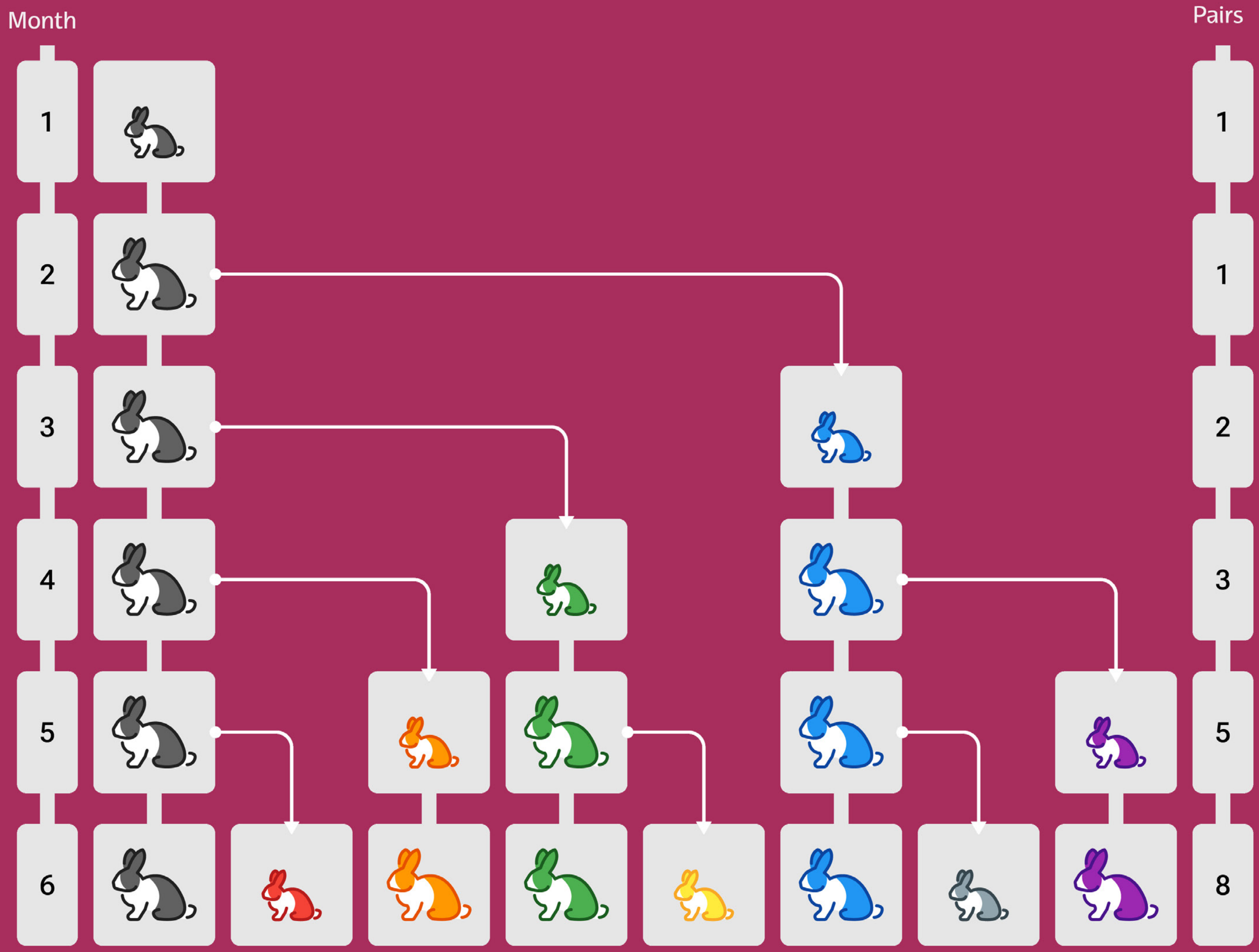
MATEMATIKA DISKRETUA

Jon Asier Bárcena Petisco
María Merino Maestre

2. edizioa



eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

MATEMATIKA DISKRETUA
II. EDIZIOA

Jon Asier Bárcena Petisco

María Merino Maestre

CIP. Biblioteca Universitaria

Bárcena Petisco, Jon Asier

Matematika diskretua [Recurso electrónico] / Jon Asier Bárcena Petisco, María Merino Maestre. –2ª ed. – Datos. – [Leioa]: Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea, Argitalpen Zerbitzua = Servicio Editorial, 2023. – 1 recurso en línea : PDF (213 p.). – (Unibertsitateko Eskuliburuak = Manuales Universitarios)

Modo de acceso: World Wide Web.
Incluye bibliografía.
ISBN: 978-84-1319-575-9.

1. Análisis combinatorio. I. Merino Maestre, María, coaut..

(0.034)519.1

UPV/EHUko Euskara Zerbitzuak sustatua eta zuzendua, Euskarazko ikasmaterialgintza sustatzeko deialdiaren bitartez.

ISBN: 978-84-1319-575-9

Aurkibidea

Hitzaurrea: I edizioa **1**

Hitzaurrea: II edizioa **3**

KONBINATORIA **7**

1. Oinarrizko konbinatoria **13**

1.1. Konbinatoria 13

1.2. Oinarrizko teknikak 14

1.2.1. Notazioa 14

1.2.2. Itzulpenak 15

1.2.3. Kontatzeko aholkuak 15

1.3. Konbinatorian erabiltzen diren funtzioak 16

1.3.1. Zoru- eta sabai-funtzioak 17

1.3.2. Potentzia faktorialak 20

1.4. Zuhaitz diagramak 21

1.5. Sailkapenak 27

1.6. Inklusio-esklusio printzipioa 29

1.7. Dirichleten usategiaren printzipioa eta agurren lema 31

1.8. Oinarrizko konbinatoriaren ariketa-zerrendak 34

Lehenengo ariketa-zerrenda: zoru- eta sabai-funtzioak 34

Bigarren ariketa-zerrenda: oinarrizko konbinatoriako problemak 35

Hirugarren ariketa-zerrenda: oinarrizko konbinatoriako beste zenbait problema . . . 38

Laugarren ariketa-zerrenda: Matematika-olinpiadetako problemak 40

2. Konbinazio-identitateak 41

2.1. Koefiziente binomialak 41

2.2. Binomioaren formula 47

2.3. Koefiziente multinomialak 51

2.4. Binomio orokortuaren formula 53

2.5. Konbinazio-identitateen ariketa-zerrendak 56

Bosgarren ariketa-zerrenda: koefiziente binomialak 56

Seigarren ariketa-zerrenda: Newtonen binomioa 60

Zazpigarren ariketa-zerrenda: koefiziente multinomialak 61

3. Funtzio sortzaileak eta errepikapenak 63

3.1. Funtzio sortzaileak 63

3.2. Ekuazio diofantikoen soluzio kopurua 68

3.3. Errepikapenak 71

3.4. Funtzio sortzaileak eta errepikapenen ariketa-zerrenda 79

Zortzigarren ariketa-zerrenda: funtzio sortzaileak eta errepikapenak 79

4. Zenbait zenbaki-familia garrantzitsu 85

4.1. Fibonacciren zenbakiak 85

4.2. Catalanen zenbakiak 87

4.3. Zenbaki arrunten partiketak 92

4.4. Lehen motako Stirlingen zenbakiak 96

4.5. Bigarren motako Stirlingen zenbakiak 99

4.6. Multzoen partiketak eta Bellen zenbakiak 106

4.7. Zenbait zenbaki-familia garrantzitsuren ariketa-zerrendak 109

Bederatzigarren ariketa-zerrenda: Fibonacciren zenbakiak 109

Hamargarren ariketa-zerrenda: zenbaki-partiketak 111

Hamaikagarren ariketa-zerrenda: Stirlingen eta Catalanen zenbakiak 111

GRAFO-TEORIA **117**

5. Grafo-teoria **117**

5.1. Oinarrizko kontzeptuak 117

5.2. Bideak eta ibilbideak 121

5.3. Zuhaitzak 127

5.4. Planotasuna 135

5.5. Koloratzea 138

5.6. Grafo-teoriaren ariketa-zerrenda 142

Hamabigarren ariketa-zerrenda: grafo-teoria 142

ARIKETAK **149**

A. Zenbait ariketaren ebazpenak **149**

A.1. Lehenengo ariketa-zerrendako ebazpenak: zoru- eta sabai-funtzioak 149

A.2. Bigarren ariketa-zerrendako ebazpenak: oinarrizko konbinatoriako problemak 153

A.3. Hirugarren ariketa-zerrendako ebazpenak: konbinatoriako beste zenbait problema . . 157

A.4. Laugarren ariketa-zerrendako ebazpenak: Olinpiada matematikoen problemak 164

A.5. Bosgarren ariketa-zerrendako ebazpenak: koefiziente binomialak 170

A.6. Seigarren ariketa-zerrendako ebazpenak: Newtonen binomioa 180

A.7. Zazpigarren ariketa-zerrendako ebazpenak: koefiziente multinomialak 184

A.8. Zortzigarren ariketa-zerrendako ebazpenak: funtzio sortzaileak eta errepikapenak . . 186

A.9. Bederatzigarren ariketa-zerrendako ebazpenak: Fibonacciren zenbakiak 191

A.10. Hamargarren ariketa-zerrendako ebazpenak: zenbaki-partiketak 194

A.11. Hamaikagarren ariketa-zerrendako ebazpenak: Stirlingen eta Catalanen zenbakiak . 195

A.12. Hamabigarren ariketa-zerrendako ebazpenak: grafo-teoria 201

B. Ariketen zenbakizko soluzioak **205**

B.1. Oinarrizko konbinatoriaren ariketa-zerrenden soluzioak 205

Erreferentziak **211**

Hitzaurrea: I edizioa

Ikasmaterial honen bidez, Jesús de la Cal Aguado katedradunari omenaldi txiki bat egin nahi diot. Matematikako ikasketetako 3. mailan ezagutu nuen Jesús, Probabilitate Kalkuluko irakasle moduan, eta 4. mailan, Probabilitate-Teoria hautazko irakasgaia hartzea erabaki nuenean. Esan beharra daukat, irakasle hobezina izan zela eta, hein handian, berari esker hautatu nuen tituluaren espezialitate. Geroago, tesia defendatu nuenean, nire epaimahaiaren zuzendaria izateko ohorea izan nuen, eta, 2002tik aurrera, sail berean lankide izateko aukera izan nuen; han, beraren ikerkuntza-mailaz jabetu ahal izan nintzen. 2012ko maiatzaren 2an, Fakultateak bere oroimenerako ekitaldi bat egin zuen, eta haren izena duen plaka bat jarri zen informatikako AI6 gelan.

2010-11 ikasturtean, Matematikako titulazio berria hasi zen Zientzia eta Teknologia Fakultatean. Matematika Diskretua 2. mailako nahitaezko irakasgaia da eta 6 ECTS kreditu ditu. Irakasgai horren helburuak honako hauek dira: zerrendatze-konbinatoriaren teknika nagusiak aurkeztea, esanahi konbinatorioa duten zenbaki-familia garrantzitsuenak ikastea eta grafoak eta haien aplikazioak erakustea.

Ikasleak lortu behar dituen gaitasun espezifikoak honako hauek dira:

- Funtsezko frogapen matematikoen motak eta problemen ebazpen-teknikak (behaketa-aierua-frogapena) ezagutzea.
- Multzo-teoriaren oinarrizko osagaiak ezagutzea eta erabiltzea.
- Problema konbinatorioak ebazten jakitea, oinarrizko teknikak, funtzio sortzaileak eta errepikapenak erabiliz.
- Identitate konbinatorioak eta esanahi konbinatorioa duten zenbaki-familia garrantzitsuenak ezagutzea.
- Grafo teoriaren oinarrizko kontzeptuak, teknikak eta emaitzak ezagutzea eta haren aplikazio askotarikoetako batzuez jabetzea.

Ikasmateriala hiru ataletan banatuta dago; lehenengoan, Konbinatoria arloa agertzen da, eta lau kapitulu ditu; bigarrenean, Grafo-Teoria azaltzen da; hirugarrenean, hamabi ariketa-zerrenden zenbakizko emaitzak eta zenbait problemaren garapenak agertzen dira. Aipatzekoa da ariketa batzuk bibliografiako liburuetatik aterata daudela; gomendatutako bibliografia eta estekak amaieran kontsulta daitezke.

Lehenengo atala: KONBINATORIA

1. gaia: Oinarrizko konbinatoria. Kapitulu horretan, oinarrizko baliabideak konbinazio arrazoibidean, inklusio-esklusio printzipioa eta usategiaren printzipioa lantzen dira, besteak beste. Lau ariketa-zerrenda agertzen dira: zoru- eta sabai-funtzioei buruzkoak, oinarrizko problemei buruzko bi zerrenda eta olinpiada matematikoetako problema batzuk.

2. gaia: Konbinazio-identitateak. Koefiziente binomialak eta multinomialak, binomioaren eta multinomioaren formulak eta erlazionatutako identitateak aurkeztea da gai horren helburua. Hiru ariketa-zerrenda agertzen dira: koefiziente binomialak, Newtonen binomioa eta koefiziente multinomialak lantzeko problemak.

3. gaia: Funtzio sortzaileak eta errepikapenak. Zenbakizko segida baten funtzio sortzailea, konbinazio-problemen erabilerak, errepikapenak eta konbinazio-problemak, errepikapenak eta funtzio sortzaileak eta osagai orokorra lortzean datza gaia. Funtzio sortzaileak eta errepikapenen ariketa-zerrenda agertzen da.

4. gaia: Zenbait zenbaki-familia garrantzitsu. Fibonacciren, Catalanen, Bellen eta Stirlingen zenbakiak azaltzeaz gain, zenbaki arrunten eta multzoen partiketak agertzen dira. Hiru ariketa-zerrenda agertzen dira: Fibonacciren zenbakiak, zenbaki-partiketak eta Stirlingen eta Catalanen zenbakien problemak.

Bigarren atala: GRAFO-TEORIA

5. gaia: Grafo-teoria. Azken kapituluaren edukiak oinarrizko kontzeptuak, bideak, zuhaitzak, planotasuna eta koloratzea dira. Grafo-teoriaren ariketa-zerrenda gehitzen da.

Hirugarren atala: ARIKETAK

A eranskina: Hamabi ariketa-zerrendetako problema batzuen ebazpenak azaltzen dira; guztira, gai guztietako berrogei ariketa inguru garatzen dira.

B eranskina: Bost gaietako ariketa guztien zenbakizko soluzioak agertzen dira; ehun ariketa baino gehiago dira.

Azkenik, eskerrak eman nahi dizkiet UPV/EHUko Matematika Aplikatua eta Estatistika eta Ikerkuntza Operatiboaren saileko Matematika Diskretuko irakasleei, irakasgaia koordinatzeko giro onagatik; Agueda Madozi eta Amaia Zugadiri, gaztelaniazko Konbinatoriako apunteak partekatzeagatik, eta, Euskara eta Eleaniztasuneko Errektoreordetzari, emandako laguntzagatik ikasmaterialgintzako proiektu honen hizkuntza egokitzeko.

Edozein akats egilearen ardura da, zuzenketak eta komentarioak haren posta elektronikoaren bidez helaraztea eskertuko da.

Leioan, 2015eko uztailean

María Merino Maestre

Hitzaurrea: II edizioa

Euskal Herriko Unibertsitateko Matematikako graduko bigarren mailako Matematika Diskretua izeneko irakasgaiaren ikasmaterialari dagokio eskuliburu hau. Hala ere, beste gradu batzuetan erabilgarria izan daiteke eta baita Matematikako beste irakasgai batzuetan ere. Eskuliburuaren helburua Matematikako oinarrizko elementuak ezagutzea eta matematikako lengoiaren erabilpena, frogapen-teknikak eta problemen ebazpenak lantzea da. Eskuliburu honen bidez lehenengo mailako Oinarrizko Matematikan sartutako gai konbinatorioak sakontzen dira eta bigarren mailako Probabilitate-Kalkulurako oinarria da. Sartutako kontzeptu batzuk, esate baterako errepikapenak eta grafoak, hirugarren mailako Zenbakizko Metodoak II eta Eredu Matematikoak irakasgaietan eta laugarren mailako Programazio Matematiko irakasgaian erabiltzen dira.

Eskuliburu honen lehenengo edizioan azaldu genuenez, 2011/12 ikasturtean Matematika Diskretua izeneko irakasgaia Matematikako gradu berrian lehenengo aldiz emateko erronka heldu zitzaigun. Hasierako ikasturteetan, irakaslegoa Eduardo Sainz de la Maza, Larraitz Aranburu, Silvia Marcaida eta Maria Merino osatzen genuen. Tamalez, 2011. urtean gure irakasle oso preziatua, Jesús de la Cal, zendu zen eta berak hasitako lana aurreko litzentziaturako Konbinatoria irakasgaitik abiatuta eta bere azken gomendioak jasota erronkari ekin genion. Horrela sortu zen ikasmaterial honen lehenengo argitalpena 2015ean, Jesusen omenez, hain zuzen ere. 2019/20 ikasturtean Mikel Lezaun eta Iker Malaina irakasleak gehitu ziren eta beranduago, Leticia Hernando, Ainhoa Iñíguez, Jon Asier Bárcena eta Javier Cárcamo.

Gutxi gorabehera hamarkada bateko ibilbidearen ostean, euskaraz, gaztelaniaz eta ingelesez ematen den irakasgai honetatik hamar irakasle ibili gara. Urte guzti horien esperientziari eta irakasle berrien ekarpenei esker zure aurrean duzun eskuliburu hau pixkanaka-pixkanaka aberastu egin da. Hori dela eta, etapa berriaren Jon Asier Bárcena irakaslearen laguntzarekin ikasmateriala berritu dugu, jatorrizko egiturari froga berriak zehaztuz eta ariketa ugari gehituz. Bigarren edizio honetan, lehenengo edizioarekiko aldaketa anitz gehitu ditugu, bai kuantitatiboki bai kualitatiboki. Hona hemen aldaketa garrantzitsuenak, guztira berrogeita hamar orrialde baino gehiago osatzen dituztenak:

- Emaitzen frogapenak gehitu dira eskuliburu osoan zehar. Zehatz-mehatz hirurogeita zortzi emaitza gehiago daude frogatuta bigarren edizioan.

- Hirugarren kapituluan oharrak gehitu dira eta problema batzuk ordenagailuaren bitartez ebazteko prozedura azaldu dira.

- Hemeretzi ariketa gehitu dira. Bereziki, hirugarren eta bosgarren kapituluetan erantsi dira ariketa berriak, lehenengo edizioan ariketa gutxien zituzten kapituluak, hain zuzen ere.
- Bost ariketaren ebazpena gaineratu dira. Bereziki, hirugarren eta bosgarren kapituluetan gehitu dira. Gainera, beste ariketa batzuetan, doi-doi (V-13) eta (X-13) ariketetan, ebazpen alternatiboak eman dira.
- Ariketen zailtasuna gehitu da. Bereziki, (†) ikurra erabili dugu ariketa zailak adierazteko, eta (‡) oso zailak diren ariketak adierazteko.
- Irudien iturriak, berezkoak ez diren kasu guztietan, azaldu dira.
- Bibliografia zabaldu da, matematikako beste arloko loturak azpimarratuz, adibidez, Aljebra eta Analisia. Zehazki, sei liburu gehiago daude aipatuta.

Esker beroenak eman nahi dizkiegu irakasgai honetan parte hartu duten irakasle guztiei, irakasgai honen koordinazioak edukien garapena biziki hobetzeko lagundu gaituelako. Bereziki, eskerrak eman nahi dizkiogu Leticia Hernando irakasleari, liburuaren zirriborroa osorik irakurtzeagatik, eta hobetzeko proposamenak egiteagatik. Patxi de la Hoz irakasleari ere eskerrak eman nahi dizkiogu, hizkuntza inguruko iradokizunengatik.

Azkenik, Euskara eta Eleaniztasuneko Errektoreordetzari eta hizkuntza-zuzentzaileei eskerrak eman nahi dizkiegu, ikasmaterialgintzako proiektu honen hizkuntza egokitzeko laguntzagatik. Azpimarratzekoa da laguntza honi esker, euskarazko graduko irakaskuntzarako testuen ekoizpena sustatzen dela, eta testuaren hizkuntza-zuzentasuna eta egokitasuna bermatzen dela.

Leioan, 2023ko otsailaren 11n

Zientziako Emakumearen eta Nesken Nazioarteko Egunean

Jon Asier Bárcena Petisco eta María Merino Maestre

KONBINATORIA

Sarrera

(Jesús de la Cal Aguado)

1995-96 ikasturteaz geroztik, Matematika lizentziaturako plan berri bat hasi zen UPV/EHUko Zientzia eta Teknologia Fakultatean. Irakaskuntza plan horretan, Jesús de la Cal Aguadok *Combinatoria* irakasgaia eman zuen hainbat urtetan zehar, 1997-98 eta 2010-11 ikasturteen artean, hain zuzen. Konbinatoria lehenengo zikloko eta 7.5 kredituko hautazko irakasgaia zen, 21 gaitan antolatua. Jarraian, aurkeztuko dugu berak bere ikasleentzat prestatutako sarrera.

¿De qué trata?

Los problemas de los que se ocupa la Combinatoria son problemas de recuento. ¿De cuántas maneras se puede realizar tal tarea? ¿Cuántos objetos hay que tengan tales y cuales características? Usando una formulación un poco abstracta: se trata de encontrar el número de elementos de un conjunto finito definido por comprensión, y hacer, si es posible, un listado de tales elementos.

Zertan datza?

Konbinatoriak lantzen dituen problemak zenbatzeari lotuta daude. Zenbat eratan egin daiteke zeregin bat? Zenbat objektu daude horrelako edo halako ezaugarriekin? Formulazio bat abstraktuxeagoa erabiliz: ulermenaren bidez definitutako multzo finitu baten elementu kopurua aurkitzean datza, eta posible bada, elementu horien zerrenda egitean datza.

¿Puede mencionar algunos ejemplos más concretos?

¿De cuántas maneras se pueden colocar 20 *bolas distinguibles en* 10 *cajas numeradas, de forma que ninguna caja quede vacía? ¿Cuántas sucesiones de* 15 *términos se pueden formar con ceros y unos, de forma que no haya dos ceros seguidos? ¿Cuántas soluciones en números enteros no negativos tiene la ecuación* $x_1 + \ldots + x_{10} = 35$*? ¿Cuántas soluciones tiene esa misma ecuación, si las variables solo pueden tomar valores enteros comprendidos ente* 1 *y* 6*? ¿Cuántas regiones determinan en el plano* 19 *rectas que se cortan dos a dos, pero no hay tres que pasen por el mismo punto? ¿En cuántos ceros termina el número* 1000!*? ¿Cuántas particiones distintas admite un conjunto de* 30 *e-*

Adibide zehatzagoren bat aipa dezakezu?

Zenbat eratan koka daitezke 10 zenbakidun kutxatan 20 bola bereizgarri, kutxa hutsik gera ez dadin? Zero eta bat zenbakiak erabiliz, 15 elementudun zenbat segida sor daitezke, bi zero jarraian egon ez daitezen? Zenbaki ez-negatiboen zenbat soluzio ditu $x_1+\ldots+x_{10} = 35$ ekuazioak? Zenbat soluzio ditu aurreko ekuazioak baldin eta aldagaiek 1en eta 6ren arteko zenbaki osoak izan behar badute? Zenbat eskualde osatzen dituzte binaka moztutako 19 zuzenek, hiru leku beretik ez pasatuz? Zenbat zerotan amaitzen da 1000! zenbakia? 30 elementudun multzo baten zenbat partiketa egin daitezke? Zenbat eratan deskonposa daiteke 50 zenbakia zenbaki arrunten batura moduan? Dantzaldi batera 20 *lementos? ¿De cuántas maneras se puede descomponer el número* 50 *en suma de números naturales? En un baile, al que asisten* 20 *matrimonios, ¿de cuántas maneras se puede emparejar, para bailar, a los hombres con las mujeres, de forma que ninguno de los hombres baile con su propia esposa? Y un largo etcétera. Y, naturalmente, están también las correspondientes generalizaciones que resultan al sustituir los números concretos* $(10, 20, 19)$ *por cantidades abstractas* (m, n, k).

senar-emazte joan dira, zenbat eratan pareka daitezke gizonak emakumeekin, gizon bat bera ere bere emaztearekin ez egoteko? Eta abar eta abar. Eta, noski, $(10, 20, 19)$ zenbakiak ordezkatzerakoan (m, n, k) kantitate abstraktuen bidez sortzen diren orokorpenak.

¿Dónde surgen tales problemas?

Por todas partes. Lo que resulta difícil es señalar algún área de la vida práctica o del ámbito científico, donde no afloren de manera natural problemas o cuestiones de tipo combinatorio, ya sean sencillos o complicados. Por supuesto, dentro de las matemáticas mismas, surgen a cada paso.

Non sortzen dira halako problemak?

Edonon. Zaila dena zera da, eguneroko bizitzan edo arlo zientifikoan konbinatoria motako problemak edo galderak, bai sinpleak bai konplexuak, era naturalean azaltzen ez diren lekuren bat aipatzea. Matematikan bertan, etengabean agertzen dira, noski.

¿Se refiere al Cálculo de Probabilidades?

Es cierto que se suele asociar la Combinatoria con el Cálculo de Probabilidades, por aquello de que muchos problemas de esta materia se reducen a recuentos de casos favorables y casos posibles. Tal asociación se ve reforzada por el hecho de que, en el Bachillerato, ambas materias se enseñan juntas (cuando se enseñan, pero ésta es otra historia). Podría parecer, entonces, que la Combinatoria no es más que una disciplina auxiliar del Cálculo de Probabilidades. Nada más lejos de la realidad. Y no solo porque recientemente se esté produciendo el fenómeno, en apariencia bastante paradójico, de que se estén empleando métodos probabilísticos para investigar problemas combinatorios. Es que no se puede olvidar el enorme papel de la Combinatoria en multitud de problemas genuinamente matemáticos relativos a números naturales, configuraciones topológico-geométricas (grafos, poliedros), grupos finitos, criptografía, computación, etc. Todo esto ha hecho de la Combinatoria lo que actualmente es.

Probabilitate-Kalkuluari buruz ari zara?

Egia da Konbinatoria Probabilitate-Kalkuluarekin erlazionatu ohi dela, irakasgai horren problema asko aldeko emaitzen kopurua eta emaitza posibleen zenbaketari lotuta daude-eta. Erlazio hori sendoagoa da, Batxilergoan bi arloak elkarrekin irakasten direlako (irakasten direnean, baina hori beste kontu bat da). Orduan, pentsa zitekeen Konbinatoria Probabilitate-Kalkuluaren gai laguntzailea besterik ez dela. Errealitatetik urrunago ezin. Eta ez bakarrik orain dela gutxi itxuraz nahiko paradoxikoa den fenomenoa hau gertatzen ari delako; konbinatoriazko problemak ikertzeko metodo probabilistikoak erabiltzen ari dira. Ezin da ahaztu honako arlo hauekin lotutako problema matematikoetan. Konbinatoriak itzelezko eginkizuna duela: zenbaki arruntak, konfigurazio topologiko-geometrikoak (grafoak, poliedroak), talde finituak, kriptografia, konputazioari lotutakoak. Horrek guztiak gaurko Konbinatoria eraldatu du.

Ya que estamos aquí, ¿cuál es la situación relativa de la Combinatoria dentro del conjunto de las matemáticas, y de sus grandes ramas: Análisis, Álgebra, Geometría, etc.?

Yo suelo comparar las matemáticas con una gran ciudad en la que se pueden distinguir barriadas, edificios, monumentos, parques, etc., que están interconectados por una compleja red de callejuelas, calles, paseos y avenidas. En esta imagen, en la que las grandes ramas corresponderían a las grandes barriadas (sin que se sepa muy bien dónde acaba una y empieza la otra), la Combinatoria sería una parte del Casco Viejo. Está ahí desde el principio, formando parte del núcleo originario. Pero la imagen no es estática. Con el transcurrir del tiempo, el aspecto de la ciudad cambia cuando surgen nuevas urbanizaciones, y cuando zonas ya presentes adquieren renovada pujanza o, por el contrario, entran en ruinosa decadencia y son finalmente demolidas para ser sustituidas por nuevas construcciones. Pues bien, la Combinatoria es uno de esos campos que, habiendo presentado históricamente un aspecto modesto, oscuro y subordinado, se está destacando desde hace unas décadas por su vigorosa modernización y excepcional vitalidad.

¿En qué se nota? ¿Y a qué se debe?

Se nota, sobre todo, en la cantidad y calidad de la investigación actual sobre temas combinatorios, en la existencia de escuelas muy potentes, como la de Cambridge (inspirada por el genio de Gian-Carlo Rota), en el número de excelentes libros publicados por especialista de alto nivel, y en la presencia, cada vez más frecuente, de asignaturas de Combinatoria en los curricula de estudios superiores de Matemáticas, Informática, etc. Las causas son seguramente muy diversas, pero sospecho que una de las principales es el papel que juega en el desarrollo de las tecnologías digitales y de la computación, y es patente la tremenda importancia que tienen tales tecnologías en el mundo moderno.

Hemen gaudenez, zein da Konbinatoriaren egoera erlatiboa Matematikako arloan eta, bereiziki haren adar nagusien artean: Analisia, Aljebra, Geometria eta abar?

Matematika hiri handi batekin alderatu ohi dut, non auzoak, erakinak, monumentuak, parkeak eta abar bereizten baitira eta kalezuloak, kaleak, pasealekuak eta etorbideen sare konplexu baten bidez elkarri lotuta baitaude. Irudi horretan, non adar nagusiak auzo handiei esleitzen baitzaie (oso ondo jakin gabe non amaitzen den bat eta non hasten den bestea), Konbinatoria Alde Zaharreko atal bat litzateke. Hasieratik dago hor, jatorrizko erdigunetik parte izanik. Baina irudia ez dago geldirik. Denbora pasatu den neurrian, hiriaren itxura aldatuz doa, urbanizazio berriak sortzen diren heinean, eta jadanik existitzen diren gune batzuek indar berriak lortzen dituzte edo, alderantziz, gainbehera hondagarrian jasaten dute eta azkenean, lurreratzen dira erakin berrien bidez ordezkatzeko. Konbinatoriak, historikoki tankera apala, iluna eta menderatua azaldu arren, orain dela hamarkada batzuk berritze kementsua eta bizkortasun aparta garatu ditu.

Zertan nabaritzen da? Zer dela eta?

Batez ere gaur egungo konbinatoriako gaiei buruzko ikerkuntzaren kalitatearengatik eta kantiteagatik nabaritzen da; garrantzia handiko unibertsitateak badaude, adibidez Cambridgekoa (Gian-Carlo Rotaren talentuak inspiratua); badago maila handiko espezialistek argitaratutako liburu bikain asko, eta gero eta maizago agertzen dira Matematikako, eta Informatikako, goi-mailako ikasketen curriculumean Konbinatoriako irakasgaiak. Segur aski, kausak oso desberdinak izango dira, baina susmatzen dut nagusienetariko bat konputazio eta teknologia digitalen arloei lotuta dagoela, eta nabaria da gaur egun teknologia horiek garrantzi handia dutela.

Volvamos a la asignatura que nos ocupa. ¿Cómo es y cómo se desarrolla?

Se trata de un curso breve (un cuatrimestre, a razón de cuatro horas por semana) e introductorio. Se empieza prácticamente de cero, asentando los recursos básicos del razonamiento combinatorio a través de ejemplos y problemas concretos y sencillos. Progresivamente se incrementa la complejidad de los problemas y se introducen recursos más técnicos, como las funciones generatrices y las recurrencias. A lo largo del camino aparecen números especiales, números que cuentan algo, como los números combinatorios, los de Fibonacci, los de Catalan, etc., y se exploran las relaciones entre ellos, que se expresan a través de fórmulas o identidades.

Itzul gaitezen irakasgaiaren ardurara. Nolakoa da eta nola garatuko da?

Ikastaro labur bat da (lauhileko batekoa, astean 4 ordukoa), sarrera modukoa. Gutxi gorabehera hutsetik hasita, arrazoinamendu konbinatorioaren oinarrizko baliabideak finkatuko dira, adibide eta problema konkretu eta sinpleen bidez. Problemen zailtasuna mailaka handitzen da eta baliabide teknikoagoak sartzen dira, funtzio sortzaileak eta errepikapenak, besteak beste. Bidetik zehar, zenbaki bereziak agertzen dira, zerbait kontatzeko zenbakiak, esate baterako, zenbaki konbinatorioak, Fibonaccirenak, Catalanenak, eta abarrenak, eta haien arteko erlazioak lantzen dira, formula edo identitatearen bidez adieraziz.

¿Hay muchos teoremas?

Como dice Halmos en uno de sus escritos, un teorema es una idea matemática que, por ser de uso o aplicación frecuente, merece ser destacada y retenida en la memoria. Ideas de éstas hay desde luego unas cuantas en la asignatura, aunque bastante menos abstractas que las de otras partes de las matemáticas. En todo caso, el material no está organizado como una sucesión rígida e implacable de definiciones y teoremas, sino de una forma más flexible, casi como si de una ciencia experimental se tratara, haciendo de la resolución de problemas el elemento clave del aprendizaje y del desarrollo de los demás aspectos formativos.

Teorema asko daude?

Halmosek bere idazki batean esaten duenez, teorema bat ideia matematiko bat da, maizko baliatze edo erabilerakoa izateagatik buruan gorde eta azpimarratzekoa dena. Noski, mota horretako hainbat ideia daude irakasgaian, nahiz eta matematikako beste atal batzuekiko hain abstraktuak ez izan. Edozein kasutan, materiala ez dago antolatuta definizio eta teoremen segida zurrun eta bihozgabe baten moduan, baizik eta era malguago batean, ia-ia zientzia esperimentala izango balitz moduan, eta, hala, problemen ebazpena da ikasketa-prozesurako eta gainontzeko prestakuntzazko aldeen gakoa.

¿Cuáles son esos aspectos formativos?

Es un asignatura muy apropiada para desarrollar facetas fundamentales del pensamiento matemático: intuición y creatividad en el abordaje de problemas, rigor en la deducción, experimentación con casos particulares, percepción de ideas generales bajo un ropaje concreto ('the best is the general embodied in the concrete', decía Feller, y no pretendía hacer un eslogan antimilitarista), manipulación inteligente de

Zein dira prestakuntzazko alde horiek?

Irakasgai hau pentsamendu matematikoko funtsezko aldeak garatzeko oso egokia da: problemei heltzeko behar den intuizioa eta sormena; ondorioztatzeko zorroztasuna: saiakuntza kasu bereziekin, jantzi zehatz baten azpiko ideia orokorrak hautematea (*'the best is the general embodied in the concrete'*, esaten zuen Fellerrek, eta ez zuen nahi eslogan antimilitarista egin nahi); formula eta adierazpen mate-

fórmulas y expresiones matemáticas, etc. Desde el principio, el estudiante tiene muy claro que tan importante o más que el resultado de un problema es el método con el que ha sido alcanzado, y que puede haber varios métodos, y que esto es muy interesante, porque cada método ilumina el problema desde un ángulo distinto. Y que si este método es más rápido y directo, ese otro permite ver la solución de un problema más general, o que existe una estrecha e inesperada relación entre dos problemas que parecían no tener nada que ver el uno con el otro. Y que, en esta búsqueda y experimentación con distintos métodos, puede y debe poner en juego todos los recursos y herramientas que tenga a mano o sea capaz de inventar.

matikoak modu adimendutsuan erabiltzea, eta abar. Hasieratik, ikasleak argi du problema baten soluzioa bezain garrantzitsu edo garrantzitsuagoa dela hura lortzeko erabilitako metodoa, eta hainbat metodo egon daitezke, eta hori oso interesgarria da, metodo bakoitzak ikuspegi desberdin batetik argitzen baitu problema. Metodo bat arinagoa eta zuzenagoa izan daiteke; beste batek problema orokorrago baten soluzioa ikusteko aukera ematen du, edo bi problemaren artean erlazio estua eta ustekabekoa dago batak bestearekin zerikusirik ez omen zutenean. Eta bilaketa eta saiakera horietan metodo diferente batzuk erabiliz, eskura dituen edo asma ditzakeen baliabide eta tresna guztiez baliatu behar da.

¿Qué conocimientos previos se requieren del alumno?

Los que proporcionan los dos primeros cursos de la licenciatura son, desde luego, más que suficientes. Pero es muy importante que el estudiante tenga iniciativa para buscar y estudiar por su cuenta, sin esperar a cada paso a que le señalen el camino. Al comenzar el curso cada alumno recibe un material que contiene, entre otras cosas, más de doscientos problemas, junto con el consejo de que los trabaje intensamente, y no se limite a coleccionar las soluciones como si de cromos se tratara. También se le anima a recurrir a la Biblioteca o a Internet en búsqueda de nuevos materiales o ideas. Siempre se aprende algo viendo lo que han pensado los demás, pero solo se aprende de verdad cuando uno piensa por sí mismo, detecta y corrige sus propios errores y supera los bloqueos mentales que le impiden avanzar.

También es importante que el estudiante tenga y desarrolle un cierto gusto estético por la armonía de las matemáticas.

Zein jakintza izan behar ditu ikasleak aldez aurretik?

Lizentzian emandako lehenengo bi mailak nahikoa eta sobera dira. Baina garrantzitsua da ikasleak bere kabuz bilatzeko eta ikasteko ekimena izatea, pauso bakoitzean zer bide seinalatzen zaion itxaron gabe. Ikastaroa hasi bezain pronto, ikasleak jasotzen duen materialak, besteak beste, berrehun problema baino gehiago ditu, eta lantzeko biziki aholkatzen zaio, eta ez bakarrik soluzioak biltzeko, kromoak izango balira bezala. Gainera, material edo ideia berrien bila liburutegira edo Internetera joatea sustatzen da. Beti ikasten da zer edo zer besteek pentsatu dutena ikusiz, baina soilik ikasten da benetan gutako bakoitzak gure kabuz pentsatzen dugunean, gure erroreak aurkitu eta zuzentzen ditugunean eta aurreratzeko ditugun buruko blokeoak gainditzen ditugunean.

Ikasleak matematikaren harmoniaren aldeko gozamen estetikoa izatea eta garatzea ere premia handikoa da.

Háblenos de la bibliografía recomendada.

Desgraciadamente no conozco buenos libros en

Hitz egin dezagun gomendatutako bibliografiaz.

castellano que se adapten a los objetivos de la asignatura, aunque confío en que pronto se ponga remedio a esta situación. El programa está inspirado, sobre todo, en el libro de Cohen, que me parece excelente, pero tanto éste como el de Vilenkin (también en inglés, y muy divertido, por cierto) están descatalogados desde hace tiempo. No obstante, los ejemplares que tengo en mi biblioteca particular están permamentemente a disposición de los alumnos que quieran consultarlos. Los libros de Marcus y Balakrishnan son más recientes y también muy útiles para que el alumno estudie por su cuenta. El libro de Wilf, como el de Bose y Manvel, contiene materiales más avanzados. Finalmente, los dos[1] libros restantes no son específicos de Combinatoria, pero contienen capítulos sobre la misma, además de otras cosas interesantes. El de Graham, Knuth y Patashnik me parece especialmente recomendable por su contenido y sus aciertos pedagógicos.

Zoritzarrez ez dut ezagutzen gaztelaniazko liburu onik irakasgaiaren helburuetarako egokituta, baina espero dut egoera hori laster konpontzea. Egitaraua, batez ere, Cohenen liburuan dago inspiratuta, bikaina iruditzen baitzait, baina hori zein Vilenkinena (ingelesez hori ere, eta bide batez, oso dibertigarria) katalogotik kanpo daude orain dela asko. Hala ere, nire liburutegian ditudan aleak kontsultatu nahi duten ikasleen eskueran daude beti. Marcusen eta Balakrishnanen liburuak berriagoak dira eta oso erabilgarriak ere, bere kabuz ikasi nahi duenarentzat. Wilfen liburuak, Boserenak eta Manvelenak bezala, gai aurreratuagoak dituzte. Azkenik, beste bi[1] liburuak ez dira Konbinatoriarako espezifikoak, baina horri buruzko kapituluak dituzte, eta beste zenbait gauza interesgarri. Graham, Knuth eta Patashnikena bereziki gomendagarria iruditzen zait edukia eta egokitasun pedagogikoengatik.

¿Hay prácticas de ordenador?

Como prácticas programadas, no. Pero aquellos alumnos que manejen `Mathematica` o `Maple`, por ejemplo, pueden aprovechar las utilidades de estos programas para hacer interesantes exploraciones sobre problemas combinatorios relativos a particiones de conjuntos, de números, etc.

Ordenagailu-praktikarik ba al dago?

Eratutako praktikarik ez. Baina, adibidez `Mathematica` edo `Maple`, erabiltzen dutenek programa horien abantailei onura atera diezaiekete esplorazio interesgarriak egiteko, multzoen edo zenbakien partiketei lotutako problema konbinatorioen inguruan, besteak beste.

¿Cómo se evaluá al alumno?

Mediante un examen que consiste en la resolución de un cierto número de problemas. Además, a lo largo del curso, se proponen trabajos de profundización o ampliación de algunas de las cuestiones tratadas. Son voluntarios y se tienen en cuenta para la calificación final.

Nola ebaluatzen da ikaslea?

Azterketa baten bidez; problema batzuk ebatzi beharko dituzte ikasleek. Gainera, ikasturtean zehar, landutako gai batzuk zabaltzeko edo sakontzeko lanak proposatzen dira. Borondatezkoak dira eta amaierako kalifikazioan kontuan hartuko dira.

Entrevista realizada según el método Juan Palomo, yo me lo guiso, yo me lo como. Entrevistador y entrevistado: Jesús de la Cal, Profesor de la asignatura.

Aurreko elkarrizketa, *neuk egin eta neuk jan*, metodoaren bidez egina da. Elkarrizketatzailea eta elkarrizketatua: Jesús de la Cal, *Konbinatoria* irakasgaiaren irakaslea.

[1] Nota de la traductora: Los libros que se mencionan son [9] y [10].

[1] Itzultzailearen oharra: Aipatutako beste liburuak [9] eta [10] dira.

1. gaia

Oinarrizko konbinatoria

Kapitulu honetan konbinatorian erabiltzen diren oinarrizko teknikak eta egiturak aztertuko ditugu. 1.1. atalean konbinatoriaren definizioak eta adibide batzuk erakutsiko ditugu, 1.2. atalean oinarrizko teknikak eta notazioa azalduko ditugu, 1.3. atalean konbinatoriako funtzio berezi batzuk adieraziko ditugu, 1.4. atalean konbinatorioan agertzen diren oinarrizko egiturak landuko ditugu, 1.5. atalean sailkapenak aztertuko ditugu, 1.6. atalean inklusio-esklusio printzipioa landuko dugu, eta 1.7. atalean Dirichleten usategiaren printzipioa eta agurren lema ikusiko dugu. Azkenik, 1.8. atalean gai honi dagokion ariketa-zerrenda dugu.

1.1. Konbinatoria

1. definizioa: ***Konbinatoria*** *propietate berdinak dituzten elementuak zenbatu eta elementu horien ezaugarriak aztertzen dituen matematikaren arloa da.*

Kapitulu honetan zentratuko gara elementuak zenbatzeko problemetan. Problema horiek hainbat eratan ager daitezke. Hona hemen adibide batzuk:

1. Elementuak kontatzea:
   - Zenbat soluzio ditu $x + y = n$ ekuazioak, non $x, y \in \mathbb{N}$?
   - 137 tenis jokalariekin, zenbat partidu egin daitezke?
   - Zenbat batugai daude honako batuketa hauetan:
   $$\sum_{1\le i<j\le n} a_{ij} \quad \text{eta} \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij}?$$
   - Zenbat 5 zifradun zenbaki daude sistema hamartarrean, posizio bikoitietan zifra bakoitiak dituztenak?

2. Egiteko erak kontatzea:

   - Zenbat eratan joan daitezke $\mathbb{R}^2$ planoan $(0,0)$ puntutik $(3,2)$ puntura, pauso bakoitzean unitate bat eskuinalderantz edo gorantz mugitzen bagara?
   - Zenbat eratan egin daiteke honako eragiketa hau:

$$\frac{\partial^5}{\partial x^2 \partial y^3} f(x,y)?$$

   - Dado bat 4 aldiz botatzen bada, zenbat eratan lor daitezke 15 puntu?

1.2. Oinarrizko teknikak

Atal honetan konbinatorian (eta beste matematika arloetan) erabiltzen diren oinarrizko nozioak errepasatuko ditugu. Gainera, konbinatorian erabiltzen diren oinarrizko teknikak aurkeztuko ditugu.

1.2.1. Notazioa

Atal honetan ikasmaterial osoan zehar erabiliko ditugun definizioak aurkeztuko ditugu:

2. definizioa: **Multzoa** *osagai desberdinen bilduma da.* **Multimultzoa** *desberdinak izan behar ez duten osagaien bilduma da. Osagaiak* **elementuak** *deitzen dira.* **Familia** *multzoz osatutako multzoa da. Multzoak, multimultzoak eta familiak adierazteko giltzak erabiltzen dira.*

3. definizioa: **Segida** *desberdina izan behar ez duten osagai ordenatuen bilduma da. Segida adierazteko parentesiak erabiltzen dira.*

Adibidez, 1, 2 eta 3 elementuen multzoa $\{1,2,3\}$ adierazten da. Osagaiak ordenatuta ez daudenez, $\{1,2,3\} = \{2,3,1\}$ da. Gainera, $(1,1,2)$ segida da eta osagaiak ordenatuta daudenez, $(1,1,2) \neq (1,2,1)$ da. Era berean, $\{1,1,2\}$ multimultzoa da, eta $\{1,1,2\} = \{1,2,1\}$ da. Azkenik, familia bat $\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$ litzateke; kasu honetan $\{1,2,3\}$ multzoaren 2 elementuko azpimultzoen familia da.

Gainera, ikasmaterial honetan honako notazio hau erabiliko da: $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$, $\mathbb{N}^* = \{0,1,2,3,\dots\}$ eta $[n] = \{1,2,\dots,n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Gainera, $[0] = \emptyset$ moduan definituko dugu.

Multzoei dagokienez, A multzoan dagoen elementu kopurua $c(A)$ denotatuko da, adibidez, $c(\{3,6,7,9\}) = 4$. Era berean, A eta B multzoak ditugunean: $A \cap B = \{x : x \in A \text{ eta } x \in B\}$, A eta B arteko **ebakidura**; $A \cup B = \{x : x \in A \text{ edo } x \in B\}$, A eta B arteko **bildura** da; eta $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ eta } x \notin B\}$, A eta B arteko **kenketa** da.

1.2.2. Itzulpenak

Konbinatorian, matematikako beste arlo batzuetan bezala, problema ebazteko oinarrizko teknika bat itzulpenak dira:

4. definizioa: *Problema* **itzultzea** *baliokidea den beste problema bat formulatzean datza, hots, problema bat emaitza berdina duena.*

- Konbinatorian A multzoa kontatzearen itzulpena B multzoa kontatzea da baldin eta bi multzoen artean bijekzio bat existitzen bada; izan ere, kasu horretan A eta B elementu kopuru berdina dute.
- Itxuraz diferenteak diren problemak baliokideak izan daitezke.
- Itzultzeko irudimena eta esperientzia behar da.
- Problema itzultzea ez da ebaztea, baina lagungarria izan daiteke lan egiten ohituago gauden eran formulatzea.

Ikus dezagun honako adibide hau: $\mathbb{R}^2$ planoan $(0,0)$ puntutik $(3,2)$ puntura unitate bat eskuinalderantz edo gorantz mugitzeko era kopurua hiru bola beltz bereizezinak eta bi bola zuri bereizezinak ordenatzeko eratan itzul daitekeela. Itzulpena honako hau litzateke: eskuinerantz jotzen dugun bakoitzean bola beltz bat kokatzen dugu eta gorantz goazen bakoitzean bola zuri bat kokatzen dugu. Adibidez, (eskuinerantz, eskuinerantz, gorantz, gorantz, eskuinerantz) segida (beltz, beltz, zuri, zuri, beltz) segida bihurtzen da. Argi dago eraiki dugun funtzioa mugitzeko eren eta bolak ordenatzeko eren artean bijekzioa dela (inbertsoa da bola beltz ikusten dugun bakoitzean eskuinerantz joatea eta bi bola zuri ikusten dugun bakoitzean gorantz joatea); hortaz, bolak ordenatzeko era kopurua eta planoan mugitzeko era kopurua kalkulatzea problema baliokideak dira.

Kapitulu honetan zehar beste hainbat itzulpen ikusiko ditugu, multzoen elementuak zenbatzeko asko lagunduko dutenak. Horren laburpena 1.4. atalean adieraziko dugu.

1.2.3. Kontatzeko aholkuak

Jarraitzeko, hona hemen bi aholku kontatzeko orduan:

- Elementuak kontatzeko teknika bat zerrendak egitea da, baina kontuz egin behar da, errepikapen eta falta gabeko eraikitze-printzipioa behar baita elementuen kopuru zehatza lortzeko.
- Kasu partikularrak aztertzea problema zailak direnean.

Hona hemen adibide batzuk zeinetan teknika horiek erabiltzen diren:

1. Kalkulatzea $A_{n,a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ : \ x + y = n, \ x \geq -a, \ y \geq -b\}$ multzoaren soluzio kopurua, non $a, b, n \in \mathbb{N}$:

   (a) (Adibide sinple bat) Hasteko, kontsidera dezagun kasu sinpleago bat: $A_{3,0,0}$ multzoa, $x+y = 3$ ekuazioaren $\mathbb{N}^*$-ko soluzioen multzoa da, hots $A = \{(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \ : \ x + y = 3\}$. Soluzioak zerrenda bat eginez kalkula ditzakegu. Hemen $A = \{(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)\}$; hortaz, $c(A) = 4$.

   (b) (Orokorpena)$A_{n,0,0} = \{(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \ : \ x + y = n\}$. Kasu honetarako, ere komeni da zerrenda egitea. Modu erraz batean froga daiteke: $A_{n,0,0} = \{(0, n), (1, n-1), \ldots, (n, 0)\}$; hortaz, $c(A) = n + 1$.

   (c) (Aldaera)$A_{5,3,1} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ : \ x + y = 5, \ x \geq -3, \ y \geq -1\}$. Kasu honetan $A_{5,3,1} = \{(-3, 8), (-2, 7), \ldots, (6, -1)\}$; hortaz, $c(A) = 10$; izan ere, problema baliokideak dira $A_{5,3,1}$ zenbatzea eta $\{-3, -2, -1, 0, 1, \ldots, 6\}$ zenbatzea.

   (d) (Orokorpena)$A_{n,3,1} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \ : \ x+y = n, \ x \geq -3, \ y \geq -1\}$. Kasu honetan $A = \{(-3, n+3), (-2, n+2) \ldots, (n+1, -1)\}$; hortaz, $c(A) = c(\{-3, -2, -1, 0\}) + c([n+1]) = n+5$; izan ere, problema baliokideak dira $A_{n,3,1}$ zenbatzea eta $\{-3, -2, -1, 0, 1, \ldots, n+1\}$ zenbatzea.

   (e) (Kasurik orokorrena) Aurrekoa kontuan harturik argi dago $A_{n,a,b} = \{(-a, n+a), \ldots, (n+b, -b)\}$; hortaz, problemaren itzulpen bat $\{-a, -a+1, \ldots, n+b\}$ kontatzea da; eta multzo hori $a + b + n + 1$ elementu ditu. Hortaz, $c(A_{n,a,b}) = a + b + n + 1$.

   Gainera, problema oraindik gehiago orokor daiteke:

   (f) $B_n = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \ : \ x + y + z = n\}$.

   (g) $B_{n,m} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \ldots \times \mathbb{N}^* \ : \ x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n\}$.

   B_n eta $B_{n,m}$ multzoen elementu kopurua 1.4. atalean zenbatuko dugu.

2. Zenbaki oso baten multiplo kopurua kalkulatzea:

   (a) Izan bedi A multzoa 1 eta 30 balioen arteko 7-ren multiploz osturiko multzoa. Orduan, $A = \{7, 14, 21, 28\}$ eta $c(A) = 4$.

   (b) (Aldaera) Izan bedi A multzoa 1 eta 16234 balioen arteko 7-ren multiploz osaturiko multzoa. Hemen $A = \{7, 14, \ldots, 16233\} = \{1\cdot 7, 2\cdot 7, \ldots, 2319\cdot 7\}$. Hortaz, $c(A) = 2319$.

   (c) (Orokorpena) Izan bedi A multzoa 1 eta n balioen arteko 7-ren multiploz osaturiko multzoa. Aurreko adibidetik argi dago $c(A) = \max\{k \in \mathbb{N} : \ k \leq n/7\}$; izan ere, $A = \{7m : m \in \mathbb{N} \ \& \ m \leq n/7\}$.

   (d) (Orokorpena) Izan bedi A multzoa 1 eta n balioen arteko $a-$ren multiploz osaturiko multzoa. Orduan, $c(A) = \max\{k \in \mathbb{N} : \ k \leq n/a\}$; izan ere, $A = \{am : m \in \mathbb{N} \ \& \ m \leq n/a\}$.

1.3. Konbinatorian erabiltzen diren funtzioak

Atal honetan ikusiko dugu konbinatorian erabiltzen ohi diren funtzioak.

1.3.1. Zoru- eta sabai-funtzioak

Atal honetan zoru- eta sabai-funtzioak definituko ditugu, kontatzeko orduan askotan agertzen baitira:

5. definizioa: *Izan bedi $x \in \mathbb{R}$,*

$$\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} \ : \ k \leq x\}, \ x\textit{−ren } \textbf{zorua} \textit{ da.}$$

$$\lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} \ : \ k \geq x\}, \ x\textit{−ren } \textbf{sabaia} \textit{ da.}$$

Adibidez, $\lfloor 1,5 \rfloor = 1$, $\lceil 1,5 \rceil = 2$, $\lfloor -1,5 \rfloor = -2$ eta $\lceil -1,5 \rceil = -1$.

Orain enuntziatuko ditugu zoru- eta sabai-funtzioen oinarrizko propietateak:

- Baldin eta $x \in \mathbb{Z}$, orduan, $\lfloor x \rfloor = x = \lceil x \rceil$.
- Baldin eta $x \notin \mathbb{Z}$, orduan, $\lfloor x \rfloor < x < \lceil x \rceil$ eta $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$.
- $\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow x \in [n, n+1) \Leftrightarrow n \leq x < n+1 \Leftrightarrow x - 1 < n \leq x$.
- $\lceil x \rceil = n \Leftrightarrow x \in (n-1, n] \Leftrightarrow n - 1 < x \leq n \Leftrightarrow x \leq n < x + 1$.
- $\lfloor -x \rfloor = - \lceil x \rceil$ eta $\lceil -x \rceil = - \lfloor x \rfloor$.

Funtzio horiekin lan egiteko orduan haien funtzio osagarriak erabiliko ditugu:

6. definizioa: *Izan bedi $x \in \mathbb{R}$,*

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0,1), \ x\textit{−ren } \textbf{zatikizko atala} \textit{ da.}$$

$$<x> = \lceil x \rceil - x \in [0,1), \ x\textit{−ren } \textbf{atal osagarria} \textit{ da.}$$

Adibidez $\{1,25\} = 0,25$ eta $<1,25> = 0,75$.

Hona hemen zatikizko atala eta atal osagarriaren oinarrizko propietateak:

- $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$ eta $x = \lceil x \rceil - <x>$.
- $\{-x\} = <x>$ eta $<-x> = \{x\}$.

Zatikizko atala eta atal osagarriak erabiliz honako emaitza hauek froga daitezke:

- $\lfloor x + y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$. Oro har, $\lfloor x_1 + x_2 + \ldots + x_n \rfloor \geq \lfloor x_1 \rfloor + \lfloor x_2 \rfloor + \ldots + \lfloor x_n \rfloor$.
- $\lceil x + y \rceil \leq \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$. Oro har, $\lceil x_1 + x_2 + \ldots + x_n \rceil \leq \lceil x_2 \rceil + \lceil x_2 \rceil + \ldots + \lceil x_n \rceil$.

  Lehenengo ariketa-zerrendako (I-1) ariketari dagokio propietate hauen froga.

Ikus ditzagun orain adibide batzuk zeinetan zoru- eta sabai-funtzioak erabiltzen diren kontatzeko orduan:

1. Zein da 1 eta n balioen arteko $a-$ren multiplo kopurua? $\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor$.
   $[n]$ multzotik zenbaki bat zoriz hautatzen bada, zein da $a-$ren multiploa izateko probabilitatea?
   $$\frac{\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor}{n} = \frac{\frac{n}{a} - \left\{ \frac{n}{a} \right\}}{n} = \frac{1}{a} - \frac{1}{n} \left\{ \frac{n}{a} \right\}.$$
   Eta $n \to \infty$ jotzen duenean, nora jotzen du aipatutako probabilitatea? $\frac{1}{a}$ (probabilitatea $\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{n}, \frac{1}{a} + \frac{1}{n}\right]$ tartean dago; hortaz nahikoa da Sandwicharen erregela aplikatzea).

2. $A = \{(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \ : \ x + y = n, \ x \leq y\}$. $c(A) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$. Izan ere, $A = \{(0, n), (1, n-1), \ldots, (\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor)\}$, eta multzo hori eta $\{0\} \cup [\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor]$ elementu kopuru berbera dute.

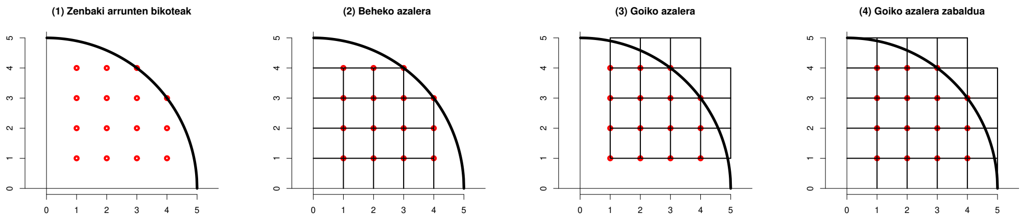
3. Zein da b oinarrian $n-$ren digitu kopurua, $d_b(n)$? Emaitza eta azalpena A.1. atalean duzue.

4. Izan bedi A_n multzoa $(0, 0)$ zentrodun eta n erradiodun zirkuluaren barruan dauden (x, y) puntu arrunten multzoa, $A_n = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ : \ x^2 + y^2 \leq n^2\}$.
   (a) Zein da $c(A_n)$?, (b) Muga daiteke?, (c) Zein da $\lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^2\pi} c(A_n)$?

   (a) $c(A_n) = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \sqrt{n^2 - k^2} \right\rfloor$ da. Kontatzeko egin duguna da kontuan izatea $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x \leq n, \quad y \in \left\{1, \ldots, \left\lfloor \sqrt{n^2 - x^2} \right\rfloor \right\}\right\}$.

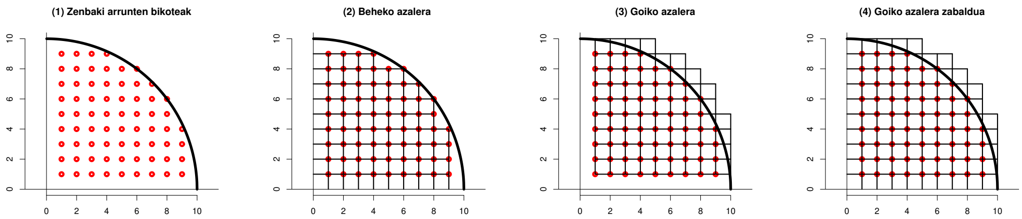
   (b) Bai, muga daiteke. Puntuak kontatzeko orduan itzulpen geometrikoa egin dugu. Argi dago $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ puntua n erradioko zirkuluaren lehengo sektorean badago $[x - 1, x] \times [y - 1, y]$ karratua ere egongo dela. Hortaz, puntuak kontatzearen itzulpen geometriko bat da kontatzea n erradioko zirkuluaren lehengo sektorean zenbat karratu dauden 1 luzerakoak zeinen ertzak zenbaki osoak diren; eta karratu horiek kontatzea edo haien azaleren batura kalkulatzea baliokidea da (kontuan izan karratu bakoitza 1 azalerakoa dela). Hori kontuan izanik $c(A_n) \leq \left\lfloor \frac{\pi n^2}{4} \right\rfloor$ lor dezakegu; izan ere, $c(A_n)$ zirkuluaren azalera baino txikiagoa da. Bestalde, $\left\lceil \frac{\pi n^2}{4} - (2n - 1) \right\rceil \leq c(A_n)$ froga daiteke. Balio hori zirkuluaren azalera ken muga ebakitzen duten karratuen azalera da. Muga $2n - 1$ ebakitzen dute $(0, n)$ puntutik $(n, 0)$ puntura joateko mugako karratuetatik eskuinerantz eta beherantz bakarrik mugi baitaitezke, zirkunferentzia eskuinerantz eta beherantz baitoa (ikusi 1.1., 1.2. eta 1.3. irudiak). Gehienez $n - 1$ aldiz mugituko gara beherantz eta $n - 1$ aldiz eskuinerantz; hortaz, gehienez $2n - 2$ alditan mugitu gara; eta hori esan nahi du gehienez $2n - 1$ karratu daudela mugan.

   (c) Sandwicharen erregela erabiliz argi ikus daiteke 1 dela; hau da, $c(A_n)$ balioa proportzionalki gero eta hurbilago egongo da $\frac{n^2\pi}{4}$tik. Limite horri itzulpen geometrikoa egin daiteke: karratuekin estaltzen ez dugun zirkuluaren azalera proportzionalki zerorantz doa.



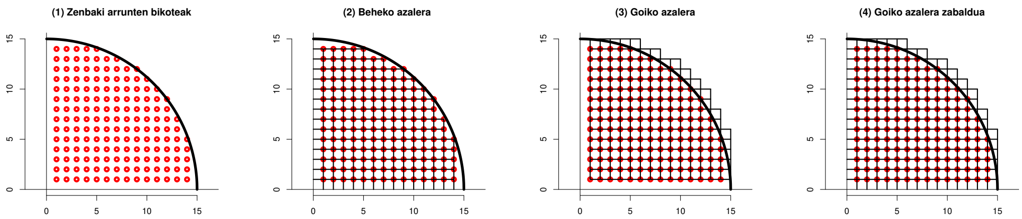
$$n = 5, \quad 11 \leq c(A_5) \leq 19, \quad c(A_5) = 15.$$

1.1. irudia: 5 erradiodun zirkulu-laurdenerako bikote arruntak.



$$n = 10, \quad 60 \leq c(A_{10}) \leq 78, \quad c(A_{10}) = 69.$$

1.2. irudia: 10 erradiodun zirkulu-laurdenerako bikote arruntak.



$$n = 15, \quad 148 \leq c(A_{15}) \leq 176, \quad c(A_{15}) = 162.$$

1.3. irudia: 15 erradiodun zirkulu-laurdenerako bikote arruntak.

5. Izan bedi $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$. (a) Muga daiteke? (b) Zein da $\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{\log(n)}$? Kontuan izan behar dugu:
$$\int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \log(n+1) \leq s_n \leq 1 + \log(n) = 1 + \int_1^n \frac{dx}{x}.$$
Desberdintza hori $\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{x}$ desberdintzatik dator. Sandwichen erregela erabiliz, froga daiteke $\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{\log(n)} = 1$ dela; hau da, batuketa hori $\log(n)$-ra jotzen du.

Aurreko adibideetan ikus daiteke parametro bat dagoenean posible dela emaitzaren formula esplizitua oso interesgarria ez izatea, baina portaera asintotikoa ematen duten goi eta behe borne esanguratsuak izatea. Hori oso ohikoa da bai konbinatorian bai matematikako beste arloetan (analisian, geometrian, eta abar).

1.3.2. Potentzia faktorialak

Atal honetan potentzia faktorialak definituko ditugu eta haien propietate nagusiak azalduko ditugu. Funtzio hauen aplikazioak 1.4. atalean azalduko dugu. Atal honetako berdintza guztiak indukzioz froga daitezke:

7. definizioa: *Izan bitez $a \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}^*$; orduan,* **potentzia arrunta** *honela definitzen da:*

$$a^k = \begin{cases} a \cdot a \cdot \overset{(k)}{\cdots} \cdot a, & k \geq 1, \\ 1, & k = 0. \end{cases}$$

Propietateak:

- $a^{k+r} = a^k a^r$.
- $(-a)^k = (-1)^k a^k$.

8. definizioa: *Izan bitez $a \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}^*$; orduan,* **potentzia faktorial beherakorra** *ondoko moduan definitzen da:*

$$a^{\underline{k}} = \begin{cases} a \cdot (a-1) \cdot \ldots \cdot (a-k+1), & k \geq 1, \\ 1, & k = 0. \end{cases}$$

Propietateak:

- Baldin eta $n < k$, eta $n \in \mathbb{N}$, orduan $n^{\underline{k}} = 0$.
- Baldin eta $n \geq k$ eta $n \in \mathbb{N}$, orduan $n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- $a^{\underline{k+r}} = a^{\underline{k}}(a-k)^{\underline{r}}$.

9. definizioa: *Izan bitez $a \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}^*$; orduan,* **potentzia faktorial gorakorra** *honela definitzen da:*

$$a^{\overline{k}} = \begin{cases} a \cdot (a+1) \cdot \ldots \cdot (a+k-1), & k \geq 1, \\ 1, & k = 0. \end{cases}$$

Propietateak:

- Baldin eta $n \in \mathbb{N}$, orduan $n^{\overline{k}} = (n+k-1)!/(n-1)!$.

- $a^{\overline{k+r}} = a^{\overline{k}}(a+k)^{\overline{r}}$.
- $a^{\overline{k}} = (a+k-1)^{\underline{k}}$ eta $a^{\underline{k}} = (a-k+1)^{\overline{k}}$.
- $(-a)^{\underline{k}} = (-1)^k a^{\overline{k}}$ eta $(-a)^{\overline{k}} = (-1)^k a^{\underline{k}}$.

Potentzia arruntaren eta potentzia faktorialaren arteko erlazioa dago, 4.4. eta 4.5. ataletan ikusiko dugun bezala.

1.4. Zuhaitz diagramak

Atal honetan konbinatorian agertzen diren egitura sinpleenak (aldakuntzak, permutazioak eta konbinazioak) nola kontatzen diren ikusiko dugu. Erabiliko dugun teknika zuhaitz diagramak egitea da. Zuhaitz erregular batean, enborretik 1. belaunaldiko r_1 adar ateratzen dira, horietako adar bakoitzetik, 2. belaunaldiko r_2 adar (2. belaunaldikoak), eta, horrela, hurrenez hurren. Oro har, $(n-1)$. belaunaldiko adar bakoitzetik, r_n adar (n. belaunaldikoak) ateratzen dira. Orduan, n. belaunaldiko adar kopuru osoa honako hau da:

$$r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_n.$$

Zuhaitzaren bidez, zenbaketa arin egin daiteke zehaztutako zerrenda egin gabe. Teknika hori erabilgarria da erabaki independenteak hartzen direnean edo kasu bakoitzeko beste erabaki bat hartu behar denean. Zerrenda behar bada, zuhaitza diagramaren bidez ere egin daiteke.

Patroi ohikoenak

Orain ikusiko dugu multzoak nola kontatu zuhaitz diagramak erabiliz. Formula hauek guztiak indukzioz froga daitezke:

1. (Biderkaduraren erregela)
   Baldin eta $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$; orduan,

   $$c(\Omega) = c(\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n) = c(\Omega_1) \cdot c(\Omega_2) \cdot \ldots \cdot c(\Omega_n).$$

   Hori zuhaitz diagrama batekin erraz froga daiteke (lehenengo belaunaldian $r_1 = c(\Omega_1)$, bigarrenean independenteki $r_2 = c(\Omega_2)$, eta abar). Adibidez, taberna batean 2 lehenengo plater, 3 bigarren plater eta 2 postre agertzen badira, guztira 12 eratan jan dezake bezero batek.

2. (Errepikatuzko aldakuntzak)
   10. definizioa: *Izan bedi n osagaidun Ω multzoa, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. k-naka*

hartutako Ω multzoko elementuren **errepikatuzko aldakuntzak** *Ω-tik ateratako k luzerako-segida posibleak dira, osagaiak errepika baitaitezke. Errepikatuzko aldakuntza kopurua $VR_{n,k}$ denotatzen da eta honako hau da:*

$$VR_{n,k} = n\cdot \overset{(k)}{\ldots} \cdot n = n^k.$$

Berdintza hori froga daiteke kontuan izanik errepikatuzko aldakuntza $\Omega^k = \Omega\times \overset{(k)}{\ldots} \times\Omega$-ren elementuak direla. Adibidez,

$$VR_{3,2} = c(\{1,2,3\}^2) = c(\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}) = 3^2 = 9.$$

- Ikus dezagun problemaren itzulpen bat: bi jokalarik rol joko batean hiru pertsonaien artean (aztia, gudaria, ehiztaria) pertsonaia bana aukeratu behar dute, errepikapenak baimenduz. Guztira zenbat eratan aukera ditzakete pertsonaiak, bakoitzak independenteki aukeratzen badute eta errepika badaitezke? 3^2 (lehenak 3 aukera ditu, eta bigarrenak beste hiru independenteki, zuhaitz diagramaren bidez adieraz daitekeenez).

