

MÁSTER UNIVERSITARIO EN INGENIERÍA MECÁNICA

TRABAJO FIN DE MÁSTER

CÁLCULO DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE TENSIONES MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS

Estudiante	<i>Merino Domínguez, Sergio</i>
Director	<i>Abasolo Bilbao, Mikel</i>
Departamento	<i>Ingeniería Mecánica</i>
Curso académico	<i>2021/22</i>

Bilbao, 5 de julio de 2022

RESUMEN

La fractura frágil es un fallo que suele darse sin apenas deformación plástica previa y de modo instantáneo. No es tan común como los debidos a fatiga o de plastificación generalizada (dúctiles). Las teorías de fallo convencionales como la de Von Mises o Tresca no explican este tipo de casos: la Mecánica de la Fractura se encarga de su estudio. En este trabajo se analizan diversos casos de Mecánica de la Fractura, incluyendo modo I, modo II y modo mixto I y II. Se calcula el factor de intensidad de tensión que corresponda en cada caso, a partir de varios métodos: por un lado basados en fórmulas teóricas, y por otro haciendo uso de modelos de Elementos Finitos. Se expone también cómo debe modelizarse una grieta y su influencia en el proceso de mallado. Finalmente, se presentan los resultados obtenidos para el factor de intensidad de tensión, comparando los teóricos con los extraídos a partir de Elementos Finitos, para poner fin al trabajo con las conclusiones. Este trabajo resulta de gran interés, entre otros ámbitos, para estimaciones de propagación de grieta, ya que el factor de intensidad de tensión es un parámetro básico en orden a estudiar el crecimiento de grieta.

Palabras clave:

Mecánica de la Fractura, grieta, Elementos Finitos, factor de intensidad de tensión.

ABSTRACT

Brittle fracture is a failure that occurs with barely prior plastic deformation and instantly. It is not as common as fatigue or ductile collapses. Traditional theories of failure such as Von Mises or Tresca do not explain this kind of cases: Fracture Mechanics is responsible for them. In this work several cases of Fracture Mechanics are analyzed, covering mode I, mode II and mixed mode I and II. Stress Intensity Factor (SIF) is calculated for each case, applying: theoretical expressions on the one hand, and Finite Element models on the other hand. Moreover, it is explained crack modeling and its influence on the mesh process. Finally, obtained results for the SIF are presented, making a comparison between those from theoretical expressions and those from Finite Element, to close the work with the conclusions. This thesis may be helpful, among other areas, in order to estimate crack propagation, as SIF is a basic parameter for that purpose.

Keywords:

Fracture Mechanics, crack, Finite Element, Stress Intensity Factor.

LABURPENA

Haustura hauskorra da bat-batean eta ia deformazio plastiko gabe jazotzen den hutsegitea. Ez da hain arrunta neke edo harikor motako hutsegiteekin konparatuz. Ohiko hutsegite teoriek, Von Mises edo Tresca esaterako, ez dituzte kolapso horiek azaltzen: Frakturaren Mekanika arduratzen da. Lan honetan Frakturaren Mekanikako zenbait kasu aztertzen dira, modu I, modu II eta modu misto I eta II barne hartuz. Kasu bakoitzerako kalkulatu egiten da tentsio intentsitate faktorea, metodo ezberdinak baliatuz: alde batetik formula teorikoak, eta bestetik Elementu Finituko modeloak erabiliz. Halaber, pitzadura nola definitu behar den eta bere eragina sare prozesuan azaldu egiten da. Azkenik, tentsio intentsitate faktorerako lortu diren emaitzak erakusten dira, alderatuz formula teorikoek emandako baloreak eta Elementu Finituen bitartekoak; eta amaitzeko ondorioak aurkezten dira. Lan hau lagungarria izan daiteke, adibidez, pitzadura propagazioa estimatzeko, tentsio intentsitate faktorea oinarritzko parametro bat baita arlo horretan.

Hitz gakoak:

Fraktura Mekanika, pitzadura, Elementu Finitu, tentsio intentsitate faktorea.

ÍNDICE

RESUMEN	I
ABSTRACT	II
LABURPENA	III
ÍNDICE DE FIGURAS	VII
ÍNDICE DE TABLAS	XI
NOMENCLATURA Y ACRÓNIMOS	XII

I. MEMORIA **1**

1. INTRODUCCIÓN	2
2. CONTEXTO	3
3. OBJETO Y ALCANCE DEL TRABAJO	3
4. BENEFICIOS QUE APORTA EL TRABAJO	4
5. ANÁLISIS DEL ESTADO DEL ARTE	5
5.1. MECÁNICA LINEAL DE LA FRACTURA	5
5.1.1. Introducción a la mecánica de la fractura	6
5.1.2. Modos de fractura	6
5.1.3. Análisis del campo de tensiones en el borde de grieta	8
5.1.4. Cálculo del factor de intensidad de tensión	10
5.1.4.1. Fórmula teórica	10
5.1.4.2. SIF en base a tensiones y deformaciones	12
5.1.4.3. Otras fórmulas teóricas para modo I	13
5.1.4.4. Fórmula teórica para modo mixto plano	13
5.1.5. Método de la tensión crítica	14
5.1.5.1. Predicción del fallo por fractura en modos mixtos	16
5.1.5.2. Forma de la superficie de fractura	16
5.2. ESTUDIO DE GRIETAS Y MECÁNICA LINEAL DE LA FRACTURA EN FATIGA	18
5.2.1. Motivación de la predicción de crecimiento de grieta	18
5.2.2. Propagación de grieta	18
5.2.3. Ecuación de Paris	21
5.2.4. Propagación de grieta bajo modos II, III y mixtos	21
6. ANÁLISIS DE ALTERNATIVAS	23
7. DESCRIPCIÓN DE LA SOLUCIÓN PROPUESTA	25

II. METODOLOGÍA SEGUIDA EN EL DESARROLLO DEL TRABAJO **29**

1. CÁLCULO DEL SIF	30
1.1. MATERIAL EMPLEADO	30
1.2. MODO I	30
1.2.1. Casos estudiados	30
1.2.2. Condiciones de contorno y cargas aplicadas	31
1.2.3. Mallado	32
1.2.4. Resultados de EF	33
1.2.4.1. $a/b = 0,1$	33
1.2.4.2. $a/b = 0,3$	35

1.2.4.3.	$a/b = 0,5$	36
1.2.4.4.	$a/b = 0,7$	38
1.2.4.5.	Verificación del modelo	39
1.2.5.	Cálculos	41
1.2.5.1.	K_I según fórmulas teóricas	41
1.2.5.2.	K_I según tensiones de EF	42
1.2.5.3.	K_I según deformaciones de EF	45
1.2.6.	Ajuste del SIF	48
1.2.7.	Error relativo	49
1.2.8.	Descripción de los resultados	50
1.3.	MODO II	52
1.3.1.	Casos estudiados	52
1.3.2.	Condiciones de contorno y cargas aplicadas	53
1.3.3.	Mallado	53
1.3.3.1.	Problemas al definir la grieta	54
1.3.3.2.	Mallado final	56
1.3.4.	Resultados de EF	57
1.3.4.1.	$a/b = 0,05$	57
1.3.4.2.	$a/b = 0,1$	58
1.3.4.3.	$a/b = 0,3$	59
1.3.4.4.	$a/b = 0,5$	61
1.3.4.5.	Verificación del modelo	62
1.3.5.	Cálculos	53
1.3.5.1.	K_{II} según fórmulas teóricas	64
1.3.5.2.	K_{II} según tensiones de EF	64
1.3.5.3.	K_{II} según deformaciones de EF	67
1.3.6.	Ajuste del SIF	70
1.3.7.	Error relativo	72
1.3.8.	Descripción de los resultados	72
1.4.	MODOS MIXTOS I Y II	73
1.4.1.	Casos estudiados	73
1.4.2.	Condiciones de contorno y cargas aplicadas	74
1.4.3.	Mallado	75
1.4.4.	Resultados de EF	75
1.4.4.1.	Caso 1 ($\alpha = 10^\circ$)	76
1.4.4.2.	Caso 2 ($\alpha = 30^\circ$)	77
1.4.4.3.	Caso 3 ($\alpha = 60^\circ$)	78
1.4.4.4.	Verificación del modelo	79
1.4.5.	Cálculos	80
1.4.5.1.	K_I y K_{II} según fórmula teórica	80
1.4.5.2.	K_I y K_{II} según tensiones de EF	80
1.4.6.	Ajuste del SIF	87
1.4.7.	Error relativo	89
1.4.8.	Descripción de los resultados	89
2.	DESCRIPCIÓN DE TAREAS	90
3.	DIAGRAMA DE GANTT	91

III. ASPECTOS ECONÓMICOS	93
1. DESCRIPCIÓN DEL PRESUPUESTO	94
1.1. COSTES DIRECTOS	94
1.2. PRESUPUESTO TOTAL	95
IV. CONCLUSIONES	97
BIBLIOGRAFÍA	100
V. ANEXOS	101
ANEXO I: CÓDIGO	102

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Rotura del petrolero Schenectady, [11].	2
Figura 2. Fractura de la chapa del ala de un jet de pasajeros, [11].	5
Figura 3. Modos de fractura, [3].	6
Figura 4. Tres chapas de acero sometidas al mismo nivel de tensión, [2].	6
Figura 5. Caso de modo mixto plano, [5].	7
Figura 6. Caso de modo mixto espacial, [5].	7
Figura 7. Concentración de tensiones en una entalla.	8
Figura 8. Concentración de tensiones en una grieta.	8
Figura 9. Concentración de tensiones en grieta (izda.) y en entalla (dcha.).	9
Figura 10. Campo tensional en el borde de grieta, [2].	9
Figura 11. Factor geométrico para modo I puro, [6].	10
Figura 12. Distintos casos de modo I, [2].	11
Figura 13. Extrapolar el SIF a $r = 0$, [2].	12
Figura 14. Obtención de la fórmula teórica para un caso de modo mixto plano.	13
Figura 15. Ensayo para determinar la tenacidad a la fractura, [5].	14
Figura 16. Variación de la tenacidad de la fractura con el espesor de la probeta, [6].	15
Figura 17. Superficie de K_V , [2].	16
Figura 18. Superficie de fractura según el modo, [2].	16
Figura 19. Propagación de la grieta en el plano XY, [2].	17
Figura 20. Trayectoria de la grieta, [5].	18
Figura 21. Propagación de grieta en un eje a torsión pura, [5].	19
Figura 22. Curva a-N, [2].	19
Figura 23. Tasa de crecimiento de grieta frente al rango del factor de intensidad de tensión, [2].	20
Figura 24. Variación de ΔK conforme se propaga la grieta, [2].	20
Figura 25. Propagación de grieta en un caso de modo mixto plano, [2].	22
Figura 26. Límite de propagación de grieta por fatiga en un caso general de modos mixtos, [2].	22
Figura 27. Grieta sometida a un aumento de área, [13].	23
Figura 28. Contorno alrededor del frente de grieta, [13].	24
Figura 29. Procedimiento de cálculo del factor de intensidad de tensión.	25
Figura 30. Obtención del resultado final del factor de intensidad de tensión, [2].	27
Figura 31. Caso general de modo I estudiado, [6].	30
Figura 32. Análisis simétrico (modo I).	31
Figura 33. Cargas y condiciones de contorno (modo I).	31
Figura 34. Mallado en modo I.	32
Figura 35. Tensiones normales en X (modo I, $a/b = 0,1$).	33
Figura 36. Tensiones normales en Y (modo I, $a/b = 0,1$).	33
Figura 37. Tensiones tangenciales en XY (modo I, $a/b = 0,1$).	34
Figura 38. Deformaciones (modo I, $a/b = 0,1$).	34
Figura 39. Tensiones normales en X (modo I, $a/b = 0,3$).	35
Figura 40. Tensiones normales en Y (modo I, $a/b = 0,3$).	35
Figura 41. Tensiones tangenciales en XY (modo I, $a/b = 0,3$).	35
Figura 42. Deformaciones (modo I, $a/b = 0,3$).	36

Figura 43. Tensiones normales en X (modo I, $a/b = 0,5$).	36
Figura 44. Tensiones normales en Y (modo I, $a/b = 0,5$).	37
Figura 45. Tensiones tangenciales en XY (modo I, $a/b = 0,5$).	37
Figura 46. Deformaciones (modo I, $a/b = 0,5$).	37
Figura 47. Tensiones normales en X (modo I, $a/b = 0,7$).	38
Figura 48. Tensiones normales en Y (modo I, $a/b = 0,7$).	38
Figura 49. Tensiones tangenciales en XY (modo I, $a/b = 0,7$).	38
Figura 50. Deformaciones (modo I, $a/b = 0,7$).	39
Figura 51. Líneas de transmisión de esfuerzos en el frente de grieta en un caso de grieta pequeña (izda.) y grande (dcha.)	39
Figura 52. Tensiones normales exactas vs EF (modo I, $a/b = 0,1$).	40
Figura 53. Tensiones normales exactas vs EF (modo I, $a/b = 0,7$).	40
Figura 54. $K_I(r)$ para modo I y $a/b=0,1$, según (32).	42
Figura 55. $K_I(r)$ para modo I y $a/b=0,1$, según (32) (zoom).	43
Figura 56. $K_I(r)$ para modo I y $a/b=0,3$, según (32).	43
Figura 57. $K_I(r)$ para modo I y $a/b=0,3$, según (32) (zoom).	43
Figura 58. $K_I(r)$ para modo I y $a/b=0,5$, según (32).	44
Figura 59. $K_I(r)$ para modo I y $a/b=0,5$, según (32) (zoom).	44
Figura 60. $K_I(r)$ para modo I y $a/b=0,7$, según (32).	44
Figura 61. $K_I(r)$ para modo I y $a/b=0,7$, según (32) (zoom).	45
Figura 62. $K_I(r)$ para modo I y $a/b=0,1$, según (33).	45
Figura 63. $K_I(r)$ para modo I y $a/b=0,1$, según (33) (zoom).	46
Figura 64. $K_I(r)$ para modo I y $a/b=0,3$, según (33).	46
Figura 65. $K_I(r)$ para modo I y $a/b=0,3$, según (33) (zoom).	46
Figura 66. $K_I(r)$ para modo I y $a/b=0,5$, según (33).	47
Figura 67. $K_I(r)$ para modo I y $a/b=0,5$, según (33) (zoom).	47
Figura 68. $K_I(r)$ para modo I y $a/b=0,7$, según (33).	47
Figura 69. $K_I(r)$ para modo I y $a/b=0,7$, según (33) (zoom).	48
Figura 70. Ajuste del SIF para un caso de modo I.	48
Figura 71. Variación de σ_x en el path a 0° (modo I, $a/b = 0,1$).	51
Figura 72. Variación de σ_y en el path a 0° (modo I, $a/b = 0,1$).	51
Figura 73. Variación de τ_{xy} en el path a 0° (modo I, $a/b = 0,1$).	52
Figura 74. Caso general de modo II estudiado ($\alpha = 45^\circ$ y $\lambda = -1$).	52
Figura 75. Cargas y condiciones de contorno (modo II).	53
Figura 76. Modelización de grieta como un rectángulo.	54
Figura 77. Ejemplo de autopinch (1).	55
Figura 78. Ejemplo de autopinch (2).	55
Figura 79. Modelización final de la grieta.	56
Figura 80. Mallado en modo II.	56
Figura 81. Tensiones normales en X (modo II, $a/b = 0,05$).	57
Figura 82. Tensiones normales en Y (modo II, $a/b = 0,05$).	57
Figura 83. Tensiones tangenciales en XY (modo II, $a/b = 0,05$).	57
Figura 84. Deformaciones (modo II, $a/b = 0,05$).	58
Figura 85. Tensiones normales en X (modo II, $a/b = 0,1$).	58
Figura 86. Tensiones normales en Y (modo II, $a/b = 0,1$).	58
Figura 87. Tensiones tangenciales en XY (modo II, $a/b = 0,1$).	59
Figura 88. Deformaciones (modo II, $a/b = 0,1$).	59

Figura 89. Tensiones normales en X (modo II, $a/b = 0,3$).	59
Figura 90. Tensiones normales en Y (modo II, $a/b = 0,3$).	60
Figura 91. Tensiones tangenciales en XY (modo II, $a/b = 0,3$).	60
Figura 92. Deformaciones (modo II, $a/b = 0,3$).	60
Figura 93. Tensiones normales en X (modo II, $a/b = 0,5$).	61
Figura 94. Tensiones normales en Y (modo II, $a/b = 0,5$).	61
Figura 95. Tensiones tangenciales en XY (modo II, $a/b = 0,5$).	61
Figura 96. Deformaciones (modo II, $a/b = 0,5$).	62
Figura 97. Verificación del modelo (modo II).	62
Figura 98. Proyección en el sistema de referencia orientado según la grieta.	63
Figura 99. $K_{II}(r)$ para modo II y $a/b=0,05$, según (34).	65
Figura 100. $K_{II}(r)$ para modo II y $a/b=0,05$, según (34) (zoom).	65
Figura 101. $K_{II}(r)$ para modo II y $a/b=0,1$, según (34).	65
Figura 102. $K_{II}(r)$ para modo II y $a/b=0,1$, según (34) (zoom).	66
Figura 103. $K_{II}(r)$ para modo II y $a/b=0,3$, según (34).	66
Figura 104. $K_{II}(r)$ para modo II y $a/b=0,3$, según (34) (zoom).	66
Figura 105. $K_{II}(r)$ para modo II y $a/b=0,5$, según (34).	67
Figura 106. $K_{II}(r)$ para modo II y $a/b=0,5$, según (34) (zoom).	67
Figura 107. $K_{II}(r)$ para modo II y $a/b=0,05$, según (35).	68
Figura 108. $K_{II}(r)$ para modo II y $a/b=0,05$, según (35) (zoom).	68
Figura 109. $K_{II}(r)$ para modo II y $a/b=0,1$, según (35).	68
Figura 110. $K_{II}(r)$ para modo II y $a/b=0,1$, según (35) (zoom).	69
Figura 111. $K_{II}(r)$ para modo II y $a/b=0,3$, según (35).	69
Figura 112. $K_{II}(r)$ para modo II y $a/b=0,3$, según (35) (zoom).	69
Figura 113. $K_{II}(r)$ para modo II y $a/b=0,5$, según (35).	70
Figura 114. $K_{II}(r)$ para modo II y $a/b=0,5$, según (35) (zoom).	70
Figura 115. Ajuste del SIF para un caso de modo II.	70
Figura 116. Variación de la tensión en el path a 70° (modo II, $a/b = 0,05$).	73
Figura 117. Caso general de modo mixto plano.	73
Figura 118. Cargas y condiciones de contorno (modo mixto I y II)	74
Figura 119. Mallado en modo mixto plano.	75
Figura 120. Tensiones normales en X (modo mixto I y II, caso 1).	76
Figura 121. Tensiones normales en Y (modo mixto I y II, caso 1).	76
Figura 122. Tensiones tangenciales en XY (modo mixto I y II, caso 1).	76
Figura 123. Tensiones normales en X (modo mixto I y II, caso 2).	77
Figura 124. Tensiones normales en Y (modo mixto I y II, caso 2).	77
Figura 125. Tensiones tangenciales en XY (modo mixto I y II, caso 2).	77
Figura 126. Tensiones normales en X (modo mixto I y II, caso 3).	78
Figura 127. Tensiones normales en Y (modo mixto I y II, caso 3).	78
Figura 128. Tensiones tangenciales en XY (modo mixto I y II, caso 3).	78
Figura 129. Comprobación de los casos 1 y 2 (modo mixto plano).	79
Figura 130. Comprobación del caso 3 (modo mixto plano).	79
Figura 131. $K_I(r)$ y $K_{II}(r)$ a partir de σ_X y σ_Y , (37), para caso 1.	81
Figura 132. $K_I(r)$ y $K_{II}(r)$ a partir de σ_X y σ_Y , (37), para caso 1 (zoom).	82
Figura 133. $K_I(r)$ y $K_{II}(r)$ a partir de σ_X y τ_{XY} , (38), para caso 1.	82
Figura 134. $K_I(r)$ y $K_{II}(r)$ a partir de σ_X y τ_{XY} , (38), para caso 1 (zoom).	82
Figura 135. $K_I(r)$ y $K_{II}(r)$ a partir de σ_Y y τ_{XY} , (39), para caso 1.	83

Figura 136. $K_I(r)$ y $K_{II}(r)$ a partir de σ_Y y τ_{XY} , (39), para caso 1 (zoom).	83
Figura 137. $K_I(r)$ y $K_{II}(r)$ a partir de σ_X y σ_Y , (37), para caso 2.	83
Figura 138. $K_I(r)$ y $K_{II}(r)$ a partir de σ_X y σ_Y , (37), para caso 2 (zoom).	84
Figura 139. $K_I(r)$ y $K_{II}(r)$ a partir de σ_X y τ_{XY} , (38), para caso 2.	84
Figura 140. $K_I(r)$ y $K_{II}(r)$ a partir de σ_X y τ_{XY} , (38), para caso 2 (zoom).	84
Figura 141. $K_I(r)$ y $K_{II}(r)$ a partir de σ_Y y τ_{XY} , (39), para caso 2.	85
Figura 142. $K_I(r)$ y $K_{II}(r)$ a partir de σ_Y y τ_{XY} , (39), para caso 2 (zoom).	85
Figura 143. $K_I(r)$ y $K_{II}(r)$ a partir de σ_X y σ_Y , (37), para caso 3.	85
Figura 144. $K_I(r)$ y $K_{II}(r)$ a partir de σ_X y σ_Y , (37), para caso 3 (zoom).	86
Figura 145. $K_I(r)$ y $K_{II}(r)$ a partir de σ_X y τ_{XY} , (38), para caso 3.	86
Figura 146. $K_I(r)$ y $K_{II}(r)$ a partir de σ_X y τ_{XY} , (38), para caso 3 (zoom).	86
Figura 147. $K_I(r)$ y $K_{II}(r)$ a partir de σ_Y y τ_{XY} , (39), para caso 3.	87
Figura 148. $K_I(r)$ y $K_{II}(r)$ a partir de σ_Y y τ_{XY} , (39), para caso 3 (zoom).	87
Figura 149. Ajuste del SIF para un caso de modo mixto plano.	87
Figura 150. Variación de la tensión en el path a $-60,62^\circ$ (modo mixto plano, caso 2).	90

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Casos estudiados de modo I.	30
Tabla 2. Factor geométrico para los casos de modo I estudiados.	41
Tabla 3. K_I obtenido según (2).	41
Tabla 4. K_I obtenido según Irwin y Fedderson.	42
Tabla 5. K_I obtenido según Fedderson modificado.	42
Tabla 6. Ajuste de K_I para modo I y $a/b=0,1$.	48
Tabla 7. Ajuste de K_I para modo I y $a/b=0,3$.	49
Tabla 8. Ajuste de K_I para modo I y $a/b=0,5$.	49
Tabla 9. Ajuste de K_I para modo I y $a/b=0,7$.	49
Tabla 10. Error relativo de K_I respecto (2).	49
Tabla 11. Error relativo de K_I respecto (8).	50
Tabla 12. Error relativo de K_I respecto (9).	50
Tabla 13. Error relativo de K_I respecto (10).	50
Tabla 14. Casos estudiados de modo II.	52
Tabla 15. Factor geométrico para los casos de modo II estudiados.	64
Tabla 16. K_{II} obtenido según (2).	64
Tabla 17. Ajuste de K_{II} para modo II y $a/b=0,05$.	71
Tabla 18. Ajuste de K_{II} para modo II y $a/b=0,1$.	71
Tabla 19. Ajuste de K_{II} para modo II y $a/b=0,3$.	71
Tabla 20. Ajuste de K_{II} para modo II y $a/b=0,5$.	71
Tabla 21. Error relativo de K_{II} a partir de las tensiones de EF respecto (3).	72
Tabla 22. Error relativo de K_{II} a partir de las deformaciones de EF respecto (3).	72
Tabla 23. Casos estudiados de modo mixto I + II.	74
Tabla 24. K_I obtenido según (11).	80
Tabla 25. K_{II} obtenido según (11).	80
Tabla 26. Ángulo de propagación de grieta, según (16).	81
Tabla 27. Ajuste de K_I para modo mixto plano (caso 1).	88
Tabla 28. Ajuste de K_{II} para modo mixto plano (caso 1).	88
Tabla 29. Ajuste de K_I para modo mixto plano (caso 2).	88
Tabla 30. Ajuste de K_{II} para modo mixto plano (caso 2).	88
Tabla 31. Ajuste de K_I para modo mixto plano (caso 3).	88
Tabla 32. Ajuste de K_{II} para modo mixto plano (caso 3).	88
Tabla 33. Error relativo de K_I a partir de las tensiones de EF respecto (2), para modo mixto plano.	89
Tabla 34. Error relativo de K_{II} a partir de las tensiones de EF respecto (3), para modo mixto plano.	89
Tabla 35. Diagrama de Gantt.	92
Tabla 36. Gastos de personal.	94
Tabla 37. Amortizaciones.	94
Tabla 38. Material fungible.	94
Tabla 39. Resumen de costes directos.	95
Tabla 40. Presupuesto total del TFM.	95

NOMENCLATURA Y ACRÓNIMOS

TFM	Trabajo Fin de Máster.
MEF	Método de Elementos Finitos.
SIF	Stress Intensity Factor
K_I	Factor de intensidad de tensión de modo I.
K_{II}	Factor de intensidad de tensión de modo II.
a	Tamaño de grieta.
b	Ancho de la pieza.
φ, ψ	Ángulo de propagación de grieta.
σ	Tensión normal.
u	Desplazamiento en x.
v	Desplazamiento en y.
w	Desplazamiento en z.
τ	Tensión tangencial.
δ	Deformación.
r	Distancia desde el frente de grieta al punto estudiado.
α	Ángulo de inclinación de la grieta.
ΔK	Rango de intensidad de tensión.
K_V	Factor de intensidad de tensión equivalente.
$\Delta K_{I,TH}$	Rango de intensidad de tensión umbral por debajo del cual no se propaga la grieta.
ΔK_V	Rango de intensidad de tensión equivalente.
N	Número de ciclos.
da/dN	Tasa de crecimiento de grieta.
κ	Parámetro para el cálculo del SIF según el campo de desplazamientos.
ν	Parámetro para el cálculo del SIF según el campo de desplazamientos.
K_C	Tenacidad a la fractura.
σ_{NOM}	Tensión nominal.
σ_{PK}	Tensión máxima o tensión pico.

I. MEMORIA

1. INTRODUCCIÓN

El presente documento contiene la memoria del Trabajo Fin de Máster cuyo título es el siguiente: “Cálculo del factor de intensidad de tensiones mediante elementos finitos”. Se trata de un trabajo de índole teórico-práctica enfocado plenamente en el ámbito del análisis mecánico y, en especial, de la Mecánica de la Fractura.

La fractura frágil es un fallo que suele producirse sin apenas deformación plástica previa y de modo instantáneo. No es un fallo tan común como los debidos a fatiga o de plastificación generalizada (dúctiles), pero cuando ocurre suele implicar consecuencias materiales y humanas muy graves. Estos colapsos tuvieron su origen, en especial, cuando se empezaron a producir piezas grandes. Las teorías de fallo convencionales como la de Von Mises o Tresca no explican este tipo de casos: la mecánica de la fractura se encarga de su estudio.



Figura 1. Rotura del petrolero Schenectady, [11].

En este proyecto van a analizarse distintos casos de mecánica de la fractura en chapas de pequeño espesor, y se calculará para cada situación el factor o los factores de intensidad de tensión que apliquen, en función del modo de fractura que intervenga.

El trabajo se estructura de la forma en que a continuación se detalla:

Para comenzar, se define el contexto de este trabajo, su objeto y su alcance, en orden a acotar todo lo que en él se expone. Seguidamente, en el estado del arte, se lleva a cabo un repaso por los conceptos básicos necesarios que se han empleado a lo largo de este TFM. Por un lado, se habla sobre la mecánica lineal de la fractura, profundizando en el parámetro “factor de intensidad de tensión” y su implicación en el estudio de grietas; por otro, se concluye con algún apartado relativo al ámbito de la propagación de grieta en fatiga.

Después, se describe la parte central del TFM, que se basa en estudiar distintos casos de fractura en chapas de acero que poseen ciertas grietas, a fin de calcular el factor de intensidad de tensión haciendo uso de diferentes métodos, que previamente habrán sido expuestos en el Análisis del Estado del Arte. Asimismo, se relata de manera exhaustiva cómo debe modelizarse un caso de análisis de fractura, profundizando en cómo definir una pieza que tenga una grieta haciendo uso de EF. Esta parte constituye el núcleo del trabajo, ya que de ella se extraen tanto los resultados como las conclusiones de este.

Cabe destacar que en todos los análisis mecánicos que se han realizado, así como en las tareas de redacción de este TFM, se ha hecho uso de los siguientes programas informáticos:

- *Ansys*: para modelizar y analizar las piezas con EF.
- *Matlab* y *Microsoft Excel*: para postprocesar los resultados obtenidos de Ansys, en orden a calcular los factores de intensidad de tensión.

- *Microsoft Word*: para redactar la memoria del trabajo.

Para concluir, se cierra el TFM con los resultados y las conclusiones obtenidas, culminando con un apartado acerca de futuras líneas por donde seguir avanzando con este trabajo. Además, se incluye la planificación seguida definida con un diagrama de Gantt, así como la bibliografía empleada y un anexo con el código de cálculo implementado en Matlab.

2. CONTEXTO

Este Trabajo Fin de Máster está vinculado a la asignatura de *Métodos de Análisis y Diseño para Fractura y Fatiga*, impartida en el segundo cuatrimestre del primer curso del Máster en Ingeniería Mecánica de la Universidad del País Vasco (UPV/EHU). En dicha asignatura, se estudia un amplio abanico de conceptos, tanto básicos como avanzados, de los fenómenos de fractura y fatiga de materiales usuales en ingeniería.

Resulta de gran interés porque se adquiere una visión amplia y profunda de la naturaleza y las posibles causas de fallos por fractura y fatiga en componentes mecánicos comúnmente empleados en el mundo ingenieril. Además, una de las metas que la asignatura persigue es que el alumno sea capaz de decidir, entre otros factores, qué tipo ensayos deben llevarse a cabo para caracterizar un material a fatiga, o para obtener su tenacidad a la fractura.

Asimismo, tal y como se verá a lo largo de este documento, se ha hecho uso de distintos softwares informáticos (Ansys, por ejemplo, para los análisis estructurales) para analizar casos de fractura en distintas piezas. Es importante considerar la gran utilidad de estos programas, porque en innumerables ocasiones tareas como estimar la propagación de cierta grieta, o dar un valor aproximado de la vida a fatiga de una pieza, sería inviable sin el análisis estructural realizado con dichos programas del componente en estudio.

Finalmente, para cerrar el contexto del trabajo, debe mencionarse que se ha realizado en su totalidad en el entorno del Departamento de Ingeniería Mecánica de la Escuela de Ingeniería de Bilbao. Durante los meses que se han invertido en este proyecto, se han aplicado con criterio todos los conceptos adquiridos en el transcurso del Máster, lo cual ha resultado de gran utilidad en orden a resolver los obstáculos hallados por el camino de la mejor forma posible.

3. OBJETO Y ALCANCE DEL TRABAJO

Este Trabajo Fin de Máster se fundamenta en analizar mediante el Método de los Elementos Finitos distintos casos de Mecánica Lineal de la Fractura en chapas de acero con grietas de distinto tipo y tamaño, en orden a calcular, en base a distintos métodos, el factor o los factores de intensidad de tensión que correspondan en cada caso.

El primer objetivo será llevar a cabo una revisión bibliográfica, que se recogerá en el Análisis del Estado del Arte del presente documento, para dar una introducción a la Mecánica de la Fractura y poder comprender conceptos como el de “factor de intensidad de tensión”. Además, será de gran utilidad para estudiar el campo tensional en la región cercana a la grieta. Por último, se expondrán los distintos métodos que se emplearán a lo largo de este trabajo para calcular el factor de intensidad de tensión de las piezas estudiadas.

El segundo objetivo consistirá en realizar análisis estructurales de distintas chapas de acero que se caracterizarán por tener grietas de tamaño y orientación diferente unas de otras. Dichos análisis se harán con el software Ansys de Elementos Finitos, y serán la antesala del cálculo del factor de

intensidad de tensión. Se van a analizar, como se verá más adelante, cuatro casos de modo I, otros cuatro de modo II y finalmente tres casos de modos mixtos I y II.

Una vez estudiado cada caso mediante Elementos Finitos, el tercer objetivo será realizar un postproceso de los resultados obtenidos, a fin de calcular, para cada pieza estudiada, el factor o los factores de intensidad de tensión, según el método que sea pertinente, en función del estado tensional de la pieza y del modo de fractura que intervenga. Finalmente, los factores de intensidad de tensión obtenidos de EF se compararán con los teóricos, siendo estos últimos los calculados con fórmulas teóricas, que se presentarán en el Análisis del Estado del Arte.

Por lo tanto, el alcance del presente proyecto es analizar casos de Mecánica Lineal de la Fractura para modo I, modo II y modos mixtos I y II. Quedan fuera del alcance casos de modo III puro o de modos mixtos donde influya el modo III de fractura, así como estudios de Mecánica Elastoplástica de la Fractura. Tampoco se estimará la propagación de grieta según Paris, Erdogan u otra teoría, ya que el trabajo finalizará con el cálculo del factor de intensidad de tensión.

En conclusión, lo que se pretende con este TFM es calcular los factores de intensidad de tensión de los distintos casos estudiados y obtener el porcentaje de error relativo a la fórmula teórica para ver el rango de aplicación y validez de las expresiones referentes a la Mecánica de la Fractura. Además, servirá como punto de partida para futuros trabajos sobre estimación de la propagación de grieta, ya que el factor de intensidad de tensión es un parámetro básico para prever el crecimiento del defecto.

4. BENEFICIOS QUE APORTA EL TRABAJO

Entre los beneficios que aporta este Trabajo Fin de Máster, deben distinguirse dos puntos de vista. Por un lado, está el práctico o ingenieril; y por otro la perspectiva personal o académica.

A nivel ingenieril, gracias a este proyecto se puede tener un enfoque práctico claro de cómo llevar a cabo el cálculo del factor o los factores de intensidad de tensión de un elemento estructural que tenga una grieta, generada bien por fatiga o bien por defecto de fabricación u otras causas. Se explica de manera sencilla y detallada todo el procedimiento, variando el tipo de grieta y, por ende, el modo de fractura.

Asimismo, este proyecto puede servir de base para futuros trabajos relacionados con la estimación de la propagación de grieta, ya que en dicho ámbito el rango de intensidad de tensión es un parámetro básico para estimar la vida de la pieza.

Por último, en este hilo, el cálculo del factor de intensidad de tensión sería aplicable para implementar la metodología de diseño “damage tolerance”, en la cual se acepta la existencia de grietas en las piezas, tal y como se expone en el Análisis del Estado del Arte. Dicha metodología de diseño permite optimizar la cantidad de material, lo cual supone minimizar peso, algo muy valorado en sectores como el aeronáutico.

A nivel personal, este trabajo ha resultado de gran utilidad para interiorizar y entender los conceptos estudiados en la asignatura de Métodos de Análisis y Diseño para Fractura y Fatiga, impartida en el segundo cuatrimestre del primer curso del Máster en Ingeniería Mecánica de la Universidad del País Vasco (UPV/EHU).

Adicionalmente, ha valido para aprender a utilizar el software de Elementos Finitos comercial Ansys, ampliamente implantado en la industria, aprendiendo a mallar y refinar distintas zonas de interés de las piezas en estudio y a usar sus comandos de un modo eficiente, primando la precisión de los resultados y ahorrando coste computacional en la medida de lo posible.

5. ANÁLISIS DEL ESTADO DEL ARTE

5.1. Mecánica lineal de la fractura

5.1.1. Introducción a la mecánica de la fractura

En el mundo de la Ingeniería Mecánica, son ampliamente conocidos los fallos dúctiles y frágiles de elementos mecánicos. Los primeros se caracterizan porque alguna zona de una pieza estructural excede la tensión de fluencia del material. Estos implican una deformación plástica (permanente), pero la pieza no llega a romperse. Los frágiles, en cambio, suceden sin previo aviso, a causa de que algún punto de la pieza llega a la tensión límite del material. Son mucho más imprevisibles y catastróficos, porque se da la rotura al instante, sin apenas deformación plástica.

Sin embargo, hay que considerar que una pieza dúctil puede fallar de forma frágil, por ejemplo, en piezas metálicas de gran tamaño que se caracterizan por tener grietas, poros o inclusiones. Conforme aumenta el tamaño de la pieza, su fabricación es más compleja, de ahí que sea más probable que pueda haber defectos.

Los fallos por fractura frágil tuvieron su origen cuando se empezaron a producir piezas grandes. Son colapsos que las teorías de fallo clásicas (Von Mises, por ejemplo) no explican. La mecánica de la fractura se encarga de su estudio. Su fin puede ser hallar el tamaño admisible de grieta bajo cierto nivel tensional, o viceversa.

El estudio de la mecánica de la fractura fue evolucionando a raíz de numerosos accidentes alrededor de las décadas de los 40 y 50 en puentes, buques o aviones. A modo de ejemplo, la siguiente figura muestra la fractura de la chapa de aluminio del ala de una jet de pasajeros.



Figura 2. Fractura de la chapa del ala de un jet de pasajeros, [11].

La mecánica de la fractura estudia las tensiones en el borde de la grieta con el fin de prever el fallo por fractura frágil. Si la tensión nominal en la pieza (la que habría si no hubiera concentración de tensiones) es inferior a la fluencia, aplicará la Mecánica Lineal de la Fractura (MLF). En caso contrario, la Mecánica Elastoplástica de la Fractura (MEPF) deberá emplearse.

En este TFM, todos los casos estudiados pertenecen al alcance de la MLF.

5.1.2. Modos de fractura

Hay tres modos de fractura:

- Modo I o de abertura: originado por tensiones normales. Es el más común.
- Modo II o de deslizamiento: originado por tensiones cortantes.
- Modo III o de desgarramiento: originado por tensiones cortantes.

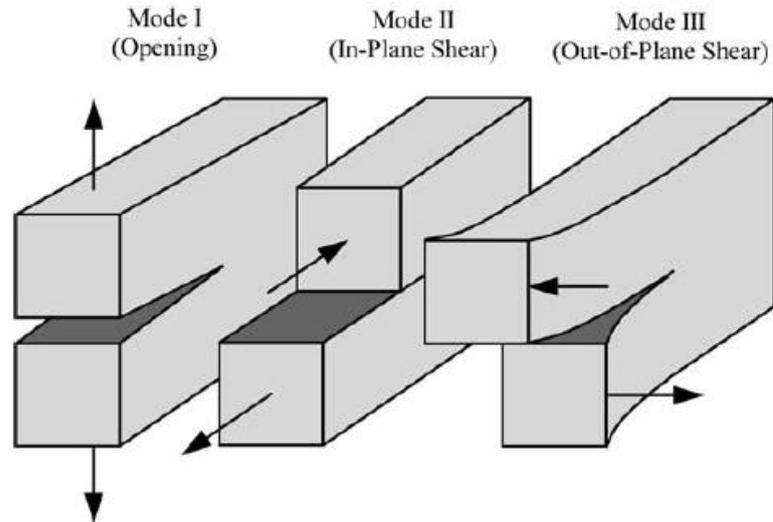


Figura 3. Modos de fractura, [3].

Cabe destacar que pueden darse casos donde varios modos estén combinados, tal y como se verá en este TFM. Si no hubiera grietas previas, no se daría la fractura estática y, si se diera por fatiga, sería por modo I siempre. En caso de haber grietas previas, sin embargo, el modo de fractura estará determinado, tanto en estática como en fatiga, por la inclinación de la grieta respecto a la carga.

La siguiente figura muestra tres chapas sometidas a idéntico nivel tensional, con sus correspondientes líneas de transmisión de esfuerzos:

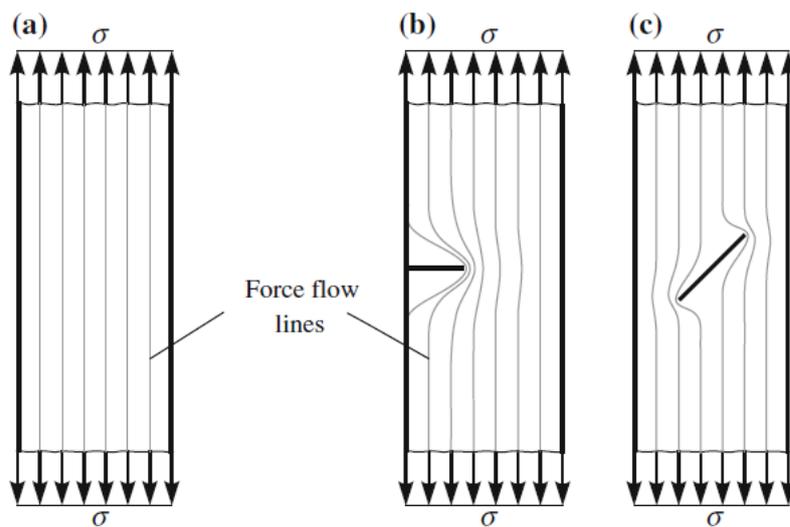


Figura 4. Tres chapas de acero sometidas al mismo nivel de tensión, [2].

La a) no presenta ninguna grieta, luego las líneas de transmisión de esfuerzos fluyen de la parte superior a la inferior de la pieza, sin aperturarse. En b) y c), en cambio, sí que existe grieta, lo que induce a un efecto de concentración de tensiones fomentado por la mayor densidad de líneas de transmisión de esfuerzos y su cambio de pendiente en los frentes de grieta. b) es un caso de modo I puro, porque la grieta es normal a la dirección de la tensión. En c), sin embargo, el modo o la combinación de modos dependerá de la inclinación de la grieta respecto a la carga.

Puede que se superpongan modos I, II y III, en cuyo caso se denomina “modo mixto espacial”; o puede que solo se combinen los modos I y II, lo que deriva en “modo mixto plano”.

La siguiente figura ilustra un caso general de combinación de modos I y II:

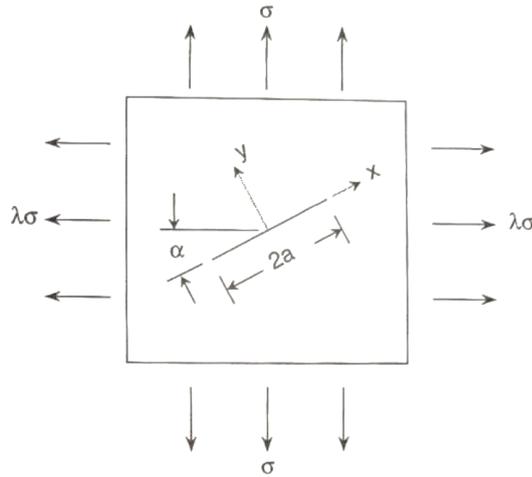


Figura 5. Caso de modo mixto plano, [5].

Casos posibles:

- Si $\alpha = 0^\circ$, se tendrá modo I puro para cualquier λ .
- Si $\alpha = 45^\circ$ y $\lambda = -1$, se tendrá modo II puro.
- En cualquier otro caso, los modos I y II se combinarán.

A modo de ejemplo, se incluye una figura con un caso general de modo mixto espacial, donde los modos II y III se combinan:

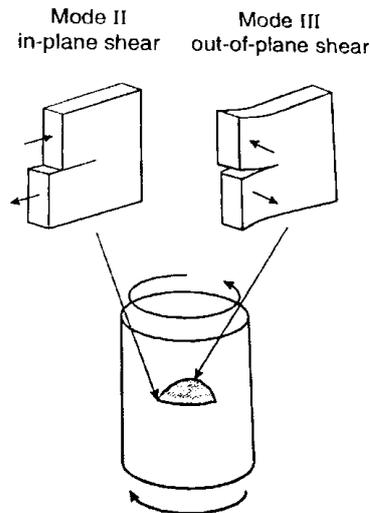


Figura 6. Caso de modo mixto espacial, [5].

En la pieza de la figura, el punto central de la grieta se propaga según modo III puro, y los puntos extremos según modo II puro. El resto de puntos se caracterizarán por ser una combinación de modos II y III, predominando el modo II cuanto más próximo se esté a los extremos; y el modo III a medida que se acerque a los puntos centrales.

5.1.3. Análisis del campo de tensiones en el borde de grieta

En primer lugar, debe quedar clara la diferencia entre grieta y entalla. Por un lado, en una entalla, se tiene un efecto de concentración de tensiones, que origina una “tensión pico” (σ_{PK}). Dicha tensión es “ k_T ” veces superior a la tensión nominal (σ_{NOM} , la que habría en ausencia de grieta), siendo el parámetro k_T el denominado factor de concentración de tensiones. Si la tensión pico excede el límite de fluencia del material (σ_{YP}), se dará una plastificación en dicha región.

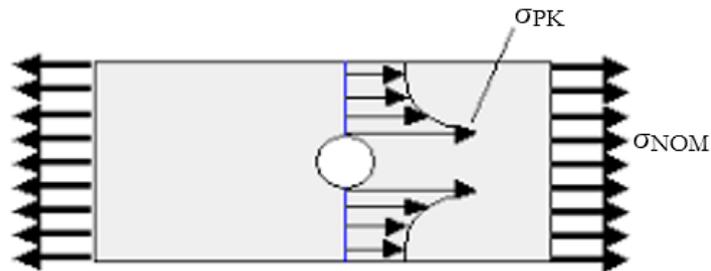


Figura 7. Concentración de tensiones en una entalla.

Por otro lado, una grieta puede entenderse como una entalla con un radio de acuerdo nulo, lo cual deriva en una σ_{PK} que tiende a infinito. Por dicha razón, siempre se da una plastificación en el borde de grieta, a pesar de que σ_{NOM} no sea elevada.

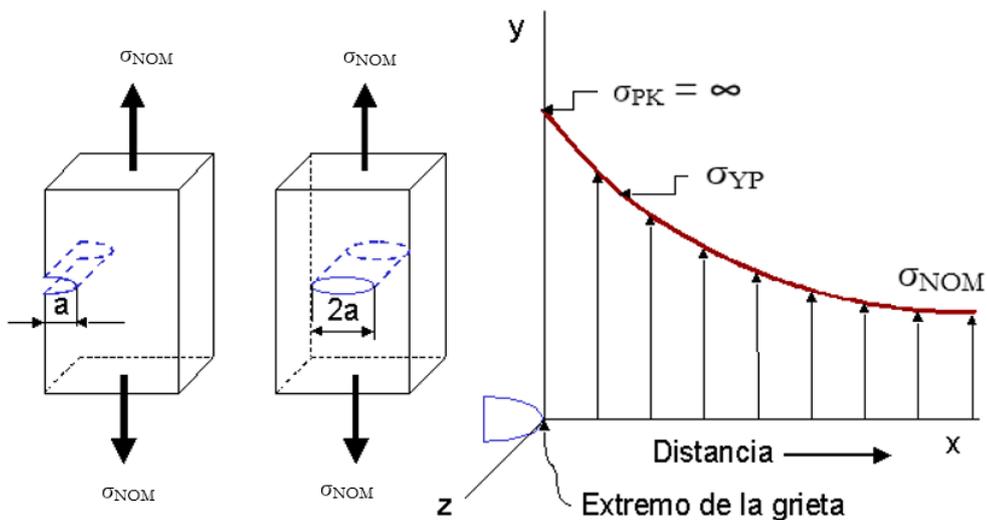


Figura 8. Concentración de tensiones en una grieta.

En una grieta, en cambio, el efecto de la concentración de tensiones es más local: la tensión pico baja más deprisa a la nominal. Por tanto, la zona plastificada en una grieta es, en general, menor que en una entalla.

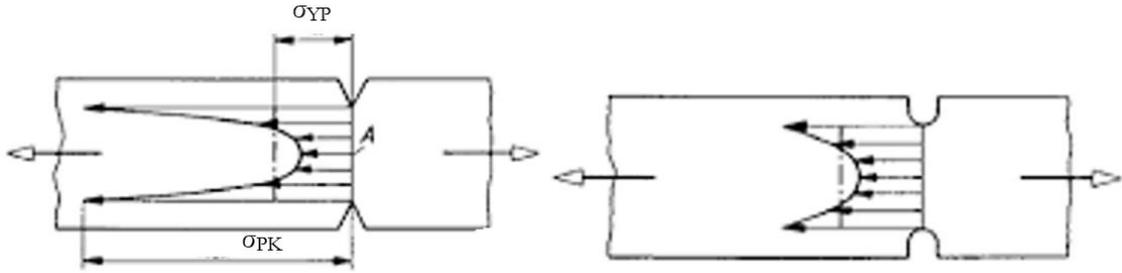


Figura 9. Concentración de tensiones en grieta (izda.) y en entalla (dcha.).

