

PhD thesis

**MULTIBODY DINAMIKAREN EKUAZIOEN
INTEGRAZIOA METODO ESTRUKTURALAK ERABILIZ
INTEGRATION OF THE EQUATIONS OF MULTIBODY
DYNAMICS USING STRUCTURAL METHODS**

Presented by:

Haritz Uriarte Larizgoitia

Developed in:

Departamento de Ingeniería Mecánica

Escuela de Ingeniería de Bilbao

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

Thesis director:

Dr. Igor Fernández de Bustos

2023

Familia eta adiskideei.
To my family and friends.

"I have not failed. I've just found 10,000 ways that don't work". Thomas A. Edison

Eskertzeak

Tesi honen burutzea ez litzateke posible izango jaso izan dudan laguntza eta animoez izan ez balitz, lan arloan zein lanetik kanpo. Bidaia gogor bat izan da guztiontzat, eta horrela izanda modu batean edo bestean hura posible egin duen orori eskerrak eman nahiko nizkioke.

Zentzu honetan, hasteko tesi honen zuzendariari, Igor Fernández de Bustos-i, eman nahi nizkioke eskerrak. Haren gidaritza eta zuzendaritza ezinbestekoak izan dira hau posible izan dadin, arreta bidean aurkitutako arazoetan (ez dira gutxi izan) trinko eutsiz eta haiek konpondu arte ez etsiz. Mekanikan eta aplikatutako matematiketan etengabeko ikasketa bat izan da, baina baita lan egiteko moduan ere eta, agian ironia kutsuz, beharrezko izan denean modu ez arruntean pentsatzean ere.

Gorka Urkullu eta Vanessa García-k ere toki bat merezi dute hemen. Igor-ekin batera etengabeko mekanika eta aplikatutako matematikaren ikasketa bat izan da, eta baina gizatasunean ere. Jasotako etengabeko laguntza, ez beti lan-arlorra mugatua, beharrezkoa izan da ideiak argi ez nituenean edo aipatu nahiko nukeena baino zalantza gehiago nituenean.

Jérémie Girardot-ek egindako lanari ere eskerrak eman nahiko nizkioke. Bordeaux-en nengoen bitartean behar nuen guztia eskuragai egoteaz ziurtatu zen, eta beti egon da prest haren arloko ezagutza partekatzeke eta guretik ikasteko.

Gure kontuekin beti lanpetuta egon harren, doktorego ikasle moduan, gutako askok gela komun bat partekatzeak gure arteko harremana egoera beretsuan daudenena izatea ekarri du. Esperientzia betegarria izan da guztiz, bi zentzuetan, kezkak partekatzea eta lorpenak ospatzea prozesu luze honetan zehar.

Azkenekoz baina edonola ere ez garrantzi gutxiagoz, eta gizatasun aldetik jarraituz, nire familia eta lagunei eman nahi dizkiet eskerrak momentu on eta

ez hain onetan beti lagundu izanagatik. Seguraski nire nerbio eta kezkez arduratu direnentzat nahigabeko infernu txiki bat izan da, eta hala izanda lasaigarria da eurak beti laguntzeko edo entzuteko prest nabaritzea.

Acknowledgments

This thesis would not exist without the help and support I received, be it work related or not. It has been an intense journey for all of us, and I would like to acknowledge and thank everyone that has made it possible in one way or another.

In this sense, I would like to start acknowledging the work made by the director of this thesis, Igor Fernández de Bustos. His guidance and input to this thesis have been vital for its success, keeping the aim sharp towards the problems we faced (that were not a few) in the first place and not stopping until they were solved. It has been not only a lesson in mechanics and applied mathematics, but also a lesson in work ethics and, perhaps ironically, thinking outside the box when required.

Gorka Urkullu and Vanessa García also deserve a place here. Together with Igor, it has been a continuous lesson in mechanics and applied mathematics, and also a lesson in humanity. The constant support I have received, not necessarily always work related, has helped a lot in moments where I did not have clear ideas or had more self-doubt that I would like to admit.

I would also like to acknowledge the work Jérémie Girardot has done. While in Bordeaux he made sure I had everything I needed, and has always been enthusiastically ready both to explain his knowledge in his field and to learn from ours while keeping an open mind.

Although we have always been very busy on our own thing as PhD students, the fact that many of us shared a common space where we worked has helped to develop bonds that only people in same or similar situations share. In that sense, it has been a fulfilling experience both to share worries and to celebrate achievements in this long-run process, in both directions.

At last but by all means not least, and continuing on the human side, I would like to thank my family and friends, who have tirelessly coped with me

these years through good and not so good moments. It has been, probably, an unintentional trial by fire for the people that had to bear with me and my nerves and worries, and it's always humbling to feel their support.

Laburpena

Tesi honek gorputz anitzeko dinamikaren baitan sortzen diren ekuazioak integratzeko egokiak diren hainbat ekarpen aurkeztu ditu. Hemen aurkeztutako metodoek ondorengo ezaugarri nagusiak dituzte:

- Oreka eta murriztapen ekuazioen linealizazioak Newton-en metodo oso bat erabiliz burutzen dira, eta hala izanda deribazio analitikoak erabiltzen dira ohikoak diren zenbakizko deribazioen ordez. Honek zehaztasuna eta konbergentzia neurri handi batean hobetzen ditu. Tesi honetan deribazio hauek lortzeko erabili den metodoa ekuazio nagusiei ezartzen zaie.
- Nahiz eta hemen aurkeztutako garapenak orokorrak diren eta ondorioz haien aplikazioa gorputzen orientazioa adierazteko koordenada sortarekiko askea den, algoritmo guztiak koordenada Cartesiarrak eta orientazioa adierazteko edozein koordenada multzo erabiliz adierazi dira. Erreferentzia sistema lokalaren sorpuntua solidoaren grabitate zentroan ezarri da, eta sistemaren ardatzak solidoaren inertzia ardatz nagusiak izan daitezzen ezarri da. Koordenada nagusien erabilerak teorikoki edozein parametro angeluar sortaren erabilera ahalbidetzen du, zeinaren egokitasuna buruketa bakoitzaren arabera den.
- Oreka ekuazioak garatzeko Newton-Euler ekuazioak erabili dira. Newton-en ekuazioak linealak dira dagoeneko, Euler-enak ez bezala.
- Integratzaile estrukturalak erabiliko dira.
- Murriztapen ekuazioak adierazteko, lokailuak solido bakoitzaren erreferentzia sistema lokala eta erreferentzia sistema globala erabiliz adierazten dira, horretarako bi solidok partekatzen duten puntu bat edo bektore bat bezalako kontzeptuak erabiliz.

Tesi honen ekarpen nagusia Newmark erabiliz gorputz anitzeko dinamikaren ekuazioak integratzen dituen algoritmo bat da. Metodo hau

azpiespazio huts fundamentalaren erabileraz baliatzen da ekuazioak askatasun graduak adierazten dituzten eta uneoro aldatzen diren koordenada minimo sortan edo *manifold*-ean integratzeko, eta hala izanda zenbakizko moteltzerik ez duen eta baldintzarik gabeko egonkortasuna duen metodo bat lortu daiteke. Kontzeptu hau koordenada minimoen oso antzerakoa da baina, kasu honetan, koordenadak tarte baterako erabili ordez, denbora-une batean ekuazioak ebazteko erabili den azpiespazio hutsa erabiltzen da dagokion koordenada multzoa ezartzeko, neurrizko kostuz. Ekarpen hau lortze aldera, ondorengoa egin behar izan da:

- Azpiespazio huts batetik koordenadak lortzea ahalbidetzen duen algoritmo baten garapena. Algoritmoak tartearen bukaeran lortzen den matrize Jacobiarraren azpiespazio hutsa erabiltzen du eta, ondorioz, aldagaiak eta haren deribazioak harekiko proiektatu beharra dago denbora-unearen hasieran.
- Newmark metodo analitiko baten garapena. Horretarako, metodo implizito batek behar dituen deribazio analitikoak lortu izan dira.
- Lokailu multzo baten garapena, haien deribazio analitikoekin batera. Hemen aurkezten den algoritmoak murriztapenen eta haien lehen eta bigarren deribazioen formulazio linealizatuak behar ditu. Honek murriztapenak eta haien lehen eta bigarren deribazioak neurri egoki batean betetzen dituen metodo bat sortzen du.

Ekarpen nagusi honetaz gain, beste ekarpen batzuk ere lortu izan dira:

- Ekuazioen linealizazio orokor bat lortzeko metodo bat (oreka eta murriztapen ekuazioekin batera), hautatutako orientazio koordena dena dela. Honek objektu-orientazio bat ahalbidetzen du, eta ondorioz errepresentazio sistema ezberdinen erabilera errazten du hau beharrezkoa denean.
- Erabilera orokorrerako egokiak diren eta baldintzapean esplizitoak diren metodo sorta berri bat. Metodo hauek diferentzia zentralen metodo estruktural klasikoan oinarrituta daude, baina konbergentzia gradu handiago bat lortzea ahalbidetzen dute kostu konputazional murrizt baten truke.
- Elementu Diskretuen buruketak ebazteko metodo hauen egokitasunerako behin-behineko ikerketa bat.

Algoritmoen egiaztapena hainbat adibideren ebazpenaren bidez burutu da. Honetarako IFToMM webgunean eskuragai dauden adibideak erabili izan dira, zehaztasuna eta eraginkortasuna neurtuz.

Summary

This PhD thesis presents some contributions suitable for the numerical integration of the equations that arise in multibody dynamics. The main characteristics of the here presented methods are as follows:

- The linealization of the equilibrium equations and constraints is carried out using a full Newton method, therefore using analytic derivatives instead of the normally used numerical ones. This improves precision and convergence considerably. In this document an approach to obtain these derivatives is applied to the relevant equations.
- Although some of the here presented developments are general and can therefore be applied regardless of the system employed to represent the orientation of the bodies, all the algorithms have been presented using cartesian coordinates along with a way to represent orientation, suitable for any existing system. The origin of the local frame has also been chosen to be the center of gravity of the solid, and the frame's axes are located in such a way that they are the solid's main inertia axes. The use of generalized coordinates allows the employment of virtually any angular parameter set, which can be chosen according to the idoneity of each problem.
- Newton-Euler equations have been used for developing the equilibrium equations. Newton's equations are already linear, unlike Euler's.
- Structural integrators will be used.
- In order to represent constraint equations joints are represented using both each solid's local frame and the global frame, using concepts such as a point or a vector shared by two solids for this purpose.

The main contribution of this document lies on the development of a new algorithm to integrate the equations of multibody dynamics using Newmark. This method takes advantage of the use of fundamental nullspace basis to

integrate the equations in the manifold, so unconditionally stable behavior without the introduction of numerical damping can be achieved. This is quite similar to the concept of using minimal coordinates but, in this case, instead of using the same coordinates for an interval, the same nullspace used to solve a step is used to define the coordinate set at a moderate cost. In order to achieve this contribution, the following tasks had to be performed:

- Development of an algorithm to obtain the coordinates from the nullspace. The algorithm uses the nullspace of the Jacobian matrix at the end of the interval and, therefore, the variable and its derivatives are required to be projected at the beginning of the step.
- Development of an analytic Newmark approach. In order to do so, analytic derivatives required for an implicit method have been obtained.
- Development of a set of joints along with the required analytic derivatives. The here presented algorithm requires linearized expressions of both the constraints and their first and second derivatives. This allows for the obtention of a result which fulfills at quite a good degree the constraints not only in terms of the variables, but also in terms of their first and second derivatives.

Along with this main contribution, other contributions have also been achieved.

- A method for the general linearization of the equations (including equilibrium and constraints) regardless of the chosen orientation representation. This method allows for an object oriented approach, thus simplifying the use of different systems of representation when this is required.
- A new set of conditionally explicit methods of general use. These methods are based on the classical structural central difference method, but allow for a higher degree of convergence at a very limited computational cost.
- A preliminary study of the applicability of structural methods for the resolution of Discrete Element problems.

The validation of the algorithm has been carried out by the resolution of several examples. For this purpose the examples available at the IFToMM benchmark website have been used, measuring both precision and efficiency.

Index

Eskertzeak.....	ix
Acknowledgments.....	xi
Laburpena.....	xiii
Summary.....	xvii
Index.....	xix
Figure list.....	xxv
Table list.....	xxxv
1 Testuingurua, jopuntuak eta antolaketa.....	3
1.1 Testuingurua eta motibazioa.....	3
1.2 Antolaketa.....	4
2 Artearen egoera.....	7
2.1 Modelatzea.....	8

2.1.1	Koordenadak.....	8
2.1.2	Murriztapenak.....	9
2.1.3	Orientazioa espazioan.....	10
2.2	Mekanikaren printzipioak.....	14
2.2.1	Newton-Euler ekuazioak.....	15
2.2.2	Lagrange-ren ekuazioak.....	16
2.2.3	Hamilton-en ekuazioak.....	17
2.2.4	Gibbs-Appell-en ekuazioak.....	17
2.2.5	Kane-ren ekuazioak.....	18
2.3	Sistema murriztuak.....	19
2.3.1	Lagrange-ren biderkatzaileak eta Lagrange-ren lehen motako ekuazioa.....	19
2.3.2	Lagrange-ren biderkatzaileen ezeztatzea.....	20
2.3.3	Murriztapenak dituzten sistementzako zenbakizko metodoak...24	
2.4	Zenbakizko Integrazioa.....	42
2.4.1	ODE integratzaileak.....	43
2.4.2	DAE integratzaileak.....	53
2.5	Von Newman egonkortasun analisia.....	57
3	Aurretiatzko kontzeptuak.....	59
3.1	Adierazpena.....	60
3.2	Linealizazioa.....	61
3.3	Unitatezko kuarternioia.....	62

3.4	Koordenada transformazioak.....	64
3.4.1	Solido batean kokatutako puntu eta bektore baten koordenada globalak.....	65
3.4.2	Puntu baten koordenada lokalak.....	66
3.4.3	Puntu baten abiadura koordenada lokaletatik hasita.....	67
3.4.4	Puntu baten azelerazioa koordenada lokaletatik hasita.....	67
3.4.5	Plano baten koordenada globalak.....	69
3.4.6	Lerro zuzen baten koordenada globalak.....	70
3.5	Biratze matrizeen linealizazioa.....	71
3.6	Bi puntuen arteko unitate bektorea.....	73
3.7	Puntu batean ezarritako indarra.....	74
3.8	Energia mekanikoa.....	75
4	Oreka ekuazioak.....	79
4.1	Dagoeneko eskuragai dauden eraldaketak.....	80
4.2	Solido bakar baten oreka ekuazioa.....	81
4.3	Solido bakar baten ekuazioen linealizatzea koordenada orokorrak erabiliz.....	88
4.4	Solido bat baino gehiago duten sistementzako oreka ekuazioa.....	90
4.5	Elementu diskretuak.....	91
4.5.1	Malguki linealak.....	91
4.5.2	Moteltzaile linealak.....	93

5 Murriztapenak.....	97
5.1 Koordenada murriztapenak.....	97
5.2 Murriztapen indarren linealizazioa.....	102
5.3 Lokailu zinematikoak.....	103
5.3.1 Lokailu esferikoa.....	104
5.3.2 Biratze lokailua.....	106
5.3.3 Plano lokailua.....	109
5.3.4 Lokailu zilindrikoa.....	113
5.3.5 Prisma lokailua.....	117
5.3.6 Lokailu unibertsala.....	119
5.3.7 Kuaternioiaren araua eta haren deribazioak.....	123
5.4 Matrizeen muntatzea.....	124
6 Metodo inplizituen egonkortasunari buruz.....	127
6.1 Ohiko metodoa.....	128
6.2 Adibideak.....	130
6.3 Ohiko metodoaren arazoak.....	137
6.4 Metodo ezberdin bat: koordenada minimoak.....	139
7 Integration using Newmark.....	141
7.1 The integration method.....	141
7.2 Application of the integration method.....	142

7.2.1 Normalization of the solution.....	143
8 Numerical results.....	147
8.1 Measurements.....	147
8.2 Mechanisms.....	148
8.2.1 Simple pendulum.....	148
8.2.2 Double pendulum.....	150
8.2.3 Spinning top.....	154
8.2.4 Four bar mechanism.....	158
8.2.5 Double four bar mechanism.....	161
8.2.6 Bricard mechanism.....	164
8.2.7 Slider-crank mechanism.....	168
8.2.8 Andrews squeezer mechanism.....	171
8.3 C implementation.....	174
8.3.1 Pendulum.....	175
8.3.2 Spinning top.....	176
8.3.3 Double four bar mechanism.....	179
8.3.4 Bricard Mechanism.....	181
9 Other contributions.....	183
9.1 Generalization of the linearization process for explicit methods.....	183
9.1.1 Equilibrium equation.....	184
9.1.2 Constraints equations.....	186
9.1.3 Representations of the rotation.....	191

9.1.4 Examples.....	199
9.2 A family of conditionally explicit methods for order 2 ODEs.....	208
9.2.1 Elimination of the cancellation problems on CD.....	209
9.2.2 Importance of the cancellation problem.....	210
9.2.3 Generalization of the CD method and local error.....	212
9.2.4 Performance of the method.....	215
9.2.5 Global convergence.....	217
9.2.6 Higher degree methods.....	219
9.2.7 Considerations regarding the local convergence order of the methods for integrating second order ODEs.....	226
9.3 A Multibody formulation for Discrete Elements: propagation of a shock wave across a stiff beam.....	228
9.3.1 Finite elements model.....	229
9.3.2 Minimal coordinates model.....	231
10 Conclusions and future work.....	235
11 Itzultze-taula.....	237
12 Bibliography.....	241

