu. Hain zuzen ere, orientate-ekintza bizirauten duen espektrorik bosonikoa hauxe dugu:

- $h^{1,1}$ eremu eskalar konplexu, T^ρ , $\rho = 1, \dots, h^{1,1}$, espazio trinkoaren $\mathcal{V}(T^\rho)$ bolumena parametrizatzen dituztenak, besteak beste. Arestian deskribatutako Kähler moduluak dira horiek, hain zuzen ere. Horietako azpimultzo batek ezaugarri axioikoak ditu, aplikazio fenomenologiko oso interesgarriak ahalbidetzen dituenak [24, 25].
- $h^{2,1}$ eremu eskalar konplexu⁶ z^i , $i = 1, \dots, h^{2,1}$, egitura konplexuaren moduluekin erlazionatuta daudenak. Fluxu-trinkoketetan funtsezkoak izango dira horiek, aurrerago ikusiko dugun bezala.
- Arestian, (1.1) ekuazioan, aurkeztutako τ axiodilatoia.

Guztira, Calabi-Yau orientateek masarik gabeko $h^{1,1} + h^{2,1} + 1$ eremu eskalar konplexu sorraraziko dituzte. Oro har, modulu kopuru totala $\mathcal{O}(100)$ da (ikus, adibidez, [26, 27]). Esan beharrik ez dago gaur egungo baldintzatze fenomenologikoen (besteak beste, Big Bangaren nukleosintesian oinarritzen diren behaketek) guztiz debekatzen dutela eremu arin horien existentzia [28]. Ondorioz, eremu horiek masadun bihurtu behar dira nolabait; beherago azalduko dugunez, *fluxu-trinkoketak* dira moduluengan potentzial eraginkorra indultzeko metodorik ikertuenetakoak [11, 29].

1.3 Teoria eraginkorra eta fluxu-trinkoketak

Azpiatal honetan laburbilduko ditugu Calabi-Yau orientateen bidezko IIB supersoken trinkoketen inguruko formularik garrantzitsuenak (ikus, adibidez, [22, 30] xehetasun gehiagorako). Planck masa murriztuaren unitateetan landuko ditugu horiek, hots, $M_p^{-2} = 8\pi G = 1$.

Arestian aipatu bezala, IIB Soka-Teoriaren \tilde{X}_6 orientatearen bidezko trinkoketen energia baxuko espektroran aurki ditzakegu⁷ τ axiodilatoia, egitura konplexuaren $h^{2,1}$ modulu, z^i direlakoak, eta $h^{1,1}$ Kähler modulu T^ρ ; horiek guztiek $\mathcal{N} = 1$, $D = 4$ supergrabitare-teoriaren multiplete eskalarretan bateratuta izango ditugu. Teoria horren bosoi-sektorea bi osagai erabiliz eraiki daiteke: Kähler potentziala, (1.11) ekuazioan aurkeztu duguna, eta *superpotentziala*.

⁵IIB motako Soka-Teorian $O5/O9$ -planoak ere egon litezke [22, 23]. Aitzitik, horiek ez dira garrantzitsuak izango aurrerago aztertuko ditugun fluxuen bidezko trinkoketetan.

⁶ $H^{2,1}(X, \mathbb{C})$ kohomologia-taldea azpitalde bakoiti eta bikoitetan deskonposatzen da orientate-ekintza aplikatzean. Izan ere, egitura konplexuko moduluak zati bakoitian dute oinarria, hots, $H^{2,1}$ azpitaldean, $h^{2,1}$ dimentsiokoa. Azken horren azpiindizea alde batera utziko dugu notazioa argitzearen.

⁷Bestelako askatasun-graduei dagozkien eremuak ez ditugu kontuan hartuko, hala nola: $h^{1,1}$ axioi-multipleteak, $D3$ - eta $D7$ -branen moduluak, edota materia-eremuak.

Lehenengoak eremu-espazioaren metrika definitzen du, lagrangearren zati kinetikoan ageri dena:

$$\mathcal{L}_{\text{bos},4\text{D}} = -K_{i\bar{j}} \partial^\mu \phi^i \partial_\mu \bar{\phi}^{\bar{j}} - V(\phi, \bar{\phi}), \quad K_{i\bar{j}} = \frac{\partial^2 K}{\partial \phi^i \partial \bar{\phi}^{\bar{j}}} \quad (1.20)$$

Bestalde, Kähler potentziala eta superpotentzialaren mendekoa da potentzial eskalarra. Gauge sektorearen interakzioak baztertuz, hauxe dugu:⁸

$$V(\phi, \bar{\phi}) = e^K \left[K^{i\bar{j}} D_i W D_{\bar{j}} \bar{W} - 3|W|^2 \right] \quad (1.21)$$

non $D_i = \partial_i + K_i$ deribatu Kähler-kobarianteak ditugun, eta indizeek bosoi-eremu eskalar guztiak izendatzen dituzten, alegia, axiodilatoia eta Kähler eta egitura konplexuaren sektore osoak.

Hain zuzen ere, α' eta g_s garapenen lehenengo ordenan, 4 dimentsioko supergrabitatie-teoriari dagokion K Kähler potentziala jatorrizko ekintza eraginkorretik irakurri daiteke, gehiegizko dimentsioak trinkotu ditugunean [21, 22]. Horrela, hauxe dugu Kähler potentziala:

$$K = -2 \log \mathcal{V} - \log(-i(\tau - \bar{\tau})) - \log \left(i \int_{X_6} \Omega \wedge \bar{\Omega} \right). \quad (1.22)$$

Azken adierazpen horretan \tilde{X}_6 -ren bolumena, $\mathcal{V}(T^\rho, \bar{T}^\rho)$, Kähler moduluen arabera da, Einstein-markoan neurtuta eta ℓ_s soka luzera unitateetan. Kähler modulu bakarra dugun kasuetan, hots, $h^{1,1} = 1$ denean, ondorengo adierazpena sinplifikatzen da bolumena [4]:

$$\mathcal{V} = (T + \bar{T})^{3/2}. \quad (1.23)$$

Bestalde, (1.22) adierazpenaren azkeneko terminoa Calabi-Yau espazioaren forma holomorfitikoa bakararen arabera idatzi dugu. Ω delako hori, implizituki, egitura konplexuaren moduluen menpekota da, ikus (1.19). Kähler potentzial hori modulu-espazioaren deskribapen ona izan dadin eta, gainera, α' ekarpenak kontrolpean mantentzeko, bolumen handiko erregimenera mugatuko dugu gure analisia⁹, $\mathcal{V} \rightarrow \infty$ (ikus [31] xehetasun gehiagorako).

Teoriaren akoplamenduak era egokian espresatu daitezke Calabi-Yau espazioaren $\{A^I, B_I\}$ 3-zikloen oinarri sinplektiko bat zehaztuz¹⁰, non $I = 0, \dots, h^{2,1}$ den, eta α^I eta β_I 3-formen oinarri dualen bidez. Horrela,

$$\int_{A^I} \alpha_J = \delta_J^I, \quad \int_{B_I} \beta^J = -\delta_I^J, \quad \int_{M_3} \alpha_I \wedge \beta^J = \delta_I^J, \quad \int_{A^I} \beta^J = \int_{B_I} \alpha_J = 0. \quad (1.24)$$

⁸ $K^{\rho\bar{\sigma}} = (K_{\rho\bar{\sigma}})^{-1}$, $K^{\tau\bar{\tau}} = (K_{\tau\bar{\tau}})^{-1}$ eta $K^{i\bar{j}} = (K_{i\bar{j}})^{-1}$ notazioek adieraziko dituzte, hurrenez hurren, Kähler, axiodilatoi eta egitura konplexuaren sektoreen eremu-espazioaren metrikaren alderantzizkoak.

⁹ Komenigarria da azpimarratzea Kaluza-Klein masa-eskala, eremu eskalarren norabide trinkoekin zerikusia duena, eta eremu eskalar horiek fluxuen bidez lor dezaketen masa, guztiz banatuta egon beharko direla. [31] artikuluan frogatu zenaren arabera, bolumen handiko limitean, eskalen banaketa hori kontrolpean izango dugu.

¹⁰ Barietate baten n -ziklo kopurua n -garren b_n Betti zenbakiaren bidez adierazten da. Hain zuzen ere, Calabi-Yau barietateen 3-ziklo kopurua $b_3 = \sum_{p+q=3} h^{p,q} = 2h^{2,1} + 2$ da.

Gainera, Ω oinarri horretan espresatuz, horrelaxe idatzi dezakegu:

$$\Omega = X^I \alpha_I - \mathcal{F}_I \beta^I, \quad \text{with} \quad X^I = \int_{A^I} \Omega, \quad \mathcal{F}_I = \int_{B_I} \Omega. \quad (1.25)$$

Aurreko X^I aldagaiak egitura konplexuaren modulu-espazioaren koordinatu proiektiboak dira, eta horiei dagozkien modulu-eremuak horrela definitu daitezke: $z^i \equiv -iX^i/X^0$, $i = 1, \dots, h^{2,1}$. Kähler potentzialaren adierazpen egokiagoa aurkitzea xede, X^I eta \mathcal{F}_I aldagaiak *periodo-bektore* sinplektiko batean bildu ditzakegu, $\Pi^T = (X^I, \mathcal{F}_I)$. Hartara, horrelaxe idatz dezakegu egitura konplexuaren moduluen K_{cs} Kähler potentziala:

$$e^{-K_{cs}} = i \int_{M_3} \Omega \wedge \bar{\Omega} = -i(X^I \bar{\mathcal{F}}_I - \bar{X}^I \mathcal{F}_I) = i\Pi^\dagger \cdot \Sigma \cdot \Pi, \quad (1.26)$$

non Σ funtsezko matrize sinplektikoa den:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.27)$$

Aurreko adierazpena aldaezina da $\text{Sp}(2h^{2,1} + 2, \mathbb{Z})$ transformazioekiko, azken horiek oinarri sinplektikoaren aukera desberinetara dagozkielarik. Aitzitik, transformazio sinplektiko horiek badute eragina periodo-bektorearengan:

$$\Pi \longrightarrow S \cdot \Pi \quad \text{where} \quad S^T \cdot \Sigma \cdot S = \Sigma. \quad (1.28)$$

Bestalde, X^I aldagaien funtzio holomorfo baten arabera adierazi daitezke \mathcal{F}_I aldagaiak. Izan ere, horrelaxe definitzen dira *aurrepotentzialaren* deribatuak:

$$\mathcal{F}_I(X) = \partial_I \mathcal{F}(X). \quad (1.29)$$

Bigarren graduko funtzio homogeneoa dugu aurrepotentziala, hots, $\mathcal{F}(\lambda X) = \lambda^2 \mathcal{F}(X)$. Ondorioz,

$$X^I \mathcal{F}_I = 2\mathcal{F}(X). \quad (1.30)$$

Gauzak horrela, $X^0 = 1$ gauge-a erabiliz, eta aurrepotentzialaren homogeneitatea aplikatuz, hauxe dugu periodo-bektorearen adierazpen berria:

$$\Pi(z^i) = \begin{pmatrix} 1 \\ iz^i \\ 2\mathcal{F} - z^j \mathcal{F}_j \\ -i\mathcal{F}_i \end{pmatrix}. \quad (1.31)$$

Beraz, Kähler potentzialaren egitura konplexuaren terminoa $\mathcal{N} = 1$, $D = 4$ supergrabitate-teorian, erraz adierazi daiteke aurrepotentzialaren arabera, azken hori espazio trinkoaren geometriaren menpekoa izaki.

1.3.1 Eskalarik gabeko fluxu-hutsak

Oraingo honetan moduluen potentzial eskalarra nola sorrarazi dezakegun aztertuko dugu. Beste era batera esanda, superpotentzial egoki bat bilatu beharko dugu. Forma-eremuen aljebra landuz froga daiteke G_3 forma konposatuaren termino zinetikoak (ikus (1.1)), fluxuak espazio trinkoan soilik pizten badira, moduluen potentzial eskalarra sortuko duela. Prozesu horri *fluxu-trinkoketa* deritzo, eta [9] artikulua aitzindaria izan zen alor honetan. Fluxuek sorrarazten duten potentziala Gukov-Vafa-Witten superpotentzialaren mende idatz daiteke [29]:

$$W = \frac{1}{\ell_s^2 \sqrt{4\pi}} \int_{M_3} G_{(3)} \wedge \Omega, \quad (1.32)$$

non $G_{(3)} = F_{(3)} - \tau H_{(3)}$ den, eta $F_{(3)}$ eta $H_{(3)}$ Ramond-Ramond (RR) eta Neveu-Schwarz-Neveu-Schwarz (NS-NS) formen eremu-ingar 3-formak ditugun. Kontuan izan aurreko adierazpenean Ω 3-forma ageri denez, superpotentzialak egitura konplexuaren moduluen mendekotasun inplizitua izango duela.

Barne-barietatearen 3-zikloak haritzen dituzten fluxu-kuantuen arabera deskribatu daiteke superpotentziala. Izan ere, fluxuek ondorengo kuantizazio-baldintzak bete behar dituzte:¹¹

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ell_s^2} \int_{A^I} F_{(3)} &= -f_A^I \in \mathbb{Z}, & \frac{1}{\ell_s^2} \int_{B_I} F_{(3)} &= -f_I^B \in \mathbb{Z}, \\ \frac{1}{\ell_s^2} \int_{A^I} H_{(3)} &= -h_A^I \in \mathbb{Z}, & \frac{1}{\ell_s^2} \int_{B_I} H_{(3)} &= -h_I^B \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Zeinu negatiboak esplizituki adierazi ditugu ondorengo ekuazioen egokitasuna bermatzeko. Fluxu horiek oinarri sinplektikoaren arabera horrelaxe deskonposatu daitezke:

$$F_{(3)} = -\ell_s^2 (f_A^I \alpha_I - f_I^B \beta^I), \quad H_{(3)} = -\ell_s^2 (h_A^I \alpha_I - h_I^B \beta^I). \quad (1.34)$$

Hartara, $f^T = (f_A^I, f_I^B)$, $h^T = (h_A^I, h_I^B)$ eta $N = f - \tau h$ fluxu-bektore sinplektikoak definituz gero, superpotentziala era trinkoan idatz dezakegu:

$$W = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} [(f_A^I - \tau h_A^I) \mathcal{F}_I - (f_I^B - \tau h_I^B) X^I] = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} N^T \cdot \Sigma \cdot \Pi. \quad (1.35)$$

Kontuan izan soilik egitura konplexuaren moduluen arabera (periodo-bektorearen bidez) eta axiodilatoiaren arabera (N fluxu-bektorearen bidez) izango dela superpotentziala.

Zuhaitz mailan (*at tree level*), Kähler sektorea eskalarik gabeko deritzon baldintza betetzen du [22], $K^{\rho\bar{\sigma}} K_\rho K_{\bar{\sigma}} = 3$, eta ondorioz, supegrabitare-ekintzaren potentzial eskalarra hauxe izango dugu:

$$V_{\text{tree}} = e^K \left[K^{i\bar{j}} D_i W D_{\bar{j}} \bar{W} + K^{\tau\bar{\tau}} D_\tau W D_{\bar{\tau}} \bar{W} \right] \geq 0, \quad (1.36)$$

¹¹Ondorengoak karga elektromagnetikoen Dirac kuantizazio-baldintzen orokortzeak dira. Zehazki, fluxu horietara akoplatzen diren D-branen uhin-funtzioaren deskribapen tinkoa bermatzerakoan ageri dira; ikus [12], [3, 6. kap] eta [4, 18. kap] xehetasun gehiagorako eta kuantizazio horren eta Soka-Teoriaren instantioen loturari buruz gehiago jakiteko.

Kähler moduluen menpeketasunik ez duena. Hori dela eta, zuhaitz mailan, axio-dilatioia eta egitura konplexuaren sektorea besterik ezin izango dugu egonkortu. Kähler moduluak murrizteko, bai superpotenzialak eta bai Kähler potenzialak α' zuzenketa perturbatiboak barneratu beharko dituzte [32, 33] eta baita efektu ez-perturbatiboak ere [34, 35]. Azpimarragarria da (1.36) potenziala ahalbidetzen duen eskalarik gabeko egitura hautsiko dela zuzenketa horien ondorioz. Aitzitik, termino horiek kontrolpean mantenduz gero, euren ekarpena ez da nagusituko axiodilatoi/egitura konplexuaren sektorearen masa-espektroan; beraz, azken hori zuhaitz mailako potenziala erabiliz kalkulatu ahal izango dugu.¹²

Tesi honen II. zatian eskalarik gabeko potenzialaren puntu kritikoak, $\{\tau_c, z_c^i\}$ direlakoak, sakonki landuko ditugu, horietan axiodilatoi/egitura konplexuaren sektoreak supersimetria gordetzen baitu, hots,

$$D_\tau W|_{\tau_c, z_c^i} = 0, \quad \text{and} \quad D_i W|_{\tau_c, z_c^i} = 0 \quad \text{for all } i = 1, \dots, h^{2,1}. \quad (1.37)$$

Dena dela, gogoan izan beharko dugu Kähler sektoreak orokorrean supersimetria hautsiko duela, $D_\rho W = K_\rho W \neq 0$, superpotenzialaren itxarondako balioa nulua izan ezean, $W|_{\tau_c, z_c^i} = 0$. Ondorengoan, (1.37) baldintzak betetzen dituzten eremu-konfigurazioei *esklarik gabeko hutsak* deituko diegu.

Azpiatal hau amaitzeko, (1.35) fluxu-superpotenzialaren eta fluxuen beraien simetria-ezaugarriak aztertuko ditugu. Hain zuzen ere, superpotenziala aldaezina da $\text{Sp}(2h^{2,1} + 2, \mathbb{Z})$ taldearen ekintzapean, baldin eta fluxu-bektorea horrela transformatzen bada:

$$N \longrightarrow S \cdot N, \quad S \in \text{Sp}(2h^{2,1} + 2, \mathbb{Z}). \quad (1.38)$$

Izan ere, (1.28) eta (1.38) ekintzek supergrabitare-deskribapenaren erredundantziak adierazten dituzte, eta horrenbestez, transformazio horiek erabiliz erlazionatuta dauden eskalarik gabeko hutsak baliokidetzat jo beharko ditugu. Hori ez ezik, aurreko fluxu-hutsen karakterizazioa ere aldaezina da $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ transformazioak τ axiodilatioia eta fluxuak horrela aldarazten direnean:

$$\tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \begin{pmatrix} F_3 \\ H_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_3 \\ H_3 \end{pmatrix}, \quad (1.39)$$

non $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ diren eta $ad - bc = 1$. Transformazio sinplektikoetan bezala, ekintza horiek erredundantziatzat jo beharko ditugu, eta ondorioz, horien bidez erlazionatutako eskalarik gabeko hutsak egoera fisiko bera deskribatuko dute.

1.3.2 Zapaburuaren ezabapena

Egitura konplexuaren moduluen inguruko eztabaida itxi baino lehen, fluxuek har ditzakeen balioen inguruko pare bat iruzkin egitea ezinbestekoa zaigu. IIB motako supergrabitarearen (1.1) ekintzaren arabera, RR C_4 4-formaren higiduraren ekuazioa Gaussean legearen orokortzea dela frogatu daiteke. Azken hori espazio trinkoan integratuz gero, fluxuen ondorengo

¹²Tesi honetan, [31, 34–36] lanen irizpideei jarraituz, suposatuko dugu Soka-Teoriaren zuzenketa kuantikoak kalkulatzeko hondo klasiko aproposak direla (1.37) eskalarik gabeko konfigurazioak. Horren kritikak ditugu [37] eta [38].

baldintza lortuko dugu: C_4 -ren iturri guztiek elkar ezabatu behar dute [4, 13]. Intuitiboki, horren baliokidea dugu espazio trinko batean eremu elektrikoaren eremu-lerro guztiak karga batean hasi eta bukatu behar dutela, elkarrekin gurutzatu ez daitezzen. Hartara, zuzenean ikus dezakegu (1.1) ekuazioaren Chern-Simons terminoa C_4 formaren iturria izango dela baldin eta G_3 dimentsio trinkoak soilik haritzen baditu. Bestalde, D3-branak ere C_4 -ren iturriak dira, ikus (1.3), eta baita O3-planoak ere; hain zuzen ere, azken horien akoplamendua RR formarekiko D3-branaren erdia eta kontrako zeinukoa izango da [23]. Guzti horiek kontuan harturik, ondorengo tinkotasun baldintza inposatu beharko dugu fluxuetan:

$$N_{\text{flux}} + N_{D3} - \frac{1}{2}N_{O3} = 0 \quad (1.40)$$

non N_{D3} eta N_{O3} , hurrenez hurren, gure sistemaren D3-brana eta O3-plano kopurua diren, eta N_{flux} horrela definitu dugun:

$$N_{\text{flux}} \equiv \frac{1}{8i\kappa_{10}^2} \int_{X_6} \frac{G_3 \wedge \bar{G}_3}{\text{Im } \tau} = \frac{1}{\ell_s^4} \int_{M_3} F_{(3)} \wedge H_{(3)} = (f_I^B h_A^I - h_I^B f_A^I) = h^T \cdot \Sigma \cdot f = \frac{N^\dagger \cdot \Sigma \cdot N}{\tau - \bar{\tau}}. \quad (1.41)$$

Bestalde, (1.40) ekuazioa ondorengo modu egokian idatzi ohi da:

$$N_{\text{flux}} \leq N_{\text{flux}} + N_{D3} = L, \quad (1.42)$$

non L orientate planoen ekarpena adierazten duen. Aurrerago ikusiko dugunez, azkeneko ekuazioa oso erabilgarria izango zaigu fluxu-trinkoketei atxikitutako problema numerikoak kontrolpean mantentzeko. Gainera, adierazpen hori *F-teoriaren*, alegia, IIB motako Soka-Teoriaren orokortze geometriko erabilgarriaren [39], ezaugarri oso interesgarriekin konektatu ahal izango dugu.

Guztizko karga nuluaren baldintzari *zapaburuen ezabapena (tadpole cancellation)* deritzo literaturan [13]; hain zuzen ere, soka irekien lengoaian, karga ez nuluek anomaliak sortzen dituzte dispersio-anplitudeetan.

1.3.3 Kähler moduluen egonkortzea

Arestiko 1.3.1 azpiatalean aztertu dugunaren arabera, zuhaitz mailako teoria eraginkorrean, fluxuen bidez egonkortu ditzakegu egitura konplexuaren sektorea eta axiodilatoia. Aitzitik, Kähler sektore osoa, maila honetan behintzat, masarik gabekoa da. Horrenbestez, osagai gehigarriak behar ditugu modulu geometriko horiek guztiz kontrolpean edukitzeko. Arazo horren konponbide nagusiak ditugu KKLТ prozedura [35] eta Bolumen Handiko Eszenarioa (*Large Volume Scenario*, LVS) [34] (hauen berrikuspen pedagogikoak ditugu [40, 41]).

KKLT prozedura

Kähler moduluei masa emateko, superpotenzialaren ekarpen ez-perturbatiboak kontuan hartuko ditugu prozedura honetan, *gaugino-kondentsazioaren* bidez [42] sortutakoak. Eskematikoki, gure trinkoketan hainbat D7-brana barneratu ditzakegu, Calabi-Yauaren hainbat Σ_4 4-ziklo biltzen dituztenak. Brana multzo horren mundu-bolumeneko teoria Yang-Mills

ekintza dugu eta, norabide trinkoak integratuz gero, 4 dimentsio ez-trikoetan $\mathcal{N} = 1$ super-Yang-Mills (SYM) ekintza geratuko zaigu. Teoria horren gaugino bilinearrek hutseko itxarondako balio ez nuluak sor ditzakete [42]; horren ondorioz, eremu-teoria eraginkorraren mailan, superpotentzialari ondorengo ekarpena gehitu beharko diogu:

$$W_{\text{np}} = Ae^{-aT} \quad (1.43)$$

non T Kähler modulu bakarra dugula suposatuta dugun eta A eta a zenbakizko konstanteak diren.¹³ Kähler moduluen agerpena termino horietan erraz ulter daiteke. Izan ere, branek biltzen dituzten 4-zikloen bolumenaren mendekoa da 4 dimentsioko teoriaren gauge akoplamendu eraginkorra. Hartara, Calabi-Yau bolumenarekin erlazionatuta daudenez, Kähler moduluak superpotentzialean ageriko zaizkigu.

Ohar horiek gogoan, hauxe dugu superpotentzial osoa:

$$W = W_0 + W_{\text{np}} \quad (1.44)$$

non W_0 Gukov-Vafa-Witten superpotentziala den, ikus (1.32), eta ondorioz, (1.22) Kähler potentzialarekin batera, horiekin eraikitako teoriak modulu guztiak egonkortzeko gai da. Berriri ere, Kähler potentzialaren zuzenketak arbuilatu ahal izateko, soluzioaren bolumena oso handia izan beharko du, hots, $\text{Re}(T) \gg 1$. Prozedura honetan, baldintza hori inposatu ahal izateko $W_0 \ll 1$ eskatu beharko dugu potentzial eskalarraren puntu kritikoetan.

Praktikan, fluxu-superpotentzialaren balio txiki hori bideratzeko, lehenik egitura konplexuaren sektorea eta axiodilatoia egonkortu ohi dira, fluxu egokiak erabiliz $W_0 \ll 1$ lortzeko. Eremu horiek masa-terminoa lortuko dute fluxuen eraginez, eta, horrenbestez, balio jakin batzuetan egonkortuko dira. Ondoren, Kähler moduluak egonkortzen dira (1.43) motako terminoak erabiliz. Kontuan izan beharko dugu, orokorrean, axiodilatoia eta egitura konplexuaren sektorea izoztu ahal izateko, modulu horien masak handi samarrak izan beharko direla, termino ez-perturbatiboak barneratzerakoan beraien balioa berdintsu mantendu dadin.

Bolumen Handiko Eszenarioa (LVS)

KKLT prozeduraren alternatibarik nagusia dugu LVS proposamena, [31, 34] lanetan lehen aldiz aurkeztu zena. Prozedura honen ezaugarriarik garrantzitsua da moduluak egonkortu ahal izango ditugula bolumen *esponentzialki* handian (eta, ondorioz, \mathcal{V} -ren arabera zuzenketa perturbatiboak arbuilatu ahal izango ditugu), W_0 -ren balioa baldintzatu gabe. Beraz, prozedura honen bidez $W_0 \sim \mathcal{O}(10)$ duten trinkoketa tinkoak eraiki ahal izango ditugu.

Egonkorketa bideratzeko, superpotentzialaren zuzenketa ez-perturbatiboak kontuan hartzeaz gain, (1.43) adierazpenean bezala, zuzenketa *perturbatiboak* ere kontsideratu beharko ditugu Kähler moduluen Kähler potentzialean. Horixe dugu, hain zuzen ere:

$$K_K = -2 \ln \left(\mathcal{V} + \frac{\xi}{2g_s^{3/2}} \right), \quad \xi \equiv -\frac{\chi(X_6)\zeta(3)}{2(2\pi)^3} \quad (1.45)$$

¹³Superpotentzial ez-perturbatibo hori are gehiago orokortu dezakegu. Hainbat termino esponentzial gehituz, hots, $W_{\text{np}} = \sum_i A_i e^{-a_i T}$. Hain zuzen ere, 4. kapituluan ikusiko dugun bezala, horiek *racetrack potentzialak* sortzen dituzte, Kähler moduluen egonkorketaren arloan zeharo ikertu direnak.

Adierazpen horretako ξ parametroa konstantea da, $\chi(X_6)$ -ren, alegia, espazio trinkoaren Euler zenbakiaren, arabera dena eta ζ Riemann Zeta funtzioaren mendekoa dena. Noski, zuzenketa horiek Kähler potentzialaren eskalarik gabeko egitura hautsiko dute.

LVS egonkorketak bideratzeko gutxienez 2 Kähler modulu dituzten ereduak beharko ditugu. Gainera, potentzial eskalarraren termino ez-perturbatibo (ikus (1.43)) eta (1.45) motako termino perturbatiboen artean lehia sortzeko, Kähler moduluen arteko hierarkia bat beharko dugu. Eszenario hori aztertzeko eredurik sinpleenetakoa dugu $\mathbb{WP}_{[1,1,1,6,9]}^4$ gainazala (ikus 3 eta 4 kapituluak), $h_{1,1} = 2$ Kähler modulu dituenak. Trinkoketaren bolumena $\mathcal{V} \propto \tau_h^{3/2} - \tau_t^{3/2}$ da, non $\tau_i = \text{Re}(T_i)$ den, eta azpiindizeek ziklo “handia” eta “txikia” adierazten duten, hurrenez hurren. Potentzial eskalarraren eta horren puntu kritikoen aljebra landuz, zuzenean berretsi dezakegu $\tau_b \gg \tau_s \gg 1$ baldintzak bolumena horrela egonkortuko duela:

$$\mathcal{V} \sim |W_0| e^{a\tau_s}, \quad (1.46)$$

non a (1.43) ekuazioko faktore esponentziala den. Gogoan izan printzipioz ez dugula baldintzarik ezarri W_0 -ren balioan. Horrenbestez, bolumen esponentzialki handitan egonkortu ahal izango ditugu moduluak LVS prozedura jarraituz.

1.4 Soka-Teoriaren Paisaia

Arestian deskribatutako mekanismoak erabiliz, (printzipioz) modulu *guztiak* egonkortzeko gai gara, edonolako trinkoketetan. Aitzitik, horrela aurkitu ahal ditugun hutsak beti izango dira Minkowski edo anti-de Sitter minimoak, supersimetria hautsi gabe diharduelako maila horretan. Behaketekin bat egitearren, prozedura gehigarri bat beharko dugu huts horien frakzio bat *goratzeko*, hots, de Sitter minimo bihurtzeko. Mekanismo horiek xehetasun osoz azalduko ez ditugun arren (ikus, adib., [35, 43]), azpimarragarria da Soka-Teorian aurkitu badirela hainbat goratze mekanismo, eta horien bidez konstante kosmologiko positiboa dituzten minimoak sortzea ahalbidetzen dutela.

Osagai guzti horiek kontuan edukita, edonolako konstante kosmologikoa duten huts-multzoa izango dugu. Sorta hori barietate trinkoaren moduluak egonkortuz lortu dugu azken batean, espazioa fluxuekin harituz eta bestelako ekarpenak kontsideratuz. Gauzak horrela, modulu guztiak egonkortuta dituzten 4 dimentsioko teoriaren hutsen bildumari *Soka-Teoriaren Paisaia* deritzogu [44]. Zilegizkoa da galdetzea zein den Paisaiaren huts-kopurua. Gure aurreko analisia aztertuz, argi dago minimo sorta hori itzelezkoa dela, aukeratu daitezkeen Calabi-Yau geometria kopurua eta horiek haritzeko erabili ditzakegun (zapaburu-murrizketa betetzen duten) fluxu-aukeren multiplizitatea ikusita. Noski, guzti horien frakzio txikia izango da guztiz bateragarria gure Unibertsoaren kantitate behagarriengan gaur egun plazaratu diren murrizketekin (besteak beste, Higgs masaren balioarekin, konstante kosmologikoarekin etab.). Paisaiaren tamaina zenbatetsi dezakegu zapaburu-murrizketa eta Calabi-Yauen Hodge zenbakiak erabiliz [13, 45, 46]. Hain zuzen ere, analisi horien arabera,¹⁴ Paisaiaren huts-kopuruaren ordena 10^{500} da.

¹⁴Bestalde, F-teoriaren hutsen zenbateste berri samarrek [47], Paisaiaren huts-kopurua $10^{272,000}$ inguru dela diote.

Paisaiaren hutsak karakterizatzeko bi bide har ditzakegu. Alde batetik, eremu-teoria eraginkorraren tratemendu analitiko osoa egin dezakegu. Horren bidez, modulu-espazioaren soluzio zehatzak lortu ahal izango ditugu, eta baita horien bestelako ezaugarriak ere, hala nola, iraungitze ez-perturbatiboekiko duten metaegonkortasuna (aurrerago aztertuko duguna) edota soluzioa osatzen duten eremu-sektoreen artean sortzen diren akoplamenduak. Bestalde, Paisaia osatzen duten huts-sortaren tamainak soluzioen azterketa *estatistikoa* motibatzen du. Horren aitzindari [48] dugu. Prozedura horren bidez, sinplifikazio-baldintza batzuk suposatuz (adibidez, fluxu-parametroak jarraituak direla asumituz), huts horien ezaugarri behagarrien banaketa estatistiko hurbilduak lortu ahal izango ditugu. Horiek, azken finean, Soka-Teoriaren soluzio errealisten ezaugarriak hobeto ulertzea ahalbidetuko digute. Tesi honetan zehar, bi norabide horiek erabat ikertuko ditugu, eta horien arteko loturak erakutsi, trinkoketa-eredu jakinen soluzioak aurkituz eta huts horien banaketak itxarondako ezaugarri estatistikoekin konparatuz.

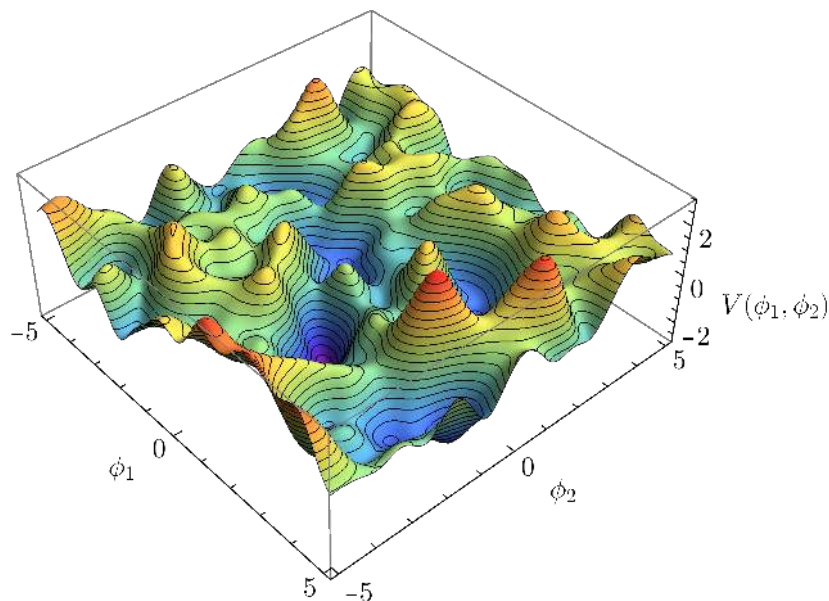
Paisaia osatzen duten huts-kopurua ikusita, zera pentsa genezake: grabitatera akoplatutako edonolako eremu-teoria eraginkorra (ETEA) emanda, beti aurkitu ahal izango dugula teoria horri dagokion Paisaiaren minimoren bat. Aitzitik, baliteke gure Unibertso partikularra Paisaian inola ere aurkitu ahal ez izatea, horri buruz dakiguna kontuan hartuta. Hain zuzen ere, interesgarria izan daiteke bereiztea ETE baten ezaugarri jakin batzuk emanda, hori energia altuko teoria bati dagokion ala ez. Zentzu horretan, Paisaian aurkitu ez daitezkeen 4 dimentsioko ETE tinkoak *Zingiran* (Swampland) aurkitzen direla diogu [49–51].

Teoriaren bat Paisaian edo Zingiran aurkitu daitekeen jakiteko, azken hamarkadetan *Zingira aieruak* formulatu dira. Horiek, funtsean, ETE batek Soka-Teorian konplezio ultrabioleta izateko bete behar dituen baldintzak dira. Gure Unibertsoaren limite fenomenologikoak aztertuz formulatzen dira Zingira aieruak, orokorrean. Adibidez, muturreko zulo beltzen ezaugarrietatik lortzen da *Grabitate Ahularen Aierua* [52], edozein ETEren indarririk ahulena grabitatea dela dioena. Bestelako planteamenduak jarraituz, teoriak simetria globalik ez duelaren aierura iritsi gaitzke [53]. Azken urteotan, Soka-Teoriaren de Sitter puntu kritikoen existentzia zalantzan jarri da [54]. Aieru horrek ikerketa asko abiarazi du bere argitalpenetik (ikus adibidez [55–65] eta 4. kapitulua) eta, oraindik ere, horren inguruko eztabaida sutsu darrai, ikuspuntu fundazionalari [66] eta fenomenologikoari [59] dagokionez.

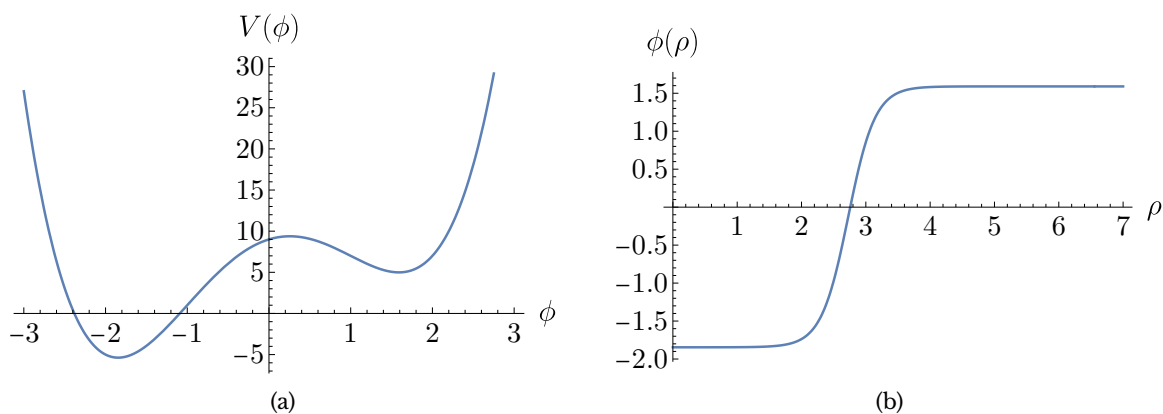
1.5 Hutsen egonkortasun ez-perturbatiboa

Arestian ikusi dugunaren arabera, Soka-Teoriaren Paisaia hainbat motatako hutsek osatzen dute, edonolako fluxu, brana eta orientate-planoz osatutakoak. Konfigurazio horiek sortzen dituzten potentzialen ideia intuitiboa izateko, 1.1 irudian agertzen den huts-sorta bezala irudikatu daiteke Paisaia. Noski, potentzial horiek trinkoketek sortzen dituzten benetako ETEen sinplifikazio hutsak diren arren, eredu interesgarriak dira intuizio baliagarria eraikitzeke eta modelo konplikatuagoak aztertzeke aurrerago.

Hartara, huts (orokorrean) ez-endekatuz osatutako sorta hori emanda, horien egonkortasuna aztertu dezakegu efektu kuantiko ez-perturbatiboekiko. Hain zuzen ere, Coleman-ek eta kolaboratzaileek [67–69] lanetan erakutsi zuten bezala, tuneleatze kuantikoa eremu-teorietara orokortu daiteke, *Sasihutsaren Iraungitze* deritzon mekanismoaren bidez.



1.1 irudia: Soka-Teoriaren fluxu-Paisaiaren irudikapen sinplifikatua, bi eremu eskalarrez osatua.



1.2 irudia: (a) Bi minimo ez-endekatu dituen potentzial osin bikoitza. (b) Aurreko potentzialaren soluzio euklidear esferikoa, sasihutsez osatutako hondo batentzat.

Sekzio honetan, [69,70] artikulu aitzindariak jarraituko ditugu; xehetasun gehiagorako, ikus adibidez [71,72].

1.5.1 Sasihutsaren Iraungitzea

Tuneleatze kuantikoaren azterketa eremu-teoriaren inguruan erraz deskribatu daiteke ϕ eremu eskalar baten arabera, 1.2(a) irudiko potentzialaren mende dagoelarik. Nahiz eta irudi hori zeharo orokortu dezakegun hainbat eremu eta bestelako interakzioak barneratzeko, eredu simple horren bitartez iraugitze hauetan espero dezakegunaren intuizioa eraiki ahal izango dugu.

Hartara, ebatzi nahi dugun problema horrela deskribatu dezakegu: espazio osoan eremuaren balioa $V(\phi)$ -ren minimo lokal altuena (*sasihutsa*) delarik, zein da minimo globalera (*erabateko hutsera*), potentzialaren langa zeharkatuz, tuneleatzeari dagokion probabilitatea espazio eta denbora unitateko? Noski, eremuaren espazio-denborako profila ere lortu nahiko

dugu, behin tuneleatzea gertatu ondoren. Galdera horri erantzuteko, mekanika kuantikoaren WKB hurbilketa erdiklasikoa orokortuko dugu eremu-teoriara.

WKB hurbilketa eta planteamendu euklidearra

Demagun edonolako sistema bat dugula, horren askatasun-graduak \mathbf{q} bektorean bildu ditugularik, ondorengo lagrangearrak deskribatuta:

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \right)^2 - V(\mathbf{q}). \quad (1.47)$$

Froga daiteke [73] hasierako $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(0)$ konfigurazio klasikoki egonkorretik beste $\mathbf{q}_f = \mathbf{q}(s_f)$ konfiguraziorako tuneleatze-anplitudea hauxe dela:

$$|T| = A e^{-B/2}, \quad (1.48)$$

baldin eta \hbar garapenaren lehenengo ordena soilik kontuan hartzen badugu. Teoriaren arabera dugu adierazpen horretako A parametroa, $\mathcal{O}(1)$ ordenakoa; bestalde, horrela definitzen dugu B funtzionala:

$$B[P] = \int_0^{s_f} ds \sqrt{2(V(\mathbf{q}(s)) - E)} \quad (1.49)$$

non s konfigurazio-espazioaren ibilbidea parametrizatzen duen, $(ds)^2 = (d\mathbf{q})^2$ metrikaren eta $E = V(\mathbf{q}_0)$ konstantearen arabera. Tuneleatze horren emergentzia-puntua aurretik zehaztu ez denez, (1.49) minimizatuz lor daiteke ihesbiderik probableena.

Problema hori erraz ulertzeko mekanika lagrangearra erabili dezakegu. Izan ere, (1.47) lagrangearrak deskribatutako sistemaren higiduraren ekuazioak ditugu

$$\frac{d^2 q_i}{dt^2} = - \frac{\partial V}{\partial q_i}. \quad (1.50)$$

Bestalde, Jacobi-Maupertuis printzipioaren arabera [74], konfigurazio-espazioan jarraitutako bidea lortu dezakegu ondorengo integrala minimizatuz:

$$I = \int_0^{s_f} ds \sqrt{2(E - V(\mathbf{q}(s)))}. \quad (1.51)$$

Ondorioz, (1.49) integralaren minimoa era berdintsuan lortu ahal izango dugula badirudi. Hain zuzen ere, (1.51) erabiliz, (1.49) lor dezakegu $V \rightarrow -V$ eginez; hartara, integral horretatik lortutako ibilbidea ondorengo higidura ekuazioei dagokie:

$$\frac{d^2 q_i}{d\tau^2} = \frac{\partial V}{\partial q_i}. \quad (1.52)$$

non $\tau = it$ denbora euklidearra erabili dugun. Horrekin (1.50) ekuazioen potentzialaren alderantzikapena modu eraginkorrean aplikatu ahal izango dugu. Higiduraren ekuazio

horiek ondorengo *ekintza euklidearra* muturtuz lor daitezke:

$$S_E = \int d\tau \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\mathbf{q}}{d\tau} \right)^2 + V(\mathbf{q}) \right]. \quad (1.53)$$

Aurrerago erabilgarriak izango zaizkigu \mathbf{q}_0 puntuan hasten diren ibilbideak $\tau = -\infty$ denboran, ostean \mathbf{q}_f -ra iristen direlarik denbora euklidear finituan eta, azkenik, \mathbf{q}_0 -ra bueltatzen direnak $\tau = +\infty$ denboran. Horiei *errebote* (*bounce*) deritzegu. Ibilbide horietan

$$B = S_E[\bar{\mathbf{q}}] - S_E[\mathbf{q}_0] \quad (1.54)$$

izango dugula froga daiteke. Aurreko adierazpenaren lehenengo terminoa dugu (1.53) ekintza euklidearra, (1.52) higidura-ekuazioak betetzen dituen ibilbide batean ebaluatuta; bigarren terminoa, aldiz, ekintzaren integral hutsa da, $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$ konstante hartuz.

Laburbilduz, ihesbiderik probableena lortzeko, teoriaren ekintza euklidearra muturtu dezakegula ikusi dugu. Bertatik lortutako higidura-ekuazioek tuneleatze-ibilbidea jarraituko dute, eta (1.48) tuneleatze-anplitudearen faktore esponenziala kalkulatzeko erabili ditzakegu.

WKB prozedura eremu-teorian

Colemanen funtsezko ideia aurreko emaitzak eremu eskalar baten teoriara orokortzean datza. Horren higiduraren ekuazioa dugu

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) \phi = -\frac{\partial V}{\partial \phi}. \quad (1.55)$$

Azken horretan, $V(\phi)$ da 1.2(a) irudian marraztutako potentziala, eremua hasiera batean espazio osoan zehar sasihutsan kokatzen delarik. Gure arestiko analisiaren arabera, ekuazio euklidearrei dagokien errebotea aurkitzeko gai gara, baldin eta ondorengo ekintza euklidearra muturrerutzen badugu:

$$S_E = \int d\tau d^3\mathbf{x} \left[\frac{1}{2} (\partial_\tau \phi)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + V(\phi) \right]. \quad (1.56)$$

Ondorioz, ebatzi beharreko higidura-ekuazio euklidearra eta horren mugalde-baldintzak ditugu

$$\square_e \phi \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \nabla^2 \right) \phi = \frac{\partial V}{\partial \phi}, \quad \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \phi(\tau, \mathbf{x}) = \phi_{fv}, \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0, \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \pm\infty} \phi(\tau, \mathbf{x}) = \phi_{fv}. \quad (1.57)$$

non ϕ_{fv} -k $V(\phi)$ -ren sasihutsaren kokapena adierazten duen. Lehenengo eta bigarren baldintzek soluzio euklidearra errebotea dela adierazten dute. Hirugarrenak, bestalde, sasihutsetik erabateko hutsera tuneleatzeko gurutzatu beharreko potentzial-langa energia-kostea izango duela aintzat hartzen du, hau da, tuneleatzea espazioaren eskualde trinko batean soilik emango dela dio.

Higiduraren ekuazioa eta horren mugalde-baldintza beteko duen soluzio euklidearrak $O(4)$ simetria izan dezakeela badirudi. Hain zuzen ere, [70] artikuluan frogatu zen soluzio

simetriko horrek ekintza euklidearra minimizatuko duela beti; gainera, eremu eskalar anitzeko teoretara orokortu dezakegu emaitza baliagarri hori [75]. Ondorioz, $\rho^2 = \tau^2 + \mathbf{x}^2$ aldagai erradialaren arabera idatz dezakegu ekintza euklidearra:

$$S_E = 2\pi^2 \int_0^\infty d\rho \rho^3 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{d\rho} \right)^2 + V(\phi) \right], \quad (1.58)$$

non aldagai angeluarrak integratu ditugun. Horrela, espazioko bolumen eta denbora unitateko tuneleatze probabilitatea hauxe dugu:

$$\Gamma/V \approx A e^{-B}, \quad B = 2\pi^2 \int_0^\infty d\rho \rho^3 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{\phi}}{d\rho} \right)^2 + V(\bar{\phi}) - V_{fv} \right], \quad (1.59)$$

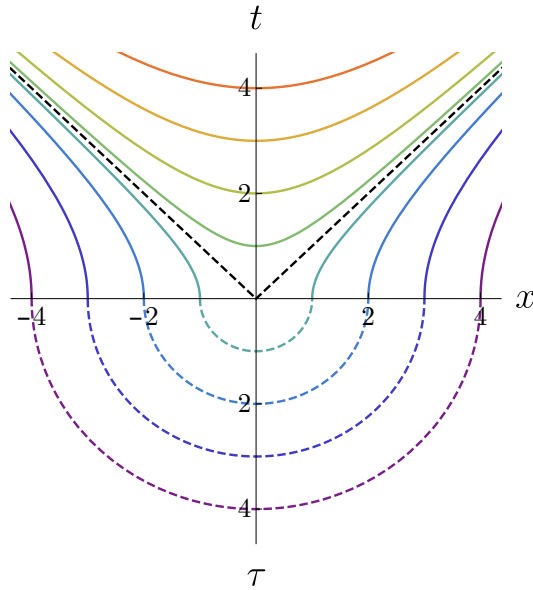
betiere (1.58) muturrerutzen duen $\bar{\phi}$ eremu-konfigurazio baten mende dagoena eta $V_{fv} = V(\phi_{fv})$ sasihutsaren potentzialaren balioaren arabera. Nahiz eta (1.58) dibergentea den, gogoan izan beharko dugu (1.59) integrala finitua izango dela.¹⁵ Gauzak horrela, higidura-ekuazioa eta mugalde-baldintzak ondorengoak ditugu:

$$\frac{d^2\phi}{d\rho^2} + \frac{3}{\rho} \frac{d\phi}{d\rho} = \frac{dV}{d\phi}, \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} \phi(\rho) = \phi_{fv}, \quad \left. \frac{d\phi}{d\rho} \right|_{\rho=0} = 0. \quad (1.60)$$

Azken ekuazio-sorta hori erraz interpretatu dezakegu ρ denbora-koordinatu eta $\phi(\rho)$ espazio-koordinatua duen partikula baten 1+1 dimentsioko higiduraren ekuazio bezala. Partikula hori $-V(\phi)$ potentzialaren eraginez mugituko da, denboraren mendekoa den marruskadurapean. Gauzak horrela, mugalde-baldintzen arabera, “partikula” pausagunetik mugitzen hasiko da (ezezaguna zaigun posizio batetik), eta denbora infinituan geldirik geratuko da berriro $-V(\phi)$ potentzialaren ϕ_{fv} maximo lokalean. Bada frogatzea, eremu bakarreko kasuan behintzat, problema horren soluzioa beti existituko dela *motz/luze* (undershoot/overshoot) argudioa erabiliz. Funtsean, alderantzikatutako potentzialaren bi puntu aurkitu ahal izango ditugu beti zeintzuetan, alde batetik, partikula ezin izango den ϕ_{fv} puntura iritsi (hots, motz geldituko da) energia gutxiegiarekin hasi duelako ibilbidea edo, bestetik, partikularen hasiera-puntua altuegia den, luzeegi joko du eta maximoa pasako duen. Horrenbestez, bi puntu horien arteko hasiera-puntu jakin bat existituko da, zeinetik partikula abiatzen bada, maximora iritsiko den abiadura nuluaz denbora infinituan.

1.2(b) irudian marraztu dugu $V(\phi)$ -ren (ikus 1.2(a) irudia) sasihutsetik erabateko hutsera doan tuneleatzearen profila. Azpimarragarria da soluzio hori erraz lor dezakegula dimentsio bakarreko kasuan, motz/luze eremu-tartea iteratiboki murriztuz; aitzitik, dimentsio biko edo dimentsio gehiagoko problema askoz zailagoa da ebazten. Azken kasu horietan dugun oztopo nagusia da ez dakigula ez nondik abiatuko den eremua, ezta soluzio euklidearrak eremu-espazioan jarraituko duen ibilbidea. Dimentsio anitzeko errebotek ebaztea xede, zenbakizko software sofistikatura jo ohi da; tesi honetan, hain zuzen ere, AnyBubble [76] erabili dugu tuneleatze horiek kalkulatzeko. Hala eta guztiz ere, badira beste hainbat programa horretarako, hala nola, CosmoTransitions [77] edo SimpleBounce [78].

¹⁵ A faktore aurreesponentziala ez dugu gure eztabaidan barneratuko. Parametro horren gorabeherei buruz jakiteko, ikus adibidez [68].



1.3 irudia: (1.60) hidigura-ekuazio euklidearren eta horien jarraipen lorentziarraren ikuspegi eskematikoa. Eremu konstanteko gainazalak lerro marratuz erakutsi ditugu espazio euklidearrean; bestalde, horien jarraipen analitikoa espazio lorentziarrean kurba solidoak erabiliz marraztu ditugu. Burbuilaren jatorritik abiatzen den argi-konoaren barnealdera ezin daiteke inolara iritsi soluzio euklidearra erabiliz, ondorioz, kanpoaldearen jarraipen analitikoaren bidez lortu beharko dugu bertako soluzioa.

Bestalde, badira literaturan ekintza euklidearraren balioa estimatzeko hainbat prozedura. Horien artean dugu *pareta-mehearen hurbilketa* [67, 79], literaturan behin eta berriz erabili dena. Horren funtsezko suposaketa da sasihutsaren eta erabateko hutsaren arteko energia-diferentzia oso txikia dela, hots, $\epsilon \equiv V(\phi_{fv}) - V(\phi_{tv}) \ll 1$. Ondorioz, bi hutsak banatzen dituen profilarren tartea (ikus 1.2(b)) oso mehea izango da, eta paretarekiko norabide perpendikularrekiko infinitesimala dela asumitu ahal izango dugu. Bestelako prozedura sofistikatuagoak badira literaturan, ikus adibidez [80], oso baliagarriak izan daitezkeenak paretamehearen prozedura baliogabekoa denean. Hurbilketa horiek xehetasun osoz aztertuko ditugu 5. kapituluan.

Soluzio lorentziarraren ezaugarriak

Tuneleatzea gertatu ondorengo soluzioa lortzeko, espazio euklidearraren denbora irudikaria Wick-biraketa baten bidez erreal bihurtu beharko dugu. Beraz, eremuaren hasierako baldintzak hauexek izango ditugu:

$$\phi(t=0, \mathbf{x}) = \phi(\tau=0, \mathbf{x}), \quad \partial_t \phi(t=0, \mathbf{x}) = 0. \quad (1.61)$$

Bestalde, (1.55) higidura-ekuazio klasikoak deskribatuko du eremuaren eboluzioa.

Espazio euklidearrean lortu dugun soluzioak zeharo erraztuko du ondorengo eztabaida. Hain zuzen ere, (1.55) ekuazioa dugu (1.57) adierazpenaren baliokide lorentziarra; hartara, lehen aurkitutako soluzioa zuzenean aplikatu dezakegu denbora erreala erabiliz, hots,

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \phi(\rho = \sqrt{\mathbf{x}^2 - t^2}). \quad (1.62)$$

Ondorioz, espazio euklidearraren $O(4)$ simetria $O(3, 1)$ simetrian bihurtuko da koordenatu lorentziarrak erabiltzerakoan. (1.61) ekuaziotik zuzenean ikusi dezakegu eremuaren hasierako profila emergentzia gertatu ondoren, ondorengo izango dugula:

$$\phi(t = 0, \mathbf{x}) = \phi(\rho_0 = (0^2 + \mathbf{x}^2)^{1/2}), \quad (1.63)$$

beraz, 1.2(b) irudian marraztutako profila izango da erabateko huts-burbuilaren hasierako profil erradiala.

Azkenik, erraz egiaztatu dezakegu espazio Minkowskian hedatzen diren ϕ konstanteko gainazalek ibilbide hiperbolikoa jarraituko dutela,

$$R(t) = \sqrt{R_0^2 + t^2}, \quad (1.64)$$

espazio euklidearreko ansatz esferikoa dela eta.

Gogoan izan behar dugu horrela lortutako soluzioek burbuilaren zentrotik abiatzen den argi konotik kanpo daudela definituta. Higiduraren ekuazioak argi-kono horren barnealdean ebazteko, soluzioa analitikoki jarraitu dezakegu eskualde horretara edo, bestalde, prozedura horren baliokidea den

$$\frac{d^2\phi}{du^2} + \frac{3}{u} \frac{d\phi}{du} = -\frac{dV}{d\phi}, \quad u = \sqrt{t^2 - \mathbf{x}^2} \quad (1.65)$$

ekuazioa ebatzi dezakegu, mugalde-baldintza egokiak inposatuz. Azken kasu horretan, $\mathbf{x} - t$ planoko eremu konstanteko gainazalak hiperbolikoak izango dira, denbora-motako normalak dituztenak. Aurrerago ikusiko dugunez, azken baieztapen horrek ondorio garrantzitsuak izango ditu ikuspegi kosmologikotik aztertzen dugunean sasihutsaren iraungitzea.

1.5.2 Ondorio kosmologikoak: inflazioa eta multibertsoa

Sasihutsaren iraungitzearen arestiko eztabaidan, grabitateak sor ditzakeen efektuak arbuia ditugu. Zer esanik ez, prozesu hori ikuspuntu kosmologiko batetik aztertu nahi baldin badugu, funtsezko osagaia suertatuko zaigu grabitatea. Hartara, [69, 72] jarraituz, grabitatea barneratzen duen sasihutsaren iraungitzeak, *Coleman-deLuccia instantoiak* deritzenak, landuko ditugu.

Coleman-deLuccia instantoiak

Grabitatearekiko akoplamendu minimoa duen ondorengo eremu eskalar baten teoria izango da sekzio honen aztergaia:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2\kappa} R + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right]. \quad (1.66)$$

non $\kappa = 8\pi G$ den. Kasu ez-grabitazionalen bezala, tuneleatze-erratioa koordenatu euklidarren arabera lortuko dugu, sistemak $O(4)$ simetria duela suposatuz.¹⁶ Horren ondorioz,

¹⁶Kontuan izan suposatze hori prozesuaren analogo ez-grabitazionaletik oinordetu dugula. Gaur egun, $O(4)$ simetriak tuneleatze-probabilitatea maximizatzen duenaren frogarik ez dugu.

hauxe dugu sistemaren metrika:

$$ds^2 = d\xi^2 + \rho(\xi)^2 d\Omega_3^2 \quad (1.67)$$

non $d\Omega_3^2$ 3-esferaren gainazal-elementua dugun. Ansatz horren arabera higidura-ekuazioak ondorengoak dira:

$$\phi'' + \frac{3\rho'}{\rho}\phi' = \frac{dV}{d\phi} \quad (1.68)$$

$$\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2 = \frac{1}{\rho^2} + \frac{\kappa}{3} \left(\frac{\phi'^2}{2} - V(\phi)\right) \quad (1.69)$$

non ξ -rekiko deribatuak primen bitartez adierazi ditugun.

Azken ekuazioei buruzko pare bat iruzkin garrantzitsu eman behar ditugu. Lehenik, kontuan edukitzekoa da lehenengo adierazpena kasu ez-grabitazionaleko (1.60) higidura-ekuazioa dugula, baldin eta $\rho(\xi) = \xi$ badugu, alegia, (1.67) metrika euklidearra laua denean. Gainera, orokorrean, (1.68) ekuazioko bigarren terminoak ez du marruskadurarik sortuko beti, ρ' negatiboa izan liteke eta. Horrenbestez, problema honen soluzioen existentzia ezin izango dugu motz/luze argudioaren bidez frogatu.

Bestalde, azpimarragarria da espazio-denbora euklidearraren topologia funtsezkoa izango dela sistemak ahalbidetzen dituen transizioak aztertzeko. Hain zuzen ere, de Sitterretik de Sitterreko transizioen kasuan, bai sasihutsaren bai erabateko hutsaren topologia 4-esferarena denez (koordinatu euklidearretan), erabateko hutsetik sasihutserako goranzko tuneleatzeak gerta litezke [81, 82]. Zehatzago esanda, burbuilaren eta hondoaren geometria euklidearra itxia denez, sasihutsez osatutako hondoaren integrala beti izango da finitua, erabateko hutsaren potentziala sasihutsarena baino altuagoa bada ere (beraz, horrelako burbuilak osatzeko probabilitatea ez-nulua izango da). Soka-Teoriaren Paisaiaren ikuspuntutik, mekanismo “birziklatzaile” horren bidez potentzial izugarri handi honen hutsak populatzeko baliagarria izango zaigu, edonolako hutsez osatutako burbuilak sortzeko. Hartara, grabitatea kontuan hartzeak potentzialaren hainbat minimoen esplorazioa ahalbidetu lezake, kasu ez-grabitazionalak erabat derrigortzen dituenak.

Soluzio lorentziarraren ezaugarriak

Ekuazio euklidearren soluzio bat aurkitu ondoren, denbora irudikaria erreal bihurtu behar dugu Wick-biraketa baten bitartez. Ereku eskalarren jokabidea argi-konoaren barnealdean eta kanpoaldean kasu ez-grabitazionalean bezala darrai, hots, eremu konstanteko gainazalak hiperboloideak izango dira, denbora motako eta espazio motako normalak dituztenak, hurrenez hurren, jatorriko argi-konoa horien asintota delarik (ikus 1.3 irudia). Berrito ere, soluzio euklidearraren $O(4)$ simetriaren ondorio zuzena dugu portaera hori, denbora erreala erabiltzerakoan $O(3, 1)$ aldaezintasunean bihurtzen baita simetria hori.

Burbuilaren barnealdeari dagokionez, problemaren simetriek eremu konstanteko gainazal hiperbolikoak sorrarazten dituzte; horrenbestez, simetria hori errespetatzen duen foliazioa oso erabilgarria izango zaigu. Hain zuzen ere, soluzio euklidarraren Wick-biraketa bideratu ondoren, eta profila argi-konoaren barnealdera analitikoki jarraituz, horren metrika

hauxe dugu [69, 72]:

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 dH_3^2 \quad (1.70)$$

non dH_3^2 dugun denbora motako bektore normala duen hiperboloidearen gainazal-elementua. Higiduraren ekuazioak

$$\ddot{\phi} + \frac{3\dot{a}}{a}\dot{\phi} = -\frac{dV}{d\phi} \quad (1.71)$$

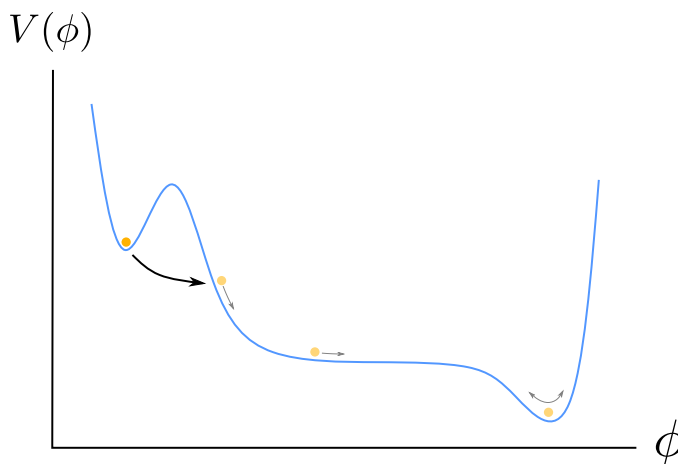
$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{\kappa}{3} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi)\right) \quad (1.72)$$

ditugu, non t -rekiko deribatuak puntuen bidez adierazi ditugun. Argi dago (1.70) adierazpena FRW metrika irekia dela, beraz, Friedmannen ekuazioa izango da (1.72), eremu eskalar baten arabera eta $k = -1$ duena. Gure Unibertsoa horrelako burbuila baten barnealdea bada, homogeneousuna eta isotropia inposatzearen ondorio zuzena izango da eremu konstanteko gainazalak denbora konstantekoak izango direla ere. Horren ondorioz, burbuila horren barnean kokatzen den behatzaile batek antzemango duen metrika FRW motakoa eta irekia izan beharko du. Azken baieztapen hori edonolako Coleman-deLuccia tuneleatzeen iragarpen orokorra da.

Inflazioa eta Multibertsoa

Arestiko (1.72) adierazpena ikusita, Sasihutsaren Iraungitzeak aplikazio kosmologikoak izan lituzkeela badirudi. Hain zuzen ere, tuneleatze-mekanismo hori eredu kosmologikoen azterketan funtsezkoa izan da, Alan Guthen proposatutako Unibertso Goiztiarraren inflazioa [83] horien aitzindaria izaki. Laburki, Guthen proposamenaren arabera, Unibertsoaren hastapenetan fase esponenzialki hedatzailea gertatu zen; horrek Unibertsoa erabat lautu zuen (lokalki, behintzat) eta guztiz homogeneousatu. Horrelako hedapen-fasea bideratu daiteke, adibidez, eremu eskalar baten existentzia suposatuz, haren potentzialaren $V(\phi_{fv})$ altuerako sasihutsean diharduelarik. Fase inflazionarioa guztiz gelditeke erabateko hutsaren burbuilak elkarrekin perkolatuko balute, euren barnealdeko potentziala gure gaur eguneko konstante kosmologikoa dela. Aitzitik, eredu sinple hori ez dela tinkoa frogatu zen [83, 84], izan ere, besteak beste, tuneleatze-tasa txikiegia da burbuilen perkolazioa bideratzeko. Hori ez ezik, gure Unibertsoa burbuila horietako bakar batez osatuta balego ere, Friedmannen ekuazioen kurbadura terminoa erabat nagusituko litzateke, egungo behaketekin bat ez datorrena (1.2(a) irudiko motako potentzialak aztertzerakoan, behintzat).

Mekanismo inflazionarioen ikerketa erabat hedatu da Guthen eredia argitaratu zenetik (ikus, adibidez, [40, 85, 86] inflazioaren hastapenak eta eredu inflazionarioak berrikusteko). Azken hamarkadetan, Soka-Teoriaren Paisaiaren inguruko interesak bultzatu du unibertso inflazionarioen bilaketa eta hutsen arteko trantsizio kuantikoen ikerketa (ikus puntu kosmologikotik) [87]. Sasihutsaren iraungitzea eta slow-roll motako fase inflazionarioa barreiatzen dituen potentziala [82] dugu 1.4 irudikoa. Horrelako potentzialak Paisaian aurki litezkeela argudiatu dezakegu, honen zabaltasuna dela eta. Hartara, gure Unibertsoa huts-iraungitze baten emaitza dela kontsideratu genezake, alegia, tuneleatze-prozesu baten bidez sortutako



1.4 irudia: Potentzial baten adibidea, zeinetan hasiera batean eremu eskalarra ϕ_{f_0} balioa duen espazio osoan, eta ostean potentzial-langa tuneleatuz erabateko hutseko burbuila sortzen duen. Ondoren, burbuilaren barnealdeko eremuak slow-roll inflazio-fasea pairatuko du potentzial-lautadan zehar. Horrelako potentzialak Paisaian aurki litezke.

erabateko hutseko burbuila. Mekanismo horretan, homogeneitate eta lautasan problemak slow-roll potentzial inflazionario baten bidez ebatzi genitzake, inflazioak e-fold kopuru jakin batez mantenduz burbuila osatu *ondoren*. Hain zuzen ere, 5. kapitulu horrelako potentzialak eraikiko ditugu eremu biko ereduetan, egungo parametro inflazionarioekin bat datozenak. Eredu horietan burbuilez osatutako fraktal gisako egitura baten burbuila bat izan liteke gure Unibertsoa [82]. Horrelako egiturari literaturan *Multibertso* deritza [88, 89].

Lehen esan dugun bezala, sasihutsaren iraungitzearen bidez sortutako unibertsoak FRW geometriaren bidez deskribatu behar ditugu, eremu eskalarrak burbuilaren barnean duen $O(3, 1)$ simetria dela eta. Horrelako unibertsoak literaturan kontsideratu izan dira ikuspuntu fenomenologikotik [90–92], eta foliazio irekia egiaztatzeke proposamenak egin dira, etorkizunean bideragarriak izan litezkeenak, mikrouhinen hondo kosmikoaren ℓ baxuko multipoloen azterketaren bidez.¹⁷

Kapitulu honetan aztertu dugu Soka-Teoria gure Unibertsoarekin bat egiteko, 6 (edo 7) dimentsio trinkotu beharko ditugula; horren eraginez, ehunka modulu geometriko sorraraziko ditugu. Modulu horiek egonkortzeko, teoriako hainbat osagai erabili ditugu (fluxuak eta branak besteak beste), eta horiekin moduluen potentziala sortu dugu, Paisaia delakoa. Tesiaren lehenengo kapituluetan moduluen egonkortetan bideratu ditugun aurrerapenak deskribatuko ditugu xehetasun osoz. Zehatzago esanda, egitura konplexuaren modulu guztiak egonkortzeko analisi berriak aurkeztuko ditugu, eta mekanismo horien bidez emango diren masa-espektroen ezaugarriak deskribatu. Horren ondoren, Kähler moduluen inguruko eztabaida egingo dugu, zeharo ikertutako eredu batean ($\mathbb{W}\mathbb{P}^4_{[1,1,1,6,9]}$ espazio proiektiboaren

¹⁷ Metodo horren (edo bestelakoren) bidez neurtutako kurbadura espaziala itxia izango balitz, Paisaian emandako Coleman-deLuccia motako tuneleatze baten bidez sortutako unibertsoaren proposamena bertan bera geratu litzateke. Haatik, WKB metodoen berriki idatzitako berrikuspen baten arabera [93], Colemanen eta de Lucciaren emaitzetan ez bezala [69], unibertso itxiak gerta litezke horrelako tuneleatze prozesuetan. Azken ideia hori guztiz garaturik ez dagoen arren, Paisaian soilik unibertso irekiak gerta daitezkeen kontsentsua zalantzan jartzen du.

hipergainazalean, hain zuzen ere), eta gure emaitzen alderaketa egingo dugu de Sitter zingira aieruarekin eta bestelako murrizketa fenomenologikoekin. Tesiaren bigarren zatian, ikuspuntu kosmologikotik aztertuko dugu Paisaia, Sasihutsaren Iraungitzean eta inflazioan arreta jarritz Ausazko Gaustar Paisaieran. Azken horiek jatorrizko problemaren bertsio oso sinplifikatuak diren arren, oso eredu onak suertatuko zaizkigu dimentsio handiko potentzialen konplexutasuna ikertzeko. Azkenik, fluxuak eta branak erabiltzen dituen huts-iraungitze mekanismo bat aztertuko dugu, Paisai errealistago batean tuneleatze kuantikoak bideratzeko aproposagoa dena, eta kapitulu honetan deskribatutako oinarrizko osagaiak erabiltzen dituen.

II. atala

Moduluen egonkortzea

2. kapitulua

Parametro bakarreko ereduen masa-espektro osoa

Soka-Teoriaren Paisaiaren ondorio eta ezaugarriak nagusienak eztabaidatu ditugu aurreko kapituluan. Oraingo honetan, energia baxuko eremu-teoria eraginkorra kalkulatzeko estrategia jakin bat aztertuko dugu; honi esker, teoriaren ehunka moduluak errazago egonkortu ahal izango ditugu. Simetria diskretuak izango dituzte hemen erabiliko ditugun Calabi-Yau barietateak, horiekin modulu-kopuru eraginkorra murriztuko dugu eta eremu-teoria eraginkorraren konputazioa bideragarri bihurtu. Kapitulu honetan, IIB motako fluxu-trinkoketen zuhaitz mailako masa-espektroa ikertuko dugu, Egitura Konplexu Handiko eskualdean, egitura konplexuaren modulu bakarra duten ereduetan. Axiodilatoiaren eta egitura konplexuaren moduluaen zuhaitz mailako espektroa kalkulatu dugu, *baita trunkatutako eremuena ere*, teoria murriztuaren akoplamentuen mende idatzi daitekeena. Gure emaitzen arabera, KKLT prozeduran erabilitako eremuen masak naturalki astunak direla frogatu dugu. Gainera, fenomenologikoki interesgarriak diren beste eszenarioen espektroa ere ikertuko dugu, non grabitinoa baino askoz arinagoak diren moduak aurkituko ditugun. Fluxu-hutsen multzoaren masen probabilitate-banaketak lortuko ditugu ere, eta trinkoketa-ereduarekiko independenteak diren ezaugarriak badaudela ikusiko dugu. Azkenik, gure emaitza guztiak baieztatuko ditugu dimentsio bakarreko zenbakizko adibide batean eraikitako fluxu-huts multzo handi baten bidez.

Kapitulu hau [94] artikuluan oinarritu dugu.

2.1 Sarrera

Aurreko kapituluan esan bezala, Soka-Teoria supersimetrikoen 10 espazio-denbora dimentsioetatik 6 trinkotu behar ditugu. Horrek Paisaiaren Eremu-Teoria Eraginkorraren (ETEaren) analisi fenomenologiko eta kosmologikoak asko zailtzen du. Arazo horietako bat espazio trinkoaren deskribapena ematen duten moduluen kopuru handian datza. Horren ondorioz, ETE osoaren konputazioa izugarri konplexua izan daiteke, eta bakarrik oso eredu sinpleetan lortu izan da. Bestalde, trinkoketa bideratzeko erabili ditzakegun ereduen kopuru handia dugu; horren ondorioz, ezinezkoa da 4 dimentsioko teoriaren huts guztien azterketa analitikoak egitea.

Azken hamarkadetan, hainbat estrategia osagarri bideratu dira arazo tekniko horiek gainditzea xede. Alde batetik, ikertu izan diren eredu garrantzitsuenetan modulu gehienak trunkatu edo integratu daitezke; horietan, ETEa hamar bat eremuk osatzen dute, eta problemaren konputagarritasuna zuzenekoa da [31, 34–36, 45, 95–101]. Eredu horien ondorio ikusgarriak zehazki aztertu daitezke, eta konputazio horiek eredugarri bihurtu dira trinkoketa konplexuagoen analisia bideratzeko. Bestalde, Paisaiaren problemaren beste ikuspuntu bat posiblea dugu, horren estatistikan oinarritzen dena. Hain zuzen ere, 5. kapituluaren ikusiko dugun bezala, ausazko eremu gausstarrak (AEGak) erabili ditzakegu hutsen ezaugarri estatistikoak lortzeko. Paisaia lantzeko modu horrek izugarri erraztu dezake teoria eraginkorraren konputazioak. Azken proposamen horri buruzko xehetasun gehiago jakiteko, ikus [102–118].

Tesiaren zati honetan, Paisaiaren ikuspegi matematikoa aztertuko dugu. Hartara, gure eztabaidaren oinarria izango da anitz aztertu den Paisaren ondorengo domeinua: IIB supersoken Calabi-Yau trinkoketen zuhaitz mailako hutsak, Egitura Konplexu Handiko (EKHko) eskualdean. Paisaiaren ETEaren eskualde hori sakonki aztertu da literaturan jada [11, 21, 119, 120], analitikoki eta fenomenologikoki. Eredu mota horien artean, fenomenologia interesgarria ahalbidetu ditzaketen trinkoketek egitura konplexuaren modulu ugari dituzte eta Kähler motako modulu gutxi (ikus [101]). Hala eta guztiz ere, arestian aipatu dugun bezala, Eremu-Teoria Eraginkor osoaren analisi zehatza guztiz eginezina da orokorrean. Ondorioz, fluxu-hutsen eraikuntza esplizituen oinarria izan ohi dira simetria handiko Calabi-Yau barietateak; horiek, azken batean, egitura konplexuaren moduluen trunkamendu supersimetriko tinkoa ahalbidetzen baitute [45, 96–99, 101]. Trinkoketen simetria-talde horiek naturalki ageri dira, besteak beste, espazio proiektibo konplexuen hipergainazalean; ikus [94] adibide gehiagorako. Eredu horietan, simetriarekiko inbarianteak diren fluxuak bakarrik pizten baldin badira, egitura konplexuaren modulu-kopuru handi bat *hoztu* ahal izango dugu fluxuek sortutako potentzial eskalarraren hutsetan. Beraz, ETEa murriztu ahal izango dugu, hots, eremu gutxi batzuen bidez deskribatu ahal izango da fisika guztia [45, 96–98]. Eredu horien iragarpen fenomenologiko eta kosmologikoak kalkulagarriak dira, behin zuzenketa kuantikoak eta supersimetria-hauste efektuak kontuan hartu direnean *teoria murriztuan*. Aitzitik, trunkatutako eremuen fisika gutxitan aztertu izan da literaturan [99, 101].

Lan honen helburua da trunkatutako modulu-sektorearen ezaugarriak hobeto ulertzea, simetria handiko ereduetan. Garrantzitsua da nabarmentzea trunkatutako moduluak ez direla teoria eraginkorretik integratzen; hain zuzen ere, horrela lortu dezakegun ETEa energia baxuko teoria osoaren *trunkamendu supersimetriko tinkoa* da, zuhaitz mailan behintzat. Horrenbestez, teoria murriztuan agertzen diren moduluen eta izoztutako moduluen artean ez da zertan masa tarte handirik egon behar [121–123]. Izan ere, trunkatutako sektorearen konfigurazioa egonkorra den frogatu daitekeen arren, espektro osoak nahi adina eremu arin izan ditzake. Ondorioz, zuzenketa kuantikoek eta supersimetriaren hausturak eremu horiek takioniko bihurtu litzakete.

Kapitulu honetan mota horretako eredu sinpleenak aztertuko ditugu, hots, murriztutako egitura konplexuaren sektorea modulu bakarrez osatuta dutenak. Nahiz eta barietate horien geometria nahiko murriztailea dirudien, literaturan horien hainbat adibide aurkitu daitezke (ikus, besteak beste, [124–128]). Horrez gain, eredu horien modulu-espazioaren geometria oso ondo aztertu da kasu gehienetan [129–132]; hauen artean, $\mathbb{W}\mathbb{P}_{[1,1,1,1,1]}^4$ hipergainazala dugu, *kintika* delakoa, eta baita horren orokortzeak ere [119, 124, 125, 133]. Hartara, kapitulu

honetan zera frogatuko dugu: trinkoketaren simetriak eta IIB motako teoria eraginkorraren ezaugarriak EKH eskualdean erabiliz besterik ez, zuhaitz mailako masa-espektroa kalkulatu ahal izango dugu axio-dilatoientzat eta egitura konplexuaren modulu-eremu guztientzat, *trunkatutakoak barne*.

Lan honetan lortu ditugun formula analitikoak egiaztatzearen, guk bideratutako ekorketa numeriko batekin konparatu ditugu. Zehazki, IIB motako Soka-Teoriaren $\mathbb{WP}_{[1,1,1,1,4]}^4$ orientatea [124,133] erabili dugu trinkoketa gisa, eta horren zenbakizko fluxu-hutsen ekorketa egin dugu, bertatik lortutako datuen estatistikak kalkulatu ahal izateko. Hipergainazal-familia horrek $h^{2,1} = 149$ dimentsioko egitura konplexuaren modulu-espazioa du; aitzitik, $\mathbb{Z}_8^2 \times \mathbb{Z}_2$ simetriaren puntu finko baten bidez, geometria hori eremu bakarrera murriztu dezakegu era tinkoan. Eredu horren teoria eraginkor murriztua erabiliz, fluxu-huts multzo handia lortu ahal izan dugu, eta horren bitartez ondorengo sekzioetan lortuko ditugun masa-espektroak egiaztatu ahal izan ditugu. Azpimarratzekoa da horrela aurkitu dugun huts bakoitzaren trunkatutako 148 eremuen masak lor ditzakegula gure emaitzak erabiliz, *ETE osora jo beharrik gabe*.

Huts generikoen kasuan, masa-espektroa fluxuen araberakoa da; ondorioz, fluxuekiko independentea den egonkortasun perturbatiboaren karakterizazioa lortzeko, metodo estatistikotara jo behar dugu. Hain zuzen ere, gure analisisa [46,134] lanetan garatutako teknikan oinarritu dugu, horien suposizio bakarra fluxu jarraituen hurbilketa¹ delarik. Metodo horiek erabiliz, masa guztien probabilitate-banaketa analitikoa kalkulatu ahal izan dugu fluxu-huts multzo batentzat, eta horien ezaugarri estatistikoak trinkoketarekiko independenteak direla frogatu dugu. Horrez gain, $\mathbb{WP}_{[1,1,1,1,4]}^4$ ereduaren masen banaketa “enpirikoa” (hau da, zenbakizko tekniken bidez lortu duguna) eta gure aurreikuspen analitikoa alderatu ditugu; hartara, bien arteko adostasuna berretsi dugu ETEaren eta fluxu jarraituen hurbilpenaren baliozkotasun eskualdean.

Hona hemen kapitulu honen egitura. 2.2 sekzioan, Egitura Konplexu Handiko eskualdearen teoria eraginkorra aztertuko dugu IIB motako trinkoketetan, eta zuhaitz mailako masa-espektroa kalkulatzeko beharrezkoak izango zaizkigun formulak lortuko ditugu. 2.3 sekzioan, egitura konplexuaren modulu-espazioaren murrizketa eraginkorra errepasatuko dugu, simetria talde diskretua onartzen duten Calabi-Yau barietateetan. Gainera, simetria horiek matrize hessianean eta fermioi-masen matrizean inposatzen dituzten murrizketak lortuko ditugu. Kapitulu honetako emaitza garrantzitsuenak 2.4 sekzioan aurkitu daitezke; bertan, zuhaitz mailako masa-espektroa lortuko dugu, kapitulu honetan aztertuko ditugun parametro bakarreko ereduaren kasuan. 2.5 sekzioan aurkeztuko dugu IIB motako $\mathbb{WP}_{[1,1,1,1,4]}^4$ Calabi-Yau ereduaren oinarritzen den ETEa. Bestalde, 2.6 sekzioan gure ekorketa numerikoaren bidez lortutako fluxu-huts multzoen espektroa landuko dugu, aurreko trinkoketa erabiliz. Azkenik, gure ondorioak 2.7 sekzioan aurkeztuko ditugu.

¹Izenak dioen bezala, hurbilketa horren funtsa (1.33) adierazpenean definitutako fluxuak jarraitutzat hartzean datza. Horri buruzko gorabeherak 2.4 sekzioan eta C eranskinean deskribatuko ditugu xehetasun osoz.

2.2 Egitura Konplexu Handiko fluxu-hutsak

2.2.1 Teoria eraginkorra

Kapituluaeren sarreran aipatu dugun bezala, IIB motako Soka-Teoriaren trinkoketen Egitura Konplexu Handiko eskualdea [30] aztertuko dugu kapitulu honetan. Eredu horren teoria eraginkorra ondorengo aurrepotentziala erabiliz lor daiteke:

$$\mathcal{F} = \frac{i}{6}\kappa_{ijk}z^i z^j z^k + \frac{1}{2}\kappa_{ij}z^i z^j + i\kappa_i z^i + \frac{1}{2}\kappa_0 + \mathcal{F}_{\text{inst}}, \quad (2.1)$$

non z^i aldagaiek egitura konplexuaren moduluak adierazten dituzten, 1.2.2 eta 1.3 sekzioetan definitutakoak. Bestalde, κ_{ijk} , κ_{ij} eta κ_i zenbakizko konstanteak ditugu, M_3 -ren ispilu-barietatearen topologiaren arabekoak. Zehazki, arrazoi historikoak direla eta, κ_{ijk} koefizienteei *Yukawa akoplamendu* klasikoak deritze. Bestalde, κ_0 konstantea α' erradiazio bidezko zuzenketetan du jatorria, eta Calabi-Yau barietatearen Euler zenbakiaren funtzioan idatzi daiteke

$$\kappa_0 = i \frac{\zeta(3)}{(2\pi)^3} \chi(M_3), \quad \chi(M_3) = 2(h^{1,1} - h^{2,1}), \quad (2.2)$$

non ζ Riemannen zeta funtzioa den. Azkenik, sokaren mundu-orriaren instantoi-zuzenketak $\mathcal{F}_{\text{inst}}$ terminoan barneratu ditugu. Horiek horrela adierazi daitezke [101]:

$$\mathcal{F}_{\text{inst}} = -\frac{i}{(2\pi)^3} \sum_{\mathbf{d}} n_{\mathbf{d}} \text{Li}_3[e^{-2\pi d_i z^i}]. \quad (2.3)$$

Ekuazio horren $n_{\mathbf{d}}$ zenbaki osoak genus nuluko Gopakumar-Vafa inbarianteak dira, $d^i \in \mathbb{Z}^+$ bektorearen arabera izendatuta, eta $\text{Li}_3(q)$ funtzioa $\text{Li}_p(q) = \sum_{k>0} \frac{q^k}{k^p}$ polilogaritmoaren kasu konkretua da. EKH eskualdean $\mathcal{F}_{\text{inst}}$ terminoaren ekarpena arbuigarria da, horrenbestez ondorengo kalkuluetan ez dugu kontuan hartuko.²

Aurrepotentzialaren menpe idatziz Kähler potentziala, 1.3 sekzioan lortutako emaitzak erabiliz eta instantoiaren ekarpena arbuizatuz, K_{cs} horrela idatzi dezakegu:

$$K_{cs} = -\log\left(\frac{1}{6}\kappa_{ijk}(z+\bar{z})^i(z+\bar{z})^j(z+\bar{z})^k - 2\text{Im}(\kappa_0)\right). \quad (2.4)$$

Horrekin lortutako metrika, hots (1.22), erreala eta blokeka diagonal dela zuzenean frogatu daiteke. Zehazki,

$$K_{\tau\bar{\tau}} = \frac{1}{2(\text{Im } \tau)^2},$$

$$K_{i\bar{j}} = -\hat{\kappa}_{ijk}(z+\bar{z})^k + \frac{1}{4}\hat{\kappa}_{ilm}\hat{\kappa}_{jnp}(z+\bar{z})^l(z+\bar{z})^m(z+\bar{z})^n(z+\bar{z})^p, \quad (2.5)$$

²Gogoan izan, hala ere, zuzenketa hauek aintzat hartu beharko ditugula ostera, aurrepotentzial horren bidez lortutako emaitza analitikoak zenbakizko ekorketarekin alderatzerakoan. Oro har, zenbakizko emaitzek zuzenketa instantoiko txikiak izan beharko dituzte aurreikuspen teorikoekin alderatu ahal izateko.

non azpi-indizeek Kähler funtzioarekiko deribatuak adierazten dituzten, hots, $K_{\tau\bar{\tau}} \equiv \partial_{\tau}\partial_{\bar{\tau}}K$ eta $K_{i\bar{j}} \equiv \partial_i\partial_{\bar{j}}K$, eta $\mathring{\kappa}_{ijk} \equiv e^{Kcs}\kappa_{ijk}$ terminoei *berreskalatutako Yukawa akoplamenduak* deritzegun [119].

2.2.2 zuhaitz mailako hutsen masa-espektroa

Kapitulu honen helburu nagusia eskalarik gabeko huts supersimetrikoen masa-espektroa lortzea da. Huts horiek $\{\tau_c, z_c^i\}$ tuplen bidez adieraziko ditugu eta (1.37) ekuazioak betetzen dituzte. Oraingo honetan, puntu horietako (1.36) potentzialaren hessiarraren ezaugarri garrantzitsuenak deskribatuko ditugu, matrize horren balio propioak lortzea xede. Informazio hori ezinbestekoa izango zaigu gure analisirako; izan ere, modulu-eremuen zuhaitz mailako masak zehaztuko ditu.

Eskalarik gabeko hutsetan potentzial eskalarra identikoki nulua da, Kähler moduluen konfigurazioa edonolokoa dela ere; ondorioz, Kähler moduluak V_{tree} -ren norabide lauak izango dira. Konfigurazio horien kitzikapenak aztertu ahal izateko, beraz, axio-dilatoi/egitura konplexu-sektorean jarriko dugu gure arreta, Kähler modulu guztien masak nulua izango direlako.³ Horrez gain, konputazioak sinplifikatzearen, gure problemaren ageri diren eremuak birdefinituko ditugu, eremu-espazioaren metrika $\{\tau_c, z_c^i\}$ hutsetan era kanonikoa idazteko. Hain zuzen ere, (2.5) Kähler metrika erreala eta blokeka diagonal denez, egitura konplexuko eremuak horrela birdefinituko ditugu: $z^a = e_i^a z^i$, non $e_i^a \in \text{GL}(h^{2,1}, \mathbb{R})$ dugun, eta

$$(e^{-1})_a^i (e^{-1})_b^j K_{i\bar{j}} \Big|_{\tau_c z_c^i} = \delta_{ab} \quad (2.6)$$

den, definizioz, non $a, b = 1, \dots, h^{2,1}$ diren. Hartara, $e_a^i \equiv (e^{-1})_a^i$ matrizeak $K_{i\bar{j}}$ metrikaren vielbein-oinarri *errealarekin* identifikatu daitezke. Noski, honek ez du guztiz finkatuko e_a^i matrizea aukeratzeko dugun askatasuna, izan ere $z^a \rightarrow \Lambda_b^a z^b$ (edo, bestela idatzita, $e_i^a \rightarrow \Lambda_b^a e_i^b$) birdefinitu ditzakegu metrikaren egitura kanonikoa mantenduz, $\Lambda \in \text{SO}(h^{2,1})$ baldin bada.

Era berean, $e_0^{\tau} = i(\tau - \bar{\tau})$ vielbein erreala erabili dezakegu axio-dilatoiaren normalizazio kanonikoa lortzeko $\{\tau_c, z_c^i\}$ hutsean. Bestalde, A indizea erabiliko dugu, non $A = 0, \dots, h^{2,1}$, axio-dilatoia ($A = 0$) eta egitura konplexuko eremu ($A \geq 1$) normalizatuak batera adierazteko. Horrenbestez, Kähler metrikaren axio-dilatoi/egitura konplexu-sektorea $K_{A\bar{B}} = \delta_{A\bar{B}}$ forma izango du eskalarik gabeko hutsetan ebaluatzerakoan.

Kanonikoa denez eremu-espazioaren metrika, erraz lortu dezakegu (1.36) potentzial eskalarraren hessiarrak $\{\tau_c, z_c^i\}$ eskalarik gabeko hutsetan duen egitura:⁴

$$\mathcal{H} \equiv \begin{pmatrix} \nabla_A \nabla_{\bar{B}} V & \nabla_A \nabla_B V \\ \nabla_{\bar{A}} \nabla_{\bar{B}} V & \nabla_{\bar{A}} \nabla_B V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{AC} \bar{Z}_{\bar{B}}^C + \delta_{A\bar{B}} m_{3/2}^2 & 2m_{3/2} Z_{AB} e^{-i\alpha_W} \\ 2m_{3/2} \bar{Z}_{\bar{A}\bar{B}} e^{i\alpha_W} & \bar{Z}_{\bar{A}C} Z_{\bar{B}}^C + \delta_{\bar{A}B} m_{3/2}^2 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

non $m_{3/2} \equiv e^{K/2}|W|$ grabitinoaren masa den, $\alpha_W = \arg(W)$ fluxu-superpotentzialaren fasea

³Noski, horrela lortutako eredu fenomenologikoki zentzugabea da; Kähler moduluen egonkorketa 4. kapitulurako utziko dugu. Ikus [31, 35] xehetasun gehiagorako.

⁴Aldagaien indizeak $\delta^{A\bar{B}}$ eta $\delta_{\bar{A}B}$ metrika kanonikoekin igo eta jaitsi daitezke.

den eta $Z_{AB} \equiv e^{K/2} D_A D_B W$ definitu dugun. Halaber, hessiarra horrela berridatzi dezakegu

$$\mathcal{H} = \left(m_{3/2} \mathbb{1} + \mathcal{M} \right)^2 \quad \text{non} \quad \mathcal{M} \equiv \begin{pmatrix} 0 & Z_{AB} e^{-i\alpha_W} \\ \bar{Z}_{\bar{A}\bar{B}} e^{i\alpha_W} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Eremu-espazioaren metrika era kanonikoan idatzita, \mathcal{H} matrizearen balio propioak axio-dilatatoiaren eta egitura konplexuko sektorearen $2(h^{2,1} + 1)$ eremu eskalar errealeen masen karratuekin identifikatu daiteke, $\{\tau_c, z_c^i\}$ hutsetan. Ondorioz, \mathcal{H} hessiarren espektroa lortzeko, \mathcal{M} matrizea diagonalizatu behar dugu, besterik ez. Azken hori fermioi-masen matrizearekin bat dator (ikus [135]). Are gehiago, \mathcal{M} -ren balio propioak binaka eta aurkako zeinuekin ageri direnez, $\pm m_\lambda$, zuhaitz mailako masa-espektroa haxe dugu [123]:

$$\mu_{\pm\lambda}^2 = (m_{3/2} \pm m_\lambda)^2 \geq 0, \quad (2.9)$$

non $\lambda = 0, \dots, h^{2,1}$. Hartara, $\mu_{\pm\lambda}^2$ masa karratuen positibotasuna dela eta, eskalarik gabeko hutsak perturbatiboki egonkorak izango dira. Azken baieztapen hori beste era batean ere frogatu dezakegu, (1.36) zuhaitz mailako potentziala positibo erdidefinitua dela nabarituz, hain zuzen ere, eta eskalarik gabeko hutsetan potentziala nulua dela jakinez.

Azken batean, m_λ fermioi-masak (eta, ondorioz, masa-espektro eskalarra) lortzeko modurik errazena, $(h^{2,1} + 1) \times (h^{2,1} + 1)$ dimentsioko $(ZZ^\dagger)_{AB} \equiv Z_{AC} \bar{Z}_{\bar{B}}^C$ matrize hermitiarra erabiltzea da. Izan ere, horren $h^{2,1} + 1$ balio propioak, m_λ^2 , eta

$$\mathcal{M}^2 = \begin{pmatrix} Z_{AC} \bar{Z}_{\bar{B}}^C & 0 \\ 0 & \bar{Z}_{\bar{A}}^C Z_{CB} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

matrizearenak berdinak izango dira. Z_{AB} matrizearen egiturari dagokionez, zuzenean frogatu dezakegu, eskalarik gabeko hutsetan, $Z_{00} = e^{K/2} (e_0^\tau)^2 D_\tau D_\tau W = 0$ izango dela. Are gehiago, gure erdua (2.1) motako aurrepotentzial baten mende definitzerakoan, kalkuluak zeharo sinplifikatu daitezke ondorengo identitatea erabiliz gero [21, 46]:

$$Z_{ij} = -(\tau - \bar{\tau}) e^{K_{cs}} \kappa_{ijk} K^{k\bar{l}} \bar{Z}_{\bar{l}\bar{i}}. \quad (2.11)$$

Azken adierazpen hori z^i eremuen birdefinizioekiko independentea den forma erabiliz idatzi dugu, literaturan aurki daitezkeen lanekin erraz konparatzeko. Kanonikoki normalizatu ditugun eremuak erabiliz, eta berreskalatutako $\hat{\kappa}_{abc} = e^{K_{cs}} \kappa_{abc}$ Yukawa akoplamenduen definizioa erabiliz, aurreko emaitza berridatzi dezakegu:

$$Z_{ab} = i \hat{\kappa}_{abc} \bar{Z}_{0c}. \quad (2.12)$$

Era berean, (1.42) zapaburu murrizketa idatzi dezakegu grabitinoaren itxarondako masaren balioaren eta Z_{0a} kantitateen arabera; hain zuzen ere, eskalarik gabeko hutsetan ondorengo dugu (ikus A eranskina):

$$0 \leq 4\pi \mathcal{V}^2 (m_{3/2}^2 + |Z_{0a}|^2) = N_{\text{flux}} \leq L. \quad (2.13)$$

Laburbilduz, eskalarik gabeko hutsen $\mu_{\pm\lambda}^2$ masa-espektro eskalarra grabitinoaren ma-

saren, Z_{0a} kantitateen eta kanonikoki normalizatu eta berreskalatutako $\mathring{\kappa}_{abc}$ Yukawa akoplamendeun mende idatz daiteke. Horretarako (2.12) adierazpena erabili beharko dugu, eta ZZ^\dagger matrizea diagonalizatu. Hurrengo sekzioan, simetria-talde diskretua onartzen duten Calabi-Yau trinkoketak aztertuko ditugu. Simetria horiek errespetatzen dituzten eskalarik gabeko hutsek Yukawa akoplamenduen eta Z_{0a} kantitateen egitura zorrozki murriztuko dituzte.

2.3 Simetria handiko fluxu-hutsak

Sekzio honen xedea dugu isometria talde global eta diskretu batekiko inbariantek diren Calabi-Yau geometrien azterketa. Hain zuzen ere, [96] erreferentzian aipatu bezala, simetria hauekiko inbariantek diren fluxuak soilik piztuz gero, energia baxuko ekintzaren egitura konplexuaren moduluen azpimultzo baten *trunkamendu supersimetrikoa* bideratu ahal izango dugu. Zehatzago esanda, kasu horretan espazio-denboraren isometriek egitura konplexuaren eremuak ez-tribialki transformatu dituzte, energia baxuko supergrabitare ekintza horiekiko inbariantea delarik. Ondorioz, egitura konplexuaren modulu-espazioaren murrizketaren bitartez definitzen da teoriaren trunkamendu tinkoa, simetria horren puntu finkoarekiko; hau da, eremuen azpimultzo bat *izoztuko* dugu puntu finko horretan. Trunkamenduaren tinkotasunak ziurtatzen du eremu horiek izoztu eta gero geratzen zaigun teoria murriztuaren edozein soluzioak teoria osoa ere ebatziko duela. Zehazki, potentzial eskalar murriztuaren puntu kritikoak teoria eraginkor *osoaren* puntu kritikoak ere izango dira. Horrez gain, trunkamendua bizirauten duen eremuak puntu kritiko supersimetriko batean egonkortuz gero, egitura konplexuaren sektore osoa supersimetrikoa izango da [96, 99].

Ondorengoan, Calabi-Yau geometriaren simetria diskretuak nola erabili ditzakegun aztertuko dugu, egitura konplexuko eremuen sektore baten trunkamendua bideratzeko. Simetria horiek inposatzen dituzten murrizketak ere kalkulatu ditugu, horrela lortutako teoria murriztuaren akoplamenduetan.

2.3.1 Fluxu inbariantek eta energia baxuko simetriak

Sarreran aipatu dugun bezala, hainbat trinkoketen Calabi-Yau geometria inbariantea da \mathcal{G} transformazio-talde diskretu baten ekintzarekiko. Transformazio horiek egitura konplexuaren eremuetan badute eragina, $z^i \rightarrow \hat{z}^i$, eta, beraz, $\Pi(z^i)$ periodo-bektorea ere horien ondorioz aldatuko da. Simetria horiekiko inbariante mantentzen denez Calabi-Yau geometria, talde-elementu horiek modulu-espazioaren geometria ere inbariante utziko dute. Horren arabera, $g \in \mathcal{G}$ motako transformazioaren ekintza periodo-bektorean horrelakoa izan behar du:

$$\Pi(z^i) \longrightarrow \Pi(\hat{z}^i) = e^{\Lambda_g(z)} S_g \cdot \Pi(z^i), \quad (2.14)$$

non $\Lambda_g(z^a)$ egitura konplexuko eremuen funtzio holomorfoa dugun eta S_g matrize konstantea $\text{Sp}(2h^{2,1} + 2, \mathbb{Z})$ taldeko kidea den, bi horiek g elementuaren menpekoak izaki. Bestalde, 3-forma fluxuak pizterakoan, \mathcal{G} taldearen akzioarekiko inbariante mantentzeko ekintza eraginkorra, (1.38) adierazpena bezala transformatu beharko da $N = f - \tau h$ fluxu-bektorea.

Hartara, erraz frogatu daiteke $g \in \mathcal{G}$ transformazioekiko, g -ren menpekota den Kähler transformazioa pairatuko dutela K_{cs} Kähler potentziala eta W superpotentziala:

$$K_{cs}(\hat{z}^i, \hat{\bar{z}}^i) = K_{cs}(z^i, \bar{z}^i) + \Lambda_g(z^i) + \bar{\Lambda}_g(\bar{z}^i), \quad W_{\hat{f}, \hat{h}}(\hat{z}^i) = e^{-\Lambda_g(z)} W_{f, h}(z^i). \quad (2.15)$$

Superpotentzialaren (f, h) fluxu-bektoreekiko menpekotasuna esplizituki adierazi dugu azken ekuazioan, eta baita horien balio transformatuak, (\hat{f}, \hat{h}) , (1.38)-ren ondorioz. Aitzitik, aztertu nahi ditugun \mathcal{G} taldeak diskretuak dira, eta orden finitukoak; horrenbestez, betiere posible dugu Kähler gauge bat aukeratzea, non K_{cs} eta W eskalarrak bezala transformatzen diren \mathcal{G} taldearekiko⁵ (ikus [136]), hau da,

$$K_{cs}(\hat{z}^i, \hat{\bar{z}}^i) = K_{cs}(z^i, \bar{z}^i), \quad W_{\hat{f}, \hat{h}}(\hat{z}^i) = W_{f, h}(z^i). \quad (2.16)$$

Espero litekeenaren kontra, Kähler potentzialaren eta fluxu-superpotentzialaren (2.16) aldaezintasuna ikusita, horiek ez dira izango energia baxuko teoria eraginkorraren simetriak, modulu-eremuei dagokienez behintzat [98]. Hain zuzen ere, fluxuen aukera bakoitzak moduluen teoria eraginkorra definitzen du, non akoplamendu konstante gisa ageri diren (f, h) osoko fluxuak (ikus [137]). Hortaz, \mathcal{G} taldearen akzioarekiko, fluxuak (ETEaren akoplamenduak, azken finean) orokorrean ez-tribialki aldatzen direnez, hori ezin izango dugu moduluen ETEaren energia baxuko simetriatzat eduki. Haatik, (1.38) transformazioekiko inbariantek diren $N = f - \tau h$ fluxu-konfigurazioetara murrizten badugu gure azterketa, \mathcal{G} taldea energia-baxuko teoriaren simetria izango da, fluxuen aukera horientzat behintzat. Hain zuzen ere, (2.16) adierazpena horrela idatzi dezakegu inbariantea den fluxu-sorta batentzat:

$$K_{cs}(\hat{z}^i, \hat{\bar{z}}^i) = K_{cs}(z^i, \bar{z}^i), \quad W_{f, h}(\hat{z}^i) = W_{f, h}(z^i). \quad (2.17)$$

Hartara, moduluen energia baxuko supergrabitare-teoria inbariantea izango \mathcal{G} taldearen ekintzarekiko.