Cuando se estudia el estado tensional en el frente de grieta, se tiene, para un caso general:

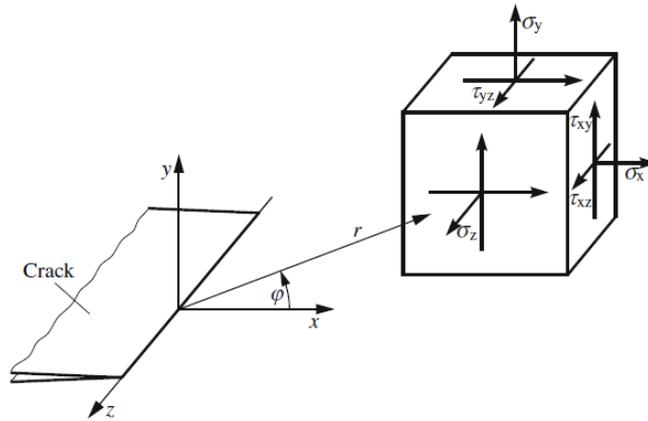


Figura 10. Campo tensional en el borde de grieta, [2].

Se observa que el sistema de referencia (x, y, z) se coloca en el borde de grieta. El parámetro r denota la distancia del punto analizado respecto al borde de grieta, mientras que φ representa la inclinación, respecto al eje x, del punto estudiado.

Analíticamente, las componentes del tensor de tensiones, para la cercanía de la grieta, son:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \left(1 - \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{3\varphi}{2} \right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \left(2 + \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{3\varphi}{2} \right) \\
 \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \left(1 + \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{3\varphi}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{3\varphi}{2} \\
 \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{3\varphi}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \left(1 - \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{3\varphi}{2} \right) \\
 \tau_{xz} &= -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \\
 \tau_{yz} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \\
 \sigma_z &= \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{2\nu}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \left(K_I \cdot \cos \frac{\varphi}{2} - K_{II} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \right).
 \end{aligned} \tag{1}$$

Donde los parámetros K_I , K_{II} y K_{III} son, respectivamente, los factores de intensidad de tensión de los modos I, II y III. Si, por ejemplo, se tiene únicamente modo I, en la expresión correspondiente el valor de K_{II} y K_{III} será nulo.

Se observa asimismo que K_{III} solo está presente en aquellas componentes del tensor de tensiones que guardan relación con el eje z, al ser el modo III un modo espacial, esto es, fuera del plano XY.

5.1.4. Cálculo del factor de intensidad de tensión

Tal como se ha remarcado al final del apartado anterior, el parámetro K, junto con el subíndice I, II o III, según el modo de fractura, representa el factor de intensidad de tensión, al que también se hace referencia como SIF (Stress Intensity Factor).

El factor de intensidad de tensión tiene crucial importancia en el análisis a fractura de una pieza, tanto en estática como en fatiga. En este TFM el cálculo del SIF es el núcleo de todo el trabajo, ya que se llevará a cabo para varios casos de modo I, modo II y modo mixto plano.

5.1.4.1. Fórmula teórica

El primer método (y el más simple) usado para calcular el factor de intensidad de tensión es la fórmula teórica. Su expresión es:

$$K_I = \sigma \cdot \alpha \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (\text{modo I}) \quad (2)$$

$$K_{II} = \tau \cdot \alpha \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (\text{modo II}) \quad (3)$$

Donde σ es la tensión normal nominal, τ la tensión cortante, α el factor geométrico (según el modo) y a el tamaño de grieta. Para el modo III la expresión es idéntica a la del modo II, salvo por el factor geométrico que corresponderá al tercer modo de fractura.

El factor geométrico depende de la geometría de la pieza, la carga externa, y el tamaño y posición de la grieta. En distintos libros y artículos, pueden encontrarse tablas y gráficas de α . Por ejemplo, para los casos de modo I estudiados en este TFM, se ha usado la siguiente figura, extraída de [6]:

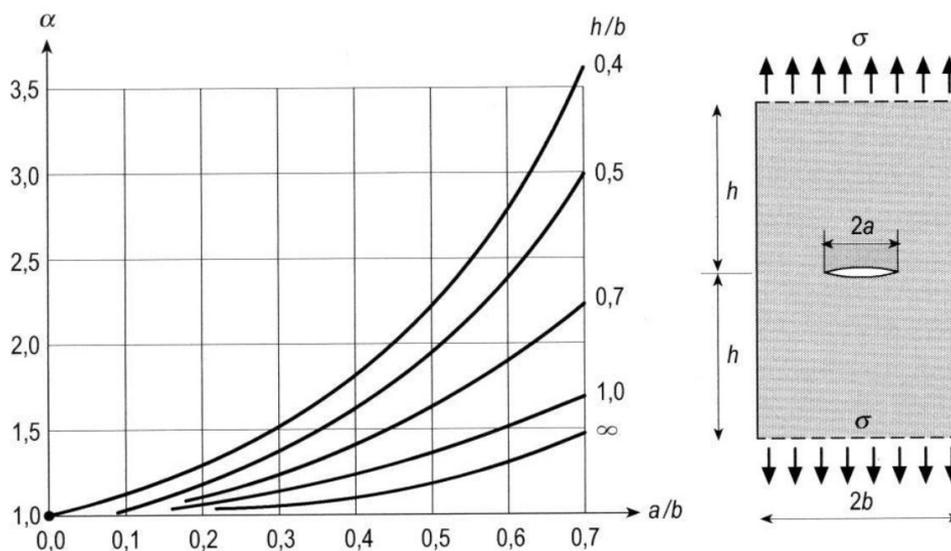


Figura 11. Factor geométrico para modo I puro, [6].

El valor de α anterior es aplicable en casos como el de la chapa de la figura, donde se tiene un caso de modo I puro. Además, se observa que para casos donde a/b es aproximadamente 0,2 o menos, el factor geométrico tiende a la unidad. Se tiene entonces una “chapa infinita”, porque el tamaño de la grieta ($2a$) es muy pequeño respecto al ancho de la chapa ($2b$).

Lo explicado para K_I es análogamente aplicable a K_{II} y K_{III} , con la excepción de que el factor geométrico deberá ser obtenido para casos de modos II y III, respectivamente. Cabe destacar que al parámetro α también se le refiere como Y_{II} (por ejemplo, para modo II).

Asimismo, hay expresiones generales para obtener el factor geométrico de distintos modos en casos cuya geometría no es tan simple, como los extraídos de [2] para casos de modo I:

$$Y_I = \frac{K_I}{\sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}} = \frac{1}{1 - \frac{a}{d}} \cdot \sqrt{\frac{A + B \cdot \frac{a}{d-a}}{1 + C \cdot \frac{a}{d-a} + D \cdot \left(\frac{a}{d-a}\right)^2}} \quad (4)$$

Aplicable en casos como:

	Crack type		Constants	Stress	Validity range Accuracy
1	Internal crack in 2D tensile bar		A = 1.00 B = 0.45 C = 2.46 D = 0.65	σ	$0 \leq \frac{a}{d} \leq 0.9$ 1%
2	External crack in 2D tensile bar		A = 1.26 B = 82.7 C = 76.7 D = -36.2	σ	$0 \leq \frac{a}{d} \leq 0.5$ 1%
3	External crack in 2D bending bar		A = 1.26 B = 2.04 C = 6.33 D = -1.37	$\sigma = \frac{6M}{d^2 \cdot t}$	$0 \leq \frac{a}{d} \leq 0.6$ 1%
4	Circular internal crack in rotationally symmetrical tensile bar		A = 0.41 B = -0.04 C = 1.83 D = -2.66	$\sigma = \frac{F}{\pi \cdot (d^2 - a^2)}$	$0 \leq \frac{a}{d} \leq 0.8$ 1%
5	Circular external crack in a rotationally symmetrical tensile bar		A = 1.26 B = -0.24 C = 5.35 D = 11.6	$\sigma = \frac{F}{\pi \cdot (d-a)^2}$	$0 \leq \frac{a}{d} \leq 0.7$ 1%
6	Circular external crack in a rotationally symmetrical bending bar		A = 1.26 B = -0.25 C = 6.21 D = 21.1	$\sigma = \frac{4M}{\pi \cdot (d-a)^2}$	$0 \leq \frac{a}{d} \leq 0.7$ 2%
7	Semi-elliptical surface crack in a tensile bar		$\frac{a}{c} = 0.4$: A = 0.94 B = -0.34 C = 1.51 D = -0.65 $\frac{a}{c} = 1.0$: A = 0.47 B = 0.00 C = 2.00 D = 1.00	σ	$0 \leq \frac{a}{d} \leq 0.7$ 2%

Figura 12. Distintos casos de modo I, [2].

En casos que no estén tabulados, el SIF deberá hallarse por medio de EF, como se expondrá en el siguiente apartado.

5.1.4.2. SIF en base a tensiones y deformaciones

Las componentes del tensor de tensiones en la cercanía de la grieta, donde la Mecánica de la Fractura es aplicable, son las detalladas en la ecuación (1). En un caso de modo I puro, K_{II} y K_{III} serían nulas, y K_I se despejaría de cada expresión.

En cuanto a las deformaciones, como se expone en [2], para modo I se tiene:

$$\begin{aligned} u &= \frac{K_I \cdot (1 + \nu)}{E} \cdot \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \left(\kappa - 1 + 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) \\ v &= \frac{K_I \cdot (1 + \nu)}{E} \cdot \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \left(\kappa + 1 - 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

Para modo II:

$$\begin{aligned} u &= \frac{K_{II} \cdot (1 + \nu)}{E} \cdot \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \left(\kappa + 1 + 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right) \\ v &= -\frac{K_{II} \cdot (1 + \nu)}{E} \cdot \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \left(\kappa - 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

Por último, para modo III ($u = v = 0$):

$$w = \frac{4K_{III} \cdot (1 + \nu)}{E} \cdot \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \quad (7)$$

Siendo:

- u, v, w : desplazamientos relativos en x, y, z respectivamente, del punto analizado respecto del frente de grieta. Es decir, diferencia (en valor absoluto) entre el desplazamiento del punto analizado (situado a r del frente de grieta, y con un ángulo φ) y el del borde de grieta, según la dirección x, y o z .
- E, ν : módulo de Young y coeficiente de Poisson (respectivamente) del material.
- κ : parámetro cuyo valor es $\kappa = (3 - \nu) / (1 + \nu)$ en tensión plana, y $\kappa = 3 - 4\nu$ para deformación plana.

Según [2], el SIF se obtiene con más precisión a partir de deformaciones que de tensiones, lo cual se comprobará luego en base a los resultados obtenidos.

Dichas expresiones darán un SIF que variará con r . La forma de obtener el SIF final, que se verá en profundidad más adelante en el apartado de Resultados, será:

- Realizar un path en el modelo de EF para un determinado φ , que será función del ángulo de propagación de la grieta según el modo de fractura.
- De dicho path, extraer los resultados necesarios de tensiones y/o deformaciones.
- Aplicar las expresiones referentes al método empleado.

Finalmente, cuando se tenga la gráfica que relaciona, por ejemplo para modo I, K_I y r , el SIF final se obtendrá extrapolando a $r = 0$ (corte con el eje de ordenadas):

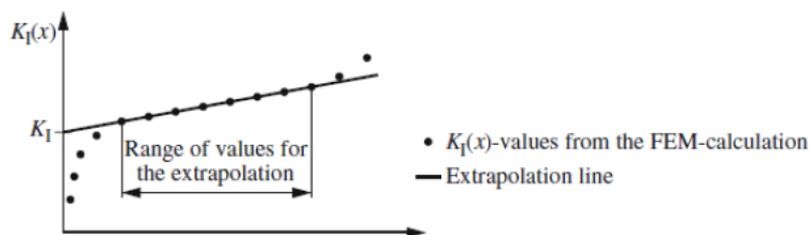


Figura 13. Extrapolar el SIF a $r = 0$, [2].

Se observa en las expresiones relativas al campo de tensiones que, para $r = 0$, las fórmulas predicen tensiones infinitas, lo que implica una singularidad. En el modelo de EF, en cambio, las tensiones en $r = 0$ no serán infinito, pero a medida que se refine la malla tenderán cada vez a valores mayores. En el otro extremo, con r elevado, la MLF no aplica, porque la tensión pasa a ser la nominal. En conclusión, el SIF debe obtenerse extrapolando a $r = 0$ los valores de distancias r intermedias (donde la variación es lineal).

En referencia al campo de desplazamientos, el SIF se obtiene de modo análogo. No obstante, cabe destacar que en $r = 0$, los desplazamientos no tienden a infinito, sino a cero. Esto es evidente, ya que en $r = 0$ el punto analizado se corresponde prácticamente con el borde de grieta, y por tanto su desplazamiento relativo al borde de grieta se anula.

5.1.4.3. Otras fórmulas teóricas para modo I

Además de la expresión (2), otros autores han propuesto fórmulas teóricas. De [4] se recogen las propuestas de Irwin y Fedderson para hallar el SIF de un caso de modo I:

$$K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot \left[\sec\left(\frac{\pi a}{w}\right) \right]^{0,5} \quad (\text{Irwin}) \quad (8)$$

$$K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot \left[\frac{w}{\pi a} \tan\left(\frac{\pi a}{w}\right) \right]^{0,5} \quad (\text{Fedderson}) \quad (9)$$

Donde a es el ancho de grieta, σ la tensión nominal y w el ancho de la chapa.

Adicionalmente, de [3] se extrae una modificación de la de Fedderson:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \left[\sec\left(\frac{\pi a}{2W}\right)^{1/2} \right] \left[1 - 0.025 \left(\frac{a}{W}\right)^2 + 0.06 \left(\frac{a}{w}\right)^4 \right] \quad (10)$$

Siendo a el ancho de grieta, σ la tensión nominal, W la mitad del ancho de la chapa y w el espesor de la chapa.

Se observa que estas tres expresiones son muy similares a la primera fórmula teórica presentada, (2), con la excepción de que el factor geométrico viene dado por una expresión en función de propiedades de la chapa, así como otros coeficientes. Según dichas referencias, esas fórmulas ajustan bien el valor de K_I para casos donde la relación entre el ancho de grieta y el de la chapa esté entre 0 y 0,95.

5.1.4.4. Fórmula teórica para modo mixto plano

Si se tiene un caso general de modo mixto plano (combinación de modos I y II), la fórmula teórica para hallar K_I y K_{II} se obtiene en base a los círculos de Mohr:

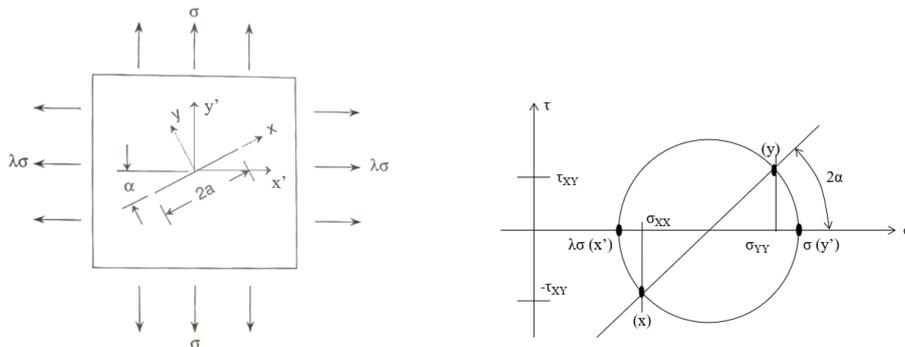


Figura 14. Obtención de la fórmula teórica para un caso de modo mixto plano.

Centro del círculo de Mohr (C): $(\sigma + \lambda\sigma) / 2 = \sigma(1 + \lambda) / 2$

Radio del círculo de Mohr (R): $(\sigma - \lambda\sigma) / 2 = \sigma(1 - \lambda) / 2$

En los ejes (x, y) solidarios con la grieta, las tensiones son:

$$\sigma_{XX} = C + R\cos(2\alpha) = [\sigma(1 + \lambda) / 2] + [\sigma(1 - \lambda) / 2]\cos(2\alpha)$$

$$\sigma_{YY} = C - R\cos(2\alpha) = [\sigma(1 + \lambda) / 2] - [\sigma(1 - \lambda) / 2]\cos(2\alpha)$$

$$\tau_{XY} = R\sin(2\alpha) = [\sigma(1 - \lambda) / 2]\sin(2\alpha)$$

Por lo tanto, ya que el modo I lo origina σ_{YY} por ser perpendicular a la grieta (tiende a abrirla), y el modo II lo causa la tensión cortante:

$$K_I = \sigma_{YY} \cdot \alpha \cdot \sqrt{\pi \cdot a} = \sigma \cdot \alpha \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot \left[\frac{1 + \lambda}{2} + \frac{1 - \lambda}{2} \cos(2\alpha) \right] \quad (11)$$

$$K_{II} = \tau_{XY} \cdot \alpha \cdot \sqrt{\pi \cdot a} = \sigma \cdot \alpha \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot \frac{1 - \lambda}{2} \sin(2\alpha) \quad (12)$$

Se observa que σ_{XX} no interfiere porque no tiende a propagar la grieta. Si la chapa es infinita, α es igual a la unidad.

5.1.5. Método de la tensión crítica

De acuerdo al método de la tensión crítica, el fallo por fractura se da cuando la tensión normal alcanza la denominada “tensión crítica” (σ_c). Cuando eso sucede, por ejemplo, para un caso de modo I, se tiene que $K_I = K_{IC}$, luego, de (2):

$$\sigma_c = \frac{K_{IC}}{\alpha \cdot \sqrt{\pi \cdot a}} \quad (13)$$

Análogamente, en modo II el fallo se dará cuando $K_{II} = K_{IIC}$, y en el modo III si $K_{III} = K_{IIIC}$.

Es decir, el SIF toma el valor de K_{IC} , que es la tenacidad a la fractura, función del material, de la temperatura y del espesor de la probeta de ensayo. Como se ha adelantado, se obtiene su valor de ensayos según la norma ASTM E399-09:

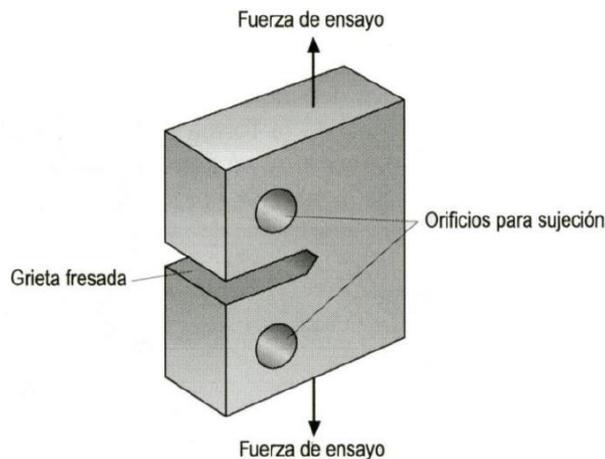


Figura 15. Ensayo para determinar la tenacidad a la fractura, [5].

En primer lugar, se genera una grieta (distinta a la grieta fresada de la figura) por fatiga, introduciendo una tracción variable en la probeta. A partir de dicho instante, la tracción aplicada es constante y dura hasta que se da el fallo por fractura frágil cuando la tensión nominal iguala a la crítica. Finalmente, se despeja la tenacidad a la fractura (por ejemplo, para modo I):

$$K_{IC} = \sigma_c \cdot \alpha \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (14)$$

Si se llevan a cabo varios ensayos variando el tamaño de grieta, la tensión crítica puede variar. Sin embargo, la tenacidad a la fractura no cambia porque es propiedad del material, de la temperatura y del espesor de la probeta.

Como se ha mencionado, K_{IC} también depende del espesor de la probeta. En espesores muy pequeños se tendrán casos de tensión plana, mientras que a medida que aumente este se tenderá a un estado de deformación plana. De hecho, resultados experimentales han concluido que el mínimo valor de K_{IC} se alcanza en casos de deformación plana, por lo que resulta conservador tomar dicho valor mínimo en los cálculos a fractura (aunque sobredimensionaría las piezas).

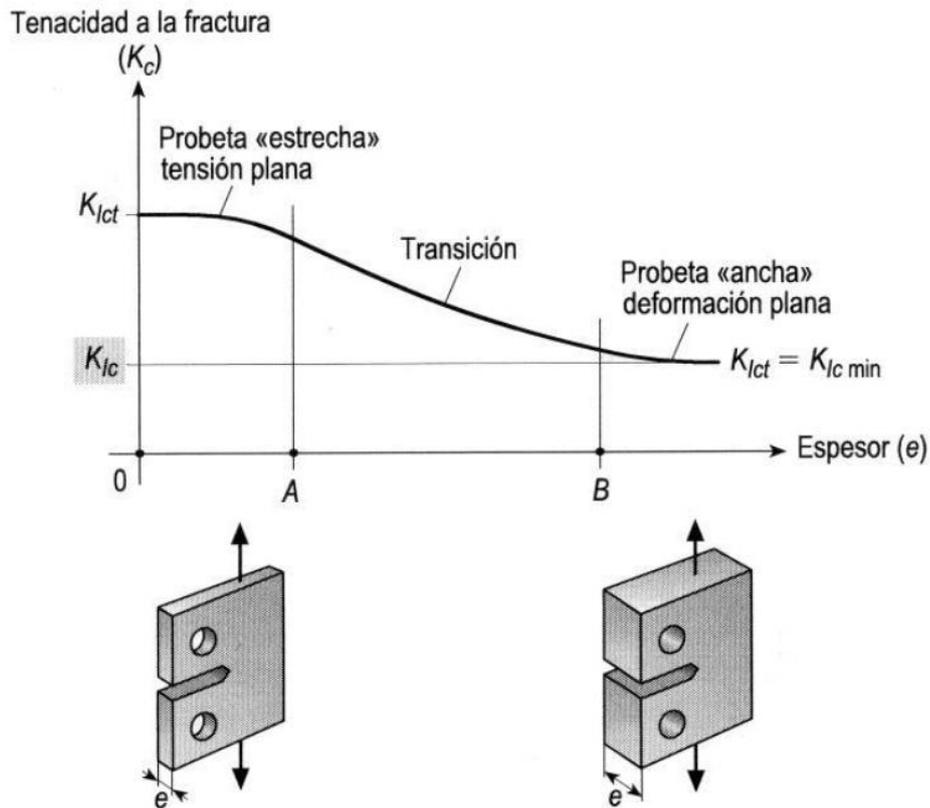


Figura 16. Variación de la tenacidad de la fractura con el espesor de la probeta, [6].

Por último, en referencia a la temperatura, destaca que, a menor temperatura, la tenacidad de la fractura es menor (en aceros). No obstante, en otros materiales como aleaciones de aluminio, la variación de la tenacidad a la fractura respecto de la temperatura es mínima.

En conclusión, el fallo por fractura en elementos estructurales (de acero) de espesor mayor y sometidos a bajas temperaturas se dará a tensiones más bajas, conforme (13), ya que la tenacidad a la fractura disminuye, y por consiguiente la tensión crítica también.

5.1.5.1. Predicción del fallo por fractura en modos mixtos

En casos donde se combinen varios modos de fractura, los factores de intensidad de tensión se combinan para prever el fallo, tal que [2]:

$$K_V = \frac{K_I}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{K_I^2 + 5.336K_{II}^2 + 4K_{III}^2} \quad (15)$$

La interpretación de dicha expresión es que se calcula un “ K_I equivalente” en base a los SIF de los modos de fractura que intervengan. El fallo se dará si $K_V = K_{IC}$.

Adicionalmente, de esa referencia también se extrae que, en caso de no disponer de datos experimentales para la tenacidad a la fractura de modos II y/o III, puede tomarse:

- Para el modo II: $K_{IIC} = 0,87 \cdot K_{IC}$
- Para el modo III: $K_{IIIC} = K_{IC}$

Por otro lado, si se representa la expresión de K_V gráficamente, se tiene:

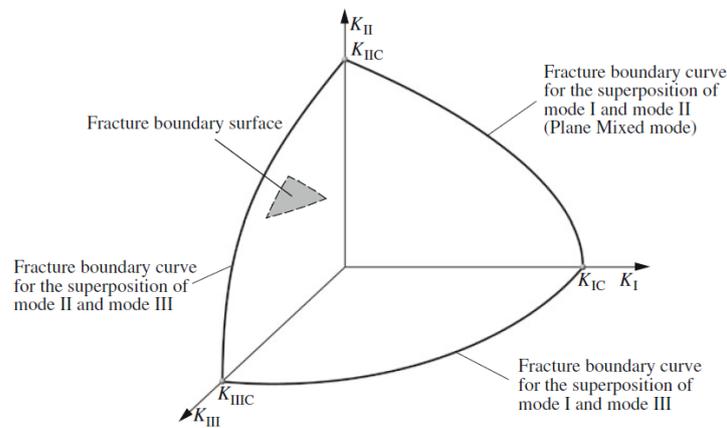


Figura 17. Superficie de K_V , [2].

El contorno de dicha área representa las distintas combinaciones de fallo, es decir, las combinaciones de los SIF de los modos I, II y III que implican fallo por fractura.

5.1.5.2. Forma de la superficie de fractura

Según qué modo de fractura intervenga en el elemento estructural, la superficie de fractura (es decir, la forma geométrica en que se dará el fallo de la pieza) será diferente:

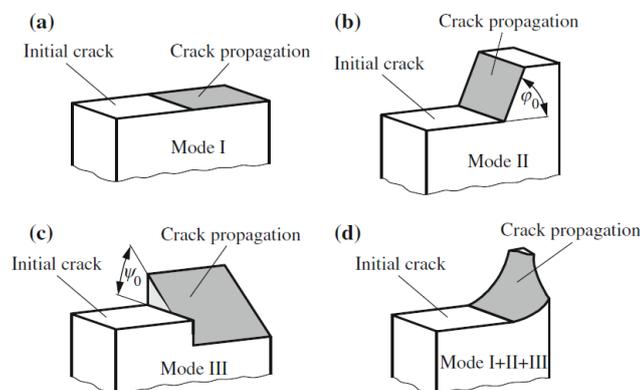


Figura 18. Superficie de fractura según el modo, [2].

La forma de la superficie de fractura puede ser importante si se quiere evaluar un fallo de un elemento estructural a posteriori, esto es, tras darse la fractura. Además, para estimar la vida de la pieza mediante teorías de propagación de grieta, el SIF es básico, y este debe ser calculado teniendo en cuenta qué modo de fractura interviene.

Asimismo, para el cálculo del SIF, teniendo en cuenta el modo de fractura, debe hallarse el ángulo de propagación de la grieta. Así, a la hora de refinar el modelo de EF, una vez calculado el ángulo de interés, se mallará con más densidad de elementos en dicha dirección.

Esos ángulos se obtienen, según [2]:

$$\varphi_0 = \mp \left[140^\circ \frac{|K_{II}|}{K_I + |K_{II}| + |K_{III}|} - 70^\circ \left(\frac{|K_{II}|}{K_I + |K_{II}| + |K_{III}|} \right)^2 \right] \quad (16)$$

$$\psi_0 = \mp \left[78^\circ \frac{|K_{III}|}{K_I + |K_{II}| + |K_{III}|} - 33^\circ \left(\frac{|K_{III}|}{K_I + |K_{II}| + |K_{III}|} \right)^2 \right] \quad (17)$$

Para modo I, se tiene que $\varphi_0 = \psi_0 = 0^\circ$. En modo II, en cambio, $\varphi_0 = 70^\circ$ y $\psi_0 = 0^\circ$. Para el modo III, por último, $\varphi_0 = 0^\circ$ y $\psi_0 = 45^\circ$.

Si se tiene un caso de modo mixto plano, donde I y II se combinan, φ_0 estará entre 0° y 70° . Por otra parte, el signo del SIF indica el sentido de la propagación de la grieta:

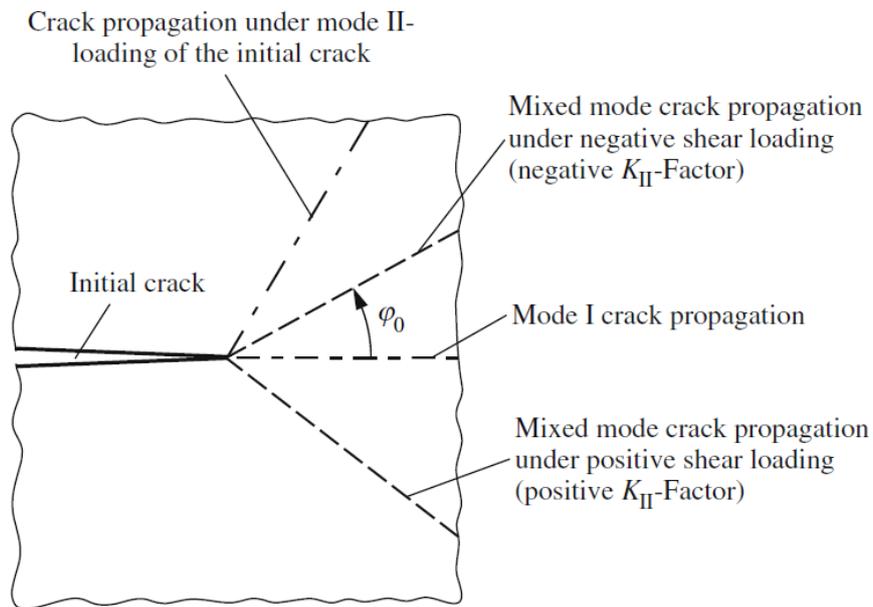


Figura 19. Propagación de la grieta en el plano XY, [2].

Estas expresiones serán importantes a la hora de calcular el SIF en casos de modos mixtos planos, tal como se verá en Resultados.

En casos de modo I o II puro, si se calculara el ángulo φ_0 , se llegaría a que en modo I puro vale 0° (porque los SIF de modos II y III son nulos), mientras que para modo II su valor sería 70° (porque los SIF de modos I y III son nulos).

5.2. Estudio de grietas y mecánica lineal de la fractura en fatiga

5.2.1. Motivación de la predicción de crecimiento de grietas

El enfoque “clásico” de cálculo a fatiga tiene como objetivo estimar la vida total de una pieza hasta que tenga lugar la rotura. El enfoque de “propagación de grieta”, en cambio, se fundamenta en prever el crecimiento de grietas (medidas experimentalmente o consideradas en diseño) en un elemento estructural bajo fatiga.

Si se tratara de una situación idónea donde estén bajo control todos los factores que influyen en el estado de la pieza analizada, la estimación según métodos de “vida total” coincidiría con la de “propagación de grieta”. Es decir, desde ambos planteamientos se predeciría el mismo número de ciclos de vida del elemento. Sin embargo, es muy improbable que este hecho se cumpla, en gran medida por la dispersión que caracteriza el cálculo a fatiga, así como por cargas reales que difieren de las de diseño o propiedades del material que no coincidan con las asumidas en el cálculo.

La Mecánica de Fractura en fatiga estima el crecimiento de grieta, y sirve de gran utilidad tanto en fase de diseño como de servicio. En este sentido, destaca el enfoque de diseño “damage tolerance”, que asume la existencia de grietas en la pieza y predice mediante la Mecánica de la Fractura su vida restante.

Por un lado, existe la Mecánica Lineal de la Fractura (MLF) y, por otro, la Elastoplástica (MEPF). La primera es aplicable en casos de fatiga de ciclos altos y con grietas de cierto tamaño (aprox. 1 mm o mayores), mientras que la segunda sería útil en caso opuesto.

5.2.2. Propagación de grieta

Tal como se vio en apartados anteriores, el fallo por fractura frágil (en estática) se da cuando la pieza alcanza la tensión crítica (σ_c). En fatiga el panorama cambia, porque al propagarse la grieta ciclo a ciclo, σ_c solo influye en el último ciclo, cuando se da el fallo estático por fractura.

Poniendo el foco en la grieta, esta se inicia por tensiones cortantes (modo II), pero se propaga debido a tensiones normales (modo I). Esto es, la grieta se propaga en dirección normal a la máxima tensión principal.

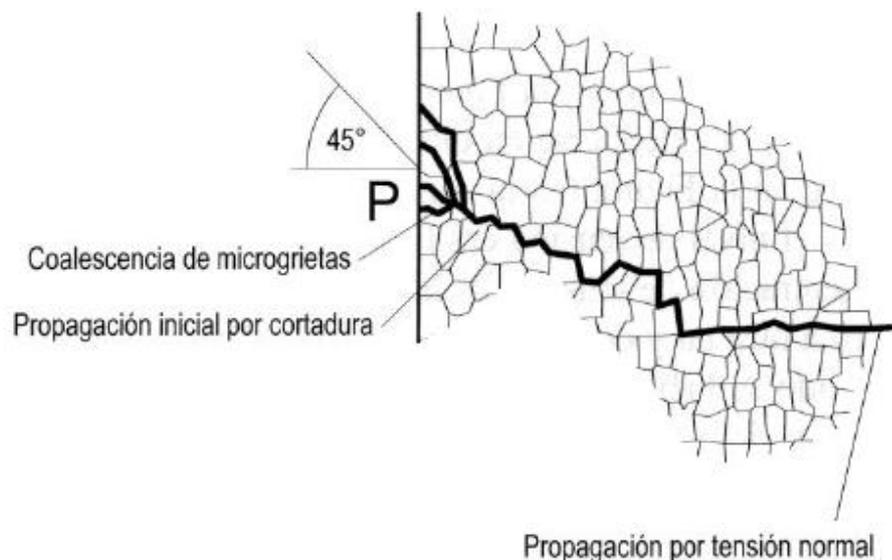


Figura 20. Trayectoria de la grieta, [5].

Por ejemplo, en un eje sometido a torsión pura, la grieta se propagará a 45° respecto al eje, por ser la dirección normal a la máxima tensión principal. Si esa torsión es alterna, ese ángulo irá cambiando de sentido, provocando una propagación en zig-zag.

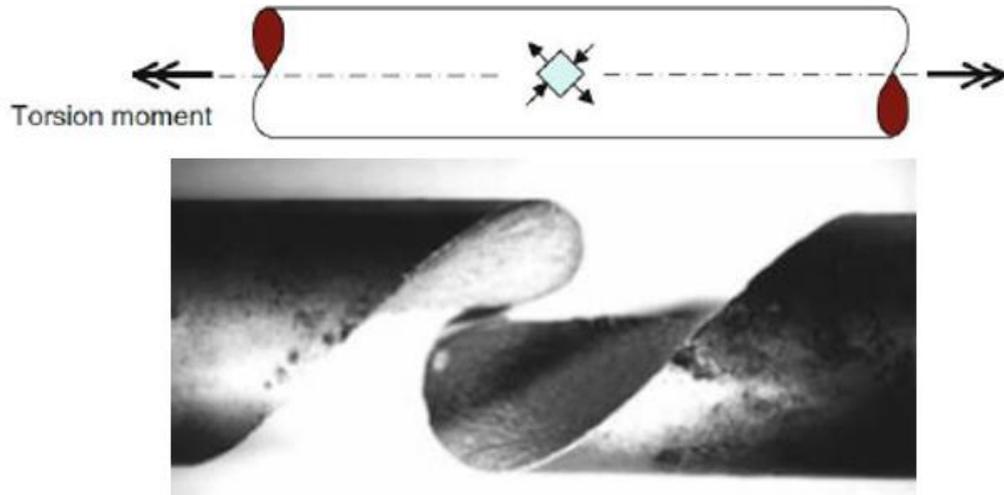


Figura 21. Propagación de grieta en un eje a torsión pura, [5].

En estática se obtenía el SIF para el estudio a fractura frágil de un elemento. En fatiga, análogamente, se usa el rango del factor de intensidad (ΔK). Supóngase que se tiene un estado tensional variable con el tiempo, donde la tensión máxima es σ_{MAX} , y la mínima σ_{MIN} . Entonces, se tendría:

$$\Delta K = (\sigma_{MAX} - \sigma_{MIN}) \cdot \alpha \cdot \sqrt{\pi \cdot a} = \Delta \sigma \cdot \alpha \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (18)$$

Entonces, partiendo de un tamaño de grieta inicial (a_0 , intersección de la curva a - N para N nulo), este irá en aumento con los ciclos de tensión. En la propagación de grieta, se usa la tasa o velocidad de crecimiento de grieta (da/dN), que es la pendiente de la curva a - N , la cual se obtiene de ensayos experimentales con grietas iniciales conocidas:

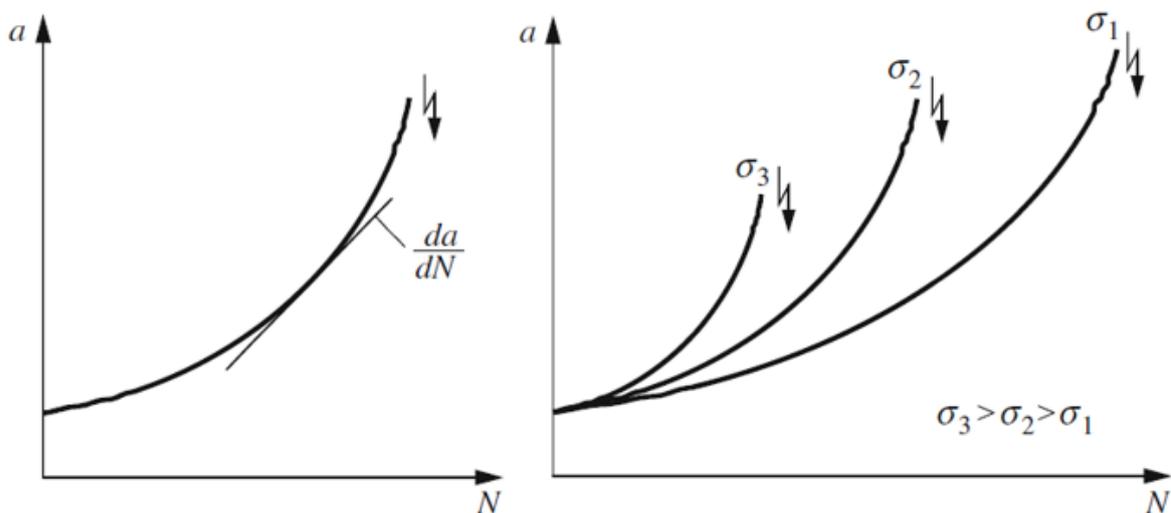


Figura 22. Curva a - N , [2].

Como se observa en la figura de la derecha, a mayor nivel tensional, la fractura final (fin de la curva a-N) se da en menos ciclos y con un tamaño de grieta menor. Eso implica, como es lógico, que unas tensiones mayores suponen un crecimiento más rápido del defecto, es decir, un da/dN mayor.

En base a los ensayos, puede construirse una curva $da/dN - \Delta K_I$, que depende, entre otros factores, del material, de la temperatura o de la corrosión. Un parámetro importante de la curva es $\Delta K_{I,th}$, que representa el valor umbral de ΔK a partir del cual se propagará la grieta. Por debajo de ese valor, la grieta no se propaga.

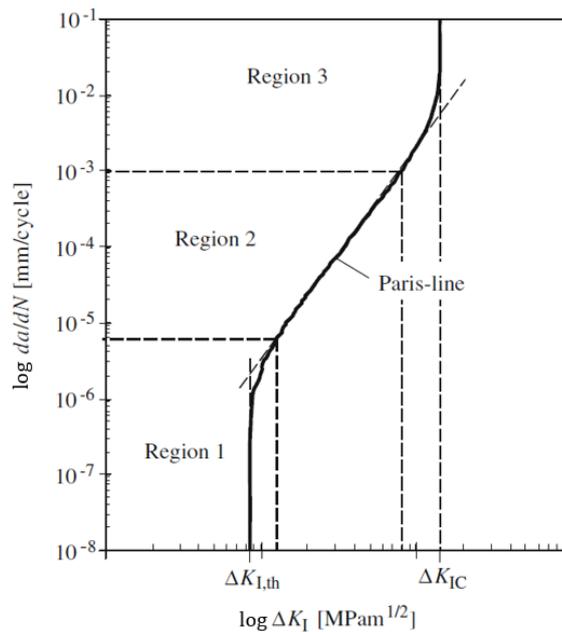


Figura 23. Tasa de crecimiento de grieta frente al rango del factor de intensidad de tensión, [2].

Se observa que la propagación termina cuando ΔK iguala a ΔK_C (fallo por fractura, en el último ciclo). Hay que considerar que, como la grieta crece ciclo a ciclo, su tamaño cambia (“a” crece); luego, según (18), ΔK aumentará ciclo a ciclo.

Asimismo, la región 3 de la curva $da/dN - \Delta K_I$ se denomina “zona de propagación rápida” y está controlada por los modos de rotura estáticos, a medida que el rango del factor de intensidad de tensión se acerca al límite de la tenacidad de la fractura. Como el defecto crece muy rápido (da/dN muy alto), en esa zona se suceden muy pocos ciclos de la vida de la pieza, por lo cual no es de interés práctico estudiar esa región.

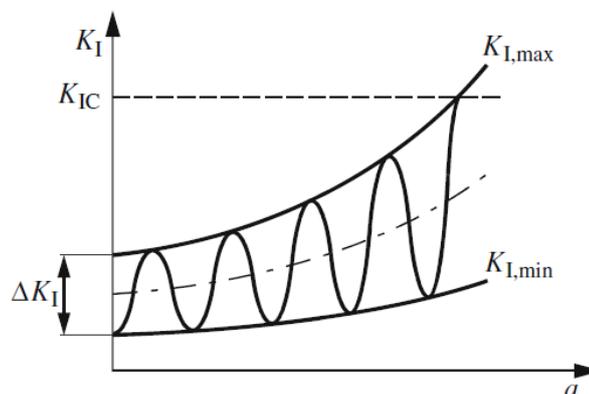


Figura 24. Variación de ΔK conforme se propaga la grieta, [2].

5.2.3. Ecuación de Paris

La curva $da/dN - \Delta K_I$ se puede ajustar en base a distintas formulaciones. Una de las más famosas es la llamada “ecuación de Paris”, que ajusta la zona lineal de la curva (región 2, en la Figura 23 denotada como “Paris- line”). La formulación de Paris es aplicable en situaciones de tipo tensión pulsante pura ($R = \sigma_{MIN} / \sigma_{MAX} = K_{MIN} / K_{MAX} = 0$), y su expresión es la siguiente:

$$\frac{da}{dN} = C_P \cdot \Delta K^{m_P} \quad (19)$$

Que, en formato logarítmico, adquiere la expresión de la ecuación de una recta:

$$\log\left(\frac{da}{dN}\right) = \log(C_P) + m_P \cdot \log(\Delta K) \quad (20)$$

Siendo la constante de la recta C_P y la pendiente m_P dos coeficientes dependientes del material y de factores ambientales como la corrosión y la temperatura. Por ejemplo, m_P suele ser alrededor de 2-4 en metales.

Es importante destacar que la ecuación de Paris solo ajusta la región 2, que es el tramo lineal de la curva $da/dN - \Delta K_I$. Asimismo, existen valores de los dos parámetros de su expresión que están tabulados para casos de R que difieren de cero.

Por último, aparte de la ecuación de Paris, existen otras formulaciones para ajustar la curva que relaciona ΔK con la tasa de crecimiento de grieta. Entre las más conocidas se encuentran la teoría de Walker, la de Erdogan-Ratwani y la de Nasgro o Forman-Mettu. Su objetivo es idéntico: encontrar una ecuación que ajuste la susodicha curva. Sin embargo, hay formulaciones que son más complejas, como la de Nasgro, porque tienen más coeficientes para poder ajustar no solo la región 2 lineal, sino también la 1 y la 3.

5.2.4. Propagación de grieta bajo modos II, III y mixtos

Tal como se ha explicado en apartados anteriores, si se tiene una pieza sin defectos, la propagación será siempre según modo I (normal a la máxima tensión principal); pero si hay una grieta previa, puede propagarse según otro modo o según varios modos combinados, en base a la orientación de la grieta respecto de la carga.

En un caso general, donde los tres modos de fractura intervengan, se tendrían valores no nulos de ΔK_I , ΔK_{II} y ΔK_{III} . De forma similar a como se ha expuesto en apartados anteriores acerca de MLF en estática, donde se hallaba K_V , en fatiga se calculará un valor de “ ΔK_I equivalente” al que se referirá como ΔK_V .

Para hallar dicho parámetro, pueden usarse, por ejemplo, según [2] y [4]:

$$\Delta K_V = \frac{\Delta K_I}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\Delta K_I^2 + 5,336 \cdot \Delta K_{II}^2 + 4 \cdot \Delta K_{III}^2} \quad (21)$$

$$\Delta K_V = \sqrt{\Delta K_I^2 + \Delta K_{II}^2 + (1 + \mu) \cdot \Delta K_{III}^2} \quad (22)$$

Como se ha visto en la curva $da/dN - \Delta K_I$, la grieta se propagará si ΔK_V es superior a ΔK_{TH} . Sin embargo, hay varios factores que deben considerarse acerca del proceso de propagación: si es un caso de modo I, el defecto crecerá ciclo a ciclo, pero siempre en dirección perpendicular a la máxima tensión principal.

No obstante, en el hipotético caso de modos II, III o mixtos, la grieta sufre una desviación, lo que implica que ciclo a ciclo su modo (o combinación de modos) puede variar. De hecho, conforme avanza el defecto, tiende hacia el modo I. Esto significa que, al calcular ΔK_V ciclo a ciclo, los valores de ΔK_I , ΔK_{II} y ΔK_{III} irán variando con cada ciclo, pero ΔK_I tenderá a predominar.

Por ejemplo, en un caso de modo mixto plano, al principio la propagación se dará con un ángulo φ_0 , entre 0° y 70° , pero a medida que pasen los ciclos tenderá a los 0° , por ser la dirección normal a la máxima tensión principal, esto es, la del modo I.

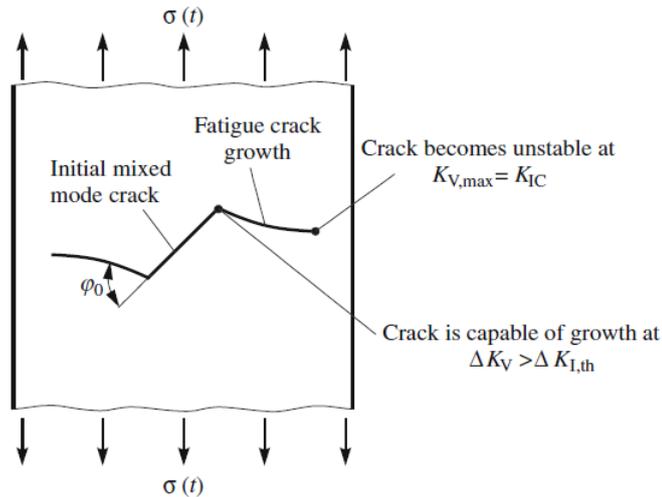


Figura 25. Propagación de grieta en un caso de modo mixto plano, [2].

Para concluir, si se ilustra la ecuación (21) de [2], se observa que se tiene una superficie muy similar a la de K_V en estática. Ahora, en fatiga, se ve la curva umbral, delimitada por $\Delta K_{I,TH}$, $\Delta K_{II,TH}$ y $\Delta K_{III,TH}$, por debajo de la cual el defecto no se propaga. La superficie de fuera, por su parte, representa el fallo cuando se iguala la tenacidad a la fractura.

Un caso general que se sitúe entre las dos superficies extremas tenderá a aproximarse a la superficie límite externa conforme se propague la grieta con cada ciclo, y tenderá hacia el eje del modo I (por predominar este a medida que el defecto crece), hasta el fallo final.

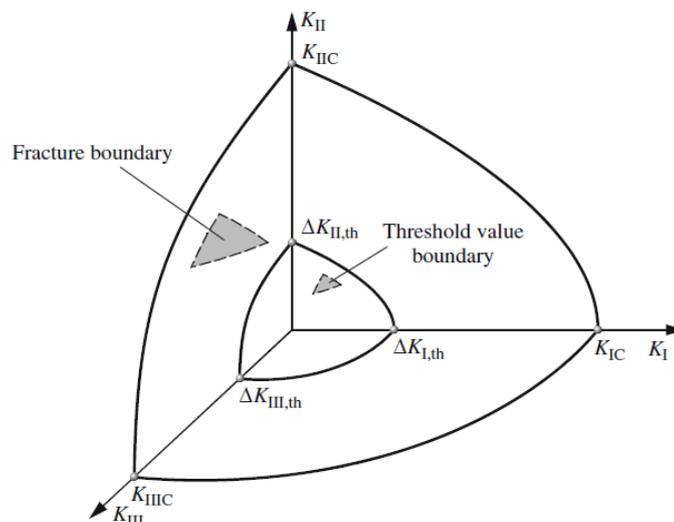


Figura 26. Límite de propagación de grieta por fatiga en un caso general de modos mixtos, [2].

6. ANÁLISIS DE ALTERNATIVAS

El cálculo del factor de intensidad de tensión también se puede abordar haciendo uso del método de la integral J, que recibe su nombre de Jim Rice, su descubridor. Este método no se emplea en este TFM, por lo que se va a exponer de un modo descriptivo, sin entrar en detalle.