Figure list

Figure 3.1: vector notation.....	60
Figure 3.2: global coordinates of a point.....	65
Figure 3.3: global and lokal coordinates of a plane.....	69
Figure 3.4: geometric interpretation of a straight line.....	71
Figure 3.5: vector between two points.....	73
Figure 3.6: Global coordinates of a point.....	74
Figure 4.1: linear spring.....	92
Figure 4.2: Linear damper.....	94
Figure 5.1: projection of $\alpha(t)$	102
Figure 5.2: spherical joint.....	104
Figure 5.3: R joint.....	107
Figure 5.4: planar joint.....	109
Figure 5.5: cylindrical joint.....	113
Figure 5.6: prism joint.....	117
Figure 5.7: representation of the universal joint.....	120
Figure 6.1: workflow of the traditional approach.....	129
Figure 6.2: simple 2D pendulum.....	130
Figure 6.3: results using CD for step sizes of 0.01, 0.1, 0.6 and 0.7132	
Figure 6.4: 2D pendulum using minimum coordinates and FG. Time increments of 0.1, 0.6, 0.78 and 0.79.....	133

Figure 6.5: 2D pendulum, traditional method, TR. Time steps of 0.1, 0.7, 0.79 and 6.....	133
Figure 6.6: 2D pendulum, traditional method, FG. Time steps of 0.1, 0.6, 0.78 and 0.79.....	134
Figure 6.7: 2D pendulum, traditional method. Results for amplitudes of 5, 6, 7 and 9.....	134
Figure 6.8: 2D pendulum, minimal coordinates, amplitudes of 5, 6, 7 and 9.....	135
Figure 6.9: 2D pendulum, traditional method. Constraint forces for amplitudes of 5, 6, 7 and 9.....	135
Figure 6.10: double pendulum.....	136
Figure 6.11: 1 st bar angle of the double pendulum, traditional method.....	137
Figure 6.12: values of the constraint forces, double pendulum.....	137
Figure 6.13: workflow of the proposed method.....	140
Figure 8.1: simple 2D pendulum.....	149
Figure 8.2: 2D pendulum, proposed method, FG. Step sizes of 0,1, 0,6, 0,78 and 0,79.....	149
Figure 8.3: x coordinate of the 3D simple pendulum.....	150
Figure 8.4: mechanical energy drift of the 3D simple pendulum..	150
Figure 8.5: angle of the first bar of the double pendulum, FG.....	151
Figure 8.6: evolution of the norm of the violation of position constraints.....	151
Figure 8.7: evolution of the norm of the violation of velocity constraints.....	152
Figure 8.8: evolution of the norm of the violation of acceleration constraints.....	152
Figure 8.9: maximum natural frequency of the double pendulum	153

Figure 8.10: angle of the first bar using FG and a step size of $5e-3s$	153
Figure 8.11: spinning top.....	154
Figure 8.12: variable force applied to the spinning top.....	155
Figure 8.13: pitch and roll angles of the spinning top.....	155
Figure 8.14: angular velocity of the spinning top.....	156
Figure 8.15: linear velocity of the center of mass of the spinning top	156
Figure 8.16: violation of the position constraints of the spinning top	157
Figure 8.17: violation of the velocity constraints of the spinning top	157
Figure 8.18: violation of the acceleration constraints of the spinning top.....	158
Figure 8.19: four bar mechanism.....	158
Figure 8.20: displacement of point 1 of the four bar mechanism.	159
Figure 8.21: mechanical energy drift of the four bar mechanism..	159
Figure 8.22: violation of position constraints of the four bar mechanism.....	160
Figure 8.23: violation of the velocity constraints for the four bar mechanism.....	160
Figure 8.24: violation of the acceleration constraints of the four bar mechanism.....	161
Figure 8.25: double four bar mechanism.....	161
Figure 8.26: coordinate x of point 1 of the double four bar mechanism.....	162
Figure 8.27: component x of the velocity of point 1 of the double four bar mechanism.....	162
Figure 8.28: mechanical energy drift of the double four bar mechanism.....	163

Figure 8.29: violation of position constraints of the double four bar mechanism.....	163
Figure 8.30: violation of the velocity constraints of the double four bar mechanism.....	164
Figure 8.31: violation of the acceleration constraints of the double four bar mechanism.....	164
Figure 8.32: Bricard mechanism.....	165
Figure 8.33: coordinates of point P2 of the Bricard mechanism...	166
Figure 8.34: mechanical energy drift of the Bricard mechanism...	166
Figure 8.35: violation of position constraints of the Bricard mechanism.....	167
Figure 8.36: violation of the velocity constraints of the Bricard mechanism.....	167
Figure 8.37: violation of acceleration constraints of the Bricard mechanism.....	168
Figure 8.38: slider-crank mechanism.....	168
Figure 8.39: coordinates of point 2 of the slider-crank mechanism	169
Figure 8.40: mechanical energy drift of the slider-crank mechanism	169
Figure 8.41: violation of the position constraints of the slider-crank mechanism.....	170
Figure 8.42: violation of the velocity constraints of the slider-crank mechanism.....	170
Figure 8.43: violation of the acceleration constraints of the slider-crank mechanism.....	171
Figure 8.44: Andrews squeezer mechanism.....	171
Figure 8.45: x and y coordinates of point F of the Andrews squeezer mechanism.....	172
Figure 8.46: mechanical energy drift of the Andrews squeezer mechanism.....	173

Figure 8.47: violation of position constraints of the Andrews squeezer mechanism.....	173
Figure 8.48: violation of the velocity constraints of the Andrews squeezer mechanism.....	174
Figure 8.49: violation of the acceleration constraints of the Andrews Squeezer mechanism.....	174
Figure 8.50: mechanical energy drift of the simple pendulum.....	176
Figure 8.51: X coordinate of the CoG for different step sizes.....	177
Figure 8.52: angular velocity around axis Z for different time steps	178
Figure 8.53: X coordinate of the CoG for different methods.....	178
Figure 8.54: angular velocity around axis Z for different methods	179
Figure 8.55: violation of the position constraints.....	179
Figure 8.56: mechanical energy drift of the Bricard mechanism...	181
Figure 8.57: violation of position constraints of the Bricard mechanism.....	182
Figure 9.1: planar joint.....	187
Figure 9.2: spatial pendulum.....	200
Figure 9.3: x and y coordinates of different orientation methods under type 1 conditions: a) unit quaternion, b) Euler angles, c) reduced Euler-Rodrigues and d) Gibbs vector.....	201
Figure 9.4: x and y coordinates for different orientation methods under type 2 conditions: a) unit quaternion, b) Euler angles, c) reduced Euler-Rodrigues and d) Gibbs vector.....	203
Figure 9.5: parameters of reduced Euler-Rodrigues and Gibbs vector for type 2 conditions: a) reduced Euler- Rodrigues and b) Gibbs vector.....	203

Figure 9.6: x, y and z coordinates for different integration methods under type 3 conditions: a) unit quaternion, b) Euler angles, c) reduced Euler-Rodrigues and d) Gibbs vector.....	204
Figure 9.7: Euler angles ZXZ and Gibbs vector parameters under type 3 conditions: a) Euler angles and b) Gibbs vector.....	205
Figure 9.8: planar slider-crank mechanism.....	205
Figure 9.9: displacement of the slider using quaternions.....	206
Figure 9.10: behavior of the parameters in the planar slider-crank mechanism: a) unit quaternion, b) Euler angles for ZXZ, c) reduced Euler-Rodrigues and d) Gibbs vector.....	207
Figure 9.11: simple pendulum.....	211
Figure 9.12: 1dof system.....	216
Figure 9.13: spectral radii related to the stability matrix with respect to $\Delta t\omega$ employing $\beta=0.5$, $\alpha=1$, $\alpha=4/3$ and $\alpha=2$ respectively.....	217
Figure 9.14: unstable result ($\alpha=1$, $\beta=0.5$, $\Delta t=2.1$).....	217
Figure 9.15: stable result ($\alpha=1$, $\beta=0.5$, $\Delta t=2$).....	217
Figure 9.16: spectral radii of the stability matrix with respect to $\Delta t\omega$ and values of α of $5/4$ and $3/4$	223
Figure 9.17: results of the 1dof model for $\alpha=5/4$ and step sizes of 0,1 and 0,01.....	224
Figure 9.18: spectral radius of the stability matrix related to $\Delta t\omega$ for $\alpha=4/5$ and $\zeta=\gamma=\beta=1$	225
Figure 9.19: mass-spring chain.....	228
Figure 9.20: input function.....	229
Figure 9.21: finite element model.....	230
Figure 9.22: finite element model results for the velocity of the free edge and intermediate sections.....	230

Figure 9.23: results for a 10 masses model, corresponding to the minimal coordinates model (left) and the solution obtained by ADAMS (right).....232

Figure 9.24: results for 20 solids with a total mass of 0.04kg, a total stiffness of 10N/m and a time step of 0.001s, corresponding to the minimal coordinates model (left) and to the solution obtained by ADAMS (right).....233

Figure 9.25: results for a total mass of 0.04kg, 100 masses, a total stiffness of 10N/m and a time step of 0.001s.....234

Table list

Table 8.1: initial position of the Bricard mechanism.....	165
Table 8.2: IFToMM Benchmark results for the pendulum.....	175
Table 8.3: Comparison between Newmark and CD.....	177
Table 8.4: results for the double four bar mechanism, IFToMM Benchmark website.....	180
Table 8.5: results for the Bricard mechanism, IFToMM Benchmark website.....	181
Table 9.1: results of the spatial pendulum for different methods under type 1 conditions.....	201
Table 9.2: results of the spatial pendulum for different orientation methods under type 2 conditions.....	202
Table 9.3: results of the spatial pendulum for different orientation methods under type 3 conditions.....	203
Table 9.4: results of the slider-crank mechanism for different orientation methods.....	206
Table 9.5: mechanical energy drift of the simple pendulum.....	211
Table 9.6: mechanical energy drift for different configurations....	215
Table 9.7: stability limits for different configurations.....	216
Table 9.8: results for the 4 th degree method.....	223
Table 9.9: experimental results for $\alpha=5/4$	224
Table 9.10: results for the 5 th degree method, $\alpha=4/5$ and $\zeta=\gamma=\beta=1$	226
Table 9.11: local convergence of the proposed methods.....	227

1 Testuingurua, jopuntuak eta antolaketa

1.1 Testuingurua eta motibazioa

Integratzaile implizitoek ezagunak diren hainbat arazo dituzte, hala nola ekiditea ezinezko den zenbakizko moteltzea eta, baldintzapeko egonkortasuna ezartzen duten parametroak erabiliz gero, haren muga ezin zehaztu izatea. Tesi honetan garatutako lana arazo hauek konpontzen saiatzen da, horretarako Newton-en metodo osoa, zeinarentzat deribazio analitikoak erabili behar diren, eta azpiespazio hutsaren metodoa erabiliz. Honen bidez, helburu nagusia baldintzapeko egonkortasunari dagozkion parametroen erabilera ahalbidetzen duen formulazio bat lortzea da, horren bidez egonkortasun muga zehaztuz. Baldintzapeko eta baldintzarik gabeko egonkortasunei dagozkien eremuen arteko mugan dauden parametroak ere erabiltzea posible izan behar da, egonkortasuna baldintzarik gabekoa bait da eta ez bait dago zenbakizko moteltzerik. Metodo hauen egokitasuna hainbat konfigurazio ezberdin erabiliz frogatu beharra dago, zenbakizko metodo batentzat ezinbestekoa bait da azkarra eta zehatza izatea. Datu hauek erreferentziazkoekin alderatuko dira.

Helmuga gehiago ere finkatu dira: garatutako metodoak koordenada orokortze bat ahalbidetu behar du. Ezeztatze erroreei lotutako zehaztasun galera ere ikertu beharra dago. Honek, aldi berean, hobetutako formulazio baten orokortze handiago bat dakar, eta ondorioz printzipioz parametrizatu ezin daitezkeen metodo batzuen (hala nola Diferentzia Zentralak) orokortze eta parametrizazioa lortu daiteke.

Eta azkenekoz, garatutako metodoaren bidez gorputz malguak adieraztea interesgarria da, eta ondorioz ikertu beharra dago.

Tesi hau EHU-ren ADM Mechanical Design ikerketa taldearen ikertze eremuaren baitan garatu da. Matematika aplikatuaren arlo berean aldeztu aurretik metodo esplizito bat arrakastaz garatu izan da [1], eta mekanismoen sintesia [2] ere ikertu izan da. ADM taldeak darabiltzan beste ikerketa arlo batzuk atal metalikoen nekea da, zeinaren baitan gainazalen tratamenduen irautea, fabrikazio aditibo bidez garatutako atalen irautea eta neke multiaxiala ikertzeko metodoen garapena ikertzen diren. Elementu finituen bidez modu teorikoan lortutako emaitza numerikoak egiaztatzeke modeloak ere sortzen dira. Energia eolikoaren arloan, errodamenduak [3,4] eta engranajeak ere ikertzen dira, turbina eolikoaren dorrearen torlojudun loturekin batera; honen barnean, muntatze orden egokia eta interakzio elastikoak ikertzen dira. Aeroespazio sektorean, engranaje planetarioak ikertzen dira. Oil&gas sektorea ere ADM taldearen ikerketa eremuaren baitan dago, eta hala izanda torlojudun loturak ikertzen dira [5]. Hertz inplanteen sektorea ere ikertzen da [6], hertz inplante sistemen portaera mekaniko eta biomekanikoaren alorrean. Eta azkenekoz, automozio sektorean, estanzazio matrizeen higatze tribologikoa ikertzen da, motorren diseinatze eta fabrikazioaz gain.

1.2 Antolaketa

Lan hau 9 ataletan zehar garatzen da. Hasteko, lan hau garatzeko haren aurretik garatu diren eta horretarako garrantzizkoak diren ikerketak eta haien emaitzak aipatzen dira *Artearen egoera* atalean.

Ondoren, *Aurretiazko kontzeptuak* atalean, hurrengo ataletan erabiliko diren eta haietarako ezagunak izan behar duten kontzeptuak azaltzen dira. Hauen artean koordenada sistema aldaketak, kuarternioien erabilpena eta ekuazio ez linealak linealizatzeko erabili den sistema adierazten dira.

Hurrengo atalek atalean ezarritako jopuntuak lortzeko pausoak ematen dituzte. Hasteko, oreka ekuazioen adierazpen linealak lortzen dira *Oreka ekuazioak* atalean; ondoren, *Murriztapenak* atalean aurreko ataletik lortutako oreka ekuazioak mugatzen dira, haiek adierazten dituzten solido askeei dagokien portaera ezartzeko. Hainbat lokailu adibide garatzen dira.

Metodo implizituen egonkortasunari buruz atalean metodoa ezartzeko ordena arrazoitzen da, horretarako egonkortasuna irizpide bezala erabiliz. Orden ezohiko hau azaldu ondoren, eta murriztapenak ezarrita daudela, eskuragai dagoen aldagai sortari integrazio metodoa ezartzen zaio *Integration using*

Newmark atalean. Honekin ekuazio diferentziala zenbakizko metodo baten bidez integratzea lortzen da.

Integrazioari jarraiki, azaldutako metodoa frogatzen da hainbat adibideren bidez *Numerical results* atalean. Horretarako haien emaitzak ezagunak diren hainbat adibide erabiltzen dira, haiekin alderatu asmoz. Gainera, eraginkortasuna ere neurtzen da, horretarako hizkuntza konpilatu batean programatuz.

Azkenekoz, *Other contributions* atalean lan honen garapenean ikasitakoa gehiago garatzen da; alde batetik, eta lan osoan zehar kuarternioiak erabili direnez, koordenada orokortze bat proposatzen da nahi den biratze koordenada multzoa erabiltze aldera. Bestetik, *Newmark*-en ekuazioek dituzten abantailak (hala nola parametrizatu ahal izatea eta parametro hauen arabera egonkortasuna aldatzea) diferentzia zentralen metodoari ezartzen zaizkio, metodo honek duen ezeztatze errorea eta konbergentzia aldatuz.

Tesi hau internazionala da, eta gainera haren parte bat euskaraz idatzita dago. Hau dela eta, hainbat aipamen egin beharra dago azken honen harira:

- Kontzeptu matematikoak adierazteko siglak (ODE, DAE, etab) ingleraz erabiltzen direnak dira euskarazkoak (EDAr, EDAl) erabili ordez, irakurleari ezagunago izan asmoz.
- Ingeleraz erabilitako hitzak (manifold, drift) kursibaz adierazten dira euren jatorria adierazteko.
- Bukaeran 11 atalean gazteleraz, ingeleraz eta euskaraz erabilitako hitz teknikoaren sinonimoen taula bat gehitzen da. Hitz hauetako asko Eusko Jaurlaritzaren itzultzaile neuronala erabiliz lortu izan dira, eta beste asko Jose Ignacio Royo Prieto ETSIB-ko Matematika Aplikatuko departamentuko irakaslearen testuliburutik. Erabilitako gainerako hitz teknikoak ingelera zein gaztelera erabiliz adierazitako hitzen itzulpenak dira, zalantzarik egotean hura zehatzen adierazten duen hizkuntza oinarritzat hartuz. Hitz bakar batzuk zentzu bat baino gehiagotan erabili izan dira, baina haien zentzua testuingurutik atera daiteke.