Hemendik aurrera, fluxuak \mathcal{G} taldearekiko inbariantek direla suposatuko dugu, eta superpotentzialaren (f, h) azpi-indizeak ez ditugu idatziko, notazioa erraztearren.

2.3.2 Modulu-espazioaren trunkamendu tinkoa

Ondorengo honetan aztertuko dugu \mathcal{G} simetria taldea nola erabili dezakegun eskalarik gabeko (1.37) ekuazioen soluzioak erraz lortzeko. Orokorrean, \mathcal{G} taldea emanda, egitura konplexuaren eremuak bi taldetan banatu ditzakegu, $z^i = \{z^\alpha, w^{\alpha'}\}$: alde batetik, simetria-taldearekiko inbariantek diren eremuak izango ditugu, z^α , non $\alpha = 1, \dots, h_{\text{red}}^{2,1}$ dugun; bestetik, simetriarekiko ez-tribialki transformatzen diren eremuak ditugu, hots, $w^{\alpha'} \rightarrow \hat{w}^{\alpha'}$, non $\alpha' = h_{\text{red}}^{2,1} + 1, \dots, h^{2,1}$ den.

Horren harira, demagun \mathcal{G} simetria taldeak puntu finko bat duela *modulu-espazioan*, alegia, eremuen $w_*^{\alpha'}$ konfigurazio bat asumitu dugu non $\hat{w}_*^{\alpha'} = w_*^{\alpha'}$ baldintza betetzen den.

⁵Kähler-inbariantea den gauge hori, $K_{cs}^{\text{inv}} = K_{cs} + \Lambda^{\text{inv}}(z) + \bar{\Lambda}^{\text{inv}}(\bar{z})$, erraz lortu daiteke. Izan ere, $g: z^i \rightarrow \hat{z}^i$ motako transformazioaren eragina ekiditeko $\Lambda^{\text{inv}}(\hat{z}) = \Lambda^{\text{inv}}(z) - \Lambda_g(z)$ izan behar dugu. Simetria-taldearen aljebra landuz, $\Lambda^{\text{inv}}(z) = \frac{1}{|\mathcal{G}|} \sum_{g \in \mathcal{G}} \Lambda_g(z)$ kalkulatu daiteke, non $|\mathcal{G}|$ konstantea \mathcal{G} taldearen ordena den.

Horren ondorio zuzena da $w^{\alpha'}$ eremu aldagarrien norabideetan nuluak izango direla V potentzial eskalarraren eta Kähler potentzialaren deribatuak:

$$\partial_{w^{\alpha'}} V = 0, \quad K_{w^{\alpha'}} = 0, \quad z^i = (z^\alpha, w_*^{\alpha'}) \text{ puntuan } \tau, z^\alpha \text{ guztientzat.} \quad (2.18)$$

Azken ekuazio horiek erraz frogatu daitezke. Izan ere, fluxu inbariantek soilik pizten baditugu, nahiz V potentziala nahiz Kähler potentziala eremu eskalarrak bezala transformatu dira \mathcal{G} -ren ekintzarekiko. Horrenbestez, bektoreak bezala transformatu dira $\partial_{z^i} V$ eta K_i . Potentzial eskalarraren gradienteak, adibidez, modulu-espazioaren edozein puntutan ebaluatuz gero, horrela transformatu da:

$$\partial_{w^{\alpha'}} V(z^\alpha, w^{\alpha'}) = \frac{\partial \hat{w}^{\beta'}}{\partial w^{\alpha'}} \partial_{\hat{w}^{\beta'}} V(z^\alpha, \hat{w}^{\beta'}). \quad (2.19)$$

Simetriaren puntu finkoan, non $\hat{w}_*^{\alpha'} = w_*^{\alpha'}$ betetzen den, aurreko adierazpena $\partial_{w^{\alpha'}} V(z^\alpha, w_*^{\alpha'})$ aldagaien ekuazio-sistematzat jo dezagu. Haatik, sistema honek (2.18) soluzio tribiala besterik ez du onartzen; izan ere, puntu finko horretatik at $w^{\alpha'}$ eremu guztiak ez-tribialki transformatu dira, arestian aipatu bezala. Gainera, aurreko eztabaidan dilatoiaren eta \mathcal{G} -inbariantek diren eremuen itxarondako balioek garrantzirik ez dutenez, puntu finkoa superpotentzialaren puntu geldikorra izango da beti, (τ, z^α) eremu-konfigurazioa edonola ere. Nahiz eta gure argudioa Kähler gauge zehatz batean oinarritu dugun (azken batean, K_{cs} eta W eskalarrak bezala transformatu direla onartu baitugu, ikus (2.16)), gure ondorioak Kähler-inbariantek dira. Beste hainbat irizpide jarraituz ondorio berdintsuetara iritsi dira, besteak beste, [96, 99, 101] erreferentziak.

Bistan da (2.18) adierazpeneko lehen baldintzan \mathcal{G} simetria-taldearen puntu finkoak potentzial eskalarraren puntu finkoa adieraziko duela beti; bigarren baldintza, aldiz, modulu-espazioaren geometriaren tinkotasun baldintzara eramango gaitu. Hain zuzen ere, baldintza geometriko horren ondorioa da modulu-espazioaren metrika, puntu finkoan ebaluatzerakoan, blokeka diagonal dela sektore trunkatuarekiko eta murriztuarekiko, hots, $K_{z^\alpha \bar{w}^{\beta'}} = 0$. Bestalde, $w^{\alpha'} = w_*^{\alpha'}$ puntu finkoak definitzen duen modulu-espazio murriztuak modulu-espazio osoaren *azpibarietate guztiz geodesikoa* izan behar du (ikus [123]). Beste era batera esanda, modulu-espazioaren barietatearen edozein geodesiko, zeinen puntu bat gutxienez \mathcal{G} -ren locus finkoan dagoen eta azken horrekiko lokalki ukitzaila den, modulu-espazio murriztuan barneratuta egon beharko da guztiz.

Oso baldintza gogorak dira arestian emandakoak. Horiek $w^{\alpha'}$ moduluak izoztearen tinkotasuna bermatzen baitute $\mathcal{L}_{ETE}(\tau, z^i)$ ETEaren lagrangearraren mailan; ondorioz, trunkamendua biziraun duten eremu-teoria murriztua horrela definitu dezakegu:

$$\mathcal{L}_{ETE}^{\text{red}}(\tau, z^\alpha) \equiv \mathcal{L}_{ETE}(\tau, z^\alpha, w^{\alpha'} = w_*^{\alpha'}). \quad (2.20)$$

Hain zuzen ere, (2.18) baldintzek zera bermatuko dute: $\mathcal{L}_{ETE}^{\text{red}}$ lagrangearrak definitzen duen teoria murriztuaren edozein soluzio ETE osoaren soluzioa ere badela. Horrekin batera, (2.17) erabiliz eta aurrean emandako argudioak jarraituz, \mathcal{G} -ren puntu finkoa fluxu-potentzialaren

puntu kritikoa dela frogatu dezakegu:

$$D_{w^{\alpha'}} W|_{w=w_*} = \partial_{w^{\alpha'}} W|_{w=w_*} = 0 \quad \text{for all} \quad \tau, z^\alpha. \quad (2.21)$$

Alegia, trunkatutako $w^{\alpha'}$ eremuek supersimetria babesten dute. Hartara, teoria murriztuak ere supersimetria ez badu hausten, jatorrizko ETE osoa izango da supersimetrikoa. Ondorioz, \mathcal{G} -rekiko aldakorrak diren $w^{\alpha'}$ eremuak izoztuz gero, teoriaren trunkamendu supersimetrikoa bideratuko dugu (ikus [122, 123, 138]).

Beraz, (2.21) adierazpenetik zera ondorioztatu dezakegu: simetria-talde diskretu batekiko inbariantek diren trinkoketak oso baliagarriak zaizkigu eskalarik gabeko hutsak bilatzeko \mathcal{G} -ren puntu finkoan; izan ere, transformazio horiekiko inbariantek ez diren eremuek automatikoki betetzen dituzte (1.37) eskalarik gabeko ekuazioak. \mathcal{G} simetria-taldearen locus finkoan kokatuta dauden eskalarik gabeko hutsei *simetria handiko hutsak* deritze. Horrez gain, soluzio horietan, trunkamenduaren tinkotasunak bermatzen du ekintza murriztuaren akoplamenduak (periodo-bektorearen osagaiak, alegia) kalkulatu behar ditugula besterik ez (ikus, adibidez, [101, 119, 139–142]). Hartara, ETE osoaren azterketa guztiz egingarria da huts interesgarri horietan.

2.3.3 Masa-matrizearen egitura simetria handiko hutsetan

Fluxu \mathcal{G} -inbariantek erabiliz eraiki ditugun simetria altuko hutsetan, informazio oso baliagarria lortu dezakegu hessiarrari eta fermioien masa-matrizeari dagokienez Arestian ikusi dugunaren arabera, \mathcal{G} -ren puntu finkoan modulu-espazioaren metrika blokeka diagonal da trunkatutako sektorearekiko eta trunkamendua biziraun duen eremuekiko. Gainera, (2.18) eta (2.21) ekuazioak erabiliz, teoria murriztuaren (τ, z^α) moduluekiko independenteak diren ondorengo adierazpenak ditugu:

$$D_\tau D_{w^{\alpha'}} W|_{w_*} = D_{z^\alpha} D_{w^{\beta'}} W|_{w_*} = 0, \quad \nabla_{z^\alpha} \nabla_{w^{\beta'}} V|_{w_*} = \nabla_{z^\alpha} \nabla_{\bar{w}^{\beta'}} V|_{w_*} = 0. \quad (2.22)$$

Horien ondorioz, fermioi-masen matrizea eta hessierra ere blokeka diagonalak izango dira, hots, $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\{\tau, z^\alpha\}} \otimes \mathcal{M}_{\{w^{\alpha'}\}}$ eta $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\{\tau, z^\alpha\}} \otimes \mathcal{H}_{\{w^{\alpha'}\}}$. Horrenbestez, (τ, z^α) eta $w^{\alpha'}$ eremuen egonkortasun perturbatiboa zein bere aldetik aztertu ahal izango dugu. Halaber, haratago sinplifikatu ditzakegu matrize horiek, lan honetan aztertzen ari garen ETEen fermioi-masen matrizearen egitura kontuan hartuta, ikus (2.11). Izan ere, (2.22) ekuazioa erabiliz, zuzenean froga dezakegu nuluak ez diren $Z_{\tau z^i}$ motako osagai bakarrak ditugula $Z_{\tau z^\alpha}$, hots, sektore murriztuaren eremuen arabekoak direnak.

Sekzio honetako emaitzak aintzat hartuz, eta (2.12) erabiliz, \mathcal{M} -n agertzen diren kanonikoki normalizatutako Z_{AB} matrizearen osagaiak kalkulatu ditzakegu:

$$Z_{0w^{\alpha'}} = Z_{z^{\tilde{a}} w^{\beta'}} = 0, \quad Z_{z^{\tilde{a}} z^{\tilde{b}}} = i\kappa_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}} \bar{Z}_{\tilde{0}\tilde{z}^{\tilde{c}}}, \quad Z_{w^{\alpha'} w^{\beta'}} = i\kappa_{\alpha'\beta'\tilde{c}} \bar{Z}_{\tilde{0}\tilde{z}^{\tilde{c}}}, \quad (2.23)$$

non $z^{\tilde{a}}$ teoria murriztuaren eremuak ditugun (kanonikoki normalizatuta betiere) $\tilde{a}, \tilde{b} = 1, \dots, h_{\text{red}}^{2,1}$ diren (ikus (2.6)), eta $w^{\alpha'}$ trunkatutako sektoreko eremuak ditugun, $\alpha', \beta' = h_{\text{red}}^{2,1} + 1, \dots, h^{2,1}$ izaki.

Bi hitzetan, sekzio honetako emaitza nagusiak ondorengoak ditugu. Lehenik, sime-

tria handiko hutsetan, eskalarik gabeko potentzialaren hessiarra, kanonikoki normalizatuta betiere, soilik bi osagaien funtzioa da: $Z_{0z\bar{a}}$ elementuak, hots, *teoria murriztuaren* fluxu-superpotentzialaren deribatua; eta $\mathring{k}_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}$ eta $\mathring{k}_{a'b'\bar{c}}$ kanonikoki normalizatutako Yukawa akoplamendu inbarianteak. Bigarrenik, lan honetan interesatzen zaizkigun ereduak dimensio bakarreko sektore murriztua dutenez, (2.23) ekuazioko \bar{a} , \bar{b} eta \bar{c} indizeek soilik “1” balioa har dezakete. Hartara, Z_{AB} matrizearen osagai ez nuluak ondorengoak ditugu:

$$Z_{11} = i\mathring{k}_{111}\bar{Z}_{\bar{0}\bar{1}}, \quad Z_{a'b'} = i\mathring{k}_{a'b'1}\bar{Z}_{\bar{0}\bar{1}}. \quad (2.24)$$

Geroago ikusiko dugun bezala, parametro bakarreko eredueta \mathring{k}_{111} eta $\mathring{k}_{a'b'1}$ kantitateak teoria murriztuaren akoplamenduen eta eremuen itxarondako balioen funtzioan idatz daitezke.

2.4 zuhaitz mailako masa-espektro osoa

Ondorengo sekzioa IIB motako akoplamenduen zenbait ezaugarri unibertsal kalkulatu abiatuko dugu, betiere Calabi-Yau trinkoketa orokor batean oinarrituta EKH eskualdean. Ostera, simetria-talde batekiko inbarianteak diren Calabi-Yau geometrietara joko dugu, egitura konplexuaren modulu-espazioaren trunkamendu tinkoa bideratzeko, eremu bakar batera murrizteko espazio hori. Emaitza berri horiek aurreko sekziokoekin bateratuz, axio-dilato/egitura konplexuko sektorearen eskalarik gabeko hutsen zuhaitz mailako espektro osoa kalkulatu ahal izango dugu.

2.4.1 IIB motako eremu-teoria eraginkorraren ezaugarri unibertsalak

Azpiatal honen xedea kanonikoki normalizatutako Yukawa akoplamenduen zenbait ezaugarri orokor lortzea da, egitura konplexu handiko erregimenean. Zehazki, frogatuko dugu berreskalatutako Yukawa akoplamenduen azpimultzo bat, \mathring{k}_{abc} , parametro bakar baten mende soilik espresatu daitekeela, $\xi \in [0, 1/2]$ delakoa. Parametro hori horrela definituko dugu, teoria murriztuan agertzen diren zenbait kantitateren mende:

$$\xi \equiv \frac{-2e^{K_{cs}} \text{Im } \kappa_0}{1 + 2e^{K_{cs}} \text{Im } \kappa_0}. \quad (2.25)$$

Aldagai hau egitura konplexuaren modulu-espazioaren parametrizazio gisa uler daiteke, EKH puntua $\xi = 0$ izaki. Interesatzen zaizkigun eredueta, Kähler modulu gutxi eta egitura konplexu sektore handia dutenetan hain zuzen ere, $h^{1,1} \ll h^{2,1}$, (2.2) adierazpena erabiliz $\text{Im } \kappa_0 < 0$ dela ikus dezakegu. Hartara, (2.25) definizioa kontuan hartuta, konfigurazio fisikoetan $\xi \geq 0$ dugula ondorioztatu dezakegu. Bestalde, erraz egiaztatu daiteke $\xi = 1/2$ betetzen duten eremu-konfigurazioak modulu-espazioaren mugan daudela; hau da, $\xi > 1/2$ duten puntuetan balio propio negatibo bat izango du Kähler metrikak, eta soluzioa ez da fisikoa izango.

Ondorengo eztabaida [143–145] erreferentzien parekoa izango da; izan ere, artikulua horietan Yukawa akoplamenduen ezaugarri analogoak aurkitu izan dira EKH puntuan ($\xi = 0$). Oraingo honetan, (2.1) aurrepotentzialaren instantoi-ekarpenak arbuiagarriak direla

suposatuko dugu, besterik ez. Horrenbestez, hemen aurkeztuko ditugun emaitzak [143–145] erreferentzietakoak baino orokorragoak izango dira; hain zuzen ere, gure analisiaren baliozkotasun erregimena zabaldu daiteke (2.1) aurrepotentzialaren hurbilketa polinomikoa kontrolpean dagoen modulu-espazioaren edozein eskualdera.

Kalkuluaren abiapuntua da egitura konplexuaren modulu-espazioaren (2.5) Kähler metrika. Horrela, [145] jarraituz, ondorengo bektore erreala eta unitarioa definituko dugu:

$$e_1^i \equiv \frac{1}{x}(z + \bar{z})^i, \quad K_{i\bar{j}} e_1^i \bar{e}_1^j = 1, \quad (2.26)$$

non x parametroa (momentuz) determinatu gabeko normalizazio konstantea dugun. Orokortasun osoz, kanonikoki normalizatutako eremuak aukeratzeko dugun $SO(h^{2,1})$ askatasuna erabiliz, e_a^i vielbein oinarria biratuko dugu horren lehenengo bektorea e_1^i -rekin bat etor dadin. Bestalde, (2.5) Kähler metrika δ_{ab} dugu, hori forma kanonikoan espresatzerakoan, alegia, e_a^i oinarriaren mende idazterakoan. Hartara, berreskalatutako eta kanonikoki normalizatutako Yukawa akoplamenduen arteko ondorengo erlazioa lortuko dugu:

$$\delta_{ab} = -\mathring{\kappa}_{ab1}x + \frac{1}{4}\mathring{\kappa}_{a11}\mathring{\kappa}_{b11}x^4. \quad (2.27)$$

Era berean, Yukawa akoplamenduen definiziotik, $\mathring{\kappa}_{abc} = e^{K_{cs}}\kappa_{abc}$, eta Kähler potentzialaren (2.4) adierazpenetik, hauxe dugu:

$$e^{-K_{cs}} = \frac{1}{6}\kappa_{111}x^3(1 + \xi) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{6}\mathring{\kappa}_{111}x^3(1 + \xi) = 1. \quad (2.28)$$

Bi baldintza horiek ebatzi ditzakegu $\mathring{\kappa}_{ab1}$ motako akoplamenduen adierazpenak lortzeko:

$$\mathring{\kappa}_{111} = \frac{2(1 + \xi)^2}{\sqrt{3(1 - 2\xi)^3}}, \quad \mathring{\kappa}_{a'11} = 0 \quad \text{eta} \quad \mathring{\kappa}_{a'b'1} = -\frac{1 + \xi}{\sqrt{3(1 - 2\xi)}}\delta_{a'b'}. \quad (2.29)$$

non $a', b' = 2, \dots, h^{2,1}$ ditugun. Falta diren berreskalatutako $\kappa_{a'b'c'}$ Yukawa akoplamenduak ezin dira murriztu aurreko baldintzak erabiliz; beraz, printzipioz, edonolakoak izan daitezke. Bestalde, e_1^i vielbein-aren x normalizazio konstantea

$$x^2 = \frac{3(1 - 2\xi)}{(1 + \xi)^2} \quad (2.30)$$

dugula froga daiteke.

e_1^i vielbeinak zehazten duen norabideak esanahi geometriko garrantzitsua du. Hain zuzen ere, egitura konplexuaren modulu-espazioaren *eskalarik gabeko norabidea* adierazten du [146, 147]:

$$K_a = -\frac{1}{2}\mathring{\kappa}_{a11}x^2 = -\sqrt{3/(1 - 2\xi)}\delta_a^1. \quad (2.31)$$

Aurreko adierazpenetik ondorengo eskalarik gabeko propietate orokortua dugu:

$$K_i K_{\bar{j}} K^{i\bar{j}} = 3/(1 - 2\xi) \geq 3. \quad (2.32)$$

IIB motako $h^{1,1} \leq h^{2,1}$ baldintza betetzen duen edozein trinkoketak onartuko du aurreko ekuazioa EKH eskualdean (ikus [146] artikuluko A eranskina).

Kontuan eduki behar dugu lan honetan aztertu nahi ditugun ereduetan, zeinetan trunkamendua eremu batek soilik bizirauten duen, z^a egitura konplexuaren eremuaren hutseko itxarondako balioa nahitaez Z_{0a} bektorearekiko paraleloa izango da; azken batean, egitura konplexuaren modulu-espazio murriztua norabide bakarrekoa da eta. Ondorioz, arestian kalkulaturako $\hat{\kappa}_{a'b'1}$ Yukawa akoplamenduak izango dira (2.24) adierazpenean ageriko direnak. Hartara, jada eskuratu ditugu eskalarik gabeko huts generikoen zuhaitz mailako masa-espektroa kalkulatzeko behar diren osagai guztiak.

2.4.2 Fermioien eta eskalarren masa-espektroak eskalarik gabeko hutsetan

Arestiko 2.2.2 sekzioan azaldu dugunaren arabera, masa-espektro fermioikoa kalkulatu abiatuko gara, alegia, ZZ^\dagger matrize hermitiarra diagonalizatuko dugu eta (2.9) erabiliz eremu eskalarren masak lortuko ditugu. Lehenik,

$$Z_{0a} = \delta_{a1} Z_{01} \quad (2.33)$$

bektorea ezinbestean eskalarik gabeko norabidearekin lerrokatuta egongo da (gogoan izan parametro bakarreko ereduetan a indizeak balio bakarra har dezakeela, $h_{\text{red}}^{2,1} = 1$ baitugu). Hartara, berreskalatutako Yukawa akoplamenduen (2.29) adierazpenak erabiliz, eta (2.24) erlazioak aintzat hartuz, Z_{AB} matrizea ondorengoa dugu:

$$Z_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & Z_{01} & 0 \\ Z_{01} & i\hat{\kappa}(\xi)\bar{Z}_{01} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1+\xi}{\sqrt{3(1-2\xi)}}\delta_{a'b'}\bar{Z}_{01} \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

non $\hat{\kappa}(\xi) \equiv \hat{\kappa}_{111}(\xi)$ definitu dugun. Are gehiago, $m_{\text{susy}} \equiv |Z_{01}| = |e^{K/2} D_0 D_1 W|$ eskala aurreko adierazpenetik faktorizatuz eta ZZ^\dagger matrizearen m_λ^2 balio propioak kalkulatu, hauxe dugu fermioi-masen espektroa:

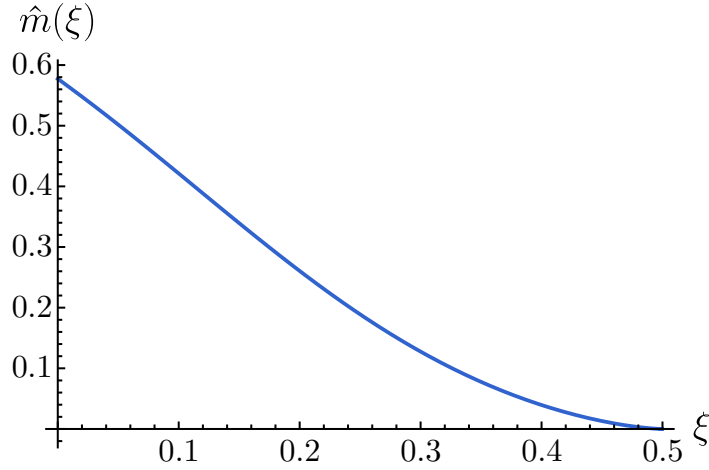
$$m_\lambda / m_{\text{susy}} = \begin{cases} \hat{m}(\xi) & \lambda = 0 \\ 1/\hat{m}(\xi) & \lambda = 1 \\ \frac{1+\xi}{\sqrt{3(1-2\xi)}} & \lambda = 2, \dots, h^{2,1} \end{cases}, \quad (2.35)$$

non

$$\hat{m}(\xi) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(2 + \hat{\kappa}(\xi)^2 - \hat{\kappa}(\xi) \sqrt{4 + \hat{\kappa}(\xi)^2} \right)^{1/2} \quad (2.36)$$

definitu dugun. Azken horren ξ -rekiko menpekotasuna 2.1 irudian marraztu dugu.

Nabarmenezkoa da trunkatutako sektoreko fermioi guztiak masa berdina dutela. Hain



2.1 irudia: $\hat{m}(\xi)$ funtzioa, (2.36) definizioaren arabera.

zuzen ere, EKH puntuan ($\xi = 0$) masa-espektro fermioikoa hauxe dugu:

$$m_0/m_{\text{susy}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad m_1/m_{\text{susy}} = \sqrt{3}, \quad \text{eta} \quad m_{\lambda'}/m_{\text{susy}} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (2.37)$$

non $\lambda' = 2, \dots, h^{2,1}$ den.

Eremu eskalarren masa-espektroa zuzenean lor daiteke (2.9) ekuaziotik. Horretarako, komenigarria izango zaigu fluxuen menpeko θ_W parametro angeluarra definitzea:

$$\cos\theta_W \equiv \frac{\mathcal{V} m_{3/2}}{\sqrt{N_{\text{flux}}/4\pi}}, \quad \text{non} \quad \theta_W \in [0, \pi/2]. \quad (2.38)$$

Kontuan izan parametro horren balio-tartea (2.13) zapaburu-murrizketaren araberakoa izango dela. Espero litekeenaren kontra, θ_W -k ez du Calabi-Yau barietatearen bolumenarekiko ezta Kähler moduluekiko mendekotasunik, izan ere, $\mathcal{V} m_{3/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{K_{cs}/2} \text{Im}(\tau)^{-1/2} |W|$ konbinazioa, literaturan W_0 sinboloaren bidez definitu ohi dena, soilik axio-dilatoiaren eta egitura konplexuko eremuen araberakoa da. Are gehiago, $Z_{0a'} = 0$ dugula gogoratzuz, (2.13) adierazpenetik kalkulatu dugu fluxuek induzitutako $D3$ -karga totala:

$$N_{\text{flux}} = 4\pi \mathcal{V}^2 \left(m_{3/2}^2 + m_{\text{susy}}^2 \right) \implies \tan\theta_W = m_{\text{susy}}/m_{3/2}. \quad (2.39)$$

Horrela, erraz lor dezakegu zuhaitz mailako axio-dilatoi/egitura konplexuaren sektorearen masa-espektro osoa:

$$\mu_{\pm\lambda}^2/m_{3/2}^2 = \begin{cases} (1 \pm \tan\theta_W \hat{m}(\xi))^2 & \lambda = 0 \\ \left(1 \pm \frac{\tan\theta_W}{\hat{m}(\xi)}\right)^2 & \lambda = 1 \\ \left(1 \pm \frac{(1+\xi)\tan\theta_W}{\sqrt{3}(1-2\xi)}\right)^2 & \lambda = 2, \dots, h^{2,1} \end{cases}. \quad (2.40)$$

Espektro hau kapitulu honen emaitza nagusia da. Aurreko adierazpenean agertzen diren

parametro guztiak erraz kalkulatu daitezke teoria murriztuan; izan ere, alde batetik, trun-
kamendua biziraun duten egitura konplexuaren eremuen konfigurazioak emango digu
 ξ -ren balioa, eta bestetik, θ_W -ren balioa fluxu-superpotenzialaren itxarondako balioaren
eta fluxuek induzitutako $D3$ -karga totalaren, hots, N_{flux} -en, arabera izango da.

Azpimarratzekoa da aurreko emaitzak ez duela mendekotasunik ez trinkoketaren zehaz-
tasunetan, ezta modulu-eremuen kopuruan ere. Bestalde, masa eskalarrak fluxuek definitzen
dituzten eskalen arabera izango dira, hots, grabitinoaren masa, $m_{3/2} = W_0/\mathcal{V}$, eta θ_W
parametroaren balioak kontuan hartu beharko ditugu. Calabi-Yau bolumenaren mendeko-
tasuna ekiditeko, masa eskalarrak grabitinoaren masarekiko normalizatzea erabaki dugu,
azken hori faktore biderkatzaile gisa ageri baita ekuazio guztietan.

Masa-espektro horren aplikazio interesgarria dugu KKLT eraikuntza [35], non $W_0 \ll 1$
inposatu behar dugun edo, bestela esanda, $\theta_W \sim \pi/2$. Limite horren espektro eskalarra
hauxe dugu:

$$\text{KKLT eraikuntza: } \mu_{\pm\lambda}^2 / m_{3/2}^2 \approx \begin{cases} \tan^2 \theta_W \hat{m}(\xi)^2 & \lambda = 0 \\ \frac{\tan^2 \theta_W}{\hat{m}(\xi)^2} & \lambda = 1 \\ \frac{(1 + \xi)^2 \tan^2 \theta_W}{3(1 - 2\xi)} & \lambda = 2, \dots, h^{2,1} \end{cases} . \quad (2.41)$$

alegia, espektroaren masa guztiak oso handiak dira grabitinoaren masaren aldean, $\mu_{\pm\lambda}^2 \gg$
 $m_{3/2}^2$. Hain zuzen ere, emaitza horren ondorioz, axio-dilatoi/egitura konplexuaren sektore
osoa erraz arbuatu ahal izango dugu KKLT eraikuntza generikoetan, teoriaren zuzenketa
kuantikoak eta supersimetriaren hausturaren efektuak kontuan hartuta ere, sektorearen
masa handiak direla eta (ikus [148–150] xehetasun gehiagorako). Hala eta guztiz ere, modu
oso arinak ager litezke modulu-espazioaren puntu berezietako eskalarik gabeko soluzioak
aztertzerakoan [151, 152].

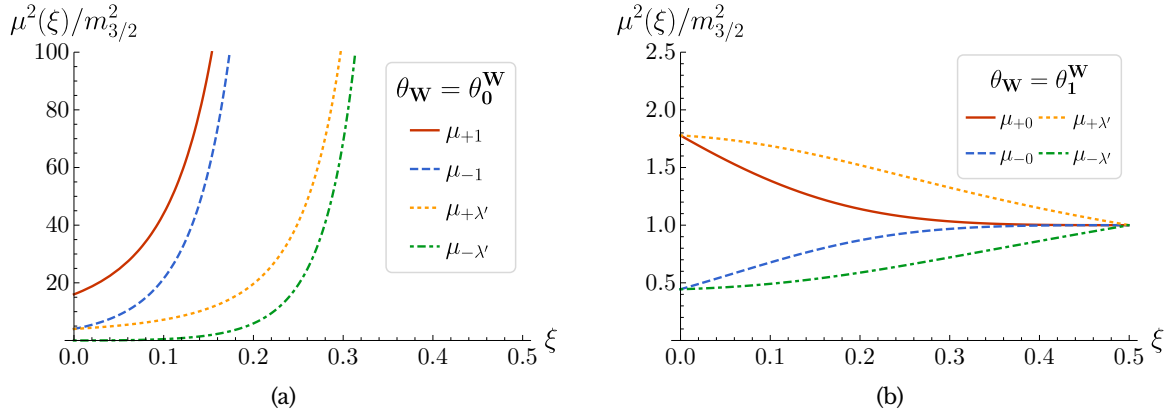
Ondorengo bi azpiataletan aztertuko ditugu θ_W parametroaren balio finkoa duten bi kasu
berezi. Horietan, soilik ξ parametroaren mende idatzi ahal izango dugu normalizatutako
masa-espektro osoa.

2.4.3 Masa nuluko eskalarrak dituzten fluxu-hutsak

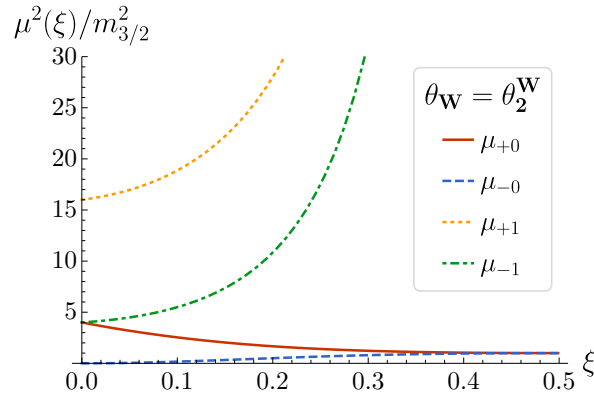
Arestian lortutako (2.40) emaitzaren ondorio garrantzitsua dugu eskalarik gabeko hutsetan
masa oso arin edota nulua duten eskalar eremuak izan ditzakegula, $\tan \theta_W \in [0, \infty)$ baitugu.
Oro har, eremu arin hauen agerpena ez da komenigarria aplikazio fenomenologikoetara-
ko, huts horiek takioniko bihur litezkeelako zuzenketa kuantikoak edo supersimetriaren
hausturaren efektuak kontuan hartzerakoan. Aitzitik, masa arin edo nulua dituzten mo-
duak interesgarriak izan daitezke dS hutsen [153, 154] edo fase inflazionarioen eraikuntzen
ikuspuntutik. Ondorioz, modu hauen masa-espektroa aztertuko dugu laburki.

Masarik gabeko modu bat gutxienez izateko gure espektroan, θ_W aldagaiak ondorengo
hiru balioen bat izan beharko du, ξ -ren arabera:

$$\tan \theta_0^W = \hat{m}(\xi)^{-1}, \quad \tan \theta_1^W = \hat{m}(\xi), \quad \text{edo} \quad \tan \theta_2^W = \frac{\sqrt{3(1 - 2\xi)}}{1 + \xi}. \quad (2.42)$$



2.2 irudia: Gutxienez modu nulu bat duten masa eskalarren espektroak, θ_W parametroaren (2.42) balio kritikoen zat. (a) $\theta_W = \theta_0^W$ -ri dagokion espektroa, non $\mu_{-0}^2 = 0$ eta $\mu_{+0}^2 = 4m_{3/2}^2$ ditugun. (b) $\theta_W = \theta_1^W$ -i dagokion espektroa, non $\mu_{-1}^2 = 0$ eta $\mu_{+1}^2 = 4m_{3/2}^2$ ditugun.



2.3 irudia: $\theta_W = \theta_2^W$ parametroari dagokion masa-espektro eskalarra, non sektore trunkatu osoa $h^{2,1} - 1$ masarik gabeko moduz osatuta dagoen, hots, $\mu_{-\lambda'}^2 = 0$, eta $\mu_{+\lambda'}^2 = 4m_{3/2}^2$.

Kasu horietan, μ_{-0}^2 , μ_{-1}^2 , eta $\mu_{-\lambda'}^2$ dira, hurrenez hurren, masa eskalar nulua. Hutsen adar horiei dagozkien espektroak 2.2 eta 2.3 irudietan marraztu ditugu. Agerikoa da $\theta_W = \theta_0^W$ eta $\theta_W = \theta_1^W$ kasuetan EKH puntutik at ($\xi > 0$) espektroak masa nulu bakarria duela, teoria murriztuaren eremu bati dagokiona: $\mu_{-0}^2 = 0$ eta $\mu_{-1}^2 = 0$, hurrenez hurren. Kasu horietan, grabitinoaren antzekoa da beste eremu guztien masa. Huts mota horiek interesgarriak izan daitezke [153, 154] artikuluetako dS hutsen eraikuntzak bideratzeko, zuhaitz mailan masarik ez duen egitura konplexuaren eremu bat behar baitute. Azkeneko adarrari dagokionez, hots, $\theta_W = \theta_2^W$, EKH puntutik kanpo espektroak $h^{2,1} - 1$ masarik gabeko modu ditu, $\mu_{-\lambda'}^2 = 0$. Hau da, trunkatutako sektorearen modu eskalarren erdiak masa nulua du.

Aurrerago, 2.6 sekzioan, eskalarik gabeko fluxu-huts multzoaren masak aztertuko ditugu, analisi estatistiko baten bidez. Horrela, azpiatal honetako huts-adarrak Paisaian zeinen generikoak diren ikusi ahal izango dugu.

2.4.4 $N_A^0 = 0$ duten eskalarik gabeko hutsak

Azpiatal honetan $N_A^0 = 0$ murrizketaren bidezko θ_W parametroaren finkapena aztertuko dugu. Fluxu bektorearen osagai hori EKH limitean infinitura doan (1.31) periodoaren osagaiare-

kin zerikusia du. Ondorioz, fluxu hori ez piztearen ondorio zuzena dugu superpotentzialaren termino kubikoak (z^i aldagaietan) nuluak izango direla.

Huts mota hau aztertzeraz eraman gaituen motibazio nagusia [145, 155] artikuluetako analisisia da. Alde batetik, [155] artikulua zenbakizko analisiaren arabera, fluxu generikoak erabiliz gero modulu-espazioaren EKH puntuaren inguruan, superpotentzialaren termino kubikoak besteekiko nagusituko dira.⁶ Bestalde, [145, 155] lanetan frogatu den bezala, W -ren termino kubikoek ekarpen nagusia dutenean ezin daiteke hutsik existitu $\xi \approx 0$ modulu-espazioaren inguruan. Beraz, $N_A^0 \neq 0$ duten hutsak oso urriak izatea espero da EKH puntuaren inguruan, horrelakorik existituz gero. Aitzitik, [145, 155] lanen ondorioak ez dira aplikagarriak N_A^0 nulua bada, izan ere, kasu zehatz horretan superpotentzialaren termino kubikoak ere nuluak izango dira eta, hartara, ez dira inoiz nagusituko. Horrenbestez, $N_A^0 = 0$ baldintza betetzen duen hutsik existitu liteke; hori ez ezik, EKH puntuaren ingurune txiki batean mota horretako hutsak izan daitezke nagusienak.

Ondorio hauek indartzearren, D eranskinean ξ -ren balio minimoa kalkulatu dugu, zeinetan eskalarik gabeko soluzioak existitu daitezkeen, nahiz N_A^0 nulua ez denean, nahiz $N_A^0 = 0$ kasuan. Lehenengo huts-motarako, ondorengo du:

$$\xi_{\min|N_A^0 \neq 0} \gtrsim \frac{|\text{Im } \kappa_0|}{4\sqrt{N_{\text{flux}}}}. \quad (2.43)$$

Bigarren kasurako, hots, $N_A^0 = 0$ baldintzapean dauden soluzioetarako, ξ parametroak ez du behe-bornerik. Hain zuzen ere, [145, 155] analisisiek ondorioztatu duten bezala, $N_A^0 = 0$ duten hutsak nagusituko direla ikus dezakegu EKH puntuaren ingurune batean. 2.6 sekzioan ikusiko dugunaren arabera, $\mathbb{W}\mathbb{P}_{[1,1,1,1,4]}^4$ eremuan bideratu dugun zenbakizko ekorketak aurreko baieztapena erabat berresten du, eta [145, 155] lanen ondorioekin bat dator.

Huts mota honen θ_W parametroa ξ -ren bitartez idatz dezakegula frogatzeko, N fluxu-bektorearen Hodge deskonposaketa [46] baliagarria izango zaigu. A eranskinean xehetasun osoz aurkeztu bezala, edonolako $\{\tau_c, z_c^i\}$ eskalarik gabeko huts baten fluxu-bektorea horrela adierazi dezakegu, Π periodo-bektorearen eta horren Kähler deribatu kobarianteen $D_a \Pi = (\partial_a + K_a) \Pi$ mende:

$$N = \sqrt{4\pi} e^{K_{cs}} \left(iW \bar{\Pi} + D_{\bar{0}} D_{\bar{a}} \bar{W} D_a \Pi \right). \quad (2.44)$$

Azken adierazpen horretan $N_A^0 = 0$ inposatuz,

$$W = iD_{\bar{0}} D_{\bar{a}} \bar{W} K_a \quad (2.45)$$

lortuko dugu, non (1.31) gauge-ean periodo-bektoreak $\Pi_A^0 = 1$ betetzen duela erabili dugun. Azkenik, (2.13) baldintza eta (2.31) emaitza kontuan hartuz, eta θ_W parametro angeluarraren (2.38) definizioa erabiliz, ondorengo erlaziora iritsiko gara:

$$\tan \theta_W = \sqrt{(1 - 2\xi)/3} \quad \Rightarrow \quad \theta_W \in \left[0, \frac{\pi}{6} \right]. \quad (2.46)$$

⁶Azken baieztapen hori edonolako eremu-espazioko puntuetan betetzen da, ez soilik fluxu-hutsetan.

Horrela ere idatz dezakegu azken ekuazioa:

$$W_0^2 = \mathcal{V}^2 m_{3/2}^2 = \frac{3N_{\text{flux}}}{8\pi(2-\xi)} \geq \frac{N_{\text{flux}}}{8\pi} \sim \mathcal{O}(10-10^3), \quad (2.47)$$

W_0 fluxu parametroa eta N_{flux} $D3$ -karga totalak lotzen dituena. Zuzenean ikus daiteke soluzio hauek ez direla bateragarriak KKL T eraikuntzekin, horietan $W_0 \ll 1$ behar baitugu. Aitzitik, eskalarik gabeko huts klase hau LVS motako eraikuntzetarako oso baliagarria da, horietan $W_0 \sim \mathcal{O}(1-10)$ baita.

Eskalarik gabeko soluzio hauen espektro eskalarra aurkitzeko, (2.46) adierazpena besterik ez dugu ordezkatu behar gure (2.40) emaitza nagusian. Hartara, hauxe dugu murriztutako hutsen masa-espektro eskalarra:

$$\mathbf{N}_A^0 = \mathbf{0}: \quad \mu_{\pm\lambda}^2 / m_{3/2}^2 = \begin{cases} \left(1 \pm \sqrt{(1-2\xi)/3} \hat{m}(\xi)\right)^2 & \lambda = 0 \\ \left(1 \pm \frac{\sqrt{(1-2\xi)}}{\sqrt{3}\hat{m}(\xi)}\right)^2 & \lambda = 1 \\ \left(1 \pm \frac{1+\xi}{3}\right)^2 & \lambda = 2, \dots, h^{2,1} \end{cases}. \quad (2.48)$$

Masa horien ξ -rekiko mendekotasuna 2.4 irudian marraztu dugu. Azpimarratzekoa da aurreko espektroa guztiz independentea dela Calabi-Yau trinkoketaren xehetasunekiko. Hain zuzen ere, (2.47) erabiliz, espektro osoa lor dezakegu N_{flux} $D3$ -karga totala, ξ parametroa eta \mathcal{V} Calabi-Yau bolumena jakinda.

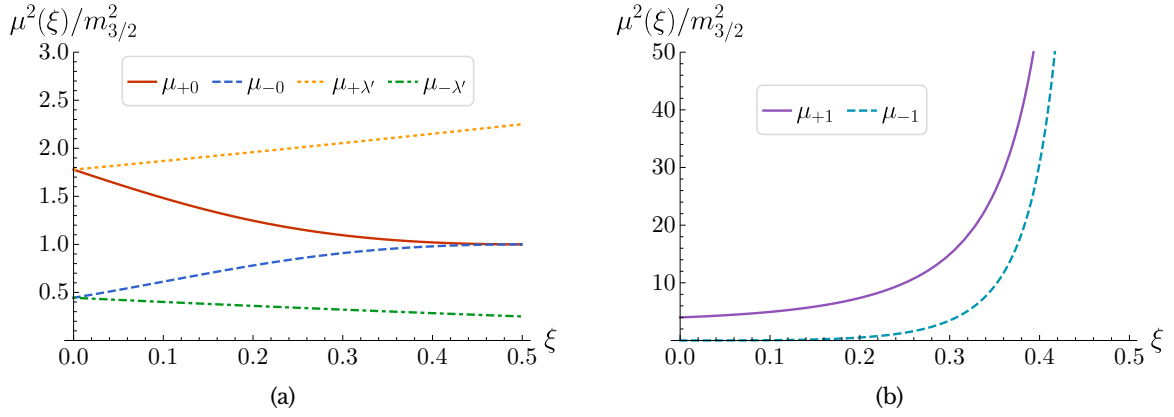
Azkenik, EKH puntura gerturatzen garen heinean, $\xi \rightarrow 0$, (2.48) espektroak ondorengo forma unibertsala izango du:

$$\mathbf{N}_A^0 = \mathbf{0}, \quad \xi = \mathbf{0}: \quad \mu_{\pm\lambda}^2 / m_{3/2}^2 = \begin{cases} \left(1 \pm \frac{1}{3}\right)^2 & \lambda = 0, 2, \dots, h^{2,1} \\ (1 \pm 1)^2 & \lambda = 1 \end{cases}. \quad (2.49)$$

Espektro horren pareko emaitza lortu zen [145, 155] lanetan, moduluen edonolako konfigurazioetarako (hots, ez soilik fluxu-hutsetarako) EKH puntuaren inguruan.

2.5 Parametro bakarreko adibidea: $\mathbb{W}\mathbb{P}_{[1,1,1,1,4]}^4$ eredua

Aurreko emaitza analitikoak egiaztatzea xede, $\mathbb{W}\mathbb{P}_{[1,1,1,1,4]}^4$ Calabi-Yau hipergainazalaren (*oktikaren*) orientatearen eskalarik gabeko soluzio multzo handia aztertu dugu. Ondorengo lerroetan, trinkoketa honi dagokion eremu-teoria eraginkorra laburki berrikusiko dugu. Ondoren, 2.6 sekzioan, eredu honetatik lortu dezakegun huts multzoaren ezaugarri estatistikoak eztabaidatuko ditugu. Parametro bakarreko trinkoketa honi buruzko xehetasun gehiago jakiteko, ikus [97, 124].



2.4 irudia: $N_A^0 = 0$ baldintza betetzen duten hutsen masa eskalarren espektroa. Masa horiek $\xi \in [0, 1/2]$ parametroaren mende marraztu ditugu, $m_{3/2}$ grabitino-masarekiko normalizatuta. (a) $\{\mu_{\pm 0}^2, \mu_{\pm \lambda'}^2\}$ masei dagozkien adarrak, non $\mu_{\pm \lambda'}^2$ trunkatutako sektorearen $2(h^{2,1} - 1)$ masak diren. (b) $\{\mu_{+1}^2, \mu_{-1}^2\}$ masei dagozkien adarrak. Azken adar hauetan EKH puntuaren inguru osoan eremu arinik ez dagoela ikus dezakegu, alegia, $\mu_{\pm 1}^2 \gg m_{3/2}^2$ dugu.

2.5.1 Teoria eraginkorra

Hemen aztertuko ditugun Calabi-Yau geometriak hipergainazal-familia honen bitartez definitu daitezke:

$$4x_0^2 + x_1^8 + x_2^8 + x_3^8 + x_4^8 - 8\psi x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 = 0, \quad (2.50)$$

non $x^i \in \mathbb{WP}_{[1,1,1,1,4]}^4$ dugun, alegia, polinomioaren aldagaiak espazio proiektibo batean definituta daude.

Hipergainazal-familia hau ψ deformazio konplexuaren parametro bakar baten bidez definitzen da, $\arg \psi \in [0, \frac{\pi}{4}]$ izanik. Bestalde, hiru dimentsioko Calabi-Yau honek $h^{1,1} = 1$ Kähler modulu eta $h^{2,1} = 149$ egitura konplexuaren eremu dauzka; horrenbestez, badira kontsideratzen ari ez garen beste hainbat deformazio. Aurreko (2.50) adierazpenaren bitartez definitutako Calabi-Yau geometria guztiak simetria talde batekiko inbariantek dira, alegia, $\mathcal{G} = \mathbb{Z}_8^2 \times \mathbb{Z}_2$ taldea, $[\mathcal{G}] = 128$ ordenekoa. Hain zuzen ere, (2.50) definizioan barneratu ez ditugun deformazioak talde honekiko transformazio ez-tribialak dituzte [96, 97]. Horrenbestez, ψ -ren bitartez parametrizatutako deformazioa soilik aztertuz, egitura konplexuaren modulu-espazioaren trunkamendu eraginkorra bideratuko dugu, arestiko 2.3 sekzioan azaldu dugun bezala.

Egitura konplexu handiko puntuaren inguruan, hots, $\psi \rightarrow \infty$, ekintza trunkatua ondorengo aurrepotenzialaren bitartez adierazi ahal izango dugu [124, 133]:

$$\mathcal{F}(z) = \frac{i}{3}z^3 + \frac{3}{2}z^2 + i\frac{11}{6}z - i\frac{37}{2\pi^3}\zeta(3) + \mathcal{F}_{\text{inst}}, \quad (2.51)$$

non $z \approx \frac{4}{\pi} \log(4\psi)$ eta $\text{Im} z \in [-1/2, 1/2]$ ditugun. Aurrekoan, $\mathcal{F}_{\text{inst}}$ bidez adierazi ditugu esponentzialki ezabatuta dauden aurrepotenzialaren instantoi-zuzenketak. Horien termino

nagusia dugu

$$\mathcal{F}_{\text{inst}} \approx -\frac{in_1}{(2\pi)^3} e^{-2\pi z} + \dots, \quad \text{non} \quad n_1 = 29504. \quad (2.52)$$

Bestalde, (2.51) aurrepotentzialaren konbergentzia eremua $|\psi| > 1$ dugu, EKH puntuaren inguruan; bestela esanda, $\xi \lesssim \xi_{\text{cnf}} \equiv 0.39$, $\psi = 1$ puntuko konitate singularitatea ekiditeko [124, 133]. Hala ere, hemengo honetan zera ere inposatuko dugu: instantoi-zuzenketek bai modulu-espazioaren geometrian, bai kantitate fisiko garrantzitsuetan (hots, \mathring{k}_{abc} Yukawa akoplamenduetan, e_i^a vielbein-etan, $m_{3/2}$ masan) garatuko dituzten aldaketak oso txikiak izatea. D.3 eransinean argudiatu dugun bezala, baldintzarik murrizgarriena dugu modulu-espazioaren vielbein-en zuzenketa erlatiboak txikiak izatea. Ezarpen hori huts bakoitzarentzat baieztatu dugun arren, estimazio zuzen baten bidez frogatu daiteke

$$\xi \lesssim \xi_{\text{max}} = 0.185 < \xi_{\text{cnf}} \quad (2.53)$$

baldintza betetzen duten soluzioek instantoi-zuzenketa txiki samarrak izango dituztela (< %20). Kontuan eduki, gainera, azken borne hori (2.51) garapenaren konbergentzia soilik eskatzea baino baldintza gogorragoa dela.

[46, 96, 97] lanetan emandako pausoei jarraituz, trinkoketa hau F -teoriaren lau dimentsio konplexutako $M_4 = \mathbb{W}\mathbb{P}_{[1,1,1,1,8,12]}^5$ trinkoketaren orientitate limitetzat joko dugu. Zehazki, M_4 ereduaren orientitate-ekintzak⁷ hauexek ditugu: $x_0 \rightarrow -x_0$ eta $\psi \rightarrow -\psi$ [156, 157]. F -teoriaren murgilketa aztertzearen abantaila nagusia dugu lau dimentsioko trinkoketaren fluxuak aukeratzeko askatasun handia dugula; ondorioz, analisi estatistikoa bideratzeko oso aproposak dira eredu hauek [46]. Hartara, zapaburu-baldintzaren L parametroa

$$L = \frac{\chi(M_4)}{24}, \quad (2.54)$$

dugu, non $\chi(M_4)$ lau dimentsioko barietatearen Euler zenbakia den. Oro har, M_4 barietatearen Euler zenbakia trinkoketa horri atxikitutako \tilde{M}_3 Calabi-Yau orientitatearena baino askoz handiagoa da. Aztertzen ari garen kasu zehatz honetan, $\mathbb{W}\mathbb{P}_{[1,1,1,1,1,8,12]}^5$ barietatearen Euler zenbakia $\chi(M_4) = 23328$ da, beraz, fluxuek induzitu dezaketen $D3$ -branen karga maximoa $N_{\text{flux}} \leq L = 972$ izango da.

Amaitzeko, kontuan hartzekoa da F -teoriaren murgilketaren ondorioz $D7$ -branen moduluak ere geure teorian barneratu beharko ditugula (ikus [14]). Aitzitik, modulu hauen egonkortzea lan honen helmenetik kanpo utzi dugu. Problema horren xehetasunei buruz gehiago jakiteko, ikus [158–162].

2.5.2 Fluxu-hutsen zenbakizko ekorketa

Oktikak osatzen duen Paisaiaren zenbakizko ekorketa bideratzearen, Paramotopy [163] erabili genuen. Software honek *Homotopia Polinomikoen Jarraipena* (HPJ) deritzon zenbakizko teknika [164, 165] inplementatzen du. Horren bitartez, sistema polinomiko ez-linealen erro

⁷ [96] artikuluan frogatu den bezala, teoria murriztuaren lau periodoetan $F_{(3)}$ eta $H_{(3)}$ fluxuak piztu daitezke era tinkoan orientitate-ekintzarekiko.

guztiak aurki ditzake; beraz, (1.37) ekuazioak ebazteko oso aproposa da (ikus B eranskina). Hartara, (1.42) zapaburu-murrizketa betetzen duen edonolako fluxu-tupla emanda, HPJ metodoak fluxu horiekiko (1.37) ekuazioen soluzio guztien bilaketa sakona ahalbidetuko digu [166, 167].

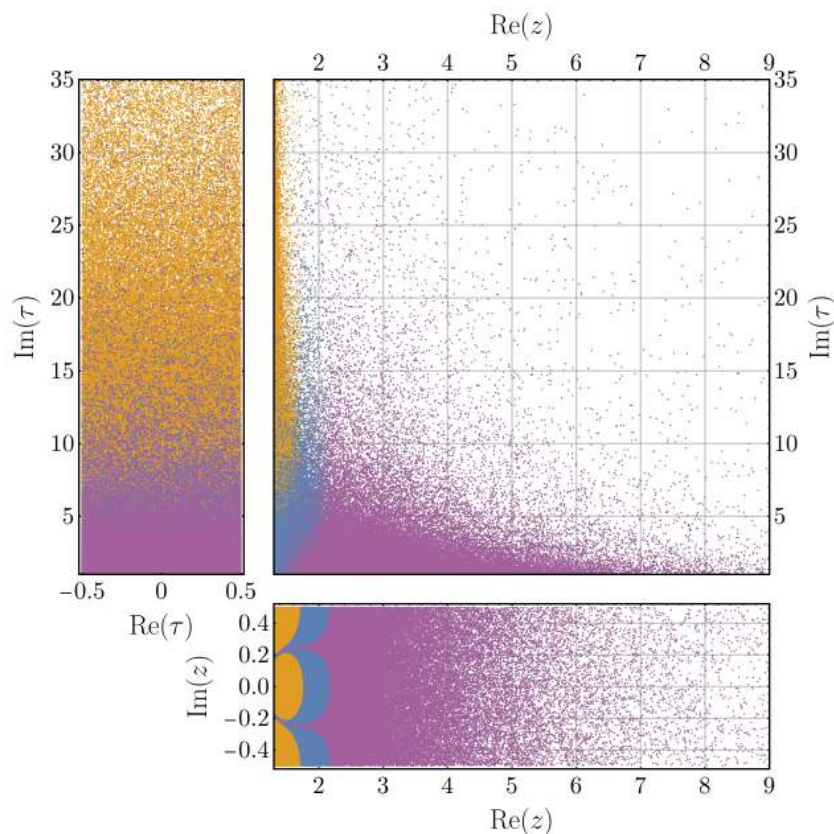
Zehaztasun osoz B eranskinean azaldu dugun bezala, eskalarik gabeko bi huts-multzo eraiki ditugu: batetik, zapaburu-baldintza betetzen duten fluxu generikoz osatuta dagoena, eta bestetik, zapaburu-baldintza ez ezik, $N_A^0 = 0$ ere duten fluxuez osatutakoa, 2.4.4 sekzioan kontsideratu ditugun gisakoak hain zuzen ere. Bi soluzio-talde horiei multzo *generikoa* eta *murriztua* deritzegu, hurrenez hurren. Horiek eraikitzeo, lehenik f eta h fluxuen bildumak sortu ditugu, beraien osoko osagaiak $[-50, 50]$ tarteko banaketa lautik lortuz. Fluxuen multzo generikoa osatzeko 10^7 fluxu-tupla sortu ditugu; murriztua eraikitzeo, aldiz, 10^6 .

HPJ metodoa jarraituz, fluxu aukera bakoitzari dagozkion eskalarik gabeko hutsak kalkulatu ditugu. Ostean, soluzio guztien artetik soilik hautatu ditugu soka-akoplamendu konstante txikia, alegia, $g_s = (\text{Im}\tau)^{-1} < 1$, eta instantoi-zuzenketa arbuigarriak dituztenak, hots, (2.53) baldintza betetzen dituztenak. Gainera, $SL(2, \mathbb{Z})$ taldearen (1.39) ekintzaren bidez erlazionatuta dauden soluzio bikoiztuak baztertu ditugu, baita (1.28) eta (1.38) transformazio sinplektikoen bidez lotutakoak. Lehen horien harira, [98] artikulua proposamenari jarrituz, eskalarik gabeko soluzio guztiak axio-dilatoiarene oinarritzko domeinura eramane ditugu, kopia erredundanteak identifikatu eta baztertzeko.⁸ Transformazio sinplektikoei dagokienez, EKH puntuaren inguruko monodromia [124, 133] kontuan hartu dugu eta era berdintsuan tratatu, hots, soluzio guztiak z modulua oinarritzko domeinura eramanez eta bikoiztutako hutsak ezabatuz.

Metodo horren bitartez lortu dugun huts-multzo generikoa 119.139 soluzioz osatuta dago; multzo murriztua, aldiz, 57.487 hutsek osatzen dute. Prozedura honen emaitza 2.5 irudian marraztu dugu huts-multzo generikoaren kasuan; bertan, soluzio bakoitzaren kokalekua ondorengo plano konplexuetan erakutsi dugu: τ axio-dilatoiarene eta z egitura konplexuko eremuaren oinarritzko domeinuetan, eta $(\text{Re}z, \text{Im}\tau)$ planoan. Nabarmentzekoa da huts horietan baldintza gogorrak inposatu genituzkeela, alegia, $g_s < 0.1$ edota %1 baino txikiagoak diren instantoi-ekarpenak. Aitzitik, murrizketa horien ondorioz, 427 soluziorekin soilik geratuko ginateke. Ondorioz, analisi estatistikoa bideratzeko behar dugun datu kopurua behar bezain handia izan dadin, akoplamendu ahuleko erregimenean dauden, hots, $g_s < 1$ duten, eta $< \%20$ instantoi-zuzenketak dituzten hutsak bakarrik aintzat hartu ditugu.

Gure emaitza nagusia, (2.35), baieztatzea xede, eskalarik gabeko soluzio bakoitzean teoria murriztuaren (alegia, τ and z eremuak soilik aintzat hartzen dituen teoriaren) (2.8) fermioi-masen matrizea kalkulatu dugu, bi metodo erabiliz: lehenik, zenbakizko masa-matrizeen diagonalizazio zuzenaren bidez; bestetik, (2.35) formula erabiliz. Kalkulu horien emaitza 2.6 irudian erakutsi dugu; bertatik bistan da bi metodoen arteko adostasun perfektua dugula. Trunkatutako 148 egitura konplexuaren moduluei dagokienez, nahiz eta arestian emandako ETEak horiei buruzko informaziorik ez dakarren, (2.35) adierazpenen bidez lortu ditugu sektore horren masa fermioikoak, eskalarik gabeko hutsetan. Azkenik, (2.9) erabiliz kalkulatu

⁸Erredundantzia horiek baztertzeko, fluxuen gaineko baldintzarik ez dugu inposatu, [166, 167] lanetan ez bezala. Hain zuzen ere, gure analisiaren arabera, [166] artikuluan proposatutako murrizketek soluzioen estatistikan korrelazio faltsuak sortzen dituztela ikusi dugu. Horiek, gainera, ez dira bateragarriak fluxu jarraituen hurbilketaekin [46].



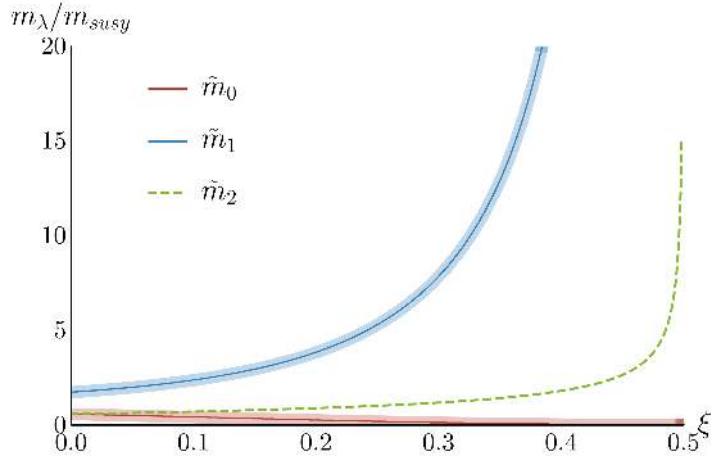
2.5 irudia: Zenbakizko metodoak jarraituz lortutako soluzioen banaketa (τ, z) eremu-espazioan. Laranja kolorez instantoi-ekarpen handiak ($> \%20$) dituzten hutsak adierazi ditugu ((2.52) ekuazioko termino nagusia soilik aintzat hartuz); urdinez, zuzenketak $\%1 - 20$ tartean dituztenak koloreztatu ditugu eta morez, azkenik, $\%1$ baino txikiagoko zuzenketak dituzten hutsak. $(\text{Re}z, \text{Im}\tau)$ planoak ingurune oso definituak erakusten dituen arren, hauek erraz lausotzea espero dugu behin (2.52) adierazpenean maila altuagoko ekarpenak idazterakoan. Testuan aztertutako huts-multzo generikoa $< \%20$ dituzten hutsez osatuta dago, $g_s = (\text{Im}\tau)^{-1} < 1$ ere betetzen dutelarik (hots, irudiko puntu urdinak eta moreak, guztira 119.139 soluzio).

dugu axio-dilatotoi/egitura konplexuaren sektorearen eskalarik gabeko hutsen masa eskalarren espektroa. Masa horiek zenbakizko huts bakoitzaren (2.7) hessiarra diagonalizatuz lortzen ditugunekin bat datozela baieztatu dugu. Espektro horien ezaugarri estatistikoak ondorengo sekzioan aztertuko ditugu, xehetasun osoz.

2.6 Hutsen estatistika

2.4 sekzioan esan bezala, eskalarik gabeko hutsen masa-espektroa fluxu-konfigurazioaren arabera izango da, orokorrean. Espektro horren ezaugarriak determinatzearen, [46] lanaren ikuspuntu estatistikoa erabiliko dugu masen eta beste hainbat kantitate interesgarriaren probabilitate-banaketak lortzeko. Hartara, jarraibide horren formularik garrantzitsuenak aurkeztuko ditugu lehenbizi trinkoketa generikoentzat, eta, ostean, parametro bakarreko ereduetan aplikatuko ditugu.

Analisi honen abiapuntua dugu [46] erreferentzian lortutako fluxu-hutsen dentsitatea,



2.6 irudia: $\mathbb{W}\mathbb{P}_{[1,1,1,1,4]}^4$ trinkoketaren fermioi-masak ξ EKH parametroaren mende, eskalarik gabeko hutsetan. Espektro osoa masa supersimetrikoak ezarritako eskalarekiko normalizatu dugu, hots, $\tilde{m}_\lambda \equiv m_\lambda / m_{\text{susy}}$. Teoria murriztuaren bi fermioien masa adierazten dute goiko eta beheko kurba lodiek, (2.35) emaitza analitikoaren bidez. Kurba solido finak (ikusezinak diren) zenbakizko data-puntuek osatzen dituzte; horiek (2.10) fermioi-masen matrizearen zenbakizko diagonalizazioaren bidez lortu ditugu, multzoaren huts bakoitzean kalkulatu. Erdiko kurba marratuta trunkatutako sektorearen 148 fermioien masa adierazten du, ikus (2.35) espresioko hirugarren ekuazioa (gogoan izan, printzipioz, ETE mailan sektore honen akoplamenduak ezezagunak zaizkigula).

fluxu jarraituen hurbilketa erabiliz kalkulaturakoa. Hurbilketa hau zapaburu-murrizketaren L parametroa handia izatean oinarritzen da, hots, $L \gg 1$; kasu horretan, izan ere, fluxu-kuantizazioa arbuaiatu dezakegu eta formula guztien batukariak integraletan bihurtu ahal izango ditugu:

$$\sum_{N_A^I, N_I^B} \longrightarrow \int d^{2n} N_A d^{2n} N^B, \quad (2.55)$$

non $n = h^{2,1} + 1$ den eta $N = f - \tau h$ bektorearen osagai bakoitza f eta h osokoek parametrizatutako zenbaki konplexuak diren. Halaber, [46] artikuluan frogatu den eta **A** eranskinen berrikusi dugun bezala, fluxu bektorearen Hodge deskonposaketa erabiliz korrespondentzia zuzena dugu $\{N_A^I, N_I^B\}$ fluxu konplexuen eta $\{Z_A, F_A\}$ ($A = 0, \dots, h^{2,1}$) aldagai konplexuen artean. Azken horiek horrela definitzen dira:

$$Z_0 \equiv \mathcal{V} e^{K/2} W, \quad Z_a \equiv \mathcal{V} Z_{0a}, \quad F_0 \equiv \mathcal{V} e^{K/2} D_0 W, \quad F_a \equiv \mathcal{V} e^{K/2} D_a W. \quad (2.56)$$

Noski, bi kasuetan guztira $2n$ aldagai konplexu izango ditugu. Azken aldagai horiek fluxu-multzoa deskribatzeko erabilgarriak dira oso, eskalarik gabeko hutsek $F_A = 0$ baldintza betetzen baitute. Ondorioz, fluxuen banaketa laua onartuz, eta Kac-Rice formula orokortua⁹ [168, 169] erabiliz (ikus, adibidez, [170]), eskalarik gabeko hutsen dentsitate-funtzioa hauxe

⁹Funtsean, Kac-Rice formulak funtzio jarraituen erroak zenbatzen ditu domeinu jakin batean, Dirac-en delten ezaugarrien bidez. Xehetasun osoz deskribatuko dugu adierazpen hori 5. kapituluaren eta **C** eta **E** atalaz; hain zuzen ere, ausazko funtzioetan aplikatu dezakegu Kac-Rice formula, besteak beste, horien huts kopurua kalkulatzeko bolumen jakin batean.

dugu [46]:

$$d\mu_{vac}(Z_A, u^A) = \mathcal{N} \cdot |\det \mathcal{H}|^{1/2} |\det g| e^{-|Z|^2} \cdot d^{2n} Z \cdot d^{2n} u, \quad (2.57)$$

non eremuak $u^A = \{\tau, z^a\}$ zeinuan bildu ditugun, g modulu-espazioaren metrika den, eta \mathcal{H} eskalarik gabeko potentzialaren kanonikoki normalizatutako hessianra den, ikus (2.7) eta (2.12) (xehetasun gehiagorako, jo C eranskinera). Testuan zehar, banaketa bakoitzaren normalizazio konstantea izango dugu \mathcal{N} , banaketa bakoitzerako banaka lortu beharko dena.

Gure analisirako interesatzen zaizkigun ereduak nahi adina egitura konplexuaren modulu izan ditzakete. Alabaina, soilik batek biziraun ahal izango du trunkamendua. Horrez gain, trunkatze horren ondorioz, $N = \{N_A^I, N_I^B\}$ fluxu bektorearen $I = 0, 1$ osagaiak soilik piztu behar ditugu (guztira, 8 osoko fluxu). Beraz, eredu horien estatistika (2.57) adierazpenaren bidez deskribatzea daukagu, $h^{2,1} = 1$ ($n = 2$) ipiniz. Kasu horretan, \mathcal{H} hessiarraren determinantea hauxe dugu:

$$|\det \mathcal{H}|^{1/2} = ||Z_0|^4 + |Z_1|^4 - (2 + \mathring{\kappa}^2)|Z_0|^2|Z_1|^2|. \quad (2.58)$$

Azken adierazpenaren forma sinpleak masen banaketan kalkulua erabat erraztuko du, ikusiko dugun bezala.

2.6.1 Eskalarik gabeko hutsen banaketa modulu-espazioan

Arestiko (2.57) adierazpeneko Z_A aldagaiak integratuz, $h^{2,1} = 1$ kasuan, eskalarik gabeko hutsen dentsitatea lortuko dugu [46]:

$$d\mu(z, \tau) = \mathcal{N} \cdot |\det g| \cdot \left(2 - \mathring{\kappa}^2 + \frac{2\mathring{\kappa}^3}{\sqrt{4 + \mathring{\kappa}^2}} \right) d^2\tau d^2z, \quad (2.59)$$

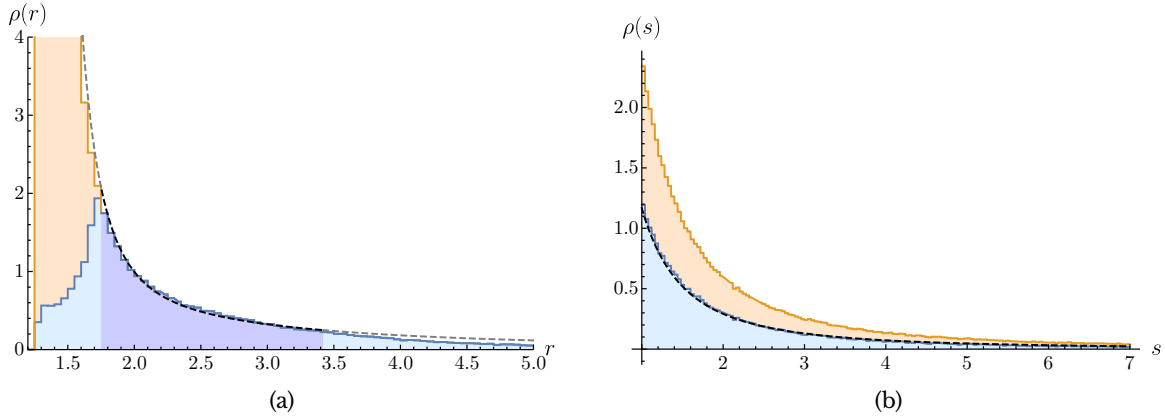
non

$$|\det g| = \frac{3}{16} \left(\frac{2\kappa_{zzz}}{3|\text{Im}\kappa_0|} \right)^{2/3} \frac{(r^3 - 2)r}{(r^3 + 1)^2 s^2} \quad (2.60)$$

modulu-espazioaren metrikaren determinantea den eta κ_{zzz} (kanonikoki normalizatu ez dugun) z eremuaren Yukawa akoplamendua den. Bestalde, aurreko adierazpena argitzeko, hauexek ere definitu ditugu:

$$s \equiv \text{Im}\tau \quad \text{eta} \quad r \equiv 1/\xi^{1/3} = \left(\frac{2\kappa_{zzz}}{3|\text{Im}\kappa_0|} \right)^{1/3} \text{Re } z. \quad (2.61)$$

Hartara, (2.29) ekuazioan definitutako $\mathring{\kappa}$ kantitatea, ξ -ren mendekoa zena, (2.59) adierazpenean erabiltzean $\text{Re } z$ aldagaiaren funtzioa dela aintzat hartu beharko dugu, hemen landuko ditugun ereduaren eskalarik gabeko dentsitate-funtzioetan behintzat. Bestalde, $\text{Re } z$ eta $\text{Im } \tau$ aldagaien probabilitate-banaketa marjinalak 2.7 irudian marraztu ditugu. Argi dago, histogrametan ikus daitekeenez, adierazpen teorikoak eta oktikaren zenbakizko ekorketaren bidez lortutako banaketak bat datozela. (2.59) eta (2.61) adierazpenekin konbinatuz, zuzenean lortu



2.7 irudia: (a) Eskalarik gabeko hutsen egitura konplexuaren sektorearen dentsitate marjinala (kurba marratuta), hots, (2.59), eta $\mathbb{W}\mathbb{P}_{[1,1,1,1,4]}^4$ ereduaren zenbakizko eskalarik gabeko huts-multzo generikoaren histograma. $r \equiv (2\kappa_{zzz}/3|\text{Im}\kappa_0|)^{1/3} \text{Re}z$ definizioak egitura konplexuaren eremua adierazten du hutsetan, horren mugak $r = 2^{1/3}$ eta $r \rightarrow \infty$ (EKH puntua) direlarik. Laranja kolorez adierazi dugu instantoi zuzenketa handiak ($> \%20$) dituen eremu-eskualdea. Bestalde, urdinez, (2.59) adierazpenak ($r \in [1.75, 3.42]$ tartean normalizatuta) zuzen deskribatzen duen eskualdea dugu. (b) Axio-dilatoiarene zati irudikariaren (2.59) banaketa marjinala, $s \equiv \text{Im}\tau$ (kurba marratuta), eta eskalarik gabeko soluzio generikoen histograma.

daiteke ξ parametroaren probabilitate-banaketa funtzioa ere:

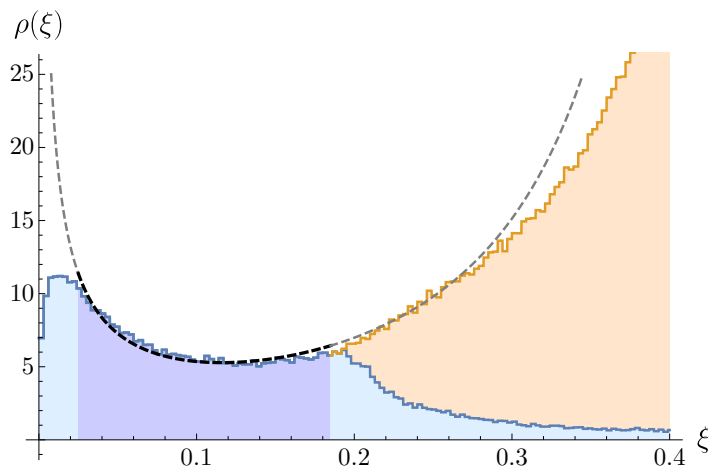
$$d\mu(\xi) = \mathcal{N} \cdot \frac{(1-2\xi)}{(1+\xi)^2 \xi^{2/3}} \left(2 - \hat{\kappa}(\xi)^2 + \frac{2\hat{\kappa}(\xi)^3}{\sqrt{4 + \hat{\kappa}(\xi)^2}} \right) d\xi. \quad (2.62)$$

Horren ξ -rekiko menpekotasuna 2.8 irudian ikus daiteke, oktikaren zenbakizko huts-multzo generikoarekin batera.

Aurreko banaketei erreparatuz, nabarmena da hutsen dentsitatea handitzen dela r aldagaia txikitzen dugun heinean (alegia, $\xi \rightarrow 1/2$), konitate-puntura iritsi arte, $r_{\text{cnf}} \approx 1.37$ ($\xi_{\text{cnf}} = 0.39$). Aitzitik, modulu-espazioaren kurbadura handiko eskualdeetan huts-dentsitatea hazten delaren itxaropenarekin bat dator [97, 171, 172]. Hain zuzen ere, (2.59) erabiliz lortu ditugun $\text{Re } z$ aldagaiaren dentsitate-funtzio marjinalak ez dira normalizagarriak euren euskarri osoa $r \in [2^{1/3}, \infty)$ tartea¹⁰ dela onartzen badugu. Hartara, hutsek jarraitu behar ko luketen banaketa normalizagarria ez denez, gure lagingaren tamaina edonolako dela ere, histograma guztiek probabilitate-banaketarekiko defizita izango dute beti (ikus 2.8 irudiko $\xi \gtrsim 0.3$ eskualdea, adibidez). Hala eta guztiz ere, erraz ekidin ditzakegu banaketa ez-normalizagarria erabiltzearen arazo nagusiak: gogoan izan oktikaren ETEaz fidatu gaitzkeela soilik instantoi-zuzenketa txikiak diren (2.53) eskualdean, edo bestela idatzita, $r \in [1.75, \infty)$ tartean. Beraz, (2.59) adierazpenaren euskarria eta ETEaren baliozkotasun eskualdea bat baldin badatoz, probabilitate-banaketa finitua eta normalizagarria izango da, hots, ondo definituta egongo da.

Bestalde, 2.8 irudian ikus dezakegun bezala, EKH puntuaren inguruan ($\xi \approx 0$) lortu dugun eskalarik gabeko huts generikoen dentsitatea oso txikia da, fluxu jarraituen hurbilketan

¹⁰Gogoan izan $\xi < 1/2$ baldintza, modulu-espazioaren mugetik at, arestian lortu dugula instantoiaren ekarpenak erabat arbuaiatuz. Ondorioz, murrizketa horrek ez du konitate puntuari ($\xi_{\text{cnf}} = 0.39$) buruzko informaziorik izango inola ere.



2.8 irudia: ξ EKH parametroaren (2.62) banaketa N_A^0 baldintzaturik gabeko fluxu-multzoan (kurba marratuta), eta $\mathbb{W}\mathbb{P}_{[1,1,1,1,4]}^4$ ereduaren zenbakizko ekorketaren bidez lortutako soluzioen histograma. Koloreen esanahia 2.7 irudikoarekin bat dator.

oinarritutako iragarpen estatistikoarekin alderatuz gero (irudiko kurba marratua). Aitzitik, hori [145, 155] artikuluetako analisekin bat dator. Bertan frogatutakoaren arabera, eskalarik gabeko huts generikoen (hots, N_A^0 murriztu gabe duten) estatistika ezin daiteke deskribatu fluxu jarraituen hurbilketaren bitartez EKH puntu zehatzean; hori ez ezik, EKH puntuaren inguru txiki batean $N_A^0 \neq 0$ betetzen duten eskalarik gabe hutsik ez dagoela frogatu zuten ere. Emaiza hori [134] artikuluan ere lortu zen, izan ere, horren arabera, bertan aurkeztutako teknikek modulu-espazioaren eskualde txikitara murrizterakoan ez dutela zertan balio adierazi zen. Tesi honen D.2 eranskinean fluxu jarraituen hurbilketaren baliozkotasun eskualdea estimatu dugu ((2.43) ekuazioa). Atal honetako huts-multzoari dagokionez, ondorengo baldintza inposatu beharko diogu EKH parametroari:

$$\xi \geq \xi_{\min} = 0.025. \quad (2.63)$$

Hurrengo atalean fluxu jarraituen hurbilketa baliozkoa den eskualdearen (hau da, (2.53) eta (2.63) borneek definitzen duten modulu-eskualdearen) ezaugarriak aztertuko ditugu; zehatzago esanda, eskualde horretako hutsek duten masa-espektroa eta horren estatistika lortuko ditugu.

Azpiatal hau bukatu baino lehen, g_s soka-akoplamendu konstanteari buruzko pare bat hitz. Bai (2.59) emaitza analitikoek, bai 2.7(b) irudian marraztutako zenbakizko histogramek, argi erakusten dute $\text{Im}(\tau)$ aldagaiaren probabilitate-dentsitatea $\rho(\text{Im}\tau) \propto 1/(\text{Im}\tau)^2$ gisakoa dela. Horrenbestez, zuzenean baieztatu dezakegu $g_s = (\text{Im}\tau)^{-1}$ soka-akoplamendua uniformeki banatuta dagoela. Ondorio hori garrantzizkoa da [173] lanean lortutako supersimetriaren haustura-eskalaren banaketaren kalkulua bideratzeko, g_s konstanteak banaketa laua izatean oinarritzen baita.

2.6.2 Eskalarik gabeko huts generikoen masen banaketak

Arestian lortu dugun (2.57) probabilitate-banaketa erabiliz, zuzenean lortu ahal izango ditugu masa eskalarren eta fermioi-masen banaketak fluxu generikoaren huts-multzoarentzat.

Hain zuzen ere, edonolako ξ EKH parametrodun eta θ_W parametro angeluardun hutsean, grabitinoaren masarekiko normalizatutako masa fermioikoen espektroa hauxe dugu:

$$x_\lambda \equiv m_\lambda / m_{3/2} = \begin{cases} \zeta \hat{m}(\xi) & \lambda = 0 \\ \zeta \hat{m}(\xi)^{-1} & \lambda = 1 \\ \frac{\zeta(1+\xi)}{\sqrt{3(1-2\xi)}} & \lambda = 2, \dots, h^{2,1} \end{cases}, \quad (2.64)$$

non (2.35) eta (2.39) erabili ditugun, eta $\zeta \equiv \tan^2 \theta_W \in [0, \infty]$ definitu dugun. Ondoren, masa horien banaketa lortzeko, $\{\xi, \zeta\}$ aldagaien baterako banaketa beharko dugu. Hori (2.57) eta (2.58) ekuazioetatik lortu dezakegu, beste aldagai guztiak integratuz, hots, $\arg(Z_0)$ eta $\arg(Z_1)$ faseak, $|Z_A|^2 = N_{\text{flux}}$ fluxuek induzitutako D3-karga totala, eta τ eta $\text{Im } z$ eremu-espazioko norabideak integratuz. Hartara, ζ eta ξ aldagaien banaketa hauxe dugu:

$$d\mu(\zeta, \xi) = \mathcal{N} \cdot \frac{(1-2\xi)}{\xi^{2/3}(1+\xi)^2(1+\zeta)^4} |\zeta - \hat{m}(\xi)^2| |\zeta - \hat{m}(\xi)^{-2}| \cdot d\zeta d\xi. \quad (2.65)$$

Aurreko (2.64) ekuazioan bistan da ξ parametroa finkatuz, ζ eta berreskalatutako x_λ fermioi-masa bakoitzaren arteko korrespondentzia zuzena ezarri dezakegula. Ondorioz, (2.65) adierazpenean $\{\zeta, \xi\} \rightarrow \{x_\lambda, \xi\}$ aldagai-aldaketa eginez, hiru banaketa lortuko ditugu, x_λ -ren adar bakoitzarentzat. Ondoren, EKH parametroa integratuz (2.53) eta (2.63) espresioek osatzen duten $\xi \in [\xi_{\min}, \xi_{\max}]$ tartean, teoria murriztuaren fermioi-masen banaketa marjinalak lortuko ditugu:

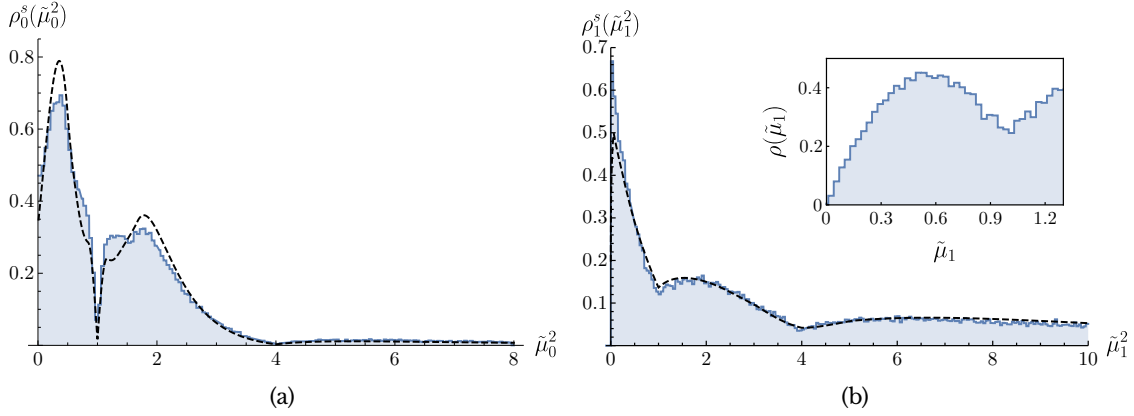
$$\rho_0^f(x_0) = \mathcal{N} |x_0^2 - 1| x_0 \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} d\xi \frac{(1-2\xi) \hat{m}(\xi)^2}{\xi^{2/3}(1+\xi)^2(\hat{m}(\xi)^2 + x_0^2)^4} |x_0^2 - \hat{m}(\xi)^4|, \quad (2.66)$$

eta

$$\rho_1^f(x_1) = \mathcal{N} |x_1^2 - 1| x_1 \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} d\xi \frac{(1-2\xi) \hat{m}(\xi)^2}{\xi^{2/3}(1+\xi)^2(1+x_1^2 \hat{m}(\xi)^2)^4} |x_1^2 \hat{m}(\xi)^4 - 1|. \quad (2.67)$$

Aurreko ekuazioetan zuzenean ikus dezakegu $m_{\lambda=0,1} = m_{3/2}$ (hots, $x_{\lambda=0,1} = 1$) masa duten hutsak aurkitzeko probabilitatea guztiz ezabatuta dagoela, hau da, $\rho_{\lambda=0,1}^f(1) = 0$. Kac-Rice formularen ondorio zuzena dugu hori (ikus (2.57)). Izan ere, hutsen dentsitatea hessiarraren determinantearen erro karratuarekiko, $|\det \mathcal{H}|^{1/2}$, proportzionala da. Hartara, masarik gabeko modu eskalarrak dituzten eskalarik gabeko hutsak oso arraroak izango dira. (2.9) adierazpenaren arabera, masarik gabeko modu eskalarrak ditugu fermioi-masa batek grabitinoaren masa duenean; ondorioz, $m_\lambda = m_{3/2}$ duten hutsak nekez aurkituko ditugu Paisaian. Nabarmenezkoa da azken baitapenak ez duela esan nahi $m_{\lambda=0,1} = m_{3/2}$ masako hutsen existentzia guztiz ezinezkoa dela, baizik eta soluzio horiek huts guztien frakzio xumea besterik ez dutela adierazten. Hain zuzen ere, hessiarraren balio propio nuluak dituzten puntu kritikoen ezabaketa, puntu kritikoen arteko itxurazko aldarazpena ondoriotzat duena, ausazko funtzioen ezaugarri generikoa da (ikus, adibidez, [170]), eta Paisaiaren bestelako karakterizazioetan ere ikusi izan da [174, 175].

Trunkatutako fermioien berreskalatutako masari dagokienez, $x_{\lambda'} = m_{\lambda'} / m_{3/2}$, ondoren-



2.9 irudia: Grabitinoaren masarekiko normalizatutako masa eskalar karratuak, $\tilde{\mu}_\lambda^2 \equiv \mu_\lambda^2 / m_{3/2}^2$, murriztu gabeko fluxu-multzoaren kasuan. Marratutako kurbak (a) eta (b) irudietan (2.69) probabilitate-banaketa adierazten du ((2.66) eta (2.67) kasuetan ebaluatuta), teoria murriztuaren masa eskalarrentzat. Horretaz gain, $\mathbb{W}\mathbb{P}_{[1,1,1,1,4]}^4$ ereduaren zenbakizko ekorketaren bidez lortutako hutsen histograma ere marraztu dugu. (b) irudiko barnekian $\rho(\tilde{\mu}_1)d\tilde{\mu}_1$ banaketa marraztu dugu jatorriaren inguruan, masarik gabeko moduaren ezabaketa argi erakusten duena.

go banaketa lortu dugu:

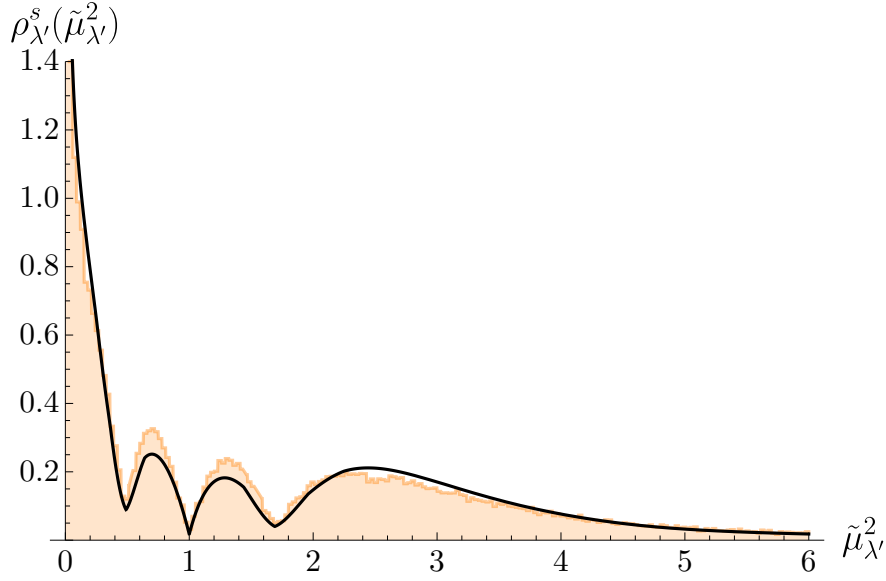
$$\rho_{\lambda'}^f(x_{\lambda'}) = \mathcal{N} x_{\lambda'} \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} d\xi \frac{(1-2\xi)f(\xi)^{-2} |x_{\lambda'}^2 f(\xi)^{-2} - \hat{m}(\xi)^2| |x_{\lambda'}^2 f(\xi)^{-2} - \hat{m}(\xi)^{-2}|}{\xi^{2/3} (1+\xi)^2 (1+x_{\lambda'}^2 f(\xi)^{-2})^4}, \quad (2.68)$$

non $f(\xi) \equiv \frac{1+\xi}{\sqrt{3(1-2\xi)}}$ dugun. Oraingo honetan, ξ -ren balio generikoentzat $x_{\lambda'} = 1$ aurkitzearen probabilitatea ez da nulua sektore trunkatuan, $\rho_{\lambda'}^f(1) \neq 0$. Horren ondorioz, sektore trunkatuan masarik gabeko eremu eskalar bat duten hutsak aurkitzeko probabilitatea *ez da nulua*. Emaitza harrigarri hori ausazko funtzio generikoekin espero beharko genukeenaren kontrakoa da. Horren kausa zuzena ditugu ETEa (edo Paisaia, azken batean) erabat finkatzen duten simetriak. Besteak beste, emaitza hori garrantzitsua da [153, 154] lanetan proposatutako dS hutsen eraikuntzarako, zuhaitz mailan masarik ez duten eskalarrik gabeko hutsen existentzian oinarritzen baita.

Bestalde, (2.66), (2.67) eta (2.68) banaketetek duten ezaugarri komuna zera da: $m_\lambda = 0$ (bestela esanda, $x_\lambda = 0$) balioan nuluak direla. Hau da, fermioi-masa nuluak dituzten eskalarrik gabeko hutsak aurkitzeko probabilitatea edonolako fluxu-hutsen multzoan guztiz ezabatuta dago. Emaitza horren jatorria dugu, alde batetik, (2.7) ekuazioko \mathcal{M} masa-matrizearen egiturari, horren balio propioak $\pm m_\lambda$ bikoteetan baitatoz beti, eta bestetik, *balio propioen aldarazpen* efektuan [176], ausazko matrize multzoen¹¹ ezaugarri tipikoa dena (ikus, adibidez, [180]).

$m_\lambda / m_{3/2}$ kantitatearen histogramak kalkulatu, zuzenean lor ditzakegu masa eskalarren probabilitate-dentsitatearen funtzioak, aldagai-aldaketa baten bidez. Hain zuzen ere, λ

¹¹Eskalarrik gabeko huts-multzoen \mathcal{M} masa-matrizeen bilduma ausazko osagaiez eraikitako matrizeen multzo estatistikotzat jo daiteke [123, 134, 177–179].



2.10 irudia: Trunkatutako sektoreko eremu eskalarren $\tilde{\mu}_{\lambda'}^2 = \mu_{\lambda'}^2 / m_{3/2}^2$ masa karratu normalizatuaren aurreikuspen teorikoa, hots, (2.69) eta (2.68) (kurba beltza). Bestalde, hori alderatzeko, (2.40) adierazpenaren bitartez lortutako masak marraztu ditugu, histograma laranja osatzen dutenak.

bakoitzeko, $\mu_{\pm\lambda}^2$ masa eskalarren adarren probabilitate-banaketa konbinatua hauxe dugu:

$$\rho_{\lambda}^s(\tilde{\mu}_{\lambda}^2) d\tilde{\mu}_{\lambda}^2 = \mathcal{N} \cdot \tilde{\mu}_{\lambda}^{-1} \left[\rho_{\lambda}^f(1 + \tilde{\mu}_{\lambda}) + \rho_{\lambda}^f(|1 - \tilde{\mu}_{\lambda}|) \right] d\tilde{\mu}_{\lambda}^2, \quad (2.69)$$

non $\tilde{\mu}_{\lambda}^2 \equiv \mu_{\lambda}^2 / m_{3/2}^2$ definitu dugun. Banaketa teoriko horiek 2.9 eta 2.10 irudietan marraztu ditugu, zenbakizko huts-multzoaren masa eskalarren histogramekin batera. 2.5 sekzioan deskribatu dugun bezala, trunkamendua bizirauten duten modu eskalarren $\mu_{\lambda=0,1}^2$ masak lortu ditugu (2.10) fermioi-masen matrizea huts bakoitzean diagonalizatuz eta (2.9) aplikatuz. Bestalde, trunkatutako moduei dagozkien $\mu_{\lambda'}^2$ masak (2.40) erabiliz kalkulatu ditugu. Irudiek argi erakusten dute zenbakizko emaitzen eta aurreikuspen analitikoaren arteko adostasun maila oso ona dela energia baxuko ETEa baliozkoa den eta fluxu jarraituen hurbilpena betetzen den eskualdean.¹²

Nabarmena da 2.9 irudian marraztutako sektore murriztuaren espektroaren $\mu_{\lambda}^2 / m_{3/2}^2 = 0, 1, 4$ masa¹³ eskalarrak ezabatuta ageri direla. Hori bat dator arestian egindako eztabaidarekin, lehenengo eta hirugarren kasuetan fermioi masa batek gutxienez $m_{3/2}$ balioa izango duelako; bigarren kasuan aldiz, fermioiren baten masa nulua izan beharko du. Ondorioz, 2.4.3 sekzioko eztabaidari dagokionez, argi dugu $\theta_W = \{\theta_0^W, \theta_1^W\}$ duten huts-adarrak oso arraroak direla, horietan μ_{-0} eta μ_{-1} nulua izango baitira.

Trunkatutako sektorearen espektroan (2.10 irudia), $\mu_{\lambda}^2 / m_{3/2}^2 = 1$ masa duten hutsak ezabatu daudela ikus dezakegu; aitzitik, $\mu_{\lambda}^2 / m_{3/2}^2 \rightarrow 0$ limitean (fermioiak masarik ez dutenean),

¹²2.9 eta 2.10 irudietako histogrametan banaketa teorikoekiko desbideratze txikiak nabari dira. [46] artikuluan eztabaidatu bezala, desadostasun horien jatorria izan daiteke modulu-espazioaren eskualde bornatu batean dauden hutsak bakarrik aztertzea, alegia, (2.53) eta (2.63) limiteak betetzen dituztenetan oinarritzea gure analisia.

¹³ $\mu_1^2 / m_{3/2}^2 = 0$ masaren ezabaketa ez da oso ebidentea 2.9(b) irudia ikusita. Izan ere, (2.69) ekuazioaren $1/\tilde{\mu}_1$ faktorea dela eta oso zaila da zenbakizko histogramaren ezabaketa ondo ikustea. Irudiaren barnekian $\tilde{\mu}_1$ marraztu dugu; bertan, oso argi nabari da masarik gabeko moduen probabilitate ia nulua.

hots, 2.4.3 sekzioko $\theta_W = \theta_2^W$ adarreko hutsetan, banaketa *dibergentea da*. Bestela esanda, eskalarik gabeko soluzioen zati handi samar batean, modu eskalarren erdia grabitinoa baino arinagoa izango dira. Alabaina, huts horietan desegonkortasun takionikoak oso erraz gertatu daitezke efektu kuantikoak (α' zuzenketak edo instantoi-ekarpenak) aintzat hartzerakoan. Zehazki, hutsen %11 ditu $\mu_{\lambda'}^2 \lesssim 10^{-2} m_{3/2}^2$ baldintza betetzen dituen masa eskalarrak eta %3 ditu $\mu_{\lambda'}^2 \lesssim 10^{-3} m_{3/2}^2$ gisako masak. Hori ez ezik, huts zehatz batzuetan masa-hierarkia nabariak ageri dira, $\mu_{\lambda'}^2 \sim 10^{-10} m_{3/2}^2$ bezalako modu arinak dituztenak.

Kontuan izan 2.10 irudian agertzen diren $\mu_{\lambda'}^2 \approx 0.5 m_{3/2}^2$ eta $\mu_{\lambda'}^2 \approx 1.7 m_{3/2}^2$ puntuen inguruak nahiko ezabatuta daudela. Horren kausa zera da: teoria murriztuaren moduak masarik gabekoak direla puntu horietan, hots, $\theta_W = \{\theta_0^W, \theta_1^W\}$ adarretako hutsak direla. Hain zuzen ere, (2.40) espektroaren egitura dela eta, modu guztien masen banaketak probabilitate-dentsitatearen funtzio beretik agertzen dira, (2.65), eta ondorioz edozein huts-adarren eza-baketa beste masen estatistikan ere antzemango da.

Amaitzeko, (2.57) eta (2.58) ekuazioei buruzko pare bat iruzkin. Horien arabera, (2.40) masak eta g_s elkarrekiko estatistikoki independenteak dira. Ondorioz, nahiz eta hemen aztertu dugun multzoak soka-akoplamendu txikia duen, $g_s \leq 1$, espektroaren ezaugarri estatistikoak ez lirateke aldatu behar akoplamendu hori askoz txikiagoa eginez gero, $g_s \ll 1$. Baieztapen hori berrestea xede, 2.9 eta 2.10 irudietako histogramak birkalkulatu genituen $g_s \leq 0.1$ baldintza inposatuz (~ 5000 huts), eta ez genuen aldaketa nabaririk antzeman.