En primer lugar, se introduce el criterio de Griffith, que es un planteamiento análogo al método de la tensión crítica. Es un enfoque energético y se basa en que, durante la fractura, la energía del sistema se mantiene constante o disminuye, por las cargas que intervienen. Griffith propuso un balance de energía entre la energía potencial y el trabajo requeridos para formar la grieta, donde el incremento en el área de la grieta condiciona:

$$\frac{dE}{dA} = \frac{dE_p}{dA} + \frac{dW_s}{dA} = 0 \quad (23)$$

Siendo:

- E: energía total
- E_p : energía potencial por esfuerzos internos y carga externa.
- W: trabajo requerido para formar la grieta.
- dA : aumento del área de la grieta.

Por ejemplo, en una chapa, se tendría:

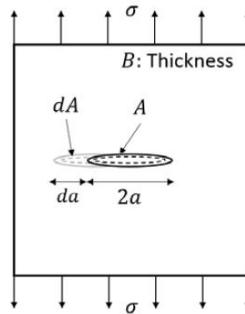


Figura 27. Grieta sometida a un aumento de área, [13].

Tiempo después, Irwin mejoró el balance energético propuesto por Griffith, introduciendo el concepto de tasa de liberación de energía (G), que indica el cambio de energía potencial por la superficie de la grieta. Se obtiene:

$$G = -\frac{dE_p}{dA} \quad (24)$$

Donde la energía potencial se halla:

$$E_p = U - F \quad (25)$$

Siendo U la energía por deformación y F el trabajo por fuerzas externas.

A partir de la teoría de Griffith, Irwin consiguió una relación entre la tasa de liberación de energía y la variación tensional, dado por el factor de intensidad de tensión K, que lleva ese nombre en honor a Kies, ayudante de Irwin.

La relación es, por ejemplo, para modo I:

$$G = \frac{K_I^2}{E'} \quad (26)$$

Donde $E' = E$ en tensión plana y $E' = E / (1 - \nu^2)$ en deformación plana, donde E es el módulo de Young y ν el coeficiente de Poisson.

Por último, definiendo la integral J de Jim Rice, se trata de una integral que describe la tasa de liberación de energía en MLF, y viene dada:

$$J = G \quad (27)$$

Tal como se mencionó en apartados anteriores, la integral J permite analizar casos de MEFP, donde el material no se encuentra en régimen elástico.

Conceptualmente, la integral J puede entenderse como un path o camino alrededor del frente de grieta, y se calcula:

$$J = \int_{\Gamma} \left(w \, dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \, ds \right) \quad (28)$$

$$w = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} \, d\varepsilon_{ij} \quad (29)$$

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \quad (30)$$

Donde:

- w : densidad de energía de deformación.
- T_i : vector de tracción.
- n_j : vector unitario normal al path.
- u_i : vector de desplazamiento.
- ds : incremento de longitud a lo largo del path.
- Γ : path alrededor del frente de grieta.
- σ_{ij} , ε_{ij} : tensores de tensiones y deformaciones, respectivamente.

Geoméricamente, representa:

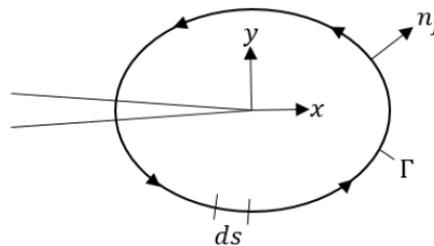


Figura 28. Contorno alrededor del frente de grieta, [13].

En conclusión, con este planteamiento y haciendo uso de la relación (26), puede hallarse el SIF de un modo distinto. No obstante, en este TFM se aplica un proceso diferente, por ser más sencillo tanto conceptual como prácticamente, así como por tener un uso mucho más extendido.

7. DESCRIPCIÓN DE LA SOLUCIÓN PROPUESTA

El presente trabajo ha consistido en el cálculo del factor o los factores de intensidad de tensión de distintas chapas de acero que se caracterizaban por tener una grieta, la cual, en la práctica, puede haber sido generada a causa de cargas o deformaciones variables con el tiempo (fatiga) así como por defectos de fabricación.

Se ha abordado el cálculo de distintos casos de Mecánica Lineal de la Fractura. Especificando, han sido estudiados cuatro casos de modo I puro, otros cuatro de modo II puro, y finalmente tres de modos mixtos I y II.

El proceso de cálculo que se ha seguido se describe en la siguiente figura:

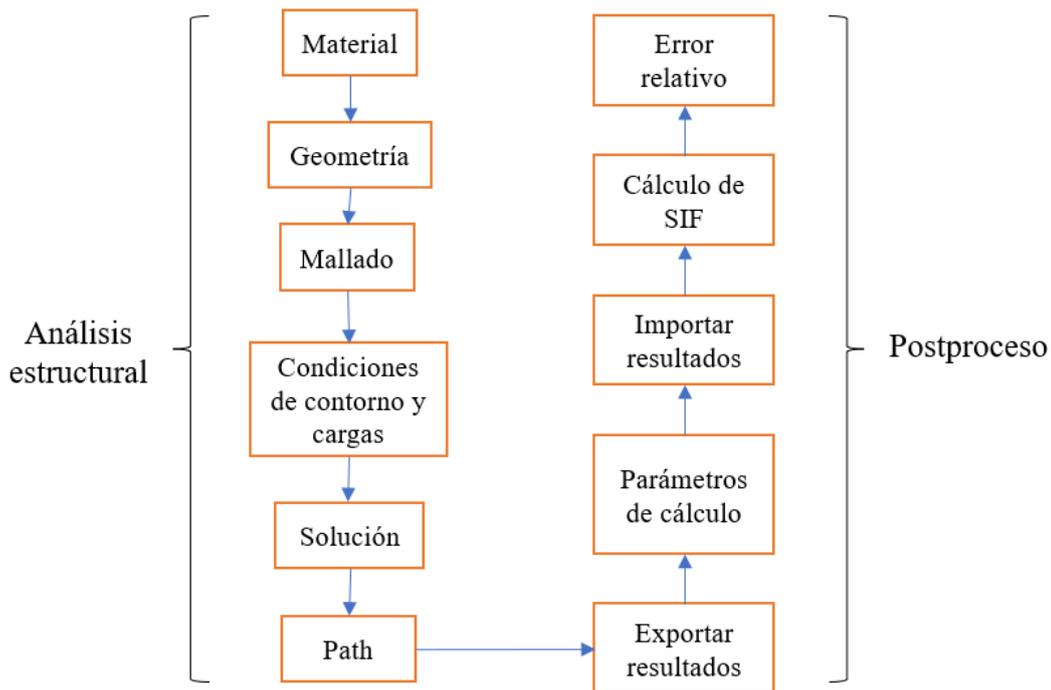


Figura 29. Procedimiento de cálculo del factor de intensidad de tensión.

La primera parte implica el análisis estructural de la pieza, que se basa en obtener las tensiones y/o deformaciones de la zona de interés (definida por una trayectoria o path en las cercanías de la grieta, a cierta orientación respecto de la grieta, según el modo de fractura), mientras que la segunda consiste en extraer los resultados del modelo de EF para, finalmente, calcular el factor o los factores de intensidad de tensión.

A continuación, se describe cada etapa de manera resumida, para que el lector tenga una idea general de cómo se ha estructurado el procedimiento de cálculo del factor de intensidad de tensión. Los valores de las cargas, las propiedades del material, las dimensiones de las piezas y de las grietas se especifican en el apartado de Cálculo del SIF.

Material

Se definen las propiedades del material de la pieza, que ha sido en todo el trabajo acero estructural. Hay que tener en cuenta que se ha tratado el material en régimen elástico-lineal, y que únicamente se han estudiado casos de Mecánica Lineal de la Fractura. Por lo tanto, basta con especificar el módulo de Young y el coeficiente de Poisson.

Memoria

Geometría

Se definen las dimensiones de la chapa estudiada, así como la grieta en el centro de la misma. En los casos de modo I puro, al tener cargas y geometría simétricas, es posible y razonable reducir el coste computacional del análisis de EF estudiando solo una cuarta parte de la pieza, tal y como se expone en el apartado de Cálculo del SIF.

Sin embargo, para el resto de los casos, no se puede aprovechar ninguna simetría, luego el coste computacional aumentará debido a que la geometría en su totalidad deberá ser modelada.

Mallado

Al tratarse siempre de análisis 2-D de piezas en estado de tensión plana, se emplean en la malla elementos bidimensionales (también conocidos como elementos membrana) de tipo cuadrilátero.

Lo más importante de los resultados es poder apreciar bien las variaciones de tensión en la zona de interés, esto es, en la cercanía de la grieta. Por esta razón, no se emplean elementos bidimensionales de tipo triángulo, ya que son elementos de tensión constante. Lógicamente, esta pauta supondrá un coste mayor porque habrá más grados de libertad en el modelo, pero será asumible si se desean resultados con precisión.

En cuanto al tamaño de los elementos, se va a realizar una malla más o menos grosera en zonas alejadas de la grieta (porque ahí la tensión será igual a la nominal), pero deberá refinarse toda la región cercana al frente de grieta, al ser donde aplica la Mecánica de la Fractura y donde se obtendrán los resultados del modelo.

Condiciones de contorno y cargas

Se especifican en el modelo de EF qué tipo de condiciones de contorno son necesarias para que el modelo sea lo más fiel posible a la realidad. Además, se aplican las cargas sobre las piezas estudiadas.

Solución

Se resuelve el modelo. Teniendo en consideración que los análisis estructurales son estáticos y los modelos de un número relativamente bajo de elementos y, por tanto, de grados de libertad, la resolución no supone un gran coste computacional. Podría decirse que, aproximadamente, la solución del modelo de EF tarda entre uno y tres minutos, lo cual agiliza el desarrollo del trabajo.

Path

Los resultados de tensión y deformación del modelo que interesan son aquellos correspondientes a una trayectoria o path, definido desde el frente de grieta y según la orientación que corresponda al modo de fractura estudiado.

El path será de alrededor de cuatro milímetros desde la grieta, por ser el rango aproximado donde aplica la Mecánica de la Fractura. Más allá de esa zona, la tensión será igual a la nominal.

Por ejemplo, para modo II puro, tal y como se menciona en el Análisis del Estado del Arte, la grieta se propaga a 70° de inclinación respecto al frente de grieta, luego el path tomado para los resultados será a 70°.

Exportar resultados

Para poder calcular el factor de intensidad de tensión, se extraen los resultados del modelo de EF (los correspondientes al path tomado) de tensiones y/o deformaciones a un documento de Microsoft Excel.

Parámetros de cálculo

Se obtienen los valores de los parámetros necesarios para hallar el factor de intensidad de tensión. Por ejemplo, el factor geométrico es crucial para poder emplear la fórmula teórica, tal y como se expone en el Análisis del Estado del Arte.

Importar resultados

Los resultados del modelo de EF que se han exportado a un documento de Microsoft Excel, así como los parámetros de cálculo a los que se ha hecho referencia en el párrafo anterior, se cargan en un programa de Matlab.

Cálculo de SIF

Finalmente, se calcula el factor de intensidad de tensión o SIF (Stress Intensity Factor), mediante el programa de Matlab. Este parámetro se halla en base a:

- Fórmula teórica: basada en el factor geométrico, obtenido de tablas según la geometría, el tipo y tamaño de la grieta. También se obtendrá el SIF en base a fórmulas teóricas de diversos autores, como Irwin o Fedderson. Los resultados en base a las fórmulas teóricas son los que se compararán con los hallados de EF, para cerciorar que son correctos.

- Tensiones de EF: expresiones para un determinado componente tensional (tensión normal en X, por ejemplo), a partir de las cuales se halla el SIF para cierta distancia desde el frente de grieta.

- Deformaciones de EF: ídem, pero para las componentes de deformación.

El valor del SIF obtenido según la fórmula teórica será un valor único. No obstante, el SIF obtenido en base a tensiones y deformaciones, tendrá un valor distinto en función de la distancia “x” desde el frente de grieta. El valor definitivo será el extrapolado para $x = 0$, como se muestra en la siguiente figura:

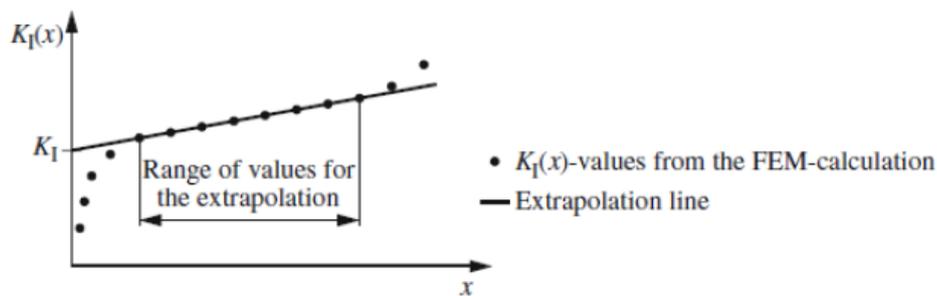


Figura 30. Obtención del resultado final del factor de intensidad de tensión, [2].

Error relativo

Por último, se calculará el porcentaje de error relativo entre el SIF obtenido en base a cierto componente de tensión o deformación, y el obtenido de fórmulas teóricas. Con esto, lo que se pretende es ver qué rango de ajuste tienen las expresiones utilizadas basadas en los resultados de EF, por si hubiera que emplearlas para casos más complejos donde la fórmula teórica no sea aplicable por falta de datos u otro motivo.

II. METODOLOGÍA SEGUIDA EN EL DESARROLLO DEL TRABAJO

1. CÁLCULO DEL SIF

1.1. Material empleado

En todos los análisis de EF de este TFM, tanto de modo I como de II y mixtos, se ha utilizado como material acero estructural de módulo de Young 210 GPa y coeficiente de Poisson 0,3. Al ser un material isótropo, con esas dos constantes independientes se caracteriza el material. No se necesita ningún otro parámetro propio del material a fin de calcular el factor de intensidad de tensión.

1.2. Modo I

1.2.1. Casos estudiados

Se han estudiados cuatro casos de modo I puro, es decir, donde la fractura se propaga por tensiones normales. Se trata de un caso general de una chapa de pequeño espesor (3 mm) con una grieta centrada, sometida a carga axial.

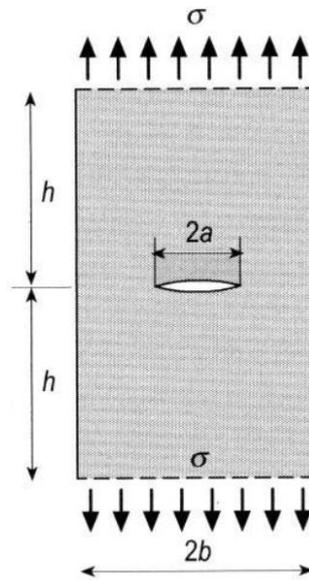


Figura 31. Caso general de modo I estudiado, [6].

En los cuatro casos se ha analizado una chapa de altura (h) de 300 mm y de ancho (b) de valor 100 mm. Lo único que varía en cada caso es el tamaño de grieta (a), cuyos valores se recogen en la siguiente tabla:

Tabla 1. Casos estudiados de modo I.

Caso nº	Anchura, b (mm)	Altura, h (mm)	Espesor (mm)	Tamaño grieta, a (mm)	a/b
1	100	300	3	70	0,7
2				50	0,5
3				30	0,3
4				10	0,1

Como se expondrá más adelante, lo que se busca variando el tamaño de grieta es analizar casos de “chapa infinita”, donde la grieta es de dimensión mucho menor al tamaño de la chapa; y de “chapa finita”, que trata de tamaños de grieta que representan un porcentaje importante respecto al tamaño de la pieza.

1.2.2. Condiciones de contorno y cargas aplicadas

Para empezar, se buscan posibles simetrías que permitan simplificar el análisis y reducir su coste computacional. Como se observa en la Figura 31, la geometría y el estado de cargas presentan simetría respecto al eje vertical. En consecuencia, se analizará un cuarto de la pieza, lo cual reducirá cuatro veces el número de grados de libertad, y por ende el coste.

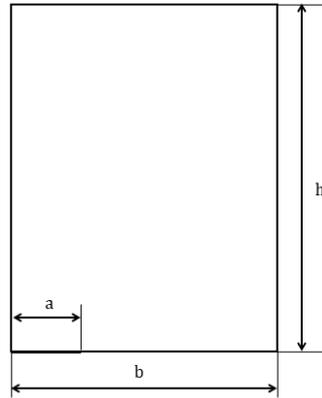


Figura 32. Análisis simétrico (modo I).

La carga es axial pura. En lugar de aplicar una fuerza (habría que aplicar la mitad de su valor en cada lado, por ser el análisis simétrico), se aplica directamente una tensión normal de 100 MPa, que será el valor empleado en los cálculos para calcular el factor de intensidad de tensión. Esa tensión es la denominada “tensión nominal”, esto es, la que se tendría en ausencia de grieta.

Las condiciones de contorno son:

- En uno de los lados verticales de la chapa, se impide el desplazamiento horizontal, mientras que en vertical se deja libre, para que pueda deformarse.
- En la parte inferior, se impide el desplazamiento vertical, dejando libre el desplazamiento horizontal, en orden a permitir la deformación.
- En la zona de la grieta, no se limita ningún desplazamiento, para que se comporte como una zona “sin material” y libre, que es como se comportará el defecto.

Fijando el sistema de referencia en el frente de grieta:

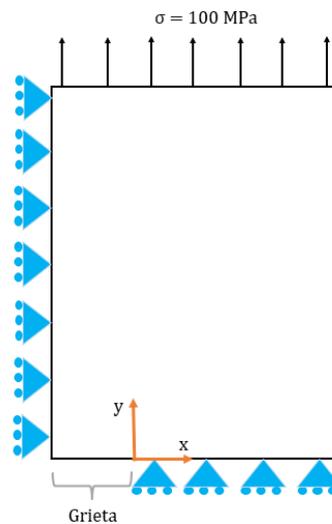


Figura 33. Cargas y condiciones de contorno (modo I).

Por lo tanto, se tiene, en los cuatro casos, un estado de tensión plana, porque la geometría de la pieza tiene un plano de simetría (XY), el espesor de la pieza es mucho menor que la anchura y la altura (dimensiones características en el plano XY), y porque las cargas y condiciones de contorno se aplican también en dicho plano.

1.2.3. Mallado

El mallado es uno de los procesos clave en este análisis, ya que la precisión de los resultados depende en gran medida de la calidad de la malla del modelo de EF. Para entender bien cómo debe ser el mallado, hay que considerar qué se busca en el análisis.

El objetivo principal es crear un modelo de EF donde la grieta se modelice correctamente. A partir de ahí, lo que se busca es ver la variación del estado tensional desde el frente de grieta (donde se fija el sistema de referencia, orientado según el defecto) hasta que la tensión pasa a su valor nominal, es decir, el que se tendría si no hubiera grieta.

Por lo tanto, se van a emplear elementos bidimensionales, también denominados elementos membrana, que pueden ser de tipo triángulo o cuadrilátero. Lo más importante de los resultados es poder apreciar bien las variaciones de tensión en la zona de interés, esto es, en la cercanía de la grieta. Por esta razón, no se emplean elementos bidimensionales de tipo triángulo, ya que son elementos de tensión constante. Lógicamente, esta pauta supondrá un coste mayor porque habrá más grados de libertad en el modelo, pero será asumible si se desean resultados con precisión.

Por otro lado, la malla puede considerarse “repartida” en dos zonas: la cercana al frente de grieta y la más alejada del defecto. Cerca de la grieta, deberá refinarse mucho la malla para captar en profundidad la variación de la tensión. En dicha zona, se usarán además elementos cuadriláteros de orden superior, para tener aún más precisión. En la zona más alejada, como la tensión tenderá a la nominal, se usan elementos cuadriláteros de primer orden.

La malla generada en los cuatro casos de modo I es análoga, solo varía el tamaño de grieta. Por ejemplo, para el caso de grieta de 10 mm, la malla es la siguiente:

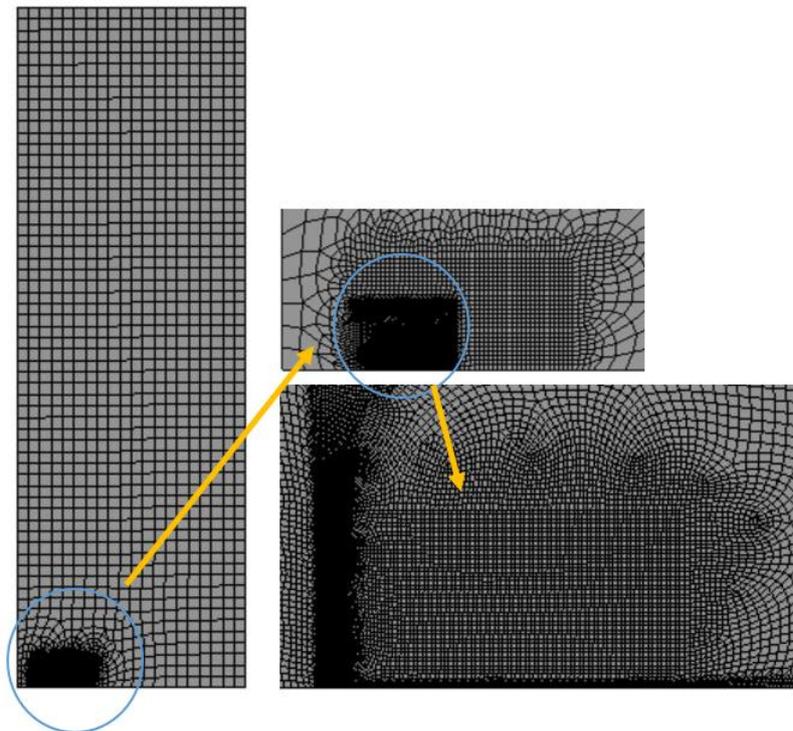


Figura 34. Mallado en modo I.

Por tener un orden de magnitud, los elementos más alejados de la zona cercana a la grieta son de 7,5 mm, y la malla tiene en torno a 70000 nodos. Podría haberse ajustado la malla de otra manera, por ejemplo, con otro tamaño de elementos. Otra opción sería mallar con elementos cuadriláteros de primer orden la zona de la grieta, para disminuir el coste. Sin embargo, como el análisis es estático y el tamaño de la pieza no es muy grande, el coste del análisis es perfectamente asumible y así se tendrá más precisión. De hecho, en poco más de un minuto, se ejecuta cualquiera de los cuatro modelos realizados para modo I.

Otra consideración que quizá no se aprecia en la figura superior es que, al realizar la transición de la zona más alejada de la grieta a la más cercana, se va modificando el tamaño de los elementos de manera progresiva. Esto es lógico, porque se requerirá un tamaño menor en aquellos puntos más próximos al frente de grieta.

1.2.4. Resultados de EF

Se extraen del modelo, según el sistema de referencia situado en el frente de grieta, únicamente las tensiones y deformaciones necesarias para calcular el SIF. Al tratarse de estado de tensión plana, se tiene que $\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. En cuanto a las deformaciones unitarias: $\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0$.

1.2.4.1. $a/b = 0,1$

Tensiones normales y tangenciales:

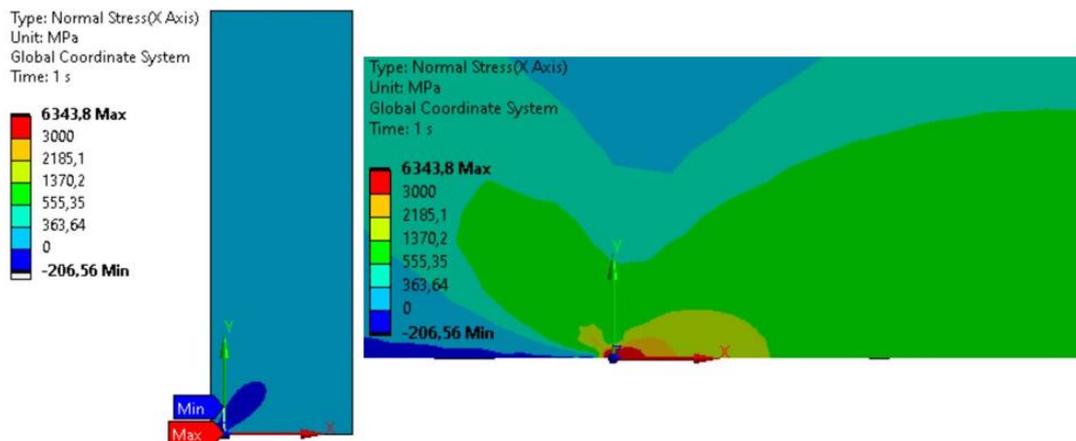


Figura 35. Tensiones normales en X (modo I, $a/b = 0,1$).

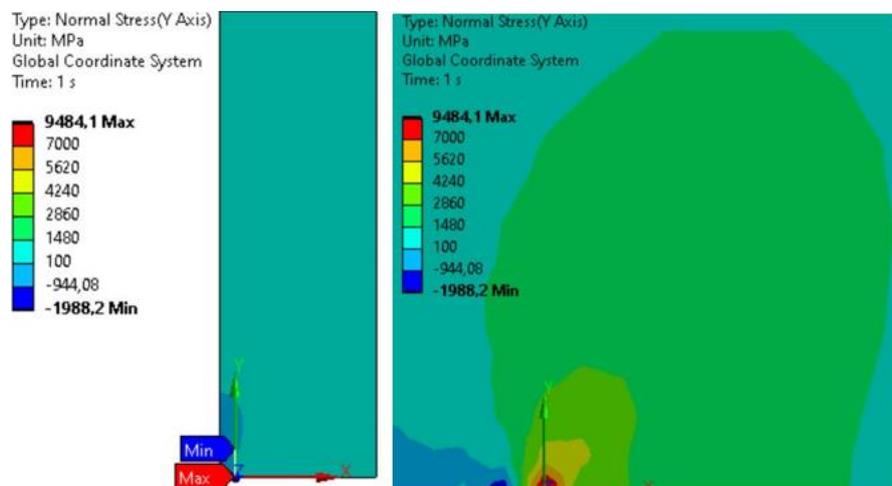


Figura 36. Tensiones normales en Y (modo I, $a/b = 0,1$).

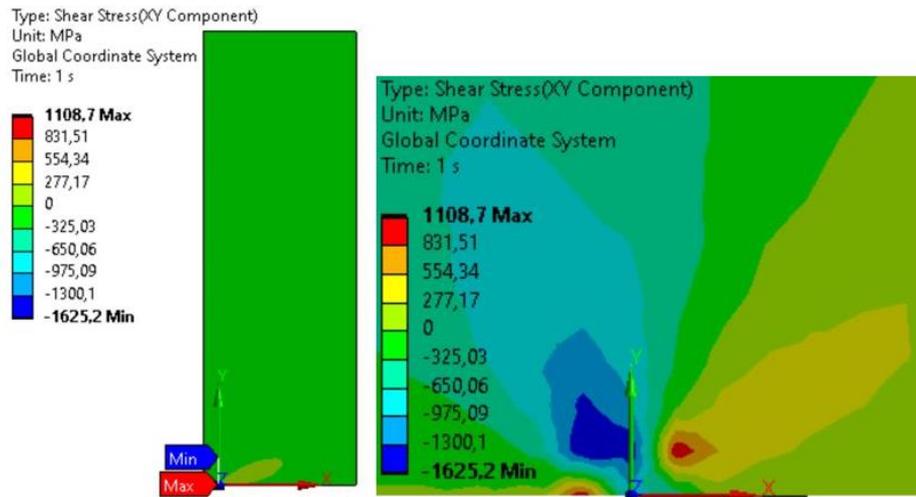


Figura 37. Tensiones tangenciales en XY (modo I, $a/b = 0,1$).

Deformaciones:

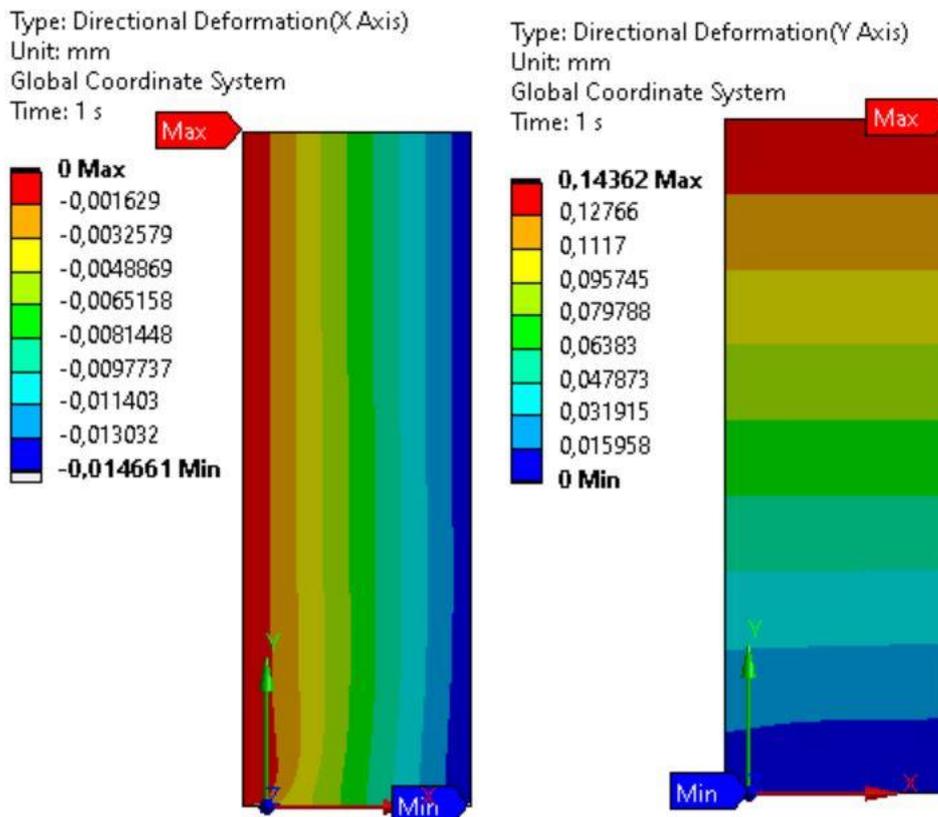


Figura 38. Deformaciones (modo I, $a/b = 0,1$).

No se extraen las deformaciones en z porque no son necesarias para obtener el SIF. Además, el path se realiza a 0° respecto del sistema de coordenadas orientado según la grieta, porque según modo I el defecto se propaga perpendicular a la máxima tensión principal.

1.2.4.2. $a/b = 0,3$

Tensiones normales y tangenciales:

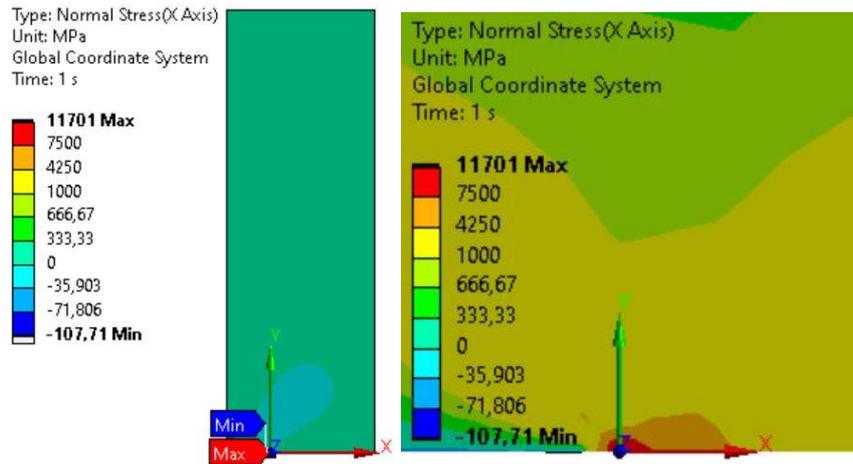


Figura 39. Tensiones normales en X (modo I, $a/b = 0,3$).

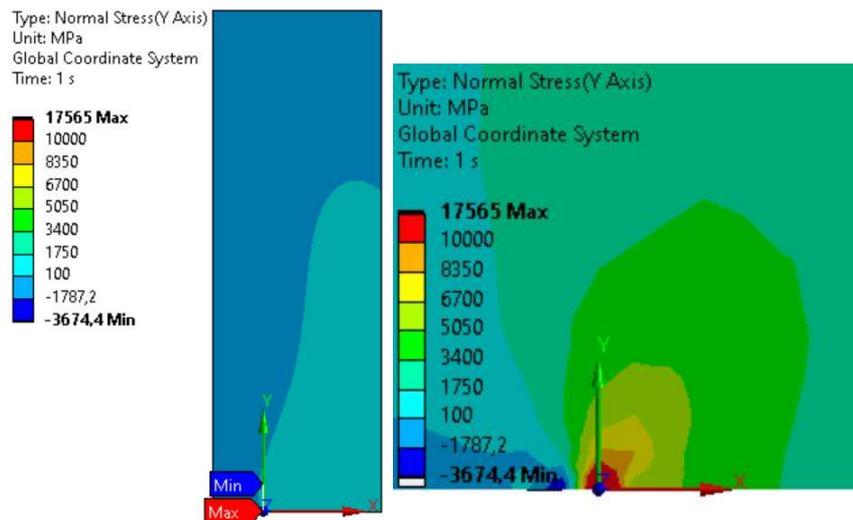


Figura 40. Tensiones normales en Y (modo I, $a/b = 0,3$).

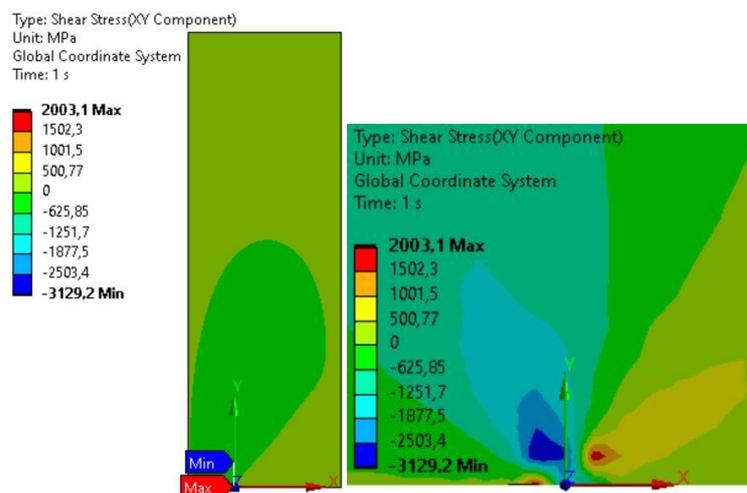


Figura 41. Tensiones tangenciales en XY (modo I, $a/b = 0,3$).

Deformaciones:

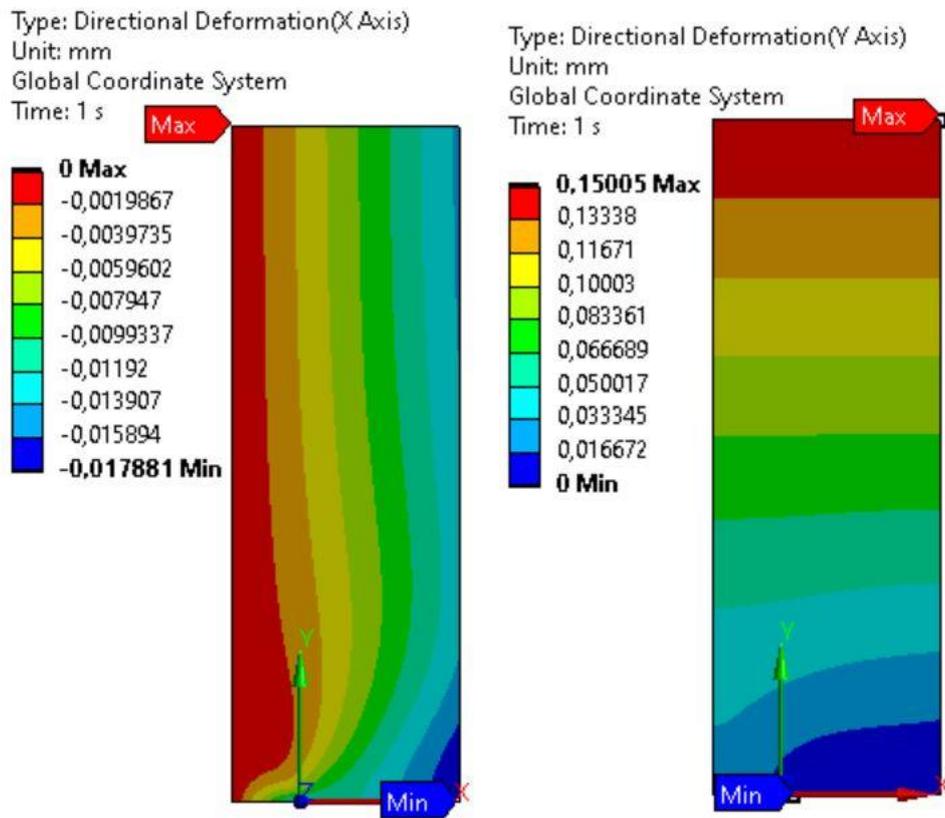


Figura 42. Deformaciones (modo I, $a/b = 0,3$).

1.2.4.3. $a/b = 0,5$

Tensiones normales y tangenciales:

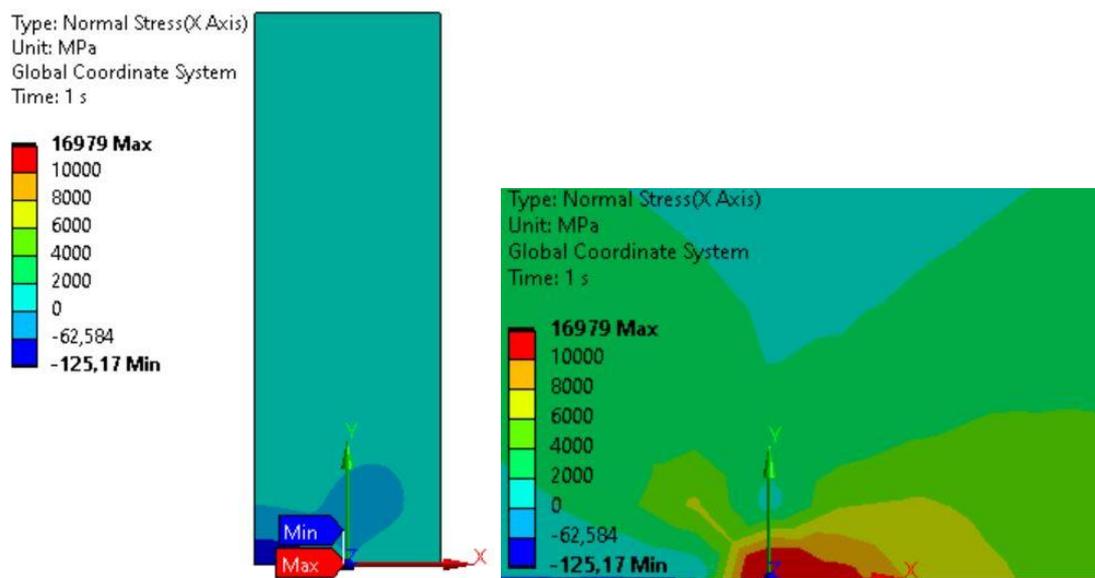


Figura 43. Tensiones normales en X (modo I, $a/b = 0,5$).

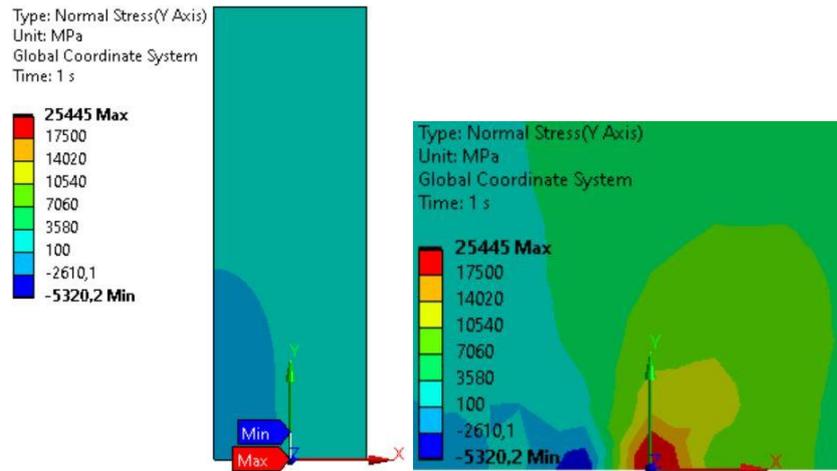


Figura 44. Tensiones normales en Y (modo I, $a/b = 0,5$).

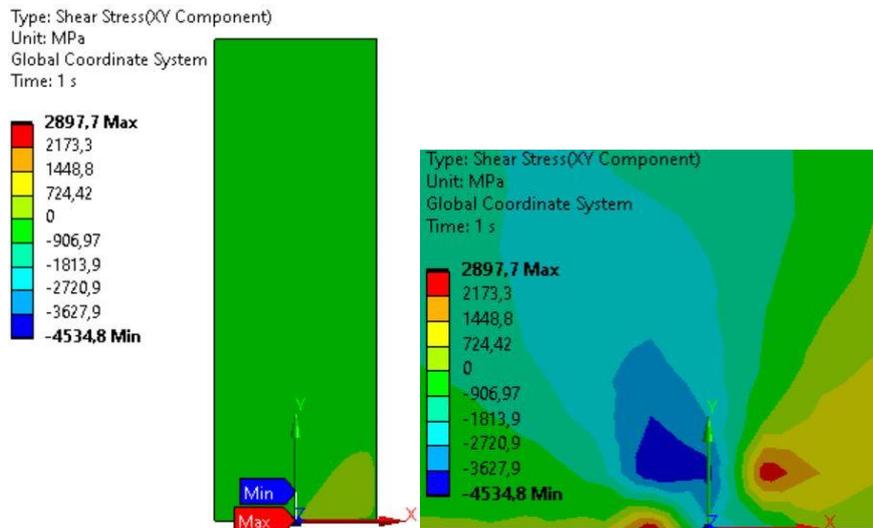


Figura 45. Tensiones tangenciales en XY (modo I, $a/b = 0,5$).

Deformaciones:

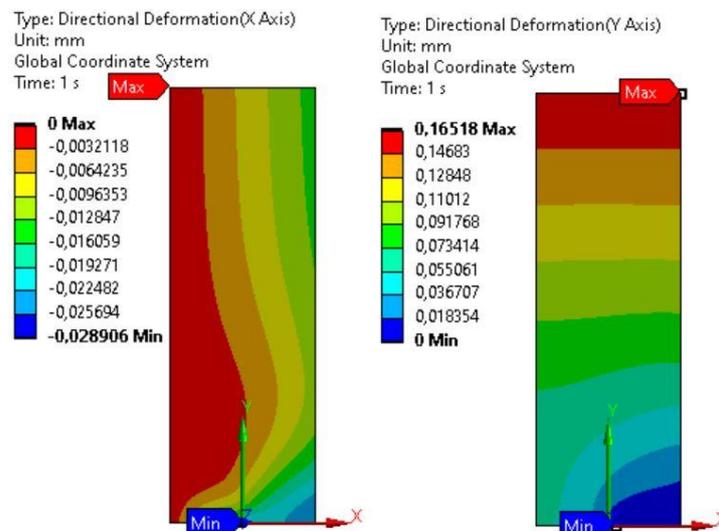


Figura 46. Deformaciones (modo I, $a/b = 0,5$).

1.2.4.4. $a/b = 0,7$

Tensiones normales y tangenciales:

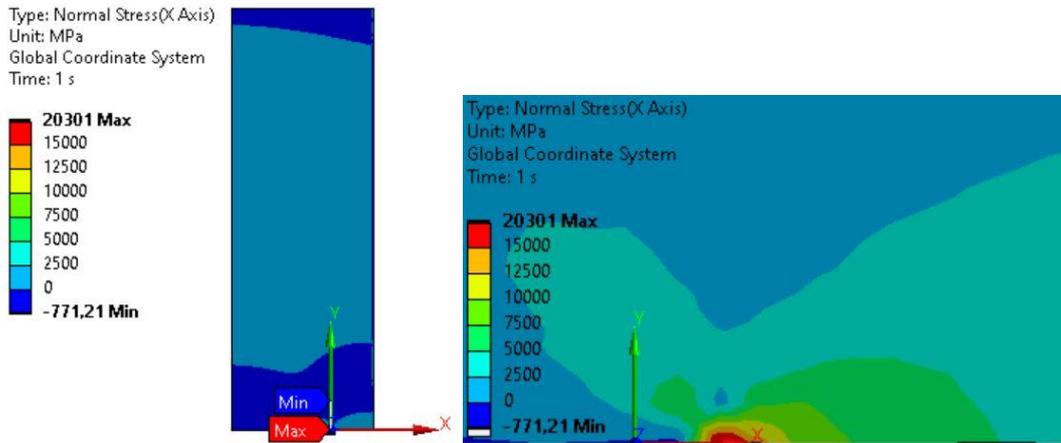


Figura 47. Tensiones normales en X (modo I, $a/b = 0,7$).

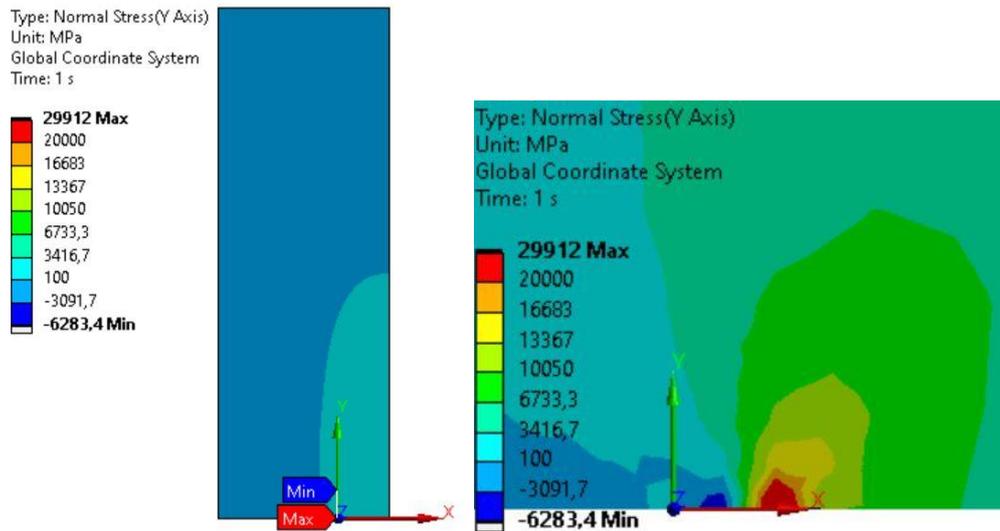


Figura 48. Tensiones normales en Y (modo I, $a/b = 0,7$).

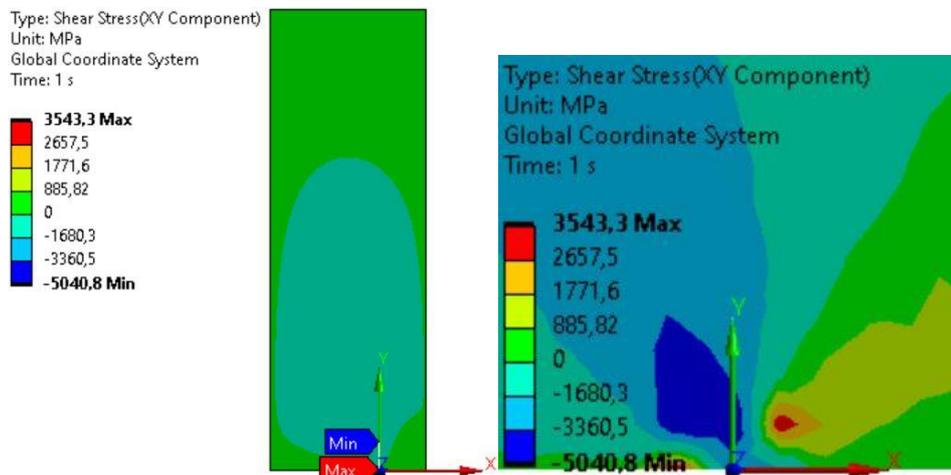


Figura 49. Tensiones tangenciales en XY (modo I, $a/b = 0,7$).