2 Artearen egoera

Metodo konputazionalak maneiatzeko gai diren ordenagailuak agertu aurretik, sistema mekanikoen analisia grafikoki burutzen zen. Lehentasun nagusia gorputz kopuru baxua zuten sistemen analisia burutzea zen, zeinen ebazpena grafikoki edo eskuz egindako kalkuluen bidez lor zitekeen. Abiadura handiko ordenagailuen garapenak solido anitzeko sistema konplexuen analisia posible egin zuen, eta Newton-en edo Lagrange-ren metodo klasikoaren inplementazioa ahalbidetu zuen [7]. Lehenago erabilitako metodo grafikoak erabilgarriak ziren analisi zinematikoko baterako, baina zehaztasun falta nabarmena zuten eta denbora asko behar zuten [8].

Gorputz anitzeko sistema bat ebazteko hiru pauso dira beharrezkoak: lehenengoz, sistemaren modelo matematikoa bat garatu behar da; ondoren, mekanikaren printzipioak ezartzen dira higidura ekuazioak formulatzeko, eta bukatzeko ekuazioak zenbakizko metodo baten bitartez integratzen dira [9].

Gorputz anitzeko sistema bat ebazteko, beraz, lehenengo pausoa hura matematikoki adieraziko duen modelo matematikoa baten garapena da, zeinarentzat solido bakoitzaren posizioak (eta abiadura eta azelerazioak) eta orientazioak adierazten dituen aldagai multzo bat hautatzea derrigorrezkoa den. Orokorrean, aldagai kopuru handiago batek aldagai sinpleagoak eta elkarrekiko askeagoak dakartza, baina zoritxarrez sistema matematikoaren dimentsioaren handitzea dakar. Aldagai kopuru txikiago baten eragina kontrakoa da [7].

Ondoren mekanikaren printzipioak, hala nola Lagrange-ren ekuazioak, Newton-en legeak, potentzia birtualak edo Hamilton-en ekuazioak ezartzen dira, zeinekin sistemaren higidura ekuazioak sortzen diren.

Mekanikaren printzipioak ezartzetik lortutako ekuazioek gainera ekuazio aljebraiko multzo bat behar dute murriztapenak adierazteko. Ekuazio hauek guztiek batera 3 indizeko Ekuazio Aljebraiko Diferentzial sistema bat (DAE) sortzen dute. Lagrange gehituaren erabilerak DAE sistema ODE

integratzaileen bidez ebatzi daitekeen sistema batean eraldatzea ahalbidetzen du [10].

Azkenekoz, sistemaren akuazioak ebatziko dituen zenbakizko metodo bat hautatu beharra dago. Hemen, aukera bat sistema 1 ordena duen sistema baliokide batera murriztea da [11,12]; modu honetan, sistema murriztua lehen ordendun metodo esplizito edo inplizito bidez ebatzi daiteke. Beste aukera bat integrazio zuzena ahalbidetzen duten metodoak erabiltzea da sistema murriztu gabe, ondorioz aldagaiak bikoiztea ekidinez [8].

Lau pauso hauek ez dira elkarrekiko independenteak. Pauso bakoitzean hartutako erabaki bakoitzak hurrengo pausoak baldintzatuko ditu, eta emaitzean nabarituko da.

2.1 Modelatzea

Sistema matematikoki adierazteko koordenada multzo bat beharrezkoa da. Koordenada multzo honek solido bakoitzaren posizioa eta orientazioa erabat definitu behar ditu simulazio osoan zehar.

Horretarako erabilitako koordenadak bi multzotan sailkatu daitezke: koordenada askeak eta menpeko koordenadak.

2.1.1 Koordenadak

Koordenada askeek sistema parametro edo koordenada kopuru minimo baten bidez adierazten dute. Erabilitako koordenada kopurua, ondorioz, sistemaren askatasun graduarekiko berdina da. Koordenada hauek bereziki erabilgarri dira kate irekia duten sistemetan, baina ez dute elementu bakoitzaren posizioa unibokoki adierazten. Honek analisi oroko baterako ezegoki bihurtzen ditu. Are gehiago, kate itxia duten sistemetarako ebazpena zailago bihurtzen da [8].

Sistema osatzen duten solido bakoitza unibokoki adierazteko askatasun gradu kopurua baino koordenada gehiago dira beharrezkoak. Hala ere, hau koordenadak elkarrekiko menpeko bihurtuz bakarrik lor daiteke; menpekotasun hau murriztapen ekuazioen bidez lortzen da. Bistan denez, ondorioz ezin dira independenteak izan. Horrela izanda, murriztapen ekuazio kopurua koordenada kopuruaren eta sistemaren askatasun gradu kopuruaren arteko diferentzia da.

Gehien erabilitako menpeko koordenadak koordenada Cartesiarrak, erlatiboak eta naturalak dira.

Koordenada Cartesiarrek puntu bat espazioan base ortonormal bat eta sorpuntuan O puntu bat duten ardatz sistema baten bidez adierazten dute. Denborarekiko menpeko den bektore bat ondorengo moduan adierazi daiteke:

$$\mathbf{r}(t) = [x(t) \quad y(t) \quad z(t)]^T \quad (2.1)$$

Non $x(t)$, $y(t)$ eta $z(t)$ $\mathbf{r}(t)$ -ren proiektzioak diren erreferentzia sistemaren ardatz bakoitzarekiko. Abiadura eta azekerazio atalak $\mathbf{r}(t)$ -ren deribazio bidez lortzen dira.

Koordenada erlatiboak erabilera orokorreko analisi programetan erabili zen lehen koordenada multzoa dira [8], koordenada lau zein espazialean, Paul eta Krajcinovic-en [13,14], Sheth eta Uicker-en [15] eta Smith *et al.*-en [16] partez. Elementu bakoitzaren posizioa aurreko elementuarekiko adierazten dute; horrela izanda, bi solidoen arteko askatasun gradu erlatiboak baldintzatutako parametroak darabiltza. Honek, abantaila gisa, beharrezko aldagai kopurua lotura bakoitza adierazteko kopuru minimoa izatea ahalbidetzen du.

Koordenada naturalak Jalón *et al.* [17] eta Serna *et al.*-ek [18] garatu zituzten geometria laua erabiliz, eta geroago 3D-ra hedatu zituzten Jalón *et al.*-ek [19,20]. Gorputz zurrun baten orientazioa 2D kasuan haren bi punturen (3 puntu 3D kasuan) koordenada Cartesiarrak erabiliz lortzen da, rotazio parametroen beharra ezeztatuz. Honek restrizkio ekuazioen formulazioa errazten du. Beharrezko koordenada kopuruak ez da askatasun gradu kopuruaren berdina, baina ez da Cartesiarrekin bezain handia. Gainera, ez du prozesatzerik behar ez lehenago ez geroago solidoaren kokapena lortzeko.

Koordenada hauen desabantaila nagusia lotura bakoitzak koordenada multzo egoki jakin bat duela da. Koordenada kopuru finko bat ez edukitzeak eurak erabiltzen ikasteko prozesua gainontzekoak baino zailagoa izatea dakar, intuitibotasun faltagatik.

2.1.2 Murriztapenak

Orain arte solido bat espazioan definitzeko era ezberdinak deskribatu dira. Baina murriztutako sistemak erabiliko badira beste kontzeptu bat erabili beharra dago: murriztapenak. Atal honetan eskuragai dauden murriztapen

motak azalduko dira, euren inplementazio eta prozesatzeari buruzko informazio gehigarririk gabe; kontzeptu horiek printzipio mekanikoen ondoren azalduko dira.

Murriztapenek sistemaren solidoei ezarritako mugatze bat matematikoki adierazten dute. Sistemari muga desberdinak ezartzea posible denez, adierazpen matematiko hauek ere ezberdinak izango dira denborarekiko esplizitoki menpeko diren ala ez, posizioarekiko bakarrik menpeko diren ala ez etabar kontuan hartuta.

Murriztapenak bi modutan ezarri daitezke: euren ekuazioak sistemaren askatasun graduen dimentsio bera duen sistema bat sortzeko elkartu daitezke, edo Ekuazio Diferentzial Aljebraiko (DAE) sistema bat sortu daiteke non murriztapenak ekuazio aljebraikoak diren eta non sistema askea Ekuazio Diferentzial Arrunt (ODE) baten bidez adierazten den [10]. Konplexutasun jakin bat duten ekuazio sistementzat bigarren modua egokiagoa da.

Murriztapenak osatzen dituzten ekuazioak holonomokoak edo ez holonomokoak izan daitezke. Lehen motak posizio parametroak bakarrik ditu haren baitan, eta bigarrenak abiadurak ere baditu. Bi multzo hauek ezberdintzearen arrazoa zera da: holonomokoak integratzea posible da, baina ez holonomokoak ez [8,10]. Ondorioz, ekuazio ez holonomokoa ezin dira menpeko koordenadak oreka ekuaziotik kentzeko erabili.

Ekuazio holonomokoak beste bi multzotan sailkatu daitezke: ekuazio esklerotikoak posizioarekiko funtzio dira bakarrik, eta ekuazio reonomikoak denborarekiko ere menpeko dira.

2.1.3 Orientazioa espazioan

Solido bat espazioan adierazteak bi arazo handi dakartza: lehenengoz, hiru ardatzekiko rotazio erlatiboak ezin dira konmutatu, eta ondorioz euren ordena garrantzizkoa da. Eta bigarrenez, egoera zehatz batzuetan rotazioen neurketak ez dira oso zehatzak. Honen adibide bat Lurraren poloetan aurkitu daiteke, non latitude aldaketa txiki batek longitude aldaketa handi bat dakarren.

Espazioan burututako biratzea haren naturarekiko sailkatu daiteke: biratze matrize bat erabiliz adierazi daitezke, eta baita biratze matrizearen parametrizazio bidez, kuaternioien kasuan.

[7]-n adierazten den bezala, \mathbf{r} bektore bat hainbat erreferentzia sistemetan adierazi daiteke, eta ondorioz zera idatzi daiteke:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 = r_x \mathbf{i}_x + r_y \mathbf{j}_y + r_z \mathbf{k}_z \quad (2.2)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 = r_u \mathbf{i}_u + r_v \mathbf{j}_v + r_w \mathbf{k}_w \quad (2.3)$$

\mathbf{r} -ren koordenadak erreferentzia sistema batean ezagunak badira, hauek beste sisteman lortzea posible da. Sistema batekiko proiektzioak bestera aldatzea posible da, zeinak matrize forman ondorengo itxura duen:

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_x \mathbf{i}_u & \mathbf{i}_x \mathbf{j}_v & \mathbf{i}_x \mathbf{k}_w \\ \mathbf{j}_y \mathbf{i}_u & \mathbf{j}_y \mathbf{j}_v & \mathbf{j}_y \mathbf{k}_w \\ \mathbf{k}_z \mathbf{i}_u & \mathbf{k}_z \mathbf{j}_v & \mathbf{k}_z \mathbf{k}_w \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \end{pmatrix} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Matrizearen osagai bakoitza erreferentzia sistema bakoitzaren bektore zuzentzaileen arteko biderketa eskalar bat da.

\mathbf{R} matrizeak UVW sistema XYZ sistemarekiko adierazten du, eta ortonormala da. Erreferentzia sistema nagusiaren ardatz batekiko biratuta dauden sistemak adierazteko erabilgarri da.

Ardatz nagusiekiko biratzeak (Euler angelu bezala ezagunak) hiru hurrenez hurreneko biratze adieraziko dituen biratze matrizea sortzeko erabilgarri dira [10]. Hau biratze ardatza errepikatzen ez bada bakarrik da posible; baldintza honen arabera, 12 biratze konbinazio burutu daitezke.

Z ardatzarekiko biratze bakar bat burutuz, θ biratze bat horrela adierazi daiteke:

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Hiru hurrenez hurreneko biratzeek sortutako biratze matrizea biratze bakoitzaren matrizeak elkarrekin biderkatuz lortzen da. Propietate honek frogatzen du hiru biratzeen ordena kontuan hartu beharra dagoela, eta ondorioz emaitza gisa lortutako orientazioa baldintzatzen duela. Hala izanda, biratze matrizea sortzeko beharrezkoak diren hiru biratzeak adierazteko modurik erabilienak bi dira: lehenengoak biratze angelua bi plano homologoen (hala nola XY eta UV) arteko ebaketatik sortutako lerroaren inguruan burutzen du. Honek ZXZ -ren antzerako biratze sekuentzia bat sortzen du. Bigarren moduak 3 ardatz ezberdinekiko biratzeak ezartzen ditu, biratze angelua

ezartzen duten lerroa lortzeko mozten diren planoak homologoak ez izanik. Metodo honen bidez lortutako sekuentziarik erabiliena XYZ da [21].

Hautatutako modua dena dela, biratze matrizea Euler angeluen bidez adierazteak bi desabantaila dakartza; lehenengoz, operazio trigonometriko ugari darabiltza; eta bigarrenaz, balio batzuetarako eta orientazio berbererako biratze konbinazioak bi dira bat izan ordez. Honen ondorioz sistemak askatasun gradu bat galtzen du eta mugitu ezinik geratzen da. Fenomeno hau *gimbal lock* bezala ezagutzen da.

2.1.3.1 R-ren parametrizazioak

Aurrez aipatutako hiru hurrenez hurreneko biratzeak biratze matrizearen +1 berezko balioari lotutako \mathbf{l} bektorearen inguruan egindako ϕ angeluko biratze bakar baten bidez parametrizatu daitezke, Euler-ek frogatu bezala. Ondorioz, rotazio matrizea bi osagai hauen bitartez parametrizatu daiteke.

Biratze matrizearen parametrizazioa Euler-Rodrigues-en ekuazioaren bitartez [10] lortzen da, zeinaren baitan hainbat parametro erabili daitezkeen. Haren ezaugarri den \mathbf{p} bektorea ondorengo ekuazioaren bidez adierazten da:

$$\mathbf{p} = p(\varphi) \mathbf{u} \quad (2.6)$$

Parametrizazio osoa lortzeko, hurrengo baldintza [22] betetzen duen funtzio sortzaile bat behar da:

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{p(\varphi)}{\varphi} = \kappa \quad (2.7)$$

Non κ normalizazio faktore erreal bat den (askotan 1), zeinak $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \mathbf{p} = \varphi \mathbf{u}$ esan nahi duen. Funtzio hau Euler-Rodrigues ekuazioan sartzen da biratze matrizea lortzeko. Funtzio sortzaile motaren aukera izango da biratze matrizearen parametrizazio desberdinak emango dituen, eta ondorioz horretarako bide egokia da beharrezko diren operazioak erraztuko dituen funtzio mota hautatzea.

Parametrizazio ezagunenak, hautatutako funtzioaren arabera, hurrengoak dira: rotazio Cartesiarra edo mapa exponentziala ($p(\varphi) = \varphi$), Cayley-Gibbs-Rodrigues ($p(\varphi) = 2 \tan \frac{\varphi}{2}$), Wiener-Milenkovic ($p(\varphi) = 4 \tan \frac{\varphi}{4}$), parametro linealak ($p(\varphi) = \sin \varphi$) eta Euler-Rodrigues ($p(\varphi) = 2 \sin \frac{\varphi}{2}$, $p(\varphi) = 4 \sin \frac{\varphi}{4}$).

2.1.3.2 Kuaternioiak

Kuaternioiak W. R Hamilton-ek garatu zituen 1843 urtean. Haien propietate elkartzaile eta biderkatzaileak tarteko, aljibraren lehen multzo ez konmutatiboa sortzen dute. Ingeniaritzarenganako deskribapenik gertuena zenbaki konplexuen 3D zabaltze bat bezala da. Honek, Euler-en ekuazioak plano batean biratze bat zenbaki konplexu baten bidez adieraztea ahalbidetzen duen modu berean, espazioan bi osagai gehiagorekin egitea ahalbidetzen du; ondorioz, kuaternioiak parte erreal bat eta hiru imajinario ditu.

Kuaternioiak eskalar batez eta bektore batez adierazten dira:

$$\mathbf{q} = q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k} \quad (2.8)$$

Ekuazio honetan, q_0 atal eskalarra da eta q_1 , q_2 eta q_3 3 ardatz Cartesiarrekiko proiektzioak dira, zeinek $\mathbf{v} = q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k}$ bektorea osatzen duten. 2.8 ekuazioa, ondorioz, $\mathbf{q} = q_0 + \mathbf{v}$ bezala ere adierazi daiteke [7]. Euler-en balioekiko berdintasuna ondorengo ekuazioen bidez lortzen da:

$$\begin{aligned} q_0 &= \cos(\phi/2) \\ q_i &= l_i \sin(\phi/2) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Bektore zuzentzaileek ondorengo arauak betetzen dituzte:

$$\begin{aligned} i^2 &= j^2 = k^2 = -1 \\ jk &= -kj = i \\ ki &= -ik = j \\ ij &= -ji = k \end{aligned} \quad (2.10)$$

Ondorioz, biratze matrizearen espresioa, Euler-en parametroekin bezala, Rodrigues-en ekuazioaren bidez lortzen da:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Espresio honek ez du singularitasunik alderantzikatzean, Euler-en parametroekin bezala.