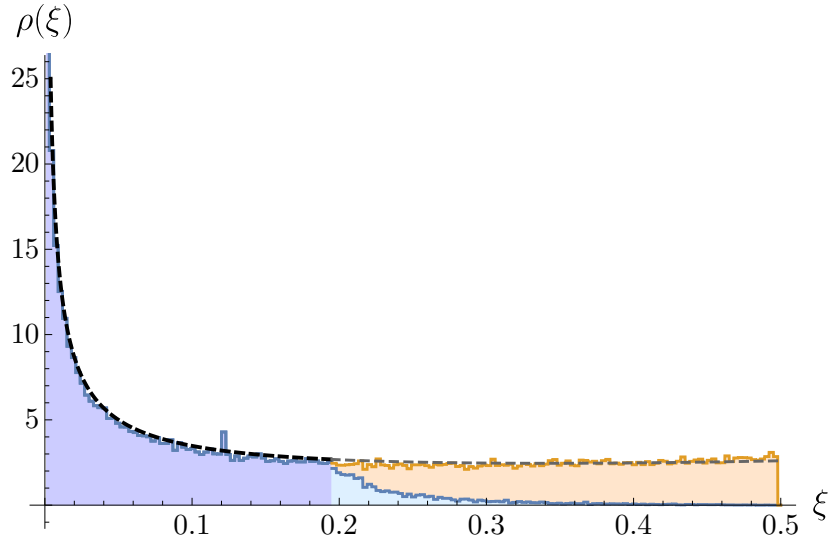
2.6.3 Huts-multzo murriztuaren estatistika

Ondorengoan murriztutako hutsen estatistika izango dugu aztergai, non $N_A^0 = 0$ baldintza inposatu dugun fluxuetan. C eranskinean erakutsi dugun bezala, [46] erreferentziaren metodo estatistikoak erraz egokitu daitezke multzo honetara. Hain zuzen ere, huts hauen dentsitatea hauxe dugu:

$$d\mu_{\text{vac}}(z, \tau) \Big|_{N_A^0=0} = \mathcal{N} \cdot \frac{(1+\xi)\xi^{2/3}}{(2-\xi)^2(\text{Im}\tau)^2} d^2z d^2\tau, \quad (2.70)$$

non ξ -ren menpekotasuna $\text{Re}(z)$ aldagaian datzala aintzat hartu behar dugun. Garrantzitsua da nabarmentzea akoplamendu ahuleko eskualdea soilik kontuan hartuz gero, $\text{Im}(\tau) > 1$, eskalarik gabeko hutsen dentsitatea normalizagarria dela modulu-espazio osoan, baita $\xi \rightarrow \xi_{\text{cnf}}$ konitate puntutik gertu, non ETEa zehaztugabea den. Izan ere, kasu generikoan ez bezala, (2.70) dentsitateak ez du gora egingo (eta finitua izaten jarraituko du) konitate puntura gerturatzen garen heinean eta, ondorioz, z -ren domeinu osoan ondo definituta egongo da (hots, $\xi \in [0, 1/2]$ tartean). Gainera, C eranskinean frogatu dugun bezala, azpi-multzo honetan fluxuen kuantizazioak eta zapaburu finituak ez dute eraginik izango EKH puntuaren inguruko deskribapen estatistikoaren hausturan.¹⁴ Beraz, eskalarik gabeko soluzio generikoen kasuan ez bezala, fluxu jarraituen hurbilketa oso ondo karakterizatuko du huts-multzoa EKH ingurune zorrotzean. Jarraian ikusiko dugun bezala, ereduaren ezaugarri

¹⁴Baieztapen horren kausa dugu $N_A^0 = 0$ baldintza betetzen duten fluxuetan N_B^0 edonolokoa izan daitekeela, fluxu-zapaburua ez baitute aldatuko. Aitzitik, praktikan fluxuak $[-50, 50]$ euskarria duen distribuzio uniforme batetik lortu ditugu eta ondorioz, gure emaitzak fluxu jarraituen hurbilketarekiko desbideratu dira $\xi \lesssim \xi_{\text{min}} = 5 \cdot 10^{-5}$ tartean.



2.11 irudia: EKH parametroaren banaketa, murriztutako fluxuen kasuan. Kurba marratutak (2.11) banaketa teorikoa adierazten du, $5 \cdot 10^{-5} \leq \xi \leq 0.185$ tartean normalizatu duguna (ikus 14 oin-oharra). Zenbakizko eskalarik gabeko hutsen ξ -ren histograma marraztu dugu ere, 2.7 irudiko kolore-kodea jarraituz.

horiek direla eta, zenbakizko ekorketa eta deskribapen estatistikoa bat etorriko dira guztiz.

Aurreko ataleko pausu berdinak jarraituz, ξ EKH parametroaren probabilitate-banaketa kalkulatu hasiko gara. Kasu honetan, hauxe dugu:

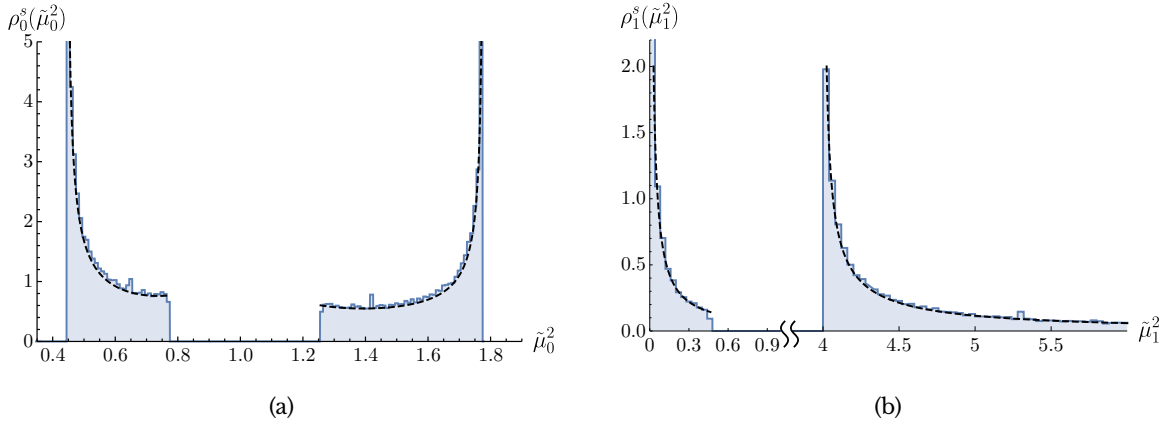
$$\rho(\xi)d\xi = \frac{2^{1/3}(1+\xi)}{(2-\xi)^2\xi^{2/3}}d\xi. \quad (2.71)$$

Banaketa hori, eta zenbakizko ekorketaren bidez lortutako histograma, 2.11 irudian marraztu ditugu. Bistan da formula analitikoa histogramarekin bat datorrela ξ -ren domeinu osoan. Histograma eraikitzean, modulu-espazioaren metrika ondo definituta dagoen eskualdeko eskalarik gabeko huts guztiak erabili ditugu, hots, $\xi \in [0, 1/2]$ tartean daudenak. Haatik, soilik urdin argiz eta ilunez koloreztatutako zatiak ditu zuzenketa instantoiko txikiak. Zuzenketa handi samarrak dituzten hutsak (laranjaz) baztertuz, $\xi \approx 0.2$ inguruko jaitiera sortu dugu (urdin argiz kolorztetatu). Deskribapen estatistikoak ez ditu aintzat hartzen multzoa trun-katzearen eraginak eta, ondorioz, haren baliozkotasun tartea huts gehiegirik baztertu ez ditugun ξ -ren eskualdea izango da. Histograman urdin ilunez koloreztatu dugu eskualde hori, eta masa-espektroen estatistikak osatzeko erabiliko dugu, bai zenbakizko metodoen bitartez, bai fluxu jarraituen hurbilpenaren bidez.

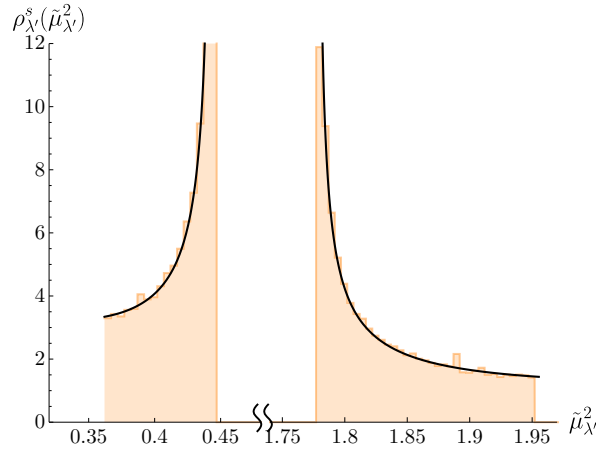
Bitxikeria interesgarria dugu $\xi \approx 0.12$ puntuan ikusi daitekeen punta txikia.¹⁵ Punta hori osatzen duten soluzioak aztertuz antzeman dugu guztiek $N_A^1 = N_B^0$ eta $\text{Im}z = 0$ baldintzak betetzen dituztela. Nahiz eta handiagotze lokal honen gorabeheretan gehiago ez dugun sakondu, baliteke fluxuen aukera zehatz hori ETEaren simetria (zehatza edo hurbildua) osatzea. Horrelako simetriak eskalarik gabeko soluzioen metaketak sortzen dituztela nabaritu da bestelako ereduetan [98] modulu-espazioko puntu berezietan.

Aurreko sekzioan bezala, (2.71) dentsitate-funtzioa $m_\lambda/m_{3/2}$ berreskalatutako fermioi-

¹⁵ ξ -ren histogramaren punta hori 2.12 eta 2.13 irudietan ere nabari daiteke, aldagai guztiak euren artean erlazioatuta baitaude.



2.12 irudia: Masa eskalar karratuen banaketa, $N_A^0 = 0$ bidez murriztutako fluxu-hutsetan, eta grabitinoaren masarekiko normalizatuta, $\tilde{\mu}_\lambda^2 = \mu_\lambda^2 / m_{3/2}^2$, non (a) $\lambda = 0$ eta (b) $\lambda = 1$ marraztu dugun. Marratutako kurbek teoria murriztuaren eremuen masa-banaketa teorikoak adierazten dituzte, alegia, (2.69), (2.72) banaketa erabiliz. Histogramek $\mathbb{W}\mathbb{P}_{[1,1,1,1,4]}^4$ ereduaren zenbakizko soluzioak (multzo murriztuan) adierazten dituzte.



2.13 irudia: Murriztutako huts-multzoaren trunkatutako eremu eskalarren $\tilde{\mu}_{\lambda'}^2 = \mu_{\lambda'}^2 / m_{3/2}^2$ normalizatutako masa karratuen probabilitate-banaketa (kurba beltza), hots, (2.69) eta (2.72) ekuazioak. Histograma baten bidez marraztu ditugu (2.40) ekuazioa huts-multzo osoari aplikatuz lortu ditugun zenbakizko balioak.

masen banaketak kalkulatzeko erabiliko dugu. $\xi \rightarrow x_\lambda$ aldagai-aldaketa eginez, eta (2.64) erabiliz $\tan\theta_W = \sqrt{(1-2\xi)/3}$ murrizketarekin batera (ikus 2.4.4 sekzioa), ondorengo banaketa lortuko dugu:

$$\rho_\lambda^f(x_\lambda) dx_\lambda = \frac{2^{1/3}(1+\xi)}{(2-\xi)^2 \xi^{2/3} (dx_\lambda(\xi)/d\xi)} \Big|_{\xi(x_\lambda)} dx_\lambda, \quad (2.72)$$

non $x_\lambda = m_\lambda / m_{3/2}$ definitu dugun, arestian bezala. Masa eskalar karratuen banaketak (2.69) erabiliz lor daitezke; horiek 2.12 eta 2.13 irudietan marraztu ditugu, zenbakizko ekorketaren bidez lortutako hutsen masen histogramekin batera. Multzo generikoaren kasuan egin dugun bezala, murriztutako teoriaren masen ($\mu_{\pm 0}^2$ eta $\mu_{\pm 1}^2$) histogramak lortu ditugu lehenik (2.10) fermioi-masen matrizea diagonalizatuz, eta bigarrenik (2.9) erabiliz. Bestalde, trunkatutako moduen $\mu_{\pm \lambda'}^2$ masak zuzenean (2.48) aplikatuz kalkulatu ditugu. Oraingo

honetan ere, aurreikuspen analitikoak eta zenbakizko kalkulu zuzenak erabat ados daudela ikus dezakegu. Azpimarragarria da, aurreko kasu generikoan bezala, g_s soka-akoplamendua (2.48) adierazpeneko masekiko independentea dela. Beraz, nahiz eta hemen aurkeztutako zenbakizko histogrametan $g_s \leq 1$ inposatu dugun, gure ondorioak baliozkoak dira oso ahulki akoplatutako hutsetan ere,¹⁶ $g_s \ll 1$.

Banaketa horien ezaugarririk garrantzitsuena da $\mu_{\pm 1}^2 \ll m_{3/2}^2$ masen probabilitatearen diberjentzia (ikus 2.12(b) irudia). Horren ondorioz, $\theta_W = \theta_1^W$ baldintzak definitzen duen adarreko hutsak (ikus (2.42)) maiztasun handi samarraz gertatuko dira. Gogoan izan multzo generikoan kontrako efektua antzeman dugula, huts-adar horretako soluzioak aurkitzeko probabilitatea oso ezabatuta baitzegoen.

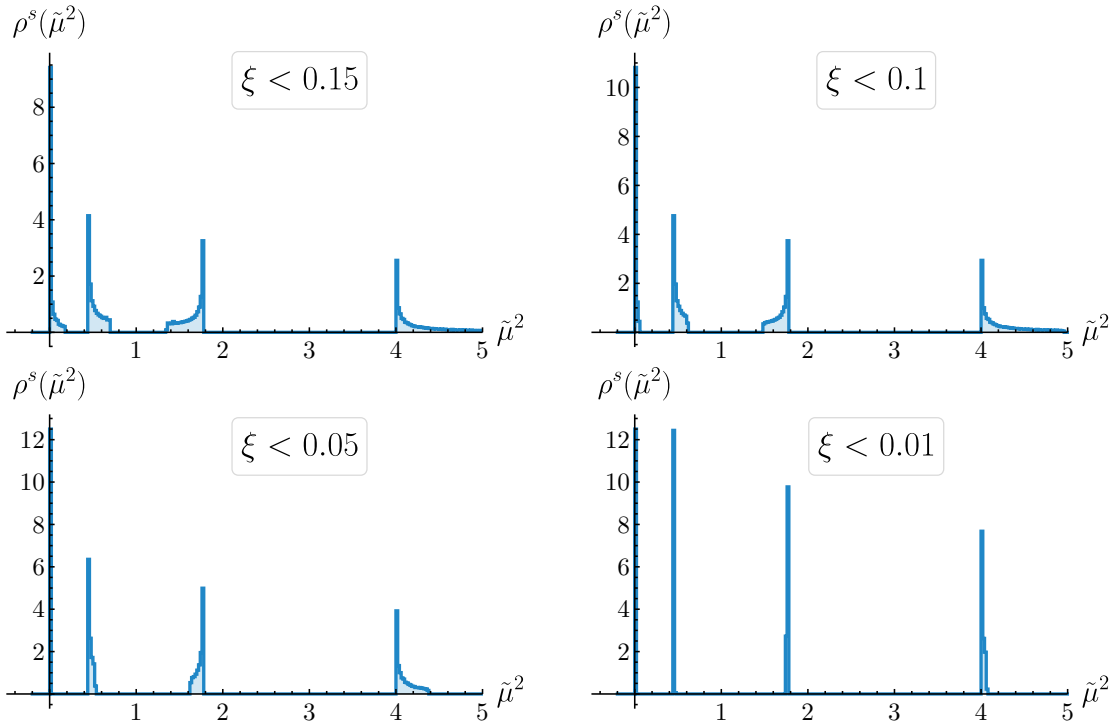
Azkenik, masa-espektroa hutsak EKH puntuarekiko duen distantziaren arabera esplizituki aztertu dugu. Horretarako, zenbait masa-histograma osatu genituen distantzia hori geroz eta gehiago murriztuz. Prozedura horren emaitzak 2.14 irudian erakutsi ditugu. Bertan, $\xi \leq \xi_{\max}$ duten lau huts-multzo erabili ditugu, non $\xi_{\max} = \{0.15, 0.1, 0.05, 0.01\}$ den. Irudian argi ikusi daiteke EKH puntuarekiko distantzia zenbat eta txikiagoa izan, hutsen masen banaketak orduan eta deterministagoak direla. Gainera, $\xi \leq 0.01$ kasuan bistan da histogramaren punta guztiak (2.49) adierazpeneko balioekin bat datozela. Gainera, azken eskualde murriztu horretan nabaria da espektroak beti masa (ia) nuluko eremu bat duela, $\mu_{-1}^2 \approx 0$, eta modulu-espazio murriztuan ageri dela (hots, $\theta_W \approx \theta_1^W$).

2.7 Ondorioak

IIB fluxu trinkoketen eskalarik gabeko hutsak ezinbesteko osagaiak dira dS hutsak eta inflazio-ereduak sortzeko KKL^T eta LVS eraikuntzetan. Guzti horien baliozkotasuna bermatzeko, eskalarik gabeko hutsen espektro perturbatiboa ondo ezagutzea ezinbestekoa da. Hain zuzen ere, nahiz eta eskalarik gabeko propietateak takioien agerpena ekidingo duen axio-dilatoi/egitura konplexuaren sektorean zuhaitz mailan, horrek ez ditu eremu arinen existentzia ezeztatzen, eta azken horiek takioniko bihur litezke behin zuzenketa kuantikoak, goratze terminoak edota materia-eremuak aintzat hartzerakoan [179, 181]. Gainera, modu arin horiek eredu inflazionarioetan hainbat arazo sor ditzakete, inflazioaren eraginez eremuak desegonkortu bailitezke.

Huts horiek oso garrantzitsuak diren arren, eskalarik gabeko hutsen espektro perturbati-boaren azterketa analitiko osoa ezin izan da orain arte bideratu, ETEaren konplexutasuna eta egonkortu beharreko eremu kopuru handia direla eta. Kapitulu honetan Calabi-Yau trinkoketa mota berezia aztertu dugu, edonolako modulu kopurua duena, eta horren masa-espektro osoa kalkulatu dugu *analitikoki* axio-dilatoi/egitura konplexuaren sektorearentzat, eskalarik gabeko hutsetan eta EKH eskualdean (ikus (2.40)). Geometria horiek isometria-talde handi eta diskretuekiko inbariantek dira; horren ondorioz, egitura konplexuaren sektorea eremu bakar batera murriztu ahal izan dugu. Hain zuzen ere, Calabi-Yau geometriaren simetriek ahalbidetu dute trunkamendua biziraun duen egitura konplexuaren moduluaren ETEaren konputazioa [21, 119, 124, 133]. Hartara, simetria-argudioak erabiliz eta

¹⁶ Azken baieztapen hori esplizituki berretsi genuen, zenbakizko masen histogramak kalkulatu, $g_s \leq 0.1$ baldintza betetzen zuten hutsak soilik erabiliz (guztira, ~ 2500 huts)



2.14 irudia: Teoria murriztuaren eremu eskalarren $\tilde{\mu}_{\lambda=0,1}^2 = \mu_{\lambda=0,1}^2 / m_{3/2}^2$ masa karratu normalizatuen histogramak. Azpi-irudi bakoitzean, ξ EKH parametroaren goi-borne zehatza aukeratu dugu eta baldintza hori betetzen dituzten hutsak soilik kontuan hartu ditugu. ξ -ren goi bornea txikitzen dugun heinean, banaketak deterministagoak bihurtzen dira; horien puntak (2.49) ekuazioko balioak ditugu, hots, $\xi \rightarrow 0$ limitean gerta daitezkeen masen balio bakarrik. Irudikapen hauetan $\mu_{-1} \ll m_{3/2}$ modu arina ageri da, $\xi \rightarrow 0$ limitean nulua egiten dena, $\mu_{-1} \rightarrow 0$.

EKH inguruneko ETEaren akoplamenduek betetzen dituzten zenbait baldintza aplikatuz, axio-dilatoi/egitura konplexuaren sektore osoaren masa-espektroa kalkulatu ahal izan dugu, trunkatutako eremuak barne. Gainera, espektro osoa erraz determinatu daitezkeen murriztutako ETEaren akoplamenduen mende idatz daiteke. Emaitza hori hainbat trinkoketa interesgarritan aplikatu daiteke, besteak beste: simetria-talde diskretuak dituzten *kintika* hipergainazal-familia [119] $\mathbb{WP}_{[1,1,1,1,1]}$ espazioan [125]; kintikaren antzekoak diren hipergainazal (adibidez, sextikan, oktikan eta dektikan), antzeko konfigurazio simetrikoak dituztenak [124, 133]; eta beste hainbeste, ikus [94] eta bertako erreferentziak. Horietan ez ezik, gure emaitzen bidez [128] artikuluan zerrendatutako ehunka parametro bakarreko ereduren EKH eskualdea deskribatzea daukagu. Garrantzitsua da azpimarratzea simetria diskretu global horiek haustea espero dugula behin α' efektuak eta zuzenketa kuantikoak kontuan hartzen ditugunean [53, 182, 183]. Ekarpn horiek zuzenketa txikiak induzituko dituzte (2.40) espektroan eta, gainera, trunkatutako sektorearen endekapena hautsiko dute.

Hemen aztertu ditugun ereduetan, EKH/akoplamendu ahuleko limite zorrotza oso interesgarria zaigu, modulu-espazioaren eskualde hori baita ETEaren kontrol perturbatiborik hoberena eskaintzen duena. Aitzitik, [145, 155] lanetan frogatu bezala, fluxuen konfigurazio generikoak erabiliz ezinezkoa da modulu-espazioaren eskualde horretan hutsik aurkitzea. Hala ere, ondorio horiek erraz ekidin daitezke, limite horretan superpotentzian mugarik gabe handitzen den periodoaren osagaiari atxikitutako fluxua nulua eginez ($N_A^0 \equiv f_A^0 - \tau h_A^0 = 0$,

(1.35) ekuazioan). Izan ere, kasu horretan fluxu-superpotentzialaren ordena handieneko terminoak identikoki nuluak izango dira, eta ondorioz [145, 155] lanen emaitzak ez dira aplikagarriak. Hartara, 2.4.4 sekzioan, mota horretako eskalarik gabeko hutsen masa-espektroa kalkulatu eta EKH limite zorrotzean egitura unibertsala duela frogatu dugu. Nabarmentze-koa da espektro horretan beti aurkitu ahal izango dugula masarik gabeko eremu bat, beste guztien masa grabitinoaren masaren ordenakoak izanik. Ildo berean, [184, 185] artikuluetan EKH limite zorrotza bizirauten duten antzeko huts-motak aztertu izan dira; hain zuzen ere, [152] erreferentzian, masarik gabeko eremuak aurkitu dira eskalarik gabeko espektroan, instantoi-ekarpenek masadun bihurtzen dituztenak.

Gure aurreko emaitzak bat datoz [186, 187] artikulukoekin; azken horien arabera, EKH puntutik parametrikoki gertu dauden hutsak lortzeko *mugatu gabeko fluxuak* piztu behar dira, hau da, $D3$ -karga totala aldatzen ez dituzten fluxuak, erabili behar ditugu. Hori ez ezik, [187] artikulua eztabaidaren arabera, mugatu gabeko fluxuen ekarpena fluxu-superpotentzian arbuigarria izan behar du EKH limite zorrotzean. Ildo beretik, arestian aztertutako eskalarik gabeko soluzioak aurreko bi baldintzak betetzen dituzte, eta ondorioz, [187] artikuluko ezintasun teoremekin bat datoz (ikus 2.4.4 sekzioa). Alde batetik, periodo dibergentearen $N_A^0 \equiv f_A^0 - \tau h_A^0$ fluxua nulua egitearen ondorio zuzena da B -ziklo dualaren $N_0^B \equiv f_0^B - \tau h_0^B$ fluxuak ez duela zapaburuan ekarpenik emango. Bestalde, fluxu-superpotentzian N_0^B fluxuari atxikitutako terminoa konstantea denez, horren eragina eskalarik gabeko potentzian asintotikoki arbuigarria izango da EKH puntuan. Gogoan izan [186, 187] analisiak soilik EKH limite zorrotzean aplikatu daitezkeela; hemen aurkeztutako emaitzak, aldiz, EKH puntutik kanpo erabili ditzakegu eskalarik gabeko potentziala karakterizatzen, aurreko lanetan esploratu ez den modulu-espazioaren eskualdean.

Fluxu-huts generikoetan, EKH puntutik edozein distantziara daudela, masa-espektroak ez du (2.49) ekuazioa bezalako forma determinista izango, eta ondorioz, fluxuen arabera izango da orokorrean. Hori dela eta, fluxuarekiko independentea den espektroaren karakterizazioa lortzeko, moduluen masen ezaugarri estatistikoak aztertu ditugu huts-multzo generiko batentzat. Zehazki, fluxu jarraituen hurbilketa erabiliz, hutsen eta masen dentsitateen probabilitate-banaketa kalkulatu ditugu analitikoki, bai huts-multzo generikoarentzat, bai $N_A^0 = 0$ baldintzaren bidez murriztutako multzoarentzat. Hori ez ezik, banaketa horiek berretsi ditugu $\mathbb{W}\mathbb{P}_{[1,1,1,1,4]}^4$ ereduaren (oktikan) bideratutako zenbakizko ekorketa baten bitartez. 2.7–2.13 irudietan argi ikus daitezkeen bezala, banaketa analitiko eta enpirikoak bat datoz guztiz, fluxu jarraituen hurbilketa baliozkoa den eskualdean betiere.

Hutsen dentsitateari dagokionez, aurreikuspen estatistikoak iragarritako baino huts askoz gutxiago aurkitu ditugu EKH puntutik gertu multzo generikoaren kasuan (ikus 2.8 irudia). Dena den, banaketa teorikoekiko desadostasun hori dagoeneko [145, 155] lanetan aurreikusi da (ikus [46] ere), fluxu jarraituen hurbilketa ez baita baliozkoa EKH puntutik gertu. Multzo generikoaren kasuan, hutsen %0.08 betetzen dute $N_A^0 = 0$ baldintza eta, arestian aipatu dugun bezala, soilik N_A^0 fluxua nulua duten hutsak existitu daitezke EKH puntuaren inguru hurbilean [145, 155]. Aitzitik, 2.11 irudian ikus daitezkeen bezala, multzo murriztuan ez dugu ezabaketarik antzematen EKH puntutik gertu; horrenbestez, hutsen azpimota hori izango da modulu-espazioaren eskualde horretan nagusituko dena.

Murriztutako huts-multzoaren estatistikari dagokionez, gure emaitzek argi utzi dute masa-espektroa zeharo aldatzen dela fluxuetan inposatutako baldintza dela eta. Hain zuzen

ere, multzo generikoan ez bezala, mota horretako hutsetan eremurik arinena beti aurkituko dugu murriztutako modulu-espazioan (ikus 2.12 irudia). Espektoaren eta EKH puntuarekiko distantziaren arteko harremana ulertzea xede, hainbat tamainetako inguruetan aurkitzen diren hutsen azpimultzoak aztertu ditugu. Analisi horren bitartez, masa-espektoa deterministagoa bihurtzen dela esplizituki frogatu dugu EKH puntuarekiko distantzia murrizten dugun heinean, (2.49) adierazpeneko masak soilik agertzen direlarik EKH limite zorrotzean. Alegia, EKH puntuaren inguruan nagusitzen den huts-motaren espektoak beti izango du eremu oso arin bat (asintotikoki masak gabekoa, hain zuzen ere) murriztutako modulu-espazioan (ikus 2.14 irudia).

3. kapitulua

Trinkoketa orokorren masa-espektro unibertsala EKH puntuaren inguruan

Aurreko kapituluko parametro bakarreko ereduaren inguruko eztabaida sakonaren ondoren, prest gaude eredu orokorretara jotzeko, Egitura Konplexu Handiko eskualdean betiere. Zehazki, fluxu-aukera jakin bat eta egitura konplexuaren moduluen ansatz bat erabiliz gero, α' eta g_s parametroen lehen ordenan, edonolako Calabi-Yau geometriaren masa-espektro eskalar osoa kalkulatu ahal izango dugu. Espektroa, hain zuzen ere, 2. kapituluko (2.48) ekuaziokoa izango da; horrenbestez, horren inguruko aurreko azterketa estatistikoa hemen ere aplikatu ahal dezakegula frogatuko dugu. Gure emaitza analitikoak berrestea xede, zenbakizko milaka soluzioak osatzen duten huts-sorta eraiki dugu $\mathbb{W}\mathbb{P}_{[1,1,1,6,9]}^4$ Calabi-Yau gainalazalean, non axiodilatoiaren eta 272 egitura konplexuaren eremuen masak esplizituki kalkulatu ahal daitezkeen.

Kapitulu honen oinarria [188] argitalpena da.

3.1 Sarrera

Egitura konplexuaren eta axiodilatoiaren sektoreen egonkortzearen inguruko aurreko eztabaida orokortzea da kapitulu honen helburua. Gure arestiko analisiaren oinarria izan dira egitura konplexuaren modulu bakarra (trunkaketa supersimetrikoa bideratu ostean) duten Calabi-Yau orientateen bidezko trinkoketak. Horietan, Calabi-Yau geometria eta fluxuak isometria-talde diskretu handi batekiko aldaezinak direla onartu behar izan dugu egitura konplexuaren sektorearen murrizpena bideratzeko. Egoera horretan, lehen frogatutakoaren arabera, axiodilatoiaren eta egitura konplexuaren moduluen *masa-espektro osoa* kalkulatu dezakegu (trunkatutako eremuak barne) Egitura Konplexu Handiko (EKH) eta soka-akoplamendu txikiko eskualdean. Hain zuzen ere, EKH puntutik parametrikoki gertu ager daitezkeen huts-klasearen espektroa (2.48) ekuaziokoa da, esponentzialki txikiak diren ekarpenak arbuatuta.

Kapitulu honetan zera frogatuko dugu: EKH eskualdean, fluxu egokiak erabiliz, era tin-

koan trunkatu dezakegula *Calabi-Yau trinkoketa orokorren* ETEa, egitura konplexuaren modulu bakar batera. Aurreko kapituluak ez bezala, ez dugu isometria taldeen beharrik izango, EKH puntuaren inguruko monodromia transformazioak baitira gure emaitzen oinarria. Alegia, ETEa aldaezina izan beharko da ondorengo z^i egitura konplexuaren eremuen traslazioekiko:

$$z^i \rightarrow z^i - i v^i, \quad v^i \in \mathbb{Z}^{h^{2,1}}, \quad (3.1)$$

Azken horiek forma-eremuen fluxuen transformazio egokiekin koonbinatu beharko ditugu. Calabi-Yau trinkoketa guztien ezaugarri komuna da inbariantzia hori, EKH eskualdean.

Bestalde, trunkamendua bizirauten duen eremua v^i monodromia norabidearen araberakoa da. Aurrerago ikusiko dugun bezala, baieztapen simple hori dela eta, gure aurreko emaitzak Calabi-Yau trinkoketa orokorretara hedatu ahal izango ditugu. Aldaezintasun-ezaugarri horiek erabiliz, huts-sorta handia eraikitzeko aukera izango dugu, axiodilatoiaeren eta egitura konplexuaren moduluen masa-espektroaren gaineko kontrol analitiko paregabea mantendurik.

Hona hemen kapitulu honen egitura. 3.2 sekzioan, fluxuen eta moduluen *ansatza* landuko dugu EKH eskualdeko edozein trinkoketa dimentsio eragikor bakarrekora bihurtzeko. Horrela, (2.48) ekuazioko espektroa erabili ahal izango dugu trinkoketa horren hutsetan. Bestalde, 3.3 sekzioan gure emaitzak aplikatu eta baieztatuko ditugu $\mathbb{W}\mathbb{P}_{[1,1,1,6,9]}^4$ hipergainazalean, eta hutsen ekorketa numerikoaren prozesu guztia deskribatu. Azkenik, zenbait iruzkin eta ondorio emango ditugu 3.4 atalean.

3.2 Egitura Konplexu Handiko masa-espektro unibertsala

3.2.1 Eremu-Teoria Eraginkorra eta monodromiak

Kapitulu honetan, berriro ere, Egitura Konplexu Handiko (EKH) eskualdea landuko dugu, ondorengo aurrepotentzialak deskribatutakoa:

$$\mathcal{F} = \frac{i}{3!} \kappa_{ijk} z^i z^j z^k + \frac{1}{2} \kappa_{ij} z^i z^j + i \kappa_i z^i + \frac{1}{2} \kappa_0. \quad (3.2)$$

Azken horretako κ_{ijk} , κ_{ij} eta κ_i zenbakizko konstanteak dira, M_3 trinkoketaren ispilubarietatearen datu topologikoak erabiliz kalkulatu daitezkeenak (ikus [120]). Nabarmentzekoa da κ_{ijk} kantitateak zenbaki osoak direla; bestalde, κ_{ij} eta κ_i , faktore arrazionalak izango dira. Arestian bezala, ondorengo kalkulu analitikoan instantioen ekarpenak aurrepotentzialean erabat arbuiatuko ditugu; aitzitik, zenbakizko emaitzetan aintzat hartuko ditugu.

Aurrepotentzial horren bidez eraiki dezakegun ETEak zenbait erredundantzia baditu, homologiaren oinarriaren aukerari dagozkienak, hain zuzen ere. Zehatzago esanda, oinarri horren aldaketak ondorengo transformazioa sortuko du periodo- eta fluxu-bektoreengan:

$$\Pi \rightarrow S \cdot \Pi, \quad N \rightarrow S \cdot N, \quad (3.3)$$

non $S \in \text{Sp}(2h^{2,1} + 2, \mathbb{Z})$ den. Hartara, teoria beraren hainbat deskripzio matematikoki ezberdin izan ditzakegu. Azkenik, periodo-bektorea transformazio sinplektikoekin trasformatu

beharenez (3.1) monodromiekiko, akoplamentuen arteko ondorengo baldintza bete behar dela frogatu dezakegu [139, 189]:

$$\kappa_{ij}v^j + \frac{1}{2}\kappa_{ijk}v^jv^k \in \mathbb{Z}. \quad (3.4)$$

3.2.2 Eremu bakarrerako trunkamendu supersimetriko tinkoa

Sarreran aipatu dugun bezala, kapitulu honen xedea dugu (2.48) masa-espektroa orokortzea, egitura konplexuaren edozein modulu kopururako eta soluzioaren simetrietan oinarritu gabe. Aurreko kapituluko eztabaidaren arabera, espektro hori bi baldintzetan oinarritzen da:

- Lehenik eta behin, Z_{AB} matrizeak, ondorengo egitura du:

$$Z_{0a} = \delta_{a1}Z_{01}. \quad (3.5)$$

Aurreko kapituluko ereduetan, zeinetan a indizeak balio bakarra har dezakeen, tri-bialki beteko da baldintza hori. Aitzitik, trinkoketa orokorra (3.5) ez da zertan bete behar egitura konplexuaren modulu 1 baino gehiago dugunean, beraz, nolabait inposatu beharko dugu gure soluzioetan. Gauzak horrela, (3.5) betetzen dituzten hutsei eskalarik gabe lerrokatutako hutsak deritzegu, $a = 1$ norabidea K_a -rekiko paraleloa baita (ikus (2.31) ekuazioa).

- Fluxuek $N_A^0 = 0$ bete behar dute. Gure aurreko kapituluko analisiaren arabera, bada-kigu fluxuen aukera horrek hutsak EKH puntutik oso gertu gertatzea ahalbidetzen duela (gainera, horren ondorioz, aurrepotentzialaren gaineko zuzenketen kontrol parametrikosoa izango dugu).

Hartara, (3.5) nola inposatu dezakegun ikusteko, superpotentzialaren eta horren deribatu kobarianteen azterketa sakona egingo dugu. Periodo bektorean sartuz (3.2) aurrepotentziala, zuzenean lortuko ditugu Gukov-Vafa-Witten superpotentziala, Kähler potentziala eta deribatu kobarianteak, 1. kapituluaren xehetasun osoz deskribatu dugun bezala. Bestalde, $N_A^0 = 0$ eta eskalarik gabeko hutsen baldintzak inposatuz, ondorengo ekuazioak lortuko ditugu:

$$W = \frac{1}{2}\kappa_{ijk}N_A^i z^j z^k - i\left(\kappa_{ij}N_A^j + N_i^B\right)z^i - N_0^B + \kappa_i N_A^i \quad (3.6)$$

$$D_0 W = -\frac{i}{2}\kappa_{ijk}\bar{N}_A^i z^j z^k - \left(\kappa_{ij}\bar{N}_A^j + \bar{N}_i^B\right)z^i + i\bar{N}_0^B - i\kappa_i \bar{N}_A^i = 0 \quad (3.7)$$

$$D_i W = \kappa_{ijk}N_A^j z^k - i\left(\kappa_{ij}N_A^j + N_i^B\right) + K_i W = 0 \quad (3.8)$$

$$D_0 D_i W = -i\kappa_{ijk}\bar{N}_A^j z^k - \left(\kappa_{ij}\bar{N}_A^j + \bar{N}_i^B\right) \quad (3.9)$$

non $e_\tau^0 = i(\tau - \bar{\tau})$ marko-bektorea erabili dugun eta i norabidea ez dugun kanonikoki normalizatu. Gogoan izan baliokideak direla (3.5) baldintza inposatzea eta $D_0 D_i W$ bektorea K_i -rekiko paraleloa dela adieraztea, eskalarik gabeko norabidearen definizioa dela eta.

Bestalde, (3.8) erabiliz, horrelaxe berridatzi dezakegu (3.9) adierazpena:

$$D_0 D_i W = -2i\kappa_{ijk} \bar{N}_A^j \operatorname{Re}(z^k) - iK_i \bar{W}. \quad (3.10)$$

edo, kanonikoki normalizatutako (2.26) oinarria erabiliz,

$$D_0 D_a W = -i\kappa_{ab1} \bar{N}_A^b x - iK_a \bar{W}. \quad (3.11)$$

Halaber, $K_a \propto \delta_a^1$ denez (ikus (2.31)) eta normalizatutako Yukawa akoplamenduen (2.29) adierazpenak erabiliz, zuzenean ikus dezakegu (3.5) inposatuz gero, $N_A^{a'} = 0$ izan beharko dugula (non $a' = 2, \dots, h^{2,1}$ indizeak kanonikoki normalizatutako norabideak adierazten dituen). Horren ondorioz, koordinatu ez-kanonikoen arabera, N_A^i eta eskalarik gabeko norabidea, $\operatorname{Re}(z^i)$ -rekiko proportzionala dena, elkarrekiko paraleloak izan beharko dute. Bestela esanda,

$$N_A^i = v^i \hat{N}_A, \quad \operatorname{Re}(z^i) = r v^i \quad (3.12)$$

non $r \in \mathbb{R}$ eta $\hat{N}_A \equiv \hat{f}_A - \tau \hat{h}_A$ diren, eta $\hat{f}_A, \hat{h}_A \in \mathbb{Z}$. Horrez gain, fluxuen kuantizazioa dela eta, v^i bektorearen osagaiak osokoak (eta elkarrekiko koprimoak) izan beharko dute.

Azkeneko emaitza ikusita, zilegi dirudi ondorengo ansatza proposatzea

$$z^i = \hat{z} v^i, \quad \hat{z} \in \mathbb{C}, \quad (3.13)$$

eskalarik gabe lerrokatutako ekuazioentzat. Kontuan izan (3.9) adierazpenaren lehen terminoa K_i -rekiko paraleloa dela,

$$\kappa_{ijk} \bar{N}_A^j z^k \propto \kappa_{ijk} v^j v^k \propto \kappa_{i11} = e_i^a \kappa_{a11} = e^{-K_{cs}} e_i^a \kappa_{a11} \propto K_i, \quad (3.14)$$

non, azken pausoa, (2.31) erabili dugun. Aurreko (3.9) ekuazioko bigarren terminoa ere K_i -rekiko paraleloa izan dadin, ondorengo baldintza inposatuko dugu fluxuetan:

$$N_i^B = q\kappa_{ijk} v^j v^k \hat{N}^B - \left(\kappa_{ij} + \frac{1}{2} \kappa_{ijk} v^k \right) N_A^j \quad (3.15)$$

non $q^{-1} \equiv \gcd(\kappa_{ijk} v^j v^k)$ eta $\hat{N}^B \equiv \hat{f}^B - \tau \hat{h}^B$ ditugun, eta $\hat{f}^B, \hat{h}^B \in \mathbb{Z}$. Azpimarratzekoa da ansatz horrek automatikoki betetzen duela fluxu-kuantizazioa, κ_{ijk} osokoak baitira eta (3.4) bete behar delako. Fluxuen aukera hori erabiliz,

$$\kappa_{ij} N_A^j + N_i^B = \kappa_{ijk} v^j v^k \left(q \hat{N}^B - \frac{1}{2} \hat{N}_A \right) \quad (3.16)$$

lortuko dugu, K_i -rekiko paraleloa dena, ikus (3.14).

Emaitza horiek guztiak gogoan harturik, kapitulu honen emaitza nagusia hauxe dugu:

Izan bedi $h^{2,1}$ dimentsioko v^i bektorea, osagai osokoak eta elkarrekiko koprimoak dituen, eta Calabi-Yau trinkoketaren ispilu-barrietatearen Kähler konoan dagoena. Orduan, $z^i = \hat{z} v^i$ ansatzak, non $\hat{z} \in \mathbb{C}$, (3.2) ETEaren trunkaketa supersimetriko tinkoa definitzen du, ondorengo fluxuak erabiliz

gero:

$$N_A^0 = 0, \quad N_A^i = v^i \hat{N}_A, \quad N_i^B = q \kappa_{ijk} v^j v^k \hat{N}^B - \left(\kappa_{ij} + \frac{1}{2} \kappa_{ijk} v^k \right) N_A^j, \quad (3.17)$$

N_0^B edonolakoa delarik. Aurreko adierazpenean, $\hat{N}_A \equiv \hat{f}_A - \tau \hat{h}_A$, $\hat{N}^B \equiv \hat{f}^B - \tau \hat{h}^B$ ditugu, non $\{\hat{f}_A, \hat{h}_A, \hat{f}^B, \hat{h}^B\} \in \mathbb{Z}$ eta $q^{-1} \equiv \gcd(\kappa_{ijk} v^j v^k)$.

Froga: Lehenik eta behin, garrantzitsua da nabarmentzea (1.33) ekuazioan definitutako f eta h bektoreek osoko osagaiak izango dituztela, hots, fluxuen kuantizazioa bermatuko dutela, (3.4) murrizketa dela eta. Bestalde, $z^i = \hat{z} v^i$ ansatzak, non $\hat{z} \in \mathbb{C}$ den, eta (3.17) fluxuek ETEaren trunkaketa supersimetriko tinkoa definitzen dutela erakusteko, zera frogatu behar dugu: F -lautasun baldintza, $w^i (\partial_{z^i} + \partial_{z^i} K) W|_{\hat{z} v^i} = 0$, beteko dela trunkaketa-ansatzak definitutako eremu-espazio murriztuarekiko norabide ortogonaletan, w^i direlakoak. Alegia, v^i -rekiko ortogonalak diren norabideek supersimetria-baldintzak bete beharko dituzte, \hat{z} eta τ eremuek duten balioa edozein dela ere [122,123,138,190]. Hartara, (3.17) fluxu-konfigurazioa (3.8) ekuazioan ordezkatur, hauxe dugu F -lautasun baldintza:

$$\kappa_{ijk} w^i v^j v^k \left[\left(\hat{z} + \frac{i}{2} \right) \hat{N}_A - i q \hat{N}^B \right] + w^i [\partial_{z^i} K W]_{\hat{z} v^i} = 0. \quad (3.18)$$

Hain zuzen ere, azken adierazpen horretako bi terminoak independenteki nuluak dira, biak ondorengo kantitatearekiko proportzionalak baitira: $\kappa_{ijk} w^i \text{Re}(z^j) \text{Re}(z^k) \propto \kappa_{i11} w^i = 0$. Azken pausuan, w^i eta eskalarik gabeko norabidea elkarrekiko ortogonalak direla kontuan hartu dugu (ikus (2.29) ekuazioa) ■

Kanonikoki normalizatutako oinarriaren langoian, aurreko baieztapenen baliokidea da $D_{a'} W = 0|_{z^i = \hat{z} v^i}$ baldintza. Hain zuzen ere, arestian frogatu dugun bezala, $z^i = \hat{z} v^i$ ansatzak eta (3.17) fluxuek baldintzatu dituzte (3.8) adierazpeneko termino guztiak K_i -rekiko perpendikularrak izateko. Ondorioz, $K_i = e_i^a K_a$ denez eta $K_a \propto \delta_a^1$ denez (ikus (2.31)), automatikoki beteko da $D_{a'} W = 0$.

Aurreko emaitzak bermatzen du $z^i = \hat{z} v^i$ ansatza era tinkoan ordezkatu daitekeela ekintzan. Hartara, egitura konplexuaren modulu-espazio eraginkorra dimentsio bakarrekoa izango da, \hat{z} eremuak parametrizatutakoa. Gainera, (3.2) aurrepotenzialak definitzen dituen Kähler potentzialak eta superpotenzialak karakterizatutako dituzte ekintza murriztuaren akoplamenduak; hala eta guztiz ere, horiek guztiak ondorengo aurrepotenzial eta fluxu-bektore eraginkorrak erabiliz ere lor daitezke:

$$\hat{\mathcal{F}} \equiv \frac{i}{3!} \kappa_{vvv} \hat{z}^3 + \frac{1}{2!} \kappa_{vv} \hat{z}^2 + i \kappa_v \hat{z} + \frac{1}{2} \kappa_0 \quad (3.19)$$

eta

$$\hat{N} \equiv (0, \hat{N}_A, N_0^B, q \kappa_{vvv} \hat{N}_B)^T, \quad (3.20)$$

non $\kappa_{vvv} \equiv \kappa_{ijk} v^i v^j v^k$ eta $\kappa_v \equiv \kappa_i v^i$ laburdurak erabili ditugun. Ekintza osoaren EKH eskualdeko soluzioa izango da teoria murriztu horren edozein soluzio, α' eta g_s garapenen lehen ordenean. Horrez gain, trunkamendua bizirauten duten eremuek F -lautasun

baldintzak betetzen baldin badituzte, hots,

$$D_\tau W = \partial_\tau W + K_\tau W = 0, \quad D_{z^i} W = \partial_{z^i} W + K_{z^i} W = 0, \quad (3.21)$$

axiodilatoiaren eta egitura konplexuaren sektore osoak beteko dituzte ere (ikus 2.3.2 azpiatala eta [123, 191]).

Aurreko emaitzen arabera, edozein Calabi-Yau trinkoketaren ETEa emanda, zuzenean sor ditzakegu fluxu-huts familia handiak EKH eskualdean (familia bat v^i -ren aukera bakoitzarentzat) non axiodilatoiaren eta egitura konplexuaren modulu guztien masa-espektra analitikoki lor dezakegun. Horretarako, (3.21) F -lutasun baldintzak ebatzi besterik ez dugu egin behar, (3.19) eta (3.20) adierazpenek definitzen duten eredu murriztuan. Ondoren, egitura konplexuaren sektorea dimentsio bakarrekoa denez, masa-espektraok zuzenean lor daitezke 2. kapituluko emaitzak erabiliz. Bestela esanda, (2.48) adierazpenak emango dizkigu $2h^{2,1} + 2$ modu eskalarren, alegia, axiodilatoi/egitura konplexuaren sektore osoaren, masen karratuak (trunkatutako norabideak barne). Masak $\xi \equiv \frac{-3\text{Im}\kappa_0}{2\kappa_{vv}\text{Im}(\hat{z})^3}$ parametroaren eta normalizatutako grabitinoaren masaren mende egongo dira,

$$m_{3/2}^2 \equiv e^K |W|^2 = \frac{3}{\pi} \frac{N_{\text{flux}}}{(2 - \xi)\mathcal{V}^2}, \quad (3.22)$$

non $Q_{D3} \equiv h^T \cdot \Sigma \cdot f \geq 1$ den fluxuek induzitutako $D3$ -karga. Aurreko kapituluan bezala, (2.48) ekuazioaren $\lambda = 0, 1$ indizeen bidez adierazi ditugu trunkaketa biziraun duten masak, $\{\tau, \hat{z}\}$ eremuei dagozkienak; bestalde, $\lambda = 2, \dots, h^{2,1}$ azpiindizeak dituzten masak trunkatutako sektoreei dagozkie. Nabarmenezkoa da $N_A^0 = 0$ duten (3.21) ekuazioen soluzioak oso interesgarriak suertatuko zaizkigula, horiek baitira EKH puntuaren inguruan nagusitzen direnak eta, hori ez ezik, 2. kapituluan erakutsi dugun bezala, ETE mailan kontrol perturbatibo ezinhobea ahalbidetuko digute.

3.3 Adibidea: $\mathbb{W}\mathbb{P}_{[1,1,1,6,9]}^4$ hipergainazala

Gure emaitzak baieztatzearen, arestian aurkeztutako huts-klasearen zenbakizko bilduma eraikiko dugu. Horretarako, $\mathbb{W}\mathbb{P}_{[1,1,1,6,9]}^4$ Calabi-Yau hipergainazalaren orientatea erabiliko dugu IIB motako Soka-Teoriaren trinkoketa bideratzeko. Espazio horrek $h^{1,1} = 2$ Kähler modulu ditu eta $h^{2,1} = 272$ egitura konplexuaren eremu. Geometria $\mathcal{G} = \mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_6$ isometria taldearekiko inbariantea da; ondorioz, \mathcal{G} -inbariantek diren fluxuak soilik piztuz gero, egitura konplexuaren sektorea tinkoki trunkatu dezakegu, \mathcal{G} -rekiko tribialki transformetzen diren 2 eremuetara. EKH eskualdean, trunkaketa bizirautean duten 2 eremu horien akoplamenduak ondorengo koefizienteak dituen prepotentziala erabiliz lor daitezke [141]:

$$\kappa_{111} = 9, \quad \kappa_{112} = 3, \quad \kappa_{122} = 1, \quad \kappa_{11} = -\frac{9}{2}, \quad \kappa_{22} = 0, \quad \kappa_{12} = -\frac{3}{2}, \quad \kappa_1 = \frac{17}{4}, \quad \kappa_2 = \frac{3}{2} \quad (3.23)$$

eta $\kappa_0 = -540\zeta(3)/(2\pi i)^3$. Gogoan izan \mathcal{G} taldearekiko inbariantzia ez dela beharrezkoa kapitulu honetako emaitzak aplikatu ahal izateko; aitzitik, isometria horiek praktikan beharrezkoak zaizkigu ETEaren inguruko kalkuluak egingarriak izan daitezen (ikus [101]). Bestalde,

fluxuen zapaburu-murrizketa erlaxatzearen, [45] artikuluan erabilitako konfigurazioa erabili dugu, non F -teoriako orientate limitearen eliptikoki zuntzatutako lau dimentsioko Calabi-Yau bariatetat hartu zen IIB motako $\mathbb{W}\mathbb{P}^4_{[1,1,1,6,9]}$ trinkoketa. F -teoriaren ikuspuntutik, 4 dimentsioko trinkoketaren Euler zenbakiak kontrolatzen du fluxuek induzitu dezaketen $D3$ -karga maximoa. Guk landuko dugun ereduaren zapaburu-murrizketa $Q_{D3} \leq \chi(M_4)/24 = 273$ kargaren arabera izango da.¹ [45].

3.3.1 Hutsen ekorketa

Aurreko sekzioan deskribatutako prozedura jarraituz, egitura konplexuaren sektorea eremu bakar batera murriztu ahal izango dugu. Kontsidera dezagun, adibidez, $v^i = (1, 1)$ monodromia-norabideak definitzen duen trunkamendu-ansatza. Horrekin eraiki dezakegun (3.19) aurrepotentzial eraginkorra $\kappa_{vvv} = 21$ eta $\kappa_v = \frac{23}{4}$ parametroek definituko dute.

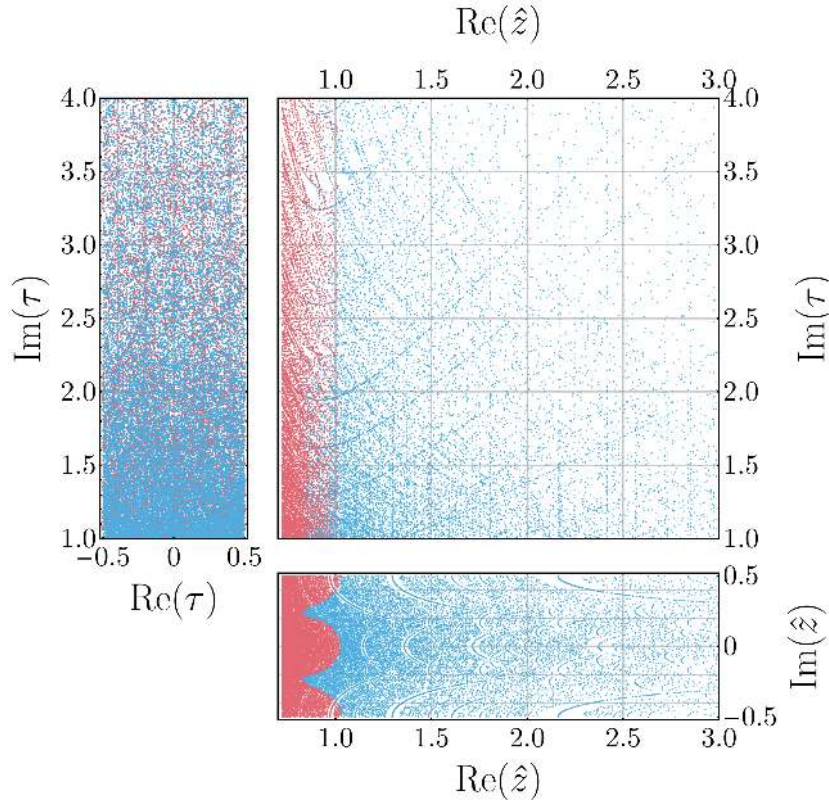
Zenbakizko huts-multzoa eraikitzeo, lehenik $\{f_0^B, h_0^B, \hat{f}_{A,B}, \hat{h}_{A,B}\}$ fluxu-tuplaren 10^7 aukera sortu genituen, horren osagaiak $[-25, 25]$ tartean zeudela eta zapaburu-murrizketa errespetatuz. Bigarrenik, horietako aukera bakoitzari dagozkion (3.21) F -lautasun baldintzak ebatzi genituen numerikoki, Paramotopy softwarea erabiliz (ikus [163–165] eta B.1 eranskina). Horrela lortutako 37,156 soluzioak marraztu ditugu 3.1 irudian (puntu urdinak), non $\{\tau, \hat{z}\}$ eremuen funtsezko domeinuan soluzioek duten banaketa erakutsi dugun. Soilik soka akoplamendu txikia duten eta EKH eskualdean kokatzen diren soluzioak barneratzen ditu huts-multzo horrek, alegia, huts guztiek $g_s = (\text{Im}\tau)^{-1} < 1$ betetzen dute eta euren aurrepotentzialaren instantioen ekarpenak txikiak dira (aurreko kapituluko irizpide berdintsuak erabiliz).

Lehen eztabaidatukoaren arabera, $z^i = \hat{z}v^i$ trunkaketa-ansatzak eta (3.17) fluxuek ahalbidetzen digute dimentsio bakarreko problemaren soluzio bakoitza $\mathbb{W}\mathbb{P}^4_{[1,1,1,6,9]}$ eredu osoaren hutsekin lotzea. Hartara, huts bakoitzaren masa-espektroa kalkulatu genuen axiodilatoiarentzat eta z^i modu \mathcal{G} -inbariantentzat ($\lambda = 0, 1, 2$), $\mathbb{W}\mathbb{P}^4_{[1,1,1,6,9]}$ trinkoketaren fluxu-potentzialaren hessiarra zuzenean diagonalizatuz. Horrela lortutako emaitza bat dator guztiz (2.48) formularekin kasu guztietan. Azpimarratzekoa da lortutako soluzio bakoitzean (2.48) ekuazioak trunkatutako 270 eremu konplexuen masak ere adierazten dituela, \mathcal{G} -rekiko ez-tribialki transformatzen direnenak, hots, $\lambda = 3, \dots, 272$ moduenak. Emaitza nabarmena da azken hori, \mathcal{G} -inbariantek diren moduluen akoplamenduak ([141] artikuluan kalkulatu-takoak) besterik ez ditugulako erabili.

Analisi estatistiko sendoa egitea xede, $v^i = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$ monodromia-norabideetan bideratu genuen egitura konplexuaren sektorearen trinkoketa. Horrela lortutako (3.21) F -lautasun baldintzak betetzen zituzten huts-sortak multzo bakar batean bildu genituen. Bestelako familiak ere erabili ahal ditugu; haatik, norabide bakoitzaren analisiak konputazio-koste handia du eta ez dugu espero informazio berririk lortzea bestelako familiak aztertuz, huts horien ezaugarri unibertsalak direla eta.

Horrela lortutako huts-multzoa 206.479 hutsez osatuta dago; soka-akoplamendu ahuleko eskualdean, hots, $(\text{Im}\tau)^{-1} = g_s < 1$, horietako 95626 EKH eskualdean kokatzen dira. Orain-

¹ F -teoria erabiltzeak baditu bestelako desabantailak. Besteak beste, prozedura horrek $D7$ -branen posizioei dagozkien modulu-eremuak sorraraziko ditu teoria eraginkorrean, nolabait egonkortu beharko direnak. Gure adibidea sinplifikatzearen, horiek ez ditugu kontuan hartuko; modulu horien egonkortzeari buruzko xehetasunetarako ikus [158–162, 192, 193].



3.1 irudia: $\mathbb{WP}_{[1,1,1,6,9]}^4$ ereduaren zenbakizko huts-sortaren banaketa eremu-espazio murriztuan, non $\text{Re}\tau \in [-1/2, 1/2)$, $\text{Im}\tau > 1$ eta $\text{Re}\hat{z} \in [-1/2, 1/2)$. ETEaren $v^i = (1, 1)$ monodromia-norabidea erabiliz lortu ditugun 69.567 hutsak marraztu ditugu irudian. Gorriz, Kähler metrikan instantoi-ekarpen handiak (> %5) dituzten hutsak margotu ditugu; urdinez, berriz, < %5 dituztenak (37.156 soluzio).

goan, horrela definitu dugu EKH eskualdea: (3.2) aurrepotentzialaren instantoen ekarpen nagusiak, alegia, [141]

$$\mathcal{F}_{\text{inst}} = -\frac{135}{2\pi^3}ie^{-2\pi z^1} - \frac{3}{8\pi^3}ie^{-2\pi z^2} + \dots, \quad (3.24)$$

zuzenketa txikiak (% < 5) sortzen dituzten modulu espazioaren eskualdea da. Ekarpen horiek eremu-espazioaren metrikan, κ_{ijk} kanonikoki normalizatutako akoplamenduetan eta $m_{3/2}$ grabitinoaren masan kalkulatu ditugu, eta horien arabera sailkatu ditugu hutsak. Aipatzekoa da gure EKH eskuladearen definizioa nahiko murriztailea dela; alegia, $\mathcal{F}_{\text{inst}}$ txikia izateaz gain (balio absolutuan) (3.2) aurrepotentzialaren zati perturbatiboarekiko (ikus, adibidez, [166]), bestelako hainbat murrizketa inposatzen ari baikara. Hain zuzen ere, EKH puntutik urrun ($\xi \rightarrow -1$, $\chi(M_3) > 0$ badugu, eta $\xi \rightarrow 1/2$, $\chi(M_3) < 0$ badugu), modulu-espazioaren metrika endekatua bihurtzen da; ondorioz, eskualde horretan, metrikaren balio propioak oso txikiak dira eta instantoen ekarpenak erraz nagusituko dira, $|\mathcal{F}_{\text{inst}}/\mathcal{F}| \sim 0.01$ erratio txikiak inposatuta ere.

Azkenik, soluzio bikoiztuak identifikatzeko hemen erabili ditugun metodoak 2. kapitulu-koak dira (ikus [98] ere). Hala eta guztiz ere, hemen bideratu dugun modulu-espazioaren trunkamenduari buruzko xehetasunak garrantzitsuak direnez, laburki deskribatuko ditugu ondorengo azpiatalean.

3.3.2 Erredundantziak eta soluzio bikoiztuak

Aurrean aurkeztu dugun dimentsio bakarreko ETEan bi erredundantzia-klase daude. Alde batetik, (3.3) holonomia-oinarriaren aukerari atxikitutakoa dugu eta, bestetik, τ eremuan eragina duten $SL(2, \mathbb{Z})$ transformazio modularrak. Betiere, gauge transformazio horien bidez elkarrekin erlazionatutako soluzioak fisikoki baliokidetzat jo beharko ditugu eta, beraz, huts-multzoa eraikitzean gogoan izan beharko dugu soluzio desberdin bakoitza behin bakarrik kontuan hartzen ari garela.

Holonomia-oinarriaren aukerari dagokionez, κ_{ij} , κ_i eta κ_0 koefizienteek edozein osoko zenbakia gehitu diezaiekegu, non parametro horien aukera bakoitza holonomia-oinarri ezberdin bati dagokion. Horrenbestez, aurrepotenzialaren adierazpen jakin bat aukeratzerakoan, gauge sinplektikoa partzialki finkatuko da. Bestalde, gauge erresiduala erabat finkatzeko, EKH puntuaren inguruko monodromia-transformazioak landu beharko ditugu, hots, $z^i \rightarrow z^i - i \delta_p^i$ non $p \in 1, \dots, h^{2,1}$. Horren inguruan, $z^i = \hat{z} v^i$ trunkaketa-ansatza inposatzeak gauge erredundantzia zeharo murriztuko du, $z^i \rightarrow z^i - i v^i$ monodromia-transformazioak izango baitira gauge erredundantziaren iturri bakarra. Azken horiek horrela ere adierazi daitezke:

$$\hat{z} \rightarrow \hat{z} - i, \quad (3.25)$$

trunkamendua bizirauten duen eremuaren funtzioan. Eremuaren $\mathcal{S}_{(v)} \in \text{Sp}(2h^{2,1} + 2, \mathbb{Z})$ aldaketa sinplektiko horrek horrela transformatuko du periodo-bektorea (ikus [189]):

$$\Pi(z^i - i v^i) = \mathcal{S}_{(v)} \cdot \Pi(z^i), \quad \text{non} \quad \mathcal{S}_{(v)} \equiv \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & (A^T)^{-1} \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Hauexek dira A eta B matrizeak:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v^i & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2\kappa_v + \frac{1}{6}\kappa_{vvv} & -\kappa_{jv} + \frac{1}{2}\kappa_{jvv} \\ -\kappa_{iv} - \frac{1}{2}\kappa_{ivv} & -\kappa_{ijv} \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Nabarmentzekoa da (3.4) baldintza beharrezkoa zaigula $\mathcal{S}_{(v)}$ osagai osokoak izan ditzan. Hori ez ezik, $2\kappa_v + \frac{1}{6}\kappa_{vvv} \in \mathbb{Z}$ baldintza ere inposatu beharko dugu. [189].

Azkenik, (3.26) monodromia-transformazio erresidualak fluxuengan duen eragina aztertzeko, (3.17) ansatza inposatu beharko dugu, (3.3) transformazioarekin batera. Hartara, ondorengo fluxu-transformazioak lortuko ditugu

$$\begin{aligned} \hat{N}_A &\rightarrow N_A, \\ \hat{N}^B &\rightarrow \hat{N}^B - q^{-1} \hat{N}_A, \\ N_0^B &\rightarrow N_0^B - \hat{N}_A \left(\kappa_{vv} - \frac{1}{2} \kappa_{vvv} \right) - q \kappa_{vvv} \hat{N}^B \end{aligned} \quad (3.28)$$

Ondorioz, $N_A^0 = 0$ baldintza betetzen jarraituko dute fluxuek.

Erredundantzia horiez gain, $SL(2, \mathbb{Z})$ transformazio modularrak ere aintzat hartu behar

ditugu. Axiodilatoiaren eta fluxuen gain duten eragina ondorengoa da:

$$\tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

non $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ eta $ad - bc = 1$ betetzen diren.

Gauzak horrela, (3.26) eta (3.29) transformazioekiko baliokideak diren soluzio bikoiztuak ezabatzeke, zenbakizko huts-sortako soluzio guztiak $\text{Re}(\tau) \in [-1/2, 1/2)$, $|\tau| > 1$ eta $\text{Im}(\hat{z}) \in [-1/2, 1/2)$ funtsezko domeinuetara eramán genituen; horretarako, (3.25), (3.28) eta (3.29) transformazioak erabilgarriak suertatu zitzaizkigun. Huts guztiak funtsezko domeinuan daudenean, erraz identifikatu ditzakegu horien kopiak, fluxu- eta eremu-konfigurazio berberak baitituzte. Prozedura honen bitartez lortutako huts-sorta 3.1 irudian erakutsi dugu, jatorrizko soluzio-multzoa arestian eztabaidatukoa izaki.

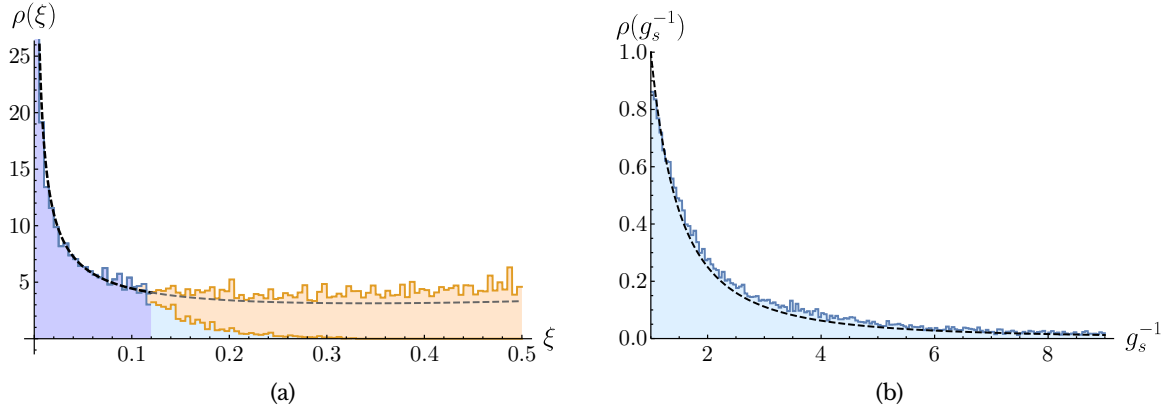
3.3.3 Adierazpen analitikoak eta zenbakizko emaitzak

Huts-multzoaren ezaugarri estatistikoak aztertzerá joko dugu azpiatal honetan. Arestiko 2.6 sekzioan ikusitakoaren arabera, dimentsio eraginkor bakarra duten trinkoketetan, $D3$ -kargaren zapaburu handia ahalbidetuz gero, $N_{\text{flux}}|_{\text{max}} \gg 1$, fluxu-multzoaren estatistika zehazki deskribatu daiteke fluxu jarraituen hurbilketa erabiliz [46]. Gogoan izan hurbilketa horren funtsa fluxuen kuantizazioa arbuiatzean datzala; alegia, banaketa uniformea duten ausazko aldagai jarraitutzat jotzen dira fluxuak, zapaburu murrizketa betiere errespetatuz, $h^T \cdot \Sigma \cdot f \leq N_{\text{flux}}|_{\text{max}}$. Hurbilketa hori abiapuntutzat hartuz, 2. kapituluan frogatu genuen egitura konplexuaren modulu bakarraren banaketa hauxe dugula (ikus (2.70) ekuazioa):

$$\rho(\xi) d\xi = \mathcal{N} \cdot \frac{(1 + \xi)}{(2 - \xi)^2 \xi^{2/3}} d\xi, \quad \xi \equiv \frac{-3\text{Im}(\kappa_0)}{2\kappa_{vvv}\text{Re}(\hat{z})^3}, \quad (3.30)$$

non, ξ parametroaren arabera idatzi dugun $\text{Re}(\hat{z})$ aldagaiaren banaketa. Atal honetako adierazpenetan ageriko zaigun \mathcal{N} konstanteak ekuazioaren araberako normalizazio konstantea adieraziko du, ekuazio bakoitzean balio ezberdina izango duena. Azpimarragarria da azken banaketa hori Calabi-Yau orientatearen xehetasuenekiko independentea dugula; hori ez ezik, teoria murriztuan geratzen zaigun eremuaren aukerak, hots, v^i bektoreak, ez du inola aldatuko banaketa. Horren ondorioz, edonolako trinkoketa eta trunkaketa ansatz barneratzen dituen huts-sortak deskribatzeko erabili dezakegu (3.30) ekuazioa.

Gure zenbakizko huts-sortaren ξ parametroaren banaketa erakutsi dugu 3.2(a) irudian, $v^i = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$ kasuen emaitzak bilduz lortutakoa. Pilatutako histograma horretan, urdin argiz eta ilunez koloreztatu ditugu EKH eskualdean dauden 95626 hutsak; laranja, bestalde, instantoi-ekarpen handiak ($> 5\%$) dituzten hutsak ditugu. Gogoan izan behar dugu (3.30) formula lortzeko instantoi-ekarpena erabat arbuiatu dugula; beraz, zuzenketa handiko huts oso gutxi duen ξ espazioko eskualdea izango dugu adierazpen horren baliozkotasun-tartea (kasu honetan, $\xi \lesssim 0.12$). Gainera, gure zenbakizko metodoaren limitazioak direla eta, erabili ditugun osoko fluxuen balio-tartea finitua izan da, $[-25, 25]$; horrek, D.4 eranskinean azaldu dugun bezala, EKH eskualdearen behe-borne bat sortuko du, $\xi \gtrsim 0.001$. Guztira, (3.30) banaketaren baliozkotasun tartea $\xi \in [0.001, 0.12]$ da, 3.2(a) irudian



3.2 irudia: (a) Fluxu-hutsen dentsitatea egitura konplexuaren espazio murriztuan, ξ parametroaren arabera. Irudia osatzeko zenbakizko erkaketaren 206.479 fluxu-hutsak erabili ditugu. Urdin argiz eta ilunez koloreztatu ditugu instantoi-ekarpen txikiak (< %5) dituzten 95.626 hutsak; laranja, bestalde, instantoi-ekarpen handi-koak (> %5) ditugu. Lerro marratu baten bidez adierazi dugu (3.30) banaketa analitikoa; $\xi \in [0.001, 0.12]$ tartean normalizatu dugu azken hori, bertako huts gehienak EKH eskualdean baitaude eta fluxu jarraituen hurbilketa baliozkoa delako (urdin ilunez koloreztatuta). (b) Soka-akoplamenduaren banaketa, $g_s^{-1} = \text{Im}\tau$ bidez definituta. Aurreko $\xi \in [0.001, 0.12]$ tarteko hutsak erakutsi ditugu soilik, eta marratutako lerroak fluxu jarraituen hurbilpenak aurreikusitako emaitza adierazten du.

urdin ilunez koloreztatu duguna.

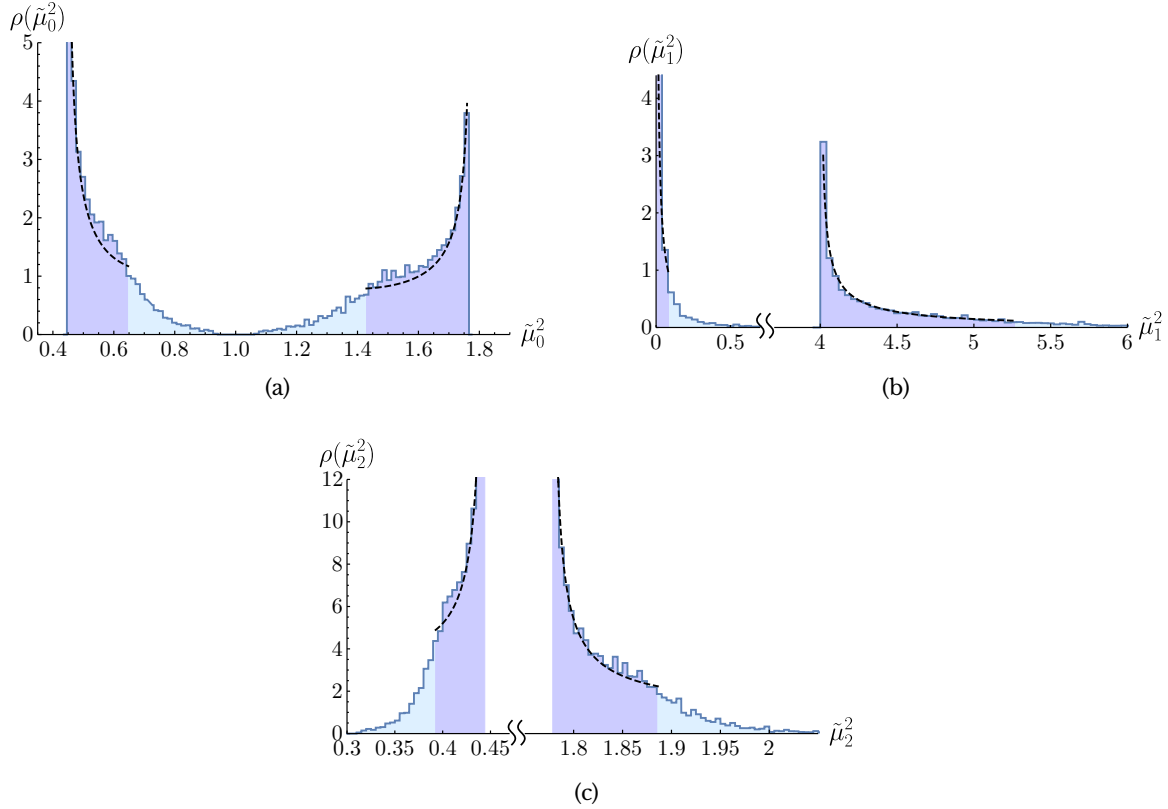
Bestalde, (3.30) banaketa bere baliozkotasun tartean normalizatuta 3.2(a) irudian marraztu dugu marratutako kurba baten bidez. Bertan ikus daitekeen bezala, fluxu-hutsen deskribapen oso ona da. Nabarmentzekoa da (3.30) banaketa $\xi = 0$ puntuan dibergentea den arren, funtzioa guztiz normalizatu daitekeela $\xi \in [0, 1/2)$ tarte osoan; horrenbestez, EKH puntuaren edozein ingurunean huts kopuru finitua egongo dela iragartzen du hurbilketa horrek.

Axiadilatatoriari dagokionez, zuzenean frogatu daiteke, fluxu jarraituaren hurbilketa erabiliz, $g_s = (\text{Im}\tau)^{-1}$ soka-akoplamendu konstanteak banaketa uniforme jarraituko duela huts-klase horretan; bestela esanda, τ eremuaren zati irudikariaren banaketa $\rho(\text{Im}\tau) \propto (\text{Im}\tau)^{-2}$ izango da. Zenbakizko banaketarekin bat dator azken hori, 3.2(b) irudian ikus daitekeen bezala.

Masa eskalarren banaketaren analisisa bideratzeko, aurreko kapituluko prozedura berdintua jarraituko dugu (ikus 2.6.3 azpiatala). Bertan, grabitino-masarekiko normalizatutako fermioi-masen espektroa, $\tilde{m}_\lambda \equiv m_\lambda / m_{3/2}$, ondorengo zela frogatu genuen:

$$\tilde{m}_\lambda(\xi) = \begin{cases} \sqrt{(1-2\xi)/3} \hat{m}(\xi) & \lambda = 0, \\ \frac{\sqrt{(1-2\xi)}}{\sqrt{3}\hat{m}(\xi)} & \lambda = 1, \\ \frac{1+\xi}{3} & \lambda = 2, \dots, h^{2,1}. \end{cases} \quad (3.31)$$

Ondoren, aurreko adierazpena (3.30) ekuazioarekin konbinatuz eta $\tilde{m}_\lambda(\xi)$ funtzioak monotonikoak direla ohartuz, zuzenean lor ditzakegu fermioi-masen $h^{2,1} + 1$ probabilitate-banaketa



3.3 irudia: EKH eskualdean kokatutako 95626 fluxu-hutsen modu \mathcal{G} -inbarianteen $\tilde{\mu}_{\pm\lambda}^2 = \mu_{\pm\lambda}^2 / m_{3/2}^2$, $\lambda = \{0, 1, 2\}$, normalizatutako masa eskalar masen zenbakizko banaketak. Irudi bakoitzeko lerro marratuak (2.48) formula analitikoa adierazten du, λ -ren balio bakoitzarentzat, $\xi \in [0.001, 0.12]$ tartean normalizatuta. Kolore ilunez adierazi ditugu fluxu jarraituen hurbilketaren baliozko tartekak.

independentek

$$\rho_{\lambda}^f(\tilde{m}_{\lambda}) d\tilde{m}_{\lambda} = \mathcal{N} \cdot \frac{(1 + \xi)}{(2 - \xi)^2 \xi^{2/3} (d\tilde{m}_{\lambda}(\xi) / d\xi)} \Big|_{\xi(\tilde{m}_{\lambda})} d\tilde{m}_{\lambda}, \quad (3.32)$$

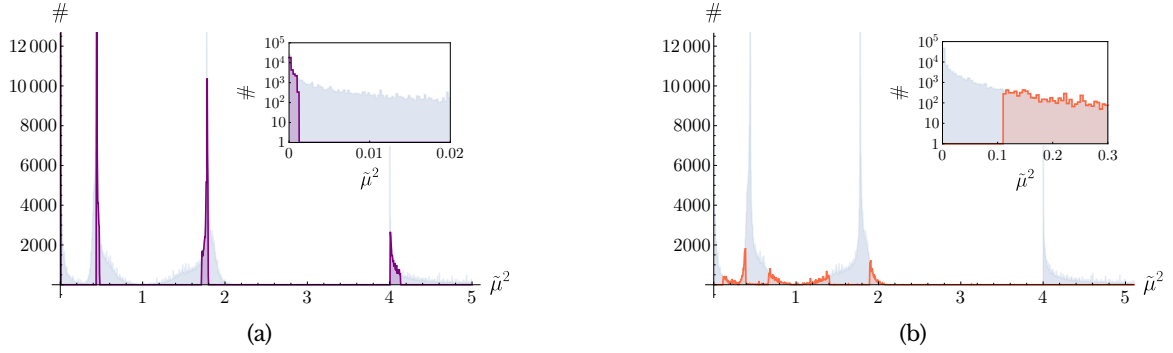
non $\lambda = 0, \dots, h^{2,1}$ den. Azkenik, masa eskalarren eta fermioikoen arteko

$$\mu_{\pm\lambda}^2 = (m_{3/2}^2 \pm m_{\lambda})^2 \quad (3.33)$$

erlazioa erabiliz, $\tilde{\mu}_{\pm\lambda}^2 \equiv \mu_{\pm\lambda}^2 / m_{3/2}^2$ masa eskalar normalizatu bakoitzaren probabilitate-banaketa lortuko dugu,

$$\rho_{\lambda}^s(\tilde{\mu}_{\lambda}^2) d\tilde{\mu}_{\lambda}^2 = \mathcal{N} \cdot \tilde{\mu}_{\lambda}^{-1} \left[\rho_{\lambda}^f(1 + \tilde{\mu}_{\lambda}) + \rho_{\lambda}^f(|1 - \tilde{\mu}_{\lambda}|) \right] d\tilde{\mu}_{\lambda}^2. \quad (3.34)$$

Gure huts-sortaren zenbakizko masa-banaketa kalkulatzeko, (3.21) ekuazioen soluzio bakoitzaren fluxu-potentzialaren hessiarra diagonalizatu genuen. Gogoan izan potentzial hori (3.2) aurrepotentzialaren araberakoa dela, eta (3.23) akoplamenduak eta $\mathbb{WP}_{[1,1,1,6,9]}^4$ ereduaren modulu-espazioaren sektore \mathcal{G} -inbariantea deskribatzen dituela. Huts guztietan, horrela lortutako bi modu \mathcal{G} -inbarianteen eta axiodilatoiarene masak bat zetozen (2.48) ekuazioko espektroarekin, non $\lambda = 0, 1, 2$ diren. Hartara, 3.3 irudian erakutsi ditugu $\mu_{\pm 0}^2$, $\mu_{\pm 1}^2$ eta $\mu_{\pm 2}^2$ zenbakizko masa-banaketak, (3.34) banaketa teorikoarekin batera, $\xi \in [0.001, 0.12]$



3.4 irudia: EKH eskualdean dauden 95.626 hutsen $\tilde{\mu}_\lambda^2$, $\lambda = \{0, 1, 2\}$, masa eskalarren banaketa osoa. Histograma bakoitzean azpimarratu ditugu (a) $\xi \in [0.001, 0.02]$ eta (b) $\xi \in [0.13, 0.5]$ tartetan dauden soluzio tinkoak. Irudien barnekietan marraztu dugu $\tilde{\mu}^2 \approx 0$ inguruko masa-banaketa, non (a) EKH puntutik gertuko asintotikoki masagabeak diren moduak ageri diren eta (b) EKH puntutik urrun dauden soluzioen masak oso arinak ez direla ikus dezakegun.

tartean normalizatuta. Bistan da masa-banaketa teorikoen eta zenbakizko emaitzen arteko adostasun-maila nahiko ona dela; hori, dena den, uste izatekoa zen, (3.30) ekuazioko $\rho(\xi)$ banaketa, masa-banaketen oinarria dena, ondo funtzionatzen duela frogatu baitugu arestian. Irudi horien ezaugarririk garrantzitsuena da $\mu_{\pm 1}^2$ masen banaketak duen punta jatorriaren inguruan; horren ondorioz, hutsen frakzio nabarmenak eremu arin bat izango du bere espektroan. Erraz uler dezakegu hori, izan ere, alde batetik, $N_A^0 = 0$ duten hutsek (hemen aztertzen ari garenak) EKH puntutik parametrikoki gertu aurki daitezke [145, 186, 187], beraz, $\xi = 0$ ingurunean dauden hutsak nahiko arruntak izango dira (ikus 3.2(a) irudia). Bestetik, (2.48) adierazpenak argi uzten du $\xi \rightarrow 0$ limitean asintotikoki masarik gabeko modu bat izango duela, 3.3(b) irudiko $\mu_1^2 = 0$ inguruko punta azaltzen duena. Ezaugarri hori hemen aztertutako huts-klasearen propietate erabat generikoa da, Calabi-Yau trinkoketarekiko eta trunkaketa-ansatzaren xehetasunekiko independentea dena; hain zuzen ere, bai (2.48) masa-espektroa, bai (3.33) eta (3.34) probabilitate-banaketak guztiz unibertsalak dira. Bestalde, aintzat hartzeko beste kontu bat da grabitinoaren masa ($m_{3/2}$) baino txikiagoa dela espektroaren masen erdia.

EKH parametroan inposatu dugun $\xi \in [0.001, 0.12]$ baliozkotasun-tartearen ondorio zuzenak dira 3.3 irudiko ertz zorrotzak, probabilitate-banaketaren puntak ξ -ren balio minimoari dagozkiela. Hain zuzen ere, 3.4 irudian erakutsi dugu ξ -ren borneak aldatzearen eragina. Hiru modu \mathcal{G} -inbarianteen masa-banaketa konbinatua 3.4(a) irudian marraztu dugu, $\xi \in [0.001, 0.02]$ izaki. Argi ikus daiteke banaketaren puntak oso zorrotzak direla kasu horretan, maximoak

$$\mu_{\pm\lambda}^2 / m_{3/2}^2 = \left\{ 0, \frac{4}{9}, \frac{16}{9}, 4 \right\}, \quad (3.35)$$

balioetan kokatzen direlarik. Gogoan izan balio horiek direla, hain zuzen ere, (2.48) espektroaren masak EKH limite zorrotzean ($\xi \rightarrow 0$). Horien artean dugu lehen aipatutako masarik gabeko modua, EKH puntuaren ingurune txikian ageri dena. Bestalde, 3.4(b) irudian marraztu ditugu $\xi \in [0.13, 0.5]$ tartean dauden (hots, EKH puntutik oso urrun dauden) eta

instantoi-ekarpen txikiak dituzten hutsen masa-banaketak, modu \mathcal{G} -inbarianteei dagozkienak betiere. Irudiko barnekin ikusi dezakegunaren arabera, modurik arinenean behe-borne zorrotza ageri da: $\mu_{-1}^2 \gtrsim 0.11 m_{3/2}^2$. Hartara, lehen aipatu dugun bezala, EKH puntutik gertu dauden hutsak baztertuz gero, espektroan modu arinik ez duen huts-multzoa eraiki ahal izango dugu, Kähler moduluen egonkortzea bideratzeko oso aproposa izan daitekeena.

Horren ildotik, argi dago 3.4 irudiko puntak ez direla bateragarriak Paisaiaren modelizazio estatistikoekin, horien artean daudelarik Ausazko Matriz Teoria erabiliz eraikitako potentzialak [123,134,177,179] edo Ausazko Gausstar Ereduak erabiltzen dituztenak (ikus 5. kapitulu xehetasun gehiagorako). Hemen landutako teoria eraginkorren konplexutasun faltan datza bateraezintasun horren jatorria. Hain zuzen ere, kapitulu honetako akoplamenduegitura erabat zurruna da eta, beraz, dimentsio anitzeko ausazko eremu gausstar batek sortzen duen konplexutasuna ez du inoiz erakutsiko teoria eraginkor analitikoak.

Azkenik, \mathcal{G} simetria-taldearekiko ez-tribialki transformetzen diren trunkatutako egitura konplexuaren 270 eremuen masa $\lambda = 2$ duten modu \mathcal{G} -inbariantearena izango da. Hots, $\mu_{\pm\lambda}^2 = \left(1 \pm \frac{1}{3}(1 + \xi)\right)^2$ izango dugu $\lambda = 2, \dots, h^{2,1}$ eremuentzat; horrenbestez, horien probabilitate-banaketa dugu 3.3(c) irudikoa. Berriro ere, azken emaitza hori guztiz azpimarragarria da, eremu horien ETEaren akoplamenduak ezin baitira (3.23) adierazpenen bitartez lortu, eta hortaz guztiz ezezagunak zaizkigu printzipioz.

3.4 Ondorioak

Kapitulu honetan, aurrekoan bezala, Calabi-Yau trinkoketak izan ditugu aztergai. Oraingo honetan, geometria horien EKH eskualdean dauden fluxu-huts bereziak ikertu ditugu, zeinen axiodilatoi/egitura konplexuaren sektorearen masak (2.48) adierazpen unibertsalaren bitartez kalkulatu daitezkeen. Emaitza horren bidez, eremu horien masen gaineko kontrol analitiko paregabea lortu dugu, α' eta g_s garapenen lehenengo ordenan; horrenbestez, trinkoketaren guztizko egonkortzea aztertzeke, hots, Kähler moduluak ere barneratzeko, zeharo baliagarriak izango zaizkigu. Nabarmentzekoa da, espektroaren guztizko eskala alde batera utziz, (2.48) formulako masen balioa egitura konplexuaren eremuek soilik kontrolatzen dutela. Ondorioz, Kähler moduluen potentziala sortzen duten α' zuzenketak eta ekarpen ez-perturbatiboak ezagututa, axiodilatoiaren eta egitura konplexuaren moduluen egonkortasuna bermatu dezakegu, huts-bilaketa modulu-espazioaren eskualde egokietara murriztuz. Hain zuzen ere, (2.48) espektroan asintotikoki masarik gabeko modu bat aurkituko dugula beti frogatu dugu EKH puntuaren inguruan, $\mu_{-1}^2|_{\xi \rightarrow 0} = 0$, beste masa guztiak $m_{3/2}$ grabitinoaren masaren ordenakoak izaki. Bestela esanda, EKH limitean trinkoketaren egonkortasuna zapuztu dezakeen modu bakarra dugu. Aitzitik, $m_{3/2}$ ordenakoa da EKH puntutik urrun kokatzen diren hutsen (2.48) espektroko modurik arinena; hortaz, ETEaren ekarpen perturbatibo eta ez-perturbatiboak kontrolpean mantenduz gero, Kähler sektorea arriskurik gabe egonkortu ahal izango dugu, eta hutsaren egonkortasun osoa bermatu ahal izango dugu. Bestalde, Kähler moduluak egonkortzerakoan, (2.48) espektroan zuzenketa txikiak induzituko direla eta $\lambda = 2, \dots, h^{2,1}$ moduen endekapena hautsiko dela espero dugu.

Gogoan izan behar dugu hemen eztabaidatutako eraikuntzak baliagarriak izango zaizkigula soilik LVS motako hutsentzat, ez aldiz, KKLT motakoentzat. Izan ere, hemen aurkeztu-

tako soluzioek $W_0 \equiv \mathcal{V} m_{3/2} \geq 1/\sqrt{\pi}$ betetzen dute (ikus (3.22) ekuazioa), eta KKLT motako hutsek $W_0 \ll 1$ bete behar dute. Ondorioz, lan honen jarraipen naturala dugu hemen aztertutako huts-klasearen Kähler moduluen egonkortzea, LVS prozeduran oinarrituz. Gainera, bestelako trunkamendu-mekanismoak erabiltzea badugu, aurreko kapituluko emaitza orokorrekin bateragarriak diren beste nolabaiteko fluxu eta eremuen ansatzak erabiliz. Horien artean, W_0 parametrikoki txikia duten hutsak aurkitzea aurrerapauso interesgarria izan liteke.

Bukatzeko, hona hemen gure emaitzen aplikagarritasunari buruzko pare bat iruzkin, EKH limitetik kanpo dauden eskualdeetan. Oro har, gogoan izan behar dugu hemen lortutako emaitza eta ondorio guztiak EKH puntuaren ezaugarri unibertsaletan oinarritu ditugula. Hala eta guztiz ere, modulu-espazioaren konitate (*conifold*) limiteei dagokienez, horien analisia bideragarria izan liteke [194–196] lanen pausoak jarraituz. Horietan, esplizituki frogatu zen egitura konplexuaren moduluen azpimultzo bat egonkortu daitekeela, beste eremu guztiak EKH puntutik gertu finkatuz gero, hots, *EKH-konitate* eskualdean. Izan ere, EKHko eremuen masa nahiko handia baldin bada, sektore horren egonkortasuna independenteki aztertu daiteke, eta konitate limitetik gertu dauden moduluak era tinkoan arbuiatu, lehen hurbilketa batean behintzat. Ondorioz, interesgarria izan daiteke gure emaitzak hainbat trinkoketen EKH-konitate eskualdean aplikatzea EKH puntuko moduluak karakterizatzeko [194, 195].

4. kapitulua

Racetrack motako potentzialak eta de Sitter Zingira-aierua

Aurreko kapituluetan egitura konplexuaren eta axiodilatoiaren sektorearen azterketa sakona bideratu dugu. Oraingo honetan gure lana Kähler sektorea barneratzen duten egonkortze-prozeduretan oinarrituko dugu. Hain zuzen ere, *de Sitter Zingira-aieruaren* ikuspuntutik landuko dugu egonkortzea. Kapitulu honetan, fluxu-superpotentzialaren puntu kritikoak aztertuko ditugu, eta zuzenketa ez-perturbatiboan bidez Kähler moduluei masa emango digu. Soluzio jakin horiek aztertu eta de Sitter puntu kritikoaren existentzia berretsiko dugu eremu-teoria eraginkorraren ikuspuntutik. Hori ez ezik, de Sitter Zingira-aieruarekin eta horren berrikusitako bertsioarekin kontrastatuko ditugu huts horiek.

Kapitulu hau [197] lanean oinarritu da.

4.1 Sarrera

Duela pare bat urte formulatutako *de Sitter Zingira-aieruaren* arabera [54], grabitate kuantikoarekiko tinkoa den edozein potentzial eskalarrak ondorengo baldintza bete behar du:

$$M_p \frac{|\nabla V|}{V} \geq c, \tag{4.1}$$

non c dimentsiorik gabeko $\mathcal{O}(1)$ konstantea den. Aieru honen ondorioz zuzenenetakoa dugu de Sitter huts metaegonkorrik existitu ezin daitekeela. Hori ez ezik, edonolako de Sitter puntu kritikoren existentzia ere debekatzen du, zela-puntuak barne. Aieruaren alde hori dagoeneko fisikaren Eredu Estandarraren inguruko hainbat asperturekin ez dator bat [198–200]. Hain zuzen ere, (4.1) baldintza betearazteko, Higgs eremuaren akoplamendu jakin batzuk barneratu beharko genituzke Eredu Estandarrean.

Grabitate kuantikoaren teoria tinkoa dugu Soka-Teoria; beraz, aierua zuzena bada, teoria horren bidez lortutako edozein potentzialek (4.1) ekuazioa bete beharko luke. Baldintza hori oso murriztailea suertatzen zaigu teoriaren 10 dimentsioak 4ra trinkotzean sortu daitezkeen potentzialak kontuan hartzerakoan. Aitzitik, baldintza berdintsuak aurkitu izan dira Soka-Teoriaren trinkoketa batzuen potentzialei dagokienez [201]. Ondorioz, ezinbestekoa zaigu

berrestea eremu-teoria eraginkorraren baieztapen orokor hori edozein egoeratan betetzen den. Hainbat lanetan aztertu da hori, 4 dimentsioko de Sitter minimo bat eraikitzeke egin behar diren hurbilketen inguruan batez ere; ikus, besteak beste, [55–65].

Kapitulu honen aztergaia dugu soka-trinkoketen de Sitter zela-puntuen existentzia, de Sitter aierua murriztailegia dela frogatzeko. Hain justu, literaturan badira de Sitter soluzio egongaitzen existentziaren ebidentziak, 10d higiduraren ekuazioetatik zuzenean lortutakoak (ikus [202] eta bertako erreferentziak). Horrenbestez, badirudi horrelako soluzioak izan ditzakeen 4 dimentsioko potentzialak aurkitu ahal izango ditugula, (4.1) ekuazioko aierua hausten dutenak. Hala eta guztiz ere, ez dago erabat argi 10 dimentsioko soluzio horiek 4-D eremu-teoria eraginkorraren lengoaian idatzi daitezkeenik [203]. Beraz, interesgarria ez ezik, beharrezkoa zaigu aieruaren bestelako kontradibideak aurkitzea.

Soka-Teoriaren trinkoketa bideratzerakoan sortzen den 4 dimentsioko teoria eraginkorraren ikuspuntutik aztertu dezakegu gure problema. Ikusmolde horretan oinarritu dira de Sitter hutsak eraikitzeke egin diren lanik garrantzitsuenak, KKLT eredua [35] eta Bolumen Handiko Eszenarioa [31, 34, 204], besteak beste; ikus 1.3.3 azpiatala xehetasun gehiagorako. Aitzitik, eraikuntza horietan erabiltzen diren hainbat osagai zalantzan jarri dituzte zenbait autorek [205] (bestalde, ikus [206]). Interesgarria izango zaigu, horrenbestez, prozedura horietan oinarritzen diren potentzialen de Sitter puntu kritikoak aurkitzea, zeinetan osagai guztiak kontrolpean mantenduz de Sitter Zingira-aierua hausten den. Hain zuzen ere, Conlonen [207] aztertu ditu horren inguruko xehetasunak modulu-potentzialen inguruan. Bere argudioen arabera, baldintza jakin batzuk betez gero, potentziala zeroranzko joera izango du eremu-espazioan balio positiboetatik, dilatoiarene edo barne-bolumenaren norabideak jarraituz adibidez. Horrenbestez, modulu-espazioaren AdS minimoen existentzia aintzat hartuz, minimo horien eta infinituaren arteko punturen batean potentzialaren maximo bat gertatu beharko da nonbait. Argudio horrek ez du goratze terminorik behar potentzial eraginkorraren mailan eta ondorioz nahiko generikoa dirudi. Baieztapen hori indartzeko, beharrezkoa da puntu kritiko positibo horren existentzia frogatzea teoriaren beste eremu guztiak kontuan hartzerakoan. Kapitulu honetan, hain zuzen ere, IIB motako eraikuntzetan horixe bera frogatuko dugu hainbat egitura konplexuaren modulu, dilatoia eta Kähler modulu bakarra erabiliz. Gainera, de Sitter zela-puntuen presentzia nahiko generikoa dela ikusiko dugu, bai [207] artikuluan kontsideratzen diren kasuetan, baita bestelako kasu orokorragoetan ere.

Bestalde, [63] artikuluen arabera, Grabitate Ahularen Aieruaren [52] forma jakin batek erabat derrigortuko du trinkoketa tinkoa bideratzea *Racetrack* motako potentzialak erabiliz gero. Aurrerago erakutsiko dugun bezala, [63] laneko autoreek inposatutako parametroak murriztailegiak dira; izan ere, erraz aurki daitezke Grabitate Ahularen Aierua errespetatzen dituzten koefiziente-multzoak.

Hemen aurkeztuko ditugun ereduak hainbat tinkotasun baldintza betetzen dituzte, trinkoketatik lortuko ditugun emaitzen baliozkotasuna bermatzen dituztenak. Hauexek dira, hain justu, gure erduei inposatu dizkiegun eskakizunak:

- barne-bolumen handi samarra izatea
- akoplamendu ahuleko erregimenean egotea
- egitura konplexuaren balio handiak edukitzea

- termino zinetiko guztien positibotasuna interesatzen zaizkigun puntuetan
- axioi-eremuen periodoa txikia izatea (Grabitate Ahularen Aieruaren araberakoa)
- energia-dentsitatea azpiplanckearra izatea
- fluxuen eta superpotentzialaren diskretizazioa mantentzea

Aurreko baldintza-zerrenda nahiko luzea da eta *printzipioz* ezin dugu ziurtasun osoz esan gure ereduak eskakizun guztiak beteko dituenik. Aitzitik, zailtasun guzti horiek gainditu ahal izango ditugula frogatuko dugu, baldintza horiek guztiak betetzen dituzten adibideak aurkituz.

Hala eta guztiz ere, problema sinplifikatzearen, zenbait hurbilketa erabili behar izan ditugu. Zehazki, trinkoketa-barietatearen Kähler-modulu sektorea eremu bakar batera murriztu behar izan dugu. Horren arira, superpotentzial ez-perturbatiboaren ekarpena ere Kähler modulu bakar horren araberakoa izango da. Jakina, gure ereduaren bertsio errealistagoa aztertzea dugu, bi Kähler modulu eta bi egitura konplexuaren araberakoa dena, ([99, 208] lanetan egin zen bezala), kapitulu honetako emaitzak kasu horretan ere betetzen direla berresteko.

Lan honen zati nagusia bukatu ondoren, de Sitter Zingira-aieruaren bertsio berria argitaratu zen [66]. Azken hori jatorrizko aieruaren bertsio ahulagoa da, de Sitter zela-puntuak ahalbidetzen dituena eta potentzialaren kurbadurarengan murrizketak inposatzen dituena punto kritiko horietan. Aieruaren bertsio berri horren motibazioa eta jatorrizkoarena ezberdinak dira, eta azterketapean daude [209]. Gauzak horrela, garrantzizkoa jotzen dugu aieru horien baliozkotasuna berrestea euren egungo forman. Lan honek, izan ere, jatorrizko (4.1) aieru zorrotzaren aurkako ebidentzia emango du Soka-Teoriaren arloan. Bestalde, trinkoketa hauetan aurkitutako de Sitter zela-puntuaren ezaugarriak aztertu ditugu, eta aieruaren bertsio ahularekin bat datoze berretsi dugu, kapitulu honen azkenen atalean xehetasun osoz azalduko dugun bezala.

Hona hemen kapitulu honen egitura. 4.2 sekzioan, de Sitter zela-puntuak dituzten adibide esplizituak eraikiko ditugu. 4.3 sekzioan, gure soluzioen baliozkotasuna eztabaidatuko dugu aurreko baldintza-zerrendako puntu guztiekin konparatuz. 4.4 sekzioan, aurreko potentzialen de Sitter puntu kritikoaren inguruko ezaugarriak ikertu eta de Sitter Zingira-aieruaren bertsio gaurkotua [66] betetzen duten ikusiko dugu. Azkenik, lan honen zenbait ondorio zerrendatuko ditugu 4.5 sekzioan.

4.2 IIB motako trinkoketen adibide esplizituak

Kapitulu honetan $\mathbb{WP}_{[11169]}^4$ orientate-eredua landuko dugu, 3.3 sekzioan zeharo deskribatu duguna, eta Kähler moduluen egonkortzean arras erabili dena, ikus adibidez [45, 100]. Zehazki, geometria horren bi egitura konplexuaren modulu-eremuaren trunkamendu supersimetrikoa erabiliko dugu¹ (zenbakizko problema egingarria izan dadin). Bestalde, aurreko

¹Kapitulu honetan, 2. eta 3. kapituluetan ez bezala, ez dugu egitura konplexuaren modulu-espazioa norabide bakar batera murriztuko. Ondorioz, nahiz eta aurreko laneko CY orientate bera erabiliko dugun, hemen ikertuko dugun modulu-espazioaren eskualdea ez da aurreko lanekoaren berdina izango; hori dela eta, 3. kapituluko emaitzak ez dute zertan balio oraingoa.

sezkioan aipatu bezala, Kähler sektorearen modulu bakarra erabiliko dugu problema osoa sinplifikatzeko.

Sarrerako 1.3 sekzioan esan bezala, potentzialaren eskalarik gabeko egitura dela eta, huts supersimetrikoetako Kähler moduluak norabide lauak dira; horrenbestez, Kähler sektorea egonkortzeko, eskalarik gabeko limitetik beste jo beharko dugu. Hartara, alde batetik, zuzenketa perturbatiboak aintzat hartu ahal ditugu Kähler potentzian [31], edo, bestetik, superpotentzialaren ekarpen ez-perturbatiboak erabiltzea dugu [35]. Lan honetan termino ez-perturbatiboetara joko dugu Kähler eremu bakarra duten eredu sinpleenetan; ekarpen horien forma hauxe dugu [35]:

$$W_{\text{np}} = \sum_i A_i e^{-a_i T} \quad (4.2)$$

non A_i eta a_i konstante errealak diren.