Deformaciones:

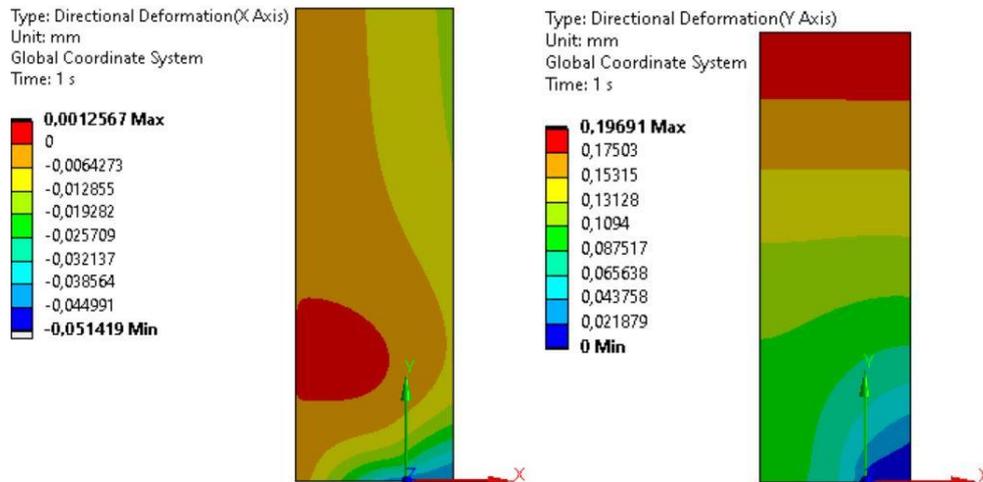


Figura 50. Deformaciones (modo I, $a/b = 0,7$).

1.2.4.5. Verificación del modelo

En primer lugar, comparando los cuatro casos, se observa cómo en la zona del frente de grieta, por efecto de la concentración de tensiones, el estado tensional adquiere valores muy elevados. Tal como se muestra en la Figura 8, la tensión pico en el frente de grieta alcanza valores infinitos. En el modelo de EF, como se tiene una discretización de la realidad, esa tensión no llega a infinito, sino que alcanza valores muy elevados. Si la malla no estuviera suficientemente refinada en la cercanía del defecto, el valor máximo de la tensión sería menor. En el caso opuesto, esto es, refinando mucho la malla en esa región, la tensión adquiere valores aún más elevados.

Comparando tanto las tensiones normales como las tangenciales, se puede apreciar que a medida que aumenta el tamaño de grieta, la tensión máxima alcanza valores más altos. Por ejemplo, cuando la grieta es más pequeña ($a/b = 0,1$), el pico de σ_{xx} se da en 6343,8 MPa; mientras que en el caso de la mayor grieta ($a/b = 0,7$), se llega a 20301 MPa. Este hecho puede entenderse conceptualmente en base al fenómeno de concentración de tensiones:

La concentración de tensiones en el frente de grieta se produce por el cambio brusco de inclinación de las líneas de transmisión de esfuerzos y por la acumulación de estas. En el caso de grieta más pequeña ($a/b = 0,1$), las líneas de transmisión de esfuerzos no experimentan una alteración tan brusca como se da en una grieta mayor ($a/b = 0,7$). Por consiguiente, la concentración de tensiones es más “severa” en casos de grieta de más tamaño, aumentando la tensión pico.

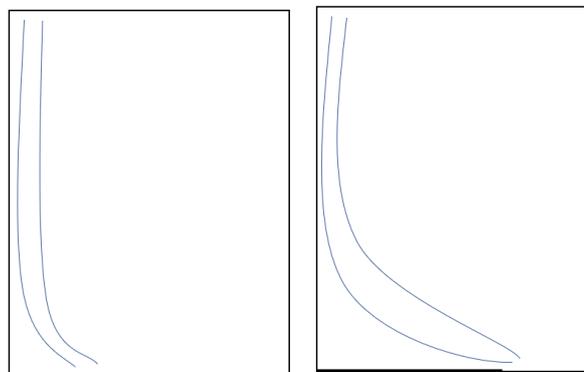


Figura 51. Líneas de transmisión de esfuerzos en el frente de grieta en un caso de grieta pequeña (izda.) y grande (dcha.)

Por otra parte, en los cuatro casos estudiados se puede ver que el patrón de cada una de las tensiones (normales en x, en y, y tangenciales en xy) es similar. Es decir, la forma de la distribución de cada una de las componentes tensionales es parecida.

A lo largo del eje x, donde se realiza el path para hallar el SIF, según [2], en un caso como el estudiado de una chapa “infinita” (grieta de tamaño pequeño en comparación al de la pieza) bajo axial puro, la distribución de tensiones exacta se rige por:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \begin{cases} -\sigma & \text{for } x < a \\ \sigma \cdot \left[\frac{x/a}{\sqrt{(x/a)^2 - 1}} - 1 \right] & \text{for } x > a \end{cases} \\ \sigma_y &= \begin{cases} 0 & \text{for } x < a \\ \sigma \cdot \frac{x/a}{\sqrt{(x/a)^2 - 1}} & \text{for } x > a \end{cases} \\ \tau_{xy} &= 0 & \text{for all values of } x \end{aligned} \quad (31)$$

Si se grafican dichas expresiones para el caso de a/b = 0,1, se tiene:

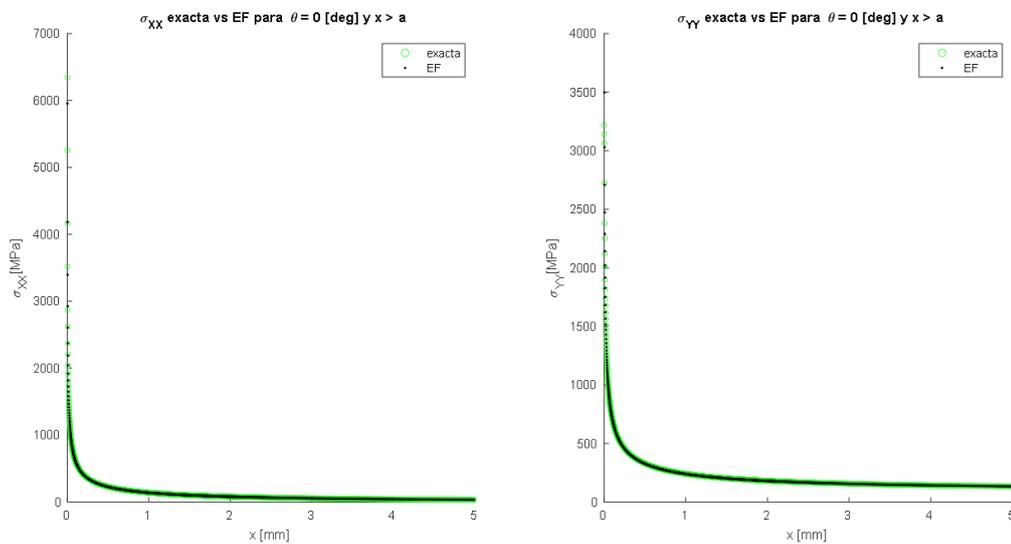


Figura 52. Tensiones normales exactas vs EF (modo I, a/b = 0,1).

Para el caso de a/b = 0,7, si se representa lo mismo:

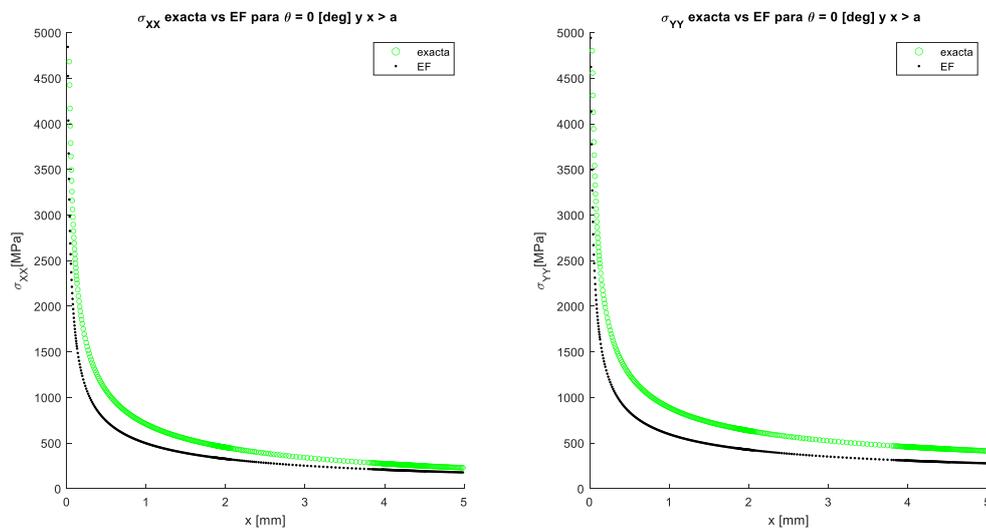


Figura 53. Tensiones normales exactas vs EF (modo I, a/b = 0,7).

De las dos gráficas anteriores se extrae:

- La malla es lo suficientemente fina porque en el caso de chapa infinita ($a/b = 0,1$) las tensiones exactas y las de EF coinciden prácticamente sin ninguna variación apreciable.
- La expresión (31) no es aplicable para chapa finita (tamaño de grieta comparable al de la pieza) porque predice tensiones distintas de las reales. Aunque se podría estimar la tensión en un caso de chapa finita con la expresión citada de modo conservador, ya que da una tensión mayor que la real.

Por último, analíticamente la deformación longitudinal en y sería (área, $A = bh = 100 \cdot 300 \text{ mm}^2$; longitud, $L = h = 300 \text{ mm}$; rigidez, $k = EA / L$):

$$\delta_y = F / k = \sigma A / (EA / L) = \sigma L / E = 100 \cdot 300 / 210000 = \mathbf{0,1429 \text{ mm}}$$

Y en el eje x:

$$\delta_x = \epsilon_{xx} = -\nu \cdot (\delta_{yy} / h) \cdot b = -0,3 \cdot 0,1429 \cdot 100 / 300 = \mathbf{-0,01429 \text{ mm}}$$

Las deformadas no coinciden exactamente con los resultados del modelo porque en la expresión analítica no se considera el efecto de la grieta, pero sí que dan valores muy cercanos. Cuando la grieta es pequeña, la deformada analítica se aproxima más a la obtenida de EF, pero cuando es mayor se aleja más, porque el efecto de la grieta es más representativo.

El modelo se da entonces por válido, ya que los resultados coinciden con lo esperado.

1.2.5. Cálculos

1.2.5.1. K_I según fórmulas teóricas

Se calcula, por un lado, el factor de intensidad de tensión a partir de (2). El factor geométrico se halla en base a las dimensiones de la pieza (b, h) y de la grieta (a) a partir de la Figura 11. Se tiene:

Tabla 2. Factor geométrico para los casos de modo I estudiados.

a (mm)	b (mm)	h (mm)	h/b	a/b	α
70	100	300	∞	0,7	1,48
50				0,5	1,15
30				0,3	1,05
10				0,1	1

Sustituyendo en la expresión, resulta:

Tabla 3. K_I obtenido según (2).

a (mm)	a/b	α	σ (MPa)	K_I (MPa·mm ^{1/2})
70	0,7	1,48	100	2194,753103
50	0,5	1,15		1441,311258
30	0,3	1,05		1019,353604
10	0,1	1		560,4991216

A continuación, se calcula el SIF mediante las expresiones de Irwin, (8); Fedderson, (9); y Fedderson modificado, (10).

Conviene destacar que en la expresión de Irwin el argumento de la tangente debe introducirse en radianes.

Según Irwin y Fedderson:

Tabla 4. K_I obtenido según Irwin y Fedderson.

a (mm)	a/b	w(mm)	σ (MPa)	K_I (MPa·mm ^{1/2}), Irwin	K_I (MPa·mm ^{1/2}), Fedderson
70	0,7	100	100	1981,20	1483,10
50	0,5			1414,20	1253,40
30	0,3			1009,50	970,83
10	0,1			562,82	560,50

Según la expresión modificada de Fedderson:

Tabla 5. K_I obtenido según Fedderson modificado.

a (mm)	a/b	W(mm)	w(mm)	σ (MPa)	K_I (MPa·mm ^{1/2}), Fedderson modificado
70	0,7	100	3	100	1466
50	0,5				1245
30	0,3				968,68
10	0,1				560,36

1.2.5.2. K_I según tensiones de EF

Despejando el factor de intensidad de tensión K_I de (1), y siendo el resto de SIF nulos, se llega a:

$$\begin{aligned}
 K_I &= \sigma_X \cdot \sqrt{2\pi r} \cdot \left[\cos \frac{\varphi}{2} \cdot \left(1 - \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{3\varphi}{2} \right) \right]^{-1} \\
 K_I &= \sigma_Y \cdot \sqrt{2\pi r} \cdot \left[\cos \frac{\varphi}{2} \cdot \left(1 + \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{3\varphi}{2} \right) \right]^{-1} \\
 K_I &= \tau_{XY} \cdot \sqrt{2\pi r} \cdot \left[\cos \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{3\varphi}{2} \right]^{-1}
 \end{aligned} \tag{32}$$

Se extraen las tensiones en un path a 0° respecto del sistema de coordenadas solidario a la grieta, ya que según modo I esa será la dirección de propagación del defecto. Se observa en la expresión anterior, que el SIF a partir de las tensiones tangenciales dará un valor nulo, porque el seno de 0° es cero. Es decir, no podrá extraerse ningún resultado de K_I a partir de τ_{XY} . Para el resto, se llega a:

- $a/b = 0,1$

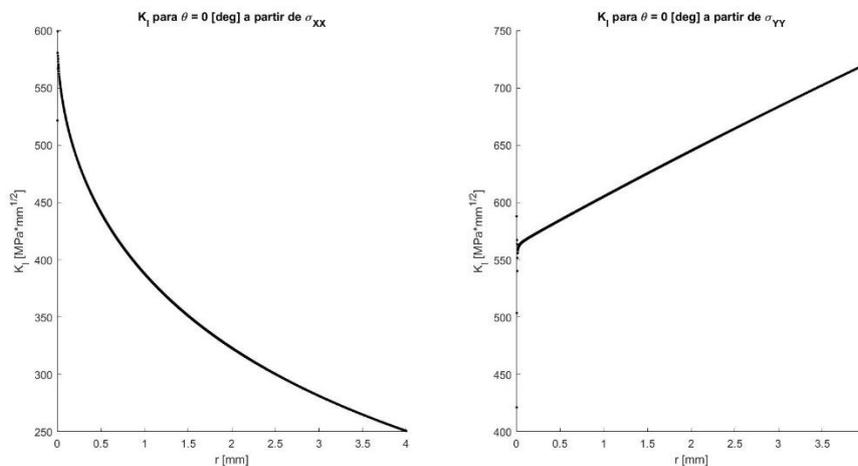


Figura 54. $K_I(r)$ para modo I y $a/b=0,1$, según (32).

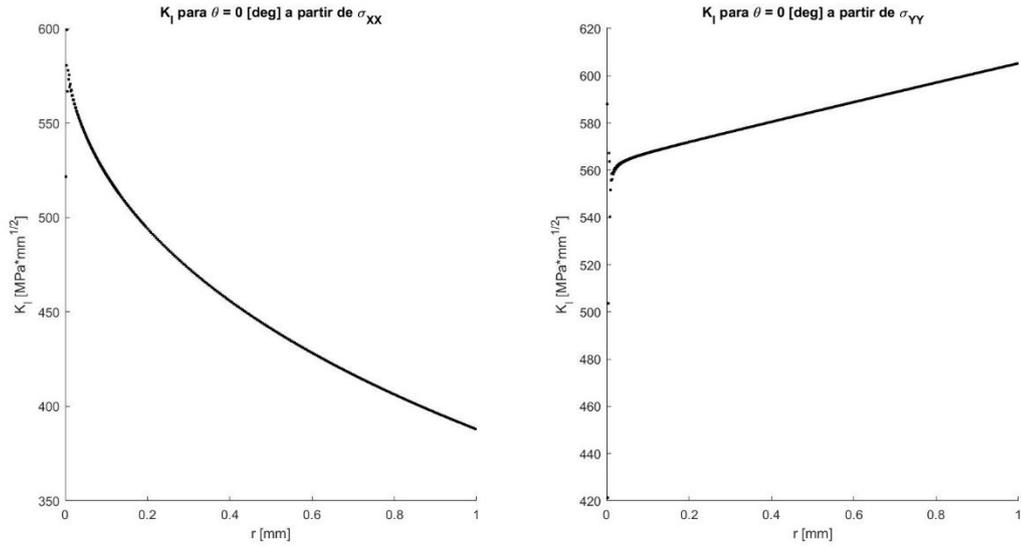


Figura 55. K_I(r) para modo I y a/b=0,1, según (32) (zoom).

- a/b = 0,3

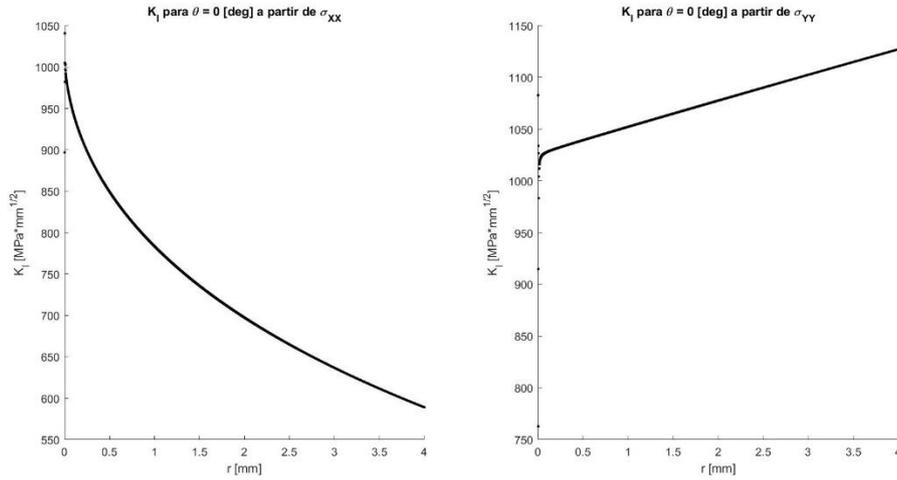


Figura 56. K_I(r) para modo I y a/b=0,3, según (32).

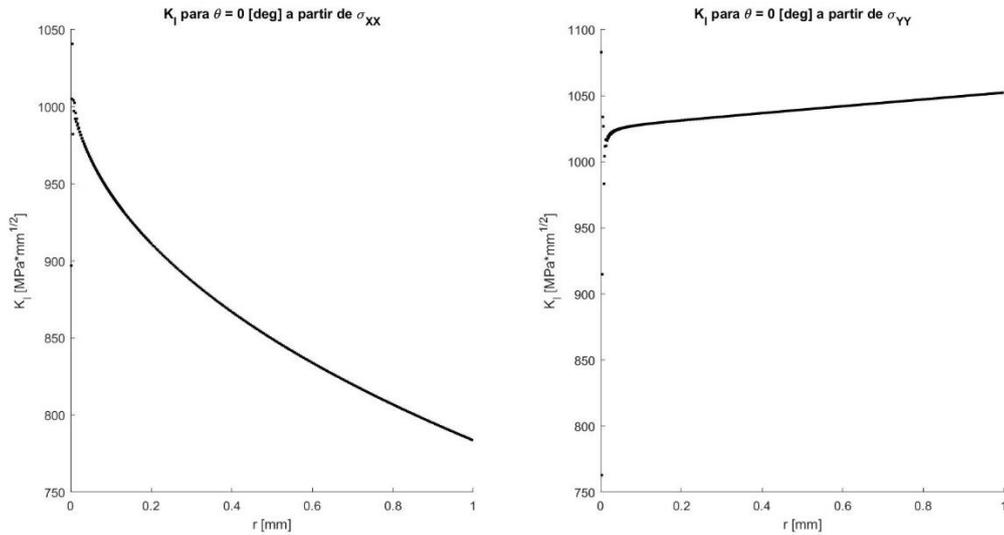


Figura 57. K_I(r) para modo I y a/b=0,3, según (32) (zoom).

- $a/b = 0,5$

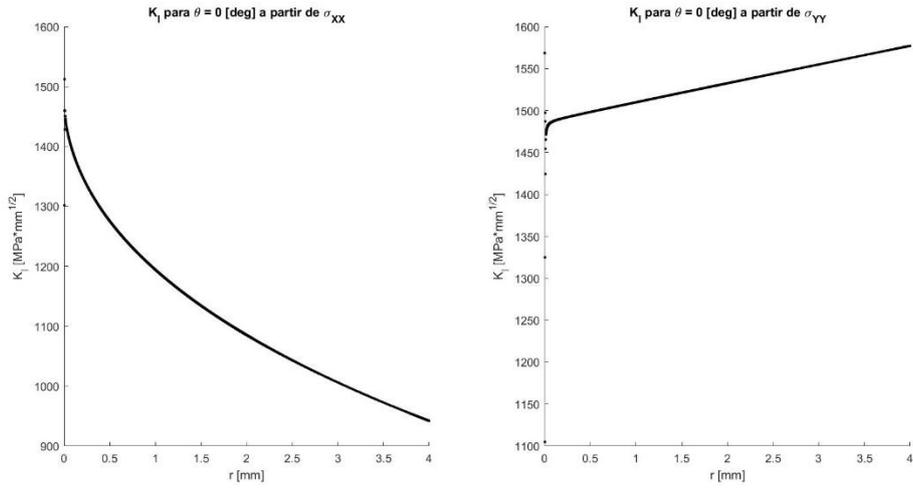


Figura 58. K_I(r) para modo I y a/b=0,5, según (32).

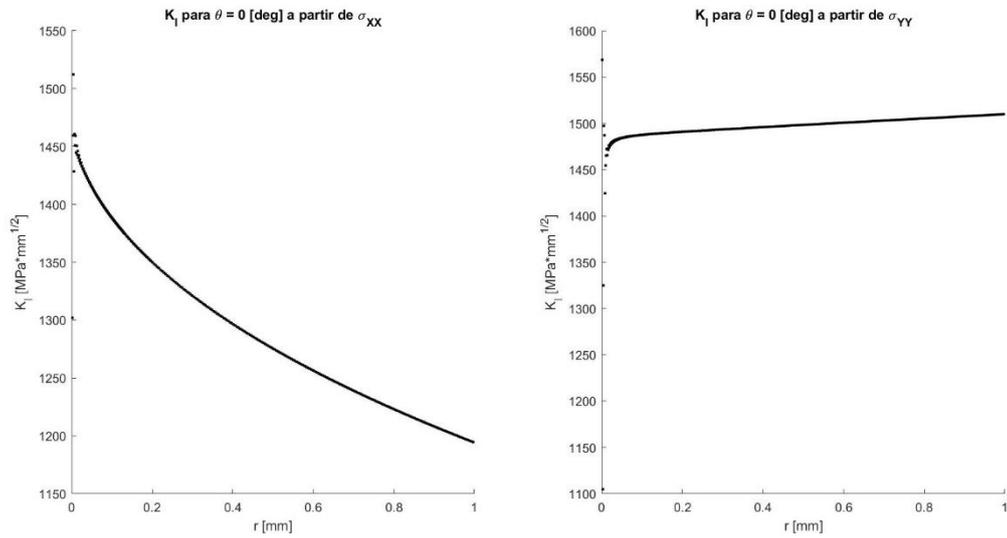


Figura 59. K_I(r) para modo I y a/b=0,5, según (32) (zoom).

- $a/b = 0,7$

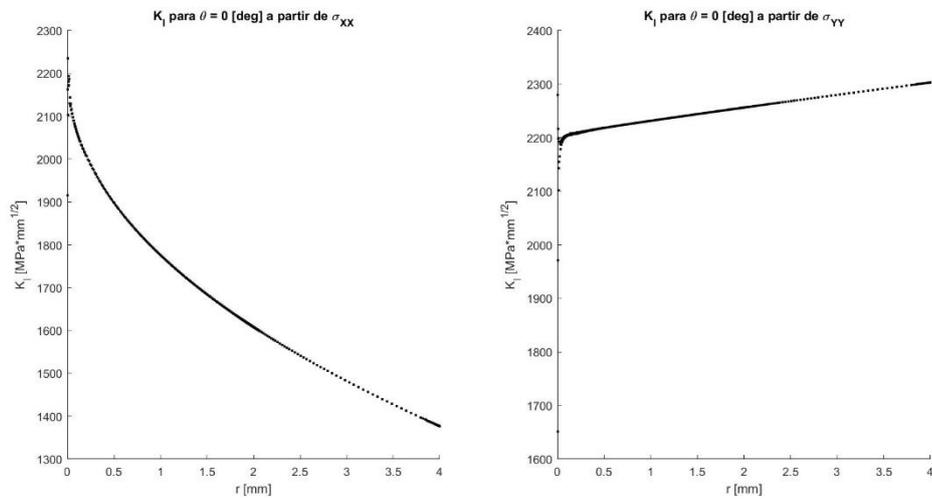


Figura 60. K_I(r) para modo I y a/b=0,7, según (32).

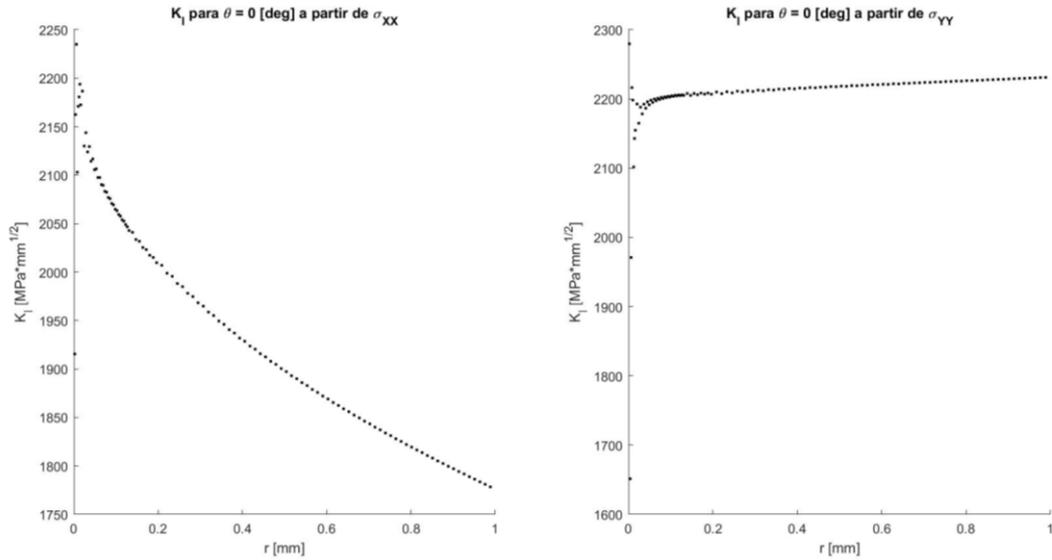


Figura 61. $K_I(r)$ para modo I y $a/b=0,7$, según (32) (zoom).

1.2.5.3. K_I según deformaciones de EF

Despejando el factor de intensidad de tensión K_I de (5), se tiene:

$$K_I = u \cdot \frac{E}{1+\nu} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \cdot \left[\cos \frac{\varphi}{2} \cdot (\kappa - 1 + 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}) \right]^{-1}$$

$$K_I = v \cdot \frac{E}{1+\nu} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \cdot \left[\sin \frac{\varphi}{2} \cdot (\kappa + 1 - 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}) \right]^{-1} \quad (33)$$

$$\kappa = (3 - \nu) / (1 + \nu) \text{ (tensión plana)}$$

Se extraen las deformaciones en un path a 0° respecto del sistema de coordenadas solidario a la grieta, ya que según modo I esa será la dirección de propagación del defecto. En y, si se tiene en cuenta la condición de contorno (Figura 33) impuesta al modelo en la parte inferior horizontal, se tendrá $\nu = 0$ y por tanto dará un SIF nulo. Para la primera expresión, se obtiene:

- $a/b = 0,1$

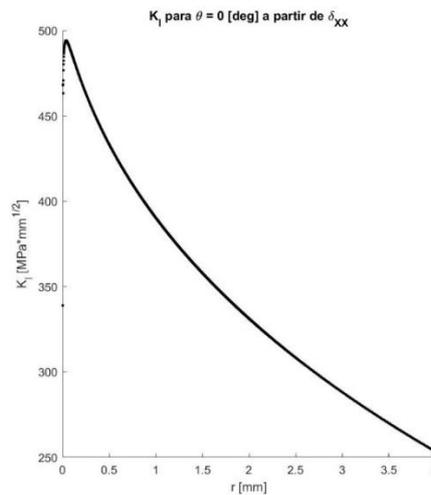


Figura 62. $K_I(r)$ para modo I y $a/b=0,1$, según (33).

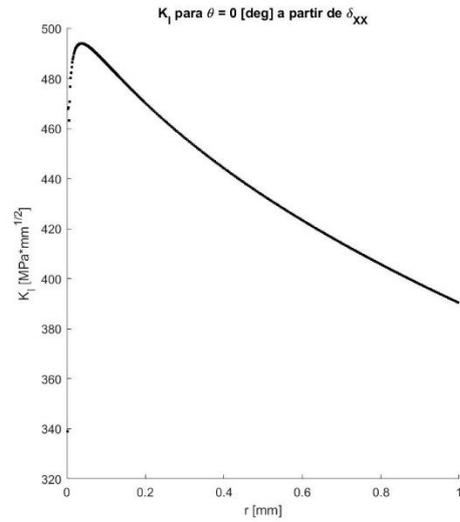


Figura 63. $K_I(r)$ para modo I y $a/b=0,1$, según (33) (zoom).

- $a/b = 0,3$

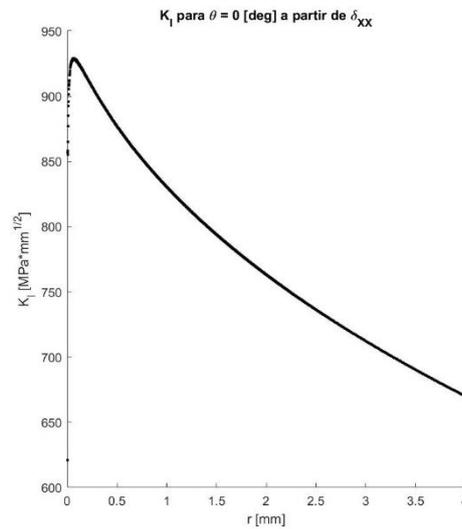


Figura 64. $K_I(r)$ para modo I y $a/b=0,3$, según (33).

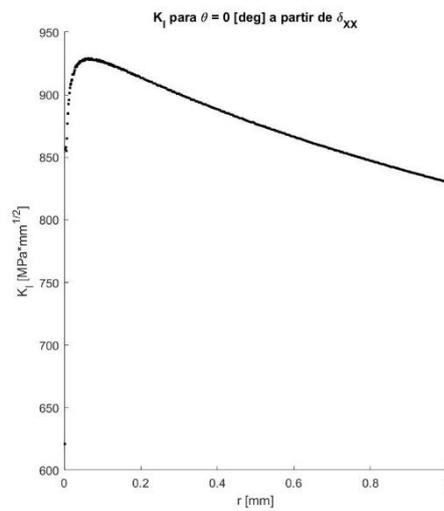


Figura 65. $K_I(r)$ para modo I y $a/b=0,3$, según (33) (zoom).

- $a/b = 0,5$

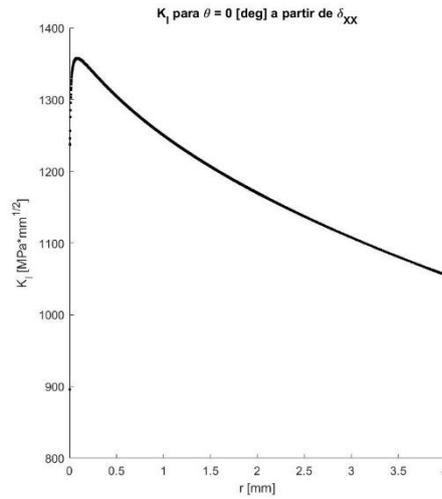


Figura 66. $K_I(r)$ para modo I y $a/b=0,5$, según (33).

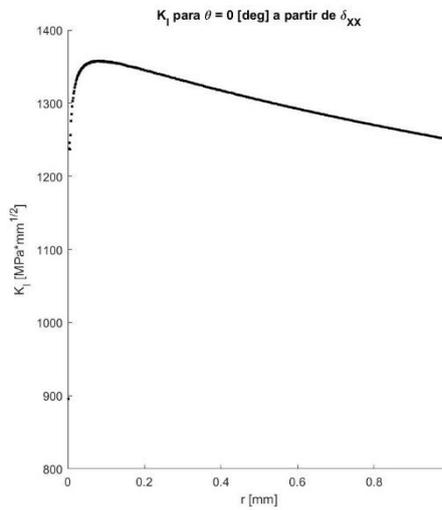


Figura 67. $K_I(r)$ para modo I y $a/b=0,5$, según (33) (zoom).

- $a/b = 0,7$

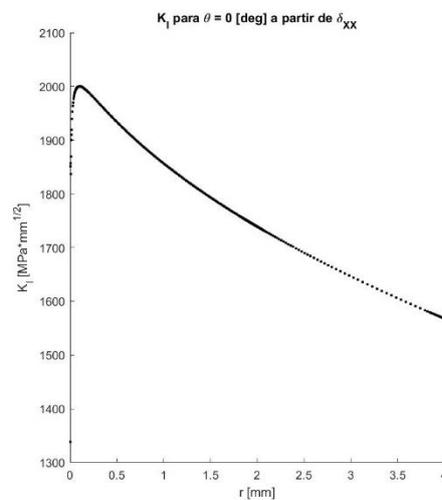


Figura 68. $K_I(r)$ para modo I y $a/b=0,7$, según (33).

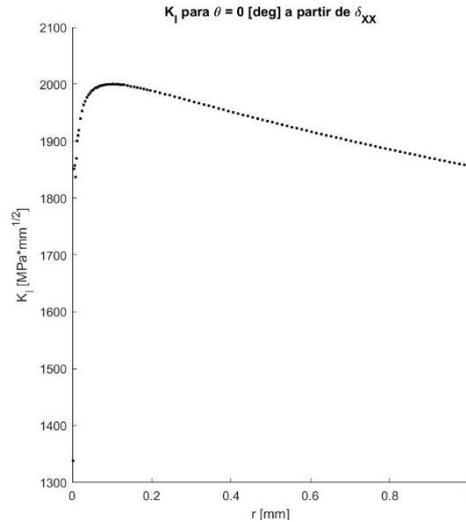


Figura 69. $K_I(r)$ para modo I y $a/b=0,7$, según (33) (zoom).

1.2.6. Ajuste del SIF

Para obtener el valor final de K_I , se ajusta la zona más lineal (entre 0,05 y 1 mm desde el frente de grieta) de las gráficas obtenidas, tanto para tensiones como para deformaciones, a la ecuación de una recta por mínimos cuadrados, para que el error sea lo menor posible. El factor de intensidad de tensión final, tal como se expone en la Figura 13, será la extrapolación de dicha recta para un valor de abscisas nulo.

A modo de ejemplo, se muestra el ajuste de $K_I(r)$ para $a/b=0,3$ a partir de σ_{YY} :

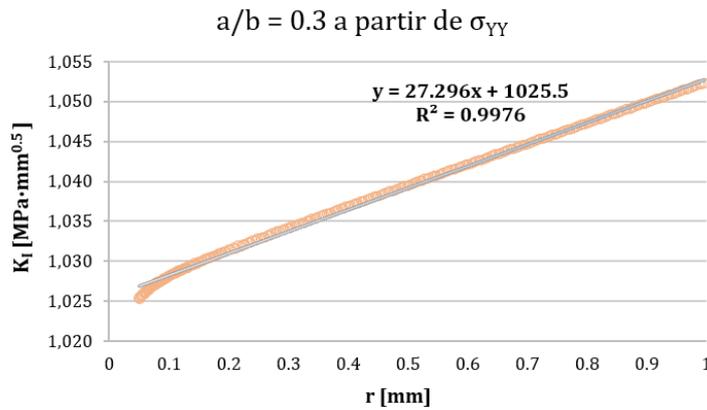


Figura 70. Ajuste del SIF para un caso de modo I.

Para el resto de los casos:

- $a/b = 0,1$

Tabla 6. Ajuste de K_I para modo I y $a/b=0,1$.

a/b	Según	Recta ajuste	R ²	K_I (MPa·mm ^{1/2}) para r=0
0,1	σ_x	$y = -158,64x + 540,43$	0,9643	540,43
	σ_Y	$y = 42,405x + 563,2$	0,9996	563,2
	δ_x	$y = -110,8x + 493,35$	0,9867	493,35

- $a/b = 0,3$

Tabla 7. Ajuste de K_I para modo I y $a/b=0,3$.

a/b	Según	Recta ajuste	R ²	K_I (MPa·mm ^{1/2}) para r=0
0,3	σ_x	$y = -186,87x + 988,51$	0,9711	988,51
	σ_y	$y = 27,296x + 1025,5$	0,9976	1025,5
	δ_x	$y = -109,81x + 934,92$	0,9952	934,92

- $a/b = 0,5$

Tabla 8. Ajuste de K_I para modo I y $a/b=0,5$.

a/b	Según	Recta ajuste	R ²	K_I (MPa·mm ^{1/2}) para r=0
0,5	σ_x	$y = -226,59x + 1400,9$	0,9733	1400,9
	σ_y	$y = 25,238x + 1485,2$	0,9943	1485,2
	δ_x	$y = -121,13x + 1367,3$	0,9965	1367,3

- $a/b = 0,7$

Tabla 9. Ajuste de K_I para modo I y $a/b=0,7$.

a/b	Según	Recta ajuste	R ²	K_I (MPa·mm ^{1/2}) para r=0
0,7	σ_x	$y = -323,84x + 2075,4$	0,974	2075,4
	σ_y	$y = 33,35x + 2200,4$	0,9641	2200,4
	δ_x	$y = -162,57x + 2016,1$	0,9944	2016,1

1.2.7. Error relativo

Por último, se calcula el porcentaje de error relativo entre el K_I obtenido con las fórmulas teóricas y el hallado a partir de los resultados de EF. Es decir:

$$\text{error (\%)} = \frac{|K_I^{TEORÍA} - K_I^{EF}|}{K_I^{TEORÍA}} \cdot 100 \quad (34)$$

Error respecto al K_I según (2):

Tabla 10. Error relativo de K_I respecto (2).

a/b	K_I (MPa·mm ^{1/2})	K_I (EF, σ_x)	error (%)	K_I (EF, σ_y)	error (%)	K_I (EF, δ_x)	error (%)
0.7	2194,75	2094,2	4,58	2200,4	0,25	2016,1	8,14
0.5	1441,31	1400,9	2,80	1485,2	3,04	1367,3	5,13
0.3	1019,35	988,51	3,02	1025,5	0,6	934,92	8,28
0.1	566,10	540,43	4,53	563,2	0,51	493,35	12,85

Error respecto al K_I según Irwin, (8):

Tabla 11. Error relativo de K_I respecto (8).

a/b	K_I (MPa·mm ^{1/2})	K_I (EF, σ_x)	error (%)	K_I (EF, σ_y)	error (%)	K_I (EF, δ_x)	error (%)
0.7	1981,20	2075,4	4,75	2200,4	9,06	2016,1	1,76
0.5	1414,20	1400,9	0,94	1485,2	5,02	1367,3	3,31
0.3	1009,50	988,51	2,07	1025,5	1,58	934,92	7,38
0.1	562,82	540,43	3,97	563,2	0,06	493,35	12,34

Error respecto al K_I según Fedderson, (9):

Tabla 12. Error relativo de K_I respecto (9).

a/b	K_I (MPa·mm ^{1/2})	K_I (EF, σ_x)	error (%)	K_I (EF, σ_y)	error (%)	K_I (EF, δ_x)	error (%)
0.7	1483,10	2075,4	39,93	2200,4	48,36	2016,1	35,93
0.5	1253,40	1400,9	11,76	1485,2	18,49	1367,3	9,08
0.3	970,83	988,51	1,82	1025,5	5,63	934,92	3,69
0.1	560,50	540,43	3,58	563,2	0,48	493,35	11,98

Error respecto al K_I según Fedderson modificado, (10):

Tabla 13. Error relativo de K_I respecto (10).

a/b	K_I (MPa·mm ^{1/2})	K_I (EF, σ_x)	error (%)	K_I (EF, σ_y)	error (%)	K_I (EF, δ_x)	error (%)
0.7	1466	2075,4	41,56	2200,4	50,09	2016,1	37,52
0.5	1245	1400,9	12,52	1485,2	19,29	1367,3	9,82
0.3	968,68	988,51	2,04	1025,5	5,86	934,92	3,48
0.1	560,36	540,43	3,55	563,2	0,50	493,35	11,95

1.2.8. Descripción de los resultados

Se ha obtenido K_I para los cuatro casos estudiados de modo I puro, a partir de fórmulas teóricas y de EF. Para estos últimos, se extraen los resultados de tensiones y deformaciones en un path a 0° de inclinación respecto del frente de grieta, por ser la dirección de propagación del defecto según el primer modo de fractura. Esos resultados se obtienen según el sistema de referencia fijado en el borde del defecto. El valor definitivo del SIF para modo I a partir de EF se calcula ajustando la zona más lineal de la gráfica de $K_I(r)$, que está en el rango de 0,05 mm y 1 mm desde el frente de grieta, a una línea recta por mínimos cuadrados, y se toma el punto de corte con el eje de ordenadas.

Observando los errores relativos obtenidos, se observa lo siguiente:

- La hipótesis de [2] de que “el SIF se obtiene con más precisión a partir de deformaciones que de tensiones” no es cierta. De hecho, salvo en algún caso aislado, el error es mucho mayor al calcular K_I mediante las deformaciones de EF.
- Los valores de K_I calculados a partir de los resultados de tensiones de EF se ajustan muy bien a los que predicen las fórmulas teóricas (2) y (8). Sin embargo, las dos expresiones de Fedderson ((9) y (10)) no ajustan bien, porque sus porcentajes de error son elevados.

- Como era de esperar, a partir de EF, con las componentes σ_x y σ_y se llega a valores muy similares de K_I , con porcentajes de error muy bajos. No influye tampoco el tamaño de grieta, puesto que el SIF obtenido para grietas más cortas (a/b bajo) y largas (a/b alto) se ajusta bien a las fórmulas teóricas (2) y (8).
- Sin embargo, tal como se comentó en apartados anteriores, la tensión tangencial no es aplicable al path a 0° porque su expresión tiene componentes trigonométricos que se anulan para 0° .

Por último, en referencia a las gráficas de $K_I(r)$, destaca:

- La zona desde aproximadamente 0,05 mm y 1 mm es en general la más lineal, por eso es la que se ajusta para calcular el factor de intensidad de tensión según EF.
- Por debajo de 0,05 mm, se observa en las gráficas de $K_I(r)$, por ejemplo, en la Figura 61, que los puntos de la gráfica en general tienden a cero. Eso es porque, como se ve en (1), la distancia r se aproxima a cero y por ello $K_I(r)$ tiende a cero.

A modo de ejemplo, se muestra en la siguiente figura cómo varía la tensión en un path a 0° tomado del caso de grieta de 10 mm ($a/b = 0,1$).

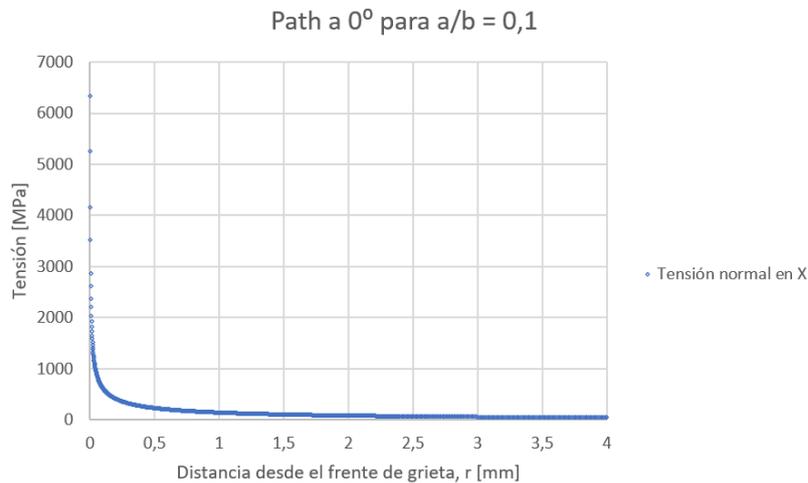


Figura 71. Variación de σ_x en el path a 0° (modo I, $a/b = 0,1$).

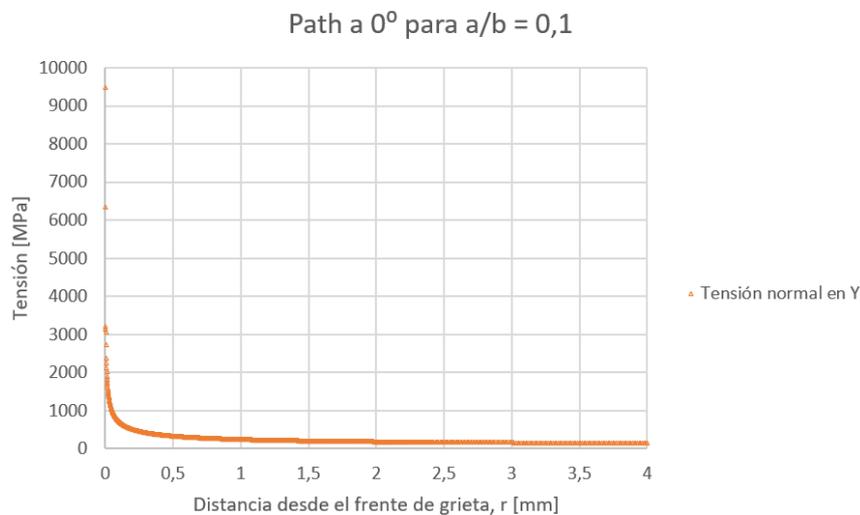


Figura 72. Variación de σ_y en el path a 0° (modo I, $a/b = 0,1$).

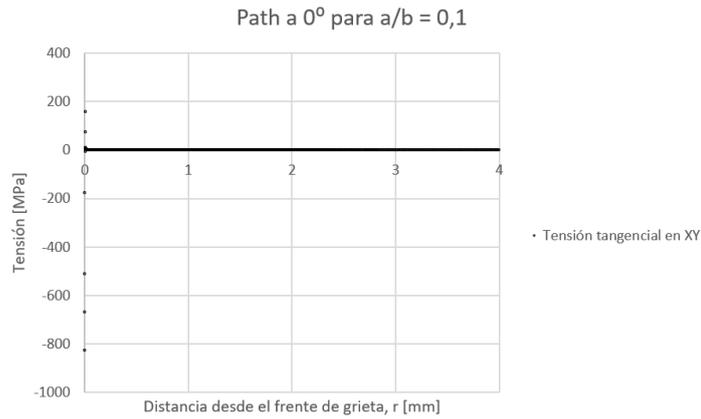


Figura 73. Variación de τ_{XY} en el path a 0° (modo I, $a/b = 0,1$).

Se observa cómo los resultados concuerdan con (31), es decir, σ_x y σ_y alcanzan valores “infinitos” en el frente de grieta ($r = 0$), pero después σ_x tiende a cero, y σ_y a la tensión nominal (100 MPa). En cuanto a la tensión tangencial, se ve que es prácticamente nula para todo r .

1.3. Modo II

1.3.1. Casos estudiados

Se han estudiado cuatro casos de modo II, donde la grieta se propaga a causa de tensiones tangenciales. La geometría general seguida ha sido la de una chapa cuadrada de pequeño espesor, con una carga axial a cada lado.

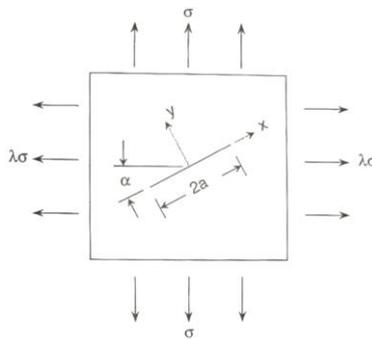


Figura 74. Caso general de modo II estudiado ($\alpha = 45^\circ$ y $\lambda = -1$).

Tal como se expone en el Análisis del Estado del Arte para modo II puro debe darse $\alpha = 45^\circ$ y $\lambda = -1$. Es decir, se tendrá la parte superior de la chapa a tracción, y el lateral a compresión.

En los cuatro casos se ha analizado una chapa de altura (h) de 100 mm y de ancho (b) de igual valor. Solo varía el tamaño de grieta (a); así, se analizan dos casos de chapa finita y otros dos de chapa infinita:

Tabla 14. Casos estudiados de modo II.

Caso n°	Anchura, $2b$ (mm)	Altura (mm)	Espesor (mm)	Tamaño grieta, $2a$ (mm)	a/b
1	100	100	3	50	0,5
2				30	0,3
3				10	0,1
4				5	0,05

1.3.2. Condiciones de contorno y cargas aplicadas

Al contrario a lo que sucedía en los ejemplos estudiados para modo I, con la geometría de modo II no se puede realizar el análisis aprovechando simetrías, por lo que habrá que modelizar tanto la chapa completa como la grieta. Eso conllevará un coste computacional más elevado y, como se verá en el siguiente apartado, bastante más complejidad al modelizar el defecto.