3. (Aldakuntza arruntak)
11. definizioa: *Izan bedi n osagaidun Ω multzoa, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. k-naka hartutako Ω multzoko elementuen* **aldakuntza arruntak** *osagaiak errepikatu ezin diren Ω-tik ateratako k luzerako segida posibleak dira. Aldakuntza kopurua $V_{n,k}$ denotatzen da eta honako balio hau du:*

$$V_{n,k} = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1)) = n^{\underline{k}}. \tag{1.1}$$

Adibidez,

$$V_{4,3} = c(\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)\}) \\ = 4\cdot 3 = 12.$$

- Ikus dezagun problemaren itzulpen bat: arte denda batean 2 pertsona sartzen dira eta 4 margolan original ezberdin daude salgai. Bezero bat ez bada sartzen aurrekoak erosketa egin arte eta bezero bakoitzak margolan original bakarra eramaten badu, erosketak egiteko zenbat era daude? $4^{\underline{2}} = 12$.

4. (Permutazioak)
12. definizioa: *Izan bedi n osagaidun Ω multzoa, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. Ω-tik ateratako elementuen* **permutazioak**, *n-naka hartutako Ω multzoko elementuen aldakuntza arruntak dira, hots, $\Omega-$ren elementuen sailkapenak. Permutazio kopurua P_n denotatzen da eta honako balio hau du:*

$$P_n = V_{n,n} = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1 = n!. \tag{1.2}$$

Adibidez, $P_3 = c(\{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\}) = 3! = 6$.

- Formula dezagun problemaren itzulpen bat: $[n]$ multzotik $[n]$ multzora doazen zenbat bijekzio posible daude? $P_n = n!$; izan ere $[n]$ multzotik $[n]$ multzora doazen bijekzioak P_n permutazioekin identifika daiteke. Hain zuzen ere, f bijekzioa $(f(1),\ldots,f(n))$ permutazioarekin identifika daiteke, eta modu erraz batean froga daiteke itzulpen bat dela.

5. (Konbinazio arruntak)

13. definizioa: *Izan bedi n osagaidun Ω multzoa, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. k-naka hartutako Ω multzoko elementuen* **konbinazio arruntak** *Ω-tik ateratako k osagaidun azpimultzoak dira. Konbinazio kopurua $C_{n,k}$ edo $\binom{n}{k}$ denotatzen da, eta honako berdintza hau dugu:*

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{V_{n,k}}{P_k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1}. \tag{1.3}$$

Adibidez, $C_{3,2} = c(\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}) = \binom{3}{2} = 3$.

- Konbinazio arrunten itzulpen bat k bat eta $n-k$ zero erabiliz osatuta dauden segiden multzoa. Horretarako, definituko dugu bijekzio bat $[n]$ multzoko k tamainako azpimultzoen eta k bat eta $n-k$ zeroz osatutako segiden artean. Horretarako, $\Pi(A) = (1_{i\in A})_{i=1,\ldots,n}$ aplikazioa definitzen dugu, non $1_{i\in A} = 1 \Leftrightarrow i \in A$ eta $1_{i\in A} = 0 \Leftrightarrow i \notin A$. Modu erraz batean froga daiteke Π bijekzio bat dela bi familien artean; hortaz, bi familiak kontatze problema baliokideak dira.
- Oharra:
$$V_{n,k} = C_{n,k} \cdot P_k \tag{1.4}$$
berdintza dugu. 2 belaunaldiko zuhaitz diagrama baten bidez froga daiteke: 1.an konbinazioen zerrenda egiten da, eta 2.ean konbinazio bakoitzean k luzerako azpimultzoa ordenatzeko era kopurua (permutazioak).

6. (Errepikatuzko permutazioak)

14. definizioa: *Izan bedi n osagaidun Ω multzoa, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ eta $r_1+r_2+\ldots+r_n = k$ betetzen duten $r_1, r_2, \ldots, r_n$ zenbakiak zein $\forall i = 1,2,\ldots,n,\quad 0 \le r_i \le k$. r_1 aldiz ω_1, r_2 aldiz ω_2, $\ldots$, r_n aldiz ω_n errepikatuz osatzen den k luzerako segidaren ordenazioak n elementu horien* **errepikatuzko permutazioak** *deitzen dira. Errepikatuzko permutazio kopurua $PR_k^{r_1,r_2,\ldots,r_n}$ denotatzen da eta honako balio hau du:*

$$PR_k^{r_1,r_2,\ldots,r_n} = \frac{k!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \ldots \cdot r_n!}. \tag{1.5}$$

- (1.5) formula lor daiteke bolen problema honen itzulpena eginez. k bola zenbatuta ditugula, r_1 bola c_1 kolorekoak, r_2 nola c_2 kolorekoak, eta abar. Permutazioak errepikapenekin bolak ordenatzeko segida kopuruaren problemen baliokidea da. Dakigunez, guztira $k!$ segida daude, baina koloreak finkatzean c_1 koloreak duten zenbakiak ordenatzean $r_1!$ kasu ezin ditugu bereizi, c_2 koloreak duten zenbakiak ordenatzean $r_2!$ kasu ezin ditugu bereizi, eta abar Gainera, hautaketa horiek guztiak independenteak dira; hortaz, bereizezin den kolorezko permutazio bakoitza $r_1!r_2!\cdots r_n!$ aldiz errepikatuta egongo da, (1.5) frogatzen duena.

Adibidez, $PR_3^{2,1} = c(\{(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1)\}) = 3!/2! = 3$.

(a) Zenbat segida osa daitezke p zero eta q bat erabiliz? $C_{p+q,p} = PR_{p+q}^{p,q}$.

(b) Zenbat segida osa daitezke p zero, q bat eta r bi erabiliz? $C_{p+q+r,p} \cdot C_{q+r,q} = PR_{p+q+r}^{p,q,r}$.

(c) Zenbat segida osa daitezke r_1 aldiz w_1, r_2 aldiz w_2, $\ldots$ eta r_n aldiz w_n erabiliz?

$$C_{r_1+r_2+\ldots+r_n,r_1} \cdot C_{r_2+\ldots+r_n,r_2} \cdot C_{r_3+\ldots+r_n,r_3} \cdots C_{r_{n-1}+r_n,r_{n-1}} = PR_{r_1+r_2+\ldots+r_n}^{r_1,r_2,\ldots,r_n}.$$

7. (Errepikatuzko konbinazioak)

   15. definizioa: *Izan bedi n osagaidun Ω multzoa, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$.* **Errepikatuzko konbinazioak** *Ω-ko elementuez, errepikapenak onartuz, osaturiko k osagaidun multimultzoak dira. Errepikatuzko konbinazio kopurua $CR_{n,k}$ bezala denotatzen da eta honako balio hau du:*

$$CR_{n,k} = \binom{n+k-1}{n-1} = \frac{n^{\bar{k}}}{k!}. \tag{1.6}$$

   - (1.6) formula frogatzeko egin dezagun honako itzulpen hau. Problema hori eta k zero eta $n-1$ bat duten segida kopurua problema baliokideak dira, eta hori konbinazio arrunta da. Itzulpena honako hau da: ω_1 lehenengo bat zenbakiaren ezkerrean dauden zero kopurua da, ω_n azken bataren eskuinean dauden zero kopurua da, eta ω_i $(i = 2, \ldots, n-1)$ balioa i-garren eta $i+1$-garren baten artean dauden zero kopurua da. Erraz froga daiteke proposatu dugun itzulpena bijekzio bat dela; izan ere, ω_i bakoitzaren multimultzoko maiztasuna da bere posizioaren ezkerreko zero kopurua, eta ω_n bere eskuinekoa.
   - Beste itzulpen bat k bola bereizezin n zenbakidun kutxatan ordenatzeko era kopurua da. Aurreko problemaren itzulpena dela froga daiteke.

   Adibidez, $CR_{3,2} = c(\{\{1,1\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,2\},\{2,3\},\{3,3\}\}) = \binom{4}{2} = 6$.

   (a) Zenbat eratan zozketatu ahal dira 4 sari bereizezin 3 pertsona artean? $CR_{3,4}$.
   (b) Zenbat segida osa daitezke 4 zero eta 2 bat erabiliz? $CR_{3,4} = C_{6,4}$.
   (c) Zenbat eratan sar daitezke 4 bola bereizezin 3 zenbakidun kutxatan? $CR_{3,4}$.
   (d) Zein da $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ betetzen duten zenbaki oso ez-negatiboen kopurua? $CR_{3,4}$.
   (e) Zein da $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$ betetzen duten zenbaki oso ez-negatiboen kopurua? $CR_{n,k}$.

Oharra: ohikoa da aldakuntza, permutazio eta konbinazio hitzak erabiltzea problema horien itzulpenetan, bereziki itzulpena berehalakoa denean.

Atal honen laburpen bat 1.1. taulan aurki daiteke.

Alfabetoaren ariketa: Izan bedi $\Omega = \{a, b, d, 0, 1, 2, 3, 4\}$ multzoa 8 osagaidun alfabetoa.

(a) Zein da 4 ikur dituzten hitzen kopurua? 8^4.

(b) Zein da k ikur dituzten hitzen kopurua? 8^k.

(c) Zein da letraz hasten, zenbakiz amaitzen eta k ikur dituzten hitzen kopurua? $3 \cdot 8^{k-2} \cdot 5$.

(d) Zein da 2 letra eta 3 zenbaki dituzten 5 ikurreko hitzen kopurua? $\binom{5}{2} \cdot 3^2 \cdot 5^3$.

(e) Zein da m letra eta n zenbaki dituzten $m+n$ ikurreko hitzen kopurua? $\binom{m+n}{n} \cdot 3^m \cdot 5^n$.

(f) Aurreko egoerapean, zenbat zenbaki hasten dira letraz eta amaitzen dira zenbakiz? $\binom{m+n-2}{m-1} \cdot 3^m \cdot 5^n$.

(g) Zein da n ikurreko hitzen kopurua, alboan dauden ikur guztiak desberdinak izanik? $8 \cdot 7^{n-1}$.

(h) Zein da 8 ikurren permutazio kopurua, letrak elkarren jarraian ezin badira egon? $5! \cdot \binom{6}{3} \cdot 3!$.

Azkenik, ikus ditzagun aurreko egiturak erabiltzen dituzten beste problema batzuk:

- **Bolak kutxatan kokatzeko erak.** Zenbat eratan sar daitezke k bola n zenbakidun kutxatan? Alde batetik, bola bereizezinak eta bereizgarriak (zenbakidunak) izan daitezke, eta beste aldetik, kokapenak esklusiorik gabe eta esklusioa erabiliz (esklusioa erabiltzen dugunean ezin dira bi bola kutxa berean egon) izan daitezke. Ikusi laburpena 1.2. taulan (laburpen zabalago bat 4. gaiko 4.3. taulan ikusiko da).

- **Laginketak.** Zenbat eratan atera daitezke k zenbakidun elementu n elementu duen populazio batetik? Alde batetik, itzuleradun laginketa erabiliz (ateratako elementu bakoitza berriro populaziora itzultzen da) edo laginketa itzuleragabea erabiliz plantea dezakegu problema, eta beste aldetik, laginaren ordena kontuan hartuta edo hartu gabe plantea dezakegu. Ikusi laburpena 1.3. taulan.

	errepikapenik ez	errepikapenak
ordena	$P_n = n!$ $V_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1)$	$PR_k^{r_1,\dots,r_n} = \frac{k!}{r_1!r_2!\dots r_n!}$ $VR_n^k = n^k$
ordenarik ez	$C_n^k = \binom{n}{k}$	$CR_n^k = \binom{n+k-1}{k}$

1.1. taula: Konbinatoriaren laburpena.

	Esklusioa	Esklusio gabe
Bolak bereizgarriak	$V_n^k = n^{\underline{k}}$	$VR_n^k = n^k$
Bolak bereizezinak	$C_n^k = \binom{n}{k}$	$CR_n^k = \binom{n+k-1}{k}$

1.2. taula: k bola n zenbakidun kutxatan sartzeko erak.

	Itzuleragabea	Itzuleraduna
Lagin ordenatua	$V_n^k = n^{\underline{k}}$	$VR_n^k = n^k$
Lagin ez-ordenatua	$C_n^k = \binom{n}{k}$	$CR_n^k = \binom{n+k-1}{k}$

1.3. taula: n tamainako populaziotik k elementuko laginketak.

Atalarekin bukatzeko, egin dezagun konbinatorioan agertzen diren adibide ohikoen laburpena:

Itzulpenak (berrikusketa)

Hemen birpasatuko dugu ikusi ditugun itzulpen motak eta beste adibide batzuk aurkeztuko ditugu. 1.4. taulan n zenbakidun kutxatan k bola bereizgarriren kokapenaren baliokidetasunak daude, eta 1.5. taulan n zenbakidun kutxatan k bola bereizezinen kokapenaren baliokidetasunak daude,

1. Azpimultzoak $\rightleftharpoons$ 0 eta 1 zenbakien segidak.
2. n zenbakidun kutxatan k bola bereizgarriren kokapena:
   - 2.1 Kokapena $\rightleftharpoons$ Aplikazioak $\rightleftharpoons$ Segidak (VR_n^k).
   - 2.2 Kokapena, esklusioa erabiliz $\rightleftharpoons$ Aplikazio injektiboa $\rightleftharpoons$ Segidak (V_n^k).
   - 2.4 Kokapena, kutxa hutsik ez eta esklusioa bai $\rightleftharpoons$ Aplikazio bijektiboa $\rightleftharpoons$ Segidak (P_n).

Kokapenak	**Segidak**	**Aplikazioak**	**Kopurua**
esklusio gabe	$[n]$tik k elementudunak	$f : [k] \to [n]$	VR_n^k
esklusioa (≤ 1)	elementu errepikaturik ez	injektiboak	V_n^k
esklusioa eta ez-hutsak ($= 1$)	elementuak zehatz-mehatz behin	bijektiboak	P_n

1.4. taula: n zenbakidun kutxatan k bola bereizgarriren kokapena.

3. n zenbakidun kutxatan k bola bereizezinen kokapena.
   - 3.1 Kokapena $\rightleftharpoons$ 0 eta 1-en segidak (k aldiz 0 eta $n-1$ aldiz 1) $\rightleftharpoons$ Ekuazioen soluzioak $\mathbb{N}^*$ multzoan $\rightleftharpoons$ Multimultzoak (CR_n^k).
   - 3.2 Kokapena, esklusioa erabiliz $\rightleftharpoons$ 0 eta 1-en segidak (k aldiz 0 eta $n-1$ aldiz 1 bi 0 jarraian egon gabe) $\rightleftharpoons$ Ekuazioen soluzioak $\{0,1\}$ multzoan $\rightleftharpoons$ Azpimultzoak (C_n^k).

3.3 Kokapena $\rightleftharpoons$ 0 eta 1-en segidak (k aldiz 0 eta $n-1$ aldiz 1) $\rightleftharpoons$ Ekuazioen soluzioak $\mathbb{N}$ multzoan $\rightleftharpoons$ Multimultzoak elementu guztiekin (CR_n^{k-n}).

Kokapenak k bola $=$ n kutxa $\neq$	**$0-1$ segidak** k aldiz 0 $n-1$ aldiz 1	**Ekuazioen soluzioak** $x_1+\ldots+x_n=k$	**Multzoak** k elementu $[n]$ multzotik	**Kopurua**
esklusio gabe	$0-1$ segidak	$x_i \in \mathbb{N}^*$	Multiazpimultzoak	CR_n^k
esklusioa (≤ 1)	0-ak jarraian ez	$x_i \in \{0,1\}$	Azpimultzoak	C_n^k
esklusio gabe eta ez-hutsak (≥ 1)	1-ak jarraian ez eta hasiera=amaiera= 0	$x_i \in \mathbb{N}$	Multiazpimultzoak eta elementu guztiak	CR_n^{k-n}

1.5. taula: n zenbakidun kutxatan k bola bereizezinen kokapena.

Oharra: 1.4. taulan ez dugu jarri kutxa hutsik geratu gabeko kasua, elementu guztiak behin agertzen diren segiden eta aplikazio suprajektiboen kasuak. Kasu horiek 4.5. atalean landuko ditugu.

1.5. Sailkapenak

16. definizioa: $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ *azpimultzoen bilduma* Ω *multzoaren* **partiketa** *da, baldin eta* $\Omega = \cup_{i=1}^k A_i$ *eta* $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$, $i,j \in \{1,\ldots,k\}$. *Gainera,* $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ *familia* Ω*-ren partiketa dela* $\Omega = A_1 + A_2 + \ldots + A_k$ *bezala adierazten da.*

(**Batuketaren erregela**) Izan bedi $\Omega = A_1 + A_2 + \ldots + A_k$. Orduan,

$$c(\Omega) = c(A_1) + c(A_2) + \ldots + c(A_k).$$

Multzoen osagai kopurua kontatzeko lagungarri suerta daiteke partiketa egitea, adibidez:

- Hasierako egoera konplexu bakar batetik, egoera sinple batzuetara pasatzea.
- Formulak lortzea.
- Errepikapen-erlazioak lortzea.

Ikus ditzagun aurrekoaren adibideak:

1. Izan bedi $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ multzotik ateratako azpimultzo kopurua, a_n; orduan,
   - $\{a_0 = 1,\ a_n = 2a_{n-1}\} \Rightarrow a_n = 2^n$. Erlazio hau lor daiteke partiketa bat eginez n elementua azpimultzoan dagoen ala ez kontuan izanik. Alde batetik, n elementua dagoen

azpimultzo kopurua a_{n-1} da; izan ere, n kentzen dugunean $\{1,2,\ldots,n-1\}$-en azpimultzo bat dugu. Beste alde batetik, n elementu ez duten azpimultzoak $\{1,2,\ldots,n-1\}$-ko azpimultzoak dira. Hortaz, batuketaren erregela erabiliz $a_n = a_{n-1} + a_{n-1} = 2a_{n-1}$ lortzen da. Errepikapen erlaziotik froga daiteke $a_n = 2^n$.

- $$2^n = a_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}.$$
  Alde batetik 2^n balioa $[n]$ multzoak dituen azpimultzo kopurua da. Beste alde batetik, azpimultzoak konta ditzakegu duten tamainarekiko partiketa bat eginez.

2. Har dezagun aintzat orain $[n]$ multzotik ateratako k elementudun azpimultzo kopurua; orduan,

   - $$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$
     Kontsidera dezagun $\{A_0, A_1\}$ partiketa, non A_0 n elementua ez dutenen azpimultzoak osatzen duten familia eta A_1 n elementua duten azpimultzoen familia. Lehenengo kasuan $k-1$ elementu aukeratu behar dira $[n-1]$ multzotik. Bigarren kasuan k elementu aukeratu behar dira $[n-1]$ multzotik.
   - $$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-1} + \ldots + \binom{k-1}{k-1}.$$
     Kontsidera dezagun $\{A_0, A_1, \ldots, A_{n-k}\}$ partiketa, non A_i den $n-i$ elementu handiena duten k tamainako multzoen familia. Ohartu $c(A_i)$ dela zenbat eratan hauta ditzakegun $k-1$ elementu $\{1,2,\ldots,n-i-1\}$ multzotik. Hortaz, emaitza batuketaren erregelaren ondorioa da.
   - $$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-2} + \ldots + \binom{n-k}{1} + \binom{n-k-1}{0}.$$
     Kontsidera dezagun $\{A_0, A_1, \ldots, A_{n-k}\}$ partiketa, non A_i den $n-i$ elementua ez duten baina $\{k \in \mathbb{N} : n-i < k \leq n\}$ duten k tamainako multzoen familia. Ohartu $c(A_i)$ dela zenbat eratan hauta ditzakegun $k-i$ elementu $\{1,2,\ldots,n-i-1\}$ multzotik.

3. Aintzat har dezagun orain $[n]$ multzoko elementuekin sorturiko k elementudun, errepikapenak baimenduz, multimultzo kopurua. Orduan, aurreko adibideko partiketa berberak eginez:

   - $CR_{n,k} = CR_{n-1,k} + CR_{n,k-1}$.
   - $CR_{n,k} = CR_{n,k-1} + CR_{n-1,k-1} + \ldots + CR_{1,k-1}$.
   - $CR_{n,k} = CR_{n-1,k} + CR_{n-1,k-1} + CR_{n-1,k-2} + \ldots + CR_{n-1,0}$.

4. Izan bedi a_n zenbakia, n maila duen eskailera igotzeko era kopurua, oinkada bakoitzean maila bat edo bi igotzen direnean.

   - $\{a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\}$. Igotzeko erak oinkadan maila bat edo bi igotzearen arabera sailkatuko ditugu. 4.1. gaian ikusiko dugunez, a_n Fibonacciren $(n+1)$-garren zenbakia da.

- $a_n = \binom{n}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+\ldots+\binom{n-\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$. Berdintza hori froga daiteke partiketa bat eginez maila biko oinkaden kopuruaren arabera. Oinkada guztietan maila bat igotzen bada, $\binom{n}{0}$ dira, bat mailako $n-2$ oinkada eta bi mailako oinkada bat erabiltzen bada, igotzeko erak $\binom{n-1}{1}$ dira, bat mailako $n-4$ oinkada eta bi mailako bi oinkada erabiltzen bada, igotzeko erak $\binom{n-2}{2}$, eta abar da. Izan ere, bat mailako $n-2i$ oinkada eta bi mailako i oinkada erabiltzen bada, i maila bi $[n-i]$ multzotik i tamainako azpimultzoak lortzearen baliokidea da (azpimultzoan dauden oinkadaren zenbakian igotzen da bi maila).

1.6. Inklusio-esklusio printzipioa

Atal honetan ikusiko dugu nola kalkulatu bilduraren kardinala ebakiduraren kardinala ezagututa. Izan bitez $A, B \subseteq \Omega$ azpimultzo finituak. Orduan,

$$c(A \cup B) = c(A) + c(B) - c(A \cap B) \tag{1.7}$$

(1.7) formula formalki froga daiteke: $A \cup B = A + B \setminus (A \cap B)$ eta $B = B \setminus (A \cap B) + A \cap B$ dela kontuan izanik; hortaz, batuketaren erregelaren ondorio bat da. Dena den, formula oso intuitiboa da, A eta B dagoen elementu kopuruak da A multzoan daudenak gehi B multzoan daudenak ken errepikapenak.

Inklusio-esklusio printzipioa honako adibide sinple hauetan erabil daiteke:

1. Klase batean, 100 pertsona daude; haien artean, 50 euskaldunak dira eta 30 elebidunak dira. Zenbat dira erdaldunak? Erdaldunak dira guztiak ken euskaldunak gehi elebidunak; hau da, guztiak ken euskaldun ez elebidunak, hots, 80.
2. $\{1, 2, \ldots, n\}$ multzoan, zenbat 4 edo 6 zenbakien multiplo dago? 4-ren multiploak gehi 6-ren multiploak ken 12-ren multiploak; hots, $\lfloor\frac{n}{4}\rfloor + \lfloor\frac{n}{6}\rfloor - \lfloor\frac{n}{12}\rfloor$.
3. Zein da zifra bera jarraian ez dituen 1122345 zenbakiaren permutazio kopurua? Permutazio totalak ken bi 1 jarraian dituztenak ken bi 2 jarraian dituztenak gehi bi 1 eta bi 2 jarraian dituztenak; hots, $\frac{7!}{4} - \frac{6!}{2} - \frac{6!}{2} + 5!$ (bi 1 jarraian duten permutazioak kontatzeko orduan, nahikoa da $\bar{1}22345$ zenbakiaren permutazioak kontatzea, $\bar{1}$ karakterea 11 ordezkatzea itzulpena baita; era berean, bi 2 jarraian dauden permutazioak kontatzean problema baliokidea $11\bar{2}345$-en permutazioak kontatzea da; azkenik, bi 1 eta bi 2 jarraian dituzten permutazioak kontatzea $\bar{1}\bar{2}345$ permutazioak kontatzearen problema baliokidea da).

Notazioa: notazioa sinplifikatzeko $A \cap B$ multzoa AB bezala denotatuko dugu.

1.1. teorema: (Inklusio-esklusio printzipioa): *Izan bitez $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ azpimultzo finituak, $n \geq 2$. Orduan,*

$$c(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{c(I)-1} c\left(\cap_{i \in I} A_i\right).$$

Hots,

$$c(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{1\le i\le n} c(A_i) - \sum_{1\le i_1<i_2\le n} c(A_{i_1}A_{i_2}) + \sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le n} c(A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}) - \ldots$$
$$+ (-1)^{k-1} \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n} c(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_k}) + \ldots + (-1)^{n-1}c(A_1A_2\ldots A_n).$$

Froga: *Froga dezagun n balioarekiko indukzioz:*

$n=1$ *denean, berehalakoa da,* $c(A_1)=c(A_1)$.

$n=2$ *denean,* (1.7) *da.*

Har dezagun indukzio-hipotesia [IH] egiazkoa dela $n-1$ kasurako, hau da,

$$c(\cup_{i=1}^{n-1}A_i) = \sum_{\emptyset\ne I\subseteq\{1,2,\ldots,n-1\}} (-1)^{c(I)-1}c(A_I).$$

Froga dezagun n kasurako:

$$\begin{aligned}
c(\cup_{i=1}^{n}A_i) &= c(\cup_{i=1}^{n-1}A_i \cup A_n)\\
&=^{(n=2)} c(\cup_{i=1}^{n-1}A_i) + c(A_n) - c\big(\big(\cup_{i=1}^{n-1}A_i\big)\cap A_n\big)\\
&=^{[IH]} \sum_{1\le i\le n-1} c(A_i) - \sum_{1\le i_1<i_2\le n-1} c(A_{i_1}A_{i_2}) + \ldots + (-1)^{n-2}c(A_1A_2\ldots A_{n-1}) +\\
&\quad + c(A_n) - c(\cup_{i=1}^{n-1}(A_i\cap A_n))\\
&=^{[IH]} \sum_{1\le i\le n-1} c(A_i) - \sum_{1\le i_1<i_2\le n-1} c(A_{i_1}A_{i_2}) + \ldots + (-1)^{n-2}c(A_1A_2\ldots A_{n-1}) +\\
&\quad + c(A_n) - \sum_{1\le i\le n-1} c(A_iA_n) + \ldots + (-1)^{n-1}c(A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n)\\
&= \sum_{1\le i\le n} c(A_i) - \sum_{1\le i_1<i_2\le n} c(A_{i_1}A_{i_2}) + \ldots + (-1)^{n-1}c(A_1A_2\ldots A_n).
\end{aligned}$$

Inklusio-esklusio formularen ondorio bat honako hau da:

1.2. korolarioa:

$$c(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_n) = c(\Omega) - c(\cup_{i=1}^{n}A_i) = \sum_{I\subseteq\{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{c(I)} c\left(\cap_{i\in I}A_i\right).$$

Gogoratu $\overline{A_i}$ definizioz dela Ω multzoan dauden baina A_i-n ez dauden elementuak. Era berean $\cap_{i\in\emptyset}A_i := \Omega$ da.

Hona hemen inklusio-esklusio printzipioaren aplikazio batzuk:

1. Nahasketak.

   17. definizioa: *Puntu finkorik ez duen $\{1,2,\ldots,n\}$ multzoaren f bijekzioari $\{1,2,\ldots,n\}-$ren* **nahasketa** *deitzen zaio, hots, $f(i) \neq i$, $\forall i = 1,2,\ldots,n$.*

   Inklusio-esklusio printzipioa erabiliz honako propietate hauek froga daitezke:

   - Izan bedi $\{1,2,\ldots,n\}-$ren nahasketen multzoa, D_n. Orduan,

     $$c(D_n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! = n! \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} \right).$$

     Formula hori 1.2. korolarioa aplikatzetik dator, non A_i i elementua finkoa duten bijekzioen multzoa den. Izan ere, $\{i_1,\ldots,i_k\}$ elementuak finko duten bijekzio kopurua $(n-k)!$ da, eta hori biderkatu behar da $[n]$-tik k elementu aukeratzeko era kopuruengatik.
   - $\{1,2,\ldots,n\}-$ren bijekzio bat zoriz hautatzen bada, zein da nahasketa izateko probabilitatea? $\frac{c(D_n)}{c(\text{bijekzioak})} = \frac{c(D_n)}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
   - Eta n infiniturantz jotzen duenean, nora joaten da probabilitatea? e^{-1}; izan ere $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

   Ikus dezagun nahasketak agertzen den egoera bat:

   - n gutun eta n gutun-azal badago, zenbat eratan sar daitezke gutunak helbide zuzenik egon ez dadin? $c(D_n)$ da; izan ere, bijekzio bat dago nahasketen eta gutunak helbide zuzenik ez duten konbinazioen artean: f nahasketari egokitzen diogu i gutuna $f(i)$ gutun azalean jartzearen konbinazioa.

2. Eulerren funtzioa.

   Izan bedi $n = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_l^{m_l}$ **faktore lehenetan $n-$ren deskonposizioa**. Baldin eta $p_1 \not| k$, $p_2 \not| k, \ldots, p_l \not| k$ betetzen bada, k **$n-$rekiko lehena** dela esaten da. Izan bedi A_n ondoko multzoa, $A_n = \{k \in \{1,2,\ldots,n\} \ : \ \text{k lehena } n\text{-rekiko}\}$; orduan, $\phi(n) = c(A_n)$ **Eulerren funtzioa** deitzen da.

   $$\phi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_l}\right).$$

   Froga A.3. atalean kontsulta daiteke, hirugarren ariketa-zerrendako (III-15) ariketari baitagokio.

   Leonhard Euler (1707 Suitza-1783 Errusia) matematikariaren bibliografia [18] estekan kontsulta daiteke.

3. Beste batzuk. Adibidez, ikusi hirugarren ariketa-zerrendako (III-4) ariketa eta hamaikagarren ariketa-zerrendako (XI-12) ariketa.

1.7. Dirichleten usategiaren printzipioa eta agurren lema

Aurreko ataletan ikusi dugu kontaketa zehatzak egiteko hainbat teknika. Atal honetan ikusiko ditugu oinarrizko emaitza batzuk konbinatorian erabiltzen direnak informazio partziala lortzeko.

Dirichleten usategiaren printzipioa

1.3. printzipioa: (Dirichleten usategiaren printzipioa): *Usategi batean uso kopurua horma-habiarena baino handiagoa bada, orduan existitzen da gutxienez bi uso dituen hobi bat.*

Ikusi 1.4. irudian usategiaren printzipioa 10 uso eta 9 horma-habiarekin. Beste era batean esanda, $k > n$ bada, $f : \{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$, ezin da injektiboa izan. Baliokideki, n kutxatan k bola kokatzen baditugu eta $k > n$ bada, orduan, badago gutxienez bi bola dituen kutxa bat. Enuntzia dezagun era formalago batean:

Izan bedi x_i zenbakia i. kutxan dagoen bola kopurua, $i = 1, 2, \ldots, n$; orduan, $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$.

i) $\exists i \ : \ x_i \geq \frac{k}{n}$, *hots,* $x_i \geq \lceil \frac{k}{n} \rceil$.

Partikularki, $k > n$ bada, orduan, $\exists i \ : \ x_i \geq 2$.

ii) $\exists j \ : \ x_j \leq \frac{k}{n}$, *hots,* $x_j \leq \lfloor \frac{k}{n} \rfloor$.

1.4. irudia: Usategiaren printzipioa. Iturria: [39]

Honi buruz proposatzen ditugun ariketak lehengo ariketa-zerrendako (I-12) eta laugarren ariketa-zerrendako (IV-2) eta (IV-4) dira. Hor usategiaren printzipioa frogatuko dugu eta erabilera batzuk ikusiko ditugu.

Bikoititasuna

A multzo finitua izanik, $c(A)$ bakoitia edo bikoitia den jakiteko ez da beharrezkoa kopuru osoa kalkulatzea. Adibideak:

1. Izan bedi $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$; zein da $\mathcal{P}(\Omega)$ parteen multzoaren bikoititasuna? Bikoitia; izan ere, $A \mapsto \Omega \setminus A$ puntu finkorik gabeko bijekzioa dugu.
2. Izan bedi D_n, $n-$ren zatitzaileen multzoa. $c(D_n)$ bikoitia ala bakoitia da? Bakoitia $\Leftrightarrow n = m^2$, non $m \in \mathbb{N}$. Izan ere, $d \mapsto n/d$ korrespondentzia dugu.

1.4. lema: (Agurren lema): *Bilera batera n pertsona joan dira. Gonbidatu kopuru bakoitia agurtzen duten pertsona kopuruari m deitzen badiogu, zenbaki hori bikoitia da.*

Froga:

Hau frogatzeko, kontuan izango dugu:

$$0 \equiv 2c(\{\textit{agurrak}\}) \equiv m \cdot 1 + c(\{\textit{kopuru bakoitia agurtzen duten pertsonak}\}) \cdot 0 \equiv m \pmod 2.$$

Bigarren baliokidetasunean erabili da agur kopuru totala bider bi dela pertsona bakoitzeko egin duen agurren batura, eta hori dela kopuru bakoitia agurtu duten pertsonek egindako agurrak gehi kopuru bikoitia agurtu duten pertsonek egindako agurrak.

Aplikazioak ikus daitezke laugarren ariketa-zerrendako (IV-8) ariketa eta hamabigarren ariketa-zerrendako (XII-1) ariketan. Agurren lema bereziki interesgarria da grafo teorian, 5. kapituluan.

1.8. Oinarrizko konbinatoriaren ariketa-zerrendak

Oharra: zenbakizko soluzioak B.1. eranskinean aurki daitezke.

Lehenengo ariketa-zerrenda: zoru- eta sabai-funtzioak

(I-1) (17 *o.*) (†) x eta y edozein zenbaki errealetarako, froga itzazu honako emaitza hauek:

a) $\lfloor x+y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ (zoru-funtzioaren goibatukortasun-propietatea),
b) $\lceil x+y \rceil \leq \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$ (sabai-funtzioaren azpibatukortasun-propietatea).

Noiz egiaztatzen dira berdintzak?

(I-2) (*A*.1.) (†) Izan bedi $b \geq 2$ zenbaki osoa. Zenbaki-sistemaren oinarritzat b hartuta, edozein zenbaki arrunt n, $\{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$ multzoko zifrak erabiliz adierabakarrean idatz daiteke. Erabil dezagun $d_b(n)$ notazioa b oinarrian n zenbakiaren zifra-kopurua adierazteko. Adibidez,

$$d_{10}(357) = 3 \quad \text{eta} \quad d_2(8) = d_2((1000)_2) = 4.$$

Aurkitu $\log_b(n)$-ren menpeko $d_b(n)$ adierazpena.

(I-3) (*A*.1.) (†) Egiaztatu edo gezurtatu honako baieztapen hauek:

a) $\left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$, $\forall x \geq 0$,
b) $\left\lceil \sqrt{\lceil x \rceil} \right\rceil = \lceil \sqrt{x} \rceil$, $\forall x \geq 0$.

(I-4) (*A*.1.) (†) Izan bitez D zuzen erreala edo $[0, \infty)$ tartea, eta $f : D \to \mathbb{R}$ funtzio jarraitua, gorakorra eta honako propietate hau betetzen duena:

$$f(x) \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}.$$

Frogatu:

a) $\lfloor f(x) \rfloor = \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor$,
b) $\lceil f(x) \rceil = \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil$.

(I-5) (†) Izan bitez $m \in \mathbb{Z}$ eta $n \in \mathbb{N}$. Frogatu edozein x errealetarako:

a) $\left\lfloor \frac{x+m}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + m}{n} \right\rfloor$,
b) $\left\lceil \frac{x+m}{n} \right\rceil = \left\lceil \frac{\lceil x \rceil + m}{n} \right\rceil$.

(I-6) (†) Egiaztatu edo gezurtatu:

a) $\left\lceil \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rceil = \lceil \sqrt{x} \rceil$, $\forall x \geq 0$,

b) $\left\lfloor \sqrt{\lceil x \rceil} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor\,, \ \forall x \geq 0.$

(I-7) (A.1.) (†) Aurkitu baldintza nahiko eta beharrezkoa, honako hau bete dadin:

$$\left\lceil \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rceil = \lceil \sqrt{x} \rceil\,, \ \forall x \geq 0.$$

(I-8) Izan bitez $a, b \in \mathbb{Z}$, $a < b$. Kalkula ezazu zenbaki osoen kopurua tarte bakoitzaren barruan:

$$(a, b], \quad [a, b), \quad (a, b), \quad [a, b].$$

(I-9) Ebatz ezazu aurreko ariketa a eta b zenbaki errealetarako.

(I-10) Edozein zenbaki oso positibo n adieraz daiteke (adierabakarra) $n = 2^m + l$ erarekin, non m eta l zenbaki oso ez-negatibo baitira, $0 \leq l < 2^m$ izanik. Adibidez,

$$17 = 2^4 + 1, \quad 83 = 2^6 + 19.$$

Erabil ezazu zoru $\lfloor \cdot \rfloor$ edota sabai $\lceil \cdot \rceil$ funtzioak, n-ren menpeko m eta l adierazpenak emateko.

(I-11) Edozein x errealetarako, mutur osoak dituen tarte baten erdipuntua ez denerako, hurkoen zenbaki osoari $\epsilon(x)$ deituko diogu. Aurkitu $\lfloor \cdot \rfloor$ edota $\lceil \cdot \rceil$ funtzioen menpeko $\epsilon(x)$-ren adierazpena.

(I-12) (A.1.) (*Dirichleten usategiaren printzipioa:*) Baldin eta k uso n horma-zulotan banatzen badira, hobiren batean, gutxienez, $\left\lceil \frac{k}{n} \right\rceil$ uso daude, eta, hobiren batean, gehienez, $\left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor$ uso daude.

Bigarren ariketa-zerrenda: oinarrizko konbinatoriako problemak

(II-1) 52 eta 311 balioen artean, zenbat 3-ren multiplo daude?

(II-2) Zenbat 6-ren multiplo daude, 3 zifrarekin, hasiera 4 izanik?

(II-3) Zenbat hitz osa daitezke, 7 letra desberdinekin, A, I, R, S, T , U, V, W letrak erabiliz eta bigarren posizioan kontsonante bat egonda?

(II-4) Zenbat hitz osa daitezke, 6 letra (desberdinekin edo ez), E, F, G, H, I, J, K, L letrak erabiliz eta amaiera bokala izanik?

(II-5) Zenbat hitz osa daitezke, 4 letra desberdinekin, A, B, C, D, E , F letrak erabiliz, lehenengoa kontsonante eta azkena bokala izanik?

(II-6) 6 letra (desberdinekin edo ez) dituzten zenbat hitz osa daitezke, A, B, C, D, E , F letrak erabiliz, bi posizio zentraletan bi kontsonante desberdin egonda?

(II-7) Zenbat 4 letra (desberdinekin edo ez) dituen hitz osa daitezke, A, B, C, D, E letrak erabiliz, hasiera bokala izanik eta bigarren letra eta azkena desberdinak izanik?

(II-8) Zenbat zenbaki bakoiti osa daitezke 5 zifra desberdinekin eta 1,2,3,4,5 eta 6 digituak erabiliz? Eta zifrek ez badute zertan desberdinak izan?

(II-9) Zenbat 5-en multiplo daude, 2.000 baino handiagoak eta 4 zifrarekin, 0,1,2,3,4,5,6 eta 7 digituak erabiliz? Eta zifra guztiak desberdinak izan behar badira?

(II-10) Zenbat 5 zifradun zenbaki palindromo (kapikua) daude? Zenbat dira bakoitiak?

(II-11) (A.2.) Neska batek zazpi lagun ditu eta gau bakoitzean batekin kartetan jokatzeko ohitura du. Inorekin jokatu ez zuen igande batean erabaki zuen hurrengo astean zehar lagun berarekin bi egun jarraian jokatuko ez zuela. Zenbat eratan egin dezake aste horretako hitzorduen egutegia?

(II-12) Zenbat hitz osa daitezke ABRACADABRA hitzaren letra guztiekin?

(II-13) Lasterketa batean 7 atletak parte hartu dute. Zenbat eratan hel daitezke helmugara? Baldin eta 3 ingeles, 2 frantses, 1 suediar eta 1 errusiar badaude, zenbat eratan koka daitezke parte-hartzaileen banderak?

(II-14) Zenbat eratan ordena daiteke 40 kartadun karta-sorta bat?

(II-15) Zenbat eratan ordena daiteke 40 kartadun 2 karta-sorta berdin elkarrekin nahastean?

(II-16) Lorcak arratsalde euritsu batean Becquerrek bere liburuan idatzitako 10 elezaharretatik 4 irakurtzea erabaki zuen. Zenbat irakurketa plan antola ditzake, ordena kontuan izanik?

(II-17) Kutxa gotor baten irekitzeko konbinazioak 5 zifra desberdin ditu. Gehienez, zenbat konbinazio probatu beharko dira kutxa irekitzeko ziurtasuna izateko? Eta zifra bakoitzak aurrekoarekiko soilik desberdina izan behar badu?

(II-18) Itsasontzi batean, 12 bandera desberdin daude, eta, gehienez, 3 altxa daitezke, seinale-mastan ontziaren egoeraz ohartarazteko. Zenbat egoera desberdin adieraz daitezke? Eta itsasontziak berdinak diren hiru bandera-sortak baditu?

(II-19) Zenbat eratan bana daitezke 40 tamainako karta-sorta bateko kartak, bi multzo berdinetan, multzo bakoitzean bi bateko egonda? Eta multzo batean 10 karta eta bestean 30 karta badaude?

(II-20) 6 txanpon jarraian botatzen badira, zenbat kasutan lor daitezke 4 aurpegi eta 2 gurutze?

(II-21) (A.2.) 52 tamainako karta-sorta batekin pokerrean jokatuz, jokaldi bakoitzaren aukerak kalkulatu nahi ditugu. Zenbat eratan lor daitezke (1) bost kartako edozein jokaldi, (2) kolore-eskailera, (3) pokerra, (4) full bat, (5) kolorea, (6) eskailera, (7) hirukote bat, (8) bikote bikoitza, (9) bikote bat, eta (10) karta handiena? (11) Kalkula itzazu jokaldien ehunekoak.

(II-22) Neska bati korreoko pasahitzaren azken hiru karaktereak ahaztu zaizkio. Bakarrik gogorarazten du zenbakiak direla. Gehienez, zenbat saiakera egin beharko ditu korreoan sartu ahal izateko? Eta gogoratzen badu 3 zifra desberdin direla, azkena bakoitia izanik?

(II-23) Zenbat hitz osa daitezke, 5 letra desberdinekin, A, B, C, D, E eta F letrak erabiliz, lehenengo biak kontsonanteak eta hirugarrena bokala izanik? Eta letrak errepikatu ahal badira?

(II-24) Aire-konpainia baten hegaldiaren erreserba-kodeek 3 zifra eta 2 bokal dituzte, edozein ordenatan, baina guztiak desberdinak dira. Zenbat kode eraiki daitezke?

(II-25) 2 kontsonante eta 2 bokal dituzten zenbat hitz osa daitezke A, B, C, D, E eta I letrak erabiliz? Eta letrak errepikatu ezin badira?

(II-26) A, B, C eta D letren ordenazioen artean, zenbatetan daude A eta B elkarrekin? Zenbatetan daude banatuta?

(II-27) Zenbat eratan ordenatu daitezke A, B, C, D eta E letrak, A eta B letren artean (zehatz-mehatz) letra bat egonda?

(II-28) (†) Zenbat eratan koka daitezke 8 dorre xake-taula batean, elkarrekiko arriskuan jarri gabe?

(II-29) 4 poker-jokalariren artean, zenbat eratan bana daitezke kartak?

(II-30) Jatetxe bateko menuan, 5 lehenengo plater, 7 bigarren plater eta 4 postre agertzen dira. Bezero batek zenbat eratan hauta dezake hiru plater desberdin dituen menu bat?

a) Ohikoa den bezala.
b) Ohikoa ez den bezala, baina plater bat bestearen jarraian hartuz.
c) Ohikoa ez den bezala, baina hiru platerak batera hartuz.

(II-31) Saskibaloi talde batean, 11 jokalari daude, titularrak eta ordezkoak kontuan hartuz. Entrenatzaileak zenbat eratan aukera dezake hasierako partidarako boskotea? Baldin eta 4 pibot, 2 base eta 5 hegaleko badaude, eta base bat eta pibot bat, edo base bat eta bi pibot soilik sartu behar baditu, zenbat eratan egin dezake?

(II-32) (*A*.2.) Kakulatu 40 tamainako karta-sorta batetik 6 karta aukeratzeko kopurua,

a) Erregeren bat egonda.
b) Bastoirik ez egonda.
c) Erregeren bat baina bastoirik ez egonda.

(II-33) Kalkulatu 40 tamainako karta-sorta batetik 7 karta aukeratzeko era kopurua, haien artean zehatz-mehatz 3 ezpata eta 2 zaldun egonda.

(II-34) Talde batean 7 neska eta 11 mutil daude; zenbat eratan aukeratu daitezke 4 bikote (neska-mutil) jokatzeko aldi berean tenis txapelketa batean?

(II-35) Kalkula ezazu 6 letra desberdinekin osa daitekeen pasahitz-kopurua, baldin eta 3 bokal badituzte eta kontsonanteak B, C, D eta F letren artean aukeratzen badira. Eta letra desberdinen murrizketarik ez badago?

(II-36) Bizi naizen etxebizitzan beste 23 auzokide daude eta 11 hautatuko dira futbol-partida jokatzeko. Zenbat eratan egin daiteke hautaketa? Zenbatetan egongo naiz barne? Zenbatetan ez?

Hirugarren ariketa-zerrenda: oinarrizko konbinatoriako beste zenbait problema

(III-1) Kalkula ezazu 9 pertsona 3 pertsonako 3 multzotan banatzeko aukera kopurua (taldeen ordenak eta pertsonen ordenak ez du garrantzirik).

(III-2) Kalkula ezazu 3 mutil eta 6 neska 3 pertsonako 3 taldetan banatzeko era kopurua, talde bakoitzean mutil bat egonda (taldeen ordenak eta pertsonen ordenak ez du garrantzirik).

(III-3) Izan bitez Ω multzo finituaren A, B eta C azpimultzoak. Froga ezazu honako datu hauek funtsik gabekoak direla:

$$c(A \cup B \cup C) = 1000, \quad c(A) = 510, \quad c(B) = 490, \quad c(C) = 427,$$

$$c(A \cap B) = 189, \quad c(A \cap C) = 140, \quad c(B \cap C) = 85.$$

(III-4) (A.3.) 100 kuboren bilduma baten 100 kuboren aurpegiak gorriak, urdinak edo berdeak dira. 80 kubok aurpegi gorri bat dute gutxienez, 85ek aurpegi urdin bat gutxienez, eta 75ek aurpegi berde bat dute gutxienez. Datu horietan oinarrituta ezin da esan hiru koloreko aurpegiak dituen x kubo-kopurua, baina zerbait esan daiteke. Zer da?

(III-5) Zenbat eratan koka daitezke ilara batean n mutil eta n neska, baldin eta sexu bereko bi pertsona ezin badira elkarrekin egon?

(III-6) n tamainako talde batean A (Ainhoa), B(Berta) eta C(Carlos) izeneko pertsonak hartzen dira aintzat. Zenbat eratan koka daitezke ilara batean n gizabanakoak, A, B eta C pertsonak elkarrekin eta ordena horretan egon dadin?

(III-7) (†) Zenbat segida ($m + n$ osagairekin) osa daitezke m zero eta n bat erabiliz, bi bat jarraian ez egonda?

(III-8) Kalkula ezazu n bola bereiziak n zenbakidun kutxatan sartzeko era kopurua,

a) kutxa hutsik geratu gabe.
b) zehatz-mehatz kutxa bat hutsik geratuz.
c) zehatz-mehatz bi kutxa hutsik geratuz.

(III-9) (A.3.) Kalkula ezazu berarekiko $\{1, 2, \ldots, n\}$ multzoaren bijekzio-kopurua, zehazki $k(\leq n)$ elementu finko mantenduz. Azal itzazu itzulpen batzuk, esate baterako, adieraz itzazu bolak kutxatan kokatzearen problema.

(III-10) Zenbat azpimultzo atera daitezke $\{a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n\}$ multzotik gutxienez a elementuren bat eta gutxienez b elementuren bat izanik?

(III-11) Zenbat zenbaki palindromo daude b oinarria duen zenbaki-sisteman $n \geq 2$ zifra esanguratsu izanik?

(III-12) Jai bateko gonbidatuen artean, izan bedi n zenbakia gonbidatu kopuru bakoitia agurtu dutenen kopurua. Froga ezazu n bikoitia dela.

(III-13) Izan bedi n zenbaki arrunta. Froga ezazu n karratu perfektua dela baldin eta soilik baldin zatitzaile-kopuru bakoitia badu (1 eta n barne).

(III-14) (A.3.) Zenbat zatitzaile ditu $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}$ faktore lehenetako deskonposizioa duen zenbakiak?

(III-15) (A.3.) (†) n zenbaki arrunt guztietarako, defini dezagun $\phi(n) := c(A_n)$, non

$$A_n := \{k \in \{1, 2, \ldots, n\} \ : \ k \text{ lehena } n\text{rekiko}\}.$$

Frogatu honako hau: baldin eta $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_l^{m_l}$ faktore lehenetako n-ren deskonposizioa bada, orduan

$$\phi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_l}\right).$$

(III-16) (A.3.) (†) (Legendre) Izan bitez p zenbaki lehena eta n zenbaki arrunta. Kalkula ezazu p zenbakiak zenbat aldiz zatitzen duen $n!$. (Oharra: esaten da p zenbakiak hiru aldiz zatitzen duela m, baldin eta m zenbakia p^3 zenbakiaz zatigarria bada, baina p^4 zenbakiaz zatigarria ez bada; hau da, p^3 zenbakiak m zatitzen duen p-ren berredura handiena bada; beste era batean esanda, faktore lehenetako n-ren deskonposizioan p biderkatzailean p^3 agertzen bada.)

(III-17) 10! zenbakiaren bukaeran, 2 zero daude, izan ere, $10! = 3.628.800$. Zenbat zero daude 1.000! zenbakiaren amaieran?

(III-18) (A.3.) (†) $\mathbb{Z}_2 := \{0, 1\}$ gorputzaren gaineko hiru dimentsioko $\mathcal{E}_3$ espazio afinean, kalkula itzazu:

a) puntuen kopuru osoa,

b) zuzen bakoitzean dagoen puntu kopurua,

c) zuzenen kopuru osoa,

d) plano bakoitzean dagoen puntu kopurua,

e) planoen kopuru osoa,

f) puntu bakoitzetik pasatzen den zuzen kopurua,

g) puntu bakoitzetik pasatzen den plano kopurua,

h) plano bakoitzean dagoen zuzen kopurua,

i) zehaztutako zuzen batetik pasatzen den plano kopurua,

j) zehaztutako plano batekiko paraleloa den plano kopurua,

k) zehaztutako zuzen batekiko paraleloa den zuzen kopurua,

l) zehaztutako plano batekiko paraleloa den zuzen kopurua,

m) zehaztutako zuzen batekiko paraleloa den plano kopurua,

n) zehaztutako zuzen batekin gurutzatzen den zuzen kopurua.

Laugarren ariketa-zerrenda: Matematika-olinpiadetako problemak

(IV-1) (A.4.) (†) Alderdi politiko baten kongresu batean, 2.000 bazkide daude. Kazetari baten arabera, bilera batean, $\%12,\overset{\frown}{12}$ emakumezkoak dira, eta $\%23,4\overset{\frown}{23}$ sektore kritikoan daude. Zenbat bazkide ez dira joan bilerara?

(IV-2) (A.4.) (‡) Izan bedi 3 zifradun 14 zenbaki arrunt desberdin dituen Ω multzoa. Froga ezazu existitzen direla bi azpimultzo $A \subseteq \Omega$ eta $B \subseteq \Omega$ ez-hutsak eta bateraezinak direnak non honako hau betetzen baita:

$$A\text{-ren elementuen batura } = B\text{-ren elementuen batura.}$$

(IV-3) (A.4.) (†) Tenis txapelketa amateur batera 8 neska eta 8 mutil joan dira. Ilaran, neskak eta mutilak txandaka daude eserita, lehenengoa mutila izanik. Zenbat eratan osa daitezke 4 bikote dituen multzoa, baldin eta bikote guztiak hasieran jarraian zeuden neskek eta mutilek osatzen badituzte?

(IV-4) (A.4.) Bilera birtual batean, 5 nazionalitate desberdinetako 13 eta 17 urte arteko 201 gazte daude. 6 pertsonako talde bakoitzean, gutxienez, 2 adin berekoak dira. Froga ezazu bileran nazionalitate bereko, adin bereko eta sexu bereko gutxienez 5 pertsona daudela.

(IV-5) (†) Izan bedi $A := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Kalkula ezazu $f : A \to A$ aplikazio-kopurua, non:

a) $(f \circ f)(x) = x, \ \forall x \in A,$
b) $(f \circ f \circ f)(x) = x, \ \forall x \in A.$

(IV-6) (‡) Izan bedi $A \subseteq M := \{1, 2, \dots, 10, 11\}$. Esaten da A *azpimultzo jatorra* dela honako propietate hau betetzen badu:

$$2k \in A \Rightarrow 2k - 1 \in A \text{ eta } 2k + 1 \in A.$$

Multzo hutsa eta M jatorrak dira. Zenbat dira M-ren azpimultzo jatorrak?

(IV-7) (A.4.) (†) Izan bedi

$$q(n) := \left\lfloor \frac{n}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \right\rfloor, \ n = 1, 2, \dots$$

a) Kalkula itzazu $q(n)$ balioak, $1 \leq n \leq 25$. Balioei begiratuz, zein uste duzu direla n balioak non $q(n) > q(n+1)$?
b) Frogatu aurreko aierua, hots, kalkula itzazu $q(n) > q(n+1)$ betetzen duten zenbaki arrunt guztiak.

(IV-8) (A.4.) Marraztu daitezke planoan 2.003 zuzenki, non bakoitzak zehazki beste hiru zuzenki mozten baititu?

(IV-9) (†) Dama-jokoaren 8×8 taulan, 24 fitxak jarri dira goiko hiru ilarak betetzen. Fitxen kokapena alda daiteke honako arau honi jarraituz: edozein fitxak hutsik dagoen leku batera beste baten gainetik salto egin dezake, horizontalki (ezkerretara edo eskuinetara), bertikalki (gora edo behera) edo diagonalki. Posible da fitxa guztiak beheko hiru ilaretan kokatzea?

Mota honetako problema gehiago [25] web-orrialdean aurki daitezke.

2. gaia

Konbinazio-identitateak

Kapitulu honetan erakutsiko dugu nola egin eragiketak koefiziente binomial eta multinomialekin. Bestalde, esanahi konbinatorioa erabiliko dugu konbinazio-identitateak frogatzeko. 2.1. atalean koefiziente binomialen oinarrizko propietateak eta identitateak landuko ditugu, 2.2. atalean koefiziente binomialen definizio baliokide bat emango dugu, eta horrekin oinarrizko propietateen frogapen alternatiboa emango dugu, 2.3. atalean koefiziente multinomialak landuko ditugu, 2.4. atalean binomio orokortua landuko dugu eta 2.5. atalean gai honi dagokion ariketa zerrenda dugu.

2.1. Koefiziente binomialak

Koefiziente binomialen oinarrizko propietateak

Hasteko, gogora dezagun honako definizio hau:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}, \; n, k \geq 0.$$

Gainera, gogora dezagun $C_{n,k}$ balioa dela $[n]$ multzoak duen k tamainako azpimultzo kopurua.

Jarraitzeko, koefiziente binomialen oinarrizko propietateak frogatuko ditugu. Propietate hauek froga daitezke modu aljebraikoan (bi aldeak berdinak direla ikusiz), edo esanahi konbinatorioa kontuan izanik:

i) **Koefiziente binomial unitarioak:**
$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$.

Froga: *$[n]$ multzoko 0 eta n elementuko azpimultzo bakarra dago, $\emptyset$ eta $[n]$, hurrenez hurren.*

ii) **Koefiziente binomial nuluak:**
Baldin eta $k > n$ bada, $\binom{n}{k} = 0$.

Froga: *$k > n$ denean, $[n]$ multzoak ez du k tamainako azpimultzorik.*

iii) **Koefiziente binomialen simetria:**
Baldin eta $0 \le k \le n$ bada, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Froga: *Modu aljebraikoan froga daiteke bi balioak $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ direla. Bestalde, esanahi konbinatorioa erabiliz ere froga daiteke: $[n]$ multzoko k tamainako eta $n-k$ tamainako azpimultzoen artean honako bijekzio hau dago: $A \mapsto [n] \setminus A$.*

iv) **Koefiziente binomialen errepikapen formula:**
Baldin eta $1 \le k \le n$ bada, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

Froga: *Alde batetik froga aljebraikoa erraz egin daiteke:*

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} = \frac{(n-1)!(n-k+k)}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Bestalde, esanahi konbinatorioa erabiltzen duen froga 1.5. atalean (28. orrialdean) aurkezten dugu.

Oharra: koefiziente binomialen errepikapen erlazioa da erarik azkarrena koefiziente binomialak kalkulatzeko (ikusi 2.1. irudia).

v) **Koefiziente binomialen biderkadura:**
Baldin eta $0 \le r \le k \le n$ bada, $\binom{n}{k}\binom{k}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}$.

Froga: *Koefiziente binomialen biderkadura aljebraikoki froga daiteke bi balioak $\frac{n!}{(n-k)!r!(k-r)!}$ baitira. Formula hau ere froga daiteke esanahi konbinatorioari erreparatuz; izan ere,*

$$\binom{n}{k}\binom{k}{r} = c\big(\{(A,B) : B \subseteq A \subseteq [n],\ |A| = k,\ |B| = r\}\big),$$

eta

$$\binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r} = c\big(\{(C,D) : C \subseteq [n], D \subseteq [n] \setminus C,\ |C| = r,\ |D| = k-r\}\big).$$

Bi familien artean honako bijekzioa hau defini daiteke: $(A,B) \mapsto (B, A \setminus B)$, honako alderantzizko hau duena: $(C,D) \mapsto (C \cup D, C)$.

vi) **Koefiziente binomialen deribatuaren propietatea:**
Baldin eta $1 \le k \le n$ bada, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

Froga: *Koefiziente binomialen biderkaduratik ondoriozta daiteke $r = 1$ hartuz.* (Izenaren azalpenerako ikusi 2.2. atala, 49 orrialdea.)

vii) **Ondoz ondoko koefiziente binomialen arteko erlazioa:**
Baldin eta $1 \leq k \leq n$ bada, $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$.

Froga: *Koefiziente binomialen biderkaduratik ondoriozta daiteke $r = k-1$ hartuz.*

viii) **Koefiziente binomialen monotonia:**

$\displaystyle\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$ segida gorakorra da bere maximoraino eta gero beherakorra. Baldin n bikoitia bada, maximoa $\displaystyle\binom{n}{n/2}$ da; bestela, maximoak $\displaystyle\binom{n}{\frac{n-1}{2}}$ eta $\displaystyle\binom{n}{\frac{n+1}{2}}$ dira. Ikusi bosgarren ariketa-zerrendako (V-3) ariketa.

Tartaglia-Pascalen triangelua

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6} \\
\binom{7}{0} \quad \binom{7}{1} \quad \binom{7}{2} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6} \quad \binom{7}{7} \\
\binom{8}{0} \quad \binom{8}{1} \quad \binom{8}{2} \quad \binom{8}{3} \quad \binom{8}{4} \quad \binom{8}{5} \quad \binom{8}{6} \quad \binom{8}{7} \quad \binom{8}{8}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1
\end{array}$$

2.1. irudia: Koefiziente binomialen triangelua, $n \leq 8$. Triangelua eraikitzeko modurik efizienteena binomioen (iv) propietatea erabiltzea da.

Koefiziente binomialen identitateak

Jarraitzeko, konbinazio binomialen identitateak ikusiko ditugu. Identitate horiek froga daitezke esanahi konbinatorioa erabiliz eta indukzioz aurreko ataleko formulak erabiliz. Orokorrean identitate binomialak lortzeko, honako estrategia hauek erabili daitezke:

- Adierazpena aldatu, identitate ezagunekin erlazionatzeko.
- n balio batzuekin kalkulatu, aierua egin eta frogatu.

Ikus ditzagun zenbait identitate binomial:

1) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n, \quad n\geq 0.$

Froga: *Berdintza hori indukzioz froga daiteke koefiziente binomialen errepikapen formula erabiliz. Konbinatorioki ere froga daiteke:* $\binom{n}{k}$ *balioa* $[n]$ *multzoko* k *tamainako azpimultzoak direla kontuan izanik, eta* 2^n *balioa* $[n]$ *multzoak duen azpimultzo kopurua dela.*

2) $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots=2^{n-1}, \quad n\geq 1.$

Froga: *Bigarren berdintza lehenengo berdintza eta 1. identitatearen ondorioa da. Lehenengo berdintza indukzioz froga daiteke koefiziente binomialen errepikapen erlazioa erabiliz. Era berean, konbinatorioki froga daiteke* $\{A\subseteq[n] : 2\mid c(A)\}$ *eta* $\{B\subseteq[n] : 2\nmid c(B)\}$ *multzoen artean honako bijekzio hau baitago:*

$$f(A)=\begin{cases} A\setminus\{n\}, & n\in A,\\ A\cup\{n\}, & n\notin A.\end{cases}$$

3) $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=0, \quad n\geq 1.$

Froga: *2. identitatearen ondorio zuzena da.*

4) $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-3}{k-2}+\ldots+\binom{n-(k+1)}{0}.$

Froga: *Indukzioz froga daiteke zenbaki binomialen errepikapen propietatea erabiliz. Esanahi konbinatorioa erabiltzen duen froga 28. orrialdean aurki daiteke.*
Ikusi bosgarren ariketa-zerrendako (V-4) ariketa.

5) $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-3}{k-1}+\ldots+\binom{k-1}{k-1}.$

Froga: *n balioarekiko indukzioz froga daiteke zenbaki binomialen errepikapen propietatea erabiliz. Esanahi konbinatorioa erabiltzen duen froga 28. orrialdean aurki daiteke.*
Ikusi bosgarren ariketa-zerrendako (V-5) ariketa.

6) **Vandermonderen identitatea**: izan bitez $m,n,r\geq 0$,

$$\binom{m+n}{r}=\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}=\binom{m}{0}\binom{n}{r}+\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}+\binom{m}{2}\binom{n}{r-2}+\ldots+\binom{m}{r}\binom{n}{0}.$$

Froga: *m balioarekiko indukzioz frogatuko dugu. Oinarrizko kasua $m=0$, nabaria da; izan ere,* $\binom{0}{0}=1$ *baita eta* $\binom{0}{k}=0$ *baita edozein* $k\geq 1$ *baliorako. Jarraitzeko, suposa dezagun* m

baliorako betetzen dela eta froga dezagun $m+1$ baliorako. Horretarako, binomialen errepikapen formula erabiliz:

$$
\begin{aligned}
\binom{m+1+n}{r} &= \binom{m+n}{r} + \binom{m+n}{r-1} \\
&= \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} + \sum_{k=0}^{r-1} \binom{m}{k}\binom{n}{r-1-k} \\
&= \binom{m}{0}\binom{n}{r} + \sum_{k=1}^{r} \left[\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1}\right]\binom{n}{r-k} \\
&= \binom{m+1}{0}\binom{n}{r} + \sum_{k=1}^{r} \binom{m+1}{k}\binom{n}{r-k} \\
&= \sum_{k=0}^{r} \binom{m+1}{k}\binom{n}{r-k}.
\end{aligned}
$$

Froga dezagun beste era batean, esanahi konbinatorioa erabiliz:

Froga: *Alde batetik $\binom{m+n}{r}$ balioa*

$$S_1 := \{A \subseteq [m+n] : \ c(A) = r\},$$

multzoaren kardinala da. Identitatea lortzeko, balio hori partiketa baten bidez zenbatuko dugu. Izan bedi $\{\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_r\}$ familia, non $\mathcal{A}_k$ den $[m]$ multzotik zehatz-mehatz k elementu duten S_1-eko multzoak. Nabaria denez, $c(\mathcal{A}_k) = \binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$; izan ere, $[m]$ multzotik k elementu aukeratu behar ditugu, eta $\{m+1, \ldots, m+n\}$ multzotik $r-k$ elementu. Hortaz, batuketaren erregelagatik ondorioztatzen da emaitza.

7) (Ondorioa)

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

Froga: *Vandermonderen identitatea da $m = r = n$ harturik.*

Koefiziente binomialen beste formula batzuk

Azkenik, ikus dezagun nola erabil ditzakegun aurreko identitateak eta oinarrizko propietateak beste berdintza batzuk lortzeko:

1) (vi) propietatea eta 1. identitatea erabiliz lor dezakegu:

1.1 Baldin eta $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

1.2 Baldin eta $n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$.

1.r (Propietate orokorra) Baldin eta $n \geq r \geq 0$, $\displaystyle\sum_{k=r}^{n} k^{\underline{r}} \binom{n}{k} = n^{\underline{r}} 2^{n-r}$.

2) (vi) propietatea eta 3. identitatea erabiliz lor dezakegu:

2.1 Baldin eta $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k \binom{n}{k} = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 0, & n > 1. \end{cases}$

2.2 Baldin eta $n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-2} k(k-1) \binom{n}{k} = \begin{cases} 2, & n = 2, \\ 0, & n > 2. \end{cases}$

2.r (Propietate orokorra) Baldin eta $n \geq r \geq 0$, $\displaystyle\sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} k^{\underline{r}} \binom{n}{k} = \begin{cases} r!, & n = r, \\ 0, & n > r. \end{cases}$

3) (vi) propietatea eta 7. identitatea erabiliz lor dezakegu:

3.1 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}^2 = n^2 \binom{2(n-1)}{n-1}$.

3.2 $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k^2 (k-1)^2 \binom{n}{k}^2 = n^2 (n-1)^2 \binom{2(n-2)}{n-2}$.

3.r (Propietate orokorra) $\displaystyle\sum_{k=r}^{n} (k^{\underline{r}})^2 \binom{n}{k}^2 = (n^{\underline{r}})^2 \binom{2(n-r)}{n-r}$.

4) (vi) propietatea eta 3. identitatea erabiliz lor dezakegu:

4.1 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}$.

4.2 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{(k+1)(k+2)} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+2}$.

4.3 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} \binom{n}{k} = \frac{1}{2} \frac{1}{n+3}$.

5) (vi) propietatea eta 1. identitatea erabiliz lor dezakegu:

5.1 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1)$.

5.2 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \binom{n}{k} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} (2^{n+2} - (n+3))$.

5.3 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^{\overline{3}}} \binom{n}{k} = \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \left(2^{n+3} - (n+4) - \frac{(n+2)(n+3)}{2} \right)$.

2.2. Binomioaren formula

Atal honetan Newtonen binomioaren formula frogatuko dugu eta horri esker koefiziente binomialen definizio alternatiboa emango dugu. Definizio hau erabilita, koefiziente binomialen propietateak eta konbinazio-identitateak frogatzeko beste era bat ikusiko dugu. Gainera, identitate definizio horrekin identitate berriak frogatuko ditugu.

2.1. teorema: (Newtonen binomioaren formula): *Izan bitez* $n \in \mathbb{N}^*, x, y, \in \mathbb{C}$,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Binomioaren formula indukzioz froga daiteke koefiziente binomialen errepikapen formula erabiliz. Era berean, konbinatoria erabiliz froga daiteke:

$$\begin{aligned}(x+y)^n = (x+y) \overset{n}{\cdots} (x+y) &= \sum_{I\subseteq[n]} \prod_{k\in I} x \prod_{j\in[n]\setminus I} y \\ &= \sum_{I\subseteq[n]} x^{|I|} y^{n-|I|} = \sum_{k=0}^{n} c(\{I : I \subseteq [n], c(I) = k\}) x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.\end{aligned}$$

Aurreko adierazpenaren bigarren berdintza

$$(x_1 + y_1) \cdots (x_n + y_n) = \sum_{I\subseteq[n]} \prod_{k\in I} x_k \prod_{j\in[n]\setminus I} y_j$$

formularen kasu berezi bat da. Era berean, azkenengo berdintza koefiziente binomialen definizioaren (ikusi 23. orrialdea) ondorio zuzena da.

Koefiziente binomialen definizio alternatiboa

Newtonen binomioa erabiliz, definizio alternatiboa emango diegu koefiziente binomialei:

18. definizioa: $\binom{n}{k}$ *defini daiteke* $(1+x)^n$ *polinomioan* x^k *monomioak duen koefizientearen bidez. Horri* ***Newtonen binomioaren koefiziente binomialen definizioa*** *deritzogu.*

Definizio hori koefiziente binomialek historikoki izan duten lehenengo definizioa da. Ohartu "Newtonen binomioa" ingelesez "Newton's binomial" dela, eta "koefiziente binomialak" ingelesez "binomial coefficients" direla. Gainera, beste zenbaki familia batzuk era horretan definitzen dira; adibidez, Stirling-en zenbakiak (ikusi 4.4. eta 4.5. atalak).