Aurreko osagaiak erabiliz, ondorengo Kähler potentziala duen $N = 1$ supergrabitateteoria ikertuko dugu:

$$K(z_1, z_2, \tau, T) = -3 \log(T + \bar{T}) - \log(-i(\tau - \bar{\tau})) + K_{cs}(z_1, z_2, \tau); \quad (4.3)$$

bestalde, hauxe da superpotentzial osoa:

$$W(z_1, z_2, \tau, T) = W_{\text{flux}}(z_1, z_2, \tau) + Ae^{-aT} + Be^{-bT}, \quad (4.4)$$

non K_{cs} EKH eskualdeko egitura konplexuaren Kähler potentziala dugun, ikus (2.4), eta akoplamenduak (3.23) adierazpenekoak diren. Bestalde, W_{flux} bidez adierazi dugu fluxuek superpotentzian sortzen duten ekarpena, alegia, (1.35) ekuazioko Gukov-Vafa-Witten superpotentziala. Ekarpen ez-perturbatiboak esplizituki idatzi ditugu (4.4) ekuazioan; azken horiek *racetrack* motako superpotentziala sortzen dute. Ekarpen horien jatorria $D7$ branek CY geometriaren barne-zikloen haritzean datza [35].

Hemen erabiliko dugun ereduaren ezaugarri guztiak deskribatu ditugu. Jakina, bertan ageri diren parametroak finkatuko ditugu ondorengo adibideetan. Garrantzitsua da azpimarratzea trinkoketa-geometria eta D-branen edukiera finkatu arren, fluxu-aukeren kopurua itzela dela, eta horrenbestez, beste hainbeste potentzial eskalar sortu ahal izango ditugula. Baieztapen horretan oinarrituko gara gure ondorioak nahiko orokorrak direla argudiatzeko.

4.2.1 Huts supersimetrikoak

Eskalarik gabeko zuhaitz mailako hutsen, alegia, (1.37) ekuazioen soluzioen superpotentzialari W_0 esango diogu ondorengoan. Bestalde, fluxu-superpotentziala sortzen duten fluxuak ($f_A|f^B$) eta ($h_A|h^B$) notazioekin deskribatuko ditugu. Hartara, de Sitter zela-puntuak dituzten potentzialen deskribapenari hasiera emango diogu zuhaitz mailako superpotentzial nulua ($W_0 = 0$) duen adibide bat aztertuz. Egitura konplexuaren moduluak soilik erabiliz (hau da, termino ez-perturbatiborik erabili gabe) [45] artikuluan frogatu zen horrelakorik gertatu daitekeela fluxu egokiak erabiliz gero. Adibidez, ondorengo fluxu-sortaz baliatuz:

$$(f_A|f^B) = (20, 0, 0|0, -69, -28), \quad (h_A|h^B) = (0, -4, 0|49, 18, 6). \quad (4.5)$$

zuzenean kalkulatu daiteke $W_0 = 0$ izango dugula (1.37) ekuazioen eskalarik-gabeko huts-ekuazioen soluzioan.

Ondorengo parametroen bidez deskribatutako ekarpen ez-perturbatiboa gehituz,²

$$A = -\frac{1}{100}, \quad B = 1, \quad a = \frac{2\pi}{100}, \quad b = \frac{2\pi}{50}, \quad (4.6)$$

eremu guztiak kontuan hartzen dituen minimo supersimetriko bat aurkitu ahal izango dugu. Zehazki, $\text{Re}[T] = T_R = 82.430$ eta $\text{Im}[T] = T_I = 0$ izango dira AdS minimo supersimetriko horretan. Garrantzitsua da nabarmentzea emaitza hori lortzeko eremu guztien ekuazio supersimetrikoak ebatzi ditugula; horrenbestez, benetako minimoaren superpotentziala zertxo bait alda liteke jatorrizko $W_0 = 0$ balioarengandik, termino ez-perturbatiboaren eragina dela eta. Edonola ere, ekarpen horiek bideratzen dituzten minimoaren posizioaren aldaketak egitura konplexuaren eta axiodilatoiaren eremu-espazioan nahiko txikia da. Azken baieztapen hori oso baliagarria zaigu ekarpen ez-perturbatibo nulua duten ekuazioen soluzioa lehenbizi lortzeko egitura konplexuarentzat eta axiodilatoiarentzat, ondoren soluzio hori sistema osoaren jatorrizko ansatz bezela erabiltzeko.

4.2.2 de Sitter puntu kritikoa

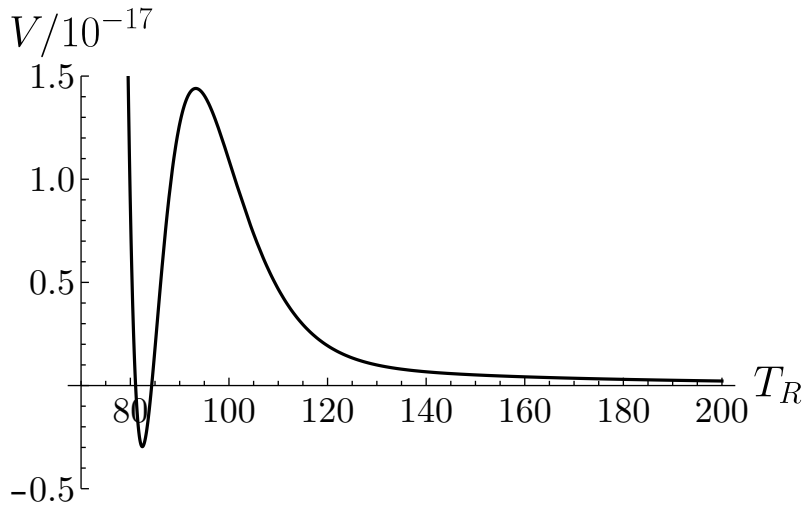
Potentzial eskalarrak T_R -ren balio handietaranzko duen joera asintotikoa ikusita, zerorantz doala nabaritu dezakegu balio positiboetatik. Aitzitik, lehen aurkitu dugun minimo supersimetrikoak V negatiboa du. Beraz, 4.1 irudian ikus dezakegun bezala, potentzialak maximo lokal bat izan beharko du T_R ardatzaren bitarteko puntu batean. Ideia hori [207] lanean ere deskribatu izan da, dilatoiaren potentzialaren kasuan soka-trinkoketa heterotikoetan.

Eremu guztiak barneratzen dituen potentzial eskalarraren adierazpena erraz lortu dezakegu; hortaz, maximo hori benetako puntu kritikoa den zuzenean egiaztatu dezakegu beste norabide guztiak kontuan hartuz gero. Horrela, dilatoiaren eta egitura konplexuaren moduluen balioa de Sitter puntu kritikoa eta AdS minimo supersimetrikoan nahiko parekoak direla nabaritu dugu. Izan ere, egitura konplexuaren eta dilatoiaren masak Kähler eremukoekin konparatuz, zuzenean ikus dezakegu bi sektoreen arteko eskalen tartea.

Arestian aipatu dugunaren arabera, adibide honetan aukeratu ditugun fluxuek minimo supersimetrikoa izatea ahalbidetu digute zuzenketa ez-perturbatiboak barneratu baino lehen. Bestela esanda, $W_0 = 0$ dugu. Horri esker, [37] artikuluan zerrendatutako problemak ekidin ahal izan ditugu; izan ere, lan horren arabera, zenbait arazo gerta litezke ekarpen ez-perturbatiboak superpotentzian barneratzerakoan lehenbizi supersimetriaren hausturak sor litezkeen zuzenketa perturbatiboak kontuan hartu ezean. Bestalde, ikus [38] erreferentziako eztabaida.

Horrenbestez, zera ondorioztatu dezakegu: de Sitter zela-puntuak aurkitu daitezkeela hainbat modulu barneratzen dituen trinkoketa eredu hauetan. Haatik, azpiatal honetan erabili dugun adibidea nahiko berezia da, gure ondorioak fluxu-superpotentzial nuluan oinarritzen baitira T_R norabideko zela-puntuaren existentzia frogatzeko. Ondorengo azpiatanean bestelako W_0 duten adibideak erabiliko ditugu gure eredu de Sitter zela-puntuaren

²Kontuan izan trinkoketa-eredu jakin bakoitzarentzat, parametro horiek zenbait baldintza bete beharko dituztela. Ikus, adibidez, [99] artikuluko eztabaida. Guk, hemen, ez dugu hori kontuan hartuko.



4.1 irudia: $W_0 = 0$ kasuaren (0 kasuaren) irudikapena, (4.6) ekuazioko *racetrack* parametroen menpekoa dena. Zuzenketa ez-perturbatiboak *anti-de Sitter* minimo bat sortu du; bestalde, potentzialaren joera asintotikoa zerorunzkoa denez balio positiboetatik, T_R ardatzaren bitarteko puntu batean maximo bat aurkitu ahal izango dugu, minimoaren eta infinituaren artean. Hain zuzen ere, ardatz horretako maximo lokala *de Sitter* zela-puntu batetik oso gertu dago.

orokortasuna aztertzeke.

4.2.3 Kasu orokorrak

Aurreko sekzioan erabili ditugun parametroek *de Sitter* puntu kritiko bat aurkitzea ahalbidetu digute, Conlonen [207] eztabaida jarraituz.³ Ondorengoan, puntu horien existentzia frogatuko dugu, hemen erabiliko ditugun ereduaren parametro-espazioaren bolumenaren zati handi batentzat.

Gure eraikuntzen *de Sitter* puntu kritikoak bilatzeko bestelako metodoa deskribatzen hasiko gara. Demagun termino ez-perturbatiboaren eraginez Minkowski huts supersimetrikoa aurkitu dugula. Bestela esanda, superpotentzial *osoa* (alegia, W_{flux} eta ekarpen ez-perturbatiboak barneratzen dituen) nulua da soluzio horretan. Hain zuzen ere, *de Sitter* zela-puntuak aurkitzeko abiapuntu aproposa da hori: minimo horren inguruko potentziala positiboa izango da, baina bolumen handian zeroruntz joan beharko denez, punturen batean buelta eman beharko du. Jakina, argudio horrek soilik ez du puntu horien existentzia ziurtatuko; horrenbestez, eremu anitzeko potentzialen adibide esplizituetan frogatu beharko dugu. Horretarako, $\text{WP}_{[11169]}^4$ CY orientatea erabiliko dugu berriro ere. Nahiz eta eredu horren egitura konplexuen modulu-espazioa dimentsio bikoa soilik den, eredu nahiko aberatsa da Paisaiaren *de Sitter* puntu kritikoaren existentzia frogatzeko, orokorrean.

Arestiko *racetrack* potentzian Minkowski huts supersimetrikoak sortzeko, superpotentzial ez-perturbatiboaren koefizienteak doitu ditzakegu W_0 balioaren arabera, [210, 211]

³Hain zuzen ere, [207] erreferentzian, *de Sitter* zela-puntu horiek izan ditzaketen beste hainbat adibide eman ditu Conlonen, potentzialaren α' zuzenketa jakin batzuk erabiliz. Lan honetan puntu berezi horien existentzia frogatuko dugu zuzenketa horiek arbuizatzen dituzten *racetrack* motako ereduetan.

Kasu zk.	$(f_A f^B)$	$(h_A h^B)$	W_0
0	(20, 0, 0 0, -69, -28)	(0, -4, 0 49, 18, 6)	0
1	(20, -1, -6 12, -44, -14)	(-1, -4, 3 43, 21, 7)	$-0.025920 + i 0.022994$
2	(18, -2, -3 16, -37, -10)	(-1, -4, 3 46, 21, 5)	$-0.025987 + i 0.000443$
3	(18, -1, -3 14, -42, -15)	(-1, -4, 3 43, 19, 6)	$-0.020426 + i 0.011213$

4.1 taula: Lan honetan aztertu ditugun 4 kasuen osoko fluxuak eta horien jatorrizko W_0 -ren balioak ($D_I W_{flux} = 0$ ebatziz lortutakoa, $I \in \{\tau, z_i\}$ eremuentzat). Bestalde, 1. kasuko $V(z_i, \tau, T)$ potentzial osoak Minkowski minimo supersimetriko bat izan zitzan aukeratu genituen (4.7) racetrack parametroen balioak.

lanetan erakutsi den bezala. Hain zuzen ere,

$$A = 0.26050 - i 0.30090, \quad B = -0.65453 + i 0.75603, \quad a = \frac{2\pi}{300}, \quad b = \frac{2\pi}{150}, \quad (4.7)$$

erabili dugu

$$(f_A|f^B) = (20, -1, -6|12, -44, -12), \quad (h_A|h^B) = (-1, -4, 3|43, 21, 7), \quad (4.8)$$

fluxu-sortarentzat, zeinen zuhaitz mailako superpotentziala $W_0 = -0.025920 + i 0.022994$ den. Parametro horiek sortzen duten potentzial osoan de Sitter zela-puntua aurkitu dugu bolumenaren norabidean, espero genuen bezala.

Horrela planteatuta, badirudi guk erabilitako (A, B, a, b) parametroen konfigurazioa oso doitu dagoela Minkowski huts bat lortzeko. Horrenbestez, fluxu-tuplak aldatuko ditugu, *racetrack* potentziala finkatuta mantentzen dugularik, eta $|W_0|$ -ren balio txikiak bermatuz. Baldintza horiek betetzen dituzten zenbait adibide lortu ditugu fluxuen ekorketa horren bidez. Horietako lau aztertuko ditugu ondorengoan: aurreko $W_0 = 0$ duen kasua, (4.8) fluxuak dituen, eta bestelako bi adibide. Horien guztien xehetasunak 4.1 taulan bildu ditugu.

Lau kasuetako potentziala, (4.7) ekuazioko *racetrack* parametroaren arabera, erakutsi dugu 4.2 irudian, bolumen-norabidean zehar. Berrito ere, minimotik gertu aurkitu dugu de Sitter puntu kritiko bat, norabide guztiekiko muturra dena. Hori ez ezik, 1–3 kasuetan, bolumen handiagoko eskualdean, beste AdS puntu kritiko bat aurkitu dugu; hortaz, gure de Sitter zela-puntua bi minimo supersimetrikoen artean kokatuta dago adibide horietan. Jokabide asintotiko hori ez du zerikusirik [207] artikuluan eta aurreko sekzioan aztertutakoarekin. Puntu kritiko berri horrek zeharo zailtzen du de Sitter puntu kritikoa nolabait desagertaraztea bestelako minimo supersimetrikoak desagertarazi gabe. Lehen aipatu bezala, minimo supersimetrikoen eta de Sitter puntu kritikoaren artean moduluen balioa zertxobait aldatzen da, oro har.

Horrez gain, 2. eta 3. kasuek lehenengoaren jokaera orokor berbera dute; beraz, gure ustez, hemen adierazitako ezaugarriak ez dira doitze-prozesuaren ondorioak. Egitura konplexuaren modulu gehiago dituen eredu errealistetan, W_0 planoko hutsen banaketa laua da [212], eta guk erabili dugun ereduak $|W_0| \approx 0$ inguruko minimo asko ahalbidetzen ditu [100]. Horrenbestez, de Sitter puntu kritikoak dituzten huts kopurua oso handia izango da errealtatean. Beraz, hemen erakutsitako adibideak nahiko generikoak izatea espero dugu ohiko CY geometriatan.

Lehen minimo supersimetrikoaren eta de Sitter puntu kritikoaren inguruko potentzialak erakutsi ditugu 4.2 eta 4.3 irudietan, $\text{Re}(T) \equiv T_R$ norabideetan. Bestalde, 4.4 irudian marraztu

Kasu zk.	τ	z_1	z_2	T
0	$-8.712E-4 + i 3.001$	$-1.000 - i 1.108E-4$	$-0.9999 + i 9.850E-5$	$62.22 - i 1.044E-3$
1	$-0.8120 + i 3.752$	$-1.383 - i 0.5176$	$-0.1546 + i 1.067$	$77.09 + i 0$
2	$-0.5595 + i 3.395$	$-1.225 - i 0.6514$	$-0.6160 + i 1.543$	$66.25 + i 5.737$
3	$-0.5748 + i 3.485$	$-1.304 - i 0.4232$	$-0.4240 + i 1.011$	$68.82 + i 2.727$

(a) Lehenengo (T_R txikiena duen) puntu kritiko supersimetrikoaren eremu-balioak

Kasu zk.	τ	z_1	z_2	T
0	$-8.929E-4 + i 3.001$	$-1.000 - i 1.136E-4$	$-0.9999 + i 1.010E-4$	$96.53 + i 5.127E-4$
1	$-0.8118 + i 3.752$	$-1.383 - i 0.5176$	$-0.1546 + i 1.067$	$96.53 + i 1.178E-3$
2	$-0.5593 + i 3.395$	$-1.225 - i 0.6514$	$-0.6159 + i 1.543$	$97.84 + i 3.846$
3	$-0.5747 + i 3.485$	$-1.304 - i 0.4232$	$-0.4240 + i 1.011$	$96.85 + i 1.963$

(b) de Sitter zela-puntu ez-supersimetrikoetako eremu-balioak.

Kasu zk.	τ	z_1	z_2	T
1	$-0.8110 + i 3.751$	$-1.383 - i 0.5175$	$-0.1546 + i 1.067$	$157.6 + i 3.882E-3$
2	$-0.5584 + i 3.395$	$-1.225 - i 0.6513$	$-0.6158 + i 1.543$	$189.7 - i 43.34$
3	$-0.5738 + i 3.484$	$-1.304 - i 0.4231$	$-0.4240 + i 1.010$	$194.9 - i 18.37$

(c) Bigarren (T_R handiagoa duen) anti-de Sitter minimo supersimetrikoen eremu-balioak

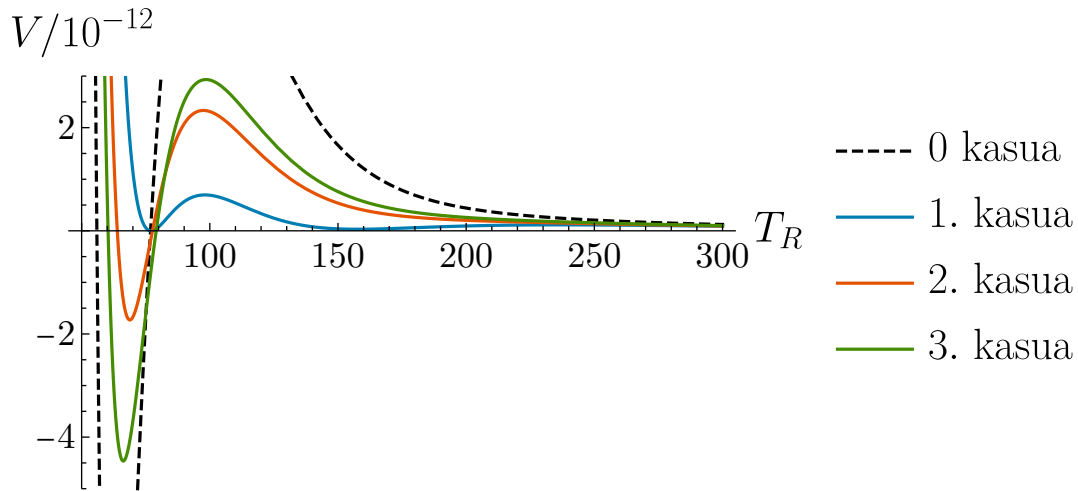
Puntua	Kasu zk.	Masak							
1. min. supersimetrikoa	0	$5.791 \cdot 10^{-4}$	$5.790 \cdot 10^{-4}$	$2.846 \cdot 10^{-4}$	$2.845 \cdot 10^{-4}$	$1.510 \cdot 10^{-4}$	$1.510 \cdot 10^{-4}$	$9.744 \cdot 10^{-10}$	$8.462 \cdot 10^{-10}$
	1	$1.015 \cdot 10^{-2}$	$1.015 \cdot 10^{-2}$	$3.174 \cdot 10^{-4}$	$3.174 \cdot 10^{-4}$	$1.033 \cdot 10^{-4}$	$1.033 \cdot 10^{-4}$	$9.125 \cdot 10^{-11}$	$9.125 \cdot 10^{-11}$
	2	$1.813 \cdot 10^{-3}$	$1.813 \cdot 10^{-3}$	$4.155 \cdot 10^{-4}$	$4.154 \cdot 10^{-4}$	$1.523 \cdot 10^{-4}$	$1.523 \cdot 10^{-4}$	$4.292 \cdot 10^{-10}$	$3.799 \cdot 10^{-10}$
	3	$1.836 \cdot 10^{-3}$	$1.836 \cdot 10^{-3}$	$3.991 \cdot 10^{-4}$	$3.991 \cdot 10^{-4}$	$1.316 \cdot 10^{-4}$	$1.316 \cdot 10^{-4}$	$2.889 \cdot 10^{-10}$	$2.636 \cdot 10^{-10}$
de Sitter zela-puntua	0	$1.551 \cdot 10^{-4}$	$1.550 \cdot 10^{-4}$	$7.622 \cdot 10^{-5}$	$7.614 \cdot 10^{-5}$	$4.045 \cdot 10^{-5}$	$4.040 \cdot 10^{-5}$	$-1.269 \cdot 10^{-10}$	$1.178 \cdot 10^{-10}$
	1	$5.169 \cdot 10^{-3}$	$5.168 \cdot 10^{-3}$	$1.616 \cdot 10^{-4}$	$1.616 \cdot 10^{-4}$	$5.262 \cdot 10^{-5}$	$5.260 \cdot 10^{-5}$	$-2.514 \cdot 10^{-11}$	$2.427 \cdot 10^{-11}$
	2	$5.630 \cdot 10^{-4}$	$5.628 \cdot 10^{-4}$	$1.290 \cdot 10^{-4}$	$1.289 \cdot 10^{-4}$	$4.730 \cdot 10^{-5}$	$4.726 \cdot 10^{-5}$	$-6.244 \cdot 10^{-11}$	$5.866 \cdot 10^{-11}$
	3	$6.590 \cdot 10^{-4}$	$6.589 \cdot 10^{-4}$	$1.432 \cdot 10^{-4}$	$1.432 \cdot 10^{-4}$	$4.723 \cdot 10^{-5}$	$4.719 \cdot 10^{-5}$	$-5.101 \cdot 10^{-11}$	$4.795 \cdot 10^{-11}$
2. min. supersimetrikoa	1	$1.188 \cdot 10^{-3}$	$1.188 \cdot 10^{-3}$	$3.713 \cdot 10^{-5}$	$3.713 \cdot 10^{-5}$	$1.209 \cdot 10^{-5}$	$1.208 \cdot 10^{-5}$	$1.294 \cdot 10^{-12}$	$9.632 \cdot 10^{-13}$
	2	$7.720 \cdot 10^{-5}$	$7.720 \cdot 10^{-5}$	$1.769 \cdot 10^{-5}$	$1.769 \cdot 10^{-5}$	$6.484 \cdot 10^{-6}$	$6.483 \cdot 10^{-6}$	$3.801 \cdot 10^{-13}$	$3.065 \cdot 10^{-13}$
	3	$8.087 \cdot 10^{-5}$	$8.087 \cdot 10^{-5}$	$1.757 \cdot 10^{-5}$	$1.757 \cdot 10^{-5}$	$5.793 \cdot 10^{-6}$	$5.792 \cdot 10^{-6}$	$2.697 \cdot 10^{-13}$	$2.172 \cdot 10^{-13}$

(d) Puntu kritikoetako eremu eskalarren masa-espektroa. Gorriz idatzi ditugu de Sitter puntu kritikoari dagokien T_R norabideko balio propioa. Errenkada bakoitzeko azken bi masei dagozkien bektore propioak T_R eta T_I norabideekiko ia-paraleloak dira, hurrenez hurren.

4.2 taula: Ondorengo 4.2-4.4 irudietan erakutsitako puntu kritikoen z_1 , z_2 , τ , eta T eremu-balioak eta masa-espektro eskalarra. Nahiz eta hemen bost zifra adierazgarri bakarrik erakutsi ditugun balio bakoitzarentzat, kalkulu guztiak 40 digituetako prezisioarekin bideratu dira. Bestalde, kasu batzuetan argi erakusten ez den arren, τ , z_1 eta z_2 eremuen balioa puntu kritikoen artean aldatzen da. Hartara, hemengo zifrak puntu kritikoen kokapenaren ingurunetzat jo behar dira.

ditugu bigarren AdS puntu kritiko supersimetrikoaren inguruko potentzialak; $W_0 = 0$ kasua ez dugu marraztu, horrek bestelako minimorik ez baituelako. Puntu horien guztien kokapena eremu-espazioan eta masa-espektroak 4.2 taulan adierazi ditugu.⁴

⁴ Ekintzaren eremu eskalarren termino zinetikoa ez da kanonikoa izango, orokorrean. Horrenbestez, modulu guztien zati erreal eta irudikariarekiko balio propioak lortzeko, eremu-espazioan horrela definitutako g_{ij} metrika behar izan dugu: $K_{I\bar{J}} \partial_\mu \Phi^I \partial^\mu \bar{\Phi}^{\bar{J}} = \frac{1}{2} g_{ij} \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^{\bar{j}}$ non $\Phi^I = \{\tau, z_1, z_2, T\}$ dugun eta ϕ^i horien zati erreal edo irudikaria adierazten duen. Ondorioz, hauxe da balio propioak kalkulatzeko erabili behar dugun matrizea: $\mathcal{H}^i_j = g^{ik} (\partial_k \partial_j V - \Gamma_{kj}^l \partial_l V)$. Jakina, bigarren terminoa nulua izango da puntu kritikoetan.



4.2 irudia: Lehen puntu kritikoaren inguruko potentziala T_R eremuaren arabera 0–3 kasuetan, beste eremu guztiak 4.2(a) taulako balioetara finkatu ditugular. Potentzial horren minimo guztiak anti-de Sitter motakoak dira, 1. kasuarena izan ezik, Minkowski minimoa baita hori.

4.3 Soluzioen baliozkotasuna

Sarreran esan bezala, moduluen balioa minimoetan zenbait baldintza bete behar ditu egin behar izan ditugun hurbilketatik lortutako emaitzak fidagarriak izan daitezten. Hemen aztertu ditugun adibideak murrizpen horiek guztiak betetzen dituzte, hain justu.

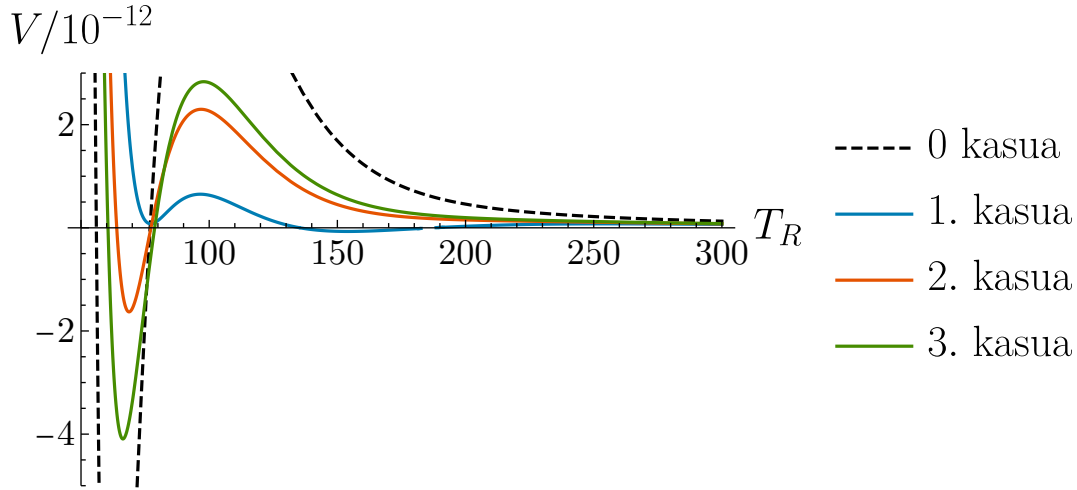
Lehenik eta behin, puntu kritikoek T eremuaren zati erreal handia izan behar dute, trinkoketaren bolumena handi samarra izan dadin soka-unitateetan eta superbrabitate-hurbilketatik fidatu ahal izateko. Guk aurkitutako T_R txikiena ≈ 62 izan da.

Bestalde, dilatoiaren zati irudikaria ere handia izan behar du, soka-akoplamendu ahuleko erregimenean egon dadin gure eraikuntza. Era berean, egitura konplexuaren sektoretik sortzen diren instantoi-ekarpenak txikiak izan daitezten eta superpotentziala kontrolpean mantendu dadin, soluzioak EKH eskualdean egon beharko du. Horien inguruan, geuk kalkulaturako $\text{Im}[\tau]$ txikiena ≈ 3 izan da eta z_1 guztien zati erreal 1 baino handiagoa da, balio absolutuan.

Jakina, modulu-eremu guztien termino zinetikoen positibotasuna ere inposatu behar dugu. Baldintza horrek zenbait zenbakizko adibide baztertzeraz behartu gaitu.

Literaturan eztabaidatutako beste murrizpen garrantzitsua dugu Kähler moduluei atxikitutako axioi-eremuen periodo trans-planckearra [63]. Ezaugarri hori duten ereduak Grabitate Ahularen Aieruaren orokorpen bat hausten dute eta, horrenbestez, Zingiran kokatzen direla uste da. Hartara, horrelako ereduak ezin ditugu kontradibide onargarritzat jo de Sitter Zingira-aieruaren inguruan.

Azken baldintza horrek, besteekin batera, onargarria zaigun parametro-espazioa zeharo mugatzen du. Aitzitik, axioien periodo azpi-planckearrak dituzten ereduak erraz aurkitu ahal izan ditugu. Hain zuzen ere, hemen aurkeztu ditugun adibide guztiek Grabitate Ahularen Aierua erabat errespetatzen dute. Axioien harmonikoak zuzenean kalkulatu daitezke potentzial eskalarretik, eta hauexek ditugu horiek bete behar dituzten baldintzak periodo



4.3 irudia: de Sitter puntu kritikoaren inguruko potentziala T_R eremuaren arabera 0–3 kasuetan, beste eremu guztiak 4.2(b) taulako balioetara finkatu ditugular. Zela-puntuak dira hemen ageri diren itxurazko maximoak, eremu guztiak aintzat hartzerakoan.

azpi-Planckearrak izan ditzaten:⁵

$$aT_R > 1, \quad bT_R > 1, \quad (b - a)T_R > 1. \quad (4.9)$$

Azkenik, aurkitu ditugun de Sitter zela-puntuen energia-dentsitatea azpi-planckearra denez, horrek ez digu bestelako murrizpenik sorrarazi.

4.4 de Sitter zela-puntuak eta Findutako de Sitter Aierua

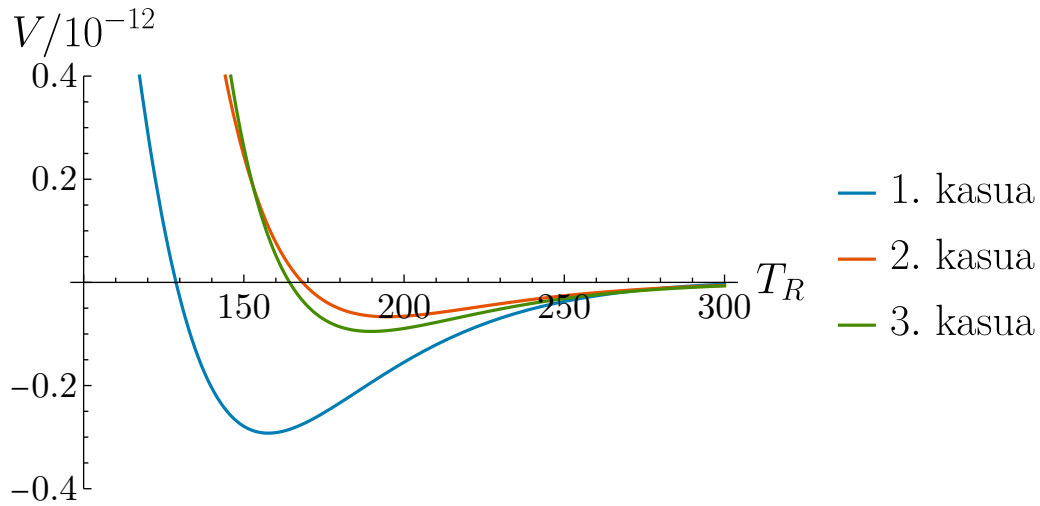
Aurreko sekzioetan de Sitter puntu kritikoen agerpena nahiko generikoa dela ikusi dugu gehiegi doitu gabeko trinkoketa-ereduetan. Hartara, de Sitter Aierua zorrotzegia dela ondorioztatu dugu.

Hilabete batzuk geroago, Aieruaren bertsio berri bat argitaratu zen [66]; horren arabera, de Sitter zela-puntuak gerta litezke Paisaian baldin eta potentzialaren kurbadura handi samarra den norabide ezegonkorrarekiko. Zehatzago adierazita, ondorengo bete behar du potentzialak zela-puntu baten inguruan:

$$\text{Min}(V_{\phi\phi}) \leq -\frac{c'}{M_p^2} V, \quad (4.10)$$

non c' dimentsiorik gabeko $\mathcal{O}(1)$ konstantea den eta $V_{\phi\phi}$ notazioak potentzialaren bigarren deribatua adierazten duen ϕ eremu kanonikoki normalizatuarekiko. Aldagai horien eta η parametro inflazionarioaren arteko lotura zuzenean ikus daiteke. Azken hori potentzialaren bigarren deribatua eta potentzialaren balioaren arteko zatiduraren bidez definitzen da; hartara, aieru berriaren arabera, η -ren balioa negatiboa eta nahiko handia izango da norabide ezegonkorrarekiko neurtzerakoan de Sitter zela-puntuetan.

⁵ Baldintza guztiak kontuan hartu dute T_R eremuaren termino zinetiko ez-kanonikoa. Horiek idazteko, axioi-eremuak kanonikoki normalizatu behar izan dira.



4.4 irudia: Bigarren anti-de Sitter minimoaren inguruko potentziala T_R eremuaren arabera 1–3 kasuetan, beste eremu guztiak 4.2(c) taulako balioetara finkatu ditugula. Kasu guztietan, itxurazko minimoak benetakoak dira, eremu guztiak aintzat hartzerakoan.

Modulu guztien arabera den potentzial osoa erabiliz, de Sitter zela-puntuetako balio eta bektore propioak lor ditzakegu, eta horiekin η parametroa kalkulatu kanonikoki normalizatutako eremuen arabera (ikus 4. oin-oharra). Kalkulu horren arabera, de Sitter puntu kritikoetako norabide ezegonkorak bolumen-moduluarekiko ia-paraleloak direla ikusi dugu. Hori, azken batean, bat dator potentzialaren T_R norabideen arabera aurreko irudikapenekin.

Arestian aurkitutako 4 de Sitter puntu kritikoaren η balioak 4.3 taulan jaso ditugu. Argi dago emaitza horiek bat dotezela de Sitter aieruaren bertsio ahularekin. Edonola ere, horrelako eredu sinpleetan uste izatekoa da hori. Izan ere, T_R eremuaren termino zinetikoa unibertatsala da:

$$\frac{3}{4T_R^2} (\partial_\mu T_R \partial^\mu T_R), \quad (4.11)$$

eta hortik lortzen dugun η parametroa, T_R norabide kanonikoki normalizatuaren arabera, hauxe dugu:

$$\eta_{T_R} = \frac{2}{3} T_R^2 \left(\frac{V''}{V} \right), \quad (4.12)$$

non $V'' = \partial^2 V / \partial T_R^2$ den eta termino zinetiko ez-kanonikoa η parametroaren definizioan aintzat hartu dugun (ikus 4. oin-oharra). Trinkoketa-eredua erabat tinkoa izan dadin, bolumen handia behar dugu; hortaz, oso zaila izango da η -ren balio txikiak lortzea. Hori ez da harrigarria, izan ere, supergrabitare-teorien ohiko η -problemaren ondorio zuzena da [213]. Gure ereduan osagai berriak sartu ezean, ezin izango dugu η txikirik lortu inola ere [214, 215], erabilitako *racetrack* parametroak eta fluxuak edonolakoak direla ere. Dena den, argi dago gure ereduan zenbait aldaketa bideratuz gero, de Sitter zela-puntu lau samarrak lortu ahal izango ditugula, potentzialaren norabide axioikoetan zenbait doiketa eginez, adibidez.

Horrelako adibideak ditugu, besteak beste, *Racetrack* Inflazioa lortzeko erabilitako ere-

Kasu zk.	0	1	2	3
de Sitter zela-puntuko η	-18.62	-38.58	-22.04	-22.20

4.3 taula: de Sitter zela-puntu bakoitzeko η parametroaren balioak.

duak [208, 216], non termino goratzaileak kontuan hartu diren horien eztabaidetan. Azpimarragarria da aldaketa xume horien ondorioz inflazio-eredu errealistak bideratu daitezkeela. Hala eta guztiz ere, hemen ez dugu horrelako terminorik erabili, gure xedea kapitulu honetan de Sitter zela-puntu generikoen existentzia erakustea baita IIB motako trinkoketa estandarretan.

4.5 Ondorioak

Kapitulu honetan de Sitter puntu kritikoak dituzten eredu esplizituak aztertu ditugu, *racetrack* motako potentzialak dituzten trinkoketetan. Puntu horiek, hain justu, (4.1) ekuazioko de Sitter Zingira-aierua hausten dute. Hartara, hainbat modulu-eremu dituzten Calabi-Yau geometria orokorretan horrelako puntuen kopurua oso handia izan daitekeela argudiatu dugu, *racetrack* parametroen eta fluxuen balioen arabera. Kasu nahiko mugatu batean erakutsi dugu hori, bi egitura konplexuaren modulu besterik ez dituen geometria batean. Trinkoketa haratago sinplifikatzearen, Kähler modulu bakarra erabili dugu; hala eta guztiz ere, bi Kähler (edo gehiago) dituen adibideetan emaitza berdintsuak lortuko direlakoan gaude [208].

Gure ereduan aurkitu ditugun de Sitter zela-puntuak (4.10) ekuazioko de Sitter Aieruaren bertsio ahularekin bat datoz. Uste izatekoa da hori, norabide ezegonkorraren portaera ikusita eta supergrabitare-lagrangear hutsa erabiltzen hari garela jakinda. Dena den, jatorrizko de Sitter Zingira-aierua puntu horietan hausten denez, ez liteke zailegia izan behar zela-puntu lau samarrak dituzten ereduak eraikitzea lagrangearrean beste osagai-mota batzuk sartuz, *Racetrack* inflazio ereduetan egin den bezala [208, 216].

Bestalde, teoria guztiz kontrolpean edukitzeko bete behar diren baldintza guztiak errespetatzen dituzten fluxu-trinkoketak eraiki ditugu. Hain zuzen ere, Grabitate Ahularen Aieruarekin bat datozen trinkoketa-ereduak eraikitzea posible dela frogatu dugu. Hori ez ezik, hemen erabili ditugun ereduak de Sitter hutsak lortzeko eredu interesgarrienetakoak direla ikusi dugu, IIB motako trinkoketen ikuspuntutik. Besteak beste, horrelako konfigurazioak [217] lanean aztertu izan dira, non de Sitter hutsak eraiki izan diren hainbat goratze mekanismo erabiliz eta [210] artikuluko *Racetrack* motako potentzialak barneratuz.

Azkenik, hemen bideratutako lanaren jarraipen naturala 3. kapituluko trinkoketa-konfigurazioetan aplikatzea izan daiteke. Bertan, $\mathbb{WP}_{[11169]}^4$ trinkoketaren modulu-espazioa norabide bakar batera murriztu dugu eta, horrenbestez, Kähler sektorea ere egonkortuz gero, modulu *guztiak* erabat egonkortuta dituen trinkoketa-eredu bat bideratuko genuke. Oso interesgarria izan daiteke eraikuntza hori, adibidez, hainbat goratze mekanismo probatzeko. Haatik, oso zaila izan daiteke helburu hori erabat lortzea; izan ere, aurreko kapitulan aipatu dugun bezala, Kähler sektorearen egonkortzeak egitura konplexuaren sektorearen endekatzea guztiz hauts lezake, eta zenbakizko problema eginezina bihurtu.

III. atala

Paisaia eta Kosmologia

5. kapitulua

Slepian ereduak eta ausazko Paisai gausstarrak

Orain arte, IIB Soka-Teoriaren eremu-teoria eraginkorra guztiz analitikoki landu dugu, 1. kapituluko makineria erabiliz. Aitzitik, modulu kopuru mordoaren gaineko kontrol konputazionala izateko, espektroaren trunkamendu supersimetrikoetara jo behar izan dugu, bai Paisaiaren puntu berezien simetriak erabiliz, bai eremuetan eta fluxuetan ansatz bereziak inposatuz.

Argi dago prozedura horiek murriztaileegiak direla Paisaiaren ezaugarri buruzko ondorio orokorrak lortzeko; hortaz, beste nolabaiteko estrategiak erabili beharko ditugu teoriaren konplexutasun osoa aztertzeko. Adibidez, Paisaia ausazko funtzioetat har dezakegu. Ideia hori sinplistegia dirudien arren (aurreko kapituluetan aztertu dugunarekin konparatuz, behintzat), oso eredu interesgarria suertatuko zaigu Paisaiaren ezaugarri kosmologikoak aztertzeko. Hala eta guztiz ere, ausazko Paisaietan nekez aurkituko ditugu fenomenologikoki interesgarriak diren potentzial eskalarrak. Hortaz, kapitulu honetan ausazko potentzialak baldintzatzeko teknika matematikoak aztertuko ditugu, alegia, *Slepian ereduak*. Izan ere, horien bitartez probabilitate baxuko ausazko Paisaien errealizazioak sortuko ditugu. Slepian eredu horiek eraikitze beharrezkoak diren metodo analitikoak eta zenbakizko prozedurak erakutsiko ditugu eta horiekin puntu kritikoen eta inflexio-puntuaren inguruko Ausazko Eremu Gausstarrak (AEGak) eraiki ahal izango ditugu. Teknika horiekin era efizientean sortuko ditugu edonolako altuerako minimoak dituzten zenbakizko AEGak, eta horiekin sasihutsen iraungitze-prozesuen analisi sakona bideratu ahal izango dugu. Hori ez ezik, metodo horiek inflexio-puntuetako prozesu inflazionarioak aztertzeko erabiliko ditugu eta horien ezaugarri behagarrien estatistikak lortuko ditugu.

Kapitulu hau [117] artikuluan oinarritu dugu.

5.1 Sarrera

Dimentsio anitzeko teorian maiz aurkitu ditzakegu egonkortu beharreko eremu (modulu) kopuru handia. Horretarako, eremu horien balioa finkatzen duen potentzial bat beharrezkoa zaigu, zeinen minimoak eremuen balio egonkorra adierazten dituen. Tesi honetan sakonki ikusi dugun bezala, prozedura horren adibidea da Soka-Teoriaren trinkoketetan sortzen

den Paisiaia; fluxu-trinkoketetan, hain zuzen ere, modulu-eremuen kopurua $\mathcal{O}(100)$ -koa da. Horren ondorioz, potentzial horien azterketa zehatza erabat ezinezkoa da eta potentzialaren eremu-espazioa nolabait trunkatzera behartzen gaitu. Bestalde, eredu horiek aztertzeke alternatiba interesgarria metodo estatistikoak erabiltzean datza, non potentzial eskalarra ausazko eremutzat hartzen den. Azken ideia hori zeharo ikertu da literaturan puntu kritikoen egonkortasunaren inguruan [46, 134, 171], eta unibertso goiztiarraren ereduen inguruan [102, 103, 174].

Paisaiaren ikerketa horiek potentzialaren puntu jakin batzuen ezaugarriak ezagutzean ditza, adibidez, konstante kosmologiko jakin bateko minimoetan, edo deribatu jakin batzuk dituen inflexio-puntuetan, horietan inflazioa gerta litekeelako. Aitzitik, puntu horietan inposatzen ditugun murrizketen arabera, oso zaila izan daiteke ezaugarri horiek dituen potentzial bat aurkitzea, ausazko funtzio horren hainbat iterazio eginda ere. Hain zuzen ere, de Sitter huts metaegonkorrak edota behaketa fenomenologikoekin bat datozen inflexio-puntu inflazionarioak oso arraroak dira Paisai orokorretan, horiek gertatzeko probabilitateak $P \sim \exp(-N_f^p)$ baitira, non N teoriaren eremu kopurua den eta $p > 0$ konstantea $\mathcal{O}(1)$ ordenakoa den [105, 108, 109, 123, 177, 218]. Guri interesatzen zaizkigun ezaugarriak dituzten potentzialen errealizazioak lortzeko, puntu zehatz baten inguruko Taylor-en garapena egin dezakegu, koefiziente bakoitzaren probabilitate banaketa kontuan hartuz [106, 112]. Haatik, prozedura horren inplementazioa oso zaila izan daiteke eremu kopurua handitzen dugun heinean eta interesatzen zaigun eremu-tartea handi samarra denean.¹ Hori ez ezik, mota horretako prozedurek ezin dituzte potentzial eskalarren ezaugarri globalak guztiz bete, eta azken horiek ezinbestekoak zaizkigu Paisaiaren iraungitze-prozesu kuantikoak aztertzeke. Kapitulu honetan potentzial horiek sortzeko estrategia berri bat aurkeztuko dugu; horren bitartez, potentzialak forma jakin bat izatera baldintzatuko ditugu lokalki, ausazko Paisaiaren ezaugarri globalak guztiz errespetatuz. Horiexek dira *Slepian ereduak* [219].

Paisaiaren ausazko potentzialak adierazteko hainbat metodo proposatu dira literaturan. Lan honetan, Ausazko Eremu Gausstarren (AEGen) bidez deskribatutako potentzialak izango ditugu aztergai. Horiek erabiltzeko motibazio nagusia da hainbat terminoren gehiketa bezala jo dezakegula 4 dimentsioko potentziala. Termino horiek jatorri klasikoa edo kuantikoa izan dezakete trinkoketa-mekanismoan, eta horiek guztiek aintzat hartzerakoan sortuko den potentzial konplexua ausazko eremu gausstartzat jo dezakegu. Horrelako ereduak erabili izan dira hutsen banaketa eta horien egonkortasuna aztertzeke [178, 218, 220] eta baita Paisaian gerta litezkeen prozesu inflazionarioak ikertzeke [106, 112–114, 116]. Hemen aurkeztuko ditugun teknika matematikoak erakusteko, guk doitutako puntu kritikoak (maximo, minimo edo zela-puntuak) edo inflexio-puntuak dituzten baldintzatutako AEGak eraikiko ditugu eta horien inguruko informazio estatistiko garrantzitsua lortuko dugu.

Lehenik eta behin, minimo lokalen iraungitze-prozesuak ikertuko ditugu. Horretarako, Colemanen jatorrizko [67, 68] artikuluen teknikak erabiliko ditugu. Gogoan izan prozesu horien emaitza dela sasihutsaren eta erabateko hutsaren arteko interpolazioa den instantoi-burbuila. Metodo euklidearrak erabiliz, iraungitze horri atxikitutako probabilitatea lor dezakegu, hau da, huts jakin horren batezbesteko iraungitze-tasa kalkulatu ahal izango dugu. Aitzitik, tuneleatze-prozesu horien kalkulua dimentsio anitzeko potentzialetan oso zaila da. Horren inguruan egindako lanen arabera, iraungitzearen probabilitatea esponen-

¹Ausazko eremu gausstarrak osatzeko bestelako metodo interesgarria dugu [116] artikuluan erabilitakoa.

tzialki murrizten da eremu kopuruaren funtzioan; hala eta guztiz ere, probabilitate horien eskalamendua ez da erabat lortu [221–224].

Kapitulu honetan tuneleatze-gertaera horiek aztertuko ditugu ausazko gausstar potentzialetan. Zehazki, iraungitze-probabilitatearen eta potentzialaren sasihutsaren altueraren arteko erlazioan sakonduko dugu gure azterketa. Konstante kosmologikoaren balio handia duten minimoen ikerketa eginezina izango litzateke baldintzatze-metodirik erabili gabe, horrelako minimoen kopurua guztiz arbuiagarria baita potentzialaren balio txikiagoetan aurki ditzakegun minimoekin konparatuz. Gure teknikei esker, edozein altuerako nahi bezainbeste minimo sortu ahal izan ditugu, eta horiekin informazio estatistiko tinkoa lortu dugu.

Hemen erakutsiko dugun baldintzatze-metodoen bigarren aplikazioa inflexio-puntuaren doikuntzan datza. Paisaiaren ikuspuntutik, inflazio kosmologikoa puntu horietan gertatzea nahiko probablea izan daiteke. Aitzitik, gure egungo behaketa kosmologikoekin bat datorren periodo inflazionarioa lortzea ez da batere erraza; izan ere, orokorrean inflexio-puntuaren inguruko potentziala zeharo doitu behar izaten da horretarako. Horrenbestez, Paisaiaren eredu inflazionarioa horien parametro behagarrien banaketa estatistikoa karakterizatzeko ezinbestekoa zaigu baldintzatze metodoen bat erabiltzea, horrekin inflexio-puntu ez-generikoak sortzeko. Kapitulu honetan, inflazioaren parametro behagarrien menpekotasuna ikertuko dugu eremu eskalarren hasierako baldintzekiko. Zehatzago esanda, eremuen hasierako baldintza horiek inguruko sasihuts baten iraungitzearen irteera-puntuak izango dira. Kontuan izan horrelako analisia bideratzeko ezinbestekoa zaigula inflexio-puntuaren inguruko potentziala ezagutzea eta baita hortik gertu egon daitezkeen minimoen informazioa jakitea. Hartara, gure metodoa oso baliagarria izango da ikerketa horretarako, potentzialaren ezaugarri estatistiko globalen eta lokalen informazio osoa ezagutzea ahalbidetzen digulako. Azpimarragarria da hauxe dela literaturan lehen aldiz ageri den inflexio-puntuentzako Slepian eredua. Sasihutsaren iraungitzearen eta inflazioaren hasierako baldintzen arteko bestelako ikerketetarako, ikus [87, 100, 112, 225].

Hona hemen kapitulu honen egitura. Hasteko, 5.2 sekzioan, gure ausazko potentziala AEG baten bidez deskribatzeko behin eta berriro erabiliko dugun notazioa erakutsiko dugu. Ondoren, 5.3 sekzioan, Slepian ereduen ezaugarri garrantzitsuenak azalduko ditugu eta ausazko potentzialak nola baldintzatzen dituzten ikusiko dugu. Horiekin, 5.4 sekzioan, bi eremuz osatutako ausazko Paisaiak sortuko ditugu, eremu-espazioaren puntu jakin batean altuera jakina duten minimo bat izatera baldintzatuta. Hori ez ezik, potentzial horien baldintzatutako minimoen tuneleatze-bideak kalkulatu eta iraungitze-tasen estatistikak lortuko ditugu. Bestalde, 5.5 sekzioan, inflazioa gertatzeko aproposak diren inflexio-puntuak izatera baldintzatuko ditugu gure ausazko potentzialak. Horrela, inflexio-puntu horietatik gertu gertatzen den iraungitze-prozesu batetik irteten diren eremuen hasierako baldintzak erabili ahal izango ditugu inflazioa nola gertatzen den ikertzeko. Azkenik, gure ondorio nagusiak eta hemen aurkeztutako teknika matematikoekin bideratu daitezkeen pare bat ideia emango ditugu 5.6 sekzioan. Lan honetan, besterik esan ezean, laburtutako Plancken unitateak erabiliko ditugu: $M_{\text{pl}}^{-2} = 8\pi G/(\hbar c) = 1$.

5.2 Ausazko Eremu Gausstarren aurretiazkoak

Arestian esan bezala, gure ausazko potentzial eskalarra, $V(\boldsymbol{\phi})$, N dimentsioko eremu-espazioan definitutako ausazko eremu gausstartzat joko dugu, $\boldsymbol{\phi} = \{\phi^i\}$ bektorearen mende, non $i = \{1, \dots, N\}$ den. Gainera, ausazko potentzialaren probabilitate-banaketa homogenea eta isotropoa dela suposatuko dugu; horrenbestez, AEGaren edozein bi punturen kobariantza-funtzioa horien distantziaren arabera izango da soilik. Bestela idatzita, hauxe dugu:

$$\langle V(\boldsymbol{\phi}_1) V(\boldsymbol{\phi}_2) \rangle = C(|\boldsymbol{\phi}_1 - \boldsymbol{\phi}_2|) . \quad (5.1)$$

Hori ez ezik, potentzialaren batezbestekoa nulua izango da:

$$\langle V(\boldsymbol{\phi}) \rangle = 0 . \quad (5.2)$$

Lan honetan zehar ageriko zaizkigun espresio guztiak ondorengo kobariantza-funtzio sinplea erabiliz ebaluatuko ditugu:

$$C(\boldsymbol{\phi}) = U_0^2 \exp\left(-\frac{\boldsymbol{\phi}^2}{2\Lambda^2}\right) , \quad (5.3)$$

eremu-espazioaren dimentsioa $N = 2$ izaki. Adierazpen horretan ageri den U_0 parametroak potentzialaren energia-eskala definituko du, Λ -k bestalde, eremu-espazioaren korrelazio-luzera adieraziko du. Nabarmena da hemen erabiliko ditugun teknikak bestelako egoera intergarrietan ere aplikatu ditzakegula; adibidez, kobariantza-funtzio ez-gausstarrak dituzten ausazko eremuetan. Horrenbestez, eraikuntza hauek [116] artikulukoak baino orokorragoak dira. Gure kasuan, kobariantza-funtzio gausstar sinple hori erabiltzea erabaki dugu kapitulu honetako hainbat espresio zeharo sinplifikatuko dituelako.

Ondorengo sekzioetan, oso garrantzitsuak izango dira eremuen eta horien deribatuen balioa eremu-espazioaren puntu jakin batean. Homogeneotasuna dela eta, orokortasun osoz esan dezakegu puntu berezi hori $\boldsymbol{\phi} = 0$ dela. Hartara, [106, 112] artikuluetako notazioa erabiliz, horrela definituko ditugu potentziala eta bere deribatuak puntu berezi horretan:

$$u = V(\boldsymbol{\phi})|_{\boldsymbol{\phi}=\mathbf{0}}, \quad \eta_i = \left. \frac{\partial V(\boldsymbol{\phi})}{\partial \phi^i} \right|_{\boldsymbol{\phi}=\mathbf{0}}, \quad \zeta_{ij} = \left. \frac{\partial^2 V(\boldsymbol{\phi})}{\partial \phi^i \partial \phi^j} \right|_{\boldsymbol{\phi}=\mathbf{0}}, \quad \rho_{ijk} = \left. \frac{\partial^3 V(\boldsymbol{\phi})}{\partial \phi^i \partial \phi^j \partial \phi^k} \right|_{\boldsymbol{\phi}=\mathbf{0}} .$$

Bestalde, matrize hessiarraren balio propioei λ_i , $i = \{1, 2\}$, deituko diegu; horiek, bestalde, eremu espazioaren 1,2 norabideak definituko dituzte. Kontuan izan potentzial eskalarren deribatuak ere ausazko gausstar aldagaiak izango direla eta, ondorioz, aurreko aldagaien edozein bildumak ausazko bektore gausstar bat osatuko duela. Hain zuzen ere, E.4 eranskinean erakutsi ditugu eremuaren deribatuen arteko korrelazio guztiak, $C(\boldsymbol{\phi})$ kobariantza-funtzioaren deribatuaren arabera idatzi daitezkeenak. Korrelazio horiek oso garrantzitsuak izango zaizkigu ondorengo eztabaidetan.

5.3 Slepian ereduak eta baldintzatutako ausazko eremu gauss-tarrak

Gure eraikuntzetan erabiliko dugun oinarrietako bat dugu baldintzatutako AEGak euren gausstar izaera mantentzen dutela. Zehatzago esanda, prozesu isotropo eta homogeenok (hemen erabiliko ditugunak, alegia) Kac-Rice formula erabiliz baldintzatu daitezke [226]. Horren bidez, batezbesteko eta kobariantza-funtzio berriak lortuko ditugu eta horiekin guk inposatutako baldintzak betetzen dituzten AEGak eraiki ahal izango ditugu.² Prozesu estokastikoen gertaera baldintzatuen eta gurutzatzeen azterketaren aitzindaria izan zen David Slepian [219], horregatik azken gertaera horiek aztertzeko ereduie *Slepian ereduak* deritze literaturan.

Baldintzatutako prozesuak horrelaxe deskribatu ditzakegu orokorrean. Lehenik eta behin, demagun dezagun ausazko bektore gausstar p -dimentsional bat dugula, elkarrekin gausstarrak diren aldagaiez osatuta, $\mathbf{x}^T = (x_1, \dots, x_p)$, zeinen probabilitate-banaketa funtzioa (PBF) hauxe den:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} \sqrt{\det \Sigma}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right], \quad (5.4)$$

non $\boldsymbol{\mu} = \langle \mathbf{x} \rangle$ batezbesteko bektorea den eta Σ kobariantza-matrizea den. Azken horren elementuak horrela definitzen dira:

$$\Sigma_{ab} = \langle (x_a - \mu_a)(x_b - \mu_b) \rangle, \quad (5.5)$$

non $a, b = 1, \dots, p$ diren.

Demagun ausazko bektorea bi zatitan banatu dugula, $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, non \mathbf{x}_2 azpibektorearen p_c osagaiak $\mathbf{x}_2 = \tilde{\mathbf{x}}$ baldintzaren bitartez murriztu ditugun, eta \mathbf{x}_1 azpibektorearen $p - p_c$ osagaiak baldintzatu gabe mantendu ditugun. Ondorioz, ausazko bektorearen inguruko aljebra landuz froga daiteke [170, 226] \mathbf{x}_1 azpibektorearen probabilitate-banaketa, \mathbf{x}_2 -ren gaineko baldintzak errespetatzen dituena, ondorengoa dugula:

$$\tilde{f}(\mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_2 = \tilde{\mathbf{x}}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p-p_c}{2}} \sqrt{\det \tilde{\Sigma}}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x}_1 - \tilde{\boldsymbol{\mu}})^T \tilde{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}_1 - \tilde{\boldsymbol{\mu}}) \right]. \quad (5.6)$$

Horren arabera, gausstarra izango da \mathbf{x}_1 aldagaien banaketa, aurreko batezbesteko eta kobariantzia funtzioaren araberrako parametro berrien mende idatz dezakeguna:

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu}_1 + \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (\tilde{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_2) \quad , \quad \tilde{\Sigma} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} \quad , \quad (5.7)$$

non \mathbf{x}_1 eta \mathbf{x}_2 bektoreen batezbestekoak ditugun $\boldsymbol{\mu}_1$ eta $\boldsymbol{\mu}_2$. Bestalde,

$$\begin{aligned} \Sigma_{11} &= \langle (\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_1)(\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_1) \rangle, \\ \Sigma_{12} &= \Sigma_{21} = \langle (\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_1)(\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2) \rangle, \\ \Sigma_{22} &= \langle (\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)(\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2) \rangle \end{aligned} \quad (5.8)$$

²Ikus E.5 eranskineko Kac-Rice formularen inguruko eztabaida xehetasun gehiagorako.

izango dira.

Arestiko emaitzak frogatzeko, kontuan izan behar dugu beti posible dela jatorrizko ausazko bektore gausstarraren mende dagoen $\mathbf{x}' = (\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2)$ bektore berria eraikitzea, $\mathbf{x}' = A \cdot \mathbf{x}$ transformazio lineal ez-singular baten bidez, non $\mathbf{x}'_2 = \mathbf{x}_2$ eta \mathbf{x}'_1 azpibektoreek elkarrekiko korrelaziorik ez duten. Baieztapen horren frogatzea E.2 eranskinean erakutsi dugu. Kapitulu honetan hainbat alditan erabili beharko dugu ausazko bektore gausstarren ezaugarri hori, potentzialaren ezaugarriak biltzen dituzten ausazko bektorez osatutako hainbat definizioetan.

5.3.1 Puntu kritikoak eraikitze Slepian ereduak

Sekzio honetan, arestian deskribatutako metodoak erabiliko ditugu eremu-espazioaren jatorrian, $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$ puntuan, altuera jakineko minimo bat duen AEG bat eraikitze. Bestela esanda, ondorengo ezaugarriak betezen dituen baldintzatutako AEG berriaren deskripzioa lortuko dugu: $V(\mathbf{0}) = u$ eta $V'_i(\mathbf{0}) = \eta_i = 0$, non $i = 1, 2$ diren. Horretarako, literatura matematikoan garatutako AEGen maximoak baldintzatzeko teknikak erabili [227] eta gure kasu zehatzerako aldatuko ditugu. Has gaitezen ondorengo ausazko bektore gausstarra eraikiz:

$$\mathbf{x} = \{V(\boldsymbol{\phi}_1), \dots, V(\boldsymbol{\phi}_q), V(\mathbf{0}), \eta_1, \eta_2, \zeta_{11}, \zeta_{22}, \zeta_{12}\} \quad (5.9)$$

non $\boldsymbol{\phi}_a$, $a = \{1, \dots, q\}$, espazio-eremuaren q posizio jakin adierazten dituen. Erraz frogatzea daiteke \mathbf{x} bektorearen batezbestekoa nulua dela, eta horren probabilitate-banaketa zuzenean kalkulatu daitekeela jatorrizko AEGaren kobariantza-funtzioa eta azken horren deribatuak erabiliz. Guzti hori kalkulu luze samarra denez, E.6 eranskinera eraman dugu. Arestiko baldintzatutako ausazko bektore gausstarren eztabaidaren arabera, ez dugu besterik behar bektore berriaren batezbesteko eta kobariantza berriak lortzeko (eta, beraz, baldintzatutako AEGa eraikitze).

Hartara, E.6 eranskineko emaitzak erabiliz, baldintzatutako AEGaren batezbesteko funtzio berria haxe dela frogatu daiteke:

$$\tilde{\mu}(\boldsymbol{\phi}) = e^{-\frac{\boldsymbol{\phi}^2}{2\Lambda^2}} \left[u \left(1 + \frac{\boldsymbol{\phi}^2}{2\Lambda^2} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \phi_i^2 \lambda_i \right]. \quad (5.10)$$

Hori lortu ahal izateko (5.3) ekuazioko kobariantza-funtzioa erabili dugu, eta jatorriko potentzialaren balioaren arabera, $V(\mathbf{0}) = u$, adierazi dugu. Bestalde, jatorriko matrize hessiarraren balio propioak lortzeko, λ_i , beheko (5.12) banaketa erabili beharko dugu. Kobariantza-funtzio berria ondorengoa izango da:

$$\tilde{C}(\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2) = U_0^2 \exp \left[-\frac{|\boldsymbol{\phi}_1|^2 + |\boldsymbol{\phi}_2|^2}{2\Lambda^2} \right] \left(\exp \left[\frac{\boldsymbol{\phi}_1 \cdot \boldsymbol{\phi}_2}{\Lambda^2} \right] - 1 - \frac{\boldsymbol{\phi}_1 \cdot \boldsymbol{\phi}_2}{\Lambda^2} - \frac{(\boldsymbol{\phi}_1 \cdot \boldsymbol{\phi}_2)^2}{2\Lambda^4} \right). \quad (5.11)$$

Kobariantza-funtzio berri hori homogeneoa ez den arren, isotropoa izaten jarraituko du.

Kontuan izan behar dugu hessiarraren balio propioak ez direla potentzialaren altuerarekiko independenteak izango. Erraz nabari dezakegu hori intuitiboki; izan ere, uste izatekoa da altuera handian dauden minimoak sakonera nahiko txikikoak izango direla, potentzialaren batezbestekotik behera daudenekin konparaturik behintzat. Beraz, baieztapen horren arabere-

ra, potentziala eta horren bigarren deribatuen balioak korrelazionatuta egongo dira, puntu kritikoetan bereziki. Efektu hori kontuan hartzeko, puntu kritikoetako hessiarraren balio propioen (λ_i) eta altueren (u) arteko baterako probabilitate-banaketa kalkulatu dezakegu:³

$$P_{u,\lambda} du \prod_i d\lambda_i = \mathcal{N} \exp \left[-\frac{u^2}{2U_0^2} \right] |\lambda_1 - \lambda_2| \prod_{i=1}^2 |\lambda_i| \exp \left[-\left(\frac{\Lambda^2 \lambda_i + u}{2U_0} \right)^2 \right] d\lambda_i du, \quad (5.12)$$

non \mathcal{N} normalizazio konstantea den. Banaketa horrek edozein puntu kritikorako balio du, alegia, maximoetarako, minimoetarako eta zela-puntuetarako. Horietatik interesatzen zaigun puntu-motaren arabera, λ_i bakoitzean positibotasun edo negatibotasun baldintzak inposatu beharko ditugu.

Emaitza horiek erabiliz, guk nahi dugun bezalako puntu kritikoaren duen ausazko eremu gausstarra sortu ahal izango dugu. Horretarako, demagun u altuerako minimo bat izan nahi dugula gure potentzian. Lehenik eta behin, puntu horretako balio propioak lortu beharko ditugu (5.12) banaketatik u balioa finkatuz, $\lambda_i \geq 0$ baldintzak inposatuz eta normalizazio-konstante egokia erabiliz.

Horrela lortutako λ_i balioekin potentzialaren errealizazioak sortu ditzakegu ondorengo adierazpena erabiliz:

$$V(\boldsymbol{\phi}) = e^{-\frac{\boldsymbol{\phi}^2}{2\Lambda^2}} \left[u \left(1 + \frac{\boldsymbol{\phi}^2}{2\Lambda^2} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \phi_i^2 \lambda_i \right] + \Delta(\boldsymbol{\phi}) \quad (5.13)$$

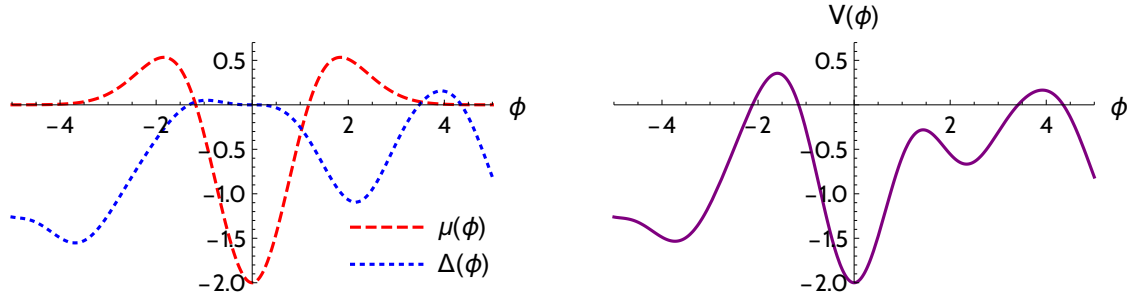
non $\Delta(\boldsymbol{\phi})$ adierazpenak batezbesteko nulua duen AEGa adierazten duen, horren $\tilde{C}(\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2)$ kobariantza matrizea (5.11) delarik. Horrelako minimo lokala duen Slepian eredua osatzeko erabilitako osagaiak 5.1 irudian marraztu ditugu. Prozedura berdintsua jarrai dezakegu bestelako puntu kritikoak inposatzeko; adibidez, balio propio positibo bat eta negatibo bat duen zela-puntu bat duen AEGa sortu dezakegu λ_i -ren lagin egokiak erabiliz gero.

Aurreko (5.13) ekuazioko Slepian eredutik zera ondorioztatu dezakegu [227]: puntu kritiko oso arraroetan, alegia, $|u| \gg U_0$ betetzen duten puntuetan (adibidez, maximo oso baxuetan edo minimo oso altuetan), AEGaren itxura oso determinista izango dela puntu kritikoaren inguruan, eta (5.13) ekuazioaren lehenengo bi terminoen bidez oso zehazki deskribatuta egongo dela. Hau da, (5.11) ekuaziotik erraz ikus daiteke ausazko $\Delta(\boldsymbol{\phi})$ osagaiaren desbiderapen estandarra beti izango dela U_0 baino txikiagoa, eta zerorantz doala $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$ -ko puntu kritikorantz gerturatzen goazen heinean (ikus 5.1 irudia). Horrenbestez, (5.13) ekuazioaren azken ekarpena arbuiagarria da puntu kritikoaren inguruan, non $|\Delta(\boldsymbol{\phi})| \lesssim U_0 \ll |V(\mathbf{0})|$ dugun. Bestalde, $|u| \gg U_0$ limitean, hessiarraren balio propioen banaketa, hots, (5.12) ekuazioa, horrela hurbildu dezakegu:⁴

$$P_\lambda d\lambda_1 d\lambda_2 \sim |\lambda_1 - \lambda_2| |\lambda_1| |\lambda_2| \exp \left[-\frac{\Lambda^2 |(\lambda_1 + \lambda_2)u|}{2U_0^2} \right] d\lambda_1 d\lambda_2, \quad (5.14)$$

³Ikus E.6 eranskinen kalkulua.

⁴Gogoan izan minimo altuetan $u > 0$ eta $\lambda_i > 0$ izango dugula; maximo oso baxuetan, aldiz, kontrako zeinuak erabili beharko ditugu.



5.1 irudia: Jatorrian minimo bat duen baldintzatutako AEG baten Slepian eredua, dimentsio bakarrekoa. Adibide jakin bat osatzen duten osagaiak erakutsi ditugu ezkerrean, alegia, (5.10) ekuazioko $\mu(\phi)$ baldintzatu-tako batezbesteko funtzioa eta baldintzatu gabeko $\Delta(\phi)$ AEG ez-homogeneoa, (5.11) ekuazioko kobariantza-funtzioduna. Osagai horiek batuz lortzen dugun AEG totala eskuinean marraztu dugu.

alegia, limite horretan autobalioen magnitudea oso txikia izango da, $|\lambda_i| \ll U_0/\Lambda^2$. Horrela, lehen esan bezala, puntu kritiko ez-ohikoen (5.13) deskonposizioan lehen termino determinista nagusituko da. Aurrerago ikusiko dugunaren arabera, emaitza hori oso garrantzitsua izango da konstante kosmologiko handia duten minimoen sasihutsaren iraugitzea aztertzerakoan. Minimo oso altua duen AEG baten adibidea 5.2(a) irudian aurki daiteke.

Ausazko eremu gausstarren fluktuazio handien joera determinista horrek bestelako ondorio garrantzitsuak dakartza Kosmologiaren hainbat eremuetan, besteak beste, Mikrouhinen Hondo Kosmikoaren (MHKren) analisisian eta Unibertsoaren Eskala Handiko Egituren formakuntzan (ikus, adibidez, [228–232]).

5.3.2 Inflexio-puntuak eraikitzeko Slepian ereduak

Sarreran esan dugun bezala, Paisaiaren potentzialaren inflexio-puntuak ere oso baliagarriak izango zaizkigu. Hain zuzen ere, potentzialaren puntu horien inguruan inflazio kosmikoa gerta liteke. Aitzitik, periodo hori behaketa kosmologikoekin bat etor dadin, inflexio-puntu horien ezaugarriak asko murriztu behar ditugu. Horregatik, gradiente txikiko inflexio-puntuak dituzten baldintzatu-tako AEGak landuko ditugu oraingoan, eremu-espazioko puntu berezi hori $\phi = 0$ -n dagoelarik. Inflexio-puntuaren ezaugarriak finkatzearen, potentzialaren gradienteak ϕ_1 norabidearekiko paraleloa dela inposatuko dugu; bestalde, puntu horren inguruko Taylorren garapenaren koefizienteak ondorengo baldintzak bete beharko dituzte:

$$\eta_2 = 0 \quad , \quad \lambda_1 = 0 \quad , \quad \lambda_2 > 0 \quad , \quad \eta_1 \cdot \rho_{111} > 0 . \quad (5.15)$$

Argi dago baldintza horien zergatia; dimentsio bakarreko inflexio-puntu bat izan nahi dugu, zeinen ϕ^1 norabidean *slow-roll* baldintzak betetzen diren, norabide perpendikularrekiko kurbadura positiboa mantenduz. Bestela esanda, dimentsio eraginkor bakar batean inflazioa bideratu dezakeen potentzial baten bila gabiltza. Horregatik inposatu dugu azken baldintza, inflexio-puntuaren inguruko periodo inflazionarioa luze samarra izan dadin.

Inflexio-puntuaren inguruko potentzialaren forma berezi horren deskribapena ez dugu inon aurkitu literatura matematikoan. Hala eta guztiz ere, hurrengo lerroetan ikusiko dugun bezala, erraz orokortu dezakegu aurreko azpiataleko prozedura horrelako inflexio-

puntuen inguruko Slepian ereduak eraikitzeko. Lehenik eta behin, (5.9) adierazpeneko ausazko bektore gausstarrari osagai batzuk gehitu beharko dizkiogu, lehen deribatuak ez ezik, hirugarrenak ere baldintzatu beharko ditugulako. Hori dela eta, ondorengo bektorea izango da atal honen aztergai nagusia:

$$\mathbf{x} = \{V(\boldsymbol{\phi}_1), \dots, V(\boldsymbol{\phi}_q), V(\mathbf{0}), \eta_1, \eta_2, \zeta_{11}, \zeta_{22}, \zeta_{12}, \rho_{111}, \rho_{122}, \rho_{222}, \rho_{112}\} \quad (5.16)$$

Bektore hori erabiliz, (5.15) ekuazioko baldintzak inplementatu ahal izango ditugu arestiko puntu kritikoentzako prozedura berdintsua jarraituz.

Hartara, E.7 eranskinen kalkulak jarraituz froga dezakegu $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$ puntuan inflexio-puntua duen AEG baldintzatu ondorengo adierazpenak deskribatuko duela:

$$V(\boldsymbol{\phi}) = \exp\left[-\frac{\boldsymbol{\phi}^2}{2\Lambda^2}\right] \left((u + \boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\eta}) \left(1 + \frac{\boldsymbol{\phi}^2}{2\Lambda^2}\right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \lambda_i \phi_i^2 + \frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^2 \phi_i \phi_j \phi_k \rho_{ijk} \right) + \Gamma(\boldsymbol{\phi}), \quad (5.17)$$

non $\Gamma(\boldsymbol{\phi})$ batezbesteko nulua eta

$$\tilde{C}(\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2) = U_0^2 \exp\left[-\frac{|\boldsymbol{\phi}_1|^2 + |\boldsymbol{\phi}_2|^2}{2\Lambda^2}\right] \left(\exp\left[\frac{\boldsymbol{\phi}_1 \cdot \boldsymbol{\phi}_2}{\Lambda^2}\right] - 1 - \frac{\boldsymbol{\phi}_1 \cdot \boldsymbol{\phi}_2}{\Lambda^2} - \frac{(\boldsymbol{\phi}_1 \cdot \boldsymbol{\phi}_2)^2}{2\Lambda^4} - \frac{(\boldsymbol{\phi}_1 \cdot \boldsymbol{\phi}_2)^3}{6\Lambda^6} \right) \quad (5.18)$$

kobariantza-funtzioa duen AEGa den. Bestalde, (5.17) adierazpeneko u , η_i , λ_i eta ρ_{ijk} parametroak finkatu ezean, altueren eta potentzialaren lehen, bigarren eta hirugarren deribatuen baterako probabilitate-banaketatik lortu beharko dira:⁵

$$P_{\text{inf}} du d\lambda_2 d\eta_1 d\boldsymbol{\rho} = \mathcal{N} |\lambda_2|^2 |\rho_{111}| P(u, \lambda_2 | \lambda_1 = 0) P(\eta_1, \rho_{ijk} | \eta_2 = 0) du d\lambda_2 d\eta_1 d\boldsymbol{\rho} \quad (5.19)$$

non

$$P(u, \lambda_2 | \lambda_1 = 0) du d\lambda_2 = \mathcal{N} |\lambda_2| \exp\left[-\frac{4u^2 - 2\Lambda^2 u \lambda_2 - \Lambda^4 \lambda_2^2}{2U_0}\right] du d\lambda_2,$$

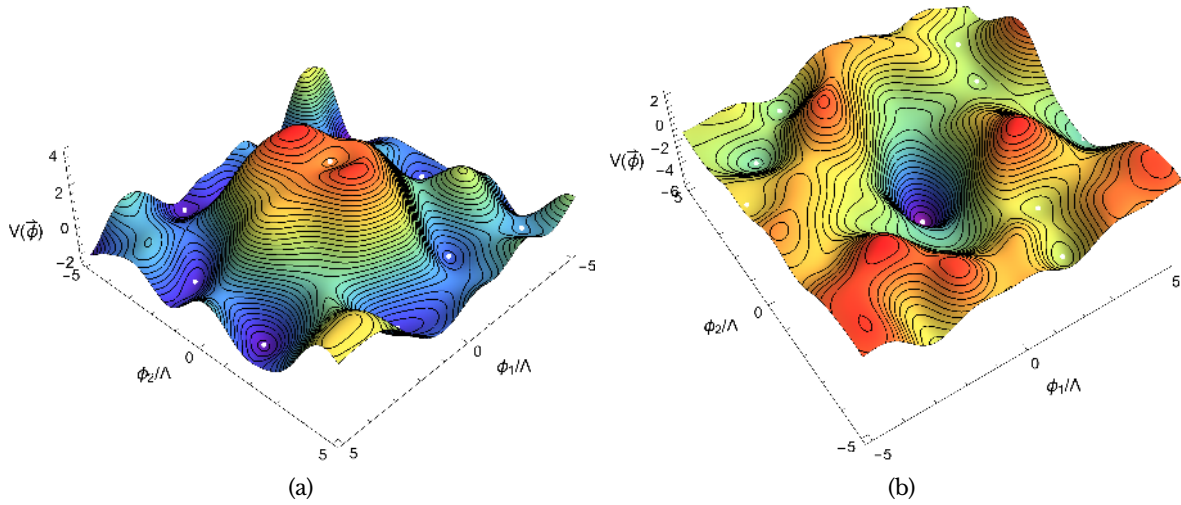
$$P(\eta_1, \rho_{ijk} | \eta_2 = 0) d\eta_1 d\rho_{ijk} =$$

$$\mathcal{N} \exp\left[-\frac{\Lambda^2}{12U_0^2} \left(18\eta_1^2 + 6\Lambda^2 \eta_1 (\rho_{111} + \rho_{122}) + \Lambda^4 \sum_{i,j,k=1}^2 \rho_{ijk}^2\right)\right] d\eta_1 d\rho_{ijk}. \quad (5.20)$$

diren. Azken banaketan, $\eta_1 \cdot \rho_{111} > 0$ baldintza esplizituki inposatu beharko dugu inflexio-puntu “inflazionarioak” bakarrik aztertu nahi izanez gero.

Banaketa horien zehaztasuna egiaztatzeko, baldintzatu gabeko zenbakizko AEG bilduma handia sortu dugu. Lagin horretako inflexio-puntu guztiak identifikatu ondoren, horien parametroen zenbakizko banaketak kalkulatu ditugu. Zenbakizko berrespen horien inguruko

⁵Ondorengo banaketen kalkuluen inguruko xehetasunetarako, ikus E.7 eranskina.



5.2 irudia: Bi dimentsioko ausazko eremu gausstarren zenbakizko errealizazioak. Horien batezbestekoa nulua da, kobariantza-funtzioa (5.3) ekuaziokoa da eta eremu-espazioaren jatorrian altuera jakin bateko minimo bat izateko baldintzatu dira. (a) irudiko minimoa 4-ko altuera du (U_0 -ren unitateetan), (b) irudikoa, aldiz -4 altueran dago. Orokorrean, minimoa geroz eta altuagoa izan, orduan eta txikiagoak izango dira horren autobalioak, eta alderantziz (ikus testua). Puntu txuri batekin adierazi ditugu errealizazio bakoitzeko minimoak.

xehetasunetarako, ikus F eranskina eta, bereziki, F.2 irudia.

5.3.3 Bi dimentsioko zenbakizko inplementazioa

Lan honetan erabili ditugun AEG guztiak Karhunen-Loeve garapena erabiliz eraiki ditugu (ikus, adibidez, [170] eta F eranskineko azalpen laburra). Sare homogeen batean diskretizatutako AEG baten balioak lor ditzakegu algoritmo horrekin. Ondoren, balio horiekin zenbakizko interpolazioa sortu beharko dugu.

Horrela, [112] artikuluko irizpideak jarraituz, 5 sare puntu erabili ditugu korrelazio luzerako (25 puntu luzera karratuko, alegia). Ondoren, laugarren ordenako *spline* kurbak erabiliz interpolatu genuen eraikitako sarea, hirugarren ordenarainoko deribatuak ahalik eta zehatzen aztertzearen. Horrela sortutako AEGen ezaugarriak (batezbesteko funtzioa, kobariantza-funtzioa, autobalioen banaketa, puntu-kritiko kopurua etab.) bat datoz guztiz aurreikuspen analitikoekin.

Aurreko pausoak jarraituz eraikitako bi zenbakizko AEG marraztu ditugu 5.2 irudian. Gogoan izan orokorrean horrelako ausazko eremu gausstarrak nahiko arraroak izan daitezkeen arren (minimoen altuera oso handia edo txikia delako), aurreko prozedura jarraituz horrelako nahi adina potentzial sortu ahal izango dugula.

5.4 Sasihutsen iraungitzea ausazko gausstar Paisaietan

Perturbatiboki egonkorak diren hainbat minimo aurki ditzakegu ausazko gausstar Paisai batean. Aitzitik, jakin badakigu huts horiek ez direla kuantikoki erabat egonkorak, eta erabateko huts baten osatutako burbuila bat sortuz iraungitu daitezkeela. Hortaz, gure Paisaietan

aurki dezakegun minimo orokor batek hainbat erataria iraingitu ahal izango da, horietako bakoitzak probabilitate jakin bat atxikituta duelarik. Sekzio honetan iraingitze prozesu horien estatistika arretaz aztertuko dugu, AEG kopuru handia sortuz era kontrolatuan eta minimo zentralaren parametroen arabera duten mendekotasuna ikertuko dugu.

Hartara, 1.5 sekzioko instantoi-teknikak aplikatuko ditugu. Horien arabera, potentzialaren sasihuts bat emanda, iraingitzea gertatzearen denbora eta bolumen unitateko probabilitatea hauxe dugu:

$$\Gamma/V \sim Ae^{-S_E} \quad (5.21)$$

non S_E jatorrizko egoeraren eta egoera berriaren artean interpolatzen duen erreboteluzioari dagokion ekintza euklidearra den.⁶

Grabitatea arbuiauz gero, iraingitzerik probableena $O(4)$ -simetrikoa den instantoi-soluzioa izango da, 4 dimentsioko espazio-denbora euklidearrean. Bestalde, 1. kapituluaz aztertutako formalismoa hainbat eremu aintzat hartu ditzan orokortu dezakegu. Hauexek dira iraingitzearen higadura-ekuazioak:

$$\phi_i'' + \frac{3}{r}\phi_i' = \frac{\partial V(\boldsymbol{\phi})}{\partial \phi_i}, \quad (5.22)$$

non 4 dimentsioko espazio euklidearrearen koordinatu erradialarekiko (r) deribatuak primen bidez adierazi ditugun, eremu eskalarrak koordinatu erradialarekikoaren arabera soilik direla suposatu dugun, $\boldsymbol{\phi}(r) = \{\phi^1(r), \dots, \phi^N(r)\}$, eta horiek kanonikoki normalizatuta daudela asumitu dugun. Bestalde, problema horren mugalde-baldintzak ondorengoak dira:

$$\boldsymbol{\phi}(\infty) = \boldsymbol{\phi}_{FV} \quad , \quad \phi_i'(0) = 0. \quad (5.23)$$

non $\boldsymbol{\phi}_{FV}$ -k sasihutsaren, alegia, iraingitzea pairatzen duen minimoaren, kokapena adierazten duen eremu-espazioan. Eremu-ekuazioak ebatzita, (5.21) ekuazioko esponentearen ekintza hauxe dugu:

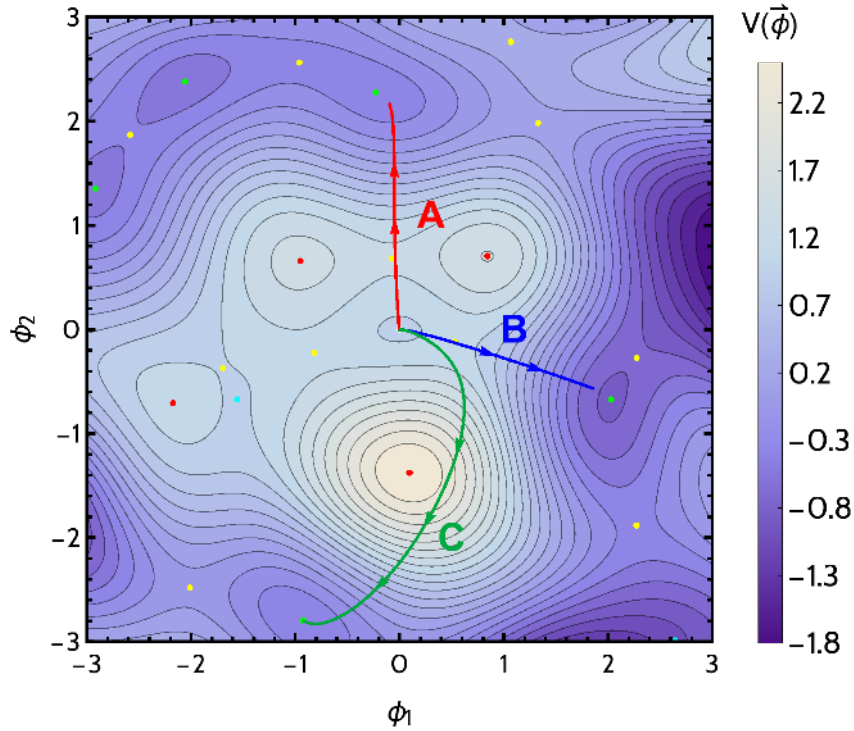
$$S_E = 2\pi^2 \int_0^\infty dr r^3 \left[\frac{1}{2} |\boldsymbol{\phi}'|^2 + V(\boldsymbol{\phi}) - V(\boldsymbol{\phi}_{FV}) \right]. \quad (5.24)$$

Ez da batere erraza (5.22) akoplatutako ekuazio-sistema ebatzea. Izan ere, sistemaren eremu-kopurua handituz doan heinean, soluzioak geroz eta ezegonkorragoak bilakatzen dira. Dena den, literaturan badira zenbait algoritmo erabilgarri problema hori gainditzeko (ikus, adibidez, [77, 233]); hori ez ezik, bestelako proposamen interesgarriak argitaratu dira azken urteotan instantoiaren ekintza eta irteera-puntua lortzeko [234, 235].

Ausazko potentzialen instantoi-ekintzak kalkulatzeko AnyBubble programa [76] erabili dugu lan honetan. Mathematica software-eko paketea da Anybubble, zenbakizko metodo oso eraginkorrek aplikatzen dituen tuneleatze-ekuazioak ebatzeko eta optimizatzeke, ikus [76] xehetasun gehiagorako.

Minimo zentralaren ezaugarrien arabera tuneleatze-ekintzaren estatistikak lortzea

⁶Lan honetan ez gara A aurrefaktoreaz arduratuko. Ikus [68] artikulua konstante horren kalkularen xehetasunetarako.



5.3 irudia: Hemen aztertu ditugun iraugitze-prozesuen adibide tipikoa. Zentroan 1 altuerako minimoa (U_0 -ren unitateetan) duen AEGa sortu ondoren, potentzial horretan gerta litezkeen iraugitzeak kalkulatu ditugu AnyBubble erabiliz. Zenbakizko AEGa eta horren minimoak (berdez), zela-puntuak (horiz) eta maximoak (gorriz) marraztu ditugu irudian, eta baita 3 instantoi-ibilbideak eremu-espazioan, 3 iraugitze-prozesu posibleetarako.

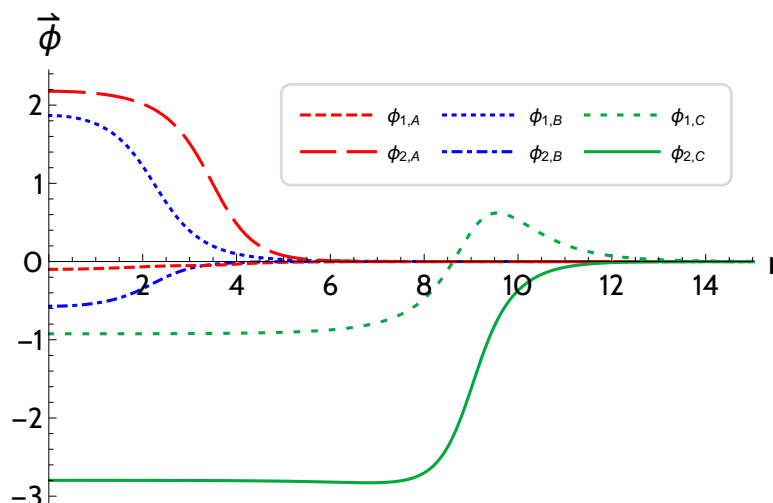
xede, -2 eta 5 (U_0 -ren unitateetan, ikus (5.3) ekuazioa) altueren arteko sasihutsen ekorketa bideratu genuen. Bestalde, [112] artikuluan azaldu den bezala, ekintza euklidearra horrela idatzi dezakegu:

$$S_E = \frac{\Lambda^4}{U_0} \bar{S}, \quad (5.25)$$

non \bar{S} ekintza euklidearra (5.3) kobariantza-funtziodun potentzialari dagokion, $U_0 = \Lambda = 1$ unitateetan adierazita. Bestela esan ezean, ekintzaren ondorengo histogramak \bar{S} -ren araberakoak izango dira.

Aurreko sekzioetako Slepian ereduen inguruko prozedura jarraituz, sasihutsaren altuera bakoitzarentzat $2 \cdot 10^4$ AEG sortu genituen minimoen inguruan. Horien guztien hessiarraren autobalioen estatistika bat dator aurreikuspen analitikoekin, eta potentzialen itxura nahiko ezberdina da errealizazio bakoitzean minimo zentraletik korrelazio luzera bat aldenuz gero. Horrenbestez, sortatuko AEG bakoitzean sasihutsetik hainbat norabideetan eta distantzian aurkitu ahal izango ditugu bestelako hutsak; edonola, $V(\phi_{FV})$ baino baxuago dauden minimo kopuru tipikoa nahiko parekoa da kasu guztietan.

Zuzenean nabaritu dezakegu aurreko sekzioan deskribatutako makineriaren boterea AE-Ga $1.5U_0$ altuerako minimo bat izatera baldintzatzen dugunean. Horrelako hutsezko energia



5.4 irudia: Aurreko 5.3 irudiko iraugitzeen eremu-ibilbideak, espazio euklidearreko r distantziaren arabera.

baino altuagoa duen minimo bat aurkitzeko, dozenaka edo ehunka baldintzatu gabeko AEG sortu beharko genituzke, ikus F eranskineko F.1(a) irudia. Adibidez, (F.5) ekuazioak erabiliz, erraz berretsi dezakegu $5U_0$ edo altuera handiagoko minimo bat aurkitzeko probabilitatea $\mathcal{O}(10^{-16})$ dela; hortaz, horrelako minimoak nekez aurkituko ditugu kasu orokorretan. Haatik, baldintzatzeko metodoak erabiliz, oso efizienteki sortu ahal izango ditugu aurrekoa bezain baldintza arraroak betetzen dituzten nahi adina ausazko eremu.

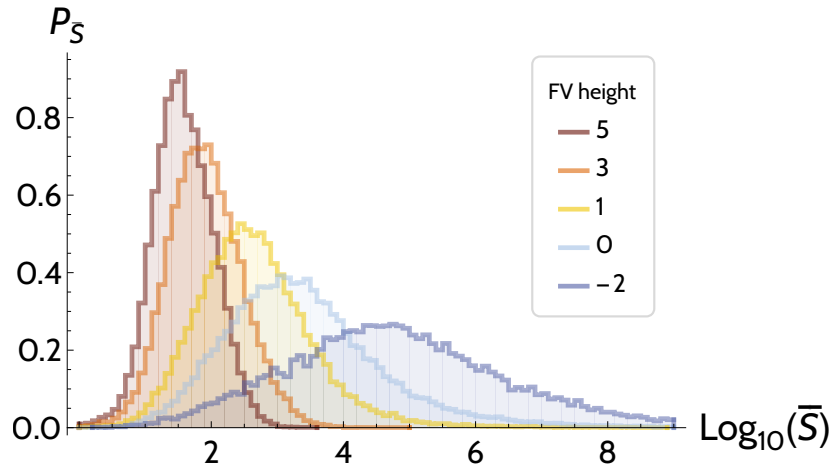
Horrela sortutako adibide bakoitzeko tuneleatze-prozesuak ikertzeko, eremu-espazioaren jatorritik gertu dauden minimo guztiak aurkitu ditugu lehenbizi. Ondoren, minimo zentraletik huts baxuagoetarako tuneleatze-tasa kalkulatu genuen (iraugitze guztien sasihutsa koordenatu-jatorriko minimoa izan da kasu guztietan) AnyBubble erabiliz. Prozedura horren adibidea erakutsi dugu 5.3 eta 5.4 irudietan, non kalkulaturako instantoi bakoitzaren eremu-espazioko ibilbidea ere marraztu dugun. Minimo zentraletik oso urrun ez dauden minimoetarako iraugitzeak aztertu ditugu soilik, errealizazioetako mugek sor ditzaketen zenbakizko arazoak ekiditeko.

5.4.1 Instantoi-ekintzaren estatistikak

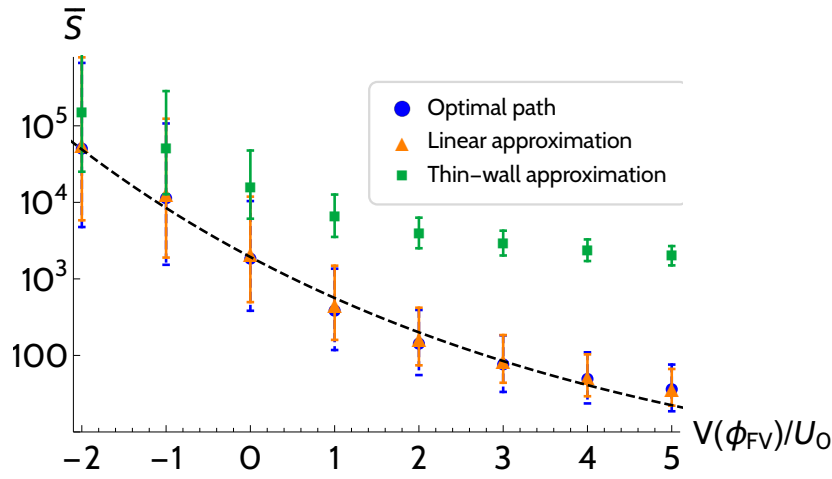
Altuerarekiko mendekotasuna

Aurreko metodoak erabiliz lortu dugun tuneleatze-ekintzaren banaketa 5.5 irudian erakutsi dugu, sasihutsaren altueraren hainbat balioentzat.⁷ Bertan oso argi ageri da banaketen batezbestekoa eta zabalera sasihutsaren altueraren arabera dela. Alegia, sasihutsaren altuera geroz eta handiagoa izan, orduan eta probableagoa izango da iraugitzea gertatzea. Nahiko intuitiboa da jokaera hori; izan ere, 5.2 irudiko adibideetan ikus daitekeen bezala, oso minimo altuetatik tuneleatzerakoan, eremuak zeharkatu behar duen potentzial-langa oso baxua da, eta ondorioz trantsizio horiei dagokien ekintza ere nahiko txikia izango da. Banaketa bakoitzaren mediana eta lehen eta hirugarren kuartilen arteko ekintza-tartea 5.6

⁷Bestela esan ezean, histograma guztiek zenbakizko emaitzen probabilitate banaketa normalizatua adierazten dute.



5.5 irudia: Tuneleatze-ekintzaren (\bar{S} -en) zenbakizko banaketa, sasihutsaren altueraren arabera.



5.6 irudia: Ekintzaren medianaren eboluzioa. Banaketa bakoitzaren lehenengo eta hirugarren kuartilen arteko datuak adierazten dituzte errore-barrek. Ibilbide optimoarentzat eta bide zuzenaren eta pareta meharraren hurbilketentzat kalkulatu ditugu kantitate horiek. Bestalde, marratutako kurbak kasu optimoaren doikuntza adierazten du (ikus (5.26) ekuazioa).

irudian marraztu dugu puntu urdinez. Berriro ere, sasihuts garaien ekintza txikiagoa eta deterministagoa dela nabari dezakegu, minimo baxuagoenarekin alderatuz.

Zenbakizko datu horiek erraz doitu ahal izan ditugu banaketa log-normalak erabiliz. Zehatzago esanda, banaketa bakoitzaren medianaren, \bar{S}_{med} -en, logaritmoa (kasu honetan, $\log_{10} \bar{S}$ -en batezbestekoaren parekoa dena) ondorengo adierazpena erabiliz doitu daiteke:

$$\langle \log_{10} \bar{S}_{\text{med}} \rangle \approx 3.29 \exp\left(-0.18 \frac{V_{\text{fv}}}{U_0}\right) \quad (5.26)$$

non V_{fv} sasihutsaren altuera den. Hartara, 5.6 irudian ikus dezakegunez, V_{fv} handitzera-koan banaketaren zabalera zeharo txikitzen da; horrenbestez, (5.26) ekuazioa oso baliagarria izango zaigu minimo garaien ekintzaren itxarondako balioa lortzeko. Slepian ereduaren auresangarritasunaren handitzea V_{fv} -ren balio altuekin bat dator aurreko sekzioan aurreratu dugunarekin. Hain zuzen ere, bertan frogatu genuen ausazko potentzialaren (5.13)

deskonposaketaren lehenengo termino determinista nagusitzen dela minimo oso altuak baldintzatzerakoan; horrenbestez, Paisaia bera oso determinista izango da minimo altu baldintzatuen inguruan. Emaizta horren ondorio zuzena dugu aurreko banaketetan nabari dugun sasihuts garaien tuneleatze-ekintzen bariantzaren txikitzea. Emaizten adostasun horren arabera, itxarotekoa da V_{fv} -ren balio positibo eta handientzat instantoi-ekintzaren balioa sasihutsaren egitura lokalaren mendekoa izango dela. Hurrengo lerroetan emango dugu baieztapen horren ebidentzia.

5.4.2 Ekintza kalkulatzeko hurbilpenak

Arestian esan bezala, iraungitzeak kalkulatzeko ekuazioak oso ezegonkorak dira eta, orokorrean, potentzialaren dimentsionaltasuna handituz gero, sistema ebazteko denbora konputazionala ere zeharo luzatuko da. Ekuazioen ezaugarri horrek guztiz eginezina bihur lezake dimentsio altuagoko AEGen iraungitzeen ikerketa. Problema hori arintzea xede, tuneleatze-ekintzak kalkulatzeko literaturan planteatu diren hainbat metodo aztertu eta gure emaitza zehatzekin konparatuko ditugu azpiatal honetan.

Pareta mehearen hurbilpena

Pareta mehearen preskripzioa Colemanen artikulu aitzindarian ageri izan zen [67] lehen aldiz. Prozedura horren arabera, instantoiari dagokion ekintza sasihutsaren altueraren (V_{fv}), erabateko hutsaren altueraren (V_{tv}) eta bi horien arteko paretaren σ tentsioaren araberakoa da, hots,

$$\bar{S}_{tw} = \frac{27\pi^2\sigma^4}{2(V_{fv} - V_{tv})^3}, \quad \sigma = \int_{\phi_{TV}}^{\phi_{FV}} d\phi \sqrt{2(V(\phi) - V(\phi_{TV}))}. \quad (5.27)$$

Hurbilketa hori nahiko zehatza izango da, baldin eta V_{fv} eta V_{tv} balioen arteko diferentzia txikia bada.