Las cargas son un axial de tracción en la parte superior, y uno de compresión en un lateral. En lugar de aplicar al modelo dos fuerzas, se somete la chapa a sendas tensiones normales de 100 MPa de tracción en el borde superior y de -100 MPa a compresión en un lateral.

En cuanto a las condiciones de contorno, son análogas a las descritas para modo I:

- En uno de los lados verticales de la chapa, se impide el desplazamiento horizontal, mientras que en vertical se deja libre, para que pueda deformarse.
- En la parte inferior, se impide el desplazamiento vertical, dejando libre el desplazamiento horizontal, en orden a permitir la deformación.
- En la zona de la grieta, como físicamente no hay material, se deja libre.

Fijando el sistema de referencia alineado con la grieta:

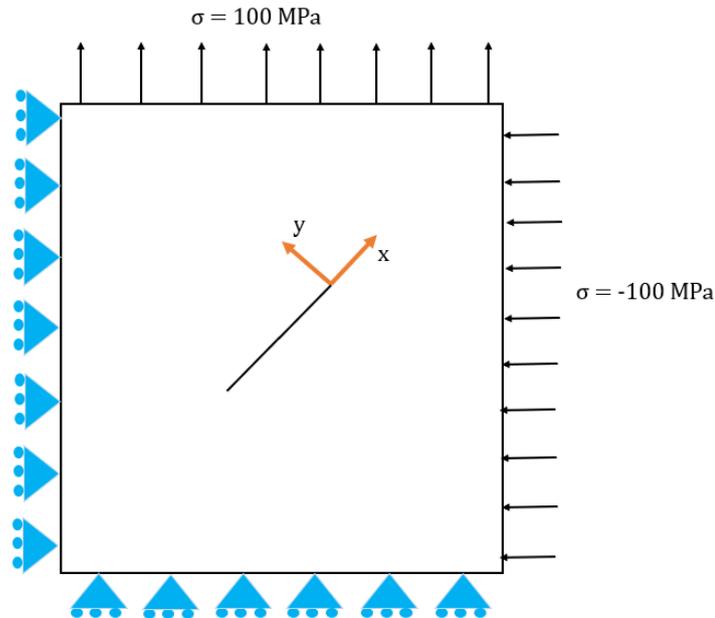


Figura 75. Cargas y condiciones de contorno (modo II).

Se tiene, en los cuatro casos, un estado de tensión plana, siendo el espesor de la pieza mucho menor que la anchura y la altura (dimensiones características en el plano XY), y las cargas y condiciones de contorno estando también en dicho plano.

1.3.3. Mallado

Tal como se expuso en el apartado del mallado de los modelos para analizar los casos de modo I de fractura, para el modo II también interesa apreciar bien las variaciones de tensión en la pieza, especialmente en la cercanía de la grieta.

Siguiendo el mismo criterio, se van a utilizar elementos bidimensionales de tipo cuadrilátero: de primer orden en la región más lejana al defecto (porque ahí la tensión tiende a la nominal) y de orden superior en la cercanía de la grieta.

Al ser un análisis donde no se pueden aprovechar simetrías, el número de grados de libertad crecerá respecto a los de modo I. Sin embargo, hay que tener en cuenta que las dimensiones de las piezas estudiadas en modo I no son las mismas que las del modo II: en el segundo modo la chapa es más pequeña. De haber sido idénticas geoméricamente, el número de grados de libertad al analizar no un cuarto (como en modo I) sino la chapa entera se hubiera cuadruplicado, aumentando mucho el coste computacional.

1.3.3.1. Problemas al definir la grieta

Uno de los mayores obstáculos ha sido crear un modelo de EF donde la grieta quede correctamente modelizada y se comporte como tal. Por ejemplo, en la Figura 74 la grieta se ve como una simple línea recta, pero es que se trata de una mera idealización. En la realidad, la grieta tendrá una determinada forma, de ahí que la pieza haya perdido material en esa zona.

En el software Ansys, si se define la grieta como una simple línea recta en medio de la pieza, el programa no lo interpretará como “grieta”, sino que supondrá que esa línea no influye en el modelo y por tanto creará una chapa maciza, sin ningún defecto en su geometría.

Entonces, en un segundo intento, lo que se hizo fue probar a definir la grieta como un rectángulo cuya base (t) fuera muy pequeña para que se pareciera lo máximo posible a una grieta.

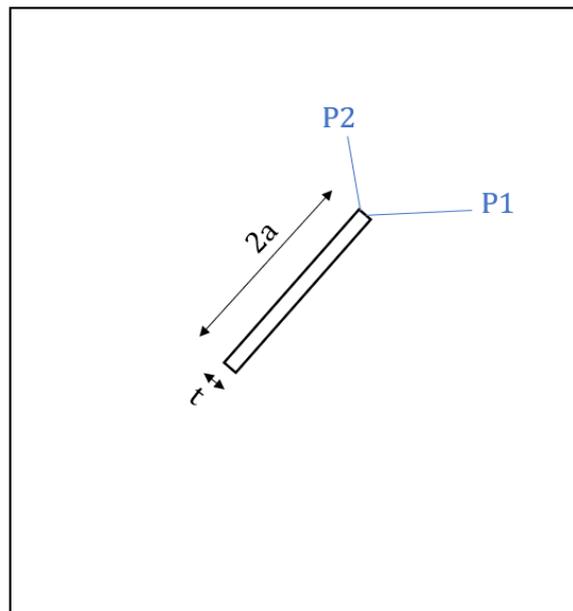


Figura 76. Modelización de grieta como un rectángulo.

El inconveniente de este criterio es que la base (t) no era lo suficientemente pequeña como para que se comportara como una grieta. En consecuencia, las tensiones en P1 (punto central de la base del rectángulo) y P2 (vértice superior de la base del rectángulo) diferían mucho, lo que daba lugar a resultados erróneos del SIF. Y es que si la base (t) no es tan pequeña como debiera, en lugar de comportarse como una grieta se trataría de un agujero.

Además, si se disminuye mucho la base (t), Ansys puede llegar a interpretar que ese rectángulo se asemeja más o menos a una línea recta, y en lugar de realizar un rectángulo como el de la figura superior, lo que hace es mallar todo como si fuera una chapa maciza salvo en alguna zona puntual. Es lo que se denomina “autopinch”, y consiste en que la dimensión de la base (t) es tan pequeña que el software interpreta que no hay ningún rectángulo y malla todo de manera continua, en vez de partir la malla al llegar al rectángulo.

Esto supone un grave impedimento al definir el modelo por dos motivos: por un lado, porque no se puede modelizar la grieta bien; y por otro, porque al hacer el modelo uno puede no percatarse de este error, y pensar que el software está haciendo todo correctamente. La manera de comprobar esto es simplemente medir en la malla las dimensiones del defecto, y verificar que son las que se introdujeron inicialmente.

A continuación, se muestra el resultado de haber tratado de modelizar la grieta con un rectángulo:

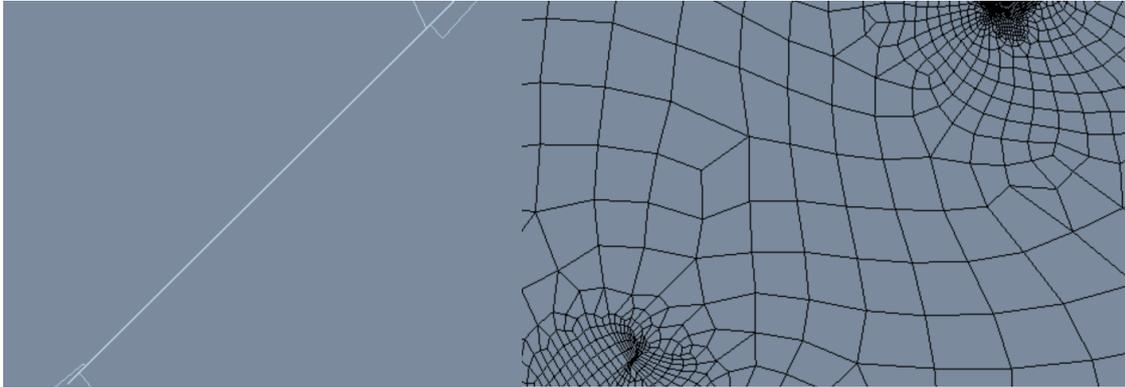


Figura 77. Ejemplo de autopinch (1).

A la izquierda se muestra el rectángulo creado en la pieza (junto con unas particiones que se ven en los extremos para refinar la malla), y a la derecha se observa que al mallar el programa ha interpretado que no hay ningún rectángulo (por ser la base t muy pequeña), por lo que ha mallado todo de manera continua.

Antes se ha mencionado que esto puede ser problemático porque quien está haciendo el modelo puede no percatarse del problema. Y es que si se amplía en uno de los extremos:

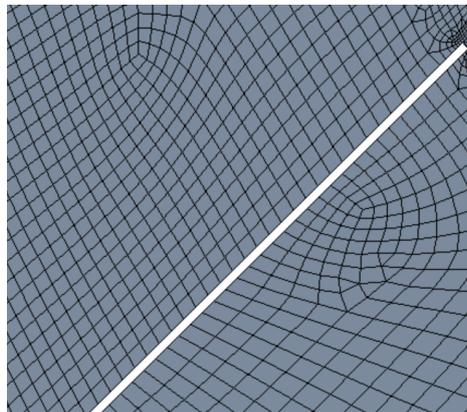


Figura 78. Ejemplo de autopinch (2).

A simple vista, puede parecer que se ha creado bien la grieta, pero no. Por eso hay que chequear bien los modelos antes de ejecutarlos. Lógicamente, si se pasara por alto, al ver las tensiones la distribución sería totalmente distinta a la que se espera, pero se hubiera perdido tiempo y habría que retocar el modelo.

Todo lo expuesto también puede suceder si se modeliza como un rombo en lugar de un rectángulo, y además será más notable el efecto porque el espesor del rombo será, salvo en la diagonal inferior, menor al del rectángulo.

1.3.3.2. Mallado final

El modo en que se ha definido finalmente la grieta se muestra en la siguiente figura:

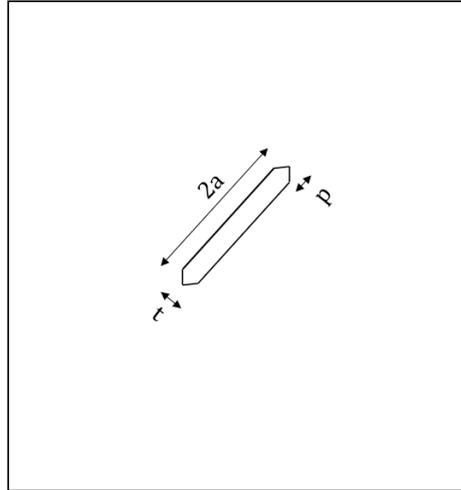


Figura 79. Modelización final de la grieta.

Así, se consiguen buenos resultados (como se verá más adelante) y, para evitar el autopinch, se toma $t = 0,07$ mm como espesor de la grieta y $p \leq 1,25$ mm. Si se exceden esos valores, se modelizará mal la grieta debido al autopinch, y los resultados no serán correctos.

La malla generada en los cuatro casos de modo II es análoga, solo cambia el tamaño de grieta. Por ejemplo, para el caso de la grieta de 10 mm, esta es la malla obtenida:

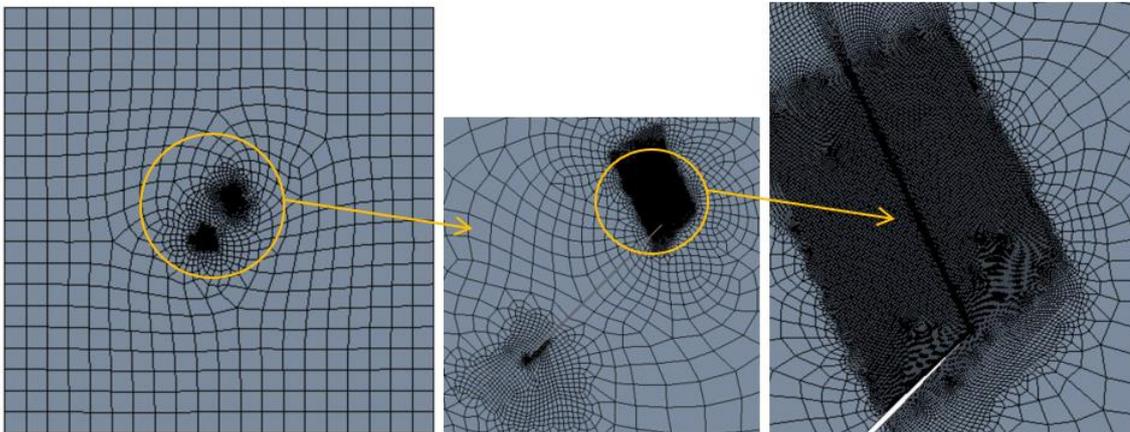


Figura 80. Mallado en modo II.

La zona más refinada es la cercanía de la grieta. Se debe refinar por ambos lados del defecto, porque si un lado tuviera muchos más elementos que el otro, la rigidez no sería la misma en ambas zonas y los esfuerzos no se transmitirían de igual modo por ambos lados, es decir, no representaría fielmente su comportamiento real. Por último, en la derecha de la figura se observa que se ha refinado aún más en una inclinación determinada respecto del frente de grieta. Corresponde a 70° , que es la dirección de propagación de grieta según modo II, tal como se expuso en apartados anteriores.

Los cuatro modelos de modo II rondan los 100000 nodos, y tardan en ejecutar entre dos y tres minutos. Por tanto, se tiene un coste computacional muy asequible.

1.3.4. Resultados de EF

Se extraen de cada modelo las tensiones y deformaciones necesarias para calcular el SIF, según el sistema de referencia definido en el frente de grieta y alineado con la misma. De dichos resultados, se exportará lo referente a un path a 70° , por ser la dirección de propagación de grieta en modo II.

1.3.4.1. $a/b = 0,05$

Tensiones normales y tangenciales:

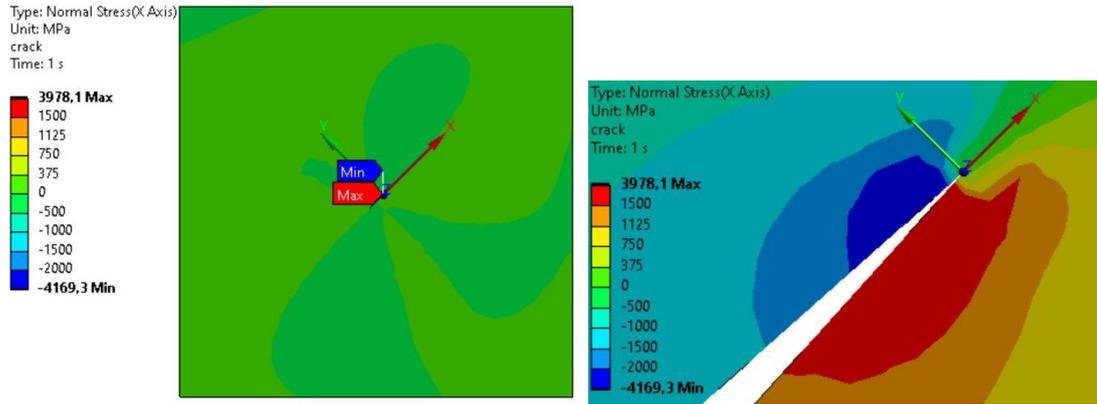


Figura 81. Tensiones normales en X (modo II, $a/b = 0,05$).

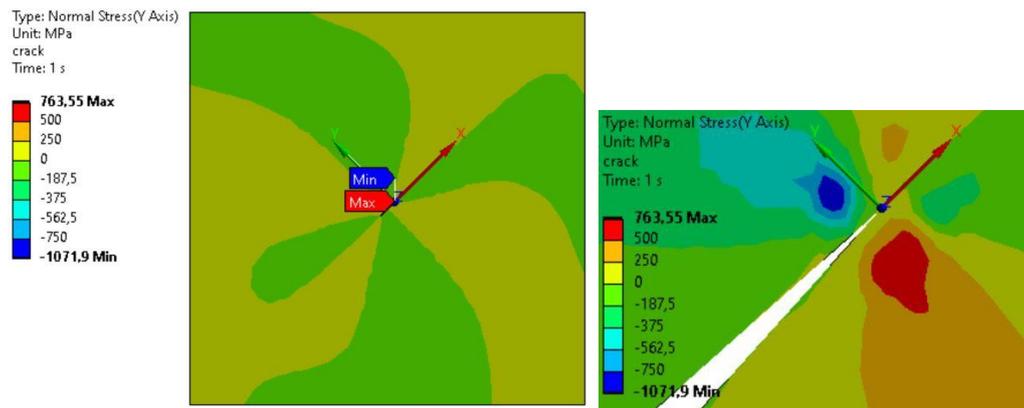


Figura 82. Tensiones normales en Y (modo II, $a/b = 0,05$).

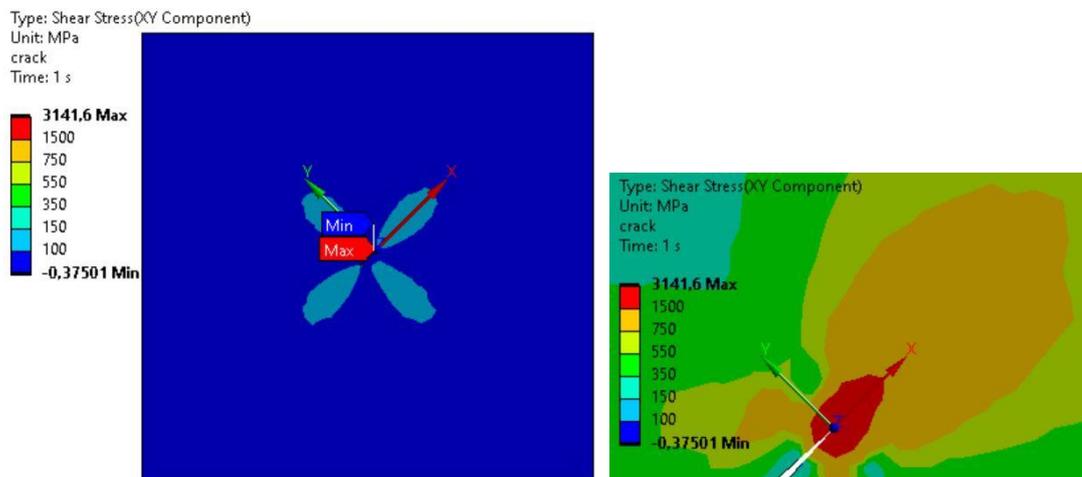


Figura 83. Tensiones tangenciales en XY (modo II, $a/b = 0,05$).

Deformaciones:

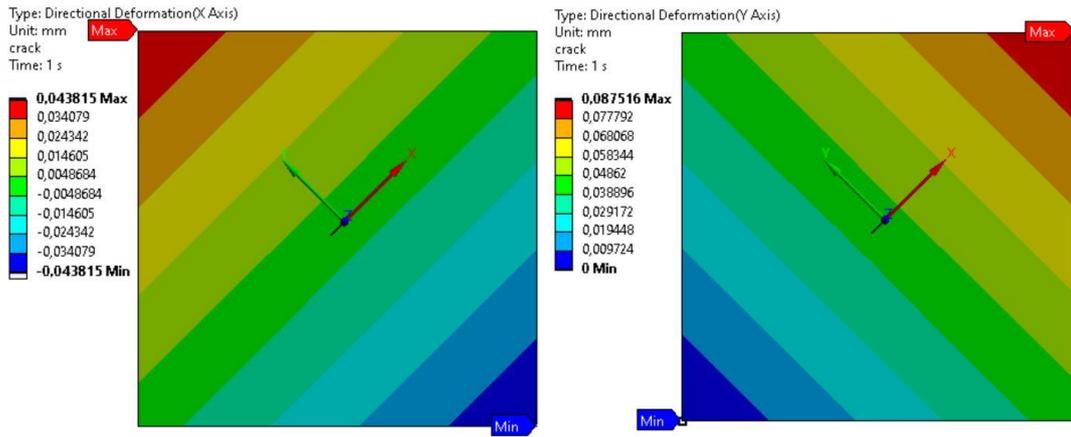


Figura 84. Deformaciones (modo II, $a/b = 0,05$).

1.3.4.2. $a/b = 0,1$

Tensiones normales y tangenciales:

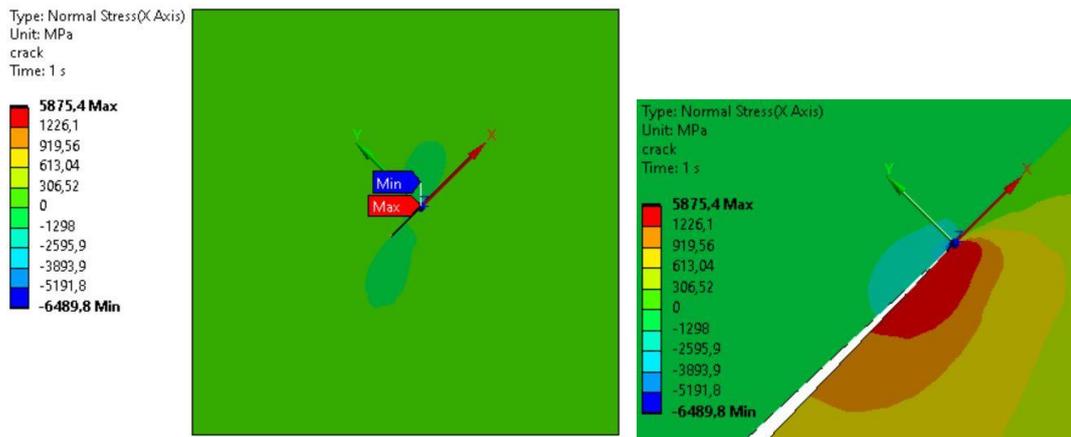


Figura 85. Tensiones normales en X (modo II, $a/b = 0,1$).

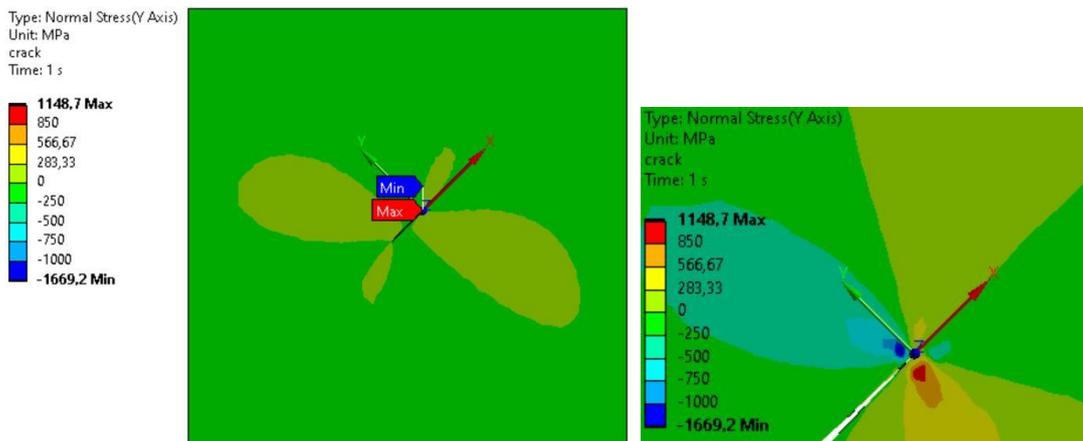


Figura 86. Tensiones normales en Y (modo II, $a/b = 0,1$).

Cálculo del factor de intensidad de tensiones mediante elementos finitos

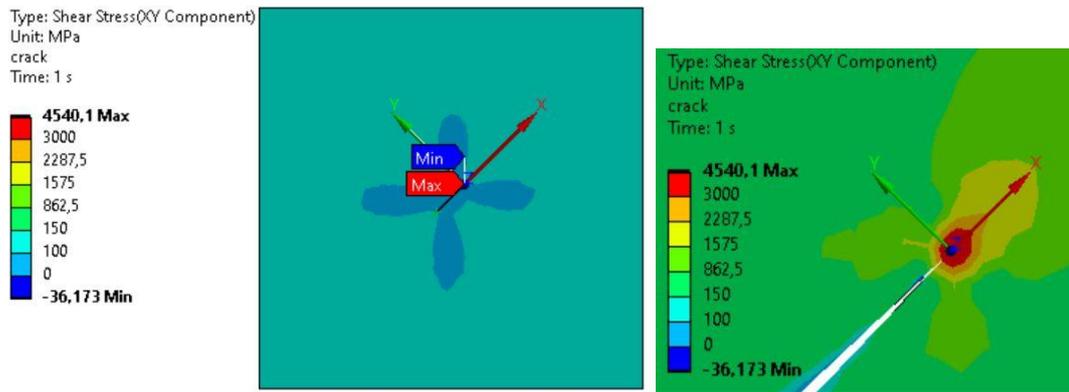


Figura 87. Tensiones tangenciales en XY (modo II, $a/b = 0,1$).

Deformaciones:

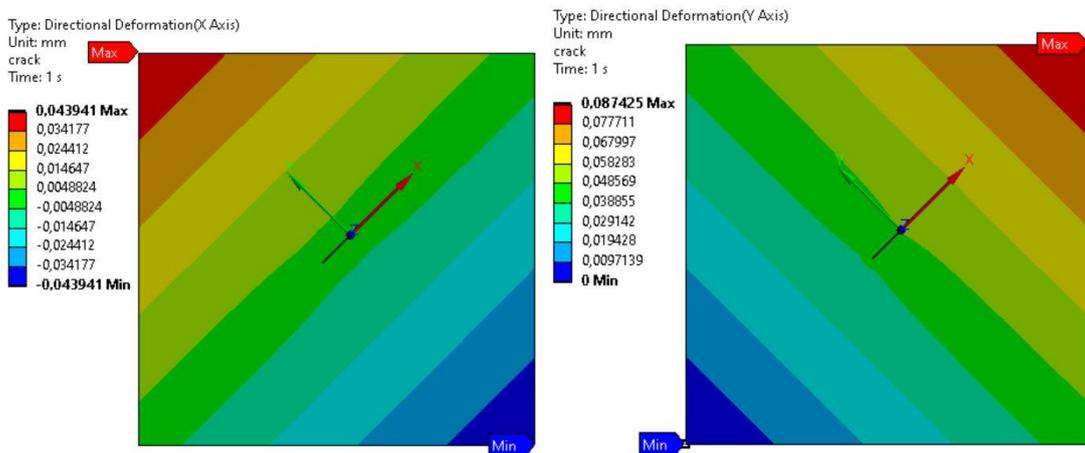


Figura 88. Deformaciones (modo II, $a/b = 0,1$).

1.3.4.3. $a/b = 0,3$

Tensiones normales y tangenciales:



Figura 89. Tensiones normales en X (modo II, $a/b = 0,3$).

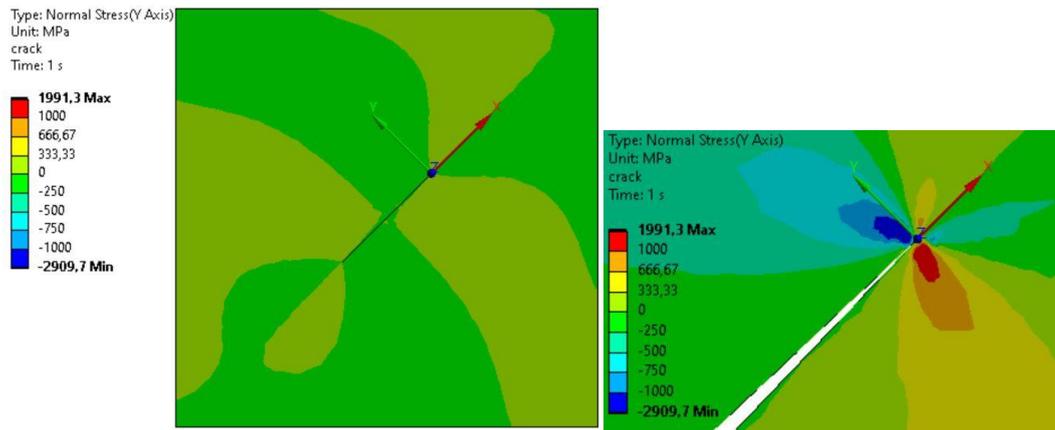


Figura 90. Tensiones normales en Y (modo II, $a/b = 0,3$).

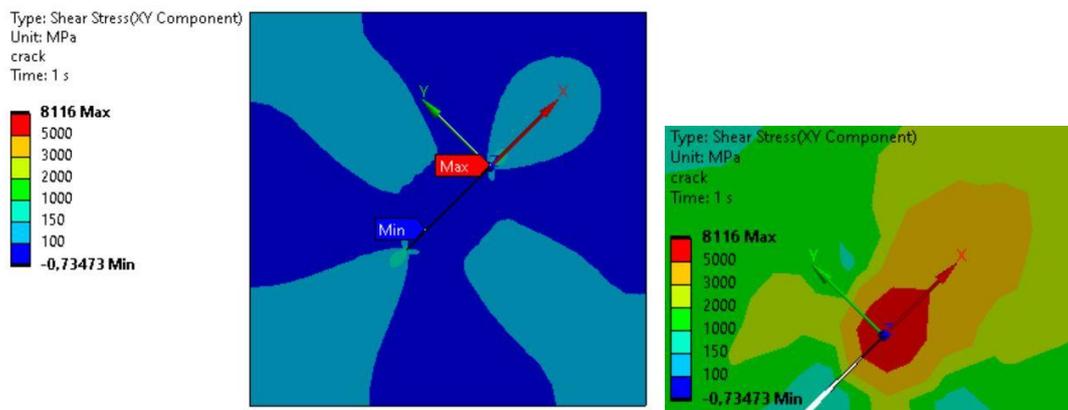


Figura 91. Tensiones tangenciales en XY (modo II, $a/b = 0,3$).

Deformaciones:

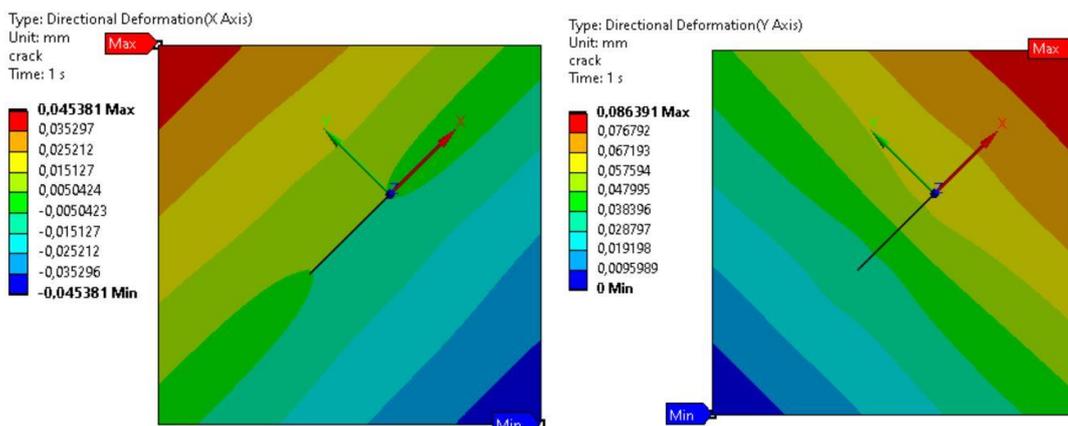


Figura 92. Deformaciones (modo II, $a/b = 0,3$).

1.3.4.4. $a/b = 0,5$

Tensiones normales y tangenciales:

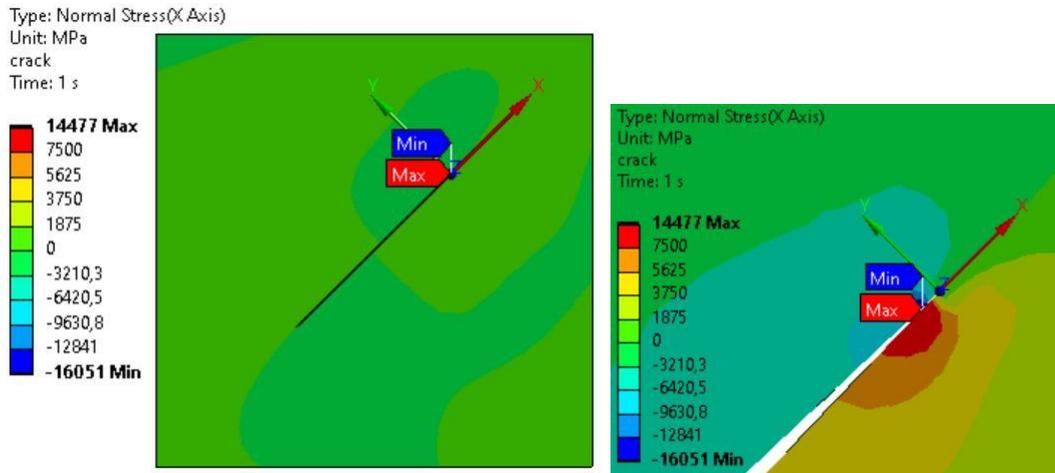


Figura 93. Tensiones normales en X (modo II, $a/b = 0,5$).

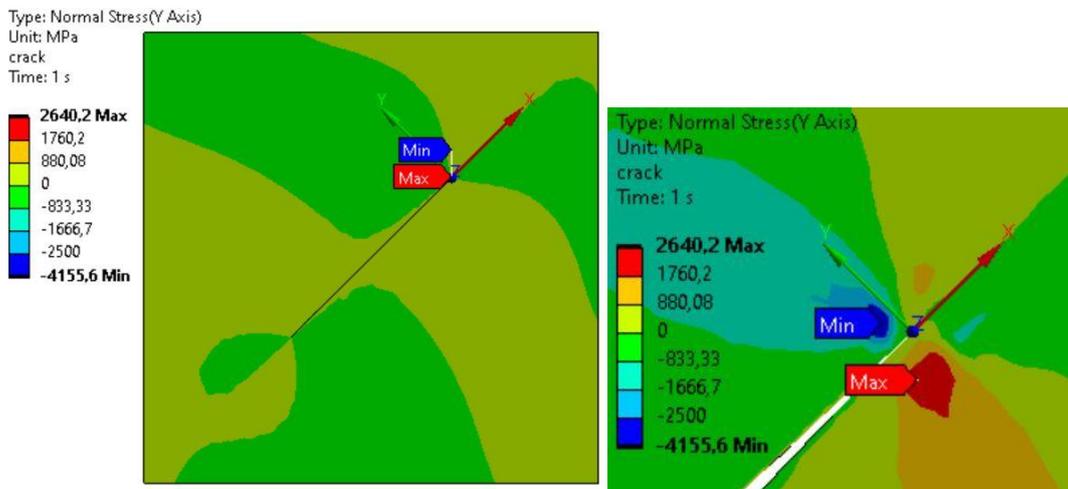


Figura 94. Tensiones normales en Y (modo II, $a/b = 0,5$).

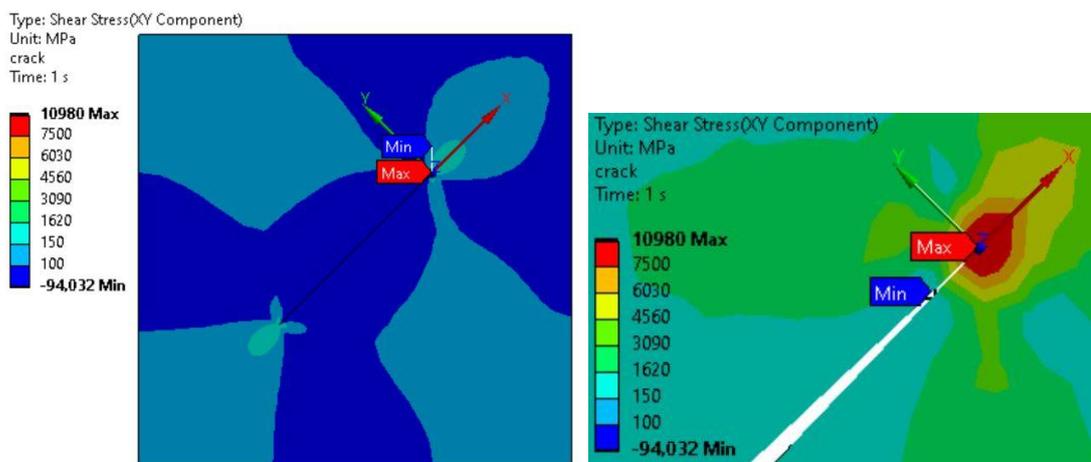


Figura 95. Tensiones tangenciales en XY (modo II, $a/b = 0,5$).

Deformaciones:

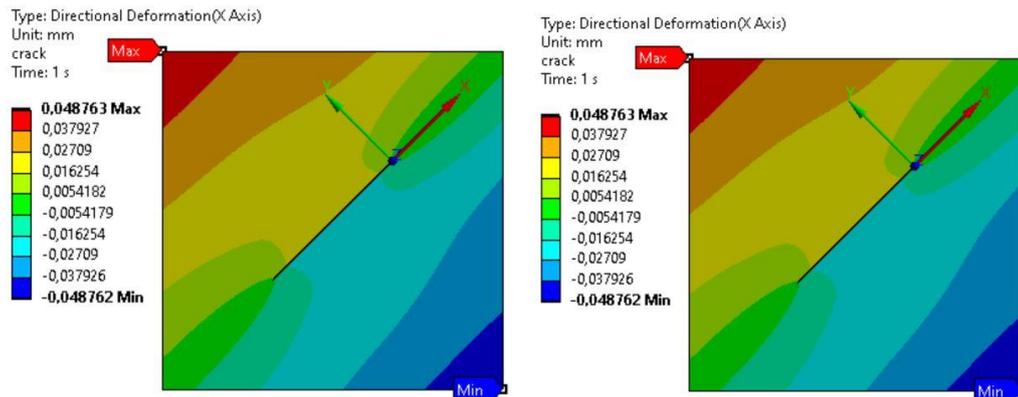


Figura 96. Deformaciones (modo II, $a/b = 0,5$).

1.3.4.5. Verificación del modelo

Se observa que debido a la grieta se da una concentración de tensiones importante en las cercanías al defecto. Además, en los cuatro casos el patrón que siguen las tensiones normales y tangenciales es el mismo, es decir, la forma de σ_x , σ_y y τ_{xy} respectivamente es muy similar en los cuatro casos, siendo las tensiones máximas mayores cuando la grieta es más extensa (porque la concentración de tensiones es más acusada).

De nuevo, como se expuso para el modo I, en el frente de grieta en teoría debería haber una tensión máxima de valor infinito, pero al ser el modelo de EF una simple discretización, se alcanzan valores muy altos (al refinar) pero no infinitos.

En la lejanía del defecto, teniendo en cuenta que los resultados están expresados para el sistema de referencia orientado según la grieta, se tiene:

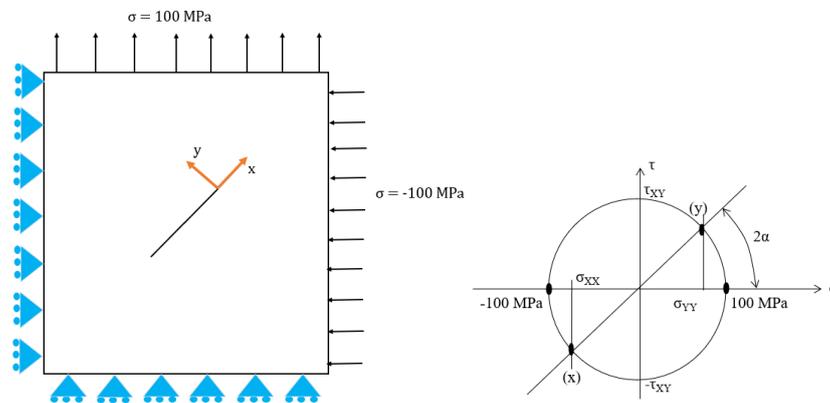


Figura 97. Verificación del modelo (modo II).

En este caso, el radio del círculo de Mohr corresponde al módulo de τ_{xy} , por lo que su valor será de 100 MPa. Como la grieta está inclinada 45° respecto de la horizontal, las tensiones normales en X e Y deberían ser nulas para el sistema de referencia orientado según la grieta, mientras que τ_{xy} será 100 MPa. Es decir, las tensiones normales X e Y graficadas, en la lejanía de la grieta, deberían ser cero para el sistema de referencia orientado según la grieta; mientras que la tangencial en XY debería ser 100 MPa según ese sistema de coordenadas. Esto se cumple para todos los casos, pero se observa que a medida que la grieta es mayor, esta distorsiona el campo tensional. En definitiva, los resultados de tensión cumplen con lo esperado.

En cuanto a las deformaciones, al estar el material en régimen elástico-lineal, se aplica superposición para calcular el valor de la deformada en X y en Y, según el sistema de referencia orientado como la grieta:

- Si solo hubiera una tracción de 100 MPa en vertical:

Analíticamente la deformación longitudinal en y' sería (área, $A = bh = 100 \times 100 \text{ mm}^2$; longitud, $L = h = 100 \text{ mm}$; rigidez, $k = EA / L$):

$$\delta_{y'} = F / k = \sigma A / (EA / L) = \sigma L / E = 100 \times 100 / 210000 = \mathbf{0,0476 \text{ mm}}$$

Y en el eje x':

$$\delta_{x'} = b \epsilon_{xx} = -\nu (\delta_{y'} / h) \times b = -0,3 \times 0,0476 \times 100 / 100 = \mathbf{-0,01429 \text{ mm}}$$

- Si solo hubiera una compresión de 100 MPa en horizontal:

Deformación longitudinal en x':

$$\delta_{x'} = F / k = \sigma A / (EA / L) = \sigma L / E = -100 \times 100 / 210000 = \mathbf{-0,0476 \text{ mm}}$$

Y en el eje y':

$$\delta_{y'} = b \epsilon_{yy} = -\nu (\delta_{x'} / h) \times b = -0,3 \times (-0,0476) \times 100 / 100 = \mathbf{0,01429 \text{ mm}}$$

Por superposición:

$$\delta_{x', \text{TOTAL}} = -0,01429 - 0,0476 = \mathbf{-0,06188 \text{ mm}}$$

$$\delta_{y', \text{TOTAL}} = 0,01429 + 0,0476 = \mathbf{0,06188 \text{ mm}}$$

Proyectando en el sistema de referencia (x, y) orientado según la grieta:

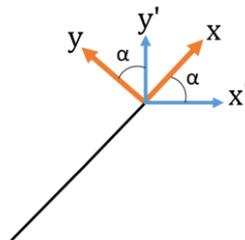


Figura 98. Proyección en el sistema de referencia orientado según la grieta.

Se tiene:

$$\delta_x = \delta_{x'} \cos \alpha + \delta_{y'} \sin \alpha$$

$$\delta_y = -\delta_{x'} \sin \alpha + \delta_{y'} \cos \alpha$$

Para $\alpha = 45^\circ$, sustituyendo, se llega a un desplazamiento $\delta = \mathbf{0,0875 \text{ mm}}$ (que dividido por dos resulta 0,04375 mm, como se ve en algunos modelos donde deforma la mitad por cada lado), que en todos los casos no coincide exactamente con los resultados del modelo porque en la expresión analítica no se considera el efecto de la grieta, pero dan valores muy cercanos. Cuando la grieta es pequeña, la deformada analítica se aproxima más a la obtenida de EF, pero cuando es mayor se aleja más, porque el efecto de la grieta es más representativo.

El modelo se da entonces por válido, ya que los resultados coinciden con lo esperado.

1.3.5. Cálculos

1.3.5.1. K_{II} según fórmulas teóricas

Se calcula el factor de intensidad de tensión para modo II a partir de (3). El factor geométrico se obtiene de [16], en función de las dimensiones de la pieza y de la grieta. Se tiene:

Tabla 15. Factor geométrico para los casos de modo II estudiados.

2a (mm)	a (mm)	Anchura, 2b (mm)	a/b	α
50	25	100	0,5	1,13
30	15		0,3	1,04
10	5		0,1	1
5	2,5		0,05	1

Sustituyendo en la expresión, resulta:

Tabla 16. K_{II} obtenido según (2).

2a (mm)	a (mm)	a/b	α	τ (MPa)	K_I (MPa·mm ^{1/2})
50	25	0,5	1,13	100	280,25
30	15	0,3	1,04		396,33
10	5	0,1	1		713,93
5	2,5	0,05	1		1001,44

1.3.5.2. K_{II} según tensiones de EF

Despejando el factor de intensidad de tensión K_{II} de (1), y siendo el resto de SIF nulos, se tiene:

$$\begin{aligned}
 K_{II} &= -\sigma_x \cdot \sqrt{2\pi r} \cdot \left[\sin \frac{\varphi}{2} \cdot \left(2 + \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{3\varphi}{2} \right) \right]^{-1} \\
 K_{II} &= \sigma_y \cdot \sqrt{2\pi r} \cdot \left[\sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{3\varphi}{2} \right]^{-1} \\
 K_{II} &= \tau_{xy} \cdot \sqrt{2\pi r} \cdot \left[\cos \frac{\varphi}{2} \cdot \left(1 - \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{3\varphi}{2} \right) \right]^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{35}$$

Se extraen las tensiones en un path a 70° respecto del sistema de coordenadas solidario a la grieta, ya que según modo II esa será la dirección de propagación del defecto. Se observa en la expresión anterior, que el SIF a partir de las tensiones tangenciales esta vez no dará un valor nulo (como sucedía en el modo I con 0°). Es decir, se extraerá K_{II} a partir de σ_x , σ_y y τ_{xy} .

- $a/b = 0,05$

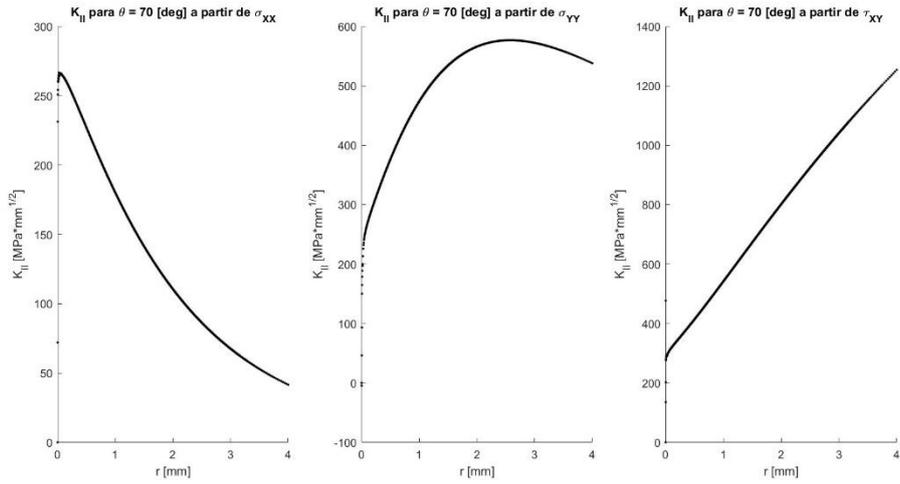


Figura 99. $K_{II}(r)$ para modo II y $a/b=0,05$, según (34).

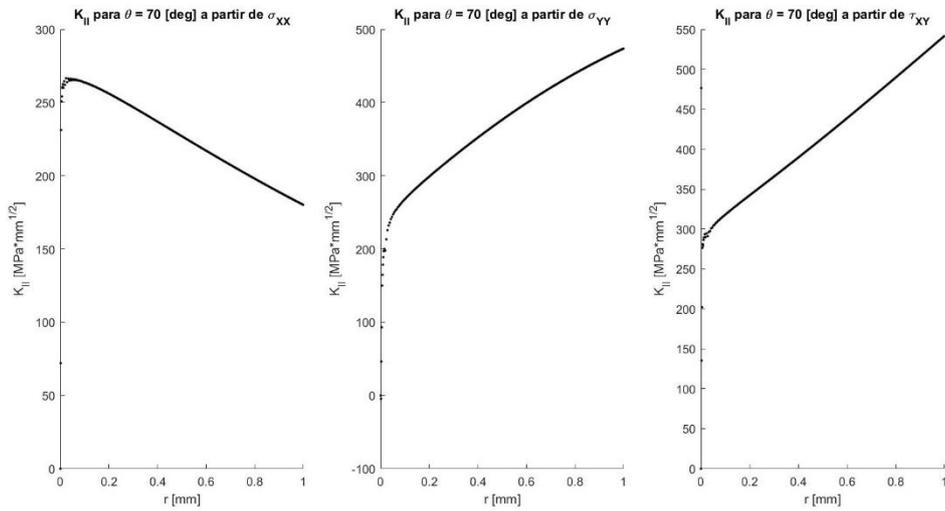


Figura 100. $K_{II}(r)$ para modo II y $a/b=0,05$, según (34) (zoom).