Definizio hori erabiliz, 2.1. atalean frogatu ditugun emaitzen froga alternatiboa emango dugu:

1) **Koefiziente binomial unitarioak:**
$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}.$

Froga: *Ohartu $(1+x)^n$ polinomioan x^0 eta x^n monomioek duten koefizienteak 1 direnez, emaitza frogatzen da.*

2) **Koefiziente binomial nuluak:**
Baldin eta $k > n$ bada, $\binom{n}{k} = 0$.

Froga: *Kasu horretan, x^k monomioak duen koefizientea $(1+x)^n$ polinomioan 0 denez, emaitza frogatzen da.*

3) **Newtonen binomioaren formula:**

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Froga: *Berdintza erraz froga daiteke:*

$$(x+y)^n = y^n(1+xy^{-1})^n = y^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

4) **Koefiziente binomialen simetria:**
Baldin eta $0 \le k \le n$ bada, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Froga: *Alde batetik,*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Beste alde batetik,

$$(x+y)^n = (y+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} y^r x^{n-r} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x^k y^{n-k}.$$

Azkenengo berdintzan $k := n-r$ aldagai aldaketa egin dugu. Polinomioen monomioak linealki independenteak direnez, zenbaki binomialen simetria ondorioztatzen dugu.

5) **Koefiziente binomialen errepikapen formula:**
Baldin eta $1 \le k \le n$ bada, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

Froga:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k &= (1+x)^n \\
&= (1+x)^{n-1}(1+x) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1+x) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k} x^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k+1} + x^n \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right] x^k + \left[\binom{n-1}{n-1} + \binom{n-1}{n} \right] x^n.
\end{aligned}$$

Azkenengo berdintzaren bigarren batugaian $k := k+1$ aldagai aldaketa egin dugu. Polinomioen monomioak linealki independenteak direnez, frogatu nahi dugun propietatea ondorioztatzen dugu.

6) **Koefiziente binomialen deribatuaren propietatea:**
Baldin eta $1 \leq k \leq n$ bada, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

Froga:

$$\sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} x^{k-1} = n(1+x)^{n-1} = \frac{d(1+x)^n}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right] = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}.$$

Polinomioen monomioak linealki independenteak direnez, frogatu nahi dugun propietatea ondorioztatzen dugu.

Aplikazioak (Binomioaren konbinazio-identitateak)

Newtonen formula erabiliz, konbinazio-identitate ugari lor daitezke:

1) $y = 1$ ordezkatuz, honako formula hau lortzen dugu:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n.$$

2) $(1+x)^n$ binomioaren formulan x ordezkatuz,

- Baldin eta $x = 1$ bada, $\quad 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.
- Baldin eta $x = -1$ bada, $\quad 0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.

3) $(1+x)^n \cdot (1+x)^m$ binomioaren formulen biderkadura aintzat hartuz,

- Vandermonderen formula $\displaystyle\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k}$.

4) $(1+x)^n + (1+x)^{n+1} + \ldots + (1+x)^{n+r}$ batura aintzat hartuz,

- $\displaystyle\binom{n+r+1}{n+1} = \sum_{k=0}^{r} \binom{n+k}{k}$.
- Baldin eta $s = 0, \ldots, r-1$ bada, $\displaystyle\binom{n+r+1}{n+s+1} = \sum_{k=s}^{r} \binom{n+k}{k-s}$.

Aurreko identitateak lortzeko erabili dezakegu:

$$(1+x)^n[1 + (1+x) + \cdots + (1+x)^r] = (1+x)^n \frac{(x+1)^{r+1} - 1}{x}.$$

5) $(1+x)^n$ binomioaren formula r aldiz deribatuz,

$$\sum_{k=r}^{n} \binom{n}{k} k^{\underline{r}} x^{k-r} = n^{\underline{r}}(1+x)^{n-r}.$$

- Baldin eta $x = 1$ bada, $\displaystyle\sum_{k=r}^{n} \binom{n}{k} k^{\underline{r}} = n^{\underline{r}} 2^{n-r}$.
- Baldin eta $x = -1$ bada, $\displaystyle\sum_{k=r}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k-r} k^{\underline{r}} = \begin{cases} r!, & n = r, \\ 0, & n > r. \end{cases}$

6) $(1+x)^n$ binomioaren formula (a,b) tartean integratuz,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1} = \frac{(1+b)^{n+1} - (1+a)^{n+1}}{n+1}$$

- Baldin eta $(a,b) = (0,1)$ bada, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}(2^{n+1} - 1)$.
- Baldin eta $(a,b) = (-1,0)$ bada, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}$.
- Baldin eta $(a,b) = (-1,1)$ bada, $\displaystyle\sum_{k=0,2,4,\ldots} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^n}{n+1}$.

7) $\int_0^b \int_0^t (1+x)^n \, dx \, dt$ garatuz,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{b^{k+2}}{(k+1)(k+2)} = \frac{(1+b)^{n+2} - 1 - b(n+2)}{(n+1)(n+2)}.$$

- Baldin eta $b = 1$ bada, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+2}-(n+3)}{(n+1)(n+2)}$.
- Baldin eta $b = -1$ bada, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{(k+1)(k+2)}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+2}$.

2.3. Koefiziente multinomialak

Atal honetan koefiziente multinomialak ikusiko ditugu, koefiziente binomialen orokorpen bat direnak.

19. definizioa: *Izan bitez $k, r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{N}^*$, non $r_1 + r_2 + \ldots + r_n = k$ betetzen baita;* **koefiziente multinomiala** *honela definitzen da:*

$$\binom{k}{r_1, r_2, \ldots, r_n} = \frac{k!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \ldots \cdot r_n!}.$$

Koefiziente multinomialen esanahi nagusia errepikatuzko permutazioak dira, 23. orrialdean ikusi dugun bezala. Gogoratzen dugu errepikatuzko permutazioak erabiltzen direla, besteak beste, honako multzo hauek zenbatzeko orduan:

- k bola ordenatzeko era kopurua, non r_1 bola c_1 kolorekoak diren, r_2 bola c_2 kolorekoak diren, ..., eta r_n bola c_n kolorekoak diren.
- n zenbakidun kutxatan k bola bereizgarri kokatzeko era kopurua, 1. kutxan r_1 bola, 2. kutxan r_2 bola, ..., eta n. kutxan r_n bola daudelarik.
- k luzerako segida kopurua, x_1 balioa r_1 aldiz, x_2 balioa r_2 aldiz, …, eta x_n balioa r_n aldiz agertzen direlarik.

Oinarrizko propietateak

Ikus ditzagun orain koefiziente multinomialen oinarrizko propietateak.

i) **Koefiziente multinomialak aukera bakar batekin:**
$n = 1$ denean, $\binom{k}{r_1} = \binom{k}{k} = 1$.

ii) **Koefiziente multinomialak bi aukerarekin:**
$n = 2$ denean, $\binom{k}{r_1, r_2} = \binom{k}{r_1, k-r_1} = \frac{k!}{r_1! \cdot (k-r_1)!} = \binom{k}{r_1}$ koefiziente binomialak dira.

iii) **Koefiziente multinomial unitarioak:**
$\binom{k}{k, 0, \ldots, 0} = \binom{k}{0, k, \ldots, 0} = \ldots = \binom{k}{0, 0, \ldots, k} = 1$.

iv) **Koefiziente multinomialen deskonposaketa:**
$$\binom{k}{r_1, r_2, \ldots, r_n} = \binom{k}{r_1}\binom{k-r_1}{r_2}\binom{k-r_1-r_2}{r_3}\cdots\binom{k-r_1-\ldots-r_{n-2}}{r_{n-1}}.$$

v) **Koefiziente multinomialen deribatuaren propietatea:**
Baldin eta $r_i \geq 1$ bada, $\displaystyle\binom{k}{r_1, r_2, \ldots, r_n} = \frac{k}{r_i}\binom{k-1}{r_1, \ldots, r_i - 1, \ldots, r_n}.$

vi) **Koefiziente multinomialen errepikapen erlazioa:**
Baldin eta $r_i \geq 1$ bada, $\displaystyle\binom{k}{r_1, r_2, \ldots, r_n} = \sum_{i=1}^{n}\binom{k-1}{r_1, \ldots, r_i - 1, \ldots, r_n}.$
Ikusi zazpigarren ariketa-zerrendako (VII-6) ariketa.

Koefiziente multinomialen propietateen frogak koefiziente binomialen propietateen frogen analogoak dira (ikusi 2.1. atala); hortaz, irakurlearentzat uzten ditugu.

2.2. teorema: (Multinomioaren formula): *Izan bitez* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$,

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^k = \sum_{\substack{r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{N}^* \\ r_1 + \cdots + r_n = k}} \binom{k}{r_1, r_2, \ldots, r_n} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_n^{r_n}.$$

Multinomioaren formularen froga 2.1. teoremaren frogaren analogoa da: bai esanahi konbinatorioa erabiltzen duena, baita indukzioa erabiltzen duena ere (kasu honetan, indukzioa k balioarekiko indukzioa egin behar da eta (vi) propietatea erabili behar da).

Aplikazioak

1) Baldin eta $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$ bada, $\displaystyle n^k = \sum_{(r_1, r_2, \ldots, r_n) \in \mathcal{S}_{n,k}} \binom{k}{r_1, r_2, \ldots, r_n}.$

2) Baldin eta $x_1 = x_2 = \ldots = x_{\lfloor n/2 \rfloor} = -1$ eta $x_{\lfloor n/2 \rfloor + 1} = \ldots = x_n = 1$ badira,

- n bikoitia denean, $\displaystyle 0 = \sum_{\substack{r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{N}^* \\ r_1 + \cdots + r_n = k}} \binom{k}{r_1, r_2, \ldots, r_n} (-1)^{r_1 + r_2 + \ldots + r_{n/2}}.$
- n bakoitia denean, $\displaystyle 1 = \sum_{\substack{r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{N}^* \\ r_1 + \cdots + r_n = k}} \binom{k}{r_1, r_2, \ldots, r_n} (-1)^{r_1 + r_2 + \ldots + r_{\lfloor n/2 \rfloor}}.$

3) x_1-ekiko deribatuz, $\displaystyle k\, n^{k-1} = \sum_{\substack{r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{N}^* \\ r_1 + \cdots + r_n = k}} \binom{k}{r_1, r_2, \ldots, r_n} r_1.$

4) x_1-ekiko integratuz, $\displaystyle \frac{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}}{k+1} = \sum_{\substack{r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{N}^* \\ r_1 + \cdots + r_n = k}} \binom{k}{r_1, r_2, \ldots, r_n} \frac{1}{r_1 + 1}.$

5) Koefiziente multinomialak eta zatigarritasuna:

- $(r_1!r_2!\cdots r_n!)$ kantitateak $k!$ zatitzen du.
- Partikularki, $(r!)^n$ kantitateak $(nr)!$ zatitzen du.
- Horren ondorioz, $[((n-1)!)!]^n$ kantitateak $(n!)!$ zatitzen du.

2.4. Binomio orokortuaren formula

20. definizioa: *Izan bitez $\alpha \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}^*$; orduan, $\binom{\alpha}{k}$ honela definitzen da*

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha^{\underline{k}}}{k!} = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}, & k \geq 1, \end{cases}$$

$\alpha \in \mathbb{N}^*$ denean soilik, esanahi konbinatorioa dugu.

Oinarrizko propietateak:

i) $k \geq 1$ bada, $\binom{\alpha}{k} = \binom{\alpha-1}{k-1} + \binom{\alpha-1}{k}$.

ii) $k \geq 1$ bada, $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha}{k}\binom{\alpha-1}{k-1} = \frac{\alpha-k+1}{k}\binom{\alpha}{k-1}$.

iii) $\binom{-\alpha}{k} = (-1)^k\binom{\alpha+k-1}{k}$.

Kasu bereziak:

- $\alpha = n,\ n \in \mathbb{N}^*$ denean, $\binom{\alpha}{k} = \binom{n}{k} = C_{n,k}$.
- $\alpha = -n,\ n \in \mathbb{N}^*$ denean, $\binom{\alpha}{k} = \binom{-n}{k} = (-1)^k CR_{n,k}$.

Taylorren garapena

Izan bedi $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, n mailako polinomioa. Orduan,

$P^{(k)}(x) = k^{\underline{k}}a_k + (k+1)^{\underline{k}}a_{k+1}x + \ldots + n^{\underline{k}}a_nx^{n-k}$ *eta*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

0-ren ingurunean, **P(x) polinomioaren Taylorren garapena** *deitzen da.*

Izan bedi infinitu aldiz diferentziagarria den $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ funtzioa. $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+R_n(x)$. Baldintza batzuen pean, $\exists r>0$, non $\forall x\in(-r,r)$, $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$ baita. Eta

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

Esaten da 0-ren ingurunean **f(x) funtzioaren Taylorren seriea** *dela. Seriea, $(-r,r)$ tartean, absolutuki konbergentea da, eta $(-r,r)$ tartean f* **funtzio analitikoa** *dela.* Adibidez, $f(x)=e^x$ funtzioaren Taylorren seriea honako hau da: $e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k$, $\forall x\in\mathbb{C}$.

Binomio orokortuaren formula

Izan bitez $\alpha\in\mathbb{R}$ eta $f_\alpha(x)=(1+x)^\alpha$ funtzioa.

- $f_\alpha(x)$ funtzioaren definizio-eremuak beti dauka $(-1,\infty)$ bere barnean.
- Analisi Matematikoan (Kalkulu Diferentzialean) frogatzen da bere Taylorren garapena $x=0$ puntuaren inguruan honako hau dela:

  $$f_\alpha(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f_\alpha^{(k)}(0)}{k!}x^k=\frac{\alpha^{\underline{k}}}{k!}x^k,\quad |x|<1.$$

  Froga [23] liburuan aurki daiteke.
- Honako adierazpen honi **binomio orokortuaren formula** deitzen zaio:

  $$(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k,\quad |x|<1.$$

Adibideak:

1) Izan bitez $\alpha=n\in\mathbb{N}^*$, $x\in\mathbb{C}$,
   - $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_{n,k}\,x^k$.
   - $(1-x)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,C_{n,k}\,x^k$.
2) Izan bedi $\alpha=-1$,
   - $(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+\ldots,$ $(-x)$ arrazoia duen serie geometrikoa da.
   - $(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+\ldots,$ x arrazoia duen serie geometrikoa da.
3) Izan bedi $\alpha=-2$,
   - $(1+x)^{-2}=1-2x+3x^2-4x^3+\ldots,$ $(-x)-$rekiko serie aritmetiko-geometrikoa da.
   - $(1-x)^{-2}=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots,$ $x-$rekiko serie aritmetiko-geometrikoa da.

4) Izan bedi $\alpha = -n,\ n \in \mathbb{N}$,

- $(1+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\ CR_{n,k}\ x^k.$
- $(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} CR_{n,k}\ x^k.$

5) Izan bedi $\alpha = -1/2$,

- $(1+x)^{-1/2} = \sum \binom{-1/2}{k} x^k = \sum (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{2^k \cdot k!} = \sum \binom{2k}{k} \left(\frac{-x}{2^2}\right)^k.$
- $(1-x)^{-1/2} = \sum (-1)^k \binom{-1/2}{k} x^k = \sum \binom{2k}{k} \left(\frac{x}{2^2}\right)^k.$

6) Izan bedi $a > 0$, $\quad (a+bx)^\alpha = \sum \binom{\alpha}{k} b^k a^{\alpha-k} x^k,\ |x| < |a/b|.$

Aplikazioak:

1) Izan bitez $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $(1+x)^\alpha(1+x)^\beta = (1+x)^{\alpha+\beta}$ denez, **Vandermonderen formula orokorra** honako hau da:

$$\binom{\alpha+\beta}{r} = \binom{\alpha}{0}\binom{\beta}{r} + \binom{\alpha}{1}\binom{\beta}{r-1} + \ldots + \binom{\alpha}{r}\binom{\beta}{0}.$$

2) Izan bitez $\alpha \in \mathbb{R},\ r, k \in \mathbb{N}^*$; $(1+x)^\alpha + (1+x)^{\alpha+1} + \ldots + (1+x)^{\alpha+r} = \frac{1}{x}[(1+x)^{\alpha+r+1} - (1+x)^\alpha]$ denez,

$$\binom{\alpha+r+1}{k+1} - \binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha+1}{k} + \ldots + \binom{\alpha+r}{k}.$$

2.5. Konbinazio-identitateen ariketa-zerrendak

Bosgarren ariketa-zerrenda: koefiziente binomialak

(V-1) Froga ezazu honako berdintza hau:

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n-1}{n-1} - \binom{2n-1}{n+1} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}.$$

Zer ondoriozta daiteke zatigarritasunari buruz?

(V-2) Froga ezazu $\binom{2n}{n}$ beti bikoitia dela.

(V-3) (44 *o.*) (†) Froga ezazu

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$$

aurreko koefiziente binomialen segida hasieran gorakorra eta gero beherakorra dela. Baldin eta n bikoitia bada, erdiko osagaia handiena da; baldin eta n bakoitia bada, bi erdiko osagaiak handienak dira.

(V-4) (44 *o.*) Beheko formula ezagun honetatik:

$$\binom{k}{0} + \binom{k+1}{1} + \ldots + \binom{k+r}{r} = \binom{k+r+1}{r},$$

frogatu itzazu honako beste formula hauek:

(a) $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

(b) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

(c) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

(d) Froga ezazu (a) eta (b) erabiliz, $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(e) Froga ezazu aurreko atalak erabiliz, $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

(f) Orokor bihurtu (a), (b) eta (c) formulak.

(V-5) (44 *o.*) Aurreko ariketaren hasierako formulan oinarrituta:

(a) Froga ezazu:

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \ldots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

(b) Idatz ezazu interpretazio konbinatorioa.

(c) Froga ezazu berriro (a) atalean oinarrituta:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(V-6) Froga konbinatorioa erabiliz, egiaztatu honako formula hau:

$$k^2 = 2\binom{k}{2} + \binom{k}{1}.$$

Aurreko atala eta 5. konbinatorio identitatea oinarrituta, froga ezazu:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(V-7) Honako berdintza ezagun honetatik hasita:

$$\binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r} - \binom{n}{r},$$

ideia bera eskuinaldeko osagaiei aplikatuz, honako hau lortzen da:

$$\binom{n}{r-1} = \binom{n+2}{r+1} - 2\binom{n+1}{r+1} + \binom{n}{r+1}.$$

Froga ezazu prozesu hori $k-2$ aldiz gehiago errepikatzen bada orduan emaitza honako hau dela:

$$\binom{n}{r-1} = \binom{k}{0}\binom{n+k}{r+k-1} - \binom{k}{1}\binom{n+k-1}{r+k-1} + \ldots + (-1)^k\binom{k}{k}\binom{n}{r+k-1}.$$

(V-8) (†) Froga ezazu honako formula hau:

$$\binom{n-1}{k} = \binom{n}{k} - \binom{n}{k-1} + \ldots + (-1)^k\binom{n}{0}.$$

(V-9) (†) Froga ezazu honako identitate hau:

$$\binom{m}{0}\binom{m}{n} + \binom{m}{1}\binom{m-1}{n-1} + \ldots + \binom{m}{n}\binom{m-n}{0} = 2^n\binom{m}{n}.$$

(V-10) (A.5.) (†) Banatu zatiki sinpletan:

$$\frac{n!}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}.$$

Aurreko emaitza erabiliz, froga ezazu (berriro):

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}.$$

(V-11) (a) (‡) Froga ezazu jarraian dauden edozein lau koefiziente binomial:

$$\binom{n}{r}, \binom{n}{r+1}, \binom{n}{r+2}, \binom{n}{r+3},$$

ezin direla inoiz egon progresio aritmetikoan, $n \geq r+3$ bada.

(b) (†)

$$\binom{n}{r}, \binom{n}{r+1}, \binom{n}{r+2}$$

balioak egon daitezke progresio aritmetikoan $n \geq r+2$ bada?

(V-12) (‡) Izan bedi:

$$a_n := \frac{1}{\binom{n}{0}} + \frac{1}{\binom{n}{1}} + \ldots + \frac{1}{\binom{n}{n}}.$$

Froga ezazu:

$$a_n = \frac{n+1}{2n} a_{n-1} + 1 \qquad \text{eta} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 2.$$

(V-13) (A.5.) Froga itzazu:

(a) $2^n < \binom{2n}{n} < 4^n, \ \forall n \geq 2.$

(b) $\binom{2n-1}{n} < 4^{n-1}, \ \forall n \geq 2.$

(c) (†) $(n!)^2 > n^n, \ \forall n > 2.$

(V-14) $\binom{n}{r}$ notazioa r-naka hartutako n elementuen konbinazioak adieraztekoa denez, erabil dezagun $\left\langle {n \atop r} \right\rangle$ r-naka hartutako n elementuen errepikatuzko konbinazioak adierazteko. Jakin badakigu:

$$\left\langle {n \atop r} \right\rangle = \binom{n+r-1}{r}.$$

Froga itzazu:

(a) $\left\langle {n \atop r} \right\rangle = \left\langle {n \atop r-1} \right\rangle + \left\langle {n-1 \atop r} \right\rangle.$

(b) $\left\langle {n \atop r} \right\rangle = \frac{n}{r}\left\langle {n+1 \atop r-1} \right\rangle = \frac{n+r-1}{r}\left\langle {n \atop r-1} \right\rangle.$

(c) $\left\langle {n+1 \atop r} \right\rangle = \left\langle {n \atop 0} \right\rangle + \left\langle {n \atop 1} \right\rangle + \ldots + \left\langle {n \atop r} \right\rangle.$

(d) n finkorako, $\left\langle {n \atop r} \right\rangle$ zenbakiak Pascalen triangeluaren diagonaletan agertzen dira.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

(V-15) (A.5.) Izan bedi

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Jordanen blokea, non $|\lambda| < 1$.

(a) (†) Froga ezazu $A^k = (a_{i,j}^{(k)})$ matrizeak honako berdintza hau betetzen duela:

$$a_{i,j}^{(k)} = \binom{k}{j-i} \lambda^{k-j+i} \quad \forall j \geq i, \quad \text{eta} \quad a_{i,j}^{(k)} = 0 \quad \forall j < i,$$

non $a_{i,j}^{(k)}$ balioa A^k matrizearen i. ilaran eta j. zutabean hartzen duen balioa den.

(b) Erabil emaitza hori frogatzeko $\lim_{k\to\infty} a_{i,j}^{(k)} = 0$ dela edozein $i, j = 1, \ldots, n$ baliotarako.

Oharra: PageRank algoritmoa, besteak beste, web-orrialdeen sailkatzeko erabiltzen dena, emaitza honetan oinarritzen da (ikusi [1]).

(V-16) (A.5.) *Gaussen koefiziente binomialak* $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ honela definitzen dira:

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 1,$$
$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \frac{q^{n-1} - 1}{q^2 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{q^{n-r+1} - 1}{q^r - 1}, \quad r = 1, 2, \ldots, n.$$

Adibidez,

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{q^4 - 1}{q - 1} \frac{q^3 - 1}{q^2 - 1} = \frac{(q^2+1)(q+1)(q-1)(q^2+q+1)(q-1)}{(q-1)(q+1)(q-1)}$$
$$= (q^2+1)(q^2+q+1) = q^4 + q^3 + 2q^2 + q + 1.$$

(Beraz, Gaussen koefiziente binomialak ez dira zenbakiak, funtzioak baizik. Baina sinplifikatzeagatik, ez da notazioan adierazten.)

(a) Kalkula itzazu $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(b) Froga ezazu *batuketaren legea*:

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ r-1 \end{bmatrix} q^{n+1-r} = \begin{bmatrix} n+1 \\ r \end{bmatrix}.$$

(c) Froga ezazu Gaussen koefiziente binomialak q-rekiko polinomioak direla.

(d) Froga ezazu:

$$\lim_{q\to 1} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \binom{n}{r}.$$

(e) Froga ezazu:

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-r \end{bmatrix}.$$

(f) Froga ezazu:

$$(1+x)(1+qx)(1+q^2x) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} qx^2 + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} q^3x^3.$$

(g) Froga ezazu:

$$\prod_{r=0}^{n-1}(1+q^rx) = \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} q^{1+2+\ldots+(r-1)}x^r.$$

(h) Aurreko erabiliz, Newtonen binomioaren formularen froga berri bat eman ezazu.

Seigarren ariketa-zerrenda: Newtonen binomioa

(VI-1) Izan bitez $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Kalkula itzazu:

(a) $(x^2 - 2x^{-1})^8$ garapenean dagoen x^6-ren koefizientea.

(b) $(x^b + x^c)^d$ garapenean dagoen x^a-ren koefizientea.

(c) $(x^a + 1 + x^{-a})^b$ garapenean dagoen osagai konstantea.

(VI-2) (*Leibniz*) Izan bitez I tartearen gainean n aldiz diferentziagarriak diren f eta g funtzioak. Froga ezazu:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}g^{(n-k)}.$$

(VI-3) (†) (*Vandermonde*) Froga ezazu:

$$(x+y)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k}}.$$

(VI-4) Froga ezazu edozein x baliorako:

$$(1+x)^n - \binom{n}{1} x(1+x)^{n-1} + \binom{n}{2} x^2(1+x)^{n-2} - \ldots + (-1)^n x^n = 1.$$

(VI-5) (†) (*Lucas*) Ariketa honetan, *eragiketa egin* aditza erabil dezagun *deribatu eta jarraian x-rekiko biderkatu* adierazteko. Izan bedi honako hasierako identitate hau:

$$(1-x)^n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} x^r.$$

(a) k aldiz *eragiketa* burutuz ($k < n$), lor ezazu honako berdintza honen formula orokorra:

$$\binom{4}{0}0^3 - \binom{4}{1}1^3 + \binom{4}{2}2^3 - \binom{4}{3}3^3 + \binom{4}{4}4^3 = 0.$$

(b) Zer lortzen da $k = n$ aldiz *eragiketa* egiten bada?

(VI-6) (A.6.) Froga ezazu honako identitate hau:

$$\sum_{l=0}^{k}(-1)^l x^l (1+x)^n = (1+x)^{n-1}(1-(-x)^{k+1}).$$

Adierazpenaren bi ataletan x^k-ren koefizienteak konparatuz, idatz ezazu beste identitate bat koefiziente binomialak erabiliz.

(VI-7) (A.6.) (†) Honako identitate hau erabiliz:

$$(1+x)^{-n}(1-x)^{-n} = (1-x^2)^{-n},$$

kalkula ezazu honako batura honen emaitza:

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \binom{n+k-1}{k}\binom{n+m-k-1}{m-k}.$$

(VI-8) (A.6.) (*American Mathematical Monthly*) (‡) Izan bitez $m, n \in N^*$. Kalkula ezazu honako adierazpen honen emaitza:

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{n+k+1}\binom{m}{k}(1-y)^{n+k+1} + \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{m+k+1}\binom{n}{k}y^{m+k+1}.$$

Zazpigarren ariketa-zerrenda: koefiziente multinomialak

(VII-1) Zenbat permutazio desberdin egin daitezke MISSISSIPI hitzaren letrekin? Zenbatetan ez daude bi I jarraian?

(VII-2) (A.7.) (Bola bereizgarriak kutxatan)

(a) Zenbat eratan bana daitezke zenbakidun 3 kutxatan $3n$ bola bereizgarriak, kutxa bakoitzean n bola egonda?

(b) Eta kutxa zenbakidunak ez badira?

(c) Zenbat eratan bana daitezke zenbakidun k kutxatan kn bola bereizgarriak, kutxa bakoitzean n bola egonda?

(d) Eta kutxa zenbakidunak ez badira?

(VII-3) Zenbat eratan bana daitezke sei sagar bereizezin, madari bat, laranja bat, mertxika bat, banana bat, marrubi bat eta mahats bat, 3 pertsonaren artean?

(VII-4) Froga ezazu 2^n zenbakiak $(2n)!$ zatitzen duela.

(VII-5)
- (*A*.7.) (†) Froga ezazu $[(n!)!]^{n+1}$ zenbakiak $((n+1)!)!$ zatitzen duela.
- Froga ezazu $[(n!)!]^{n+1}$ zenbakiak $((n^2)!)!$ zatitzen duela.

(VII-6) (52 *o.*) (†) Izan bitez $r_1, r_2, \ldots, r_n \geq 1$, eta $k = r_1 + \cdots + r_n$. Froga ezazu honako formula hau:

$$\binom{k}{r_1, r_2, \ldots, r_n} = \binom{k-1}{r_1 - 1, r_2, \ldots, r_n} + \binom{k-1}{r_1, r_2 - 1, \ldots, r_n} + \ldots + \binom{k-1}{r_1, r_2, \ldots, r_n - 1}$$

bi eratan: a) formula aljebraikoarekin, b) konbinatoria erabiliz.

(VII-7) (†) Froga ezazu honako formula hau:

$$\binom{m+s}{r_1, r_2, \ldots, r_n} = \sum \binom{m}{k_1, k_2, \ldots, k_n} \binom{s}{l_1, l_2, \ldots, l_n},$$

non

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_n = m, \quad l_1 + l_2 + \ldots + l_n = s, \quad k_i + l_i = r_i, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

betetzen baitute eta $\mathbb{N}^*$-ko n-koteak diren $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ eta $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ bikote guztiek batura osatzen baitute.

Zein da formula horren bidez orokortzen den identitate ospetsuaren izena?

(VII-8) Kalkula ezazu honako batura honen emaitza

$$\sum (-1)^{a+b} \binom{n}{a, b, c, d},$$

non $a + b + c + d = n$ betetzen duten eta zenbaki arrunt ez-negatiboak dauzkaten (a, b, c, d) laukoteek batura osatzen duten.

(VII-9) Kalkula ezazu $(x + y + z + w)^{11}$ garapenaren $x^4 y w^6$ osagaiaren koefizientea.

(VII-10) (†) Izan bedi $m \in \mathbb{N}$. Froga ezazu $(1 + x + x^2)^m$ garapenaren x^m osagaiaren koefizientea honako hau dela:

$$1 + \frac{m(m-1)}{(1!)^2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{(2!)^2} + \ldots.$$

Zein da aurreko baturaren azken osagaia?

Oharra: zenbakizko soluzioak B.1. eranskinean daude.

3. gaia

Funtzio sortzaileak eta errepikapenak

Kapitulu honetan ikusiko dugu nola kodifikatu informazioa potentzia-serieen bitartez, eta nola erabili hori errepikapenen soluzio esplizituak lortzeko eta ekuazio diofantikoen soluzio kopurua kalkulatzeko. Kapitulu honetan zehar mota honetako galderak erantzungo ditugu:

1) Zenbat eratan adieraz daiteke n zenbaki arrunta lau zenbakien batura bezala, non lehena 1-en multiploa den, bigarrena 3-ren multiploa, hirugarrena 5-en multiploa, eta laugarrena 7-ren multiploa?

2) Izan bitez m zenbaki arrunta eta, a_n zenbakia, 10^m baino hertsiki txikiagoak diren zenbaki oso ez-negatiboen eta 10 oinarrian bere digituen batura n-ren berdina den zenbakien kopurua. Zenbat da a_n?

3) Zenbat eskualdetan mugatzen dituzte planoa n zuzen ez-paralelok zein haietatik, edozein hiru zuzen ez diren puntu berean ebakitzen?

4) Zenbat azpimultzo ditu $\{1, 2, ..., n\}$ multzoak ondoz ondokoko zenbakirik gabe?

3.1. atalean funtzio sortzailearen oinarri teorikoak ikusiko ditugu, 3.2. atalean erabiliko dugu ekuazio diofantiko linealen soluzio kopurua kontatzeko, 3.3. atalean funtzio sortzaileak erabiliko ditugu errepikapenen soluzio esplizituak emateko eta 3.4. atalean gai honi dagokion ariketa zerrenda dugu.

3.1. Funtzio sortzaileak

Potentzia-seriea

Funtzio sortzailea definitu aurretik, gogora dezagun potentzia-seriearen definizioa eta haien propietate nagusiak:

21. definizioa: *Izan bedi a_n osagai orokorra duen $(a_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{C}$ zenbaki konplexu edo errealen segida. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$ batura* **potentzia-seriea** *deitzen da.*

3.1. teorema: *Izan bedi $\rho = 1/\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Orduan,*

- *Baldin eta $|x| < \rho$ bada, seriea absolutuki konbergentea da.*
- *Baldin eta $|x| > \rho$ bada, seriea ez da konbergentea.*
- *Baldin eta $|x| = \rho$ bada, ez dago emaitza orokorrik seriearen konbergentziari buruz.*

ρ seriearen **konbergentzi erradioa** *deitzen da.*

Gogora ezazu ere honako emaitza hau: $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| = l \Rightarrow \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = l.$

Ikasmaterial honetan honako propietate hau askotan erabiliko dugu, 3.1. teoremaren ondorioa dena:

3.2. korolarioa: *Izan bitez a_n segida eta $C_1, C_2 > 0$ zein $|a_n| < C_1 C_2^n$. Orduan, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ potentzia-seriea absolutuki konbergentea da $\left(\frac{-1}{C_2}, \frac{1}{C_2}\right)$ tartean.*

Emaitza hauen guztien frogak analisi errealeko ikasmaterialetan aurki daitezke, adibidez, [23] eta [26].

Definizioa eta oinarrizko propietateak

Atal honetan segida baten funtzio sortzailea definituko dugu, eta adibideak emango ditugu:

22. definizioa: *Izan bitez $a = (a_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{C}$ segida eta $\rho > 0$ konbergentzia-erradioa duen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ potentzia-seriea. Orduan,* ***a*** **segidaren funtzio sortzailea** *honako funtzio hau da:*

$$g_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad |x| < \rho.$$

Funtzio sortzaileen oinarrizko propietateak honako hauek dira:

i) g_a funtzioaren Taylorren seriea honako hau da:

$$g_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_a^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Berdintza honetatik ondorioztatzen da:

$$a_n = \frac{g_a^{(n)}(0)}{n!}. \tag{3.1}$$

(3.1) askotan erabiliko dugu g_a jakinda segida sortzailea berreskuratzeko.

ii) Baldin eta $g_a(x) = g_b(x)$ jatorriaren ingurune batean, orduan $a = b$.

iii) g_a infinitu aldiz diferentziagarria da $(-\rho, \rho)$ tartean. Bere deribatuak ondoko serieak dira $\forall k \in \mathbb{N}^*$:
$$g_a^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} (n)^{\underline{k}} a_n x^{n-k} = k^{\underline{k}} a_k + (k+1)^{\underline{k}} a_{k+1} x + \dots, \quad |x| < \rho.$$

Funtzio sortzaileen arteko eragiketa garrantzitsuenak honako hauek dira:

Izan bitez $a = (a_n)_{n\geq 0}$ eta $b = (b_n)_{n\geq 0}$ segidak eta haiei lotutako funtzio sortzaileak $g_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad |x| < \rho_a$ eta $g_b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad |x| < \rho_b$.

- (Batura) Kalkulatuko dugu zein segidak sortzen duen bi funtzio sortzaileen batura:
$$g_a(x) + g_b(x) = g_{a+b}(x), \quad |x| < \min(\rho_a, \rho_b).$$
Hau da, $g_a + g_b$ funtzioa $a + b = (a_n + b_n)_{n\geq 0}$ segidaren funtzio sortzailea da.

- (Eskalar batekiko biderkadura)
$$\lambda \cdot g_a(x) = g_{\lambda a}(x), \quad |x| < \rho_a.$$
Hau da, $\lambda \cdot g_a$ funtzioa $\lambda a = (\lambda \cdot a_n)_{n\geq 0}$ segidaren funtzio sortzailea da.

- (Biderkadura) Kalkulatuko dugu zein segidak sortzen duen bi funtzio sortzaileen biderkadura:
$$\begin{aligned} g_a(x) \cdot g_b(x) &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_i b_j x^{i+j} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = g_c(x), \quad |x| < \min(\rho_a, \rho_b). \end{aligned}$$
Bigarren berdintzan kontuan izan dugu $i + j = n$ bada orduan $j = n - i$ dugula. Laburbilduz, $g_a \cdot g_b$ funtzioa
$$c = (c_n)_{n\geq 0} = a * b := \left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right)_{n\geq 0}$$
segidaren funtzio sortzailea da. $c = a * b$ biderkadurari $a-$ren eta $b-$ren arteko **konboluzioa** deitzen zaio.

Aurkeztu dugun funtzio sortzailea oinarrizkoena da, baina beste funtzio sortzaile daude konbinatorioan erabiltzen direnak. Adibidez,

23. definizioa: *$(a_n)_{n\geq 0}$ segidaren* ***funtzio sortzaile esponentziala*** *$\left(\frac{a_n}{n!}\right)_{n\geq 0}$ segidaren funtzio sortzailea da. Hau da, $f_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.*

Kasu horretan, 1, 1, 1, ... segidaren funtzio sortzaile esponentziala e^x da. Segida mota hori interesgarria da a_n edozein esponentzial baino handiago hasten denean, baina zenbaki faktorialak baino txikiago. 4.6. atalean ikusiko dugu aplikazio bat multzoen partiketak kontatzeko.

Adibideak: I motako problema

Hasteko, kontura gaitezke g_a funtzio bat izanik sortzen duen $(a_n)_{n\geq 0}$ segida sortzailea lortzea oso erraza dela (3.1.) erabiliz. Problema hori askotan agertzen da konbinatorian; izan ere, askotan g_a identifikatzen dugu berdintza batetik, eta gero, g_a funtziotik berreskura dezakegu a_n segida. 3.3. eta 3.2. ataletan ikusiko ditugu adibide batzuk. Problema hori I motako problema deitzen da eta hemen adibide batzuk aurkeztuko ditugu:

a) $g_a^{(n)}$ kalkulatzeko erraza bada, $a_n = \frac{g_a^{(n)}(0)}{n!}$ erabiliz:

1) $g_a(x) = e^x$.

2) $g_a(x) = (1+x)^\alpha$.

3) $g_a(x) = \log(1+x)$.

4) $g_a(x) = \sin x$.

1) $a_n = \frac{1}{n!}$.

2) $a_n = \frac{\alpha^n}{n!}$.

3) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

4) $a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$.

b) Kasu berezi bat da polinomioen zatidurak:

1) $g_b(x) = \dfrac{1}{\alpha x+\beta}, \quad \beta \neq 0.$

2) $g_b(x) = \dfrac{1}{(\alpha x+\beta)^m}, \quad m \in \mathbb{N},\ \beta \neq 0.$

3) $g_b(x) = \dfrac{1}{x^2-3x+2}.$

4) $g_b(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}.$

1) $b_n = \frac{(-1)^n \alpha^n}{\beta^{n+1}}$.

2) $b_n = \binom{m+n-1}{n}\frac{(-1)^n\alpha^n}{\beta^{n+m}}$.

3) $b_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$.

4) $b_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.

2. formula oso garrantzitsua da eta askotan erabiliko dugu ikasmaterial honetan. 3. eta 4. kasuan segida sortzailea lortzeko zatikiak bi zatiki sinpleen batura bezala adierazi behar dira.

c) Azkenik, sortzen duten segiden ezagunak diren funtzioen batura, biderkadura edo konposizio bezala adieraziz lor dezakegu zein segidak sortzen duen funtzio sortzailea; esate baterako:

1) $g_c(x) = e^{x^4}$.

2) $g_c(x) = e^{-x}\cdot(1+x)^{-2}$.

3) $g_c(x) = (1+x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{N}$.

4) $g_c(x) = (1+x)^\alpha(1-x)^\alpha$, $\alpha,\beta\in\mathbb{N}$.

1) $c_{4n} = \frac{1}{n!}$.

2) $c_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^n}{k!}(n-k+1)$.

3) $c_n = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k}$.
Eta $c_n = \binom{\alpha+\beta}{n}$.

4) $c_{2n} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{\alpha}{k}\binom{\alpha}{2n-k}(-1)^{2n-k}$.
Eta $c_{2n} = \binom{\alpha}{n}(-1)^n$.

1. kasuan honako berdintza hau erabili dugu:

$$e^{x^4} = \sum_{n\geq 0} \frac{(x^4)^n}{n!}.$$

Adibideak: II motako problema

Ikus dezagun orain $(a_n)_{n\geq 0}$ segida jakinik nola lor dezakegun g_a funtzio sortzailea; II motako problemak, alegia:

a) Aukeratako bat da ezagutzen dugun funtzio batekin erlazionatzea; esate baterako e^x eta $(1+x)^m$, non $m \in \mathbb{N}^*$:

1) $(a_n) = 1,\ 1,\ \frac{1}{2!},\ \frac{1}{3!},\ \ldots$	1) $g_a(x) = e^x$.
2) $(a_n) = 1,\ -1,\ \frac{1}{2!},\ \frac{-1}{3!},\ \ldots$	2) $g_a(x) = e^{-x}$.
3) $(a_n) = 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \frac{1}{2!},\ 0,\ \frac{1}{3!},\ \ldots$	3) $g_a(x) = e^{x^2}$.
4) $(a_n) = 1,\ \lambda,\ \frac{\lambda^2}{2!},\ \frac{\lambda^3}{3!},\ \ldots$	4) $g_a(x) = e^{\lambda x}$.
5) $(a_n) = \binom{m}{0},\ \binom{m}{1},\ \binom{m}{2},\ \binom{m}{3},\ \ldots$	5) $g_a(x) = (1+x)^m, \quad \lvert x\rvert < 1$.
6) $(a_n) = \binom{m}{0},\ -\binom{m}{1},\ \binom{m}{2},\ -\binom{m}{3},\ \ldots$	6) $g_a(x) = (1-x)^m, \quad \lvert x\rvert < 1$.
7) $(a_n) = \binom{m}{0},\ \lambda\binom{m}{1},\ \lambda^2\binom{m}{2},\ \lambda^3\binom{m}{3},\ \ldots$	7) $g_a(x) = (1+\lambda x)^m, \quad \lvert x\rvert < 1/\lvert\lambda\rvert$.
8) $(a_n) = 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots$	8) $g_a(x) = \frac{1}{1-x}, \quad \lvert x\rvert < 1$.

b) Jarraitzeko, ohikoa da ezagutzen dugun g_a funtzio sortzaile baten menpean idaztea, adibidez:

1) $(b_n) = 0,\ 0,\ 0,\ a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots$	1) $g_b(x) = x^3 g_a(x)$.
2) $(b_n) = a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ \ldots$	2) $g_b(x) = \frac{1}{x^3}(g_a(x) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2)$.
3) $(b_n) = a_0,\ 0,\ 0,\ a_1,\ 0,\ 0,\ a_2,\ \ldots$	3) $g_b(x) = g_a(x^3), \quad \lvert x\rvert < \sqrt[3]{\rho_a}$.
4) $(b_n) = a_0,\ \lambda a_1,\ \lambda^2 a_2,\ \lambda^3 a_3,\ \ldots$	4) $g_b(x) = g_a(\lambda x), \quad \lvert x\rvert < \rho_a/\lvert\lambda\rvert$.
5) $(b_n) = a_0,\ -\lambda a_1,\ \lambda^2 a_2,\ -\lambda^3 a_3,\ \ldots$	5) $g_b(x) = g_a(-\lambda x), \quad \lvert x\rvert < \rho_a/\lvert\lambda\rvert$.
6) $(b_n) = a_0,\ 0,\ a_2,\ 0,\ a_4,\ 0,\ \ldots$	6) $g_b(x) = \frac{1}{2}(g_a(x) + g_a(-x))$.
7) $(b_n) = 0,\ a_1,\ 0,\ a_3,\ 0,\ a_5,\ 0,\ \ldots$	7) $g_b(x) = \frac{1}{2}(g_a(x) - g_a(-x))$.

c) Azkenik, segida bat ezagutzen ditugun segiden batura edo konboluzio bezala idaztea lagungarri suerta daiteke:

1) $c_n = 2^n + \frac{1}{n!}$.	4) $c_n = \binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \ldots + \binom{m}{n}$.
2) $c_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$.	5) $c_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.
3) $c_n = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}$.	6) $c_n = n\binom{m}{n}$.

1) $g_c(x) = \frac{1}{1-2x} + e^x, \quad |x| < 1/2.$

2) $g_c(x) = \frac{1}{1-x} \cdot e^x, \quad |x| < 1.$

3) $g_c(x) = \frac{1}{1-x} \cdot e^{-x}, \quad |x| < 1.$

4) $g_c(x) = \frac{(1+x)^m}{1-x}, \quad |x| < 1.$

5) $g_c(x) = \frac{1}{1-x}\, g_a(x), \quad |x| < \min(1, \rho_a).$

6) $g_c(x) = m\ x\ (1+x)^{m-1}, \quad |x| < \rho_a.$

3.2. Ekuazio diofantikoen soluzio kopurua

Atal honetan ikusiko dugu funtzio sortzaileen erabilera ekuazio diofantiko linealen soluzio kopurua zenbatzeko.

24. definizioa: ***Ekuazio diofantiko*** *deitzen zaio bi aldagai ezezagun edo gehiago duen edozein ekuazio aljebraikori, zeinen koefizienteak zenbaki osoen multzoan zehar ibiltzen diren eta soluzioak zenbaki osoen azpimultzo batean dauden.*

Ekuazio diofantikoen interesa da problema konbinatorio batzuk ekuazio diofantiko baten soluzio kopurua bezala adieraz daitezkeela, adibidez:

- $\{1, 2, \ldots, k\}$ multzotik sor daitezkeen n tamainako multimultzo kopurua eta

  $$x_1 + \cdots + x_k = n, \quad x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{N}^*$$

  soluzio kopurua berbera da. Izan ere, x_i da zenbat alditan dagoen i balioa multimultzoan.

- Baldin eta zentimo 1eko txanponak, 5 zentimoko txanponak eta 20 zentimoko txanponak baditut, eta a_n osagai orokorra n zentimo lortzeko era kopurua bada ordena inporta gabe, a_n segida honako ekuazio honen soluzio kopurua da:

  $$x_1 + 5x_2 + 20x_3 = n, \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}^*.$$

- Kolore desberdineko 4 dado botatzean n lortzeko era kopurua honako ekuazio honen soluzio kopurua da:

  $$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n, \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

  Hemen x_i litzateke i. koloreko dadoarekin lortutako emaitza.

Jarraitzeko, ikusiko dugu ekuazio diofantiko bat dugunean soluzio kopuruen funtzio sortzailea. Has gaitezen kasu partikular batekin:

3.3. teorema: *Izan bedi a_n kantitatea zenbaki oso ez-negatibo dituen $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$ ekuazioaren soluzio kopurua. Orduan, $a = (a_n)_{n \geq 0}$ segidaren funtzio sortzailea honako hau da:*

$$g_a(x) = (1 + x + x^2 + \ldots)^k, \quad |x| < 1. \tag{3.2}$$

Lehenengo froga a_n segidaren balio esplizitua 24 orrialdean kalkulatu dugula erabiliko dugu:

Froga: *Dakigunez,* $a_n = CR_{k,n} = \binom{n+k-1}{n}$ *(ikusi 24 orrialdea). Hortaz,*

$$g_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n} x^n = (1-x)^k = (1 + x + x^2 + \cdots)^k.$$

Bigarren froga bat emango dugu egoera gehiagotara orokor daitekeena:

Froga: *Kontuan izan behar da:*

$$\sum_{m_1 \in \mathbb{N}^*} x^{m_1} \cdots \sum_{m_k \in \mathbb{N}^*} x^{m_k} = \sum_{(m_1,\ldots,m_k) \in (\mathbb{N}^*)^k} x^{m_1+\cdots+m_k}$$
$$= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} c(\{(m_1, \ldots, m_k) \in (\mathbb{N}^*)^k : m_1 + \cdots + m_k = n\}) x^n = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n x^n = g_a(x).$$

Oharra: $g_a(x) = (1-x)^{-k}$ dugu (3.2) ekuazioan; izan ere, $(1-x)^{-1} = \sum_{i \in \mathbb{N}^*} x^i$ dugu $|x| < 1$ denean.

Orokor dezagun aurreko emaitza:

3.4. teorema: (Funtzio Sortzaileen Teorema): *Izan bitez* $M_1, M_2, \ldots, M_k \subseteq \mathbb{N}^*$*-ren azpimultzo ez-hutsak, eta* a_n *kantitatea* $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$ *ekuazioaren soluzio kopurua,* $m_1 \in M_1, m_2 \in M_2, \ldots, m_k \in M_k$ *murrizketekin. Orduan,* $a = (a_n)_{n \geq 0}$ *segidaren funtzio sortzailea honako hau da:*

$$g_a(x) = \prod_{i=1}^{k} \sum_{m_i \in M_i} x^{m_i}, \quad |x| < 1.$$

Oharra: 3.4. teoreman $M_1, \ldots, M_k$ multzoak finituak edo infinituak izan daitezke.

Froga: *Kontuan izan behar da:*

$$\prod_{i=1}^{k} \sum_{m_i \in M_i} x^{m_i} = \sum_{m_1 \in M_1} x^{m_1} \cdots \sum_{m_k \in M_k} x^{m_k} = \sum_{m_1 \in M_1, \ldots, m_k \in M_k} x^{m_1+\cdots+m_k}$$
$$= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} c(\{(m_1, \ldots, m_k) \in M_1 \times \cdots \times M_k : m_1 + \cdots + m_k = n\}) x^n = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n x^n = g_a(x).$$

3.4. teorema, aldagai aldaketa erraz baten bidez, koefiziente ez unitario dituzten ekuazio diofantikoen soluzioak kontatzeko aplika daiteke:

25. definizioa: *Izan bitez* $X \subseteq \mathbb{R}$ *multzoa eta* $a \in \mathbb{R}$*. Orduan,*

$$aX := \{ax : x \in X\}.$$

Adibidez, $2\mathbb{N} = \{2, 4, 6, \ldots\}$, eta $3\mathbb{N}^* = \{0, 3, 6, 9, 12, \ldots\}$.

Definizio honekin, 1 koefizientea duen ekuazio diofantiko baliokide bat erraz aurki daiteke:

3.5. teorema: *Izan bitez* $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$*,* $n \in \mathbb{N}^*$ *eta* $M_1, \ldots, M_k \subset \mathbb{N}^*$*.*

$$a_1 m_1 + \cdots + a_k m_k = n, \quad m_i \in M_i \ \forall i \in \{1, \ldots, k\},$$

ekuazioak dituen soluzio kopurua

$$\tilde{m}_1 + \cdots + \tilde{m}_k = n, \quad \tilde{m}_i \in a_i M_i \ \forall i \in \{1, \ldots, k\},$$

ekuazioak dituen soluzio kopuruaren berdina da.

Froga: *Ohartu aldagai aldaketa sinple eta alderantzgarria egin dugula soilik;* $\tilde{m}_i = a_i m_i$ *hain zuzen ere.*

Aplikazioak

Hona hemen 3.4. teoremaren aplikazio batzuk:

1) Baldin eta 4 dado airera botatzen badira, zenbat eratan lor daitezke 12 puntu? Eta 20 puntu? Ikusi (VIII-6) ariketa, ebazpena A.8. atalean egonik.

2) Baldin eta x_1 eta x_2 zenbaki bikoiti ez-negatibo eta x_3 eta x_4 zenbaki oso ez-negatibo badira, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$ ekuazioaren zenbat soluzio daude?
Kontuan izan behar da funtzio sortzailea $g_a(x) = \frac{1}{(1-x^2)^2} \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} \frac{1}{(1-x)^4}$ dela. Gainera, $\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_n \binom{n+1}{n} (-1)^n x^n$ eta $\frac{1}{(1-x)^4} = \sum_n \binom{n+3}{n} x^n$ da; hortaz, bi serieen arteko biderkadura eginez, $a_n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r (r+1) \binom{n-r+3}{3}$ dela lortzen dugu.

3) Baldin eta zentimo 1eko txanponak, 5 zentimoko txanponak eta 20 zentimoko txanponak baditut, eta a_n osagai orokorra n zentimo lortzeko era kopurua bada ordena inporta gabe, zein da $a = (a_n)$ segidaren funtzio sortzailea?
$g_a(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{1-x} \frac{1}{1-x^5} \frac{1}{1-x^{20}}$.

4) Baldin eta a_n bada n lau zenbakien batura bezala adierazteko era kopurua, non lehena 1-en multiploa den, bigarrena 3-ren multiploa, hirugarrena 5-en multiploa, eta laugarrena 7-ren multiploa, zein da $a = (a_n)$ segidaren funtzio sortzailea?
$g_a(x) = \frac{1}{1-x} \frac{1}{1-x^3} \frac{1}{1-x^5} \frac{1}{1-x^7}$.

Oharra: 3.4. teoremaren bidez lor daitezke a_n-ren balioak n zehatz batzuetarako kalkulu sinbolikoko software-a erabiliz (adibidez, Wolfram Mathematica edo MATLAB-en Math Simbolic Toolbox). Horretarako, a_n kalkulatu nahi badugu Funtzio Sortzailearen Teoremak ematen dizkigun polinomioak x^n monomioagatik trunkatu behar ditugu; hau da, x^{n+1} baino maila berdina edo handiago dituzten monomioak baztertu behar ditugu. Adibidez, 4 probleman 15 idazteko erak kontatzeko, nahikoa dugu programa bati $(1 + x + x^2 + \cdots + x^{15})(1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + x^{15})(1 + x^5 + x^{10} + x^{15})(1 + x^7 + x^{14})$ kalkulatzeko eskatzea, eta x^{15} koefizientea begiratzea (kasu honetan 19 da).

3.3. Errepikapenak

Atal honetan errepikapenen erabilgarritasuna ikusiko dugu. Errepikapenak aplikazio ugaritan agertzen dira, besteak beste, Biologian, Ekonomian eta seinale digitalaren prozesaketan. Errepikapenen soluzio esplizituak lortzeko, segidaren funtzio sortzailea erabiliko dugu:

26. definizioa: ***Errepikapen*** *bat honako era honetan adieraz daitekeen segida bat da:*

$$\begin{cases} a_0, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{C}, \\ a_n = G(n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}), \quad \forall n \geq k, \end{cases} \tag{3.3}$$

non $G : \mathbb{N} \times \mathbb{C}^k \mapsto \mathbb{C}$ aplikazio bat den. Errepikapenaren ***maila*** *k balioa da,* ***hasierako balioak*** *$a_0, \ldots, a_{k-1}$ dira, eta* ***errepikapen erlazioa*** *$a_n = G(n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k})$ ekuazioa da. Gainera,* ***errepikapen lineala*** *da baldin eta soilik baldin existitzen badira $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ zein:*

$$G(n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_{n-i}.$$

Gogora ditzagun sailkapenaren 1.5. atalean ikusitako adibide batzuk:

1) $\{1, 2, \ldots, n\}$ multzoak dituen azpimultzo kopurua $\{a_0 = 1,\ a_n = 2a_{n-1}\}$ errepikapenari dagokio.

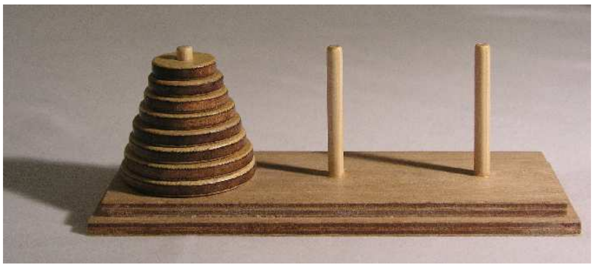
2) $\{1, 2, \ldots, n\}$ multzoko ondoz ondoko zenbakirik ez duen azpimultzo kopurua $\{a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\}$ errepikapenari dagokio (ikusi (VIII-11) ariketa eta haren ebazpena A.8. atalean).

3) 0 eta 1 zenbakiez osatutako eta bi 1 jarraian ez dituen n luzerako segida kopurua $\{a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\}$ errepikapenari dagokio.

4) Oinkada bakoitzean maila bat edo bi igotzen direnean, n maila duen eskailera igotzeko era kopurua $\{a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\}$ errepikapenari dagokio.

Ikus ditzagun adibide berri batzuk. Has gaitezen Lucasen dorrearekin (ikusi [19]).

1) Lucasen dorrea (edo Hanoiko dorrea edo Brahmaren dorrea) hiru makila eta n disko dituen joko matematiko bat da, François Edouard Anatole Lucas (1842-1891, Frantzia) matematikariak asmatua. Hasieran, disko guztiak makila batean daude sartuta txikienetik handienera; disko guztiak hasieran dauden moduan beste makila batera pasatzea du helburu. Bi arau ditu: (1) mugimendu bakoitzean disko bakarra mugi daiteke; eta (2) ezin daiteke jarri disko bat bera baino txikiagoa den beste disko baten gainean. Zein da a_n mugimendu kopuru minimoa? $\{a_0 = 0,\ a_n = 1 + 2a_{n-1}\}$ (segidako hasierako elementuen balioak 3.1. taulan dago).



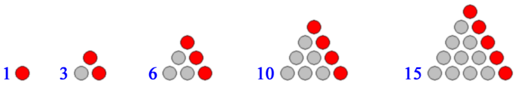
3.1. irudia: Lucasen dorrea. Iturria: [36]

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
a_n	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	...

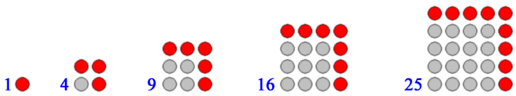
3.1. taula: Dorrearen mugimendu-segida.

2) Izan bedi Ω multzoa. $f : \Omega \to \Omega$ aplikazioa **inboluzioa** da baldin eta $f \circ f$ identitatea bada. Zenbat inboluzio ditu $[n]$ multzoak?
$\{a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}\}$. Errepikapen erlazioa lor daiteke partiketa bat eginez, n elementua puntua finkoa den ala ez aintzat izanik.

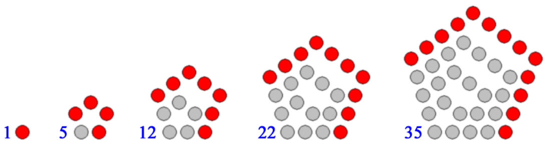
3) Zenbaki poligonalak:



3.2. irudia: Zenbaki triangeluarrak. Iturria: [29].



3.3. irudia: Zenbaki karratuak. Iturria: [30].



3.4. irudia: Zenbaki pentagonalak. Iturria: [31].

- $(k = 3)$ $T_0 = 0,\ T_n = T_{n-1} + n$ (ikusi 3.2. irudia).
- $(k = 4)$ $C_0 = 0,\ C_n = C_{n-1} + 2n - 1$ (ikusi 3.3. irudia).
- $(k = 5)$ $P_0 = 0,\ P_n = P_{n-1} + 3n - 2$ (ikusi 3.4. irudia).

Zein da zenbaki poligonalen formula orokorra? $K_0 = 0,\ K_n = K_{n-1} + n + (k-3)(n-1)$.

Oharra: egoera batzuetan, problemaren arabera, posible da a_0 balioa zein den argi ez egotea, kasu degeneratua delako. Adibidez, 2. adibidean posible da zailtasunak izatea a_0 balioa kalkulatzeko, argi ez izatekotan multzo hutsak inboluzio hutsa duela. Horrelako kasuetan, a_0-ren balioa lortzeko egiten dena lehenengo balioak kalkulatzea da, eta errepikapen erlazioa erabiliz a_0-ri balio bat esleitzen zaio, eta horrela, a_0-ren balioa deduzitzea. 2. probleman, adibidez, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ eta $a_2 = a_0 + a_1$ erabiliz lor daiteke $a_0 = 1$ dela. Ohar hau erabili beharko da kapitulu honetako ariketetan a_0-ri balio bat esleitzeko. Era berean, beste kasu guztietan gomendagarria da errepikapen erlazioa erabiltzea a_0 ondo kalkulatuta dagoela ziurtatzeko.

Jarraitzeko, ikusiko dugu (a_n) segidak errepikapen erlazioa betetzen badu, a_n osagai orokorraren adierazpen esplizitua, hau da, soilik n-ren menpeko adierazpen itxia, lortzeko urratsak:

1) Errepikapen erlazioa lortzea, ziurtatuz egia dela balio guztietarako, eta bereziki a_0-rako.
2) Ziurtatzea a_n segida esponentzial batek bornatzen duela.
3) $g_a(x) = F(x, g_a(x))$ motako ekuazio bat lortzea errepikapen erlazioa erabiliz.
4) Aurreko ekuaziotik g_a funtzioa askatzea.
5) g_a potentzia serie moduan idaztea, adibidez, deribatuak kalkulatuz. Lagungarri izan daiteke funtzio arrazionala bada zatiki sinpleen batura bezala adieraztea eta binomio orokortuaren formula erabiltzea.
6) a_n segida aurreko potentzia seriearen koefizienteak dira.

Urrats hauek, besteak beste, errepikapen linealetarako erabil daitezke. Gainera, errepikapen lineala segida esponentzial batekin borna daiteke honako emaitza hauek erakusten digutenez:

3.6. teorema: *Izan bedi*

$$\begin{cases} a_0, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{C}, \\ a_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_{n-i}, \quad \forall n \geq k, \end{cases}$$

errepikapenarekin emanda dagoen segida, non $\alpha_i \in \mathbb{C}$ edozein $i \in [k]$-rako. Orduan, existitzen dira $C, \rho > 0$ zein:

$$|a_n| \leq C\rho^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Froga: *Indukzioz n balioarekiko froga daiteke, $C = \max\{|a_0|, \dots, |a_{k-1}|, 1\}$ eta $\rho = |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_k| + 1$ hautatuz.*

Hemendik honako emaitza hau ondoriozta daiteke:

3.7. korolarioa: *Izan bedi*

$$\begin{cases} a_0, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{C}, \\ a_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_{n-i} + \beta, \quad \forall n \geq k, \end{cases}$$

errepikapenarekin emanda dagoen segida, non $\alpha_i, \beta \in \mathbb{C}$ edozein $i \in [k]$-rako. Orduan, existitzen dira $C, \rho > 0$ zein:

$$|a_n| \leq C\rho^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Froga: *Nahikoa da ohartzea a_n segida $k+1$ mailako errepikapen lineal bezala adieraz daitekeela; izan ere,*

$$\beta = a_{n-1} - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_{n-1-i}$$

dela erabiliz, errepikapena honela adieraz daiteke:

$$\begin{cases} a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{C}, \\ a_n = (\alpha_1 + 1)a_{n-1} + \sum_{i=2}^{k}(\alpha_i - \alpha_{i-1})a_{n-i} - \alpha_k a_{n-k-1}, \quad \forall i \geq k+1. \end{cases}$$

1. mailako errepikapen linealak

3.8. teorema: *Izan bedi ez-homogeneoa eta koefiziente konstanteduna 1. mailako ekuazio lineala den honako errepikapen hau:*

$$\begin{cases} a_0 \in \mathbb{C}, \\ a_n = \alpha a_{n-1} + \beta, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Orduan,

$$g_a(x) = \frac{a_0}{1-\alpha x} + \frac{\beta x}{(1-\alpha x)(1-x)} \quad \text{funtzio sortzailea da,} \tag{3.4}$$

eta n. gaiaren formula esplizitua honako hau da:

$$a_n = \alpha^n a_0 + \beta(1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{n-1}) = \begin{cases} a_0 + n\beta, & \alpha = 1, \\ \alpha^n a_0 + \beta\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1. \end{cases} \tag{3.5}$$

Froga: *Izan bedi $g_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Orduan,*

$$g_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_{n-1} + \beta)x^n = a_0 + \alpha\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty}\beta x^n = a_0 + \alpha x g_a(x) + \beta\frac{x}{1-x},$$

(3.4) *inplikatzen duena. Azkenik, a_n kalkulatu dezakegu* (3.1) *erabiliz. Horretarako, β-ren terminoa zatiki sinpleetan banatu behar da. Kontuan izan behar da $\alpha \neq 1$ denean:*

$$\frac{\beta x}{(1-\alpha x)(1-x)} = -\frac{\beta}{(1-\alpha)(1-\alpha x)} + \frac{\beta}{(1-\alpha)(1-x)};$$

hortaz, $\alpha \neq 1$ denean erraz lor dezakegu (3.5). Azkenik, $\alpha = 1$ kasurako nahikoa da limitea hartzea; izan ere, a_n balioa α, β eta a_0 balioen batura eta biderkadura finitu bat bezala adieraz daiteke.

Ikus ditzagun orain kasu berezi batzuk:

- $\alpha = 1$ bada, $a_n = a_0 + n\beta$, a_0-n hasten den eta β aldea duen progresio aritmetikoa da.
- $\beta = 0$ bada, $a_n = \alpha^n a_0$, a_0-n hasten den eta α arrazoia duen progresio geometrikoa da.
- Brahmaren dorrerako, $a_n = 2^n - 1$.

2. mailako errepikapen linealak

3.9. teorema: *Izan bedi homogeneoa eta koefiziente konstanteduna 2. mailako ekuazio lineala den honako errepikapen hau:*

$$\begin{cases} a_0,\ a_1 \in \mathbb{C}, \\ a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}, \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Orduan,

- $g_a(x) = \dfrac{a_0 + (a_1 - \alpha a_0)x}{1 - \alpha x - \beta x^2}$ *funtzio sortzailea da.*
- a_n*-ren adierazpen orokorra emateko, bi kasu desberdindu behar dira:*

i) Baldin eta $Q^K(x) = x^2 - \alpha x - \beta$ polinomio sortzaileak bi erro (errealak edo konplexu) desberdin baditu, $Q^K(x) = (x - r)(x - s)$, orduan $Q(x) = 1 - \alpha x - \beta x^2 = (1 - rx)(1 - sx)$ da [1] *eta*

$$g_a(x) = \frac{A}{1 - rx} + \frac{B}{1 - sx} \qquad \text{eta} \qquad a_n = Ar^n + Bs^n.$$

ii) Baldin eta $Q(x) = x^2 - \alpha x - \beta$ polinomio sortzaileak erro bikoitza badu, $Q(x) = (x - r)^2$, orduan $1 - \alpha x - \beta x^2 = (1 - rx)^2$ da eta

$$g_a(x) = \frac{a_0}{(1 - rx)^2} + \frac{(a_1 - \alpha a_0)x}{(1 - rx)^2} \qquad \text{eta} \qquad a_n = (n + 1)a_0 r^n + n(a_1 - \alpha a_0)r^{n-1}.$$

Froga: *Froga 3.8. teoremaren frogaren analogoa da. Kalkula dezagun funtzio sortzailea:*

$$g_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \alpha x \sum_{n \geq 1} a_n x^n + \beta x^2 \sum_{n \geq 0} a_n x^n = a_0 + (a_1 - \alpha a_0)x + (\alpha x + \beta x^2) g_a(x).$$

Hemendik $g_a(x) = \dfrac{a_0 + (a_1 - \alpha a_0)x}{1 - \alpha x - \beta x^2}$ dela ondoriozta dezakegu. Frogaren beste zatia berehalakoa da.

[1] $Q^K(x) = (x - r)(x - s) \Leftrightarrow Q(x) = (1 - rx)(1 - sx)$. Izan ere, $Q(x) = x^2 Q^K(\frac{1}{x})$ baita.

Era baliokidean, metodo aljebraikoa erabil daiteke. Bi kasu desberdinduko ditugu: (i) baldin eta r eta s balioak $x^2 - \alpha x - \beta$ polinomio sortzailearen erro bakunak badira eta (ii) baldin eta r balioa $x^2 - \alpha x - \beta$ polinomio sortzailearen erro bikoitza bada. a_0 eta a_1 balioak erabiliz A eta B koefizienteak kalkula daitezke eta a_n adierazpen orokorra honako era honetan:

$$(i)\left\{\begin{array}{ll} a_0 & = A + B, \\ a_1 & = Ar + Bs, \\ a_n & = Ar^n + Bs^n. \end{array}\right. \qquad (ii)\left\{\begin{array}{ll} a_0 & = A, \\ a_1 & = (A+B)r, \\ a_n & = (A+nB)r^n. \end{array}\right.$$

Adibideak: kalkula itzazu $g_a(x)$ funtzio sortzailea eta a_n osagai orokorra honako kasu hauetan:

1) $\{a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\}$.
Sol.: $g_a(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$, $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.

2) $\{a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}\}$.
Sol.: $g_a(x) = \frac{x}{1-3x+2x^2}$, $a_n = 2^n - 1$.

3) $\{a_0 = 0,\ a_1 = 2,\ a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}\}$.
Sol.: $g_a(x) = \frac{2x}{1-2x+x^2}$, $a_n = 2n$.

4) $\{a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}\}$.
Sol.: $g_a(x) = \frac{x}{1-4x+4x^2}$, $a_n = n2^{n-1}$.