AnyBubble erabiliz lortutako errebote guztietan aplikatu dugu (5.27) adierazpena horren baliozkotasuna aztertzeko AEGetan. Kalkulu horretan, sasihutsa eta erabateko hutsa lotzen dituen lerro zuzen batera murriztu dugu eremu-espazioko ibilbidea. Horrela lortutako \bar{S}_{tw} ekintzen eboluzioa 5.6 irudian erakutsi dugu, sasihutsaren altueraren arabera. Banaketaren zabaleraren eta medianaren bilakaera kasu optimoaren parekoa den arren, oso argi ikus daiteke euren balioak optimoengandik oso azkar aldentzen direla sasihutsaren garaiera handitzen den heinean. Dena den, itxarotekoa da joera hori; izan ere, sasihutsaren altuera nahiko handia denean, iraungitzeak lotzen dituen bi minimoen arteko altuera-aldea oso handia izango da orokorrean, eta hori ez dator bat pareta mehearen hurbilketaren asumitzeekin.

Ibilbide zuzenaren hurbilpena

Pareta mehearen hurbilpena erabiliz instantoi-ekintzaren goi-borne tinkoa lor dezakegun arren [236], gure kasuan preskripzio fidagarria ez dela ikusi dugu. Hori dela eta, bestelako metodoren bat behar dugu ekintza estimatzeko, dimentsio handiko Paisaietan erraz aplikatu daitekeena.

Problema horren sinplifikazio bat planteatu zen [237] artikuluan, *ibilbide zuzenaren hurbilpena* deritzoguna lan honetan. Ere-espazioa sasihutsa eta erabateko hutsa konektatzen dituen lerro zuzenera mugatzean datza preskripzio horren funtsa, iraungitzearen problema dimentsio eraginkor bakar batera murrizten duena. Izan ere, 5.3 irudia ikusita, hurbilpen hori nahiko zentzuduna dela badirudi. Nahiz eta tuneleatze-ibilbide batzuk eremu-espazioan nolabaiteko kurbadura baduten ere, instantoi gehienenek ibilbide zuzena jarraitzen baitute eremu-espazioan. Aitzitik, nabarmentzekoa da eremu-espazioaren murrizpen hori aplikatuz gero lortzen ditugun potentzial eraginkorretan errebotea ez duela zertan existitu, edo kalkulagarria bada ere, teoria osoaren errebote guztiz ezberdin bat adierazi ahal dezakeela. Hurbilketa honi buruzko xehetasun gehiagorako, ikus [79].

Ibilbide optimo bakoitzari dagozkion sasihutsa eta erabateko hutsa lotzen dituen eremu-espazioko lerrozuzena kalkulatu eta horri dagokion \bar{S}_{sp} ekintza lortu dugu, kasu bakoitzean. Printzipioz, \bar{S} ekintza optimoaren goi-bornea adieraziko du \bar{S}_{sp} hurbilketak, azken horrek ekintzaren bariazioak lerrozuzenaren ibilbidean soilik kontsideratu ditzakeelako [237]. Hortaz, itzarotekoa da (eta [79] artikuluan esplizituki erakutsi da) potentzialaren dimentsionaltasuna handitzen den heinean hurbilketa horren emaitza soluzio osoaren balioarengandik urruntzen joango dela.

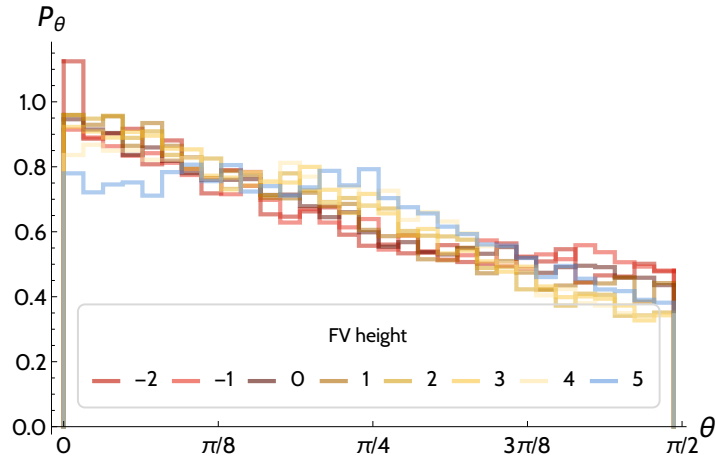
Metodo hori jarraituz lortutako ekintzen banaketak 5.5 irudian erakutsi ditugu. Oro har, banaketa berri horiek eta kasu optimokoak nahiko berdintsuak dira, lehen horiek balio zertxobait altuagoak dituztelarik. Nahiz eta, lehen esan bezala, ibilbide zuzenaren hurbilpena oso fidagarria izan ez daitekeen dimentsio altuko potentzialetan, bi dimentsiotan lortu ditugun emaitzak ikusita, bestelako dimentsioko AEGetan baliozkoak izaten jarraitzen duten aztertzea interesgarria izan daiteke. Izan ere, analisi horren konplexutasun konputazionala jakinda, hurbilketa honekin egindako estimazio estatistikoak lortzea oso baliagarria izan daiteke.

5.4.3 Ekintzarik baxuena

Ikuspuntu fenomenologikotik, minimo jakin bati dagokion instantoi-ekintzarik txikiena jakitea oso garrantzitsua izango da, horri dagokion instantoi-soluzioa iraungitzerik probableena adieraziko baitu. Azpiatal honen aztergaia izango dira instantoi horiek eremu-espazioan osatzen dituzten ibilbide horien ezaugarriak.

Irteera-angelua

Iraungitze-prozesurik probableena zein izan daitekeen planteatzeko modu erraza ondorengoa dugu: potentzial-langa baxuena zeharkatu behar duen ibilbidea aurkitzea. Ideia hori berresteko, gure kasuan komenigarria da instantoi-ibilbideak tuneleatzea hasterakoan hessiararen autobaliorik txikiarekiko duen angelua, θ , kalkulatzeko (2 dimentsioko eremu-espazioan). Sasihutsaren altueraren araberrako angelu horien banaketa erakutsi dugu 5.7 irudian. Nahiz eta tuneleatzeak $\theta \approx 0$ angeluan gertatzeko joera duten, angeluaren eta altueraren arteko korrelaziorik ez dugu nabaritu.



5.7 irudia: Autobalio txikienarekiko instantoi-ibilbideak osatzen duen irteera-angeluaren zenbakizko banaketa. Hori osatzeko, potentzial bakoitzari dagokion iraungitzerik probableena erabili ditugu soilik.

Ekintza baxuenaren estimazioa

Irteera-angeluaren estatistika ikusita, interesgarria izan daiteke potentzial bati dagokion ekintzarik baxuena estimatzea hessiarraren autobaliorik txikienaren ibilbidea soilik aztertuz. Horrelako ikerketa bideratu da Paisaiaren ikuspuntutik [224] artikuluan. Ondorengo lerroetan, gure baldintzatutako AEG bilduma handia erabiliko dugu ideia hori egiaztatzeko.

Instantoiaren ekintza autobalio txikienaren norabidean ebaluatzeko, potentziala norabide horretara mugatu eta ondorengo adierazpenaren bidez hurbilduko dugu:

$$V_{le}(\phi_1) = V_0 + \frac{1}{2}\lambda_1\phi_1^2 + \frac{1}{3!}\rho_{111}\phi_1^3 + \frac{1}{4!}\delta\phi_1^4. \quad (5.28)$$

Kontuan izan prozedura honek ez duela bermatuko horrela hurbildutako dimentsio bakarreko potentzialean tuneleatze-prozesu bat eman daitekeenik. Izan ere, potentzial horiek kasu askotan ez dute erabateko huts bat izango norabide horretan eta, hortaz, ezin izango dira erabili iraungitze-tasa estimatzeko. Ondorengo kalkuluan, dimentsio bakarreko trunkamendu horretan instantoia existitu daitekeen kasuak soilik erabiliko ditugu.

Potentzialaren forma simple hori iraungitzearen irteera-biderik probableenetzat joz, instantoi-ekintza estimatu ahal izango dugu. Horretarako, Sarid-ek lortutako [80] ekintza euklidearraren parametrizazioa erabiliko dugu. Gure notazioa erabiliz, hauxe izango da ekintza euklidearraren estimazioa:

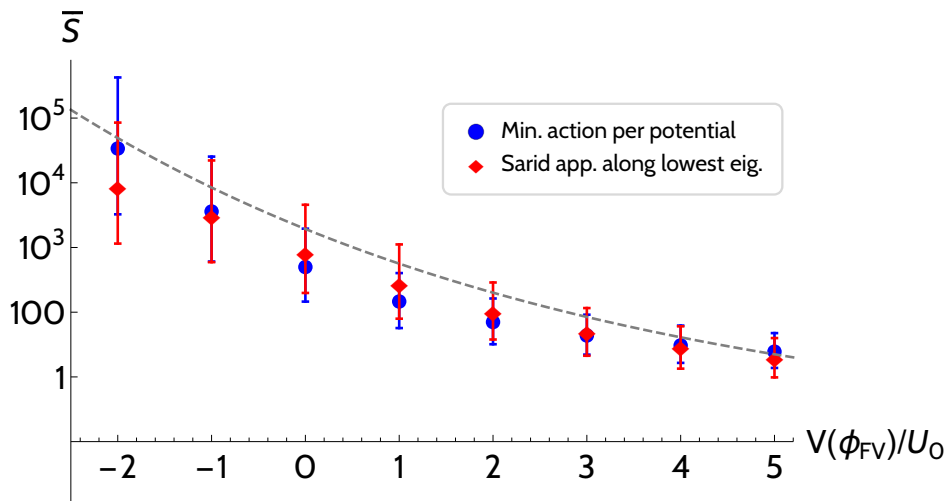
$$\bar{S}_S = \begin{cases} \frac{18\lambda_1}{\rho_{111}^2} \left(45.4 - 46.1 + \frac{2\pi^2}{12(1-4\kappa)^3} + \frac{16.5}{(1-4\kappa)^2} + \frac{28}{1-4\kappa} \right), & \kappa > 0 \\ \frac{18\lambda_1}{\rho_{111}^2} 45.4 \left(1 + \left(\frac{136.2}{2\pi^2} \right)^{1.1} |\kappa|^{1.1} \right)^{-1/1.1}, & \kappa \leq 0 \end{cases} \quad (5.29)$$

non

$$\kappa \equiv \frac{3}{4}\delta \frac{\lambda_1}{\rho_{111}^2} \quad (5.30)$$

definitu dugun.

Metodo horren bidez lortutako banaketak 5.8 irudian erakutsi ditugu, aurreko zenba-



5.8 irudia: Potentzialen ekintza euklidearrrik txikiaren eta Sariden hurbilketaren [80] banaketak potentzial-langa baxuenaren norabidean, sasihutsaren altueraren arabera. Kurba marratuak (5.26) ekuazioko doikuntza adierazten du, aurreko emaitzen konparaketa errazteko.

kizko kalkulu zehatzarekin batera, hurbilketaren baliozkotasuna berresteko. Bi emaitza horien arteko adostasuna nahiko argi nabari da irudian; hortaz, ausazko gausstar Paisaien iraugitze-tasak estimatzeko Sariden hurbilketa metodo hona dela ondorioztatu dezakegu. Horrez gain, azpimarratzekoa da teknika hori minimoaren egitura lokalean datzala, eta ingurune horretan, hain justu, Slepian eredu oso determinista dela ondorioztatu arestian, V_{FV} -ren balio altuentzat. Hain zuzen ere, (5.29) adierazpena sasihuts altuentzat oso zehatza dela nabari dezakegu, beraz, erregimen horretako instantoi-ekintza minimoaren forma lokalak determinatuko du. Bestalde, Slepian ereduaren arabera, potentzial eskalarra nahiko berdintsua izan beharko litzateke minimo garaien ingurunean errealizazio guztietan, horren itxura (5.13) ekuazioko lehen terminoak determinatzen duelarik. Azken baieztapen hori erabiliz azaldu dezakegu instantoi-ekintzen banaketa determinista (ikus 5.5 irudia) V_{FV} handientzat, eta baita Sariden *ekintza baxuenaren* (5.29) hurbilketaren eta banaketaren *medianaren* (5.26) doikuntzaren arteko adostasuna.

Oso interesgarria izan daiteke aurreko emaitza guztien baliozkotasuna egiaztatzea ehunka dimentsio dituen Paisai konplexuagoetan.⁸ Izan ere, (5.29) hurbilketa gure Slepian ereduarekin konbinatuz huts altuen iraugitze-tasen aurreikuspen sendoak egin ahal izango genituzke.

5.5 Inflazioa ausazko gausstar Paisai baldintzatueta

Orain arte, instantoien profilak eta ekintzak kalkulatzeko besterik ez ditugu erabili Slepian ereduak, $\phi = \mathbf{0}$ puntuan minimo bat duten AEGak sortzeko. Atal honetan, jatorrian inflexio-puntu bat duten baldintzatueta ausazko eremu gausstarrak sortuko ditugu eta horietan gerta daitekeen inflazio kosmologikoa aztertuko dugu.

⁸ Gure kalkuluan kontuan izan dugu potentzialaren termino kuartikoaren ekarpena. Bestalde, [224] erreferentziako autoreek termino hori arbuiaute; euren esanetan, koefiziente kuartikoa guztiz garrantzizgabea da eremu kopurua (N) nahiko handia denean. Baieztapen hori egiaztatzen saiatu gara lan honetan eta kalkulu zehatzarekin adospen ona lortzeko kontuan hartzekoa dela ikusi dugu. Jakina, $N = 2$ kasua besterik ez dugunez aztertu, ezinbestekoa da ekarpen hori aintzat hartzea.

Ausazko potentzialetako inflazioa zeharo ikertu izan da literaturan [106, 110, 112–114]. Zehazki, inflexio-puntuaren inguruko inflazioak arreta handia ekarri izan du; hain zuzen ere, puntu horietan gertatu daitekeen inflazioak e-fold kopuru nahiko handia irauten dezake behaketekin bat egiteko. Hori ez ezik, horrelako inflazio-ereduak potentzialaren dimentsio eraginkor bakarrean eta eremu-espazioaren ingurune txiki samarrean gertatu ohi dira.

Nahiz eta puntu horietan lortutako emaitzak eta banaketak etorkizun handikoak diruditen arren, inflexio-puntuaren inguruko Taylor garapenen bidez lortu dira, AEG osoen ordean. Arestian aipatu dugunaren arabera, metodo horiek ez dituzte potentzialaren ezaugarri globalak ondo jasotzen, eta azken horiek ezinbestekoak zaizkigu hutsen egonkortasun ez-perturbatiboa aztertzeke. Hortaz, prozedura horrek ez du balio sasihuts baten irautitzeak sortzen dituen hasierako baldintzak erabiltzen dituen inflazio-ereduetarako.

Sekzio honetan, Slepian ereduak erabiliko ditugu inflazio-periodo onargarria jasan dezaketen inflexio-puntuak dituzten AEG baldintzatuak eraikitzeke. Horrela sortutako potentzialetan, sasihutsen irautitzeak ikertu eta horiek gertatu ondoren eman daitekeen inflazioaren ezaugarriak eta parametro kosmologiko behagarriak aztertuko ditugu.

5.5.1 Inflazioa dimentsio bakarreko inflexio-puntuetan

Dimentsio bakarreko inflexio-puntuetako inflazioa berrikusten hasiko gara (ikus G eranskina eta [114, 238] xehetasun gehiagorako). Izan bedi ondorengo potentziala:

$$V(\phi) = u + \eta\phi + \frac{1}{6}\rho\phi^3, \quad (5.31)$$

non, inflexio-puntuaren inguruko slow-roll baldintzak betetzearren, $\eta \ll u$ asumituko dugun. Gogoan izan ez dugula zertan inposatu edonolako baldintzarik hirugarren deribatuan. Dena den, AEG orokorren ezaugarriak kontuan hartuta, $u \ll \rho$ kasua landuko dugu hemendik aurrera. Aurreko guztia aintzat edukirik, erraz frogatu daiteke inflazioaren slow-roll baldintzak

$$-\frac{u}{\rho} < \phi < \frac{u}{\rho} \quad (5.32)$$

tartean beteko direla. Jakina, $u \ll \rho$ baldintzaren ondorioz, inflexio-puntu horretan emango den inflazioa eremu txikikoa (*small-field inflation*) izango da. Slow-roll baldintzak erabiliz, tarte horretan gertatuko den gutxi gorabeherako e-fold kopurua, N_{exp} , hauxe izango dela frogatu dezakegu:

$$N_{\text{exp}} = \int_{-u/\rho}^{u/\rho} \frac{d\phi}{\sqrt{2\epsilon}} \approx \pi\sqrt{2} \frac{u}{\sqrt{\eta\rho}} - 4 \equiv N_{\text{max}} - 4. \quad (5.33)$$

non $\epsilon = (V''(\phi)/\sqrt{2}V(\phi))^2$ den eta N_{max} potentzial osoan eman daitekeen e-fold kopurua adierazten duen. Hori ez ezik, ondorengo definizioak erabiliz:

$$x \equiv \pi \frac{N_{\text{CMB}}}{N_{\text{max}}}, \quad y \equiv \frac{N_{\text{max}}}{2\pi}, \quad (5.34)$$

non N_{CMB} MHKren eskala horizontetik irteten den momentuari dagokion e-fold kopurua den. Perturbazio eskalarren indize espektrala hauxe dugula frogatu daiteke:

$$n_s = 1 + \frac{2}{y} \left(\frac{\tan x - y}{1 + y \tan x} \right). \quad (5.35)$$

Azkenik, perturbazio eskalarren anplitudea horrelaxe adierazi daiteke:

$$\Delta_{\mathcal{R}}^2 = \frac{1}{12\pi^2} \frac{V^3(\phi)}{V'(\phi)^2} \approx \frac{N_{\text{CMB}}^4 \rho^2}{48\pi^2 u} f^2(x, y) \quad (5.36)$$

non

$$f(x, y) = \frac{\cos^2(x)(y \tan(x) + 1)^2}{x^2(y^2 + 1)} \quad (5.37)$$

funtzioak $f(x, y) \sim 1$ betetzen duen, $y \gg 1$ eta $x \sim 1$ betetzen badira.

Adierazpen horiekin, zuzenean lor ditzakegu egungo behaketa kosmologikoekin bat datozen inflexio-puntuaren parametroak (u, η eta ρ). Horien arabera, $N_{\text{exp}} > N_{\text{CMB}} \approx 50$, $n_s \approx 0.965$ eta $\Delta_{\mathcal{R}}^2 \approx 2 \times 10^{-9}$ izan beharko dugu (ikus ondorengo (5.38) ekuazioa) [239].

5.5.2 Zenbakizko inflexio-puntuak bi dimentsioko Paisaietan

Arestiko dimentsio bakarreko inflexio-puntua gure bi dimentsioko ausazko gausstar Paisaian murgildu nahi dugu. Horretarako, 5.3.2 sekzioko prozedura jarrai dezakegu inflexio-puntuak dituzten AEGak sortzeko. Aurreko notazioaren arabera, $\eta = \eta_1$ eta $\rho = \rho_{111}$ parametroek dimentsio anitzeko inflexio-puntuaren norabide laua adieraziko dute. Gogoan izan u eta ρ_{111} ez daudela elkarrekiko korrelazionatuta (puntu berean ebaluatuz gero), u eta λ_1 autobalioa ez bezala, non λ_1 inflazio-norabidearekiko bigarren deribatua adierazten duen. Era berean, η_1 eta ρ_{111} ere elkarrekiko korrelazionatuta egongo dira, ikus (5.20) ekuazioa. Paisaiaren ezaugarri globalen eta behagarri kosmologikoen arteko erlazioa aztertu nahi dugunez oraingo honetan, aurreko dimentsio bakarreko parametroak finkatuta dituzten inflexio-puntuetan jarriko dugu arreta.

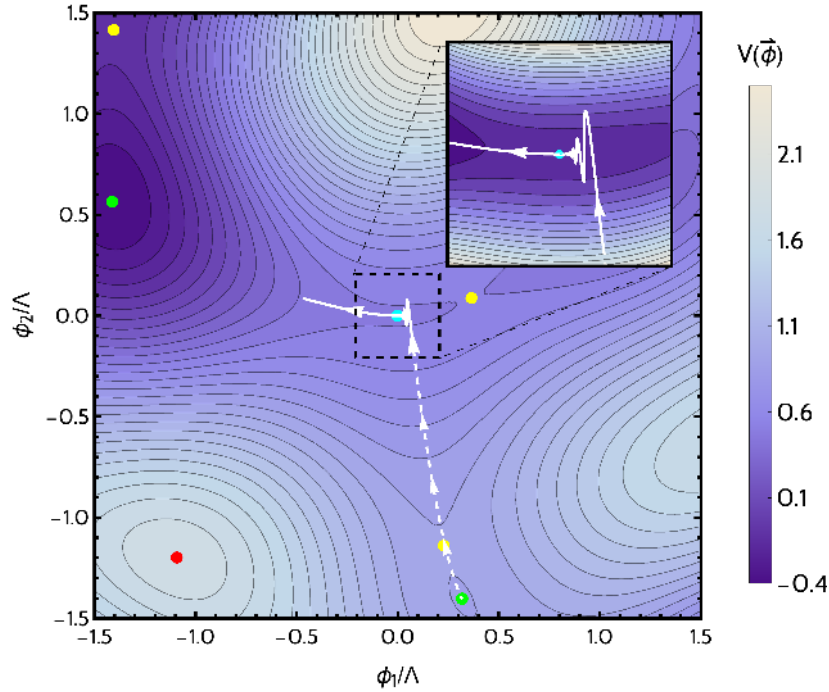
Aurreko sekzioko urratsak jarraituz, bi dimentsioko AEG baldintzatuak sortu genituen, euren jatorrian inflazio-norabideko ezaugarri finkoak dituen inflexio-puntu bat dutelarik. Hurrengo kalkuletarako, ondorengo parametroak erabili genituen:

$$u = 0.5 U_0, \quad \eta_1 = 6.8 \cdot 10^{-6} \frac{U_0}{\Lambda}, \quad \rho_{111} = 2.5 \frac{U_0}{\Lambda^3}, \quad (5.38)$$

non $U_0 = 6.0 \cdot 10^{-16} M_{\text{Pl}}^4$ eta $\Lambda = 0.5 M_{\text{Pl}}$ parametroek energia eskala eta korrelazio-luzera definitzen duten, hurrenez hurren, eta Plancken masa esplizituki adierazi dugun.

Horrela, u, η eta ρ parametroak finkatuta eta (5.19) and (5.20) adierazpenetako banaketak erabiliz, inflexio-puntuaren falta zaizkigun bi dimentsioko parametroak lor ditzakegu, eta aurreko ezaugarriak betetzen dituzten nahi adina AEG sortu.⁹

⁹Aurreko bi dimentsioko inflexio-puntuaren definizioa jarraituz, $\eta_2 = 0$ eta $\lambda_2 > 0$ ere inposatu behar izan ditugu.

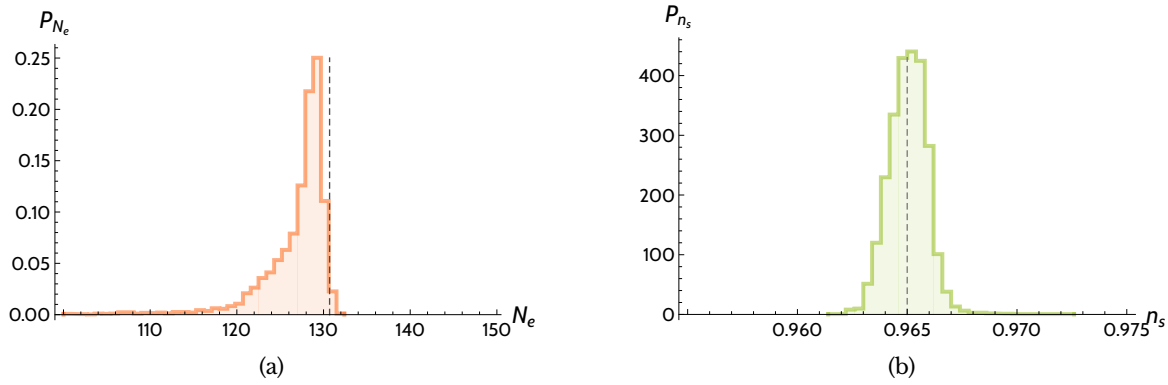


5.9 irudia: Ereku-espazioaren jatorrian inflexio-puntu bat izan dezan baldintzatu dugun ausazko eremu gausstarra. Lerro marratuak minimo batetik inflexio punturantz doan irauingitza adierazten du. Horren irteera puntutik abiatzen da slow-roll fase inflazionarioa, kurba txuri jarraituz adierazita. Periodo horretan 124 e-fold ematen dira; ondoren, ezkerrean kokatzen den minimorantz joko du eremuak. Ibilbidearen zati inflazionarioa erakutsi dugu bakarrik irudian. Puntu urdin, hori eta gorriek minimoak, zela-puntuak eta maximoak adierazten dituzte, hurrenez hurren. Jatorrian kokatzen den inflexio-puntua urdinez adierazi dugu.

Aurreko baldintzak betetzen dituen adibide bat erakutsi dugu 5.9 irudian. Horrekin, AnyBubble erabiliz, inflexio-puntu zentralerantz abiatzen den minimo altuago baten irauingitza kalkulatu dugu. Kontuan izan nahiz eta inflexio-puntuaren ezaugarriak ϕ^1 norabidean betiere berdinak diren arren, puntu horretatik kanpo potentzialaren errealizazioak elkarrengandik nahiko ezberdinak izan daitezkeela. Hori dela eta, errealizazio bakoitzaren sasihutsa potentzialaren edozein puntutan egon daiteke, eta instantoiak zeharkatu behar duen potentzial-langa edota sasihutsaren hutsezko energia ezberdina izango da kasu bakoitzean. Hartara, AnyBubble-en bidez, hainbat errealizazioen irteera-puntua kalkulatu genuen. Azkenik, potentzial horrekin sortutako FRW unibertsoaren eboluzio lorentzitarra kalkulatu genuen, irteera-puntu horiek abiapuntu bezala erabiliz.

Bestalde, eremu-espazioko ibilbidea eta behagarri inflazionarioak aztertzeke mTransport erabili genuen [240], horiek kalkulatzeko oso aproposa den Mathematica kodea. Irauingitzaek sortutako burbuila-unibertsoaren barnealdeko eboluzio kosmologikoa FRW unibertso ireki baten bidez deskribatzen da [69]. Aitzitik, zenbakizko analisia sinplifikatzearen, guk espazio planoko hurbilketa erabili dugu burbuilaren barnealdearen eboluzioa ikertzeke.¹⁰

¹⁰ Hasieran, burbuilaren barnealdea deskribatzen duten FRW zati irekien kurbadura espazialaren ekarpena nagusituko da eboluzio kosmologikoan. Horrenbestez, ekarpen horrek eremu eskalarraren hasierako eboluzioan nolabaiteko eragina izango du dimentsio anitzeko potentzialetan. Ikus [100, 113] efektu horien inguruko xehetasunetarako.



5.10 irudia: (a) E-fold kopuruaren zenbakizko banaketa; N_{exp} balioa marratutako lerro batekin adierazi dugu. (b) Indize espektralaren zenbakizko histograma, marratutako lerroak aurreikuspen analitikoa adierazten duelarik. Bi irudiak osatzeko 4000 ibilbide inflazionarioa erabili ditugu (ikus testua).

Adibide gisa, 5.9 irudiko potentzialean kurba marratu baten bidez adierazi dugu tuneleatze-ibilbidea; bestalde, burbuilak eremu-espazioan egindako ibilbide-inflazionarioa erakusten du irudiko kurba jarraituak. Azken horretan 124.1 e-fold gertatu direla kalkulatu dugu, indize espektrala $n_s = 0.964$ delarik eskala behagarrian.

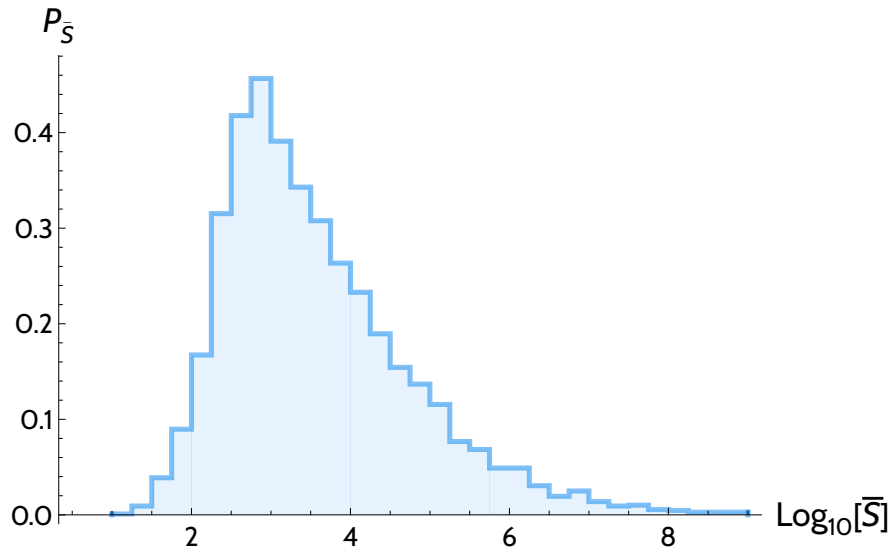
5.5.3 Parametro inflazionarioen estatistikak

Arestian deskribatutako AEG inflazionarioak sortzeko metodoa jarraituz, (5.38) adierazpene-ko parametrodun inflexio-puntuak zituzten 5000 AEG sortu genituen, horien artean 5.9 irudikoa dugu. Ondoren, errealizazio bakoitzean, inflexio-puntua baino garaia goak ziren minimo guztiak aurkitu eta, AnyBubble erabiliz, inflexio-punturantz abiatzen ziren sasihutsen irauingitzeak kalkulatu genituen. Tunelatzearen irteera-puntua fase inflazionarioaren abiapuntutzat joz, mTransport erabili genuen e-fold kopurua, perturbazio tentsorial eta eskalarren arteko erratioa (*tensor-to-scalar ratio*), indize espektrala eta horren lerradura (*running*) kalkulatzeko. E-fold kopuruaren eta indize espektralaren zenbakizko banaketak 5.10 irudian erakitsi ditugu, pibot-eskala 50 e-fold izanda. Bestalde, inflexio-punturantzko irauingitzeen ekintzen banaketa 5.11 irudian marraztu dugu. Kontuan izan horrela lortutako banaketa ezin dezakegula aurreko atalekoekin zuzenean alderatu; izan ere, hemen erakutsi dugun banaketa osatzen duten prozesuek erabateko huts komuna dute (inflexio-puntua, alegia), eta ez, aurreko kasuetan bezala, hasierako sasihutsa. Nabarmentzekoa da kasu honetan ekintzen banaketak punta nahiko zorrotza duela 10^3 ordenako balioetan.

Hauexek dira gure zenbakizko analisiaren bidez lortu ditugun perturbazio eskalarren anplitudearen, perturbazio tentsorial eta eskalarren arteko erratioaren eta indize espektralaren lerraduraren balio zentralak:¹¹

$$\Delta_{\mathcal{R}}^2 = (2.02 \pm 0.04) \cdot 10^{-9}, \quad r = (8.0 \pm 0.1) \cdot 10^{-9} \quad \text{and} \quad \alpha = (-2.49 \pm 0.02) \cdot 10^{-3}. \quad (5.39)$$

¹¹ Inflazioa gertatu ondoren, eremuaren ibilbide lorentzarrak minimo baxuago batera iritsi arte jarraituko du, eta horrek, jakina, ondorio kosmologiko nabarmenak izan ditzake erabateko hutsez osatutako burbuilaren barnean. Minimo hori ez dugu minkowskian izatera doitu, hortaz, orokorrean, eboluzio hori Anti deSitter *crunch*-era edo de Sitter eboluzio amaigabera joko du. Lan honetan periodo inflazionarioaren estatistika soilik aztertu nahi dugunez, slow-roll-eko eskualdetik irten ondoren gelditu dugu eboluzioa kasu guztietan.



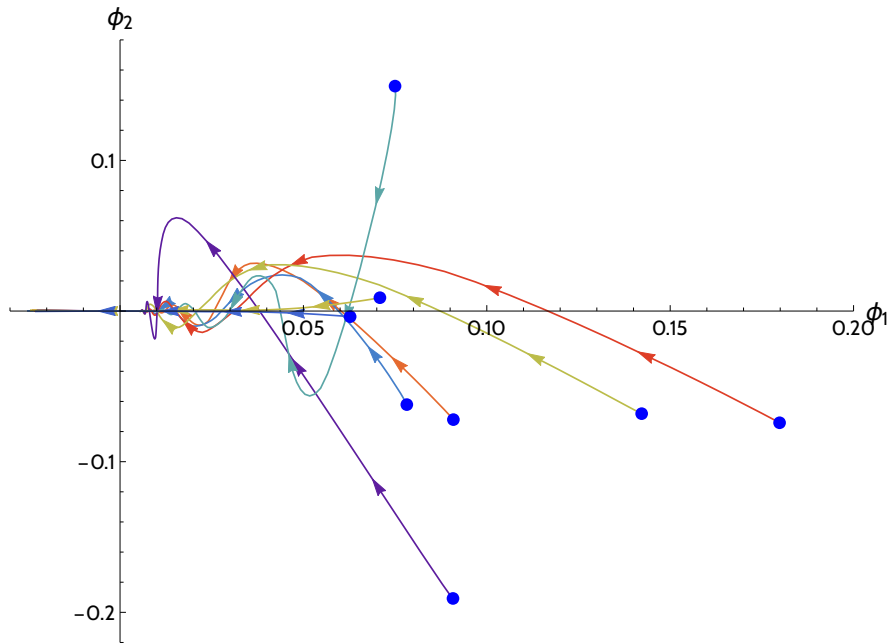
5.11 irudia: Sasihuts batetik inflexio-puntu zentralera emandako iraungitzeen ekintzen banaketa, inflazioa gertatu baino lehen.

Nabarmentzekoa da hemen lortu ditugun emaitzak bat datozela [112] artikuluko dimentsio bakarreko analisiekin.

Azkenik, 5.12 irudian, hainbat AEGtan kalkulatu ditugun ibilbide inflazionarioak bildu ditugu, eremu-espazioaren jatorrian ezaugarri finkoak dituen inflexio-puntua dagoelarik. Azpimarragarria da ibilbide guztiek joera berdintsua dutela, edonondik abiatzen direla ere. Izan ere, ϕ_2 norabide bertikalean oszilazio batzuk eman eta gero, inflexio-puntutik gertu egonkortu eta horren inguruan inflazio-prozesua pairatzen baitute. Orokorrean, e-fold gehienak inflexio-puntutik gertu ematen dira, estimazio analitikoak berrikusi duen bezala.

Analisi horren bidez lortutako emaitzen %80 baliagarria izan da analisi estatistikoan aplikatzeko. Bestetan, prozedura horrek emandako soluzio kosmologikoa ez zen onargarria, bai inflazioa azkarregi bukatzen zelako, bai iraungitzearen irteera-puntua inflexio-puntutik urrunegi gertatzen zelako eta inflazio-ibilbidea beste nonbaiterantz zihoalako. Dena den, ibilbide arrakastatsuek aurreko sekzioko dimentsio bakarreko emaitzekin bat zetozen guztiz. Nahiz eta azken horien ϕ_2 osagaia nahiko nabarmena den zenbait kasutan, horien beharri kosmologikoak onargarriak direla nabaritu dugu eremu bakarreko inflexio-puntuko inflazioarekin alderatuz. Azkenik, emaitzen banaketak ez dute sakabanaketa handirik balio zentralerikiko, beraz, parametro beharriek hasiera-baldintzen mendekotasunik ia ez dutela ondorioztatu dezakegu.

Garrantzitsua da nabarmentzea hemen erabilitako errealizazio guztien inflexio-puntuen norabide inflazionarioak ezaugarri berak dituztela. Hortaz, AEG jakin baten inflexio-puntuko inflazioaren informazio estatistiko osoa lortzeko, bestelako ezaugarriak dituzten inflexio-puntuak ere aztertu beharko genituzke eta horien pisu estatistikoa kontuan hartuz, banaketa osoa eraiki. Problema hori bere baitan nahiko gogorra denez (konputazionalki, behintzat), aurrerago landuko dugu.



5.12 irudia: Hainbat irteera-puntuetatik abiatzen diren inflexio-puntu zentraleranzko ibilbide inflazionarioak. Irteera-puntu bakoitza puntu urdin batez adierazi dugu.

5.6 Ondorioak

Ausazko eremu baldintzatuak eta horien estatistikak eraikitzeke teknika matematiko baliagarriak dira Slepian ereduak. Hain zuzen ere, fenomenologikoki interesgarriak izan daitezkeen Paisaiaren txokoak aztertzeke oso erabilgarriak dira; besteak beste, doitutako de Sitter hutsak edo data kosmologikoarekin bat datozen eskualde inflazionarioak sortzeke erabili daitezkeela ikusi dugu. Alde batetik, Slepian eredu bidez fenomenologikoki interesgarriak diren eskualde horiek nahi adina aldiz eraikitzea ahalbidetzen digute ausazko Paisaietan, zonalde horiek aurkitzeke probabilitatea ia nulua izanda ere. Bestalde, baldintzatutako ausazko potentzialen deskribapen analitikoaz aztertzeke ere erabili dezakegu teknika hori; hortaz, Paisaiaren eskualde horien inguruko ezaugarrien ikuspegi aberatsa lortzea ahalbidetzen dute. Slepian ereduak, Taylor-en garapenek ez bezala, ausazko potentzialaren ezaugarri globalak barneratzen dituzte euren deskribapenetan; hori dela eta, oso baliagarriak dira, besteak beste, Paisaiaren ezegonkortasun kuantikoak aztertzeke. Hartara, kapitulu honetan Slepian ereduak erabili ditugu bi dimentsioko ausazko potentziala baldintzatzeko; lehenik, hutsezko energia jakin bat duen minimo bat izatera baldintzatu dugu AEGa, bigarrenik, datu kosmologikoekin bat datorren inflexio-puntu inflazioa jasan dezakeen egitura izatera baldintzatu dugu potentziala.

Zehazki, minimo baldintzatuak dagokienez, horiek sasihuts bezala jo ditugu euren iraungitzeak kalkulatzeko, eta altueraren araberrako ezegonkortasunen deskribapen estatistikoa lortzeke. Horretarako, gure Slepian ereduak aplikatu ditugu altuera jakinetako minimoak dituzten AEGak sortzeke. Horien instantoi-ekuazioak ebatzi ditugu eta zenbait hurbilketekin konparatu dugu zenbakizko emaitza zehatza: pareta mehearen hurbilketarekin [67], ibilbide zuzenaren hurbilketarekin [237], eta Sarid-ek proposatutako estimazioarekin [80] instantoi-ekintza baxuena lortzeke (ikus (5.29) ekuazioa).

Gure analisiaren arabera, pareta mehearen hurbilpena nahiko adostasun maila ona lor dezake zenbakizko emaitza zehatzekin alderatuta, baina horren baliozkotasuna hutsezko energia txikia duten minimoetara mugatzen da. Izan ere, pareta mehearen hurbilketak aurreikusten duen bezala, iraungitze-tasa esponentzialki handitzen dela nabaritu dugu sasihutsaren altuera handiagotzen dugun heinean. Erraz uler daiteke hori hemen landutako ausazko gausstar Paisaietan, hain zuzen ere, iraungitzeak zeharkatu behar duen potentzialanga zeharo txikitzen delako minimoen altuera handitzerakoan. Aitzitik, hutsezko energia handia duten minimoek orokorrean bestelako minimo oso baxuetarantz joko dute iraungitze-prozesuan eta hori ez dator bat pareta mehearen hurbilketaren asunitzeekin. Hortaz, azken kasu horietan, ezin izango dugu iraungitze-tasaren estimazio onargarritzat jo.

Ibilbide zuzenaren hurbilketan, potentzialak dimentsio eraginkor bakarra duela suposatu dugu, sasihutsetik erabateko hutserantz doana. Sinplifikazio hori bat dator zenbakizko analisi osoarekin, gure emaitzen arabera, aztertu ditugun 2 dimentsioko gausstar Paisai guztietan. Interesgarria izango litzateke sinplifikazio hori baliozkoa izaten jarraitzen duen egiaztatzea potentzialaren dimentsionaltasuna handitzerakoan (ikus [79] horri buruzko eztabaidarentzat), azken kasu horretan insantoi-ekuazio osoak ebatztezinak izan daitekeelako. Bestalde, sinplifikazio hori oso baliagarria zaigu Ausazko gausstar Paisaietan, horietan oso erraz sortu baitezakegu dimentsio bakar batera mugatutako edonolako potentziala, potentzialaren jatorrizko dimentsioa edonolakoa izanda ere, kobariantza-funtzioa norabide horretara mugatuz.

Sariden ekintzarik baxuenaren estimazioari [80] dagokionez, gure zenbakizko analisiak frogatu du instantoi-ekintza kalkulatzeko baliabide erabilgarria izan daitekeela, baldin eta minimoak hutsezko energia handia badu. Azpimarragarria da estimazio hori sasihutsaren inguruko potentzialaren formaren arabera delako. Bestalde, Slepian ereduaren aurreikuspenen arabera, ingurune horrek ez ditu aldaketa handiegirik jasaten errealizazio bakoitzean, alegia, minimo altu guztiak nahiko berdintsuak dira orokorrean. Hain zuzen ere, minimo oso altu bat izan ditzaten baldintzatutako AEGek forma nahiko determinista dute puntu horren inguruan, non (5.13) ekuazioko lehen terminoa nagusitzen den. Testu nagusian esan bezala, ekintza txikiaren [80] estimazioa eta Slepian analisia konbinatuz, instantoi-ekintzen sakanaketa estatistikoa geroz eta txikiagoa izan behar duela ondorioztatu dezakegu, minimoen altuera handitu ahala. Gure zenbakizko emaitzak bat datoz aurreikuspen horiekin, ikus 5.5 eta 5.8 irudiak. Hortaz, (5.29) estimazioa baliozkoa izan daitekeela badirudi minimo oso altuak aztertzerakoan dimentsio anitzeko Paisaietan. Hori egiaztatzeko, [116] artikuluan aurkeztutako baldintzatze-metodoak ere oso baliagarriak izan daitezke.

Bestalde, lan honetan aztertu dugun Slepian ereduaren bigarren aplikazio nagusia inflexio-puntuetako inflazioaren datza, non behagarri kosmologikoen inflazioaren hasiera-baldintzekiko duten mendekotasuna aztertu dugun. Gure ereduaren, sasihuts batengandik inflexio-punturantzko iraungitzearen irteera-puntuak izan dira hasiera-baldintza horiek. Ikerketa hori ia egingaitza izango litzateke hemen landu ditugun baldintzatze-teknikak aplikatu ezean, inflazioa bideratzeko ezaugarri aproposak dituzten inflexio-puntuak oso arraroak baitira ausazko potentzial orokorrean. Aitzitik, Slepian ereduak erabiliz, oso efizienteki sortu ahal izan ditugu 60 e-fold baino gehiago bideratu ditzaketan inflexio-puntuak, datu kosmologikoen bateragarriak direnak. Slepian ereduaren gaitasuna potentzialaren ezaugarri globalak erreproduzitzeko ezinbestekoa izan da analisi horretarako, zehazki sasihutsaren iraungitzearen

fase aurreinflazionarioa modelizatzeko. Horrela lortutako behagarri kosmologikoen balioen estatistikak 5.10 irudian eta (5.39) ekuazioan bildu ditugu. Bertan, argi dago parametro inflazionarioek duten hasiera-baldintzekiko mendekotasuna nahiko ahula dela. Zenbakizko banaketa guztien sakabanaketa itxarondako balioarekiko oso txikia da, betiere dimentsio bakarreko slow-roll inflexio-puntuko inflazioaren ereduak ematen dituen balioen inguruan kokatzen baitira parametro horiek. Izan ere, Paisaiaren errealizazio tipikoek itxarondako parametroekiko duten desbiderapena %1 eta %10 artean kokatzen da, parametroaren arabera. Azpimarragarria da azterketa honetan inflexio-puntuaren ezaugarri lokalak finkatuta mantendu ditugula momentu oro. Jakina, inflexio-puntu orokorren inguruko inflazioaren karakterizazio osoa bideratzeko, bestelako inflexio-puntuetan eman daitezkeen prozesu inflazionarioak ikertu beharra dago. Analisi hori etorkizuneko proiektu baterako utzi dugu.¹²

Azkenik, hemen aurkeztutako teknikak bestelako Paisai ez-gausstarak aztertzeko erabili ditzakegu. Hain zuzen ere, antzeko metodoak erabili izan dira literaturan hainbat ausazko eremu ez-gausstarrentzat, eta eredu horien baldintzatutako puntu kritikoak aztertzeko [242–244]. Artikulu horietan landutako metodoekin Soka-Teoriaren ausazko Paisaien deskribapen zehatzagoa garatzea posible izan liteke, besteak beste. Hartara, hemen aurkeztutako emaitzak nolabait aldatuz, horiek bestelako ausazko eremutara orokortu genitzake. Dena den, eredu ez-gausstarren deskribapen estatistikoa hemen aurkeztutakoa baino askoz korapilatsuagoa da, eta etorkizunean lantzea espero dugu.

¹²Bestalde, parametro inflazionarioen azterketa errealistagoa bideratzeko, ezinbestekoa da multibertsoan probabilitate-banaketak definitzeko preskripzioen bat ematea. Horretarako, probabilitate-neurri bat beharko dugu. Oraingo honetan ez dugu horri buruzko xehetasunik emango (bestalde, ikus [241] eta bertan proposatutako preskripzioak horrelako analisi estatistiko tinkoak bideratzeko).

6. kapitulua

Branen nukleazioa eredu supersimetrikoetan

Azken kapitulu honetan Paisaiaren hutsen artean eman daitekeen bestelako iraungitze-mekanismo bat aurkeztuko dugu. Ondorengoan, ohiko Coleman-deLuccia mekanismoa nolabait aldatuko dugu, Brown-Teitelboim prozesuekin barneratzeko. Azken horietan, mintz esferikoak dira osagai nagusiak, eta hiru-formen fluxuek sortutako hutsen arteko interpolazioak bideratzen dituzte. Hartara, eremu eskalarrak eta mintzak *aldi berean* kontsideratuko ditugu fluxu-trinkoketen huts egonkorren arteko iraungitzeak aztertzeko. Prozesu horien limite supersimetrikoa bat dator mintz lauaren kasuarekin (hots, erradio infinituko mintz esferikoarekin), horrelako trantsizioetan itzarotekoa den bezala. Horrenbestez, supersimetria parametrikoki hautsiz, potentzial *desberdinen* hutsak konektatzen dituzten iraungitzeak sortu ahal izan ditugu. Prozesu horiek grabitatea bai arbuatuz eta bai aintzat hartuz aztertuko ditugu, eta fisikaren xehetasunak ondo ulertzeko hainbat adibide eskainiko ditugu.

6.1 Sarrera

Aurreko 1. eta 5. kapituluetan ikusi dugun bezala, sasihutsaren iraungitzea [67–69] Paisaia esploratzeko ezinbesteko baliabidea dugu, Kosmologian aplikazio oso interesgarriak dituena [87]. Hain zuzen ere, aurreko kapituluko ausazko gausstar Paisaietan aplikatzera koan, sasihutsean ageri daitezkeen burbuilak fase inflazionario bat jasan dezaketela ikusi dugu, gure Unibertsoan gertatu ahal izan den bezala. Haatik, kapitulu horren hasieran azpimarratu dugun bezala, bertan erabilitako potentzial eskalarrak sinplisteak izan daitezke, eremu-teoria eraginkorrean ageri diren hainbat osagai (fluxuak eta branak, besteak beste) ez ditugulako erabili. Horrenbestez, sasihutsen iraungitzea orokortzea oso interesgarria izan daiteke, fluxu-Paisai errealistagoetan gerta daitezkeen trantsizioak zehazki aztertzeko.

Huts supersimetrikoak ez-perturbatiboki egonkorak direla ikustea nahiko sinplea da grabitatea kontuan hartzen ez dugunean. Azken batean, minimo horiek $V = |\partial_\phi W|^2 = 0$ baldintza betetzen dute eta, ondorioz, betiere huts endekatuak izango direnez, ezin daiteke iraungitzerik gertatu. Bestalde, [245, 246] artikuluetan frogatu zen $\mathcal{N} = 1$ supergrabitatearen kasuan ere horrelako prozesuak ezin direla gertatu, erradio infinituko burbuila bat osatu beharko luketelako, alegia, domeinu-pareta lau bat sortu behar dutelako. Super-

simetria errespetatzen duen erradio finituko iraungitzerik ezin da gertatu, beraz. Huts supersimetrikoen arteko domeinu-paretak [247] artikuluan aztertu ziren sakonki, bai kasu ez-grabitazionalerako eta bai $\mathcal{N} = 1$ supergrabitaterako.

Aurreko prozesu guzti horiek, fluxu-Paisaiaren ikuspuntutik aztertzerakoan, ezaugarri komun bat dute; hain zuzen ere, guzti horiek fluxuak (funtsean potentzial eskalarra definitzen dutenak) konstante dirautela asumitzen dute. Oso baliagarria izango zaigu, beraz, fluxuak eta eremu eskalarrak bateratzen dituzten iraungitze kuantiko ez-perturbatiboak aztertzea.

Horren harira, Coleman-deLuccia iraungitzeen antzeko prozesuak ditugu Brownek eta Teitelboimek aztertutakoak [248, 249]. Azken horietan fluxuak eta mintzak dira ekintzaren osagai nagusiak. Prozesu horien motibazioa konstante kosmologikoaren neutralizazioa izan zen, 4 dimentsioko espazio-denboran 3-formen ekarpena konstantea delako [250]. Hortaz, energetikoki posiblea izan daiteke espazioaren eskualde bat 3-formek sortutako fluxu-huts batetik beste batera tuneleatzea, fluxu horri akoplatutako mintz baten nukleazioaren bidez. Horrez gain, horrelako prozesuak edozein dimentsiotara orokortu daitezke; 2 dimentsiotan, adibidez, mintzen bidezko iraungitzea Schwingerren pare-sorkuntza prozesuarekin identifikatu daiteke [251] (testuinguru kosmologikotik, bestalde, horrelako prozesuak aztertu izan dira unibertsoen sorkuntza kuantikoaren inguruan [252]).

Aurreko osagai guztiak bateratzen dituzte Soka-Teoriaren trinkoketek, non 3-formen fluxuak teoriaren gehiegizko dimentsioak barietate trinko batean egonkortzeko erabiltzen diren. Lehenengo kapituluan aipatu dugunaren arabera, fluxuak naturalki akoplatzen dira, adibidez, IIB Soka-Teorian ageri diren D-branetara. Bestalde, badakigu trinkoketa-prozesuan ehunka modulu ageri direla, barne-barietatearen geometria parametrizatzen dutenak. Hortaz, oso esanguratsua izan daiteke osagai guzti horiek barneratzen dituzten iraungitzeak aztertzea eremu-teoria eraginkorraren ikuspuntutik, $\mathcal{N} = 1$ supergrabitarearen ikuspuntutik, hain justu, $D = 4$ dimentsiotan. Mintzen dinamika zeharo aztertu da testuinguru horretan, ikus adibidez [253–255].

Bestalde, forma-eremuak supersimetrian eta supergrabitarean nola landu daitezkeen duela zenbait urte ikertu izan zen literaturan [256, 257]. Hala eta guztiz ere, aurrerapauso garrantzitsuak eman dira azken urteotan fluxu-trinkoketen eta supergrabitare-teorien hiru-forma multiplateetan [258] (ikus [259] testua ere). Lan horiek mintz lauen analisia sustatu dute fluxu-trinkoketen inguruan, zehazki fluxu-hutsen artean interpolatzen duten domeinu-pareta simetrikoen inguruan [260]. Mintzak eta axioiak bateratzen dituzten antzeko prozesuak ikertu dira [261–263] lanetan, Zingira-aieruen eta inflazioaren ikuspuntutik.

Lan honetan, 3-formak eta mintzak teoria supersimetriko batean nola barneratu daitezkeen pausoz-pauso azalduko dugu lehenbizi (bai grabitate arbuiatuz, bai hori kontuan hartuta). Ondoren, fluxuek osatutako hutsen arteko egonkortasun ez-perturbatiboa aztertuko dugu; horretarako, Coleman-deLuccia eta Brown-Teitelboim prozeduren konbinazio jakin bat erabiliko dugu. Noski, lehen esan bezala, huts supersimetrikoak guztiz egonkorak izan behar dira sasihutsaren iraungitzeekiko. Hortaz, gure lagrangearretan supersimetria samurki hausten dituzten terminoak barneratu ditugu [264]. Azken horiek nahi bezain txikiak egin daitezke, eta sasihutsen iraungitzea horien arabera aztertuko dugu. Horrelako teoria emanda, sasihutsa eremu eskalar isotropo eta eskalar batez eta baita 3-forma baten balio jakin batez osatuta dagoela suposatuko dugu. Bestalde, instantoi soluzioa forma-eremuari akoplatutako mintz esferiko batez osatuta dagoela suposatuko dugu, non mintzaren barnealdea

eta kanpoaldea fluxu-balio ezberdinez osatuta dauden (Brown-Teitelboim instantoian beza-la). Ondorioz, mintzaren alde bakoitza potentzial *ezberdin* batek deskribatuko du. Horrelako prozesuak energetikoki bideragarriak direla baieztatuko dugu, eta zenbait adibide emango ditugu, bai grabitatea kontutan hartuz, bai hori arbuiatuz. Bestalde, supersimetria hausten duten parametroak txikiagotu ahala, mintz-erradioa handiagotuko dela ikusiko dugu, limite supersimetrikoaren erradio infinituko soluzioarekin (alegia, domeinu-pareta lauarekin) bat datorrena.

Hona hemen kapitulu honen egitura. Hasteko, 6.2 sekzioan, espazio-denbora lauan eman daitezkeen domeinu-pareta supersimetrikoen funtsezko ezaugarriak errepasatuko ditugu, eta horiek instantoi ez-supersimetrikoen kasu limitetzat nola jo ditzakegun ikusiko dugu. Hori ez ezik, mintz lauak domeinu-paretak nola sor ditzaketen aztertuko dugu, supersimetriaren frakzio bat hautsi gabe mantentzen dugularik. Ondoren, 6.3 sekzioan, azken emaitza horiek orokortuko ditugu, lagrangearean supersimetria samurki hausten duten terminoak barneratuz. Horiekin instantoiak deskribatu ahal izango ditugu, hiru-formak, eremu eskalarrak eta mintz esferikoak bateratzen dituztenak, eta sistema horren joera asintotiko supersimetrikoa aztertuko dugu. Bestalde, 6.4 sekzioan, mintz lauen fisika $\mathcal{N} = 1$, $D = 4$ Supergrabitatean errepasatuko dugu, eta ekuazioak hobeto ulertzeko adibide bat emango dugu. Era berean, 6.5 sekzioan, kasu ez-grabitazionalean emandako pauso berdina jarraituko ditugu eremu eskalarra, hiru-forma eta mintz bat bateratzen dituen instantoia eraikitzeko, espazio euklidearraren metrikaren ansatz bat emanda. Horrela lortutako adierazpen nagusiak adibide batekin berretsiko ditugu eta horren limite supersimetrikoa espero bezalakoa dela baieztatuko dugu. Azkenik, zenbait ondorio eztabaidatuko ditugu 6.6 sekzioan.

6.2 Eremu-teoria supersimetriko globalak

Hasteko, mintzak barneratzen dituzten teoriak aztertu baino lehen, teoria supersimetrikoen domeinu-pareten inguruko funtsezko emaitza batzuk errepasatuko ditugu; horri buruzko formalismo gehiena [259] testuan ere aurki daiteke. Ondoren, teoria horietan supersimetria hausten duten terminoek zer nolako eragina duten aztertuko dugu. Emaitza horiekin mintzak erabiltzerakoan emango diren zenbait fenomenoei buruzko intuizioa lortu ahal izango dugu.¹ Kapitulu honetan landuko ditugun teoriak eremu eskalar bakarra izango dute; dena den, hemengo emaitza guztiak erraz orokortu daitezke teoria konplexuagotara.

6.2.1 Domeinu-paretak $\mathcal{N} = 1$ eredu kiraletan

Supereremu kiralaren eremu eskalar konplexuaren lagrangearra aztertuz hasiko gara, hots,

$$\mathcal{L} = -K_{\phi\bar{\phi}} \partial_\mu \phi \partial^\mu \bar{\phi} - K^{\phi\bar{\phi}} |W_\phi|^2, \quad (6.1)$$

non eredu definitzen duten bi funtzioak ditugun $K(\phi, \bar{\phi})$ Kähler potentziala eta $W(\phi)$ superpotentzial holomorfoa. Euren deribatuak $\partial_\phi \partial_{\bar{\phi}} K = K_{\phi\bar{\phi}} = 1/K^{\phi\bar{\phi}}$ eta $W_\phi = \partial_\phi W(\phi)$

¹Testuinguru honetan, potentzial baten bi minimoen arteko interpolazioa den eremu eskalarraren profilari *domeinu pareta* deritzogu; bestalde, bi dimentsioko objektu zabalak ditugu *mintzak*, lodiera infinitesimalekoak. Ondorengo ataletan bi objektu horiek aldi berean kontsideratuko ditugu.

notazioen bidez adieraziko ditugu, eta [265] liburuko konbentzioak jarraituko ditugu.

Teoria horren higidura-ekuazioa hauxe dugu:

$$K_{\phi\bar{\phi}}\partial_\mu\partial^\mu\phi - K_{\phi\phi\bar{\phi}}\partial_\mu\phi\partial^\mu\bar{\phi} + K_{\phi\bar{\phi}\bar{\phi}}(K^{\phi\bar{\phi}})^2|W_\phi|^2 - K^{\phi\bar{\phi}}W_\phi\bar{W}_{\bar{\phi}\bar{\phi}} = 0, \quad (6.2)$$

eta baita horren konplexu konjokatua ere. Argi dago azken adierazpen hori eremu konplexuen Klein-Gordon ekuaziora murriztuko dela termino zinetikoa kanonikoa denean (hots, $K = \phi\bar{\phi}$ denean), potentzial eskalarra $V(\phi, \bar{\phi}) = |W_\phi|^2$ izanik.

Bi minimo supersimetrikoren arteko domeinu-pareta motako soluzio baten bila gabiltza, bien superpotentziala $W_\phi(\phi_\pm) = 0$ izanda. Demagun domeinu-pareta lau hori z ardatzarekiko ortogonal dela. Gauzak horrela, $\mathcal{N} = 1$ supersimetriaren kargen erdia mantentzen dituen soluzioak ondorengo lehen ordenako higidura-ekuazioa ebatzi beharko duela frogatu daiteke [247]:

$$\partial_z\phi(z) = -e^{i\theta}K^{\phi\bar{\phi}}\bar{W}_{\bar{\phi}}(\phi(z)). \quad (6.3)$$

Azken ekuazio horri BPS ekuazioa deritzogu, non θ fasea horrela definitu dugun:

$$e^{i\theta} = \frac{\Delta W}{|\Delta W|}, \quad \text{non} \quad \Delta W = W(\phi(z = \infty)) - W(\phi(z = -\infty)). \quad (6.4)$$

Jakina, mugalde-baldintza aproposak emanda, lehen eta bigarren ordenako ekuazioek soluzio estatiko berdina eman beharko dute domeinu-paretaren kasuan. Eredu horren domeinu-paretaren tentsioa lagrangearra berridatziz eta hortik gainazal-unitateko energia kalkulatu lor daiteke, alegia:

$$\sigma = \int dz T_{00} = - \int_{-\infty}^{\infty} dz K_{\phi\bar{\phi}}|\partial_z\phi(z) + e^{i\theta}K^{\phi\bar{\phi}}\bar{W}_{\bar{\phi}}(\phi(z))|^2 + 2\text{Re}[e^{-i\theta}\Delta W]. \quad (6.5)$$

Limite supersimetrikoan, non (6.3) ekuazioak bete behar diren,

$$\sigma_{BPS} = 2|\Delta W| \quad (6.6)$$

izango dugu.

Adibidea: potentzial-osin bikoitza

Aurreko ekuazioak ondorengo ereduan aplikatuko ditugu:

$$K(\phi, \bar{\phi}) = \phi\bar{\phi}, \quad W(\phi) = \left(\frac{1}{3}\phi^3 - a^2\phi\right) \quad (6.7)$$

non $a > 0$ dugun. Teoria horri dagokion lagrangearra hauxe dugu:

$$\mathcal{L} = -\partial_\mu\phi\partial^\mu\bar{\phi} - |\phi^2 - a^2|^2. \quad (6.8)$$

Teoriaren potentzial eskalarra 6.1(a) irudian marraztu dugu (kurba marratua). Bestalde, hauexek ditugu lagrangear hori erabiliz lor dezakegun bigarren ordenako (6.2) ekuazioa:

$$\partial_z^2 \phi(z) - 2\bar{\phi}(\phi^2 - a^2) = 0. \quad (6.9)$$

Gainera, lehen ordenako BPS ekuazioa ondorengoa izango da:

$$\partial_z \phi(z) = -(\bar{\phi}^2 - a^2). \quad (6.10)$$

Bertatik zuzenean nabari dezakegu $\phi_{\pm} = \pm a$ izango direla potentzialaren bi minimo supersimetrikoak.

Ondorengoan, $e^{i\theta} = -1$ erabiliko dugu.² Ekuazio horren soluzioa ondorengo profil erreala izango da:

$$\phi(z) = a \tanh(az), \quad (6.11)$$

bestalde, domeinu-paretaren tentsioa hauxe dugu:

$$\sigma_{BPS} = 2|\Delta W| = \frac{8}{3}a^3 \quad (6.12)$$

Lehen esan bezala, soluzio horrek supersimetriaren frakzio bat gordeko du, beraz, profil eskalarrak ezin dezake sasihuts baten iraugitzea adierazi. Zuzenean ondorioztatu dezakegu hori, bi hutsak supersimetrikoak eta energetikoki endekatuak direla nabaritzuz eta euren artean sortzen den domeinu-pareta laua dela ikusiz; hortaz, huts horiek guztiz egonkorak dira.

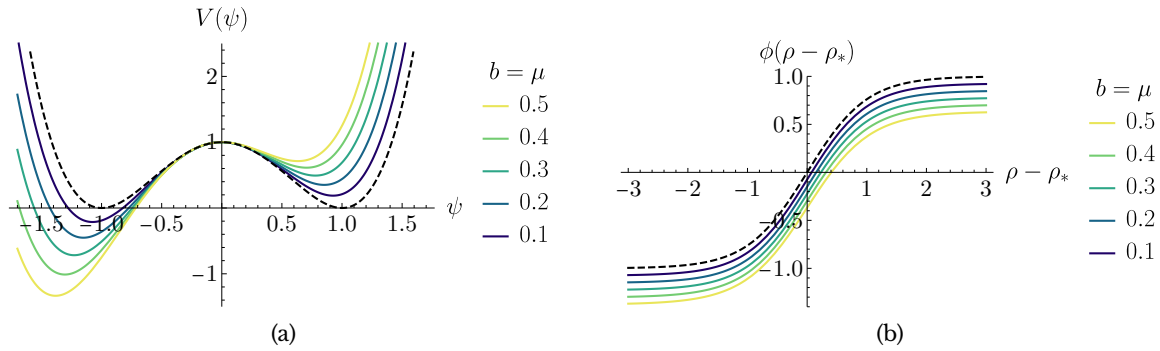
Bestalde, hemen aurkeztutako soluzioa erreala da. Profil hori bat dator potentzialaren formarekin, eremuaren zati irudikariarekiko perturbazioak egonkorak baitira. Erraz baieztatu dezakegu hori potentziala eremuaren zati erreal eta irudikarian garatuz, alegia,

$$\phi(z) = \psi(z) + i s(z). \quad (6.13)$$

Horien arabera, hauxe dugu potentzial eskalarra:

$$V(\psi, s) = (\psi^2 - a^2)^2 + 2(\psi^2 + a^2)s^2 + s^4 \quad (6.14)$$

Hori dela eta, soluzioaren $s = 0$ norabidean arreta jarri dezakegu. Hemen aurkeztuko ditugun adibide guztietan fenomeno berdina gertatzen dela berretsi dugu eta, horrenbestez, eremuen zati erreala bakarrik irudikatu dugu ondorengo ilustrazioetan.



6.1 irudia: (a) Supersimetria hausten duten parametroen zenbait balioentzako irudikatu dugun (6.19) potentziala, non $a = 1$ den. (b) Testuko (6.17) ekuazioaren soluzioak, profil bakoitzaren inflexio-puntuaren inguruan marraztuta. Inflexio-puntuaren kokapena, kasu bakoitzerako, ρ_* da. Marratutako kurba baten bidez adierazi dugu BPS limitea, (a) irudiko marratutako potentzialaren domeinu-pareta motako soluzioa adierazten duena.

Supersimetriaren haustura

Supersimetria “samurki” hausten duten zenbait termino [264, 266] barneratuko ditugu Lagrangearran :

$$S_{\text{soft}} = - \int d^4x \sqrt{-g} \left[\mu^2 \phi \bar{\phi} + b (\phi^3 + \bar{\phi}^3) \right]. \quad (6.15)$$

Ondorengo kalkuletan, terminoen koefizienteak txiki samarrak direla suposatuko dugu, lehen aurkitutako soluzioaren hainbat ezaugarri betetzen jarraitu daitezten. Hau da, oro har $\mu^2 \ll a^2$ eta $b \ll a$ beteko direla asumituko dugu, ikus 6.1(a) irudia.

Termino horiek kontuan hartuz, teoriaren bi minimoak

$$\phi_{\pm} = \pm a + \delta_{\pm}(\mu^2, b) \quad (6.16)$$

posizioetan egongo dira, non $|\delta_{\pm}/a| \ll 1$ den. Jakina, bi minimo horiek supersimetria hautsiko dute. Suposa dezagun $b < 0$ dela, ϕ_+ -eko minimoa bestea baino zertxobait altuagoa izan dadin; lehen minimo hori, beraz, ϕ_- eremuaz osatutako burbuilaz osatuz iraungitu daiteke. Tuneleatze hori, gainera, eremuaren zati errealan zehar gertatuko da, ikus 6.1(a) irudia.

Iraungitzearen gertatze-tasa eta eremu eskalarrak sortuko duen profila kalkulatzeko, ohiko metodo euklidearretara joko dugu [67, 68]. Hortaz, (6.1) lagrangearrari dagokion ekintza euklidearra muturtu besterik ez dugu behar, supersimetria hausten duten terminoak kontuan hartuz. Muturtutako ekintza euklidearrak esponentzialki murriztutako probabilitatea emango digu; bestalde, ekintza horretatik lortutako higidura-ekuazioek eremu eskalarren profil emergentea deskribatuko dute. Espazio euklidearraren $O(4)$ simetria asumituz, hauxe dugu eremuaren higidura-ekuazioa:

$$\phi'' + \frac{3}{\rho} \phi' = \frac{\partial V}{\partial \phi}, \quad (6.17)$$

²Bestalde, $e^{i\theta} = +1$ erabiliz gero, kontrako profila lortuko genuke, antidomeinu-pareta deritzoguna. Azken kasu hori ebazteko $\pm\infty$ -ko mugalde-baldintzak elkartrukatu behar ditugu besterik ez.

non $\rho = \sqrt{\tau^2 + \mathbf{x}^2}$ den, τ denbora euklidearra definitu dugularik, $\tau = it$, eta primek ρ -rekiko deribatuak adierazten dituzten. Ekuazio hori ondorengo mugalde-baldintzekin ebatzi beharko dugu:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \phi(\rho) = \phi_+, \quad \phi'(0) = 0. \quad (6.18)$$

Gogoan izan $O(4)$ simetria euklidearra $O(1,3)$ simetria izatera pasako dela soluzioa espazio lorentziarrera eramaterakoan. Hori dela eta, (6.17) ekuaziotik lortutako profila $t = 0$ aldiuneko profila ere adieraziko du; gainera, simetria horrek burbuilaren erradioa argiaren abiaduranzko azelerazioa izango duela frogatu daiteke.

Aurreko azpiataleko adibidea jarraituz, ondorengo potentziala landuko dugu:

$$V(\phi, \bar{\phi}) = (\phi^2 - a^2)(\bar{\phi}^2 - a^2) + \mu^2 \phi \bar{\phi} + b(\phi^3 + \bar{\phi}^3), \quad (6.19)$$

supersimetriaren haustura-terminoak barneratzen dituen.

Dimentsio bakarreko sistema horri dagokion eremu eskalarren profila erraz ebatzi daiteke *motz/luze* algoritmoa erabiliz [67], ikus 1.5 sekzioa xehetasun gehiagorako. Funtsean, (6.18) mugalde-baldintzek $\phi(0)$ hasiera-puntua zehazten ez dutenez, pare bat hasiera-puntu aukeratu ditzakegu, zeintzuetan eremua motz geratu edo luze jotzen duen $-V$ potentzialaren ϕ_{fv} puntuan kokatutako maximo lokalarekiko. Eremu tarte hori behin eta berriro murriztuz, ρ -ren balio handietan ϕ_{fv} -tik gertu samar geratzen den $\phi(0)$ hasiera-puntu bat lortuko dugu. Horrela lortutako soluzioak AnyBubble [76] algoritmoarekin kalkulatu eta konparatu eta euren artean inolako desberdintasun hautemangarririk nabaritu ezin daitekeela baieztatu dugu.

Zenbakizko algoritmo hori erabiliz, iraungitzeek sortutako burbuilaren domeinu-pareten eboluzioa aztertu dugu, supersimetriaren haustura-parametroen arabera, ikus 6.1(b). Argi dago, beraz, b eta μ parametroak txikitu ahala, domeinu-pareta lauaren soluzioranzko joera asintotikoa duela soluzioak, bi minimoak energetikoki endekatuak bihurtzen baitira.

6.2.2 Hiru-fomez eta mintz lauez osatutako soluzio supersimetrikoak

Aurreko azpiatalean, teoria supersimetrikoen huts endekatuen artean ematen diren domeinu-pareten ezaugarriak aztertu ditugu. Hori ez ezik, supersimetria hausten dituzten terminoak barneratzekoan, erabateko hutsez osatutako burbuilen profilak domeinu-pareta lauranzko joera asintotikoa dutela ikusi dugu, supersimetria-haustura terminoak txikitu ahala. Jakina, hutsa erabat supersimetrikoa baldin bada, burbuilaren erradioa infinitua izango da eta ez da instantoirik existituko.

Oraingoan, gure sistemari osagai berri bat gehituko diogu: 2 dimentsioko mintz bat. Sarreran azaldu dugunaren arabera, objektu horiek naturalki akoplatzen dira 3-forma eremuetara [248, 249] eta ikuspuntu kosmologikotik aplikazio interesgarriak izan ditzakete. Gainera, horien tentsioa eta akoplamentuak doitu ditzakegu sistema osoaren supersimetriaren frakzio bat mantentzeko (ikus, adibidez, [254]). Horrela, fluxuak barneratzen dituen teoria supersimetriko batean barneratu ahal izango ditugu objektu horiek [258–260]. Beharago errepatatuko dugun bezala, espazio-denbora bi eskualdetan banatu dezakegu mintzen bidez; izan ere, mintzaren alde bakoitzean eremu eskalarraren potentziala ezberdina izango

da. Horrenbestez, potentzial *ezberdinen* arteko trantsizioak sortu ahal izango ditugu.

Grabitatea kontuan hartu barik, $A_{\mu\nu\rho}$ hiru-forma erreal batez, mintz batez eta ϕ eremu eskalar konplexu bakarrez osatutako teoria supersimetriko sinple bat horrela idatzi dezakegu.

$$S = S_{\text{bulk}} + S_{\text{mintz}} + S_{\text{mugalde-term.}} \quad (6.20)$$

Hartara, **H** eranskinean erakutsi dugu eremuen ekintza mintzetik kanpo, hots, S_{bulk} , ondorengoa izango dela:

$$S_{\text{bulk}} = \int d^4x \left[-K_{\phi\bar{\phi}} \partial_\mu \phi \partial^\mu \bar{\phi} - \frac{1}{4 \cdot 4!} K_{\phi\bar{\phi}} F^{\mu\nu\sigma\rho} F_{\mu\nu\sigma\rho} + \frac{1}{2 \cdot 4!} (W_\phi + \bar{W}_{\bar{\phi}}) \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} F_{\mu\nu\sigma\rho} + \frac{1}{4} K^{\phi\bar{\phi}} (W_\phi - \bar{W}_{\bar{\phi}})^2 \right] \quad (6.21)$$

$$= \int d^4x \left[-K_{\phi\bar{\phi}} \partial_\mu \phi \partial^\mu \bar{\phi} + \frac{1}{4} K_{\phi\bar{\phi}} (*F_4)^2 + \frac{1}{2} (*F_4) (W_\phi + \bar{W}_{\bar{\phi}}) + \frac{1}{4} K^{\phi\bar{\phi}} (W_\phi - \bar{W}_{\bar{\phi}})^2 \right] \quad (6.22)$$

non³ $F_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{3!} \partial_{[\mu} A_{\nu\rho\sigma]}$ eta horren Hodge duala den $*F_4 = \frac{1}{4!} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu\rho\sigma}$ erabili ditugun. Bestalde, 3-formaren Hodge dualaren osagaiak definitzea oso baliagarria izango zaigu, $A_\mu = \frac{1}{3!} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} A^{\nu\rho\sigma}$, horren arabera $*F_4 = \partial_\mu A^\mu$ izango dugulako. Beti bezala, K Kähler potentzialak eta W superpotentzialak eremu eskalarraren teoria supersimetrikoa definitzen dituzte, eta horien azpiindizeak eremu horrekiko deribatu partzialak adierazten dituzte.

Bestalde, **H** eranskinean erreparatu dugun bezala, ekintza horren bariazioak ondo definitzeko [249, 267], ezinbestekoa da ondorengo mugalde-terminoa ekintzan barneratzea:

$$S_{\text{muga}} = \frac{1}{2 \cdot 3!} \partial^\mu \left[A^{\nu\rho\sigma} \left(K_{\phi\bar{\phi}} F_{\mu\nu\rho\sigma} + \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (W_\phi + \bar{W}_{\bar{\phi}}) \right) \right] \quad (6.23)$$

$$= -\frac{1}{2} \int d^4x \partial^\mu \left[A_\mu \left(K_{\phi\bar{\phi}} (*F_4) - W_\phi - \bar{W}_{\bar{\phi}} \right) \right]. \quad (6.24)$$

Teoria horren 3-formaren higiduraren ekuazioak erabiliz gero, **H** eranskinean frogatu dugu ohiko eremu eskalar konplexuaren teoria berreskuratuko dugula, superpotentzial eraginkor berri baten arabera:

$$V(\phi, \bar{\phi}) = |W_\phi - n|^2 \quad (6.25)$$

non $n \in \mathbb{R}$ konstantea den, 3-forma eremuen higidura-ekuazioak integratzeagatik lortu duguna. Hortaz, fluxuek superpotentzian ekarpen lineal bat sortuko dute. Jakina, fluxu horiek Soka-Teoriaren fluxu-trinkoketa baten ikuspuntutik hartuz gero, $n \in \mathbb{Z}$ izango dugula itzarotekoa da, ikus (1.33) ekuazioa. Ondorengoan, beraz, konstante horiek osoko zenbakizatzen joko ditugu.

³Definizio horiek espazio-denbora lau denean erabili daitezke soilik. Dena den, adierazpen guztiak zuzenean orokortu daitezke espazio-denbora kurbotara, ikus **H** eranskina.

Mintzari dagokion ekintzaren zatia hauxe dugu [249, 255]:

$$\begin{aligned}
S_{\text{memb.}} &= - \int_{\mathcal{M}} d^3 \xi \sqrt{-h} 2|q\phi| + \frac{q}{3!} \int_{\mathcal{M}} d^3 \xi A_{\mu\nu\rho} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^b} \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^c} e^{abc} \\
&= \int d^4 x d^3 \xi \sqrt{-g} \left[-\frac{\sqrt{-h}}{\sqrt{-g}} 2|q\phi| + \frac{q}{3!} A^\mu \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^a} \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^b} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^c} e^{abc} \right] \delta^4(x - x(\xi)) \\
&= \int d^4 x \sqrt{-g} [-2|q\phi|J(x) + qA^\mu J_\mu(x)] \tag{6.26}
\end{aligned}$$

non h mintzan induzitutako metrikaren determinatzailea den, \mathcal{M} mintzaren mundu-bolumena adierazten duen, ξ^i mundu-bolumena parametrizatzen duten koordenatuak diren eta $x^\mu(\xi^i)$ funtzioak mintzaren murgiltze-funtzioak diren 4 dimentsioko espazio-denboran. Azken ekintza horretan espazio-denboraren metrika esplizituki idatzi dugu geroago erabilgarria izango zaigulako. Gainera, mintzaren formaren eta espazio-denborako murgiltzearen informazio guztia $J(x)$ eta J_μ funtzioetan jaso dugu, horrela definitu ditugunak:

$$J(x) = \int d^3 \xi \frac{\sqrt{-h}}{\sqrt{-g}} \delta^4(x - x(\xi)) \tag{6.27}$$

$$J_\mu(x) = \frac{1}{3!} \int d^3 \xi \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^a} \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^b} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^c} e^{abc} \delta^4(x - x(\xi)) \tag{6.28}$$

Adibidez, z ardatzarekiko perpendikularra den eta $z = 0$ puntuan kokatuta dagoen mintz batentzako, erraz frogatu daiteke $J(x) = \delta(z)$ eta $J_\mu(x) = \delta_\mu^z \delta(z)$ izango dugula.

Aurreko (6.26) ekintzaren lehengo terminoari Nambu-Goto terminoa esan ohi zaio, mintzaren tentsioarekin zerikusia duelako. Kasu honetan, non eremu eskalar konplexu bakarra kontsideratzen ari garen, tentsio hori doituz sistemaren supersimetria bermatu dezakegu [254]. Hori dela eta mintzaren tentsioa $\mathcal{T} = 2|q\phi|$ izango da; beraz, eremuak mintzaren mundu-bolumenean hartzen duen balioaren arabera izango da horrela lortutako tentsioa. Horrenbestez, mintza eta eremu eskalarra elkarrekin akoplatuta egongo dira, eta tentsio positiboa izateko mintzaren posizioko eremua ez-nulua izan beharko du. Aurrerago aztertuko ditugu eremua termino honetan agertzeak izango dituen ondorio interesgarriak.

Bestalde, (6.26) ekintzaren bigarren terminoari Wess-Zumino terminoa deritzo, eta 3-formaren eta mintzaren mundu-bolumenaren arteko akoplamendu naturala adierazten du. Nabarmenezkoa da akoplamendu hori ohiko elektromagnetismoan karga baten eta potentzial elektromagnetikoaren artean gertatzen den akoplamenduaren orokortzea besterik ez dela. Gainera, [248, 249] artikuluetan frogatutakoaren arabera, termino hori dela eta, mintzaren alde bakoitzean fluxuek balio ezberdinak izango dituzte. Gauza bera gertatuko da sisteman eremu eskalarrak barneratzerakoan, eta horrek ondorio garrantzitsuak izango dituela ikusiko dugu.

Azpimarragarria da 3-formaren eremu-indarrak ez duela inolako denbora-eboluziorik izango eremu eskalarrik eta mintzik izan ezean. Kasu horretan, hain zuzen ere, $F^{\mu\nu\rho\sigma} = n \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ izango dugu; hortaz, grabitatea kontuan hartuz gero, hiru-formaren ekarpena konstante kosmologiko bat izango da. Fluxu horrekiko kargatuta dauden mintzak nukleatuz, konstante kosmologiko horren balioa aldatu ahal izango dugu. Hain zuzen ere, prozesu hori

dimentsio altuagoko Schwinger prozesuen parekoa izango da [249, 252].

Forma-eremuaren higidura-ekuazioak (6.20) ekintza A^μ -rekiko muturtuz lor ditzakegu:

$$\partial_\mu \left(\frac{1}{2} K_{\phi\bar{\phi}} (*F_4) + \text{Re} W_\phi \right) = q J_\mu \quad (6.29)$$

Komenigarria izango zaigu $J_\mu = \partial_\mu H$ definitzea. Jakina, mintz lauaren kasuan, $H(z) = \Theta(z)$ izango dugu, non $\Theta(x)$ ohiko Heaviside funtzioa den. Definizio horien arabera, horrela berridatzi dezakegu aurreko higidura-ekuazioa:

$$*F_4 = -2K^{\phi\bar{\phi}} (\text{Re} W_\phi - (n + qH(x))). \quad (6.30)$$

Forma-eremuaren higidura-ekuazioak sistemaren ekintza osoan erabiliz eta mugalde-terminoaren ekarpen ez-nulua aintzat hartuz, hauxe izango da eremu-komplexuaren ekintza:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-K_{\phi\bar{\phi}} \partial_\mu \phi \partial^\mu \bar{\phi} - K^{\phi\bar{\phi}} |\hat{W}_\phi|^2 - 2|q\phi| J(x) \right] \quad (6.31)$$

non $\hat{W}(\phi)$ ondorengo superpotentzial eraginkorra den:

$$\hat{W}(\phi) \equiv W(\phi) - (n + qH(x))\phi. \quad (6.32)$$

Emaitza horien ezaugarriarik interesgarrietakoa zera dugu: mintzak potentzial *exberdinez* deskribatutako espazio-denboraren eskualdeak banatuko dituela, non $V_\pm = |\hat{W}_{\pm, \phi}|^2$ izango dugun eta azpiindezeak mintzaren alde jakin bat adierazten duen. Horrenbestez, mintza zeharkatzerakoan fluxuaren balioa aldatuko da, n -tik $n + q$ -ra.

Mintz lauaren kasuan, eremu eskalarrari dagokion higidura-ekuazioa $\phi = \phi(z)$ asumituz lor dezakegu:

$$K_{\phi\bar{\phi}} \partial_z^2 \phi - K_{\phi\bar{\phi}} |\partial_z \phi|^2 + K_{\phi\bar{\phi}} (K^{\phi\bar{\phi}})^2 |\hat{W}_\phi|^2 - K^{\phi\bar{\phi}} \hat{W}_\phi \hat{W}_{\bar{\phi}} - q e^{i\eta} \delta(z) = 0 \quad (6.33)$$

non $e^{i\eta} = \frac{q\phi}{|q\phi|}$ den eta, kasu honetan,

$$\hat{W}(\phi) = W(\phi) - (n + q\Theta(z))\phi \quad (6.34)$$

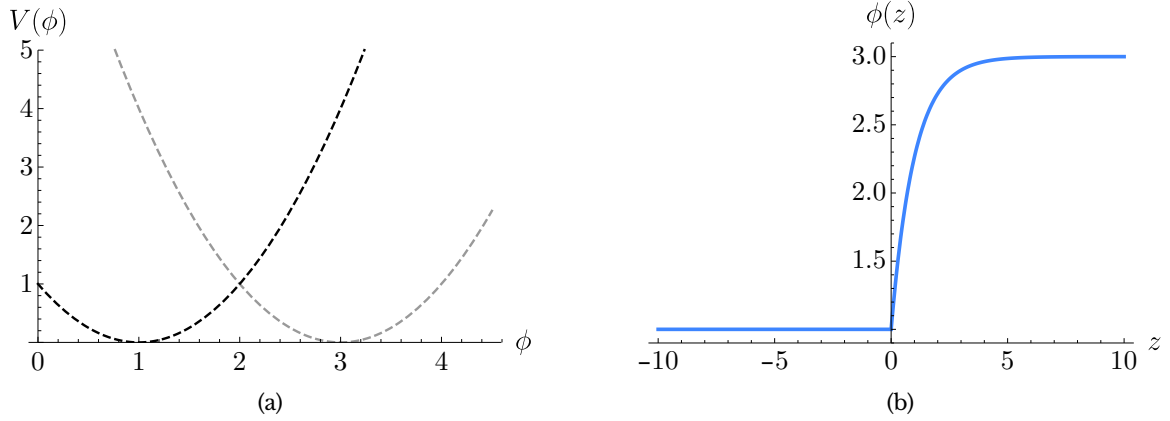
izango den. Higidura-ekuazio horren soluzio partikularra lehen ordenako BPS ekuazioak emango digu [247, 259]:

$$\partial_z \phi + e^{i\eta} K^{\phi\bar{\phi}} \hat{W}_{\bar{\phi}} = 0. \quad (6.35)$$

Azken adierazpen hori (6.3) ekuazioaren orokortzea da, mintzaren ekarpena superpotentzialaren definizioan inplizituki barneratzen duena.

Adibidea: superpotentzial koadratikoa

Sistema honen adibide simple bat aztertuko dugu azpiatal honetan, [259] lanean ere xehetasun osoz ebatzirik aurki daitekeena. Aurreko domeinu-paretaren adibidea jarraituz, ondorengo



6.2 irudia: (a) (6.37) ekuazioko potentzial eskalarra, non $n = 1$ eta $q = 2$ aukeratu ditugun. Kurba ilunak $z < 0$ eskualdeko potentziala adierazten du; kurba argiak, aldiz, $z > 0$ eskualdekoa. (b) Aurreko potentzialaren minimoen arteko interpolazioa den eremu eskalarraren profila, mintz laua $z = 0$ posizioan dagoelarik, ikus (6.39) ekuazioa.

Kähler potentziala eta superpotentziala erabiliko ditugu:

$$K(\phi, \bar{\phi}) = \phi \bar{\phi}, \quad W(\phi) = \frac{1}{2} a \phi^2. \quad (6.36)$$

non a konstantea den. Parametro horrek energia-eskala definituko du; ondorengoan, $a = 1$ erabiliko dugu. Gainera, sistemaren n fluxua positiboa dela, $n > 0$, eta mintz lauaren karga ere positiboa dela, $q > 0$ suposatuko dugu, $e^{i\eta} = 1$ izan dadin. Mintzaren alde bakoitzean eremu eskalarraren potentziala ezberdina izango da, alegia,

$$V_-(\phi) = |\phi - n|^2, \quad V_+(\phi) = |\phi - (n + q)|^2. \quad (6.37)$$

non V_- potentziala $z < 0$ eskualdean definitu den eta V_+ , aldiz, $z > 0$ eskualdean. Potentzial hori 6.2 irudian marraztu dugu. Arestian esan bezala, ϕ -ren zati irudikariarekiko perturbazioak guztiz egonkorak dira, beraz, eremuaren zati errearen fisikan jarriko dugu arreta.

Teoria horri dagokion (6.35) BPS ekuazioa hauxe dugu:

$$\begin{cases} \partial_z \phi(z) = -\bar{\phi}(z) + n & z < 0, \\ \partial_z \phi(z) = -\bar{\phi}(z) + n + q & z > 0. \end{cases} \quad (6.38)$$

Sistema hori erraz ebatzi daiteke eremua guztiz erreala dela kontsideratuz, $z = 0$ puntuan eremuaren jarraitutasuna inposatuz eta, azkenik, profilararen alde bakoitza asintotikoki potentzial bakoitzaren minimo supersimetrikoruntz jo behar duela kontuan hartuz:

$$\phi(z) = n + \Theta(z)q(1 - e^{-z}). \quad (6.39)$$

Profil hori 6.2(b) irudian marraztu dugu. Lehen esan bezala, mintzaren alde bakoitzeko potentzial koadratikoen ϕ_{\pm} minimo supersimetrikoen arteko interpolazioa da profil hori. Oso nabaria da eremuaren lehen deribatuak mintza zeharkatzekoan jasaten duen bat-bateko aldaketa; aurrerago ikusiko dugun bezala, fenomeno hori tentsioa ϕ eremuaren arabera

delako gertatzen da.

Mintzaren tentsioa beste nolabait kalkulatzeko badugu, sistemaren energia osoa integratuz eta domeinu-paretaren ekarpena kontuan hartuz, lehen ikusi dugun arabera. Hemen lantzen ari garen kasuan, hauxe dugu tentsioa:

$$\sigma_{\text{DW+memb}} = 2 \left| \frac{1}{2}(n+q)^2 - \frac{1}{2}n^2 \right| = (2nq + q^2). \quad (6.40)$$

Kontuan izan azken balio hori ez dela Nambu-Goto terminoan ageri dena, hots, $T_{\text{NG}} = 2nq$. Jatorrizko n fluxua q -ren unitateetan kuantizatuta ageriko dela asumituz eta $n \gg q$ betetzen baldin bada, tentsioak jasango duen zuzenketa Nambu-Goto terminoaren balioarekiko nahiko txikia izango dela ikus dezakegu.

6.3 Supersimetria hausten duten hutsen iraungitzea

Aurreko atalean fluxuen eta eremu eskalarren arteko elkarrekintza aztertu dugu mintz estatiko eta lauen presentzian. Ondorengoan, Coleman-deLuccia [67, 69] eta Brown-Teitelboim [248, 249] mekanismoak bateratuko ditugu, eremu eskalarrez eta fluxuez osatutako sistemetan mintzak nola nukleatu daitezkeen ikertzeko.

Erabiliko ditugun potentzialen hutsak energetikoki endekatuak izan ez daitezkeen, jatorrizko lagrangearrari supersimetria hausten duten zenbait termino gehituko dizkiogu. Horrela, minimo horietatik altuena den sasihutsa beste huts batera iraungitu ahal izango da, mintz esferiko bat sortuz. Lokalki, horrela sortutako mintz-burbuila aurreko adibideko mintz lauaren egitura berdintsua izango du. Jakina, supersimetria hausten dituzten termino horiek txikitu ahala, arestian lortutako profil supersimetrikoa berreskuratu beharko dugu.

Hasiera batean, eremu eskalarra espazioa osoan bere sasihuts-egoeran egongo da, ohiko sasihutsaren iraungitzean bezala. Hasierako egoera horren iraungitzea aztertzeko, hortaz, metodo euklidearra erabiliko ditugu eta $O(4)$ simetria asumituko dugu sasihutsaren iraungitze-prozesuan. Gauzak horrela, mintza espazio euklidearrean 3-esfera estatikoa dela suposatuta beharko dugu. Hauxe dugu sistemaren ekintza euklidearra, [249] artikulua konbentzioak erabiliz:

$$S_E = \int d^4x \sqrt{g_E} \left[K_{\phi\bar{\phi}} g_E^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \bar{\phi} - \frac{1}{4} K_{\phi\bar{\phi}} (*F_4)^2 + \frac{1}{2} (*F_4) (W_\phi + \bar{W}_{\bar{\phi}}) - \frac{1}{4} K^{\phi\bar{\phi}} (W_\phi - \bar{W}_{\bar{\phi}})^2 \right] \\ + \int d^4x \sqrt{g_E} [2|q\phi|J(x) + qA^\mu J_\mu(x)] + S_{\text{soft}} + S_{\text{bd}} \quad (6.41)$$

non g_E espazio euklidearraren metrika adierazten duen⁴ eta S_{soft} , aldiz, (6.15) ekuazioko supersimetria-haustura terminoak adierazten dituen.

⁴ [249] artikuluko konbentzioak jarraituz, $A^{\mu_1\mu_2\mu_3}$ forma-eremuaren osagai guztiz espazialak $iA^{\mu_1\mu_2\mu_3}$ izatera pasako dira, F^{0123} eremu-indarra alda ez dadin Wick biraketa bideratu ondoren. Hodge dualen arabera, $*F_4 = \frac{1}{4!} \sqrt{-g} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu\rho\sigma} = -\sqrt{-g} F^{0123}$ ere aldaezin mantendu beharko litzateke. Aitzitik, gogoan izan behar dugu espazio euklidearrean $\epsilon_{0123} = \epsilon^{0123} = 1$ izango dugula eta, beraz, $*F_4$ minus zeinu bat hartuko du koordinatu euklidearretan adierazten dugunean.

Sistema osoaren simetria esferikoa asumituz, metrika euklidearra

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_3^2 \quad (6.42)$$

izango da, non 3-esferaren gainazal-elementua adierazten duen $d\Omega_3$ notazioak. Gogoan izan espazio euklidearrean mintzaren erradioa konstante dirauela. Gainera, $*F_4$ -ren definizio kobariantea erabiliz, erraz froga daiteke

$$*F_4 = \frac{1}{\rho^3} \partial_\rho (\rho^3 A^\rho) \quad (6.43)$$

dela. Gauzak horrela, forma-eremuak ekintzatik integratuko ditugu euren higidura-ekuazioak erabiliz, hots,

$$*F_4 = D_\mu A^\mu = \frac{1}{\rho^3} \partial_\rho (\rho^3 A^\mu) = 2K^{\phi\bar{\phi}} (\text{Re}W_\phi - n - q\Theta(\rho - R)), \quad (6.44)$$

arestiko (6.31) ekintzaren orokortze zuzena lortuko dugu espazio euklidearreko sistema estatiko eta esferikora:

$$S_E = 2\pi^2 \int d\rho \rho^3 \left[K_{\phi\bar{\phi}} \left| \frac{d\phi}{d\rho} \right|^2 + V(\phi, \bar{\phi}) + 2|q\phi| \delta(\rho - R) \right]. \quad (6.45)$$

Aurreko adierazpenean, V -n barneratu ditugu (6.15) ekuazioko supersimetria-haustura terminoak, alegia,

$$V = K^{\phi\bar{\phi}} |\hat{W}_\phi|^2 + \mu^2 \phi \bar{\phi} + b(\phi^3 + \bar{\phi}^3), \quad \hat{W} \equiv W - (n + q\Theta(r - R))\phi. \quad (6.46)$$

Horrenbestez, hauxe dugu eremu eskalar konplexuaren higidura-ekuazioa:

$$\frac{1}{\rho^3} \partial_\rho \left(\rho^3 K_{\phi\bar{\phi}} \frac{d\phi}{d\rho} \right) = K_{\phi\bar{\phi}} \left| \frac{d\phi}{d\rho} \right|^2 + \frac{\partial V}{\partial \phi} + qe^{i\eta} \delta(\rho - R) \quad (6.47)$$

non $e^{i\eta} = \frac{q\phi}{|q\phi|}$ den. Azken ekuazio hori zeharo sinplifikatuko da termino zinetiko kanonikoa erabiliz gero, hots, $K = \phi\bar{\phi}$ baldin bada, $K_{\phi\bar{\phi}} = 1$ izan dadin. Kasu jakin horretan, eremu eskalarraren higidura-ekuazioa

$$\frac{d^2\phi}{d\rho^2} + \frac{3}{\rho} \frac{d\phi}{d\rho} = \frac{\partial V}{\partial \phi} + qe^{i\eta} \delta(\rho - R), \quad (6.48)$$

izango da, (6.18) ekuazioko mugalde-baldintzak errespetatuz ebatzi behar dena. Azken adierazpen hori ohiko sasihutsen iraungitzeetan ageri denaren parekoa da, ikus (6.17) ekuazioa. Horien arteko ezberdintasun bakarra zera da: hemen lortu dugun higidura-ekuazioan Dirac delta funtzio bat izango dugula, R erradioko mintz bat baitugu.

Kasu berri honen instantoi-soluzioa aurkitzeko, kontuz jarraitu beharko dugu aurrera, paretaren alde bakoitzeko potentzial eskalarra ezberdina da eta. Hori ez ezik, teoriaren sasihutsa eta erabateko hutsa potentzial ezberdinetan definitu ditugu, ohiko kasuan ez bezala, non bi hutsak funtzio berdinen bi minimo diren.

Eremu eskalarraren higidura-ekuazioa ebazteko, arestian azaldutako motz/luze metodoa erabili dezakegu. Jakina, kontuan hartu beharko dugu espazio euklidearreko jatorritik R distantziara arte potentziala $V_-(\phi)$ izango dela, eta hortik aurrera $V_+(\phi)$ -era aldatu beharko dugula. Mintz lauaren kasuan ikusi dugunaren arabera, eremuaren lehen deribatuak jauzi bat emango du mintza gurutzatzerakoan. Hortaz, mintz esferikoaren kasuan ere pareko efektu bat gertatzea itxarotekoa da. Hain zuzen ere, (6.48) ekuazioa $R - \epsilon$ eta $R + \epsilon$ artean integratuz, $\epsilon \rightarrow 0$ eginez eta ϕ funtzio jarraitua dela suposatuz, zuzenean frogatu dezakegu lehen deribatuaren jauzia ondorengoa izango dela:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\partial_\rho \phi(R + \epsilon) - \partial_\rho \phi(R - \epsilon)] = qe^{i\eta}. \quad (6.49)$$

Hortaz, kasu honetan ere eremuaren deribatua mintza zeharkatzerakoan aldatuko da. Efektu hori (6.45) ekintzaren Nambu-Goto terminoan eremu eskalarra agertzearekin zerikusia duela zuzenean froga daiteke.

Prozedura horrek parametro aske bat du: mintzaren R erradioa, hain justu. Kasu ez-grabitazional honetan hiru metodo jarraituz finkatu dezakegu parametro horren balioa. Lehenik eta behin, (6.45) ekintza euklidearraren balioa ebaluatzea dugu parametro horren arabera lortutako soluzio guztietan. Zehatzago esanda, hutsaren desegonkortasun kuantikoa adierazten duen instantoiaren profil zuzenak tuneleatze-probabilitatea muturtzen duena izango da (ikus (1.59) ekuazioa). Horrenbestez, ondorengo ekintza euklidearren diferentzia muturtu beharko dugu profil hori lortzeko:

$$B = 2\pi^2 \int_0^\infty d\rho \rho^3 \left[K_{\phi\bar{\phi}} \left| \frac{d\phi}{d\rho} \right|^2 + V(\phi, \bar{\phi}) + 2|q\phi| \delta(\rho - R) - V_{fv} \right] \quad (6.50)$$

non V_{fv} mintzetik kanpo dagoen potentzialaren minimoaren balioa adierazten duen.

Bestalde, mintz esferiko bat sortzeak dakarren kostu energetikoa erabiliz ere formulatu dezakegu aurreko problema. Izan ere, instantoi-soluzioak ez du zertan aldatu behar sistema osoaren energia espazio lorentziarrean burbuila osatzen den momentuan; beraz, profil zuzenak ondorengo funtzioaren erroari dagokio:

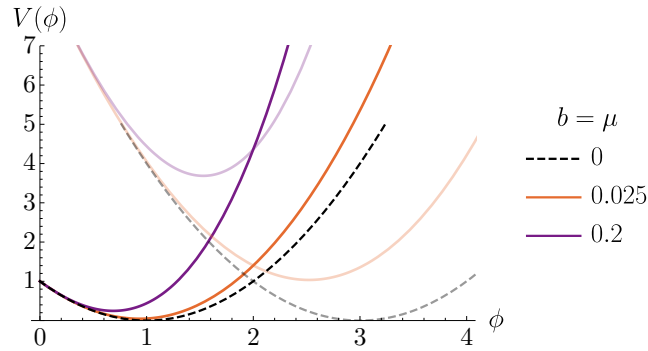
$$\Delta E = \int dV(T_{00} - V_{fv}) = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \left[K_{\phi\bar{\phi}} \left| \frac{d\phi}{dr} \right|^2 + V(\phi, \bar{\phi}) + 2|q\phi| \delta(r - R) - V_{fv} \right]_{t=0}. \quad (6.51)$$

Erraz ebaluatu dezakegu adierazpen hori espazio euklidearrean lortutako soluzioa erabiliz. Izan ere, 1. kapituluaren esan bezala, espazio lorentziarreko $t = 0$ momentuan sortzen den burbuilaren profila da espazio euklidearrean lortu dugun soluzioa.