- $a/b = 0,1$

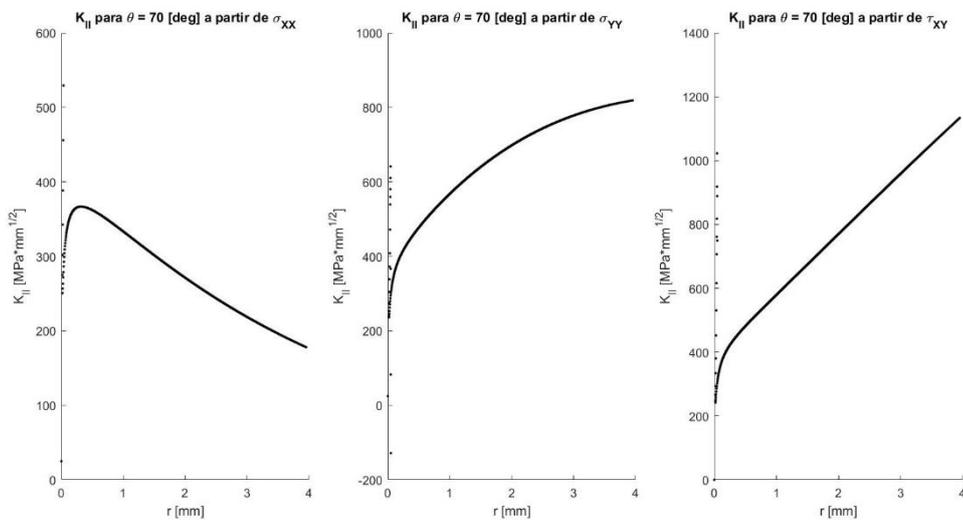


Figura 101. $K_{II}(r)$ para modo II y $a/b=0,1$, según (34).

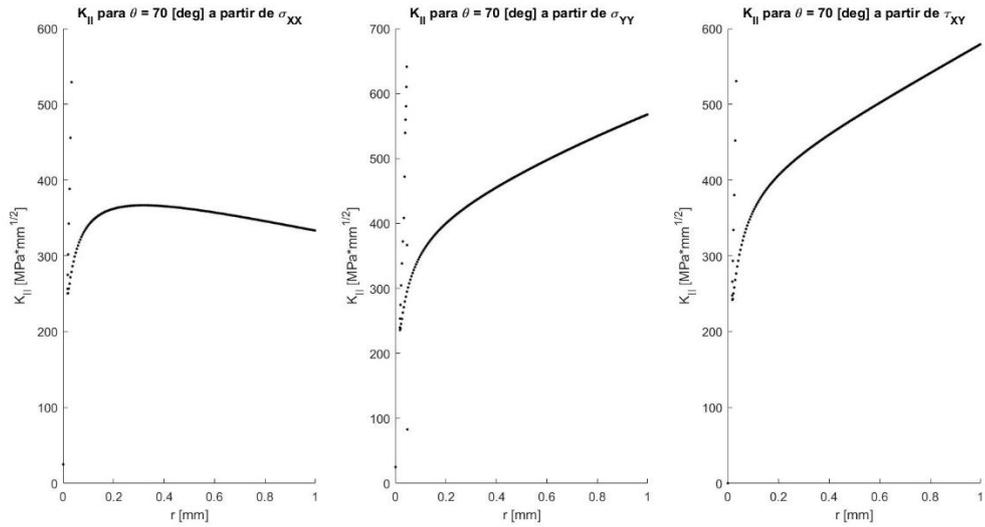


Figura 102. $K_{II}(r)$ para modo II y $a/b=0,1$, según (34) (zoom).

- $a/b = 0,3$

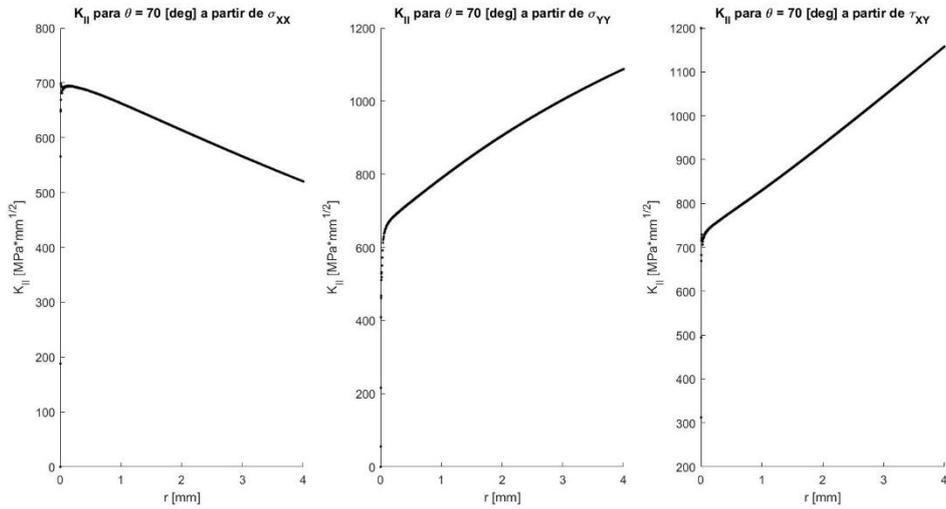


Figura 103. $K_{II}(r)$ para modo II y $a/b=0,3$, según (34).

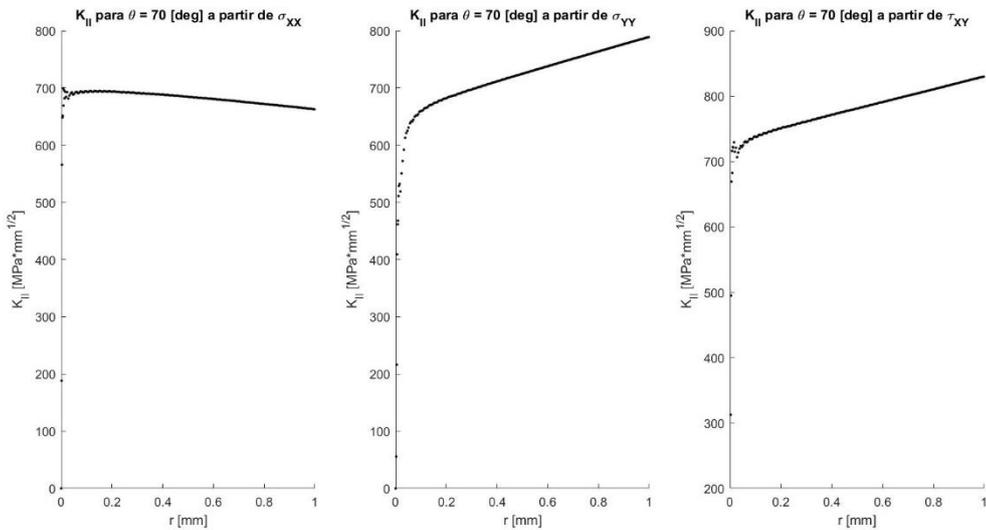


Figura 104. $K_{II}(r)$ para modo II y $a/b=0,3$, según (34) (zoom).

- $a/b = 0,5$

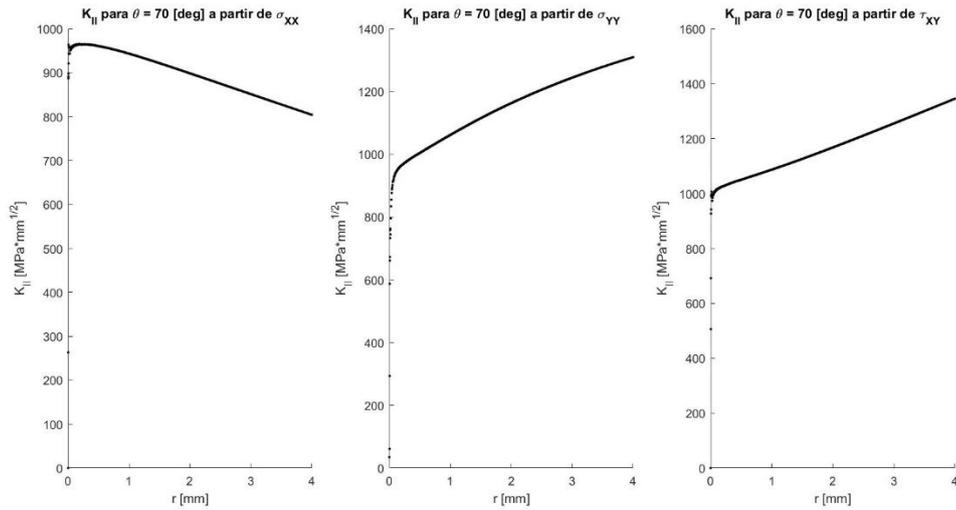


Figura 105. $K_{II}(r)$ para modo II y $a/b=0,5$, según (34).

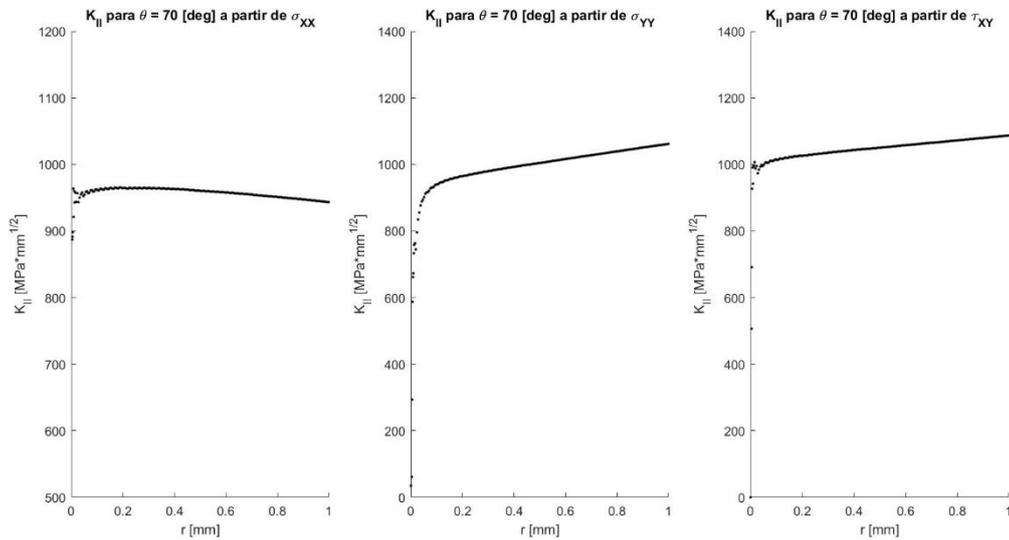


Figura 106. $K_{II}(r)$ para modo II y $a/b=0,5$, según (34) (zoom).

1.3.5.3. K_{II} según deformaciones de EF

Despejando el factor de intensidad de tensión K_{II} de (6), se tiene:

$$K_{II} = u \cdot \frac{E}{1+\nu} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \cdot \left[\sin \frac{\varphi}{2} \cdot \left(\kappa + 1 + 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right) \right]^{-1}$$

$$K_{II} = -v \cdot \frac{E}{1+\nu} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \cdot \left[\cos \frac{\varphi}{2} \cdot \left(\kappa - 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) \right]^{-1} \quad (36)$$

$$\kappa = (3 - \nu) / (1 + \nu) \text{ (tensión plana)}$$

Se extraen las deformaciones en un path a 70° respecto del sistema de coordenadas solidario a la grieta, ya que según modo I esa será la dirección de propagación del defecto. Se llega a:

- $a/b = 0,05$

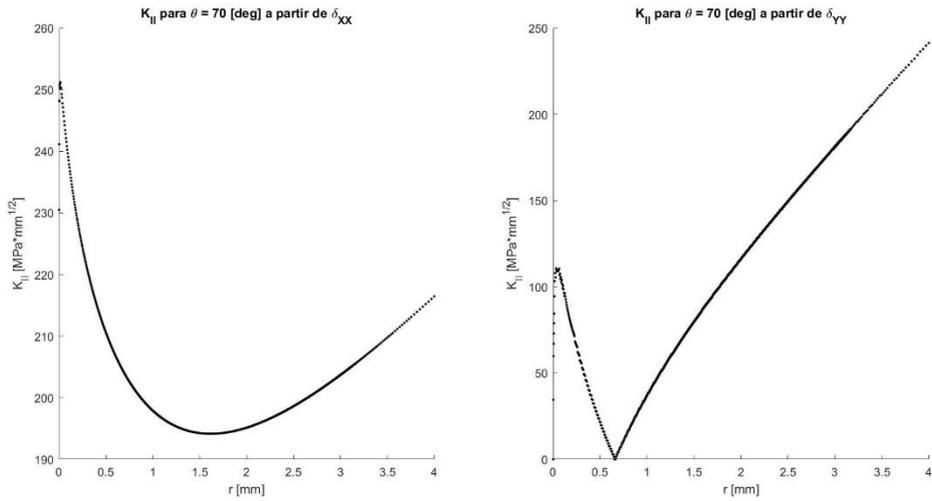


Figura 107. $K_{II}(r)$ para modo II y $a/b=0,05$, según (35).

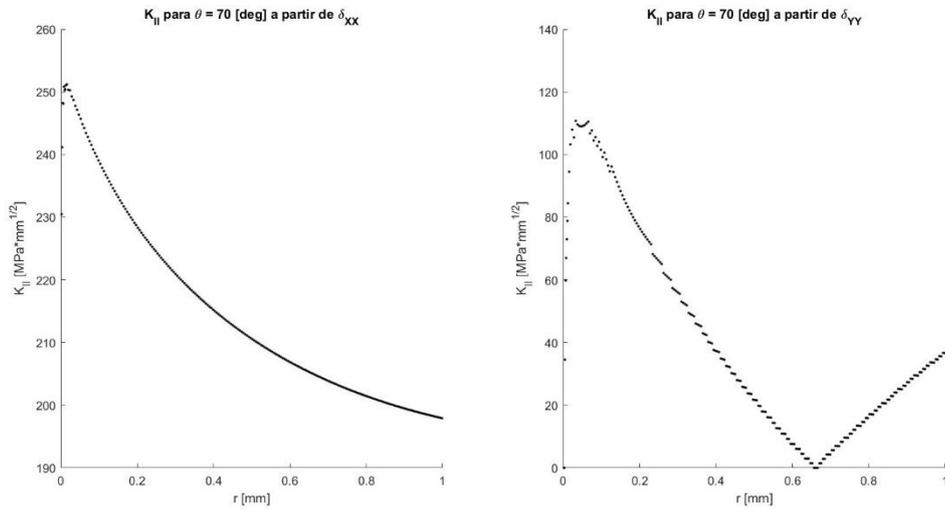


Figura 108. $K_{II}(r)$ para modo II y $a/b=0,05$, según (35) (zoom).

- $a/b = 0,1$

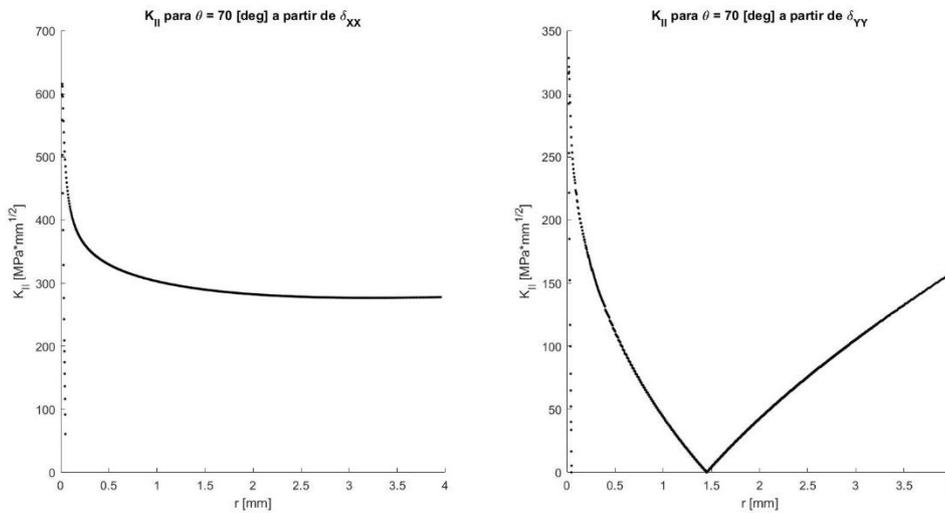


Figura 109. $K_{II}(r)$ para modo II y $a/b=0,1$, según (35).

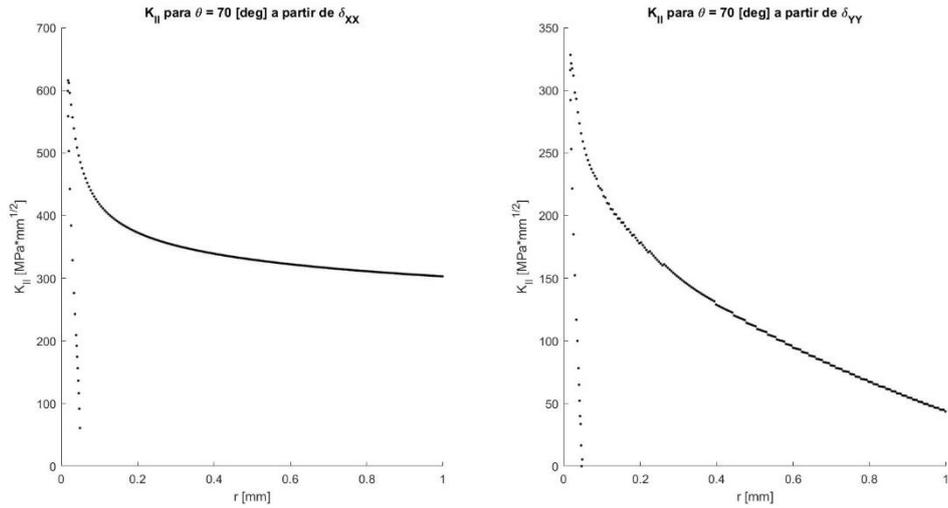


Figura 110. $K_{II}(r)$ para modo II y $a/b=0,1$, según (35) (zoom).

- $a/b = 0,3$

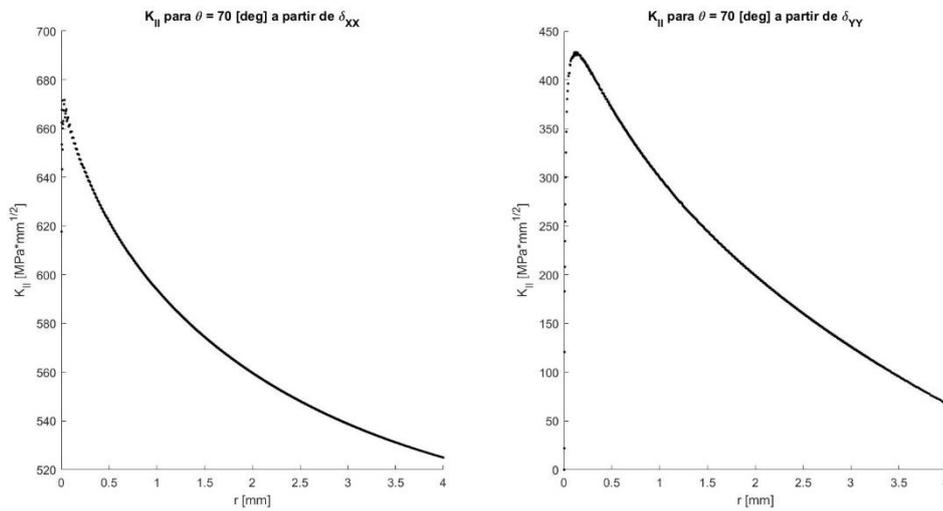


Figura 111. $K_{II}(r)$ para modo II y $a/b=0,3$, según (35).

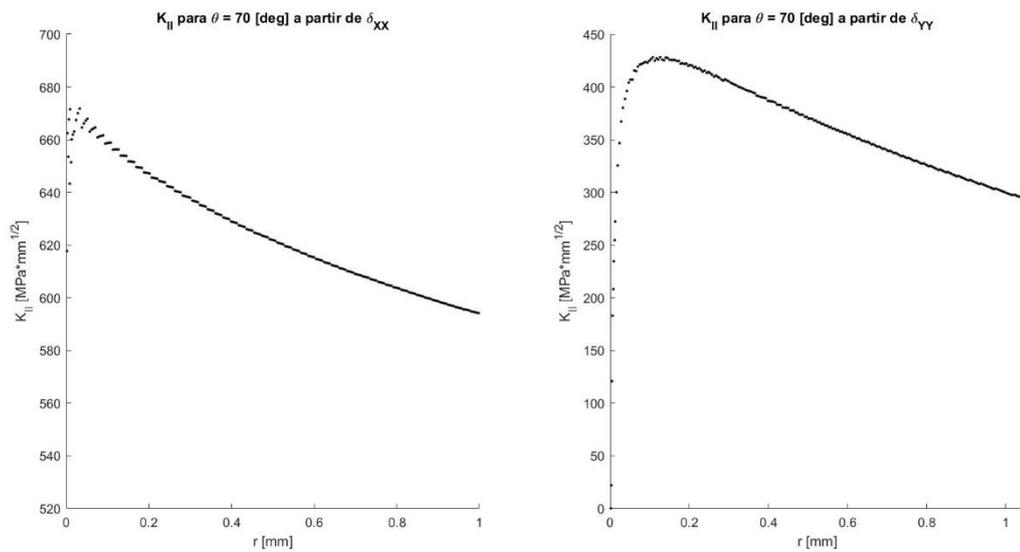


Figura 112. $K_{II}(r)$ para modo II y $a/b=0,3$, según (35) (zoom).

- $a/b = 0,5$

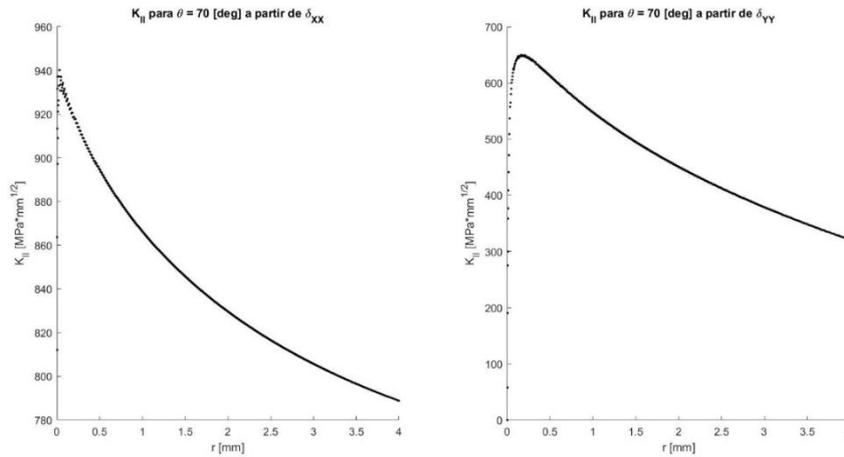


Figura 113. $K_{II}(r)$ para modo II y $a/b=0,5$, según (35).

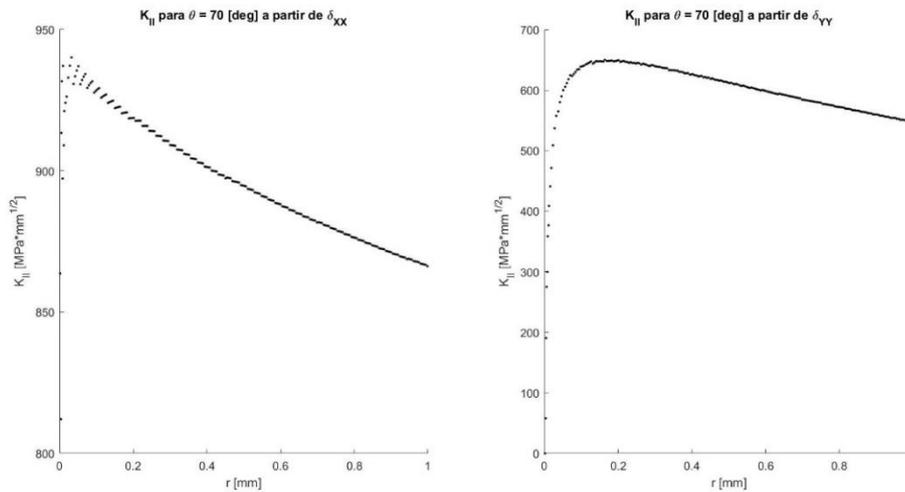


Figura 114. $K_{II}(r)$ para modo II y $a/b=0,5$, según (35) (zoom).

1.3.6. Ajuste del SIF

El valor final de K_{II} , se halla ajustando la zona más lineal (en general, entre 0,1 y 1 mm desde el frente de grieta) de las gráficas obtenidas, tanto para tensiones como para deformaciones, a la ecuación de una recta por mínimos cuadrados, para minimizar el error. El SIF final, tal como se expone en la Figura 13, será la extrapolación de dicha recta para un valor de abscisas nulo.

A modo de ejemplo, se muestra el ajuste de $K_{II}(r)$ para $a/b=0,05$ a partir de δ_{xx} :

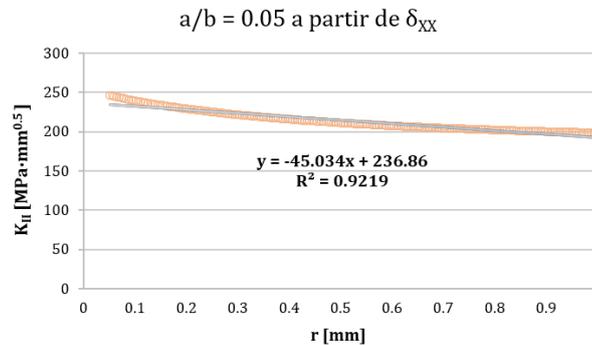


Figura 115. Ajuste del SIF para un caso de modo II.

Para el resto de los casos:

- $a/b = 0,05$

Tabla 17. Ajuste de K_{II} para modo II y $a/b=0,05$.

a/b	Según	Recta ajuste	R ²	K_{II} (MPa·mm ^{1/2}) para r=0
0,05	σ_X	$y = -94.902x + 274.34$	0,9992	274,34
	σ_Y	$y = 232.28x + 254.07$	0,9914	254,07
	τ_{XY}	$y = 247.74x + 291.55$	0,9997	291,55
	δ_X	$y = -45.034x + 236.86$	0,9219	236,86
	δ_Y	$y = -191.3x + 116.37$	0,9905	116,37

- $a/b = 0,1$

Tabla 18. Ajuste de K_{II} para modo II y $a/b=0,1$.

a/b	Según	Recta ajuste	R ²	K_{II} (MPa·mm ^{1/2}) para r=0
0,1	σ_X	$y = -43.782x + 381.03$	0,9296	381,03
	σ_Y	$y = 202.44x + 372.07$	0,9931	372,07
	τ_{XY}	$y = 208.63x + 374.34$	0,9970	374,34
	δ_X	$y = -77.176x + 372.9$	0,9395	372,90
	δ_Y	$y = -160.65x + 196.34$	0,9846	196,34

- $a/b = 0,3$

Tabla 19. Ajuste de K_{II} para modo II y $a/b=0,3$.

a/b	Según	Recta ajuste	R ²	K_{II} (MPa·mm ^{1/2}) para r=0
0,3	σ_X	$y = -37.025x + 701.75$	0,9826	701,75
	σ_Y	$y = 136.1x + 655.25$	0,9972	655,25
	τ_{XY}	$y = 99.689x + 730.8$	0,9994	730,8
	δ_X	$y = -69.258x + 658.91$	0,9833	658,91
	δ_Y	$y = -152.36x + 448.45$	0,9976	448,45

- $a/b = 0,5$

Tabla 20. Ajuste de K_{II} para modo II y $a/b=0,5$.

a/b	Según	Recta ajuste	R ²	K_{II} (MPa·mm ^{1/2}) para r=0
0,5	σ_X	$y = -24.295x + 970.75$	0,9110	970,75
	σ_Y	$y = 123.85x + 940.51$	0,9937	940,51
	τ_{XY}	$y = 76.393x + 1011.2$	0,9970	1011,2
	δ_X	$y = -67.588x + 930.36$	0,9882	930,36
	δ_Y	$y = -123.78x + 672.29$	0,9866	672,29

1.3.7. Error relativo

Por último, se calcula el porcentaje de error relativo entre el K_{II} obtenido con la fórmula teórica y el hallado a partir de los resultados de EF. Es decir:

$$error (\%) = \frac{|K_{II}^{TEORÍA} - K_{II}^{EF}|}{K_{II}^{TEORÍA}} \cdot 100 \quad (37)$$

Se han obtenido los resultados que se muestran a continuación:

Tabla 21. Error relativo de K_{II} a partir de las tensiones de EF respecto (3).

a/b	K_{II} (MPa·mm ^{1/2})	K_{II} (EF, σ_x)	error (%)	K_{II} (EF, σ_y)	error (%)	K_{II} (EF, τ_{xy})	error (%)
0,05	280,25	274,34	2,11	254,07	9,34	291,55	4,03
0,1	396,33	381,03	3,86	372,07	6,12	374,34	5,55
0,3	713,93	701,75	1,71	655,25	8,22	730,80	2,36
0,5	1001,44	970,75	3,06	940,51	6,08	1011,20	0,97

Tabla 22. Error relativo de K_{II} a partir de las deformaciones de EF respecto (3).

a/b	K_{II} (MPa·mm ^{1/2})	K_{II} (EF, δ_x)	error (%)	K_{II} (EF, δ_y)	error (%)
0,05	280,25	236,86	15,48	116,37	58,48
0,1	396,33	372,90	5,91	196,34	50,46
0,3	713,93	658,91	7,71	448,45	37,19
0,5	1001,44	930,36	7,10	672,29	32,87

1.3.8. Descripción de los resultados

Se ha obtenido K_{II} para los cuatro casos estudiados de modo II, a partir de fórmulas teóricas y de EF. A partir del modelo de Ansys, y según el sistema de referencia orientado según la grieta, se extraen los resultados de tensiones y deformaciones en un path a 70° de inclinación respecto del frente de grieta, por ser la dirección de propagación del defecto según el segundo modo de fractura.

Finalmente, el valor definitivo a partir de EF se calcula ajustando la zona más lineal de la gráfica de $K_{II}(r)$, que está en el rango de 0,1 mm y 1 mm desde el frente de grieta, a una línea recta por mínimos cuadrados, y se toma el punto de corte con el eje de ordenadas.

De los errores relativos obtenidos, destaca:

- Tal como sucedía en los resultados del modo I, la hipótesis de [2] de que “el SIF se obtiene con más precisión a partir de deformaciones que de tensiones” no es cierta. Aunque en el primer modo de fractura el SIF obtenido no presentaba un error muy superior a partir de deformaciones que de tensiones, no estaba clara su fiabilidad. En modo II, queda patente que calcular el factor de tensiones mediante el campo de deformaciones da lugar a errores mucho mayores y del lado de la inseguridad (porque predicen un SIF inferior al real), por lo que no se recomienda hacer uso de esa técnica.
- Los valores de K_{II} calculados a partir de los resultados de tensiones de EF se ajustan muy bien a los que predice la fórmula teórica (3).

- Con las componentes σ_x , σ_y y τ_{xy} se llega a valores muy similares de K_{II} , con porcentajes de error muy bajos. No influye tampoco el tamaño de grieta, puesto que el SIF obtenido para grietas más cortas (a/b bajo) y largas (a/b alto) se ajusta bien a la fórmula teórica.

Por último, en referencia a las gráficas de $K_{II}(r)$, se puede identificar:

- La zona desde aproximadamente 0,1 mm y 1 mm es en general la más lineal, por eso es la que se ajusta para calcular el factor de intensidad de tensión según EF.
- Por debajo de 0,1 mm, se observa en las gráficas de $K_{II}(r)$ en base a tensiones, que los puntos de la gráfica en general tienden a cero. Eso es porque, como se ve en (1), la distancia r se aproxima a cero y por ello $K_{II}(r)$ tiende a cero. Sin embargo, en las gráficas de $K_{II}(r)$ en base a deformaciones, poniendo el foco en (6), a medida que se aproxima el frente de grieta, r tiende a valores cercanos a cero y por ello K_{II} crece (disminuye el denominador). Por último, cuando r ya es nulo o casi nulo, K_{II} empieza a decrecer hacia el valor nulo.

A modo de ejemplo, se muestra en la siguiente figura cómo varía la tensión en un path a 70° tomado del caso de grieta de 5 mm ($a/b = 0,05$).

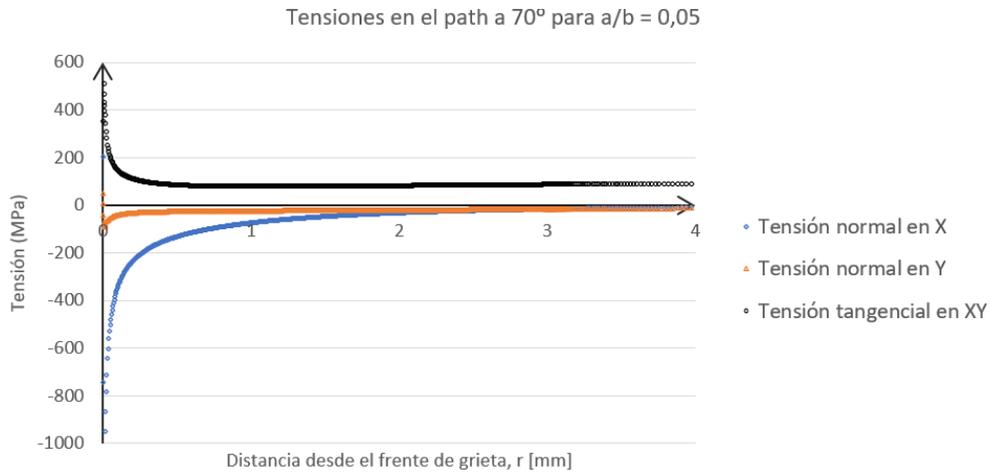


Figura 116. Variación de la tensión en el path a 70° (modo II, $a/b = 0,05$).

1.4. Modos mixtos I y II

1.4.1. Casos estudiados

Se han estudiado tres casos de modo mixto plano, donde intervienen tanto modo I como modo II en la propagación de la grieta. La geometría general seguida ha sido la de una chapa cuadrada de pequeño espesor, con una carga axial a cada lado.

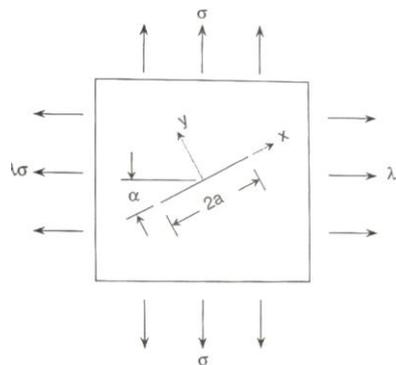


Figura 117. Caso general de modo mixto plano.

Tal como se expone en el ANÁLISIS DEL ESTADO DEL ARTE, los casos posibles son:

- Si $\alpha = 0^\circ$, se tendrá modo I puro para cualquier λ .
- Si $\alpha = 45^\circ$ y $\lambda = -1$, se tendrá modo II puro.
- En cualquier otro caso, los modos I y II se combinarán.

En los tres casos se ha analizado una chapa de altura (h) de 100 mm y de ancho (b) de igual valor. Se va a fijar una grieta de 10 mm para los tres casos:

Tabla 23. Casos estudiados de modo mixto I + II.

Caso nº	Anchura (mm)	Altura (mm)	Espesor (mm)	Tamaño grieta, 2a (mm)	α (°)	λ
1	100	100	3	10	10	-1
2				10	30	-1
3				10	60	0,5

El primer ejemplo se trata de un caso donde, si bien los modos I y II intervienen, el primer modo predomina más (α está más próximo a 0°), por lo que se espera que K_I sea muy superior a K_{II} . El segundo, en cambio, es un ejemplo donde ambos modos intervienen de forma más “equilibrada”, siendo el valor de α intermedio entre 0° y 70° . Por último, el tercer caso se caracteriza por tener α cercano a 70° , lo cual indica que el modo II podría cobrar más importancia, pero no tiene por qué ser K_{II} muy superior a K_I , porque λ no es -1.

1.4.2. Condiciones de contorno y cargas aplicadas

Al igual que sucede en los casos de modo II, tampoco se puede aprovechar ninguna simetría para simplificar el análisis y reducir su coste, por lo que habrá que modelizar toda la pieza.

En lo referente a las cargas, se va a introducir una tensión de módulo 100 MPa, siendo en los tres casos de tracción en el borde superior, mientras que en el lateral su sentido vendrá dado por λ (última columna de la Tabla 23). Por último, las condiciones de contorno serán análogas a las usadas para modo I y modo II:

- En uno de los lados verticales de la chapa, se impide el desplazamiento horizontal, mientras que en vertical se deja libre, para que pueda deformarse.
- En la parte inferior, se impide el desplazamiento vertical, dejando libre el desplazamiento horizontal, en orden a permitir la deformación.
- En la zona de la grieta, como físicamente no hay material, se deja libre.

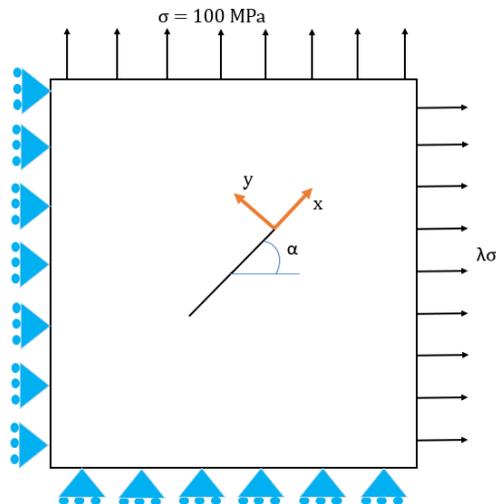


Figura 118. Cargas y condiciones de contorno (modo mixto I y II)

1.4.3. Mallado

Después de ver cómo se modelizó la grieta en los casos de modo II, y teniendo en cuenta que los resultados obtenidos para el factor de intensidad de tensión eran aceptables, para realizar el mallado de los modelos de modos mixtos se sigue el mismo patrón. Es decir:

Siguiendo el mismo criterio, se van a utilizar elementos bidimensionales de tipo cuadrilátero: de primer orden en la región más lejana al defecto (porque ahí la tensión tiende a la nominal) y de orden superior en la cercanía de la grieta.

En cuanto a la grieta, una vez superados los obstáculos expuestos en el apartado relativo a la malla de los modelos del segundo modo, se modeliza el defecto de la misma manera: tal como se definió en la Figura 79.

Para los tres casos de modo mixto plano estudiados, se mantiene el tamaño de grieta en 10 mm, y lo que va variando en la geometría es la inclinación del defecto. Entonces, el proceso de mallado es análogo en los tres casos. Por ejemplo, para el primero de ellos:

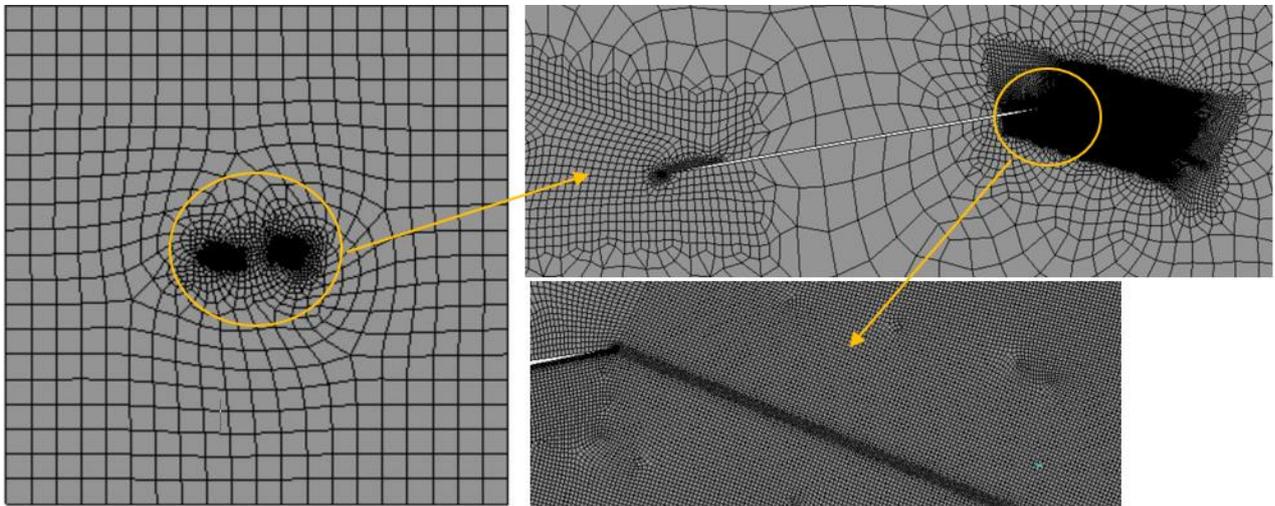


Figura 119. Mallado en modo mixto plano.

La zona más refinada es la cercanía de la grieta. Se debe tener una densidad de elementos más o menos similar por ambos lados del defecto, porque si no la rigidez variaría según el costado y los esfuerzos no se transmitirían de igual forma por ambos lados. Por último, en la derecha de la figura se observa que se ha refinado aún más en una inclinación determinada respecto del frente de grieta. Corresponde a la dirección de propagación de grieta según el caso primero analizado de modo mixto I y II. El valor de esa inclinación se obtiene en el apartado de Cálculos.

Los tres modelos de modos mixtos I y II rondan los 100000 nodos, y tardan en ejecutar entre dos y tres minutos (son muy parejos en cuanto a dimensiones y coste a los de modo II, porque las dimensiones de la chapa son idénticas y el proceso de mallado análogo). Por tanto, se tiene un coste computacional muy asequible.

1.4.4. Resultados de EF

Se extraen de cada modelo las tensiones necesarias para calcular el SIF, según el sistema de referencia definido en el frente de grieta y alineado con la misma. De dichos resultados, se exportará lo referente a un path a una inclinación determinada, la dirección de propagación de grieta, que se calculará más adelante.

No se extraen las deformaciones porque no se van a usar para el cálculos de los factores de intensidad de tensión. La razón es que el SIF obtenido en base a deformaciones no es fiable, tal como se ha mostrado en los resultados para modo I y modo II.

Los resultados son los siguientes:

1.4.4.1. Caso 1 ($\alpha = 10^\circ$)

Tensiones normales y tangenciales:

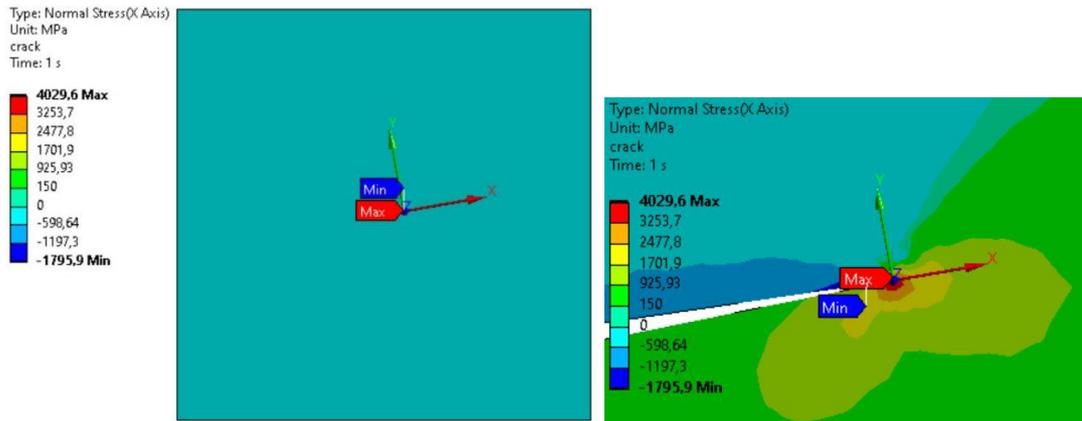


Figura 120. Tensiones normales en X (modo mixto I y II, caso 1).

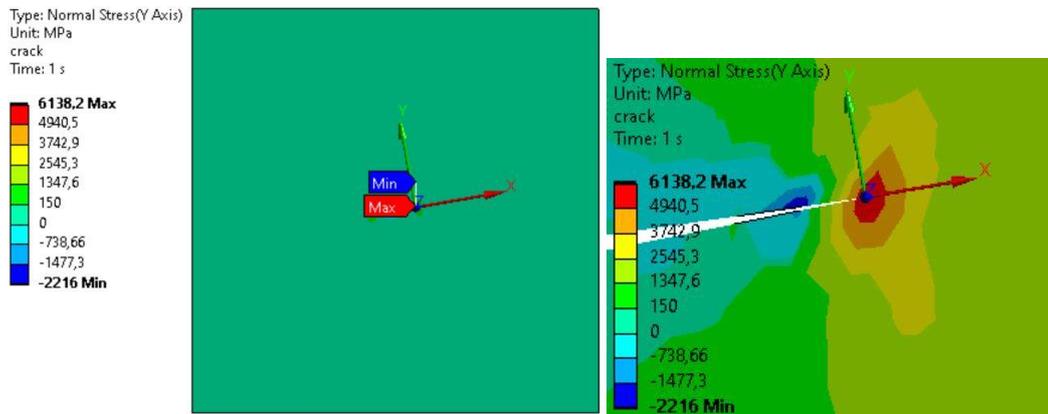


Figura 121. Tensiones normales en Y (modo mixto I y II, caso 1).

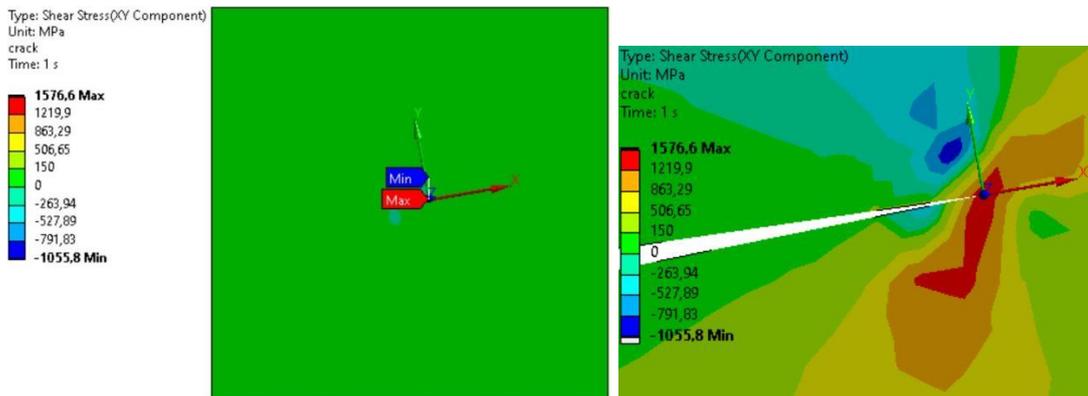


Figura 122. Tensiones tangenciales en XY (modo mixto I y II, caso 1).

1.4.4.2. Caso 2 ($\alpha = 30^\circ$)

Tensiones normales y tangenciales:

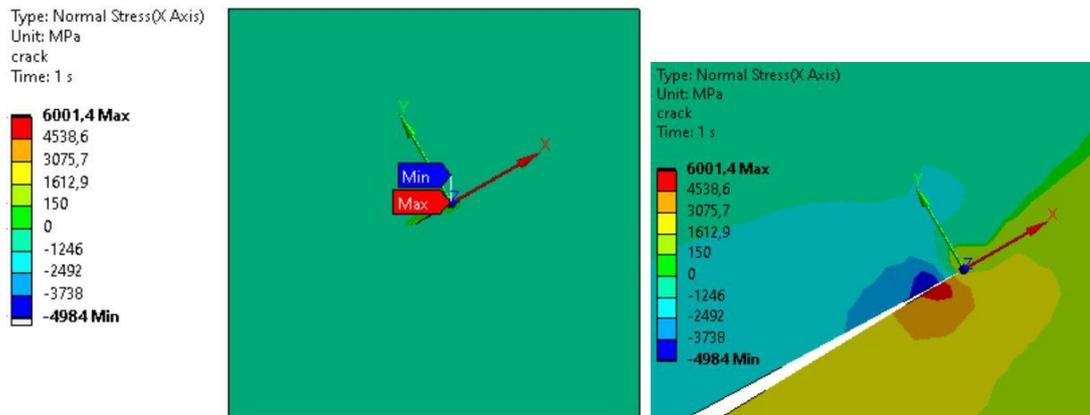


Figura 123. Tensiones normales en X (modo mixto I y II, caso 2).