Haug-en arabera [23], espresio hau ondorengo formularen bidez ere lortu daiteke:

$$\mathbf{R}(\mathbf{o}) = (o_0^2 - \mathbf{e}^T \mathbf{e}) \mathbf{I} + 2 \mathbf{e} \mathbf{e}^T + 2 o_0 \tilde{\mathbf{e}} \quad (2.12)$$

Non $\tilde{\mathbf{e}}$ kuaternioiaren bektorea osatzen duten $\mathbf{e}=(o_1 \ o_2 \ o_3)^T$ atalen bidez sortutako matrize antisimetrikoa den. Hau dela eta biratze matrizea bi matrize linealen arteko biderketa gisa adierazi daiteke, zeinak ondorengoak diren:

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{o})=(-\mathbf{e} \ -\tilde{\mathbf{e}}+o_0\mathbf{I}) \quad (2.13)$$

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{o})=(-\mathbf{e} \ \tilde{\mathbf{e}}+o_0\mathbf{I}) \quad (2.14)$$

Ondorioz, biratze matrizea ondorengo eragiketaren bidez lortzen da:

$$\mathbf{R}(\mathbf{o})=\mathbf{E}_2(\mathbf{o})\mathbf{E}_1^T(\mathbf{o}) \quad (2.15)$$

Bektoreak unitatezko araua betetzen badu ondorengoa betetzen da: $\mathbf{E}_1(\mathbf{o})\mathbf{E}_1^T(\mathbf{o})=\mathbf{I}$ eta $\mathbf{E}_2(\mathbf{o})\mathbf{E}_2^T(\mathbf{o})=\mathbf{I}$. Ondorengoa ere frogatu daiteke:

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{o}_1)\mathbf{E}_1^T(\mathbf{o}_2)=\mathbf{E}_2(\mathbf{o}_2)\mathbf{E}_1^T(\mathbf{o}_1) \quad (2.16)$$

Abiadura angeluarra, formulazio hauen arabera, ondorengo moduan adierazi daiteke:

$$\boldsymbol{\omega}=2\mathbf{E}_2(\mathbf{o})\dot{\mathbf{o}} \quad (2.17)$$

Eta:

$$\boldsymbol{\Omega}=2\dot{\mathbf{E}}_2(\mathbf{o},\dot{\mathbf{o}})\mathbf{E}_2(\mathbf{o})^T \quad (2.18)$$

Ondorioz:

$$2\mathbf{E}_2(\mathbf{o})=\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{o}}} \quad (2.19)$$

2.2 Mekanikaren printzipioak

Solido baten higidura adierazten duten ekuazioek solidoari ezarritako indarrak (inertzialak, elastikoak, disipatiboak, murriztapen indarrak edo kanpo indarrak) euren artean erlazionatzen dituzte sistema definitzeko erabiltzen koordinaden bidez. Honen emaitza bigarren ordena duen ekuazio diferentzial bat da. Ekuazio hauek gorputz anitzeko sistemen dinamikaren oinarria dira [7].

Software bidezko gorputz anitzeko sistemen modelizazioaren hasieratik erabilienak Newton-Euler-en ekuazioak dira. Horretaz kanpo, mekanika analitikoak D'Alembert, Potentzia Birtualak edo Lan Birtualak bezalako printzipioetan dago oinarrituta.

Sistema dinamikoen ekuazioak adibidez Hamilton-en printzipioaren bidez lortu daitezke. Hauek lortzeko koordenada orokortuen erabilera beharrezkoa da, eta nekeza izatera heldu daiteke koordenada asko erabiltzean [10].

Konparatuz, Lagrange-ren ekuazioak higidura ekuazioak deribatzeko modu eraginkor bat dira, eta ez dute Hamilton-en ekuazioak erabiltzeko beharrezkoa den partekako integrazioaren beharrik.

Gibbs-Appell-en ekuazioak murriztapen ez holonomokoak zituzten sistementzako lehenengo formulazioa izan ziren, eta inertzia indarrak azelerazioen funtzio bat bezala adieraztean daude oinarrituta. Bide hau jarraituz, Hamel-Boltzman-en ekuazioek Gibbs-Appell-en ekuazioen formalismoak mantentzen dituzte murriztapen ez holonomokoak dituzten sistementzat, eta Lagrange-ren ekuazioen garapen bat bezala ulertu daitezke; ekuazio hauek orokortutako posizio eta abiadura koordenadak darabiltzaten energia funtzioen bidez lortzen dira [24]. Maggi-ren ekuazioek, nahiz eta formalismo berbera jarraitu, Lagrange-ren biderkatzaile ezezagunak ezeztatzen dituzte murriztapenen Jacobiarraren osagarri ortonormala erabiliz [25,26]; arrazoi honengatik, ez da beharrezkoa energia orokortutako abiaduren funtzio gisa adieraztea.

Azkenekoz, Kane-ren ekuazioak gorputz anitzeko sistemak simulatzeko programak sortu ziren aldi berean proposatu ziren; hau dela eta, programa hauen arazoak ebazten saiatzen dira, bibliografian aipatzen den moduan [27].

2.2.1 Newton-Euler ekuazioak

Ekuazio hauek, hurrenez hurren, masa puntual baten momentu linealaren kontserbazioa eta solido aske baten momentu angeluarraren kontserbazioa ezarriz lortzen dira, sistemari ezarrirako indar eta momentuak eta haren higidura elkarrekin lotuz. Hala izanda ekuazio hauek bi atal dituzte, zeinetatik lehenengoak (Newton) masa puntual baten posizioa espazioan modu matematikoan adierazten duen:

$$\sum \mathbf{f}_i = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\ddot{\mathbf{r}} \quad (2.20)$$

Non \mathbf{f} ezarrirako indarren bektorea den, \mathbf{p} momentu lineala den, $\ddot{\mathbf{r}}$ azelerazioa den eta m solidoaren masa den.

Newton-en ekuazioek, euren kabuz, higidura linealak, euren deribazioak eta indar linealak bakarrik lotzen dituzte elkarrekin, inertzia indarrak, momentuak etabar alde batera utziz eta horrela masa puntual bat soilik adieraziz. Solido zurrun bat adierazteko Newton-en ekuazioek darabiltzaten aldagaiez gain haren inertzia, biratzeak eta haien deribazioak eta ezarritako momentuak ere kontuan hartu behar dira. Erlazio hau Euler-en ekuazioak erabiliz lortzen da:

$$\sum \mathbf{t}_i = \frac{d\mathbf{h}}{dt} = \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h} \quad (2.21)$$

Non \mathbf{t} ezarritako momentua den, \mathbf{h} momentu angeluarra den, \mathbf{I} inertzia tentsorea den, $\boldsymbol{\omega}$ abiadura angeluarra den eta $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ azelerazio angeluarra den.

Bi ekuazio sistema hauek, batera, Newton-Euler-en ekuazioak osatzen dituzte, eta solido zurrun baten higidura espazioan erabat adierazten dute [7]. Matrizen forman:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{t} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{r}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

Sistema honek gorputz anitzeko sistemaren solido bakoitzeko sei ekuazio sortzen ditu. Koordenada askeak erabiliz sortutako sistemarekin konparatuz, modeloa nahiko handia da.

Ekuazio honetan, abiadura angeluarrak ez dira normalean koordenada multzo baten denborarekiko deribazioak. Hau dela eta, ezin dira zuzenean integratu sistemaren koordenadak lortzeko [7]. Are gehiago, ekuazio honek murriztapen indarrak kanpo indarren bektorearen baitan ditu, eta ez dira ezagunak. Hala ere, abantaila gisa sistematizatzen errazak dira, euren formulazioa ez bait da sistemaren topologiarekiko menpeko.

2.2.2 Lagrange-ren ekuazioak

Lagrange-ren ekuazioak lortzeko prozesua Lan Birtualen printzipioari Dálembert-en printzipioa ezarriz hasten da. Hainbat transformazio eta propietate ezarriz eta inda kontserbatibo eta ez kontserbatiboak banatuz horretarako atal Lagrangiarra erabiliz, ondorengo lortzen da:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right)^T = \mathbf{Q}_{inercia} \quad (2.23)$$

Koordenada askeak erabiltzeak koordenada askeak bezainbeste askatasun gradu izatea ahalbidetzen du, ekuazio sistemaren tamaina murrizteko egokiak izanez. Hala ere, eta nahiz eta sistema murriztua izan, ekuazio oso ez lineal eta elkarrekiko menpekoak ditu bere baitan; menpeko koordenadak erabiltzeak kontrakoa dakar, ekuazio sinpleagoak eta ez hain ez linealak sortuz [8].

2.2.3 Hamilton-en ekuazioak

Hamilton-en ekuazioek oreka 1 ordena duten $2n$ ekuazio diferentzialen bidez ezartzen dute. Horretarako Hamilton-en ekuazio kanonikoak eta funtzio hamiltondarra erabiltzen dira. Hamilton-en ekuazio kanonikoak lortzeko, funtzio hamiltondarraren formulazio diferentziala eta momentu kanonikoa Lagrangiarraren erabiliz alde batetik eta hamiltondarraren diferentziala bestetik berdindu beharra dago:

$$\mathbf{p} = -\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}\right)^T + Q_{inercia} \quad (2.24)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\right)^T \quad (2.25)$$

Haren aplikazioa gorputz anitzeko mekanikan ez da egokiena, Hamilton-en ekuazioak deribatzeke lehenengo Lagrangiarraren kalkulatu beharra bait dago [7]. Lehenago ikusi den bezala, honek operazio kopuru nahiko handia behar du.

2.2.4 Gibbs-Appell-en ekuazioak

Kasu honetan, inertzia indarren lan birtuala hiru formula posibleen multzotik bat erabiliz lortzen da. Hiru formulak elkarrekiko baliokide dira eta ondorioz emaitza berbera ematen dute. Horretarako, sistema koordenada multzo berbera erabiliz adierazi beharra dago. Inertzia indarren lan birtuala energia zinetikoa eta Lagrange-ren ekuazioak erabiliz ebaluatu daiteke, Shabana-k adierazi bezala [7].

Inertzia indarrak Gibbs-Appell-en ekuazioen baitan azelerazioaren funtzio bezala adierazten dira; Lagrange-ren ekuazioek aldiz energia zinetikoaren funtzio bezala adierazten dituzte (zeina abiadurarekiko koadratiko den [7]). Kasu honetan, ondoren adierazi bezala idatzi daitezke:

$$Q_{inercia} = \int_V \rho \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}}\right)^T \mathbf{r} dV \quad (2.26)$$

$$Q_{inercia} = \int_V \rho \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \mathbf{r} dV \quad (2.27)$$

$$Q_{inercia} = \int_V \rho \left(\frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \ddot{\mathbf{q}}} \right)^T \mathbf{r} dV \quad (2.28)$$

Inertzia indarrak ondorengo formularen bidez idatzi daitezke:

$$Q_{inercia} = \frac{\partial G}{\partial \ddot{\mathbf{q}}} \quad (2.29)$$

Non $\ddot{\mathbf{q}}$ orokortutako azelerazioa den eta G Gibbs-Appell-en funtzioa den, ondorengo formularen bidez adierazita:

$$G = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}} dV \quad (2.30)$$

Ekuazio hauek murriztapen ez holonomokoak dituzten sistemak modelizatzeko sortutako lehen metodologia espezifikoa dira, eta horretarako ez dute baliabide matematiko gehiagoren erabileraren beharrik, hala nola Lagrange-ren biderkatzaileak. Sistemak dituen askatasun graduak bezainbeste ekuazio lortzea posible da, horretarako koordenada orokortuen deribazioak parametrizatzen dituzten aldagai multzo bat (kuasi-abiadurak deitua) erabiliz. Modu honetan, sistemaren murriztapenen betetzea ziurtatzen da parametro hauen balio guztietarako [28–30].

Hala ere, abantaila hau murriztapen holonomoetarako desagertzen da, G funtzioa kalkulatu beharra bait dago [31].

2.2.5 Kane-ren ekuazioak

Hasteko, lan birtualen printzipioa ezartzen zaio ezarritako indarren lana bakarrik haintzat gartzen duen sistema bati. Ondoren, indar eta momentuen ekuazioak multzokatuz, Kane-ren ekuazioak lortzen dira:

$$\mathbf{r} + \mathbf{r}' = 0 \quad (2.31)$$

Non:

$$\mathbf{r} = \mathbf{f} + \boldsymbol{\tau} \quad (2.32)$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{f}' + \boldsymbol{\tau}' \quad (2.33)$$

Bi ekuazio hauek Maggi-ren ekuazioekiko baliokide dira, Borri *et al.* [32] eta Angeles eta Lee-k [33] frogatu bezala.

2.3 Sistema murriztuak

Orain arte aipatu diren formulazioek adierazten dituzten sistemak osatzen dituzten solidoak ez daude elkarren artean lotuta edo, beste modu batean esanda, ez daude murriztuta. Sistema behar den moduan mugitu dadin murriztu beharra dago murriztapen bidez, atal honetan azalduko den moduan.

Dinamikaren printzipioak ezarri ondoren lortutako ekuazio diferentzial arruntak (ODE), murriztapen ekuazioekin batera (zeinek natura aljebraikoa duten), ekuazio diferentzial aljebraiko sistema bat (DAE) sortzen dute. Ekuazio sistema hau askotan ez da lineala, haren osagaiak bezala. Oreka ekuazioek, alde batetik, ondorengo itxura dute:

$$\mathbf{M}(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{f}_i(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{f}_e + \mathbf{f}_r \quad (2.34)$$

Espresio honetan \mathbf{M} masa matrizea da, \mathbf{f}_i inertzia indarren bektorea da, \mathbf{f}_e kanpo indarrak dira eta \mathbf{f}_r murriztapen indarrak dira. Murriztapen indar hauek horrela adierazten dira:

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) &= 0 \\ f_2(\mathbf{x}) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(\mathbf{x}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

Modu trinkoan ere adierazi daitezke [7]:

$$\Phi(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.36)$$

2.3.1 Lagrange-ren biderkatzaileak eta Lagrange-ren lehen motako ekuazioa

2.36 ekuazioaren bidez adierazitako indarrek sistemari eragiten diote eta ondorioz kontuan hartu behar dira, baina ez dira ezagunak. Haien adierazteko modurik erabiliena Lagrange-ren biderkatzaileak dira.

Lagrange-ren biderkatzaileek bektore bat osatzen dute, zeinaren osagaiak fisikoki sistemari ezarritako murriztapen indarren magnitude gisa interpreta daitezkeen, eta zeinen balioa ezezaguna den. Indarren norabidea, ordea,

kalkulatu daiteke, posizioaren funtzio bait da soilik [7]. Matrize forman, murriztapen guztiak batzen dituen bektorea zera da:

$$\mathbf{f}_r = \Phi^T \boldsymbol{\lambda} \quad (2.37)$$

Non $\boldsymbol{\lambda}$ Lagrange-ren biderkatzaileak diren eta Φ murriztapen funtzioen Jacobiarra den, 2.37-n adierazi bezala.

Ekuazio hau oreka ekuazioan 2.34 sartu daiteke, non Lagrange-ren biderkatzaileak ekuazioaren aldagai ezezagunen multzoari gehitzen zaizkion. Ekuazio hau da, murriztapen ekuazioekin batera, 3 indizedun ekuazio diferentzial aljebraikoa sortuko duena.

Lagrange-ren lehen motako ekuazioa murriztapen 2.37 motan adierazita oreka ekuazioan [10] lortzen da:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \Phi_q^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{f}_{gen} \quad (2.38)$$

Non Φ_q^T murriztapenen Jacobiarra den koordenada orokortuak dituen sistema batean adierazita. Orain arte erabilitako murriztapenak posizio murriztapenak dira, baina abiadura murriztapenak erabiltzea posible da. Haien espresioa honetarako hurrengoa da:

$$\dot{\Phi} = \Phi_q(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} + \Phi_t(\mathbf{q}, t) = 0 \quad (2.39)$$

Aipatu beharra dago, abiadura murriztapenetarako, euren abiadura bektorearekiko menpekotasuna lineala dela; menpekotasun hau azelerazioetan ere ikus daiteke [10]. Azelerazio murriztapenak 2.39 denborarekiko deribatuz lortzen dira:

$$\ddot{\Phi} = \Phi_q(\mathbf{q}, t) \ddot{\mathbf{q}} + (\Phi_q(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}})_q + 2\Phi_{qt}(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} + \Phi_{tt}(\mathbf{q}, t) = 0 \quad (2.40)$$

Modu trinkoan ere adierazi daitezke:

$$\Phi_q(\mathbf{q}, t) \ddot{\mathbf{q}} = \Phi_d \quad (2.41)$$

Non:

$$\Phi_d = -(\Phi_q(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}})_q - 2\Phi_{qt}(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} - \Phi_{tt}(\mathbf{q}, t) \quad (2.42)$$

2.3.2 Lagrange-ren biderkatzaileen ezeztatzea

Lagrange-ren biderkatzaileek, sistemaren koordenada orokorrekin batera, sistemaren aldagai ezezagunen multzoa osatzen dute. Hemen azalduko

metodoek helburu partekatu berbera dute: Lagrange-ren biderkatzaileak ezeztatu lortutako sistema ekuazio diferentzial arruntez (ODE) osatuta egon dadin [10].

Lagrange-ren biderkatzaileak ezeztatzeko, hemen aipatuko diren formulazioak hauek dira: Maggi-ren formulazioa, 1 indizedun formulazioa, azpiespazio hutsaren formulazioa eta Udwadia eta Kalaba-ren formulazioa.

Maggi-ren formulazioa lortzeko, hasiera puntua hurrengo ekuazioak betetzen dituzten \mathbf{e} ezaugarri zinematikoak dira [10]:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{0}_m \\ \mathbf{e}_{(n-m)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (\Phi_q)_{m \times n}(\mathbf{q}, t) \\ (\hat{\Phi}_q)_{(n-m) \times n}(\mathbf{q}, t) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} + \begin{Bmatrix} (\Phi_t)_m(\mathbf{q}, t) \\ (\hat{\Phi}_t)_{(n-m)}(\mathbf{q}, t) \end{Bmatrix} \quad (2.43)$$

Sistema honen dimentsioak n orokortutako koordenada kopuruarekiko berdinak dira, eta askatasun gradu kopurua $n-m$ izango da. Lehenengo m ekuazioek murriztapenak adierazten dituzte, eta azkeneko $n-m$ ekuazioek ezaugarri zinematiko askeak adierazten dituzte. Ezaugarri hauek parametro zinematiko, orokortutako abiadura edo orokortutako kuasi-abiadura izena ere hartzen dute.