Azkenik, mintzaren erradioa bere higidura-ekuazioa erabiliz ere finkatu dezakegu. Hain zuzen ere, (6.41) ekuazioko ekintzan mintz esferikoak duen ekarpena bere erradioarekiko muturtuz, ondorengo ekuazioa lortuko dugu:

$$\left[\frac{3|q\phi|}{R} + \partial_\rho |q\phi| + \frac{q}{2} (*F_4) \right]_{\rho=R} = 0 \quad (6.52)$$

non termino guztiak mintzaren posizioan ebaluatu behar diren. Heaviside funtzioa erregula-



6.3 irudia: Supersimetria hausten duten parametroen zenbait balioentzat ebaluatutako (6.54) potentzial eskalarra, non $n = 1$ eta $q = 2$ erabili ditugun. Kurba ilunak mintzaren barnealdeko ($\rho < R$) potentziala adierazten du, kurba argiak, aldiz, mintzaren kanpoaldekoa ($\rho > R$).

rizatzeko $\Theta(0) = 1/2$ erabili dugu; hortaz, ekuazio horren bigarren eta hirugarren terminoak horien mintzaren alde bakoitzeko batez bestekoak adierazten dituzte. Kontuan hartu irizpide hori bat datorrela Brown-Teitelboim prozesuan hartutakoarekin, non eremu-indarraren balioa mintzan bertan bi aldeetako batez bestekoarekin ebaluatzen den. Gure kasuan, (H.23) erabiliz, ondorengo izango dugu:

$$*F_4|_{\rho=R} = 2K^{\phi\bar{\phi}} \left(\text{Re}W_\phi - n - \frac{q}{2} \right)_{\rho=R}. \quad (6.53)$$

Nabarmentzekoa da (6.52) ekuazioak soilik ez duela inolako aurretiko informaziorik emango mintzaren erradioari buruz, azken hori eremu eskalarraren profilaren arabera izango baita, eta hori guztiz ezezaguna zaigu printzipioz. Horrenbestez, hainbat erradiotarako profilak lortu beharko ditugu lehenbizi eta horiekin B muturtu, ΔE -ren erroak bilatu edo (6.52) ekuazioa berretsi beharko dugu, mintzaren erradio zuzena lortzeko.

6.3.1 Adibidea: superpotentzial koadratikoa

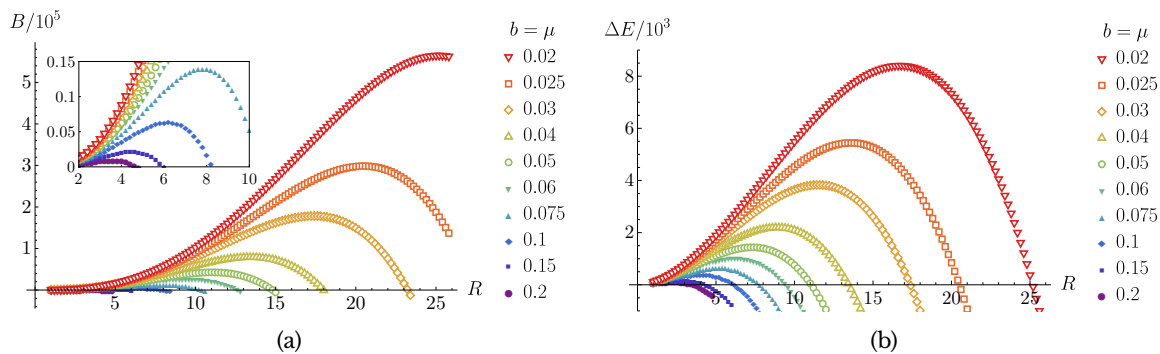
Aurreko prozedura argitzeko, (6.36) ekuazioan definitutako eredu supersimetrikoan aplikatu dugu, supersimetria samurki hausten duten parametroak kontuan hartuz. Kasu honetan, teoriaren potentzial eraginkorra

$$V(\phi, \bar{\phi}) = \left| \phi - (n + q\Theta(r - R)) \right|^2 + \mu^2 \phi \bar{\phi} + b(\phi^3 + \bar{\phi}^3) \quad (6.54)$$

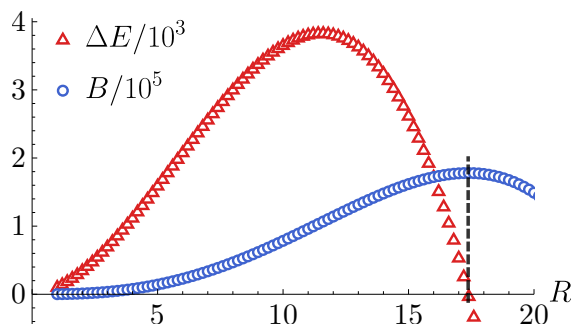
izango da, 6.3 irudian erakutsi duguna ϕ -ren zati errealaaren arabera. Berrito ere, ez dugu eremu eskalarraren zati irudikaria erabiliko, potentziala norabide horrekiko egonkorra baita.

Arestian esan bezala, instantoi-soluzioari dagokion mintzaren erradioa ezezaguna zaigu hasiera batean. Hortaz, b eta μ parametroen balio jakinentzat, hainbat R erradioei dagozkien eremu eskalarraren profilak kalkulatu eta goian deskribatutako hiru metodoak erabili ditugu (hots, erradioak B ekintza-diferentzia muturtu behar du, energia konstante mantendu behar du ($\Delta E = 0$) eta profilak (6.52) ekuazioa bete behar du) mintzaren erradio zuzena lortzeko.

Mintzaren zenbait R erradio eta b eta μ parametroen balio jakinentzat, motz/luze algoritmoa erabili dugu eremu eskalarraren zenbakizko profila lortzeko. Noski, hori kalkulatzeko



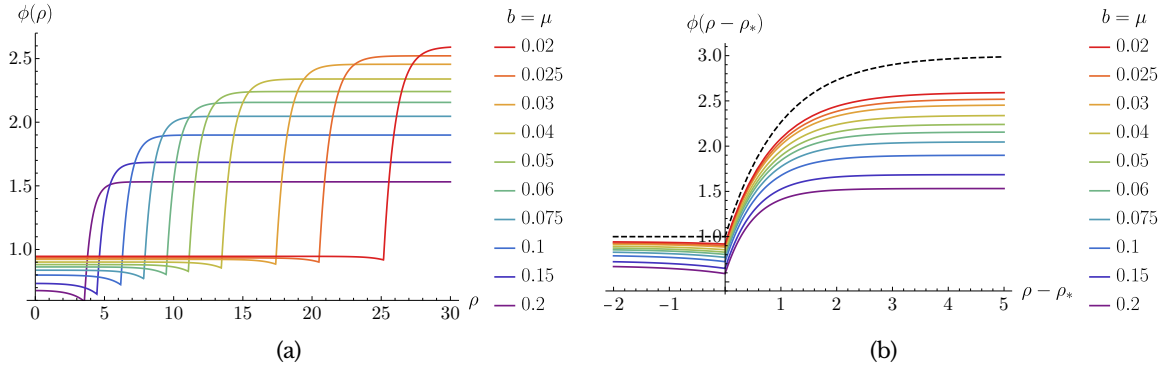
6.4 irudia: (a) Ekintza euklidearra eta (b) energia-diferentzia, (6.48) higidura-ekuazioaren soluzioentzat, non $n = 1$ eta $q = 2$ aukeratu ditugun, R , b eta μ -ren hainbat balioentzat. Ekintza euklidearraren maximoak ΔE -ren erroetan gertatzen dira, ikus 6.5 irudia.



6.5 irudia: Hainbat erradiorentzako energia eta ekintza euklidearraren diferentziak sasihutsaren egoerarekiko, $\mu = b = 0.03$ kasuan ebaluatuta. B -ren maximoa eta ΔE -ren erroa puntu beran gertatzen dira, espero bezala.

rakoan, aintzat hartu behar dugu $\rho = R$ puntuan eremuaren lehen deribatuak jasango duen jautzia, ikus (6.49) ekuazioa, eta mintza zeharkatzerakoan eremuaren eboluzioa deskribatzen duen potentziala aldatuko dela. Horrela lortutako profilak haustura-parametro tupla bakoitzari dagokion mintz-erradioa kalkulatzeko erabili ditugu. Gure emaitzak 6.4 irudian jaso ditugu. Hasteko, 6.4(a) irudian, argi ikus daiteke B ekintza euklidearraren maximoa R -ren balio geroz eta handiagotan ematen dela supersimetriaren haustura-parametroak txikitu ahala, arestian aurreikusi dugun bezala. Profila sortzerakoan gertatzen den energia-ren aldaketa ere kalkulatu dugu, ikus 6.4(b) irudia. Kasu guztietan ekintza euklidearraren maximoa eta energia aldaketaren erroak erradio berdinetan ematen direla berretsi dugu, ikus 6.5 irudiko adibide esplizitua.

Ekintza euklidearra muturtzen dituzten (eta bestelako baldintza baliokideak betetzen dituzten) profilak 6.6(a) irudian erakutsi ditugu. Lehen aurreratu dugun bezala, supersimetriaren haustura-terminoak txikitu ahala, horrela sortutako mintzaren erradioa handituz joango da, eta eremu eskalarraren profila lehen lortutako BPS profilerantz joko du, 6.6(b) irudian ikus daitekeen bezala. Soluzio horien ezaugarri berezia zera dugu: profil horiek $-V$ potentzian mugitzen den partikula baten ibilbidetzat joz gero, hasiera batean sasihutsetik alde egiten dutela diruditela, ondoren $r > R$ eskualdeko potentzian proiektatzerakoan izango duten abiadura nahikoa izan dadin sasihutsera asintotikoki iristeko.



6.6 irudia: (a) Ekintza euklidearraren maximoei dagozkien eremu eskalarraren profilak, zenbait supersimetria-ren haustura-parametrorentzat. (b) Aurreko profil berak, bakoitzari dagokion mintz-erradioaren inguruan marrazturik. Kurba marratuak (6.39) ekuazioko BPS soluzioa adierazten du, $n = 1$ eta $q = 2$ izanda. Argi dago azken hori profil esferikoen joera asintotikoa adierazten duela b eta μ parametroak zerorantz jotzen dutenean.

6.4 Mintz lauak eta domeinu-paretak Supergrabitatean

Aurreko sekzioko sistema berdina ikertuko dugu, grabitatea kontuan hartuta oraingo honetan. Zehazki, eremu kiralez osatutako $\mathcal{N} = 1$, $D = 4$ Supergrabitatearen markoan landuko ditugu adierazpen guztiak. Horretarako, lehenik eta behin, mintz lauez, fluxuez eta eremu eskalarrez osatutako sistema supersimetriko grabitazionalak ikertuko ditugu espazio lorentziarrean.

Kasu ez-grabitazionalen bezala, hauxe izango da erabiliko dugun ekintza:

$$S = S_{\text{bulk}} + S_{\text{mintza}} + S_{\text{mugalde term.}} \quad (6.55)$$

Alde batetik, H eranskinean azaldu dugun bezala, mintzetik kanpoko sistemaren ekintza, eremu eskalarrak eta fluxuak era supersimetrikoan barneratzen dituen, hauxe dugu:⁵

$$S_{\text{bulk}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} R - K_{\phi\bar{\phi}} \partial_\mu \phi \partial^\mu \bar{\phi} - \frac{1}{3} e^{-K} (M + K_{\bar{\phi}} \bar{\mathcal{F}}) (\bar{M} + K_\phi \mathcal{F}) - M \bar{W} - \bar{M} W \right. \\ \left. + e^{-K} K_{\phi\bar{\phi}} \mathcal{F} \bar{\mathcal{F}} + \mathcal{F} W_\phi + \bar{\mathcal{F}} \bar{W}_{\bar{\phi}} \right] \quad (6.56)$$

non

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} (D_\mu C^\mu + id) + \frac{2}{3} \bar{\phi} M + \frac{1}{3} \phi \bar{M}. \quad (6.57)$$

definitu dugun eta $M_{\text{Pl}} = 1$ araberako unitate naturalak erabiltzen ari garen. Aurreko ekuazioetan, R Ricci eskalarra da, M eremu laguntzaile eskalar konplexua da (supergrabitatemultipletearen osagaia dena), d eremu eskalar laguntzaile erreala da eta C^μ sistema honen hiru-formaren Hodge duala dugu. Kasu ez-grabitazionalen bezala, ekintza horri mugalde termino batzuk gehitu beharko dizkiogu forma-eremuarekiko bariazioak ondo definiturik

⁵Ekintzaren eremu-birdefinizioekiko aldaezintasuna esplizituki idatz daiteke sistema orokorragoetan, ikus [258, 259].

egon daitezzen. Horiez gain, mugalde-terminoek Gibbons-Hawking mugalde-terminoa ere barneratuko dituzte, metrikarekiko bariazioak ondo definituta egon daitezzen [268].

Mintz lauaren kasuan, mintzaren ekintza idatzi dezakegu sistema osoaren supersimetriaren frakzio bat hautsi ez dadin bermatuz. Hauxe dugu mintzaren ekarpena sistema grabitazional osoaren ekintzan:

$$\begin{aligned} S_{\text{mintz}} &= - \int_{\mathcal{M}} d^3\xi \sqrt{-h} 2e^{K/2} |q\phi| + \frac{q}{3!} \int_{\mathcal{M}} d^3\xi A_{\mu\nu\rho} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^b} \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^c} \epsilon^{abc} \\ &= - \int d^4x \sqrt{-g} [-2e^{K/2} |q\phi| J(x) + qA^\mu J_\mu(x)] \end{aligned} \quad (6.58)$$

non $J(x)$ eta $J_\mu(x)$ funtzioak (6.28) adierazpenean definitu ditugun. Nabarmentzekoa da Nambu-Goto terminoak ekarpen esponentzial berri bat dakarrela, Kähler potentzialaren araberakoa dena.⁶

Forma-eremuen eta eremu laguntzaileen higadura-ekuazioak erabiliz eta mugalde-terminoen ekarpen ez-arbuiagarria kontuan hartuta, eremu eskalarraren araberako sistemaren ekintza ondorengoa da [260]:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2} - K_{\phi\bar{\phi}} \partial_\mu \phi \partial^\mu \bar{\phi} - V(\phi, \bar{\phi}) - 2 e^{K/2} |q\phi| J(x) \right] + S_{\text{GH}} \quad (6.59)$$

non S_{GH} Gibbons-Hawking mugalde-terminoa adierazten duen eta $V(\phi, \bar{\phi})$ ohiko $\mathcal{N} = 1$, $D = 4$ supergrabitatearen potentzial eskalarra adierazten duen:

$$V(\phi, \bar{\phi}) = e^K \left[D_\phi \hat{W} K^{\phi\bar{\phi}} D_{\bar{\phi}} \hat{W} - 3|\hat{W}|^2 \right]. \quad (6.60)$$

Deribatu Kähler kobariantea dugu $D_\phi = \partial_\phi + K_\phi$, eta potentziala ondorengo superpotentzial eraginkorraren arabera idatzi dugu

$$\hat{W} = W - (n + qH(x))\phi. \quad (6.61)$$

non, kasu ez-grabitazionalean bezala, $J_\mu = \partial_\mu H$ definitu dugun. Horren arabera, $z = 0$ puntuan dagoen eta z ardatzarekiko perpendikularra den mintz lau baterako $H(x) = \Theta(z)$ izango dugu. Horrenbestez, ohiko materiari akoplatutako Supergrabitatearen ekintza lortu dugu, hiru-formen eraginez sortutako superpotentzial eraginkor berri baten mende. Potentzial eskalarra ezberdina izango da mintzaren alde bakoitzean eta, beraz, potentzial ezberdinen minimo supersimetrikoen artean interpolatzen duen profil eskalarra kalkulatu ahal izango dugu.

Has gaitezten bi minimo supersimetrikoen arteko interpolazioa bideratzen duen mintz lauaren kasua aztertuz. Mintz hori $z = 0$ puntuan dagoela suposatuko dugu. Mintza zeharkatzen duen eremu eskalarraren profila kalkulatu ahal izateko, ondorengo metrika-ansatza

⁶Hain zuzen ere, $e^{K/2}$ faktorea super-Weyl berreskalamenduen ondorio zuzena da, ekintza Einstein-markoan idatzi ahal izateko aplikatu behar direnak. Ikus H eranskina xehetasun gehiagorako.

erabiliko dugu:⁷

$$ds^2 = e^{2D(z)}(-dt^2 + dx^2 + dy^2) + dz^2, \quad (6.62)$$

hortaz, $\sqrt{-g} = e^{3D(z)}$ izango da. Ereku eskalarrari dagokion higidura-ekuazioa hau da:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}K_{\phi\bar{\phi}}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi\right) = K_{\phi\bar{\phi}}\partial_\mu\phi\partial^\mu\bar{\phi} + \frac{\partial V}{\partial\bar{\phi}} + e^{K/2}\left[K_{\bar{\phi}}|q\phi| + qe^{i\eta}\right]\delta(z). \quad (6.63)$$

non $e^{i\eta} = \frac{q\phi}{|q\phi|}$ definitu dugun. Ereku eskalarra mintzaren norabide perpendikularrarekiko mendekotasuna duela soilik asumituz, hots, $\phi = \phi(z)$, aurreko adierazpena horrela sinplifikatu dezakegu:

$$\partial_z(K_{\phi\bar{\phi}}\partial_z\phi) + 3K_{\phi\bar{\phi}}\partial_zD\partial_z\phi = K_{\phi\bar{\phi}}|\partial_z\phi|^2 + \frac{\partial V}{\partial\bar{\phi}} + e^{K/2}\left[K_{\bar{\phi}}|q\phi| + qe^{i\eta}\right]\delta(z). \quad (6.64)$$

Bestalde, metrikari dagozkion Einsteinen ekuazioak konbinatuz, ondorengo adierazpen baliagarria lortuko dugu:

$$\partial_z^2D + 3(\partial_zD)^2 = -V - e^{K/2}|q\phi|\delta(z). \quad (6.65)$$

Kontuan izan $z = 0$ puntuko Dirac-en deltek eremu eskalarraren eta metrikaren D eskala-faktorearen lehen deribatuetan jauziak sortuko dituztela.

Domeinu-pareta estatiko eta supersimetrikoa bi minimo ez-endeatuen artean gerta daiteke, bi hutsen arteko potentzialen diferentzia ekarpen grabitazionalak konpentsatu dezakeelako [247]. Horrela sortutako profilean zehar supersimetriaren frakzio bat gordez gero, minimoak Minkowski edo AdS hutsak izango dira (kontuan izan, hala ere, sistema grabitazionala ezin daitekeela eman bi Minkowski hutsen arteko domeinu-pareta supersimetrikoa [247]).

Ohar horiek gogoan, hauexek dira sistema horren BPS ekuazioak [247, 259, 260]:

$$\phi'(z) = \mp e^{K/2}e^{i\arg(\hat{W})}K^{\bar{\phi}\phi}D_{\bar{\phi}}\hat{W} \quad (6.66)$$

$$D'(z) = \pm e^{K/2}|\hat{W}| \quad (6.67)$$

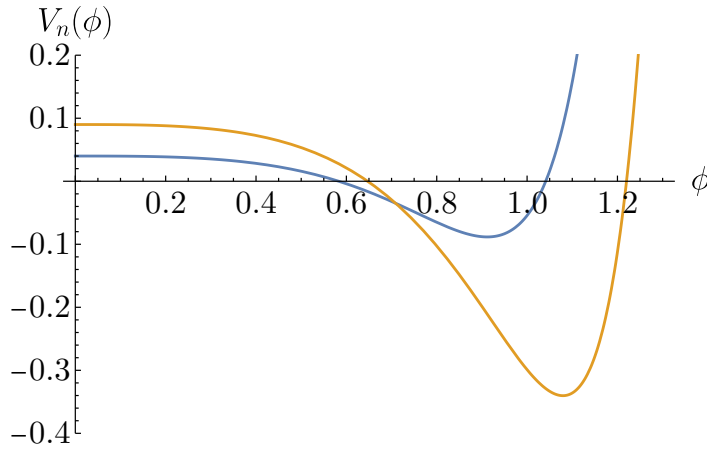
non primek z -rekiko deribatuak adierazten dituzten eta bigarren ekuazioa (6.65) adierazpenaren lehen integrala den. Bestalde, ϕ -ren zati errealarekiko fisika besterik ez deskribatu nahiz gero, $e^{i\arg(\hat{W})} \rightarrow \text{sign}(\hat{W})$ izango dugu. Ekuazio horiek laburki idatz daitezke

$$\mathcal{Z} \equiv e^{K/2}\hat{W} \quad (6.68)$$

funtzioaren arabera, hain zuzen ere, potentzial eskalarren puntu kritiko supersimetrikoetan $V_{\text{susy}} = -3|\mathcal{Z}|^2$ izango dugu. Beraz, \mathcal{Z} -ren araberrako BPS ekuazioak hauexek dira:

$$\phi'(z) = \mp 2K^{\bar{\phi}\phi}\partial_{\bar{\phi}}|\mathcal{Z}| \quad (6.69)$$

⁷Kontuan izan metrika horrek $\sqrt{-h} = \sqrt{-g}$ beteko duela, faktore guztiak $z = 0$ hipergainazalean ebaluatzerakoan.



6.7 irudia: Atal honetan deskribatutako potentzial eskalarra, alegia, (6.71) adierazpeneko Kähler potentzialak eta superpotentzialak sortzen dutena. Kurba urdinak $n = 2$ osoko fluxuari dagokio, laranja, aldiz, $n = 3$ fluxuari.

$$D'(z) = \pm |\mathcal{Z}| \quad (6.70)$$

Ekuazioak ebazteko erabili beharreko zeinua erraz identifikatu dezakegu ekuazio horiek erabiliz. Lehenik eta behin, gogoan izan behar dugu mintzaren \mathcal{T} tentsioa positiboa denez, D eskala-faktorearen bigarren deribatua mintza zeharkatzerakoan betiere negatiboa izan beharko duela (ikus, adibidez, [269]). Argi dago, beraz, mintzaren inguruko $|\mathcal{Z}|$ -ren joerak zeinu zuzena definituko duela BPS ekuazioetan. Hori ez ezik, \mathcal{Z} -ren definizioa erabiliz, funtzio horrek errorik ez baldin badu, z ardatzarekiko beti funtzio monotono gorakorra edo berakorra izango dela frogatu daiteke [260]. Alegia, $|\mathcal{Z}|_{-\infty} < |\mathcal{Z}|_{+\infty}$ baldin badugu, beheko zeinua erabili beharko dugu (D' -k beheranzko jauzia paira dezan mintza zeharkatzerakoan). Bestela, goiko zeinua erabili beharko dugu. Azkenik $|\mathcal{Z}|$ -k nonbait erroren bat baldin badu, puntu horretatik aurrera BPS ekuazioen zeinua aldatu beharko dugu. Ekuazio horien inguruko xehetasun gehiagorako, ikus adibidez [247, 260].

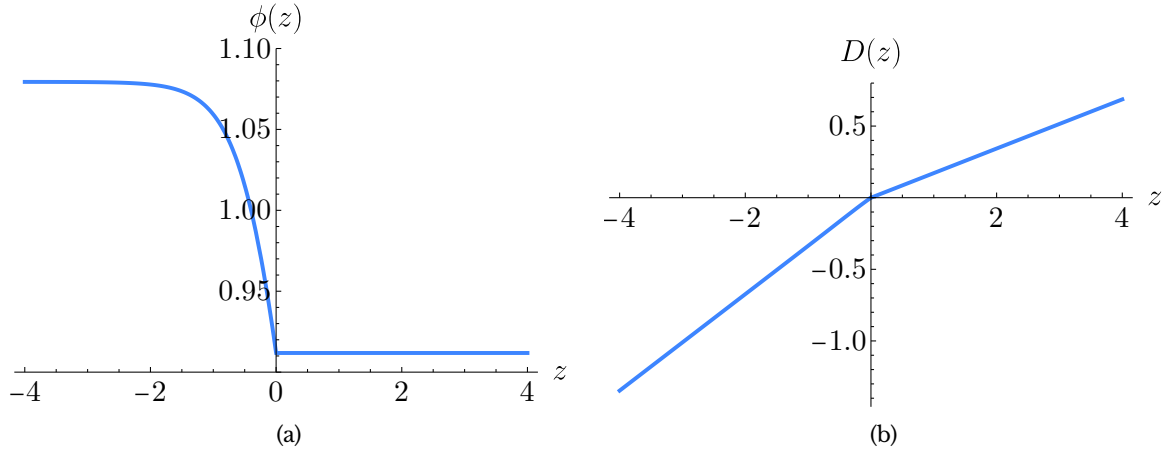
6.4.1 Adibidea: superpotentzial kuartikoa

Ondorengo ereduaren minimo supersimetrikoen arteko interpolazioa den eremu eskalarra-ren profila lortzeko erabili ditzakegu aurreko ekuazioak:⁸

$$K(\phi, \bar{\phi}) = \phi \bar{\phi} - \ln(100) M_{\text{Pl}}^2, \quad W(\phi) = M_{\text{Pl}}^{-1} \phi^4, \quad (6.71)$$

non Plancken masa esplizituki adierazi dugun, funtzio bakoitzaren energia-eskala zehazki espresatzeko. Hartara, $M_{\text{Pl}} = 1$ berrezarrituz, Kähler potentzial eta superpotentzial hori definitzen duten teoriaren potentzial eskalarra 6.7 irudian marraztu dugu, behin 3-forma

⁸Kähler potentzialari konstante bat gehituz gero, $K \rightarrow K + K_0$, potentzial eskalarra berreskalatu dezakegu, hots, $V \rightarrow e^{K_0} V$. Horrez gain, [260] artikuluan frogatutakoaren arabera, luzera-eskalak berreskalatuz, $\chi \rightarrow e^{-K_0/2} \chi$, ekintza supersimetrikoa ere berreskalatuko da, $S \rightarrow e^{-K_0} S$. Supersimetria hausten duen μ terminoa ez nulua izanez gero, hori ere berreskalatu beharko dugu, $\mu \rightarrow e^{K_0/2} \mu$, ekintza homogeneouski transformatu dadin. Berreskalatzea ahalik eta sinpleena izan dadin, Kähler potentzialaren konstante berezi samar hori erabili dugu. Horri esker Nambu-Goto tentsioa eta energia-dentsitatea azpiplanckearrak egin ahal izan ditugu.



6.8 irudia: BPS ekuazioen soluzioa, (a) eremu eskalarrarentzat eta (b) eskala-faktorearentzat, (6.71) adierazpe-nean emandako ereduan eta (6.62) metrikaren ansatza erabiliz. Kasu honetan, $z < 0$ eskualdeko potentzialaren fluxua $n = 3$ da, eta $z > 0$ eskualdekoa, aldiz, $n = 2$; hortaz, mintzaren karga $q = -1$ izango da.

sistemaren ekintzatik integratu dugula. Adar bakoitzeko minimoa supersimetrikoa dela baieztatu dugu, alegia, bi hutsek $D_\phi W = 0$ baldintza betetzen dute.

Potentzial horri dagozkion zenbakizko BPS profilak eremu eskalarrarentzat eta $D(z)$ eskala-faktorearentzat 6.8 irudian marraztu ditugu, non minimo baxuena mintzetik ezkerredera plazaratu dugun (beherago lortuko ditugun emaitzekin errazago alderatzeko). Gainera, profil horiek bigarren ordenako higadura-ekuazioak, hots, (6.64) eta (6.65), betetzen dituztela berretsi dugu. Kontuan izan azken horiek esplizituki barneratzen dituztela lehen deribatuen jauziak Dirac-en delten bidez.

6.5 Mintzen nukleazioa Supergrabitatean

Atal honetan, aurreko formalismoa mintz esferikoetara orokortuko dugu, kapitulu honen lehen zatian egin dugun bezala. Ohiko Coleman-deLuccia mekanismoa jarraituz, espazio euklidearrera joko dugu. Sistema osoaren $O(4)$ simetria asumituz, hauxe da erabiliko dugun metrika:

$$ds^2 = d\chi^2 + \rho(\chi)^2 d\Omega_3^2, \quad d\Omega_3 = d\varphi_1^2 + \sin^2 \varphi_1 d\varphi_2^2 + \sin^2 \varphi_1 \sin^2 \varphi_2 d\varphi_3^2 \quad (6.72)$$

Jakina, mintz esferikoen bidez deskribatutako soluzioak mintz lauak bezalakoak izatera jo beharko dutela espero dugu, burbuilaren erradioa handitzen den heinean.

Gure sistemaren ekintza euklidearra

$$S_E = S_{\text{bulk},E} + S_{\text{mintz},E} + S_{\text{samur},E} + S_{\text{muga},E} \quad (6.73)$$

da, non $S_{\text{bulk},E}$, $S_{\text{samur},E}$ eta $S_{\text{muga},E}$ terminoek mintzetik kanpoko sistemaren, supersimetria samurki hausten duten terminoen eta mugalde terminoen ekintza euklidearrak adierazten dituzten; guzti horiek zuzenean lor ditzakegu aurreko ataletako pausoak jarraituz. Bestalde,

mintz esferikoaren ekintza euklidearra ondorengoa da:

$$S_{\text{mintz,E}} = 2\pi^2 \int d\chi \rho(\chi)^3 [2e^{K/2}|q\phi| + qA^\rho] \delta(\chi - R) \quad (6.74)$$

Hortaz, koordenatu erradial finko baten bidez adieraziko dugu mintzaren erradioa.

Forma-eremuak integratuz, (6.45) ekintzaren baliokide grabitazionala lortuko dugu:

$$S_E = \int d^4x \sqrt{g} \left[-\frac{R}{2} + K_{\phi\bar{\phi}} g^{ab} \partial_a \phi \partial_b \bar{\phi} + \tilde{V}(\phi, \bar{\phi}) \right] + 2 \int_{\mathcal{M}} d^3\xi \sqrt{h} e^{K/2} |q\phi| + S_{\text{GH}} \quad (6.75)$$

non⁹

$$\tilde{V} = e^K \left(K^{\phi\bar{\phi}} |D_\phi \hat{W}|^2 - 3 |\hat{W}|^2 \right) + \mu^2 \phi \bar{\phi}, \quad \hat{W} \equiv W - (n + q\Theta(r - R))\phi. \quad (6.76)$$

Aurrerago ikusiko dugun bezala, Gibbons-Hawking mugalde-terminoa oso garrantzitsua izango da ekintza euklidearraren zenbakizko balioa lortu nahi dugunean.

Kasu ez-grabitazionalan bezala, supersimetria hausten duten parametroen arabera aztertuko dugu sasihutsaren iraungitzea. Horrela, mintz lauaren kasua sistema honen limite supersimetrikotzat jo ahal izango dugu.

Eremu eskalarrari dagokion higidura-ekuazioa (6.75) ekintza $\bar{\phi}$ -rekiko muturtuz lor dezakegu. Hartara, $\phi = \phi(\chi)$ suposatuz, hauxe lortuko dugu:

$$\partial_\chi \left(K_{\phi\bar{\phi}} \partial_\chi \phi \right) + \frac{3}{\rho} \frac{\partial_\chi \rho}{\rho} K_{\phi\bar{\phi}} \partial_\chi \phi = K_{\phi\bar{\phi}\bar{\phi}} |\partial_\chi \phi|^2 + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \bar{\phi}} + e^{K/2} \left[K_{\bar{\phi}} |q\phi| + qe^{i\eta} \right] \delta(\chi - R). \quad (6.77)$$

Eremu eskalarraren termino zinetikoa kanonikoa baldin bada, hots, $K(\phi, \bar{\phi}) = \phi \bar{\phi}$ izanez gero, aurreko ekuazioa sinplifikatu dezakegu:

$$\phi'' + \frac{3\rho'}{\rho} \phi' = \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \bar{\phi}} + e^{|\phi|^2/2} \left[\phi |q\phi| + qe^{i\eta} \right] \delta(\chi - R). \quad (6.78)$$

non primek χ koordenatu erradialarekiko deribatuak adierazten dituzten. Kontuan izan aurreko ekuazio hori ohiko Coleman-deLuccia trantsizioetan ebatzi behar dugunaren parekoa dela. Jakina, kasu honetan eremua konplexua izango da eta mintzak sortutako azken terminoa aintzat hartu beharko dugu.

Bestalde, eskala-faktorearen higidura-ekuazioak lor ditzakegu (6.75) ekintza $g^{\mu\nu}$ -rekiko muturtuz. Izan ere, Ricci eskalarra eta Ricci tentsorearen zenbait osagai ondorengoak direla jakinda:

$$R = -\frac{6}{\rho^2} (-1 + (\rho')^2 + \rho\rho''), \quad R_{\chi\chi} = -\frac{3\rho''}{\rho}, \quad R_{\varphi_1\varphi_1} = 2 - 2(\rho')^2 - \rho\rho'', \quad (6.79)$$

⁹ Simetria-haustura termino kubikoa ez dugu erabili oraingo honetan sistema ahalik eta sinpleki aztertzeko. Lehen horren eragina (hemen erabiliko ditugun adibideetan, behintzat) eta termino koadratikoak sortzen duena berdintsua da.

Einsteinen ekuazioaren $\chi\chi$ osagaia hauxe dugu:

$$(\rho')^2 = 1 + \frac{\rho^2}{3} \left(K_{\phi\bar{\phi}} |\phi'|^2 - \tilde{V} \right), \quad (6.80)$$

eta $\varphi_1\varphi_1$ osagaiari dagokiona, bestalde,

$$2\rho\rho'' + (\rho')^2 - 1 = -\rho^2 \left(\tilde{V} + K_{\phi\bar{\phi}} |\phi'|^2 \right) - 2\rho^2 e^{K/2} |q\phi| \delta(\chi - R) \quad (6.81)$$

izango da. Bi ekuazio horiek horrela konbinatu ditzakegu:

$$\rho'' = -\frac{1}{3}\rho \left(2K_{\phi\bar{\phi}} |\phi'|^2 + \tilde{V} \right) - \rho e^{K/2} |q\phi| \delta(\chi - R). \quad (6.82)$$

Azken adierazpen hori zenbakizko metodoak inplementatzeko erabilgarriagoa da, ekuazioa bera egonkorragoa baita. Nabarmentzekoa da $\chi = R$ puntuan ebaluatu beharreko Dirac-en deltek ϕ eta ρ funtzioen lehenengo deribatuetan jauziak sortuko dituztela, mintz lauaren kasuan bezala.

Azkenik, sistemaren R erradioa parametro askea dela azpimarratu behar dugu. Horrenbestez, kasu ez-grabitazionalean bezala, hori finkatzeko metodoren bat erabili beharko dugu. Hartara, R -ren zenbait baliotarako ebatzi beharko ditugu ekuazio guztiak, eta horietatik (6.75) ekintza euklidearra zeinek muturtzen duen ikusi beharko dugu. Hori ez ezik, ekintza euklidearra R -rekiko bariatuetan dezakegu higidura-ekuazio berri bat lortzeko. Hori eginez, ondorengoa lortuko dugu:

$$\left[3e^{K/2} |q\phi| \frac{\partial \chi \rho}{\rho} + \partial_\rho (e^{K/2} |q\phi|) + \frac{q}{2} (*F_4) \right]_{\chi=R} = 0 \quad (6.83)$$

non, kasu ez-grabitazionalean bezala, mintzean zehar jarraituak ez diren funtzio guztiak euren bi aldeetan batez bestekoak erabiliz ebaluatu behar diren. Adibidez, $*F_4$ -ren soluzioa (H.64) ekuazioan emandakoa izango da; jakina, mintzaren alde bakoitzean fluxuak ezberdinak direnez, $n + q\Theta(r - R)$ izango dugulako, bi aldeetan batez bestekoa aplikatu beharko dugu.

6.5.1 Adibidea: superpotentzial kuartikoa

Azpiatal honetan arestian deskribatutako makineria aplikatuko dugu (6.71) adierazpenean emandako eremuan. Gainera, μ parametroarekiko iraungitzeak aztertzeko, espazio euklidearraren geometriaren topologia kontuan izan beharko dugu, sasihutsaren potentzialaren zeinuaren arabera dena. Alegia, $V_{fv} < 0$ kasuan, sistemaren hondoa AdS espazio euklidear ez-trinkoa izango da; $V_{fv} = 0$ izanez gero, sasihutsaren geometria minkowskian izango da (AdS kasuaren limite lautzat jo daitekeena); azkenik, $V_{fv} > 0$ baldintzak dS hondo euklidear trinkoa adieraziko du [72].

Ondorengo adibide guztietan zenbakizko motz/luze algoritmoa erabili dugu, eremu eskalarraren hasierako baldintza aproposa lortzeko. Kontuan izan, bestalde, higidura-ekuazioak tinkoak izan daitezela $\rho(\chi) = \chi + \mathcal{O}(\chi^3)$ izan beharko dugula [72], beraz, ρ -ren hasierako baldintzak ez ditugu inola ere doitu behar.

AdS/Minkowski \rightarrow *AdS trantsizioak*

Lehen esan bezala, horrelako iraugitzeak espazio ez-trinko batean gertatuko dira. Hortaz, ekintza euklidearraren integrala orokorrean dibergentea izango da:

$$\begin{aligned} S_E &= 2\pi^2 \int_0^\infty d\chi \left[\rho^3 \left(|\phi'|^2 + \tilde{V}(\phi, \bar{\phi}) \right) + 3(\rho^2 \rho'' + \rho(\rho')^2 - \rho) \right] + 4\pi^2 [\rho^3 e^{K/2} |q\phi|]_{\chi=R} + S_{\text{GH}} \\ &= 2\pi^2 \int_0^\infty d\chi \left[\rho^3 \left(|\phi'|^2 + \tilde{V}(\phi, \bar{\phi}) \right) - 3(\rho(\rho')^2 + \rho) \right] + 4\pi^2 [\rho^3 e^{K/2} |q\phi|]_{\chi=R} \end{aligned} \quad (6.84)$$

non, azken pausoen, GH terminoaren kontribuzioa erabili dugun integrala zertxobait sinplifikatzeko (ikus [72, 270]). Bestalde, sasihutsaren hondoari dagokion integrala ere dibergentea izango da:

$$S_{E,\text{bg}} = 2\pi^2 \int_0^\infty d\chi \left[\rho_{\text{fv}}^3 V_{\text{fv}} - 3(\rho_{\text{fv}}(\rho'_{\text{fv}})^2 + \rho_{\text{fv}}) \right], \quad (6.85)$$

non

$$\rho_{\text{fv}}(\chi) = \sqrt{\frac{3}{-V_{\text{fv}}}} \sinh \left(\frac{\chi}{\sqrt{\frac{3}{-V_{\text{fv}}}}} \right) \quad (6.86)$$

zuzenean lor daitekeen potentzial konstante eta negatibo bat erabiliz, $V_{\text{fv}} < 0$, (6.80) ekuazioan. Bestalde, sasihutsa minkowskian izanez gero,

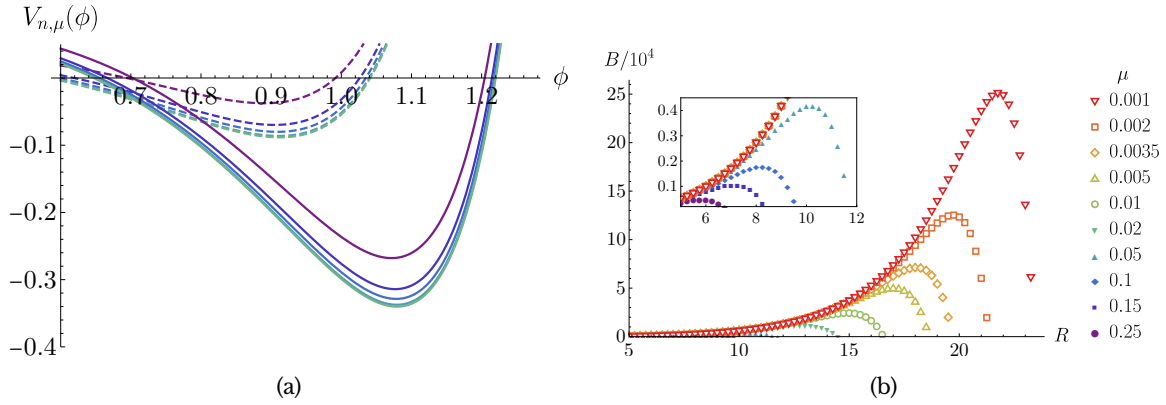
$$\rho_{\text{fv}}(\chi) = \chi, \quad (6.87)$$

integral horiek dibergenteak izango dira berriro ere. Aitzitik, fisikoki garrantzitsua den kantitatea, hots, bi ekintzen arteko diferentzia (sasihutsa gertatzearen probabilitatearekin zerikusia duena) finitua izango da.

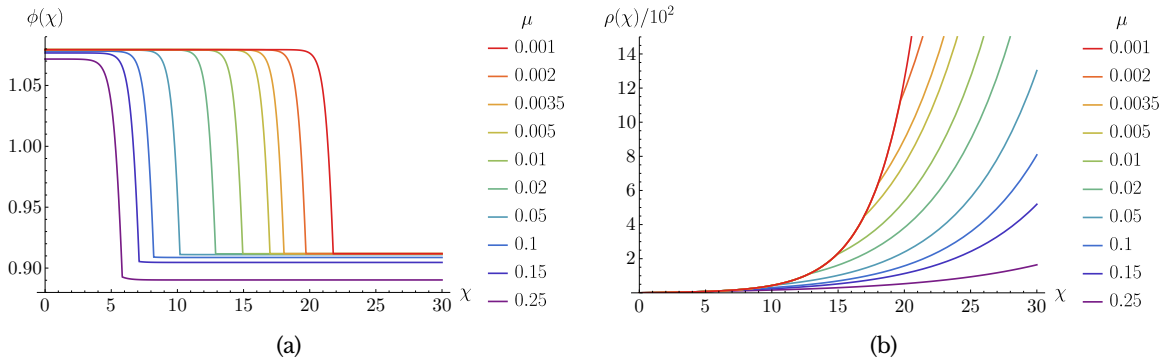
Diferentzia hori zenbakizko metodoen bidez lortzeko, bi integral horiek ρ_{max} limite bateraino kalkulatu ditugu, non ρ_{max} -i dagokion koordinatu erradialak $\chi_{\text{max}} \gg R$ betetzen duen; ikus [270] artikulua xehetasun gehiagorako eta diferentzia horren konbergentziaren frogarako.

Hainbat mintz-erradiorentzat eta supersimetriaren haustura-parametrorentzat kalkulatu dugu ekintzen diferentzia hori, ikus 6.9 irudia. Argi dago diferentzia hori finitua dela eta R jakin batean maximo bat jotzen duela, azken hori μ -ren arabera izanik. Gainera, potentzialak bere limite supersimetrikoruntz jo ahala, mintzaren erradioa handituz doala ikus dezakegu, itxaron bezala.

Eremu eskalarraren eta eskala-faktorearen instantoi-profilak 6.10 irudian erakutsi ditugu zenbait μ -ren balioentzat. Eremuaren profil guztiak nahiko berdintsuak dira euren artean, horietan aldatzen den ezaugarri bakarra sasihutsaren eta erabateko hutsaren posizioak izanik, eta baita jauzia gertatzen den erradioaren balioa. Bestalde, eskala-faktorean ere nahiko argi ikus dezakegu jauzia non gertatzen den; hori zeharkatu ondoren, AdS hondoaren espantsio esponentziala nahiko azkar ematen da. Orokorrean, profilak bat datoz pareta mehe batez osatutako profil eskalar batean espero dezakegunarekin. Hori ez ezik, 6.10 irudiko profil guztiek (6.83) higidura-ekuazioa betetzen dutela berretsi dugu.



6.9 irudia: (a) Atal honetan erabilitako potentzial eskalarra $n = 2$ (kurba marratua) eta $n = 3$ (kurba jarraitua) fluxuetarako. (b) Hainbat R eta μ parametroei dagozkien soluzioetan ebaluatutako ekintza euklidearra. Bi irudietan kolore berdinez marraztu ditugu μ jakin bakoitzari dagozkion potentziala eta ekintzak. Argi ikus daiteke bigarren irudian supersimetria hausten duen μ parametroa txikitu ahala ekintza muturtzen duen R erradioa handituz doala.



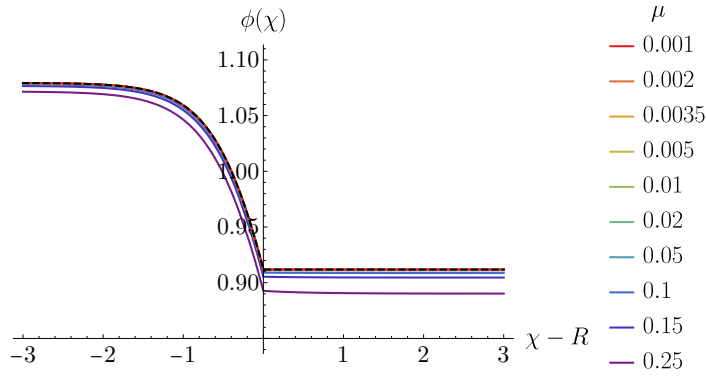
6.10 irudia: (a) Eremu eskalarraren eta (b) eskala faktorearen eboluzioa μ parametroaren arabera. Hemen erakutsitako profil guztiek 6.9 irudiko ekintza euklidearra muturtzen dute.

Aurreko profilak BPS kasuarekin konparatu ahal izateko, horiek mintzaren inguruan irudikatu ditugu 6.11 irudian. Funtsean, BPS profila eskalar eremuaren forma asintotikoa dela nabaritu dezakegu, hots, $\mu \rightarrow 0$ limitea kasu supersimetrikorantz jotzen du. Horrenbestez, gure emaitzak bat datoz kasu ez-grabitazionalen ikusi dugunarekin.

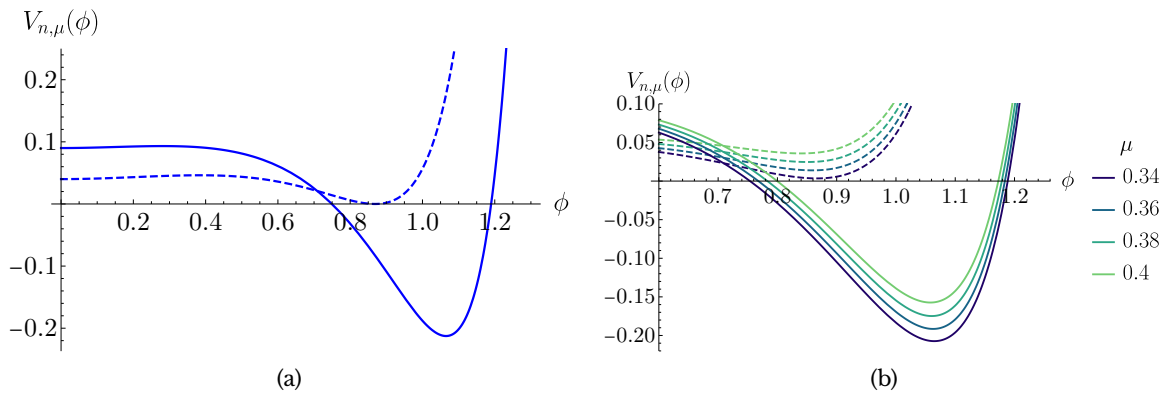
Supersimetria samurki hausten duen μ parametroa doituz, sasihuts minkowskiarra duen potentzial eskalarra aztertu ahal izan dugu, non $\mu = 0.33$ den, ikus 6.12(a) irudia. Gogoan izan Minkowski motako sasihutsak espazio euklidear ez-trinkoak direla, eta AdS hutsak aztertu ditugun modu berdintsuan landu beharko ditugula.

Kasu minkowskiar horretan, ekintza euklidearraren diferentzia zenbait erradiorentzat kalkulatu ondoren, hori maximizatzen duen mintz-erradioa $R = 5.2$ dela ikusi dugu. Mintz horri dagozkion profilak 6.13 irudian marraztu ditugu.

Azkenik, [249, 270] lanetan esplizituki frogatu den bezala, sasihuts minkowskiarretan energiaren kontserbazioa nolabait implementatu dezakegu kasu grabitazionalen ere, espazio lorentziarreko ADM masa nulua izan behar duela nabarituz. Gure kasuan, $\tau = 0$ hipergainazal espazialean kalkulatu dezakegu kantitate hori, ρ koordinatua espazio loren-



6.11 irudia: Eremu eskalarraren eboluzioa mintzaren inguruan, zenbait μ faktorerentzat (non R mintzaren koordinatu erradiala adierazten duen). BPS soluzioa marratutako kurba baten bidez adierazi dugu.



6.12 irudia: (a) Sasihuts minkowstarra duen potentzial eskalarra (non $\mu = 0.33$ den). (b) de Sitter sasihuts batez osatutako potentziala, zenbait μ supersimetria-haustura parametrorentzat.

tziarreko r koordinatu erradialarekin identifikatuz. Hauxe dugu, beraz, Minkowski espazioko mintz-nukleazioak bete beharreko baldintza:¹⁰

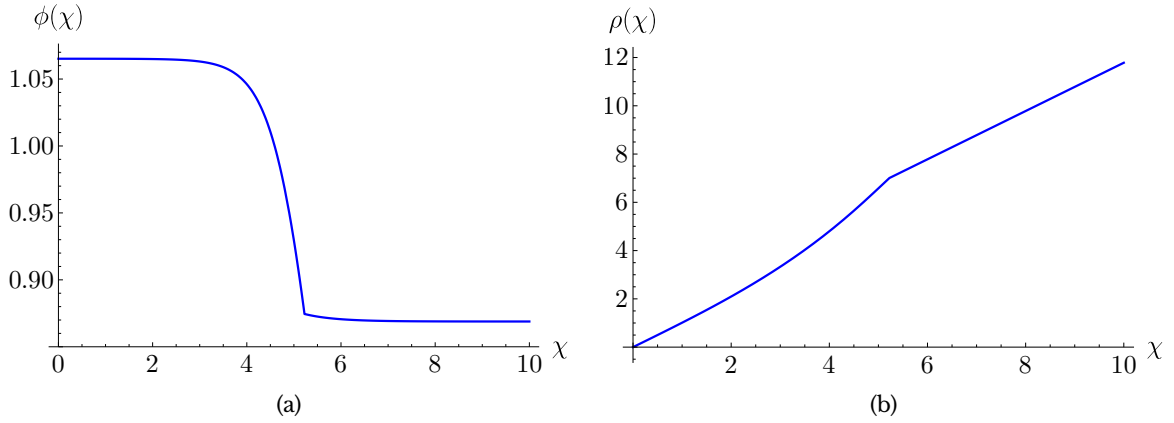
$$\int dV T_{00} = 4\pi \int d\rho \rho^2 T_{00} = 4\pi \int_0^\infty d\chi \rho' \rho^2 \left[|\phi'|^2 + \tilde{V} + 2|q\phi|e^{K/2} \delta(\xi - R) \right] = 0. \quad (6.88)$$

Baldintza hori betetzen dela berretsi dugu 6.13 irudiko profiletan.

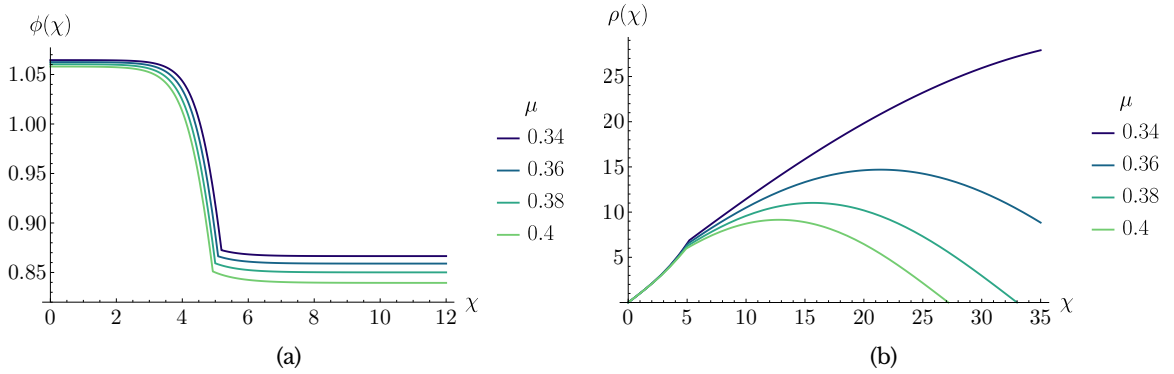
$dS \rightarrow AdS$ trantsizioak

Potentzial positiboa duen sasihutsa lortu dezakegu μ parametroa handi samarra eginez, erabateko hutsa $V < 0$ izaten jarraitzen duelarik. Aurreko kasuetan ez bezala, instantoi horien geometria trinkoak mugalde baldintzak inposatuko ditu bai koordinatu erradialaren jatorrian, bai horren balio maximoan (ikus, adibidez, [72]), non $\rho(0) = \rho(\chi_{\max}) = 0$ izango dugun. Jakina, (6.84) ekintza euklidearra χ_{\max} arte integratu beharko dugu soilik. Hain zuzen ere, potentzial positibo eta konstante batez osatutako hondoa, $V_{fv} > 0$, gure (6.72) ansatzaren

¹⁰Arestian esan bezala, $\rho'(R)$ mintzaren bi aldeetako batezbestekoa bezala jo behar dugu. Ebaluazio hori Heaviside funtzioan egin dugun erregularizazioaren ondorioa da.



6.13 irudia: Aurreko 6.12(a) irudiko potentzialari dagokion (a) eremu eskalarraren profila, eta (b) eskala-faktorea. Profil horiek ekintza euklidearraren diferentzia maximizatzen dutela baieztatu dugu.



6.14 irudia: Aurreko 6.12(b) irudiko potentzialei dagozkien $dS \rightarrow AdS$ iraukitzeen (a) eremu eskalarraren profila, eta (b) eskala-faktorea. Hemen erakutsi ditugun profil guztiek $\rho(\chi_{max}) = 0$ eta $\rho(\chi_{max}) = -1$ betetzen dituzte aldi berean.

arabera ondorengo eskala-faktorearen bidez deskribatu ahal izango dugu:

$$\rho_{fv} = \sqrt{\frac{3}{V_{fv}}} \sin\left(\frac{\chi}{\sqrt{\frac{3}{V_{fv}}}}\right), \quad \chi \in [0, \chi_{max}] \quad (6.89)$$

non χ_{max} balioak ρ_{fv} funtzioaren lehen erro positiboa adierazten duen. Horrez gain, hondoaren ekintza analitikoki lor dezakegu:

$$S_{bg} = -\frac{24\pi^2}{V_{fv}}. \quad (6.90)$$

Mota honetako instantoiak trinkoak izango direnez, eremu eskalarrean inposatu beharko ditugun mugalde-baldintza bakarrak $\phi'(0) = \phi'(\chi_{max}) = 0$ izango dira.¹¹ Bestalde, instantoiaren ekuazioak tinkoak izan daitezten, $\chi \rightarrow \chi_{max}$ limitean $\rho'(\chi) = -1 + \mathcal{O}((\chi - \chi_{max})^3)$ inposatu

¹¹ Gogoan izan espazioa bitan banatzen duela mintzak eta, horrenbestez, baldintza horiek potentzial eskalar ezberdinekiko definituta egongo direla (fluxua ezberdina delako mintzaren alde bakoitzean). Dena dela, bai $\phi(0)$ eta bai $\phi(\chi_{max})$ euren potentzialaren minimotik gertu egon beharko dira.

beharko dugu ere. Baldintza horiek hain murriztaileak dira, ezen μ -ren arabera potentzial bakoitzarentzat (ikus 6.12(b) irudia) higiduraren ekuazioak mintz *bakarrak* ebatzi ditzakeela.

Soluzio bakar bakoitzaren eremu eskalarraren profila eta eskala-faktorea 6.14 irudian marraztu ditugu. Jakina, 6.14(b) irudiko geometria guztiek $\rho'(\chi_{\max}) = -1$ betetzen dutela baieztatu dugu. Kasu guztietan, eskala-faktorearen eboluzioa AdS espazio euklidearrarena izango da $\chi = 0$ puntutik mintzaren erradiora arte, non geometria dS euklidearra izatera pasatzen den.¹²

6.6 Ondorioak

Kapitulu honetan Coleman-deLuccia [67, 69] eta Brown-Teitelboim [248, 249] formalismoak bateratzen dituen iraingitze mota berria aurkeztu dugu, eremu eskalarrez *eta* mintzez baliatzen dena, fluxu-trinkoketen fisikan oinarrituta. Hiru-forma bakarreko multipleteen formalismoa erreparatu dugu [258], non hiru-forma errealak eta eremu eskalarrak era supersimetrikoan bateratzen diren $\mathcal{N} = 1, D = 4$ teoria supersimetrikoetan eta supergrabitae-teorietan. Horrelako sistemak mintz lau supersimetrikoekin batera kontsideratu dira [260] lanean; bertan, osoko fluxuak erlazionatzen dituzten potentzial ezberdinen arteko trantsizioak eman daitezkeela frogatu izan da.

Supersimetria samurki hausten duten parametroak erabiliz, horrelako teorietan aplikazio kosmologiko oso interesgarriak izan ditzaketela frogatu dugu. Hain zuzen ere, termino horiek sasihutsen iraingitzea ahalbidetzen dute, mintzen nukleazioaren bidez. Metodo euklidearrak erabiliz aztertu ditugu horrelako sistemak, eta eremu eskalarrak, forma-eremuak eta mintzak bateratzen dituzten instantoi-soluzioak lortu ahal izan ditugu, bai grabitatea arbuizatu eta baita grabitatea kontuan hartuta ere. Hori ez ezik, soluzioek limite supersimetriko zuzenera jotzen dutela frogatu dugu supersimetriaren haustura-terminoak txikitu ahala. Horrenbestez, mintz lauaren kasua erradio infinituko instantoi-soluzioaren kasu asintotikoa dela frogatu dugu.

Gogoan izan, 1. kapituluaren ezaugarriak arabera, prozesu horiek oso interesgarriak direla ikuspuntu kosmologikotik [87], periodo inflazionarioa jasaten dituzten unibertsoak bezala jo ditzakegulako horrela sortutako burbuilak. Lan honetan aurkeztutako trantsizioak oso adibide sinpleak erabiliz deskribatu ditugu; haatik, fenomenologikoki interesgarriagoak diren emaitzak lor genitzake eredu errealistagoak erabiliz. Hemen ikeritutako trantsizioak, funtsean, Paisaian gerta litezkeen trantsizioen orokortzea adierazten dute, fluxu-potentziala sortzen dituzten hiru-formak eta mintzak erabiltzen dituztenak. Horren harira, lan nahiko berrien arabera [271], gure Unibertsoa kurbadura positiboko brana batean barneratuta egotea posiblea izango litzateke, baldin eta mintz hori sasihuts baten iraingitzearen ondorioz sortu baldin bada, dimentsio altuagoko teoria batean oinarrituta. Hemen aztertu ditugun ereduak lau dimentsioko ingurune batean landu ditugun arren, gure emaitzak dimentsio altuagoko espazio-denboratara orokortzea oso baliagarria izan liteke aurreko prozesu horien proposamenekin bateragarriak diren ala ez baieztatzeko.

Zenbakizko metodoen ikuspuntutik, hemen ebatzi ditugun adibideak nahiko sinpleak

¹²Kontuan izan hemen erakutsitako profilak zenbakizko problemaren instantoi-soluzio osoak direla, alegia, ez dugu pareta mehearen hurbilketa erabili profil horiek kalkulatzeko.

izan dira, eremu eskalar bakarria erabili behar izan baitugu. Horrelako ereduak erraz ebatz daitezke motz/luze argudioaren bidez, mintzen eta grabitatearen eragina kontuan izanda ere. Aitzitik, aurreko kapituluaren ikusi dugun bezala, bi eremu edo gehiago dituzten potentzialen iraukitzeak kalkulatzeko ez da batere erraza. Hortaz, oso erabilgarria izango litzateke sasihutsen iraukitzeak ebatz ditzaketen algoritmo berriak sortzea, mintzek sortzen dituzten lehen deribatuen saltoak barneratzen dituztenak, bai eremu eskalarentzat, bai eskala-faktorearentzat.

Jakina, superpotentzial zailagoak erabiltzeaz gain, hemen erabili ditugun adibideak bestela ere orokortu daitezke. Adibidez, oraingo honetan supersimetria samurki hautsi dugu, gure jatorrizko ekintzan zenbait parametro berri eskuz ipiniz, ikuspuntu fenomenologikotik nahiko interesgarriak baitira [264]. Hala eta guztiz ere, gogoan izan behar dugu hemen erabili dugun mintzaren tentsioa hasieratik doitu dugula mintz lauaren kasuan sistema osoaren supersimetriaren frakzio bat hautsi gabe mantendu dadin. Hortaz, hemen bideratu dugun analisia errepikatzea interesgarria izan liteke mintzaren bestelako Nambu-Goto terminoak erabiliz, supersimetria hausten duten parametroak erabili ordez.

Azkenik, hemen aztertu ditugun adibide guztietan, hiru-forma bakarreko multipleteak erabili ditugu, non eremu eskalar bakoitzeko hiru-forma erreal bat dugun (ikus H eranskina eta [258] artikulua). Hala eta guztiz ere, tesiaren II. zatian behin eta berriro esan dugun bezala, IIB motako trinkoketen fluxu-Paisaiak $2h^{1,2} + 2$ fluxu erreal behar ditu, non $h^{1,2}$ egitura konplexuaren moduluen kopurua adierazten duen. Beraz, trinkoketa horietako hiru-formez osatutako supergrabitate-teoria formulatu ahal izateko hiru-forma bikoitzeko multipleteetara jo beharko dugu. Horrelako sistemak [272] artikuluan landu izan dira, non ETEak bete behar dituen zenbait baldintza jaso diren, hutsen arteko trantsizioak mintz lauen bidez ematen direla suposatuz. Hortaz, baldintza horiek berrestea interesgarria izan daiteke hemen aztertutako mintz esferikoak erabiliz.

IV. atala

Azken oharrak

7. kapitulua

Ondorio orokorrak eta etorkizunerako ikuspegia

Tesi honetan Soka-Teoriaren Paisaiaren inguruko zenbait ikuspegi aztertu ditugu. Zehazki, horren hutsen ezaugarrietan eta Kosmologiaren eta Soka-Teoriaren arteko aspektu fenomenologikoetan jarri dugu arreta. Hain zuzen ere, 1. kapituluan erreparatu dugunaren arabera, Soka-Teoriaren gehiegizko dimentsioak trinkotu beharrak ondorio oso esanguratsuak ditu teoria honen fenomenologian. Trinkotze hori dela eta, barne-geometria deskribatzen duen potentzial-bilduma sortuko dugu, eta horiek egonkortzeko fluxuak beharko ditugu. Hortaz, Paisaiaren eta bere hutsen ezaguera sendoa ezinbestekoa zaigu fenomenologikoki onargariak diren ereduak eraikitzeko, energia altuko teoria hori gure ikusketekin bat egin ahal izateko.

Lan honen lehen blokea Soka-Teoriaren Paisaiaren hutsen karakterizazio analitikoan oinarritu da, lehenengo kapituluko osagaiak erabiliz bideratutakoa. Horrela, 2. kapituluan fluxu-Paisaiaren simetriak nola erabili ditzakegun erreparatu dugu, teoriaren moduluen azpitalde bat trunkatu ahal izateko. Simetriek fisika osoa eremu bakar batera murrizten duten kasuan, axiodilatoiaren eta egitura konplexuaren sektorearen masa-espektro eskalarra lortu ahal izan dugu Egitura Konplexu Handiko eskualdean, horren ezaugarri estatistikoekin batera. Informazio hori oso baliagarria zaigu modulu *guztiak* egonkorturik dituzten hutsak eraiki ahal izateko. Horietan, izan ere, Kähler sektorea egonkortzeko prozedura sistematikoek bestelako modulu guztiak α' eta instantoen ekarpenekiko egonkorak izatea behar baitute. Bestalde, instantoi-zuzenketa parametrikoki txikiak dituzten hutsen ezaugarriak ere ikertu ahal izan ditugu (horietan ETEaren kontrol perturbatiborik hoberena lortu dezakegulako), $N_A^0 \equiv f_A^0 - \tau h_A^0 = 0$ fluxu-baldintza erabiliz. Kasu jakin horretan, masa guztiak grabitinoaren masaren ($m_{3/2}$ -ren) ordenakoak direla ikusi dugu, masa bat izan ezik, nahi bezain arina izan daitekeena.

Kapitulu horretako ondorioak soilik eremu bakarrerako trunkatze supersimetrikoa ahalbidez dituzten eruedetan aplikatu ditzakegun arren, 3. kapituluan frogatu dugunaren arabera, fluxuen eta eremuen ansatz jakin bat erabiliz horrelako trunkatze bat bideratu dezakegu beti, modulu-espazioaren simetrietara jo behar izan gabe. Hori ez ezik, fluxuen gaineko ansatzak $N_A^0 = 0$ baldintza barneratzen du, beraz huts mota horretako emaitzak eta ondorioak *edonolako Calabi-Yau orientatean* aplikatu daitezke IIB motako Soka-Teorian, betiere

modulu-eremuetan (3.17) adierazpeneko ansatza aplikatuz gero. Horrenbestez, modulu-espazioaren eskualde jakin bateko axiodilatoia eta egitura konplexuaren sektorearen masa-espektro osoa aurkitu ahal izan dugu analitikoki. Espektro hori, gainera, trunkatzea bizirauten duen modulu bakarraren itxarondako balioaren arabera da. Horrez gain, gure analisi estatistikoaren arabera, modulu bakar hori EKH puntutik urrun kokatzen baldin bada, masa guztiak $m_{3/2}$ -ren ordenakoak izango direla bermatu ahal izango dugu. Hortaz, ETEaren zuzenketa guztiak kontrolpean mantenduz gero, Kähler sektorea arriskurik gabe egonkortzea posible izango da.

Aurreko 2. eta 3. kapituluetakoa lanen jarraipen naturala dugu, beraz, emaitza guzti horiek Kähler sektorea sistematikoki egonkortzeko moduren bat aurkitzea, non egitura konplexuaren sektorea eremu bakar batera murriztu dezakegun, bai simetriak erabiliz, bai ansatz bereziak inposatuz. Edonola, 3. kapituluan esan bezala, Kähler sektorearen egonkortzea bideratzeko Bolumen Handiko Eszenarioa horretarako aproposa izango dela espero dugu, aurkitu ditugun huts guztiek, orokorrean, $W_0 \sim \mathcal{O}(1)$ betetzen dutelako. Horrelako prozedura sistematikoak behar bezala funtzionatuz gero, modulu *guztiak* egonkortsu ahal izango genituzke, hartara Soka-Teoriaren fenomenologikoki tinkoak diren hutsak eraikitzeko.

Azken gai horren harira, 4. kapituluan axiodilatoia, egitura konplexuaren sektorea eta Kähler modulu bakarra batera kontsideratu ditugu trinkoketa sinple batean. Horretan, termino ez-perturbatiboen ekarpena kontuan hartuz *Racetrack* potentziala sortu dugu. Prozedura hori aurrekoak baino sinpleagoa den arren (besteak beste, egitura konplexuaren sektorearen trunkatutako moduluak barneratzen ez dituelako), teoriaren fluxu-potentzialaren anti-deSitter minimoak eta deSitter zela-puntuak ikertzeko eredu aproposa da. Guzti hori de Sitter Zingira-aieru zorrotzaren ikuspuntutik landu dugu. Aieruaren arabera, de Sitter motako puntu kritikorik ezin da existitu (ez minimorik, ez maximorik, ezta zela-punturik ere), hots, puntu kritiko guztiek hutsezko energia negatiboa izan behar dute. Kapitulu horretan erabilitako ereduaren zenbait soluzio jakinetatik hasita, eta osoko fluxuak eta racetrack parametroak kontuz doitu, minimo supersimetrikoak eta de Sitter zela-puntuak dituzten ereduak sortu ahal izan ditugu. Azken puntu horiek, jakina, de Sitter aieru zorrotza hausten dute, baina aieruaren bertsio ahularekin bat datoz. Dena dela, kapitulu horretan erabili dugun eredu erraz orokortu daiteke; adibidez, geometriaren Kähler egitura osoa kontsideratuz edo egitura konplexuaren sektorearen bestelako trunkatze-ansatzak erabiliz.

Tesi honen bigarren blokearen aztergaiak Soka-Teoriaren Paisaiaren aspektu kosmologikoak izan dira, non Paisaiaren minimoetan eta bestelako puntu interesgarrietan ematen diren prozesu fisikoetan sakondu dugun. Horretarako, 5. kapituluan Paisaia Ausazko Eremu Gausstar batekin modelizatu dugu. Eredu horrek dimentsio altuagoko potentzialen azterketa errazten du, energia altuko fisikaren xehetasunak alde batera utz ditzakegulako. Ikerketa efizienteagoa bideratu ahal izateko, *Slepián ereduak* errepasatu ditugu, hots, AEGak baldintzatzeko teknikak. Horiei esker ausazko Paisaien minimoen eta inflexio-puntuen ikerketa askoz errazago egin ahal izan dugu, dimentsio altuko potentzialetan puntu horiek ez baitira oso arruntak. Baldintzatutako potentzialei esker, puntu berezi horien ezaugarriak gure beharretara doitu ahal izan ditugu. Izan ere, 5. kapituluan ikusi dugun bezala, Slepián ereduak erabiliz baldintzatutako potentzialen ezaugarri lokalak eta globalak aldi berean aztertu ditzakegu eta, hortaz, baldintzatutako minimoen sasihutsaren iraungitzea eta baldintzatutako inflexio-puntuen inguruko prozesu inflazionarioak aztertu ahal izan ditugu.

Baldintzatze teknika horiei esker, prozesu kosmologikoen estatistika zehatzak lortu ditugu zenbakizko software espezializatua erabiliz eta zenbait hurbilketa balioetsi ahal izan ditugu.

Jakina, Slepian ereduak bestelako aplikazio interesgarritarako erabili daitezke. Lehenik eta behin, ausazko potentzial ez-gausstarrak ikertzeko baliagarriak izan daitezke, Paisaia-aren bestelako eredu aproposagoak izan daitezkeenak. Horrez gain, hemen erabili ditugun Slepian ereduak bi dimentsioko potentzialetan aplikatu ditugu bakarrik, baina printzipioz edozein dimentsioko funtzioetan erabili daitezke. Horietan, minimoen tuneleatze-tasa lortzeko hurbilketa aproposa erabili dezakegu, adibidez. Bestalde, eredu horietan ematen diren prozesu inflazionarioen azterketa sakonagoa bideratzea garrantzitsua da, hemen erabili ditugun inflexio-puntuaren ezaugarriak zeharo doitu ditugu eta, fenomenologikoki onargarriak diren parametro behagarriak lortzeko. Hortaz, edonolako inflexio-puntuak kontuan hartzen dituen azterketa bideratuz, ausazko potentzialetan inflexio-puntu guztietan eman daitezkeen prozesu inflazionarioen ezaugarriak lor genitzake.

Azkenik, tuneleatze-desegonkortasunen inguruan, 6. kapituluaren eremu eskalarrak, mintzak eta fluxuak barneratzen dituzten instantoiak eraiki ditugu. Horiek, izan ere, Paisaian eman daitezkeen iraungitze errealistagoak izan daitezke. Instantoi horiek supersimetria esplizituki hausten duten ereduetan eman daitezkeela frogatu dugu, bai grabitatea arbuia-tuz, bai grabitatea kontuan hartuta. Azpimarratzekoa da osoko fluxu ezberdinak dituzten eskualdeak interpolatzen dituztela mintzek (Brown-Teitelboim mekanismoan gertatzen den bezala), eta eremu eskalarrek ohiko Coleman-deLuccia sasihutsaren iraungitzearen mugalde-baldintzak betetzen dituztela. Hori ez ezik, kasu guztietan supersimetria hausten duten parametroak txikitu ahala, nukleatzen den mintzaren erradioa geroz eta handiago dela ikusi dugu; hortaz, soluzioen joera asintotikoa domeinu-pareta supersimetriko baterantzkoa da, espero bezala.

Nahiz eta kapitulu horretan aztertu ditugun ereduak nahiko murriztaileak diren, mintz lauaren kasuan karga supersimetrikoen frakzio bat mantendu behar baita, mekanismo hori oso interesgarria izan daiteke Paisaian eman daitezkeen trantsizio errealistak ikertzeko, horietan moduluak ez ezik geometria trinkoa haritzen duten fluxuak ere iraungitzean parte hartzen dutelako. Alabaina, eredu oso sinpleak erabili ditugu lan horretan, fluxu eta eremu eskalar bakarrik dituztenak. Jakina, eredu horiek orokortzea posible da. Adibidez, mintzaren tentsioa beste nolabait doitzea badugu horrekin supersimetria hausteko. Horrez gain, eremu eskalar eta fluxu gehiago dituzten ereduak aztertzea ere oso interesgarria izan liteke, 2-4 kapituluetan erabili ditugun ereduetan bezala, IIB Soka-Teoriako fenomenologikoki interesgarriak diren ereduen sasihutsen iraungitzea aztertzeko.

V. atala

Eranskinak

A eranskina

Fluxu-bektorearen Hodge deskonposizioa

Eranskin honetan N fluxu-bektorearen Hodge deskonposizioa izango dugu aztergai [134]. Emaitza hau testu nagusiaren 2.4.4 sekzioan erabili dugu; hain zuzen ere, IIB motako fluxuhutsen probabilitate-banaketen kalkulua honetan oinarritzen da (ikus 2.6 sekzioa).

N fluxu-bektorearen dimentsio konplexua $2h^{2,1} + 2$ da eta era ez-tribialean transformatzen da $\text{Sp}(2h^{2,1} + 2, \mathbb{Z})$ talde sinplektikoarekiko; hau da, *sekzio sinplektikoa* da. 2.2 sekzioan aipatu bezala, $2h^{2,1} + 2$ dimentsioduna den $\mathcal{B} = \{\Pi, \bar{\Pi}, D_a \Pi, D_{\bar{a}} \bar{\Pi}\}$ bektore-taldea edonolako $\{\tau, z^a\}$ puntuan ebaluatzerakoan, bere osagarriak linealki independenteak direla frogatu daiteke. Bestela esanda, \mathcal{B} multzoa sekzio-espazioaren oinarria da. \mathcal{B} -ren elementuen independentzia lineala frogatzearren, edonolako A eta B sekzioen arteko $\langle A, B \rangle$ biderkadura horrela definitu dezakegu

$$\langle A, B \rangle = A^T \cdot \Sigma \cdot B, \quad (\text{A.1})$$

non Σ matrize sinplektiko inbariantea den, ikus (1.27). Adierazpen honen aplikazio zuzenaren bidez eta Π -ren definizioaz baliatuz, \mathcal{B} -ren elementuen ondorengo ezaugarriak froga daitezke:

$$\begin{aligned} \langle \Pi, \bar{\Pi} \rangle &= ie^{-K_{cs}}, \\ \langle \bar{\Pi}, \bar{\Pi} \rangle &= 0, \\ \langle \Pi, D_a \Pi \rangle &= 0, \\ \langle \Pi, D_{\bar{a}} \bar{\Pi} \rangle &= 0, \\ \langle D_a \Pi, D_b \Pi \rangle &= 0, \\ \langle D_a \Pi, D_{\bar{b}} \bar{\Pi} \rangle &= -ie^{-K_{cs}} \delta_{a\bar{b}}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Hauen ondorioz, \mathcal{B} multzoa linealki independentea da. Formulazio honetan oinarrituz, fluxu-bektorearen Hodge deskonposizioa lor dezakegu \mathcal{B} sekzio-oinarriaren mende:

$$N = \sqrt{4\pi} (a_0 \Pi + \bar{b}_0 \bar{\Pi} + a^a D_a \Pi + \bar{b}^{\bar{a}} D_{\bar{a}} \bar{\Pi}). \quad (\text{A.3})$$

Ortogonalitasun propietateak erabiliz, zuzenean ebatzi ditzakegu $\{a_0, a^a, b_0, b^a\}$ koefizienteak. Hauek superpotentzialaren eta horren deribatuen arabera idatzi ditzakegu edozein $\{\tau, z^a\}$ puntutan:

$$a^0 = -e^{K_{cs}} D_{\bar{0}} \bar{W}, \quad \bar{b}^0 = ie^{K_{cs}} W, \quad a^a = e^{K_{cs}} D_{\bar{0}} D_{\bar{a}} \bar{W}, \quad \bar{b}^a = -ie^{K_{cs}} D_a W. \quad (\text{A.4})$$

Horrenbestez, Π , $D_a \bar{\Pi}$, $D_{\bar{a}} \Pi$ eta $\bar{\Pi}$ oinarri-elementuek $G_3 = F_3 - \tau H_3$ fluxuaren (3, 0), (1, 2), (2, 1) eta (0, 3) osagaiekin bat datoz, hurrenez hurren. Bereziki, (1.37) eskala gabeko hutsetan, non G_3 -ren (3, 0) eta (1, 2) zatiak nuluak diren (hau da, G_3 “irudiazko autoduala” da), fluxu-bektorearen Hodge deskonposizioa hauxe dugu:

$$N = \sqrt{4\pi} e^{K_{cs}} (iW \bar{\Pi} + D_{\bar{0}} D_{\bar{a}} \bar{W} D_a \Pi), \quad (\text{A.5})$$

Adierazpen hau (1.41) ekuazioan sartuz, irudiazko fluxu autodualek induzitutako $D3$ -karga lortuko dugu:

$$\begin{aligned} N_{\text{flux}} &= -i4\pi e^{2K_{cs} + K_d} \left(|W|^2 \langle \Pi, \bar{\Pi} \rangle + |D_0 D_1 W|^2 \langle D_{\bar{1}} \bar{\Pi}, D_1 \Pi \rangle \right. \\ &\quad \left. + 2\text{Im} \left[\bar{W} D_{\bar{0}} D_{\bar{1}} \bar{W} \langle \Pi, D_1 \Pi \rangle \right] \right) \\ &= 4\pi e^{K_{cs} + K_d} (|W|^2 + |D_0 D_1 W|^2), \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

non, azkeneko pausoan, (A.2) identitateak erabili ditugun. Azkenik, grabitino-masa eta m_{susy} -ren definizioez baliatuz, N_{flux} positibo erdidefinitua dela frogatzea dugu, hots,

$$0 \leq N_{\text{flux}} = 4\pi \mathcal{V}^2 \left(m_{3/2}^2 + m_{\text{susy}}^2 \right) \leq L. \quad (\text{A.7})$$

B eranskina

Oktikaren eskalarik gabeko zenbakizko soluzioen ekorketa

Eranskin honetan xehetasun osoz deskribatuko dugu $\mathbb{WP}_{[1,1,1,1,4]}^4$ (oktika) ereduaren eskalarik gabeko soluzio-multzoa lortzeko erabili ditugun zenbakizko metodoak. 2.5 sekzioan aipatu bezala, eredu horren modulu-espazioa bi modulu-motaz osatuta dago, Kähler moduluez gain, alegia, egitura konplexuaren modulu bakar bat eta axiodilatoia. Eskalarik gabeko konfigurazioak lortzeko (ikus (1.37)), lehen horiek egonkortu beharko ditugu.

B.1 Paramotopy eta homotopia polinomikoen jarraipena

2.2 sekzioan deskribatutako tresnak erabiliz, erraz egiaztatu daiteke eskalarik gabeko baldintzek sistema polinomiko ez-lineala osatzen dutela EKH puntuaren inguruan, baldin eta (2.1) aurrepotenzialaren instantoi-ekarpenak arbuia garriak badira [166]. Eranskin honetan (1.37) sistema polinomikoa horrela adieraziko dugu:

$$P_i(z, \bar{z}, \tau, \bar{\tau}; f, h) = 0, \quad i = \{1, 2\}, \quad (\text{B.1})$$

non f eta h kuantifikatutako fluxu-bektoreak diren (ikus (1.33)), eta (1.42) zapaburu-murrizketa betetzen duten. Zenbakizko problema honen zailtasun nagusia (B.1) sistema ebaztean datza, f -ren eta h -ren milaka aukera tinkorentzat.

(B.1) motako sistemak ebazteko algoritmorik nabarmenetako bat da *homotopia polinomikoen jarraipena* (HPJ), zenbakizko geometria algebraikoaren alorrean kokatzen dena [164, 165]. Eskematikoki, metodo horren funtzionamendua ondorengoa da:

1. Demagun gure sistema polinomikoa $P(x) = 0$ dela. Lehenik eta behin, $Q(x) = 0$ sistema laguntzailea eraiki beharko dugu. Azken hori erraz ebatzi ahal izango da eta gehienezko soluzio kopuru berdina izango du. Horrekin $H(x, t)$ *homotopia* funtzioa

$$H(x, t) = \gamma(1 - t)Q(x) + tP(x), \quad (\text{B.2})$$

definitu dezakegu, non $t \in [0, 1]$ den eta γ ausazko zenbaki konplexua den.¹

Argi dago $H(x, 0)$ sistemaren erroak $Q(x)$ sistemako erroekin bat datozela, eta $H(x, 1)$ -enak $P(x)$ -rekin; azken horiek izanik lortu nahi ditugunak.

2. $Q(x) \propto H(x, 0)$ sistemaren erroak jakinda, $H(x, t)$ polinomioen erroak era jarraian haietatik deformatuko direla frogatu daiteke [165]. Hortaz, soluzio bakoitza erraz jarraitu dezakegu t parametroa $t = 1$ baliorantz daramagun heinean. Hartara, gure jatorrizko problemaren soluzioak lortuko ditugu.

HPJ metodoa hainbat eratarik aplikatu da literaturan, phcpy [273], StringVacua [274], eta Bertini [275] programetan, besteak beste. Proiektu honetan Paramotopy² [163] erabili dugu. Parametro tuplen mende dauden sistemak ebazteko bereziki dago diseinatuta eta, azken batean, mota horretakoa da guk landuko dugun (B.1) sistema.

Hitz gutxitan, Paramotopyren funtzionamendua bi pausotan laburbildu daiteke. Parametro anitzen mende dagoen $P(x; p)$ polinomio sistema emanda, programak lehenik ausazko p_0 tupla bat erabiliz ebazten du HPJ algoritmoa. Behin soluzioa lortuta, Paramotopyk algoritmo berdina jarraitzen du ondorengo homotopiarentzat

$$H(x, t; p_0, p) = \gamma(1 - t)P(x; p_0) + tP(x; p) \quad (\text{B.3})$$

non p guri interesatzen zaigun edozein parametro tupla adierazten duen. Aitzitik, bigarren pauso horretan, jarraitu behar diren soluzio-bide kopurua lehenengo pausoa baino askoz txikiagoa da. Izan ere, soilik $P(x; p_0)$ sistema ebatzi dezaketenean bideak jarraitu behar ditugu soluzio-espazioan, eta azken kopuru hori jatorrizkoarena baino askoz txikiagoa da. Beraz, gure jatorrizko polinomioaren soluzioetara modu efizientean iristea ahalbidetzen du lehen pauso horrek [163], nahi adina tuplantzat.

B.2 Eskalarik gabeko soluzioen ekorketa parametro bakarreko ereduetan

Oktikaren modulu-espazioaren esplorazio tinkoa egitearren, fluxuen ausazko balio osoak erabili genituen, non fluxu-bektoreen osagaiek $f, h \in [-f_{max}, f_{max}]$ tartean dauden. Gainera, fluxu-tuplek zapaburu-baldintza bete beharko dute

$$0 < h \cdot \Sigma \cdot f \leq L. \quad (\text{B.4})$$

Zortzikiaren kasuan $L = 972$ erabili dugu, eta $f_{max} = 50$ aukeratu genuen huts multzo handi samarra lortzeko eta N_{flux} (1.41) D3-kargaren banaketa ahal bezain laua izan dadin. Horrela, artifizialki induzituko litezkeen mugalde-efektuak ekidin ditugu, f_{max} -en balio finitua dela eta.

¹ Parametro honen bitartez, $Q(x)$ -tik $P(x)$ -rako deformazioan gerta daitezkeen singularitateak ekidingo ditugu, ikus [165].

² Softwarea eskuragarri dago www.paramotopy.com web orrialdean

Fluxu-huts generikoei dagokienez, zapaburu-baldintza betetzen dituzten 10^7 fluxu-tupla sortu genituen. Bestalde, kasu murriztuari dagokionez, 10^6 fluxu-tupla tinko sortu genituen³ aurreko algoritmoa jarraituz, beti ere $f_A^0 = h_A^0 = 0$ baldintza bermatuz.

Behin parametro guztiak sortuta, Paramotopy erabili genuen (1.37) eskalarik gabeko baldintza sistema ebazteko. Kontuan hartu beharra dago (1.37) sisteman bai τ, z eta bai $\bar{\tau}, \bar{z}$ aldagaiak ageri direla. Zailtasun horri aurre egiteko, aldagai bakoitzaren zati erreala eta irudikaria ebatzi genezake. Guk, ordea, $\{\tau, z, \bar{\tau}, \bar{z}\}$ aldagai konplexuak elkarren arteko independentetzat jo genituen sistema ebazteko; ondoren, noski, lortutako soluzioen artean soilik beraien arteko konjugazio konplexua betetzen zituztenak gorde genituen. Softwareak errazago ebatzi dezake azken sistema konplexu hori sistema erreala baino, ekuazioak sinpleagoak dira eta. 46 nukleoko makina bat erabili genuen prozesu osoa burutzeko; tupla multzo generikoak (10^7 elementuz osatutakoa) 50 ordu behar izan zituen, eta multzo murriztuak (10^6 tupladuna), berriz, 5.

Aurreko prozesua jarraituz lortutako eskalarik gabeko soluzio-multzo osoatik, soilik instantoi zuzenketa txikiak zituztenak erabili genituen 2.6 sekzioko analisi estatistikorako. Horrez gain, oktikaren huts horiek deskribatzen duten ETEak tinkoak zirela egiaztatu genuen. Zuzenketa kalkulatzeko, zuhaitz mailako ekuazioak ebatzi genituen, eta ondoren horiek balio zuzenduekin alderatu genituen. Konkretuki, soluzio bakoitzarentzat Kähler potentziala eta metrika kalkulatu genituen, nahiz aurrepotentzialaren instantoiaren ekarpena arbuiatuz nahiz (2.52) zuzenketa nagusia kontsideratuz. Lehenik, zuzenketa barneratzean Kähler metrika egokia definituta zeukaten soluzioak aukeratu genituen, hau da, metrika ez-endeckatu eta positiboa zutenak. Ondoren, soluzio horietan $m_{3/2}$ grabitinoaren masa, \hat{r} berreskalatutako Yukawa akoplamendua eta Kähler metrika kalkulatu genituen. Aurreko kantitateetan %20 baino txikiagoko zuzenketa erlatiboa zuten soluzioak hautatu genituen soilik azken pauso hartan. Handik lortutako soluzio-multzoa kolore urdinez ageri da 2.7, 2.8, eta 2.11 irudietako histogrametan.

B.3 ETEaren erredundantziak eta soluzio bikoiztuak

2.2 eta 2.5 sekzioetan aipatu dugun bezala, IIB motako Soka-Teoriaren trinkoketak supegrabitatearen bidez deskribatzen dira, energia baxutan. Azken horrek bi berezko erredundantzia dauzka ekintza-mailan: lehenak $SL(2, \mathbb{Z})$ transformazio modularrekin du zerikusia, bigarrenak, aldiz, (1.28) eta (1.38) transformazio sinplektikoekin. Honenbestez, eraldaketa hauek erabiliz erlazionatu daitezkeen eskalarik gabeko soluzioak baliokidetzat hartu beharko ditugu.

$SL(2, \mathbb{Z})$ simetriaren bitartez erlazionatuta dauden soluzio bikoiztuak ager ez daitezten, soluzio bakoitza talde modularren oinarritzko domeinura eraman genuen. Planoerdi konplexuaren eskualde hori $|\tau| > 1$ eta $|\operatorname{Re}(\tau)| < 1/2$ baldintzek definitzen dute. Soluzioen

³Ausazko fluxuek zuzenketa ez-arbuiagarriak erraz jaso ditzakete, $N_A^0 = 0$ kasuan ez bezala (EKH puntuan aurkitu daitezkeen soluzio kopuruaren diferentzia dela eta). Ondorioz, lehenengo kasuan fluxu-tupla gehiago sortu genituen, bukaeran soluzio kopuru nabarmena mantendu ahal izateko.

garraioa

$$T_b = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (B.5)$$

$$\tau \rightarrow \tau + b \quad \tau \rightarrow -1/\tau$$

simetria taldearen sortzaileak aplikatuz egin zen. Kontuan izan behar dugu operazio horien ondorioz f eta h fluxuen balioa aldatuko dela, ez ordea N_{flux} kantitatearena, konstante iraungo baitu. Beraz, plano konplexuan zehar garraiatutako soluzioek betiere zapaburu-baldintza beteko dute.

Transformazio sinplektikoei dagokienez, egitura konplexu handiko eskualdeko erredundantzia hau EKH puntuaren inguruko monodromiak sorrarazten du. Simetria horrek z egitura konplexuaren moduluaren gain eta fluxuen gain duen eragina horrela deskribatu daiteke oktikaren kasuan⁴ [98, 124, 133, 172]:

$$z \rightarrow z - i n \quad \equiv \quad \begin{cases} N \rightarrow A^n \cdot N \\ \Pi \rightarrow A^n \cdot \Pi \end{cases}, \quad (B.6)$$

non $n \in \mathbb{Z}$ den eta

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (B.7)$$

dugun. Simetria horren ondorioz, z -planoaren oinarrizko domeinua definitu ahal izango dugu; guk, hemengo honetan, $|\text{Im}(z)| \leq 1/2$ eskualdea aukeratu genuen.

Hemen deskribatutako transformazioak, hots, (B.5) eta (B.6), τ eta z moduluak euren oinarrizko domeinu propioetara eramateko erabili daitezke. Horiek kontuan hartuta, fluxu eta modulu balio berdinak dituzten hutsen kopiak ezabatu genituen (Paramotopyren estimatutako errorea 10^{-8} -n dagoela kontuan hartuta), soluzio bikoiztuak kontuan ez hartzeko ekorketa numerikoan.

⁴Xehetasun gehiagorako eta parametro bakarreko beste hainbat eredu en eztabaidari buruz irakurtzeko, ikus [124].

C eranskina

Eskalarik gabeko fluxu-hutsen dentsitate-banaketa

Eranskin honetan (2.57) eta (2.70) eskalarik gabeko hutsen dentsitate-banaketak kalkulatu ditugu. Zehazki, nola lor daitezkeen deskribatuko dugu, batetik, soluzio-multzo generikoaren kasuan eta, bestetik, $N_A^0 = 0$ balditzaren bitartez murriztutako multzoarentzat.

Ondorengo frogapena fluxu jarraituen hurbilketan datza, eta batez ere [46] erreferentzian oinarrituko da. Lehenbizi, (2.56) aldagaien probabilitate-banaketa eskalarik gabeko hutsetan kalkulatu dugu, (A.3) deskonposizioa erabiliz. Ondoren, emaitza hori Kac-Rice formula orokortuarekin bateratu dugu. Pauso bakoitzean, soluzio multzo generikoarentzat lortuko dugu frogapena, [46] artikuluan bezala, eta kasu murriztura egokituko dugu ondoren.

C.1 Denef-Douglas banaketaren kalkulua

[46] erreferentziari jarraituz, gure abiapuntua fluxu-bektorea osatzen duten $4m = 4(h^{2,1} + 1)$ zenbaki osoak izango dira:

$$\{f_A^I, h_A^I, f_I^B, h_I^B\}. \quad (\text{C.1})$$

Horien banaketa laua dela onartuko dugu. Kontuan izan asumitze hori geure zenbakizko prozedurarekin bat datorrela $\mathbb{W}\mathbb{P}_{[1,1,1,1,4]}^4$ ereduan. Izan ere, banaketa lau baten bidez lortu ditugu kasu horren zenbakizko fluxuak.

Bestalde, zapaburu murrizketaren L parametroa oso handia dela onartuko dugu, hots, $L \gg 1$. Hartara, oro har sortu ahal ditugun fluxuak handiak izango dira eta, horrenbestez, horiek ausazko aldagai jarraitutzat hartu ahal izango ditugu. Horien probabilitate-banaketa ondorengoa izango da, beraz:

$$d\mu_{\text{flux}}(f, h) = \mathcal{N} (df dh)^{4m}. \quad (\text{C.2})$$

Lehenik eta behin, $N = f - \tau h$ eta $\bar{N} = f - \bar{\tau} h$ aldagai konplexuen mende idatziko dugu

banaketa hori. Aldagai-aldaketari dagokion jacobiarra hauxe dugu:

$$J = \frac{\partial(N_A, \bar{N}_A, N^B, \bar{N}^B)}{\partial(f_A, h_A, f^B, h^B)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(N_A, \bar{N}_A)}{\partial(f_A, h_A)} & 0 \\ 0 & \frac{\partial(N^B, \bar{N}^B)}{\partial(f^B, h^B)} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.3})$$

non

$$\frac{\partial(N_A, \bar{N}_A)}{\partial(f_A, h_A)} = \frac{\partial(N^B, \bar{N}^B)}{\partial(f^B, h^B)} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ -\tau \mathbb{1} & -\bar{\tau} \mathbb{1} \end{pmatrix} \quad (\text{C.4})$$

den. Ondorioz,

$$\det(J) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\tau & \bar{\tau} \end{pmatrix}^{2m} = (-2i\text{Im}\tau)^{2m}, \quad (\text{C.5})$$

eta $\{N, \bar{N}\}$ aldagaien banaketara iritsiko gara:

$$d\mu_{\text{flux}}(N, \bar{N}) = \mathcal{N} (dN d\bar{N})^{4m} e^{2mK_d}. \quad (\text{C.6})$$

Ondoren, $\{N, \bar{N}\} \rightarrow \{Z_0, F_a, F_0, Z_a, c.c.\}$ aldagai-aldaketa aztertuko dugu, honela definituko duguna¹

$$\begin{aligned} F_0 &\equiv e^{K/2} D_0 W = -ie^{K/2} N^\dagger \cdot \Sigma \cdot \Pi, \\ F_a &\equiv e^{K/2} D_a W = e^{K/2} N^T \cdot \Sigma \cdot D_a \Pi, \\ Z_0 &\equiv e^{K/2} W = e^{K/2} N^T \cdot \Sigma \cdot \Pi, \\ Z_a &\equiv e^{K/2} D_0 D_a W = -ie^{K/2} N^\dagger \cdot \Sigma \cdot D_a \Pi. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Azken adierazpen horretan, bektore guztien osagaiak kanonikoki normalizatutako oinarriaren arabera idatzi ditugu. Definizio horiek testu nagusiaren (2.56) adierazpenekin bat datoz, \mathcal{V} bolumen-faktorea kontuan hartu gabe. Egitura konplexuaren moduluekiko eta axio-dilatoiarekiko independentea da bolumena, beraz, (2.56) adierazpenetara iritsi gaitzke aldagaien normalizazio konstantea erraz birdefinituz. Horrenbestez, bolumen-faktorea ez dugu kontuan hartu beharko ondorengo adierazpenetan. Aurreko transformazioaren $J = \partial(Z_0, F_a, F_0, Z_a, c.c.) / \partial(N, \bar{N})$ jacobiarra honako hau dugu:

$$J = e^{K/2} \begin{pmatrix} \Sigma \cdot \Pi & \Sigma \cdot D_a \Pi & 0 & 0 & 0 & 0 & i\Sigma \cdot \bar{\Pi} & i\Sigma \cdot D_{\bar{a}} \bar{\Pi} \\ 0 & 0 & -i\Sigma \cdot \Pi & -i\Sigma \cdot D_a \Pi & \Sigma \cdot \bar{\Pi} & \Sigma \cdot D_{\bar{a}} \bar{\Pi} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.8})$$

Ondorioz,

$$\det(J) = e^{2mK} |\det M|^2 \quad (\text{C.9})$$

¹ Ondorengo kalkuluetan, notazioa sinplifikatzearren, W -ren definizioan agertzen den $1/\sqrt{4\pi}$ faktorea ez dugu aintzat hartuko (ikus (1.35)), horrek ez baitu emaitza finala inola aldatuko.

dugu, non

$$M \equiv \left(\Sigma \cdot \Pi, \quad \Sigma \cdot D_a \Pi, \quad i\Sigma \cdot \bar{\Pi}, \quad i\Sigma \cdot D_{\bar{a}} \bar{\Pi} \right). \quad (\text{C.10})$$

determinantea kalkulatzeko,

$$|\det M|^2 = |M^\dagger M| = |M^\dagger \cdot \Sigma \cdot M|, \quad (\text{C.11})$$

propietatea erabiliko dugun, $|\Sigma| = 1$ kontuan hartuz. Hortaz, $\{\Pi, \bar{\Pi}, D_a \Pi, D_{\bar{a}} \bar{\Pi}\}$ oinarriaren ortogonalitate ezaugarriez baliatuz (ikus A eranskina), ondorengo emaitza lortuko dugu [46]:

$$M^\dagger \cdot \Sigma \cdot M = \begin{pmatrix} e^{-K_{cs}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -ie^{-K_{cs}} \delta_{\bar{a}\bar{b}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-K_{cs}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ie^{-K_{cs}} \delta_{\bar{a}\bar{b}} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.12})$$

Matrize horren determinantea $\det(M^\dagger \cdot \Sigma \cdot M) = e^{-2mK_{cs}}$ da. Ondorioz, aurreko aldagai-aldaketari dagokion jacobiarren determinantea hauxe dugu:

$$\det(J) = e^{2m(K_d + K_k)}. \quad (\text{C.13})$$

Adierazpen horren e^{2mK_d} faktorea (C.6) ekuazioan agertzen denarekin sinplifikatuko da. Beraz, $\{F_0, F_a, Z_0, Z_a\}$ aldagaien probabilitate-banaketa laua dela frogatu dugu, hau da,

$$d\mu_{\text{flux}}(F_A, Z_A, \bar{F}_A, \bar{Z}_A) = \mathcal{N} (dF_A d\bar{F}_A dZ_A d\bar{Z}_A)^{4m} e^{-2mK_k}. \quad (\text{C.14})$$

Eskalarik gabeko hutsak $F_A = 0$ baldintzaren bitartez espresatu daitezke aurreko aldagaiak erabilia; zapaburu-baldintza, aldiz, horrela adieraziko dugu:

$$N_{\text{flux}} = Z_A \bar{Z}_A \equiv |Z|^2 \leq L. \quad (\text{C.15})$$

Eskalarik gabeko huts-baldintza $\delta^{2m}(F_A, \bar{F}_A)$ delta funtzioen bitartez inposatu daiteke (C.14) ekuazioan. Beste era batera adierazita, huts hauen banaketa

$$d\mu_{\text{flux}}(Z_A, \bar{Z}_A)|_{\text{no-scale}} = \mathcal{N} (dZ_A d\bar{Z}_A)^{2m} \quad (\text{C.16})$$

dugu. Hau da, $Z_A = \{e^{K/2} W, e^{K/2} D_0 D_a W\}$ aldagaiak eta horien konplexu konjokatuak elkarrekiko independenteak dira, hots, $2(h^{2,1} + 1)$ aldagai konplexu independentez osatutako multzoa dugu. Horiek zapaburu-baldintzak definitzen duen (C.15) esferan uniformeki banatuta daude, *Denef-Douglas banaketa* deritzogun (C.16) probabilitate dentsitate-funtzioari jarraituz.