3.10. teorema: *(1. aldaera): Izan bedi ez-homogeneoa eta koefiziente konstanteduna 2. mailako ekuazio lineala den honako errepikapen hau:*

$$\left\{\begin{array}{l} a_0,\ a_1 \in \mathbb{C}, \\ a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} + \gamma, \quad n \geq 2. \end{array}\right.$$

Orduan,

$$g_a(x) = \frac{a_0 + (a_1 - \alpha a_0)x + \gamma\frac{x^2}{1-x}}{1 - \alpha x - \beta x^2} \quad \textit{funtzio sortzailea da.}$$

3.11. teorema: *(2. aldaera): Izan bedi honako errepikapen hau:*

$$\left\{\begin{array}{l} a_0,\ a_1 \in \mathbb{C}, \\ a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} + \gamma_{n-2}, \quad n \geq 2. \end{array}\right.$$

Orduan,

$$g_a(x) = \frac{a_0 + (a_1 - \alpha a_0)x + \gamma(x)x^2}{1 - \alpha x - \beta x^2} \quad \textit{funtzio sortzailea da,}$$

non $(\gamma_n)_n$*ren funtzio sortzailea* $\gamma(x)$ *baita.*

Bi teorema hauen froga irakurlearentzat uzten dira.

k. mailako errepikapen linealak

3.12. teorema: *Izan bedi honako errepikapen hau:*

$$\begin{cases} a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{k-1} \in \mathbb{C}, \\ a_n = \alpha_1 a_{n-1} + \alpha_2 a_{n-2} + \ldots + \alpha_k a_{n-k} + \gamma_{n-k}, \quad n \geq k. \end{cases}$$

Orduan,

$$g_a(x) = \frac{P_{k-1}(x) + \gamma(x)x^k}{1 - \alpha_1 x - \alpha_2 x^2 - \ldots - \alpha_k x^k} \quad \textit{funtzio sortzailea da}$$

non $(\gamma_n)_n$ren funtzio sortzailea $\gamma(x)$ den eta $P_{k-1}(x)$ polinomioa $(a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{k-1},\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{k-1}, \alpha_k)$ koefizienteen menpeko $(k-1)$. mailako polinomioa baita.

3.12. teorema aurreko teoremen analogoa da eta froga irakurlearentzat uzten da.

Askotan funtzio sortzailearen adierazpena $g_a(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ da, non $P(x)$ eta $Q(x)$ polinomioak diren. Baldin $P(x)$-ren maila $Q(x)$-rena baino handiagoa edo berdina bada,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

non $S(x)$ eta $R(x)$ polinomioak diren eta $R(x)$-ren maila $Q(x)$-rena baino txikiagoa den. $\frac{R(x)}{Q(x)}$ polinomioen zatiketa potentzia seriean menpeko adierazpen ezagun baten bidez adieraztea da helburua. Gogora dezagun zatiki sinpleen deskonposizioa.

Baldin $Q(x)$ polinomioak k erro bakun diferente baditu[2] eta , $Q(x) = A(1-r_1x)(1-r_2x)\cdots(1-r_kx)$, orduan

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{1-r_1x} + \frac{A_2}{1-r_2x} + \cdots + \frac{A_k}{1-r_kx}.$$

Baldin $Q(x)$ polinomioak k erro anizkoitz diferente baditu, $Q(x) = A(1-r_1x)^{m_1}(1-r_2x)^{m_2}\cdots(1-r_kx)^{m_k}$, non $r_1,\ r_2, \ldots, r_k$ balioak diferenteak diren, orduan

$$\begin{aligned} \frac{R(x)}{Q(x)} =& \frac{A_{1,1}}{1-r_1x} + \frac{A_{1,2}}{(1-r_1x)^2} + \ldots + \frac{A_{1,m_1}}{(1-r_1x)^{m_1}} \\ &+ \frac{A_{2,1}}{1-r_2x} + \frac{A_{2,2}}{(1-r_2x)^2} + \ldots + \frac{A_{2,m_2}}{(1-r_2x)^{m_2}} \\ &\vdots \\ &+ \frac{A_{k,1}}{1-r_kx} + \frac{A_{k,2}}{(1-r_kx)^2} + \ldots + \frac{A_{k,m_k}}{(1-r_kx)^{m_k}}. \end{aligned}$$

[2] $Q^K(x) = x^k - \alpha_1 x^{k-1} - \alpha_2 x^{k-2} - \ldots - \alpha_k$ polinomio sortzailea bada eta $Q(x) = 1 - \alpha_1 x - \alpha_2 x^2 - \ldots - \alpha_k x^k$, orduan $Q^K(x) = (x-r_1)(x-r_2)\ldots(x-r_k) \Leftrightarrow Q(x) = (1-r_1x)(1-r_2x)\cdots(1-r_kx)$.

Azkenik, binomio orokortua erabiliz, a_n-ren adierazpen orokorra lortuko dugu. Beste aukera bat binomio orokortua eta konboluzioa erabiltzea da.

Oharra: Argi dago atal honetan egin daitezkeen pausoak mekanikoak direla, hortaz, programagarriak dira. Bereziki, programa informatikoak erabil daitezke ekuazio hauek ebazteko, adibidez, Wolfram Mathematica (ikusi [2]).

Ariketak

Kalkula itzazu $g_a(x)$ funtzio sortzailea eta a_n osagai orokorra honako kasu hauetan:

1) $\{a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 1\}$.
Sol.: $g_a(x) = \dfrac{1 - x + x^2}{1 - 2x - x^2 + 2x^3} = \frac{-1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x} + \frac{1}{1-2x}$,
$a_n = \begin{cases} 2^n, & n \text{ bikoitia}, \\ 2^n - 1, & n \text{ bakoitia}. \end{cases}$

2) $\{a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + n - 2\}$.
Sol.: $g_a(x) = \dfrac{1 - 2x + x^2 + x^3}{1 - 3x + x^2 + 3x^3 - 2x^4} = \frac{1}{1-2x} + \frac{1/4}{1+x} + \frac{1/4}{1-x} + \frac{-1/2}{(1-x)^2}$,
$a_n = \begin{cases} 2^n - \frac{n}{2}, & n \text{ bikoitia}, \\ 2^n - \frac{n+1}{2}, & n \text{ bakoitia}. \end{cases}$

3) $\{a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_n = -a_{n-1} + 4a_{n-2} + 4a_{n-3}\}$.
Sol.: $g_a(x) = \dfrac{1 + 2x - 2x^2}{1 + x - 4x^2 - 4x^3} = \frac{1}{1+x} + \frac{1/2}{1-2x} + \frac{-1/2}{1+2x}$,
$a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ bikoitia}, \\ 2^n - 1, & n \text{ bakoitia}. \end{cases}$

4) $\{a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_n = -a_{n-1} + 4a_{n-2} + 4a_{n-3} + 1\}$.
Sol.: $g_a(x) = \dfrac{1 + x - 4x^2 + 3x^3}{1 - 5x^2 + 4x^4} = \frac{-1/6}{1-x} + \frac{7/6}{1+x} + \frac{7/12}{1-2x} + \frac{-7/12}{1+2x}$,
$a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ bikoitia}, \\ \frac{7}{6}2^n - \frac{4}{3}, & n \text{ bakoitia}. \end{cases}$

3.4. Funtzio sortzaileak eta errepikapenen ariketa-zerrenda

Zortzigarren ariketa-zerrenda: funtzio sortzaileak eta errepikapenak

(VIII-1) Kalkula itzazu honako segida hauen funtzio sortzaileak:

(a) $1,\ 5,\ 5^2,\ 5^3,\ \ldots$

(b) $1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots$

(c) $1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots$

(d) $0,\ 2,\ 0,\ 4,\ 0,\ 6,\ 0,\ 8,\ \ldots$

(e) $4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ \ldots$

(VIII-2) Kalkula itzazu honako funtzio hauek sortutako segiden osagai orokorrak:

(a) $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^n$.

(b) $\dfrac{1}{1-x}\dfrac{1}{1+x}$.

(c) $\dfrac{1}{1+4x}$.

(d) $\dfrac{2x}{(1-x)(1-2x)}$.

(e) e^{2x}.

(f) e^{x^2}.

(g) $\sin x$.

(h) $\cos x$.

(VIII-3) Demagun $(a_n)_{n\geq 0}$ segidaren funtzio sortzailea $g(t)$ dela ($(-r,r)$ tartean definitua, $r>0$). Kalkula itzazu honako $(b_n)_{n\geq 0}$ segida hauen funtzio sortzaileak $g(t)$-ren menpe.

(a) $b_n := (-1)^n a_n$.

(b) $b_n := a_{n+1}$.

(c) $b_n := a_{n-1},\ (a_{-1}=0)$.

(d) $b_n := a_n + a_{n+1}$.

(e) $b_n := a_n - a_{n-1},\ (a_{-1}=0)$.

(f) $b_n := a_n$ edo 0, n bikoitia ala bakoitia den kontuan hartuta.

(g) $b_n := a_n$ edo 0, n bikoitia ala bakoitia den kontuan hartuta.

(h) $b_n := a_{n/2}$ edo 0, n bikoitia ala bakoitia den kontuan hartuta.

(i) $b_n := a_0a_n + a_1a_{n-1} + \ldots + a_na_0$.

(j) $b_n := a_0 + a_1 + \ldots + a_n$.

(k) $b_n := na_n$.

(l) $b_n := n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n$, ($k$ finkorako).

(VIII-4) Kalkula ezazu honako $a_0, a_1, \ldots$ segidaren funtzio sortzailea, non a_n honela definitzen baita:

(a)
$$x + y + z + 4u = n$$
ekuazioaren multzoko soluzio-kopurua $\mathbb{N}^*$-n,

(b)
$$2x + 2y + 3z + 3u = n$$
ekuazioaren multzoko soluzio-kopurua $\mathbb{N}^*$-n.

(VIII-5) Kalkula itzazu aurreko ariketaren (a) atalaren a_{10} balioa eta (b) atalaren a_{15} balioa.

(VIII-6) ($A.8.$) Izan bedi a_n, dado bat lau aldiz botatzen denean n puntu lortzeko era kopurua. Kalkula ezazu (a_n)-ren funtzio sortzailea, eta a_{12} eta a_{20} balioak.

(VIII-7) Autobus-kontzesionario batean 7 autobus txiki, 8 ertain eta 9 handi daude. Izan bedi a_n ikaskuntza-zentro baterako saldu ahal diren n autobus dituen autobus floten kopurua.

(a) Kalkula ezazu a_n-ren funtzio sortzailea.

(b) 12 autobus dituen zenbat autobus flota dira posible?

(c) (†) Kalkula itzazu batuketa hauek:
$$\sum_{n\geq 0} a_n, \quad \sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n, \quad \sum_{n\geq 0} na_n.$$

(VIII-8) Demagun botika batera joaten zarela maskarillak erostera. maskarillak banaka edo paketetan saltzen dituzte. Gainera, FFP2 maskarillak eta kirurgikoak dituzte; azken hauek bai pertsona heldu zein haurrentzat. Banaka erosteko, FFP2 motakoetatik 14 gelditzen zaizkie eta helduentzako kirurgikoetatik ere beste 14. Aldiz, paketetan erosteko soilik haurrentzako kirurgikoetakoak gelditzen zaizkie; zehazki 4 pakete, bakoitzak 10 maskarilla izanik.

(a) Izan bedi a_n, n maskarilla erosteko modu kopurua. Determina ezazu $(a_n)_{n\geq 0}$-ren funtzio sortzailea.

(b) Zenbat modutan eros daitezke 17 maskarilla?

(c) (†) Kalkula itzazu batuketa hauek:
$$\sum_{n\geq 0} a_n, \quad \sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n, \quad \sum_{n\geq 0} na_n.$$

Oharra: maskarillak aukeratzeko ordena ez da aintzat hartzen.

(VIII-9) ($A.8.$) Izan bitez m zenbaki arrunta eta, a_n zenbakia, 10^m baino hertsiki txikiagoak diren zenbaki oso ez-negatiboen kopurua eta 10 oinarrian bere digituen batura n-ren berdina dena, $n \geq 0$. Kalkula itzazu:

(a) a_n-ren funtzio sortzailea.

(b) a_n-ren adierazpen esplizitua.

(c) a_{21}-en balioa $m = 8$ denean.

(d) (†) Batuketa hauen emaitzak:

$$\sum_{n\geq 0} a_n, \quad \sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n, \quad \sum_{n\geq 0} n a_n.$$

(VIII-10) Kalkula itzazu honako $(a_n)_{n\geq 0}$ segida hauen funtzio sortzaileak:

(a) $a_0 := 0,\ a_1 := 1,\ a_n := 2a_{n-1} - a_{n-2},\ n \geq 2.$

(b) $a_0 := 1,\ a_1 := 1,\ a_n := 3a_{n-1} + 4a_{n-2},\ n \geq 2.$

(c) $a_0 := 4,\ a_n := 3a_{n-1} + 2,\ n \geq 1.$

(VIII-11) (A.8.) Izan bedi a_n ondoz ondoko zenbakirik ez duten $\{1, 2, \ldots, n\}$tik ateratako azpimultzo kopurua.

(a) Kalkula itzazu $a_1,\ a_2,\ a_3$.

(b) Aurkitu ezazu errepikapen-erlazioa a_n-rako.

(c) Esleitu a_0-ri balio bat arrazoia justifikatuz.

(d) Kalkula ezazu (a_n)-ren funtzio sortzailea.

(e) Kalkula ezazu a_n.

(VIII-12) Zenbaki arrunten multzo bat *multzo lodia* deitzen da, baldin eta elementu bakoitza multzoaren kardinala baino handiagoa edo berdina bada. Adibidez, $\{6, 10, 11, 20, 33, 34\}$ lodia da, baina $\{2, 200, 300\}$ ez da multzo lodia. Multzo hutsa, $\emptyset$, multzo lodia dela jotzen da. Izan bedi a_n, $\{1, 2, \ldots, n\}$tik ateratako azpimultzo lodien kopurua.

(a) Kalkula itzazu $a_1,\ a_2,\ a_3$.

(b) (‡) Aurkitu ezazu errepikapen-erlazioa a_n-rako.

(c) Esleitu a_0-ri balio bat arrazoia justifikatuz.

(d) Kalkula ezazu (a_n)-ren funtzio sortzailea.

(e) Kalkula ezazu a_n.

(VIII-13) Suposa dezagun 1×2 tamainako baldosa bereizezinak ditugula. Izan bedi a_n segida n baldosa erabiliz $n \times 2$ tamainako laukizuzena asfaltatzeko era kopurua. Ohartu 1×2ko baldosa bat 2×1 posizioan jar daitekeela.

(a) Kalkula itzazu $a_1,\ a_2$.

(b) Aurkitu ezazu errepikapen-erlazioa a_n-rako.

(c) Esleitu a_0-ri balio bat arrazoia justifikatuz.

(d) Kalkula ezazu (a_n)-ren funtzio sortzailea.

(e) Kalkula ezazu a_n.

(VIII-14) Izan bedi a_n bi 1 jarraian ez dituen n luzerako (hots, n osagai dituen) segida-kopurua.

(a) Kalkula itzazu $a_1,\ a_2,\ a_3$.
(b) Aurkitu ezazu errepikapen-erlazioa a_n-rako.
(c) Esleitu a_0-ri balio bat arrazoia justifikatuz.
(d) Kalkula ezazu (a_n)-ren funtzio sortzailea.
(e) Kalkula ezazu a_n.

(VIII-15) Enpresa batek kode ezberdin bat esleitu nahi dio fabrikatzen duen produktu bakoitzari. Horretarako, $0, 1, 2, 3, 4$ digituak erabiltzen ditu, bi 0 kontsekutibo ez egotearen murrizketarekin. Aitzitik, ez dakigu zein izan behar den kodearen luzera (zifra kopurua) ekoizpena etiketatzeko. Horretarako, honako galdera hauek erantzungo ditugu: $n \geq 0$ kodeen luzera bada, a_n balioak n luzerako kode kopurua denotatzen du.

(a) Kalkula itzazu $a_1,\ a_2,\ a_3$.
(b) Aurkitu ezazu errepikapen-erlazioa a_n-rako.
(c) Esleitu a_0-ri balio bat arrazoia justifikatuz.
(d) Kalkula ezazu (a_n)-ren funtzio sortzailea.
(e) Kalkula ezazu a_n.

(VIII-16) Kuboak metatuz 4×4 oinarria duen dorrea eraiki nahi da. Kubo kopurua mugagabea da eta kuboen aldeak 1, 2 edo 4 unitatetakoak dira. Dorrearen maila bakoitzean tamaina berdineko kuboak erabili behar dira. Izan bedi a_n zenbakia, n altueradun dorrea eraikitzeko era kopurua.

(a) Kalkula itzazu a_1, a_2, a_3 eta a_4.
(b) Aurki ezazu errepikapen erlazioa.
(c) Esleitu a_0-ri balio bat arrazoia justifikatuz.
(d) Zein da a_n-ren funtzio sortzailea?

(VIII-17) Izan bedi A_n honako n mailako matrize karratu hau:

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Izan bedi $a_n = \det(A_n)$ osagai orokorra duen segida.

(a) Kalkula itzazu a_1, a_2, a_3 eta a_4.
(b) (†) Aurki ezazu errepikapen erlazioa.
(c) Esleitu a_0-ri balio bat arrazoia justifikatuz.
(d) Zein da a_n-ren funtzio sortzailea?
(e) Kalkula ezazue a_n-ren adierazpena.

(VIII-18) Aintzat har ditzagun planoko n zuzen, binaka ez-paraleloak direnak, baina haietatik edozein hiru zuzen ez dira puntu beretik pasatzen. Izan bedi a_n kantitatea aurreko zuzenek mugatutako eskualde kopurua.

(a) Kalkula itzazu a_0, a_1, a_2 eta a_3.

(b) (†) Aurki ezazu a_n-ren errepikapen erlazioa.

(c) Zein da $(a_n)_{n\geq 0}$-ren funtzio sortzailea?

(d) Eman ezazu a_n-ren n-ren menpeko adierazpen esplizitua.

(e) Zenbat eskualde mugatzen dituzte 100 zuzenek?

Oharra: zenbakizko soluzioak B.1. eranskinean daude.

4. gaia

Zenbait zenbaki-familia garrantzitsu

Kapitulu honetan zenbaki-familia garrantzitsu batzuk eta haien oinarrizko propietateak ikusiko ditugu: Fibonacciren zenbakiak (ikusi 4.1. atala), Catalanen zenbakiak (ikusi 4.2. atala), zenbaki arrunten partiketak (ikusi 4.3. atala), Stirlingen lehen eta bigarren motako zenbakiak (ikusi 4.4. eta 4.5. atalak, hurrenez hurren), eta Bellen zenbakiak (ikusi 4.6. atala). Azkenik, 4.7. atalean gai honi dagokion ariketa zerrenda dugu.

4.1. Fibonacciren zenbakiak

Fibonacciren zenbakiek Leonardo Pisanoren (1170-1250, Italia) goitizena dute (ikusi matematikariaren biografia [20] webgunean). Fibonacciren F_n zenbakiek propietate ugari dituzte eta hainbat egilek asmatu eta ikertu dituzte. Fibonacci Elkarteak 1963. urtetik hona *The Fibonacci Quarterly* izeneko ikerkuntza-aldizkari matematikoa argitaratzen du (ikusi [3]).

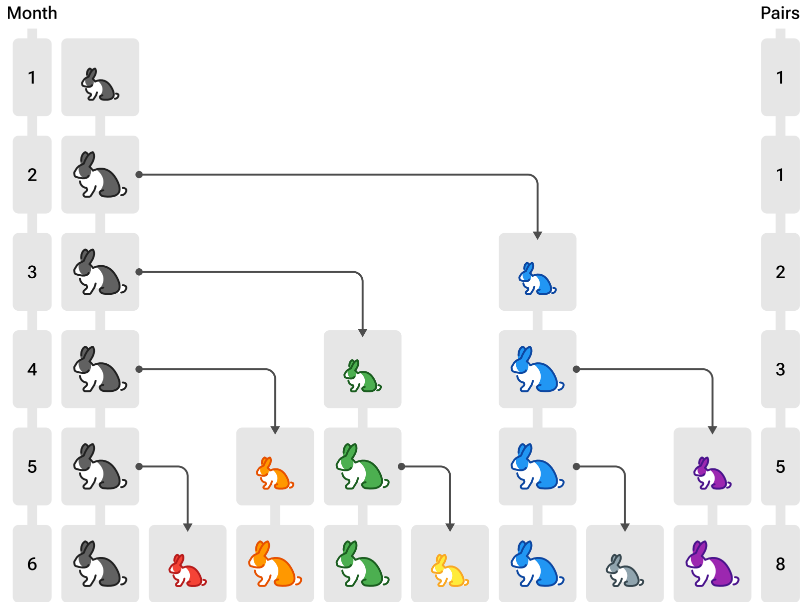
27. definizioa: *Honako errepikapen honek sortzen duen* $(F_n)_{n\geq 0}$ *segida* **Fibonacciren segida** *deitzen da:*

$$\begin{cases} F_0 = 0, \ F_1 = 1, \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Ikus ditzagun Fibonacciren zenbakien esanahi konbinatorioak:

a) **Esanahi klasikoa: untxiak.** Honako arau hauei jarraituz (ikusi 4.1. irudia):

- Lehenengo hilabetean untxi-bikote bakarra dago.
- Untxiak ez dira ugaltzen bizirik dauden lehenengo hilean.
- Hilabete bakoitzean, edozein bikotek beste bat sortzen du (sortutako bikoteek haien artean soilik estaltzen dute elkar).
- Untxiak ez dira hiltzen.



4.1. irudia: Fibonacciren untxiak. Iturria: [40].

Untxi-bikote batengandik, F_n untxi bikote sortuko dira n. hilabetea pasatu ondoren.

b) **Eskailerak.** Oinkada bakoitzean maila bat edo bi igotzen direnean, n maila dituen eskailera igotzeko era kopurua F_{n+1} da.

c) **Baldosak.** 2×1 tamainako baldosak erabiliz $2 \times n$ tamainako lurra betetzeko era kopurua F_{n+1} da.

d) **Segidak.** 0 eta 1 zenbakiez osatuta dagoen baina bi 1 jarraian ez dituen n luzerako segida kopurua F_{n+2} da.

e) **Mezuak.** Mezu kodifikatuak irakurtzea. Letra bakoitzak gehienez bi ikur dituen alfabetoa erabiliz, zehaztutako n luzerako segida irakurtzeko era kopurua F_{n+1} da.

f) **Multzoak.** $[n]$ multzotik ateratako eta zenbaki kontsekutiborik ez duen azpimultzo kopurua F_{n+2} da.

Enuntzia ditzagun orain Fibonacciren zenbakien oinarrizko propietateak, 3.9. teoremaren ondorioak direnak:

i) $(F_n)_{n\geq 0}$-ren funtzio sortzailea: $F(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}, \quad |x| < \dfrac{2}{1+\sqrt{5}}$.

ii) F_n-ren adierazpen orokorra:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Jarraitzeko, ikus ditzagun orain beste propietate batzuk, ariketa bezala uzten direnak. Hasteko hona hemen batuketaren propietate batzuk:

1) $F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$.
Ikusi bederatzigarren ariketa-zerrendako (IX-1) ariketa.

2) $nF_1 + (n-1)F_2 + (n-2)F_3 + \ldots + 2F_{n-1} + F_n = F_{n+4} - (n+3)$.
Ikusi bederatzigarren ariketa-zerrendako (IX-2) ariketa.

3) $F_1 + F_3 + F_5 + F_7 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$.
Ikusi bederatzigarren ariketa-zerrendako (IX-3) ariketa.

4) $F_0 + F_2 + F_4 + F_6 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$.
Ikusi bederatzigarren ariketa-zerrendako (IX-4) ariketa.

Beste alde batetik, hona hemen biderketaren eta zatigarritasunaren propietate batzuk:

1) $F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2 = \pm 1$.
Ikusi bederatzigarren ariketa-zerrendako (IX-11) ariketa.

2) $F_{n+m} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n$.
Ikusi bederatzigarren ariketa-zerrendako (IX-14) ariketa.

3) $\forall n, k \geq 1, \quad F_n \mid F_{kn}$.
Ikusi bederatzigarren ariketa-zerrendako (IX-14) ariketa.

4) $F_{n-1}^2 + F_n^2 = F_{2n-1}$.
Ikusi bederatzigarren ariketa-zerrendako (IX-15) ariketa.

5) $F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}$.
Ikusi bederatzigarren ariketa-zerrendako (IX-16) ariketa.

4.2. Catalanen zenbakiak

Catalanen zenbakiak Eugène Charles Catalanen (1814-1894, Belgika) matematikariak landu zituen zenbaki familia da (ikusi [21]).

28. definizioa: $(C_n)_{n\geq 0}$ *segida* **Catalanen segida** *deitzen da:*

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Ikus ditzagun Catalanen zenbakien oinarrizko propietateak:

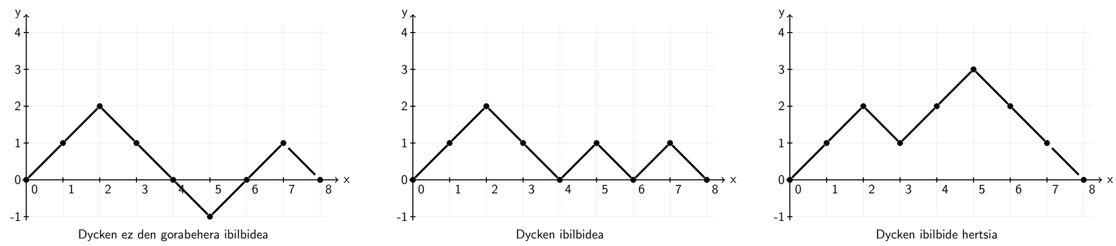
i) $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$

Froga: $\binom{2n}{n+1} = \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n}$, *2. kapituluko vii. propietatea dela-eta (ikusi 43. orrialdea).*

ii) $C_n \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Ondorioz, $n+1 \mid \binom{2n}{n}$.

Catalanen zenbakien esanahi konbinatorio klasiko bat gorabehera ibilbideetan datza:

29. definizioa: *Izan bitez $M(a,b),\ N(c,d) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\ a \leq c$. M-tik N-ra doan* **gorabehera ibilbidea** *M-n hasten den eta N-n amaitzen den lerro jarraitua da, $g:(x,y)\to(x+1,y+1)$ atal gorakorrak eta $b:(x,y)\to(x+1,y-1)$ atal beherakorrak dituena. $(0,0)$-tik $(2n,0)$-ra doan gorabehera ibilbidea* **Dycken ibilbidea** *(ingelesez Dyck path) dela esaten da baldin eta $y \geq 0$ erdiplanoaren barruan badago. Gainera, $y = 0$ ardatza soilik $(0,0)$ eta $(2n,0)$ puntuetan ukitzen badu,* **Dycken ibilbidea hertsia** *dela diogu (ikusi 4.2. irudia). Dycken ibilbideen multzoa $\mathcal{I}^*_{2n}$ denotatuko dugu, eta Dycken ibilbide hertsien multzoa $\mathcal{I}^{**}_{2n}$.*



4.2. irudia: $(0,0)$-tik $(8,0)$-ra doazen gorabehera ibilbideen adibideak.

4.1. teorema: (Catalanen zenbakien esanahi konbinatorioa): *Honako berdintza hau dugu:*

$$c(\mathcal{I}^*_{2n}) = C_n,\ \forall n \geq 0.$$

Froga: *Izan bitez $\mathcal{I}_{2n}$ eta $\overline{\mathcal{I}}^*_{2n}$, $(0,0)$-tik $(2n,0)$-ra doazen gorabehera ibilbideen multzoa eta Dyckenak ez diren gorabehera ibilbideen multzoa, hurrenez hurren.*

Ohartu $c(\mathcal{I}_{2n}) = \binom{2n}{n}$ dela, izan ere $2n$ mugimendu posibleen artean aukeratu behar dugu zer mugimendutan goazen gorantz. Gainera, $c(\overline{\mathcal{I}}^*_{2n}) = \binom{2n}{n+1}$; izan ere, itzulpen bat dago $(0,0)$-tik $(2n,0)$-ra doazen eta Dyckenak ez diren ibilbideen artean eta $(0,0)$-tik $(2n,-2)$-ra doan ibilbideen artean. Itzulpena da $y=-1$ ukitzen duen lehengo alditik aurrera isla hartzea; hau da, hortik aurrera goranzko pauso bakoitzak beheranzkoa hartzea eta beheranzkoak goranzkoa hartzea. Azkenik, argi *dago* $(0,0)$*-tik* $(2n,-2)$*-ra doan ibilbide kopurua* $\binom{2n}{n+1}$ *dela,* $n+1$ *aldiz beherantz eta* $n-1$ *aldiz gorantz egiten baitugu.*

Beraz,

$$c(\mathcal{I}_{2n}^*) = c(\mathcal{I}_{2n}) - c(\overline{\mathcal{I}}_{2n}^*) = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = C_n.$$

4.2. lema: *Honako berdintza hau dugu:*

$$c(\mathcal{I}_{2n}^{**}) = C_{n-1}, \ \forall n \geq 1.$$

Froga: *Argi dago* $(0,0)$*-tik* $(2n,0)$*-ra doazen ibilbide hertsiki positiboen artean eta* $(1,1)$*-tik* $(2n-1,1)$*-ra doazen eta* $y \geq 1$ *betetzen duten ibilbideen artean bijekzio bat dagoela (ibilbidearen lehengo eta azkenengo pausoak kentzea). Era berean, argi dago* $(1,1)$*-tik* $(2n-1,1)$*-ra doazen eta* $y \geq 1$ *betetzen duten ibilbideen artean eta* $(2n-2,0)$*ra doazen ibilbide positiboen artean itzulpen bat dagoela (pauso guztietan* $(-1,-1)$ *eginez). Hortaz,*

$$c(\mathcal{I}_{2n}^{**}) = c(\mathcal{I}_{2n-2}) = C_{n-1}.$$

Ikus ditzagun orain Catalanen zenbakien oinarrizko propietateak:

1) Catalanen zenbakien errepikapen-erlazioa:

$$\begin{cases} C_0 = 1, \\ C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \ldots + C_{n-1}C_0, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Froga: $C_0 = 1$ *da definizioz. Errepikapen-erlazioa esanahi konbinatoriokoa begiratuz froga daiteke. Zehatz-mehatz partiketa egingo dugu* $(0,0)$*-tik irteten denetik lehenengo aldian* $y=0$ *ukitzen duen* x*-ren balioaren arabera. Lehenengo aldia izan daiteke* $(2i,0)$ *puntuan, non* $i = 1,\ldots,n$*. Gainera,* $(2i,0)$ *puntuan* x *ardatza lehengo aldiz ukitzen duten ibilbide kopurua* $\mathcal{I}_{2i}^{**} \times \mathcal{I}_{2(n-i)}$ *identifika daiteke. Hortaz, 4.2. lema erabiliz:*

$$C_n = \sum_{i=1}^{n} c(\mathcal{I}_{2i}^{**})c(\mathcal{I}_{2(n-i)}) = \sum_{i=1}^{n} C_{i-1}C_{n-i} = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \ldots + C_{n-1}C_0.$$

2) $(C_n)_{n\geq 0}$ segidaren funtzio sortzailea:

$$C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}, \quad |x| \leq \frac{1}{4}. \tag{4.1}$$

Froga: *Hasteko,* $C_n \leq 2^{2n} = 4^n$*, binomioen 1. identitatea erabiliz froga daitekeena. Hortaz, funtzio sortzailea ondo definituta dago. Jarraitzeko, lortuko dugu funtzio sortzaileak betetzen* *duen berdintza:*

$$\begin{aligned}C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i} x^n &= 1 + x \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i} x^{n-1} \\ &= 1 + x \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{m} C_i C_{m-i} x^m \\ &= 1 + x \sum_{m=0}^{\infty} ((C_i) * (C_i))_m x^m \\ &= 1 + x(C(x))^2.\end{aligned}$$

Azken berdintzan $g_{a*b} = g_a \cdot g_b$ erabili dugu; hots, funtzio sortzailearen biderkaduraren propietatea (ikusi 3.1. atala). Hortaz, bigarren ordenako ekuazio baten soluzioa da. Hortaz, jarraitutasuna dela eta, edo $C(x) = C_+(x)$ edo $C(x) = C_-(x)$, non:

$$C_+(x) = \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{2}{1-\sqrt{1-4x}},$$

eta:

$$C_-(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{2}{1+\sqrt{1-4x}}.$$

Kontuan izanik $C(0) = C_0 = 1$ dela; halabeharrez, $C(x) = C_-(x)$, (4.1) frogatuz.

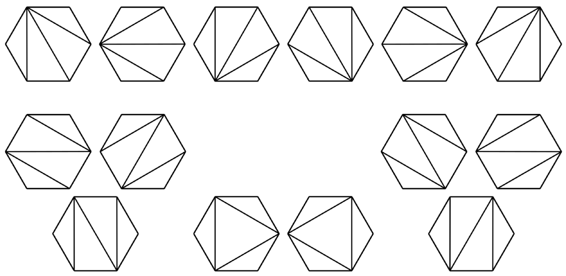
Catalanen zenbakien beste bi esanahi konbinatorio

1. Poligono konbexuen triangulazioa.

30. definizioa: *Poligono bat* **konbexua** *da bere angeluak 180 gradu baino txikiagoak direnean.* **Poligono konbexuaren triangulazioa** *poligonoa triangeluen bidez banatzean datza, non triangeluen barnealdeak binaka bateraezinak baitira eta triangeluen erpinak poligonoaren erpinak baitira (hots, triangeluen aldeak poligonoaren aldeak edo diagonalak dira).*

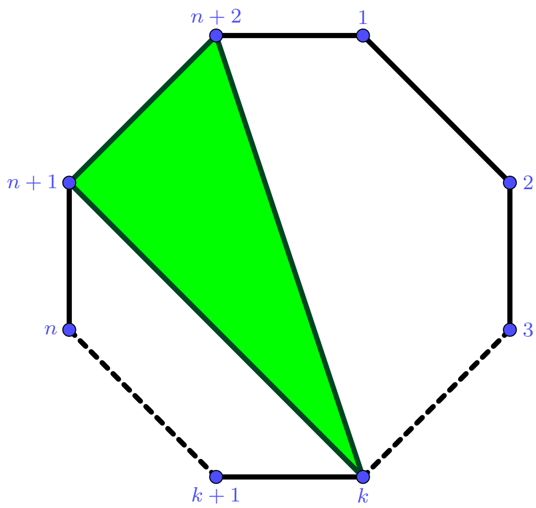
Ikusi 4.3. irudian hexagono baten triangulazio posible guztiak.

Har dezagun n aldeko poligono konbexua eta, jarraian, erpin bakoitzari zenbaki bat esleitu diezaiogun, erlojuaren orratzen kontrako noranzkoan. Izan bedi T_n balioa $n+2$ erpin zenbakituak dituen poligono konbexuaren triangulazio kopurua (n balioak adierazten du poligonoak behar dituen triangelu kopurua). Adibidez,



4.3. irudia: Poligono konbexuen triangulazioa $n = 4$ denean. Iturria: [41].

$n = 1,$	(3 erpin)	triangeluak	$T_1 = 1$
$n = 2,$	(4 erpin)	karratuak	$T_2 = 2$
$n = 3,$	(5 erpin)	pentagonoak	$T_3 = 5$
$n = 4,$	(6 erpin)	hexagonoak	$T_4 = 14$
$\ldots$			
$n = k,$	($k + 2$ erpin)	poligonoak	$T_n = ?$



4.4. irudia: Poligono konbexuen triangulazioa.

Ikus dezagun honako errepikapen erlazio hau betetzen dutela:

$$\begin{cases} T_0 = 1, \\ T_n = T_0T_{n-1} + T_1T_{n-2} + \ldots + T_{n-1}T_0, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Oinarrizko kasua. Argi dago $n = 0$ denean, poligonorik ez dagoenez triangulazio hutsa dugula. Gainera, $n = 1$ denean triangelua denez jada, triangulazioa era bakarrean egin daitekeela. Froga dezagun orain **indukziozko kasua**. Edozein $k \in [n]$ baliorako kontsideratzen dugu A_k familia k, $n + 1$ eta $n + 2$ erpineko triangelua duten (ikusi 4.4. irudia) triangulazioen multzoa. T_n kalkulatu ahal da $\{A_1, \ldots, A_n\}$ triangulazioen partiketa dela erabiliz. Hortaz, batuketaren erregelagatik, $T_n = c(A_1) + \ldots + c(A_n)$ dugu. Gainera, biderkaduraren erregela erabiliz $c(A_k) = T_{k-1} \cdot T_{n-k}$; izan ere, $\{n + 2, 1, \ldots, k\}$ eta $\{k, \ldots, n + 1\}$ erpinak osaturiko poligono konbexuak triangulatu behar ditugu independenteki.

2. Parentesiak.

Izan bedi P_n kantitatea $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n+1}$ biderketa egiteko era kopurua, osagaien ordena mantenduz, ikusi 4.1. taula. Orduan, P_n honako errepikapen erlazio hau betetzen du:

$$\begin{cases} P_0 = 1, \\ P_n = P_0 P_{n-1} + P_1 P_{n-2} + \ldots + P_{n-1} P_0, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Errepikapen erlazioa indukzioz froga daiteke. **Oinarrizko kasua**, $n = 0$ kasuan, taulan ikusten den bezala, aukera bakarra dugu: ezer ez egitea. Era berean, **indukziozko kasua** frogatuko dugu. P_n kalkulatu ahal da sailkatze-teknika eta $\{A_1, \ldots, A_n\}$ partiketa erabiliz, non A_k multzoan $(x_1 \cdots x_k)(x_{k+1} \cdots x_{n+1})$ biderkadura duten multzoak diren; hau da, non azken biderketa $x_1, \ldots, x_k$ arteko biderketa eta $x_{k+1}, \ldots, x_n$ arteko biderketa baten biderketa den. Batuketaren erregelagatik, $P_n = c(A_1) + \ldots + c(A_n)$, non $k \in [n]$ bakoitzerako. Azkenik, biderkaduraren erregela erabiliz, $c(A_k) = P_{k-1} \cdot P_{n-k}$; izan ere, bloke bakoitzean eragiketak nola egin independenteki hautatzen da. Hortaz, errepikapen erlazioa lor dezakegu.

$n=0$	$P_0=1$	(x_1)
$n=1$	$P_1=1$	(x_1x_2)
$n=2$	$P_2=2$	$(x_1(x_2x_3))$
		$((x_1x_2)x_3)$
$n=3$	$P_3=5$	$(x_1(x_2(x_3x_4)))$
		$(x_1((x_2x_3)x_4))$
		$((x_1x_2)(x_3x_4))$
		$(((x_1x_2)x_3)x_4)$
		$((x_1(x_2x_3))x_4)$

4.1. taula: Parentesien adibideak.

4.3. Zenbaki arrunten partiketak

31. definizioa: *Izan bedi $n \in \mathbb{N}$, $n-$***ren partiketa**

$$n = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$$

motako adierazpena da, non $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{N}$ baita, $1 \leq k \leq n$. x_i batugaiak **zatiak** *deitzen dira eta k batugai kopuruari* **partiketaren tamaina** *esaten zaio. Oro har* **partiketa ez-ordenatuak** *erabiliko ditugu eta ohikoa da $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_k \geq 1$ eran partiketa adieraztea. Hau da, bi partiketa berdinak dira bere diferentzia bakarra batugaien ordena bada. Desberdintzat ematen baditugu,* **partiketa ordenatuak** *izango ditugu. Gainera, partiketekin erlazionatutako honako zenbaki-familiak hauek definituko ditugu:*

- *π_n kantitatea $n-$ren partiketa ordenatuen kopurua eta $\pi_n^{(k)}$, k tamainako $n-$ren partiketa ordenatuen kopurua.*
- *p_n kantitatea $n-$ren partiketa (ez-ordenatuen) kopurua eta $p_n^{\langle k \rangle}$, k edo txikiagoak diren zatiak dituzten $n-$ren partiketa (ez-ordenatuen) kopurua.*
- *d_n kantitatea zati guztiak desberdinak dituen $n-$ren partiketa kopurua eta $d_n^{\langle k \rangle}$, k tamaina edo txikiagoa duten $n-$ren zati desberdineko partiketa kopurua.*

- *o_n kantitatea zati guztiak bakoitiak dituen $n-$ren partiketa kopurua eta $o_n^{\langle k\rangle}$, k edo txikiagoak diren zati bakoitien $n-$ren partiketa kopurua. o hizkia ingelesetik dator, "bakoitia" ingelesez "odd" baita.*

Hasteko, ohartu zenbaki partiketa ordenatuek honako itzulpena eta interpretazio baliokide hauek dituztela:

- $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ ekuazioaren soluzioak, non $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{N}$ diren.
- $y_1 + y_2 + \ldots + y_k = n - k$ ekuazioaren soluzioak, non $y_1, \ldots, y_k \in \mathbb{N}^*$ diren.
- n bola bereizezin k zenbakidun kutxatan sartzeko erak, kutxa hutsik ez egonik.
- $n - k$ bola bereizezin k zenbakidun kutxatan kokatzeko erak.
- $n - k$ aldiz 0 eta $k - 1$ aldiz 1 zenbakiez osatutako segidak.
- $n - 1$ elementuen $k - 1$ tamainako (edo $n - k$ tamainako) azpimultzoak.
- k elementuen $n - k$ tamainako multiazpimultzoak.

4.3. teorema: (Partiketa ordenatuak): *Honako berdintza hauek ditugu:*

- $\pi_n^{(k)} = \binom{n-1}{k-1}, \quad n \geq 1, \quad 1 \leq k \leq n,$
- $\pi_n = 2^{n-1}, \quad n \geq 1.$

Froga: *Hasteko, gogoratu $\pi_n^{(k)}$, k tamainako $n-$ren partiketa ordenatuen kopurua dela. Interpretazio baliokideetan ikusi dugunez, $y_1 + y_2 + \ldots + y_k = n - k$ ekuazioaren soluzioak, non $y_1, \ldots, y_k \in \mathbb{N}^*$ diren. Hortaz, errepikatuzko konbinazioak kontatu behar direnez, $\pi_n^{(k)} = \binom{n-1}{k-1}$ dugu. Azkenik, π_n kantitatea $n-$ren partiketa ordenatuen kopurua denez,*

$$\pi_n = \sum_{k=1}^{n} \pi_n^{(k)} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = 2^{n-1}.$$

Azkenengo berdintza 1. identitate binomiala da.

4.4. korolarioa: (Partiketa ordenatuak):

- $(\pi_n^{(k)})_{n\geq 0}$ *segidaren funtzio sortzailea:* $\Pi^{(k)}(x) = \dfrac{x^k}{(1-x)^k}, \quad |x| < 1$ *da.*
- $(\pi_n)_{n\geq 0}$ *segidaren funtzio sortzailea:* $\Pi(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-2x}, \quad |x| < \dfrac{1}{2}$ *da.*

Jarraitzeko, partiketa ez-ordenatuen funtzio sortzailea kalkulatuko dugu, zenbakien balio esplizitua eman gabe:

4.5. teorema: (Partiketa ez-ordenatuak):

- $(p_n^{\langle k\rangle})_{n\geq 0}$ *segidaren funtzio sortzailea:* $P^{\langle k\rangle}(x) = \dfrac{1}{1-x}\dfrac{1}{1-x^2}\cdots\dfrac{1}{1-x^k}, \quad |x|<1$ *da.*
- $(p_n)_{n\geq 0}$ *segidaren funtzio sortzailea:* $P(x) = \displaystyle\prod_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^r}, \quad |x|<1$ *da.*

Froga: *Lehenengo emaitza Funtzio Sortzailearen Teoremaren (ikusi 3.4. teorema) ondorioa da; izan ere, kontatu behar da zenbat soluzio dituen honako ekuazio honek:*

$$x_1 + 2\ x_2 + \cdots + k\ x_k = n, \quad \text{non } x_1, ..., x_k \in \mathbb{N}^*.$$

Hemen x_i aldagaia da zenbat alditan agertzen den i balioa partiketan.

Bigarren emaitza lehenengo emaitzaren ondorioa da $r\to\infty$ limitea hartuz. Funtzio segida $(-1,1)$ tartean konbergentea dela ikusteko logaritmoa har daiteke eta $\log(1+y)$-ren baliokide infinitesimala y dela erabil daiteke.

4.6. teorema: (zati desberdineko partiketa ez-ordenatuak)

- $(d_n^{\langle k\rangle})_{n\geq 0}$ *segidaren funtzio sortzailea:* $D^{\langle k\rangle}(x) = (1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^k), \quad |x|<1.$
- $(d_n)_{n\geq 0}$ *segidaren funtzio sortzailea:* $D(x) = \displaystyle\prod_{r=1}^{\infty}(1+x^r), \quad |x|<1.$

Froga: *Lehenengo emaitza Funtzio Sortzailearen Teoremaren (ikusi 3.4. teorema) ondorioa da; izan ere, kontatu behar da zenbat soluzio dituen:*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n,$$

non $x_1 \in \{0,1\}$, $x_2 \in \{0,2\}$, ..., $x_k \in \{0,k\}$.

Bigarren emaitza lehenengo emaitzaren ondorioa da $r\to\infty$ limitea hartuz. Funtzio segida konbergentea dela ikusteko logaritmoa har eta $\log(1+y)$-ren baliokide infinitesimala y dela erabil daiteke.

4.7. teorema: (zati bakoitien partiketa ez-ordenatuak) *Izan bedi o_n kantitatea zati guztiak bakoitiak dituen $n-$ren partiketa kopurua eta $o_n^{\langle k\rangle}$, k edo txikiagoak diren zati bakoitien $n-$ren partiketa kopurua. Orduan,*

- $(o_n^{\langle k\rangle})_{n\geq 0}$ *segidaren funtzio sortzailea:* $O^{\langle 2k-1\rangle}(x) = \dfrac{1}{1-x}\dfrac{1}{1-x^3}\cdots\dfrac{1}{1-x^{2k-1}}, \quad |x|<1.$

- $(o_n)_{n\geq 0}$ *segidaren funtzio sortzailea:* $O(x) = \displaystyle\prod_{r=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2r-1}}, \quad |x| < 1.$

Froga aurreko teoremen analogoa da.

4.8. teorema: (Eulerren Teorema) *Honako berdintza hau dugu:*

$$D(x) = O(x).$$

Oharra: funtzio sortzaileen bakartasunetik ondorioztatzen da zati desberdinen kopurua eta zati bakoitien kopurua berdinak direla; hots,

$$d_n = o_n, \quad \forall n \geq 0.$$

Froga: *Eulerren Teorema frogatzeko kontuan izango dugu:*

$$D(x) = \prod_{r=1}^{\infty}(1+x^r) = \prod_{r=1}^{\infty} \frac{1-x^{2r}}{1-x^r} = \frac{\prod_{r=1}^{\infty} 1-x^{2r}}{\prod_{r=1}^{\infty} 1-x^r} = \prod_{r=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2r-1}} = O(x).$$

Laugarren berdintzan beheko biderketan balio bikoitiak sinplifikatu ditugu eta bakoitiak utzi ditugu soilik. Berdintza guztiak $|x| < 1$ balioetarako froga daiteke logaritmoa hartzerako orduan, infinitesimo baliokideak erabiliz, batura absolutuki konbergentea baitugu, eta kasu horretan aldagaiaren ordena alda daiteke (ikusi [23]).

Ferreren diagramak

$x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_k$ betetzen duen $n = x_1+x_2+\ldots+x_k$ partiketa grafikoki adieraz daiteke diagrama baten bidez, errenkada kopurua k -zati kopurua- eta zutabeen kopurua x_1 -zati handiena- izanik, lehenengo ilaran x_1 puntu egonda, bigarren ilaran x_2 puntu, hirugarrenean x_3 puntu eta horrela, hurrenez hurren. Esate baterako, $14 = 5+4+2+1+1+1$ partiketaren diagrama 4.5. irudian ikus daiteke.

$$\begin{array}{ccccc}
\circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\
\circ & \circ & \circ & \circ & \\
\circ & \circ & & & \\
\circ & & & & \\
\circ & & & & \\
\circ & & & &
\end{array}$$

4.5. irudia: Ferreren diagrama $14 = 5+4+2+1+1+1$ adibiderako.

Diagrama horiek Ferrer izena hartzen dute, Norman Macleod Ferrerek (1829-1903) asmatu zituelako.

32. definizioa: *Izan bedi π partiketa. Bere Ferreren diagraman errenkadak eta zutabeak trukatuz lortzen den partiketari π-ren* **konjugatua** *esaten zaio. Baldin π eta π-ren konjugatua berdinak badira,* **autokonjugatua** *dela esaten da.*

4.5. irudiko diagraman ilarak eta zutabeak trukatzen badira, 14 zenbakiaren beste partiketa baten diagrama lortzen da. Aurreko adibidearen kasuan,

$$\begin{array}{llllll} \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & & & \\ \circ & \circ & & & & \\ \circ & \circ & & & & \\ \circ & & & & & \end{array}$$

4.6. irudia: Ferreren diagrama $14 = 6 + 3 + 2 + 2 + 1$ adibidearen konjugaturako.

hots, $14 = 6 + 3 + 2 + 2 + 1$ partiketa lortzen da, aurrekoaren konjugatua (ikusi 4.6. irudia).

Azkenik, $5 + 4 + 3 + 2 + 1$ partiketa 15 zenbakiaren autokonjugatua da; izan ere, diagrama diagonalarekiko simetrikoa da (ikusi 4.7. irudia).

$$\begin{array}{lllll} \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \\ \circ & \circ & \circ & & \\ \circ & \circ & & & \\ \circ & & & & \end{array}$$

4.7. irudia: Ferreren diagrama $15 = 5 + 4 + 3 + 2 + 1$ adibidearen konjugaturako.

4.4. Lehen motako Stirlingen zenbakiak

$x^{\overline{n}}$ garapena n mailako polinomioa da; izan ere:

$$x^{\overline{n}} = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ x(x+1)\cdots(x+n-1), & n \geq 1. \end{cases}$$

33. definizioa: *Izan bitez $k, n \in \mathbb{N}^*$; $x^{\overline{n}}$ garapenaren x^k−ren koefizientea* **lehen motako Stirlingen zenbakia** *deitzen da eta $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ ikurraren bidez adierazten da.*

Hortaz, honako berdintza hau dugu:

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k = \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} x^2 + \ldots + \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} x^n. \tag{4.2}$$

Beraz, x ezezagun batekiko koefiziente errealak dituzten polinomioen espazioan, $\left(\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\right)_{n,k\geq 0}$ matrizea $\{1, x^{\overline{1}}, x^{\overline{2}}, \ldots\}$ oinarri superkanonikotik $\{1, x, x^2, \ldots\}$ oinarri kanonikora pasatzen den oinarri-aldaketaren matrizea da.

Ikus ditzagun oinarrizko propietateak:

i) **Lehen motako Stirlingen zenbaki nuluak:** $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0, \quad \forall k > n.$

ii) **Lehen motako Stirlingen zenbaki unitarioak:** $n = 0$ bada, $1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

iii) $n \geq 1$ bada,

a) **Lehen motako Stirlingen zenbaki nuluak:** $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$

Froga: *Nahikoa da (4.2) ekuazioa $x = 0$ puntuan ebaluatzea.*

b) **Lehen motako Stirlingen zenbakien balioa x-ren koefizienterako:** $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$.

Froga: *Indukzioz froga daiteke.*

c) **Lehen motako Stirlingen zenbakien balioa x^{n-1}-en koefizienterako:** $\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \binom{n}{2}$.

Froga: *Berdintza hori froga daiteke*

$$\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = 1 + \cdots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$$

dela kontuan izanik.

d) **Lehen motako Stirlingen zenbaki unitarioak:** $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1.$

Froga: *Indukzioz froga daiteke x^n-ren koefizientea 1 dela.*

e) **Lehen motako Stirlingen zenbakien batura:** $n! = \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}$.

Froga: *Nahikoa da (4.2) ekuazioa $x = 1$ puntuan ebaluatzea.*

iv) $x^{\underline{n}}$ **deskonposaketa lehen motako Stirlingen zenbakien bidez:** $x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$.

Froga: $x^{\underline{n}} = (-1)^n (-x)^{\overline{n}}$ *eta* $(-x)^k = (-1)^k x^k$ *berdintzetatik ondorioztatzen da.*

Lehen motako Stirlingen zenbakien errepikapen erlazioa:

$$
\begin{cases}
\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{0} = 0, & \forall n \geq 1, \\
\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{n} = 1, & \forall n \geq 0, \\
\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k} = 0, & \forall k > n, \\
\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k} = \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n-1}{k-1} + (n-1)\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n-1}{k}, & \forall n \geq 1, \quad 1 \leq k \leq n-1.
\end{cases}
$$

Froga: *Errepikapen erlazioa* $x^{\overline{n}} = x^{\overline{n-1}}(x+n-1)$ *berdintzatik ondoriozta daiteke; izan ere:*

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k = x^{\overline{n}} = x^{\overline{n-1}}(x+n-1) &= \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} (n-1)x^k \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \right) x^k + x^n.
\end{aligned}
$$

Hortaz, nahikoa da erabiltzea $\{1, x, ..., x^n\}$ *multzoak oinarri bat osatzen duela.*

Oharra: Lehen motako Stirlingen zenbakien errepikapen erlazioa da erarik azkarrena Stirlingen zenbakiak kalkulatzeko (ikusi 4.8. irudia).

Lehen motako Stirlingen zenbakien Pascalen triangelua

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc|c}
 & & & & & & & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{0}{0} & & & & & & & & 0! \\
 & & & & & & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{1}{0} & & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{1}{1} & & & & & & & 1! \\
 & & & & & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{2}{0} & & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{2}{1} & & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{2}{2} & & & & & & 2! \\
 & & & & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{3}{0} & & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{3}{1} & & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{3}{2} & & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{3}{3} & & & & & 3! \\
 & & & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{4}{0} & & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{4}{1} & & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{4}{2} & & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{4}{3} & & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{4}{4} & & & & 4! \\
 & & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{5}{0} & & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{5}{1} & & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{5}{2} & & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{5}{3} & & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{5}{4} & & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{5}{5} & & & 5! \\
 & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{6}{0} & & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{6}{1} & & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{6}{2} & & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{6}{3} & & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{6}{4} & & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{6}{5} & & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{6}{6} & & 6! \\
\genfrac{[}{]}{0pt}{}{7}{0} & & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{7}{1} & & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{7}{2} & & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{7}{3} & & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{7}{4} & & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{7}{5} & & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{7}{6} & & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{7}{7} & 7!
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc|l}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & & 1 \\
 & & & & & & 0 & & 1 & & & & & & & 1 \\
 & & & & & 0 & & 1 & & 1 & & & & & & 2 \\
 & & & & 0 & & 2 & & 3 & & 1 & & & & & 6 \\
 & & & 0 & & 6 & & 11 & & 6 & & 1 & & & & 24 \\
 & & 0 & & 24 & & 50 & & 35 & & 10 & & 1 & & & 120 \\
 & 0 & & 120 & & 274 & & 225 & & 85 & & 15 & & 1 & & 720 \\
0 & & 720 & & 1764 & & 1624 & & 735 & & 175 & & 21 & & 1 & 5040
\end{array}
$$

4.8. irudia: Lehen motako Stirlingen zenbakien Pascalen triangelua, $n \leq 7$.

Esanahi konbinatorioa: permutazioak eta zikloak

$\{1, 2, \ldots, n\}$-ren edozein permutaziok ($[n]$tik $[n]$ra doan bijekzioak) ziklo bateraezinen biderkadura moduan adiera bakarreko deskonposizioa du (ikusi [15, II.6 atala] zikloei buruz gehiago jakiteko).

34. definizioa: *$s(n,k)$ balioa k zikloren biderkadura moduan adierazten diren $[n]$ multzoko permutazio kopurua da.*

4.9. teorema: *Honako errepikapen erlazio hau dugu:*

$$\begin{cases} s(n,0) = 0, & \forall n \geq 1, \\ s(n,n) = 1, & \forall n \geq 0, \\ s(n,k) = 0, & \forall k > n, \\ s(n,k) = s(n-1,k-1) + (n-1)s(n-1,k), & \forall n \geq 1, \ 1 \leq k \leq n-1. \end{cases}$$

Ondorioz, $s(n,k) = \left[{n \atop k}\right]$.

Froga: *$s(n,0) = 0$ da permutazioek gutxienez ziklo bat baitute. Gainera, $s(n,n) = 1$ da n zikloaren biderkadura duen funtzio bakarra identitatea baita. Errepikapen erlazioa frogatzeko partiketa bat kontsideratuko dugu:*

- *n bijekzioaren puntu finkoa bada, beste $n-1$ elementuekin $k-1$ ziklo osatu behar ditugu; hortaz, $s(n-1,k-1)$ aukera ditugu.*
- *n ez bada puntu finkoa, alde batetik $n-1$ elementuekin k zikloak sortu behar ditugu, eta kasu bakoitzeko, aukeratu behar da zein izango den n-ren irudia, ziklo horretan sartuz. Hortaz, printzipio biderkakorra erabiliz, $(n-1)s(n-1,k)$ aukera daude.*

Partiketa bat denez, errepikapen erlazioa ondorioztatzen da.

Bukatzeko, $s(n,k) = \left[{n \atop k}\right]$ dela indukzioa erabiliz ondoriozta daiteke; izan ere, errepikapen erlazio berdina dute.

Emaitza honekin bijekzio kopurua $n!$ izatearen froga alternatibo bat eman dezakegu (permutazio kopurua izateaz aparte):

4.10. korolarioa: *$n! = s(n,0) + s(n,1) + s(n,2) + \ldots + s(n,n)$ dugu.*

Froga: *Nahikoa da permutazio kopuru totala $n!$ dela erabiltzea.*

4.5. Bigarren motako Stirlingen zenbakiak

$x^{\underline{n}}$ garapena n. mailako polinomioa da; izan ere,

$$x^{\underline{n}} = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ x(x-1)\cdots(x-n+1), & n \geq 1. \end{cases}$$

35. definizioa: *Izan bitez $k, n \in \mathbb{N}^*$; $\{1, x^{\underline{1}}, x^{\underline{2}}, \ldots, x^{\underline{n}}\}$ oinarrian x^n garapenaren $x^{\underline{k}}$−ren koefizientea* **bigarren motako Stirlingen zenbakia** *deitzen da eta* $\left\{ {n \atop k} \right\}$ *ikurraren bidez adierazten da.*

Definizioz, honako berdintza hau dugu:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}} = \left\{ {n \atop 0} \right\} + \left\{ {n \atop 1} \right\} x^{\underline{1}} + \left\{ {n \atop 2} \right\} x^{\underline{2}} + \ldots + \left\{ {n \atop n} \right\} x^{\underline{n}} \tag{4.3}$$

Beraz, x ezezagun batekiko koefiziente errealak dituen polinomioen espazioan, $\left(\left\{ {n \atop k} \right\} \right)_{n,k \geq 0}$ matrizea $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ oinarri kanonikotik $\{1, x^{\underline{1}}, x^{\underline{2}}, \ldots, x^{\underline{n}}\}$ oinarri infrakanonikora pasatzen den oinarri-aldaketaren matrizea da.

Propietateak:

i) **Bigarren motako Stirlingen zenbaki nuluak:** $\left\{ {n \atop k} \right\} = 0, \quad \forall k > n.$

ii) **Bigarren motako Stirlingen zenbaki unitarioak:** $n = 0$ bada, $\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1.$

iii) $n \geq 1$ bada,

a) **Bigarren motako Stirlingen zenbaki nuluak:** $\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0.$

Froga: (4.3) *berdintza $x = 0$ balioan ebaluatuz froga daiteke.*

b) **Bigarren motako Stirlingen zenbaki unitarioak:** $\left\{ {n \atop 1} \right\} = 1.$

Froga: (4.3) *berdintza $x = 1$ balioan ebaluatuz froga daiteke.*

c) **Bigarren motako Stirlingen zenbaki balioa $x^{\underline{2}}$ koefizienterako:** $\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1.$

Froga: (4.3) *berdintza $x = 2$ balioan ebaluatuz froga daiteke.*

d) **Bigarren motako Stirlingen zenbaki balioa $x^{\underline{n-1}}$ koefizienterako:** $\left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2}.$

Froga: $0 = \left\{ {n \atop n-1} \right\} x^{n-1} - \left(\sum_{i=1}^{n-1} i \right) \left\{ {n \atop n} \right\} x^{n-1}$ *berdintzaren ondorioa da.*

e) **Bigarren motako Stirlingen zenbaki unitarioak:** $\left\{ {n \atop n} \right\} = 1.$

Froga: *Berdintza hori x^n bakarrik $x^{\underline{n}}$ adierazpenean agertzearen ondorioa da.*

iv) x^n **deskonposaketa bigarren motako Stirlingen zenbakien eta oinarri suprakanonikoaren bidez:** $x^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\overline{k}}$.

Froga: *$x^n = (-1)^n(-x)^n$ eta $(-x)^{\overline{k}} = (-1)^k x^{\underline{k}}$ berdintzaren ondorioa da.*

Bigarren motako Stirlingen zenbakien errepikapen erlazioa:

$$\begin{cases} \left\{ {n \atop 0} \right\} = 0, & \forall n \geq 1, \\ \left\{ {n \atop n} \right\} = 1, & \forall n \geq 0, \\ \left\{ {n \atop k} \right\} = 0, & \forall k > n, \\ \left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}, & \forall n \geq 1, \quad 1 \leq k \leq n-1. \end{cases}$$

Froga: *Errepikapen erlazioa frogatzeko honako berdintza hau erabiliko dugu:*

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}} = x^n = x^{n-1}x & \\ &= x \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ {n-1 \atop k} \right\} x^{\underline{k}} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ {n-1 \atop k} \right\} x^{\underline{k}}(x-k) + \sum_{k=0}^{n-1} k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} x^{\underline{k}} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ {n-1 \atop k} \right\} x^{\underline{k+1}} + \sum_{k=1}^{n-1} k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} x^{\underline{k}} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} \right) x^{\underline{k}} + x^{\underline{n}}. \end{aligned}$$

Hortaz, $\{1, x^{\underline{1}}, x^{\underline{2}}, \ldots, x^{\underline{n}}\}$ oinarri bat denez errepikapen erlazioa ondorioztatzen dugu. **Oharra:** Bigarren Stirlingen zenbakien errepikapen erlazioa da erarik azkarrena Stirlingen zenbakiak kalkulatzeko (ikusi 4.9. irudia).

Esanahi konbinatorioa: multzoen partiketak

36. definizioa: *Izan bedi Ω multzoa. Ω* **multzoaren partiketa** *ez-huts eta binaka bateraezinak direnen azpimultzoen bilduma da, horien bildura Ω da, hots, $\Omega-$ren elementu bakoitza zehazki behin azpimultzo batean dago. Gainera, $\mathcal{S}(n,k)$ k azpimultzotan $[n]$ multzoaren partiketak osatzen dituen familia da, eta $S(n,k) = c(\mathcal{S}(n,k))$.*

4.11. teorema: *Honako errepikapen erlazio hau dugu:*

$$\begin{cases} S(n,0)=0, & \forall n\geq 1,\\ S(n,n)=1, & \forall n\geq 0,\\ S(n,k)=0, & \forall k>n,\\ S(n,k)=S(n-1,k-1)+kS(n-1,k), & \forall n\geq 1,\ 1\leq k\leq n-1. \end{cases}$$

Ondorioz $S(n,k)=\left\{ {n \atop k} \right\}$.

Froga: *Oinarrizko kasuak nabariak dira. Errepikapen erlazioa frogatzeko partiketa bat egingo dugu:*

- *n elementua bakarrik dagoen partiketa kopurua $S(n-1,k-1)$ da; izan ere, beste $n-1$ elementuekin $k-1$ azpimultzo egin behar ditugu.*
- *n elementua bakarrik ez dagoen partiketa kopurua $kS(n-1,k)$ da. Izan ere, $n-1$ elementuekin k azpimultzo osa ditzakegu $S(n-1,k)$ eratan. Behin hori eginda, kasu bakoitzeko k azpimultzoen artean aukeratu bat n sartzeko, eta horretarako k aukera ditugu.*

Bukatzeko, $S(n,k)=\left\{ {n \atop k} \right\}$ dela ondoriozta daiteke indukzioa erabiliz, errepikapen erlazioa berdina baitu.

Ikus ditzagun Stirlingen zenbakien beste esanahi konbinatorioak:

1) n kutxa bereizezinetan, kutxa hutsik geratu gabe, k bola bereizgarri sartzeko era kopurua $\left\{ {k \atop n} \right\}$ da. Froga daiteke partiketen itzulpen bat dela: kutxak azpimultzoekin identifikatuta daude eta bolak zenbakiekin.

2) n zenbakidun kutxatan, kutxa hutsik geratu gabe, k bola bereizgarri sartzeko era kopurua $n!\left\{ {k \atop n} \right\}$ da. Printzipio biderkakorra erabiliz ondoriozta daiteke.

3) $[k]$tik $[n]$ra doazen aplikazio suprajektibo kopurua $n!\left\{ {k \atop n} \right\}$ da. Aurrekoaren itzulpen bat da.

Bigarren motako Stirlingen zenbakien identitate garrantzitsu batzuk

Jarraitzeko, ikus ditzagun honako identitate hauek, konbinatorioki frogatuko ditugunak:

$$1)\quad n!\left\{ {k \atop n} \right\}=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}(n-r)^k,$$

$$2)\quad n^k=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\left\{ {k \atop r} \right\}r!,$$

$$3)\quad \left\{ {n+1 \atop r+1} \right\}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left\{ {k \atop r} \right\}.$$

1. konbinazio-identitatea:
$$n!\left\{{k \atop n}\right\} = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}(n-r)^k.$$

Izan bedi $\Omega :=$ k bola bereizgarri n zenbakidun kutxatan sartzeko aukerak, $c(\Omega) = n^k$.
Izen bedi $A :=$ k bola bereizgarri n zenbakidun kutxatan sartzeko aukerak, kutxa hutsik geratu gabe, $c(A) = n!\left\{{k \atop n}\right\}$.
Har dezagun $\overline{A} = \Omega - A$ multzoaren sailkapena honako irizpide honi jarraituz: hutsik dagoen kutxa zehaztea. Horrela, defini ditzagun $H_i \subseteq \Omega$ azpimultzoak, $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$H_i := i.\text{ kutxa hutsik geratzea.}$$

Orduan, $\overline{A} = H_1 \cup H_2 \cup \ldots H_n$ denez,

$$c(A) = c(\overline{H_1 \cup H_2 \cup \ldots H_n}) = c(\Omega) - c(H_1 \cup H_2 \cup \ldots H_n).$$

Inklusio-esklusio printzipioa erabiliz,

$$c(A) = c(\Omega) -$$
$$[\sum_{i=1}^{n} c(H_i) - \sum_{1\le i<j\le n} c(H_i \cap H_j) + \sum_{1\le i<j<r\le n} c(H_i \cap H_j \cap H_r) \ldots + (-1)^{n-1}c(H_1 \cap H_2 \ldots \cap H_n)]$$

Kalkula ditzagun multzoen kardinalak:

$$\begin{aligned}
&c(\Omega) = n^k,\\
&c(H_i) = (n-1)^k,\\
&c(H_i \cap H_j) = (n-2)^k,\\
&c(H_i \cap H_j \cap H_k) = (n-3)^k,\\
&\vdots\\
&c(H_{i_1} \cap H_{i_2} \ldots \cap H_{i_r}) = (n-r)^k,\\
&\vdots\\
&c(H_1 \cap H_2 \ldots \cap H_n) = (n-n)^k.
\end{aligned}$$

Hortaz,

$$\begin{aligned}
c(A) &= n^k - n(n-1)^k + \binom{n}{2}(n-2)^k - \binom{n}{3}(n-3)^k + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}(n-n)^k\\
&= \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}(n-r)^k.
\end{aligned}$$

2. konbinazio-identitatea:
$$n^k = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\left\{{k \atop r}\right\}r!.$$

Izan bedi $\Omega :=$ k bola bereizgarri n zenbakidun kutxatan sartzeko aukerak, $c(\Omega) = n^k$.
Har dezagun Ω multzoaren sailkapena hutsik dauden kutxa kopuruarekiko. Horrela, defini ditzagun $A_i \subseteq \Omega$ azpimultzoak, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$:

$$A_i := \text{ zehatz-mehatz } i \text{ kutxa hutsik egotea.}$$

Orduan, $\{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$ partiketa ondo definitua dagoenez (izan ere, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$ eta $\cup_{j=0}^{n} A_j = \Omega$),

$$c(A) = c(A_0) + c(A_1) + \ldots + c(A_n).$$

Gainera, zuhaitz-diagrama eta esanahi konbinatoriagatik, $c(A_r) = c(S_1) \cdot c(S_2)$ non

S_1 :=hutsik dauden r kutxak hautatzea $\Rightarrow c(S_1) = \binom{n}{r}$,

S_2 := hutsik ez dauden gainontzeko $n-r$ kutxatan k bolak sartzea $\Rightarrow c(S_2) = \left\{ {k \atop n-r} \right\} (n-r)!$.