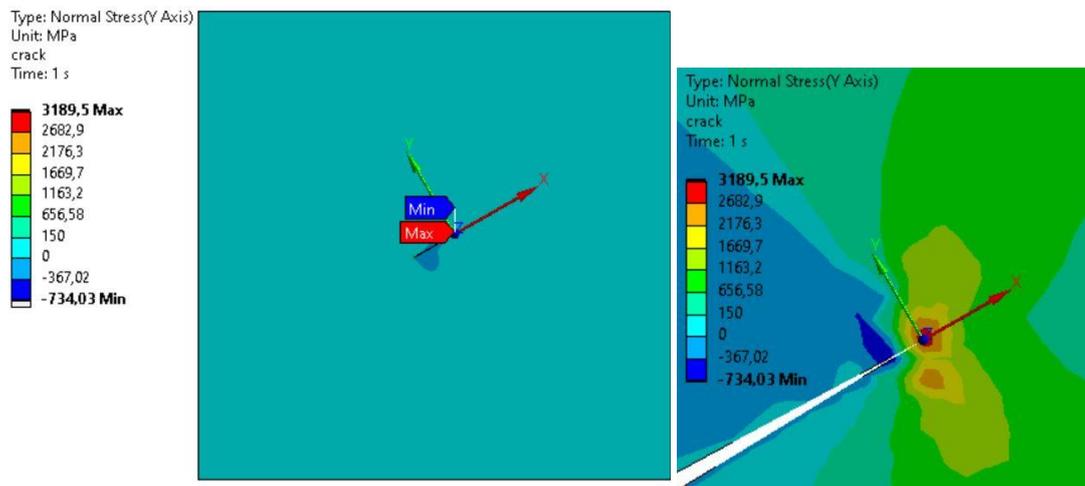


Figura 124. Tensiones normales en Y (modo mixto I y II, caso 2).

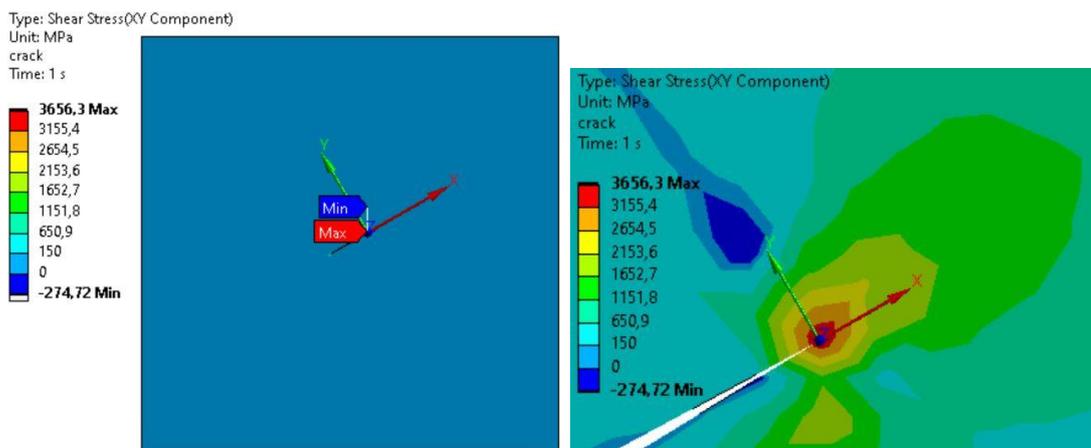


Figura 125. Tensiones tangenciales en XY (modo mixto I y II, caso 2).

1.4.4.3. Caso 3 ($\alpha = 60^\circ$)

Tensiones normales y tangenciales:

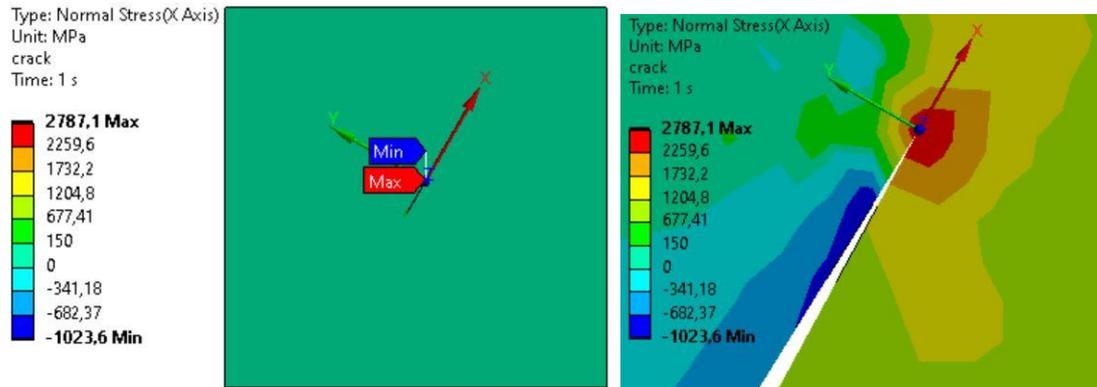


Figura 126. Tensiones normales en X (modo mixto I y II, caso 3).

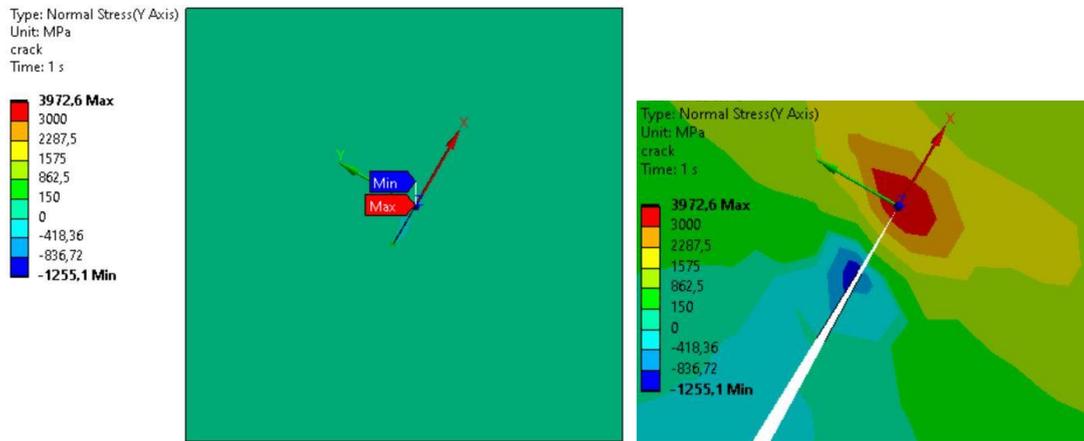


Figura 127. Tensiones normales en Y (modo mixto I y II, caso 3).

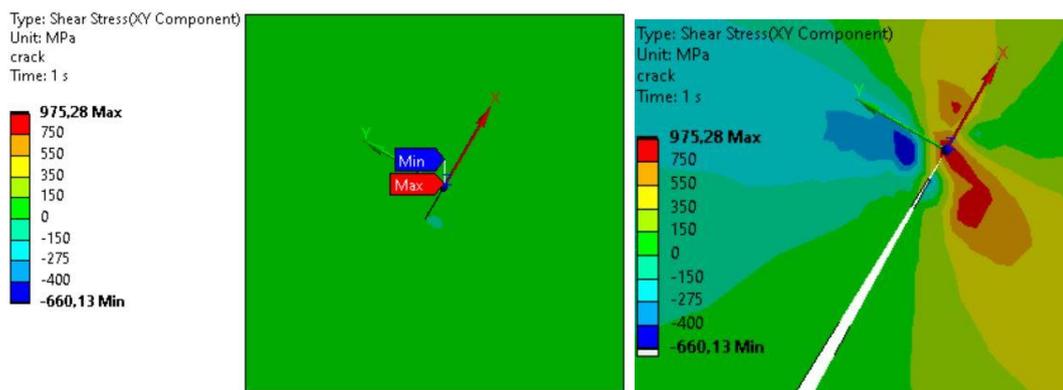


Figura 128. Tensiones tangenciales en XY (modo mixto I y II, caso 3).

1.4.4.4. Verificación del modelo

El modelo se va a verificar de un modo análogo a lo que se comentó para el modo II. Al igual que sucedía en este, en los bordes de la grieta se tiene una concentración de tensiones importante. En cuanto al patrón de las tensiones normales y tangenciales, en los tres casos no es el mismo. Y es que, efectivamente, no debería ser el mismo, porque tanto la inclinación de la grieta como el estado de cargas varían.

El caso primero se asemeja más a un caso de modo I puro (la inclinación de la grieta es cercana a 0°), de ahí que la distribución tensional en el frente de grieta tenga más similitud con el patrón de tensiones de las piezas de modo I. El caso segundo, en cambio, es un caso intermedio donde no hay un predominio evidente ni del modo I ni del II; pero el tercer caso, al tener la grieta inclinada casi a 70°, sí que se caracteriza por tener un patrón tensional parecido al de un caso de modo II puro.

Para corroborar que el modelo ha dado los resultados esperados, se va a obtener la tensión en la lejanía de la grieta, según el sistema de referencia de cada caso, esto es, en función de la inclinación de la grieta.

Para los casos primero y segundo, siendo $\lambda = -1$, se tiene:

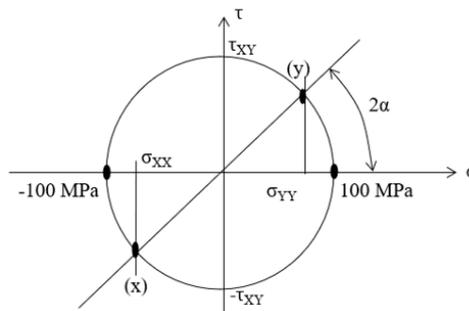


Figura 129. Comprobación de los casos 1 y 2 (modo mixto plano).

Para el caso 1, siendo el radio 100 MPa y la inclinación de la grieta (α) de 10° se tiene:

$$\sigma_X = -100 \cdot \cos(10) = -98,48 \text{ MPa}; \sigma_Y = 100 \cdot \cos(10) = 98,48 \text{ MPa}$$

$$\tau_{XY} = 100 \cdot \sin(10) = 17,36 \text{ MPa}$$

Para el caso 2, siendo el radio 100 MPa y la inclinación de la grieta (α) de 30° se tiene:

$$\sigma_X = -100 \cdot \cos(30) = -86,6 \text{ MPa}; \sigma_Y = 100 \cdot \cos(30) = 86,6 \text{ MPa}$$

$$\tau_{XY} = 100 \cdot \sin(30) = 50 \text{ MPa}$$

Para el tercer caso, siendo $\lambda = 0,5$, se tiene:

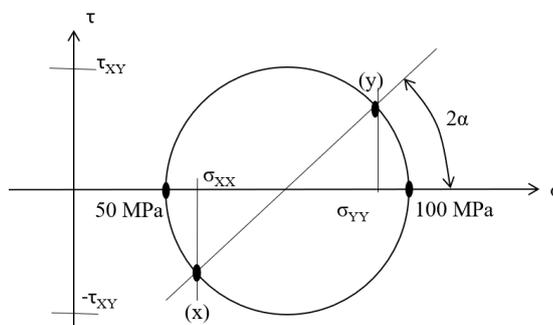


Figura 130. Comprobación del caso 3 (modo mixto plano).

Siendo el radio 25 MPa:

$$\sigma_x = 25 \cdot \cos(60) = 12,5 \text{ MPa}; \sigma_y = 25 \cdot \cos(60) = 12,5 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = 25 \cdot \sin(60) = 21,65 \text{ MPa}$$

Se da por válido el modelo, ya que los resultados teóricos concuerdan con la escala de colores de los resultados obtenidos. Estos resultados teóricos no tienen por qué coincidir exactamente con los reales, debido a que el efecto de la grieta no está considerado. No obstante, sí que estarán cerca de los reales y por ello sirven para tener un orden de magnitud de cuál debería ser la solución aproximada del modelo.

1.4.5. Cálculos

1.4.5.1. K_I y K_{II} según fórmula teórica

Al tratarse de casos de modo mixto plano, intervienen tanto el modo I como el modo II, y por ende deberán hallarse K_I y K_{II} .

Se calcula, por un lado, el factor de intensidad de tensión para modo I a partir de (11). El factor geométrico es igual a la unidad al tratarse de tres casos de chapa infinita. Se tiene entonces:

Tabla 24. K_I obtenido según (11).

2a (mm)	a (mm)	a/b	α_I	λ	α (°)	σ (MPa)	K_I (MPa·mm ^{1/2})
10	5	0,1	1	-1	10	100	372,43
10	5	0,1	1	-1	30		198,17
10	5	0,1	1	0,5	60		247,71

A continuación, se obtiene K_{II} haciendo uso de (12). El factor geométrico es igual a la unidad al tratarse de tres casos de chapa infinita. Entonces:

Tabla 25. K_{II} obtenido según (11).

2a (mm)	a (mm)	a/b	α_{II}	λ	α (°)	σ (MPa)	K_{II} (MPa·mm ^{1/2})
10	5	0,1	1	-1	10	100	135,55
10	5	0,1	1	-1	30		343,23
10	5	0,1	1	0,5	60		85,81

1.4.5.2. K_I y K_{II} según tensiones de EF

Deben despejarse K_I y K_{II} de (1), siendo K_{III} nulo, por lo que, como se trata de casos de tensión plana (las únicas componentes no nulas son σ_x , σ_y y τ_{xy}), se tienen tres combinaciones posibles:

- Despejar K_I y K_{II} a partir de las ecuaciones de σ_x y σ_y .
- Despejar K_I y K_{II} a partir de las ecuaciones de σ_x y τ_{xy} .
- Despejar K_I y K_{II} a partir de las ecuaciones de σ_y y τ_{xy} .

Cada una de esas combinaciones será un sistema lineal de dos ecuaciones y dos incógnitas. Es lineal porque, para cada caso, el ángulo de inclinación de la grieta tendrá un valor fijo: el correspondiente a la dirección de propagación de grieta, hallado según (16) a partir de los SIF teóricos calculados en el apartado previo. El path para extraer los resultados de tensión del modelo de EF se realizará en dicha inclinación, tal como se muestra en Figura 119.

El ángulo de propagación de grieta obtenido de (16) para cada caso se recoge a continuación.

Tabla 26. Ángulo de propagación de grieta, según (16).

Caso nº	K_I (MPa·mm ^{1/2}) teórico	K_{II} (MPa·mm ^{1/2}) teórico	φ (°)
1	372,43	135,55	-32,37
2	198,17	343,23	-60,62
3	247,71	85,81	-31,39

Se recuerda que, tal como se expone en la Figura 19, el criterio de signos implica un ángulo positivo en sentido antihorario. Así, por ejemplo en el caso 1, el mallado debe refinarse en sentido horario a una inclinación de 32,37° respecto a la grieta (Figura 119).

Planteando K_I y K_{II} a partir de las ecuaciones de σ_X y σ_Y :

$$\begin{bmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \left(1 - \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{3\varphi}{2}\right) & -\sin \frac{\varphi}{2} \cdot \left(2 + \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{3\varphi}{2}\right) \\ \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \left(1 + \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{3\varphi}{2}\right) & \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{3\varphi}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{Bmatrix} = \sqrt{2\pi r} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \end{Bmatrix} \quad (38)$$

Planteando K_I y K_{II} a partir de las ecuaciones de σ_X y τ_{XY} :

$$\begin{bmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \left(1 - \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{3\varphi}{2}\right) & -\sin \frac{\varphi}{2} \cdot \left(2 + \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{3\varphi}{2}\right) \\ \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{3\varphi}{2} & \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \left(1 - \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{3\varphi}{2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{Bmatrix} = \sqrt{2\pi r} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \tau_{XY} \end{Bmatrix} \quad (39)$$

Planteando K_I y K_{II} a partir de las ecuaciones de σ_Y y τ_{XY} :

$$\begin{bmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \left(1 + \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{3\varphi}{2}\right) & \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{3\varphi}{2} \\ \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{3\varphi}{2} & \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \left(1 - \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{3\varphi}{2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{Bmatrix} = \sqrt{2\pi r} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_Y \\ \tau_{XY} \end{Bmatrix} \quad (40)$$

Entonces, debe despejarse K_I y K_{II} de cada sistema lineal, invirtiendo la matriz de coeficientes.

- Caso 1

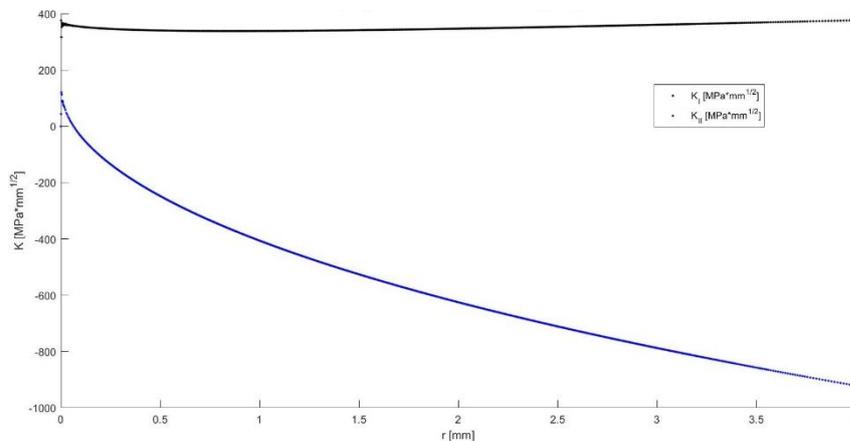


Figura 131. $K_I(r)$ y $K_{II}(r)$ a partir de σ_X y σ_Y , (37), para caso 1.

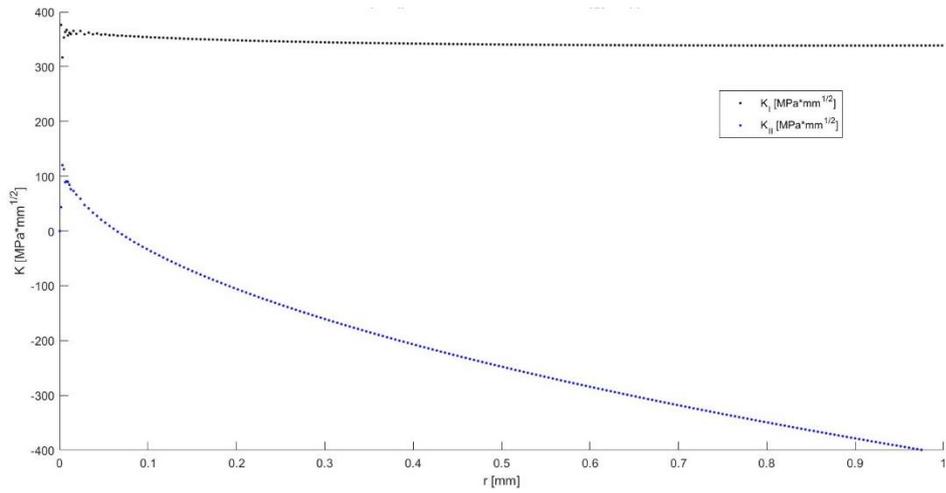


Figura 132. $K_I(r)$ y $K_{II}(r)$ a partir de σ_X y σ_Y , (37), para caso 1 (zoom).

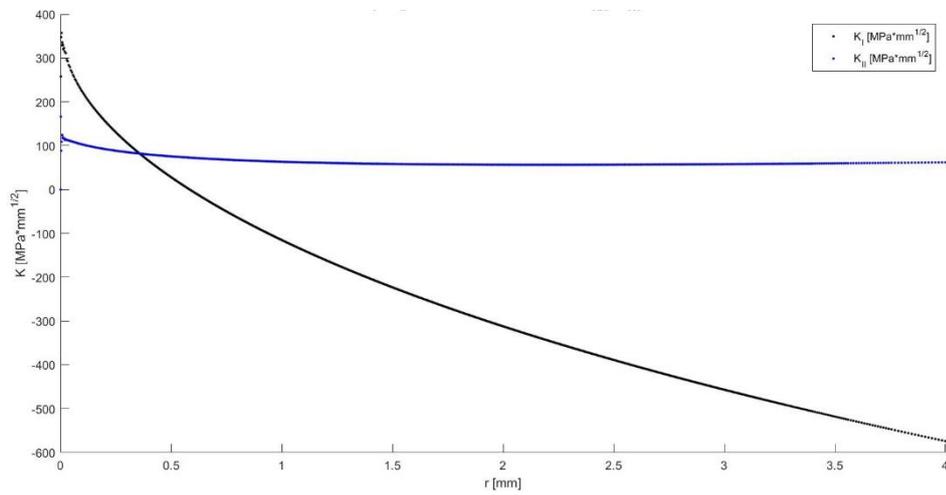


Figura 133. $K_I(r)$ y $K_{II}(r)$ a partir de σ_X y τ_{XY} , (38), para caso 1.

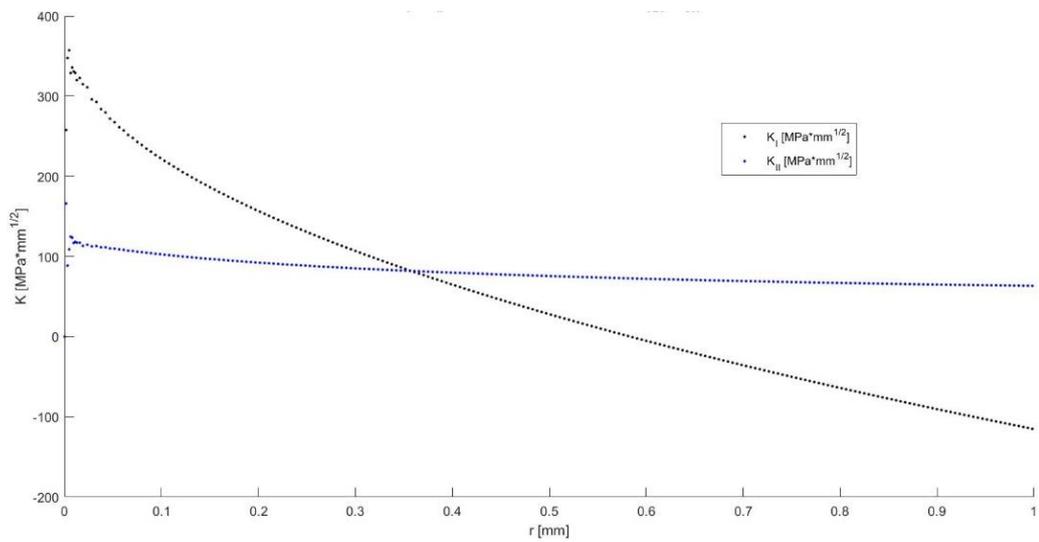


Figura 134. $K_I(r)$ y $K_{II}(r)$ a partir de σ_X y τ_{XY} , (38), para caso 1 (zoom).

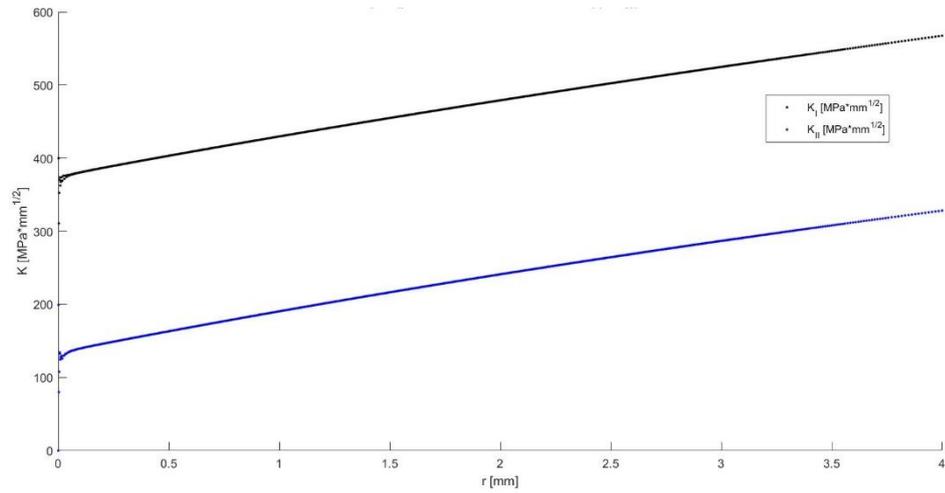


Figura 135. $K_I(r)$ y $K_{II}(r)$ a partir de σ_Y y τ_{XY} , (39), para caso 1.

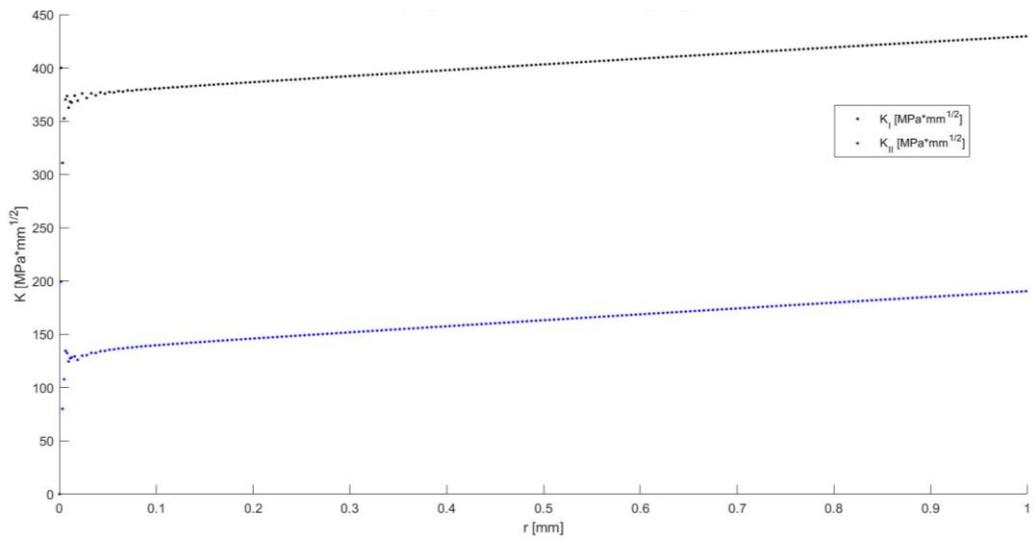


Figura 136. $K_I(r)$ y $K_{II}(r)$ a partir de σ_Y y τ_{XY} , (39), para caso 1 (zoom).

- Caso 2

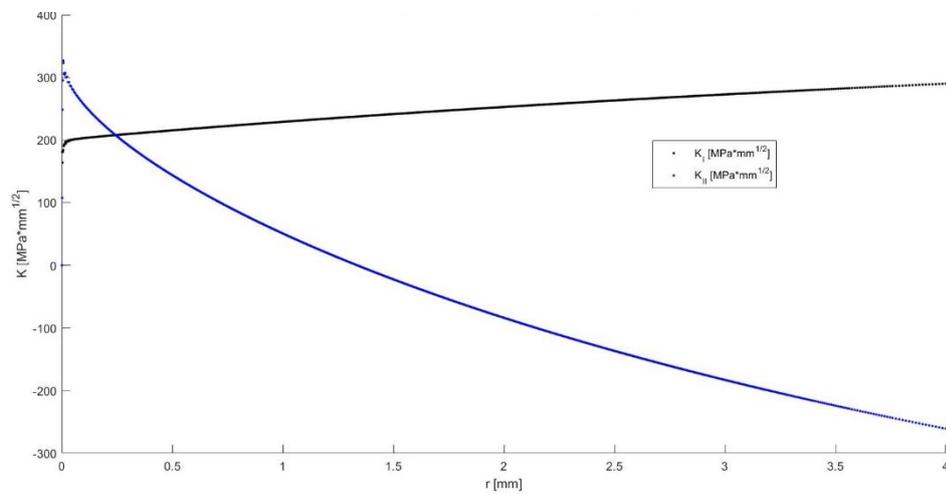


Figura 137. $K_I(r)$ y $K_{II}(r)$ a partir de σ_X y σ_Y , (37), para caso 2.

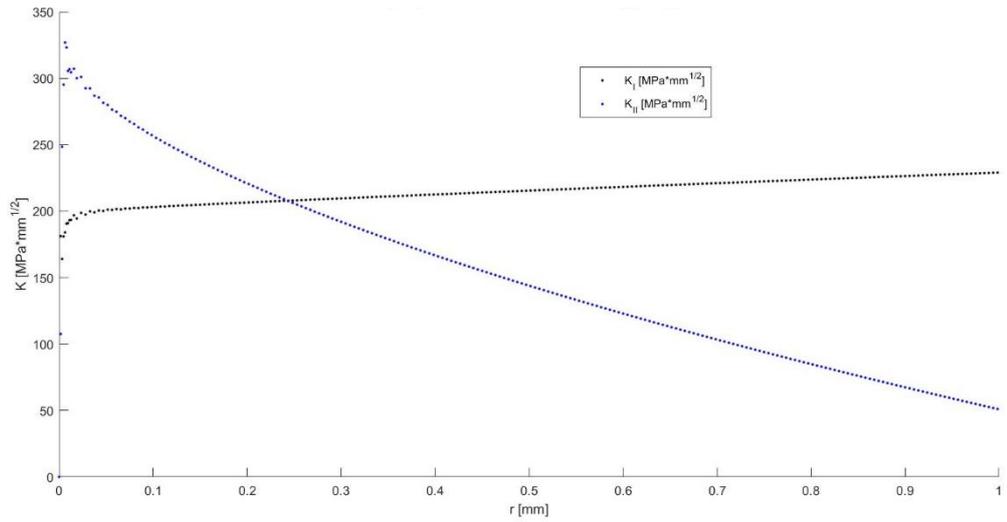


Figura 138. $K_I(r)$ y $K_{II}(r)$ a partir de σ_X y σ_Y , (37), para caso 2 (zoom).

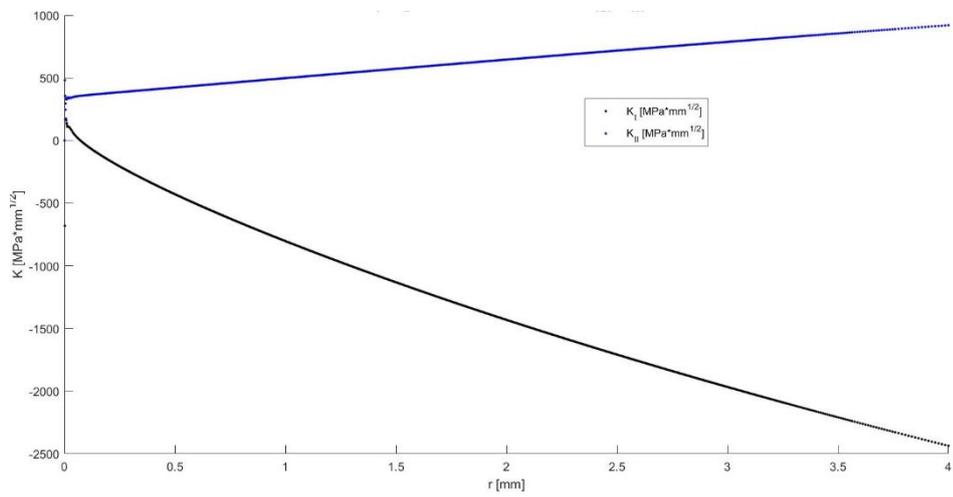


Figura 139. $K_I(r)$ y $K_{II}(r)$ a partir de σ_X y τ_{XY} , (38), para caso 2.

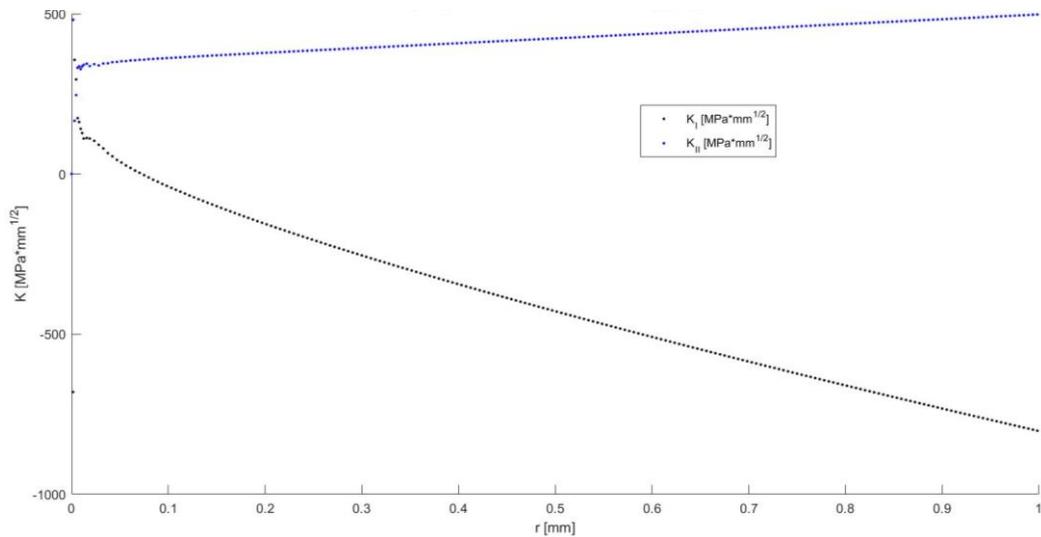


Figura 140. $K_I(r)$ y $K_{II}(r)$ a partir de σ_X y τ_{XY} , (38), para caso 2 (zoom).

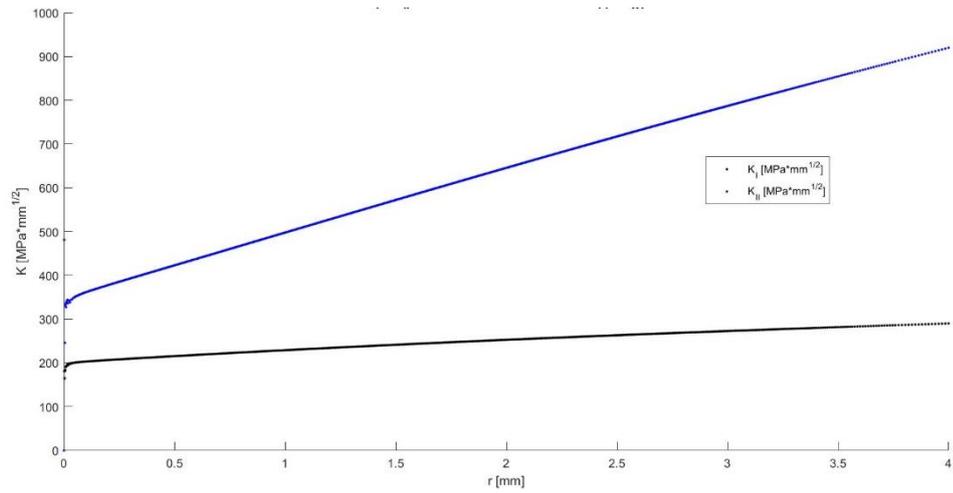


Figura 141. $K_I(r)$ y $K_{II}(r)$ a partir de σ_Y y τ_{XY} , (39), para caso 2.

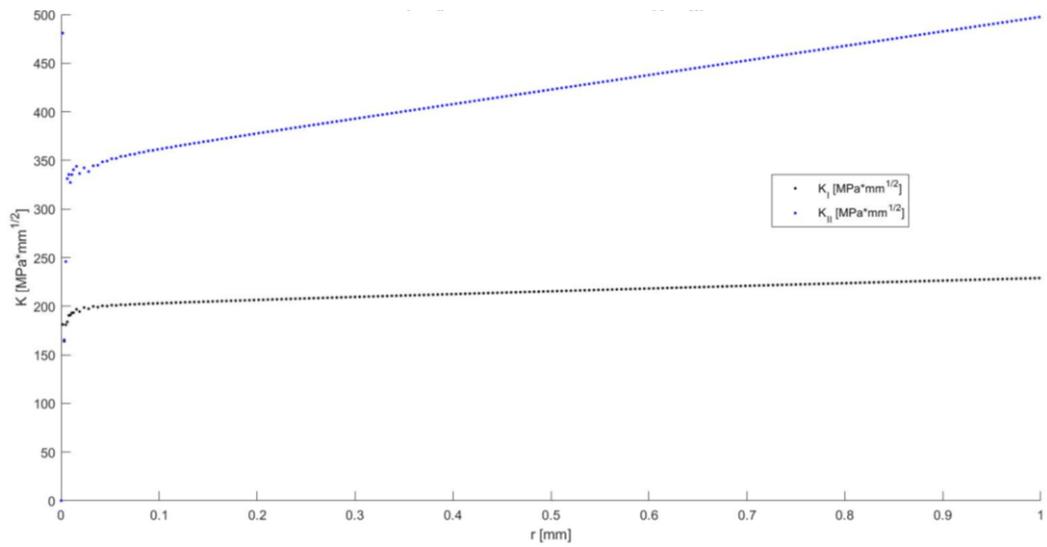


Figura 142. $K_I(r)$ y $K_{II}(r)$ a partir de σ_Y y τ_{XY} , (39), para caso 2 (zoom).

- Caso 3

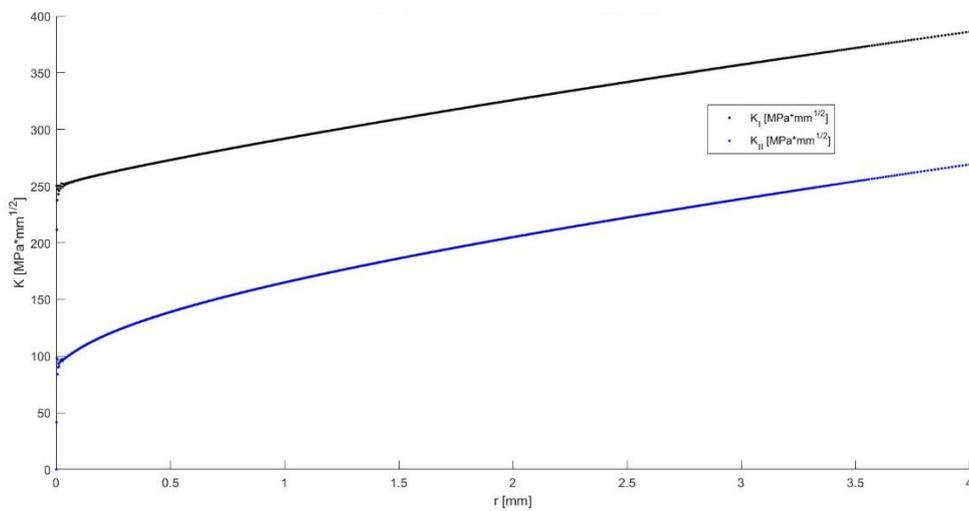


Figura 143. $K_I(r)$ y $K_{II}(r)$ a partir de σ_X y σ_Y , (37), para caso 3.

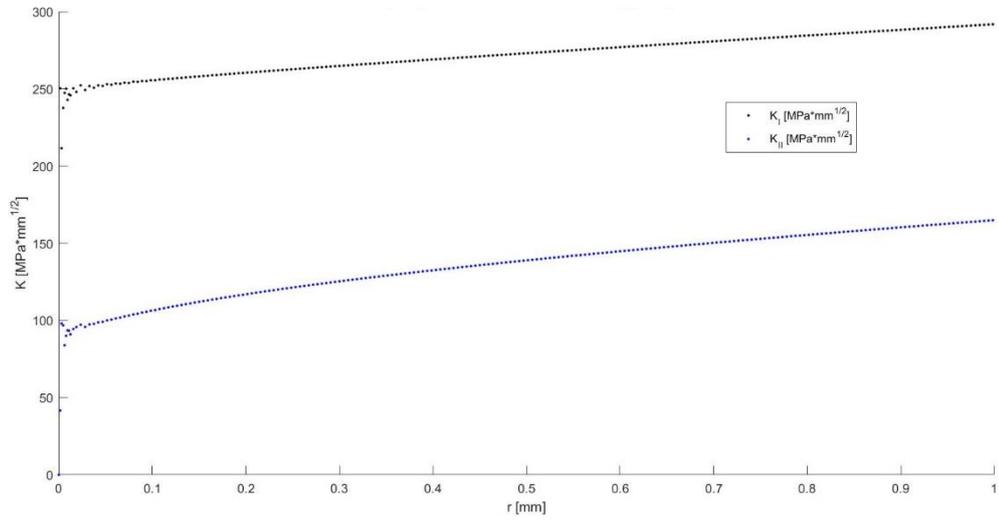


Figura 144. $K_I(r)$ y $K_{II}(r)$ a partir de σ_X y σ_Y , (37), para caso 3 (zoom).

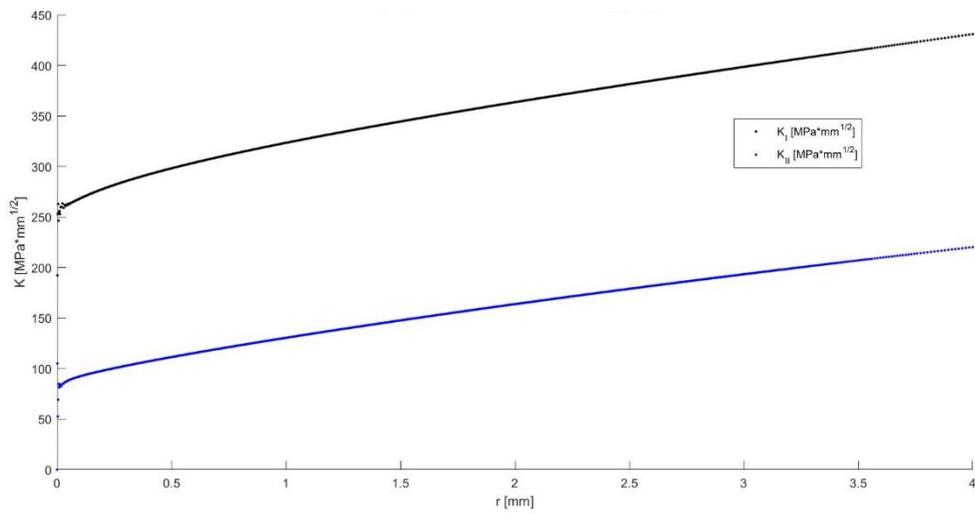


Figura 145. $K_I(t)$ y $K_{II}(t)$ a partir de σ_X y τ_{XY} , (38), para caso 3.

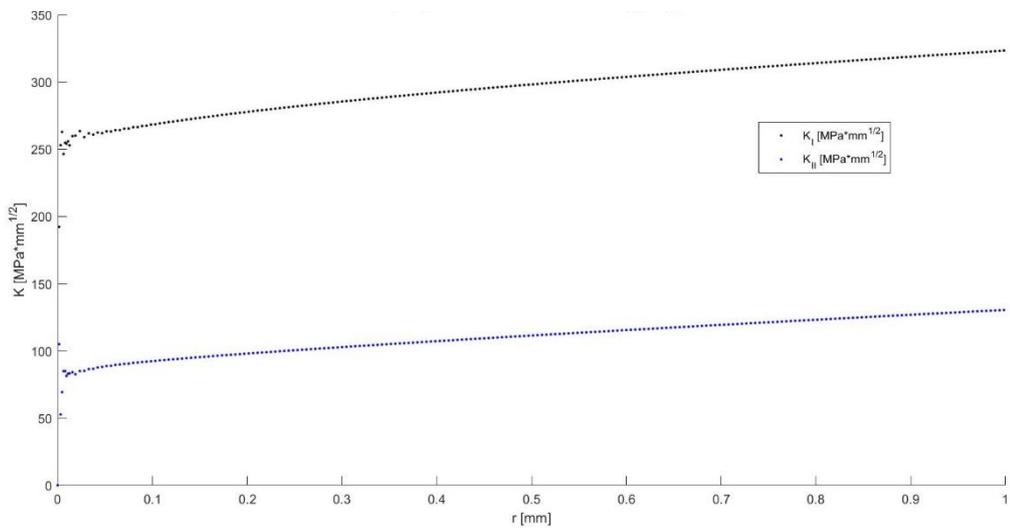


Figura 146. $K_I(r)$ y $K_{II}(r)$ a partir de σ_X y τ_{XY} , (38), para caso 3 (zoom).

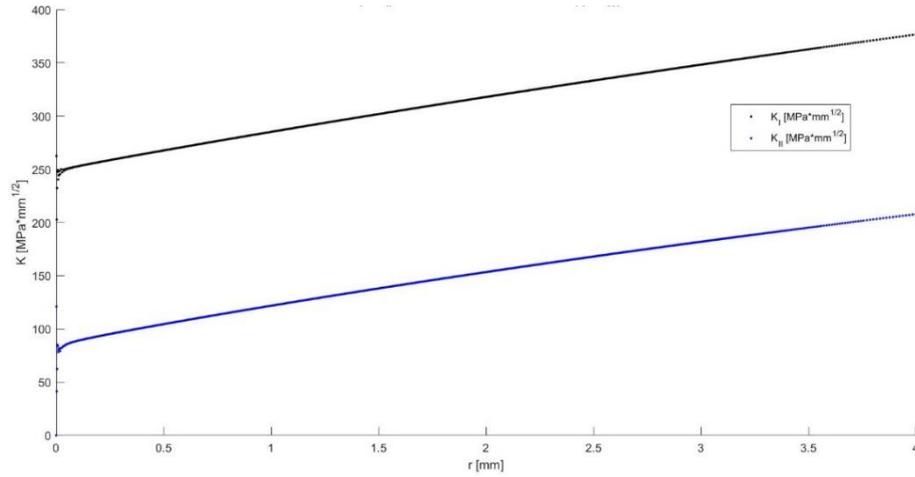


Figura 147. $K_I(r)$ y $K_{II}(r)$ a partir de σ_Y y τ_{XY} , (39), para caso 3.

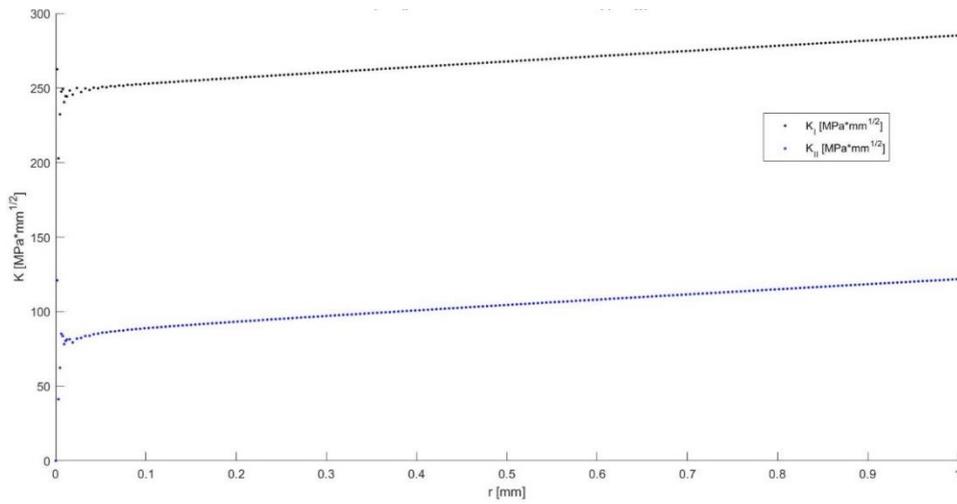


Figura 148. $K_I(r)$ y $K_{II}(r)$ a partir de σ_Y y τ_{XY} , (39), para caso 3 (zoom).

1.4.6. Ajuste del SIF

Los valores definitivos de K_I y K_{II} se calculan ajustando la zona más lineal (en general, entre 0,05 y 1 mm desde el frente de grieta) de las gráficas obtenidas a la ecuación de una recta por mínimos cuadrados, para minimizar el error. Los valores finales, tal como se expone en la Figura 13, serán la extrapolación de dichas rectas para un valor de abscisas nulo.

A modo de ejemplo, se muestra el ajuste de $K_I(r)$ y $K_{II}(r)$ para el caso 2 a partir de σ_Y y τ_{XY} :

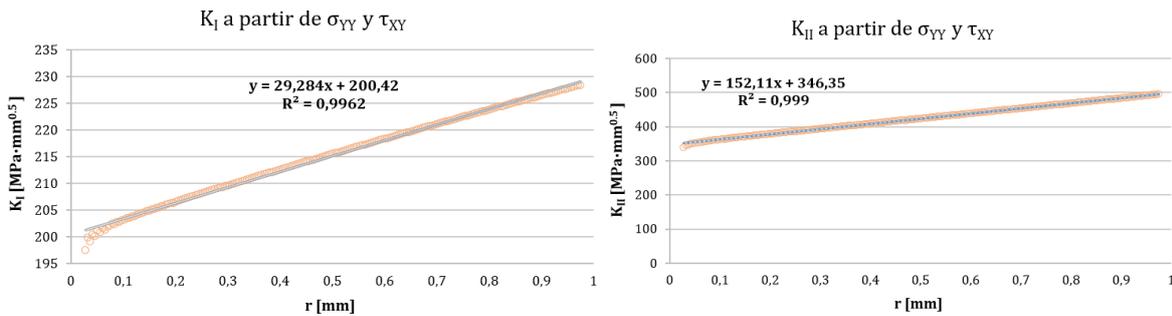


Figura 149. Ajuste del SIF para un caso de modo mixto plano.