2.43 ekuaziotik ondorengo matrize alderanzkarria lortu daiteke:

$$\mathbf{B}_{n \times n}(\mathbf{q}, t) = \begin{Bmatrix} (\Phi_q)_{m \times n}(\mathbf{q}, t) \\ (\hat{\Phi}_q)_{(n-m) \times n}(\mathbf{q}, t) \end{Bmatrix} \quad (2.44)$$

Abiadura orokortuak ezaugarri zinematikoen funtzio gisa adierazi daitezke:

$$\dot{\mathbf{q}} = \Lambda_q \mathbf{e} - (\Lambda_q \Phi_t + \hat{\Lambda}_q \hat{\Phi}_t) = \Lambda_q \mathbf{e} - \mathbf{d} \quad (2.45)$$

Non $\Lambda_q \Phi_q$ -ren azpiespazio hutsa den. Orokortutako azelerazioak, ondorioz, 2.45 ekuazioa denborarekiko deribatuz lortzen dira:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \dot{\Lambda}_q \mathbf{e} + \Lambda_q \dot{\mathbf{e}} - \dot{\mathbf{d}} \quad (2.46)$$

Espresio hau oreka ekuazioan sar daiteke:

$$\Lambda_q^T \mathbf{M} \Lambda_q \dot{\mathbf{e}} + \Lambda_q^T \mathbf{M} \dot{\Lambda}_q \mathbf{e} = \Lambda_q^T \mathbf{f}_{gen} + \Lambda_q^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{d}} \quad (2.47)$$

1 indizedun formulazioan hasiera puntua Lagrange-ren lehen motako ekuazioa eta azelerazio murriztapenak dira. Honek hurrengo ekuazioak adierazten duen sistema bat osatzen du:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \Phi_q^T \\ \Phi_q & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{gen} \\ \Phi_d \end{Bmatrix} \quad (2.48)$$

Ekuazio sistema honek 1 ordena duen ODE sistema bat osatzen du, zeinaren emaitza azelerazioa den. Sistema hau Lagrange-ren lehen motako ekuazioarekiko baliokide da soilik lehen unean posizio murriztapenak betetzen badira.

Sistemak emaitza bakarra du Φ_q -k hein osoa badu eta masa matrizea alderanzkarria bada [34]. Murriztapen indarrak, murriztapenen Jacobiarra eta masa matrizea erabiliz, ondorengo ekuazioaren arabera adierazten dira:

$$\mathbf{f}_{restric} = -\Phi_q^T (\Phi_q \mathbf{M}^{-1} \Phi_q^T)^{-1} (\Phi_d - \Phi_q \mathbf{M}^{-1} \mathbf{f}_{gen}) \quad (2.49)$$

2.48 ekuazioa, non aurreko ekuazioa ordezkatzeko den, bi ordena duen ODE bat da, eta hala izanda sistemaren erantzuna lortzeko ebatzi daiteke. Honi buruzko informazio gehiago [35–38]-n aurkitu daiteke.

Murriztapen matrizearen Φ_q azpiespazio hutsa erabiltzeko 2.48 ekuazioa ebatzea ahalbidetzen du. Operazio honen emaitza hurrengo ekuazioa da:

$$\begin{bmatrix} N_q \mathbf{M} \\ \Phi_q \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{gen} \\ \Phi_d \end{Bmatrix} \quad (2.50)$$

Ekuazio hau, aurrez erabilitakoaren antzera, 2 ordena duen ODE bat da. Formulazio honek murriztapen matrizeak hein osoa izatea eta masa matrizea alderanzkarria izatea inposatzen du.

Hainbat autorek formulazio berbera lortu dute euren kabuz. Hemami eta Weimer-ek [36] N_q murriztapen matrizearen osagarri ortogonalaren kontzeptua aurkeztu zuten 2.50 lortzeko, eta formulazio honen eta Kane-ren ekuazioen arteko berdintasuna [27,39] frogatu zuten. Jalón *et al.*-ek [20,40] ere, euren kabuz, 2.50 ekuazioa lortu zuten.

Azkenekoz, eta Udwadia eta Kalaba-ren formulazioa erabiliz, $\Phi_q^T (\Phi_q \mathbf{M}^{-1} \Phi_q^T)^{-1}$ atala Moore-Penrose-ren orokortutako pseudo-alderantzizko matrizeaz ordezkatu daiteke, eta ondorioz 2.49 eta oreka ekuazioak ondorengo espresioetan bihurtzen dira:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}_{gen} + \mathbf{M}^{1/2} (\Phi_q \mathbf{M}^{-1} \Phi_q^T)^+ (\Phi_d - \Phi_q \mathbf{M}^{-1} \mathbf{f}_{gen}) \quad (2.51)$$

$$\mathbf{f}_{restric} = -\mathbf{M}^{1/2} (\Phi_q \mathbf{M}^{-1} \Phi_q^T)^+ (\Phi_d - \Phi_q \mathbf{M}^{-1} \mathbf{f}_{gen}) \quad (2.52)$$

Formulazio hau eta aurrekoa hain dira antzekoak, Udwardia *et al.*-ek [41] garatutako metodo bat erabili daitekeela 2.50 sistema ebazteko. Aipatutako dokumentuan autoreek D’alembert-en printzipioaren hedatze bat aurkezten dute, zeina murriztapen ez holonomikoak prozesatzeko gai den. Are gehiago, azaldutako formulazioa Moore-Penrose-ren pseudo alderantzizko matrizea gabe lor daitekela frogatu zuten. Gibbs-Appell-en formulazioarekiko [42] antzekotasun bat ere aurkitu zuten. Azkenekoz, autoreek metodoa orokortu zuten baldintza ez linealekin lan egin zezan [43,44].

2.3.2.1 Formulazioen arteko ezberdintasunak

Nahiz eta aurrez azaldutako formulazioek guztiek DAEak ODEtan bihurtzen dituzten gero haiek ebazteko, euren arteko lehenengo ezberdintasuna sortzen duten ODE sistemaren ordena da. Hau sisteman sartzen duten murriztapen motari lotuta dago, eta modu honetan datu hau da azaldutako metodoen artean ezberdintasun gehien gehitzen dituen.

Maggi-ren formulazioak abiadura murriztapenak ezartzen ditu; hau dela eta posizio murriztapenak ez dira betetzen, eta ondorioz informazio hau galdu egiten da. Gainerako formulazioek azelerazio murriztapenak ezartzen dituzte. Maggi-ren formulazioan bezala, posizio murriztapenak ez ezartzean informazio hau galdu egiten da, eta ondorioz hauek egonkortu beharra dago.

Are gehiago, Maggi-ren formulazioan parametro zinematikoak esplizitoki agertzen dira; hau ez da gainerako formulazioetan gertatzen, non koordenada orokortuak erabiltzen diren.

Azkenekoz, Udwardia eta Kalaba-ren formulazioak Moore-Penrose pseudo alderantzizko matrizea erabiltzen du. Pseudo alderantzizko matrize honen propietate baten arabera beti existitzen da, eta honek beste formulazioen beharra ezabatzen du menpeko ekuazioez osatutako murriztapenak murriztapen matrizean ez izateagatik. Honen arabera, formulazio hau murriztapen erredundanteak dituzten sistemak ebazteko gauza da, eta askatasun graduak konstanteak ez dituzten sistemak (kontaktuak, adibidez) erraz ebazten dira.

2.3.3 Murriztapenak dituzten sistementzako zenbakizko metodoak

Lagrange-ren ekuazioek eta Newton-Euler-en ekuazioek, murriztapenen ekuazioekin batera, 3 indizedun DAE sistema bat osatzen dute. Honen harira, Gear-ek [11,12] adierazi zuen “1 indizea gainditzen ez bada emaitza kode automatiko bidez lortu daiteke, baina bestela erabiltzaileak indizea murriztu beharko luke”.

Hau dela eta bi ikerketa eremu paralelo garatu dira arazo hau konpontzeko. Lehen eremuak Lagrange-ren biderkatzaileak ezeztatzen ditu, horrela ODE integratzaileen bitartez ebatzi daitekeen ODE bat lortuz. Bigarren eremuak DAEaren indizea 1era murrizten du hura prozesatu ahal izateko.

Bi kasuetan, eta murriztapenak abiadura edo azeleraziozkoak direnez, beharrezko diren egonkortze teknikak aipatzen dira posizio murriztapenen gabeziak sortutako *drift*-a ezeztatzeko. *Drift* hau murriztapenak ezartzean onartzen den eta denborarekin hazi daitekeen errore margen txiki batengatik (zeinagatik ez diren zehazki betetzen) gertatzen da. *Drift* hau ekiditen duten eta murriztapenen ez betetzea ezeztatzen duten teknikak aipatzen dira, eta azkenekoz elementu finituen teknikak ere aipatzen dira.

2.3.3.1 ODEen garatzea

Atal honetan higidura ekuazioak ODE bihurtzeko metodoak aipatzen dira. Horretarako, metodo posible bat koordenada orokortu erredundanteak ezeztatzea da ekuazio zenbaki minimo bat lortzeko, modu horretan murriztapen ekuazioen beharra ezabatuz.

ODEak lortzeko atal honetan aipatzen diren metodoak Maggi-motakoak, azpiespazio hutsaren formulazioak, Udwardia eta Kalabaren formulazioa eta formulazio proiektiboa dira.

Maggi-ren formulazioa azpiespazio hutsaren eraikitzean dago oinarrituta, zeinarekin Lagrange-ren biderkatzaileak ezeztatzen diren azpiespazio hutsa haien osagarri ortogonalak izanik. Azpiespazio hutsa denboraren funtzio da murriztapen matrizea ere denboraren funtzio delako, eta ondorioz denbora une bakoitzean ebaluatu beharra dago. Honen arabera, azpiespazio hutsa sortzen duten bektoreak ezberdinak izango lirateke bi denbora une desberdinetan, denbora une bakoitzean ezaugarri zinematikoko desberdinak sortuz.

Arazo hauek konpontzeko askotan azpiespazio hutsa simulazioaren hasieran ebaluatzea erabaki da, hurrengo denbora uneetan konstante mantenduz. Hala ere, honek esan nahi du Lagrange-ren biderkatzaileak ez direla erabat ezeztatzen. Irizpide ezberdinak daude eskuragai azpiespazio hutsa noiz berrebaluatu erabakitzeko baina, hala ere, metodo hauek ezin dira Maggi-ren metodo gisa izendatu; hau dela eta, “Maggi-mota”-ko metodo gisa [10] izendatzen dira bibliografian.

Maggi-motako formulazio gehienen arteko ezberdintasunak azpiespazio hutsaren lortzean daude. Modu desberdinen artean berezko balio hutsen metodoa [45], LU-n oinarritutako koordenaden partizio metodoa [46,47], eta SVD metodoa [48,49] daude.

Wampler-ek [50] metodo simple bat garatu zuen zeinaren arabera Maggi-ren ezaugarri zinematikoak Kane-ren metodoaren araberako orokortutako abiaduren azpimultzo bat izateko hautatzen diren; prozedura analitikoak bakarrik aurkezten dira. Are gehiago, beste proposamen batzuen arabera azpiespazio hutsa uneoro eguneratzen da. Kim eta Vanderploeg-ek [51], euren aldetik, azpiespazio hutsa uneoro eguneratzeaz gain haren zentzu jarraitutasuna mantentzen duen metodo bat proposatu zuten. Hala ere, QR deskonposiziotik ateratako Q matrizea ez da ortogonal mantentzen eta ondorioz QR deskonposizio osoa denbora-une kopuru erregular jakin batean egin beharra dago.

Azpiespazio hutsa 2.37 ekuazioaren bidez lortzen da, zeina murriztapen holonomoko edo eskleronomoen kasuan zera bihurtzen den:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}_q \mathbf{e} \quad (2.53)$$

Sistemaren ezaugarri zinematikoei dagokien azpiespazio hutsa sistemaren orokortutako abiaduraren bektorearen “erauzketa” bat bezala lortzen da; Maggi-ren ekuazioan 2.43 hasita, honek esan nahi du $\hat{\Phi}_q$ -ren ilara bakoitzak zero ez den sarrera bakar bat duela [8]. Hasieran, erauzketa honetarako aukera egoki bat Φ_q murriztapen matrizearen triangulazio Gaussiar bat pibotatze osoarekin burutuz lortzen da, modu horretan piboteek erauzi beharreko abiadura orokortuak adieraziz. Aukera hau baliteke egokia ez izatea aukeratutako pibotea txikiegia bada; kasu horretan, beste erauzketa bat hautatzen da. García de Jalón *et al.*-ek [52] ondorioztatu zuten, parametro zinematikoak identifikatzeko SVD-ren erabilera ikertu ondoren, denbora-une

handientzat balio egokiak sortu arren koste konputazionala altuagoa zela erauzketa metodoarekin konparatuz.

Avello *et al.*-ek [53] erauzketa metodoa ikertzen jarraitu zuten eta algoritmo oso parametrizagarri bat sortzen zuela frogatu zuten. Azpiespazio hutsaren zutabeetako bakoitza paraleloki ebazten da abiadura buruketa elemental baten ebazpen gisa eta, ondorioz, $\mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A}$ biderkatze hirukoitza ere paraleloki ebaluatu daiteke. $\mathbf{A} \mathbf{e}$ bektorearen atalak, zeinak Maggi-ren ekuazioari dagozkion, paraleloki lortu daitezke eta azelerazio buruketa elementalen ebazpenei lotuta dago. Eraginkortasun arrazoiak direla eta, metodoak berak teknika errekurtsiboak darabiltza kate irekien mekanismoetarako; Kate itxien kasuan hedatutako Lagrange-ren formulazioa erabiltzen da.

Murriztapen matrizearen azpiespazio hutsa bakarra da, baina azpiespazioa osatzen duten bektoreak ez. Orain arte aipatutako metodoek prozesu konputazional ezberdinen bidez lortutako bektore multzoen bidez osatzen dute azpiespazio hutsa. Horretarako metodoak bi irizpideren bitartez sailkatu daitezke: lehenengo irizpidea azpiespazioa osatzen duten bektoreak linealki askeak diren edo ez da, eta bigarrena azpiespazio hutsa lortzeko zenbakizko prozesuaren sendotasuna eta eraginkortasuna dira [8].

Lehen irizpidea metodoaren bideragarritasunerako beharrezko baldintza bat da, bektoreak elkarrekiko askeak ez izanda azpiespazio hutsa ez bait dago ondo adierazita. Kurdila *et al.*-ek [54] ikusi zuten Kane-ren [39] eta Wehage eta Haug-en [46] metodoak ez zirela sendoak batzutan azpiespazio hutsen emaitza gaizki baldintzatu edo singularrak ematen zituztelako. Hau ekiditeko, gainerako metodoek azpiespazio hutsa oinarri ortogonal bat bezala lortzen dute.

Bigarren irizpideak eraginkortasun konputazionala eta metodoa sendoa den edo ez jakitea ditu helburu. Kostu konputazionala egin beharreko operazio kopuru bezala definituz, SVD-ren kostu konputazionala QR-rena baino 2tik 10era aldiz handiagoa da, matrizearen tamainaren arabera. Gainera, QR-ren kostu konputazionala gutxi gora behera LU faktORIZAZIOAREN bikoitza da. Beste aldetik, SVD Gram-Schmidt-en ortonormalizazio prozesua baino askoz garestiagoa da. Hala ere, eta nahiz eta garestiena izan, SVD algoritmorik sendoena da, matrizeak hein osoa ez duenean ere erabili bait daiteke, murriztapen erredundanteen kasuan adibidez.

Merezi du nabarmentzeak Maggi-ren kasuan inposatutako murriztapenak abiadurazkoak direla. Honen arabera murriztapen ez holonomokoak

zenbakizko mailan beteko dira, eta murriztapen holonomoek integrazio prozesuaren erroreei egotzitako *drift* bat izango dute. *Drift* hau, hala ere, minimoa izango da, Maggi-motako metodoetan ez bezala, zeinetan azpiespazio hutsa ez da uneoro eguneratzen. Honek ezaugarri zinematikoak hiperplano tangentean ez betetzea dakar; hau ez da Maggi-ren metodoan gertatzen [55].

Kamman eta Huston-ek [56,57] garatutako metodoak berezko balio hutsaren teorema erabiltzen du murriztapen matrizearen azpiespazio hutsa lortzeko. Lortutako sistemaren emaitza dinamikoa azpiespazio hutsaren formulazioan dago oinarrituta. Hala ere, Borri *et al.*-ek [58] adierazi zuten metodo hau ez zela konputazionalki gainerako azpiespazio hutsaren metodoak baino askoz garestiagoa, zereginik garestiena azpiespazio hutsa bera lortzea bait da.

García de Jalón *et al.*-ek [20] 1 indizedun, Maggi-ren eta azpiespazio hutsaren formulazioak gorputz zurrun anitzeko sistemak modelizatzeko erabili zituzten koordenada naturalak erabiliz. Beste lan batean [40] murriztutako sistema mekanikoak ebazteko hainbat metodo konparatzen dituzte, eta lan honetatik ateratako ondorioak hurrengoak dira: hasteko, formulazio guztien eraginkortasun erlatiboa orokortutako koordenada kopuruaren eta sistemaren askatasun gradu kopuruaren funtzio da. Bigarrenez, azpiespazio hutsaren formulazioa 1 indizedun formulazioa baino eraginkorragoa izan ohi da. Azkenekoz, Maggi-ren formulazioa azpiespazio hutsaren formulazioa baino eraginkorragoa izan ohi da. Nabarmendu beharra dago ondorio hauek gorputz anitzeko sistemak koordenada naturalak erabiliz modelizatuz lortu direla, eta ondorioz haien egiazkotasuna aldatu daitekeela gorputz elastiko anitz dituzten sistemekin.