Beraz, $c(A_r) = c(S_1)c(S_2) = \binom{n}{r}\left\{ {k \atop n-r} \right\}(n-r)!$. Hau kontsideratuz, honako berdintza hauek ditugu:

$$\begin{aligned}
c(A_0) &= \left\{ {k \atop n} \right\} n! \binom{n}{0}, \\
c(A_1) &= \left\{ {k \atop n-1} \right\} (n-1)! \binom{n}{1}, \\
c(A_2) &= \left\{ {k \atop n-2} \right\} (n-2)! \binom{n}{2}, \\
&\vdots \\
c(A_r) &= \left\{ {k \atop n-r} \right\} (n-r)! \binom{n}{r}, \\
&\vdots \\
c(A_n) &= \left\{ {k \atop n-n} \right\} (n-n)! \binom{n}{n}.
\end{aligned}$$

Hortaz,

$$\begin{aligned}
c(A) &= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \left\{ {k \atop n-r} \right\} (n-r)! = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{n-r} \left\{ {k \atop n-r} \right\} (n-r)! \\
&= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \left\{ {k \atop r} \right\} r!.
\end{aligned}$$

3. konbinazio identitatea:

$$\left\{ {n+1 \atop r+1} \right\} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left\{ {k \atop r} \right\}.$$

Izan bedi $\Omega := n+1$ bola bereizgarri $r+1$ kutxa bereizezinetan sartzeko aukerak, kutxa hutsik geratu gabe, $c(\Omega) = \left\{ {n+1 \atop r+1} \right\}$.
Har dezagun Ω multzoaren sailkapena honako irizpide honi jarraituz: $(n+1)$. bola, hots, azken bola, bere kutxan dagoen bola kopurua zehaztea. Horrela, defini ditzagun $A_i \subseteq \Omega$ azpimultzoak, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$:

$$A_i := \ (n+1).\text{ bola zehazki } i \text{ bolekin egotea.}$$

Orduan, $\{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$ partiketa ondo definitua dagoenez (izan ere, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$ eta $\cup_{j=0}^{n} A_j = \Omega$),

$$c(A) = c(A_0) + c(A_1) + \ldots + c(A_n).$$

Zuhaitz-diagrama eta esanahi konbinatorioagatik, $c(A_k) = c(S_1)c(S_2)$ non:

$$S_1 := k \text{ bola hautatzea azken bolarekin kokatzeko} \qquad \Rightarrow c(S_1) = \binom{n}{k},$$

$$S_2 := \text{gainontzeko } n-k \text{ bola geratzen diren } r \text{ kutxatan sartzea} \qquad \Rightarrow c(S_2) = \left\{ {n-k \atop r} \right\}.$$

Beraz, $c(A_k) = c(S_1)c(S_2) = \binom{n}{k}\left\{ {n-k \atop r} \right\}$. Hau kontsideratuz, honako berdintza hauek ditugu:

$$\begin{aligned}
c(A_0) &= \binom{n}{0}\left\{ {n \atop r} \right\}, \\
c(A_1) &= \binom{n}{1}\left\{ {n-1 \atop r} \right\}, \\
&\vdots \\
c(A_k) &= \binom{n}{k}\left\{ {n-k \atop r} \right\}, \\
&\vdots \\
c(A_n) &= \binom{n}{n}\left\{ {n-n \atop r} \right\}.
\end{aligned}$$

Hortaz,

$$\begin{aligned}
c(A) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left\{ {n-k \atop r} \right\} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k}\left\{ {n-k \atop r} \right\} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left\{ {k \atop r} \right\}.
\end{aligned}$$

4.6. Multzoen partiketak eta Bellen zenbakiak

Eric Temple Bell (1883 Eskozia-1960 AEB) matematikariak eta idazleak bere karreran zehar konbinatorian lan egin zuen, eta, besteak beste, multzoen partiketen propietate kuantitatiboetan egin zuen lan (ikusi [22]).

37. definizioa: *$[n]$ multzoaren partiketa kopurua B_n* **Bellen zenbakia** *da.*

Hasteko, kontuan izanik Stirlingen bigarren motako zenbakiak $[n]$-ko k tamainako partiketa kopurua direla, k baliorako aukera guztiak kontsideratuz, honako berdintza hau froga dezakegu:

$$B_n = \left\{ {n \atop 0} \right\} + \cdots + \left\{ {n \atop n} \right\}.$$

Jarraitzeko, kalkula dezagun Bellen zenbakiek betetzen duten errepikapen-erlazioa:

$$\begin{cases} B_0 = 1 \\ B_{n+1} = \binom{n}{0} B_0 + \binom{n}{1} B_1 + \ldots + \binom{n}{n} B_n, \quad n \geq 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

Froga: *Sailkapen bat egingo dugu $n+1$ duen azpimultzoaren tamainaren arabera. Izan bedi $\{A_0, \ldots, A_n\}$ partiketak zein A_k familian $n+1$ elementua beste k elementuekin dagoen. Horrela, $c(A_k) = \binom{n}{k} B_{n-k}$. Hortaz,*

$$B_{n+1} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} B_{n-r} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{n-r} B_{n-r} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k,$$

errepikapen-erlazioa frogatuz.

Pascalen triangeluaren bidez, oso arin kalkula daitezke. Izan ere, B_{n+1} lortzeko:

$$\left(\binom{n}{0}, \ \binom{n}{1}, \ \ldots, \ \binom{n}{n} \right) \cdot (B_0, \ B_1, \ \ldots, \ B_n)^t.$$

Konboluzioaren adierazpena:

$$\left(\frac{B_{n+1}}{n!} \right)_{n \geq 0} = \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{B_i}{i!(n-i)!} \right)_{n \geq 0} = \left(\frac{B_k}{k!} \right)_{k \geq 0} * \left(\frac{1}{k!} \right)_{k \geq 0}.$$

4.12. teorema: *$(B_n)_{n\geq 0}$ segidaren* **funtzio sortzaile esponentziala** *honako hau da:*

$$B(x) = e^{e^x - 1}. \tag{4.5}$$

Froga: *$\frac{B_n}{n!} \leq 2^{n-1}$ dela kontuan izanik (ikusi (XI-14) ariketa), 0-ren ingurune batean funtzio sortzaile esponentziala ondo definituta dago. Gainera, (4.4) erabiliz:*

$$B'(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{B_{n+1}}{n!} x^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\left(\frac{B_k}{k!} \right) * \left(\frac{1}{k!} \right) \right)_n x^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{B_n}{n!} \cdot \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!} = B(x) e^x. \tag{4.6}$$

Hortaz, $\frac{B'(s)}{B(s)} = e^x$ *dugu. Bi funtzioak* $[0, x]$ *tartean integratuz, kontuan izanik* $B(0) = B_0 = 1$ *dela:*

$$\ln(B(x)) = e^x - 1,$$

dugu; hots, (4.5)*.*

Bigarren motako Stirlingen zenbakien Pascalen triangelua

$$\begin{array}{ccccccccccccccc|c}
&&&&&&&\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{0}{0}&&&&&&&& B_0 \\
&&&&&&\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{1}{0}&&\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{1}{1}&&&&&&& B_1 \\
&&&&&\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{2}{0}&&\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{2}{1}&&\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{2}{2}&&&&&& B_2 \\
&&&&\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{3}{0}&&\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{3}{1}&&\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{3}{2}&&\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{3}{3}&&&&& B_3 \\
&&&\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{4}{0}&&\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{4}{1}&&\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{4}{2}&&\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{4}{3}&&\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{4}{4}&&&& B_4 \\
&&\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{5}{0}&&\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{5}{1}&&\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{5}{2}&&\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{5}{3}&&\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{5}{4}&&\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{5}{5}&&& B_5 \\
&\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{6}{0}&&\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{6}{1}&&\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{6}{2}&&\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{6}{3}&&\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{6}{4}&&\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{6}{5}&&\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{6}{6}&& B_6 \\
\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{7}{0}&&\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{7}{1}&&\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{7}{2}&&\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{7}{3}&&\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{7}{4}&&\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{7}{5}&&\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{7}{6}&&\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{7}{7}& B_7
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc|c}
&&&&&&&1&&&&&&&& 1 \\
&&&&&&0&&1&&&&&&& 1 \\
&&&&&0&&1&&1&&&&&& 2 \\
&&&&0&&1&&3&&1&&&&& 5 \\
&&&0&&1&&7&&6&&1&&&& 15 \\
&&0&&1&&15&&25&&10&&1&&& 52 \\
&0&&1&&31&&90&&65&&15&&1&& 203 \\
0&&1&&63&&301&&350&&140&&21&&1& 848
\end{array}$$

4.9. irudia: Bigarren motako Stirlingen zenbakien triangelua eta Bellen zenbakiak, $n \leq 7$.

Stirling eta koefiziente binomialak: laburpena

Hurrengo 4.2. taulan, Stirlingen zenbakiak eta koefiziente binomialen oinarrizko propietateak laburbiltzen dira.

$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$	$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$	$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$
$\left[{n \atop k}\right] = \left[{n-1 \atop k-1}\right] + (n-1)\left[{n-1 \atop k}\right]$	$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right] x^k$	$n! = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right]$
$\left\{{n \atop k}\right\} = \left\{{n-1 \atop k-1}\right\} + k\left\{{n-1 \atop k}\right\}$	$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{{n \atop k}\right\} x^{\underline{k}}$	$B_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{{n \atop k}\right\}$

4.2. taula: Stirlingen eta koefiziente binomialen laburpena.

Kutxatan bolak sartzeko era kopuruen laburpen osoa

Honako 4.3. taulan, n kutxatan k bola sartzeko era kopuruen laburpena dugu; kutxak eta bolak bereizezintzat edo bereizgarritzat jotzen dira eta kutxa hutsik egon ahal edo ezin izatea; bestalde, $n = k$ denean kasu partikularra zehazten da.

k bola bereizgarririk?	n zenbakidun kutxarik?	Kutxa hutsik?	Sartzeko era kopurua	$n = k$ denean?	Non ikusi da?
Ez	Ez	Ezin	$p_k^{\langle n\rangle} - p_k^{\langle n-1\rangle}$	1	4.3.
○ ○ ○	□ □	Ahal	$p_k^{\langle n\rangle}$	p_n	4.3.
Ez	Bai	Ezin	$CR_n^{k-n} = \binom{k-1}{k-n} = \binom{k-1}{n-1} = \pi_k^{(n)}$	1	1.4., 4.3.
○ ○ ○	■ □	Ahal	$CR_n^k = \binom{n+k-1}{k}$	$\binom{2n-1}{n}$	1.4.
Bai	Ez	Ezin	$\left\{{k \atop n}\right\}$	1	4.5.
○ ● ●	□ □	Ahal	$\left\{{k \atop 1}\right\} + \ldots + \left\{{k \atop n}\right\}$	B_n	4.6., 4.5.
Bai	Bai	Ezin	$n!\left\{{k \atop n}\right\} = \sum_{\sum r_i = k,\ r_i \in \mathbb{N}} \binom{k}{r_1, r_2, \ldots, r_n}$	$n!$	1.4., 4.5.
○ ● ●	■ □	Ahal	$n^k = \sum_{\sum r_i = k,\ r_i \in \mathbb{N}^*} \binom{k}{r_1, r_2, \ldots, r_n}$	n^n	1.4., 2.3.

4.3. taula: n kutxatan k bola sartzeko era kopurua.

4.7. Zenbait zenbaki-familia garrantzitsuren ariketa-zerrendak

Bederatzigarren ariketa-zerrenda: Fibonacciren zenbakiak

Fibonacciren F_n zenbakiek propietate ugari dituzte, eta hainbat egilek asmatu eta ikertu dituzte. Propietate horietako batzuek ariketa-zerrenda hau osatzen dute:

(IX-1) (87 *o.*) (Lucas) Froga ezazu:

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1.$$

(IX-2) (87 *o.*) Froga ezazu:

$$nF_1 + (n-1)F_2 + (n-2)F_3 + \ldots + 2F_{n-1} + F_n = F_{n+4} - (n+3).$$

(IX-3) (87 *o.*) (Lucas) Froga ezazu:

$$F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}.$$

(IX-4) (87 *o.*) (Lucas) Froga ezazu:

$$F_2 + F_4 + F_6 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1.$$

(IX-5) (Lucas) Froga ezazu:

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \ldots + F_{2n-1} - F_{2n} = -F_{2n-1} + 1.$$

(IX-6) Froga ezazu:

$$nF_2 + (n-1)F_4 + \ldots + 2F_{2n-2} + F_{2n} = F_{2n+2} - (n+1).$$

(IX-7) Froga ezazu:

$$nF_1 + (n-1)F_3 + \ldots + 2F_{2n-3} + F_{2n-1} = F_{2n+1} - 1.$$

(IX-8) Froga ezazu:

$$F_3 + F_6 + F_9 + \ldots + F_{3n} = \frac{1}{2}(F_{3n+2} - 1).$$

(IX-9) (†) Sinplifika itzazu honako batura hauek:

$$F_1 + 2F_2 + \ldots + nF_n,$$

$$2F_1 + 3F_2 + \ldots + (n+1)F_n.$$

(IX-10) (Lucas) Froga ezazu:

$$\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots = F_{n+1}.$$

Zein da ez-nulua den azken batugaia ezkerraldeko atalean?

(IX-11) (87 o.) (*A*.9.)(Cassini eta Simson) Froga ezazu:

$$F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2 = \pm 1.$$

Zein dira + eta − zeinuei dagozkien n balioak?

(IX-12) Zein dira n balioak, non F_n bikoitia baita?

(IX-13) Froga ezazu:

$$F_n = 5F_{n-4} + 3F_{n-5},$$

eta ondoriozta ezazu n guztietarako F_{5n} balioa 5 zenbakiaren multiploa dela.

(IX-14) (87 o.) (*A*.9.) Aurreko formula erlazio-multzo baten adibidea baino ez da:

$$F_{n+3} = 2F_{n+1} + F_n,$$

$$F_{n+4} = 3F_{n+1} + 2F_n,$$

$$F_{n+5} = 5F_{n+1} + 3F_n,$$

$$\ldots$$

Froga ezazu honako formula orokor hau:

$$F_{n+m} = F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n,$$

eta ondoriozta ezazu n guztietarako F_{kn} balioa F_n zenbakiaren multiploa dela.

(IX-15) (87 o.) (*A*.9.) (Lucas eta Catalan) Froga ezazu:

$$F_{n-1}^2 + F_n^2 = F_{2n-1}.$$

(IX-16) (87 o.) (*A*.9.) (Lucas eta Catalan) Froga ezazu:

$$F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}.$$

(IX-17) (Lucas) Froga ezazu:

$$F_nF_{n+1} - F_{n-1}F_{n-2} = F_{2n-1}.$$

(IX-18) (Lucas) Froga ezazu:

$$F_n^3 + F_{n+1}^3 - F_{n-1}^3 = F_{3n}.$$

(IX-19) (Lucas) Froga ezazu:

$$F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_nF_{n+1}.$$

(IX-20) Froga ezazu:

$$F_1F_2 + F_2F_3 + F_3F_4 + \ldots + F_{2n-1}F_{2n} = F_{2n}^2.$$

(IX-21) Froga ezazu $n \geq 3$ guztietarako:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} < F_n < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}.$$

Hamargarren ariketa-zerrenda: zenbaki-partiketak

(X-1) Ferreren diagramak erabiliz, froga itzazu:

(a) (Euler) k zatitan edo zati gutxiagotan n-ren partiketa-kopurua eta zati bakoitza k baino txikiago edo berdin duen partiketa-kopurua berdinak dira. Gogoratu zenbaki hori $p_n^{\langle k \rangle}$ notazioarekin adierazten dela.

(b) (Euler) k zatitan, n-ren partiketa-kopurua eta atal handiena k duen partiketa-kopurua berdinak dira, bere balioa $p_n^{\langle k \rangle} - p_n^{\langle k-1 \rangle}$ izanik.

(c) (Sylvester) n-ren partiketa autokonjugatuaren kopurua eta atal guztiak desberdinak eta bakoitiak dituzten partiketa-kopurua berdinak dira.

(X-2) (A.10.) (†) (Andrews) Froga ezazu:

(a) $p_n^{\langle k \rangle} \leq (n+1)^k$.

(b) $p_n \leq p_{n-1} + p_n^{\langle k \rangle} + p_{n-k}$.

Aurreko ariketa lagungarri izan daiteke.

(X-3) Froga ezazu:

$$p_n^{\langle 2 \rangle} = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1.$$

(X-4) (Cayley) Ebatz ezazu aurreko ariketa honako formula hau erabiliz:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)} = \frac{1/2}{(1-x)^2} + \frac{1/2}{1-x^2}.$$

(X-5) Izan bedi $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

(a) Gara ezazu n partiketa ordenatuen zerrenda.

(b) Konproba itzazu $\pi_n^{(1)}, \ldots, \pi_n^{(n)}$ eta π_n balioak formula orokorrekiko.

(X-6) Izan bedi $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

(a) Gara ezazu n partiketa (desordenatuen) zerrenda.

(b) Kalkula itzazu $p_n^{\langle 1 \rangle}, \ldots, p_n^{\langle n \rangle}$ eta p_n balioak.

(c) $P^{\langle 1 \rangle}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^{\langle 1 \rangle} x^n$ funtzio sortzailea garatuz, konproba itzazu $p_n^{\langle 1 \rangle}$ balioak.

(d) $P^{\langle 2 \rangle}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^{\langle 2 \rangle} x^n$ funtzio sortzailea garatuz, konproba itzazu $p_n^{\langle 2 \rangle}$ balioak.

Hamaikagarren ariketa-zerrenda: Stirlingen eta Catalanen zenbakiak

(XI-1) $(0, 0)$tik (n, n)ra doazen eta diagonala gurutzatzen ez duten ibilbide *horizontal-bertikal*en kopurua $2C_n$ da, non C_n Catalanen n. zenbakia den.

(XI-2) $(0,0)$tik (n,n)ra doazen eta diagonala ukitzen ez duten (muturretan izan ezik) ibilbide *horizontal-bertikal*en kopurua honako hau da:

$$\frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}.$$

(XI-3) Froga ezazu

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k \geq k, \quad \forall k = 1, 2, \ldots, n-1, \qquad \text{eta} \qquad a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n$$

betetzen duten eta zenbaki arrunt ez-negatibo dituen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ segida-kopurua, S_n, Catalanen C_n zenbakia dela.

(XI-4) Izan bitez p eta q zenbaki arruntak, $p \geq q$. $(0,0)$tik (p,q)rainoko *gorabehera* zenbat ibilbide osa daitezke, OX ardatza gurutzatuz (hots, $y = -1$ zuzeneraino helduz)? (Laguntza: simetria-argudio bat erabiliz, $(0,-2)$tik (p,q)rainoko eta murrizketa gabeko *gorabehera* ibilbide batera itzul daiteke.)

(XI-5) (A.11.) Zinema-areto baten sarrerak 5 eurokoak dira. Sarrerak saltzen hastean, kutxan ez dago kanbiorik. Zinema-aretoaren aurrean, m pertsona daude, bakoitzak 5 euroko billetea duena, eta beste n pertsona, bakoitzak 10 euroko billetea duena, $n \leq m$. Zenbat eratan ordena daitezke $m+n$ pertsona ilara batean kutxa kanbiorik gabe gera ez dadin? Ariketa honen eta aurrekoaren artean erlaziorik ba al dago?

(XI-6) Froga ezazu kutxa hutsik geratu gabe, n zenbakidun kutxatan k bola bereizgarriak kokatzeko era kopurua honako hau dela:

$$n!\left\{ {k \atop n} \right\}.$$

(XI-7) Froga ezazu kutxaren bat hutsik geratzen utzita, n kutxa bereizezinetan k bola bereizgarriak kokatzeko era kopurua honako hau dela:

$$\left\{ {k \atop 1} \right\} + \left\{ {k \atop 2} \right\} + \ldots + \left\{ {k \atop n} \right\}.$$

(XI-8) Froga ezazu:

$$\sum \binom{k}{r_1, r_2, \ldots, r_n} = n!\left\{ {k \atop n} \right\},$$

non $r_1 + r_2 + \ldots + r_n = k$ betetzen duten zenbaki arrunt positiboen $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ n-koteek batura osatzen baitute.

(XI-9) Froga ezazu $n \geq 3$ guztietarako:

$$\left\{ {n \atop n-2} \right\} = \binom{n}{3} + 3\binom{n}{4} = \frac{1}{4}\binom{n}{3}(3n-5).$$

(XI-10) Froga ezazu $n \geq 4$ guztietarako:

$$\left\{ {n \atop n-3} \right\} = \binom{n}{4} + 10\binom{n}{5} + 15\binom{n}{6} = \frac{1}{2}\binom{n}{4}(n-2)(n-3).$$

(XI-11) (A.11.) (‡) Froga ezazu $n \geq 1$ guztietarako:

$$(e^x - 1)^n = \left\{ {n \atop n} \right\} \frac{n!}{n!} x^n + \left\{ {n+1 \atop n} \right\} \frac{n!}{(n+1)!} x^{n+1} + \dots .$$

(XI-12) (A.11.) (†) Froga ezazu $k \geq n \geq 1$ guztietarako:

$$n! \left\{ {k \atop n} \right\} = \binom{n}{n} n^k - \binom{n}{n-1} (n-1)^k + \dots + (-1)^n \binom{n}{0} (n-n)^k .$$

(XI-13) (A.11.) (‡) Froga ezazu $m \geq 1$ guztietarako:

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-mx)} = \left\{ {m \atop m} \right\} + \left\{ {m+1 \atop m} \right\} x + \left\{ {m+2 \atop m} \right\} x^2 + \dots$$

(XI-14) (‡) Froga ezazu $B_n \leq n! 2^{n-1}$ dela.

Oharra: zenbakizko soluzioak B.1. eranskinean daude.

GRAFO-TEORIA

5. gaia

Grafo-teoria

Kapitulu honetan grafo teoriaren sarrera egingo dugu. 5.1. atalean grafoen oinarrizko propietateak ikusiko ditugu, 5.2. atalean grafoetan egin daitezkeen paseo garrantzitsuenak, 5.3. atalean zuhaitzen propietateak, 5.4. atalean grafo planarren propietateak, 5.5. atalean grafoen kolorazioaren oinarrizko emaitzak eta 5.6. atalean gai honi dagokion ariketa zerrenda dugu.

5.1. Oinarrizko kontzeptuak

38. definizioa: *Izan bitez V multzo bat, eta E multzoa V-ren 2 tamainako azpimultzoz osaturiko multzoa. G* **grafo sinplea** *V eta E izeneko bi multzo finituren bidez definitzen da, eta $G = (V, E)$ adierazten da. V multzo ez-hutsaren osagaiei* **erpinak** *esaten zaie, eta E multzoaren osagaiei,* **ertzak**. *Askotan, notazioa sinplifikatzeko $u \in V$ eta $v \in V$ arteko ertza uv bezala adierazten da, $\{u, v\}$ notazioaren ordez. Gainera, grafo bat baino gehiago erabiltzen denean, $V(G)$ eta $E(G)$ notazioak G grafoaren erpinen eta ertzen multzoa adierazten du, hurrenez hurren.*

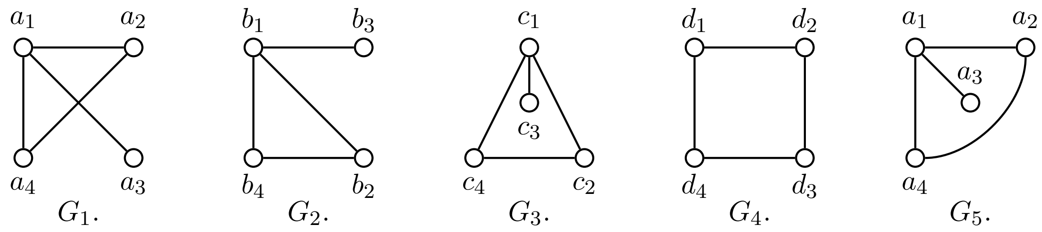
Ohikoa da grafo sinpleei grafo deitzea eta irudi baten bidez adieraztea. Erpin bakoitza puntu baten bidez eta ertz bakoitza lerro edo kurba baten bidez marrazten dira. Grafo berbera era askotan irudika daiteke, baina grafoa bakarra da.

39. definizioa: *Bi grafo $G_1 = (V_1, E_1)$ eta $G_2 = (V_2, E_2)$* **isomorfoak** *direla esaten da, $G_1 \simeq G_2$ adieraziz, baldin eta soilik baldin $f : V_1 \mapsto V_2$ funtzio bijektiboa existitzen bada erpinen arteko auzokidetasuna mantentzen duena, hots:*

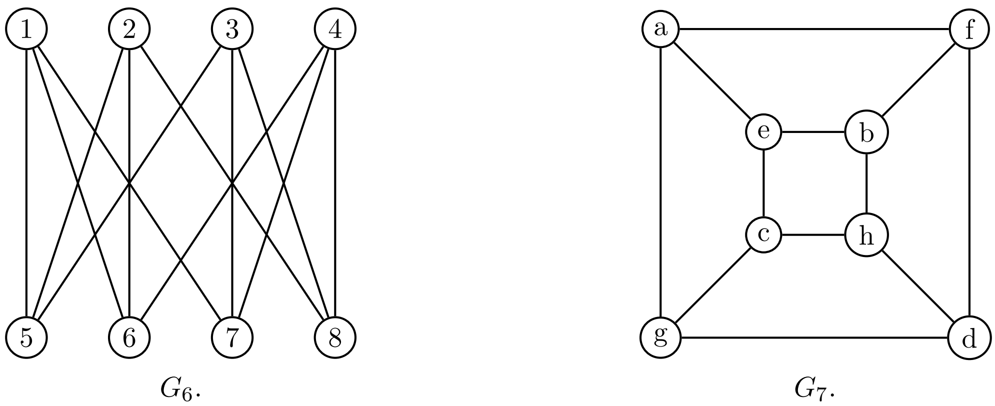
$$\forall u, v \in V_1, \quad uv \in E_1 \Leftrightarrow f(u)f(v) \in E_2.$$

Beste hitz batzuekin, bi grafo isomorfoak dira haien erpinen eta ertzen artean banan-banako korrespondentzia badago.

Adibidez, 5.1. irudian ikusten den bezala, G_1, G_2, G_3 eta G_5 grafoak isomorfoak dira. Gainera, G_1 eta G_5 grafo berbera dira, isomorfoak izateaz gain erpinen izena mantentzen direlako. Era berean, G_4 ez da isomorfoa besteekiko. Bestalde, 5.2. irudiko G_6 eta G_7 isomorfoak dira. Izan ere, $f(a) = 1, f(b) = 2, f(3) = c, f(4) = d, f(5) = e, f(6) = f, f(7) = g, f(8) = h$ bijekzioak nodoen arteko auzokidetasuna mantentzen duenez, $G_6 \simeq G_7$.



5.1. irudia: Zenbait graforen adierazpenak.



5.2. irudia: Grafo isomorfoak.

Beste grafo orokorragoak defini daitezke:

40. definizioa:

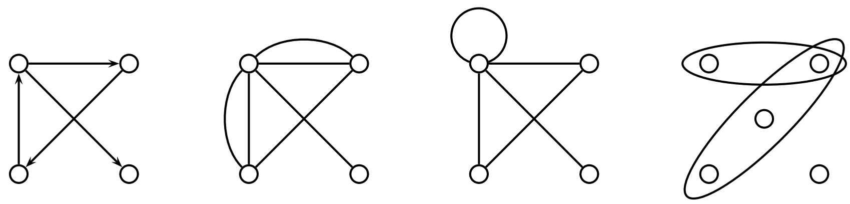
- *$E-$ren bikoteak ordenatuak badira, $E \subseteq V \times V$,* **grafo zuzenduak** *lortzen dira. Horrela, ertz bakoitzak bere orientazioa du.*
- *E multzoa multzo anizkoitza izatea onartuz gero, hots, ertz bat behin baino gehiagotan agertzen bada,* **ertz anizkoitza** *deitzen da eta bere maiztasuna* **ertzen anizkoiztasuna** *eta emaitzari* **multigrafoa edo grafo anizkoitza** *esaten zaio.*

- *Ertz baten bi erpinak berdinak badira; ertza* **begizta** *dela esaten da eta emaitzari* **seudografoa** *esaten zaio. Hemen, 2 tamainako azpimultzoen ordez V-ko elementuen 2 tamainako multimultzoak kontsideratzen dira.*

- *Ertzak erpinen azpimultzoak badira,* **hypergrafoak** *lortzen dira.*

- *V edo E multzo infinituak badira,* **grafo infinituak** *lortzen dira.*

Hauen adibideak 5.3. irudian aurki daitezke:



Zuzendua. Multigrafoa. Seudografoa. Hypergrafoa.

5.3. irudia: Grafoen hedadurak.

Ikasmaterial honetan grafo sinpleetan lan egingo dugu. Defini dezagun orain grafo baten osagaiak eta oinarrizko propietateak zeintzuk diren:

41. definizioa: *Izan bedi $G = (V, E)$ grafoa.*

- **Grafoaren maila** *V erpinen multzoaren kardinala da eta* **grafoaren tamaina** *bere E ertzen multzoaren kardinala da.*

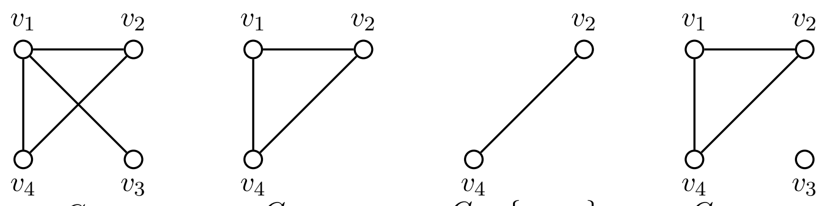
- *Ertz bat osatzen duten bi erpinei* **auzokideak** *esaten zaie eta ertzaren bidez* **konektatuta** *daudela esaten da. v erpinaren* **auzoa**, *$N(v)$, berarekiko auzokideak diren erpinen multzoa da: $N(v) = \{u \in V | uv \in E\}$.*

- *Ertz baten erpina eta erpina bera* **erasotzaileak edo intzidenteak** *direla esaten da. Erpin bati lotuta dagoen ertz kopurua* **erpinaren maila** *deitzen da, $d(v)$ adierazirik. Erpinaren maila bikoitia edo bakoitia denean, erpina bikoitia edo bakoitia dela esaten da, hurrenez hurren. Grafoaren maila minimoa eta maximoa $\delta(G) = \min_{v \in V(G)}\{d(v)\}$ eta $\Delta(G) = \max_{v \in V(G)}\{d(v)\}$ dira, hurrenez hurren.*

- *Izan bitez $G = (V, E)$ grafoa eta $v \in V$;* $\boldsymbol{G - v}$ *notazioak G-tik v erpina ezabatzea eta berari lotutako ertz erasotzaile guztiak adierazten du. Baldin eta V_1 erpinen multzoa bada,* $\boldsymbol{G - V_1}$ *notazioak $G = (V \setminus V_1, E \setminus \{uv : u \in V, v \in V_1\})$ grafoa adierazten du; hau da, grafoa non V_1en erpin guztiak eta ertz erasotzaileak ezabatu baitira.*

- *Izan bedi $uv \in E$;* $\boldsymbol{G - uv}$ *notazioak $(V, E \setminus \{uv\})$ grafoa adierazten du; hau da, G-tik soilik uv ertza ezabatzea (u eta v erpinak geratzen dira).*

Aurreko definizioaren adibideak 5.4. irudian aurki daitezke.



G. $G - v_3$. $G - \{v_1, v_3\}$. $G - v_1v_3$.

5.4. irudia: Grafoen kendurak.

5.1. teorema: *$G(V, E)$ grafoan, erpinen mailen batura ertzen kopuruaren bikoitza da:*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot c(E).$$

Froga: *Nabaria da; izan ere, ezkerreko adierazpenean ertz bakoitza birritan zenbatzen baita.*

5.2. korolarioa: *Edozein grafotan, erpin bakoitien kopurua bikoitia da.*

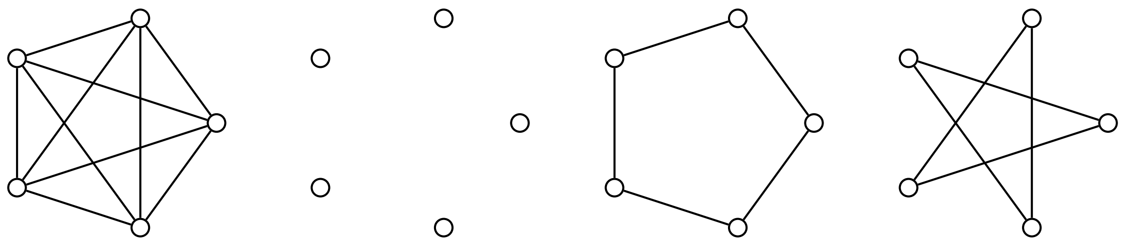
Defini ditzagun orain grafo familia batzuk:

42. definizioa: *Izan bedi $G = (V, E)$ grafoa.*

- *$\forall u, v \in V, uv \in E$ betetzen duen n mailako grafoa n erpineko* **grafo betea** *deitzen da, eta $K_n(V)$ notazioarekin adierazten da. Erpinen multzoa garrantzirik gabekoa edo ezaguna denean K_n idazten da. Notazioa ingelesetik dator: "complete" hitzetik ("C" hizkia grafo teorian zikloetarako erabiltzen da, aurrerago ikusiko dugun bezala).*
- *$E = \emptyset$ eta $c(V) = n$ bada, n erpineko* **grafo hutsa** *deitzen da eta $E_n(V)$ notazioarekin adierazten da. Erpinen multzoa garrantzirik gabekoa edo ezaguna denean E_n idazten da. Notazio ingelesetik dator, "empty" hitzetik.*
- *G-ren erpinen multzo bera duen eta G grafotik kanpoko ertz guztiak dituen grafoari Gren* **grafo osagarria** *esaten zaio, $\overline{G}$ adierazirik. Hau da: $\overline{G} = (V(G), E(K_n(V)) \setminus E(G))$.*
- *G* **erregularra** *da baldin eta erpin guztien maila bera bada. Grafo r-***erregularra** *deitzen da, baldin eta $d(v) = r$, $\forall v \in V$.*
- *$G_1 = (V_1, E_1)$ grafoari G-ren* **azpigrafoa** *esaten zaio, baldin eta $V_1 \subseteq V$ eta $E_1 \subseteq E$ betetzen bada. $G_1 \subseteq G$ adierazten da. Baldin eta $V_1 = V$, G_1 azpigrafo* **sortzailea** *dela esaten da.*
- *G grafoa* **zatibikoa** *dela esaten da baldin eta existitzen bada V-ren partiketa $\{V_1, V_2\}$ zein edozein $uw = e \in E$ bada, orduan edo $u \in V_1$ eta $w \in V_2$ edo $u \in V_2$ eta $w \in V_1$.* **Zatibiko grafo betea** *dugu, $K_{c(V_1),c(V_2)}(V_1, V_2)$ adierazirik, baldin eta V_1 eta V_2 azpimultzoen arteko*

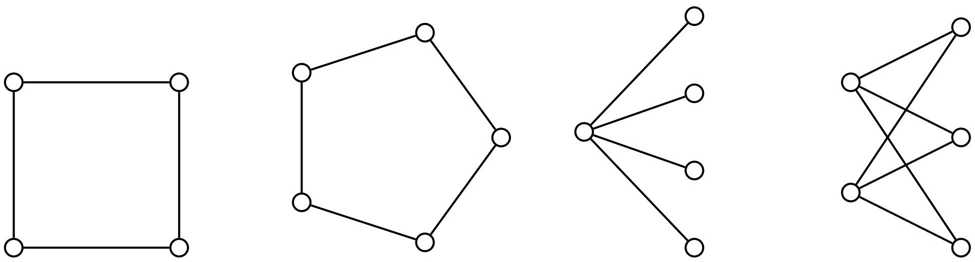
lotura posible guztiak agertzen badira, hots, $E = \{v_1v_2 | v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$*. Erpinen multzoa garrantzitsua ez denean* V_1 *eta* V_2 *ez dira idazten.*

Adibidez, K_n grafoa $(n-1)-$erregularra da eta E_n grafoa 0-erregularra da. Gainera, 5.5. irudian aurki daitezke grafo mota batzuen irudiak. Azkenik, 5.6. irudian agertzen dira grafo zatibikoak diren ala ez diren eta zatibiko grafo beteen adibideak:



K_5. E_5. G. $\overline{G}$.

5.5. irudia: Zenbait grafo mota.



Zatibikoa. Ez zatibikoa. $K_{1,4}$. $K_{2,3}$.

5.6. irudia: Grafoen zatibikotasuna.

5.2. Bideak eta ibilbideak

43. definizioa: *Izan bedi* $G = (V, E)$ *grafoa.*

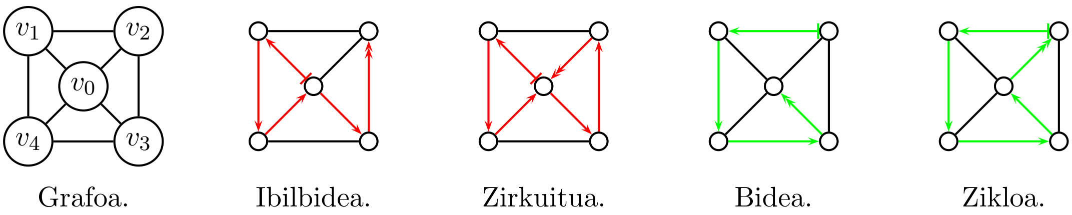
- $i = 1, 2, \ldots, k-1$ *guztietarako* $v_iv_{i+1} \in E$ *betetzen duen* $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k$ *erpinen segidari* $\boldsymbol{v_1}$ **eta** $\boldsymbol{v_k}$**ren arteko paseoa** *esaten zaio.* $v_1 = v_k$ *bada, orduan* ***paseoa itxia*** *dela esango dugu. Paseoaren* ***luzera*** *paseoaren ertz kopurua da, errepikapenak kontatuz. Ohikoa da paseoak idazteko orduan komak ez idaztea.*
- *Ertz guztiak desberdinak dituen paseoari* **ibilbidea** *esaten zaio. Ibilbidearen* **luzera** *ertzen kopurua da.*

- *Baldin eta ibilbideak* $v_1 = v_k$ *betetzen badu, hots, ibilbide itxia bada, orduan* $v_1, v_2, \ldots, v_k$ *erpinen segidari* **zirkuitua** *esaten zaio.*

- *Erpin guztiak desberdinak dituen paseoari* **bidea** *esaten zaio. Gainera,* $V = \{v_1, ..., v_n\}$ *bada, eta* $E = \{v_1v_2, v_2v_3, ..., v_{n-1}v_n\}$ *bada,* G *grafoa* P_n *deitzen da. Notazioa ingelesetik dator "path" hitzetik.*

- $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1$ *paseoa zein* $v_1, \ldots, v_n$ *bidea den* **zikloa** *esaten zaio. Erpin kopurua bikoitia (bakoitia) bada ziklo bikoitia (bakoitia) dela esaten da. Gainera,* $V = \{v_1, ..., v_n\}$ *bada, eta* $E = \{v_1v_2, v_2v_3, ..., v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$ *bada,* G *grafoa* C_n *deitzen da. Notazioa ingelesetik dator, "cycle" hitzetik.*

Izan bedi $G = (\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{v_0v_1, v_0v_2, v_0v_3, v_0v_4, v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_1\})$ (ikusi 5.7. irudia). v_1, v_0, v_4, v_1, v_0 4 luzerako paseo bat da, $v_0, v_1, v_4, v_0, v_3, v_2$ 5 luzerako ibilbide bat da, $v_0, v_1, v_4, v_0, v_3, v_2, v_0$ 6 luzerako zirkuitu bat da, v_2, v_1, v_4, v_3, v_0 4 luzerako bide bat da eta $v_2, v_1, v_4, v_3, v_0, v_2$ 5 luzerako ziklo bat da.



5.7. irudia: Ibilbide, zirkuitu, bide eta zikloen adibideak.

44. definizioa: *Grafo bat* **konexua** *dela esaten da baldin eta bi erpin, edozein, lotu ahal badira bide baten bidez. Grafo baten* ***osagai konexuak*** *dira azpigrafo konexu maximalak; hots,* H G*-ren osagai konexua da baldin eta soilik baldin* H *konexua bada eta edozein* $\tilde{H}$*-rako zein* $H \subseteq \tilde{H} \subseteq G$ *eta* $H \neq \tilde{H}$ *den, orduan* $\tilde{H}$ *ez da konexua.*

Zikloak erabil ditzakegu grafo zatibikoen karakterizazio bat emateko. Hori frogatzeko honako emaitza hau behar da:

5.3. lema: *Izan bedi* $G = (V, E)$ *grafoa* $v_1, \ldots, v_{2n+1}, v_1$ *paseoa duena, non* $n \in \mathbb{N}$*. Orduan* G*-k ziklo bakoiti bat du.*

Froga: *5.3. lema* n *balioarekiko indukzioz frogatuko dugu. Oinarrizko kasua,* $n = 1$*, hiru erpinak ezberdinak izan behar dira derrigorrez* $v_1 \neq v_2$*,* $v_2 \neq v_3$ *eta* $v_3 \neq v_1$ *baitugu. Hortaz,* $v_1v_2v_3v_1$ *bilatzen genuen zikloa da. Jarraitzeko, suposa dezagun frogatuta dugula* $1, 2, ..., n-1$ *balioetarako eta froga dezagun* n*-rako. Kontsidera dezagun* $v_1, \ldots, v_{2n+1}, v_1$ *paseoa. Bi aukera daude:*

- $v_i \neq v_j$ *edozein* $i, j \in [2n+1]$ *zein* $i \neq j$*. Kasu horretan* $v_1, \ldots, v_{2n+1}, v_1$ *da bilatzen genuen zikloa.*

- *Existitzen dira* $i, j \in [2n+1]$ *zein* $i < j$ *eta* $v_i = v_j$*.* $j - i$ *bikoitia bada, nahikoa da indukzio hipotesia erabiltzea* $v_1, \ldots, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_{2n+1}, v_1$ *paseo itxian,*

$$2n + 1 - (j - i) = 2\left(n - \frac{j-i}{2}\right) + 1$$

  tamainakoa dena. Aldiz, $j - i$ *bakoitia bada, nahikoa da indukzio hipotesia erabiltzea* $v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_j$ *paseo itxian,* $j - i$ *ertz dituena.*

5.4. teorema: *Izan bedi* G *gutxienez bi mailako grafoa.* G *zatibiko grafoa da baldin eta soilik baldin ziklo bakoitirik ez badu.*

Froga: $\Rightarrow$ *Izan bitez* $G = (V, E)$ *grafo zatibikoa eta* V *multzoa bi zatitan banatzen duten* V_1 *eta* V_2 *azpimultzoak. Izan bedi* C *edozein ziklo,* $v_1, v_2, \ldots, v_k, v_1$*. Baldin* $v_1 \in V_1$ *eta zatibikoa bada, orduan* $v_3, v_5, v_7, \ldots \in V_1$ *eta* $v_2, v_4, v_6, \ldots \in V_2$*. Hortaz,* $v_1 \in V_1$ *denez,* $v_k \in V_2$*; hau da,* k *bikoitia da. Beraz, edozein ziklo bikoitia da.*
$\Leftarrow$ *Izan bedi* $G = (V, E)$ *ziklo bakoiti gabeko grafoa (gutxienez bi mailakoa). Suposa dezagun konexua dela, bestela, osagaia bakoitzarekin frogatuko genuke. Izan ere, osagai bakoitza zatibikoa bada, grafoa ere bai. Izan bedi* $x \in V$ *erpina eta defini ditzagun:*

$$V_1 = \{v \in V | x \text{ eta } v\text{ren arteko bide laburrenaren luzera bakoitia da}\},$$

eta

$$V_2 = \{v \in V | x \text{ eta } v\text{ren arteko bide laburrenaren luzera bikoitia da}\}.$$

Argi dago $V_1 \cup V_2 = V$ *eta* $V_1 \cap V_2 = \emptyset$*. Suposa dezagun, absurdora eramanez,* $x_1, x_2 \in V_1$ *erpin auzokideak direla. Izan bedi* P_1 *bidea,* x *eta* x_1 *arteko bide laburrena eta* P_2 *bidea,* x_2 *eta* x *arteko biderik laburrena (*x *eta* x_2 *arteko biderik laburrena dena ertzen kontrako ordena hartuz). Orduan* x, P_1, x_1, x_2, P_2, x *paseoa dugu, ertz kopuru bakoitia duena (kontuan izan* P_1*-ek eta* P_2*-k ertz kopuru bakoiti dutela). Hortaz, 5.3. lema erabiliz,* G *grafoak ziklo bakoiti bat izango zuen, absurdo batera ailegatuz. Modu analogo batean froga daiteke edozein* $x_1, x_2 \in V_2$ *ez direla auzokide.*

Jarrai dezagun ibilbide berezi batzuk definitzen:

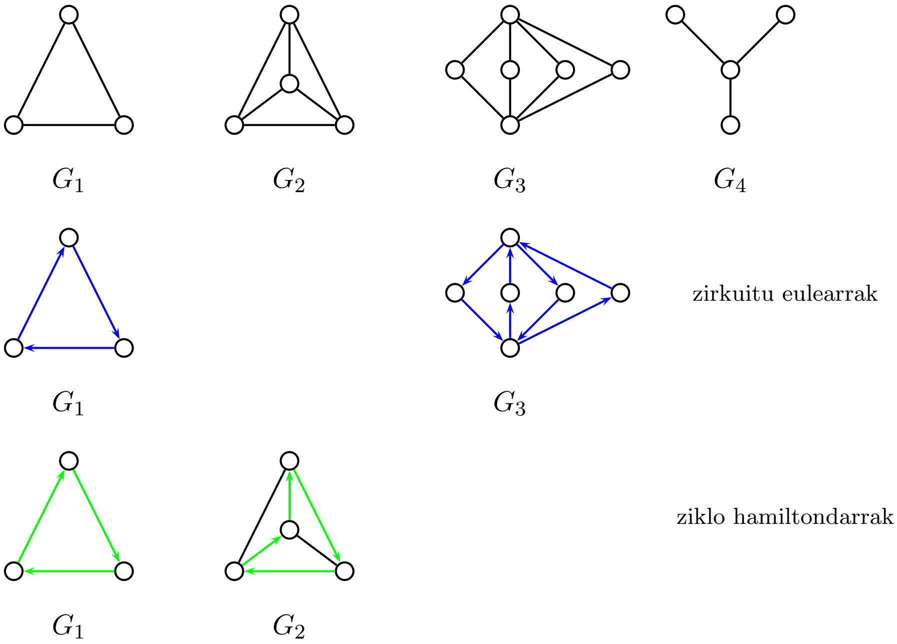
45. definizioa: *Izan bedi* G *grafoa.*

- *Ertz guztietatik zehatz-mehatz behin igarotzen den* G*-ren ibilbideari* **Eulerren ibilbidea** *edo* **ibilbide eulearra** *esaten zaio.*

- *Eulerren ibilbide itxia* **Eulerren zirkuitua** *edo* **zirkuitu eulearra** *deitzen da.*

- G*-k Eulerren zirkuitua badu,* **grafo eulearra** *deitzen zaio.*

- *Erpin guztietatik zehazki behin igarotzen den* G *grafoaren bideari* **Hamiltonen bidea** *edo* **bide hamiltondarra** *esaten zaio.*



5.8. irudia: Grafo eulearren eta hamiltondarren adibideak.

- *Hamiltonen bide itxia* **ziklo hamiltondarra** *deitzen da.*
- *G-k ziklo hamiltondarra badu,* **grafo hamiltondarra** *deitzen zaio.*

5.8. irudian aurkezten dira lau aukerak grafo eulearrak eta hamiltondarrak izateko. Izan ere, G_1 grafo eulearra eta hamiltondarra da; G_2 hamiltondarra da, baina ez eulearra; G_3 eulearra da, baina ez hamiltondarra; eta G_4 ez da eulearra, ez eta hamiltondarra ere.

5.5. teorema: *Grafo konexu batek Eulerren zirkuitua du baldin eta soilik baldin bere erpin guztiak bikoitiak badira.*

Froga: $\Rightarrow$ *Froga dezagun Eulerren zirkuitua duen edozein graforen erpinak bikoitiak direla. Izan bedi $v \in V$ eta n_v, Eulerren zirkuitua zeharkatzean v erpinetik igarotako aldi kopurua. Orduan, erraz froga daiteke erpinek $2n_v$ ertz intzidente dituztela, inplikazioa frogatuz.*

$\Leftarrow$ *Erpin bakoitirik ez duen edozein grafo konexuk Eulerren zirkuitua duela indukzioz froga daiteke grafoaren tamainarekiko. 0 ertz badaude, argi dago egia dela. Bestalde, izan bedi $G = (V, E)$ grafoa. Emaitza frogatutzat emango dugu G grafoa baino ertz gutxiago dituen edozein graforako. Izan bedi $v_1, \ldots, v_k$ ibilbide maximala; hau da, ibilbide handiagoaren baten partea ez den ibilbidea. v_k-ren maila bikoitia denez, halabeharrez $v_1 = v_k$. Izan bedi $Z = \{\{v_1, v_2, ..., v_k\}, \{v_1v_2, ..., v_{k-1}v_k\}\}$*

grafoa. Orduan, $G-Z$ osagai konexuen bildura da, eta osagai bakoitzean betetzen da erpin bakoitirik ez dagoela. Alde batetik, osagai konexu bakoitzean Z grafoko erpin bat dago gutxienez (bestela $G = E \cup Z$ ez litzateke konexua). Gainera, indukzio hipotesia erabiliz, osagai konexu bakoitzean existitzen da zirkuitu eulearra. Hortaz, Z eta zirkuitu eulearraren bildura kontsideratuz lor dezakegu G-ren zirkuitu eulearra (zikloaren osagaietako erpinetara ailegatzean egiten dugu osagai horrekiko zirkuitua), emaitza frogatuz.

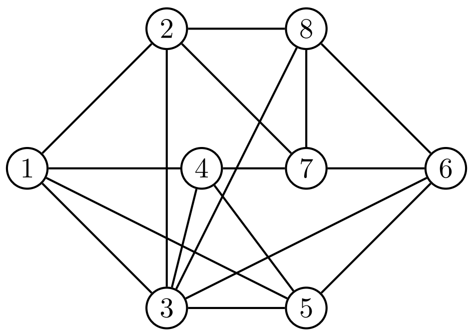
5.6. korolarioa: *Eulerren ibilbidea duen edozein grafok 0 edo 2 erpin bakoiti ditu.*

Froga: *Izan bedi $G = (V, E)$ Eulerren bidea duen grafoa. Hasierako eta bukaerako erpinak berdinak badira, Eulerren zirkuitua da; hortaz, nahikoa da 5.5. teorema erabiltzea. Ezberdinak badira, dei diezaiogun G grafoari eta u, v ibilbideko hasierako eta bukaerako erpinei. Kasu horretan, nahikoa da $G' = (V \cup \{w\}, E \cup \{vw, wu\})$ grafoarekin ondorioztatzea. G' zirkuitu eulear bat izango du; hortaz, erpin guztien maila bikoitia izango da. Ondorioz, G-ren erpin guztien maila bikoitia izango da, u eta v izan ezik, erpin bakoitiak direnak.*

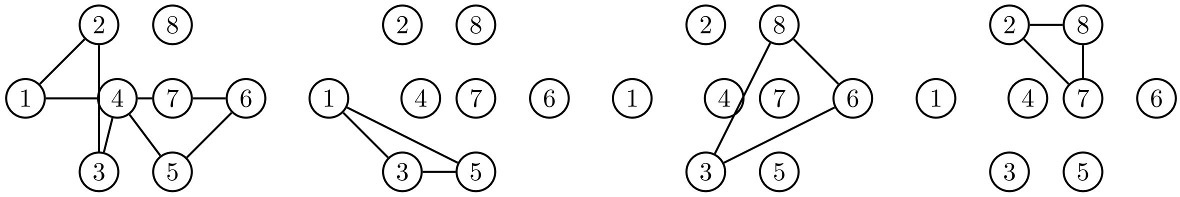
5.7. korolarioa: *Zehazki bi erpin bakoiti dituen edozein grafo konexuk Eulerren ibilbideren bat dauka.*

Froga: *Nahikoa da bi erpinak lotzea 5.6. korolarioan bezala eta 5.5. teorema erabiltzea.*

Adibidez, 5.9. irudiko grafoan, erpin guztiak bikoitiak direnez, zirkuitu eulearra existitzen da. Gainera, lor dezakegu era konstruktibo batean. Esate baterako, has gaitezke 1 nodoan ziklo bat egin arte (5.10. irudiko A zikloa), nodo guztiak bikoitiak direnez, nodo batean sartzean, beti dago ateratzeko aukera. Ertz gurutzaturik gabe geratzekotan, jarrai dezagun zikloak osatzen; beti da posible, nodoen bikoitasunagatik, ertzik gabe geratu arte. 5.10. irudian ikusten denez, lau ziklo horiek kontuan hartuz gero, ez dago ertz gehiagorik. Orain, posible da guztiak konektatzea baldintza berdinagatik eta grafo konexua delako. Azkenik, eulerren zirkuitua topatu dugu, esate baterako, A ziklotik hasita, 1 nodoan guztiak zeharkatuz 3ra arte; hortik, C zikloa 3tik 8ra; D zikloan, 8tik osorik; C zikloan, 8tik 6ra eta 6tik 3ra; B zikloan, 3tik osorik, eta A ziklora itzuliz, 3tik 1era ixten da.



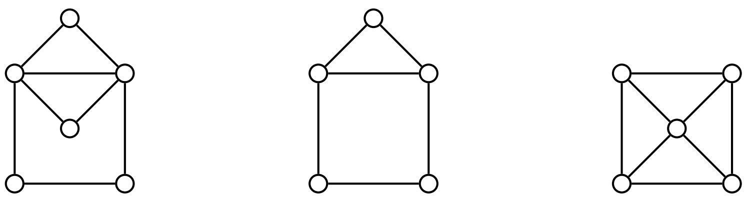
5.9. irudia: Erpin bikoitidun grafoa.



A zikloa. *B* zikloa. *C* zikloa. *D* zikloa.

5.10. irudia: 5.9. irudiaren ziklo batzuk.

Adibidez, *gutun-azal irekiak* Eulerren zirkuitua du, *etxetxoak* Eulerren ibilbidea du eta *gutun-azal itxiak* ez du Eulerren ibilbiderik ez zirkuiturik. Ikusi 5.11. irudia.



(*a*) (*b*) (*c*)

5.11. irudia: (a) gutun-azal irekia, (b) etxetxoa eta (c) gutun-azal itxia.

5.5. teoremaren aplikazio famatuena Königsbergeko 7 zubien problemak soluziorik ez duela da (ikusi 5.12. irudia).

5.12. irudia: Königsbergeko 7 zubiak. Iturriak: [33], [34], eta [35].

Zirkuitu hamiltondarrei dagokienez, askoz zailagoa da baldintza nahikoak eta beharrezkoak aurkitzea zeinetarako grafo hamiltondarra existitzen den. Era horretako problema bat dugu (XII-17) ariketan. Gainera, konputazioaren aldetik grafo bat hamiltondarra den edo ez aztertzen duen algoritmo efizienterik sortzea ere ez da nabaria (ikusi [4]).

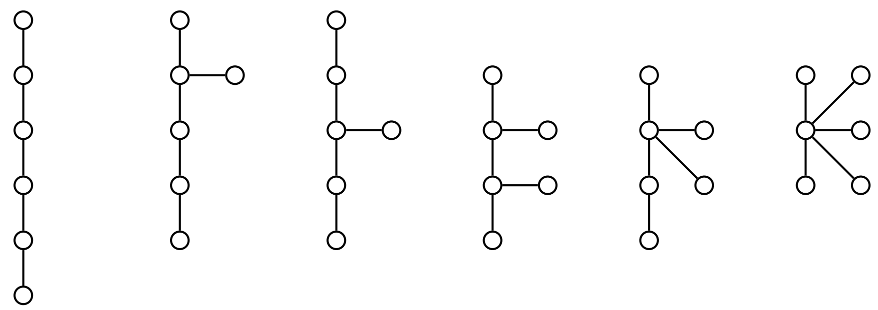
5.3. Zuhaitzak

Definizioa eta oinarrizko propietateak

Zuhaitzak hainbat arlotan erabiltzen diren grafo bereziak dira. Besteak beste, egituretan, sailkapen tekniketan, kodifikazioaren teorian eta optimizazio problemetan ditugu zuhaitzak. Zuhaitzak, grafo berezi gisa, ikasi zituen lehenengoa Gustav Robert Kirchoff (1824-1887) izan zen, elektrizitatearen fluxuan agertzen diren Ohm legeak zabaltzeko erabili zuen zuhaitzen kontzeptua.

46. definizioa: *Ziklo gabeko grafo konexua* **zuhaitza** *deitzen da.*

5.13. irudian $n = 6$ erpineko zuhaitzak ikus daitezke. Beste edozein zuhaitz, zuhaitz horietakoren bati isomorfoa da:



5.13. irudia: 6 erpineko zuhaitz ez-isomorfo posibleak.

5.8. lema: *Edozein zuhaitzetan, erpin bakarrekoan izan ezik, existitzen dira 1. mailako bi erpin.*

Froga: *Izan bedi T zuhaitzean dagoen bide maximala. T-k ziklorik ez duenez, hasierako eta bukaerako erpinen mailak* 1 *dira.*

5.9. teorema: *Izan bedi T grafoa n erpineko grafoa. Honako propietate hauek baliokideak dira:*

1) T zuhaitz bat da (grafo konexua ziklorik gabekoa).

2) T konexua da eta $n-1$ ertz ditu.

3) T ziklo gabekoa da eta $n-1$ ertz ditu.

Froga: $(1) \Rightarrow (2)$. *Suposa dezagun T zuhaitza dela. Frogatuko dugu T zuhaitzak $n-1$ ertz dituela n balioarekiko indukzioz. $n = 1$ kasua nabaria da. Suposatuko dugu egia dela $n-1$-erako eta frogatuko dugu n-rako. Izan bedi v erpina T-ren 1 mailako erpin bat (5.8. lema erabiliz badakigu existitzen dela). Kontsidera dezagun $T-v$. Konexutasuna eta ziklorik gabeko izatearen propietateak galdu ez direnez, $T-v$ zuhaitza da. Hortaz, $T-v$ zuhaitzak $n-2$ ertz ditu. Ondorioz, T grafoak guztira $n-1$ ertz ditu.*

$(2) \Rightarrow (3)$. *Froga dezagun T-k ez duela ziklorik. T-k ziklorik balu, ken genezake ertz bat eta jarraituko luke konexua izaten. Eragiketa hau behar bezain beste aldiz errepikatuz, T' azpi-grafoa lortuko genuke, konexua eta ziklo gabekoa. Hots, T' zuhaitza da. $(1) \Rightarrow (2)$ erabiliz, T' zuhaitzak $n-1$ ertz ditu. Hortaz, $T' = T$ eta T-k ez du ziklorik.*

$(3) \Rightarrow (1)$. *Nahikoa da frogatzea T konexua dela. Har dezagun T-ren osagai konexuak $T_1, \ldots, T_k$. Osagai konexu guztiak konexuak eta ziklorik gabekoak dira; hortaz, zuhaitzak dira. $(1) \Rightarrow (2)$ erabiliz*

$$c(E(T_i)) = c(V(T_i)) - 1, \quad \forall i = 1, \ldots, k$$

dugu. Horrenbestez,

$$c(E(T)) = \sum_{i=1}^{k} (c(V(T_i)) - 1) = n - k.$$

Baina, $c(E(T)) = n - 1$. Hortaz, $k = 1$ eta T konexua da.

Jarraitzeko, zuhaitzen honako propietate hau enuntziatzen dugu:

5.10. teorema: *Edozein zuhaitzen u eta v erpinen artean, bide bakarra dago.*

Ikusi (XII-20) ariketa.

Zuhaitz etiketatuak

Jarraitzeko, ikusiko dugun hurrengo galdera da zenbat n erpineko zuhaitz ezberdin dauden erpinen multzoa finkatzen dugunean:

5.11. teorema: *Izan bedi T zuhaitza zein $V(T) = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Orduan, $d(v_1) + \cdots + d(v_n) = 2n - 2$. Era berean, izan bedi $n \geq 2$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ erpinak eta $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{N}$ zein $d_1 + \cdots + d_n = 2n - 2$. Orduan, erpinen multzoa V den eta erpinen maila $d(v_i) = d_i$ betetzen dituzten zuhaitz-kopurua hau da:*

$$\binom{n-2}{d_1 - 1, d_2 - 1, \ldots, d_n - 1}.$$

Froga: *Izan bitez T zuhaitza zein $V(T) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Orduan, kontuan izanik 5.1. teorema* *eta n erpineko zuhaitzek $n-1$ ertz dituztela (ikusi 5.9. teorema):*

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2c(E) = 2n-2.$$

Jarraitzeko, ikusiko dugu V eta $(d_1,\ldots,d_n)$ finkatuz $\binom{n-2}{d_1-1,\ldots,d_n-1}$ zuhaitz daudela indukzioz n balioarekiko. Oinarrizko kasua, $n=2$, nabaria da. Alde batetik, $d_1+d_2=2$ eta $d_1,d_2\in\mathbb{N}$ bakarrik betetzen da $d_1=d_2=1$ denean. Hortaz, $\binom{0}{0,0}=\frac{0!}{0!0!}=1$. Gainera, behin $\{v_1,v_2\}$ finkatuz, zuhaitz bakar bat dago zein $d(v_1)=1$ eta $d(v_2)=1$ betetzen dituzte.

Froga dezagun orain indukziozko kasua. 5.8. erabiliz, existitzen da erpin bat 1 mailakoa. Suposa dezakegu, orokorpena galdu gabe, erpin hori v_n dela (bestela, nahikoa litzateke erpinen enumerazioa aldatzea). Orduan, zuhaitz kopurua kontatzeko, egingo dugu partiketa bat. Dei diezaiogun:

$$\mathcal{T} := \{T \text{ zuhaitza } : V(T)=\{v_1,\ldots,v_n\},\ d(v_i)=d_i\ \forall i=1,\ldots,n\}$$

eta, $j=1,\ldots,n-1$ balioetarako:

$$\mathcal{T}_j := \{T \text{ zuhaitza } : V(T)=\{v_1,\ldots,v_n\},\ d(v_i)=d_i\ \forall i=1,\ldots,n,\ \text{eta } v_jv_n\in E(T)\}.$$

Kontuan izanik $d(v_n)=1$ dela, $(\mathcal{T}_j)_{j=1,\ldots,n-1}$ familia $\mathcal{T}$-ren partiketa da. Gainera, argi dago bijekzio bat dagoela $\mathcal{T}_j$-ren eta

$$\mathcal{T}_j' = \{T \text{ zuhaitza } : V(T)=\{v_1,\ldots,v_{n-1}\},\ d(v_i)=d_i\ \forall i\in[n-1]\setminus j, d(v_j)=d_j-1\}$$

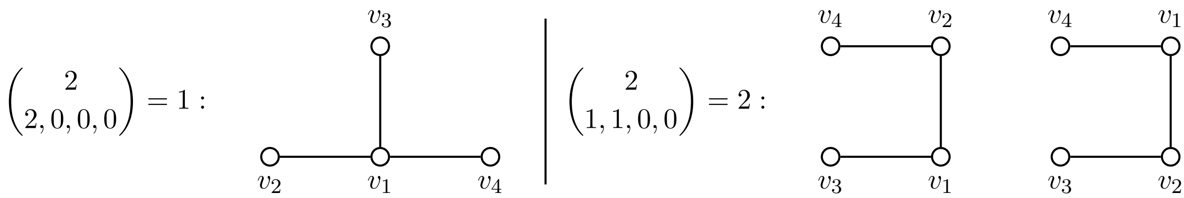
artean. Indukzio hipotesia erabiliz,

$$c(\mathcal{T}_j') = \binom{n-3}{d_1-1,\ldots,d_{j-1}-1,d_j-2,d_{j+1}-1,\ldots,d_{n-1}-1}$$

Hortaz, kontuan izanik $c(\mathcal{T}_j')=c(\mathcal{T}_j)$ dela, $(\mathcal{T}_j)_{j=1,\ldots,n-1}$ familia $\mathcal{T}$-ren partiketa bat dela, multinomioaren formula erabiliz (ikusi (vi). propietatea 2.3. atalean) eta $d_n=1$ dela erabiliz:

$$\begin{aligned} c(\mathcal{T}) = \sum_{j=1}^{n-1} c(\mathcal{T}_j') &= \sum_{j=1}^{n-1}\binom{n-3}{d_1-1,\ldots,d_{j-1}-1,d_j-2,d_{j+1}-1,\ldots,d_{n-1}-1} \\ &= \binom{n-2}{d_1-1,\ldots,d_{n-1}-1} = \binom{n-2}{d_1-1,\ldots,d_{n-1}-1,0} = \binom{n-2}{d_1-1,\ldots,d_n-1}. \end{aligned}$$

Adibidez, $n=4$ denean, $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ erpinen multzoa dugu. Baldin eta $d(v_1)=3$ eta $d(v_2)=d(v_3)=d(v_4)=1$ erpinen mailak badira, orduan zuhaitz bakarra dago. Baldin eta $d(v_1)=d(v_2)=2$ eta $d(v_3)=d(v_4)=1$ erpinen mailak badira, bi zuhaitz daude. Izan ere, 5.14. irudian ikusten denez, aukerak adierazita daude.



5.14. irudia: Zuhaitz etiketatuen kopurua eta koefiziente multinomialak.

5.12. teorema: **(Cayleyren formula, 1853)** *Izan bedi $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ erpinen multzoa. Orduan, n^{n-2} zuhaitz ezberdin daude zeinen erpinen multzoa V den.*

Froga: *Multinomioaren formula (ikusi 2.2. teorema) eta 5.11. teorema erabiliz zuhaitz ezberdinen kopurua honako hau da:*

$$\sum_{\substack{(d_1,\ldots,d_n)\in\mathbb{N}^n\\ d_1+\cdots+d_n=2n-2}} \binom{n-2}{d_1-1,\ldots,d_n-1} = \sum_{\substack{(d_1,\ldots,d_n)\in(\mathbb{N}^*)^n\\ d_1+\cdots+d_n=n-2}} \binom{n-2}{d_1,\ldots,d_n} 1^{d_1}\cdots 1^{d_n}$$
$$= (1+\cdot\cdot\cdot^{n}+1)^{n-2} = n^{n-2}.$$

Zuhaitz ordenatuak

Atal honetan aurkezten dugu erpinen arteko ordena bat definituta duen zuhaitza, adibidez, zuhaitz genealogikoa.

Horretarako, grafo batean bi erpinen arteko distantzia definituko dugu:

47. definizioa: *Izan bitez G grafo konexua eta $u, v \in V(G)$. $u-$ren eta $v-$ren arteko* **distantzia** *u-tik v-ra doan bide laburreneko ertzen kopurua da. Distantzia funtzioa D hizkiarekin adieraziko dugu.*

Definizio hori oso erabilgarria izango zaigu zuhaitzekin lan egiteko. Defini dezagun orain zuhaitz sustraidun eta ordenatuak zer diren:

48. definizioa: *Izan bedi $T = (V, E)$ zuhaitza eta $u \in V(T)$ erpina. Orduan, $(V(T), E(T), u)$ hirukoteari* **zuhaitz sustraiduna** *deitzen zaio eta $u \in V(T)$ erpinari zuhaitzaren* **sustraia**. *Zuhaitz sustraidunen kasuak erpin baten* ***ondorengoak*** *dira sustraiatik hurrunago dauden auzokideak. Era berean, erpin baten* ***gurasoa*** *da erpin horren auzokide bakarra zein sustraietik gertuago dagoen. Erpin bakoitzaren ondorengo guztiak* **neba-arrebak** *direla diogu. v erpin baten* **arbasoak** *dira sustraia eta erpina batzen diren bide bakarrean dauden erpin guztiak v izan ezik. Era berean v erpinaren* **oinordekoak** *v arbaso duten erpinak dira. Zuhaitz sustraiduna duen 1 mailako erpin kopuruari, sustraia izan ezik (sustraiaren maila bat denean),* **zuhaitzaren maila** *deritzogu. Sustraidun zuhaitza* **binarioa** *da, baldin eta erpin bakoitza bi edo zero oinordeko baditu.* Erpin batek guraso bakarra duela (XII-21) ariketan frogatuko da.