Para el resto de casos:

- **Caso 1**

Tabla 27. Ajuste de K_I para modo mixto plano (caso 1).

Según	Recta ajuste	R ²	K_I (MPa·mm ^{1/2}) para r=0
σ_X y σ_Y	$y = -18.454x + 352.35$	0,9759	352,35
σ_X y τ_{XY}	$y = -39.388x + 344.09$	0,9803	344,09
σ_Y y τ_{XY}	$y = 55,077x + 375,28$	0,9985	375,28

Tabla 28. Ajuste de K_{II} para modo mixto plano (caso 1).

Según	Recta ajuste	R ²	K_{II} (MPa·mm ^{1/2}) para r=0
σ_X y σ_Y	$y = -33.176x + 125.14$	0,9913	125,14
σ_X y τ_{XY}	$y = -20.659x + 126.4$	0,8682	126,4
σ_Y y τ_{XY}	$y = 57,118x + 134,16$	0,9979	134,16

- **Caso 2**

Tabla 29. Ajuste de K_I para modo mixto plano (caso 2).

Según	Recta ajuste	R ²	K_I (MPa·mm ^{1/2}) para r=0
σ_X y σ_Y	$y = 29,284x + 200,42$	0,9962	200,42
σ_X y τ_{XY}	$y = -862.25x + 182.22$	0,9914	182,22
σ_Y y τ_{XY}	$y = 29,284x + 200,42$	0,9962	200,42

Tabla 30. Ajuste de K_{II} para modo mixto plano (caso 2).

Según	Recta ajuste	R ²	K_{II} (MPa·mm ^{1/2}) para r=0
σ_X y σ_Y	$y = -233.93x + 317.19$	0,9819	317,19
σ_X y τ_{XY}	$y = 152.11x + 346.35$	0,999	346,35
σ_Y y τ_{XY}	$y = 152.11x + 346.35$	0,999	346,35

- **Caso 3**

Tabla 31. Ajuste de K_I para modo mixto plano (caso 3).

Según	Recta ajuste	R ²	K_I (MPa·mm ^{1/2}) para r=0
σ_X y σ_Y	$y = 40,808x + 252,07$	0,9966	252,07
σ_X y τ_{XY}	$y = 62,196x + 264,99$	0,9845	264,99
σ_Y y τ_{XY}	$y = 36,3x + 249,35$	0,9986	249,35

Tabla 32. Ajuste de K_{II} para modo mixto plano (caso 3).

Según	Recta ajuste	R ²	K_{II} (MPa·mm ^{1/2}) para r=0
σ_X y σ_Y	$y = 66.356x + 91.17$	0,9795	91,17
σ_X y τ_{XY}	$y = 43,011x + 89,067$	0,9927	89,067
σ_Y y τ_{XY}	$y = 37,102x + 85,498$	0,9962	85,498

1.4.7. Error relativo

Se calcula por último el porcentaje de error relativo entre:

- El K_I obtenido con la fórmula teórica y a partir de los resultados de EF, según (34).
- El K_{II} obtenido con la fórmula teórica y a partir de los resultados de EF, según (37).

Resultados obtenidos:

Tabla 33. Error relativo de K_I a partir de las tensiones de EF respecto (2), para modo mixto plano.

Caso	K_I (MPa·mm ^{1/2})	K_I (EF, σ_x y σ_y)	error (%)	K_I (EF, σ_x y τ_{xy})	error (%)	K_I (EF, σ_y y τ_{xy})	error (%)
1	372,43	352,35	5,39	344,09	7,61	375,28	0,77
2	198,17	200,42	1,14	182,22	8,05	200,42	1,14
3	247,71	252,07	1,76	264,99	6,98	249,35	0,66

Tabla 34. Error relativo de K_{II} a partir de las tensiones de EF respecto (3), para modo mixto plano.

Caso	K_{II} (MPa·mm ^{1/2})	K_{II} (EF, σ_x y σ_y)	error (%)	K_{II} (EF, σ_x y σ_y)	error (%)	K_{II} (EF, σ_x y σ_y)	error (%)
1	135,55	125,14	7,68	126,4	6,75	134,16	1,03
2	343,23	317,19	7,59	346,35	0,91	346,35	0,91
3	85,81	91,17	6,25	89,067	3,80	85,498	0,36

1.4.8. Descripción de los resultados

Se ha obtenido el factor de intensidad de tensión tanto para modo I como para modo II, estudiando tres casos distintos de modo mixto plano. El proceso ha sido análogo al realizado para modo I y modo II puro, es decir, tras resolver el modelo de EF, extrayendo resultados de tensiones en un path inclinado según la dirección de propagación de grieta (Tabla 26), se han calculado y ajustado K_I y K_{II} para hallar sendos valores definitivos.

Por un lado, tal como se adelantó al inicio del apartado de *Casos estudiados*, en el caso 1, al ser de modo mixto plano donde predomina sobre todo el modo I, se esperaba que K_I fuera mayor que K_{II} , y así ha sido. En cuanto al caso segundo, se preveía que K_I y K_{II} para fueran similares, por ser un caso intermedio; finalmente, en el tercer caso, a pesar de que el ángulo de inclinación de la grieta es cercano a 70°, no predomina K_{II} sino que lo hace K_I ya que se tiene un valor de λ de 0,5 positivo. En consecuencia, se está más lejos de modo II.

De los errores relativos que se han calculado, destaca que todos ellos están por debajo del 10%, lo cual concuerda con el orden de magnitud de los errores obtenidos, en base a tensiones, en los cuatro casos de modo I puro y en los cuatro de modo II puro. Además, los factores de intensidad de tensión obtenidos de los tres sistemas lineales coinciden, lo cual se esperaba. Sin embargo, se puede identificar cómo hallar los SIF en base a σ_y y τ_{xy} resulta ser la manera más fiable, porque es la que menor error supone respecto a las fórmulas teóricas en todos los casos estudiados.

En cuanto a las gráficas de $K_I(r)$ y $K_{II}(r)$ ha de resaltarse que no tienen la misma pinta para cada caso. Esto tiene sentido, ya que al ser tres ejemplos de modo mixto plano muy diferentes entre sí, la distribución de tensiones en el frente de grieta no tiene nada que ver de un caso a otro, y por ende las gráficas de $K_I(r)$ y $K_{II}(r)$ tampoco.

En cuanto al path empleado para extraer resultados, se muestra a modo de ejemplo el del caso 2, realizado a una inclinación de 60,62° en sentido horario respecto al sistema de referencia orientado según la grieta, por ser esa la dirección de propagación del defecto.

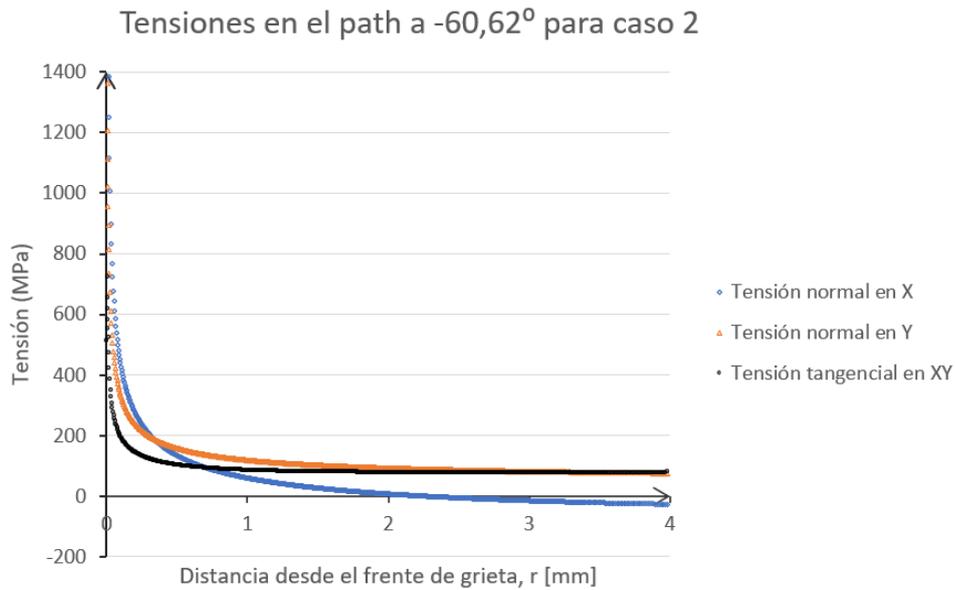


Figura 150. Variación de la tensión en el path a $-60,62^\circ$ (modo mixto plano, caso 2).

2. DESCRIPCIÓN DE TAREAS

Para realizar el presente Trabajo Fin de Máster, se han realizado las siguientes tareas:

- Planteamiento del tema del trabajo

Se describe el tema del trabajo, para tener claro de qué trata, cuáles son los objetivos y la motivación del TFM, así como sus posibles beneficios. Con este primer paso se consigue acotar el alcance del trabajo.

- Revisión bibliográfica

Una vez está definido el tema, se procede a buscar información sobre el mismo, para elaborar una lista de referencias a las que recurrir durante el transcurso del proyecto. Se hace especial hincapié en libros clásicos de Mecánica de la Fractura, donde se expongan los métodos aplicables para el cálculo del factor de intensidad de tensión.

- Redacción del Análisis del Estado del Arte

A partir de la revisión bibliográfica, se redacta un “resumen” de lo más relevante y lo que sea más aplicable al desarrollo del TFM. El resultado es el apartado de Análisis del Estado del Arte del trabajo, que engloba todo el marco teórico necesario para comprender el trabajo.

- Planteamiento de los casos estudiados

A continuación, se definen los casos que se van a estudiar, tanto de modo I y II como de modo mixto plano. Se plantean de tal forma que se logre un abanico suficiente de casos como para tener un espectro amplio de ejemplos donde pueda aplicarse el cálculo del factor de intensidad de tensiones mediante EF.

- Preparación de los modelos de EF para modo I

En el software de EF comercial Ansys, se crean los modelos de las piezas estudiadas en modo I, introduciendo las propiedades necesarias del material, las cargas y condiciones de contorno.

- Postproceso de los modelos de EF para modo I

Se extraen los resultados de los modelos del primer modo, y se aplican los métodos pertinentes para el cálculo del factor de intensidad de tensión.

- Análisis de resultados

Se comparan los valores obtenidos para los casos de modo I de fractura en base a fórmulas teóricas y los extraídos de EF.

- Preparación de los modelos de EF para modo II

En el software de EF comercial Ansys, se crean los modelos de las piezas estudiadas en modo II, introduciendo las propiedades necesarias del material, las cargas y condiciones de contorno.

- Postproceso de los modelos de EF para modo II

Se extraen los resultados de los modelos del segundo modo, y se aplican los métodos pertinentes para el cálculo del factor de intensidad de tensión.

- Análisis de resultados

Se comparan los valores obtenidos para los casos de modo II de fractura en base a fórmulas teóricas y los extraídos de EF.

- Preparación de los modelos de EF para modo mixto plano

En el software de EF comercial Ansys, se crean los modelos de las piezas estudiadas en modo mixto plano, introduciendo las propiedades necesarias del material, las cargas y condiciones de contorno.

- Postproceso de los modelos de EF para modo mixto plano

Se extraen los resultados de los modelos del modo mixto plano, y se aplican los métodos pertinentes para el cálculo del factor de intensidad de tensión.

- Análisis de resultados

Se comparan los valores obtenidos para los casos de modo mixto plano de fractura en base a fórmulas teóricas y los extraídos de EF.

- Conclusiones

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos tanto para modos I y II puros, como para modo mixto plano, se extraen las conclusiones del trabajo.

- Redacción del documento del trabajo

Se redactan la memoria final del TFM.

- Revisión general del trabajo

Se lleva a cabo una revisión exhaustiva del trabajo junto con el tutor, en orden a corregir posibles errores y finalizar el proyecto.

3. DIAGRAMA DE GANTT

La siguiente tabla muestra el diagrama de Gantt que muestra las tareas realizadas de manera cronológica, a lo largo del presente curso 2021/22.

Tabla 35. Diagrama de Gantt.

CRONOGRAMA SEMANAL DEL TRABAJO FIN DE MÁSTER																																				
Tarea	Octubre				Noviembre				Diciembre				Enero				Febrero				Marzo				Abril				Mayo				Junio			
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Planteamiento del tema del trabajo	■	■																																		
Revisión bibliográfica			■	■	■	■																														
Redacción del Análisis del Estado del Arte							■	■	■																											
Planteamiento de los casos estudiados										■																										
Preparación de los modelos de EF para modo I										■	■																									
Postproceso de los modelos de EF para modo I											■	■																								
Análisis de resultados												■	■																							
Preparación de los modelos de EF para modo II													■	■	■	■																				
Postproceso de los modelos de EF para modo II																			■	■																
Análisis de resultados																				■																
Preparación de los modelos de EF para modo mixto plano																				■	■															
Postproceso de los modelos de EF para modo mixto plano																					■	■	■													
Análisis de resultados																							■	■												
Conclusiones																								■	■											
Redacción del documento del trabajo																					■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■		
Revisión general del trabajo																																	■	■	■	■

III. ASPECTOS ECONÓMICOS

1. DESCRIPCIÓN DEL PRESUPUESTO

La realización del presente Trabajo Fin de Máster lleva asociados ciertos costes, debido a los recursos necesarios para la ejecución del mismo.

1.1. Costes directos

En primer lugar se desglosan los gastos de personal, referidos al tiempo dedicado al desarrollo del proyecto:

- Tiempo invertido por el alumno en las tareas del TFM: búsqueda de información, aprendizaje de Ansys y Matlab, ejecución de los modelos y los cálculos; y finalmente redacción de la memoria del trabajo.
- Tiempo dedicado por el tutor del trabajo a través de reuniones para la supervisión, revisión de resultados y correcciones cuando se han requerido.

Tabla 36. Gastos de personal.

Concepto	Tiempo (h)	Coste unitario (€/h)	Coste total (€)
Tutor universidad	15	30	450
Alumno	400	6	2400
TOTAL			2850

Por otra parte, deben incluirse las amortizaciones, referidos a los medios empleados para el desarrollo del proyecto y cuyo valor se deprecia conforme se utilizan y a medida que pasa el tiempo:

- Ordenador del alumno, mediante el cual se han realizado tanto los cálculos como la redacción del trabajo.
- Licencias de software: Ansys para los análisis estructurales, Matlab para el postproceso de los resultados y Microsoft Office para el postproceso de resultados y la redacción del documento del trabajo.

Tabla 37. Amortizaciones.

Concepto	Precio (€)	Duración (meses)	Uso (meses)	Amortización (€)
Licencia Matlab	2000	12	6	1000
Licencia Ansys	8000	12	6	4000
Licencia Office	100	12	6	50
Ordenador alumno	1600	72	6	133,33
TOTAL				5183,33

Asimismo, se añade el material fungible, que incluye el material de oficina empleado durante el transcurso del trabajo:

Tabla 38. Material fungible.

Concepto	Coste total (€)
Material de oficina	100
TOTAL	100

Por último, se realiza la suma de todos los costes directos:

Tabla 39. Resumen de costes directos.

Concepto	Coste total (€)
Gastos de personal	2850
Amortizaciones	5183,33
Material fungible	100
TOTAL	8133,33

Asciende el presupuesto asociado a costes directos a la expresada cifra de:

OCHO MIL CIENTO TREINTA Y TRES EUROS CON TREINTA Y TRES CÉNTIMOS.

1.2. Presupuesto total

A continuación se refleja el presupuesto total del presente Trabajo Fin de Máster:

Tabla 40. Presupuesto total del TFM.

Concepto	Coste total (€)
Gastos directos	8133,33
SUBTOTAL	8133,33
21% I.V.A.	1707,99
TOTAL	9841,32

Asciende el presupuesto asociado a costes directos a la expresada cifra de:

NUEVE MIL OCHOCIENTOS CUARENTA Y UN EUROS CON TREINTA Y DOS CÉNTIMOS.

IV. CONCLUSIONES

1. CONCLUSIONES

A lo largo del presente Trabajo Fin de Máster se han analizado distintos casos de Mecánica Lineal de la Fractura, incluyendo modo I puro, modo II puro y modo mixto plano (combinación de modos I y II). Se han calculado los factores de intensidad de tensión para cada caso estudiado, haciendo uso de fórmulas teóricas y del Método de Elementos Finitos.

Las conclusiones que se extraen del trabajo son las siguientes:

El modo de fractura viene dado por el estado tensional al que se somete la pieza y por el tamaño y orientación de la grieta que se tenga en el elemento. En base a estos condicionantes, para hallar el factor de intensidad de tensión, debe estudiarse cómo se propagaría el defecto, es decir, el ángulo que define la dirección de propagación de grieta.

Se ha calculado el factor de intensidad de tensión, por una parte, empleando fórmulas teóricas. Estas son aplicables para geometrías que estén tabuladas, de lo contrario no. Se ha visto que hay un parámetro, que es el factor geométrico, que debe introducirse en algunas de las citadas expresiones teóricas. Este parámetro es función de la geometría de la pieza, la carga externa, y el tamaño y posición de la grieta. Por tanto, no se tendrá el mismo factor geométrico para un modo de fractura como el I, producido por tensiones normales; que para modo II, debido a tensiones tangenciales. Asimismo, si se hiciera un análisis de propagación de grieta, el factor geométrico iría variando conforme crece y avanza el defecto, puesto que cambian tanto su tamaño (incluso su orientación) como el modo predominante. Es por esta razón que resulta de gran utilidad implementar el cálculo del SIF mediante modelos de EF, porque no se tiene limitación en cuanto a casos tabulados.

El factor de intensidad de tensión a partir de Elementos Finitos se puede calcular con precisión, pero la malla en la zona del frente de grieta debe ser refinada notablemente, para poder apreciar las variaciones de tensión. El factor de intensidad de tensión obtenido en base a los resultados del modelo de EF no es un valor único, sino que varía con la distancia desde el frente de grieta (r), ya que en cada punto la tensión o deformación puede no ser igual. Para hallar el factor de intensidad de tensión definitivo, se extrapola a $r = 0$ la zona más lineal de la gráfica que relaciona el SIF con la distancia r desde el frente de grieta, que suele estar entre 0,05 mm y 1 mm.

Se han usado los resultados extraídos de los modelos de EF según dos planteamientos: uno basado en tensiones y otro basado en deformaciones. Este último, tal como se ha visto en los resultados obtenidos, da un factor de intensidad de tensión muy diferente al que se obtiene con las fórmulas teóricas. El primer planteamiento, en cambio, ajusta mucho mejor, y se obtienen resultados muy similares para cualquier componente de tensión no nula. Por ejemplo, en un estado de tensión plana, donde las componentes no nulas del tensor de tensiones son σ_x , σ_y y τ_{xy} , el cálculo del factor de intensidad de tensión conduce a valores muy parejos usando los resultados de cualquiera de las tres componentes.

En conclusión, vistos los errores de ambos métodos, puede afirmarse que obtener el factor de intensidad de tensión a partir de las tensiones de EF es mucho más preciso y fiable que hacer uso de los desplazamientos.

2. LÍNEAS FUTURAS

En el ámbito de la Mecánica de la Fractura, continuando con la línea del presente Trabajo Fin de Máster, en este apartado se proponen posibles continuaciones:

- Aplicación de teorías de propagación de grieta como, por ejemplo, la Ley de Paris, para predecir el crecimiento de grieta y estimar los ciclos de vida de un determinado elemento.
- Obtención de la curva de $da/dN - \Delta K_I$ para distintos materiales, a partir de sus propiedades de $\Delta K_{I,TH}$ y $\Delta K_{I,C}$, ajustándola con la Ley de Paris (solo la zona lineal) o con otras formulaciones más complejas como Nasgro.
- Implementación de la metodología “damage tolerance” para un caso práctico real, estimando el número de ciclos de vida del elemento en base a teorías de crecimiento de grieta.
- Cálculo de la vida a fatiga de un elemento haciendo uso, por un lado, de métodos de cálculo de fatiga; y por otra parte, mediante la predicción del crecimiento de grietas.

Estas son algunas de las futuras líneas de investigación por las que podría continuar este trabajo. Todas ellas tienen en común que debe calcularse el factor de intensidad de tensión para poder aplicar teorías de propagación de grieta como la Ley de Paris.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Dowling, N. E. *Mechanical Behavior of Materials*. Pearson Education (2012) p. 334-401.
- [2] Richard, H. A., Sander, M. *Fatigue Crack Growth*. Solid Mechanics and Its Applications, Springer (2016) p. 55-186.
- [3] Anderson, T. L. *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*. Taylor and Francis (2005) p. 25-102.
- [4] Fatemi, A., et al. *Metal Fatigue in Engineering*. John Wiley & Sons (1980) p. 128-130.
- [5] Abasolo, M. *Métodos de Análisis y Diseño para Fractura y Fatiga*. Escuela de Ingeniería de Bilbao (2021) p. 10-30; 60-80.
- [6] Avilés, R. *Métodos de Cálculo de Fatiga para Ingeniería*. Paraninfo (2015) p. 73-96.
- [7] Abasolo, M., Aguirrebeitia, J., Coria, I., Heras, I. *Guía Práctica de Elementos Finitos en Estática*. Paraninfo (2017) p. 51-79.
- [8] Sun, C. T., Jin, Z. H. *Fracture Mechanics*. Academic Press (2011) p. 287-293.
- [9] Hassan, N. A. *A Study on Second Mode Stress Intensity Factor of Cracked Plates under Compression Load*. Basrah Journal for Engineering Science (2012) p. 1-12.
- [10] Arunkumar, S., Nithin, V.K. *Estimation of Stress Intensity Factor of Multiple Inclined Centre Cracks under Biaxial Loading*. Journal of Failure Analysis and Prevention (2020) p. 1-4.
- [11] Arana, J. L., González, J. J. *Mecánica de Fractura*. Escuela de Ingeniería de Bilbao (2002) p. 22-58.
- [12] Xiao, S. T., Brown, M. W., Miller, K. J. *Stress Intensity Factors for Crack in Notched Finite Plates Subjected to Biaxial Loading*. Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures (1985) p. 7-13.
- [13] B. Ernst. *Numerical Analysis of Crack Propagation and Lifetime Estimation*. Aalborg University Esbjerg (2015) p. 19-55.
- [14] Newman, J. C. *An Improved Method of Collocation for the Stress Analysis of Cracked Plates with Various Shaped Boundaries*. NASA Langley Research Center, National Aeronautics and Space Administration (1971) p. 13-15.
- [15] Emran, A., et al. *An Overview of Fracture Mechanics with Ansys*. International Journal of Integrated Engineering (2018) p. 1-3.
- [16] Hammouda, M., et al. *Stress intensity factors of a central slant crack with frictional surfaces in plates with biaxial loading*. International Journal of Fracture (2004) p. 1-9.
- [17] Eftis, J., Subramonian, N. *The Inclined Crack Under Biaxial Load*. Engineering Fracture Mechanics (1978) p. 1-5.

V. ANEXOS

ANEXO I: CÓDIGO

Se adjunta el código empleado para uno de los casos de modo I (el código es idéntico para cada análisis, lo que varía son los resultados importados de EF):

```

clear all;

clc;

close all;

% constantes

nu=0.3; %Coef de Poisson del acero

E=210e3; %Modulo de Young [MPa]

kappa=(3-nu)/(1+nu); %tension plana

a=10; %tamaño de grieta/2 [mm]

sigma_nom=100; %sigma nominal [MPa]

limite=4; %[mm] desde el frente de grieta que se analizan

%se cargan los valores de ansys

%Pieza 4: a/b=0,1

Pieza(1).coord_X=1000*(xlsread('pieza4_4','pieza4_4','B2:B68872')); %[mm]

Pieza(1).coord_Y=1000*(xlsread('pieza4_4','pieza4_4','C2:C68872')); %[mm]

% tensiones normales en X y en Y

Pieza(1).sigma_XX=(xlsread('pieza4_4','pieza4_4','E2:E68872'))*10^(-6); %[MPa]

Pieza(1).sigma_YY=(xlsread('pieza4_4','pieza4_4','F2:F68872'))*10^(-6); %[MPa]

Pieza(1).tau_XY=(xlsread('pieza4_4','pieza4_4','G2:G68872'))*10^(-6); %[MPa]

% deformaciones en X y en Y

Pieza(1).delta_XX=(xlsread('pieza4_4','pieza4_4','H2:H68872'))*1000; %[mm]

Pieza(1).delta_YY=(xlsread('pieza4_4','pieza4_4','I2:I68872'))*1000; %[mm]

%se ejecuta el bucle mientras se este en la cercania de la grieta

N=length(Pieza(1).coord_X);

%vector de "r"

r=zeros(N,1);

%vector de angulos

angulo=zeros(N,1);

%calculo de tensiones "exactas" segun libro Richard

%se inicia en 1 el contador

```

```
cont=1;

for i=1:N

    %solo se calcula para x>a, porque para x<a se compara de EF

    if Pieza(1).coord_X(i)>=0 && Pieza(1).coord_Y(i)<=1e-10

        % "exactas"

        num=(Pieza(1).coord_X(i)+a)/a;
        denom=sqrt((((Pieza(1).coord_X(i)+a)/a)^2)-1);

        sigma_x_exacta(1,cont)=Pieza(1).coord_X(i);
        sigma_x_exacta(2,cont)=sigma_nom*((num/denom)-1);

        sigma_y_exacta(1,cont)=Pieza(1).coord_X(i);
        sigma_y_exacta(2,cont)=sigma_nom*(num/denom);

        % de EF

        sigma_x_EF(1,cont)=Pieza(1).coord_X(i);
        sigma_x_EF(2,cont)=Pieza(1).sigma_XX(i);

        sigma_y_EF(1,cont)=Pieza(1).coord_X(i);
        sigma_y_EF(2,cont)=Pieza(1).sigma_YY(i);

        %se actualiza el contador

        cont=cont+1;

    end

end

end

%se calcula el deltaX y deltaY en el frente de grieta

for j=1:N

    if Pieza(1).coord_X(j)==0 && Pieza(1).coord_Y(j)==0

        ref_x=Pieza(1).delta_XX(j);
        ref_y=Pieza(1).delta_YY(j);
    end

end

end

%se inician en 1 los contadores

c=1;

cont_0=1;
```

```

for j=1:N

if Pieza(1).coord_X(j)>=0 && Pieza(1).coord_Y(j)>=0

    r(j)=sqrt(Pieza(1).coord_X(j)^2+Pieza(1).coord_Y(j)^2);

    if round(r(j))<=limite %se toma como limite desde el frente de grieta

        % ENFOQUE DE TENSIONES

        %se halla el angulo tita

        angulo(j)=(atan(Pieza(1).coord_Y(j)/Pieza(1).coord_X(j)))*180/pi; % [deg]

        %si se guardan todos los K1...

        tita=angulo(j);

        %formula de sigmaXX

        f1_tita=cosd(tita/2)*(1-sind(tita/2)*sind(3*tita/2));

        K_1_XX=Pieza(1).sigma_XX(j)*sqrt(2*pi*r(j))/f1_tita;

        %formula de sigmaYY

        f2_tita=cosd(tita/2)*(1+sind(tita/2)*sind(3*tita/2));

        K_1_YY=Pieza(1).sigma_YY(j)*sqrt(2*pi*r(j))/f2_tita;

        %se guarda

        %formula de sigmaXX

        K_1_todos_XX(1,c)=r(j); %se guarda el radio
        K_1_todos_XX(2,c)=K_1_XX; %se guarda el K1

        %formula de sigmaYY

        K_1_todos_YY(1,c)=r(j); %se guarda el radio
        K_1_todos_YY(2,c)=K_1_YY; %se guarda el K1

        % ENFOQUE DE DEFORMACIONES

        %si se guardan todos los K1...

        fi=angulo(j);

        %formula de deltaX (u)
    
```

```
f1_fi=cosd(fi/2)*(kappa-1+2*(sind(fi/2)^2));  
K_1_u=abs(abs(Pieza(1).delta_XX(j))-abs(ref_x))*E*sqrt(2*pi/r(j))/(f1_fi*(1+nu));  
%formula de deltaY (v)  
f2_fi=sind(fi/2)*(kappa+1-2*(cosd(fi/2)^2));  
K_1_v=abs(abs(Pieza(1).delta_YY(j))-abs(ref_y))*E*sqrt(2*pi/r(j))/(f2_fi*(1+nu));  
%se guarda  
%formula de deltaXX (u)  
K_1_todos_u(1,c)=r(j); %se guarda el radio  
K_1_todos_u(2,c)=K_1_u; %se guarda el K1  
%formula de deltaYY (v)  
K_1_todos_v(1,c)=r(j); %se guarda el radio  
K_1_todos_v(2,c)=K_1_v; %se guarda el K1  
%se actualiza el contador  
c=c+1;  
%solo se guardan para angulo 0 deg  
if round(angulo(j))==0 && Pieza(1).coord_Y(j)<=1e-10  
    %ENFOQUE DE TENSIONES  
    %si tita=0, f1_tita = f2_tita = 1  
    %formula de sigmaXX  
    f1_tita=1;  
    K_1_XX=Pieza(1).sigma_XX(j)*sqrt(2*pi*r(j))/f1_tita;  
    %formula de sigmaYY  
    f2_tita=1;  
    K_1_YY=Pieza(1).sigma_YY(j)*sqrt(2*pi*r(j))/f2_tita;  
    %se guarda  
    %formula de sigmaXX
```

Anexos

```
K_1_zero_XX(1,cont_0)=r(j); %se guarda el radio
K_1_zero_XX(2,cont_0)=K_1_XX; %se guarda el K1

%formula de sigmaYY

K_1_zero_YY(1,cont_0)=r(j); %se guarda el radio
K_1_zero_YY(2,cont_0)=K_1_YY; %se guarda el K1

% ENFOQUE DE DEFORMACIONES

    fi=angulo(j);

%formula de deltaX (u)

f1_fi=cosd(fi/2)*(kappa-1+2*(sind(fi/2)^2));

K_1_u=abs(abs(Pieza(1).delta_XX(j))-abs(ref_x))*E*sqrt(2*pi/r(j))/(f1_fi*(1+nu));

%formula de deltaY (v)

f2_fi=sind(fi/2)*(kappa+1-2*(cosd(fi/2)^2));

K_1_v=abs(abs(Pieza(1).delta_YY(j))-abs(ref_y))*E*sqrt(2*pi/r(j))/(f2_fi*(1+nu));

%se guarda

%formula de deltaXX (u)

K_1_zero_u(1,cont_0)=r(j); %se guarda el radio
K_1_zero_u(2,cont_0)=K_1_u; %se guarda el K1

%formula de deltaYY (v)

K_1_zero_v(1,cont_0)=r(j); %se guarda el radio
K_1_zero_v(2,cont_0)=K_1_v; %se guarda el K1

%se actualiza el contador

    cont_0=cont_0+1;
end
end
end

end

%calcular tensiones con un K1 cualquiera

g=1; %contador

K1=300; %inventado [MPa*mm^1/2]

for j=1:N
```

```
if Pieza(1).coord_X(j)>=0 && Pieza(1).coord_Y(j)>=0

r(j)=sqrt(Pieza(1).coord_X(j)^2+Pieza(1).coord_Y(j)^2);

if round(r(j))<=limite %se toma como limite desde el frente de grieta

%se guardan las de EF

ten_y_EF(1,g)=Pieza(1).coord_X(j);
ten_y_EF(2,g)=Pieza(1).coord_Y(j);
ten_y_EF(3,g)=Pieza(1).sigma_YY(j);

ten_x_EF(1,g)=Pieza(1).coord_X(j);
ten_x_EF(2,g)=Pieza(1).coord_Y(j);
ten_x_EF(3,g)=Pieza(1).sigma_XX(j);

%se calculan las de MLF

%se halla el angulo tita

angulo(j)=(atan(Pieza(1).coord_Y(j)/Pieza(1).coord_X(j)))*180/pi; %[deg]

%si se guardan todos los K1...

tita=angulo(j);

%formula de sigmaXX

f1_tita=cosd(tita/2)*(1-sind(tita/2)*sind(3*tita/2));

sigma_x=(K1/sqrt(2*pi*r(j)))*f1_tita;

%formula de sigmaYY

f2_tita=cosd(tita/2)*(1+sind(tita/2)*sind(3*tita/2));

sigma_y=(K1/sqrt(2*pi*r(j)))*f2_tita;

%se guarda

ten_x_MLF(1,g)=Pieza(1).coord_X(j);
ten_x_MLF(2,g)=Pieza(1).coord_Y(j);
ten_x_MLF(3,g)=sigma_x;

ten_y_MLF(1,g)=Pieza(1).coord_X(j);
ten_y_MLF(2,g)=Pieza(1).coord_Y(j);
ten_y_MLF(3,g)=sigma_y;

g=g+1; %se actualiza el contador
```

```

        end

    end

end

%se guardan los resultados para el ajuste del SIF
gu=1;
for j=1:length(K_1_zero_XX)

if K_1_zero_XX(1,j)>=0.05 && K_1_zero_XX(1,j)<=1
guardar(1,gu)=K_1_zero_XX(1,j);
guardar(2,gu)=K_1_zero_XX(2,j);
gu=gu+1;
end
end

%plots

%tensiones de EF vs "exactas"

figure;
subplot(1,2,1)
scatter(sigma_x_EF(1,:),sigma_x_EF(2,:),15,'green','o');
hold on;
scatter(sigma_x_exacta(1,:),sigma_x_exacta(2:),'black','!');
title('\sigma_{XX} exacta vs EF para \theta = 0 [deg] y x > a');
xlabel('x [mm]');
ylabel('\sigma_{XX} [MPa]');
legend('exacta','EF');

subplot(1,2,2)
scatter(sigma_y_EF(1,:),sigma_y_EF(2,:),15,'green','o');
hold on;
scatter(sigma_y_exacta(1,:),sigma_y_exacta(2:),'black','!');
title('\sigma_{YY} exacta vs EF para \theta = 0 [deg] y x > a');
xlabel('x [mm]');
ylabel('\sigma_{YY} [MPa]');
legend('exacta','EF');

% K1 con enfoque de tensiones

figure;
subplot(1,2,1)
scatter(K_1_zero_XX(1,:),K_1_zero_XX(2:),'black','!');
title('K_I para \theta = 0 [deg] a partir de \sigma_{XX}');
xlabel('r [mm]');
ylabel('K_I [MPa*mm^{1/2}]');

```

```

subplot(1,2,2)
scatter(K_1_zero_YY(1,:),K_1_zero_YY(2,:),'black','.');
title('K_I para \theta = 0 [deg] a partir de \sigma_{YY}');
xlabel('r [mm]');
ylabel('K_I [MPa*mm^{1/2}]');

% K1 con enfoque de deformaciones

figure;
subplot(1,2,1)
scatter(K_1_zero_u(1,:),K_1_zero_u(2,:),'black','.');
title('K_I para \theta = 0 [deg] a partir de \delta_{XX}');
xlabel('r [mm]');
ylabel('K_I [MPa*mm^{1/2}]');

subplot(1,2,2)
scatter(K_1_zero_v(1,:),K_1_zero_v(2,:),'black','.');
title('K_I para \theta = 0 [deg] a partir de \delta_{YY}');
xlabel('r [mm]');
ylabel('K_I [MPa*mm^{1/2}]');

% K1 con enfoque de deformaciones
%
% figure;
% subplot(1,2,1)
% scatter(K_1_todos_u(1,:),K_1_todos_u(2,:),'black','.');
% title('K_1 para cualquier \theta a partir de \delta_{XX}');
% xlabel('r [mm]');
% ylabel('K_1 [MPa*mm^{1/2}]');
%
% subplot(1,2,2)
% scatter(K_1_todos_v(1,:),K_1_todos_v(2,:),'black','.');
% title('K_1 para cualquier \theta a partir de \delta_{YY}');
% xlabel('r [mm]');
% ylabel('K_1 [MPa*mm^{1/2}]');
%
%
% %tensiones de EF vs MLF con K1 inventada
%
% figure;
% subplot(1,2,1)
% surf(ten_y_MLF);colorbar;
% title('\sigma_{YY} segun MLF')
% xlabel('x [mm]');

% ylabel('y [mm]');

% zlabel('\sigma_{YY} [MPa]');

% subplot(1,2,2)

```

Anexos

```
% surf(ten_y_EF(1,:),ten_y_EF(2,:),ten_y_EF);  
% title('\sigma_{YY} de EF')  
% xlabel('x [mm]');  
% ylabel('y [mm]');  
% zlabel('\sigma_{YY} [MPa]');
```

Se adjunta ahora el código de un caso de modo II (el código es idéntico para cada análisis, lo que varía son los resultados importados de EF):

```
clear all;  
clc;  
close all;  
  
% constantes  
  
nu=0.3; %Coef de Poisson del acero  
E=210e3; %Modulo de Young [MPa]  
kappa=(3-nu)/(1+nu); %tension plana  
a=15; %tamaño de grieta/2 [mm]  
sigma_nom=100; %sigma nominal [MPa]  
  
%se cargan los valores de ansys  
  
%Pieza: a/b=0,3  
  
Pieza(1).coord_X=(xlsread('a_b0,3','a_b0,3','E2:E760')); %[mm]  
Pieza(1).coord_Y=(xlsread('a_b0,3','a_b0,3','F2:F760')); %[mm]  
  
% tensiones normales en X y en Y  
  
Pieza(1).sigma_XX=(xlsread('a_b0,3','a_b0,3','G2:G760')); %[MPa]  
Pieza(1).sigma_YY=(xlsread('a_b0,3','a_b0,3','H2:H760')); %[MPa]  
Pieza(1).tau_XY=(xlsread('a_b0,3','a_b0,3','I2:I760')); %[MPa]  
  
% deformaciones en X y en Y  
  
Pieza(1).delta_XX=(xlsread('a_b0,3','a_b0,3','J2:J760')); %[mm]  
Pieza(1).delta_YY=(xlsread('a_b0,3','a_b0,3','K2:K760')); %[mm]  
  
%se ejecuta el bucle mientras se este en la cercania de la grieta  
  
N=length(Pieza(1).sigma_XX);  
  
%vector de "r"  
  
r=zeros(N,1);  
  
%se inicia en 1 el contador  
  
cont=1;
```

```
%se calcula el deltaX y deltaY en el frente de grieta

for j=1:N

    if j==1

        ref_x=Pieza(1).delta_XX(j);
        ref_y=Pieza(1).delta_YY(j);

    end

end

%se inician en 1 los contadores

c=1;

for j=1:N

    r(j)=sqrt(Pieza(1).coord_X(j)^2+Pieza(1).coord_Y(j)^2);

    % ENFOQUE DE TENSIONES

    %se halla el angulo tita

    tita=70;%[deg]

    %formula de sigmaXX

    f1_tita=sind(tita/2)*(2+cosd(tita/2)*cosd(3*tita/2));

    K_2_XX=-Pieza(1).sigma_XX(j)*sqrt(2*pi*r(j))/f1_tita;

    %formula de sigmaYY

    f2_tita=sind(tita/2)*cosd(tita/2)*cosd(3*tita/2);

    K_2_YY=Pieza(1).sigma_YY(j)*sqrt(2*pi*r(j))/f2_tita;

    %formula de tauXY

    f3_tita=cosd(tita/2)*(1-sind(tita/2)*sind(3*tita/2));

    K_2_XY=Pieza(1).tau_XY(j)*sqrt(2*pi*r(j))/f3_tita;

    %se guarda

    %formula de sigmaXX
```

```

K_2_70_XX(1,c)=r(j); %se guarda el radio
K_2_70_XX(2,c)=K_2_XX; %se guarda el K2

%formula de sigmaYY

K_2_70_YY(1,c)=r(j); %se guarda el radio
K_2_70_YY(2,c)=K_2_YY; %se guarda el K2

%formula de tauXY

K_2_70_XY(1,c)=r(j); %se guarda el radio
K_2_70_XY(2,c)=K_2_XY; %se guarda el K2

% ENFOQUE DE DEFORMACIONES

fi=tita;

%formula de deltaX (u)

f1_fi=sind(fi/2)*(kappa+1+2*(cosd(fi/2)^2));

K_2_u=abs(abs(Pieza(1).delta_XX(j))-abs(ref_x))*E*sqrt(2*pi/r(j))/(f1_fi*(1+nu));

%formula de deltaY (v)

f2_fi=cosd(fi/2)*(kappa-1-2*(sind(fi/2)^2));

K_2_v=abs(abs(Pieza(1).delta_YY(j))-abs(ref_y))*E*sqrt(2*pi/r(j))/(f2_fi*(1+nu));

%se guarda

%formula de deltaXX (u)

K_2_70_u(1,c)=r(j); %se guarda el radio
K_2_70_u(2,c)=K_2_u; %se guarda el K1

%formula de deltaYY (v)

K_2_70_v(1,c)=r(j); %se guarda el radio
K_2_70_v(2,c)=K_2_v; %se guarda el K1

%se actualiza el contador

c=c+1;

end

%se guardan los resultados para el ajuste del SIF

```

```
gu=1;
for j=1:length(K_2_70_XX)

if K_2_70_v(1,j)>=0.1 && K_2_70_v(1,j)<=1
guardar(1,gu)=K_2_70_v(1,j);
guardar(2,gu)=K_2_70_v(2,j);

gu=gu+1;

end

end

%plots

% K1 con enfoque de tensiones

figure;
subplot(1,3,1)
scatter(K_2_70_XX(1,:),K_2_70_XX(2:),'black','!');
title('K_{II} para \theta = 70 [deg] a partir de \sigma_{XX}');
xlabel('r [mm]');
ylabel('K_{II} [MPa*mm^{1/2}]');

subplot(1,3,2)
scatter(K_2_70_YY(1,:),K_2_70_YY(2:),'black','!');
title('K_{II} para \theta = 70 [deg] a partir de \sigma_{YY}');
xlabel('r [mm]');
ylabel('K_{II} [MPa*mm^{1/2}]');

subplot(1,3,3)
scatter(K_2_70_XY(1,:),K_2_70_XY(2:),'black','!');
title('K_{II} para \theta = 70 [deg] a partir de \tau_{XY}');
xlabel('r [mm]');
ylabel('K_{II} [MPa*mm^{1/2}]');

% K1 con enfoque de deformaciones

figure;
subplot(1,2,1)
scatter(K_2_70_u(1,:),K_2_70_u(2:),'black','!');
title('K_{II} para \theta = 70 [deg] a partir de \delta_{XX}');
xlabel('r [mm]');
ylabel('K_{II} [MPa*mm^{1/2}]');

subplot(1,2,2)
scatter(K_2_70_v(1,:),K_2_70_v(2:),'black','!');
title('K_{II} para \theta = 70 [deg] a partir de \delta_{YY}');
xlabel('r [mm]');
ylabel('K_{II} [MPa*mm^{1/2}]');
```

Anexos

Se adjunta por último el código empleado para uno de los casos de modo mixto plano (el código es idéntico para cada análisis, lo que varía son los resultados importados de EF y el ángulo de propagación de grieta):

```
clear all;
clc;
close all;

% constantes

nu=0.3; %Coef de Poisson del acero
E=210e3; %Modulo de Young [MPa]
a=5; %tamaño de grieta/2 [mm]
sigma_nom=100; %sigma nominal [MPa]

%se cargan los valores de ansys

%Pieza: a/b=0,1

Pieza(1).coord_X=(xlsread('caso3','caso3','E2:E760')); % [mm]
Pieza(1).coord_Y=(xlsread('caso3','caso3','F2:F760')); % [mm]

% tensiones normales en X y en Y

Pieza(1).sigma_XX=(xlsread('caso3','caso3','G2:G760')); % [MPa]
Pieza(1).sigma_YY=(xlsread('caso3','caso3','H2:H760')); % [MPa]
Pieza(1).tau_XY=(xlsread('caso3','caso3','I2:I760')); % [MPa]

%se ejecuta el bucle mientras se este en la cercania de la grieta

N=length(Pieza(1).sigma_XX);

%vector de "r"

r=zeros(N,1);

%se inician en 1 los contadores

c=1;

for j=1:N

    r(j)=sqrt(Pieza(1).coord_X(j)^2+Pieza(1).coord_Y(j)^2);

    % ENFOQUE DE TENSIONES

    %se halla el angulo tita
```

```
tita=-31,39;%[deg]

%formula de sigmaXX

f1_tita_x=cosd(tita/2)*(1-sind(tita/2)*sind(3*tita/2));

f2_tita_x=sind(tita/2)*(2+cosd(tita/2)*cosd(3*tita/2));

%formula de sigmaYY

f1_tita_y=cosd(tita/2)*(1+sind(tita/2)*sind(3*tita/2));

f2_tita_y=sind(tita/2)*cosd(tita/2)*cosd(3*tita/2);

%formula de tauXY

f1_tita_xy=sind(tita/2)*cosd(tita/2)*cosd(3*tita/2);

f2_tita_xy=cosd(tita/2)*(1-sind(tita/2)*sind(3*tita/2));

%matriz con los f_tita

%sistema de sigmaXX y sigmaYY

Cxy=[f1_tita_x -f2_tita_x;f1_tita_y f2_tita_y];

%sistema de sigmaXX y tauXY

Cxyy=[f1_tita_x -f2_tita_x;f1_tita_xy f2_tita_xy];

%sistema de sigmaXX y sigmaYY

Cxyy=[f1_tita_y f2_tita_y;f1_tita_xy f2_tita_xy];

%se calcula y se guarda

%sistema de sigmaXX y sigmaYY

v_xy=sqrt(2*pi*r(j))*[Pieza(1).sigma_XX(j);Pieza(1).sigma_YY(j)];

K_xy=(Cxy^-1)*v_xy;

K_1_XY(1,c)=r(j); %se guarda el radio
K_1_XY(2,c)=K_xy(1); %se guarda el K1

K_2_XY(1,c)=r(j); %se guarda el radio
K_2_XY(2,c)=K_xy(2); %se guarda el K2

%sistema de sigmaXX y tauXY

v_xxy=sqrt(2*pi*r(j))*[Pieza(1).sigma_XX(j);Pieza(1).tau_XY(j)];
```

```

K_xxy=(Cxyy^-1)*v_xxy;

K_1_XXY(1,c)=r(j); %se guarda el radio
K_1_XXY(2,c)=K_xxy(1); %se guarda el K1

K_2_XXY(1,c)=r(j); %se guarda el radio
K_2_XXY(2,c)=K_xxy(2); %se guarda el K2

%система de sigmaYY y tauXY

v_yxy=sqrt(2*pi*r(j))*[Pieza(1).sigma_YY(j);Pieza(1).tau_XY(j)];

K_yxy=(Cxyy^-1)*v_yxy;

K_1_YXY(1,c)=r(j); %se guarda el radio
K_1_YXY(2,c)=K_yxy(1); %se guarda el K1

K_2_YXY(1,c)=r(j); %se guarda el radio
K_2_YXY(2,c)=K_yxy(2); %se guarda el K2

%se actualiza el contador

c=c+1;

end

%se guardan los resultados para el ajuste del SIF
gu=1;
for j=1:length(K_1_XY)

if K_2_XY(1,j)>=0.025 && K_2_XY(1,j)<=1
guardar(1,gu)=K_2_XY(1,j);
guardar(2,gu)=K_2_XY(2,j);
gu=gu+1;
end
end

%plots
%система de sigmaXX y sigmaYY
figure;
scatter(K_1_XY(1,:),K_1_XY(2:),'black','!');
hold on;
scatter(K_2_XY(1,:),K_2_XY(2:),'blue','!');
title('K_I y K_{II} para \theta = 60 [deg] a partir de \sigma_{XX} y \sigma_{YY}');
xlabel('r [mm]');
ylabel('K [MPa*mm^{1/2}]');
legend('K_I [MPa*mm^{1/2}]','K_{II} [MPa*mm^{1/2}]');
hold off;

```

```
%sistema de sigmaXX y tauXY

figure;
scatter(K_1_XXY(1,:),K_1_XXY(2:),'black','.');
hold on;
scatter(K_2_XXY(1,:),K_2_XXY(2:),'blue','.');
title('K_I y K_{II} para \theta = 60 [deg] a partir de \sigma_{XX} y \tau_{XY}');
xlabel('r [mm]');
ylabel('K [MPa*mm^{1/2}]');
legend('K_I [MPa*mm^{1/2}]','K_{II} [MPa*mm^{1/2}]');
hold off;

%sistema de sigmaYY y tauXY

figure;
scatter(K_1_YXY(1,:),K_1_YXY(2:),'black','.');
hold on;
scatter(K_2_YXY(1,:),K_2_YXY(2:),'blue','.');
title('K_I y K_{II} para \theta = 60 [deg] a partir de \sigma_{YY} y \tau_{XY}');
xlabel('r [mm]');
ylabel('K [MPa*mm^{1/2}]');
legend('K_I [MPa*mm^{1/2}]','K_{II} [MPa*mm^{1/2}]');
hold off;
```