Azkenekoz, Chiou *et al.*-ek [59] higidura ekuazioak abiadurak erabiliz ebazteko zenbakizko metodo bat aurkeztu zuten. Azpiespazio hutsa abiadura transformazioen menpekotasunak darabiltzan partizio metodo baten arabera dago eraikia.

Testuinguru honetan, Fernández de Bustos *et al.*-ek [60] metodo linealetarako emaitza minimo karratuak lortzeko metodo bat aurkezten dute. Azpiespazio hutsa eta baita irudizko azpiespazio hutsa ere lortzen dira prozesuan zehar. Matrize hauek beste metodo batzuk erabiliz lortu daitezkeen arren, hala nola SVD, LDU-k hainbat abantaila ditu, hala nola koste konputazional baxua eta betetze edo “*fill-in*” maila baxua, eta Peters-Wilkinson

[61] eta Sauter-en [62] metodoaren abantailak. Portaera egokia lortzen da kasu guztietan, eta memoria erabiltzea ere egokia da, azpiespazio hutsa eta irudizko azpiespazio hutsa faktorizatutako matrizean gordetzea posible egiten bait du.

Arabyan eta Wu-k [63] Udwardia eta Kalaba-ren formulazioa, zeina hasieran partikula sistementzako sortu zen, murriztapenak dituzten solido zurruntzat hedatu zuten. Metodo honentzako erronka nagusia denbora pauso bakoitzerako orokortutako pseudoalderantzizkoaren beharra duela da; SVD erabili daiteke kasu honetan, baina kostua oso altua da [64]. Arazo hau pairatzeko autoreek Gram-Schmidt-en ortogonalizazioa proposatzen dute, matrizearen tamainaren arabera SVD-k baino koste baxuagoa bait du. Are gehiago, Gram-Schmidt-en ortogonalizazio prozesuak murriztapenen trinkotasun faltari lotutako akatsak antzematea ahalbidetzen du.

Blajer-ek [65,66] murriztutako sistema dinamikoaren analisirako proiektzio metodo bat proposatu zuen. Proiektoreen kontzeptuaren ordez Riemann-en geometria diferentzial bat erabiltzen da. Espazio metriko linealak dira non bektoreak euren kobariante eta kontrabarianteetan ebazten diren, eta non espazioaren metrika masa matrizearen bidez adierazten den. Metrika honen erabiltzearen eragina haren metodo guztien eskalatzearekin konparatu daiteke, eta formalismoari egonkortasuna ematen dio. “Proiektzio geometriko” hitza erabiltzen da proposatutako metodoak 1 indizedun ekuazioak onartutako azpiespazioen azpiespazio huts eta tangenteetan proiektatzen direlako. Ondoren Maggi-ren ekuazioak lortzen dira aldagai askeak azpiespazio huts tangentean proiektatutako ekuazioetan sartuz. Aldagai askeek kuasi-abiaduren multzo bat [66] edo kuasi-azelerazioen multzo bat [65] osatzen dute. Sistema holonomoetan aplikatzerakoan, proiektzio formulazioa Gibbs-appell-en ekuazioen Kane-ren formarekiko baliokide da [27]; sistema ez holonomoentzat, Maggi-ren formulazioarekiko baliokide da.

Beste dokumentu batean, berriz ere Blajer-ek [67] formulazio proiektiboaren zenbakizko inplementazioa garatzen du. Azpiespazio huts tangentea Gram-Schmidt-en formulazioaren bidez lortzen da [55,68] baina, hala ere, azpiespazio huts tangentea eta murriztapenen azpiespazioaren ortogonalitatea ez da espazio Cartesiar batetik garatzen, haren metrika masa matrizeaz adierazita dagoen espazio batetik baizik. Formulazio proiektiboak masa matrizearen eta haren deribazioaren beharra du. Operazio hauek koste konputazional adigarria dute; hau dela eta, Blajer-ek matrize konstanteak sortuko dituzten koordenada absolutuen erabilera aholkatzen du. Modu

honetan masa matrizearen alderantzizkoa behin bakarrik kalkulatu beharra dago, eta haren deribazioa zero da.

2.3.3.2 Indize murrizketa

Indize murrizketarako teknikak normalean DAEei ezarritako prozesu matematikoak dira euren indizea murriztu asmoz. Ondoren zenbakizko analisi teknikak erabiltzen dira integratzaile jakin batzuk sistema murriztuari ezartzean emaitza fidagarria dela ziurtatzeko.

Gear-en GGL edo *egonkortutako 2 indizedun metodoak* [38] DAE baten indizea 3tik 2ra murrizten du eta orden aldagaiko atzeranzko diferentziak (backwards difference, BD) metodoak 2 ordena duen sistema baliokiderako konbergenteak direla frogatzen du. Geroago, berriz ere Gear-ek [69] sistema baliokidea are gehiago murrizteko formulazio bat garatu zuen, indizea 1era murriztuz. Horren ondorioz metodo hauek koste konputazional altuagoa dute.

Lötstedt-ek [35] gorputz zurrun anitzeko sistemak ikertu zituen murriztapen holonomo eta ez holonomoetarako. Higidura ekuazioa bigarren ordena duen ODE batez eta sistema lineal osagarria deskribatzen duten ezberdintasunez osatuta dago. Posizio, abiadura eta azelerazioetan agertzen diren jarraitasun etenak ikertu zituen murriztapenak aktibatu eta desaktibatzean. Emaitzen existentziaren inguruan, posizio eta indar murriztapenak konfigurazio guztietan bakarrak zirela frogatu zuen, Lagrange-ren biderkatzaileen kasuan murriztapen matrizeak hein osoa zuenean bakarrik betetzen zutenean.. Gauss-en printzipioa alde bakarreko murriztapenak dituzten gorputz zurrunekeo sistemak orokortzeko baliozkoa zela frogatu zuen, sistema lineal osagarriaren emaitzak programatutako buruketa koadratikoen emaitza ere bait dira.

Lötstedt eta Petzold-ek [70] baita ere k -garren ordena duten BD metodoak denbora une tamaina konstantearekin 1, 2 eta 3 indizedun DAEei aplikatzean konbergitzen dutela frogatu zuten, $O(h^k)$ zenbakizko zehaztasunarekin, non h denbora unearen tamaina den. Autore berberrek [71] geroago are gehiago ikertu zituzten buruketa berberei denbora une tamaina ez konstantea duten metodoak aplikatzeak dituen zailtasunak. Zailtasun horiek Newton-en iterazio matrizearen kondizio zenbakiari lotuta daude.

Eich-ek [72] 1 indizedun DAEak integratzeko erabilitako koordenada proiektzioen formulazio bat eta BD metodo baten konbinazioaren

konbergentzia analisia garatu zuen. Formulazio honek DAEaren barneko ODEaren emaitza posizio eta abiadura inbariantetan proiektatzen du murriztapenen ez betetzea murrizteko. Proiektatutako emaitzaren zehaztasuna ODEak ebazteko BD metodoa erabiltzeak duenaren berbera da.

Yen *et al.*-ek [73,74] 1 indizedun DAEak ODEtara murriztu zituzten parametrizazio lokalak erabiliz, zeinentzako sistemak holonomoa izan behar duen. ODEek orokortutako posizio eta abiadura askeak inplizituki adierazten dituzten parametro lokalak dituzte. Ondoren, eta parametrizazio lokala eta murriztapenen ekuazioak erabiliz, hasierako orokortutako posizio eta abiadurak berreskuratzen dira. Konbergentzia analisi baten bidez frogatu izan da pauso anitzeko eta k ordena duten metodo linealek $O(h^k)$ zehaztasuna dutela. Zenbakizko aplikazioetarako, parametrizazio lokalak koordenada orokortuen partizioaren eta azpiespazio huts tangentearen metodoen bidez lortzen dira. Gainera, Potra-rekin batera [75], Yen-ek QR deskonposizioak definitzen duen azpiespazio huts tangentea erabiltzen duen parametrizazio bat erabiltzen du. Beste behin ere Yen-ek, orain Haug-ekin batera [76], antzerako metodo bat erabiltzen du orokortutako koordenaden partizio teknika erabiltzean erabiltzen diren parametro lokalak lortzeko. BD metodoetan oinarrituta, Boltzmann-Hamel-en ekuazio diskretuak diskretizatutako DAE sistema baten baliokide dira, horretarako posizio, abiadura eta azelerazio murriztapenak erabiliz. DAE hauek arrazoi praktikoak tarteko erabili ziren.

Gorputz malgu anitzeko dinamikaren arloan, Yen *et al.*-ek [77] “*koordinada zatitze formulazioa*” aurkeztu zuten 2 indizedun DAEak ebazteko. Bigarren ordena duten eta erabiltzaileak kontrolatu dezakeen zenbakizko disipazioa duten α metodo batzuk proposatzen dituzte. Metodo hauek ODEentzako metodoen erabilpena dinamika estrukturalera, KKT algoritmorra eta Chung eta Hulbert-en orokortutako α metodora hedatzen dute. Aipatutako koordenada zatitze metodoa Gear *et al.* [38]-ek garatutako egonkortutako 2 indizedun formulazioari ezarritako azpiespazio hutsaren formulazioaren zenbakizko inplementazio bat da. Zentzu honetan, metodo honi lotutako bi Lagrange-ren biderkatzaile multzoak ezeztatzen ditu. Posizio eta abiadura murriztapenak ezartzearen, masa matrizearen espazioarekiko proiektzioak erabiltzen dira. Gorputz anitzeko sistemen baitan aurkitu ohi diren oszilazioak kontrolpean edukitzeko helburuz Newton-en iterazio prozesuari aldaketa bat egiten zaio, zeinari “*aldatutako koordenaden zatitze iterazioa*” izena eman zaion. Konbergentzian hobetzea matematikoki eta adibideen bidez frogatzen da.

Beste indize murrizte metodo bat ere aurkezten da Borri *et al.*-ek [78] garatutako proiektzio metodoan, zeina erabilgarria den 3 indizedun DAEak 1 indizera sistematikoki murrizteko. Metodoak hasierako buruketa haren zati diferentzial eta aljebraikoetan bereizten du, modu sekuentzialean ebatzi daitezten. Metodo zehatz eta sendoa da, baina baita konplexua ere.

2.3.3.3 Egonkortze teknikak

1 indizea, azpiespazio hutsa edo Udwadia eta Kalaba-rena bezalako teknikak azelerazio murriztapenak ezartzen dituzte [10]. Ezarritako murriztapenak holonomoak badira $\Phi_q=0$, $\dot{\Phi}_q=0$ eta $\ddot{\Phi}_q=0$ betetzen da, zeinek posizio, abiadura eta azelerazio murriztapenak adierazten dituzten. Higidura ekuazioek eta azelerazio murriztapenek osatutako sistemak inbariante multzo bat dauka. Emaitza zehatza izan dadin, haietariko bi $\Phi_q=0$ eta $\dot{\Phi}_q=0$ dira. Hala ere, eta biribiltze eta zenbakizko gerturatzeei lotutako erroreengatik, zenbakizko emaitzak ez dira inbariante hauekin batera aldatzen, eta ondorioz $\Phi_q \neq 0$ eta $\dot{\Phi}_q \neq 0$. Fenomeno honek *drift* izena du, eta orain baino lehenago agertu da 1 indizeko Maggi-ren ekuazioetan eta azpiespazio hutsean. Ikuspuntu matematiko batetik begiratuta $\ddot{\Phi}=0$ ekuazioa ez da egonkorra haren poloak s planoan kokatuta daudelako, non s Laplace-ren transformazioari dagokion aldagaia den. Ondorioz, Φ_q eta haren lehenengo deribazioek ez dute zerorako konbergentzia edukiko desbideratzerik badago. Murriztapenen urratzeen egonkortze teknikak *drift*-a minimizatzea edo ezeztatzea dute helburu, eta hala izanda ez dira gorputz anitzeko sistemak ebazteko metodoak. *Drift*-arekiko sentikor diren beste ebazte teknika batzuekin batera erabiltzen dira.

Sistema mekanikoa kontserbatiboa bada energia mekaniko kopuru guztia E sistemaren beste inbariante bat da, zeinarekin $\dot{E}=0$. Kanpo indarrak ezartzen baldin badira, haien lana energia mekaniko totalari gehitu dakioke sistemaren inbariante bat sortzeko. Aurrez aipatutako murriztapen holonomoen modura, eta biribiltze eta gerturatze errore berdinegatik, emaitzak *drift* bat edukiko du, zeinak esan nahi duen sistemaren energia totala ez dela konstante mantentzen. Izan ere, energia mekanikoaren kontserbazioa murriztapen ez holonomo kasu partikular bat da: $\Phi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})=0$.

Orain aipatutako egonkortze teknikak Baumgarte-ren egonkortze teknika eta penalizazio faktoreetan oinarritutakoak dira.

Baumgarte-ren egonkortze teknika [79] kontrol teorian oinarritutako egonkortze tekniken artetik erabiliena da. Sistemaren baitako azelerazio murriztapen originalak 2.54 ekuazioarekin ordezkutzen dira ikusitako *drift*-a orekatzeko.

$$\ddot{\Phi}_q + 2\alpha \dot{\Phi}_q + \beta^2 \Phi_q = 0 \quad (2.54)$$

Non α eta β erabiltzaileak definitutako aldagai positiboak diren. Askotan parametro hauen aukera $\alpha = \beta$ egokia izan dadin egiten da, modu honetan moteltze kritikoa lortzen bait da.

Metodo hau, higidura ekuazio eta integrazio prozesu mota zabal batean inplementatzen erraza denez, zabalki erabiltzen da gorputz anitzeko sistemetan. Hala ere, α eta β parametroak buruketarekiko menpekoak dira eta ez dago prozedura orokorrik hauek lortzeko. Ondorioz, metodo hau ez da gomendagarria gorputz anitzetan erabilera orokorrean erabiltzeko, murriztapenak ez bait dira zehazki inoiz betetzen.

Eich eta Hanke-k [80] hau bera aipatzen dute, handiegia diren α eta β parametroen erabilerak ODEak zurruneziak bihurtzen dituela eta ondorioz simulazio denbora handitzen duela adieraziz. Hala ere, Nikraves *et al.*-ek [81] 1 indizedun formulazioa Baumgarte-ren egonkortze teknikarekin batera koordenada zatitze metodoa baino nabarmen eraginkorragoa zela ikusi zuten. Azkenekoz, Park eta Haug-ek [82], Baumgarte-ren egonkortzea orokortutako koordenaden zatitzearekin konbinatuz, bi metodoen erabilera bateratuak euren kabuz bi metodoek duten eraginkortasuna hobetzen duela frogatu zuten.

Beste teknika bat penalizazioetan oinarritutako formulazioak dira. Formulazio hauek murriztapenak sistemaren atal Lagrangiarrari penalizazio atal bat gehituz inposatzen dituzte, eta hurrengo forma dute:

$$\frac{1}{2} \Phi^T P \Phi \quad (2.55)$$

Non P penalizazio faktorez osatutako matrize diagonal bat den. Murriztapen guztietan penalizazio faktore bera erabiltzea normala da, eta horregatik askotan penalizazio atala $\frac{1}{2} p^2 \Phi^T \Phi$ bezala idazten da. Formulazio honen baitako ideia zenbakiz handiak diren penalizazio faktoreak hautatzea da murriztapenak konparatiboki txikiak edo zero egiteko, hau da, $p \rightarrow \infty$ eta $\Phi \rightarrow 0$. Penalizazio atalaren aldaera bat $\delta q^T \Phi_q^T p^2 \Phi$ da. Aldaera honek ezarritako kanpo indar orokortuen atala den $\Phi_q^T p^2 \Phi$ erakusten du, zeina mugan $\Phi_q \lambda$

bihurtzen den, non λ Lagrange-ren biderkatzaileak diren. Aplikazio praktikoetarako erabiltzean biderkatzaileen balioa finitua izan behar da egokitze ezegoki bat ekiditeko, eta ondorioz murriztapenak ez dira inoiz zehazki betetzen eta $\lambda = p^2 \Phi$ -ren balioak Lagrange-ren biderkatzaileen balio hurbilduak dira.

Testuinguru honetan, penalizazioetan oinarritutako metodoetako bat egonkortze mailakaturik da. Egunkortze hau Park eta Chiou-k aurkeztu zuten [83], eta murriztapen holonomoak Lagrange-ren biderkatzaileei lotuta aurkezten ditu $\lambda = \Phi(\mathbf{q}, t)/\epsilon$ bezala, non $\epsilon = 1/p^2$ penalizazio faktorea den. Denborarekiko deribazioa ondorengoa da:

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{\epsilon} \left(\Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \quad (2.56)$$

Ekuazio honek, Lagrange-ren lehen motako ekuazioarekin 2.38 batera, lotutako ODE multzo bat osatzen du. Antzerako prozedura bat jarraitu daiteke murriztapen holonomoentzat, Lagrange-ren biderkatzaileak ondorengo formularekin erabiliz:

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{\epsilon} \left(\Phi_{\mathbf{q}} \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \quad (2.57)$$

Lagrange-ren biderkatzaileak $\lambda = \bar{\lambda}^{\sigma t}$ bezala idaztekoan, ekuazio honen atal homogeneoa $(\sigma + \Phi_{\mathbf{q}} \mathbf{M}^{-1} \Phi_{\mathbf{q}}^T / \epsilon) = 0$ -tan bihurtzen da. Honen arabera, σ_i -ren hazte ratioak $\Phi_{\mathbf{q}} \mathbf{M}^{-1} \Phi_{\mathbf{q}}^T / \epsilon$ -ren berezko balioak dira. Beste era batera esanda, hazte ratioak sistemaren ezaugarri fisikoen funtzio dira; honek Baumgarte-ren metodoarekiko ezberdintasun bat ezartzen du, zeinaren koefizienteak sistemari lotuta ez dauden koefiziente abstraktuak diren.