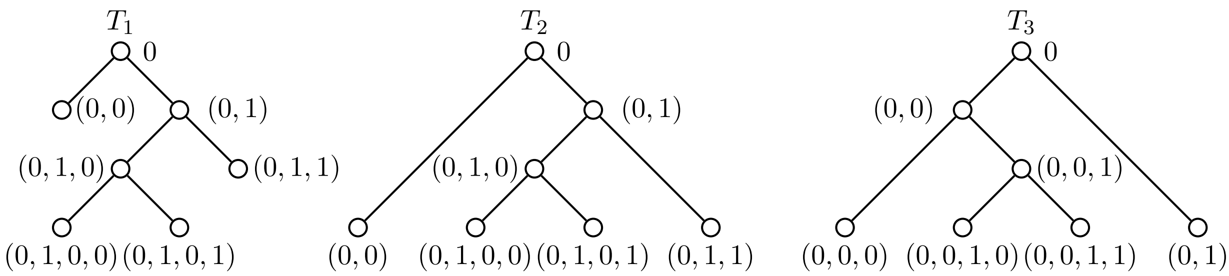
49. definizioa: *$T = (V(T), E(T), u, <_T)$ zuhaitz sustraidun* **ordenatua** *da baldin eta $(V(T), E(T), u)$ zuhaitz sustraiduna bada eta $<_T$ eragilea $V(T)$ multzoan definitutako ordena erlazio totala den zein $v <_T w$ bada, v erpinaren edozein oinordeko w erpinaren edozein oinordeko baino hertsiki txikiagoa da. Zuhaitzak irudikatzeko orduan erabiliko dugun irizpidea da erpin baten edozein bi v, w oinordetarako $v < w$ betetzen dela baldin eta soilik baldin v erpina w erpinaren ezkerrean badago.*

Zuhaitz sustraidun ordenatuak erabil daitezke, adibidez, tronurako ondorengotza erreala irudikatzeko.

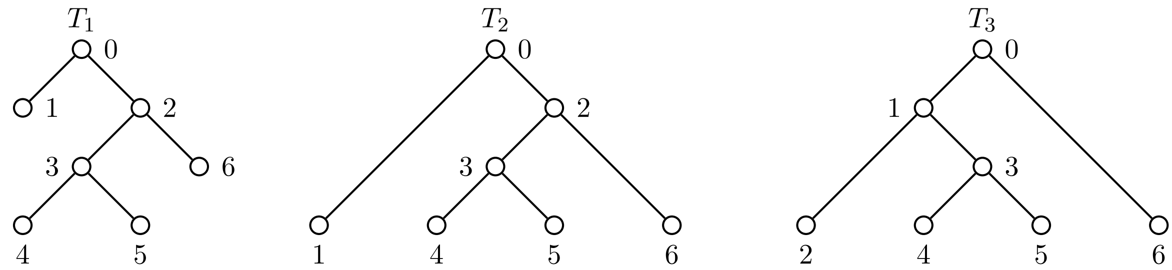
Zuhaitz ordenatuetan lan egiteko orduan gomendagarria da sustraiari 0 deitzea, eta orokorrean, erpin bati (p, i) deitzea, non p gurasoaren izena eta i gurasoaren oinordekoen artean okupatzen duen posizioa diren. Horren adibide bat ikus daiteke 5.15. irudian. Hori dela eta, ordena lexikografikoa erabiliz erpin guztiak ordena daitezke. Ohikoa da kontaketa zerotik hastea zuhaitz horiek asko aplikatzen baitira informatika arloan, adibidez Pythonen programatzean (ikusi [42]). Ordena erlazio horrekin defini dezakegu zuhaitz baliokideak zer diren:

50. definizioa: *Bi zuhaitz ordenatu T eta $\tilde{T}$* **baliokideak** *dira baldin eta soilik baldin existitzen bada f isomorfismo bat T zuhaitzetik $\tilde{T}$ zuhaitzera zein erpinen arteko ordena gordetzen duena; hots, zein edozein $v, w \in V(T)$ erpinetarako $v <_T w$ dugu baldin eta soilik baldin $f(v) <_{\tilde{T}} f(w)$ badugu.*

Adibidez, 5.15. irudian, zuhaitz sustraidun binarioak ditugu, guztiak 4 mailakoak. Zuhaitz ordenatuak aintzat hartzeagatik, T_1 eta T_2 baliokideak dira, baina ez dira baliokideak T_3 zuhaitzarekiko. Izan ere, T_1 zuhaitzaren sustraiaren ondorengo handienak, 2. erpinak, 4 oinordeko ditu eta T_3 zuhaitzaren sustraiaren ondorengo handienak, 6. erpinak, ez du oinordekorik.



5.15. irudia: Zuhaitz sustraidun binario ordenatuak.



5.16. irudia: Zuhaitz sustraidun binario ordenatuak: erpinen ordena.

5.13. teorema: *n mailako zuhaitz sustraidun binario ordenatu ez-baliokide kopurua Catalanen $(n-1)$. zenbakia da, hots, C_{n-1},*

$$\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

Froga: *Dei diezaiogun $v_1, \ldots, v_n$ bat mailako erpinei, zein $v_1 < v_2 < \cdots < v_n$. Zuhaitzak eraikitzeko bi zuhaitz sustraidunen arteko biderkadura definituko dugu: $v * w$ notazioak esan nahi du v eta w sustraiak duten zuhaitzak lotzen ditugula $v * w$* **zuhaitz biderkadura** *izendatuz. Gainera, ordena erlazio partzial bat badugu $x \geq v$ edo $x \geq w$ betetzen duen edozein erpinerako $x > v*w$ definituko dugu. Bestela, $x < v*w$ izango dugu. Orduan zuhaitz ez-baliokideen multzo bat osa dezakegu $v_1 v_2 \cdots v_n$ biderketa egiteko era kopuruarekiko erpinen ordena aldatu gabe, bakarrik parentesiak jarriz, eta beste edozein zuhaitz multzo horietako zuhaitz baten baliokidea da. Behin hori frogatuta, nahikoa da Catalanen zenbakien parentesien interpretazioa erabiltzea (ikusi 4.2. atala). Froga zati txikiagoetan banatuko dugu: hasteko, erpin guztiak biderkatzean zuhaitz ordenatua lortzen dugula; jarraitzeko, eraiki ditugun edozein bi zuhaitz ez direla baliokideak frogatuko dugu; eta bukatzeko, beste edozein zuhaitz binario ordenatu eraiki dugun zuhaitz baten baliokidea dela frogatuko dugu.*

1) ***Eraiki dugun zuhaitza ordenatua da.*** *Indukzioz frogatuko dugu erpin biderkadura bat egitean ordena erlazio totala mantentzen dela. Zehatz-mehatz, frogatuko dugu i biderketa egin eta gero:*

   (a) *$T^i_1, \ldots, T^i_{n-i}$ zuhaitz sustraidun ordenatuak ditugu $u_1, \ldots, u_{n-i}$ sustraiekin, hurrenez hurren.*

   (b) *Edozein $j < k$-rako $v \in T^i_j$ eta $w \in T^i_k$ inklusioek $v < w$ inplikatzen dute.*

   (c) *T^i_j bat mailako erpinak $v_{l^i_j}, v_{l^i_j+1}, \cdots, v_{l^i_j+k}$ motakoak dira; hots, ondoz ondoko erpinen biderkadura dira. Gainera, u_j erpina $v_{l^i_j}, v_{l^i_j+1}, \cdots, v_{l^i_j+k^i_j}$ arteko biderkadura bat da.*

   Oinarrizko kasuan $v_1 < \cdots < v_n$ dugu; hortaz, hiru propietateak betetzen direla nabaria da. Bestalde, suposatuko dugu i. biderketarako betetzen dela ($i \in \{0, \ldots, n-1\}$rako) eta *frogatuko dugu $i+1$ baliorako. Biderketa bat egitean* (1c) *hipotesiarengatik, esan nahi du bi zuhaitz kontsekutiboen sustraiak ari garela biderkatzen. Dei diezaiegun T^i_m eta T^i_{m+1} zuhaitz horiei. Orain ikusiko dugu* (1a), (1b) *eta* (1c) *betetzen direla $i+1$ baliorako:*

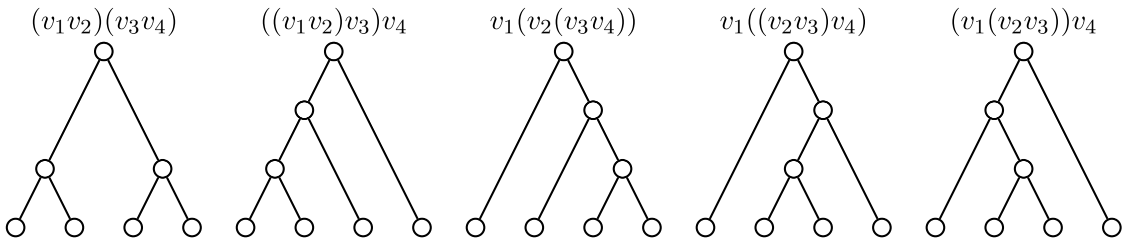
- *Froga dezagun* (1a) *beteko dela biderkadura egin eta gero. Argi dago $T^{i+1}_j = T^i_j$ edozein $j = 1, \ldots, m-1$ baliorako eta $T^{i+1}_j = T^i_{j+1}$ edozein $j = m+1, \ldots, l-i-1$ baliorako. Hortaz, bakarrik ikusi behar da ea T^{i+1}_j zuhaitz ordenatua den. Biderkaduraren definizioagatik, sustraia zuhaitzaren elementuak baino txikiagoa da. Gainera, zuhaitzaren beste erpinak ordenatuta daude, eta sustrai handiagoaren oinordekoak sustrai txikiaren oinordekoak baino txikiagoa dira (ikusi* (1b)*). Hortaz, T^{i+1}_m ere zuhaitz ordenatua da.*
- (1b) *indukzio hipotesiarekin eta sustrai berria ordena mantentzen duela erabiliz froga daiteke.*
- (1c) *bi zuhaitz kontsekutiboen sustraiak biderkatu dugula kontuan izanik froga daiteke.*

Hortaz, indukzioz frogatu dugun emaitza $i = n-1$ kasuan erabiliz zuhaitz ordenatua dugula frogatu dugu.

2) ***Eraiki ditugun edozein bi zuhaitz ez dira baliokideak.*** *Izan bedi T eta $\tilde{T}$ aurreko prozesuarekin lortutako bi zuhaitz. Froga dezagun baliokideak badira berdinak direla; hots, biderketa berberak egin direla eta ordena inporta ez denean, ezkerretik eskuinera egiten direnean. Horretarako, indukzioz froga dezakegu ordena mantentzen duen isomorfismo bakarra identitatea dela $T^i_1 = \tilde{T}^i_1, \ldots, T^i_{n-i} = \tilde{T}^i_{n-i}$ berdintzak izan arte (irakurlearentzat uzten da). Hortaz, baliokideak diren bi zuhaitz berdinak dira.*

3) ***Beste edozein zuhaitz binario ordenatu eraiki dugun zuhaitz baten baliokidea da*** *Indukzioz froga daiteke* 1 *mailako erpinetan hasiz. Pausoz pauso isomorfismo bat eraiki daiteke, pauso bakoitzean biderketa dauden erpinen gurasoren bat gehituz. Frogaren xehetasunak irakurleak egiteko uzten dira.*

Adibidez, 4 mailako eta ordenatutako sustraidun zuhaitz binarioen kopurua $C_3 = 5$ da, eta 5.17. irudian, bosten adierazpenak agertzen dira. Hamabigarren ariketa-zerrendako (XII-7) ariketan hori lantzen da.



5.17. irudia: 4 mailako eta ordenatutako sustraidun zuhaitz binarioak.

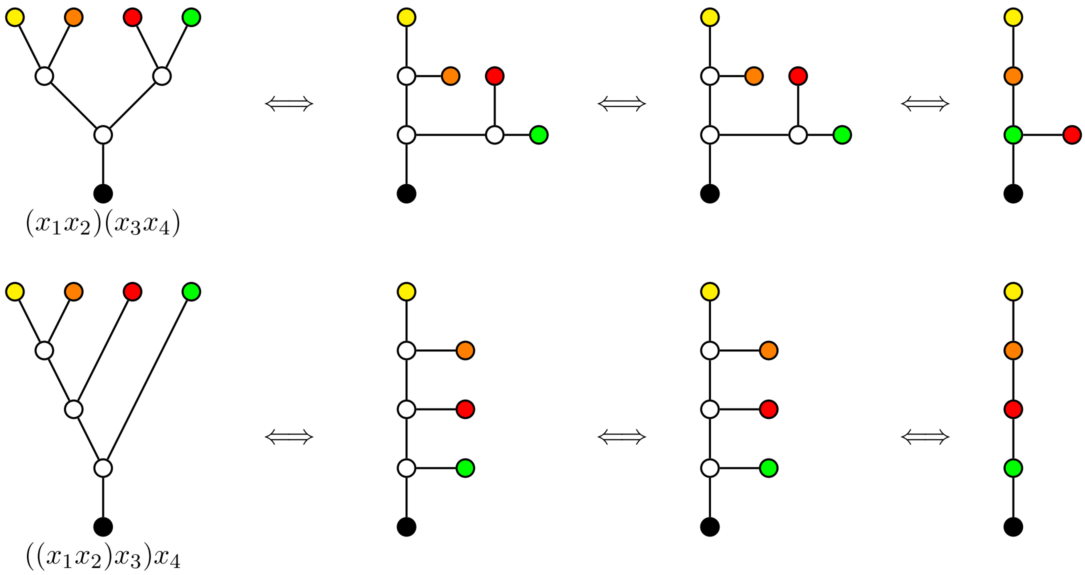
5.14. teorema: *n erpineko eta ordenatutako zuhaitzen sustraidun ez baliokide kopurua Catalanen $(n-1)$. zenbakia da, hots, C_{n-1},*

$$\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

Froga: *Emaitza hau frogatzeko erabiliko dugu zuhaitz ordenatuen kodifikazioa zuhaitz binarioetan. Kodifikazio hori [8] liburuan azalduta dago.*

Frogan erabiltzen den zuhaitz ordenatuen kodifikazioa programazio hizkuntza batzuek erabiltzen dute, adibidez Lisp (ikusi [27]).

5.14. teoremaren froga n erpineko eta ordenatutako sustraidun zuhaitzen multzoaren eta $n-1$ mailako eta ordenatutako sustraidun zuhaitz hirubaliokoen multzoaren arteko bijekzioan oinarritua dago; 5.18. irudian, bi adibide ikus daitezke $n=5$ kasurako:



5.18. irudia: 4 mailako hirubalioko eta 5 erpineko ordenatutako sustraidun zuhaitzen arteko baliokidetasunaren bi adibide.

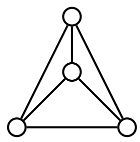
Ikusi hamabigarren ariketa-zerrendako (XII-22) ariketa gai honetan sakontzeko.

5.4. Planotasuna

Oinarrizko emaitzak

51. definizioa: *G grafoa planoan irudika badaiteke ertzak soilik erpinetan ukitzearen murrizketarekin,* **planarra** *dela esaten da. Grafoaren murrizketa hori betetzen duen edozein adierazpen,* ***irudikapen planarra*** *dela deritzogu. G grafoaren adierazpen planarraren* **eskualdea** *planoaren atal handiena da, non grafoa ukitzen ez duen kurba baten bidez edozein bi puntu lotu baitaitezke. Sortzen den* **eskualdeen multzoa***ri F esaten zaio. R* **eskualdearen maila**, $\boldsymbol{b(R)}$, *bera mugatzen duten ertzen kopurua da.*

Adibidez, K_4 planarra da (ikusi 5.19. irudia); baina, atal honetan ikusiko dugunez, K_5 ez da planarra.



5.19. irudia: K_4-ren adierazpen planarra.

5.15. teorema: (Eulerren formula) *Izan bedi $G = (V, E)$ grafoa konexua eta planarra. G-ren irudikapen planarraren eskualdeen multzoa F bada, honako hau betetzen da:*

$$c(V) - c(E) + c(F) = 2.$$

Froga: *Emaitza hau indukzioz frogatzen da ertz kopuruarekiko. Oinarrizko kasua, zuhaitza denean, betetzen da; izan ere, $c(E) = c(V) - 1$ eta $c(F) = 1$ (ikusi 5.9. teorema). Jarraitzeko, indukziozko kasua frogatuko dugu. Suposatuko dugu emaitza frogatu dugula n erpinetako grafoentzat, eta $n + 1$ grafoentzat frogatuko dugu. Izan bedi $G = (V, E)$ zein $c(E) = n + 1$. G zuhaitza bada oinarrizko kasua frogatuta dago. G zuhaitza ez bada, ziklo bat du. Izan bedi e ziklo horretako edozein ertz, eta $G' = G - e$. Orduan:*

- *G' konexua da.*
- *$c(E(G')) = c(E(G)) - 1$.*
- *$c(V(G')) = c(V(G))$, ez baitugu erpinik kendu.*
- *$c(F(G')) = c(F(G)) - 1$, ertza kentzean bi eskualde fusionatu baitira.*

Hortaz, indukzio hipotesia erabiliz:

$$c(V(G')) - c(E(G')) + c(F(G')) = c(V(G)) - c(E(G)) + c(F(G)) = 2.$$

5.16. korolarioa: *Grafo planar baten adierazpen guztiek eskualde kopurua berbera dute.*

5.17. teorema: *Izan bedi $n \geq 3$. n erpineko $G = (V, E)$ grafo konexu planarra badugu, orduan $c(E) \leq 3n-6$. Baldin eta $c(E) = 3n-6$, orduan eskualde guztien maila 3 da (hau da, triangeluak).*

Froga:

(i) *Ziklo gabekoa bada, zuhaitza izango da. Orduan, $c(E) = n - 1 \leq 3n - 6 \Leftrightarrow n \geq 3$.*

(ii) *Bestalde, zuhaitza ez bada, zikloren bat izango du eta eskualde bakoitzak gutxienez 3 ertz izango ditu, $\forall R, b(R) \geq 3$. Beraz, $\sum_{R\in F} b(R) \geq 3c(F)$. Eta ertz bakoitza gehienez 2 eskualdetan dagoenez, $\sum_{R\in F} b(R) \leq 2c(E)$. Hau da,*

$$3c(F) \leq \sum_{R\in F} b(R) \leq 2c(E).$$

Gainera, Eulerren Teoremagatik, $c(F) = 2 - c(V) + c(E)$. Orduan,

$$3(2 - c(V) + c(E)) \leq 2c(E) \Leftrightarrow c(E) \leq 3c(V) - 6.$$

5.18. korolarioa: *K_5 ez da planarra.*

5.19. teorema: *Izan bedi $n \geq 3$. n erpineko $G = (V, E)$ grafo planarra badugu, orduan $c(E) \leq 3n - 6$.*

Froga: *Oro har G grafoak k osagai konexu izango ditu. Froga dezagun indukzioz k balioarekiko.*

(i) *$k = 1$ denean, G konexua denez, aurreko 5.17. teoreman frogatuta dago.*

(ii) *Indukzio-hipotesia: eman dezagun egiazkoa dela k osagai konexurako. Hau da, $G_k = (V_k, E_k)$ denean, $c(E_k) \leq 3c(V_k) - 6$.*

(iii) *Froga dezagun $k + 1$ osagai konexu dituen $G_{k+1} = (V, E)$ graforako. Grafo honetan, $O_1, O_2, \ldots, O_k$ eta $O_{k+1} = (V_{k+1}, E_{k+1})$ osagai konexu daude eta*

$$G_{k+1} = (O_1 \cup O_2 \cup \ldots \cup O_k) \cup O_{k+1} = G_k(V_k, E_k) \cup O_{k+1},$$

non $c(V) = c(V_k) + c(V_{k+1})$ eta $c(E) = c(E_k) + c(E_{k+1})$. Azken osagaia, O_{k+1}, hiru motatakoa izan daiteke: (a) erpin bakarrekoa, (b) bi erpinekoa edo (c) hiru erpinekoa edo gehiagokoa.

(a) *$c(V_{k+1}) = 1$ erpinekoa, orduan $c(E_{k+1}) = 0$. Alde batetik, $c(V) = c(V_k) + c(V_{k+1}) = c(V_k) + 1$ eta $c(E) = c(E_k) + c(E_{k+1}) = c(E_k)$. Beraz, indukzio-hipotesiaz, $c(E) = c(E_k) \leq 3c(V_k) - 6 \leq 3c(V) - 6$.*

(b) *$c(V_{k+1}) = 2$ erpinekoa, orduan $c(E_{k+1}) = 1$. Alde batetik, $c(V) = c(V_k) + c(V_{k+1}) = c(V_k) + 2$ eta $c(E) = c(E_k) + c(E_{k+1}) = c(E_k) + 1$. Beraz, indukzio-hipotesiaz, $c(E) = c(E_k) + 1 \leq 3c(V_k) - 6 + 1 \leq 3(c(V_k) + 2) - 6 \leq 3c(V) - 6$.*

(c) *$c(V_{k+1}) \geq 3$ erpinekoa; orduan, 5.17. teoremagatik, $c(E_{k+1}) \leq 3c(V_{k+1}) - 6$. Alde batetik, $c(V) = c(V_k) + c(V_{k+1})$ eta $c(E) = c(E_k) + c(E_{k+1})$. Beraz, indukzio-hipotesiaz, $c(E) = c(E_k) + c(E_{k+1}) \leq (3c(V_k) - 6) + (3c(V_{k+1}) - 6) = 3(c(V_k) + c(V_{k+1})) - 12 \leq 3c(V) - 6$.*

5.20. teorema: *Izan bedi $n \geq 3$, n erpineko $G = (V, E)$ grafo konexu planarra eta 3 luzerako ziklo gabekoa. Orduan, $c(E) \leq 2n - 4$.*

5.21. korolarioa: *$K_{3,3}$ zatibiko grafo betea ez da planarra.*

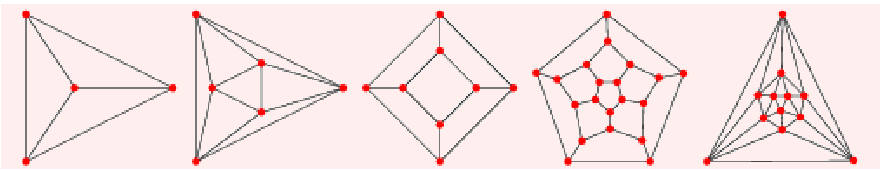
5.22. teorema: *(Kuratowskyren grafo planarren karakterizazioa) G grafo planarra da baldin eta soilik baldin eta haren barnetik $K_{3,3}$ edo K_5 atera ezin badira.*

5.20. eta 5.22. teoremen frogak [5] liburuan aurki daitezke.

Aplikazioa: gorputz platonikoak.

52. definizioa: **Gorputz platonikoak** *poliedro erregular konbexuak dira, haien aurpegiak poligono erregularrak dira eta edozein erpinetan aurpegi kopuru bera agertzen da. Tetraedroak, oktaedroak, kuboak, dodekaedroak eta ikosaedroak aurreko propietateak betetzen dituzte.*

Gorputz platoniko bakoitza grafo planar baten bidez adieraz daiteke, aurpegi bakoitza eskualde baten bidez adieraziz; ikus 5.20. irudia. Horretarako, irudika ezazu arrain-begi objektiboa duen kamara erabiliz, poliedroen argazkiak ateratzen.



Tetraedroa. Oktaedroa. Kuboa. Dodekaedroa. Ikosaedroa.

5.20. irudia: Gorputz platonikoen adierazpen planarrak. Iturria: [45].

5.23. teorema: *Zehazki, 5 gorputz platoniko existitzen dira.*

Froga: *Izan bitez p aurpegi bakoitzak duen ertzen kopurua eta q erpin bakoitzean dagoen ertz kopurua. Orduan,*

$$q \cdot c(V) = 2c(E) \quad \textit{eta} \quad p \cdot c(F) = 2c(E).$$

Gainera,

$$p \geq 3, \quad q \geq 3. \tag{5.1}$$

Hortaz, honako ekuazio hau bete behar da:

$$\begin{aligned} 2 = c(V) - c(E) + c(F) &= \frac{2}{q}c(E) - c(E) + \frac{2}{p}c(E) \\ &= \frac{2p + 2q - pq}{pq}c(E) \\ &= \frac{4 - (p-2)(q-2)}{pq}c(E). \end{aligned}$$

Kontuan izanik $(p-2)(q-2) < 4$ behar dela eta (5.1) dela, aukera posible guztiak $(p,q) \in \{(3,3),(3,4),(4,3),(5,3),(5,3)\}$. Azkenik, ohartu behin q finkatzen dugunean, automatikoki aurpegien angeluak finkatzen ditugula, eta behin p finkatuta, aurpegiak sortzen dituzten angeluak. Hortaz, behin (p,q) finkatuta gorputz platoniko bakar bat sor dezakegu erpin, ertz eta aurpegi kopuru horrekin.

Laburbilduz, 5.1. taulan konbinazio bakoitzari dagozkion gorputz platonikoak aurki daitezke:

Grafo planarra	$c(V)$	$c(E)$	$c(F)$	p	q
Tetraedroa	4	6	4	3	3
Oktaedroa	6	12	8	3	4
Kuboa	8	12	6	4	3
Dodekaedroa	20	30	12	5	3
Ikosaedroa	12	30	20	3	5

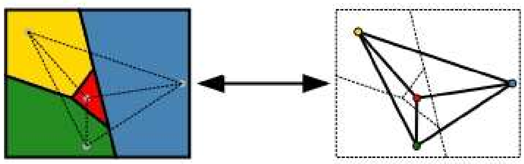
5.1. taula: Gorputz platonikoen ezaugarriak.

5.5. Koloratzea

53. definizioa: *Grafo bat* **koloratua** *da baldin eta erpin bakoitzak kolore bat badu eta auzokideak diren erpinen koloreak diferenteak badira. G grafoa koloratzeko behar den kolore kopuru txikienari grafoaren* **zenbaki kromatikoa** *esaten zaio, $\chi(G)$ adierazirik.*

Adibidez, kuboaren zenbaki kromatikoa 2 da; E_n grafo hutsak $\chi(E_n) = 1$ zenbaki kromatikoa duten bakarrak dira eta K_n grafo beteak $\chi(K_n) = c(V) = n$ duten bakarrak dira.

Koloratzearen teoria mapen eskualdeen koloratzeari lotuta dago, mapak grafo planarren bidez adierazten baitira. Horretarako suposatzen da eskualdeak konexuak direla eta eskualdeen arteko mugak puntuak soilik ezin direla izan. 5.21. irudian, mapen eta grafo planarren arteko lotura adierazten da eta koloratzearen problema irudikatzen da.



5.21. irudia: Grafo planarrak, mapak eta koloratzea. Iturria: [37].

5.24. teorema: *G grafo planarra bada, existitzen da erpinen bat non bere maila 5 baino txikiagoa edo berdina baita.*

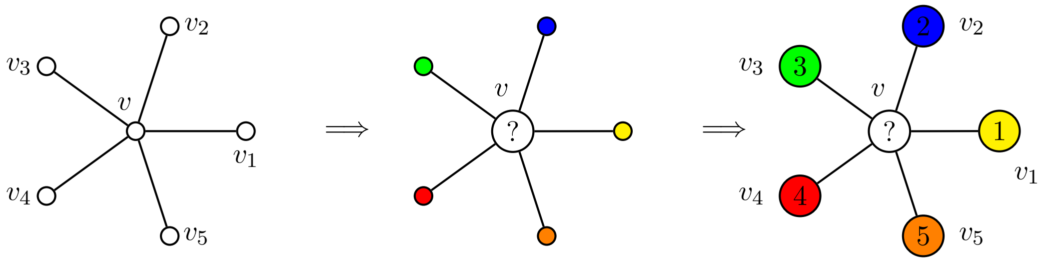
Teorema horren froga [5] liburuan aurki daiteke.

5.25. teorema: (Bost koloreen teorema): *Izan bedi G grafo planarra, orduan $\chi(G) \leq 5$.*
Froga: *Izan bedi $G = (V, E)$ eta $c(V) = n$; indukzioz n balioarekiko, frogatuko dugu.*

Hasierako kasua: $n \leq 5$ bada, argi dago egiazkoa dela.

Induzkio-hipotesia: demagun $n-1$ erpineko grafo planar guztietarako $\chi(G_{n-1}) \leq 5$ dela.

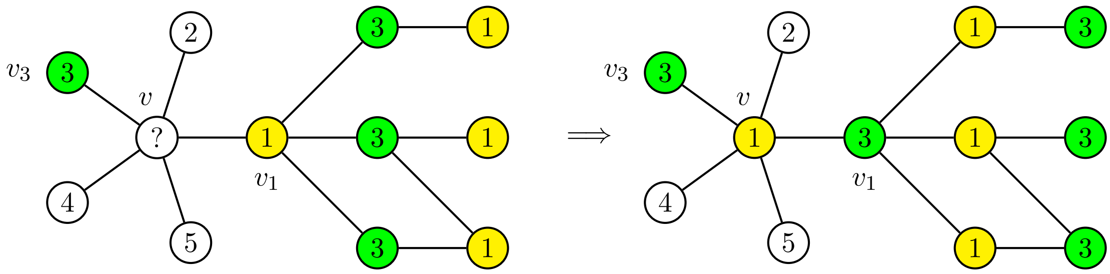
Froga dezagun n erpineko kasurako. 5.24. teorema erabiliz, v existitzen da non $d(v) \leq 5$ baita. $G' = G - v$ grafoa planarra eta $n-1$ mailakoa denez, $\chi(G') \leq 5$ induzkio hipotesiagatik. Erabil ditzagun $1, 2, 3, 4, 5$ koloreak G' koloratzeko, v erpinaren auzokideen koloreak lekuz elkar aldatu nahi ditugu kolore bat askatzeko, 5.22. irudian ikusten den bezala.



5.22. irudia: 5 mailako erpinaren koloreen problema.

Bi kasu desberdindu ditzakegu, 1 eta 3 koloreak dituen v_1-etik v_3-ra doan biderik soilik existitzen den ala ez aintzat hartu.

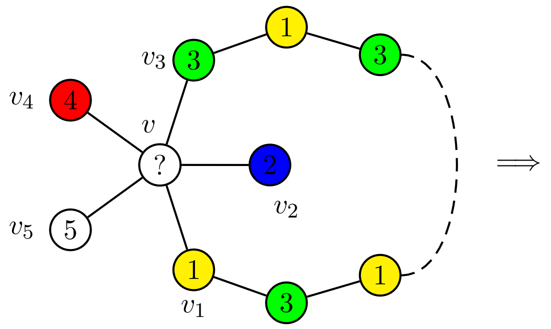
1. kasua: *ez da existitzen 1 eta 3 koloreak dituen v_1-etik v_3-ra doan biderik soilik.*



5.23. irudia: Bost koloreen problemaren 1. kasua.

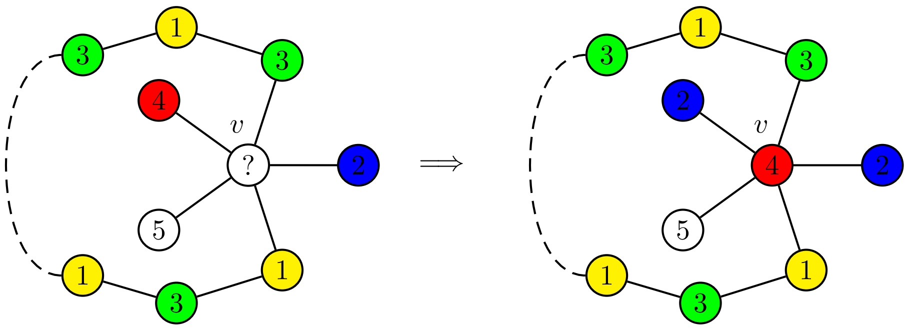
Orduan, erraza da problema ebaztea. 5.23. irudian ikusten den bezala, nahikoa da, adibidez, v_1 erpinaren kolorea v erpinari esleitu eta v_1 erpinari lotutako eremuan 1 eta 3 koloreak lekuz elkarren artean aldatzea. Argi dago, alboko erpinik beti kolore diferenterekin koloreztatuta egongo direla 1. kasuaren baldintzagatik.

2. kasua: *1 eta 3 koloreak dituen soilik v_1-etik v_3-ra doan bidea existitzen da.*



5.24. irudia: Bost koloreen problemaren 2. kasua (v_2 barruan).

Orduan v erpinarekin, 1 eta 3 koloretako zikloa osatzen da, v_2 edo v_4 bere barnean duena, ikusi 5.24. eta 5.25. irudiak, hurrenez hurren.



5.25. irudia: Bost koloreen problemaren 2. kasua (v_4 barruan).

Orduan, 2. kasuko bi egoeretan problema ebatz daiteke orain azalduko dugun bezala. Adibidez, v_2 zikloaren barruan badago, nahikoa da v_2 erpinaren kolorea erabiltzea v erpina koloratzeko eta v_2 erpinari lotutakoan 2 eta 4 koloreak lekuz elkarrekin aldatzea, aurreko kasuan bezala. Argi dago, v_2 eta v_4 erpinen artean ez dela existitzen soilik 2 eta 4 koloreko ziklorik, nahitaez 1 eta 3 koloreko zikloa zeharkatu behar genukeelako, grafo planar bat delako. Beraz, frogatuta geratzen da.

5.26. teorema: (Lau Koloreen Teorema) *Izan bedi G grafo planarra; orduan, $\chi(G) \leq 4$.*

Lau Koloreen Teoremaren frogak mende bat baino gehiago behar izan zuen; gaur egun ere interes handiko problema da, eta besteak beste, [16] aipatutako zabalkunde-artikulua kontsulta daiteke.

Izan ere, problema planteatu zenetik ebatzi arte, ehun urte baino gehiago pasatu ziren. 1852. urtean, Francis Guthriek bere anaiari eta Augustus de Morgani planteatu zien eta 1878. urtean, Arthur Cayleyk aieruaren enuntziatua argitaratu zuen. Sir Alfred Bray Kempek froga bat argitaratu zuen 1879. urtean, baina 1890. urtean, Percy Heawoodek akats bat topatu zuen (eta Bost Koloreen Teorema frogatu zuen Kemperen ideiekin). 1976. urtean, Ken Appel eta Wolfgang Haken matekatikariek frogatu zuten ordenagailu baten laguntzarekin (50 eguneko kalkuluak) eta 1995. urtean, Neil Robertson, Daniel P. Sanders, Paul Seymour eta Robin Thomas egileek froga hobetu zuten (ikusi [24]).

5.6. Grafo-teoriaren ariketa-zerrenda

Hamabigarren ariketa-zerrenda: grafo-teoria

(XII-1) (33 o.) Egin ezazu agurren lemaren itzulpena, grafo-teoriaren teorema egokia erabiliz.

(XII-2) Irudikatu K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 eta K_6. Zenbat ertz dauzka K_n grafo beteak?

(XII-3) Erantzun iezaiezu, baiezko erantzuna bada, adibidea jarriz, eta ezezkoa bada, azalpena emanez.

(a) 10 ertz dituen grafo 4-erregularrik dago?
(b) 15 ertz dituen grafo 4-erregularrik dago?

(XII-4) Zenbat zuhaitz ez-baliokide daude $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ erpinekin, non v_1 eta v_2 erpinen maila 3 baita eta v_3, v_4, v_5 eta v_6 erpinen maila 1 baita? Irudika itzazu emaitzak.

(XII-5) Existitzen da zuhaitza non erpinen mailak 4, 4, 4, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 baitira? Marraztu ezazu zuhaitz bat erantzuna baiezkoa bada.

(XII-6) Aintzat har ditzagun $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ erpineko zuhaitzak.

a) Irudika itzazu zuhaitz ez-isomorfo guztiak.
b) Erabili irudi horiek zenbat zuhaitz ezberdin dauden kontatzeko.
c) Egiazta ezazu Cayleyren formula.

(XII-7) (133 o.) Zenbat 4 mailako eta ordenatutako sustraidun zuhaitz binario daude? Irudika itzazu.

(XII-8) Frogatu 47. definizioko D funtzioa distantzia bat dela zentzu topologikoan; hots,

- $D(u, u) = 0$ edozein $u \in V(G)$.
- $D(u, v) = D(v, u)$ edozein $u, v \in V(G)$.
- $D(u, v) \leq D(u, w) + D(w, v)$ edozein $u, v, w \in V(G)$.

(XII-9) Froga ezazu 5.26. irudiko (a), (b), (c), (d), (e) eta (f) grafoak planarrak direla, hots, irudikatu grafo bakoitzaren ertzek elkar gurutza ez dezaten. Egiazta ezazu Eulerren formula kasu bakoitzean.

(XII-10) Determina ezazu 5.27. irudiko Australiako herrien mapari dagokion zenbaki kromatikoa, dagokion grafo planarra irudikatuz.

(XII-11) Determina ezazu 5.28. irudiko Afrikako herrien mapari dagokion zenbaki kromatikoa. Azal ezazu erantzuna.

(XII-12) (201 o.) Froga ezazu bi grafo isomorfoak badira, haien osagarriak ere isomorfoak direla.

(XII-13) n erpineko grafo bat bere osagarriaren isomorfoa bada, zenbat ertz ditu?

(XII-14) Izan daiteke 5 erpineko grafo bat bere osagarriaren isomorfo? Eta 7 erpineko grafo bat?

(XII-15) (†) Izan bedi G grafo bat. Definizioz, **automorfismo** bat G-tik G-ra doan isomorfismo bat da. Zenbat automorfismo ditu P_n-k? Eta C_n-k? Eta K_n-k? Eta $K_{n,m}$-k?

(XII-16) (201 o.)(‡) Froga ezazu edozein $n \geq 1$-rako $2n$ erpinetako eta $n^2 + 1$ ertzetako grafo bat triangelu bat duela, hots, C_3 dela bere azpigrafoa. **Oharra:** ariketa hau Mantelen Teorema da, 1907an frogatuta.

(XII-17) Izan bedi $G = (V, E)$ grafoa n erpinetako grafo bat zein edozein $u, v \in V$-rako zein $u \neq v$:

$$d(u) + d(v) \geq n - 1. \tag{5.2}$$

(a) Froga ezazu G-ren edozein erpin bikoterako, edo auzokideak direla edo existitzen dela hirugarren erpin bat bi erpinen auzokidea dena.

(b) Ondorioztatu G konexua dela.

(c) Aurki ezazu G grafoa (5.2) betetzen duena baina zirkuitu hamiltondarrik ez duena.

(d) (‡) Frogatu G-k bide hamiltondarra duela.

(XII-18) Izan bedi $G = (V, E)$ grafo konexua $2n$ erpin bakoitiekin. Froga ezazu existitzen direla $P_1, \ldots, P_n$ ibilbideak amankomuneko ertzik gabe zeinen bildura E den.

(XII-19) Izan bedi $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ erpinen multzoa. Zenbat grafo ezberdin daude m ertzekin?

(XII-20) (†) Izan bedi T grafoa. Froga ezazu honako propietate hauek baliokideak direla:

(a) T zuhaitza da.

(b) Edozein T-ren bi erpinen artean bide bakar bat dago.

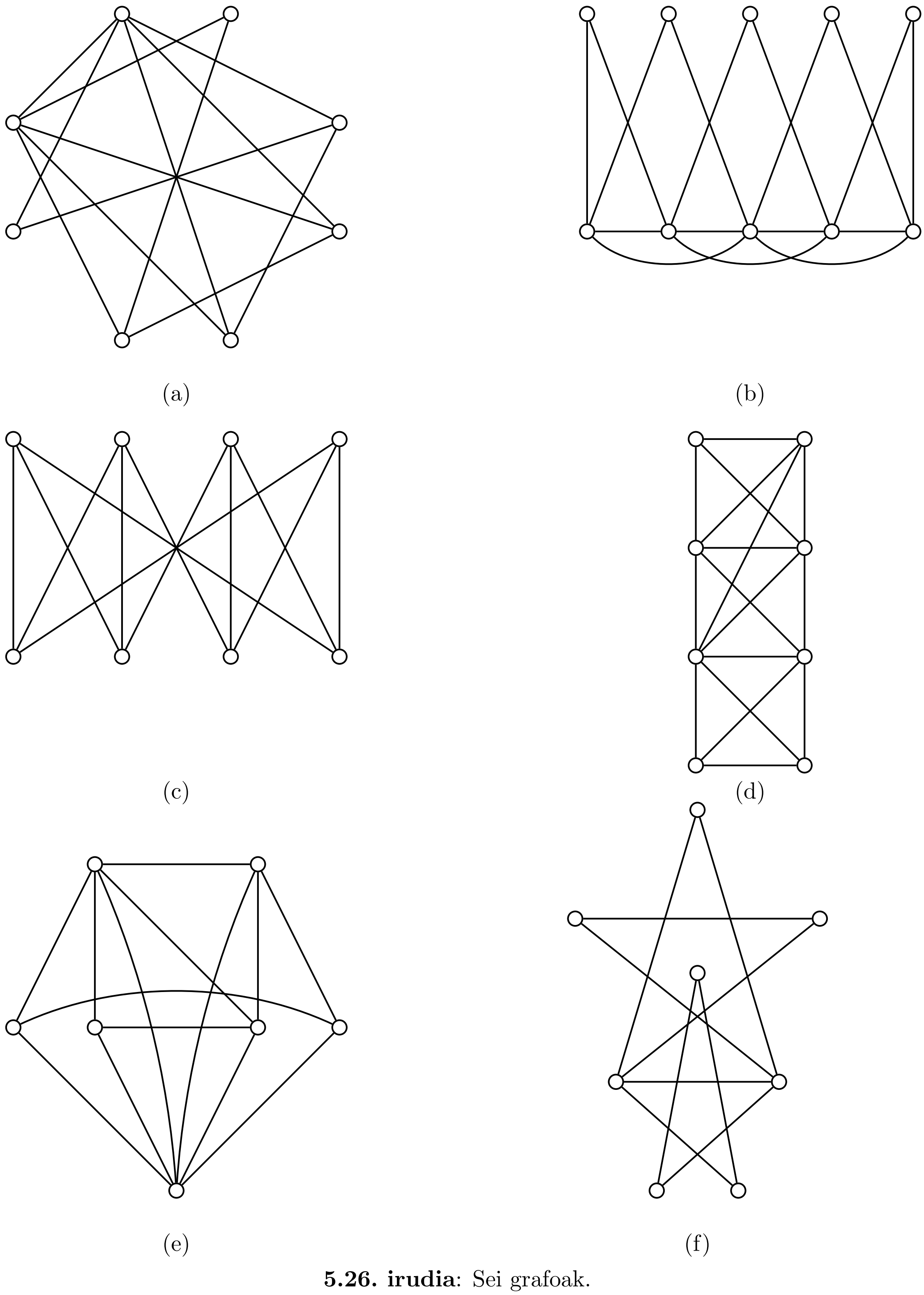
(c) T konexu minimala da; hots, edozein ertz kenduz gero T ez da konexua.

(d) T grafo ziklorik gabeko maximala da; hots, T grafoak ez du ziklorik baina auzokide ez diren edozein bi erpin u, v-rako, $T + \{uv\}$ grafoak ziklo bat du.

(XII-21) (†) Izan bedi (V, E, u) zuhaitz ordenatua. Froga ezazu edozein erpinek $v \in V \setminus u$ guraso bakarra duela.

(XII-22) (134 o.) (A.12.) Bost erpineko eta ordenatutako sustraidun zenbat zuhaitz daude? Irudika ezazu bakoitza eta adieraz ezazu aurreko ariketarekiko korrespondentzia.

Oharra: zenbakizko soluzioak B.1. eranskinean daude.



5.26. irudia: Sei grafoak.

5.27. irudia: Australiako mapa. Iturria: [38].

5.28. irudia: Afrikako mapa. Iturria: [32].

ARIKETAK

A. eranskina

Zenbait ariketaren ebazpenak

A.1. Lehenengo ariketa-zerrendako ebazpenak: zoru- eta sabai-funtzioak

Lehenengo ariketa-zerrendako (I-2) ariketa

(I-2) (†) Izan bedi $b \geq 2$ zenbaki osoa. Zenbaki-sistemaren oinarritzat b hartuta, edozein zenbaki arrunt n, $\{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$ multzoko zifrak erabiliz adierabakarrean idatz daiteke. Erabil dezagun $d_b(n)$ notazioa b oinarrian n zenbakiaren zifra-kopurua adierazteko. Adibidez,

$$d_{10}(357) = 3 \quad \textit{eta} \quad d_2(8) = d_2((1000)_2) = 4.$$

Aurkitu $\log_b(n)$-ren menpeko $d_b(n)$ adierazpena.

Azter dezagun egoera $b = 10$ kasuan:

$$\begin{aligned} d_{10}(n) = 4 &\Leftrightarrow 1000 \leq n < 10000, \\ d_{10}(n) = 7 &\Leftrightarrow 10^6 \leq n < 10^7, \\ d_{10}(n) = k &\Leftrightarrow 10^{k-1} \leq n < 10^k. \end{aligned}$$

$\log_{10}$ eragilea gorakorra denez,

$$k - 1 \leq \log_{10}(n) < k.$$

Hau da, $k-1$ kopurua, $\log_{10}(n)$ baino txikiagoa edo berdina den zenbaki osorik handiena da. Beraz, $k - 1 = \lfloor \log_{10}(n) \rfloor$. Eta $k = 1 + \lfloor \log_{10}(n) \rfloor$. Froga errepika daiteke 10 oinarria b orokorraren menpe ordezkatuz, eta $k = 1 + \lfloor \log_b(n) \rfloor$ lortzen da.

Lehenengo ariketa-zerrendako (I-3) ariketa

(I-3) (†) Egiaztatu edo gezurtatu honako baieztapen hauek:

a) $\left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$, $\forall x \geq 0$,

b) $\left\lceil \sqrt{\lceil x \rceil} \right\rceil = \lceil \sqrt{x} \rceil$, $\forall x \geq 0$.

a) $\left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$, $\forall x \geq 0$. Berdintza hori frogatzeko, $\leq$ eta $\geq$ ezberdintzak frogatuko ditugu:

($\leq$) $\lfloor x \rfloor \leq x$ eta $\sqrt{\cdot}$ gorakorra denez, $\sqrt{\lfloor x \rfloor} \leq \sqrt{x} \Rightarrow \left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor \leq \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.

($\geq$) Absurdora eramanez, demagun $\left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor < \lfloor \sqrt{x} \rfloor$ dela.
Orduan, $\exists n \in \mathbb{N} \ : \ \sqrt{\lfloor x \rfloor} < n \leq \sqrt{x}$ eta $\sqrt{\cdot}$ gorakorra denez, $\lfloor x \rfloor < n^2 \leq x$ absurdoa dena.

b) $\left\lceil \sqrt{\lceil x \rceil} \right\rceil = \lceil \sqrt{x} \rceil$, $\forall x \geq 0$. Berdintza hori frogatzeko, $\leq$ eta $\geq$ desberdintzak frogatuko ditugu:

($\geq$) $\lceil x \rceil \geq x$ eta $\sqrt{\cdot}$ gorakorra denez, $\sqrt{\lceil x \rceil} \geq \sqrt{x} \Rightarrow \left\lceil \sqrt{\lceil x \rceil} \right\rceil \geq \lceil \sqrt{x} \rceil$.

($\leq$) Absurdora eramanez, demagun $\left\lceil \sqrt{\lceil x \rceil} \right\rceil > \lceil \sqrt{x} \rceil$ dela.
Orduan, $\exists n \in \mathbb{N} \ : \ \sqrt{\lceil x \rceil} > n \geq \sqrt{x}$ eta $\sqrt{\cdot}$ gorakorra denez, $\lceil x \rceil > n^2 \geq x$ absurdoa dena.

Orain, estrategia berdina erabiliz, (I-4) ariketan frogatuko dugu emaitza orokorrago bat:

Lehenengo ariketa-zerrendako (I-4) ariketa

(I-4) (†) Izan bitez D zuzen erreala edo $[0, \infty)$ tartea, eta $f : D \to \mathbb{R}$ funtzio jarraitua, gorakorra eta honako propietate hau betetzen duena:

$$f(x) \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}.$$

Frogatu:

a) $\lfloor f(x) \rfloor = \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor$,

b) $\lceil f(x) \rceil = \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil$.

a) $\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(x) \rfloor$. Berdintza hori frogatzeko, $\leq$ eta $\geq$ desberdintzak frogatuko ditugu:

(≤) $\lfloor x \rfloor \leq x$ eta $f(\cdot)$ gorakorra denez, $f(\lfloor x \rfloor) \leq f(x) \Rightarrow \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor \leq \lfloor f(x) \rfloor$.

(≥) Absurdora eramanez, demagun $\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor < \lfloor f(x) \rfloor$ dela.
Orduan, $\exists n \in \mathbb{Z} \ : \ f(\lfloor x \rfloor) < n \leq f(x)$ eta $f(\cdot)$ jarraitua eta gorakorra denez, $\exists m : \ n = f(m)$ non $f(\lfloor x \rfloor) < f(m) \leq f(x)$ betetzen den.
Gainera, $f(m) = n \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \mathbb{Z}$. Beraz, $\lfloor x \rfloor < m \leq x$ absurdoa dena.

b) $\lceil f(x) \rceil = \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil$. Berdintza hau analogoki froga daiteke.

Lehenengo ariketa-zerrendako (I-7) ariketa

(I-7) (†) Aurkitu baldintza nahiko eta beharrezkoa, honako hau bete dadin:

$$\left\lceil \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rceil = \lceil \sqrt{x} \rceil, \ \forall x \geq 0.$$

Ikus ditzagun adibide batzuk A.1. taulan, $0 < \delta < 1$ izanik:

x	0	δ	1	$1+\delta$	2	$2+2\delta$	4	$4+\delta$	5	$5+4\delta$	9	$9+\delta$	10	$10+6\delta$	16	$16+\delta$
$\left\lceil \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rceil$	0	0	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4
$\lceil \sqrt{x} \rceil$	0	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5

A.1. taula: (I-7) ariketaren adibide batzuk.

Baldin eta $x \in \mathbb{Z}$, berehalakoa da berdintza beti betetzen dela.

Baldin eta $x \notin \mathbb{Z}$, orduan berdintza betetzen da baldin eta $x \notin \cup_{n\in\mathbb{N}^*}(n^2, n^2+1)$ bada. Hori A.1. taula begiratuz intui daiteke.

Alde batetik, $\lfloor x \rfloor \leq x$ eta $\sqrt{\cdot}$ gorakorra denez, $\sqrt{\lfloor x \rfloor} \leq \sqrt{x} \Rightarrow \left\lceil \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rceil \leq \lceil \sqrt{x} \rceil$.

Hala ere, $\left\lceil \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rceil < \lceil \sqrt{x} \rceil \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \ : \ \sqrt{\lfloor x \rfloor} \leq n < \sqrt{x}$ eta $\sqrt{\cdot}$ gorakorra denez,
$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \ : \ \lfloor x \rfloor \leq n^2 < x$
$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \ : \ \lfloor x \rfloor \leq n^2 < x < \lfloor x \rfloor + 1 \leq n^2 + 1$
$\Rightarrow x \in (n^2, n^2+1)$. Hortaz, berdintza betetzen da $x \notin \cup_{n\in\mathbb{N}^*}(n^2, n^2+1)$ bada.

Era berean,

$$x \in (n^2, n^2+1) \Rightarrow \sqrt{\lfloor x \rfloor} = n < \sqrt{x} \Rightarrow \left\lceil \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rceil = \lceil n \rceil = n < \lceil \sqrt{x} \rceil.$$

Hortaz, berdintza ez da betetzen $x \in \cup_{n\in\mathbb{N}^*}(n^2, n^2+1)$ bada, ariketa bukatuz.

Lehenengo ariketa-zerrendako (I-12) ariketa

*(I-12) (*Dirichleten usategiaren printzipioa*) aldin eta k uso n horma-zulotan banatzen badira, hobiren batean, gutxienez, $\lceil \frac{k}{n} \rceil$ uso daude, eta, hobiren batean, gehienez, $\lfloor \frac{k}{n} \rfloor$ uso daude.*

Ariketa hau Dirichleten usategiaren printzipioan (1.3. printzipioan) oinarrituta dago.

Izan bedi $x_i \in \mathbb{N}^*$ zenbakia i. horma-zuloan dagoen uso kopurua, $i = 1, 2, \ldots, n$; orduan, argi dago $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$ dela, k uso kopuru totala baita.

- Froga dezagun hobiren batean gutxienez $\lceil \frac{k}{n} \rceil$ uso daudela:

  Ikusiko dugu absurdora eramanez. Demagun hobi guztietan uso gutxiago daudela eta kontraesana topatzen badugu, enuntziatua frogatuta geratuko da. Hori matematikoki honako era honetan idazten da:

  $$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad x_i < \left\lceil \tfrac{k}{n} \right\rceil, \text{ hau da, } x_i \leq \left\lceil \tfrac{k}{n} \right\rceil - 1.$$

  Beraz,

  $$k = x_1 + \ldots + x_n \leq n \left(\left\lceil \frac{k}{n} \right\rceil - 1 \right). \tag{A.1}$$

  Bi aukera daude:

  (i) Baldin eta $\frac{k}{n} \in \mathbb{Z}$, orduan $(\lceil \frac{k}{n} \rceil - 1) = \frac{k}{n} - 1$ eta (A.1) ekuazioagatik, $\frac{k}{n} \leq \frac{k}{n} - 1$ absurdora heldu gara.

  (ii) Baldin eta $\frac{k}{n} \notin \mathbb{Z}$, orduan $(\lceil \frac{k}{n} \rceil - 1) = \lfloor \frac{k}{n} \rfloor$ eta (A.1) ekuazioagatik, $\frac{k}{n} \leq \lfloor \frac{k}{n} \rfloor$ baina hori absurdora da $\frac{k}{n} \notin \mathbb{Z}$ kasuan baikaude.

- Froga dezagun hobiren batean gehienez $\lfloor \frac{k}{n} \rfloor$ uso daudela:

  Kasu hau ere ikusiko dugu absurdora eramanez. Demagun hobi guztietan uso gehiago daudela eta kontraesana topatzen badugu, enuntziatua frogatuta geratuko da. Hau matematikoki honako era honetan idazten da:

  $$\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad x_j > \left\lfloor \tfrac{k}{n} \right\rfloor, \text{ hau da, } x_j \geq \left\lfloor \tfrac{k}{n} \right\rfloor + 1$$

  Beraz,

  $$k = x_1 + \ldots + x_n \geq n \left(\left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor + 1 \right). \tag{A.2}$$

  Bi aukera daude:

  (i) Baldin eta $\frac{k}{n} \in \mathbb{Z}$, orduan $(\lfloor \frac{k}{n} \rfloor + 1) = \frac{k}{n} + 1$ eta (A.2) ekuazioagatik, $\frac{k}{n} \geq \frac{k}{n} + 1$ absurdora heldu gara.

  (ii) Baldin eta $\frac{k}{n} \notin \mathbb{Z}$, orduan $(\lfloor \frac{k}{n} \rfloor + 1) = \lceil \frac{k}{n} \rceil$ eta (A.2) ekuazioagatik, $\frac{k}{n} \geq \lceil \frac{k}{n} \rceil$, baina hori absurdora da $\frac{k}{n} \notin \mathbb{Z}$ kasuan baikaude.

A.2. Bigarren ariketa-zerrendako ebazpenak: oinarrizko konbinatoriako problemak

Bigarren ariketa-zerrendako (II-11) ariketa

(II-11) Neska batek zazpi lagun ditu eta gau bakoitzean batekin kartetan jokatzeko ohitura du. Inorekin jokatu ez zuen igande batean erabaki zuen hurrengo astean zehar lagun berarekin bi egun jarraian jokatuko ez zuela. Zenbat eratan egin dezake aste horretako hitzorduen egutegia?

Izan bedi Ω = 'aste horretako egutegia egiteko aukerak'. Orduan, zuhaitz-diagrama edo biderkaduraren erregela erabil dezakegu kardinala kalkulatzeko.

Izan ere, $c(\Omega) = r_1 \cdot r_2 \cdots r_7$, non r_i = 'i. egunean lagun hautatzeko aukera kopurua' den, $i = 1, 2, \ldots, 7$. Argi dagoenez, 1. egunean 7 aukera daude, hots, $r_1 = 7$; baina, 2. egunetik aurrera, aurreko egunarekin ez kointziditzeko 6 aukera besterik ez dagoela, hots, $r_2 = r_3 = \ldots = r_7 = 6$ (zuhaitz diagrama batean jar daitezke).

Beraz, $c(\Omega) = 7 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 6 = 7 \cdot 6^6 = 326592$ era ditu.

Bigarren ariketa-zerrendako (II-21) ariketa

(II-21) 52 tamainako karta-sorta batekin pokerrean jokatuz, jokaldi bakoitzaren aukerak kalkulatu nahi ditugu. Zenbat eratan lor daitezke (1) bost kartako edozein jokaldi, (2) kolore-eskailera, (3) pokerra, (4) full bat, (5) kolorea, (6) eskailera, (7) hirukote bat, (8) bikote bikoitza, (9) bikote bat, eta (10) karta handiena (ezer ez ateratzea)? (11) Kalkula itzazu jokaldien ehunekoak.

Izan bitez $Z = \{A, 2, 3, \ldots, 10, J, Q, K\}$ zenbaki posibleen multzoa eta $M = \{\heartsuit, \spadesuit, \diamondsuit, \clubsuit\}$ karta-mota (kolorea) posibleen multzoa.

1) **Edozein jokaldi,** $c(\Omega)$ **=?**

   Izan bedi $\Omega :=$ '52 tamainako karta-sorta batetik 5 karta ateratzeko aukerak'. Argi denez, $c(\Omega) = \binom{52}{5} = 2\ 598\ 960$.

2) **Kolore-eskailera,** $c(\Omega_{KE})$ **=?**

   Izan bedi $\Omega_{KE} :=$ '52 tamainako karta-sorta batetik kolore-eskailera ateratzeko aukerak'.

   Kolore-eskailera, hau da, kolore berdineko eta ordenan dauden 5 karta ateratzeko adibidea: $\{A\heartsuit, 2\heartsuit, 3\heartsuit, 4\heartsuit, 5\heartsuit\}$.

Zuhaitz-diagramaren teknika erabiliko dugu lortzeko era kopurua kalkulatzeko: $c(\Omega_{KE}) = r_1 \cdot r_2$.

r_1: eskailera hautatzeko erak, hots, $\{A, 2, \ldots, 5\}$, $\{2, 3, \ldots, 6\}$, $\{3, 4, \ldots, 7\}$, $\ldots$, $\{9, 10, \ldots, K\}$ eta eskailera erreala $\{10, J, \ldots, A\}$. Beraz, $r_1 = 10$.

r_2: kolorea hautatzeko erak, hots, $r_2 = 4$.

Beraz, $c(\Omega_{KE}) = 10 \cdot 4 = 40$.

3) **Pokerra,** $c(\Omega_4)$ **=?**

Izan bedi $\Omega_4 :=$ '52 tamainako karta-sorta batetik pokerra ateratzeko aukerak'.

Pokerra, hau da, laukote bat ateratzeko adibidea: $\{A\heartsuit, A\clubsuit, A\spadesuit, A\diamondsuit, 2\spadesuit\}$.

Zuhaitz-diagramaren teknika erabiliko dugu pokerra lortzeko era kopurua kalkulatzeko: $c(\Omega_{4,1}) = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4$.

r_1: laukoterako karta-zenbakiaren aukeren kopurua, hots, $Z-$tik zenbaki bat ateratzea (adibidean A), $r_1 = c(Z) = 13$.

r_2: bosgarren karta aukeren kopurua, aurrekoaren desberdina, $r_2 = 48$.

Beraz, $c(\Omega_{4,1}) = 13 \cdot 48 = 624$.

4) **Full,** $c(\Omega_{3,2})$ **=?**

Izan bedi $\Omega_{3,2} :=$ '52 tamainako karta-sorta batetik full bat ateratzeko aukerak'.

Full, hau da, hirukote bat eta bikote bat ateratzeko adibidea: $\{A\heartsuit, A\clubsuit, A\spadesuit, 2\heartsuit, 2\spadesuit\}$.

Zuhaitz-diagramaren teknika erabiliko dugu full lortzeko era kopurua kalkulatzeko: $c(\Omega_{3,2}) = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4$.

r_1: hirukoterako karta zenbakiaren eren kopurua, hots, $Z-$tik zenbaki bat ateratzea (adibidean A), $r_1 = c(Z) = 13$.

r_2: bikoterako karta zenbakiaren eren kopurua, aurrekoaren desberdina, (adibidean 2), $r_2 = c(Z) - 1 = 12$.

r_3: hirukotea osatzeko moten kopurua, hots, Mtik hiru mota ateratzea (adibidean, $\heartsuit$, $\clubsuit$ eta $\spadesuit$), $r_3 = \binom{c(M)}{3} = \binom{4}{3}$.

r_4: bikotea osatzeko moten kopurua, hots, Mtik bi mota ateratzea (adibidean, $\heartsuit$ eta $\spadesuit$), $r_4 = \binom{c(M)}{2} = \binom{4}{2}$.

Beraz, $c(\Omega_{3,2}) = 13 \cdot 12 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} = 3744$.

5) **Kolorea,** $c(\Omega_K)$ **=?**

Izan bedi $\Omega_K :=$ '52 tamainako karta-sorta batetik kolorea ateratzeko aukerak'.

Kolorea, hau da, kolore berdineko eta guztiak ordenan ez dauden 5 karta ateratzeko adibidea: $\{A\heartsuit, 3\heartsuit, 4\heartsuit, 6\heartsuit, J\heartsuit\}$.

Zuhaitz-diagramaren teknika erabiliko dugu lortzeko era kopurua kalkulatzeko: $c(\Omega_K) = r_1 \cdot r_2 - c(\Omega_{KE})$.

r_1: 5 karta hautatzeko eren kopurua. Beraz, $r_1 = \binom{13}{5} = 1287$.

r_2: kolorea hautatzeko erak, hots, $r_2 = 4$.

Beraz, $c(\Omega_K) = 1287 \cdot 4 - 40 = 5108$.

6) **Eskailera,** $c(\Omega_E)$ **=?**

Izan bedi $\Omega_K :=$ '52 tamainako karta-sorta batetik eskailera ateratzeko aukerak'.

Eskailera, hau da, kolore desberdineko eta ordenan dauden 5 karta ateratzeko adibidea: $\{A\heartsuit, 2\clubsuit, 3\heartsuit, 4\clubsuit, 5\spadesuit\}$.

Zuhaitz-diagramaren teknika erabiliko dugu lortzeko era kopurua kalkulatzeko: $c(\Omega_E) = r_1 \cdot r_2 - c(\Omega_{KE})$.

r_1: eskaileran dauden 5 karta hautatzeko eren kopurua. Beraz, $r_1 = 10$.

r_2: 5 karten koloreak hautatzeko eren kopurua, hots, $r_2 = VR_4, 5 = 4^5 = 1024$.

Beraz, $c(\Omega_E) = 10 \cdot 4 - 40 = 10200$.

7) **Hirukotea,** $c(\Omega_3)$ **=?**

Izan bedi $\Omega_3 :=$ '52 tamainako karta-sorta batetik hirukotea ateratzeko aukerak'.

Hirukotea ateratzeko adibidea: $\{A\heartsuit, A\spadesuit, A\diamondsuit, 2\heartsuit, 3\heartsuit\}$.

Zuhaitz-diagramaren teknika erabiliz, hirukotea lortzeko era kopurua $= r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 \cdot r_5$.

r_1: hirukoterako karta-zenbakia hautatzea, hots, $Z-$tik zenbaki bat ateratzea (adibidean A), $c(r_1) = \binom{13}{1}$.

r_2: laugarren eta bosgarren karta-zenbakiak ateratzea, aurrekoaren desberdinak baita haien artean ere (adibidean 2 eta 3), $c(r_2) = \binom{12}{2}$.

r_3: zehaztutako hirukotea osatzeko hiru karta motak ateratzea (adibidean $\heartsuit$, $\spadesuit$ eta $\diamondsuit$), $c(r_3) = \binom{4}{3}$.

r_4: zehaztutako laugarren karta mota ateratzea (adibidean $\heartsuit$), $c(r_4) = \binom{4}{1}$.

r_5: zehaztutako bosgarren karta mota ateratzea (adibidean $\heartsuit$), $c(r_5) = \binom{4}{1}$.

Beraz, $c(\Omega_{3,1,1}) = \binom{13}{1} \cdot \binom{12}{2} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} = 54912$.

8) **Bikote bikoitza,** $c(\Omega_{2,2})$ **=?**

Izan bedi $\Omega_{2,2} :=$ '52 tamainako karta-sorta batetik bikote bikoitza ateratzeko aukerak'.

Bi bikote ateratzeko adibidea: $\{A\heartsuit, A\clubsuit, 2\heartsuit, 2\spadesuit, 3\heartsuit\}$.

Zuhaitz-diagramaren teknika erabiliko dugu bi bikote lortzeko era kopurua kalkulatzeko: $r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 \cdot r_5$.

r_1: bi bikoteetarako karta-zenbakiak hautatzea, hots, $Z-$tik bi zenbaki ateratzea (adibidean A eta 2), $c(r_1) = \binom{13}{2}$.

r_2: bosgarren karta-zenbakia ateratzea bi aurrekoen desberdina (adibidean 3), $c(r_2) = \binom{11}{1}$.

r_3: zehaztutako lehenengo bikotea osatzeko bi karta mota ateratzea, hots, Mtik bi mota ateratzea (adibidean $\heartsuit$ eta $\clubsuit$), $c(r_3) = \binom{4}{2}$.

r_4: zehaztutako bigarren bikotea osatzeko bi karta mota ateratzea (adibidean $\heartsuit$ eta $\spadesuit$), $c(r_4) = \binom{4}{2}$.

r_5: bakarrik geratzen den bosgarren karta mota ateratzea (adibidean $\heartsuit$), $c(r_5) = \binom{4}{1}$.

Beraz, $c(\Omega_{2,2,1}) = \binom{13}{2} \cdot \binom{11}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{1} = 123552$.

9) **Bikote bat,** $c(\Omega_2)$ **=?**

Izan bedi $\Omega_2 :=$ '52 tamainako karta-sorta batetik bikote bat ateratzeko aukerak'.

Bikote bat ateratzeko adibidea: $\{A\heartsuit, A\clubsuit, 2\heartsuit, 3\spadesuit, 4\heartsuit\}$.

Zuhaitz-diagramaren teknika erabiliko dugu bikote bat lortzeko era kopurua kalkulatzeko: $r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 \cdot r_5$.

r_1: bikoterako karta-zenbakiak hautatzeko era kopurua, hots, $Z-$tik zenbaki bat ateratzea (adibidean A), $c(r_1) = 13$.

r_2: hiru karta-zenbakien aukera kopurua aurrekoaren desberdina (adibidean 2, 3 eta 4), $c(r_2) = \binom{12}{3} = 220$.

r_3: zehaztutako lehenengo bikotea osatzeko bi karta moten era kopurua, hots, Mtik bi mota ateratzea (adibidean $\heartsuit$ eta $\clubsuit$), $c(r_3) = \binom{4}{2} = 6$.

r_4: gainontzeko karten koloreak hautatzeko era kopurua, hots, $c(r_3) = VR_{4,3} = 4^3 = 64$.

Beraz, $c(\Omega_2) = 13 \cdot 220 \cdot 6 \cdot 64 = 1098240$.

10) **Karta handiena,** $c(\Omega_H)$ **=?**

Izan bedi $\Omega_H :=$ '52 tamainako karta-sorta batetik karta handiena ateratzeko aukerak'.

Karta handiena, hots, aurreko jokaldiak ez ateratzeko adibidea: $\{1\heartsuit, 2\clubsuit, 3\heartsuit, 4\spadesuit, 5\heartsuit\}$.

Azken jokaldia denez, totala ken aurreko aukera guztien bidez kalkulatuko dugu.

Beraz, $c(\Omega_H) = c(\Omega) - c(\Omega_{KE}) - c(\Omega_{3,2}) - c(\Omega_4) - c(\Omega_K) - c(\Omega_E) - c(\Omega_3) - c(\Omega_{2,2}) - c(\Omega_2) = 1302540$.

11) **Ehunekoak** Jokaldi bakoitzaren ehunekoak A.2. taulan ikus daitezke:

Jokaldia	EK	Pokerra	Full	Kolorea	Eskailera	Hirukotea	Bikoitza	Bikotea	Handiena
Ehunekoa	0.002	0.020	0.144	0.197	0.392	2.111	4.754	42.257	50.118

A.2. taula: Pokerraren jokaldiak.

Bigarren ariketa-zerrendako (II-32) ariketa

(II-32) Kalkulatu 40 tamainako karta-sorta batetik 6 karta aukeratzeko kopurua,

a) Erregeren bat egonda.

b) Bastoirik ez egonda.

c) Erregeren bat baina bastoirik ez egonda.

Izan bitez, $\Omega =$'40 karta-sortatik 6 karta ateratzeko aukerak' eta $E =$'6 kartatik gutxienez bat erregea izateko aukerak' eta $B =$'6 kartatik gutxienez bat bastoia izateko aukerak', $E, B \subseteq \Omega$.

(a) $c(E) = c(\Omega) - c(\overline{E}) = \binom{40}{6} - \binom{36}{6}$.

(b) $c(\overline{B}) = \binom{30}{6}$.

(c) $c(E \cap \overline{B}) = c(\overline{B}) - c(\overline{E} \cap \overline{B}) = \binom{30}{6} - \binom{27}{6}$. Izan ere, $\overline{B} = E \cap \overline{B} + \overline{E} \cap \overline{B}$.