C.2 Fluxu-banaketa murriztua

Sekzio honetan aurreko kalkulua errepikatuko dugu, huts multzo murriztuaren kasuarentzat. $N_A^0 = 0$ baldintza Dirac-en delten bidez adierazi dezakegu fluxu-banaketan:

$$d\mu_{\text{flux}}(f, h) = \mathcal{N} (df dh)^{4m} \delta(f_A^0) \delta(h_A^0). \quad (\text{C.17})$$

Banaketa hau, lehen bezala, fluxu-bektore konplexuaren funtzioan idatz dezakegu, hots,

$$d\mu_{\text{flux}}(N, \bar{N}) = \mathcal{N} (dN d\bar{N})^{4m} e^{2mK_d} \delta(N_A^0) \delta(\bar{N}_A^0) |J_0|, \quad (\text{C.18})$$

non

$$|J_0| = \det \frac{\partial (N_A^0, \bar{N}_A^0)}{\partial (f_A^0, h_A^0)} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\tau & -\bar{\tau} \end{pmatrix} = -2i \operatorname{Im}(\tau), \quad (\text{C.19})$$

dugun eta ondorioz

$$d\mu_{\text{flux}}(N, \bar{N}) = \mathcal{N} i (dN d\bar{N})^{4m} e^{(2m-1)K_d} \delta(N_A^0) \delta(\bar{N}_A^0). \quad (\text{C.20})$$

Fluxu-bektorearen Hodge deskonposizioa erabiliz, hau da,

$$N = e^{\frac{1}{2}(-K_k - K_d + K_{cs})} (-\bar{F}_0 \Pi + i Z_0 \bar{\Pi} + \bar{Z}_a D_a \Pi - i F_a D_a \bar{\Pi}), \quad (\text{C.21})$$

$N_A^0 = 0$ murrizketa-baldintza $\{Z_A, F_A, \bar{Z}_A, \bar{F}_A\}$ aldagaien mende idatz dezakegu:

$$N_A^0 = e^{\frac{1}{2}(-K_k - K_d + K_{cs})} (-\bar{F}_0 + i Z_0 - \sqrt{3/(1-2\xi)} \bar{Z}_1 + \sqrt{3/(1-2\xi)} i F_1) = 0. \quad (\text{C.22})$$

Baldintza horrek aldagaien balioak murriztuko ditu, alegia,

$$Z_0 = Z_0^*(Z_a, F_A), \quad \bar{Z}_0 = \bar{Z}_0^*(Z_a, F_A). \quad (\text{C.23})$$

Dirac-en delta funtzioak erabiliz baldintza horiek erraz sar ditzakegu (C.20) banaketan, azken hori $\{Z_A, F_A, \bar{Z}_A, \bar{F}_A\}$ aldagaien mende idatzi ondoren:

$$d\mu_{\text{flux}} = \mathcal{N} i (dF_A d\bar{F}_A dZ_A d\bar{Z}_A)^{4m} e^{-K_{cs}} \delta(Z_0 - Z_0^*) \delta(\bar{Z}_0 - \bar{Z}_0^*). \quad (\text{C.24})$$

Normalizazio konstantean barneratu dugu Calabi-Yau barietatearen bolumen faktorea, axio-dilatoti eta egitura konplexuko eremuekiko independentea baita.

C.3 Eskalarik gabeko huts generikoen dentsitatea

Ondorengo lerroetan fluxu-hutsen dentsitatea kalkulatuko dugu, kasu orokorarentzat. Eskalarik gabeko $\mathcal{C}_{\text{vac}}(N)$ huts kopurua kalkulatzeko, edozein N fluxu-bektorearen funtzioan,

Kac-Rice formula orokortura joko dugu [168, 169]:

$$\mathcal{E}_{\text{vac}}(N) = \int d^{2m}u \delta^{2m}(DW) |\det D^2W|, \quad (\text{C.25})$$

non $u^A = \{\tau, z^i\}$ dugun eta

$$\delta^{2m}(DW) = \delta^m(D_A W) \delta^m(D_{\bar{A}} \bar{W}), \quad D^2W = \begin{pmatrix} D_A D_{\bar{B}} W & D_A D_B W \\ D_{\bar{A}} D_{\bar{B}} \bar{W} & D_{\bar{A}} D_B \bar{W} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.26})$$

Huts-multzo horretatik $N_{\text{flux}} \leq L$ zapaburu-murrizketa betetzen duten soluzioak interesatzen zaizkigu soilik, hots,

$$\mathcal{E}_{\text{vac}}(N_{\text{flux}} \leq L) = \sum_N \Theta(N_{\text{flux}} - L) \int d^{2m}u \delta^{2m}(DW) |\det D^2W|. \quad (\text{C.27})$$

Azken adierazpen horretan fluxuen aukera guztiek pisu estatistiko bera daukate; gogoan izan hori gure hasierako fluxu-banaketa lauaren suposaketarekin bat datorrela.

[46] artikuluan aipatzen den bezala, Heaviside-ren theta funtzioaren adierazpen integrala erabiliz, azkeneko ekuazioa horrela berridatzi dezakegu:

$$\mathcal{E}_{\text{vac}}(N_{\text{flux}} \leq L) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d\alpha}{\alpha} e^{\alpha L} \mathcal{C}(\alpha) \quad (\text{C.28})$$

non

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\alpha) &\equiv \sum_N \int d^{2m}u e^{-\alpha N_{\text{flux}}} \delta^{2m}(DW) |\det D^2W| \\ &\approx \int (dN d\bar{N})^{4m} \int d^{2m}u e^{-\alpha N_{\text{flux}}} \delta^{2m}(DW) |\det D^2W| e^{2mK_d} \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

dugun eta azken lerroan osoko fluxuen batukaria integral batera hurbildu dugun, azken horren neurria (C.6) delarik.

Superpotentzialaren DW gradientea eta D^2W hessianra kanonikoki normalizatutako oinarriaren mende idatziz, hauxe dugu

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\alpha) &= \int (dN d\bar{N})^{4m} \int d^{2m}u |\det g| e^{-\alpha N_{\text{flux}}} \delta^{2m}(D_a W) |\det \mathcal{H}|^{1/2} e^{2mK_d} \\ &= \int (dZ dF)^{4m} \int d^{2m}u |\det g| e^{-\alpha \mathcal{V}^2 |Z|^2} \delta^m(F_A) \delta^m(\bar{F}_{\bar{A}}) |\det \mathcal{H}|^{1/2} e^{-2mK_k} \\ &= \mathcal{V}^{4m} \int (dZ d\bar{Z})^{2m} \int d^{2m}u |\det g| e^{-\alpha \mathcal{V}^2 |Z|^2} |\det \mathcal{H}|^{1/2}. \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

Bigarren lerroko e^{mK} terminoa ageri zaigu delta funtzioaren argumentuan egindako (C.7) aldagai-aldaketa dela eta. Azken hori D^2W matrizea \mathcal{H} -ren funtzioan idaztean birxurgatuko da.² $Z_A \rightarrow Z_A / (\mathcal{V} \sqrt{\alpha})$ berreskalatuz, $\mathcal{C}(\alpha) = \mathcal{C}(1, \mathcal{V} = 1) \alpha^{-2m}$ lortuko dugu, eta bolumen-

² Gogoratu kanonikoki normalizatuta dauden koordinatuetan hurrengo erlazioa dugula: $\mathcal{H} = e^K (D^2W)^2 = (m_{3/2} \mathbb{1} + \mathcal{M})^2$, ikus (2.8).

faktorea desagertuko da. Horren ondorioz, α -ren integrala esplizituki kalkulatu dezakegu:

$$\mathcal{E}_{\text{vac}}(N_{\text{flux}} \leq L) = \Lambda(L, m) \cdot \int d^{2m} u |\det g| \int (dZ d\bar{Z})^{2m} e^{-|Z|^2} |\det \mathcal{H}|^{1/2} \quad (\text{C.31})$$

non $\Lambda(L, m)$ konstantea zapaburu-baldintzaren L parametroaren eta modulu-espazioaren m dimentsioaren menpekoa den. Aurreko adierazpena ikusita, argi dago horrela definitu dezakegula fluxu-hutsen dentsitatea:

$$d\mu_{\text{vac}}(z, \tau) = \mathcal{N} \cdot d^{2m} u |\det g| \left[\int (dZ d\bar{Z})^{2m} e^{-|Z|^2} |\det \mathcal{H}|^{1/2} \right]. \quad (\text{C.32})$$

C.4 Huts murriztuen dentsitatea

Huts murriztuen multzoaren kasua aurreko sekzioan azaldutako pausu berdinak jarraituz ebazten da. Honako honetan, aitzitik, (C.30) ekuazioko (C.7) aldagaiak aldatzean, (C.24) neurria erabili beharko dugu, (C.16) adierazpenaren orde. Horrenbestez, murriztutako eskalarik gabeko fluxu hutsen dentsitatea hauxe dugu:

$$d\mu_{\text{vac}}(z, \tau) = \mathcal{N} \cdot d^{2m} u |\det g| \left[\int (dZ d\bar{Z})^{2(m-1)} e^{-|Z|^2} |\det \mathcal{H}|^{1/2} e^{-K_{cs}} \right], \quad (\text{C.33})$$

non $\{Z_A, \bar{Z}_A\}$ aldagaien integrazio-domeinua (C.23) murrizketek eta $F_A = \bar{F}_A = 0$ baldintzek definitutako azpiespazioaren gainean egiten den, hots, murriztutako eskalarik gabeko hutsen parametro-domeinuan. Egitura konplexuaren modulu-espazioa dimentsio bakarrekoa baldin bada ($m = 2$), aurreko integrala sinplifikatu dezakegu, eta ondorengoa lortu:

$$\int dZ_1 d\bar{Z}_1 e^{-\frac{2(2-\xi)}{1-2\xi}|Z_1|^2} |Z_1|^4 \left| 1 + \frac{9}{(1-2\xi)^2} - \frac{3(2+\kappa^2)}{(1-2\xi)} \right| \frac{\xi+1}{\xi}. \quad (\text{C.34})$$

Adierazpen horretara iristeko $|Z_0| = \sqrt{3/(1-2\xi)}|Z_1|$ erlazioaz (ikus (2.46)) eta EKH parametroaren $e^{-K_{cs}} = |2\text{Im}\kappa_0|(\xi+1)/\xi$ definizioaz baliatu gara. Aurreko adierazpena Z_1 aldagai konplexuarekiko, eta $\text{Im}z$ eta $\text{Re}\tau$ norabideekiko integratuz,

$$d\mu_{\text{vac}}(z, \tau) = \mathcal{N} \cdot \frac{(1+\xi)}{(2-\xi)^2} \frac{1}{r^2 s^2} dr ds \quad (\text{C.35})$$

emaitzara iritsiko gara, (2.61) aldagaien menpe dagoena eta (2.70) adierazpenarekin bat datorrena.

D eranskina

EKH parametroaren borneak

2.5 sekzioan eta B eranskinean eskalarik gabeko hutsen deskribapen analitikoa aurkeztu dugu, ikus (2.57) eta (2.70). Aitzitik, karakterizazio hau baliagarria zaigu soilik ETEa eta fluxu jarraituen hurbilketa betetzen den modulu-espazioaren eskualdean.

Noski, instantoi-zuzenketa handiak dituzten hutsak ezin ditugu kontuan hartu, ETEa ez baita fidagarria kasu horietan. Hain zuzen ere, (2.57) eta (2.70) dentsitate-banaketek ez digute ekarpen hauen tamainari buruzko informaziorik ematen, eta ondorioz instantoi-zuzenketa arbuigarriak ez diren eskualdeetan zehaztasuna galduko dute. Are gehiago, [145, 155] erreferentziek diotenez, jakin badakigu (2.57) banaketa teorikoarekiko espero baino huts-dentsitate txikiagoa aurkituko dugula huts-multzo generikoan, fluxu jarrien hurbilpenarena ez baita guztiz fidagarria. Eranskin honetako aztergaia dugu deskribapen estatistiko zehatza ahalbidetzen duen parametro-espazioa. Honen arira, eskualde horren ξ EKH parametroaren bidezko estimazio analitikoa egingo dugu oktikaren kasuan.

D.1 Eskalarik gabeko hutsen ekuazioak EKH puntuaren inguruan

Sekzio honi hasiera emango diogu (1.37) eskalarik gabeko ekuazioak EKH limitean berridatziz, geroago erabilgarria izango zaigun gisa batean. Erregimen honetan, non $\xi \rightarrow 0$ dugun, egitura konplexuko sektorearen Kähler potentziala ondorengo dugu:

$$Y \equiv e^{-K_{cs}} \approx \frac{1}{6} \kappa_{ijk} (z^i + \bar{z}^i)(z^j + \bar{z}^j)(z^k + \bar{z}^k), \quad (\text{D.1})$$

eta kanonikoki normalizatutako Yukawa akoplamenduek

$$\kappa_{111} = \frac{2}{\sqrt{3}} Y, \quad \kappa_{11\bar{a}} = 0, \quad \kappa_{1\bar{a}\bar{b}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} Y \delta_{\bar{a}\bar{b}}, \quad (\text{D.2})$$

ekuazioak betetzen dituzte [145, 155]. Aurreko adierazpenetan “1” norabidea eskalarik gabeko norabidearekin bat dator, ikus (2.31), eta $\bar{a}, \bar{b} = 2, \dots, h^{2,1}$. Bestalde

$$z^a = \frac{\sqrt{3}}{2} \delta_1^a + i\lambda^a, \quad K_a = -\sqrt{3} \delta_1^a, \quad (\text{D.3})$$

ditugu, non z^a ($a = 1, \dots, h^{2,1}$ delarik) kanonikoki normalizatutako eremuak diren huts-konfigurazioetan, eta $\lambda^a = \text{Im}(z^a)$ den. Aldagai hauen aljebra landuz, superpotentziala

$$W = -\frac{i}{6}\kappa_{abc}N_A^0 z^a z^b z^c + \frac{1}{2}\kappa_{abc}N_A^a z^b z^c + i\left(\kappa_a N_A^0 - \kappa_{ab}N_A^b - N_a^B\right)z^a + \kappa_0 N_A^0 + \kappa_a N_A^a - N_0^B, \quad (\text{D.4})$$

dugula frogatu dezakegu. Eskalarik gabeko (1.37) baldintzak, bestalde, ondorengoak ditugu:

$$D_0 W = -\frac{1}{6}\kappa_{abc}\bar{N}_A^0 z^a z^b z^c - \frac{i}{2}\kappa_{abc}\bar{N}_A^a z^b z^c + \left(\kappa_a \bar{N}_A^0 - \kappa_{ab}\bar{N}_A^b - \bar{N}_a^B\right)z^a - i\kappa_0 \bar{N}_A^0 - i\kappa_a \bar{N}_A^a + i\bar{N}_0^B = 0, \\ D_a W = -\frac{i}{2}\kappa_{abc}N_A^0 z^b z^c + \kappa_{abc}N_A^b z^c + i\kappa_a N_A^0 - i\kappa_{ab}N_A^b - iN_a^B - \sqrt{3}W\delta_a^1 = 0. \quad (\text{D.5})$$

Ekuazio hauek zehazki aztertzeke, komenigarria da fluxu-bektorearen osagaien ondorengo definizioez baliatzea:

$$\hat{N}_0^B \equiv -\frac{1}{6}\kappa_{abc}N_A^0 \lambda^a \lambda^b \lambda^c - \frac{1}{2}\kappa_{abc}N_A^a \lambda^b \lambda^c - \left(\kappa_a N_A^0 - \kappa_{ab}N_A^b - N_a^B\right)\lambda^a + \kappa_0 N_A^0 + \kappa_a N_A^a - N_0^B, \quad (\text{D.6})$$

$$\hat{N}_a^B \equiv -\frac{1}{2}\kappa_{abc}N_A^0 \lambda^b \lambda^c - \kappa_{abc}N_A^b \lambda^c - \kappa_a N_A^0 + \kappa_{ab}N_A^b + N_a^B. \quad (\text{D.7})$$

Kontuan izan $\hat{N} = \hat{f} - \tau \hat{h}$ definizioan agertzen diren \hat{f}_I^B eta \hat{h}_I^B fluxu-parametroak errealak direla; aitzitik, ez dira osoko zenbakiak izango orokorrean. Parametro berri hauek erabiliz, superpotentziala horrela berridatzi dezakegu:

$$W = \hat{N}_0^B - i\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{N}_1^B + \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\lambda^1 - \frac{i}{8}\right)N_A^0 + \frac{\sqrt{3}}{4}N_A^1\right]Y, \quad (\text{D.8})$$

eta eskalarik gabeko huts-ekuazioak ondorengoak ditugu:

$$\left[\left(\frac{1}{2}\lambda^1 + \frac{i}{4\sqrt{3}}\right)N_A^0 + \frac{1}{2}N_A^1\right]Y + i\hat{N}_1^B = -\frac{2}{\sqrt{3}}\hat{N}_0^B, \quad (\text{D.9})$$

$$\left[\left(\frac{1}{2}\lambda^1 - \frac{i\sqrt{3}}{4}\right)N_A^0 + \frac{1}{2}N_A^1\right]Y + i\hat{N}_1^B = 2\sqrt{3}\hat{N}_0^B, \quad (\text{D.10})$$

$$\left[\frac{1}{2}\lambda^{a'}N_A^0 + \frac{1}{2}N_A^{a'}\right]Y + i\hat{N}_{a'}^B = 0. \quad (\text{D.11})$$

Adierazpen hauek modu trinkoago batean honela idatzi daitezke:

$$\boxed{\hat{N}_0^B = -\frac{i}{8}Y N_A^0, \quad \hat{N}_a^B = \frac{i}{2}Y (N_A^0 \lambda^a + N_A^a)}. \quad (\text{D.12})$$

Bigarren ekuazioa e_i^a vielbeinarekin kontrakzioa eginez,

$$\hat{N}_i^B = \frac{i}{2} Y \left(N_A^0 \lambda^j + N_A^j \right) g_{ji} \quad (\text{D.13})$$

dugu, non $\hat{N}_a^B e_i^a = \hat{N}_i^B$ eta $N_A^a e_i^a = N_A^j e_j^a e_i^a = N_A^j g_{ji}$ erabili ditugun, eta horien baliokideak λ^a aldagaiarentzat. Birdefinitutako fluxuak, beraz, horrela idatziko ditugu:

$$\begin{aligned} \hat{N}_0^B \equiv & -\frac{1}{6} \kappa_{ijk} N_A^0 \lambda^i \lambda^j \lambda^k - \frac{1}{2} \kappa_{ijk} N_A^i \lambda^j \lambda^k - \left(\kappa_i N_A^0 - \kappa_{ij} N_A^j - N_i^B \right) \lambda^i \\ & + \kappa_0 N_A^0 + \kappa_i N_A^i - N_0^B, \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

$$\hat{N}_i^B \equiv -\frac{1}{2} \kappa_{ijk} N_A^0 \lambda^j \lambda^k - \kappa_{ijk} N_A^j \lambda^k - \kappa_i N_A^0 + \kappa_{ij} N_A^j + N_i^B. \quad (\text{D.15})$$

D.2 EKH parametroaren behe-bornea

Ondorengoan fluxu jarraituen hurbilketaren erabilgarritasuna aztertuko dugu EKH puntuaren inguruan, huts-multzo generikoaren kasuan. Gure helburua eskualde hau ξ EKH parametroaren borneen funtzioan adieraztea izango da.

Eztabaida hau \hat{N}_0^B fluxu-parametroaren (D.12) ekuazioa aztertuz hasiko dugu, $\xi \rightarrow 0$ limitean eta $N_A^0 \neq 0$ kasuan. EKH parametroaren (2.25) definizioa erabiliz, Y horrela berridatzi dezakegu EKH limitean, hau da, $\xi \rightarrow 0$ dugunean:

$$Y = 2 |\text{Im} \kappa_0| \frac{1 + \xi}{\xi} \approx 2 |\text{Im} \kappa_0| \xi^{-1}. \quad (\text{D.16})$$

Bestalde, N_A^0 -ren definizioaz baliatuz, ondorengo behe-bornea dugu:

$$|N_A^0|^2 = (f_A^0 - \text{Re}(\tau) h_A^0)^2 + \text{Im}^2(\tau) (h_A^0)^2 \geq 1, \quad (\text{D.17})$$

non $\text{Im}(\tau) > 1$ erabili dugun azken pausoa, hutsak, beharrez, soka-akoplamendu ahuleko eskualdean baitaude. Honen ondorio zuzena da

$$|\hat{N}_0^B| \approx \frac{|\text{Im} \kappa_0| |N_A^0|}{4\xi} \quad (\text{D.18})$$

EKH limitean aurkitzen diren hutsetan. Kontuan izan behar dugu $|N_A^0| \neq 0$ aintzat eman dugula, eta, ondorioz, ekuazioaren eskuineko aldea infinitura doala $\xi \rightarrow 0$ limitean, hau da, $|\hat{N}_0^B| \gtrsim \mathcal{O}(\xi^{-1})$. Horrenbestez, (D.7) adierazpeneko termino batzuk ere handiak izan beharko dira. (D.17) ekuazioan argi ikus dezakegunez, aurreko baldintza ez da murrizgarria izango baldin eta $\mathcal{O}(1)$ balioa badute $|N_A^0|$ eta $\text{Im} \tau$ aldagaiek. Kasu horretan,

$$|\hat{N}_0^B| \gtrsim \frac{|\text{Im} \kappa_0|}{4\xi} \quad (\text{D.19})$$

izango dugu. Baldintza hori ebaztearren, $\lambda^i = \text{Im} z^i$ parametroak ahalik eta handien egiten saia gintezke, hau da, $\lambda^i = \mathcal{O}(\xi^{-1/3})$; alabaina, kasu horretan (D.7)-ren termino kubikoek

emango lukete ekarpen nagusia, eta (D.12)-ko lehen ekuazioa horrela geratuko litzateke:

$$\frac{1}{6} \kappa_{ijk} \lambda^i \lambda^j \lambda^k \approx i \frac{|\text{Im} \kappa_0|}{4\xi}. \quad (\text{D.20})$$

Begibistan da ekuazio hau ebaztezina dela, ezker aldea erreala delako eta eskuin aldea, berriz, irudikaria. Hemendik eratorri dugun konklusioa bat dator [145, 155] artikuluetan lortzen dutenarekin, bertan frogatu baitzen superpotentzialaren termino kubikoak nagusitzen diren kasuetan (1.37) ekuazioek ez dutela eskalarik gabeko soluziorik EKH puntuaren inguruan.

Horren ondorioz, (D.7) ekuazioko λ^i -ren potentzia ezberdinak dituzten terminoak er-kagarriak izatea behar dugu. Gainera, aurrepotentzialaren koefiziente konstanteak $\mathcal{O}(1)$ direnez, (1.41) zapaburu-baldintza erabili dezakegu $|\hat{N}_0^B| = \mathcal{O}(\sqrt{N_{\text{flux}}})$ lortzeko. Aurreko guztia gogoan izanda, EKH parametroaren behe-bornea ondorengoa dugu:

$$\xi \gtrsim \xi_{\min} \Big|_{N_A^0 \neq 0} \equiv \frac{|\text{Im} \kappa_0|}{4\sqrt{N_{\text{flux}}}}. \quad (\text{D.21})$$

Adibidez, $\text{WP}_{[1,1,1,1,4]}^4$ ereduarentzat, $N_{\text{flux}} = 972$ eta $2|\text{Im} \kappa_0| \approx 2.9$ ditugu. Horrenbestez,

$$\xi_{\min} = \mathcal{O}(10^{-2}) \quad (\text{D.22})$$

izango dugu eredu konkretu horretan.

Multzo murriztuari dagokionez, ezin ditugu aurreko kalkuluak aplikatu. Izan ere, $\xi \rightarrow 0$ limitean, $f_A^0 = h_A^0 = h_A^z = 0$ izanik, ondorengoa dugu:

$$f_0^B = f_A^z k_z + \frac{h_0^B}{2(h_z^B)^2} [2h_z^B (f_z^B + f_A^z k_{zz}) - f_A^z h_0^B k_{zzz}]. \quad (\text{D.23})$$

Hau da, ξ EKH parametroa eskalarik gabeko soluzioak parametrizatzeko erabili dezakegu. Horrenbestez, $\text{Im} \tau \approx (\xi_0/\xi)^{1/3} |f_A^z/h_z^B|$ norabidea laua dela ondorioztatu dezakegu, non $\xi_0 \equiv (3/2^4) |\text{Im} \kappa_0| k_{zzz}^2$ den, eta EKH/akoplamendu-ahul limiteekiko nahi bezain gertu aurkitu ahal izango ditugu soluzioak.

D.3 EKH parametroaren goi-bornea eta instantoi-zuzenketak

Sekzio honetan N fluxu-bektorearekiko independentea den ξ_{\max} goi-bornea lortuko dugu. Horretarako, egitura konplexuaren modulu-espazioaren metrika aztertuko dugu eta honen instatoi-zuzenketak txikiak izan daitezela inposatuko dugu. Arestian aipatu dugun bezala, zenbakizko analisiak erakutsi digu eremu-espazioaren metrika dela, oro har, gehien aldatzen dena zuzenketa hauen ondorioz. Hartara, estimatzaile baliagarria zaigu metrika ETEaren baliozkotasun eremua zenbateteko. Komenigarria izango zaigu aurrepotentziala horrela banatzea:

$$\mathcal{F}(z) = \hat{\mathcal{F}}(z) + \mathcal{F}_*(z) + \dots, \quad (\text{D.24})$$

non $\hat{\mathcal{F}}$ aurrepotentzialaren zati perturbatiboa den, eta \mathcal{F}_* terminoak instantoiien ekarpen nagusiak biltzen dituen. Oktikaren kasuan, EKH puntuaren inguruan aurrepotentziala deskribatzen dute (2.51) eta (2.52) adierazpenek, hau da,

$$\hat{\mathcal{F}}(z) = \frac{i}{6}\kappa_3 z^3 + \frac{1}{2}\kappa_2 z^2 + i\kappa_1 z + \frac{1}{2}\kappa_0, \quad \mathcal{F}_*(z) = -\frac{in_1}{(2\pi)^3} e^{-2\pi z}. \quad (\text{D.25})$$

Azken ekuazio honen bigarren zatia oso txikia da $\hat{\mathcal{F}}$ funtzioarekin alderatuz, EKHko eskualdean. Banaketa hau (1.31) periodo-bektorean ere egin dezakegu:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 \\ iz \\ 2\mathcal{F} - z\partial_z \mathcal{F} \\ -i\partial_z \mathcal{F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ iz \\ 2\hat{\mathcal{F}} - z\partial_z \hat{\mathcal{F}} \\ -i\partial_z \hat{\mathcal{F}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\mathcal{F}_* - z\partial_z \mathcal{F}_* \\ -i\partial_z \mathcal{F}_* \end{pmatrix} \equiv \hat{\Pi} + \Pi_*. \quad (\text{D.26})$$

Instantoiien ekarpen nagusia soilik mantenduz, (2.4) Kähler potentziala ondorengoa dugu:

$$\begin{aligned} e^{-K_{cs}} &= i \Pi^\dagger \cdot \Sigma \cdot \Pi \approx i \hat{\Pi}^\dagger \cdot \Sigma \cdot \hat{\Pi} + i \hat{\Pi}^\dagger \cdot \Sigma \cdot \Pi_* + i \Pi_*^\dagger \cdot \Sigma \cdot \hat{\Pi} \\ &= e^{-\hat{K}} - 2 \operatorname{Im}(\hat{\Pi}^\dagger \cdot \Sigma \cdot \Pi_*). \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

Hartara, $\mathcal{I} \equiv \operatorname{Im}(\hat{\Pi}^\dagger \cdot \Sigma \cdot \Pi_*)$ definituz eta aurreko adierazpenaren orden nagusia soilik aintzat hartuz, hauxe dugu Kähler potentzial zuzendua:

$$K_{cs} \approx \hat{K} + 2\mathcal{I} e^{\hat{K}}. \quad (\text{D.28})$$

Metrikaren arteztu gabeko balioa eta horren instantoi-ekarpen nagusia

$$G_{z\bar{z}} \equiv \partial_z \partial_{\bar{z}} \hat{K}, \quad g_{z\bar{z}} \equiv \partial_z \partial_{\bar{z}} (2\mathcal{I} e^{\hat{K}}), \quad (\text{D.29})$$

definituz, eremu-espazioaren metrika ondorengoa dugu:

$$\begin{aligned} \partial_z \partial_{\bar{z}} K_{cs} &\approx G_{z\bar{z}} + g_{z\bar{z}} \\ &= G_{z\bar{z}} + 2e^{\hat{K}} (G_{z\bar{z}} \mathcal{I} + \hat{K}_z \hat{K}_{\bar{z}} \mathcal{I} + \hat{K}_{\bar{z}} \mathcal{I}_z + \hat{K}_z \mathcal{I}_{\bar{z}} + \mathcal{I}_{z\bar{z}}), \end{aligned} \quad (\text{D.30})$$

non azpi-indizeek deribatu partzialak adierazten dituzten.

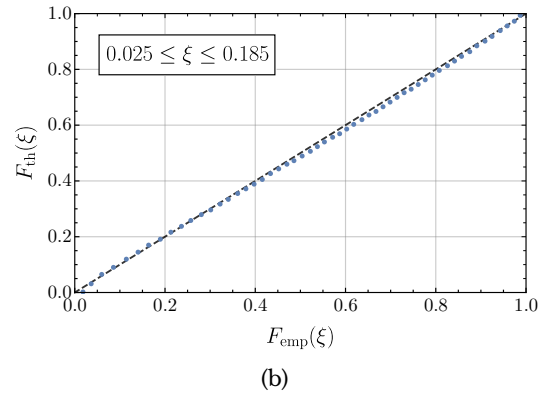
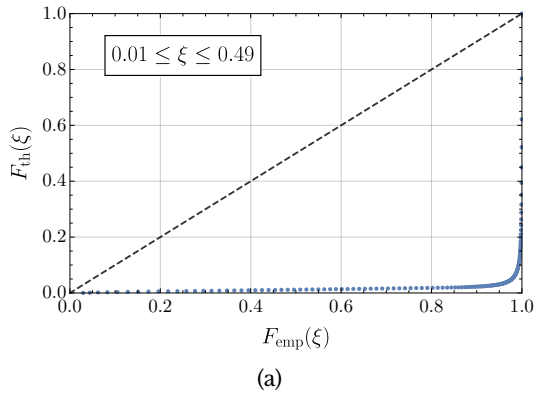
Demagun $G_{z\bar{z}}$ zuzendu gabeko metrikaren *vielbein erreala* dela e_z^1 (hau da, $G_{1\bar{1}} = 1$); hau erabiliz,

$$g_{1\bar{1}} = 2e^{\hat{K}} \left((1 + (\hat{K}_1)^2) \mathcal{I} + \hat{K}_1 (\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_{\bar{1}}) + \mathcal{I}_{1\bar{1}} \right), \quad (\text{D.31})$$

dugu, non $\hat{K}_1 = e_z^z \hat{K}_z = e_{\bar{1}}^{\bar{z}} \hat{K}_{\bar{z}} = \hat{K}_{\bar{1}}$ erabili dugun. \mathcal{I} funtzioaren eta honen deribatu partzialen balioa zuzenean kalkulatu daiteke. $\theta = 2\pi \operatorname{Im}(z)$ definituz eta (2.26) erabiliz,

$$\mathcal{I} = -\frac{n_1}{4\pi^3} e^{-2\pi \operatorname{Re}(z)} (1 + 2\pi \operatorname{Re}(z)) \cos(\theta), \quad (\text{D.32})$$

$$\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_{\bar{1}} = \frac{2n_1}{\pi} e^{-2\pi \operatorname{Re}(z)} \frac{\operatorname{Re}^2(z)}{x} \cos(\theta), \quad (\text{D.33})$$



D.1 irudia: ξ parametroaren (2.62) distribuzio teorikoa eta zenbakizko huts-multzo generikoa alderatzen dituen P-P diagrama, ondorengo tartetan: (a) $0.01 \leq \xi \leq 0.49$ eta (b) $0.025 \leq \xi \leq 0.185$. Lerrozuzen marratua bien arteko adostasun perfektua adierazten du. Bistan da soilik (b) kasuan erabilitako tartean bat datozela banaketa teorikoa eta zenbakizko datuak.

$$\mathcal{I}_{1\bar{1}} = \frac{2n_1}{\pi} e^{-2\pi\text{Re}(z)} \frac{\text{Re}^2(z)}{x^2} \cos(\theta). \quad (\text{D.34})$$

ditugu. 2.4 sekzioko analisiaren arabera, ondorengo erlazioak betetzen direla badakigu:

$$e^{\hat{K}} = \frac{1}{2|\text{Im } \kappa_0|} \frac{\xi}{1+\xi}, \quad \hat{K}_1 = -\sqrt{\frac{3}{1-2\xi}}, \quad (\text{D.35})$$

$$x^2 = \frac{3(1-2\xi)}{(1+\xi)^2}, \quad \text{Re } z = \left(\frac{3|\text{Im } \kappa_0|}{2\kappa_3} \right)^{1/3} \frac{1}{\xi^{1/3}}. \quad (\text{D.36})$$

Hartara, (D.32) eta (D.36) ordezkatu ditzakegu (D.31) adierazpenean; gainera, $\alpha \equiv \left(\frac{3|\text{Im } \kappa_0|}{2\kappa_3} \right)^{1/3}$ konstantea erabilia, hauxe dugu metrikaren zuzenketa nagusia:

$$g_{1\bar{1}} = -\frac{n_1 \cos \theta}{6\pi^3 |\text{Im } \kappa_0|} \frac{(2-\xi)\xi^{1/3}}{(1+\xi)(1-2\xi)} e^{-\frac{2\pi\alpha}{\xi^{1/3}}} \left((2\pi\alpha)^2 (1+\xi) + 3\xi^{2/3} + 6\pi\alpha\xi^{1/3} \right).$$

Metrikaren korrekzio erlatiboak %20 baino txikiagoak izatea eskatuko dugu (bestela esanda, $|g_{1\bar{1}}| \leq 0.2$ izan beharko da, $G_{1\bar{1}} = 1$ da-eta). Oktikaren kasuan,

$$\xi \leq \xi_{\max} \approx 0.2 \quad (\text{D.37})$$

izango dugu, horrenbestez.

D.4 Deskribapen estatistikoaren zehaztasuna

2.6 sekzioan aurkeztu dugun deskribapen estatistikoa bi suposaketetan oinarritzen da: lehenik, ETEa definitzen duen aurrepotentziala soilik termino polinomikoak dituela (instantoien ekarpena arbuilatuz, hots $\mathcal{F}_{\text{inst}} \equiv 0$); bigarrenik, N fluxu-bektorea ausazko aldagai jarraitutzat jo dezakegula. Bi baldintza hauek inposatu genituen jatorrizko problema analitikoki ebazgarria izan zedin, eta baita zenbakizko analisia sinplifikatzeko ere, homotopien jarraipen

metodoak erabili ahal izateko. Ondorioz, baldintza hauekin bat ez datozen parametro-espazioaren eskualdeetan, espero dugu banaketa teorikoak eta lortutako histogramak bat ez etortzea. Hemengo honetan, datuen desbideratze hori identifikatzeko erabili dugun metodoa aurkeztuko dugu. ξ EKH parametroan oinarrituko dugu gure azalpena, hain zuzen ere; horren banaketa teorikoak multzo generikoarentzat eta murriztuarentzat (2.62) eta (2.71) ekuazioetan ageri dira, hurrenez hurren.

Arestian esan bezala, ezinezkoa da banaketa teorikoa ξ -ren domeinu osoan aplikatzea. Alde batetik, konitate puntuaren inguruan dauden hutsek, non $\xi_{\text{cnf}} \approx 0.39$ den, instantoi-ekarpen handiak erraz jaso ditzakete; bestetik, $\xi \rightarrow 0$ EKH limitetik gertu aurkitzen diren soluzioak oso urriak izatea espero dugu, fluxu jarraituen hurbilpena bertan ez baita betetzen. Beraz, ξ parametroaren banaketa teorikoaren borne enpirikoak lortzen saiatuko gara ondorengoan, aplikagarritasun eremu zehatza lortzearren. Literaturan horretarako maiz erabili den metodo grafikoa dugu *P-P diagrama* (ikus, adibidez, [276]), datu enpirikoak erreferentzia-banaketa batekin erraz alderatzeko. Metodo horretan $F_{\text{em}}(\xi)$ eta $F_{\text{th}}(\xi)$ metatze-banaketa funtzio enpiriko eta teorikoak elkarrekiko marrazten dira. Bata bestearekin guztiz bat baldin badator, diagramak 45 graduko lerrozuzena osatuko du.

D.1 irudian ageri denez, multzo generikoaren kasuan Deneff-Douglas banaketarekiko adostasun mailarik hoberena

$$0.025 \leq \xi \leq 0.185. \quad (\text{D.38})$$

tartean lortzen da. D.1(a) irudian ikus dezakegun desadostasun handiaren sortzailea da EKH puntuaren inguruaren huts-defizita, multzo generikoaren kasuan. Nabarmena da lortu ditugun borne hauek bat datozela arestian lortu ditugun (D.22) eta (D.37) estimazioekin; gogoratu hauek ETEaren eta fluxu jarraituen hurbilketaren aplikagarritasun eremua definitzen dutela, azken batean.

Analisi berdina jarrai dezakegu kasu murriztuarentzat; hartara, banaketa teorikoa eta enpirikoa bat datozen parametro-tartea lortu dugu:

$$5 \cdot 10^{-5} \leq \xi|_{N_A^0=0} \leq 0.185. \quad (\text{D.39})$$

Argi dago 2.6 sekzioko histogrametan (2.57) Deneff-Douglas banaketak EKH parametroa zehazki deskribatzen duela, baita beste hainbat kantitate fisiko ere (Yukawa akoplamenduak, fermioien eta eskalarren masak etab.), sekzio honetan lortu dugun parametro-tartean betiere.

E eranskina

Slepian ereduaren eraikuntza

Eranskin honetan ausazko eremu gausstarrak (AEGak) izango ditugu aztergai. Hain zuzen ere, horiek sortzeko testu nagusian erabili ditugun tresna eta kalkuluak deskribatuko ditugu. Ondorengoan [170, 227] erreferentzien garapenetan oinarrituko gara batez ere.

E.1 Atariko oharrak eta ausazko gausstar aldagaien ezaugarri batzuk

Definizioz, x ausazko aldagaiak probabilitate-banaketa *normala* edo *gausstarra* jarraitzen duela esaten dugu, baldin eta horren probabilitate-banaketa funtzioa (PBF)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{E.1})$$

bada, non $\mu = \langle x \rangle$ eta $\sigma^2 = \langle (x - \mu)^2 \rangle$ banaketaren batez bestekoa eta bariantza diren, hurrenez hurren. Era berean, $\mathbf{x}^T = (x_1, \dots, x_p)$ bektore p -dimentsionalari ausazko bektore gausstarra (edo elkarrekiko gausstarrak diren aldagaiez osatutako bektorea) deritzogu, honen edozein konbinazio linealak ondorengo baldintza betetzen badu:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^p a_i x_i \sim N(\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}), \quad (\text{E.2})$$

hau da, banaketa normala jarraitzen badu. Bektore osoaren PBFa ondorengoa dugu:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} \sqrt{\det \Sigma}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right] \quad (\text{E.3})$$

non $\boldsymbol{\mu} = \langle \mathbf{x} \rangle$ batez besteko *bektorea* den eta Σ *kobariantza-matrize* ez-endekatua dugun, azken hori osatzen duten elementuak

$$\Sigma_{ij} = \langle (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) \rangle. \quad (\text{E.4})$$

direlarik.

E.2 Ausazko bektore gausstar baldintzatuak

Izan bitez A matrizea, $p \times p$ dimentsioduna, eta $\mathbf{x}^T = (x_1, \dots, x_p)$ ausazko bektore gausstarra. Definizioz,

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} \quad \rightarrow \quad y_j = A_{ij}x_i \quad (\text{E.5})$$

ausazko bektore gausstarra izango da, $\boldsymbol{\mu}'$ batez bestekoa eta Σ' kobariantzia matrizea duena. (E.5) transformazio lineala denez, batez besteko berria hauxe dugu:

$$\boldsymbol{\mu}' = A\boldsymbol{\mu}, \quad (\text{E.6})$$

eta kobariantzia matrize berria, bestalde, ondorengo izango da:

$$\begin{aligned} \Sigma'_{ij} &= \langle (y_i - \mu'_i)(y_j - \mu'_j) \rangle = \langle (x_a A_{ai} - \mu_b A_{bi})(x_c A_{cj} - \mu_d A_{dj}) \rangle \\ &= \langle x_a x_c \rangle A_{ai} A_{cj} - \mu_d \langle x_a \rangle A_{ai} A_{dj} - \mu_b \langle x_c \rangle A_{bi} A_{cj} + \mu_b \mu_d A_{bi} A_{dj} \\ &= \langle (x_a - \mu_a)(x_b - \mu_b) \rangle A_{ai} A_{bj} = (A^T)_{ia} \Sigma_{ab} A_{bj} \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

edo, laburrago idatzita,

$$\Sigma' = A^T \Sigma A. \quad (\text{E.8})$$

Probabilitate baldintzatuaren nozioak ausazko bektore gausstarretan barneratzearen, ausazko aldagai multzoen ezaugarri interesgarri batzuk aurkeztuko ditugu lehenbizi. Hain zuzen ere, \mathbf{x} ausazko bektore gausstarra bi zatitan banatzen badugu, hau da,

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = ((x_1, \dots, x_d), (x_{d+1}, \dots, x_p)) \quad (\text{E.9})$$

horren batez besteko bektorea eta kobariantzia matrizea ere nolabait banatu beharko dira:

$$\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) = ((\mu_1, \dots, \mu_d), (\mu_{d+1}, \dots, \mu_p)) \quad (\text{E.10})$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}, \quad (\text{E.11})$$

non Σ -ren bloke bakoitzaren dimentsioak egokitu ditugun \mathbf{x}^1 eta \mathbf{x}^2 bektoreen arteko kobariantziak deskribatzeko.

Idea horiek kontuan izanik, \mathbf{x} bektorearen transformazio lineala egingo dugu, ondorengo matrizea erabiliz:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_d & -\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbb{1}_{p-d} \end{pmatrix}. \quad (\text{E.12})$$

Kalkulu algebraiko erraz batzuen ostean, \mathbf{y} bektore gausstar berria lortuko dugu:

$$\mathbf{y}^T = (\mathbf{x}_1 - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2) = (\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2) \quad (\text{E.13})$$

Azken horren batez besteko bektorea eta kobariantzia matrizeak hauexek ditugu:

$$\boldsymbol{\mu}'^T = (\boldsymbol{\mu}_1 - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\mu}_2) \quad (\text{E.14})$$

$$\Sigma' = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} & 0 \\ 0 & \Sigma_{22} \end{pmatrix}. \quad (\text{E.15})$$

Horrenbestez, \mathbf{y}_1 eta \mathbf{x}_2 bektoreek ez dute elkarrekiko korrelaziorik eta bata bestearekiko independenteak dira.

Izan bedi bi aldaigaietako $f(x_1, x_2)$ baterako probabilitate-banaketa funtzioa. $f'(x_1|x_2 = \tilde{x})$ baldintzazko probabilitate funtzioa horrela definituko dugu [277]:

$$f'(x_1|x_2 = \tilde{x}) \equiv \frac{f(x_1, \tilde{x})}{\int dx_1 f(x_1, \tilde{x})} = \frac{\int dx_2 \delta(x_2 - \tilde{x}) f(x_1, x_2)}{\int dx_1 \int dx_2 \delta(x_2 - \tilde{x}) f(x_1, x_2)}. \quad (\text{E.16})$$

Definizio hau ausazko bektoreetara orokortu dezakegu. Demagun \mathbf{x} ausazko bektore gausstarrak dela, eta horren azpimultzo bat $\mathbf{x}_2 = \tilde{x}$ balioan finkatu dugula. Printzipioz, \mathbf{x}_1 aldagaien balioak (E.3) ekuazioan ordezkatu genitzake, horrela lortzen dugun ekuazio normalizatu lantzeko. Haatik, ondorio interesgarriagoetara iritsiko gara arestian ikusitako emaitzak aplikatuz gero. $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ bektorea landu ordez, $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ bektorearen PBFan oinarrituko gara, non A matrizea (E.12) ekuazioan definitu dugun:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}) &= \frac{1}{(2\pi)^{p/2} \sqrt{\det \Sigma_{22}} \sqrt{\det(\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})}} \\ &\quad \exp \left[-\frac{1}{2}(\mathbf{y}_1 - \boldsymbol{\mu}'_1)^T (\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})^{-1} (\mathbf{y}_1 - \boldsymbol{\mu}'_1) - \frac{1}{2}(\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)^T \Sigma_{22}^{-1} (\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2) \right] \\ &= \tilde{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

Hartara, aurreko adierazpenean $\mathbf{x}_2 = \tilde{x}$ finkatuz eta (E.16) aplikatuz, hauxe dugu ausazko bektore gausstarraren banaketa baldintzatua:

$$\tilde{f}'(\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2 = \tilde{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \sqrt{\det \tilde{\Sigma}}} \exp \left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 - \tilde{\boldsymbol{\mu}})^T \tilde{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}_1 - \tilde{\boldsymbol{\mu}}) \right] \quad (\text{E.18})$$

non

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu}_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(\tilde{x} - \boldsymbol{\mu}_2) \quad (\text{E.19})$$

$$\tilde{\Sigma} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} \quad (\text{E.20})$$

erabili ditugun.

Aurreko adierazpenetan bistan da *ausazko bektore gausstar baldintzatuek banaketa gausstarrak jarraitzen dituztela*, hauen batez bestekoa eta kobariantza-matrizea $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ eta $\tilde{\Sigma}$ izanik, hurrenez hurren.

E.3 Ausazko eremu gausstarrak

Arestian landu ditugun kontzeptuak ausazko bektore gausstarren inguruan erraz orokortu daitezke zenbait parametroren mende dauden ausazko aldagaietara. Horrela, p gausstar aldagai izan ordez, horien kopuru infinitu bat izango dugu; hortaz, batez besteko bektorea eta kobariantzia matrizea *funtzioak* izango dira ondorengoan.

Ausazko eremu gausstar (AEG) bat, $\{V(\mathbf{t}), t \in \mathbb{R}^n\}$, ondorengo propietatea betetzen duen funtzio gisa definituko dugu:

$$\sum_{i=1}^r a_i V(\mathbf{t}_i) \sim N(\tilde{\boldsymbol{\mu}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \quad \forall r \in \mathbb{N}, \quad \forall a_i \in \mathbb{R} \quad (\text{E.21})$$

bere domeinuaren edozein puntutarako. Batezbesteko funtzioa $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{t}) = \langle V(\mathbf{t}) \rangle$ izango da, eta kobariantzia funtzioak $C(\mathbf{t}, \mathbf{s}) = \langle V(\mathbf{t})V(\mathbf{s}) \rangle$ bete beharko du. Azken hori $C(\mathbf{t}, \mathbf{s}) = f(\mathbf{t} - \mathbf{s})$ motakoa baldin bada, AEGa *homogeneoa* dela diogu; bestalde, $C(\mathbf{t}, \mathbf{s}) = g(\mathbf{t} \cdot \mathbf{s}, |\mathbf{t}|, |\mathbf{s}|)$ betetzen baldin badu, eremu honi *isotropo* deritzogu. Homogeneoak eta isotropoak diren AEGei *geldikor* esaten diegu, eta ondorengo ezaugarria betetzen dute:

$$C(\mathbf{t}, \mathbf{s}) = C(|\mathbf{t} - \mathbf{s}|). \quad (\text{E.22})$$

Testu nagusian azken mota horretako kobariantzia funtzioak landuko ditugu.

Azkenik, gogoan izan edonolako $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{t})$ batez bestekoa duen $V(\mathbf{t})$ AEGak horrela deskonposatu daitezkeela:

$$V(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{t}) + W(\mathbf{t}) \quad (\text{E.23})$$

non $W(\mathbf{t})$ batez besteko nulua duen eta $V(\mathbf{t})$ -ren kobariantzia funtzio berdina duen AEGa den. Eraikuntza hori baliagarria izango zaigu zenbakizko AEGak sortzeko (ikus F eranskina).

E.4 Korrelazio erabilgarriak

Gausstar aldagaien konbinazio linealak gausstarrak direnez, argi dago ausazko eremu gausstarren deribatuak ere gausstarrak izango direla. Hainbat gausstar aldagai erlazionatzen duen kobariantzia funtzio garrantzitsua dugu ondorengoa [170, sect. 5.5]:

$$\left\langle \frac{\partial^{\alpha+\beta} V(\boldsymbol{\phi})}{\partial^\alpha \phi_i \partial^\beta \phi_j} \frac{\partial^{\gamma+\delta} V(\boldsymbol{\phi})}{\partial^\gamma \phi_k \partial^\delta \phi_l} \right\rangle = (-1)^{\alpha+\beta} \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma+\delta}}{\partial^\alpha \phi_i \partial^\beta \phi_j \partial^\gamma \phi_k \partial^\delta \phi_l} C(\boldsymbol{\phi}) \Big|_{\boldsymbol{\phi}=\mathbf{0}}. \quad (\text{E.24})$$

Notazioa nolabait sinplifikatzearen $\partial_{\phi_j} V(\mathbf{0}) = V'_j(\mathbf{0})$ definituko dugu. Kasu baliagarri batzuentzat ebaluatu dezakegu aurreko adierazpena, besteak beste:

$$\langle V(\mathbf{0})V(\mathbf{0}) \rangle = U_0^2 \quad (\text{E.25})$$

$$\langle V(\mathbf{0})V'_i(\mathbf{0}) \rangle = \langle V'_i(\mathbf{0})V''_{jk}(\mathbf{0}) \rangle = 0 \quad (\text{E.26})$$

$$\langle V'_i(\mathbf{0})V'_j(\mathbf{0}) \rangle = -\langle V(\mathbf{0})V''_{ij}(\mathbf{0}) \rangle = -\frac{\partial^2 C(\mathbf{0})}{\partial \phi_i \partial \phi_j} = \alpha_2 \delta_{ij} \quad (\text{E.27})$$

$$\langle V''_{ij}(\mathbf{0})V''_{kl}(\mathbf{0}) \rangle = \frac{\partial^4 C(\mathbf{0})}{\partial\phi_i\partial\phi_j\partial\phi_k\partial\phi_l} = \begin{cases} \alpha_{22}, & i = j \neq k = l \text{ (eta perm.)} & \text{badira} \\ \alpha_4, & i = j = k = l & \text{badira} \\ 0, & \text{bestela} & \end{cases} \quad (\text{E.28})$$

$$\langle V(\mathbf{0})V'''_{jkl}(\mathbf{0}) \rangle = \langle V''_{ij}(\mathbf{0})V'''_{klm}(\mathbf{0}) \rangle = 0 \quad (\text{E.29})$$

$$\langle V'_i(\mathbf{0})V'''_{jkl}(\mathbf{0}) \rangle = -\langle V''_{ij}(\mathbf{0})V''_{kl}(\mathbf{0}) \rangle = \begin{cases} -\alpha_{22}, & i = j \neq k = l \text{ (eta perm.)} & \text{badira} \\ -\alpha_4, & i = j = k = l & \text{badira} \\ 0, & \text{bestela} & \end{cases} \quad (\text{E.30})$$

$$\langle V'''_{ijk}(\mathbf{0})V'''_{lmn}(\mathbf{0}) \rangle = -\frac{\partial^6 C(\mathbf{0})}{\partial\phi_i\partial\phi_j\partial\phi_k\partial\phi_l\partial\phi_m\partial\phi_n} = \begin{cases} \alpha_{222}, & i = j \neq k = l \neq m = n \text{ (eta perm.)} & \text{badira} \\ \alpha_{24}, & i = j \neq k = l = m = n \text{ (eta perm.)} & \text{badira} \\ \alpha_6, & i = j = k = l = m = n & \text{badira} \\ 0, & \text{bestela} & \end{cases} \quad (\text{E.31})$$

Goiko adierazpenetako α_i , α_{ij} eta α_{ijk} zenbakizko konstanteak dira, eta soilik baldintzatu gabeko AEGaren kobariantzia funtzioaren mende daude. Kontuan izan dimentsio biko kasuan α_{222} konstantea nulua izango dela; izan ere, hirugarren deribatua adierazten duten indizeek bi balio besterik ez ditzakete izan.

Bestalde, gogoan izan behar dugu AEGaren deribatu bakoitiak bikoitiekiko independenteak direla, biak eremu-espazioaren puntu berdinean ebaluatuz gero. Kobariantzia funtzioaren isotropia dela eta gertatzen da hori: kobariantzia berretura-serie moduan idatziko bagenu, potentzia bikoitiak dituzten terminoak ageriko lirateke soilik (hau da, $\phi_i^2, \phi_i^2\phi_j^2$ modukoak). Ondorioz, deribatu bikoitiak erlazionatzen dituzten korrelazioak soilik ez-nuluak izango dira. Haatik, horrek ez du esan nahi $V(\boldsymbol{\phi})$ eta, adibidez, $V'_i(\boldsymbol{\phi})$ eremuek korrelaziorik ez dutenik. Horiek eremu-espazioaren bi puntutan ebaluatuz, ondorengo adierazpenak lor daitezke [226, 2.3 teorema]:

$$\langle V(\boldsymbol{\phi})V'_i(\mathbf{0}) \rangle = -\frac{\partial}{\partial\phi_i}C(\boldsymbol{\phi}) \quad (\text{E.32})$$

$$\langle V(\boldsymbol{\phi})V''_{ij}(\mathbf{0}) \rangle = \frac{\partial^2}{\partial\phi_i\partial\phi_j}C(\boldsymbol{\phi}) \quad (\text{E.33})$$

$$\langle V(\boldsymbol{\phi})V'''_{ijk}(\mathbf{0}) \rangle = -\frac{\partial^3}{\partial\phi_i\partial\phi_j\partial\phi_k}C(\boldsymbol{\phi}). \quad (\text{E.34})$$

Horrenbestez, AEGa eta bere deribatuak globalki korrelazionatuta daude.

E.5 Kac-Rice formula eta ausazko eremu gausstar baldintzatuak

Izan bedi n osagaiez osatutako ondorengo ausazko eremu gausstar *bektoriala*: $\mathcal{V}(\boldsymbol{\phi}) = \{V_1(\boldsymbol{\phi}), \dots, V_n(\boldsymbol{\phi})\}$. Kac-Rice formula multidimentsionala¹ eremu horri aplikatuz gero, $\mathcal{V}(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{u}$ motako gertaera zehatzen itxarondako instantzia kopurua lortuko dugu, \forall bolu-

¹Kontuan izan formula hau soilik $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ motako aplikazioetan erabili daitekeela.

mena duen $\boldsymbol{\phi} \in I$ tartean:

$$\mathbb{E}_{\#,I}[\mathcal{V}(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{u}] = \left\langle \int_I d\boldsymbol{\phi} |\det \mathcal{V}'(\boldsymbol{\phi})| \delta(\mathcal{V}(\boldsymbol{\phi}) - \mathbf{u}) \right\rangle \quad (\text{E.35})$$

non $\det \mathcal{V}'(\boldsymbol{\phi})$ eremu bektorialaren jacobiarraren determinantea den,² hau da,

$$\mathcal{V}'(\boldsymbol{\phi}) = \begin{pmatrix} \partial_{\phi_1} V_1(\boldsymbol{\phi}) & \cdots & \partial_{\phi_1} V_n(\boldsymbol{\phi}) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{\phi_n} V_1(\boldsymbol{\phi}) & \cdots & \partial_{\phi_n} V_n(\boldsymbol{\phi}) \end{pmatrix}. \quad (\text{E.36})$$

Eremua *geldikorra* bada, hots, homoginoa eta isotropoa bada, aurreko adierazpena sinplifikatzea daukagu. Hain zuzen ere, $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}(\mathbf{0})$ eta $\mathcal{V}'_0 = \mathcal{V}'(\mathbf{0})$ notazioaz baliatuz, eta prozesua ergodikoa dela onartuta, ondorengoa dugu:

$$\mathbb{E}_{\#,I}[\mathcal{V}(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{u}] = \mathcal{V} \int d\mathcal{V}_0 d\mathcal{V}'_0 |\det \mathcal{V}'_0| \delta(\mathcal{V}_0 - \mathbf{u}) P(\mathcal{V}_0, \mathcal{V}'_0) \quad (\text{E.37})$$

non aurreko integrala \mathcal{V}_0 eta \mathcal{V}'_0 eremuen domeinu osoan egin behar den, eta \mathcal{V}_0 eta bere deribatuen baterako PBFa dugun $P(\mathcal{V}_0, \mathcal{V}'_0)$. Aurreko adierazpenetan, aldibereko gertaera bat baino gehiago kontsideratu dezakegu, \mathcal{V} bektorea handituz eta gertaera bakoitza Dirac-en delten bidez adieraziz.³

Gertaera zehatz bat oro har zenbat aldiz ematen den jakiteko erabili ditzakegu arestian aurkeztutako adierazpenak. Era berean, hainbat aldagairen banaketa funtzioak ere lortzeko erabili ahal ditugu horiek. Hain zuzen ere, ergodikotasun teorema aplikatuz, frogatu dezakegu [226] A gertaerari atxikitutako probabilitatea, B lehen eman baldin bada, hau da, $P(A|B)$ deritzogun prozesua, horrela adierazi daitekeela:

$$P(A|B) = \frac{\mathbb{E}_{\#,I}[A \cap B]}{\mathbb{E}_{\#,I}[B]}. \quad (\text{E.38})$$

Ekuazio honetako A gertaera parametro jarraitu bat edo gehiagoren mende baldin badago (adibidez, AEGaren eremu-espazioaren posizioaren funtzioan idatzi ahal badugu), aurreko espresioa probabilitate-banaketa funtzioa da.

E.6 Puntu kritikoak ausazko eremu gausstar baldintzatueta

Arestian deskribatutako tresnak gogoan izanda, prest gaude AEG baldintzatuak lantzeko. Hasteko, (E.38) ekuazioa erabiliko dugu puntu kritikoen analisia egiteko. Hartara, batetik, A gertaerak $V(\boldsymbol{\phi})$ -ren konfigurazioa zehaztuko du, bestetik, B gertaerak $V(\mathbf{0}) \equiv V_0 = u$ eta $V'_i(\mathbf{0}) \equiv \eta_i = 0$ baldintzak inposatuko ditu, hau da, B gertaerak u altuerako puntu kritiko baten ezaugarriak deskribatzen ditu eremu-espazioaren zentroan. Analisia erraztearren,

²Puntu kritikoetan, jacobiarra eta AEGaren hessiarra bat datoz.

³Ikus [226, ch.8] gertaera baldintzagarrien sailkapenari buruzko eztabaidarako eta hauek nola landu daitezkeen aztertzeko. Testu honetan lantzen ari garen $V_0 = u$ gertaera, Dirac delten bidez erraz adierazi dezakegu, hori *leiho bertikal motako gertaera baldintzagarria* delako.

$V(\boldsymbol{\phi})$ horrela diskretizatuko dugu: $\{V(\boldsymbol{\phi}_1), \dots, V(\boldsymbol{\phi}_q)\} \equiv \{V_1, \dots, V_q\} \equiv \mathbf{V}$.

Kasu horretan, baldintza $\mathcal{V} = \nabla V$ AEG bektorialaren $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$ puntuan izango dugu, eremu horren jacobiarra jatorrizko V eremuaren hessiarra delarik. Ondorioz, horren determinantea zuzenean idatzi dezakegu puntu horretako hessiarren balio propioen biderkariaren bidez, $\prod_{i=1}^n \lambda_i$.

Horrenbestez, Kac-Rice formula, hots (E.37), erabili dezakegu (E.38) adierazpenean, hauxe lortzeko:

$$\begin{aligned} P\left(V(\boldsymbol{\phi}) \mid V_0 = u, \nabla V_0 = \mathbf{0}\right) &\equiv P_{cp}[V(\boldsymbol{\phi})] = \\ &= \frac{\int \prod_{i=1}^n \left(d\eta_i \delta(\eta_i) d\lambda_i |\lambda_i|\right) \Delta(\boldsymbol{\lambda}) \delta(V_0 - u) \prod_{j=1}^q \left(d\tilde{V}_j \delta(\tilde{V}_j - V_j)\right) P\left(V_0, \mathbf{V}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}\right)}{\int \prod_{i=1}^n \left(d\lambda_i |\lambda_i|\right) \Delta(\boldsymbol{\lambda}) \delta(V_0 - u) P\left(V_0, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}\right)} \end{aligned} \quad (\text{E.39})$$

$$= \mathcal{N} \int \prod_{i=1}^n \left(d\lambda_i |\lambda_i|\right) \Delta(\boldsymbol{\lambda}) P\left(V(\boldsymbol{\phi}), \lambda_1, \dots, \lambda_n \mid V_0 = u, \nabla V_0 = \mathbf{0}\right) \quad (\text{E.40})$$

non azkeneko adierazpenaren integrazio-domeinua lantzen ari garen puntu kritikoaren araberakoa den. Bestalde, $\Delta(\boldsymbol{\lambda}) \propto \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|$ dugu hessiar matrizearen osagaietatik bere balio propioetara jotzeagatik ageri zaigun jacobiarra, horren proportzionaltasun konstantea eremu-espazioaren dimentsioaren araberakoa izaki. Metodo horren bidez lortutako adierazpena sinplifikatzearen, (E.39) ekuazioan agertzen den izendatzailea normalizazio faktoretzat hartu dugu, zenbakitzailearen banaketarako.

Hartara, (E.40) modu erabilgarriagoan idatz dezakegu:

$$P_{cp}[V(\boldsymbol{\phi})] = \prod_i \int d\lambda_i q_u(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P\left(V(\boldsymbol{\phi}) \mid V_0 = u, \nabla V_0 = \mathbf{0}, \lambda_1, \dots, \lambda_n\right) \quad (\text{E.41})$$

non

$$q_u(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \prod_i |\lambda_i| \Delta(\boldsymbol{\lambda}) P\left(\lambda_1, \dots, \lambda_n \mid V_0 = u, \nabla V_0 = \mathbf{0}\right) \quad (\text{E.42})$$

hessiarren balio propioen banaketa adierazten duen, eremu-espazioaren jatorrian dagoen u altuerako puntu kritikoa, hain zuzen ere. Aitzitik, jatorrizko AEGaren homogeneitatea eta isotropia dela eta, aurreko banaketak AEGaren *edozein* puntu kritiko aztertzeke balio du, eta ondorioz horrek baldintzaturik gabeko eremuaren puntu kritikoaren parametroen banaketa ere adieraziko du.

Sekzio honetako emaitza garrantzitsuenak dira (E.41) eta (E.42) ekuazioak. Gogoan izan $\prod_i |\lambda_i| \Delta(\boldsymbol{\lambda})$ faktorea Kac-Rice formularen ondorio zuzena dela, **F** eranskinean esplizitu-ki ikusiko dugun bezala, eta ondorio garrantzitsuak dakartzala puntu kritikoetako balio propioen banaketan.

Metodo horren ahalmena bistan da. Gure eremu-espazioa diskretizatu dugula ohartuz, (E.41) eta (E.42) adierazpenetan agertzen diren baldintzazko probabilitate-banaketak zuzenean kalkulatu ditzakegu, E.2 sekzioko emaitzak erabiliz. Horiek, (E.42) adierazpenarekin

batera, u altuerako minimo baten balio propioak lortzeko behar dugun banaketara eramango gaituzte. Balio propio horiek (E.41) ekuazioan sartuz, jatorrian minimoa (edota maximo edo zela-puntua, azken batean) duten nahi adina AEG sortu ahal izango ditugu.

Makineria hori erraz aplikatzearren, ondorengo ausazko bektore gausstarra definituko dugu:

$$\{V(\boldsymbol{\phi}_1), \dots, V(\boldsymbol{\phi}_q), V(\mathbf{0}), V'_1(\mathbf{0}), \dots, V'_n(\mathbf{0}), V''_{11}(\mathbf{0}), \dots, V''_{nn}(\mathbf{0}), \underbrace{V''_{12}(\mathbf{0}), \dots, V''_{(n-1)n}(\mathbf{0})}_{V''_{ij}(\mathbf{0}) \quad i < j}\} \quad (\text{E.43})$$

non $\boldsymbol{\phi}_q$ eremu-espazio diskretuaren posizioak adierazten dituen, azken horren zentroa $\mathbf{0}$ puntuan dagoelarik. Bestalde, $V'_i(\mathbf{0})$ notazioak eremuaren ϕ_i -rekiko lehen deribatua adierazten du, eta $V''_{ij}(\mathbf{0})$ hessiar matrizearen (i, j) elementua da. Irakurgarritasuna xede, aurreko bektorea horrela trinkotuko dugu:

$$\{V, V(\mathbf{0}), V'(\mathbf{0}), V''(\mathbf{0})\}, \quad (\text{E.44})$$

eta bere dimentsioa, ondorioz, $q + 1 + n + n + \frac{1}{2}n(n-1)$ da. Aurreko emaitzen arabera, (E.43) bektorearen batez bestekoa nulua da, eta horren kobariantza-matrizea E.4 sekzioan aurkeztutako emaitzen bidez lor daiteke:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} S_{VV} & S_{V0} & S_{V1} & S_{V2} \\ S_{0V} & U_0^2 & \mathbf{0} & S_{02} \\ S_{1V} & \mathbf{0} & S_{11} & \mathbf{0} \\ S_{2V} & S_{20} & \mathbf{0} & S_{22} \end{pmatrix}. \quad (\text{E.45})$$

Hauexek ditugu aurreko matrizearen osagaiak:

$$S_{02} = \begin{pmatrix} -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = S_{20}^T \quad (\text{E.46})$$

$$S_{11} = \alpha_2 \times \mathbb{1}_n \quad (\text{E.47})$$

$$S_{22} = \left(\begin{array}{cccc|cc} \alpha_4 & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{22} & & \\ \alpha_{22} & \alpha_4 & \cdots & \alpha_{22} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ \alpha_{22} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_4 & & \\ \hline & & & & \alpha_{22} & 0 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & 0 & \alpha_{22} \end{array} \right) \quad (\text{E.48})$$

$$S_{VV} = \begin{pmatrix} C(\mathbf{0}) & C(\boldsymbol{\phi}_1 - \boldsymbol{\phi}_2) & \cdots & C(\boldsymbol{\phi}_1 - \boldsymbol{\phi}_q) \\ C(\boldsymbol{\phi}_2 - \boldsymbol{\phi}_1) & C(\mathbf{0}) & \cdots & C(\boldsymbol{\phi}_2 - \boldsymbol{\phi}_q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(\boldsymbol{\phi}_q - \boldsymbol{\phi}_1) & C(\boldsymbol{\phi}_q - \boldsymbol{\phi}_2) & \cdots & C(\mathbf{0}) \end{pmatrix} \quad (\text{E.49})$$

$$S_{0V} = \begin{pmatrix} C(\boldsymbol{\phi}_1) & C(\boldsymbol{\phi}_2) & \cdots & C(\boldsymbol{\phi}_q) \end{pmatrix} = S_{V0}^T \quad (\text{E.50})$$

$$S_{1V} = \begin{pmatrix} -C'_1(\boldsymbol{\phi}_1) & -C'_1(\boldsymbol{\phi}_2) & \cdots & -C'_1(\boldsymbol{\phi}_q) \\ -C'_2(\boldsymbol{\phi}_1) & -C'_2(\boldsymbol{\phi}_2) & \cdots & -C'_2(\boldsymbol{\phi}_q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -C'_n(\boldsymbol{\phi}_1) & -C'_n(\boldsymbol{\phi}_2) & \cdots & -C'_n(\boldsymbol{\phi}_q) \end{pmatrix} = S_{V1}^T \quad (\text{E.51})$$

$$S_{2V} = \begin{pmatrix} C''_{11}(\boldsymbol{\phi}_1) & \cdots & C''_{11}(\boldsymbol{\phi}_q) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C''_{nn}(\boldsymbol{\phi}_1) & \cdots & C''_{nn}(\boldsymbol{\phi}_q) \\ C''_{12}(\boldsymbol{\phi}_1) & \cdots & C''_{12}(\boldsymbol{\phi}_q) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C''_{(n-1)n}(\boldsymbol{\phi}_1) & \cdots & C''_{(n-1)n}(\boldsymbol{\phi}_q) \end{pmatrix} = S_{V2}^T \quad (\text{E.52})$$

Gausstar probabilitate-banaketa osoa bi puntuko funtzioetan oinarritzen denez, horrela⁴ idatzi dezakegu (E.45), notazioa argitzeko:

$$\Sigma = \left(\begin{array}{cc|ccc} U_0^2 & C(\boldsymbol{\phi}_1 - \boldsymbol{\phi}_2) & C(\boldsymbol{\phi}_1) & S_{V1}(\boldsymbol{\phi}_1) & S_{V2}(\boldsymbol{\phi}_1) \\ C(\boldsymbol{\phi}_2 - \boldsymbol{\phi}_1) & U_0^2 & C(\boldsymbol{\phi}_2) & S_{V1}(\boldsymbol{\phi}_2) & S_{V2}(\boldsymbol{\phi}_2) \\ \hline C(\boldsymbol{\phi}_1) & C(\boldsymbol{\phi}_2) & U_0^2 & \mathbf{0} & S_{02} \\ S_{1V}(\boldsymbol{\phi}_1) & S_{1V}(\boldsymbol{\phi}_2) & \mathbf{0} & S_{11} & \mathbf{0} \\ S_{2V}(\boldsymbol{\phi}_1) & S_{2V}(\boldsymbol{\phi}_2) & S_{20} & \mathbf{0} & S_{22} \end{array} \right). \quad (\text{E.53})$$

Matrize horren osagaiak hauexek ditugu:

$$S_{V1}(\boldsymbol{\phi}) = \begin{pmatrix} -C'_1(\boldsymbol{\phi}) & \cdots & -C'_n(\boldsymbol{\phi}) \end{pmatrix} = S_{1V}^T \quad (\text{E.54})$$

$$S_{V2}(\boldsymbol{\phi}) = \begin{pmatrix} C''_{11}(\boldsymbol{\phi}) & \cdots & C''_{nn}(\boldsymbol{\phi}) & C''_{12}(\boldsymbol{\phi}) & \cdots & C''_{(n-1)n}(\boldsymbol{\phi}) \end{pmatrix} = S_{2V}^T \quad (\text{E.55})$$

Hartara, (E.53) matrizeari dagokion ausazko bektore gausstarra ondorengoa dugu:

$$\{V(\boldsymbol{\phi}_1), V(\boldsymbol{\phi}_2), V(\mathbf{0}), V'(\mathbf{0}), V''(\mathbf{0})\}. \quad (\text{E.56})$$

Blokeka esplizituki deskonposatu dugu (E.53) matrizea, ondorengo (E.57) eta (E.58) adierazpenetan erabiltzeko eta prozesu baldintzatuaren batez besteko funtzioa eta kobariantza-matrizea lortzeko.⁵ Arestian lortutako emaitzak erabiliz, $V_0 = u$ eta $V'_0 = \mathbf{0}$ baldintzak bermatzen dituen AEGaren itxarondako balioa lortuko dugu, puntu berezi horren inguruan:

$$\tilde{\mu}(\boldsymbol{\phi}) = \mu(\boldsymbol{\phi}) + \begin{pmatrix} C(\boldsymbol{\phi}) & S_{V1}(\boldsymbol{\phi}) & S_{V2}(\boldsymbol{\phi}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0^2 & \mathbf{0} & S_{02} \\ \mathbf{0} & S_{11} & \mathbf{0} \\ S_{20} & \mathbf{0} & S_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{h} \end{pmatrix}$$

⁴Funtsean, lehen errenkada edonolako $\boldsymbol{\phi}_1$ bektorean ebaluatu dugu; lehen zutabea, aldiz, $\boldsymbol{\phi}_2$ bektorean, [227] liburuan bezala. Hartara, jarraia balitz bezala landu ahal izango dugu aldagai independentea, eta horren diskretizazioa ahaztuko dugu.

⁵Zehatzago esanda, lortuko ditugun batez bestekoa eta kobariantza $\{V(\boldsymbol{\phi}_1), V(\boldsymbol{\phi}_2)\}$ bektoreari dagozkionak dira. AEGaren isotropia dela eta, eremu-espazioaren edozein puntu izan daitezke $\boldsymbol{\phi}_1$ eta $\boldsymbol{\phi}_2$. Beraz, notazioa erraztearren, horrela lortzen dugun batez besteko bektorearen osagai bakarra aztertuko dugu soilik. Halaber, kobariantza-matrizearen $\langle V(\boldsymbol{\phi}_1)V(\boldsymbol{\phi}_2) \rangle$ osagaiaz arduratuko gara soilik.

$$= \begin{pmatrix} C(\boldsymbol{\phi}) & S_{V2}(\boldsymbol{\phi}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0^2 & S_{02} \\ S_{20} & S_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u \\ \mathbf{h} \end{pmatrix} \quad (\text{E.57})$$

non $\mathbf{h} = \{h_{11}, \dots, h_{nn}, h_{12}, \dots, h_{(n-1)n}\}$ bektoreak matrize hessiarraren osagaien konfigurazio zehatza adierazten duen, jatorriaren inguruan.

Era berean, hauxe dugu baldintzatutako AEGaren kobariantza-funtzioa:

$$\begin{aligned} \tilde{C}(\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2) &= C(\boldsymbol{\phi}_1 - \boldsymbol{\phi}_2) - \begin{pmatrix} C(\boldsymbol{\phi}_1) & S_{V1}(\boldsymbol{\phi}_1) & S_{V2}(\boldsymbol{\phi}_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0^2 & \mathbf{0} & S_{02} \\ \mathbf{0} & S_{11} & \mathbf{0} \\ S_{20} & \mathbf{0} & S_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} C(\boldsymbol{\phi}_2) \\ S_{1V}(\boldsymbol{\phi}_2) \\ S_{2V}(\boldsymbol{\phi}_2) \end{pmatrix} \\ &= C(\boldsymbol{\phi}_1 - \boldsymbol{\phi}_2) - \begin{pmatrix} C(\boldsymbol{\phi}_1) & S_{V2}(\boldsymbol{\phi}_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0^2 & S_{02} \\ S_{20} & S_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} C(\mathbf{s}) \\ S_{2V}(\boldsymbol{\phi}_2) \end{pmatrix} \\ &\quad - S_{V1}(\boldsymbol{\phi}_1) S_{11}^{-1} S_{1V}(\boldsymbol{\phi}_2). \end{aligned} \quad (\text{E.58})$$

Aurreko pauso berdinak jarraituz, (E.42) banaketa lortu dezakegu, hau da, u altueran dagoen edozein puntu kritikoren balio propioen banaketa. Eraitza horretara iristeko, jatorrizko kobariantza-matrize gisa (E.53) adierazpenaren beheko eskuineko blokea erabili beharko dugu.

E.6.1 Baldintzatutako dimentsio biko eremu gausstarren analisia

Arestian landutako adierazpenak dimentsio biko AEG geldikorretan aplikatuko ditugu. Horien kobariantza funtziozat

$$C(\boldsymbol{\phi}) = U_0^2 \exp\left(-\frac{\boldsymbol{\phi}^2}{2\Lambda^2}\right) \quad (\text{E.59})$$

aukeratu dugu, batez besteko nulua izanik. Kasu zehatz horri (E.57) aplikatuz, ondorengoa dugu baldintzatutako batez bestekoa:

$$\tilde{\mu}(\boldsymbol{\phi}) = e^{-\frac{\boldsymbol{\phi}^2}{2\Lambda^2}} \left[u \left(1 + \frac{\boldsymbol{\phi}^2}{2\Lambda^2} \right) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \right], \quad (\text{E.60})$$

non $h_{21} = h_{12}$ dugun, definizioz. Gogoan izan $\boldsymbol{\phi}$ -ren oinarria guk aukeratu dezakegula. Hurrengo adierazpenak sinplifikatzearen, hessiarraren bektore propioen oinarria eraibiliko dugu. Hartara, (E.60) horrela idatz dezakegu:

$$\tilde{\mu}(\boldsymbol{\phi}) = e^{-\frac{\boldsymbol{\phi}^2}{2\Lambda^2}} \left[u \left(1 + \frac{\boldsymbol{\phi}^2}{2\Lambda^2} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \lambda_i \phi_i^2 \right], \quad (\text{E.61})$$

non λ_i balio propioak (E.42) banaketatik lortu ditugun, lantzen ari garen kasuaren arabera adierazita (ikus (E.67) eta F eranskina). Erraz lor dezakegu baldintzatutako kobariantza, (E.58)

ekuazioa erabiliz:

$$\tilde{C}(\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2) = U_0^2 \exp \left[-\frac{|\boldsymbol{\phi}_1|^2 + |\boldsymbol{\phi}_2|^2}{2\Lambda^2} \right] \left(\exp \left[\frac{\boldsymbol{\phi}_1 \cdot \boldsymbol{\phi}_2}{\Lambda^2} \right] - 1 - \frac{\boldsymbol{\phi}_1 \cdot \boldsymbol{\phi}_2}{\Lambda^2} - \frac{(\boldsymbol{\phi}_1 \cdot \boldsymbol{\phi}_2)^2}{2\Lambda^4} \right). \quad (\text{E.62})$$

Gogoan izan prozesu baldintzatuaren kobariantza funtzioa ez dela homogenea izango. Izan ere, horrela sortzen dugun edozein AEGren zentroa beste puntuetatik bereizi egin dugu, eta jatorrizko eremuaren homogenezasuna galdu dugu. Aitzitik, AEGaren kobariantza berria $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$ puntuarekiko isotropoa da, eta eremu horien zentroaren berezitasuna nabarmentzen du.

Hemen aurkeztu dugun makineria osoa erabili dezakegu minimoak ez ezik maximo eta zela-puntuak baldintzatzeko; azkeneko kasu horietan, haatik, λ_i balioek hartu ditzaketen zeinuak kontuan eduki beharko ditugu.

E.6.2 Altueren eta hessiarraren balio propioen banaketak puntu kritikoetan

Altuera jakin batean dauden puntu kritikoak aztertzeko (zehazki, horien hessiarraren balio propioen banaketa lortzeko), aintzat eduki beharko dugu puntu horietako altueraren eta bigarren deribatuen arteko korrelazioa. Horrenbestez, horien arteko aldagai anitzeko kobariantza funtzioa lortu beharko dugu nolabait. Noski, kalkulu hori aurrera eraman ahal izateko, Kac-Rice formula orokortua erabili beharko dugu.

Izan bedi $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$ puntuan dagoen puntu kritikoa. Horri buruzko informazioa jasotzen duen probabilitate-banaketa hauxe dugu:

$$P(V_0, \lambda_1, \lambda_2 | \nabla V_0 = \mathbf{0}). \quad (\text{E.63})$$

Erraz kalkulatu dezakegu PBF hori, ondorengo ausazko bektorea baldintzaturaz:

$$\{V_0, h_{11}, h_{22}, h_{12}, \eta_1, \eta_2\}. \quad (\text{E.64})$$

Bektorearen batez bestekoa nulua da eta bere kobariantza-matrizea hauxe dugu:

$$\left(\begin{array}{cc|c} U_0^2 & S_{02} & \mathbf{0} \\ S_{20} & S_{22} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & S_{11} \end{array} \right) \quad (\text{E.65})$$

Hartara, (E.19) eta (E.20) aplikatuz, prozesu baldintzatuaren batez bestekoa eta kobariantza lortuko dugu. Horiek (E.42) adierazpenean erabiliz ondorengo dugu:

$$P_{cp}(V_0, \lambda_1, \lambda_2) du \prod_{i=1}^2 d\lambda_i = \mathcal{N} |\lambda_1| |\lambda_2| \Delta(\boldsymbol{\lambda}) P(V_0, \lambda_1, \lambda_2 | \nabla V_0 = \mathbf{0}) \quad (\text{E.66})$$

$$= \mathcal{N} |\lambda_1 - \lambda_2| |\lambda_1| |\lambda_2| \exp \left[-\frac{V_0^2}{2U_0^2} - \left(\frac{\Lambda^2 \lambda_i + V_0}{2U_0} \right)^2 \right] d\lambda_i dV_0, \quad (\text{E.67})$$

non, batetik, \mathcal{N} normalizazio faktorea den, eta bestetik, dimentsio biko adibide honetan $\Delta(\boldsymbol{\lambda}) = |\lambda_1 - \lambda_2| \cdot \pi/2$ dugun.

Azken adierazpen horretako V_0 balio konstante batean finkatuz, $V_0 = u$ adibidez, (E.42) ekuazioan definitutako $q_u(\lambda_1, \lambda_2)$ lortuko dugu. Bestalde, V_0 edo balio propioak integratuz, bertatik lortzen dugun adierazpenean geratzen diren aldagaien banaketa marjinala izango dugu (ikus F eranskina xehetasun gehiagorako).

Azkenik, (E.66) banaketaren beste aplikazio interesgarria zera dugu: eremu-espazioaren eskualde baten itxarondako puntu kritikoen kopurua zenbatzea. Adibidez, aurreko adibidean itxarondako minimo-kopurua horrela lortu dezakegu. Hartara, (E.37) adierazpena erabiliz, Λ^2 korrelazio bolumen batean itxarondako minimo kopurua hauxe dugu:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}(\#_{min})}{\Lambda^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_0^{+\infty} d\lambda_1 \int_0^{+\infty} d\lambda_2 \frac{\pi}{2} \lambda_1 \lambda_2 |\lambda_1 - \lambda_2| P(V_0, \lambda_1, \lambda_2 | \nabla V_0 = \mathbf{0}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}}. \end{aligned} \quad (\text{E.68})$$

Aurreko kalkuluan kontuan hartu dugu balio propioek positiboak izan behar dutela. Beste edonolako integrazio limiteak ezarriz, maximo edo zela-puntuen itxarondako kopurua kalkulatu ahal izango dugu.

E.7 Inflexio-puntuak ausazko eremu gausstar baldintzatueta

Gure inflexio-puntuen definizioa ondorengo ezaugarrietan datza: lehenik, inflexio-puntueta matrize hessiarraren balio propio batek nulua izan behar du; bigarrenik, *hessiarraren balio propio nuluari atxikitutako bektore propioak eta eremuaren gradienteak paraleloak izan beharko dute*; hirugarrenik, nuluak ez diren hessiarraren beste balio propioek positiboak izan beharko dute. Propietate horiek guztiak betetzen dituen puntuari inflexio-puntua deritzogu.

Sekzio honetan arestiko eztabaida orokortuko dugu, izan ere, AEGaren hirugarren deribatuak kontuan hartu beharko ditugu inflexio-puntuak matematikoki ondo definitzeko. Ondorengo kalkuluak sinplifikatzearen, bi dimentsioko AEGak landuko ditugu soilik; hala ere, lortuko ditugun adierazpen guztiak erraz orokortu daitezke nahi adina dimentsiotara.

Izan bedi ondorengo ausazko bektore gausstarra:

$$\{V(\boldsymbol{\phi}_1), V(\boldsymbol{\phi}_2), V_0, V'_1(\mathbf{0}), V'_2(\mathbf{0}), V''_{11}(\mathbf{0}), V''_{22}(\mathbf{0}), V''_{12}(\mathbf{0}), V'''_{111}(\mathbf{0}), V'''_{122}(\mathbf{0}), V'''_{222}(\mathbf{0}), V'''_{112}(\mathbf{0})\}. \quad (\text{E.69})$$

Osagai guztien batez bestekoa nulua da; bestalde, bektorearen kobariantza-matrizea hauxe dugu:

$$\Sigma = \left(\begin{array}{cc|cccc} U_0^2 & C(\boldsymbol{\phi}_1 - \boldsymbol{\phi}_2) & C(\boldsymbol{\phi}_1) & S_{V1}(\boldsymbol{\phi}_1) & S_{V2}(\boldsymbol{\phi}_1) & S_{V3}(\boldsymbol{\phi}_1) \\ C(\boldsymbol{\phi}_2 - \boldsymbol{\phi}_1) & U_0^2 & C(\boldsymbol{\phi}_2) & S_{V1}(\boldsymbol{\phi}_2) & S_{V2}(\boldsymbol{\phi}_2) & S_{V3}(\boldsymbol{\phi}_2) \\ \hline C(\boldsymbol{\phi}_1) & C(\boldsymbol{\phi}_2) & U_0^2 & \mathbf{0} & S_{02} & \mathbf{0} \\ S_{1V}(\boldsymbol{\phi}_1) & S_{1V}(\boldsymbol{\phi}_2) & \mathbf{0} & S_{11} & \mathbf{0} & S_{13} \\ S_{2V}(\boldsymbol{\phi}_1) & S_{2V}(\boldsymbol{\phi}_2) & S_{20} & \mathbf{0} & S_{22} & \mathbf{0} \\ S_{3V}(\boldsymbol{\phi}_1) & S_{3V}(\boldsymbol{\phi}_2) & \mathbf{0} & S_{31} & \mathbf{0} & S_{33} \end{array} \right) \quad (\text{E.70})$$

non, dimentsio biko kasuan,

$$S_{V3}(\boldsymbol{\phi}) = \begin{pmatrix} -C'_{111}(\boldsymbol{\phi}) & -C'_{122}(\boldsymbol{\phi}) & -C'_{222}(\boldsymbol{\phi}) & -C'_{112}(\boldsymbol{\phi}) \end{pmatrix} = S_{3V}^T \quad (\text{E.71})$$

$$S_{13} = \begin{pmatrix} -\alpha_4 & -\alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_4 & -\alpha_{22} \end{pmatrix} = S_{31}^T \quad (\text{E.72})$$

$$S_{33} = \begin{pmatrix} \alpha_6 & \alpha_{24} & 0 & 0 \\ \alpha_{24} & \alpha_{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_6 & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{24} & \alpha_{24} \end{pmatrix} \quad (\text{E.73})$$

ditugun, beste matrize blokeak (E.46)-(E.52) adierazpenetan definitu ditugula.

Puntu kritikoen kasuan jarraitu ditugun pausu berdinak hartuz, hirugarren deribatutara arte baldintzatutako AEGaren adierazpena lor dezakegu ((E.59) jatorrizko kobariantza funtzioarentzat, betiere). Horretara iristeko, AEGaren batez bestekoa inflexio-puntuaren inguruan kalkulatu behar dugu:

$$\bar{\mu}(\boldsymbol{\phi}) = 0 + \begin{pmatrix} C(\boldsymbol{\phi}) & S_{V1}(\boldsymbol{\phi}) & S_{V2}(\boldsymbol{\phi}) & S_{V3}(\boldsymbol{\phi}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0^2 & \mathbf{0} & S_{02} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S_{11} & \mathbf{0} & S_{13} \\ S_{20} & \mathbf{0} & S_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S_{31} & \mathbf{0} & S_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u \\ \boldsymbol{\eta} \\ \mathbf{h} \\ \boldsymbol{\rho} \end{pmatrix} \quad (\text{E.74})$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} C(\boldsymbol{\phi}) & S_{V2}(\boldsymbol{\phi}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0^2 & S_{02} \\ S_{20} & S_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u \\ \mathbf{h} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_{V1}(\boldsymbol{\phi}) & S_{V3}(\boldsymbol{\phi}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{13} \\ S_{31} & S_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\rho} \end{pmatrix} \\ &= \exp \left[-\frac{\boldsymbol{\phi}^2}{2\Lambda^2} \right] \left((u + \boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\eta}) \left(1 + \frac{\boldsymbol{\phi}^2}{2\Lambda^2} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \lambda_i \phi_i^2 + \frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^2 \phi_i \phi_j \phi_k \rho_{ijk} \right), \quad (\text{E.75}) \end{aligned}$$

non $\boldsymbol{\phi}$ bektorearen oinarria eta hessiarraren bektore propioak bat datozen (gogoan izan matrize horren elementuak \mathbf{h} bektorearen bitartez adierazten ditugula, balio propioak, aldiz, λ_i -ren bidez). Bestalde, $\boldsymbol{\eta}$ eta $\boldsymbol{\rho}$ bektoreek, hurrenez hurren, lehenengo eta hirugarren deribatuen osagaiak adierazten dituzte eremu-espazioaren jatorrian eta bektore propioez osatutako oinarrian.

Baldintzatutako kobariantza, bestalde, ondorengoa dugu:

$$\begin{aligned} \bar{C}(\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2) &= C(\boldsymbol{\phi}_1 - \boldsymbol{\phi}_2) - \begin{pmatrix} C(\boldsymbol{\phi}_1) & S_{V1}(\boldsymbol{\phi}_1) & S_{V2}(\boldsymbol{\phi}_1) & S_{V3}(\boldsymbol{\phi}_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0^2 & \mathbf{0} & S_{02} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S_{11} & \mathbf{0} & S_{13} \\ S_{20} & \mathbf{0} & S_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S_{31} & \mathbf{0} & S_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} C(\boldsymbol{\phi}_2) \\ S_{1V}(\boldsymbol{\phi}_2) \\ S_{2V}(\boldsymbol{\phi}_2) \\ S_{3V}(\boldsymbol{\phi}_2) \end{pmatrix} \\ &= U_0^2 \exp \left[-\frac{|\boldsymbol{\phi}_1|^2 + |\boldsymbol{\phi}_2|^2}{2\Lambda^2} \right] \left(\exp \left[\frac{\boldsymbol{\phi}_1 \cdot \boldsymbol{\phi}_2}{\Lambda^2} \right] - 1 - \frac{\boldsymbol{\phi}_1 \cdot \boldsymbol{\phi}_2}{\Lambda^2} - \frac{(\boldsymbol{\phi}_1 \cdot \boldsymbol{\phi}_2)^2}{2\Lambda^4} - \frac{(\boldsymbol{\phi}_1 \cdot \boldsymbol{\phi}_2)^3}{6\Lambda^6} \right). \quad (\text{E.76}) \end{aligned}$$

Agerikoa da kobariantza funtzioa eremuaren jatorriarekiko isotropoa dela, berriro ere.

E.7.1 Inflexio-puntuaren parametroen probabilitate-banaketak

Erraz orokortu dezakegu inflexio-puntuetara aurreko sekzioan bideratutako puntu kritikoetako balio propioen analisia. Oraingo honetan, aintzat eduki beharreko ezberdintasun bakarra balio propioen zeinuetan datza; zehazki, balio horietako bat nulua izan beharko da, bestea positiboa delarik. Horrez gain, balio propio positiboari dagokion norabidean gradiente-a nulua izan beharko da. Inflexio-puntuaren $(V_0, \eta_1, \lambda_2, \boldsymbol{\rho})$ parametroen PBFen kalkuluan inposatu beharko dira baldintza hauek. Kac-Rice formula orokortua erabiliz, ondorengo adierazpena iritsiko gara:

$$P_{\text{inf}} dV_0 d\lambda_2 d\eta_1 d\boldsymbol{\rho} = \mathcal{N} |\lambda_2|^2 |\rho_{111}| P(V_0, \lambda_2 | \lambda_1 = 0) P(\eta_1, \rho_{ijk} | \eta_2 = 0) \quad (\text{E.77})$$

non

$$P(V_0, \lambda_2 | \lambda_1 = 0) dV_0 d\lambda_2 = \mathcal{N} \exp \left[-\frac{4V_0^2 - 2\Lambda^2 V_0 \lambda_2 - \Lambda^4 \lambda_2^2}{2U_0} \right] dV_0 d\lambda_2 \quad (\text{E.78})$$

$$P(\eta_1, \rho_{ijk} | \eta_2 = 0) d\eta_1 d\rho_{ijk} = \mathcal{N} \exp \left[-\frac{\Lambda^2}{12U_0^2} \left(18\eta_1^2 + 6\Lambda^2 \eta_1 (\rho_{111} + \rho_{122}) + \Lambda^4 \sum_{i,j,k=1}^2 \rho_{ijk}^2 \right) \right] d\eta_1 d\rho_{ijk} \quad (\text{E.79})$$

probabilitate-banaketak ditugun. (E.77) adierazpenean, $|\lambda_2|$ faktore bat $\{h_{11}, h_{12}, h_{22}\} \rightarrow \{\lambda_1, \lambda_2\}$ aldagai-aldaketari dagokion jacobiaratik dator; noski, azken horretan $\lambda_1 = 0$ inposatu behar izan dugu, inflexio-puntuaren definizioa dela eta. Bestalde, $|\lambda_2| |\rho_{111}|$ faktoreak Kac-Rice formularen agertzen den determinantean du jatorria.

Amaitzeko, azken sekzio honetan lortutako adierazpenak itxarondako inflexio-puntu kopurua Λ^2 bolumeneko kalkulatzeko erabili daitezke, arestiko (E.68) adierazpena lortu dugun bezala. Hain zuzen ere, guk aukeratutako kobariantza funtzioarentzat, ondorengo emaitzara iritsi gara:

$$\frac{\mathbb{E}(\#_{ip})}{\Lambda^2} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{3\pi}. \quad (\text{E.80})$$

F eranskina

Slepian ereduen testak eta zenbakizko inplementazioa

F.1 Zenbakizko ausazko eremu gausstarrak: Karhunen-Loève garapena

Dimensio biko ausazko eremu gausstarrak sortzeko, Karhunen-Loève deskonposizioa jo genuen (deskonposizio espektrala ere deritzo honi), horren erraztasun matematikoa eta konputazioanala dela eta.

Deskonposizio hau erabiltzeko ondorengoak behar ditugu: $\mu(\mathbf{t})$ batez besteko funtzioa, $C(\mathbf{t}, \mathbf{s})$ kobariantza funtzioa eta $\{\mathbf{t}_a\}$ espazio diskretizatua, non a sare-espazioaren edozein n puntuetako bat adierazten duen. Hauekin $C_{ab} = C(\mathbf{t}_a, \mathbf{t}_b)$ matrize simetrikoa eta positibo definitua eraiki dezakegu. Matrize hori honela deskonposatu daiteke:

$$C = U\Lambda U^T \quad (\text{F.1})$$

non $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ balio propioen matrize diagonal den, sarrera positiboz osatuta, eta U matrizearen errenkada bakoitzean C -ren bektore propioak dauden. Bestalde, $\Lambda > 0$ dugunez, horrela jarraitu dezakegu aurreko deskonposizioa:

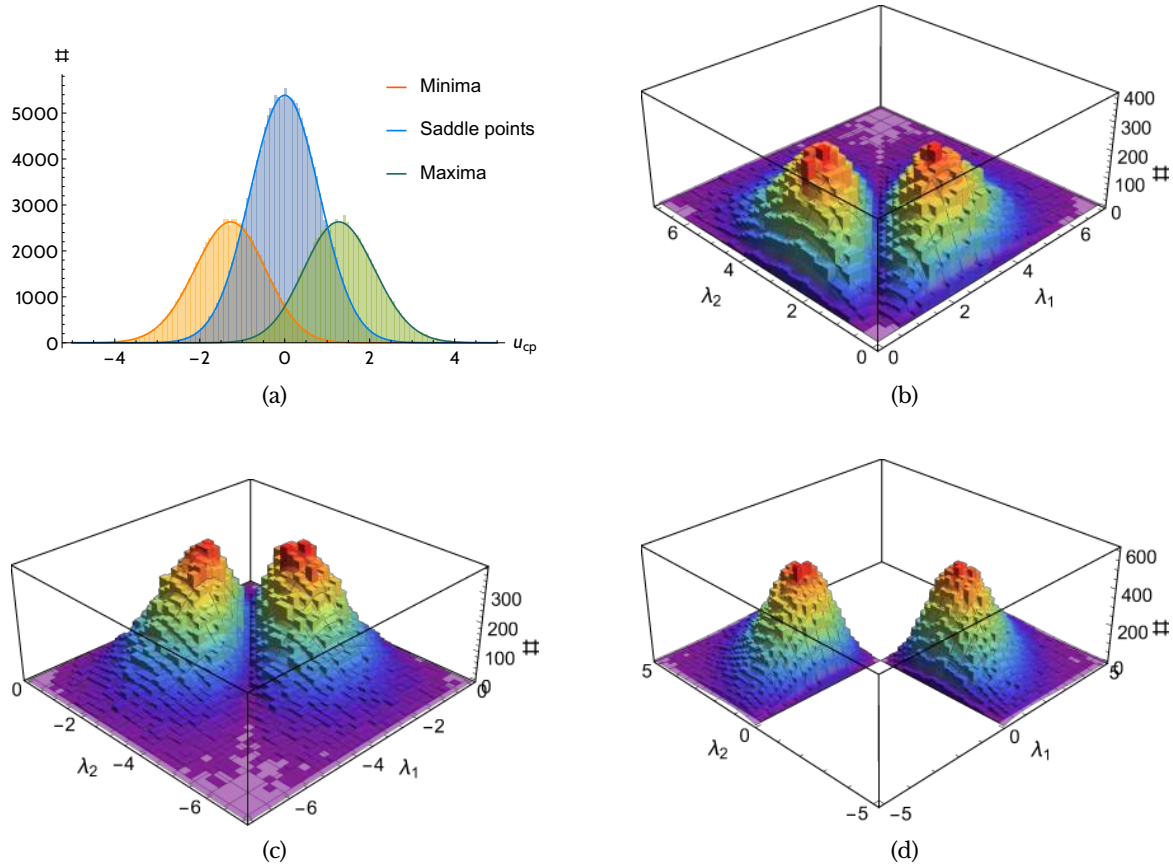
$$C = U\sqrt{\Lambda}\sqrt{\Lambda}U^T = (U\sqrt{\Lambda})(U\sqrt{\Lambda})^T = L L^T. \quad (\text{F.2})$$

Azken prozedura hori C matrizearen Cholesky deskonposizioarekin bat dator [278]; kostu konputazionalari dagokionez, azken hori dugu algoritmoaren pausu garestiena.

Behin L kalkulatuta, zuzenean eraiki dezakegu AEGa espazio diskretuan. Horretarako, n luzerako ξ ausazko bektore bat sortu behar dugu, horren osagaiak elkarrekiko independenteak izanik eta $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ motako gausstar banaketatik sortuak. Horiekin ondorengo aldagaiak eraiki ditzakegu:

$$V_a = \mu_a + L_{ab}\xi_b, \quad (\text{F.3})$$

non $\mu_a = \mu(\mathbf{t}_a)$ dugun. Zuzenean frogatu dezakegu aldagai berri horien arteko korrelazioa



F.1 irudia: $10^5 \Lambda^2$ azalerako AEGa sortuz lortu ditugun histogramak puntu kritikoaren (a) altueren eta (b-d) balio propioen zenbakizko banaketari buruz. Histograma bakoitzarekiko dagokion (F.5) eta (F.6) banaketak marraztu ditugu, (E.68) itzarondako balioarekiko normalizatuta.

bat datorrela AEGaren \mathbf{t}_a puntuen artekoarekin:

$$\begin{aligned} \langle (V_a - \mu_a)(V_b - \mu_b) \rangle &= \langle L_{ac} \xi_c L_{bd} \xi_d \rangle = L_{ac} L_{bd} \langle \xi_c \xi_d \rangle \\ &= L_{ac} L_{bd} \delta_{cd} = L_{ac} L_{bc} = L_{ac} L_{cb}^T = (LL^T)_{ab} = C_{ab} = C(\mathbf{t}_a, \mathbf{t}_b). \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

AEGak sortzeko erabili dugun prozedura honen abantaila nagusia da behin bakarrik egin behar dela L matrizearen kalkulua, hau da, algoritmo honetan konputazio-denbora gehiena behar duen pausoa. Batezbesteko eta kobariantza berdina duten AEGak sortzeko, L matrizearen balioa birziklatu dezakegu eta ondorioz, bigarren iteraziotik aurrera algoritmoa askoz azkarrago inplementatzen da.

F.2 Puntu kritikoaren zenbakizko ebaluazioak

Gorago aurkeztu ditugun adierazpenak erabiliz, minimoen, maximoen eta zela-puntuen banaketa normalizatuak kalkulatu ditzakegu, bi dimentsioko AEGen kasuan:

$$P_{u,min} du = \frac{\sqrt{3}}{4\pi U_0} e^{-u^2/U_0^2} \left(-\frac{2u}{U_0} + 2\sqrt{\pi} e^{u^2/4U_0^2} \operatorname{erfc} \left[\frac{u}{2U_0} \right] + \sqrt{2\pi} \left(\frac{u^2}{U_0^2} - 1 \right) e^{u^2/2U_0^2} \operatorname{erfc} \left[\frac{u}{\sqrt{2}U_0} \right] \right) du$$

$$P_{u,max} du = \frac{\sqrt{3}}{4\pi U_0} e^{-u^2/U_0^2} \left(\frac{2u}{U_0} + 2\sqrt{\pi} e^{u^2/4U_0^2} \operatorname{erfc} \left[-\frac{u}{2U_0} \right] + \sqrt{2\pi} \left(\frac{u^2}{U_0^2} - 1 \right) e^{u^2/2U_0^2} \operatorname{erfc} \left[-\frac{u}{\sqrt{2}U_0} \right] \right) du$$

$$P_{u,sp} du = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}U_0} \exp \left[-\frac{3u^2}{4U_0^2} \right]. \quad (\text{F.5})$$

Are gehiago, matrize hessiarraren balio propioen banaketa marjinala lor dezakegu puntu kritikoetan, beraien altuera edozein dela ere:

$$P_{sp,\lambda_i} d\lambda_1 d\lambda_2 = \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{\Lambda^{10}}{32U_0^5} \prod_{i=1}^2 \left(|\lambda_i| \exp \left[-\frac{\Lambda^4}{8U_0^2} \lambda_i^2 \right] \right) |\lambda_1 - \lambda_2| \exp \left[-\frac{\Lambda^4}{16U_0^2} (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \right] d\lambda_1 d\lambda_2$$

$$= \frac{1}{2} P_{min,max,\lambda_i} d\lambda_1 d\lambda_2. \quad (\text{F.6})$$

Banaketa teoriko horiek Matematika bidez sortututako zenbakizko (eta baldintzatu gabeko) ausazko eremu gausstarrekin konparatu ditugu. Puntu kritikoen altuerari dagokienez, zenbakizko emaitzak eta iragarpen analitikoak bat datoz guztiz, F.1(a) irudian argi ikus daitekeen bezala.