Murriztapen matrizearen deribazio bakar bat egin izan da metodo honetarako, eta ondorioz metodo hau *drift* fenomenoekiko egonkorragoa da bi deribazio behar dituztenekin konparatuta. Gainera koefiziente bakar batekiko da menpeko, hau da, penalizazio faktorearekiko. Park eta Chiou-k [83] adibide bidez posizio murriztapen inbarianteen zehaztasuna Baumgarte-ren metodoarekin lortutako emaitzekiko hobea dela frogatu zuten. Egunkortze teknika hau sendoa da, hein ez osoak dituzten murriztapen matrizeak elkarrengandik gertu kokatu bait ditzake; Baumgarte-ren teknikak ezin du hau egin.

Park *et al.*-ek [84] aurrez azaldutako teknika implementatzeko prozedura esplizitu-inplizitu mailakatu bat aurkeztu zuten. Metodo honek mi atal

desberdinen garapena behar du; batek koordenada orokortuak integratzen ditu aldez aurretik murriztapen indarrak ezagututa, eta besteak Lagrange-ren biderkatzaileak integratzen ditu aldez aurretik koordenada orokortuak ezagututa. Bi moduluak bata bestearen atzetik deitzen ditu programak, zeinak izena prozedura honetatik hartzen duen.

Beste aldetik, Bayo *et al.*-ek [85] garatutako Lagrange-ren formulazio gehitua penalizazioetan oinarritutako buruketaren formulazio batekin hasten da. Ondoren, k -garren murriztapen holonomoari lotutako atalak sistema Lagrangiarrari gehitzen zaizkio: penalizazio faktore bat, Rayleigh-en disipazio atal bat eta fikziozko energia zinetiko atal bat. Sistema maneiatzan duten ekuazioak 1 indizea duten ekuazio sistema batera bihurtzen dira, ikus daitekenez:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}+\Phi_q^T\boldsymbol{\alpha}(\ddot{\mathbf{C}}+2\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\mu}\dot{\mathbf{C}}+\boldsymbol{\Omega}^2\mathbf{C})=\mathbf{Q} \quad (2.58)$$

Non $\boldsymbol{\alpha}$ α_k penalizazio faktoreari lotutako balioez osatutako matrize diagonal bat den, $\boldsymbol{\Omega}$ ω_k Rayleigh-en indar disipatzaileei lotutako balioez osatutako beste matrize diagonal bat den, eta $\boldsymbol{\mu}$ μ_k Rayleigh-en indar disipatzaileei lotutako beste balio multzo batez osatutako beste matrize diagonal bat den. Penalizazioetan oinarritutako formulazio honek penalizazio faktore altuentzako (hau da, $\alpha_k \rightarrow \infty$) bakarrik ematen ditu emaitza zehatzak. ω_k eta μ_k koefizienteek egonkortzerako orduan garrantzi handia dute, Baumgarte-ren metodoaren koefizienteen gisan.

Hedatutako Lagrange-ren formulazioan, penalizazio faktoreekin batera, Lagrange-ren biderkatzaileen multzo bat gehitzen da, ondorengo lortuz:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}+\Phi_q^T\boldsymbol{\alpha}(\ddot{\mathbf{C}}+2\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\mu}\dot{\mathbf{C}}+\boldsymbol{\Omega}^2\mathbf{C})=\mathbf{Q}-\Phi_q^T\boldsymbol{\lambda}^* \quad (2.59)$$

Lagrange-ren biderkatzaileak bakarrik gehitzekotan oreka ekuazioa $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}=\mathbf{Q}-\Phi_q^T\boldsymbol{\lambda}$ izango litzateke, eta ondorioz $\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}^*+\boldsymbol{\alpha}(\ddot{\mathbf{C}}+2\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\mu}\dot{\mathbf{C}}+\boldsymbol{\Omega}^2\mathbf{C})$. Lagrange-ren biderkatzaileak euren kabuz murriztapenak inposatzeko aski izanik, penalizazio faktoreek ez dute handiak izan beharrik. Hala ere formulazioak orain m aldagai ezezagun gehiago behar ditu. Proposatutako formulazioan, hala ere, $\boldsymbol{\lambda}^*$ ez dira ezagunak, eta iterazio prozesu baten bidez lortzen dira:

$$\boldsymbol{\lambda}^{(i+1)}=\boldsymbol{\lambda}^{*(i)}+\boldsymbol{\alpha}(\ddot{\mathbf{C}}+2\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\mu}\dot{\mathbf{C}}+\boldsymbol{\Omega}^2\mathbf{C})^{(i+1)} \quad (2.60)$$

Non i goi indizeak iterazio zenbakia adierazten duen, eta $\lambda^{*(0)}=0$. Iterazio prozesu honen eta 2.59 ekuazioaren arteko konbinazioak ondorengoa dakar:

$$\left(\mathbf{M}+\Phi_q^T \alpha \Phi_q\right) \ddot{\mathbf{q}}^{(i+1)}=\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}^{(i)}-\Phi_q^T \alpha\left(\dot{\Phi}_q \dot{\mathbf{q}}+2 \boldsymbol{\Omega} \mu \dot{C}+\boldsymbol{\Omega}^2 C\right)^{(i)} \quad (2.61)$$

Non $\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}^{(0)}=\mathbf{Q}$. Hedatutako Lagrangiarraren formulazioak buruketa ODE multzo batera murrizten du aldagai ezezagun gehiagoren beharrik gabe. Lagrange-ren biderkatzaileen emaitza iteratiboa ez da konputazionalki garestia haren atalak higidura ekuazioak lortzeko beharrezkoak direlako. Zenbakizko esperimentazioaren bidez frogatu izan da emaitza zehatzak penalizazio faktoreen balioen tarte handi baterako lortzen direla: $\alpha_k \in\left[10^6,10^9\right]$. Are gehiago, formulazio hau orokortu daiteke murriztapen ez holonomoekin erabiltzeko.

Bayo *et al.* [86] hedatutako Lagrange-ren formulazioan sakonago joan ziren: penalizazio atala bi terminotara murriztu zuten, $\lambda=\lambda^*+\alpha(C+\mu \dot{C})$ lortuz. Abiadurazko penalizazio faktorea frekuentzia altuko zenbakizko oszilazioak ekiditeko beharrezkoa zela ikusi zuten. Higidura ekuazioak integratzeko Arau Trapezoidala (Trapezoidal Rule, TR) erabili zuten posizio edo azelerazioak aldagai nagusitzat erabiliz. Bi hauetatik, azelerazioek buruketa efizienteago egiten zuten.

Azkenekoz, Kurdila *et al.*-ek [87] sistema holonomoentzako higidura ekuazio penalizatuak garatu zituzten energia potentzial eta zinetiko penalizatuak eta Rayleigh-en disipazio funtzioak erabiliz. Hasierako ekuazio ez penalizatuakiko konbergentzia bat ikusi zen sistema kontserbatiboetarako, eta Lyapunov-en egonkortasuna eta egonkortasun asintotikorako baldintza nahikoak aurkitu ziren, zeintzuk egonkortasun analisi baten bidez frogatu ziren. Egoera singularrek emaitza ona dute funtzio disipatzaileak direla eta. Askatasun gradu nahiko altua duten sistemak ere zehaztasun nahikoz simula daitezke. Garatutako ekuazioak sistema holonomoentzat bakarrik dira baliozko, eta hala izanda arlo horretara murriztuta daude.

2.3.3.4 Murriztapenen ez betetzearen ezeztatzea

Atal honetan azaldutako metodoek sistemak murriztapenak zehazki betetzea ahalbidetzen dute, edo gutxienez ordenagailuak baimentzen duen heinerainoko zenbakizko zehaztasuna betetzen dute. Parekatuz, aurrez azaldutako metodoek murriztapenen ez betetzeak egonkortzen dituzte. Bi

metodo azaltzen dira: egonkortzearen proiektio geometrikoa, eta masarekiko proiektio ortogonalaren formulazioa.

Yoon *et al.*-ek [88] proiektio geometriko batean oinarritutako murriztapenen ez betetzerako egonkortze metodo bat garatu zuten. Horretarako, eta zenbakizko gerturatzeak direla eta murriztapenak zehazki betetzen ez direlako, proposatzen dena posizio eta abiadura murriztapenen zuzenketa bat da:

$$\mathbf{q}_n = \bar{\mathbf{q}}_n + \hat{\mathbf{q}}_n \quad (2.62)$$

$$\mathbf{v}_n = \bar{\mathbf{v}}_n + \hat{\mathbf{v}}_n \quad (2.63)$$

Ekuazio hauetan $\hat{\mathbf{q}}_n$ eta $\hat{\mathbf{v}}_n$ zuzentze faktoreak txikiak direla ulertzen da, eta hala izanda \mathbf{q}_n eta \mathbf{v}_n zuzendutako bektoreek murriztapenak betetzen dituzte, hauek holonomoak zein ez holonomoak izanda. Hasteko orokortutako koordenaden zuzenketak murriztapen holonomoak linealizatuz ebaluatzen dira, horrekin $\Phi_q(\bar{\mathbf{q}}_n, t) \hat{\mathbf{q}}_n \simeq -\mathbf{c}(\bar{\mathbf{q}}_n, t)$ lortuz. Ekuazio hauek gainzehaztuak dira, eta hori dela eta zuzenketak murriztapenen azpiespazio hutsaren baitan daudela ulertzen da, hau da, $\hat{\mathbf{q}}_n = \Phi_q^T \boldsymbol{\epsilon}_n$, non $\boldsymbol{\epsilon}_n$ bektore ezezagun bat den. Ondoren $\boldsymbol{\epsilon}_n = -(\Phi_q \Phi_q^T)^{-1} \mathbf{c}(\bar{\mathbf{q}}_n, t)$ inposatzen da, eta ondorioz azkenekoz:

$$\hat{\mathbf{q}}_n = -\Phi^T (\Phi_q \Phi_q^T)^{-1} \mathbf{c}(\bar{\mathbf{q}}_n, t) \quad (2.64)$$

Abiadura murriztapenei lotutako formulazioa pauso berberak jarraituz lortzen da, baina orain murriztapen ez holonomoak erabiliz. Murriztapen ez holonomoei lotutako ekuazio linealizatua $\Phi_q(\bar{\mathbf{q}}_n, \bar{\mathbf{v}}_n, t) \hat{\mathbf{v}}_n \simeq \mathbf{d}(\bar{\mathbf{q}}_n, \bar{\mathbf{v}}_n, t)$ da, zeinak haren azkeneko forman zuzenketa parametroari hurrengo formula ezartzen dion:

$$\hat{\mathbf{v}}_n = -\Phi^T (\Phi_q \Phi_q^T)^{-1} \mathbf{d}(\bar{\mathbf{q}}_n, \bar{\mathbf{v}}_n, t) \quad (2.65)$$

Baumgarte-ren metodoarekin konparatuz, prozedura honek aldatu gabeko murriztapenen ez betetzeak “lasaitzen” ditu higidura ekuazioak aldatu gabe. Metodo geometriko bat da naturaz, zuzendutako emaitza gerturatutako emaitzaren murriztapenekiko proiektio bat bait da. Ekuazio hauek murriztapenen ez betetzea “lasaitzen” dute bakarrik, eta ondorioz hura erabat ezeztatzeke emaitza iteratiboki lortu beharra dago. Autore berberak metodo honen eraginkortasuna frogatu zuten murriztapen holonomo, ez holonomo eta energiazkoekin.

Azaldu berri den metodoaren antzeko bat garatu zuen Blajer-ek [89,90], zeina [91]-en aurkeztutako sistema murriztuen interpretazio geometriko batean oinarrituta dagoen. Arrazoi geometrikoetan oinarrituta, ondorengo orokortutako koordenaden zuzenketen formulak proposatzen dira:

$$\hat{\mathbf{q}}_n = -\mathbf{M}^{-1} \Phi^T (\Phi_q \mathbf{M}^{-1} \Phi_q^T)^{-1} \mathbf{c}(\bar{\mathbf{q}}_n, t) \quad (2.66)$$

$$\hat{\mathbf{v}}_n = -\mathbf{M}^{-1} \Phi^T (\Phi_q \mathbf{M}^{-1} \Phi_q^T)^{-1} \mathbf{d}(\bar{\mathbf{q}}_n, \bar{\mathbf{v}}_n, t) \quad (2.67)$$

Zuzenketa hauek Yoon-ek proposatutakoak (2.64 eta 2.65) baino fisikoki trinkoagoak dira, $\Phi_q \mathbf{M}^{-1} \Phi_q^T$ matrizeak unitate trinkoak dituzten atalak behar bait ditu; aldiz, $\Phi_q \Phi_q^T$ matrizeak ez ditu behar. Unitate ezberdinak erabiliko badira, hala nola higidura linealak eta biraketak, $\Phi_q \Phi_q^T$ atalak denak berdin pisatzen ditu, $\Phi_q \mathbf{M}^{-1} \Phi_q^T$ atalak haiei dagokien inertzia atalarekiko pisatzen dituen bitartean. Zenbakizko aplikazioetarako lehenengo higidura linealekiko zuzenketa ezartzen da murriztapenak erabat ezeztatu arte (hau da, ordenagailuaren zehaztasuna lortu arte). Murriztapen ez holonomoen kasuan prozedura berbera da abiadura murriztapenetarako.

Terze *et al.*-ek [92] azpiespazio hutsaren baitako murriztapenen ezeztatzerako metodo bat ekoiztu zuten. Blajer *et al.*-ek [89] proposatutako metodoa erabiliz aldagai askeen multzo bat identifikatu zuten; ondoren, posizio murriztapenen ez betetzeak iteratiboki ezeztatzen dira menpeko aldagaiei posizio murriztapenak betearaziz. Bigarren kasu batean abiadura murriztapenen ez betetzeak abiadura murriztapenak erabiliz ezeztatzen dira. Bi kasuetan higidura eta abiadura askeak ez dira aldatzen.

Beste formulazio bat masarekiko proiektzio ortogonalak da. Aurreko formulazioan oinarritutako 1 indizedun formulazioarekin parekatuz, zeina Bayo *et al.*-ek [85] argitaratu zuten, Bayo eta Avello-k [93] Hamilton-en ekuazio kanonikoetan oinarritutako hedatutako Lagrange-ren formulazio bat aurkezten dute, zeinak zehaztasun handiagoa duen eta posizio singularretarako sendotasun handiagoa duen. Zehaztasunaren hobetzea murriztapen holonomoen deribazio bakar bat beharrezkoa delako azaldu daiteke, 1 indizearekin beharrezko diren bi deribazioekin parekatuz. Eraginkortasun hau zenbakizko adibideen bidez frogatzen da. Gainera, murriztapen ez holonomoentzako formulazioa antzekoa da.

Aurrez aurreztutako formulazio Lagrangiarrak $\ddot{\mathbf{C}} + 2\boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\mu} \dot{\mathbf{C}} + \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{C}$ -k ezarritako murriztapena makinaren zehaztasuneraino betetzen du, baina posizio,

abiadura eta azelerazio murriztapenak, $C=0$, $\dot{C}=0$ eta $\ddot{C}=0$ -k inposatuta, ez dira zertan zehaztasun ordena berberean bete behar. Hau hobetzeko, Bayo eta Ledesma-k [94] gehitutako formulazio Lagrangiarra masarekiko proiektzio ortogonal batekin batera erabiltzen dute. Posizio murriztapena ezartzeko $V = \frac{1}{2}(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*)^T \mathbf{M}(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*)$ minimizatzea proposatzen dute, zeina $\Phi_q(\mathbf{q}, t) = 0$ murriztapenaren menpeko den, non \mathbf{q}^* formulazioa Lagrangiarra erabiliz lortzen den denbora une bakoitzeko emaitza den. Minimizazio buruketa hau gehitutako formulazio Lagrangiarra erabiliz ebatzen da, V ondorengoan itxuraldatuz:

$$V^* = \frac{1}{2}(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*)^T \mathbf{M}(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*) + \frac{1}{2} C^T \alpha C + C^T \boldsymbol{\lambda} \quad (2.68)$$

Ekuazio hau formulazio iteratibo bat lortzeko berridatzi daiteke, zeinarekin posizio murriztapenak ezartzen diren:

$$\left(\mathbf{M} + \Phi_q^T \alpha \Phi_q \right) \Delta^{i+1} = -\mathbf{M}(\mathbf{q}^{(i)} - \mathbf{q}^*) - \Phi_q^T \boldsymbol{\lambda}^{(i)} \quad (2.69)$$

Non $\Delta^{i+1} = \mathbf{q}^{(i+1)} - \mathbf{q}^{(i)}$ eta $\boldsymbol{\lambda}^{(i+1)} = \boldsymbol{\lambda}^{(i)} + \alpha C^{(i+1)}$. Ikuspuntu konputazional batetik ikusita prozedura hau ez da garestia, $\mathbf{M} + \Phi_q^T \alpha \Phi_q$ matrizea 2.61-rekiko berdina bait da eta ondorioz behin bakarrik faktorizatzen bait da. Hau proiektzio geometrikoa darabilten egonkortze metodoekiko ezberdina da, zeintzuek koste konputazional altuagoa duten. Abiadura eta azelerazio murriztapenak berdin manea daitezke eta sortzen duten ekuazioa 2.69-ekiko berdina izan dadin sortzen dira, koste konputazionala ahal bezain beste murriztuz.