A.3. Hirugarren ariketa-zerrendako ebazpenak: oinarrizko konbinatoriako beste zenbait problema

Hirugarren ariketa-zerrendako (III-4) ariketa

(III-4) 100 kuboren bilduma baten 100 kuboren aurpegiak gorriak, urdinak edo berdeak dira. 80 kubok aurpegi gorri bat dute gutxienez, 85ek aurpegi urdin bat gutxienez, eta 75ek aurpegi berde bat dute gutxienez. Datu horietan oinarrituta ezin da esan hiru koloreko aurpegiak dituen x kubo-kopurua, baina zerbait esan daiteke. Zer da?

Izan bitez,

$$\begin{aligned} G &= \text{`gutxienez aurpegi gorri bat duten kuboak'}, \ c(G) = 80, \\ U &= \text{`gutxienez aurpegi urdin bat duten kuboak'}, \ c(U) = 85, \\ B &= \text{`gutxienez aurpegi berde bat duten kuboak'}, \ c(B) = 75. \end{aligned}$$

Dakigunez, $c(G \cup U \cup B) = 100$ eta $c(G \cap U \cap B)$ mugatu nahi dugu.

Inklusio-esklusio printzipioagatik (1.1. teorema),

$$c(G \cup U \cup B) = c(G) + c(U) + c(B) - c(G \cap U) - c(G \cap B) - c(U \cap B) + c(G \cap U \cap B).$$

Orduan, datuetan oinarrituta,

$$c(G \cap U \cap B) = c(G \cap U) + c(G \cap B) + c(U \cap B) - 140.$$

Gainera,

$$\begin{aligned} c(G \cap U) &= c(G) + c(U) - c(G \cup U) = 165 - c(G \cup U) \geq 165 - 100 = 65, \\ c(G \cap B) &= c(G) + c(B) - c(G \cup B) = 155 - c(G \cup B) \geq 155 - 100 = 55, \\ c(U \cap B) &= c(U) + c(B) - c(U \cup B) = 160 - c(U \cup B) \geq 160 - 100 = 60. \end{aligned}$$

Beraz,

$$c(G \cap U \cap B) = c(G \cap U) + c(G \cap B) + c(U \cap B) - 140 \geq 180 - 140 = 40.$$

Bestalde,

$$c(G \cap U \cap B) = c(G \cap U) + c(G \cap B) + c(U \cap B) - 140 \leq 80 + 75 + 75 - 140 = 90.$$

Hirugarren ariketa-zerrendako (III-9) ariketa

(III-9) Kalkula ezazu berarekiko $\{1, 2, \ldots, n\}$ multzoaren bijekzio-kopurua, zehazki $k(\leq n)$ elementu finko mantenduz. Azal itzazu itzulpen batzuk, esate baterako, adieraz itzazu bolak kutxatan kokatzearen problema baliokideak.

Izan bedi $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$; orduan, honako multzo honen kardinala kalkulatu nahi dugu:

$$\Omega = \{f : [n] \to [n] \text{ bijekzioa } : \ f(i) = i \ \forall i \in \{i_1, \ldots, i_k\}, \ f(i) \neq i \ \forall i \notin \{i_1, \ldots, i_k\}\}.$$

Defini ditzagun elementu bakar bat finko uzten duten multzoak:

$$A_i = \{f : [n] \to [n] \text{ bijekzioa } : \ f(i) = i\}, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Teorian ikusi dugunez, 1.6. azpiatalean, $D_n = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_1 \cap \ldots \overline{A}_n$ nahasketa multzoaren kardinala, $c(D_n) = n! \cdot \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}$ da.

Izan bedi,

$$D = \{f : [n] \to [n] \text{ bijekzioa } : \\ f(i) \neq i, \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n-k\}, \ f(i) = i, \ \forall i \in \{n-k+1, n-k+2, \ldots, n\}\}.$$

Orduan,

$$c(D) = c(D_{n-k}) = (n-k)! \cdot \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}.$$

Izan ere, D eta D_n-k oso erraz identifika daiteke. Beraz, $c(\Omega) = r_1 \cdot r_2$, non r_1 kopurua finko ez dauden osagaiak aukeratzeko era kopurua baita eta r_2 kopurua $n-k$ elementu ez finko eta k elementu finko uzten duten bijekzio kopurua baita. Hots,

$$c(\Omega) = \binom{n}{n-k} \cdot (n-k)! \cdot \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!} = \frac{n!}{k!} \cdot \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}.$$

Hirugarren ariketa-zerrendako (III-14) ariketa

(III-14) Zenbat zatitzaile ditu $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}$ faktore lehenetako deskonposizioa duen zenbakiak?

Izan bedi $Z =$'$p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}$ zenbakiaren zatitzaileen multzoa'. Orduan,

$$c(Z) = c(Z_1) \cdot c(Z_2) \cdot \ldots \cdot c(Z_k),$$

non:

$$\begin{aligned}
Z_1 &:= \text{`}p_1^{m_1}\text{-en zatitzaileak}' = \{p_1^0,\ p_1^1,\ p_1^2, \ldots, p_1^{m_1}\} \Rightarrow c(Z_1) = m_1 + 1, \\
Z_2 &:= \text{`}p_2^{m_2}\text{-ren zatitzaileak}' = \{p_2^0,\ p_2^1,\ p_2^2, \ldots, p_2^{m_2}\} \Rightarrow c(Z_2) = m_2 + 1, \\
&\ \vdots \\
Z_k &:= \text{`}p_k^{m_k}\text{-ren zatitzaileak}' = \{p_k^0,\ p_k^1,\ p_k^2, \ldots, p_k^{m_k}\} \Rightarrow c(Z_k) = m_k + 1
\end{aligned}$$

baitira. Beraz, $c(Z) = (m_1 + 1)(m_2 + 1) \cdots (m_k + 1) = \prod_{j=1}^{k} (m_j + 1)$.

Hirugarren ariketa-zerrendako (III-15) ariketa

(III-15) (†) (Eulerren ϕ funtzioa) n zenbaki arrunt guztietarako, defini dezagun $\phi(n) := c(A_n)$, non

$$A_n := \{k \in \{1, 2, \ldots, n\} \ : \ k \text{ lehena } n\text{-rekiko}\}.$$

Frogatu honako hau: baldin eta $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_l^{m_l}$ faktore lehenetako n-ren deskonposizioa bada, orduan

$$\phi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_l}\right).$$

Hona hemen ϕ funtzioak hartzen dituen balioak n txikia denean:

$$\begin{array}{lll}
n = 1, & A_1 = \{k \in \{1\} \ : \ k \text{ lehena 1-ekiko}\} = \{1\} & \Rightarrow \phi(1) = 1, \\
n = 2, & A_2 = \{k \in \{1, 2\} \ : \ k \text{ lehena 2-rekiko}\} = \{1\} & \Rightarrow \phi(2) = 1, \\
n = 3, & A_3 = \{k \in \{1, 2, 3\} \ : \ k \text{ lehena 3-rekiko}\} = \{1, 2\} & \Rightarrow \phi(3) = 2, \\
n = 4, & A_4 = \{k \in \{1, 2, 3, 4\} \ : \ k \text{ lehena 4-rekiko}\} = \{1, 3\} & \Rightarrow \phi(4) = 2, \\
n = 5, & A_5 = \{k \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \ : \ k \text{ lehena 5-ekiko}\} = \{1, 2, 3, 4\} & \Rightarrow \phi(5) = 4, \\
n = 6, & A_6 = \{k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \ : \ k \text{ lehena 6-rekiko}\} = \{1, 5\} & \Rightarrow \phi(6) = 2. \\
& \vdots &
\end{array}$$

Tamalez, balio horietatik kostatzen da zeozer inferitzea; hortaz, hobe da kasu partikularrak hain partikularrak ez izatea.

Hortaz, kontsidera dezagun $l = 1$ eta $l = 2$ kasu partikularrak. Has gaitezke $l = 1$. 1 eta p_1^m artean guztira $p_1^m/p = p_1^{m-1}$ daude p_1-en multiploak direnak; hortaz, p_1-ekiko elkarrekiko lehenak diren zenbaki kopurua $p_1^m - p_1^{m-1} = p_1^m(1 - 1/p_1)$ da, formula frogatuz. Jarrai dezagun $l = 2$

kasuarekin. Kopurua kalkulatzeko inklusio-esklusio printzipioa eta zenbaki baten multiplo kopurua erraz kalkulatzen dela erabiliko dugu:

$$\begin{aligned} c(\{p_1 \text{ eta } p_2 \text{ elk. lehenak}\}) &= n - c(\{k \in [n] \ : \ p_1|k \vee p_2|k\}) \\ &= n - c(\{k \in [n] \ : \ p_1|k\}) - c(\{k \in [n] \ : \ p_2|k\}) + c(\{k \in [n] \ : \ p_1p_2|k\}) \\ &= n - \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} + \frac{n}{p_1p_2} = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right). \end{aligned}$$

Froga dezagun orain kasu orokorra: $n = p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_l^{m_l}$, kalkula dezagun $\phi(n) = c(A_n)$. $l = 2$ teknika berberak erabiliko ditugu. Horretarako, honako multzo hauek defini ditzagun:

$$\begin{aligned} B_1 &:= \{k \in [n] \ : \ p_1|k\}, \\ B_2 &:= \{k \in [n] \ : \ p_2|k\}, \\ &\vdots \\ B_l &:= \{k \in [n] \ : \ p_l|k\}. \end{aligned}$$

Argi dagoenez,

$$\cup_{i=1}^{l} B_i = \{k \in [n] \ : \ p_1|k \vee p_2|k \vee \cdots \vee p_l|k\}.$$

Beraz,

$$A_n = \overline{\cup_{i=1}^{l} B_i} = \cap_{i=1}^{l} \overline{B_i} = \{k \in [n] \ : \ p_1 \not| k \wedge p_2 \not| k \wedge \cdots \wedge p_l \not| k\}.$$

Horrela,

$$\phi(n) = c(A_n) = c(\overline{\cup_{i=1}^{l} B_i}) = c(\Omega) - c(\cup_{i=1}^{l} B_i).$$

Eta inklusio-esklusio printzipioa (1.1. teorema) erabiliz,

$$\phi(n) = c([n]) - \sum_{1\le i\le l} c(B_i) + \sum_{1\le i<j\le l} c(B_i \cap B_j) - \sum_{1\le i<j<k\le l} c(B_i \cap B_j \cap B_k) + \cdots + (-1)^l c(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_l).$$

Dakigunez,

$$\begin{aligned} B_i = \{k \in [n] \ : \ p_i|k\} &\Rightarrow c(B_i) = \left\lfloor \frac{n}{p_i} \right\rfloor = \frac{n}{p_i}, \\ B_iB_j = \{k \in [n] \ : \ p_i|k \wedge p_j|k\} &\Rightarrow c(B_iB_j) = \left\lfloor \frac{n}{p_ip_j} \right\rfloor = \frac{n}{p_ip_j}, \\ &\vdots \\ B_1B_2\cdots B_l = \{k \in [n] \ : \ p_1|k \wedge p_2|k \wedge \cdots \wedge p_l|k\} &\Rightarrow c(B_1B_2\cdots B_l) = \left\lfloor \frac{n}{p_1p_2\cdots p_l} \right\rfloor = \frac{n}{p_1p_2\cdots p_l}. \end{aligned}$$

Azkenik,

$$\begin{aligned}
\phi(n) &= c(A_n) = c(\Omega) - c(\cup_{i=1}^{l} B_i) = \\
&= n - \sum_{1\le i\le l} \frac{n}{p_i} + \sum_{1\le i<j\le l} \frac{n}{p_i p_j} - \sum_{1\le i<j<k\le l} \frac{n}{p_i p_j p_k} + \cdots + (-1)^l \frac{n}{p_1 p_2 \dots p_l} \\
&= n\left(1 - \sum_{1\le i\le l} \frac{1}{p_i} + \sum_{1\le i<j\le l} \frac{1}{p_i p_j} - \sum_{1\le i<j<k\le l} \frac{1}{p_i p_j p_k} + \cdots + (-1)^l \frac{1}{p_1 p_2 \dots p_l}\right) \\
&= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_l}\right).
\end{aligned}$$

Azken berdintza indukzioz l balioarekiko froga daiteke.

Hirugarren ariketa-zerrendako (III-16) ariketa

(III-16) (†) (Legendre) Izan bitez p zenbaki lehena eta n zenbaki arrunta. Kalkula ezazu p zenbakiak zenbat aldiz zatitzen duen $n!$. (Oharra: p zenbakiak hiru aldiz m zatitzen duela esaten da, baldin eta m zenbakia p^3 zenbakiaz zatigarria bada baina p^4 zenbakiaz zatigarria ez bada; hau da, p^3 zenbakiak m zatitzen duen p-ren berredura handiena bada; beste era batean esanda, faktore lehenetako n-ren deskonposizioan p biderkatzailean p^3 agertzen bada.)

Izan bedi b zenbakia, p lehenak $n!$ zatitzen duen aldi kopurua.

Defini ditzagun honako multzo hauek:

$$\begin{aligned}
A_1 &:= \{k \in [n] \ : \ p|k \text{ baina } p^2 \not| k\} && \Rightarrow c(A_1) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor, \\
A_2 &:= \{k \in [n] \ : \ p^2|k \text{ baina } p^3 \not| k\} && \Rightarrow c(A_2) = \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor, \\
&\vdots \\
A_m &:= \{k \in [n] \ : \ p^m|k \text{ baina } p^{m+1} \not| k\} && \Rightarrow c(A_m) = \left\lfloor \frac{n}{p^m} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{m+1}} \right\rfloor.
\end{aligned}$$

Orduan,

$$b = 1 \cdot c(A_1) + 2 \cdot c(A_2) + \ldots + m \cdot c(A_m).$$

Zenbat da m zenbaki arrunta?

Argi dagoenez, m zenbakiak honako hau betetzen du:

$$p^m \le n < p^{m+1} \Leftrightarrow \log_p(p^m) \le \log_p(n) < \log_p(p^{m+1}) \Leftrightarrow m \le \log_p(n) < m+1 \Rightarrow m = \left\lfloor \log_p(n) \right\rfloor.$$

Beraz, $-\left\lfloor \frac{n}{p^{m+1}} \right\rfloor = 0$ eta:

$$b = \sum_{i=1}^{\lfloor \log_p(n) \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor .$$

Hirugarren ariketa-zerrendako (III-18) ariketa

Honako ariketa honetarako aljebra linealeko nozioak behar dira:

(III-18) (†) $\mathbb{Z}_2 := \{0,1\}$ gorputzaren gaineko hiru dimentsioko $\mathcal{E}_3$ espazio afinean, kalkula itzazu:

a) puntuen kopuru osoa,

b) zuzen bakoitzean dagoen puntu kopurua,

c) zuzenen kopuru osoa,

d) plano bakoitzean dagoen puntu kopurua,

e) planoen kopuru osoa,

f) puntu bakoitzetik pasatzen den zuzen kopurua,

g) puntu bakoitzetik pasatzen den plano kopurua,

h) plano bakoitzean dagoen zuzen kopurua,

i) zehaztutako zuzen batetik pasatzen den plano kopurua,

j) zehaztutako plano batekiko paraleloa den plano kopurua,

k) zehaztutako zuzen batekiko paraleloa den zuzen kopurua,

l) zehaztutako plano batekiko paraleloa den zuzen kopurua,

m) zehaztutako zuzen batekiko paraleloa den plano kopurua,

n) zehaztutako zuzen batekin gurutzatzen den zuzen kopurua.

a) Puntuen kopurua 8 da. Izan ere, $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ eta $\mathcal{E}_3 = \{(x,y,z) : x,y,z \in \mathbb{Z}_2\} = \{(0,0,0),\dots,(1,1,1)\}$ direnez, $c(\mathcal{E}_3) = c(\mathbb{Z}_2^3) = VR_2^3 = 2^3 = 8$.

b) Zuzen bakoitzean 2 puntu daude. Izan ere, dimentsio bateko espazio afina da, $c(\mathcal{E}_1) = c(\mathbb{Z}_2) = 2$.

c) Zuzenen kopurua 28 da. Izan ere, zuzen bat adierazteko bi puntu desberdin behar dira. Hortaz, (a) atalagatik, $C_{8,2} = \binom{8}{2} = 28$.

d) Plano bakoitzean 4 puntu daude. Izan ere, bi dimentsioko espazio afina da, $c(\mathcal{E}_2) = c(\mathbb{Z}_2^2) = VR_2^2 = 4$.
Beste era batean, planoaren ekuazioa erabiliz froga daiteke. Edozein planok $Ax+By+Cz = D$ adierazpena du, $A, B, C, D \in \mathbb{Z}_2$, baina $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ izanik. Planoa zehaztuta badago, A, B, C eta D koefizienteak ezagunak dira, (x, y, z) puntu kopurua jakiteko, (x, y) hautatzeko era kopurua nahikoa da, z balioa planoaren ekuaziotik askatuko baitzen. Beraz, $c(\mathbb{Z}_2^2) = VR_2^2 = 2^2 = 4$.

e) Planoen kopurua 14 da. Izan ere, plano bat osatzeko lerro berean ez dauden hiru puntu desberdin behar dira. Ohartu $\mathcal{E}_3$ espazio honetan lerro berean gehienez bi puntu daudela. (a) atalagatik, 8 elementuen artean 3 aukeratzeko era kopurua $\binom{8}{3}$ da; hala ere, plano bakoitza adierazteko, (d) atalagatik, $\binom{4}{3}$ era daude. Horrela, planoen kopurua $\binom{8}{3}/\binom{4}{3} = 56/4 = 14$ da.
Beste era batean, planoaren ekuazioa erabiliz froga daiteke. Edozein planok $Ax+By+Cz = D$ adierazpena du, $A, B, C, D \in \mathbb{Z}_2$, baina $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ izanik. Beraz, planoen kopurua $c(\mathbb{Z}_2^4) - 2 = VR_2^4 - 2 = 16 - 2 = 14$ da. Izan ere, $(A, B, C, D) = (0, 0, 0, 0)$ eta $(A, B, C, D) = (0, 0, 0, 1)$ aukerak ez dira posible.

f) Puntu bakoitzetik 7 zuzen pasatzen dira. Izan ere, gainontzeko puntuen artean, bigarren puntua aukeratzeko era kopurua, hau da, (a) atalagatik, $2^3 - 1 = 7$.

g) Puntu bakoitzetik 7 plano pasatzen dira. Izan ere, gainontzeko puntuen artean, beste bi puntu aukeratzeko era kopurua, $\binom{7}{2}$, baina, (d) atalagatik, kontuan hartuta plano bakoitza $\binom{3}{2}$ aldiz agertzen dela. Horregatik, $\binom{7}{2}/\binom{3}{2} = 21/3 = 7$.
Beste era batean, planoen $Ax + By + Cz = D$ ekuazioak erabiliz ebatziko dugu. A, B, C koefizienteen hautatzeko erak $c(\mathbb{Z}_2^3) - 1 = VR_2^3 - 1 = 2^3 - 1 = 7$ dira. Izan ere, $(A, B, C) = (0, 0, 0)$ kasuak planorik definitzen ez duelako eta $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ puntua ezaguna denez, behin (A, B, C) jakinda, D koefizientea zehaztuta dugu.

h) Plano bakoitzean 6 zuzen daude. Izan ere, planoko lau puntu binaka hartzeko era kopurua, hots, (d) atalagatik, $\binom{4}{2} = 6$.

i) Zehaztutako zuzen batetik 3 plano pasatzen dira. Izan ere, hirugarren puntua aukeratzeko era kopurua $\binom{6}{1}$, kontuan hartuta plano bakoitza $\binom{2}{1}$ eratan adieraz daitekeela. Beraz, $\binom{6}{1}/\binom{2}{1} = 6/2 = 3$.
Beste era batean, planoaren $Ax + By + Cz = D$ ekuazioa erabiliz. $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ eta $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ zuzenaren puntuak ezagunak direnez, $Ax_1 + By_1 + Cz_1 = D$ eta $Ax_2 + By_2 + Cz_2 = D$. Beraz, $A(x_1 - x_2) + B(y_1 - y_2) + C(z_1 - z_2) = 0$. Horrela, A eta B koefizienteetarako aukera posibleak $c(\mathbb{Z}_2^2) - 1 = VR_2^2 - 1 = 2^2 - 1$. Izan ere, $(A, B) = (0, 0)$ ez da posible, $C = 0$ izango zelako eta planorik ez zen egongo.

j) Zehaztutako plano batekiko plano paralelo bakar bat dago. Izan bedi $Ax + By + Cz = D$ zehaztutako plano baten ekuazioa. Beste edozein plano horrekiko paraleloa izan dadila, bere bektore normala aurrekoaren berdina izan behar da, hots, (A, B, C). Beraz, $D \in \{0, 1\}$ bi aukera daude, bata emandako planoa da, eta bestea paraleloa dena. Beraz, erantzuna 1 da.

k) Zehaztutako zuzen batekiko 3 zuzen paralelo daude. Izan ere, zuzenaren ekuazio parametrikoa erabiliz, $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(v_x, v_y, v_z)$ non (x_0, y_0, z_0) eta (v_x, v_y, v_z) zuzenaren puntu bat eta norabide-bektorea diren, hurrenez hurren eta $\lambda \in \mathbb{Z}_2$. Norabide-bektore berdina erabiliz eta puntu diferenteak, zehaztutako zuzena eta zuzen paralelo guztiak lortzen dira. Puntu guztiei zehaztutako zuzenaren bi puntuak behin kenduta, (x_0, y_0, z_0) eta $(x_0 + v_x, y_0 + v_y, z_0 + v_z)$ hain zuzen ere, gainontzeko puntu guztiak kontsidera ditzakegu, baina geratzen diren zuzen paraleloak bi aldiz gaude zenbatzen, $P_1 + \lambda(P_2 - P_1)$ eta $P_2 + \lambda(P_2 - P_1)$ zuzen bera delako. Beraz, erantzuna $\frac{2^3-2}{2} = 3$ da.

l) Zehaztutako plano batekiko 6 zuzen paralelo daude. Izan ere, plano bat zehaztuta badago, berarekiko plano paralelo bakarrean dauden zuzen guztiak dira zuzen paraleloak, beraz, (j) eta (h) atalengatik, $\binom{4}{2} = 6$ zuzen dira paralelo.

m) Zehaztutako zuzen batekiko 3 plano paralelo daude. Izan ere, (i) atalagatik, zuzen horretatik 3 plano pasatzen dira eta (j) atalagatik, plano bakoitzaren plano paralelo bakar bat dago. Beraz, erantzuna 3 plano paraleloak dira.

n) Zehaztutako zuzen batekiko 12 zuzen gurutzatzen dira. Izan ere, (c) atalagatik, zuzen bakoitzean bi puntu daude eta (f) atalagatik, puntu bakoitzetik 7 zuzen pasatzen dira, zehaztutako zuzena behin kenduta, gurutzatzen dira 6 zuzen. Beraz, erantzuna $6 + 6 = 12$ da.
Beste era batean, erantzuna zuzen kopuru totala (b) ken gurutzatzen ez diren kopurua da, eta azkenak hauek dira: zuzena bera, paraleloak diren 3 zuzenak (k) eta zehaztutako zuzenarekiko paraleloak ez diren 3 plano paraleloen zuzenak (h,m). Beraz, $\binom{8}{2} - 1 - 3 - 3 \cdot (6-2) = 28 - 16 = 12$. Era berean, gurutzatzen ez diren zuzenak hauek dira: zuzena bera eta zehaztutako zuzenarekiko 3 plano paraleloen zuzenak (h,m). Beraz, $\binom{8}{2} - 1 - (3 \cdot 6 - 3) = 28 - 16 = 12$. Izan ere, hiru planoek binaka zuzen bat baitute komun.

A.4. Laugarren ariketa-zerrendako ebazpenak: Olinpiada matematikoen problemak

Laugarren ariketa-zerrendako (IV-1) ariketa

(IV-1) (†) Alderdi politiko baten kongresu batean, 2000 bazkide daude. Kazetari baten arabera, bilera batean, $\%12,\widehat{12}$ emakumezkoak dira eta $\%23,4\widehat{23}$ sektore kritikoan daude. Zenbat bazkide ez dira joan bilerara?

Izan bitez honako multzo hauek:

$$\begin{aligned}
&B = \text{‘bazkideen multzoa'} && \Rightarrow c(B) = 2000,\\
&\Omega = \text{‘bileran daudenen multzoa'} && \Rightarrow c(\Omega) = ?,\\
&E = \text{‘bileran dauden emakumezkoen multzoa'} && \Rightarrow c(E) = \frac{c(E)}{c(\Omega)}c(\Omega) = 0.\overline{12} \cdot c(\Omega),\\
&S = \text{‘bileran dauden sektore kritikoen multzoa'} && \Rightarrow c(S) = \frac{c(S)}{c(\Omega)}c(\Omega) = 0.\overline{234} \cdot c(\Omega).
\end{aligned}$$

Zatiki adierazpenen faktore lehenen deskonposizioak erabiliko ditugu. Horretarako gogoratuko dugu

$$0,\overset{\frown}{12} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{12}{100^i} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33},$$
$$0,\overset{\frown}{234} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{234}{1000^i} = \frac{234}{999} = \frac{26}{111}.$$

Hortaz,

$$c(E) = \frac{2^2}{3 \cdot 11} \cdot c(\Omega),$$
$$c(S) = \frac{2 \cdot 13}{3 \cdot 37} \cdot c(\Omega).$$

Orduan,

$$3, 11, 37 \mid c(\Omega).$$

Gainera, $3 \cdot 11 \cdot 37 = 1221$ eta $c(\Omega) \leq c(B) = 2000$. Beraz,

$$c(\Omega) = 1221.$$

Laugarren ariketa-zerrendako (IV-2) ariketa

(IV-2) (‡) Izan bedi 3 zifradun 14 zenbaki arrunt desberdin dituen Ω multzoa. Froga ezazu existitzen direla bi azpimultzo $A \subseteq \Omega$ eta $B \subseteq \Omega$ ez-hutsak eta bateraezinak direnak non honako hau betetzen baita:

$$A\text{-ren elementuen batura } = B\text{-ren elementuen batura.}$$

Izan bedi $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_{14} \ : \ 100 \leq x_i < 1000, \ x_i \in \mathbb{N}, \ i \in [14]\}$.

Hauxe frogatu behar da:

$$\exists \, \emptyset \neq A, B \subseteq \Omega, \ A \neq B, \ A \cap B = \emptyset \ : \ \sum_{x \in A} x = \sum_{x \in B} x.$$

Defini dezagun honako funtzio hau:

$$f : \mathcal{P}(\Omega) - \emptyset \to \mathbb{N}$$
$$A \to f(A) = \sum_{x \in A} x$$

eta froga dezagun ezin dela injektiboa izan. Izan ere, izan bitez k eta n, multzo ez-hutsen kopurua eta batura posibleen kopurua, hurrenez hurren. Argi dago

$$k = c(\mathcal{P}(\Omega) - \emptyset) = 2^{c(\Omega)} - 1 = 2^{14} - 1 = 16383$$

eta

$$n < 14 \cdot 1000 = 14000.$$

Beraz, $k > n$ denez, *Usategiaren printzipioa*gatik (1.3.. printzipioa),

$$\exists\ \emptyset \neq A, B \subseteq \Omega,\ \ A \neq B\ \ :\ \ f(A) = f(B).$$

Baina, A eta B bateraezinak al dira? Bateraezinak badira ariketa bukatuta dago; hortaz, suposa dezakegu ez direla.

Demagun $A \cap B \neq \emptyset$, orduan

$$\begin{aligned} f(A) &= f(A - A \cap B) + f(A \cap B), \\ f(B) &= f(B - A \cap B) + f(A \cap B), \\ f(A) &= f(B). \end{aligned}$$

Beraz, $f(A - A \cap B) = f(B - A \cap B)$ denez, izan bitez $\tilde{A} = A - A \cap B$ eta $\tilde{B} = B - A \cap B$, orduan

$$\exists\ \tilde{A}, \tilde{B} \subseteq \Omega,\ \ \tilde{A} \cap \tilde{B} = \emptyset\ \ :\ \ f(\tilde{A}) = f(\tilde{B}).$$

Baina, $\tilde{A}$ eta $\tilde{B}$ ez-hutsak al dira?

Demagun $\tilde{A} = \emptyset$, orduan

$$f(\tilde{A}) = 0 \Rightarrow f(\tilde{B}) = 0 \Rightarrow \tilde{B} = \emptyset \Rightarrow A = A \cap B = B \Rightarrow A = B$$

absurdoa izango zen, beraz, ez-hutsak dira.

Azkenik, ikusi dugu $\tilde{A}$ eta $\tilde{B}$ multzoekin ariketa frogatuta dagoela.

Laugarren ariketa-zerrendako (IV-3) ariketa

(IV-3) (†) Tenis txapelketa amateur batera 8 neska eta 8 mutil joan dira. Ilaran, neskak eta mutilak txandaka daude eserita, lehenengoa mutila izanik. Zenbat eratan osa daitezke 4 bikote dituen multzoa, baldin eta bikote guztiak hasieran jarraian zeuden neskek eta mutilek osatzen badituzte?

Ariketa hau ebazteko honako itzulpen hau erabiliko dugu.

Har dezagun mutil eta nesken zerrenda, non bi pertsonaren artean 1 edo 0 idatziko dugun, segun eta bikotea osatu ala ez. Orduan, lau 1 (bikote) eta hamaika 0 (ez-bikote) osagaiez osatutako 15 luzerako 0-1 segidak ditugu, non bi 1 jarraian ezin baitira egon (bikoteak pertsona ezberdinek osatu behar baitituzte).

Eta problema ezagun hori ebazteko, bigarren itzulpen hau erabil dezakegu: hamaika 0 ditugu eta lau 1 kokatu behar dira posibleak diren hamabi posiziotan (izan ere, bi 1 jarraian ez daudenez, egon daitekeen posizioak zehatz-mehatz dira lehenengo 0-aren aurretik, bi zero artean eta azkenengo zeroaren ostean). Balio hori hurrengoa da:

$$C_{12,4} = \binom{12}{4} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{24} = 55 \cdot 9 = 495.$$

Laugarren ariketa-zerrendako (IV-4) ariketa

(IV-4) Bilera birtual batean, 5 nazionalitate desberdinetako 13 eta 17 urte arteko 201 gazte daude. 6 pertsonako talde bakoitzean, gutxienez, 2 adin berekoak dira. Froga ezazu bileran nazionalitate bereko, adin bereko eta sexu bereko gutxienez 5 pertsona daudela.

Aintzat har ditzagun honako multzo hauek:

$$\begin{aligned} P &= \text{`pertsonen multzoa}' = \{x_1, x_2 \ldots, x_{201}\},\\ S &= \text{`sexu posibleen multzoa}' = \{s_1, s_2\},\\ N &= \text{`nazionalitate posibleen multzoa}' = \{n_1, n_2 \ldots, n_5\},\\ A &= \text{`adin posibleen multzoa}' = \{a_1, a_2 \ldots, a_5\}. \end{aligned}$$

Defini dezagun honako funtzio hau:

$$\begin{aligned} f : P &\to E = S \times N \times A \\ x_i &\to f(x_i) = (s(x_i), n(x_i), a(x_i)). \end{aligned}$$

Froga dezagun ezin dela injektiboa izan. Izan bitez k eta n, pertsona kopurua eta ezaugarri posibleen kopurua, hurrenez hurren. Argi dago

$$k = c(P) = 201,$$

eta

$$n = c(E) = c(S) \cdot c(N) \cdot c(A) \leq 2 \cdot 5 \cdot 5 = 50.$$

Beraz, $k > n$ denez, *Usategiaren printzipioa*gatik (1.3. printzipioa),

$$\text{existitzen da, gutxienez, } \left\lceil \frac{k}{n} \right\rceil = \left\lceil \frac{201}{50} \right\rceil = 5 \text{ pertsona ezaugarri berekin.}$$

Laugarren ariketa-zerrendako (IV-7) ariketa

(IV-7) (†) Izan bedi

$$q(n) := \left\lfloor \frac{n}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \right\rfloor, \; n = 1, 2, \ldots$$

a) Kalkula itzazu $q(n)$ balioak, $1 \leq n \leq 25$. Balioei begiratuz, zein uste duzu direla n balioak non $q(n) > q(n+1)$?

b) Frogatu aurreko aierua, hots, kalkula itzazu $q(n) > q(n+1)$ betetzen duten zenbaki arrunt guztiak.

(a) Adibide batzuen kalkulua A.3. taulan agertzen da:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$q(n)$	1	2	3	2	2	3	3	4	3	3	3	4	4	4	5	4	4	4	4	5	5	5	5	6	5

A.3. taula: (IV-7) ariketaren adibide batzuk.

Beraz, aierua honako hau da:

$$q(n) > q(n+1) \Leftrightarrow n + 1 = m^2$$

(b) Froga dezagun inplikazio bakoitza:

$\Leftarrow$) $n + 1 = m^2 \Rightarrow q(n) > q(n+1)$ egiazkoa al da?

$n + 1 = m^2 \Rightarrow \sqrt{n+1} = m \Rightarrow \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor = m.$

Hortaz,

$$q(n+1) = \left\lfloor \frac{n+1}{\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+1}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m^2}{m} \right\rfloor = m.$$

Bestalde,

$$\begin{aligned} (m-1)^2 < n = m^2 - 1 < m^2 \Rightarrow \\ m - 1 < \sqrt{n} < m \Rightarrow \\ m - 1 = \lfloor \sqrt{n} \rfloor . \end{aligned}$$

Orduan,

$$q(n) = \left\lfloor \frac{n}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{m-1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m^2 - 1}{m - 1} \right\rfloor = \lfloor m + 1 \rfloor = m + 1.$$

Beraz,

$$q(n) = m + 1 > m = q(n + 1).$$

$\Rightarrow$) Orain frogatuko dugu $n + 1 \neq m^2$ bada orduan $q(n) \leq q(n + 1)$. Argi dago n bi karratu perfekturen artean egongo dela. Hots, $n \in \{m^2, m^2 + 1, \ldots, m^2 + 2m - 1\}$. Orduan,

$$\begin{aligned} m^2 \leq n < n + 1 < (m + 1)^2 &\Rightarrow \\ m \leq \sqrt{n} < \sqrt{n + 1} < m + 1 &\Rightarrow \\ m = \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{n + 1} \right\rfloor &. \end{aligned}$$

Orduan,

$$\frac{n}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} = \frac{n}{\lfloor \sqrt{n + 1} \rfloor} < \frac{n + 1}{\lfloor \sqrt{n + 1} \rfloor}.$$

Beraz,

$$q(n) = \left\lfloor \frac{n}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{n + 1}{\lfloor \sqrt{n + 1} \rfloor} \right\rfloor = q(n + 1).$$

Laugarren ariketa-zerrendako (IV-8) ariketa

(IV-8) Marraztu daitezke planoan 2003 zuzenki, non bakoitzak zehazki beste hiru zuzenki mozten baititu?

Ez. Ariketa hori *Agurren lemaren* (1.4. lemaren) bidez froga daiteke. Pertsona kopuru bakoitia agurtzen duten pertsona kopuruak zenbaki bikoitia izan behar du. Agurren lemaren egoeraren itzulpena (hau da, pertsonek beste pertsona batzuk agurtzen dituztela) zera da: zuzenek beste zuzen batzuk mozten dituztela. Zehazki, beste hiru zuzen mozten dituzten zuzen kopuruak bikoitia izan behar duenez, ezin da 2003 izan.

A.5. Bosgarren ariketa-zerrendako ebazpenak: koefiziente binomialak

Bosgarren ariketa-zerrendako (V-10) ariketa

(V-10) (†) Banatu zatiki sinpletan:

$$\frac{n!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}.$$

Aurreko emaitza erabiliz, froga ezazu (berriro):

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{1}{n+1}.$$

Lehenengo adierazpena zatiki sinpletan banatu ahal dugu:

$$\frac{n!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}=\frac{A_0}{x}+\frac{A_1}{x+1}+\dots+\frac{A_k}{x+k}+\dots+\frac{A_n}{x+n}.$$

Izendatzaile komuna egin ondoren, zenbakitzaileak berdinduz:

$$n!=\sum_{k=0}^{n}A_k x(x+1)\cdots(x+k-1)(x+k+1)\cdots(x+n).$$

Eta x aldagaia $\{0,-1,\dots,-k,\dots,-n\}$ balioekin ordezkatuz, hau da, $\forall k=0,\dots,n$, $x=-k$ denean:

$$n!=A_k(-k)(-k+1)\cdots(-k+k-1)(1)(2)\cdots(n-k)\Rightarrow A_k=(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}=(-1)^k\binom{n}{k}.$$

Beraz,

$$\frac{n!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{A_k}{x+k}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{x+k}.$$

Partikularki, $x=1$ denean:

$$\frac{1}{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Bosgarren ariketa-zerrendako (V-13) ariketa

(V-13) Froga itzazu:

(a) $2^n < \binom{2n}{n} < 4^n, \ \forall n \geq 2.$

(b) $\binom{2n-1}{n} < 4^{n-1}, \ \forall n \geq 2.$

(c) *(†)* $(n!)^2 > n^n, \ \forall n > 2.$

$$(a) \quad 2^n < \binom{2n}{n} < 4^n, \ \forall n \geq 2.$$

n balioarekiko indukzioz:

$n = 2$ denean: $4 = 2^2 < 6 = \binom{4}{2} < 16 = 4^2$. Egin dezagun indukzio hipotesia n baliorako eta froga dezagun $(n+1)$ baliorako. Kontuan izanik:

$$\binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\binom{2n}{n} = 2\left(1 + \frac{n}{n+1}\right)\binom{2n}{n},$$

nahikoa da indukzio hipotesia eta $2 < 2\left(1 + \frac{n}{n+1}\right) < 4$ dela erabiltzea.

Froga konbinatorioa:

Gogora dezagun 2^n dela $[n]$ multzoko azpimultzo kopurura, $\binom{2n}{n}$ dela $[2n]$ multzoko n tamainako azpimultzo kopurua eta 4^n dela $[2n]$ multzoko azpimultzo kopurua. Ondorioz, argi dago $\binom{2n}{n} < 4^n$. Gainera, funtzio surjektibo ez-injektibo eraiki dezakegu $[2n]$ multzoko n tamainako azpimultzotik $[n]$ multzoko azpimultzoetara: $A \mapsto A \cap [n]$. Hortaz, $\binom{2n}{n} > 2^n$.

Froga konbinatorio alternatiboa:

Egiazta dezagun lehenengo desberdintza:

$$2^n \overset{1\underline{KI}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \overset{n \geq 2}{<} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \overset{8\underline{KI}}{=} \binom{2n}{n}.$$

Egiazta dezagun bigarren desberdintza:

$$\binom{2n}{n} \overset{n \geq 1}{<} \binom{2n}{0} + \binom{2n}{1} + \ldots + \binom{2n}{n} + \ldots + \binom{2n}{2n} \overset{1\underline{KI}}{=} 2^{2n} = 4^n.$$

$$(b)\quad \binom{2n-1}{n} < 4^{n-1},\ \forall n \geq 2.$$

Froga konbinatorioa:

Zenbaki binomialen errepikapen erlazioa eta koefiziente binomialen 1. identitatea erabiliz:

$$\binom{2n-1}{n} = \binom{2n-2}{n} + \binom{2n-2}{n-1} < \binom{2n-2}{0} + \ldots + \binom{2n-2}{2n-2}$$
$$= 2^{2n-2} = 2^{2(n-1)} = 4^{n-1}.$$

Froga konbinatorio alternatiboa:

Zenbaki binomialen simetria eta koefiziente binomialen 1. identitatea erabiliz:

$$\binom{2n-1}{n} = \frac{1}{2}\left[\binom{2n-1}{n} + \binom{2n-1}{n-1}\right] < \frac{1}{2}\left[\binom{2n-1}{0} + \ldots + \binom{2n-1}{2n-1}\right]$$
$$= \frac{1}{2}2^{2n-1} = 2^{2n-2} = 2^{2(n-1)} = 4^{n-1}.$$

Froga aljebraikoa:

$$\binom{2n-1}{n} < 4^{n-1} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\binom{2n}{n} < \frac{1}{4}4^n \Leftrightarrow 2\binom{2n}{n} < 4^n \Leftrightarrow 2\frac{(2n)!!}{n!}\frac{(2n-1)!!}{n!} < 2^{2n}$$
$$\Leftrightarrow 2\frac{2^n n!}{n!}\frac{2n-1}{n}\frac{2n-3}{n-1}\cdots\frac{3}{2}\frac{1}{1} < 2 \cdot 2^n 2^{n-1}.$$

Azken desberdintza hau frogatzeko, nahikoa da frogatzea:

$$\frac{2n-2k-1}{n-k} < 2 \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots, n-2;$$

hau da,

$$2n-2k-1 < 2n-2k \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots, n-2,$$

betetzen dena.

Indukziozko froga:

Baldin eta $n = 2$, orduan $\binom{2n-1}{n} = \binom{3}{2} = 3 < 4^{n-1} = 4$ egiazkoa da.

Indukzio-hipotesia (IH): suposa dezagun $n-1$ baliorako egiazkoa dela:

$$\binom{2n-3}{n-1} < 4^{n-2}.$$

Froga dezagun n baliorako: koefiziente binomialen (iv) eta (viii) propietateak, eta (IH) erabiliz:

$$\begin{aligned}\binom{2n-1}{n} &= \binom{2n-3}{n} + 2\binom{2n-3}{n-1} + \binom{2n-3}{n-2}\\ &< \binom{2n-3}{n-1} + 2\binom{2n-3}{n-1} + \binom{2n-3}{n-1}\\ &= 4\binom{2n-3}{n-1} \overset{IH}{<} 4\cdot 4^{n-2} = 4^{n-1}.\end{aligned}$$

Indukziozko froga alternatiboa:

Baldin eta $n=2$, orduan $\binom{2n-1}{n} = \binom{3}{2} = 3 < 4^{n-1} = 4$ egiazkoa da.

Indukzio-hipotesia (IH): suposa dezagun $n-1$ baliorako egiazkoa dela:

$$\binom{2n-3}{n-1} < 4^{n-2}.$$

Froga dezagun $n-$rako: (iii) eta (vi) propietateak eta (IH) erabiliz:

$$\begin{aligned}\binom{2n-1}{n} = \frac{2n-1}{n}\binom{2n-2}{n-1} &= \frac{2n-1}{n}\frac{2n-2}{n-1}\binom{2n-3}{n-2}\\ &= \frac{2n-1}{n}2\binom{2n-3}{n-1} < \frac{4n-2}{n}4^{n-2} < \frac{4n}{n}4^{n-2} = 4^{n-1}.\end{aligned}$$

$$(c) \quad (n!)^2 > n^n, \ \forall n > 2.$$

n balioarekiko indukzioz:

$n=3$ denean, $(3!)^2 = 36 > 3^3 = 27$ egiazkoa da.

Indukzio hipotesia (IH) n kasurako: $(n!)^2 > n^n$.

Froga dezagun $n+1$ kasurako: $((n+1)!)^2 > (n+1)^{n+1}$.

$$((n+1)!)^2 = (n+1)n!(n+1)n! \overset{IH}{>} (n+1)^2 n^n \overset{?}{>} (n+1)^{n+1} \Leftrightarrow n^n > (n+1)^{n-1} \Leftrightarrow \frac{n^n}{(n+1)^{n-1}} > 1.$$

Azkenengo desberdintza frogatzeko, Bernouilliren desberdintza[1] erabiliko dugu:

[1]Baldin $a > -1, a \neq 0, n > 2, n \in \mathbb{N}^*$, orduan, bi aldeen deribatua kalkulatuz froga daitekeenez, $(1+a)^n > 1+na$.

$$\frac{n^n}{(n+1)^{n-1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n (n+1) = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n (n+1) > \left(1-\frac{n}{n+1}\right)(n+1) = \frac{1}{n+1}(n+1) = 1.$$

Froga aljebraikoa:

$$(n!)^2 = n! \cdot n! = (n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1)\cdot(n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1)\,.$$

Aurkakoak binaka biderkatuz,

$$(n!)^2 = [n\cdot 1][(n-1)\cdot 2]\cdots[2\cdot(n-1)][1\cdot n] > n \overset{(n)}{\cdots} n \cdot n = n^n.$$

Izan ere, $f(x) = x(n+1-x)$ hertsiki gorakorra da $[1, \frac{n+1}{2}]$ tartean eta hertsiki beherakorra $[\frac{n+1}{2}, n+1]$ tartean; hortaz, $f(x) \geq n$ da edozein $x \in [1, n]$ baliotarako, eta berdintza soilik $x = 1, n$ denean ematen da.

Bosgarren ariketa-zerrendako (V-15) ariketa

(V-15) Izan bedi

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Jordanen blokea, non $|\lambda| < 1$.

(a) (†) Froga ezazu $A^k = (a_{i,j}^{(k)})$ *matrizeak honako berdintza hau betetzen duela:*

$$a_{i,j}^{(k)} = \binom{k}{j-i}\lambda^{k-j+i} \quad \forall j \geq i, \quad \textit{eta} \quad a_{i,j}^{(k)} = 0 \quad \forall j < i,$$

non $a_{i,j}^{(k)}$ *balioa* A^k *matrizearen i. ilaran eta j. zutabean hartzen duen balioa den.*

(b) Erabil emaitza hori frogatzeko $\lim_{k\to\infty} a_{i,j}^{(k)} = 0$ *dela edozein* $i, j = 1, \ldots, n$ *baliotarako.*

(a) Emaitza hori indukzioz frogatuko dugu.

Has gaitezen oinarrizko kasuarekin, $k = 1$. Alde batetik, $i = j$ bada, argi dago:

$$\binom{1}{j-i}\lambda^{1-j+i} = \binom{1}{0}\lambda^{1-0} = \lambda.$$

Gainera, $j = i + 1$ bada,

$$\binom{1}{j-i}\lambda^{1-j+i} = \binom{1}{1}\lambda^{0} = 1.$$

Azkenik, beste kasuetan argi dago 0 dela.

Froga dezagun indukziozko kasua. Suposatuko dugu egiazkoa dela k baliorako, eta froga dezagun $k+1$ baliorako. A eta A^k goi triangeluarrak direnez, $A^{k+1} = A^k A$ goi triangeluarra da. Hortaz, $j \geq i$ kasua frogatu behar da soilik. Has gaitezen $j = i$ kasuarekin:

$$a_{i,j}^{(k+1)} = (AA^k)_{i,j} = \sum_{r=1}^{n} a_{i,r}a_{r,j}^{(k)} = \lambda a_{i,i}^{(k)} \overset{IH}{=} \lambda\lambda^k = \lambda^{k+1}.$$

Jarraitzeko, $j > i$ kasua frogatuko dugu:

$$\begin{aligned}
a_{i,j}^{(k+1)} = (AA^k)_{i,j} &= \sum_{r=1}^{n} a_{i,r}a_{r,j}^{(k)} \\
&= \lambda a_{i,j}^{(k)} + a_{i+1,j}^{(k)} \\
&\overset{IH}{=} \lambda\binom{k}{j-i}\lambda^{k-j+i} + \binom{k}{j-(i+1)}\lambda^{k-j+(i+1)} \\
&= \left[\binom{k}{j-i} + \binom{k}{j-i-1}\right]\lambda^{k-j+i+1} \\
&= \binom{k+1}{j-i}\lambda^{(k+1)-j+i}.
\end{aligned}$$

Azkenengo berdintza binomioen errepikapen formularen ondorioa da.

(b) $j < i$ bada, limitea nabaria da. $j \geq i$ bada, aldiz,

$$|a_{i,j}^{(k)}| = \left|\binom{k}{j-i}\lambda^{k-j+i}\right| = \frac{|\lambda|^{i-j}}{(j-i)!}k(k-1)\cdots(k-j+i+1)|\lambda|^k \to 0.$$

Limitea 0 da $|\lambda| < 1$ baita, $k(k-1)\cdots(k-j+i+1)$ polinomioa k aldagaiarekiko baita eta $\frac{|\lambda|^{i-j}}{(j-i)!}$ balioak k balioarekiko menpekotasunik ez baitu.

Bosgarren ariketa-zerrendako (V-16) ariketa

(V-16) Gaussen koefiziente binomialak $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ *honela definitzen dira:*

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 1,$$
$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \frac{q^{n-1} - 1}{q^2 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{q^{n-r+1} - 1}{q^r - 1}, \ r = 1, 2, \ldots, n.$$

Adibidez,

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{q^4 - 1}{q - 1} \frac{q^3 - 1}{q2 - 1} = \frac{(q^2+1)(q+1)(q-1)(q^2+q+1)(q-1)}{(q-1)(q+1)(q-1)}$$
$$= (q^2+1)(q^2+q+1) = q^4 + q^3 + 2q^2 + q + 1.$$

(Beraz, Gaussen koefiziente binomialak ez dira zenbakiak funtzioak baizik. Baina sinplifikatzeagatik, ez da adierazten notazioan.)

(a) Kalkula itzazu $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(b) Froga ezazu batuketaren legea*:*

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ r-1 \end{bmatrix} q^{n+1-r} = \begin{bmatrix} n+1 \\ r \end{bmatrix}.$$

(c) Froga ezazu Gaussen koefiziente binomialak q-rekiko polinomioak direla.

(d) Froga ezazu:

$$\lim_{q \to 1} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \binom{n}{r}.$$

(e) Froga ezazu:

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-r \end{bmatrix}.$$

(f) Froga ezazu:

$$(1+x)(1+qx)(1+q^2x) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} qx^2 + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} q^3x^3.$$

(g) Froga ezazu:

$$\prod_{r=0}^{n-1} (1 + q^r x) = \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} q^{1+2+\ldots+(r-1)} x^r.$$

(h) Aurreko erabiliz, Newtonen binomioaren formularen beste froga bat eman ezazu.

Gaussen koefiziente binomialak $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ honela definitzen dira:

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 1,$$

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{q^n - 1}{q - 1}\frac{q^{n-1} - 1}{q^2 - 1} \cdots \frac{q^{n-r+1} - 1}{q^r - 1}, \ r = 1, 2, \ldots, n.$$

(a) Kalkula itzazu $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} &= 1, \\
\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} &= \frac{q^3 - 1}{q - 1} = q^2 + q + 1, \\
\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} &= \frac{q^3 - 1}{q - 1}\frac{q^2 - 1}{q^2 - 1} = q^2 + q + 1, \\
\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} &= \frac{q^3 - 1}{q - 1}\frac{q^2 - 1}{q^2 - 1}\frac{q - 1}{q^3 - 1} = 1.
\end{aligned}$$

(b) Froga ezazu *batuketaren legea*:

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ r-1 \end{bmatrix} q^{n+1-r} = \begin{bmatrix} n+1 \\ r \end{bmatrix}.$$

Alde batetik,

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ r \end{bmatrix} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}\frac{q^n - 1}{q^2 - 1} \cdots \frac{q^{n+2-r} - 1}{q^r - 1}.$$

Beste alde batetik,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ r-1 \end{bmatrix} q^{n+1-r} &= \frac{q^n - 1}{q - 1}\frac{q^{n-1} - 1}{q^2 - 1} \cdots \frac{q^{n-r+2} - 1}{q^{r-1} - 1}\frac{q^{n-r+1} - 1}{q^r - 1} \\
&+ \frac{q^n - 1}{q - 1}\frac{q^{n-1} - 1}{q^2 - 1} \cdots \frac{q^{n-r+2} - 1}{q^{r-1} - 1} q^{n+1-r} \\
&= \frac{q^n - 1}{q - 1}\frac{q^{n-1} - 1}{q^2 - 1} \cdots \frac{q^{n-r+2} - 1}{q^{r-1} - 1}\left(\frac{q^{n-r+1} - 1}{q^r - 1} + q^{n+1-r}\right) \\
&= \frac{q^n - 1}{q - 1}\frac{q^{n-1} - 1}{q^2 - 1} \cdots \frac{q^{n-r+2} - 1}{q^{r-1} - 1}\left(\frac{q^{n-r+1} - 1 + q^{n+1} - q^{n+1-r}}{q^r - 1}\right) \\
&= \frac{q^n - 1}{q - 1}\frac{q^{n-1} - 1}{q^2 - 1} \cdots \frac{q^{n-r+2} - 1}{q^{r-1} - 1}\frac{q^{n+1} - 1}{q^r - 1}.
\end{aligned}$$

(c) Froga ezazu Gaussen koefiziente binomialak q-rekiko polinomioak direla.

Ikus ditzagun lehenengo adibideak:

$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = 1$ eta $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \frac{q-1}{q-1} = 1$.

$\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} = 1$, $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \frac{q^2-1}{q-1} = q+1$, eta $\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} = \frac{q^2-1}{q-1}\frac{q-1}{q^2-1} = 1$.

$\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix} = 1$, $\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} = q^2+q+1$, $\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} = q^2+q+1$ eta $\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} = 1$, (a) atalean ikusi dugunez.

Froga dezagun indukzioz n balioarekiko.

Suposa dezagun $\begin{bmatrix}n\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}n\\1\end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix}n\\n\end{bmatrix}$ q balioarekiko polinomioak direla (indukzio hipotesia).

Froga dezagun $\begin{bmatrix}n+1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}n+1\\1\end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix}n+1\\n+1\end{bmatrix}$ q balioarekiko polinomioak direla.

Argi dago $\begin{bmatrix}n+1\\0\end{bmatrix}$ polinomio bat dela. Gainera, (b) atalagatik $\begin{bmatrix}n+1\\r\end{bmatrix}$ ere polinomioak direla $r \geq 1$ denean. Izan ere, $\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}n\\r-1\end{bmatrix}$ indukzio-hipotesiagatik polinomioak dira, eta q^{n+1-r} polinomioa denez, $\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}n\\r-1\end{bmatrix}q^{n+1-r}$ ere polinomioa da, hots, $\begin{bmatrix}n+1\\r\end{bmatrix}$ Gaussen koefiziente binomialak polinomioak direla frogatu dugu.

(d) Froga ezazu:

$$\lim_{q\to 1}\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix} = \binom{n}{r}.$$

L'Hôpitalen erregela erabiliz, $k = 1, 2, \dots, r$ denean,

$$\lim_{q\to 1}\frac{q^{n-k+1}-1}{q^k-1} = \lim_{q\to 1}\frac{(n-k+1)q^{n-k}}{kq^{k-1}} = \frac{n-k+1}{k}.$$

Beraz,

$$\lim_{q\to 1}\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix} = \lim_{q\to 1}\frac{q^n-1}{q-1}\frac{q^{n-1}-1}{q^2-1}\cdots\frac{q^{n-r+1}-1}{q^r-1} = \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\cdots\frac{n-r+1}{r} = \frac{n^{\underline{r}}}{r!} = \binom{n}{r}.$$

(e) Froga ezazu:

$$\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}n\\n-r\end{bmatrix}.$$

Suposa dezakegu $r = \min(r, n-r)$, orduan, $r \leq n-r$ denez,

$$\begin{bmatrix}n\\n-r\end{bmatrix} = \left(\frac{q^n-1}{q-1}\frac{q^{n-1}-1}{q^2-1}\cdots\frac{q^{n-r+1}-1}{q^r-1}\right)\left(\frac{q^{n-r}-1}{q^{r+1}-1}\frac{q^{n-r-1}-1}{q^{r+2}-1}\cdots\frac{q^{r+2}-1}{q^{n-r-1}-1}\frac{q^{r+1}-1}{q^{n-r}-1}\right) = \begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix}.$$

(f) Froga ezazu:

$$(1+x)(1+qx)(1+q^2x) = \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}x + \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}qx^2 + \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}q^3x^3.$$

(a) ataIaren emaitzak erabiliz,

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}x + \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}qx^2 + \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}q^3x^3 &= 1 + (q^2+q+1)x + (q^2+q+1)qx^2 + q^3x^3\\ &= 1 + q^2x + qx + x + q^3x^2 + q^2x^2 + qx^2 + q^3x^3\\ &= (1+x+qx^2+qx) + (q^2x + q^3x^2 + q^2x^2 + q^3x^3)\\ &= (1+x+qx^2+qx) + (1+qx+x+qx^2)q^2x\\ &= (1+x+qx+qx^2)(1+q^2x)\\ &= (1+x)(1+qx)(1+q^2x).\end{aligned}$$

(g) Froga ezazu:

$$\prod_{r=0}^{n-1}(1+q^r x) = \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} q^{1+2+\ldots+(r-1)} x^r.$$

Ikus ditzagun lehenengo adibideak:

$n=1$ denean, $(1+x) = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] + \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] x^1$ egiazkoa da.

Izan ere, $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] + \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] x^1 = 1 + x$.

$n=2$ denean, $(1+x)(1+qx) = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] + \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] x^1 + \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right] q^1 x^2$ egiazkoa da.

Izan ere, $\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] + \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] x^1 + \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right] q^1 x^2 = 1 + (q+1)x + qx^2 = 1 + qx + x + qx^2 = (1+x)(1+qx)$.

$n=3$ denean, $(1+x)(1+qx)(1+q^2x) = \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] + \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] x^1 + \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right] q^1 x^2 + \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \end{smallmatrix}\right] q^{1+2} x^3$ egiazkoa da.

Izan ere, (f) atalean ikusi dugu.

Froga dezagun indukzioz n balioarekiko.

Suposa dezagun n kasurako Indukzio Hipotesia [IH]:

$$\prod_{r=0}^{n-1}(1+q^r x) = \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} q^{1+2+\ldots+(r-1)} x^r.$$

Froga dezagun $n+1$ kasurako:

$$\prod_{r=0}^{n}(1+q^r x) = \sum_{r=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ r \end{bmatrix} q^{1+2+\ldots+(r-1)} x^r.$$

Izan ere,

$$\prod_{r=0}^{n}(1+q^r x) = \left(\prod_{r=0}^{n-1}(1+q^r x)\right)(1+q^n x) =$$

eta [IH] erabiliz,

$$= \left(\sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} q^{1+2+\ldots+(r-1)} x^r\right)(1+q^n x) = \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} q^{1+2+\ldots+(r-1)} x^r + \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} q^{1+2+\ldots+(r-1)+n} x^{r+1} =$$

eta x^r aldagaiaren koefizienteak batuz,

$$= \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} q^0 x^0 + \sum_{r=0}^{n}\left(\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ r-1 \end{bmatrix} q^{n-(r-1)}\right) q^{1+2+\ldots+(r-1)} x^r + \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} q^{1+2+\ldots+(n-1)+n} x^{n+1} =$$

eta (b) atala, $\left[\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ eta $\left[\begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ n+1 \end{smallmatrix}\right]$ erabiliz,

$$= \sum_{r=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ r \end{bmatrix} q^{1+2+\ldots+(r-1)} x^r.$$

(h) Aurreko atalak erabiliz, Newtonen binomioaren formularen beste froga bat eman ezazu.

Newtonen binomioa: $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ deduzitzeko (g) ataleko identitatean $q \to 1$era doan limitea aintzat hartu besterik ez da egin behar.

Izan ere, alde batetik

$$\lim_{q\to 1} \prod_{r=0}^{n-1} (1+q^r x) = \prod_{r=0}^{n-1} (1+x) = (1+x)^n.$$

Beste aldetik, (d) atalagatik,

$$\lim_{q\to 1} \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} q^{1+2+\ldots+(r-1)} x^r = \lim_{q\to 1} \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} x^r = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r.$$

A.6. Seigarren ariketa-zerrendako ebazpenak: Newtonen binomioa

Seigarren ariketa-zerrendako (VI-6) ariketa

(VI-6) Froga ezazu honako identitate hau:

$$\sum_{l=0}^{k} (-1)^l x^l (1+x)^n = (1+x)^{n-1}(1-(-x)^{k+1}).$$

Adierazpenaren bi ataletan x^k-ren koefizienteak konparatuz, idatz ezazu beste identitate bat koefiziente binomialak erabiliz.

Lehenengoz, egiazta dezagun identitatea. Izan bedi $b \equiv \sum_{l=0}^{k} (-1)^l x^l$, orduan:

$$b = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^k x^k,$$
$$xb = x - x^2 + x^3 - \ldots (-1)^k x^{k+1}.$$

Batura eginez, $(1+x)b = 1 + (-1)^k x^{k+1} = 1 - (-1)^{k+1} x^{k+1} = 1 - (-x)^{k+1}$; hortaz,

$$b(1+x)^n = (1+x)^{n-1} b(1+x) = (1+x)^{n-1} \left(1 - (-x)^{k+1}\right).$$

Adierazpenaren bi ataletan x^k-ren koefizienteak konparatuz, beste identitate bat berreskura dezakegu. Izan ere, Newtonen binomioa ezkerraldeko $(1+x)^n$ adierazpenean aplikatuz:

$$\sum_{l=0}^{k} (-1)^l x^l (1+x)^n = \left(\sum_{l=0}^{k} (-1)^l x^l\right) \left(\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r\right),$$

eta Newtonen binomioa $(1+x)^{n-1}$ eskuinaldeko adierazpenean:

$$(1+x)^{n-1}(1-(-x)^{k+1}) = \left(\sum_{s=0}^{n-1}\binom{n-1}{s}x^s\right)(1-(-x)^{k+1}).$$

Ezkerraldeko x^k-ri lotutako koefizientea adierazteko, (l,r) bikote posibleak batu behar ditugu, hau da,

$$\{(l,r)\in\mathbb{N}^2\ :\ l+r=k\} = \{(0,k),\ (1,k-1),\ \ldots,\ (k,0)\}.$$

Eskuinaldean x^k-ri lotutako koefizientea adierazteko era bakarra $\binom{n-1}{k}$ da. Beraz,

$$\binom{n-1}{k} = (-1)^0\binom{n}{k} + (-1)^1\binom{n}{k-1} + \ldots + (-1)^k\binom{n}{0} = \sum_{r=0}^{k}(-1)^{k-r}\binom{n}{r}.$$

Hau da, bosgarren ariketa-zerrendako (V-8) ariketan agertu zen konbinazio-identitatea berreskuratu dugu.

Seigarren ariketa-zerrendako (VI-7) ariketa

(VI-7)(†) Honako identitate hau erabiliz:

$$(1+x)^{-n}(1-x)^{-n} = (1-x^2)^{-n},$$

kalkula ezazu honako batura honen emaitza:

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n+k-1}{k}\binom{n+m-k-1}{m-k}.$$

Aplika dezagun Binomio Orokortuaren formula hiru ataletan, orduan:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-n}{k}x^k\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-n}{r}(-x)^r\right) = \left(\sum_{s=0}^{\infty}\binom{-n}{s}(-x^2)^s\right).$$

(iii) propietateagatik,

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{n+k-1}{k}x^k\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty}\binom{n+r-1}{r}x^r\right) = \left(\sum_{s=0}^{\infty}\binom{n+s-1}{s}x^{2s}\right).$$

Ezkerraldeko x^m-ri lotutako koefizientea adierazteko, (k,r) bikote posibleak batu behar ditugu, hau da,

$$\{(k,r)\in\mathbb{N}^2 \ : \ k+r=m\} = \{(0,m),\ (1,m-1),\ \ldots,\ (m,0)\}.$$

Eskuinaldean x^m-ri lotutako koefizientea adierazteko bi aukera daude m-ren paritatearen arabera. Beraz,

$$\begin{aligned}
&(-1)^0\binom{n-1}{0}\binom{n+m-1}{m} + (-1)^1\binom{n}{1}\binom{n+m-2}{m-1} + \ldots + (-1)^m\binom{n+m-1}{m}\binom{n-1}{0}\\
&= \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n+k-1}{k}\binom{n+m-k-1}{m-k} = \begin{cases} 0, & m \text{ bakoitia bada,}\\ \binom{n+m/2-1}{m/2}, & m \text{ bikoitia bada.}\end{cases}
\end{aligned}$$

Seigarren ariketa-zerrendako (VI-8) ariketa

(VI-8) (*American Mathematical Monthly*)(‡) Izan bitez $m,n\in\mathbb{N}^*$-n. Kalkula ezazu honako adierazpen honen emaitza:

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{n+k+1}\binom{m}{k}(1-y)^{n+k+1} + \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{m+k+1}\binom{n}{k}y^{m+k+1}.$$

Izan bitez,

$$A_0 = \sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{n+k+1}\binom{m}{k}(1-y)^{n+k+1},$$

eta

$$A_1 = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{m+k+1}\binom{n}{k}y^{m+k+1}.$$

A_0 sinplifikatzeko, kontuan har dezagun

$$\frac{(1-y)^{n+k+1}}{n+k+1} = \int_0^{1-y} t^{n+k}dt = \frac{t^{n+k+1}}{n+k+1}|_0^{1-y}.$$

Beraz,

$$\begin{aligned}
A_0 &= \sum_{k=0}^{m}\frac{(1-y)^{n+k+1}}{n+k+1}(-1)^k\binom{m}{k} = \sum_{k=0}^{m}\left(\int_0^{1-y} t^{n+k}dt\right)(-1)^k\binom{m}{k}\\
&= \int_0^{1-y}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}t^n t^k dt = \int_0^{1-y} t^n\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-t)^k dt.
\end{aligned}$$

Gogora dezagun Newtonen binomioa: $\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}(-t)^k = (1-t)^m$.

Beraz,

$$A_0 = \int_0^{1-y} t^n (1-t)^m dt.$$

Bestalde, A_1 sinplifikatzeko, kontuan har dezagun

$$\frac{y^{m+k+1}}{m+k+1} = \int_0^y t^{m+k} dt = \frac{t^{m+k+1}}{m+k+1}|_0^y.$$

Beraz,

$$\begin{aligned} A_1 &= \sum_{k=0}^{n} \frac{y^{m+k+1}}{m+k+1}(-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\int_0^y t^{m+k} dt \right) (-1)^k \binom{n}{k} \\ &= \int_0^y \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} t^m t^k dt = \int_0^y t^m \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-t)^k dt. \end{aligned}$$

Eta Newtonen binomioagatik, $t' = 1 - t$ aldagai aldaketa eginik:

$$A_1 = \int_0^y t^m (1-t)^n dt = \int_{1-y}^1 t^n (1-t)^m dt.$$

Azkenik, Beta funtzioaren propietateak erabiliz,

$$A_0 + A_1 = \int_0^1 t^n (1-t)^m dt = B(n+1, m+1) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)}{\Gamma(n+m+2)} = \frac{n!\ m!}{(n+m+1)!}.$$

A.7. Zazpigarren ariketa-zerrendako ebazpenak: koefiziente multinomialak

Zazpigarren ariketa-zerrendako (VII-2) ariketa

(VII-2) (Bola bereiziak kutxatan)

(a) Zenbat eratan bana daitezke zenbakidun 3 kutxatan $3n$ bola bereizgarriak, kutxa bakoitzean n bola egonda?

(b) Eta kutxa zenbakidunak ez badira?

(c) Zenbat eratan bana daitezke zenbakidun k kutxatan kn bola bereizgarriak, kutxa bakoitzean n bola egonda?

(d) Eta kutxa zenbakidunak ez badira?

(a) 3 zenbakidun kutxatan $3n$ bola bereizgarriren kokapena. Izan bitez $1, 2, \ldots, 3n$ bolen zenbakiak eta **1, 2** eta **3** kutxen zenbakiak.

1, 2 eta **3** izeneko kutxetan $1\ 2\ \ldots\ n\ n{+}1\ n{+}2\ \ldots\ 2n\ 2n{+}1\ 2n{+}2\ \ldots\ 3n$ bola bereizgarriren kokapenaren problema itzul daiteke segiden honako problema honetara: **1** osagaia n aldiz, **2** osagaia n aldiz eta **3** osagaia n aldiz errepikatuz osatzen den $3n$ luzerako segidaren ordenazioak. Adibidez, $n = 2$ denean, 6 bola bereizgarri ditugu 3 kutxatan kokatzeko, eta honako itzulpen hauek egingo genituzke:

1	**2**	**3**
1 5	3 6	2 4

$\Leftrightarrow$ **132312**

1	**2**	**3**
1 2	3 4	5 6

$\Leftrightarrow$ **112233**

1	**2**	**3**
3 4	1 2	5 6

$\Leftrightarrow$ **221133**

$3n$ bola bereizgarri ditugunean, 3 kutxatan kokatzeko adibidea honako hau izango da:

1	**2**	**3**
$1\ \ldots\ n$	$n+1\ \ldots\ 2n$	$2n+1\ \ldots\ 3n$

$\Leftrightarrow \mathbf{1}\ldots\mathbf{1}\mathbf{2}\ldots\mathbf{2}\mathbf{3}\ldots\mathbf{3}.$

Oro har, $a_1a_2\ldots a_{3n}$ segida dugu, non a_i zenbakiak i. bolari dagokion kutxa adierazten duen, $a_i \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}$, $\forall i = 1, 2, \ldots, 3n$.