Bestalde, balio propioen banaketei dagokienez, bistan da F.1(b)-(d) irudietako histogramak eta iragarpen analitikoak bat datozela berriro ere. Banaketa hauen ezaugarri garrantzitsua da *balio propioen aldarapena* deritzoguna. Labur esanda, balio propio parekoak edo hauen bat ia-nulua duten puntu kritikoak oso arraroak direla ikus dezakegu aurreko irudietan. Banaketa guztietan agertzen den Vandermonderen determinantea da efektu honen kausa zuzena, baita Kac-Rice formularen jasotzen dugun gradientearen jacobiarra ere.

F.3 Inflexio-puntuaren zenbakizko ebaluazioak

Aurreko emaitzak erabiliz, ondorengo inflexio-puntuaren parametro-banaketak lortu ditugu:

$$P_u du = \frac{3\sqrt{3}}{16\pi U_0^3} \exp \left[-\frac{u^2}{U_0^2} \right] \left(-2U_0 u + \sqrt{\pi} (u^2 + 2U_0^2) \exp \left[\frac{u^2}{4U_0^2} \right] \operatorname{erfc} \left[\frac{u}{2U_0} \right] \right) du \quad (\text{F.7})$$

$$P_{\lambda_2} d\lambda_2 = \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{3}{16} \frac{\Lambda^6}{U_0^3} \lambda_2^2 \exp \left[-\frac{3\Lambda^4}{16U_0^2} \lambda_2^2 \right] d\lambda_2 \quad (\text{F.8})$$

$$P_{\eta_1} d\eta_1 = \frac{(3 + \sqrt{15})\Lambda}{12U_0^2} \exp \left[-\frac{5\Lambda^2}{4U_0^2} \eta_1^2 \right] \left(\sqrt{\frac{12}{\pi}} U_0 - 3\Lambda |\eta_1| \exp \left[\frac{3\Lambda^2}{4U_0^2} \eta_1^2 \right] \operatorname{erfc} \left[\frac{\sqrt{3}\Lambda}{2U_0} |\eta_1| \right] \right) d\eta_1 \quad (\text{F.9})$$

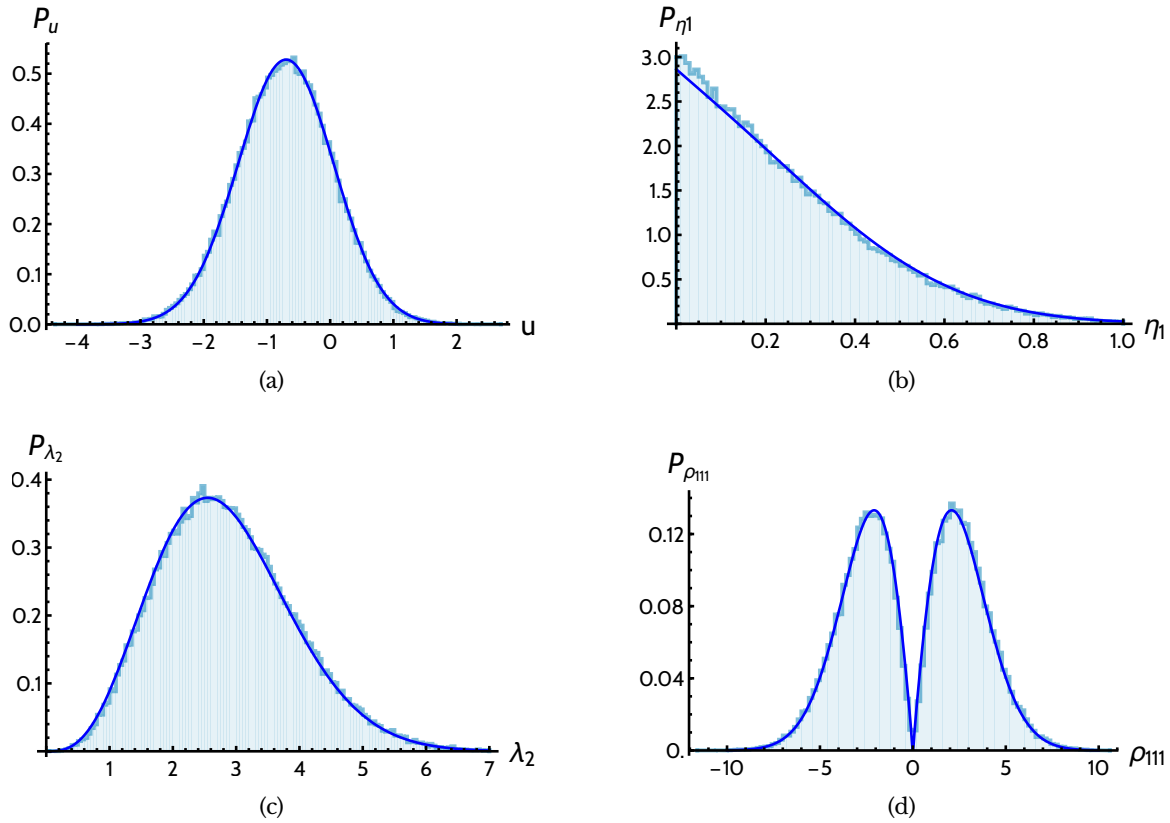
$$P_{\rho_{111}} d\rho_{111} = \frac{(5 + \sqrt{15})\Lambda^6}{60U_0^2} |\rho_{111}| \exp \left[-\frac{\Lambda^6}{30U_0^2} \rho_{111}^2 \right] \operatorname{erfc} \left[\frac{\Lambda^3}{2\sqrt{5}U_0} |\rho_{111}| \right] d\rho_{111} \quad (\text{F.10})$$

non azkeneko banaketan erabilitako errore-funtzio osagarria ondorengoa dugun:

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty dt e^{-t^2}.$$

Hemengo honetan ere, F.2 irudian bistan denez, adierazpen guzti horiek bat datoz zenbakizko emaitzekin.

Gure zenbakizko potentzialetako inflexio-puntuak aurkitzearen, sistema honen erroak



F.2 irudia: Inflexio-puntuen (a) altuera (b) η_1 (c) λ_2 eta (d) ρ_{111} erakusten dituzten zenbakizko histogramak eta horien iragarpen analitikoa (ikus (F.7)-(F.10)). Banaketa guztietan $\lambda_2/\eta_1 > 4$ baldintza aintzat hartu dugu.

bilatu genituen:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\eta}^T \mathcal{H} \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\eta}^T \mathcal{H} \boldsymbol{\eta}_\perp \end{cases} \quad (\text{F.11})$$

non \mathcal{H} matrize hessiarra dugun, $\boldsymbol{\eta}^T = (\eta_1, \eta_2)$ edozein puntuko gradientea adierazten duen, eta $\boldsymbol{\eta}_\perp^T = (-\eta_2, \eta_1)$ definitu dugun. Erraz frogatu daiteke (F.11) ekuazioen aldibereko erroak puntu kritikoak edo inflexio-puntuak direla.

Inflexio-puntuen zenbakizko ekorketa korapilatsua izan daiteke oso; hain zuzen ere, algoritmoa ez da kapaza inflexio-puntuak guztiz bereizteko kasu batzuetan, zenbakizko zehaztasun falta dela eta. Gure iragarpenekiko aldarapen tinkoa egiteko eta inflexio-puntu faltsuak ekiditeko, soilik $\lambda_2/\eta_1 > 4$ baldintza betetzen zizuten puntu horiek aintzat hartu genituen zenbaketa enpirikoan. Murrizketa horrek inflexio-puntu potentzialen %30 baztertzen ditu, gutxi gorabehera. Kontuan hartzekoa da murrizketa horrek benetazko inflexio-puntuak deuseztatu ditzakeen arren, hartara lortutako zenbakizko banaketak eta iragarpen teorikoak erabat parekoak direla.

G eranskina

Inflexio-puntuetako inflazioa

Eranskin honetan inflexio-puntuetan gerta daitezkeen prozesu inflazionarioen inguruko emaitza garrantzitsuenak errepasatuko ditugu. Horiek lortzeko, potentziala garapen kubiko baten bidez deskribatuta dagoela suposatuko dugu eta bestelako zenbait hurbilketa erabiliko ditugu. Ondorengoan [114, 238] artikuluak jarraituko ditugu batez ere.

Jatorrian inflexio-puntua duen potentzial kubikoa hauxe dugu:

$$V(\phi) = U + \eta\phi + \frac{\rho}{6}\phi^3, \quad (\text{G.1})$$

zeinen slow-roll parametroak

$$\epsilon_v \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right)^2 \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\eta + \frac{\rho}{2}\phi^2}{U} \right)^2 \quad (\text{G.2})$$

$$\eta_v \equiv \frac{V''(\phi)}{V(\phi)} \approx \frac{\rho}{U}\phi \quad (\text{G.3})$$

diren eta izendatzaileak konstantetzat jo ditugun bi kasuetan.

Potentzial horretan gerta daitezkeen e-fold kopuru maximoa ondorengoa da:

$$N_{\max} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\phi}{\sqrt{2\epsilon_v}} \approx \int_{-\infty}^{+\infty} d\phi \frac{U}{\eta + \frac{\rho}{2}\phi^2} = \pi\sqrt{2} \frac{U}{\eta\rho}. \quad (\text{G.4})$$

Bestalde, slow-roll baldintzak

$$-U/\rho < \phi < U/\rho \quad (\text{G.5})$$

tartean beteko direnez, bertan emango den e-fold kopurua hauxe da:

$$N_{\text{sr}} = \int_{-U/\rho}^{U/\rho} \frac{d\phi}{\sqrt{2\epsilon_v}} \approx 2\sqrt{2} \frac{U}{\sqrt{\eta\rho}} \arctan \left(\frac{U}{\sqrt{2\eta\rho}} \right) \approx N_{\max} - 4. \quad (\text{G.6})$$

Azter dezagun MHKren eskala horizontetik irteterakoan eremuak duen balioaren, ϕ_* -

ren, eta $\phi_{\text{end}} \equiv -U/\rho$ artean emango diren e-fold kopurua:

$$N_{\text{CMB}} = \int_{\phi_{\text{end}}}^{\phi_*} \frac{d\phi}{\sqrt{2\epsilon_\nu}} \approx \frac{N_{\text{max}}}{\pi} \cdot \arctan \left(\sqrt{\frac{\rho}{2\eta}} \phi \right) \Big|_{\phi_{\text{end}}}^{\phi_*} \quad (\text{G.7})$$

Notazioa erraztearren, ondorengo definizioez baliatuko gara:

$$x \equiv \pi \frac{N_{\text{CMB}}}{N_{\text{max}}} \quad (\text{G.8})$$

$$y \equiv \frac{N_{\text{max}}}{2\pi} = \frac{U}{\sqrt{2\eta\rho}} \quad (\text{G.9})$$

Parametro horien arabera, horrelaxe berridatzi dezakegu (G.7) adierazpena:

$$\pi \frac{N_{\text{CMB}}}{N_{\text{max}}} = x = \arctan \left(\sqrt{\frac{\rho}{2\eta}} \phi_* \right) - \arctan \left(-\frac{U}{\rho} \sqrt{\frac{\rho}{2\eta}} \right) = \arctan \left(\sqrt{\frac{\rho}{2\eta}} \phi_* \right) - \arctan(-y) \quad (\text{G.10})$$

Bestalde,

$$\tan [\arctan(a) - \arctan(b)] = \frac{a - b}{1 + ab} \quad (\text{G.11})$$

identitatea erabiliz, horrela idatzi ahal dugu (G.10) ekuazioa

$$\tan x = \frac{\sqrt{\frac{\rho}{2\eta}} \phi_* + y}{1 - \sqrt{\frac{\rho}{2\eta}} \phi_* y} \rightarrow \sqrt{\frac{\rho}{2\eta}} \phi_* = \frac{\tan(x) - y}{1 + y \tan(x)}. \quad (\text{G.12})$$

Indize espektrala kalkulatzeko,

$$n_s - 1 = (2\eta_\nu - 6\epsilon_\nu) \Big|_{\phi_*}. \quad (\text{G.13})$$

erabiliko dugu. Izan ere, slow-roll baldintzak betez gero, ϵ_ν guztiz arbuigarria da η_ν -rekin alderatuz; hortaz, aurrekoa horrela sinplifikatu dezakegu:

$$n_s \approx 1 + 2\eta_\nu(\phi_*) = 1 + \frac{2\rho}{U} \phi_* = 1 + 2 \frac{\sqrt{2\eta\rho}}{U} \sqrt{\frac{\rho}{2\eta}} \phi_* = 1 + \frac{2}{y} \left(\frac{\tan(x) - y}{1 + y \tan(x)} \right) \quad (\text{G.14})$$

Era berean, perturbazio eskalarren magnitudea horrelaxe estimatu dezakegu:

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathcal{R}}^2 &= \frac{1}{24\pi^2} \frac{V(\phi)}{\epsilon_\nu} \Big|_{\phi_*} \approx \frac{U^3}{12\pi^2} \left(\eta + \frac{\rho}{2} \phi_*^2 \right)^2 = \frac{U^3}{12\pi^2 \eta^2} \left(1 + \left[\sqrt{\frac{\rho}{2\eta}} \phi_* \right]^2 \right)^2 \\ &= \frac{U^3}{12\pi^2 \eta^2} \frac{(1 + y \tan(x))^4}{[(1 + y \tan(x))^2 + (\tan(x) - y)^2]^2} \end{aligned} \quad (\text{G.15})$$

Azken emaitza hori horrela ere eman dezakegu:

$$\Delta_{\mathcal{R}}^2 \approx \frac{U^3}{12\pi^2\eta^2} \frac{\cos^4(x) (1 + y \tan(x))^4}{(1 + y^2)^2} = \frac{N_{\text{CMB}}^4 \rho^2}{48\pi^2 U} f^2(x, y) \quad (\text{G.16})$$

non

$$f(x, y) = \frac{\cos^2(x) (1 + y \tan(x))^2}{x^2(1 + y^2)} \quad (\text{G.17})$$

funtzioak $f(x, y) \sim 1$ betetzen duen, $y \gg 1$ eta $x \sim 1$ direnean.

H eranskina

Hiru-forma bakarreko multipleteak

Eranskin honetan 6. kapituluaren erabili ditugun lagrangearen supersimetrikoak lortuko ditugu. Zehatzago esanda, 3-forma *bakarreko* multipleteen lagrangearrak osatuko ditugu ondorengoan, azken horietan 3-forma errealeen kopurua eta eremu eskalarrena berdina izango baita (3-forma *bikoitzeko* multipleteetan ez bezala, non 3-forma errealeen kopurua eremu eskalarrenaren bikoitza den). Hemen aurkeztuko dugun formalismo gehiena [254, 258, 259] lanetan aurki daiteke. Bestela esan ezean, [265] liburuko konbentzioak erabiliko ditugu.

H.1 Hiru-forma bakarreko multipleteak eta supersimetria

Superespazioaren formalismoaren arabera, hauexek dira deribatu kobariante supersimetrikoak:

$$D_\alpha = \partial_\alpha + i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu, \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\partial_{\dot{\alpha}} - i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu. \quad (\text{H.1})$$

Horiekin definitu ditzakegu supereremu *kiralak*, zeintzuk $\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0$ baldintza betetzen duten. Supereremu horien θ^α aldagai grassmandarren garapena ondorengo da:

$$\Phi = \phi + \sqrt{2}\theta\psi + \theta\theta F + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\phi - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\theta} + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\square\phi \quad (\text{H.2})$$

non $\phi(\mathbf{x})$ eta $F(\mathbf{x})$ eremu eskalar laguntzaile konplexuak diren eta $\psi(\mathbf{x})$ Weyl espinorea den. Komenigarria izango zaigu supereremuen osagaiak proiektatzen dituzten operadoreak definitzea:

$$\Phi| = \phi \quad (\text{H.3})$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} D_\alpha \Phi| = \psi_\alpha \quad (\text{H.4})$$

$$-\frac{1}{4} D^2 \Phi| = F, \quad (\text{H.5})$$

non lerro bertikalak $\theta = \bar{\theta} = 0$ baldintza adierazten duen.

Supereremu kiral anitzekin, $\Phi = \{\Phi^1, \dots, \Phi^n\}$, osatu dezakegun lagrangear supersimetrikorik orokorra hauxe dugu:

$$\mathcal{L} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta} K(\Phi, \bar{\Phi}) + \left[\int d^2\theta W(\Phi) + \text{h.c.} \right] \quad (\text{H.6})$$

$$= -K_{a\bar{b}} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \bar{\phi}^{\bar{b}} + K_{a\bar{b}} F^a \bar{F}^{\bar{b}} + F^a W_a + \bar{F}^{\bar{a}} \bar{W}_{\bar{a}} + \dots \quad (\text{H.7})$$

non $a, b \in \{1, \dots, n\}$ diren, $K(\Phi, \bar{\Phi})$ Kähler potentziala den, $W(\Phi)$ superpotentzial holomorfoa dugun eta azpiindizeek eremu eskalarrekiko deribatuak adierazten dituzten. Adibidez, $K_{a\bar{b}} = \partial_{\phi^a} \partial_{\bar{\phi}^{\bar{b}}} K$ dugu. Aurreko (H.7) adierazpenean ez ditugu kontuan hartu eremu fermioikoak, lagrangearra sinplifikatzearen; bestela esan ezean, ondorengo kalkuletan ez ditugu aintzat hartuko.

Erraz froga daiteke eremu laguntzaileak integratzen ditugunean, euren higidura-ekuazioak erabiliz, aurreko lagrangearra horrela geratuko zaigula:

$$\mathcal{L}|_{\text{bos., on-sh.}} = -K_{a\bar{b}} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \bar{\phi}^{\bar{b}} - K^{a\bar{b}} W_a \bar{W}_{\bar{b}}. \quad (\text{H.8})$$

non $K^{a\bar{b}}$ Kähler potentzialaren hessiarraren, alegia, $K_{a\bar{b}}$ -ren, alderantzizkoa den.

H.1.1 Hiru-formak multiplete kiraletan

Teoria supersimetrikoak eraikitzeko funtsezko osagaiak dira supereremu kiralak, hortaz, horietan 3-formak nola barneratu ditzakegun jakitea oso erabilgarria izango da. Gutxi barru ikusiko dugun bezala, hemen erabiliko dugun ideia nagusia hiru-formak erabili ordez, horien Hodge dualak erabiltzean datza [256, 258], indize bakarrekokoak izanik azken horiek. Hortaz, eremu bektorialak euren osagaien artean dituzten supereremu kiralak aurkitu behar ditugu.

Azken baldintza hori betetzeko modurik errazena multiplete *errealak* (edo *bektorialak*) erabiltzean datza. Supereremu horiek $V = \bar{V}$ baldintzaren bidez definitzen dira, eta ondorengo θ -garapena dute:

$$\begin{aligned} V(x, \theta, \bar{\theta}) = & C + i\theta\chi - i\bar{\theta}\bar{\chi} + i\theta\bar{\theta}\bar{\phi} - i\bar{\theta}\theta\phi - \theta\sigma^\mu\bar{\theta}v_\mu \\ & + i\theta\bar{\theta}\bar{\theta} \left[\bar{\lambda} + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi \right] - i\bar{\theta}\theta\theta \left[\lambda + \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi} \right] + \frac{1}{2}\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\bar{\theta} \left[D - \frac{1}{2}\square C \right] \end{aligned} \quad (\text{H.9})$$

non $u(\mathbf{x})$ eta $D(\mathbf{x})$ eremu eskalar errealak diren, $\phi(\mathbf{x})$ eremu eskalar konplexua den, $v_\mu(\mathbf{x})$ eremu bektorial erreala den eta $\chi(\mathbf{x})$ eta $\lambda(\mathbf{x})$ Weyl espinoreak diren.

Aurreko superemua erabiliz, horrela eraiki dezakegu¹ supereremu kiral berri bat

$$Y := -\frac{i}{4}\bar{D}^2 V, \quad (\text{H.10})$$

¹Definizio horretan V supereremua aukeratzeko nolabaiteko askatasuna badugu, $V \rightarrow V + U$ ordezkapena egin baitezakegu, non U supereremuak $\bar{D}^2 U = 0$ baldintza betetzen duen. Birdefinizio hori V -ren eremu bektorialen gauge askatasunarekin zerikusia du, ikus [258] xehetasun gehiagorako.

non aurrefaktore konstantearen xedea zenbait kalkulu erraztea den. Zuzenean froga daiteke aurreko supereremuak $\bar{D}_{\dot{\alpha}} Y = 0$ baldintza beteko duela. Supereremu berri horren osagai nagusiak aurreko proiektzioak erabiliz lor ditzakegu:

$$Y| = -\frac{i}{4} \bar{D}^2 V| = \phi \quad (\text{H.11})$$

$$D_{\alpha} Y| = -\frac{i}{4} D_{\alpha} \bar{D}^2 V| = \lambda_{\alpha} \quad (\text{H.12})$$

$$-\frac{1}{4} D^2 Y| = \frac{i}{16} D^2 \bar{D}^2 V| = \frac{1}{2} (\partial^{\mu} v_{\mu} + iD). \quad (\text{H.13})$$

Kontuan izan Y eta Φ supereremuek osagai mota eta kopuru berdina izango dituztela: eremu konplexu eskalar bat, Weyl fermioi konplexu bat eta eremu laguntzaile konplexu bat. Aitzitik, azken horren zati errealean jarriko dugu arreta Y supereremua aztertzerakoan.

Hortaz, lehen aurreratu dugunaren arabera, sistema honi dagokion hiru-formaren Hodge duala bezala joko dugu v_{μ} eremua. Hain zuzen ere, formen arteko Hodge dualtasuna erabiliz,²

$$(*A_3)_{\mu} \equiv A_{\mu} = \frac{1}{3!} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} A^{\nu\rho\sigma} \quad (\text{H.14})$$

izango dugu, non espazio-denbora lauaren metrika erabili dugun hiru-formaren osagaien indizeak altxatzeko. Horrela lortutako bat-forma hori $A_{\nu\rho\sigma}$ -ren eremu-indarrarekin ere zerikusia du. Izan ere, 4 dimentsioko espazio-denboraren kasuan, F_4 -ren Hodge duala ondorengo eskalarra izango da:³

$$*F_4 = \frac{1}{4!} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu\rho\sigma} = \partial_{\mu} A^{\mu}, \quad (\text{H.15})$$

Aurreko adierazpenak kontuan hartuta, horrelaxe berridatzi ahal izango dugu Y -ren osagai lagungarria:

$$F_Y = -\frac{1}{4} D^2 Y| = \frac{1}{2} (*F_4 + iD). \quad (\text{H.16})$$

Bestalde, D eremu eskalar errealak mintzaren eta beste eremuen arteko fisikan parte hartzen ez duenez, zuzenean integratu ahal izango dugu lagrangeartetik, bere higidura-ekuazioen bidez.

Azken adierazpen horiek erraz aplikatu ditzakegu Y hiru-forma bakarreko multipletean, $K(Y, \bar{Y})$ Kähler potentzial eta $W(Y)$ superpotentzial orokorren arabera. Horrela, Y -ren osagaiak (H.7) lagrangearrean erabiliz, ondorengo dugu:

$$\mathcal{L}|_{\text{bos.}} = -K_{\phi\bar{\phi}} \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \bar{\phi} + \frac{1}{4} K_{\phi\bar{\phi}} (*F_4 + iD) (*F_4 - iD) + \frac{1}{2} (*F_4 + iD) W_{\phi} + \frac{1}{2} (*F_4 - iD) \bar{W}_{\bar{\phi}}$$

² Hemen erabiliko ditugun konbentzioen arabera, $\epsilon^{0123} = -\epsilon_{0123} = 1$ izango digu koordenatu lorentziarretan (eranskin honetan erabiliko ditugunak). Koordenatu euklidearren arabera, aldiz, $\epsilon^{0123} = \epsilon_{0123} = 1$ izango dugu.

³ Adierazpen hauetan metrika ez-lauen ekarpena ez dugu kontuan hartu. Espazio-denbora kurboen kasuan, hauek dira erabili beharreko adierazpenak: $(*A_3)_{\mu} \equiv A_{\mu} = \frac{1}{3!} \sqrt{-g} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} A^{\nu\rho\sigma}$ eta $*F_4 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} (\sqrt{-g} A^{\mu})$.

$$= -K_{\phi\bar{\phi}}\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\bar{\phi} + \frac{1}{4}K_{\phi\bar{\phi}}(*F_4)^2 + \frac{1}{2}(*F_4)\left(W_{\phi} + \bar{W}_{\bar{\phi}}\right) + \frac{1}{4}K_{\phi\bar{\phi}}D^2 + \frac{i}{2}D\left(W_{\phi} - \bar{W}_{\bar{\phi}}\right). \quad (\text{H.17})$$

Lehenik eta behin, D eremuaren higidura-ekuazioa lortu beharko dugu:

$$D = -iK^{\phi\bar{\phi}}\left(W_{\phi} - \bar{W}_{\bar{\phi}}\right). \quad (\text{H.18})$$

Azken hori guztiz aljebraikoa da, espero bezala. Ekuazio hori (H.17) lagrangearren aplikatuz, hauxe geratuko zaigu:

$$\mathcal{L}|_{\text{bos.}} = -K_{\phi\bar{\phi}}\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\bar{\phi} + \frac{1}{4}K_{\phi\bar{\phi}}(*F_4)^2 + \frac{1}{2}(*F_4)\left(W_{\phi} + \bar{W}_{\bar{\phi}}\right) + \frac{1}{4}K^{\phi\bar{\phi}}\left(W_{\phi} - \bar{W}_{\bar{\phi}}\right)^2 \quad (\text{H.19})$$

$$= -K_{\phi\bar{\phi}}\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\bar{\phi} - \frac{1}{4 \cdot 4!}K_{\phi\bar{\phi}}F^{\mu\nu\sigma\rho}F_{\mu\nu\sigma\rho} + \frac{1}{2 \cdot 4!}\left(W_{\phi} + \bar{W}_{\bar{\phi}}\right)\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}F_{\mu\nu\sigma\rho} + \frac{1}{4}K^{\phi\bar{\phi}}\left(W_{\phi} - \bar{W}_{\bar{\phi}}\right)^2. \quad (\text{H.20})$$

non, azken pausoa, Hodge dualen jatorrizko osagaiak garatu ditugun notazioa zertxobait argitzeko.

Aurrera jarraitzeko, gogoan izan aurreko sistemaren eremu fisikoa $A_{\mu\nu\rho}$ hiru-forma izango dela. Komenigarria izango zaigu horien Hodge dualekin, A^{μ} , kalkuluak egitea, azken horiek $*F_4$ eremu-indarraren definizioan esplizituki ageri baitira. Horrela, hauxe dugu (H.20) lagrangearren bariazioa A_{μ} 1-formarekiko:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}K_{\phi\bar{\phi}}(*F_4)(\partial^{\mu}\delta A_{\mu}) + \frac{1}{2}(\partial^{\mu}\delta A_{\mu})\left(W_{\phi} + \bar{W}_{\bar{\phi}}\right) \\ &= \delta A_{\mu}\left[\frac{1}{2}\partial^{\mu}\left(-K_{\phi\bar{\phi}}(*F_4) + W_{\phi} + \bar{W}_{\bar{\phi}}\right)\right] + \partial^{\mu}\left[\delta A_{\mu}\frac{1}{2}\left(K_{\phi\bar{\phi}}(*F_4) - W_{\phi} - \bar{W}_{\bar{\phi}}\right)\right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{H.21})$$

Argi dago lehenengo terminoak higidura-ekuazio berri bat emango digula, bigarrena mugalde-terminoa izanda. Haatik, [249] artikuluan argudiatu den bezala, (H.21) ekuazioko bigarren terminoa ezeztatzeko, gure jatorrizko lagrangearrari mugalde-termino bat gehitu beharko diogu. Azken termino horrek, problema bariazionala ondo formulatu ez ezik, bukaeran geratuko zaigun lagrangearren efektu ez-arbuiagarria izango du. Problema honetan erabili behar dugun mugalde-terminoa hauxe dugu:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{bd} &= -\frac{1}{2}\partial^{\mu}\left[A_{\mu}\left(K_{\phi\bar{\phi}}(*F_4) - W_{\phi} - \bar{W}_{\bar{\phi}}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2 \cdot 3!}\partial^{\mu}\left[A^{\nu\rho\sigma}\left(K_{\phi\bar{\phi}}F_{\mu\nu\rho\sigma} + \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\left(W_{\phi} + \bar{W}_{\bar{\phi}}\right)\right)\right]. \end{aligned} \quad (\text{H.22})$$

Bestalde, forma-eremuaren higidura-ekuazioa

$$\partial_{\mu}\left(\frac{1}{2}K_{\phi\bar{\phi}}(*F_4) + \text{Re}W_{\phi}\right) = 0 \rightarrow *F_4 = -2K^{\phi\bar{\phi}}(\text{Re}W_{\phi} - n) \quad (\text{H.23})$$

izango da, non $n \in \mathbb{R}$ integrazio konstantea den.

Azken emaitza hori (H.20) lagrangearren aplikatuz eta mugalde-terminoaren ekarpen

ez-arbuiagarria kontuan hartuz, hauxe da eremu eskalarraren araberako lagrangeak finala:

$$\mathcal{L}|_{\text{bos.,on-sh.}} = -K_{\phi\bar{\phi}}\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\bar{\phi} - K^{\phi\bar{\phi}}(W_{\phi} - n)\left(\bar{W}_{\bar{\phi}} - n\right). \quad (\text{H.24})$$

Adierazpen hori ikusita, zuzenean ondorioztatu dezakegu 3-formek ekarpen lineal bat sortuko dutela eremu eskalarraren lagrangearen superpotentzial eraginkorrean. Horrenbestez, 3-formen higidura-ekuazioak aplikatzeak lagrangeak supersimetriko eraginkor berri bat osatuko du, zeinen Kähler potentziala jatorrizkoa den eta, bestalde, ondorengo superpotentzial eraginkorra erabiltzen duen:

$$\hat{W}(\phi) \equiv W(\phi) - n\phi. \quad (\text{H.25})$$

H.2 Hiru-forma bakarreko multipleteak eta Supergrabitatea

Aurreko sekzioko arrazonamendu berdintsua jarraituko dugu ondorengo lerroetan, grabitatearen eragina kontuan hartuz. Lehenik eta behin, multiplete kiralen ekintza aurkeztuko dugu. Ondoren, hori nola orokortu dezakegun ikusiko dugu, 3-formez osatutako osagai bosoiak dituzten multiplete kiralen arabera. Atal honetan garatuko ditugun emaitzak [258, 259] lanetan ere aurki daitezke. Horietan, supereremu kiralak barneratzen dituen Supergrabitatearen formulazio super-Weyl aldaezina erabili dute hemen aurkeztuko ditugun ondorio berdinetara iristeko.

Lau dimentsioko Supergrabitete teorian, grabitateak ekintzan duen ekarpena \mathcal{R} supere-remu kirale baten bidez deskribatzen da. Hauxek dira multiplete horren osagaiak:

- e^{μ}_a vielbein-a,
- ψ^{μ}_{α} grabitinoa,
- b^{μ} eremu bektorial erreal laguntzailea,
- M eremu eskalar konplexu laguntzailea.

Horiekin, Supergrabitete teorian eredu kiralak eraiki ditzakegu, superespazioan definitutako ekintza baten bidez. Hain zuzen ere, [265] liburuko konbentzioak erabiliz, hauxe dugu espazio-denborako lagrangearen bosoi-sektorea:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}}\mathcal{L} = & \frac{1}{2}Re^{-\frac{1}{3}K} + \Omega_{ab}\partial_{\mu}\phi^a\partial^{\mu}\bar{\phi}^b - \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}K}\tilde{M}\tilde{M} - \tilde{M}\bar{W} - \tilde{M}W \\ & + e^{-\frac{1}{3}K}K_{ab}F^a\bar{F}^b + F^a(W_a + K_aW) + \bar{F}^b(\bar{W}_{\bar{b}} + K_{\bar{b}}\bar{W}) \\ & - \frac{1}{9}\Omega b_{\mu}b^{\mu} - \frac{i}{3}b^{\mu}(\partial_{\mu}\phi^a\Omega_a - \partial_{\mu}\bar{\phi}^b\Omega_{\bar{b}}), \end{aligned} \quad (\text{H.26})$$

non

$$\Omega(\Phi, \bar{\Phi}) = -3e^{-\frac{1}{3}K(\Phi, \bar{\Phi})}, \quad \tilde{M} = M + K_a\bar{F}^a, \quad \tilde{\bar{M}} = \bar{M} + K_aF^a \quad (\text{H.27})$$

definitu ditugun. Aitzitik, superespazioko neurria integratuz lortu dugun lagrangeak hori ez dago Einstein-markoan idatzita. Hortaz, vielbeina berreskalatuko dugu ekintzaren forma

aproposagoa lortzeko:

$$e_{\mu}^a \mapsto e_{\mu}^a e^{\frac{1}{6}K}, \quad (\text{H.28})$$

espin-konexioaren transformazio egokiarekin batera. Horrez gain, eremu laguntzaileak ere berreskalatuz:

$$F^i \mapsto F^i e^{-\frac{1}{6}K}, \quad M \mapsto M e^{-\frac{1}{6}K}, \quad (\text{H.29})$$

eta b^{μ} eremu laguntzailearen higidura-ekuazioa erabiliz, Einstein-markoan adierazitako ekintza lortuko dugu:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} R - K_{a\bar{b}} \partial_{\mu} \phi^a \partial^{\mu} \bar{\phi}^{\bar{b}} - \frac{1}{3} \tilde{M} \tilde{M} - e^{\frac{1}{2}K} \tilde{M} \bar{W} - e^{\frac{1}{2}K} \tilde{M} W \\ & + K_{a\bar{b}} F^a \bar{F}^{\bar{b}} + e^{\frac{1}{2}K} F^a (W_a + K_a W) + e^{\frac{1}{2}K} \bar{F}^{\bar{b}} (\bar{W}_{\bar{b}} + K_{\bar{b}} \bar{W}). \end{aligned} \quad (\text{H.30})$$

Supergrabitate minimalaren eta multiplete eskalarren arabeko teorian, \tilde{M} eta F^i eremuak elkarrekiko independenteak direla frogatu daiteke, horien higidura-ekuazioak hauexek izanik:

$$\tilde{M} = -3e^{\frac{1}{2}K} W, \quad F^a K_{a\bar{b}} = -e^{\frac{1}{2}K} (\bar{W}_{\bar{b}} + K_{\bar{b}} \bar{W}). \quad (\text{H.31})$$

Azken adierazpen horiek lehen lortutako lagrangearren aplikatuz, ohiko $\mathcal{N} = 1$, $D = 4$ supegrabitatearen lagrangearra lortuko dugu:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \mathcal{L} = \frac{1}{2} \mathcal{R} - K_{a\bar{b}} \partial_{\mu} \phi^a \partial^{\mu} \bar{\phi}^{\bar{b}} - V(\phi, \bar{\phi}) \quad (\text{H.32})$$

non

$$V(\phi, \bar{\phi}) = e^K \left(D_a W K^{a\bar{b}} D_{\bar{b}} \bar{W} - 3|W|^2 \right), \quad (\text{H.33})$$

den, eta $D_a = \partial_a + W_a$ ohiko deribatu Kähler-kobarianteak diren.

H.2.1 Hiru-formak multiplete kiraletan

Kasu ez-grabitazionalen bezala, hiru-formak multipletean inplizituki barneratuko ditugu supereremu kiralen definizio berezien bidez. Hain zuzen ere, hiru-forma bakarreko multipleteak deskribatzen dituzten supereremu kiralak hauexek ditugu:

$$S = -\frac{i}{4} (\bar{D}^2 - 8R) \mathcal{P}, \quad \mathcal{P} = (\mathcal{P})^* \quad (\text{H.34})$$

non \mathcal{P} supereremu erreala den. Aurreko definizioa ikusita, argi dago S ez dela aldatuko \mathcal{P} -ri supereremu erreala eta lineal bat gehituz gero:

$$\mathcal{P} \mapsto \mathcal{P} + L, \quad (\bar{D}^2 - 8\mathcal{R})L = 0 = (D^2 - 8\bar{\mathcal{R}})L \quad (\text{H.35})$$

Askatasun horretaz baliatu gaitezke Wess-Zumino gauge-a finkatzeko, non

$$\mathcal{P}| = 0, \quad D_\alpha \mathcal{P}| = 0, \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}} \mathcal{P}| = 0, \quad (\text{H.36})$$

dugun, eta L -simetriaren finkatu gabeko osagaiek 3-forma dualaren gauge simetriarekin zerikusia duten,

$$\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^a [D^\alpha, \bar{D}^{\dot{\alpha}}] \mathcal{P}| = 4C^a, \quad C^a = *(A_3)^a, \quad (\text{H.37})$$

Aurreko gauge-a erabiliz, horrelaxe deskonposatu dezakegu S supereremu kiralaren eremu laguntzailea ([265] liburuaren notazioa erabiliz):

$$\mathcal{F} \equiv F_S = -\frac{1}{4} D^2 S| = \frac{i}{16} D^2 \bar{D}^2 \mathcal{P}| - \frac{i}{2} \mathcal{R} D^2 \mathcal{P}| = \frac{1}{2} (D_\mu C^\mu + id) + \frac{1}{3} (s\bar{M} + 2\bar{s}M). \quad (\text{H.38})$$

non d eremu eskalar erreal laguntzailea den, $*F_4 = D_\mu C^\mu = \frac{1}{e} \partial_\mu (e C^\mu)$ den eta e vielbein-aren determinatzailea adierazten duen, $e = \det e_\mu^a$.

Horrenbestez, WZ gauge-ean eta superespazioaren koordinatu fermioikoak integratuz, ohiko multiplete kiralekin egin dugun bezala, gure jatorrizko (H.30) lagrangearra horrelaxe geratuko da:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \text{Re} e^{-\frac{1}{3}K} + \Omega_{s\bar{s}} \partial_\mu s \partial^\mu \bar{s} - \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}K} (M + K_{\bar{s}} \bar{\mathcal{F}}) (\bar{M} + K_s \mathcal{F}) - M\bar{W} - \bar{M}W \\ & + e^{-\frac{1}{3}K} K_{s\bar{s}} \mathcal{F} \bar{\mathcal{F}} + \mathcal{F} W_s + \bar{\mathcal{F}} \bar{W}_{\bar{s}} - \frac{1}{9} \Omega b_\mu b^\mu - \frac{i}{3} b^\mu (\partial_\mu s \Omega_s - \partial_\mu \bar{s} \Omega_{\bar{s}}) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \mathcal{L}_{bd}. \end{aligned} \quad (\text{H.39})$$

Azken adierazpen horretan esplizituki idatzi dugu problema bariazionala ondo formulatzeko beharrezkoa den mugalde-terminoa. Supereremu kiralaren F -terminoa, hots, (H.38), integratu baino lehen, eremuen Weyl berreskalatzea nola egin behar dugun arretaz aztertu behar dugu lehenbizi.

Super-Weyl transformazioak

Aurreko sekzioan, supereremu kiral ez-grabitazionalak lantzerakoan, Φ supereremua Weyl transformazioekiko aldaezina dela suposatu dugu. Hori asumitze tinkoa dela frogatu daiteke supereremu kiral orokor baten kasuan.⁴ Aitzitik, S supereremu kirala \mathcal{P} supereremu errearen mende idatzi dugunez, garrantzitsua da aztertzea vielbeinaren berreskalatzeak, hots, *super-Weyl transformazioak*, zelako eragina duten eremu horietan. Horrela definitzen dira berreskalatze horiek [265, 279]:

$$E^a \mapsto \tilde{E}^a = e^{Y+\bar{Y}} E^a, \quad (\text{H.40})$$

$$E^\alpha \mapsto \tilde{E}^\alpha = e^{2\bar{Y}-Y} \left(E^\alpha - \frac{i}{4} E^\alpha \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}} \bar{Y} \bar{\sigma}_a^{\dot{\alpha}\alpha} \right), \quad (\text{H.41})$$

⁴Hori berresteko, eremu kirala baldintzatu gabeko supereremu konplexu baten arabera idatz daiteke ((H.34) definizioan egin dugun bezalako era berdintsuan). Transformazioaren Weyl pisuak era egokian aukeratuz, edozein Φ eremu kiral orokor berreskalatze horiekiko inbariantea mantentzen dela frogatu daiteke.

$$\bar{E}^{\dot{\alpha}} \mapsto \tilde{\bar{E}}^{\dot{\alpha}} = e^{2Y-\bar{Y}} \left(\bar{E}^{\dot{\alpha}} + \frac{i}{4} E^a \bar{\sigma}_a^{\dot{\alpha}\alpha} \mathcal{D}_\alpha Y \right), \quad (\text{H.42})$$

non Y supereremu kiral orokorra dugun:

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} Y = 0, \quad D_\alpha \bar{Y} = 0. \quad (\text{H.43})$$

Berreskalatze horiek espin-konexioaren transformazioak eragingo dituzte ere, baina lan honetarako ez dute informazio berririk emango azken horiek (ikus [265, 279] xehetasun gehiagorako). Bestalde, super-Weyl berreskalatzeek badute eragina supergrabitae teoriaren proiektore kiraletan, izan ere,

$$(\bar{D}\bar{D} - 8\bar{\mathcal{R}}) \mapsto e^{-4Y} (\bar{D}\bar{D} - \bar{\mathcal{R}}) e^{2\bar{Y}}, \quad (DD - 8\bar{\mathcal{R}}) \mapsto e^{-4\bar{Y}} (DD - 8\bar{\mathcal{R}}) e^{2Y}. \quad (\text{H.44})$$

Horrenbestez, S -ren definizioak operadore hori erabiltzen duenez, super-Weyl transformazioekiko ez-tribialki aldatuko dela ondorioztatu dezakegu zuzenean.

Hain zuzen ere, (H.44) adierazpena kontuan hartuta, (H.34) supereremu kiralek transformazio homogeneoen bidez alda daitezten, horien aurrepotentzial errealari ondorengo transformazio-arauea atxikituko diegu:

$$\mathcal{P} \mapsto \mathcal{P} e^{-2Y-2\bar{Y}}. \quad (\text{H.45})$$

Horren ondorioz,

$$S \mapsto S e^{-6Y} \quad (\text{H.46})$$

izango dugu. Hortaz, S -ren osagai bosoniko nagusia horrelaxe transformatuko da⁵

$$s \mapsto s e^{-6Y|}. \quad (\text{H.47})$$

Ondorengo super-Weyl transformazioen forma konkretua erabiliko dugu jatorrizko ekintza Einstein-markoan idatzi ahal izateko:

$$Y| = \frac{1}{12} K = \bar{Y}|, \quad D_\alpha Y| = 0, \quad D^2 Y| = 0, \quad (\text{H.48})$$

izan ere, kasu horretan, (H.28) ekuazioko transformazio-arauea berdina lortuko baitugu, alegia,

$$e_\mu^a \mapsto e_\mu^a e^{\frac{1}{6}K}. \quad (\text{H.49})$$

Haatik, \mathcal{F} eta M eremu laguntzaileak ere transformazio hori nolabait pairatuko dute. Erraz nabaritu dezakegu hori ondorengo adierazpena aztertuz:

$$(D^2 - 8\bar{\mathcal{R}})S| = -4\mathcal{F} - 8\bar{\mathcal{R}}S| = -4\mathcal{F} + \frac{4}{3}s\bar{M}. \quad (\text{H.50})$$

Goiko transformazio-araue guztiak kontuan hartuta, zuzenean lor ditzakegu super-Weyl

⁵Ez dugu $P|$ osagaiaren transformazioa aintzat hartu Wess-Zumino motako gauge-a aplikatzen ari garelako, alegia, $P| = 0$.

transformazio bosonikoak sortuko dituen berreskalatzeak eremu guztietan:

$$s \mapsto e^{-\frac{1}{2}K} s \quad (\text{H.51})$$

$$\mathcal{F} \mapsto e^{-\frac{2}{3}K} \mathcal{F} \quad (\text{H.52})$$

$$M \mapsto e^{-\frac{1}{6}K} M. \quad (\text{H.53})$$

Komenigarria izango zaigu s eremu eskalarra eta Weyl berreskalatzea bateratzea, eremuaren birdefinizio baten bidez:

$$\phi \equiv e^{-\frac{1}{2}K} s. \quad (\text{H.54})$$

Horri esker, ϕ -ren termino zinetikoa nahiko sinplea izango da bukaeran lortuko dugun ekintzan.

Super-Weyl transformazio guztiak kontuan hartuta eta b^μ eremuaren higidura-ekuazioak erabiliz, hauxe dugu Einstein-markoko lagrangearra:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} R - K_{\phi\bar{\phi}} \partial_\mu \phi \partial^\mu \bar{\phi} - \frac{1}{3} (M + e^{-\frac{1}{2}K} K_{\bar{\phi}} \bar{\mathcal{F}}) (\bar{M} + e^{-\frac{1}{2}K} K_\phi \mathcal{F}) \\ & - e^{\frac{1}{2}K} M \bar{W} - e^{\frac{1}{2}K} \bar{M} W + e^{-K} K_{\phi\bar{\phi}} \mathcal{F} \bar{\mathcal{F}} + \mathcal{F} W_\phi + \bar{\mathcal{F}} \bar{W}_{\bar{\phi}} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \mathcal{L}_{bd}. \end{aligned} \quad (\text{H.55})$$

Bestalde, supegrabitare-multiplerearen M eremu laguntzailea berreskalatuz,

$$\check{M} \equiv M e^{\frac{1}{2}K} \quad (\text{H.56})$$

zenbait adierazpen zeharo sinplifikatuko ditugu. Gainera, eremu eskalarraren (H.54) birdefinizioa erabiliz, S -ren eremu laguntzailea horrela idatzi ahal izango dugu:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} (D_\mu C^\mu + id) + \frac{2}{3} \bar{\phi} \check{M} + \frac{1}{3} \phi \check{\bar{M}}. \quad (\text{H.57})$$

Aurrekoaren arabera, berreskalatutako lagrangearra horrela berridatziko dugu:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} R - K_{\phi\bar{\phi}} \partial_\mu \phi \partial^\mu \bar{\phi} - \frac{1}{3} e^{-K} (\check{M} + K_{\bar{\phi}} \bar{\mathcal{F}}) (\check{\bar{M}} + K_\phi \mathcal{F}) - \check{M} \bar{W} - \check{\bar{M}} W \\ & + e^{-K} K_{\phi\bar{\phi}} \mathcal{F} \bar{\mathcal{F}} + \mathcal{F} W_\phi + \bar{\mathcal{F}} \bar{W}_{\bar{\phi}} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \mathcal{L}_{bd}. \end{aligned} \quad (\text{H.58})$$

Mugalde-terminoa aurreko sekzioan bezala lor dezakegu. Izan ere, ekintzaren 3-formarekiko mendekotasuna $D_\mu C^\mu$ adierazpenaren bidez agertzen denez kasu guztietan, ekintzaren eremu horrekiko bariazioak ondorengo ekuazioa emango digu:

$$\begin{aligned} \delta S = & \int d^4 x e \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D_\mu C^\mu)} \left(\frac{1}{e} \partial_\mu (e \delta C^\mu) \right) \\ = & - \int d^4 x e \delta C^\mu \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D_\mu C^\mu)} \right) + \int d^4 x \partial_\mu \left(e \delta C^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D_\mu C^\mu)} \right) = 0. \end{aligned} \quad (\text{H.59})$$

Horrenbestez, hauxe dugu lagrangearraren mugalde-terminoa:

$$\mathcal{L}_{bd} = - \int d^4x \partial_\mu \left(e C^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D_\mu C^\mu)} \right). \quad (\text{H.60})$$

Azkenik, hauexek ditugu ebatzi beharreko higidura-ekuazioak:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \check{M}} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D_\mu C^\mu)} = n, \quad (\text{H.61})$$

non $n \in \mathbb{R}$ den. Ekuazio algebraiko horien soluzio analitikoa ondorengoa da:

$$d = -iK^{\phi\bar{\phi}} e^K [D_\phi(W - n\phi) - \text{c.c.}] \quad (\text{H.62})$$

$$\check{M} = e^K [D_\phi(W - n\phi)K^{\phi\bar{\phi}}K_{\bar{\phi}} - 3(W - n\phi)] \quad (\text{H.63})$$

$$D_\mu C^\mu = e^K [3(W - n\phi)\bar{\phi} - (1 + \bar{\phi}K_{\bar{\phi}})K^{\phi\bar{\phi}}D_\phi(W - n\phi) + \text{c.c.}] \quad (\text{H.64})$$

non $D_\phi = \partial_\phi + K_\phi$ ohiko deribatu Kähler-kobariantea dugun. Soluzio horiek (H.58) lagrangearean aplikatuz eta mugalde-terminoaren kontribuzio ez-nulua aintzat hartuz, ondorengoa lortuko dugu:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \mathcal{L} = \frac{1}{2}R - K_{\phi\bar{\phi}} \partial_\mu \phi \partial^\mu \bar{\phi} - e^K \left(D_\phi \hat{W} K^{\phi\bar{\phi}} D_{\bar{\phi}} \hat{W} - 3|\hat{W}| \right) \quad (\text{H.65})$$

non, kasu ez-grabitazioanalean bezala, ondorengo superpotentzial eraginkorra definitu dugun:

$$\hat{W} \equiv W - n\phi. \quad (\text{H.66})$$

Ondorioz, 3-forma eremuak emango duten kontribuzioa, euren higidura-ekuazioekin ebaluatzerakoan, superpotentzialaren termino lineal batean datza. Horrenbestez, ohiko $\mathcal{N} = 1$, $D = 4$ supergrabitatie-teoria kirala lortu dugu, superpotentzial eraginkor berri baten arabera.

Bibliografia

- [1] J. Polchinski, *String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press (12, 2007), 10.1017/CBO9780511816079.
- [2] J. Polchinski, *String theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press (12, 2007), 10.1017/CBO9780511618123.
- [3] K. Becker, M. Becker and J.H. Schwarz, *String theory and M-theory: A modern introduction*, Cambridge university press (2006).
- [4] R. Blumenhagen, D. Lüst and S. Theisen, *Basic concepts of string theory*, Theoretical and Mathematical Physics, Springer, Heidelberg, Germany (2013), 10.1007/978-3-642-29497-6.
- [5] P. Di Vecchia and A. Schwimmer, *The Beginning of string theory: A Historical sketch*, *Lect. Notes Phys.* **737** (2008) 119 [0708.3940].
- [6] P. Goddard, J. Goldstone, C. Rebbi and C.B. Thorn, *Quantum dynamics of a massless relativistic string*, *Nucl. Phys. B* **56** (1973) 109.
- [7] E. Witten, *String theory dynamics in various dimensions*, *Nucl. Phys. B* **443** (1995) 85 [hep-th/9503124].
- [8] M.J. Duff, *M theory (The Theory formerly known as strings)*, *Int. J. Mod. Phys. A* **11** (1996) 5623 [hep-th/9608117].
- [9] A. Strominger, *Superstrings with Torsion*, *Nucl. Phys. B* **274** (1986) 253.
- [10] B. de Wit, D.J. Smit and N.D. Hari Dass, *Residual Supersymmetry of Compactified D=10 Supergravity*, *Nucl. Phys. B* **283** (1987) 165.
- [11] S.B. Giddings, S. Kachru and J. Polchinski, *Hierarchies from fluxes in string compactifications*, *Phys.Rev.* **D66** (2002) 106006 [hep-th/0105097].
- [12] M. Grana, *Flux compactifications in string theory: A Comprehensive review*, *Phys. Rept.* **423** (2006) 91 [hep-th/0509003].
- [13] M.R. Douglas and S. Kachru, *Flux compactification*, *Rev.Mod.Phys.* **79** (2007) 733 [hep-th/0610102].

- [14] F. Denef, *Les Houches Lectures on Constructing String Vacua*, *Les Houches* **87** (2008) 483 [0803.1194].
- [15] J. Polchinski, *Dirichlet Branes and Ramond-Ramond charges*, *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 4724 [hep-th/9510017].
- [16] E. Witten, *Bound states of strings and p-branes*, *Nucl. Phys. B* **460** (1996) 335 [hep-th/9510135].
- [17] P. Candelas, G.T. Horowitz, A. Strominger and E. Witten, *Vacuum Configurations for Superstrings*, *Nucl. Phys. B* **258** (1985) 46.
- [18] K. Becker, M. Becker and J.H. Schwarz, *String theory and M-theory: A modern introduction*, Cambridge University Press (12, 2006).
- [19] S.-T. Yau, *On the ricci curvature of a compact kähler manifold and the complex monge-ampère equation, i*, *Communications on pure and applied mathematics* **31** (1978) 339.
- [20] T. Hubsch, *Calabi-Yau manifolds: A Bestiary for physicists*, World Scientific (1992).
- [21] P. Candelas and X. de la Ossa, *Moduli space of Calabi-Yau manifolds*, *Nucl.Phys.* **B355** (1991) 455.
- [22] T.W. Grimm and J. Louis, *The Effective action of $N = 1$ Calabi-Yau orientifolds*, *Nucl.Phys.* **B699** (2004) 387 [hep-th/0403067].
- [23] R. Blumenhagen, B. Kors, D. Lust and S. Stieberger, *Four-dimensional String Compactifications with D-Branes, Orientifolds and Fluxes*, *Phys. Rept.* **445** (2007) 1 [hep-th/0610327].
- [24] P. Svrcek and E. Witten, *Axions In String Theory*, *JHEP* **06** (2006) 051 [hep-th/0605206].
- [25] A. Arvanitaki, S. Dimopoulos, S. Dubovsky, N. Kaloper and J. March-Russell, *String Axiverse*, *Phys. Rev. D* **81** (2010) 123530 [0905.4720].
- [26] M. Kreuzer and H. Skarke, *Complete classification of reflexive polyhedra in four-dimensions*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **4** (2002) 1209 [hep-th/0002240].
- [27] Y.-H. He, *The Calabi-Yau Landscape: from Geometry, to Physics, to Machine-Learning*, 1812.02893.
- [28] B.S. Acharya, G. Kane and P. Kumar, *Compactified String Theories – Generic Predictions for Particle Physics*, *Int. J. Mod. Phys. A* **27** (2012) 1230012 [1204.2795].
- [29] S. Gukov, C. Vafa and E. Witten, *CFT's from Calabi-Yau four folds*, *Nucl.Phys.* **B584** (2000) 69 [hep-th/9906070].
- [30] A. Klemm, *Topological string theory on Calabi-Yau threefolds*, *PoS RTN2005* (2005) 002.

- [31] J.P. Conlon, F. Quevedo and K. Suruliz, *Large-volume flux compactifications: Moduli spectrum and D3/D7 soft supersymmetry breaking*, *JHEP* **0508** (2005) 007 [hep-th/0505076].
- [32] K. Becker, M. Becker, M. Haack and J. Louis, *Supersymmetry breaking and alpha-prime corrections to flux induced potentials*, *JHEP* **0206** (2002) 060 [hep-th/0204254].
- [33] L. Anguelova, C. Quigley and S. Sethi, *The Leading Quantum Corrections to Stringy Kahler Potentials*, *JHEP* **10** (2010) 065 [1007.4793].
- [34] V. Balasubramanian, P. Berglund, J.P. Conlon and F. Quevedo, *Systematics of moduli stabilisation in Calabi-Yau flux compactifications*, *JHEP* **0503** (2005) 007 [hep-th/0502058].
- [35] S. Kachru, R. Kallosh, A.D. Linde and S.P. Trivedi, *De Sitter vacua in string theory*, *Phys.Rev.* **D68** (2003) 046005 [hep-th/0301240].
- [36] V. Balasubramanian and P. Berglund, *Stringy corrections to Kahler potentials, SUSY breaking, and the cosmological constant problem*, *JHEP* **0411** (2004) 085 [hep-th/0408054].
- [37] S. Sethi, *Supersymmetry Breaking by Fluxes*, *JHEP* **10** (2018) 022 [1709.03554].
- [38] S. Kachru and S.P. Trivedi, *A comment on effective field theories of flux vacua*, *Fortsch. Phys.* **67** (2019) 1800086 [1808.08971].
- [39] C. Vafa, *Evidence for F theory*, *Nucl. Phys. B* **469** (1996) 403 [hep-th/9602022].
- [40] D. Baumann and L. McAllister, *Inflation and String Theory*, 1404.2601.
- [41] A. Hebecker, *Lectures on Naturalness, String Landscape and Multiverse*, 2008.10625.
- [42] G. Veneziano and S. Yankielowicz, *An Effective Lagrangian for the Pure N=1 Supersymmetric Yang-Mills Theory*, *Phys. Lett. B* **113** (1982) 231.
- [43] C. Burgess, R. Kallosh and F. Quevedo, *De Sitter string vacua from supersymmetric D terms*, *JHEP* **0310** (2003) 056 [hep-th/0309187].
- [44] L. Susskind, *The Anthropic landscape of string theory*, hep-th/0302219.
- [45] F. Denef, M.R. Douglas and B. Florea, *Building a better racetrack*, *JHEP* **0406** (2004) 034 [hep-th/0404257].
- [46] F. Denef and M.R. Douglas, *Distributions of flux vacua*, *JHEP* **0405** (2004) 072 [hep-th/0404116].
- [47] W. Taylor and Y.-N. Wang, *The F-theory geometry with most flux vacua*, *JHEP* **12** (2015) 164 [1511.03209].
- [48] M.R. Douglas, *The Statistics of string / M theory vacua*, *JHEP* **05** (2003) 046 [hep-th/0303194].

- [49] C. Vafa, *The String landscape and the swampland*, hep-th/0509212.
- [50] T.D. Brennan, F. Carta and C. Vafa, *The String Landscape, the Swampland, and the Missing Corner*, *PoS TASI2017* (2017) 015 [1711.00864].
- [51] E. Palti, *The Swampland: Introduction and Review*, *Fortsch. Phys.* **67** (2019) 1900037 [1903.06239].
- [52] N. Arkani-Hamed, L. Motl, A. Nicolis and C. Vafa, *The String landscape, black holes and gravity as the weakest force*, *JHEP* **06** (2007) 060 [hep-th/0601001].
- [53] T. Banks and L.J. Dixon, *Constraints on String Vacua with Space-Time Supersymmetry*, *Nucl. Phys. B* **307** (1988) 93.
- [54] G. Obied, H. Ooguri, L. Spodyneiko and C. Vafa, *De Sitter Space and the Swampland*, 1806.08362.
- [55] U.H. Danielsson and T. Van Riet, *What if string theory has no de Sitter vacua?*, *Int. J. Mod. Phys. D* **27** (2018) 1830007 [1804.01120].
- [56] A. Achúcarro and G.A. Palma, *The string swampland constraints require multi-field inflation*, *JCAP* **02** (2019) 041 [1807.04390].
- [57] K. Dasgupta, M. Emelin, E. McDonough and R. Tatar, *Quantum Corrections and the de Sitter Swampland Conjecture*, *JHEP* **01** (2019) 145 [1808.07498].
- [58] Y. Akrami, R. Kallosh, A. Linde and V. Vardanyan, *The Landscape, the Swampland and the Era of Precision Cosmology*, *Fortsch. Phys.* **67** (2019) 1800075 [1808.09440].
- [59] M. Cicoli, S. De Alwis, A. Maharana, F. Muia and F. Quevedo, *De Sitter vs Quintessence in String Theory*, *Fortsch. Phys.* **67** (2019) 1800079 [1808.08967].
- [60] R. Kallosh and T. Wrase, *dS Supergravity from 10d*, *Fortsch. Phys.* **67** (2019) 1800071 [1808.09427].
- [61] R. Kallosh, A. Linde, E. McDonough and M. Scalisi, *4D models of de Sitter uplift*, *Phys. Rev. D* **99** (2019) 046006 [1809.09018].
- [62] J. Moritz, A. Retolaza and A. Westphal, *Toward de Sitter space from ten dimensions*, *Phys. Rev. D* **97** (2018) 046010 [1707.08678].
- [63] J. Moritz and T. Van Riet, *Racing through the swampland: de Sitter uplift vs weak gravity*, *JHEP* **09** (2018) 099 [1805.00944].
- [64] J. Moritz, A. Retolaza and A. Westphal, *On uplifts by warped anti-D3-branes*, *Fortsch. Phys.* **67** (2019) 1800098 [1809.06618].
- [65] L. Heisenberg, M. Bartelmann, R. Brandenberger and A. Refregier, *Dark Energy in the Swampland*, *Phys. Rev. D* **98** (2018) 123502 [1808.02877].

- [66] H. Ooguri, E. Palti, G. Shiu and C. Vafa, *Distance and de Sitter Conjectures on the Swampland*, *Phys. Lett. B* **788** (2019) 180 [1810.05506].
- [67] S.R. Coleman, *The Fate of the False Vacuum. 1. Semiclassical Theory*, *Phys. Rev. D* **15** (1977) 2929.
- [68] C.G. Callan, Jr. and S.R. Coleman, *The Fate of the False Vacuum. 2. First Quantum Corrections*, *Phys. Rev. D* **16** (1977) 1762.
- [69] S.R. Coleman and F. De Luccia, *Gravitational Effects on and of Vacuum Decay*, *Phys. Rev. D* **21** (1980) 3305.
- [70] S.R. Coleman, V. Glaser and A. Martin, *Action Minima Among Solutions to a Class of Euclidean Scalar Field Equations*, *Commun. Math. Phys.* **58** (1978) 211.
- [71] S. Coleman, *Aspects of Symmetry: Selected Erice Lectures*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K. (1985), 10.1017/CBO9780511565045.
- [72] E.J. Weinberg, *Classical solutions in quantum field theory: Solitons and Instantons in High Energy Physics*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press (9, 2012), 10.1017/CBO9781139017787.
- [73] T. Banks, C.M. Bender and T.T. Wu, *Coupled anharmonic oscillators. 1. Equal mass case*, *Phys. Rev. D* **8** (1973) 3346.
- [74] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Mechanics: Volume 1*, vol. 1, Butterworth-Heinemann (1976).
- [75] K. Blum, M. Honda, R. Sato, M. Takimoto and K. Tobioka, *$O(N)$ Invariance of the Multi-Field Bounce*, *JHEP* **05** (2017) 109 [1611.04570].
- [76] A. Masoumi, K.D. Olum and B. Shlaer, *Efficient numerical solution to vacuum decay with many fields*, *JCAP* **1701** (2017) 051 [1610.06594].
- [77] C.L. Wainwright, *CosmoTransitions: Computing Cosmological Phase Transition Temperatures and Bubble Profiles with Multiple Fields*, *Comput. Phys. Commun.* **183** (2012) 2006 [1109.4189].
- [78] R. Sato, *SimpleBounce : a simple package for the false vacuum decay*, *Comput. Phys. Commun.* **258** (2021) 107566 [1908.10868].
- [79] A. Masoumi, K.D. Olum and J.M. Wachter, *Approximating tunneling rates in multi-dimensional field spaces*, *JCAP* **1710** (2017) 022 [1702.00356].
- [80] U. Sarid, *Tools for tunneling*, *Phys. Rev. D* **58** (1998) 085017 [hep-ph/9804308].
- [81] K.-M. Lee and E.J. Weinberg, *Decay of the True Vacuum in Curved Space-time*, *Phys. Rev. D* **36** (1987) 1088.
- [82] J. Garriga and A. Vilenkin, *Recycling universe*, *Phys. Rev. D* **57** (1998) 2230 [astro-ph/9707292].

- [83] A.H. Guth, *The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems*, *Phys.Rev.* **D23** (1981) 347.
- [84] A.H. Guth and E.J. Weinberg, *Could the Universe Have Recovered from a Slow First Order Phase Transition?*, *Nucl. Phys. B* **212** (1983) 321.
- [85] D. Baumann, *TASI Lectures on Inflation*, 0907.5424.
- [86] V. Mukhanov, *Physical foundations of cosmology*, Cambridge Univ. Pr., Cambridge, UK (2005).
- [87] B. Freivogel, M. Kleban, M. Rodriguez Martinez and L. Susskind, *Observational consequences of a landscape*, *JHEP* **03** (2006) 039 [hep-th/0505232].
- [88] A.D. Linde, *Inflation, quantum cosmology and the anthropic principle*, hep-th/0211048.
- [89] A.D. Linde, *Inflationary Cosmology*, *Lect. Notes Phys.* **738** (2008) 1 [0705.0164].
- [90] M. Yamaguchi, *Supergravity based inflation models: a review*, *Class.Quant.Grav.* **28** (2011) 103001 [1101.2488].
- [91] R. Bousso, D. Harlow and L. Senatore, *Inflation after False Vacuum Decay: observational Prospects after Planck*, *Phys. Rev. D* **91** (2015) 083527 [1309.4060].
- [92] R. Bousso, D. Harlow and L. Senatore, *Inflation After False Vacuum Decay: New Evidence from BICEP2*, 1404.2278.
- [93] S. Cespedes, S.P. de Alwis, F. Muia and F. Quevedo, *Lorentzian Vacuum Transitions: Open or Closed Universes?*, 2011.13936.
- [94] J.J. Blanco-Pillado, K. Sousa, M.A. Urkiola and J.M. Wachter, *Towards a complete mass spectrum of type-IIB flux vacua at large complex structure*, *JHEP* **04** (2021) 149 [2007.10381].
- [95] A. Westphal, *de Sitter string vacua from Kahler uplifting*, *JHEP* **03** (2007) 102 [hep-th/0611332].
- [96] A. Giryavets, S. Kachru, P.K. Tripathy and S.P. Trivedi, *Flux compactifications on Calabi-Yau threefolds*, *JHEP* **0404** (2004) 003 [hep-th/0312104].
- [97] A. Giryavets, S. Kachru and P.K. Tripathy, *On the taxonomy of flux vacua*, *JHEP* **08** (2004) 002 [hep-th/0404243].
- [98] O. DeWolfe, A. Giryavets, S. Kachru and W. Taylor, *Enumerating flux vacua with enhanced symmetries*, *JHEP* **0502** (2005) 037 [hep-th/0411061].
- [99] J. Louis, M. Rummel, R. Valandro and A. Westphal, *Building an explicit de Sitter*, *JHEP* **1210** (2012) 163 [1208.3208].
- [100] J.J. Blanco-Pillado, M. Gomez-Reino and K. Metallinos, *Accidental Inflation in the Landscape*, *JCAP* **1302** (2013) 034 [1209.0796].

- [101] M. Cicoli, D. Klevers, S. Krippendorff, C. Mayrhofer, F. Quevedo et al., *Explicit de Sitter Flux Vacua for Global String Models with Chiral Matter*, *JHEP* **1405** (2014) 001 [1312.0014].
- [102] M. Tegmark, *What does inflation really predict?*, *JCAP* **0504** (2005) 001 [astro-ph/0410281].
- [103] R. Easther and L. McAllister, *Random matrices and the spectrum of N-flation*, *JCAP* **0605** (2006) 018 [hep-th/0512102].
- [104] D. Battefeld, T. Battefeld and S. Schulz, *On the Unlikelihood of Multi-Field Inflation: Bounded Random Potentials and our Vacuum*, *JCAP* **1206** (2012) 034 [1203.3941].
- [105] M.C.D. Marsh, L. McAllister, E. Pajer and T. Wrase, *Charting an Inflationary Landscape with Random Matrix Theory*, *JCAP* **1311** (2013) 040 [1307.3559].
- [106] A. Masoumi, A. Vilenkin and M. Yamada, *Inflation in random Gaussian landscapes*, *JCAP* **1705** (2017) 053 [1612.03960].
- [107] G. Wang and T. Battefeld, *Random Functions via Dyson Brownian Motion: Progress and Problems*, *JCAP* **1609** (2016) 008 [1607.02514].
- [108] F.G. Pedro and A. Westphal, *Inflation with a graceful exit in a random landscape*, *JHEP* **03** (2017) 163 [1611.07059].
- [109] B. Freivogel, R. Gobbetti, E. Pajer and I.-S. Yang, *Inflation on a Slippery Slope*, 1608.00041.
- [110] T. Bjorkmo and M.C.D. Marsh, *Manyfield Inflation in Random Potentials*, *JCAP* **1802** (2018) 037 [1709.10076].
- [111] M. Dias, J. Frazer and M.c.D. Marsh, *Seven Lessons from Manyfield Inflation in Random Potentials*, *JCAP* **1801** (2018) 036 [1706.03774].
- [112] A. Masoumi, A. Vilenkin and M. Yamada, *Initial conditions for slow-roll inflation in a random Gaussian landscape*, *JCAP* **1707** (2017) 003 [1704.06994].
- [113] A. Masoumi, A. Vilenkin and M. Yamada, *Inflation in multi-field random Gaussian landscapes*, *JCAP* **1712** (2017) 035 [1707.03520].
- [114] J.J. Blanco-Pillado, A. Vilenkin and M. Yamada, *Inflation in Random Landscapes with two energy scales*, *JHEP* **02** (2018) 130 [1711.00491].
- [115] S. Paban and R. Rosati, *Inflation in Multi-field Modified DBM Potentials*, *JCAP* **1809** (2018) 042 [1807.07654].
- [116] T. Bjorkmo and M.C.D. Marsh, *Local, algebraic simplifications of Gaussian random fields*, 1805.03117.
- [117] J.J. Blanco-Pillado, K. Sousa and M.A. Urkiola, *Slepian models for Gaussian Random Landscapes*, *JHEP* **05** (2020) 142 [1911.07618].

- [118] L.F. Low, S. Hotchkiss and R. Easter, *The Distribution of Vacua in Random Landscape Potentials*, 2004 . 04429.
- [119] P. Candelas, X.C. De La Ossa, P.S. Green and L. Parkes, *A Pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory*, *Nucl.Phys.* **B359** (1991) 21.
- [120] S. Hosono, A. Klemm, S. Theisen and S.-T. Yau, *Mirror symmetry, mirror map and applications to complete intersection Calabi-Yau spaces*, *Nucl. Phys.* **B433** (1995) 501 [hep-th/9406055].
- [121] D. Gallego, *On the Effective Description of Large Volume Compactifications*, *JHEP* **1106** (2011) 087 [1103 . 5469].
- [122] A. Achucarro, S. Hardeman and K. Sousa, *F-term uplifting and the supersymmetric integration of heavy moduli*, *JHEP* **0811** (2008) 003 [0809 . 1441].
- [123] K. Sousa and P. Ortiz, *Perturbative Stability along the Supersymmetric Directions of the Landscape*, *JCAP* **1502** (2015) 017 [1408 . 6521].
- [124] A. Klemm and S. Theisen, *Considerations of one modulus Calabi-Yau compactifications: Picard-Fuchs equations, Kahler potentials and mirror maps*, *Nucl. Phys.* **B389** (1993) 153 [hep-th/9205041].
- [125] C. Doran, B. Greene and S. Judes, *Families of quintic Calabi-Yau 3-folds with discrete symmetries*, *Commun.Math.Phys.* **280** (2008) 675 [hep-th/0701206].
- [126] P. Candelas and C. Mishra, *Highly Symmetric Quintic Quotients*, *Fortsch. Phys.* **66** (2018) 1800017 [1709 . 01081].
- [127] V. Braun, *The 24-Cell and Calabi-Yau Threefolds with Hodge Numbers (1,1)*, *JHEP* **05** (2012) 101 [1102 . 4880].
- [128] V. Batyrev and M. Kreuzer, *Constructing new Calabi-Yau 3-folds and their mirrors via conifold transitions*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **14** (2010) 879 [0802 . 3376].
- [129] C.F. Doran and J.W. Morgan, *Mirror symmetry and integral variations of Hodge structure underlying one parameter families of Calabi-Yau threefolds*, in *Calabi-Yau varieties and mirror symmetry. Proceedings, Workshop, Mirror Symmetry 5, Banff, Canada, December 6-11, 2003*, pp. 517–537, 2005 [math/0505272].
- [130] V. Braun, P. Candelas and X. de la Ossa, *Two One-Parameter Special Geometries*, 1512 . 08367.
- [131] P. Candelas, X. de la Ossa, M. Elmi and D. Van Straten, *A One Parameter Family of Calabi-Yau Manifolds with Attractor Points of Rank Two*, 1912 . 06146.
- [132] A. Joshi and A. Klemm, *Swampland Distance Conjecture for One-Parameter Calabi-Yau Threefolds*, *JHEP* **08** (2019) 086 [1903 . 00596].

- [133] A. Font, *Periods and duality symmetries in Calabi-Yau compactifications*, *Nucl. Phys.* **B391** (1993) 358 [hep-th/9203084].
- [134] F. Denef and M.R. Douglas, *Distributions of nonsupersymmetric flux vacua*, *JHEP* **0503** (2005) 061 [hep-th/0411183].
- [135] D. Freedman and A. Van Proeyen, *Supergravity*, Cambridge University Press (2012).
- [136] S. Gates, M.T. Grisaru, M. Rocek and W. Siegel, *Superspace Or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry*, *Front.Phys.* **58** (1983) 1 [hep-th/0108200].
- [137] R. D'Auria, S. Ferrara, M. Trigiante and S. Vaula, *$N=1$ reductions of $N=2$ supergravity in the presence of tensor multiplets*, *JHEP* **0503** (2005) 052 [hep-th/0502219].
- [138] A. Achucarro, S. Hardeman and K. Sousa, *Consistent Decoupling of Heavy Scalars and Moduli in $N=1$ Supergravity*, *Phys.Rev.* **D78** (2008) 101901 [0806.4364].
- [139] P. Candelas, X. De La Ossa, A. Font, S.H. Katz and D.R. Morrison, *Mirror symmetry for two parameter models. 1.*, *Nucl.Phys.* **B416** (1994) 481 [hep-th/9308083].
- [140] P. Berglund, P. Candelas, X. De La Ossa, A. Font, T. Hubsch et al., *Periods for Calabi-Yau and Landau-Ginzburg vacua*, *Nucl.Phys.* **B419** (1994) 352 [hep-th/9308005].
- [141] P. Candelas, A. Font, S.H. Katz and D.R. Morrison, *Mirror symmetry for two parameter models. 2.*, *Nucl.Phys.* **B429** (1994) 626 [hep-th/9403187].
- [142] P. Candelas, X. de la Ossa and F. Rodriguez-Villegas, *Calabi-Yau manifolds over finite fields. 1.*, hep-th/0012233.
- [143] E. Cremmer, C. Kounnas, A. Van Proeyen, J. Derendinger, S. Ferrara, B. de Wit et al., *Vector Multiplets Coupled to $N=2$ Supergravity: SuperHiggs Effect, Flat Potentials and Geometric Structure*, *Nucl. Phys. B* **250** (1985) 385.
- [144] D. Farquet and C.A. Scrucca, *Scalar geometry and masses in Calabi-Yau string models*, *JHEP* **09** (2012) 025 [1205.5728].
- [145] M.C.D. Marsh and K. Sousa, *Universal Properties of Type IIB and F-theory Flux Compactifications at Large Complex Structure*, *JHEP* **03** (2016) 064 [1512.08549].
- [146] L. Covi, M. Gomez-Reino, C. Gross, J. Louis, G.A. Palma et al., *de Sitter vacua in no-scale supergravities and Calabi-Yau string models*, *JHEP* **0806** (2008) 057 [0804.1073].
- [147] L. Covi, M. Gomez-Reino, C. Gross, G.A. Palma and C.A. Scrucca, *Constructing de Sitter vacua in no-scale string models without uplifting*, *JHEP* **0903** (2009) 146 [0812.3864].
- [148] H. Abe, T. Higaki and T. Kobayashi, *Remark on integrating out heavy moduli in flux compactification*, *Phys. Rev. D* **74** (2006) 045012 [hep-th/0606095].
- [149] D. Gallego and M. Serone, *An Effective Description of the Landscape. I.*, *JHEP* **0901** (2009) 056 [0812.0369].

- [150] D. Gallego and M. Serone, *An Effective Description of the Landscape - II*, *JHEP* **0906** (2009) 057 [0904 . 2537].
- [151] I. Bena, E. Dudas, M. Graña and S. Lust, *Uplifting Runaways*, *Fortsch. Phys.* **67** (2019) 1800100 [1809 . 06861].
- [152] M. Demirtas, M. Kim, L. Mcallister and J. Moritz, *Vacua with Small Flux Superpotential*, *Phys. Rev. Lett.* **124** (2020) 211603 [1912 . 10047].
- [153] M.C.D. Marsh, B. Vercnocke and T. Wrase, *Decoupling and de Sitter Vacua in Approximate No-Scale Supergravities*, *JHEP* **05** (2015) 081 [1411 . 6625].
- [154] D. Gallego, M.C.D. Marsh, B. Vercnocke and T. Wrase, *A new class of de sitter vacua in type iib large volume compactifications*, *JHEP* **10** (2017) 193 [1707 . 01095].
- [155] C. Brodie and M.C.D. Marsh, *The Spectra of Type IIB Flux Compactifications at Large Complex Structure*, 1509 . 06761.
- [156] A. Sen, *Orientifold limit of F theory vacua*, *Phys. Rev.* **D55** (1997) R7345 [hep-th/9702165].
- [157] A. Klemm, B. Lian, S.S. Roan and S.-T. Yau, *Calabi-Yau fourfolds for M theory and F theory compactifications*, *Nucl. Phys.* **B518** (1998) 515 [hep-th/9701023].
- [158] D. Lust, P. Mayr, S. Reffert and S. Stieberger, *F-theory flux, destabilization of orientifolds and soft terms on D7-branes*, *Nucl. Phys. B* **732** (2006) 243 [hep-th/0501139].
- [159] A. Collinucci, F. Denef and M. Esole, *D-brane Deconstructions in IIB Orientifolds*, *JHEP* **02** (2009) 005 [0805 . 1573].
- [160] M. Alim, M. Hecht, H. Jockers, P. Mayr, A. Mertens and M. Soroush, *Hints for Off-Shell Mirror Symmetry in type II/F-theory Compactifications*, *Nucl. Phys. B* **841** (2010) 303 [0909 . 1842].
- [161] Y. Honma and H. Otsuka, *On the Flux Vacua in F-theory Compactifications*, *Phys. Lett. B* **774** (2017) 225 [1706 . 09417].
- [162] Y. Honma and H. Otsuka, *F-theory Flux Vacua and Attractor Equations*, *JHEP* **04** (2020) 001 [1910 . 10725].
- [163] D. Bates, D. Brake and M.Ñiemerg, *Paramotopy: Parameter homotopies in parallel*, in *International Congress on Mathematical Software*, pp. 28–35, Springer, 2018.
- [164] A.J. Sommese and C.W. Wampler, *Numerical algebraic geometry*, .
- [165] A.J. Sommese and C.W. Wampler, *The Numerical Solution of Systems of Polynomials Arising in Engineering and Science*, World Scientific (2005).
- [166] D. Martinez-Pedrerá, D. Mehta, M. Rummel and A. Westphal, *Finding all flux vacua in an explicit example*, *JHEP* **06** (2013) 110 [1212 . 4530].

- [167] Y.-H. He, D. Mehta, M. Niemerg, M. Rummel and A. Valeanu, *Exploring the Potential Energy Landscape Over a Large Parameter-Space*, *JHEP* **07** (2013) 050 [1301.0946].
- [168] M. Kac, *On the average number of real roots of a random algebraic equation*, *Bull. Amer. Math. Soc.* **49** (1943) 314.
- [169] S.O. Rice, *Mathematical analysis of random noise*, *Bell System Technical Journal* **23** (1944) 282.
- [170] R.J. Adler and J.E. Taylor, *Random fields and geometry*, Springer Science & Business Media (2009).
- [171] S. Ashok and M.R. Douglas, *Counting flux vacua*, *JHEP* **01** (2004) 060 [hep-th/0307049].
- [172] J.P. Conlon and F. Quevedo, *On the explicit construction and statistics of Calabi-Yau flux vacua*, *JHEP* **10** (2004) 039 [hep-th/0409215].
- [173] I. Broeckel, M. Cicoli, A. Maharana, K. Singh and K. Sinha, *Moduli Stabilisation and the Statistics of SUSY Breaking in the Landscape*, 2007.04327.
- [174] A. Aazami and R. Easther, *Cosmology from random multifield potentials*, *JCAP* **0603** (2006) 013 [hep-th/0512050].
- [175] D. Mehta, M. Niemerg and C. Sun, *Statistics of Stationary Points of Random Finite Polynomial Potentials*, *J. Stat. Mech.* **1509** (2015) P09012 [1504.02786].
- [176] J. von Neuman and E. Wigner, *Über merkwürdige diskrete Eigenwerte. Über das Verhalten von Eigenwerten bei adiabatischen Prozessen*, *Physikalische Zeitschrift* **30** (1929) 467.
- [177] D. Marsh, L. McAllister and T. Wrase, *The Wasteland of Random Supergravities*, *JHEP* **1203** (2012) 102 [1112.3034].
- [178] T.C. Bachlechner, D. Marsh, L. McAllister and T. Wrase, *Supersymmetric Vacua in Random Supergravity*, *JHEP* **1301** (2013) 136 [1207.2763].
- [179] A. Achucarro, P. Ortiz and K. Sousa, *A new class of de Sitter vacua in String Theory Compactifications*, *Phys. Rev.* **D94** (2016) 086012 [1510.01273].
- [180] T. Guhr, A. Muller-Groeling and H.A. Weidenmuller, *Random matrix theories in quantum physics: Common concepts*, *Phys. Rept.* **299** (1998) 189 [cond-mat/9707301].
- [181] J.P. Conlon, *The QCD axion and moduli stabilisation*, *JHEP* **05** (2006) 078 [hep-th/0602233].
- [182] R. Kallosh, A.D. Linde, D.A. Linde and L. Susskind, *Gravity and global symmetries*, *Phys. Rev. D* **52** (1995) 912 [hep-th/9502069].
- [183] T. Banks and N. Seiberg, *Symmetries and Strings in Field Theory and Gravity*, *Phys. Rev. D* **83** (2011) 084019 [1011.5120].

- [184] A.P. Braun, N. Johansson, M. Larfors and N.-O. Walliser, *Restrictions on infinite sequences of type IIB vacua*, *JHEP* **10** (2011) 091 [1108.1394].
- [185] U.H. Danielsson, N. Johansson and M. Larfors, *The World next door: Results in landscape topography*, *JHEP* **03** (2007) 080 [hep-th/0612222].
- [186] D. Junghans, *Weakly Coupled de Sitter Vacua with Fluxes and the Swampland*, *JHEP* **03** (2019) 150 [1811.06990].
- [187] T.W. Grimm, C. Li and I. Valenzuela, *Asymptotic Flux Compactifications and the Swampland*, 1910.09549.
- [188] J.J. Blanco-Pillado, K. Sousa, M.A. Urkiola and J.M. Wachter, *Universal Class of Type-IIB Flux Vacua with Analytic Mass Spectrum*, *Phys. Rev. D* **103** (2021) 106006 [2011.13953].
- [189] P. Mayr, *Phases of supersymmetric D-branes on Kahler manifolds and the McKay correspondence*, *JHEP* **01** (2001) 018 [hep-th/0010223].
- [190] A. Achucarro and K. Sousa, *F-term uplifting and moduli stabilization consistent with Kahler invariance*, *JHEP* **0803** (2008) 002 [0712.3460].
- [191] K. Sousa, *Consistent Supersymmetric Decoupling in Cosmology*, Ph.D. thesis, Leiden U., 2012.
- [192] I. Bena, J. Blåbäck, M. Graña and S. Lüst, *The Tadpole Problem*, 2010.10519.
- [193] A.P. Braun, Y. Kimura and T. Watari, *The Noether-Lefschetz problem and gauge-group-resolved landscapes: F-theory on $K3 \times K3$ as a test case*, *JHEP* **04** (2014) 050 [1401.5908].
- [194] M. Demirtas, M. Kim, L. Mcallister and J. Moritz, *Conifold Vacua with Small Flux Superpotential*, 2009.03312.
- [195] R. Álvarez-García, R. Blumenhagen, M. Brinkmann and L. Schlechter, *Small Flux Superpotentials for Type IIB Flux Vacua Close to a Conifold*, 2009.03325.
- [196] C. Crinò, F. Quevedo and R. Valandro, *On de Sitter String Vacua from Anti-D3-Branes in the Large Volume Scenario*, 2010.15903.
- [197] J.J. Blanco-Pillado, M.A. Urkiola and J.M. Wachter, *Racetrack Potentials and the de Sitter Swampland Conjectures*, *JHEP* **01** (2019) 187 [1811.05463].
- [198] F. Denef, A. Hebecker and T. Wrase, *de Sitter swampland conjecture and the Higgs potential*, *Phys. Rev. D* **98** (2018) 086004 [1807.06581].
- [199] K. Choi, D. Chway and C.S. Shin, *The dS swampland conjecture with the electroweak symmetry and QCD chiral symmetry breaking*, *JHEP* **11** (2018) 142 [1809.01475].
- [200] H. Murayama, M. Yamazaki and T.T. Yanagida, *Do We Live in the Swampland?*, *JHEP* **12** (2018) 032 [1809.00478].

- [201] M.P. Hertzberg, S. Kachru, W. Taylor and M. Tegmark, *Inflationary Constraints on Type IIA String Theory*, *JHEP* **12** (2007) 095 [0711.2512].
- [202] D. Andriot, *New constraints on classical de Sitter: flirting with the swampland*, *Fortsch. Phys.* **67** (2019) 1800103 [1807.09698].
- [203] D. Andriot, *On the de Sitter swampland criterion*, *Phys. Lett. B* **785** (2018) 570 [1806.10999].
- [204] M. Cicoli, J.P. Conlon and F. Quevedo, *General Analysis of LARGE Volume Scenarios with String Loop Moduli Stabilisation*, *JHEP* **10** (2008) 105 [0805.1029].
- [205] I. Bena, M. Graña, S. Kuperstein and S. Massai, *Giant Tachyons in the Landscape*, *JHEP* **02** (2015) 146 [1410.7776].
- [206] J. Polchinski, *String theory (vols. 1,2)*, Cambridge University Press (1998).
- [207] J.P. Conlon, *The de Sitter swampland conjecture and supersymmetric AdS vacua*, *Int. J. Mod. Phys. A* **33** (2018) 1850178 [1808.05040].
- [208] J. Blanco-Pillado, C. Burgess, J.M. Cline, C. Escoda, M. Gomez-Reino et al., *Inflating in a better racetrack*, *JHEP* **0609** (2006) 002 [hep-th/0603129].
- [209] A. Hebecker and T. Wrase, *The Asymptotic dS Swampland Conjecture - a Simplified Derivation and a Potential Loophole*, *Fortsch. Phys.* **67** (2019) 1800097 [1810.08182].
- [210] R. Kallosh and A.D. Linde, *Landscape, the scale of SUSY breaking, and inflation*, *JHEP* **0412** (2004) 004 [hep-th/0411011].
- [211] J.J. Blanco-Pillado, R. Kallosh and A.D. Linde, *Supersymmetry and stability of flux vacua*, *JHEP* **0605** (2006) 053 [hep-th/0511042].
- [212] M.R. Douglas, *Statistical analysis of the supersymmetry breaking scale*, hep-th/0405279.
- [213] E.J. Copeland, A.R. Liddle, D.H. Lyth, E.D. Stewart and D. Wands, *False vacuum inflation with Einstein gravity*, *Phys. Rev. D* **49** (1994) 6410 [astro-ph/9401011].
- [214] M. Badziak and M. Olechowski, *Volume modulus inflation and a low scale of SUSY breaking*, *JCAP* **07** (2008) 021 [0802.1014].
- [215] L. Covi, M. Gomez-Reino, C. Gross, J. Louis, G.A. Palma et al., *Constraints on modular inflation in supergravity and string theory*, *JHEP* **0808** (2008) 055 [0805.3290].
- [216] J. Blanco-Pillado, C. Burgess, J.M. Cline, C. Escoda, M. Gomez-Reino et al., *Racetrack inflation*, *JHEP* **0411** (2004) 063 [hep-th/0406230].
- [217] R. Kallosh, A. Linde, B. Vercnocke and T. Wrase, *Analytic Classes of Metastable de Sitter Vacua*, *JHEP* **10** (2014) 011 [1406.4866].
- [218] T.C. Bachlechner, *On Gaussian Random Supergravity*, *JHEP* **04** (2014) 054 [1401.6187].

- [219] D. Slepian, *The one-sided barrier problem for gaussian noise*, *Bell System Technical Journal* **41** (1962) 463.
- [220] R. Easther, A.H. Guth and A. Masoumi, *Counting Vacua in Random Landscapes*, 1612.05224.
- [221] B. Greene, D. Kagan, A. Masoumi, D. Mehta, E.J. Weinberg and X. Xiao, *Tumbling through a landscape: Evidence of instabilities in high-dimensional moduli spaces*, *Phys. Rev. D* **88** (2013) 026005 [1303.4428].
- [222] A. Aravind, D. Lorshbough and S. Paban, *Lower bound for the multifield bounce action*, *Phys. Rev. D* **89** (2014) 103535 [1401.1230].
- [223] A. Aravind, B.S. DiNunno, D. Lorshbough and S. Paban, *Analyzing multifield tunneling with exact bounce solutions*, *Phys. Rev. D* **91** (2015) 025026 [1412.3160].
- [224] M. Dine and S. Paban, *Tunneling in Theories with Many Fields*, *JHEP* **10** (2015) 088 [1506.06428].
- [225] J.J. Blanco-Pillado, M. Dias, J. Frazer and K. Sousa, *Large Scale Power Suppression in a Multifield Landscape*, 1503.07579.
- [226] G. Lindgren, *Stationary stochastic processes: theory and applications*, CRC Press (2012).
- [227] G. Lindgren, *Local maxima of Gaussian Fields*, *G. Ark. Mat.* **10** (1972) .
- [228] M. Bucher and T. Louis, *Filling in cosmic microwave background map missing data using constrained gaussian realizations*, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **424** (2012) 1694.
- [229] A. Marcos-Caballero, E. Martínez-González and P. Vielva, *Local properties of the large-scale peaks of the cmb temperature*, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2017** (2017) 023.
- [230] J.M. Bardeen, J.R. Bond, N. Kaiser and A.S. Szalay, *The Statistics of Peaks of Gaussian Random Fields*, *Astrophys. J.* **304** (1986) 15.
- [231] E. Bertschinger, *Path integral methods for primordial density perturbations. Sampling of constrained Gaussian random fields*, *Astrophys. J.* **323** (1987) L103.
- [232] G. Ganon and Y. Hoffman, *Constrained realizations of Gaussian fields - Reconstruction of the large-scale structure*, *Astrophys. J.* **415** (1993) L5.
- [233] P. Athron, C. Balázs, M. Bardsley, A. Fowlie, D. Harries and G. White, *BubbleProfiler: finding the field profile and action for cosmological phase transitions*, 1901.03714.
- [234] J.R. Espinosa, *A Fresh Look at the Calculation of Tunneling Actions*, *JCAP* **1807** (2018) 036 [1805.03680].
- [235] J.R. Espinosa and T. Konstandin, *A Fresh Look at the Calculation of Tunneling Actions in Multi-Field Potentials*, *JCAP* **1901** (2019) 051 [1811.09185].

- [236] A.R. Brown, *Thin-wall approximation in vacuum decay: A lemma*, *Phys. Rev.* **D97** (2018) 105002 [1711.07712].
- [237] I. Dasgupta, *Estimating vacuum tunneling rates*, *Phys. Lett.* **B394** (1997) 116 [hep-ph/9610403].
- [238] D. Baumann, A. Dymarsky, I.R. Klebanov and L. McAllister, *Towards an Explicit Model of D-brane Inflation*, *JCAP* **0801** (2008) 024 [0706.0360].
- [239] Planck collaboration, *Planck 2018 results. X. Constraints on inflation*, *Astron. Astrophys.* **641** (2020) A10 [1807.06211].
- [240] M. Dias, J. Frazer and D. Seery, *Computing observables in curved multifield models of inflation—A guide (with code) to the transport method*, *JCAP* **1512** (2015) 030 [1502.03125].
- [241] B. Freivogel, *Making predictions in the multiverse*, *Class. Quant. Grav.* **28** (2011) 204007 [1105.0244].
- [242] M. Aronowich and R.J. Adler, *Extrema and Level Crossing of χ^2 Processes*, *Adv. Appl. Prob.* **18** (1986) 901.
- [243] G. Lindgren, *Slepian models for χ^2 -processes with dependent components with application to envelope upcrossings*, *J. Appl. Prob.* **26** (1989) 36.
- [244] G. Lindgren and I. Rychlik, *Models and Regression Approximations in Crossing and Extreme Value Theory*, *Intern. Statist. Rev.* **59** (1991) 195.
- [245] S. Weinberg, *Does Gravitation Resolve the Ambiguity Among Supersymmetry Vacua?*, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 1776.
- [246] M. Cvetič, S. Griffies and S.-J. Rey, *Nonperturbative stability of supergravity and superstring vacua*, *Nucl. Phys. B* **389** (1993) 3 [hep-th/9206004].
- [247] M. Cvetič, S. Griffies and S.-J. Rey, *Static domain walls in N=1 supergravity*, *Nucl. Phys. B* **381** (1992) 301 [hep-th/9201007].
- [248] J.D. Brown and C. Teitelboim, *Dynamical Neutralization of the Cosmological Constant*, *Phys. Lett.* **B195** (1987) 177.
- [249] J.D. Brown and C. Teitelboim, *Neutralization of the Cosmological Constant by Membrane Creation*, *Nucl. Phys. B* **297** (1988) 787.
- [250] S.W. Hawking, *The Cosmological Constant Is Probably Zero*, *Phys. Lett. B* **134** (1984) 403.
- [251] J.S. Schwinger, *On gauge invariance and vacuum polarization*, *Phys. Rev.* **82** (1951) 664.
- [252] A. Vilenkin, *Creation of Universes from Nothing*, *Phys. Lett. B* **117** (1982) 25.

- [253] A. Achucarro, J.P. Gauntlett, K. Itoh and P.K. Townsend, *World Volume Supersymmetry From Space-time Supersymmetry of the Four-dimensional Supermembrane*, *Nucl. Phys. B* **314** (1989) 129.
- [254] I.A. Bandos and C. Meliveo, *Superfield equations for the interacting system of $D=4$ $N=1$ supermembrane and scalar multiplet*, *Nucl. Phys. B* **849** (2011) 1 [1011 . 1818].
- [255] I.A. Bandos and C. Meliveo, *Supermembrane interaction with dynamical $D=4$ $N=1$ supergravity. Superfield Lagrangian description and spacetime equations of motion*, *JHEP* **08** (2012) 140 [1205 . 5885].
- [256] S.J. Gates, Jr., *Super p -form gauge superfields*, *Nucl. Phys. B* **184** (1981) 381.
- [257] P. Binetruiy, F. Pillon, G. Girardi and R. Grimm, *The Three form multiplet in supergravity*, *Nucl. Phys. B* **477** (1996) 175 [hep-th/9603181].
- [258] F. Farakos, S. Lanza, L. Martucci and D. Sorokin, *Three-forms in Supergravity and Flux Compactifications*, *Eur. Phys. J. C* **77** (2017) 602 [1706 . 09422].
- [259] S. Lanza, *Exploring the Landscape of effective field theories*, Ph.D. thesis, Padua U., 2019. 1912 . 08935.
- [260] I. Bandos, F. Farakos, S. Lanza, L. Martucci and D. Sorokin, *Three-forms, dualities and membranes in four-dimensional supergravity*, *JHEP* **07** (2018) 028 [1803 . 01405].
- [261] L.E. Ibanez, M. Montero, A. Uranga and I. Valenzuela, *Relaxion Monodromy and the Weak Gravity Conjecture*, *JHEP* **04** (2016) 020 [1512 . 00025].
- [262] J. Brown, W. Cottrell, G. Shiu and P. Soler, *Tunneling in Axion Monodromy*, *JHEP* **10** (2016) 025 [1607 . 00037].
- [263] S. Lanza, F. Marchesano, L. Martucci and I. Valenzuela, *Swampland Conjectures for Strings and Membranes*, *JHEP* **02** (2021) 006 [2006 . 15154].
- [264] D.J.H. Chung, L.L. Everett, G.L. Kane, S.F. King, J.D. Lykken and L.-T. Wang, *The Soft supersymmetry breaking Lagrangian: Theory and applications*, *Phys. Rept.* **407** (2005) 1 [hep-ph/0312378].
- [265] J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and supergravity*, Princeton University Press (1992) .
- [266] J.R. Morris and D. Bazeia, *Supersymmetry breaking and Fermi balls*, *Phys. Rev. D* **54** (1996) 5217 [hep-ph/9607396].
- [267] E. Dyer and K. Hinterbichler, *Boundary Terms, Variational Principles and Higher Derivative Modified Gravity*, *Phys. Rev. D* **79** (2009) 024028 [0809 . 4033].
- [268] G. Gibbons and S. Hawking, *Action Integrals and Partition Functions in Quantum Gravity*, *Phys.Rev.* **D15** (1977) 2752.
- [269] Y.-b. Kim, C.O. Lee, I.-b. Lee and J.-J. Lee, *Brane world of warp geometry: An Introductory review*, *J. Korean Astron. Soc.* **37** (2004) 1 [hep-th/0307023].

- [270] A. Masoumi, S. Paban and E.J. Weinberg, *Tunneling from a Minkowski vacuum to an AdS vacuum: A new thin-wall regime*, *Phys. Rev. D* **94** (2016) 025023 [1603.07679].
- [271] S. Banerjee, U. Danielsson, G. Dibitetto, S. Giri and M. Schillo, *Emergent de Sitter Cosmology from Decaying Anti-de Sitter Space*, *Phys. Rev. Lett.* **121** (2018) 261301 [1807.01570].
- [272] S. Lanza, F. Marchesano, L. Martucci and D. Sorokin, *How many fluxes fit in an EFT?*, *JHEP* **10** (2019) 110 [1907.11256].
- [273] J. Otto, A.G. Forbes and J. Verschelde, *Solving polynomial systems with phcpy*, *CoRR abs/1907.00096* (2019) [1907.00096].
- [274] J. Gray, Y.-H. He, A. Ilderton and A. Lukas, *Stringvacua. a mathematica package for studying vacuum configurations in string phenomenology*, *Computer Physics Communications* **180** (2009) 107:119.
- [275] D.J. Bates, J.D. Hauenstein, A.J. Sommese and C.W. Wampler, “Bertini: Software for numerical algebraic geometry.” Available at bertini.nd.edu with permanent doi: dx.doi.org/10.7274/ROH41PB5.
- [276] J. Klemelä, *Smoothing of Multivariate Data: Density Estimation and Visualization*, Wiley (2009).
- [277] K.F. Riley, M.P. Hobson and S.J. Bence, *Mathematical methods for physics and engineering: a comprehensive guide*, Cambridge university press (2006).
- [278] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling and B.P. Flannery, *Numerical recipes 3rd edition: The art of scientific computing*, Cambridge university press (2007).
- [279] I.L. Buchbinder and S.M. Kuzenko, *Ideas and methods of supersymmetry and supergravity or a walk through superspace*, Institute of Physics Publishing (1998).