Beraz, kopurua $3n$ osagai horien errepikatuzko permutazioak dira:

$$PR_{3n}^{n,n,n} = \binom{3n}{n, n, n}.$$

(b) 3 kutxa bereizezinetan $3n$ bola bereizgarrien kokapena. Izan bitez $1, 2, \ldots, 3n$ bolen zenbakiak. Kutxek zenbakirik ez dutenez, orain goian aipatutako bigarren eta hirugarren adibideak berdin-berdinak (bereizezinak) dira. Zenbat errepikapen daude aurreko egoerarekin konparatuz? Kokapen bat finkatzen badugu, kutxak berrordenatuz soilik lortzen dira emaitza berdin-berdinak. Beraz, (b) ataleko kopurua zera da: (a) atalekoa zati kutxen berrordenatze posibleak, hots, kutxa-kopuruaren permutazioak. Horregatik,

$$\frac{1}{3!}\binom{3n}{n, n, n}.$$

Beste era batean esanda, (b) ataleko egoeratik (a) ataleko egoerara pasatzeko kutxen permutazioak kontuan hartu behar dira, hots,

$$(b) \times 3! = (a) \Rightarrow (b) = \frac{1}{3!} \times (a).$$

Zazpigarren ariketa-zerrendako (VII-5) ariketa

(VII-5)

- *(†) Froga ezazu $[(n!)!]^{n+1}$ zenbakiak $((n+1)!)!$ zatitzen duela.*
- *Froga ezazu $[(n!)!]^{n+1}$ zenbakiak $((n^2)!)!$ zatitzen duela.*

$n = 1$ denean, berehalakoa da. $n \geq 2$ denean, bi urratsetan frogatuko dugu: lehenik $[(n!)!]^{n+1}$ zenbakiak $((n+1)!)!$ zatitzen duela, eta, bigarrenik, azken horrek $[(n^2)!]!$ zatitzen duela.

Lehenik, $(n!)!$ zenbakia $n+1$ aldiz agertarazteko koefiziente multinomiala erabil dezakegu, $n! + n! + \ldots + n! = (n+1)n! = (n+1)!$ denez, honako zenbaki hau ondo definituta dago:

$$\binom{(n+1)!}{n!, n!, \ldots, n!} = \frac{((n+1)!)!}{(n!)! \cdot (n!)! \cdots (n!)!} = \frac{((n+1)!)!}{[(n!)!]^{n+1}} \in \mathbb{N}.$$

Beraz, argi dago, $[(n!)!]^{n+1} \mid ((n+1)!)!$.

Gainera $n^2 \geq n+1$ denez, $(n+1)!$-k zatitzen du $n^2!$, eta hortik $((n+1)!)!$-k $(n^2!)!$ zatitzen duela erraz froga daiteke. Hortaz, $[(n!)!]^{n+1} | ((n+1)!)!$ eta $((n+1)!)! | (n^2!)!$ dugunez, $[(n!)!]^{n+1} | (n^2!)!$.

A.8. Zortzigarren ariketa-zerrendako ebazpenak: funtzio sortzaileak eta errepikapenak

Zortzigarren ariketa-zerrendako (VIII-6) ariketa

(VIII-6) Izan bedi a_n, dado bat lau aldiz botatzen denean n puntu lortzeko era kopurua. Kalkula ezazu (a_n)-ren funtzio sortzailea, eta a_{12} eta a_{20} balioak.

Problema horren itzulpena egin daiteke. Izan ere, a_n balioa, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$ ekuazioaren soluzio kopurua da, non $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ baitaude.

Funtzio sortzailea, $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, kalkulatzeko Funtzio Sortzailearen Teorema (3.4. teorema) erabiliko dugu.

$$
\begin{aligned}
g(x) =& (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^4 = x^4(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^4 \\
=& x^4 \left(\frac{1 - x^6}{1 - x}\right)^4 = x^4(1 - x^6)^4(1 - x)^{-4} \\
=& x^4 \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} (-1)^k x^{6k} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{3 + l}{l} x^l \\
=& x^4 \left(\binom{4}{0} - \binom{4}{1} x^6 + \binom{4}{2} x^{12} - \binom{4}{3} x^{18} + \binom{4}{4} x^{24} \right) \left(\binom{3}{0} + \binom{4}{1} x + \binom{5}{2} x^2 + \dots \right).
\end{aligned}
$$

Beraz, a_{12} eta a_{20} koefizienteak kalkulatzeko, kontuan hartu behar dira (k, l) bikote posibleak non $n = 4 + 6k + l$ baitira.

Lehenengoz, 12 puntu lortzeko aukera kopurua, $n = 12$ kasua da.

$$12 = 4 + 6k + l \Leftrightarrow 8 = 6k + l \Leftrightarrow (k, l) \in I_{12} = \{(0, 8),\ (1, 2)\}.$$

Beraz,

$$
\begin{aligned}
a_{12} =& \sum_{(k,l) \in I_{12}} \binom{4}{k} (-1)^k \binom{3 + l}{l} = \binom{4}{0}\binom{3 + 8}{8} - \binom{4}{1}\binom{3 + 2}{2} \\
=& \binom{11}{3} - 4\binom{5}{2} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3!} - 4\frac{5 \cdot 4}{2!} = 11 \cdot 5 \cdot 3 - 40 = 165 - 40 = 125.
\end{aligned}
$$

Eta, 20 puntu lortzeko aukera kopurua, $n = 20$ kasua da.

$$20 = 4 + 6k + l \Leftrightarrow 16 = 6k + l \Leftrightarrow (k, l) \in I_{16} = \{(0, 16),\ (1, 10),\ (2, 4)\}$$

$$
\begin{aligned}
a_{20} &= \sum_{(k,l)\in I_{20}} \binom{4}{k}(-1)^k\binom{3+l}{l} = \binom{4}{0}\binom{3+16}{16} - \binom{4}{1}\binom{3+10}{10} + \binom{4}{2}\binom{3+4}{4} \\
&= \binom{19}{3} - 4\binom{13}{3} + \binom{4}{2}\binom{7}{3} = \frac{19\cdot 18\cdot 17}{3!} - 4\frac{13\cdot 12\cdot 11}{3!} + 6\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3!} \\
&= 19\cdot 3\cdot 17 - 4\cdot 13\cdot 2\cdot 11 + 6\cdot 35 = 35.
\end{aligned}
$$

Zortzigarren ariketa-zerrendako (VIII-9) ariketa

Izan bitez m zenbaki arrunta eta, a_n zenbakia, 10^m baino hertsiki txikiagoak diren zenbaki oso ez-negatiboen kopurua eta 10 oinarrian bere digituen batura n-ren berdina dena, $n \geq 0$. Kalkula itzazu:

(a) a_n-ren funtzio sortzailea.

(b) a_n-ren adierazpen esplizitua.

(c) a_{21}-en balioa $m = 8$ denean.

(d) (†) Batuketa hauen emaitzak:

$$\sum_{n\geq 0} a_n, \quad \sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n, \quad \sum_{n\geq 0} n a_n.$$

(a) a_n segidaren funtzio sortzailea lortzeko, kontuan izango dugu $[0, 10^m - 1] \cap \mathbb{N}^*$ multzoko zenbakiak $d_m d_{m-1} \ldots d_1$ bezala adieraz daitekeela, non

$$d_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}. \tag{A.3}$$

Hortaz, a_n balioa honako ekuazio honen soluzio kopurua da:

$$d_1 + \cdots + d_m = n,$$

non ezezagunek (A.3) betetzen duten. Funtzio Sortzailearen Teorema (3.4. teorema) erabiliz:

$$g_a(x) = (1 + x + \cdots + x^9)^m$$

dugu.

(b) Adierazpen esplizitua lortzeko kontuan izango dugu:

$$1 + x + \cdots + x^9 = \frac{1 - x^{10}}{1 - x},$$

eta

$$\frac{1}{(1-x)^m} = (1-x)^{-m} = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{-m}{i}(-x)^i = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{m+i-1}{i}x^i.$$

Hortaz,

$$g_a(x) = \frac{(1-x^{10})^m}{(1-x)^m} = \left(\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}(-1)^i x^{10i}\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{\infty}\binom{m+j-1}{j}x^j\right)$$
$$= \sum_{n\geq 0}\left[\sum_{i=0}^{\min\{\lfloor n/10\rfloor,m\}}(-1)^i\binom{m}{i}\binom{m+n-10i-1}{n-10i}\right]x^n.$$

Horrenbestez,

$$a_n = \sum_{i=0}^{\min\{\lfloor n/10\rfloor,m\}}(-1)^i\binom{m}{i}\binom{m+n-10i-1}{n-10i}. \tag{A.4}$$

(c) a_{21} balioa kalkulatzeko $m=8$ denean bi era ikusiko ditugu:

- $(1+x+\cdots+x^9)^8$ polinomioa software sinbolikoaren bidez kalkulatzea eta x^{21} monomioaren koefizientea begiratzea, kasu honetan 929672.
- (A.4) erabiliz:

$$a_{21} = \binom{8}{0}\binom{28}{21} - \binom{8}{1}\binom{18}{11} + \binom{8}{2}\binom{8}{1} = 929672.$$

(d) Batuketak kalkulatzeko kontuan izango dugu

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n = g_a(x) = (1+x+\cdots+x^9)^m$$

dela. Hortaz:

- $\sum_{n\geq 0} a_n = \sum_{n\geq 0} a_n 1^n = g_a(1) = 10^m$.
- $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n = g_a(-1) = 0^m = 0$.
- Hirugarren batukaria kalkulatzeko, kontuan izango dugu:

$$\sum_{n\geq 0} n a_n x^{n-1} = g_a'(x) = m(1+2x+\cdots+9x^8)(1+x+\cdots+x^9)^{m-1}.$$

Ondorioz,

$$\sum_{n\geq 0} n a_n = \sum_{n\geq 0} n a_n 1^{n-1} = g_1'(x) = m(1+2+\cdots+9)10^{m-1} = 45m10^{m-1}.$$

Zortzigarren ariketa-zerrendako (VIII-11) ariketa

Izan bedi a_n ondoz ondoko zenbakirik ez duten $\{1, 2, \ldots, n\}$tik ateratako azpimultzo kopurua.

(a) Kalkula itzazu $a_1,\ a_2,\ a_3$.

(b) Aurkitu ezazu errepikapen-erlazioa a_n-rako, $n \geq 2$.

(c) Esleitu a_0-ri balio bat arrazoia justifikatuz.

(d) Kalkula ezazu (a_n)-ren funtzio sortzailea.

(e) Kalkula ezazu a_n.

(a) Kalkula ditzagun segidaren lehenengo lau gaiak:

- $a_1 = 2$; izan ere, $\emptyset$ eta $\{1\}$ betetzen dute ondoz ondoko zenbakirik ez izatearen baldintza.
- $a_2 = 3$; izan ere, $\emptyset$, $\{1\}$ eta $\{2\}$ betetzen dute ondoz ondoko zenbakirik ez izatearen baldintza.
- $a_3 = 5$; izan ere, $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ eta $\{1, 3\}$ betetzen dute ondoz ondoko zenbakirik ez izatearen baldintza.

(b) $\{1, 2, \ldots, n\}$ multzoko ondoz ondoko zenbakirik gabeko azpimultzoak zenbatzeko kontsideratuko dugu honako partiketa hau:

- n ez duten azpimultzoak. Argi dago ondoz ondoko zenbakirik gabeko $\{1, ..., n-1\}$-ren azpimultzo kopurua a_{n-1} dela.
- n duten azpimultzoak. n badago ezin da $n-1$ egon, baina ondoz ondoko zenbakirik ez egoteaz gain ez dugu beste murrizketarik $\{1, 2, \ldots, n-2\}$ zenbakiekin. Hortaz, problema baliokidea da $\{1, 2, \ldots, n-2\}$ren azpimultzoak ondoz ondoko zenbakirik gabe zenbatzea. Hortaz, a_{n-2} azpimultzo ditugu.

Partiketa bat denez, batuketaren erregelagatik honako errepikapen erlazio hau ondoriozta daiteke:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

(c) Errepikapen erlazioa $n = 2$ balioarekin erabiliz:

$$a_0 = a_2 - a_1 = 3 - 2 = 1.$$

(d) Errepikapen erlazioa erabiliz erraz kalkula daiteke funtzio sortzailea:

$$\begin{aligned}
g_a(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n &= 1 + 2x + \sum_{n\geq 2} a_n x^n \\
&\overset{EE}{=} 1 + 2x + \sum_{n\geq 2} (a_{n-1} + a_{n-2}) x^n \\
&= 1 + 2x + x \sum_{n\geq 2} a_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n\geq 2} a_{n-2} x^{n-2} \\
&= 1 + 2x + x(g_a(x) - 1) + x^2 g_a(x) \\
&= 1 + x + (x + x^2) g_a(x).
\end{aligned}$$

Hortaz,

$$g_a(x) = \frac{1+x}{1-x-x^2}.$$

(e) Hasteko,

$$1 - x - x^2 = (1 - r^+ x)(1 - r^- x)$$

dela erabiliko dugu, non $r^{\pm}$ balioak $x^2 - x - 1$ polinomioaren erroak diren; hau da,

$$r^{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Hortaz,

$$\frac{1+x}{1-x-x^2} = \frac{A}{1 - r^+ x} + \frac{B}{1 - r^- x},$$

non

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ -r^- A - r^+ B = 1. \end{cases}$$

Horrenbestez,

$$A = \frac{r^+ + 1}{r^+ - r^-} = \frac{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5} + 5}{10} = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}.$$

Ondorioz,

$$B = 1 - A = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10}.$$

Kontuan izanik,

$$g_a(x) = \sum_{n\geq 0} \big(A(r^+)^n + B(r^-)^n \big) x^n$$

dela eta funtzio sortzailearen bakartasuna erabiliz:

$$a_n = A(r^+)^n + B(r^-)^n = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

A.9. Bederatzigarren ariketa-zerrendako ebazpenak: Fibonacciren zenbakiak

Bederatzigarren ariketa-zerrendako (IX-11) ariketa

(IX-11) (Cassini eta Simson) Froga ezazu

$$F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2 = \pm 1.$$

Zein dira + eta − zeinuei dagozkien n balioak?

Ikus ditzagun lehenengo adibideak:

$$\begin{aligned}
n &= 1, \;\; F_1F_3 - F_2^2 = 1 \cdot 2 - 1^2 = 2 - 1 = +1, \\
n &= 2, \;\; F_2F_4 - F_3^2 = 1 \cdot 3 - 2^2 = 3 - 4 = -1, \\
n &= 3, \;\; F_3F_5 - F_4^2 = 2 \cdot 5 - 3^2 = 10 - 9 = +1, \\
n &= 4, \;\; F_4F_6 - F_5^2 = 3 \cdot 8 - 5^2 = 24 - 25 = -1. \\
&\;\;\vdots
\end{aligned}$$

Beraz, aierua da $F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$ dela.

Froga dezagun indukzioz:

Lehenengo kasua egiazkoa da. Demagun egiazkoa dela $n-1$ kasurako, hots, $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ (indukzio-hipotesia, IH). Froga dezagun n kasurako:

$$\begin{aligned}
F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2 &=^{[EE]} F_n(F_{n+1} + F_n) - F_{n+1}^2 =^{[EE]} F_nF_{n+1} + F_n^2 - (F_n + F_{n-1})F_{n+1} \\
&= -(F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2) =^{[IH]} -(-1)^n = (-1)^{n+1},
\end{aligned}$$

non EE Fibonacciren $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ errepikapen erlazioa baita.

Bederatzigarren ariketa-zerrendako (IX-14) ariketa

(IX-14) Aurreko formula erlazio-multzo baten adibidea baino ez da:

$$F_{n+3} = 2F_{n+1} + F_n,$$

$$F_{n+4} = 3F_{n+1} + 2F_n,$$

$$F_{n+5} = 5F_{n+1} + 3F_n,$$

$$\dots$$

Froga ezazu honako formula orokor hau:

$$F_{n+m} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n,$$

eta ondoriozta ezazu n guztietarako F_{kn} balioa F_n zenbakiaren multiploa dela.

(a) Froga dezagun $F_{n+m} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n$ formula (2 mailako) indukzioz m balioarekiko:

Lehenengo kasua, $m = 1$ denean, egiazkoa da n guztietarako; izan ere, $F_1 F_{n+1} + F_0 F_n = F_{n+1}$.

Bigarren kasua, $m = 2$ denean, egiazkoa da n guztietarako; izan ere, $F_2 F_{n+1} + F_1 F_n = F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$.

Demagun egiazkoa dela $m - 2$ eta $m - 1$ kasuetarako, hots,
$F_{n+m-2} = F_{m-2} F_{n+1} + F_{m-3} F_n$ (1. indukzio-hipotesia) eta
$F_{n+m-1} = F_{m-1} F_{n+1} + F_{m-2} F_n$ (2. indukzio-hipotesia).

Froga dezagun m kasurako:

$$\begin{aligned} F_{n+m} &=^{[EE]} F_{n+m-1} + F_{n+m-2} =^{[IH]} (F_{m-1}F_{n+1} + F_{m-2}F_n) + (F_{m-2}F_{n+1} + F_{m-3}F_n) = \\ &= F_{n+1}(F_{m-1} + F_{m-2}) + F_n(F_{m-2} + F_{m-3}) =^{[EE]} F_{n+1}F_m + F_nF_{m-1}. \end{aligned}$$

(b) Froga dezagun $F_n | F_{kn}$.

$$F_{kn} = F_{kn-n+n} = F_{n(k-1)+n}.$$

(a) ataleko emaitza erabiliz, non $n := (k-1)n$ eta $m := n$ baitira,

$$F_{kn} = F_{n(k-1)+n} = F_n F_{(k-1)n+1} + F_{n-1} F_{(k-1)n}. \tag{A.5}$$

Indukzioz k balioarekiko froga dezakegu:

Lehenengo kasuan, $k = 1$ denean, egiazkoa da; izan ere, $F_n|F_n$.

Demagun egiazkoa dela $k - 1$ kasurako, hau da, $F_n|F_{n(k-1)}$.

Orduan, argi dago $F_n|F_{kn}$; izan ere, $F_n|F_nF_{(k-1)n+1}$ berehalakoa da eta $F_n|F_{n-1}F_{(k-1)n}$ indukzio-hipotesiagatik. Beraz, (A.5) ekuazioagatik, emaitza frogatuta geratzen da.

Bederatzigarren ariketa-zerrendako (IX-15) ariketa

(IX-15) (Lucas eta Catalan) Froga ezazu:

$$F_{n-1}^2 + F_n^2 = F_{2n-1}.$$

Froga dezagun (IX-14) ariketaren (a) emaitza erabiliz, non $n := n - 1$ eta $m := n$ baitira,

$$F_{2n-1} = F_{(n-1)+n} = F_nF_n + F_{n-1}F_{n-1}.$$

Bederatzigarren ariketa-zerrendako (IX-16) ariketa

(IX-16 (Lucas eta Catalan) Froga ezazu:

$$F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}.$$

Froga dezagun (IX-14) ariketaren (a) emaitza erabiliz, non $n := n$ eta $m := n$ baitira,

$$F_{2n} = F_{n+n} = F_nF_{n+1} + F_{n-1}F_n =^{EE} (F_{n+1} - F_{n-1})F_{n+1} + F_{n-1}(F_{n+1} - F_{n-1}) = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2.$$

A.10. Hamargarren ariketa-zerrendako ebazpenak: zenbaki-partiketak

Hamargarren ariketa-zerrendako (X-2) b) ariketa

> *(X-2) (†) (Andrews) Froga ezazu:*
>
> *b)* $p_n \leq p_{n-1} + p_n^{\langle k \rangle} + p_{n-k}$.
>
> Aurreko ariketa lagungarri izan ahal zaizu.

Sailka dezagun p_n, n zenbakiaren partiketa, 1 zenbakia dagoen ala ez aintzat hartuta:

$$\begin{aligned} A_1 :=& \text{ gutxienez 1 behin duten partiketen bilduma} \\ A_2 :=& \text{ 1 zenbakirik ez duten partiketen bilduma} \\ =& \text{ zati guztiak 2 edo handiagoak dituzten partiketen bilduma} \end{aligned}$$

p_n-ren $\{A_1, A_2\}$ partiketa ondo definituta dago. Alde batetik, argi dago

$$c(A_1) = p_{n-1}.$$

Bestalde, A_2 zati kopuruaren arabera berriro sailkatuko dugu:

$$\begin{aligned} A_{21} :=& \text{ zati guztiak 2 edo handiagoak eta } k \text{ zati edo gutxiago duten partiketen bilduma,} \\ A_{22} :=& \text{ zati guztiak 2 edo handiagoak eta } k \text{ zati baino gehiago duten partiketen bilduma.} \end{aligned}$$

A_2-ren $\{A_{21}, A_{22}\}$ partiketa ondo definituta dago. Egiazta daitekeenez, $p_n^{\langle k \rangle}$ zenbakia n-ren gehienez k zati duten partiketa kopurua dela erabiliz:

$$\begin{aligned} c(A_{21}) &\leq p_n^{\langle k \rangle}, \\ c(A_{22}) &\leq p_{n-k}. \end{aligned}$$

A_{22} esanahiagatik eta Ferreren diagraman oinarrituz, k *puntu* ezaba daitezke eta gainontzeko $n-k$ puntuen partiketa geratzen da.

$$\begin{array}{rlllll} (1) & \bullet & \bullet & \circ & \circ & \circ \\ (2) & \bullet & \bullet & \circ & \circ & \\ & \vdots & & & & \\ (k) & \bullet & \bullet & \circ & & \\ (k+1) & \circ & \circ & \circ & & \\ & \vdots & & & & \end{array}$$

Azkenik,

$$p_n = c(A_1) + c(A_{21}) + c(A_{22}) \leq p_{n-1} + p_n^{\langle k \rangle} + p_{n-k}.$$

A.11. Hamaikagarren ariketa-zerrendako ebazpenak: Stirlingen eta Catalanen zenbakiak

Hamaikagarren ariketa-zerrendako (XI-5) ariketa

(XI-5) Zinema-areto baten sarrerak 5 eurokoak dira. Sarrerak saltzen hastean, kutxan ez dago kanbiorik. Zinema-aretoaren aurrean, m pertsona daude, bakoitzak 5 euroko billetea duena, eta beste n pertsona, bakoitzak 10 euroko billetea duena, $n \leq m$. Zenbat eratan ordena daitezke $m+n$ pertsonak ilara batean kutxa kanbio gabe gera ez dadin? Ariketa honen eta aurrekoaren artean erlaziorik ba al dago?

Ariketa hau gorabehera ibilbide berezien aplikazioa da. Izan ere, OX ardatzean pertsonak adieraziko ditugu eta OY ardatzean *gora* 5 euro duen kasuan eta *behera* 10 euro duenean. Horrela, problemaren helburua kutxa kanbiorik gabe geratzea denez, *gorabehera ibilbide bereziak* zenbatu behar ditugu. Ibilbidearen hasiera $(0,0)$ da (kutxan kanbiorik ez dagoelako), eta, amaieran, $(p,q) = (m+n, m-n)$ posizioan egongo gara.

Gogora ditzagun $c(\mathcal{I}_{p,q}) = C_{p,\frac{p+q}{2}}$ eta $c(\overline{\mathcal{I}}^*_{p,q}) = c(\mathcal{I}_{p,q+2}) = C_{p,\frac{p+q+2}{2}}$ direla, non $\mathcal{I}_{p,q}$ eta $\overline{\mathcal{I}}^*_{p,q}$, $(0,0)$tik (p,q)ra doazen gorabehera ibilbideak eta Dyckenak ez diren gorabehera ibilbide baitira, hurrenez hurren. Gogoratu Dyckenak ez diren ibilbideak kontatzeko islapen argudioa erabiltzen dela, eta $(0,0)$ eta $(p,-q-2)$ dauden gorabehera ibilbideak kontatzearen baliokidea dela. Beraz, $\mathcal{I}^*_{p,q}$ gorabehera ibilbide berezien multzoaren kardinala honako hau da:

$$\begin{aligned} c(\mathcal{I}^*_{p,q}) =& c(\mathcal{I}_{p,q}) - c(\overline{\mathcal{I}}^*_{p,q}) = c(\mathcal{I}_{m+n,m-n}) - c(\overline{\mathcal{I}}^*_{m+n,m-n}) = C_{m+n,m} - C_{m+n,m+1} \\ =& \binom{m+n}{m} - \binom{m+n}{m+1} = \binom{m+n}{m}\left(1 - \frac{n}{m+1}\right). \end{aligned}$$

Gainera, gorabehera ibilbide berezi bakoitzean, 5 euro duten m pertsonak eta 10 euro duten n pertsonak berrordenatu daitezke, $m! \cdot n!$ eratan. Hori dela eta, ariketaren erantzuna honako hau da:

$$m! \cdot n! \cdot c(\mathcal{I}^*_{p,q}) = m! \cdot n! \cdot \Big(c(\mathcal{I}_{p,q}) - c(\overline{\mathcal{I}}^*_{p,q})\Big) = (m+n)! \left(1 - \frac{n}{m+1}\right).$$

Hamaikagarren ariketa-zerrendako (XI-11) ariketa

(XI-11) (‡) Froga ezazu $n \geq 1$ guztietarako

$$(e^x - 1)^n = \left\{ {n \atop n} \right\} \frac{n!}{n!} x^n + \left\{ {n+1 \atop n} \right\} \frac{n!}{(n+1)!} x^{n+1} + \ldots .$$

Froga:

$$\begin{aligned}
(e^x - 1)^n &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k - 1 \right)^n = \left(\frac{1}{1!} x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \ldots + \frac{1}{k!} x^k + \ldots \right)^n \\
&= \left(\frac{1}{1!} x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \ldots \right) \left(\frac{1}{1!} x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \ldots \right) \overset{(n)}{\cdots} \left(\frac{1}{1!} x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \ldots \right) \\
&= \left(\frac{1}{1!} \cdot \overset{(n)}{\cdots} \cdot \frac{1}{1!} \right) x^n \\
&+ \left(\frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{1!} \cdot \overset{(n)}{\cdots} \frac{1}{1!} + \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{1!} \cdot \overset{(n)}{\cdots} \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{1!} \cdot \overset{(n)}{\cdots} \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{2!} \right) x^{n+1} \\
&+ \left(\frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{1!} \cdot \overset{(n)}{\cdots} \cdot \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{1!} \cdot \overset{(n)}{\cdots} \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{3!} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{1!} \cdot \overset{(n)}{\cdots} \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{1!} \cdot \overset{(n)}{\cdots} \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2!} \right) x^{n+2} \\
&+ \ldots .
\end{aligned}$$

Beraz,

$$\begin{aligned}
(e^x - 1)^n &= \sum_{k=n}^{\infty} \left(\sum_{\substack{r_1 + r_2 + \ldots + r_n = k \\ r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{N}}} \frac{1}{r_1!} \frac{1}{r_2!} \cdots \frac{1}{r_n!} \right) x^k \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{\substack{r_1 + r_2 + \ldots + r_n = k \\ r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{N}}} \frac{k!}{r_1! r_2! \cdots r_n!} \right) x^k \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{\substack{r_1 + r_2 + \ldots + r_n = k \\ r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{N}}} \binom{k}{r_1, r_2, \ldots, r_n} \right) x^k
\end{aligned}$$

(ikusi (XI-8) ariketa, berehalakoa da esanahi konbinatorioari erreparatuz)

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!} n! \left\{ {k \atop n} \right\} x^k .$$

Hamaikagarren ariketa-zerrendako (XI-12) ariketa

(XI-12) (†) Froga ezazu $k \geq n \geq 1$ guztietarako

$$n!\left\{ {k \atop n} \right\} = \binom{n}{n} n^k - \binom{n}{n-1}(n-1)^k + \ldots + (-1)^n \binom{n}{0}(n-n)^k. \tag{A.6}$$

1. froga (indukzioz (k, n) balioekiko ordena lexikografikoa erabiliz):
Oinarrizko kasua, $k = n$, (A.6) identitatea Lucasen identitatearen ondorioa da (ikusi (VI-5) ariketa). Izan ere $\left\{ {n \atop n} \right\} = 1$ eta:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{n-i}(n-i)^k = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n+j} \binom{n}{j} j^k = n!.$$

Ohartu $k < n$ bada, (A.6) identitatea Lucasen identitatea erabiliz ere froga daitekeela; izan ere, $\left\{ {k \atop n} \right\} = 0$ kasu horretan.

Jarraitzeko, suposatuko dugu $k-1$ baliorako frogatu dugula edozein $n \leq k-1$ izanik. Frogatuko dugu (k, n) balioetarako.

Indukzio hipotesitik honako berdintza hauek lortzen dira:

$$n!\left\{ {k-1 \atop n} \right\} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{n-i}(n-i)^{k-1}, \quad (n-1)!\left\{ {k-1 \atop n-1} \right\} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{n-1-i}(n-1-i)^{k-1}.$$

Hortaz, Stirlingen zenbakien errepikapen erlazioa eta koefiziente binomialen errepikapen erlazioa erabiliz:

$$\begin{aligned}
n!\left\{ {k \atop n} \right\} &= n!\left[n\left\{ {k-1 \atop n} \right\} + \left\{ {k-1 \atop n-1} \right\} \right] \\
&= n\left[n!\left\{ {k-1 \atop n} \right\} + (n-1)!\left\{ {k-1 \atop n-1} \right\} \right] \\
&= n\left[\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{n-i}(n-i)^{k-1} + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{n-1-i}(n-1-i)^{k-1} \right] \\
&= \binom{n}{n} n^k + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i n \left[\binom{n}{n-i} - \binom{n-1}{n-i} \right] (n-i)^{k-1} \\
&= \binom{n}{n} n^k + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i n \binom{n-1}{n-i-1}(n-i)^{k-1} \\
&= \binom{n}{n} n^k + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \binom{n}{n-i}(n-i)^k \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{n-i}(n-i)^k.
\end{aligned}$$

2. froga (esanahi konbinatorioa eta inklusio-esklusio printzipioa erabiliz):
Izen bedi $\Omega := k$ bola bereizgarri n zenbakidun kutxatan sartzeko aukerak. Orduan, $c(\Omega) = n^k$.
Izen bedi $A := k$ bola bereizgarri n zenbakidun kutxatan sartzeko aukerak, kutxa hutsik geratu gabe. Dakigunez, $c(A) = n!\left\{{k \atop n}\right\}$.
Aintzat har dezagun $\overline{A} = \Omega - A$ multzoaren sailkapena honako irizpide honi jarraituz: hutsik dagoen kutxa zehaztea. Horrela, defini ditzagun $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$H_i := i. \text{ kutxa hutsik geratuz, } k \text{ bola bereizgarri } n \text{ zenbakidun kutxatan sartzeko erak.}$$

Orduan, $\overline{A} = H_1 \cup H_2 \cup \ldots H_n$ denez,

$$c(A) = c(\overline{H_1 \cup H_2 \cup \ldots H_n}) = c(\Omega) - c(H_1 \cup H_2 \cup \ldots H_n).$$

Eta inklusio-esklusio printzipioa (1.1. teorema) erabiliz,

$$= c(\Omega) -$$
$$\left[\sum_{i=1}^{n} c(H_i) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} c(H_{i_1} \cap H_{i_2}) + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} c(H_{i_1} \cap H_{i_2} \cap H_{i_3}) \ldots + (-1)^{n-1} c(H_1 \cap H_2 \ldots \cap H_n)\right].$$

Kontuan har ditzagun honako emaitza hauek:

$$\begin{aligned}
&c(\Omega) = n^k,\\
&c(H_i) = (n-1)^k,\\
&c(H_{i_1} \cap H_{i_2}) = (n-2)^k,\\
&c(H_{i_1} \cap H_{i_2} \cap H_{i_3}) = (n-3)^k,\\
&\vdots\\
&c(H_{i_1} \cap H_{i_2} \ldots \cap H_{i_j}) = (n-j)^k,\\
&\vdots\\
&c(H_1 \cap H_2 \ldots \cap H_n) = (n-n)^k.
\end{aligned}$$

Hortaz,

$$\begin{aligned}
c(A) &= n^k - n(n-1)^k + \binom{n}{2}(n-2)^k - \binom{n}{3}(n-3)^k + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}(n-n)^k\\
&= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)^k = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{n-j} (n-j)^k.
\end{aligned}$$

3. froga ((XI-11) ariketa erabiliz):

$$(e^x - 1)^n = \sum_{k=n}^{\infty} \left\{{k \atop n}\right\} \frac{n!}{k!} x^k.$$

$(e^x-1)^n$ zera da: $a_k = \left\{ {k \atop n} \right\} n!$ segidari lotutako funtzio sortzaile esponentziala, hau da, $(e^x-1)^n$ potentzia seriearen garapenean, $\frac{x^k}{k!}$ osagaiari dagokion koefizientea da.
Bestalde, Newtonen Binomioa erabiliz,

$$(e^x-1)^n = (-1+e^x)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j (e^x)^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j e^{(n-j)x}.$$

Hortaz, e^x garatuz:

$$\begin{aligned} (e^x-1)^n &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(n-j)x]^k}{k!} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{n-j} (-1)^j \frac{(n-j)^k x^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{n-j} (n-j)^k \frac{x^j}{j!}. \end{aligned}$$

Beraz, $\frac{x^k}{k!}$ osagaiari dagokion koefizientea $\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{n-j} (n-j)^k$ denez, honako identitatea hauek ondorioztatzen dira:

$$n! \left\{ {k \atop n} \right\} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{n-j} (n-j)^k, \ \forall k \geq n.$$

$$0 = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{n-j} (n-j)^k, \ \forall k < n.$$

Hamaikagarren ariketa-zerrendako (XI-13) ariketa

(XI-13) (‡) Froga ezazu $m \geq 1$ guztietarako

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-mx)} = \left\{ {m \atop m} \right\} + \left\{ {m+1 \atop m} \right\} x + \left\{ {m+2 \atop m} \right\} x^2 + \ldots$$

Froga (indukzioz):
$m = 1$ denean egiazkoa da; izan ere,

$$\frac{1}{1-x} = \left\{ {1 \atop 1} \right\} + \left\{ {2 \atop 1} \right\} x + \left\{ {3 \atop 1} \right\} x^2 + \ldots = 1 + x + x^2 + \ldots$$

Demagun egiazkoa dela $(m-1)$rako (indukzio-hipotesia).

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-(m-1)x)} = \left\{ {m-1 \atop m-1} \right\} + \left\{ {m \atop m-1} \right\} x + \left\{ {m+1 \atop m-1} \right\} x^2 + \ldots$$

Froga dezagun $m-$rako:

$$
\begin{aligned}
\prod_{n=1}^{m}\frac{1}{1-nx} &= \frac{1}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-mx)}\\
&=^{[IH]} \frac{1}{1-mx}\left(\left\{{m-1 \atop m-1}\right\}+\left\{{m \atop m-1}\right\}x+\left\{{m+1 \atop m-1}\right\}x^2+\dots\right)\\
&=(1+mx+m^2x^2+\dots)\left(\left\{{m-1 \atop m-1}\right\}+\left\{{m \atop m-1}\right\}x+\left\{{m+1 \atop m-1}\right\}x^2+\dots\right)\\
&=\left\{{m-1 \atop m-1}\right\}\\
&+\left[m\left\{{m-1 \atop m-1}\right\}+\left\{{m \atop m-1}\right\}\right]x\\
&+\left[m^2\left\{{m-1 \atop m-1}\right\}+m\left\{{m \atop m-1}\right\}+\left\{{m+1 \atop m-1}\right\}\right]x^2\\
&+\dots+\left[m^k\left\{{m-1 \atop m-1}\right\}+m^{k-1}\left\{{m \atop m-1}\right\}+\dots+m\left\{{m+k-2 \atop m-1}\right\}+\left\{{m+k-1 \atop m-1}\right\}\right]x^k+\dots\\
&=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_kx^k+\dots
\end{aligned}
$$

Amaitzeko, froga dezagun indukzioz:

$$a_k=\left\{{m+k \atop m}\right\}.$$

Horretarako, Stirlingen zenbakien errepikapen erlazioa erabiliko dugu, honako ekuazio honetatik emanda dagoena:

$$\left\{{n \atop k}\right\}=\left\{{n-1 \atop k-1}\right\}+k\left\{{n-1 \atop k}\right\}.$$

Has gaitezen oinarrizko kasuekin:

$$\left\{{m-1 \atop m-1}\right\}=\left\{{m \atop m}\right\}=a_0,$$

$$\left\{{m+1 \atop m}\right\}=\left\{{m \atop m-1}\right\}+m\left\{{m \atop m}\right\}=\left\{{m \atop m-1}\right\}+m\left\{{m \atop m}\right\}=a_1,$$

$$\left\{{m+2 \atop m}\right\}=\left\{{m+1 \atop m-1}\right\}+m\left\{{m+1 \atop m}\right\}=\left\{{m+1 \atop m-1}\right\}+m\left\{{m \atop m-1}\right\}+m^2\left\{{m-1 \atop m-1}\right\}=a_2.$$

Suposa dezagun $(k-1)-$rako egiazkoa dela [IH], hots:

$$\left\{{m+k-1 \atop m}\right\}=\left\{{m+k-2 \atop m-1}\right\}+m\left\{{m+k-3 \atop m-1}\right\}+m^2\left\{{m+k-4 \atop m-1}\right\}+\dots+m^{k-1}\left\{{m-1 \atop m-1}\right\}=a_{k-1}.$$

Froga dezagun k-rako:

$$\left\{{m+k \atop m}\right\}=\left\{{m+k-1 \atop m-1}\right\}+m\left\{{m+k-1 \atop m}\right\}.$$

Indukzio-hipotesia erabiliz:

$$\begin{aligned}\left\{\begin{matrix} m+k \\ m \end{matrix}\right\} &= \left\{\begin{matrix} m+k-1 \\ m-1 \end{matrix}\right\} + m\left(\left\{\begin{matrix} m+k-2 \\ m-1 \end{matrix}\right\} + \ldots + m^{k-2}\left\{\begin{matrix} m \\ m-1 \end{matrix}\right\} + m^{k-1}\left\{\begin{matrix} m-1 \\ m-1 \end{matrix}\right\}\right) \\ &= \left\{\begin{matrix} m+k-1 \\ m-1 \end{matrix}\right\} + m\left\{\begin{matrix} m+k-2 \\ m-1 \end{matrix}\right\} + \ldots + m^{k-1}\left\{\begin{matrix} m \\ m-1 \end{matrix}\right\} + m^{k}\left\{\begin{matrix} m-1 \\ m-1 \end{matrix}\right\} = a_k.\end{aligned}$$

A.12. Hamabigarren ariketa-zerrendako ebazpenak: grafo-teoria

Hamabigarren ariketa-zerrendako (XII-12) ariketa

(XII-12) Froga ezazu bi grafo isomorfoak badira, haien osagarriak ere isomorfoak direla.

Izan bedi $G_1 = (V_1, E_1)$ eta $G_2 = (V_2, E_2)$ grafoak. Isomorfoak direnez, existitzen da $f : V_1 \mapsto V_2$ bijekzioa zein:

$$uv \in E_1 \Leftrightarrow f(u)f(v) \in E_2, \quad \forall u, v \in V_1. \tag{A.7}$$

Gogora dezagun G_1 grafoaren osagarria $\overline{G}_1 = (V_1, \overline{E}_1)$ dela, non:

$$\overline{E}_1 = \{uv : \ u, v \in V_1, \ u \neq v, \ uv \notin E_1\}.$$

Era berean, G_2 grafoaren osagarria $\overline{G}_2 = (V_2, \overline{E}_2)$ da, non:

$$\overline{E}_2 = \{uv : \ u, v \in V_2, \ u \neq v, \ uv \notin E_2\}.$$

Hortaz, f funtzioa $\overline{G}_1$ eta $\overline{G}_2$ arteko isomorfismoa da; izan ere, (A.7) kontuan hartuz:

$$uv \in \overline{E}_1 \Leftrightarrow uv \notin E_1 \Leftrightarrow f(u)f(v) \notin E_2 \Leftrightarrow f(u)f(v) \in \overline{E}_2, \quad \forall u, v \in V_1 : u \neq v.$$

Hamabigarren ariketa-zerrendako (XII-16) ariketa

(XII-16) (‡) Froga ezazu edozein $n \geq 1$-rako $2n$ erpinetako eta $n^2 + 1$ ertzetako grafo bat triangelu bat duela, hots, C_3 dela bere azpigrafoa.

Emaitza hori indukzioz frogatuko dugu. Are gehiago, indukzioz frogatuko dugu $G = (V, E)$ grafo batek $|V| = 2n$ bada eta $|E| \geq n^2 + 1$ bada, orduan grafoak triangelu bat duela.

Oinarrizko kasua, $n = 1$, tribiala da. Ohartu grafo batek 2 erpin baditu, gehienez ertz bakarra du; hortaz, $|E| < n^2 + 1 = 2$ izango da.

Suposa dezagun n. kasurako ($2n$ erpin eta $n^2 + 1$ ertz) betetzen dela, eta froga dezagun $(n + 1)$. kasurako; hots, $2n + 2$ erpin eta $(n + 1)^2 + 1$ ertz dituen grafo baterako. Izan bedi $e = uv \in E(G)$ eta defini dezagun $G' = G - \{u, v\}$. Orduan, $|V(G')| = 2n$.

- $|E(G')| \geq n^2 + 1$ bada, indukzioa erabiliz, bukatu dugu.
- $|E(G')| \leq n^2$ bada,

$$|E(G)| - |E(G')| \geq (n+1)^2 + 1 - n^2 = 2n + 2$$

denez, esan nahi du $2n+2$ ertz kendu direla, horietatik bata da uv ertza eta geratzen dira gutxienez $2n+1$ ertz gehiago G' grafoko $2n$ erpinei lotuta. Hortaz, usategiaren printzipioa erabiliz, existitzen da $w \in V(G')$ erpina u eta v-ren auzokidea dena (bestela, u eta $v$ren artean $2n+1$ auzokide ezberdin lituzkete $V(G')$-ko erpinekin, auzokide bana ertz bakoitzeko, baina hori ezinezkoa da $|V(G')| = 2n$ baita). Hortaz, $\{u, v, w\}$ da bilatzen genuen triangelua, emaitza frogatuz.

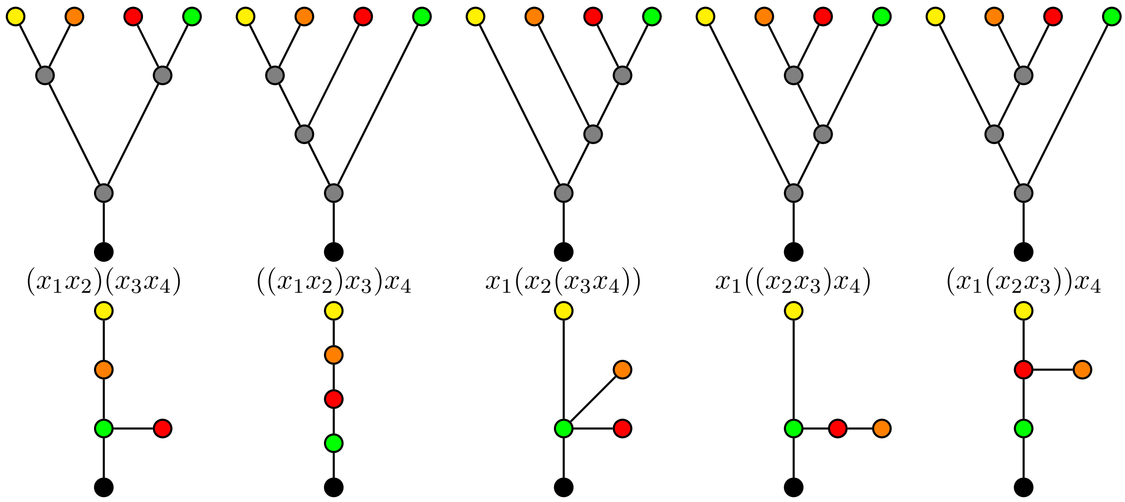
Hamabigarren ariketa-zerrendako (XII-22) ariketa

(XII-22) Bost erpineko eta ordenatutako sustraidun zenbat zuhaitz daude? Irudika ezazu bakoitza eta adieraz ezazu aurreko ariketarekiko korrespondentzia.

Erantzuna, 5.3. atalean azaltzen denez, $C_{n-2} = C_3 = 5$ da. 5.17. irudian aurreko ariketaren emaitza ikus dezakegu. 4 mailako eta ordenatutako sustraidun zuhaitz hirubalioko bakoitzari 5 erpineko eta ordenatutako sustraidun zuhaitza dagokio. Beraz, irudika dezagun elkarrekin, lehenengo lerroan, 4 mailakoak eta bigarren lerroan korrespondentziak.

Kontuan hartu behar da, lehenengo lerroko grafoak 4 mailako eta ordenatutako sustraidun zuhaitz hirubaliokoak direnez, bakoitza identifika daitekeela biunibokoki lau elementuen parentesien problemarekin. Goiko mailan, beti lau erpin daude eta x_1, x_2, x_3 eta x_4 elementuekin elkartu daitezke. Laguntzeko kolore batekin adieraziko dugu, hau da, x_1 erpin gorria da, x_2 beltza, x_3 berdea eta x_4 urdina. Beheko mailan, berriz, beti erpin bakarra dago, *sustraia* izenekoa, zuria. Gainontzeko erpinak, prozeduran desagertuko/gainjarriko dira, eta grisez marraztu dugu.

Zuhaitz hirubalioko bakoitzaren korrespondentzia bilatzeko, honako eraikitze-teknika honi jarraituko diogu. Lehenengoz, eskuineko ertzak horizontalki kokatuko ditugu eta ezkerreko ertzak, bertikalki; ezkerraldean zentrotik urrutien dagoen erpinen lerro bertikalari *ardatza* deituko diogu. Hori egin eta gero, erpinen lerro horizontal bakoitzean, honako prozedura hau egingo dugu. Pentsa dezagun ertz bertikalak zurrunak direla eta ertz horizontalak, berriz, laburtu daitezkeela guztiz uzkurtu arte. Eskuin aldean zentrotik urrutien dagoen erpina hartu eta ezkerrerantz bultzatu ardatzeraino eta bidetik aurkitutako erpin guztiak gainjarriko ditugu. Horrela, lortzen dira 5 erpineko eta ordenatutako sustraidun zuhaitz guztiak, A.1. irudian ikusten den bezala.



A.1. irudia: Bost erpineko ordenatutako sustraidun zuhaitzak.

B. eranskina

Ariketen zenbakizko soluzioak

B.1. Oinarrizko konbinatoriaren ariketa-zerrenden soluzioak

Ariketa-zerrendak 1.8.. azpiatalean kontsulta daitezke.

Lehenengo ariketa-zerrendaren soluzioak

(I-1) a) $\{x\} + \{y\} \in [0,1)$; b) $< x > + < y > \in [0,1)$.
(I-2) $d_n(n) = \lfloor \log_b(n) \rfloor + 1$.
(I-4) a) egiazkoa; b) egiazkoa.
(I-6) a) gezurrezkoa; b) gezurrezkoa.
(I-7) $\lfloor x \rfloor > (n-1)^2$ eta $x \leq n^2$.
(I-8) $b-a$; $b-a$; $b-a-1$; $b-a+1$.
(I-9) $\lfloor b \rfloor - \lfloor a \rfloor$; $\lceil b \rceil - \lceil a \rceil$; $\lceil b \rceil - \lfloor a \rfloor - 1$; $\lfloor b \rfloor - \lceil a \rceil + 1$.
(I-10) $m = \lfloor \log_2(n) \rfloor$, $l = n - 2^{\lfloor \log_2(n) \rfloor}$.
(I-11) $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$ edo $\lceil x - \frac{1}{2} \rceil$.

Bigarren ariketa-zerrendaren soluzioak

(II-1) 86.
(II-2) 17.
(II-3) 25200.
(II-4) 65536.
(II-5) 96.
(II-6) 15552.
(II-7) 200.

(II-8) 360; 3888.
(II-9) 767; 330.
(II-10) 900; 500.
(II-11) 326592.
(II-12) 83160.
(II-13) 5040; 420.
(II-14) 40!.
(II-15) $\frac{80!}{2^{40}}$.
(II-16) 5040.
(II-17) 30240; 65610.
(II-18) 1465; 1885.
(II-19) $\frac{1}{2}\binom{4}{2}\binom{36}{18}$; $\binom{4}{2}\binom{36}{8}$.
(II-20) 15.
(II-21) 3744; 624; 123552; 54912.
(II-22) 1000; 360.
(II-23) 144; 1152.
(II-24) 144000.
(II-25) 486; 216.
(II-26) 12; 12.
(II-27) 36.
(II-28) 40320.
(II-29) $\binom{52}{5}\binom{47}{5}\binom{42}{5}\binom{37}{5}$.
(II-30) 140; 3360; 560.
(II-31) 462; 200.
(II-32) $\binom{40}{6}-\binom{36}{6}$; $\binom{30}{6}$; $\binom{30}{6}-\binom{27}{6}$.
(II-33) 404352.
(II-34) $\binom{7}{4}\binom{11}{4}4!$.
(II-35) 28800; 160000.
(II-36) $\binom{24}{11}$; $\binom{23}{10}$; $\binom{23}{11}$.

Hirugarren ariketa-zerrendaren soluzioak

(III-1) 280.
(III-2) 90.
(III-3) $c(ABC) = -13$.
(III-4) $c(ABC) \geq 40$.
(III-5) $2(n!)^2$.
(III-6) $(n-2)!$.
(III-7) $\binom{m+1}{n}$.
(III-8) a) $n!$; b) $n!\binom{n}{2}$; c) $\binom{n}{2}^2\binom{n-2}{2}^2(n-4)! + \binom{n}{2}\binom{n}{3}(n-2)!$.
(III-9) $\frac{n!}{k!}\sum_{j=0}^{n-k}\frac{(-1)^j}{j!}$.
(III-10) $(2^m-1)(2^n-1)$.
(III-11) $(b-1)b^{\lceil\frac{n}{2}\rceil-1}$.

(III-12) (Laguntza: adieraz ezazu gizabanako bakoitza puntu baten bidez eta bi pertsonaren arteko agurra bi puntuak lotzen dituen lerro baten bidez).
(III-13) (Lag.: Lotu d zatitzaile bakoitza bere $\frac{n}{d}$ zenbaki osagarriarekin; edo erabil ezazu honako ariketa honen emaitza).
(III-14) $\prod_{i=1}^{k}(m_i+1)$.
(III-15) (Lag.: inklusio-esklusio printzipioa).
(III-16) $\sum_{i=1}^{\lfloor \log_p n \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$.
(III-17) 249.
(III-18) a) 8; b) 28; c) 14; d) 2; e) 7; f) 4; g) 7; h) 6; i) 3; j) 1; k) 3; l) 6; m) 3; n) 12.

Laugarren ariketa-zerrendaren soluzioak

(IV-1) 779.
(IV-2) (Lag.: Usategiaren printzipioa aplikatuz, froga ezazu Ω-ren azpimultzo ez-hutsa bakoitzari bere osagaien batura esleitzen dion funtzioa ezin dela injektiboa izan).
(IV-3) 495.
(IV-4) (Lag.: Usategiaren printzipioa).
(IV-5) a) 76; b) 81.
(IV-6) 233.
(IV-7) n zenbakiak non $n+1$ karratu perfektua baita.
(IV-8) ez (ikusi hirugarren ariketa-zerrendako (III-12) ariketa).
(IV-9) ez (ilara bikoitietan/bakoitietan kokatutako fitxak ilara bikoitietan/bakoitietan soilik jar daitezke).

Bosgarren ariketa-zerrendaren soluzioak

(V-1) $n+1$ zenbakiak $\binom{2n}{n}$ zatitzen du.
(V-2) (Lag.: Lotu azpimultzo bakoitza bere osagarriarekin).
(V-3) (Lag.: Zehaztu noiz $\binom{n}{k}$ zati $\binom{n}{k-1}$-ren arteko zatidura ≥ 1 den).
(V-4) a) $k=1$, $r=n-1$; b) $k=2$, $r=n-1$; c) $k=3$, $r=n-1$; d) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) - \sum_{k=1}^{n} k$. Laguntza: kontsidera ezazu (b)-(a) deduzitzeko.
(V-5) a) $r=n-k$.
(V-6) (Lag.: Sailkatu bikote ordenatuak, osagaiak berdinak edo desberdin dituzten aintzat hartuta).
(V-7) (Lag.: k balioarekiko indukzioa).
(V-8) (Lag.: k balioarekiko indukzioa).
(V-9) (Lag.: erabil ezazu $\binom{m}{k}\binom{m-k}{n-k} = \binom{m}{n}\binom{n}{k}$. Konbinatoria erabiliz, (A,B) bikote-kopurua, non A multzoa $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$tik eta n osagai dituen azpimultzoa den eta $B \subseteq A$).
(V-10) a) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{x+k}$.
(V-12) (Lag.: Erabil itzazu $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ eta $\binom{n-1}{l} = \binom{n-1}{n-1-l}$.)
(V-16) a) $\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} = 1$, $\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} = q^2+q+1$.

Seigarren ariketa-zerrendaren soluzioak

(VI-1) a) 0; b) $b = c$ bada, $a = cd$ kasuan 2^d, $a \neq cd$ kasuan 0; $b \neq c$ eta $k = \frac{a-bd}{c-b}$ zenbaki oso ez-negatibo bada, $\binom{d}{k}$; bestela, 0; c) $\sum \binom{b}{k}\binom{k}{l}$, non $k \geq l$ eta $k+l = b$ betetzen dituzten eta zenbaki oso ez-negatiboak dituzten (k, l) bikoteek batura osatzen dute (baldin eta b zenbaki oso negatibo bada, 0).
(VI-2) $\binom{x+y}{n} = \frac{(x+y)_n}{n!}$ denez, koefiziente binomialetarako Vandermonderen formulatik ondorioztatzen da.
(VI-3) n balioarekiko indukzioa.
(VI-4) Ezkerraldeko atala $[(1 + x) - x]^n$-ren garapena da.
(VI-5) a) $\sum_{l=1}^{n}(-1)^{l+1}\binom{n}{l}l^k = 0$; b) $\sum_{l=1}^{n}(-1)^{l+1}\binom{n}{l}l^n = (-1)^{n+1}n!$.
(VI-6) 2.5. ariketa-zerrendaren (V-8) ariketa.
(VI-7) Baldin eta m bakoitia bada, 0; eta baldin eta m bikoitia bada, $\binom{n+m/2-1}{m/2}$.
(VI-8) $\frac{m!n!}{(m+n+1)!}$ (Lag.: Adieraz ezazu batugai bakoitza integral egoki baten bidez).

Zazpigarren ariketa-zerrendaren soluzioak

(VII-1) 6300; 1050.
(VII-2) a) $\binom{3n}{n,n,n}$; b) $\frac{1}{3!}\binom{3n}{n,n,n}$; c) $\frac{(kn)!}{(n!)^k}$; d) $\frac{1}{k!}\frac{(kn)!}{(n!)^k}$.
(VII-3) 20412.
(VII-4) $\frac{(2n)!}{2^n} = \binom{2n}{2,2,\ldots,2} = (2n-1)!!n!$.
(VII-5) Agerrarazi koefiziente multinomial bat $((n + 1)!)!$ eta $[(n!)!]$ terminoak dituena.
(VII-8) 0; $n, k \geq 1$ guztietarako, $\sum(-1)^{r_1+r_2+\ldots+r_k}\binom{n}{r_1,r_2,\ldots,r_{2k}} = 0$, non $r_1 + r_2 + \ldots + r_{2k} = n$ betetzen duten eta zenbaki oso ez-negatiboak dituzten $(r_1, r_2, \ldots, r_{2k})$ 2k-koteek batura osatzen baitute.
(VII-9) 2310.
(VII-10) $\binom{m}{k,m-2k,k}$, non $k = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ den.

Zortzigarren ariketa-zerrendaren soluzioak

(VIII-1) (a) $(1 - 5x)^{-1}$;
(b) $(1 + x)^{-1}$;
(c) $(1 - x^2)^{-1}$;
(d) $[(1 - x^2)^{-1}]' = 2x(1 - x^2)^{-2}$;
(e) $4(1 - 2x)^{-1}$.
(VIII-2) (a) $\binom{n+2}{n}$;
(b) $a_n = 1$ edo 0, n bikoitia ala bakoitia den aintzat hartuta;
(c) $(-4)^n$;
(d) $2^{n+1} - 2$;
(e) $2^n/n!$;

(f) $a_n = 1/(n/2)!$ edo 0, n bikoitia ala bakoitia den aintzat hartuta;
(g) $a_{2n-1} = (-1)^{n-1}/(2n-1)!,\ a_{2n} = 0$;
(h) $a_{2n} = (-1)^n/(2n)!,\ a_{2n-1} = 0$.
(VIII-3) (a) $g(-x)$;
(b) $[g(x) - g(0)]/t$;
(c) $xg(x)$;
(d) $[(1+x)g(x) - g(0)]/x$;
(e) $(1-x)g(x)$;
(f) $[g(x) + g(-x)]/2$;
(g) $[g(x) - g(-x)]/2$;
(h) $g(x^2)$;
(i) $[g(x)]^2$;
(j) $g(x)/(1-x)$;
(k) $xg'(x)$;
(l) $x^k g^{(k)}(x)$.
(VIII-4) (a) $(1-x)^{-3}(1-x^4)^{-1}$; (b) $(1-x^2)^{-2}(1-x^3)^{-2}$.
(VIII-5) 100; 36.
(VIII-6) $(x + x^2 + \ldots + x^6)^4 = x^4(1-x^6)^4/(1-x)^4$; 125; 35.
(VIII-7) (a) $(1 + x + \cdots + x^7)(1 + x + \cdots + x^8)(1 + x + \cdots + x^9)$; (b) 60; (c) 720; 0; 8640.
(VIII-8) (a) $(1 + x + x^2 + \cdots + x^{14})^2(1 + x^{10} + x^{20} + x^{30} + x^{40})$; (b) 20; (c) 1125; 5; 170.
(VIII-9) (a) $\left(\sum_{d=0}^{9} x^d\right)^m$; (b) $\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{10} \rfloor} (-1)^i \binom{n}{i}\binom{m+n-10i-1}{n-10i}$; (c) 929672; (d) 10^m; 0; $45m10^{m-1}$.
(VIII-10) (a) $x(1-x)^{-2}$; $a_n = n$; (b) $(1-2x)/(1-3x-4x^2)$; $a_n = \frac{2}{5}\cdot 4^n + \frac{3}{5}\cdot(-1)^n$;
(c) $\frac{4-2x}{(1-3x)(1-x)}$; $a_n = 5\cdot 3^n - 1$.
(VIII-11) (a) $2, 3, 5$; (b) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $(n \geq 2)$; (c) 1; (d) $(1+x)/(1-x-x^2)$;
(e) $a_n = F_{n+2} = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.
(VIII-12) (a_n) aurreko ariketaren segida da.
(VIII-13) (a) $1, 2, 3$; (b) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $(n \geq 2)$; (c) 1; (d) $1/(1-x-x^2)$;
(e) $a_n = F_{n+1} = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.
(VIII-14) (a_n) segida 11. eta 12. ariketena da.
(VIII-15) (a) $5, 24$; (b) $a_n = 4a_{n-1} + 4a_{n-2}$ $(n \geq 2)$; (c) 1; (d) $\frac{1+x}{1-4x-4x^2}$;
(e) $a_n = \frac{4+3\sqrt{2}}{8}\cdot(2+2\sqrt{2})^n + \frac{4-3\sqrt{2}}{8}\cdot(2-2\sqrt{2})^n$.
(VIII-16) (a) $1, 2, 3, 6$; (b) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-4}$ $(n \geq 4)$; (c) 1; (d) $\frac{1}{1-x-x^2-x^4}$.
(VIII-17) (a) $2, 3, 4, 5$; (b) $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$; (c) 1; (d) $\frac{1}{(1-x)^2}$; (e) $a_n = n+1$.
(VIII-18) (a) $1, 2, 4, 7$; (b) $a_n = a_{n-1} + n$; (c) $\frac{1}{1-x} - \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^3}$; (d) $a_n = \frac{n^2+n+2}{2}$; (e) 5051.

Bederatzigarren ariketa-zerrendaren soluzioak

(IX-9) $nF_{n+2} - F_{n+3} + 2$; $(n+1)F_{n+2} - F_{n+3} + 1$.
(IX-10) $\binom{n-k}{k}$, non $k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ baita.
(IX-11) $+$ baldin eta n bakoitia bada, $-$ baldin eta n bikoitia bada.
(IX-12) $3n$.

Hamargarren ariketa-zerrendaren soluzioak

(X-5) b) $\pi_1^{(1)} = 1$; $(\pi_2^{(1)}, \pi_2^{(2)}) = (1, 1)$; $(\pi_3^{(1)}, \pi_3^{(2)}, \pi_3^{(3)}) = (1, 2, 1)$; $(\pi_4^{(1)}, \pi_4^{(2)}, \pi_4^{(3)}, \pi_4^{(4)}) = (1, 3, 3, 1)$; $(\pi_5^{(1)}, \pi_5^{(2)}, \pi_5^{(3)}, \pi_5^{(4)}, \pi_5^{(5)}) = (1, 4, 6, 4, 1)$.
(X-6) $P^{\langle 1\rangle}(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots$ eta $P^{\langle 2\rangle}(x) = 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 + \dots$.

Hamaikagarren ariketa-zerrendaren soluzioak

(XI-4) $\binom{p}{\frac{p+q}{2}+1}$.
(XI-5) $(m+n)!\left(1 - \frac{n}{m+1}\right)$.

Hamabigarren ariketa-zerrendaren soluzioak

(XII-2) $n(n-1)/2$.
(XII-3) a) Bai, K_5; b) ez, $4 \nmid 30$.
(XII-4) 6.
(XII-5) Bai.
(XII-6) 3 ez-isomorfo, guztira $60 + 5 + 60 = 5^3$.
(XII-7) 5.
(XII-8) 5.
(XII-9) $(c(V), c(E), c(F))$ (a) $(8, 13, 7)$, (b) $(10, 17, 9)$, (c) $(8, 12, 6)$, (d) $(8, 17, 11)$, (e) $(7, 14, 9)$, (f) $(8, 10, 4)$
(XII-10) 3.
(XII-11) 4.
(XII-15) 2, $2n$, $n!$, eta $n!m!$ $n \neq m$ denean, eta $2(n!)^2$ bestela
(XII-19) $\binom{\binom{n}{2}}{m}$.
(XII-22) 5.

Erreferentziak

[1] PageRank. Wikipedian, `https://en.wikipedia.org/wiki/PageRank`, 2023/03/30.

[2] Wolfram Research (2003), RSolve, Wolfram Language function `https://reference.wolfram.com/language/ref/RSolve.html` (updated 2022).

[3] Fibonacci Association. The Fibonaccy Quarterly. `http://www.fq.math.ca/`, 1963.

[4] S. Arora and B. Barak. *Computational complexity: a modern approach.* Cambridge University Press, 2009.

[5] R. Balakrishnan and K. Ranganathan. *A Textbook of Graph Theory.* Springer Science & Business Media, 2012.

[6] V. K. Balakrishnan. *Combinatorics.* Schaums Outline Series, McGraw-Hill, New York, 1995.

[7] R. C. Bose and B. Manvel. *Introduction to Combinatorial Theory.* Wiley, New York, 1984.

[8] D. I. A. Cohen. *Basic Techniques of Combinatorial Theory.* Wiley, New York, 1978.

[9] F. García Merayo. *Matemática Discreta.* Paraninfo, Madrid, 2001.

[10] R. L. Graham, D. E. Knuth, and O. Patashnik. *Concrete Mathematics.* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1994.

[11] J. M. Harris, J. L. Hirst, and M. J. Mossinghoff. *Combinatorics and Graph Theory.* Springer, New York, 2008.

[12] N. Hartsfield and G. Ringel. *Pearls in Graph Theory.* Dover, New York, 1994.

[13] J. Heber Nieto Said. *Teoría Combinatoria.* La Universidad del Zulia, Venezuela, 1996.

[14] OEIS Foundation Inc. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, `http://oeis.org/`, 2011.

[15] S. Lang. *Undergraduate Algebra.* Springer Science & Business Media, 2005.

[16] M. Macho-Stadler. Un paseo por la Geometría. 2004/2005 (BI-2868/05), 97 – 114, `http://www.ehu.es/~mtwmastm/Paseo0405.pdf`, 2005.

[17] D. A. Marcus. *Combinatorics: A Problem Oriented Approach.* The Mathematical Association of America, 1998.

[18] J. J. O'Connor and E. F Robertson. Leonhard Euler. MacTutoren, `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euler.html`, 1998/07.

[19] J. J. O'Connor and E. F Robertson. François Édouard Anatole Lucas. MacTutoren, `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lucas.html`, 1996/12.

[20] J. J. O'Connor and E. F Robertson. Leonardo Pisano Fibonacci. MacTutoren, `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Fibonacci.html`, 1998/10.

[21] J. J. O'Connor and E. F Robertson. Eugène Charles Catalan. MacTutoren, `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Catalan.html`, 2012/09.

[22] J. J. O'Connor and E. F Robertson. Eric Temple Bell. MacTutoren, `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bell.html`, 2015/01.

[23] J. Rivas. *Kalkulu Diferentziala eta Integrala I.* Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea, Argitalpen Zerbitzua =Servicio Editorial, 2021.

[24] N. Robertson, D. Sanders, P. Seymour, and R. Thomas. The four-colour theorem. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 70(1):2–44, 1997.

[25] RSME. Olimpiada Matemática Española.
`https://www.rsme.es/olimpiada-matematica-espanola/`, 1963.

[26] M. Spivak. *Cálculo Infinitesimal.* Reverté, 1988.

[27] G. Steele. Common lisp: the language, 1990.

[28] R. J. Trudeau. *Introduction to Graph Theory.* Dover Pulications, Inc, Nueva York, 1993.

[29] User:Aldoaldoz. Triangular numbers. Wikipedian, `https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_poligonal#/media/Archivo:Polygonal_Number_3.gif`, 2010/03/16.

[30] User:Aldoaldoz. Square numbers. Wikipedian, `https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_poligonal#/media/Archivo:Polygonal_Number_4.gif`, 2010/03/16.

[31] User:Aldoaldoz. Pentagonal numbers. Wikipedian, `https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_poligonal#/media/Archivo:Polygonal_Number_5.gif`, 2010/03/16.

[32] User:Bobarino. Divisiń política de África. Wikipedian, `https://es.wikipedia.org/wiki/%C3%81frica#/media/Archivo:African_continent-es-2.svg`, 2012/03/25.

[33] User:Bogdangiusca. Map of Königsberg in Euler's time showing the actual layout of the seven bridges, highlighting the river Pregel and the bridges. Wikipedian `https://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_K%C3%B6nigsberg#/media/File:Konigsberg_bridges.png`, 2005/04/18.

[34] User:Chris-martin. 7 bridges. Wikipedian, `https://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_K%C3%B6nigsberg#/media/File:7_bridges.svg`, 2006/07/27.

[35] User:Chris-martin. Abstract graph corresponding to bridges of Königsberg. Wikipedian, https://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_K%C3%B6nigsberg#/media/File:K%C3%B6nigsberg_graph.svg, 2022/10/12.

[36] User:Evanherk. A model set of the Tower of Hanoi (with 8 disks). Wikipedian, https://en.wikipedia.org/wiki/Tower_of_Hanoi#/media/File:Tower_of_Hanoi.jpeg, 2005/07/17.

[37] User:Inductiveload. Four Colour Planar Graph. Wikipedian, https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Four_Colour_Planar_Graph.svg, 2007/02/16.

[38] User:Mark. Map of Australia. Wikipedian, https://en.wikipedia.org/wiki/File:Map_of_Australia.png, 2006/04/10.

[39] User:McKay. Pigeons-in-holes. Wikipedian, https://en.wikipedia.org/wiki/Pigeonhole_principle#/media/File:TooManyPigeons.jpg, 2008/07/20.

[40] User:Randaum. Fibonacci Rabbits. Wikipedian, https://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_number#/media/File:Fibonacci_Rabbits.svg, 2022/01/18.

[41] User:Watchduck. Illustrating the fifth Catalan number. Wikipedian, https://en.wikipedia.org/wiki/Catalan_number#/media/File:Catalan-Hexagons-example.svg, 2006/02/15.

[42] G. Van Rossum and F. L. Drake Jr. *Python reference manual.* Centrum voor Wiskunde en Informatica Amsterdam, 1995.

[43] P. Vansteenwegen and A. Gunawan. *Orienteering Problems: Models and Algorithms for Vehicle Routing Problems with Profits.* Springer International Publishing, Cham, 2019.

[44] N. Ya. Vilenkin. *Combinatorics.* Academic Press, New York, 1971.

[45] E. W. Weisstein. “Platonic Graph.” From MathWorld–A Wolfram Web Resource. https://mathworld.wolfram.com/PlatonicGraph.html.

[46] D. B. West. *Introduction to Graph Theory.* Prentice Hall, 2001.

[47] H. S. Wilf. *Generatingfuntionology.* Academic Press, Boston, 1990.

[48] H. S. Wilf and N. Calkin. The Electronic Journal of Combinatorics, 1994.

Unibertsitateko eskuliburuak
Manual universitarios

UPV/EHUko Argitalpen Zerbitzua
argitaletxea@ehu.eus

Servicio Editorial de la UPV/EHU
editorial@ehu.eus

Tel.: 94 601 2227
www.ehu.eus/argitalpenak

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

ISBN: 978-84-1319-575-9