Bayo eta Ledesma-k [94] haien metodoa zenbakizko adibideak erabiliz aurkeztu zuten. Pauso bakoitzean ezarritako masarekiko proiektzio ortogonalak murriztapenen ez betetzea makinaren zehaztasuneraino ezeztatzen du eta simulazioaren zehaztasuna asko hobetzen du. Une singular bat duen mekanismo bat arrakastaz simulatzen dute gehitutako formulazio Lagrangiarra metodo sendoa dela frogatzeko. Arau Trapezoidala erabiltzen dute higidura ekuazioak integratzeko horretarako higidurak zein azelerazioak erabiliz aldagai nagusi gisa, eta higidurekin emaitza hobeak lortuz.

2.3.3.4.1 Konparazioak

Schiehlen-ek [95] DAEak eta ODEak, Boltzman-Hamel-en ekuazioak eta sistema holonomoetarako metodo errekurtsibo batean oinarritutako higidura ekuazioak deribatu zituen. Metodo errekurtsiboa kate mekanismoetarako

egokia da eta ODEak baino askoz egokiagoa da, askatasun gradu gutxi sistematarako erabiltzen ez bada. Orokorrean eragiketa errekurtsiboek $O(h)$ eragiketa behar dituzte, ODEek $O(h^3)$ -rainoko eragiketa kopurua behar duten bitartean. Askatasun gradu gutxi dituzten gorputz zurrunekeo sistemetan oinarritutako ikerketa baten arabera ODE formulazioak euren baliokide diren DAEak baino askoz eraginkorragoak dira. Ondorio hau askatasun gradu oso gutxi dituzten gorputz zurrunekeo sistema oso sinpleetan oinarrituta dago.

Cuadrado *et al.*-ek [9] murriztapenak dituzten gorputz anitzeko sistemak simulatzeko lau metodo konparatzen dituzte: 1 eta 3 indizedun gehitutako proiektzio Lagrangiarra proiektzioekin, eraldatutako *state-space* formulazio bat higidura ekuazioak koordenada askeak erabiliz, eta guztiz errekurtsiboa den formulazio bat. *State-space* formulazio originala haren eraginkortasuna sistema zurrunetarako hobetzeko eraldatu da. 1 eta 3 indizedun gehitutako formulazio Lagrangiarrak koordenada naturalak edo erabat Cartesiarrak darabiltza ([8]), masa matrize konstante bat sortu ahal izatearen abantailarekin.

Lau metodo hauek gorputz anitzeko buruketa batzuk ebatziz frogatzen dira, baina lauetariko bat ere ez da guztiz gogobetegarria. 3 indizedun formulazioak proiektzioekin ez du konbergentziarik 10^{-5} s baino txikiagoa den denbora-une baterako, eta 1 indizea duen formulazioaren kasuan antzerako zerbait gertatzen da 10^{-2} s baino handiagoa den denbora-une baterako. Bere kabuz, *state-space* formulazioa eta formulazio errekurtsiboa ez dira behar bezain sendoak, posizio singularrak dituzten sistemak ebazteko orduan huts egiten bait dute. Are gehiago, formulazio errekurtsiboak emaitza txarrak dakartza sistema zurrunak edo murriztapen erredundanteak ebaztean. Hala ere formulazio hau eraginkorra da sistema malgu handiekin. Lau metodoetatik, 3 indizedun formulazioa da eraginkorrena eta 1 indizedun formulazioa da sendoena. Bi hauen arteko konbinazio bat iradokitzen da murriztutako sistemak ebazteko.

2.3.3.5 Elementu finituen teknikak

Gorputz anitzen sistemen analisia hasieran gorputz zurrunak dituzten eta kate irekia duten sistema sinpleak modelizatzeko lanabes bat bezala garatu ziren, baina haren garapen eta eboluzioak gorputz malguak dituzten eta topologia arbitrarioa duten sistemak ebaztea ahalbidetzea lortu du. Tesi honek gorputz zurrunak bakarrik dituen sistemak ebazten ditu, baina hala ere atal hau

gehitzea interesgarritzat jo da erabiltzen diren elementu finituen teknika batzuk aipatzeko.

Tradizioz, gorputz anitzeko sistemen elastikotasuna erreferentzia sistemaren ikuspuntutik ikertu da [96]. Ondoren, gorputz malguen higidura atala bi zatitan banatzen da: solido zurruna alde batetik, eta higidura elastikoen eremua bestetik. Solido zurrunaren higidura hautatutako erreferentzia sistemaren higidura arbitrarioki handi baten bidez adierazten da, zeina solido malguari dagokion puntu bati erantsita dagoen. Gorputz malguarekiko higidura erlatibo bat bezala ere adierazi daiteke, zeinak “erreferentzia sistema flotagarri” izenari zentzua ematen dion. Beste aldetik higidura elastikoaren eremua erreferentzia sistema flotagarrian hedatze modalerako teknikak erabiliz adierazten da. Txikia dela ulertzen da, eta hala bada askatasun gradu kopuru txiki bat aski da solido zurrunen portaera elastikoa adierazteko.

Erreferentzia sistema flotagarria gorputz malgu anitzeko sistemak ebazteko metodarik erabiliena da. Higidura totala alde batetik gorputz zurrunetan zatitzen da, zeina erreferentzia sistema flotagarriekin adierazten den, eta beste aldetik ezarritako higidura elastikoetan zatitzen da [97]. Zatiketa honek hainbat suposatze ahalbidetzen ditu: higidura orokorra finitua den bitartean, higidura malguk deformazio infinitesimalak eragin ditzakete.

Suposatze honek bide edo burdinbide ibilgailuak bezalako hainbat eratako buruketa garrantzizkoak batzen ditu. Bi kasuetan gorputz zurrunak higidura handiak ditu gorputz zurrun gisa, baina deformazioak txikiak dira. Imajina daitekenez hau ez da istripu edo crash test baten kasuan gertatzen, non deformazio plastiko handiak gertatzen diren. Hala ere ibilgailuaren beste atal batzuk, hala nola gurpilak, ez dira linealak. Beste adibide bat helize bidez mugitzen diren ibilgailuak dira, hala nola itsasontziak edo helikopteroak. Egoera normaletan higidurak (edo biratzeak) handiak dira, baina haien deformazioak txikiak dira. Kasu honetan, lurreratze trena ez da lineala [10].

Deformazioak txikiak badira zentzuzkoa dirudi murrizte modala erabiltzeak deformazio elastikoak modu eraginkorrean adierazteko. Honek sistemaren tamaina murrizten du, eta ondorioz kostu konputazionala murrizten du. Frekuentzia altu batzuk ere ezeztatzen dira, eta hori dela eta denbora-une tamaina handiagoak erabili daitezke.

Erreferentzia sistema flotagarriaren erabilerak intuitiboa dirudien arren, arazo ezeroso batzuk dakartza. Hasteko, analisiaren zehaztasuna oinarri modal egoki batekiko kritikoki menpeko da. Jarraitzeko, erreferentzia sistema

partikular zehatz bat hautatzea ezinbestekoa da, zeina solido malguaren puntu bat edo harekiko erlatibo den mugimenduarekiko puntu bat izan behar den. Are gehiago, oinarri modalean adierazitako elementu finituak gorputz anitzen formulazioen bidez lortutako sistemaren konponenteekin parekatzen errazak izan behar dira. Gainera, deformazio malguak ez egotearen kasuan, solidoak gorputz zurrun baten higidura ekuazioei zehazki erantzun behar die. Azkenekoz, formulazioak erabilitako elementu finituen analisirako programarekiko askea izan beharko luke.

Zenbakizko disipazioaren eta sistema ez linealaren egonkortasunaren harira, Cardona eta Géradin-ek [98,99] Newmark-en metodorako erabilitako Arau Trapezoidalak [100] baldintzarik gabeko ezegonkortasuna zuela frogatu zuten. Hala ere, HHT [101] bezalako algoritmoak egonkorak dira bahiz eta sistema ez linealei ezarri. Algoritmo hauetan integrazio prozesuaren egonkortasuna algoritmoaren natura disipatzaileari lotuta dago. Nahiz eta egonkortasuna matematikoki frogatu, ezin da sistema ez lineal entzat frogatu [102].

Egoera hau konpontzeko berriki energia kontserbatzen duten metodo batzuk garatu dira, modu honetan sistema ez linealen egonkortasun baldintzarik gabekoa energiaren kontserbazioaren bidez modu diskretuan lortuz. Baldintza hau sistemari ezarritako indar inertzial eta elastikoei ezarritako diskretizazioaren ondorio zuzena da. Energiaren natura positibo definitua dela eta, kontserbazio diskretu honek egonkortasun konputazionala ziurtatzen du sistema ez lineal entzat.

Hala ere, eta egonkortasun ez lineal baldintzarik gabekoa algoritmo sendoak lortzeko lehen pausoa den arren, energia kontserbatzen duten algoritmoak ez dira egokiak elementu ugari dituzten sistementzat haien frekuentzia altuko oszilazioak direla eta. Abiadura eta azelerazioetan gertatuz gero sistemaren emaitza hondatu dezakete, Bauchau *et al.*-ek [103,104] ikusi zuten moduan. Ondorioz, eta HHT [101] edo orokortutako α [105] bezalako algoritmo disipatzaile batzuetan ikusi bezala, frekuentzia altuko zenbakizko disipazioa beharrezkoa da integratzaile behar bezain sendoa izan dadin.

Energia kontserbatzen (edo murrizten) duten algoritmoek integrazio metodoen sendotasuna hobetzen lagundu dute [10]. Murriztapenen ezartzea gorputz anitzeko sistemen integrazioaren antzera egiten da. Gorputz anitzeko sistementzat energia mekanikoa mantentzen duten diskretizazioak garatzen dira; antzera, murriztapenen kasuan algoritmoak murriztapen indarren lanaren desagertzea ezartzen du [103,106].

Azpiespazio hutsaren metodoa erabiliz, Betsch *et al.*-ek [107–109] Maggiren ekuazioetan oinarrituta dauden murriztutako sistema dinamikoak integratzeko metodo bat proposatzen dute. Hasteko, 3garren indizedun DAEak energia mantentzen duten metodo baten bidez diskretizatzen dira. Diskretizazio hau alde batetik González-en [110] algoritmoetan dago oinarrituta, eta beste aldetik Betsch eta Steinmann-en [111] algoritmoetan. Ondoren Lagrange-ren biderkatzaileak azpiespazio huts diskretua erabiliz ezeztatzen dira. Azpiespazio huts hau Φ_q murriztapen matrize diskretuaren osagarri ortogonal da, $N_\phi^T \Phi_q^T = 0$ betez. Murriztapen matrize diskretua murriztapen mota ugarienez lortu daiteke; metodo honen ekarpena azpiespazio hutsa murriztapen berak lortzeko erabili daitekela da, ondorioz azpiespazio hutsa zenbakiz ebaluatzearen beharra desagerraraziz eta kostua murriztuz. Are gehiago, azpiespazio huts diskretua elementu bakoitzarentzat lortzen da besteekiko menpekotasunik gabe, eta elementu finituen eremuaren baitan erabili daiteke simulazioa aldatu gabe.

3 indizedun DAEek, hala ere, arazo bat daukate: ez daude tamaina murriztu eta Atzerantzko Diferentzia Finitoen (BD) formulekin erabiltzeko behar bezala egokituta, Petzold *et al.*-ek [71] frogatu bezala. Iterazio matrizearen egokitze zenbakia $O(h^{-3})$ da, non h denbora-unearen tamaina den. Posizio, abiadura eta azelerazio akatsak, hurrenez hurren, $O(h^{-1})$, $O(h^{-2})$ eta $O(h^{-3})$ ratioetan hedatzen dira. Arnold-ek [112] haren perturbazio analisisian adierazten du erroreak eta murriztapenen ez betetzeak denbora-unearen tamaina murrizten den heinean hazten direla, ondorioz birfintzea ezinezko bihurtuz eta ekuazio diskretu ez linealen emaitzari tolerantzia zorrotzak ezarriz.

Arazo hau konpontzeko, Petzold *et al.*-ek dokumentu berean DAEen eskalatze bat aurkezten dute zeinak $O(h^{-2})$ egokitze zenbakia duen eta emaitza guztien ordena 1en hobetzen duen. Hala ere, eta perturbazioekiko sentiberatasuna murriztu arren, akatsak ikusten dira. Eskalatzea burutzeko murriztapen ekuazioak denbora unearen tamainarekin zatitu behar dira, eta oreka ekuazioak balio berberaz biderkatu.

2.4 Zenbakizko Integrazioa

Mekanikaren printzipioak eta sistema bakoitzaren murriztapenak ezartzetik lortzen diren DAEen emaitzak lortzeko hauek integratu beharra dago. Emaitza analitiko bat lortzea kasu batzuetan posible den arren, gorputz anitzeko sistemen konplexutasunak eta ekuazio kopuruak derrigorrezko egiten

du zenbakizko emaitza bat lortzea. Testuinguru honetan, ODEei lotutako teoria ezaguna da eta, horregatik, hauek ebazten dituzten metodoen egonkortasuna, konbergentzia eta zehaztasuna ere ezagunak dira. Honek metodo hauen erabilera zabal bat ahalbidetu du, DAEak ebazten dituzten metodoekin alderatuta [8].

2.4.1 ODE integratzaileak

Sistema murriztu bat adierazten duten DAEak ODE n multzo bat bezala adierazi daitezke, zeintzuek forma orokorrean ondorengo itxura duten:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (2.70)$$

Ekuazio hauen emaitzak $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0$ eta $\dot{\mathbf{q}}(t_0) = \dot{\mathbf{q}}_0$ hasierako baldintzak bete behar ditu. Ekuazio multzo hau lehen edo bigarren ordena duten integratzaileak erabiliz ebatzi daiteke.

2.4.1.1 1 ordena duten ODE integratzaileak

2.70 lehen ordena duen integratzaile bat erabiliz ebazteko $\mathbf{s} = \dot{\mathbf{q}}$ aldagai multzo bat behar da. Horrela izanda, 2.70 ondorengo ekuazioetan itxuraldatzen da:

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{q}, \mathbf{s}) \quad (2.71)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{s} \quad (2.72)$$

$\mathbf{y} = [\mathbf{s} \ \dot{\mathbf{q}}]^T$ aldagai berri bat sortu daiteke, modu honetan 1go ordena duen ekuazio bakar bat lortuz:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \quad (2.73)$$

Ekuazio honetatik ondorioztatu daitekeenez, behin t eta \mathbf{y} ezagunak izanda, $\dot{\mathbf{y}}$ edo \mathbf{f} ezagunak dira. Pauso hau *funtzioaren ebaluazio* bezala da ezaguna, eta azelerazioa posizio eta abiaduren funtzio bezala lortzen dela iradokitzen du [8].

Gorputz anitzeko sistema murriztu bat adierazten duen ekuazio bat 2.73-ren moduan idatzita dagoenean analitikoki ebaztea ezinezkoa denez, denborarene diskretuak erabiltzen dituzten zenbakizko metodoak erabiltzen dira horretarako, non $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ eta konstante mantentzen da simulazio osoan. \mathbf{f}

funtzioa t eta \mathbf{y} -rekiko deribatu baldin badaiteke denbora-tarte osoan, 2.72-k emaitza bakarra du. Teorema honen froga bat aurkitu daiteke [113]-n.

2.73-en emaitza diskretuaren lehen gerturatze bat 2.73 ekuazioaren Taylor serie garapen baten bidez lortu daiteke:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 + \Delta t \dot{\mathbf{y}}(t_0) + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{y}}(t_0) + \dots \quad (2.74)$$

\mathbf{y} -ren deribazio totalak 2.73 ekuaziotik \mathbf{f} deribatuz lortzen dira. Ondorioz 2.74 ekuazioa \mathbf{f} -ren hurrenez hurreneko deribazioen bidez adierazi daiteke. Metodo honek, hala ere, arazo bat dakar: \mathbf{f} -ren orden altuko deribazioak lortzen zailak dira, eta ondorioz metodo hau ez da oso erabilgarria seriea moztu ezean [8]. Hau bera egiten duen metodo bat Euler-en metodoa da, zeinak ondorengo ekuazioa duen:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \Delta t \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n) \quad (2.75)$$

Metodo hau, \mathbf{f} \mathbf{y}_{n+1} -rekiko askea denez, esplizittoa da. Taylor-en serie garapenetik ondorioztatu daiteke haren mozte errore lokala $\Delta t^2 \dot{\mathbf{f}}(\xi)/2$ dela, hau da, denbora-une tamainaren karratuarekiko proportzionala da. Hala ere, pilatutako integrazio errorea denbora-une tamainarekiko linealki menpeko da, eta frogatu denez [114] lehen ordendun konbergentzia du. Gear-ek dokumentu berean n ordena duen eta zeinaren errore globala $O(h^n)$ den metodo batek $O(h^{n+1})$ mozte errorea duela frogatzen du.

Higidura ekuazioak integratzeko metodo bat hautatzeko bi parametro hartu behar dira kontuan: batetik zehaztasuna, eta bestetik egonkortasuna.

Zehaztasuna garrantzizkoa da; lehen azaldutako Euler-en metodoaren kasuan, nahiz eta sinplea den eta software-an inplementatzen erraza izan, ez du zehaztasun handirik eta denbora-une tamaina txikiak behar ditu. Kasu batzuetan beharrezko den denbora-une tamaina hain txikia da ezen biribiltze erroreek programa erabiltezin bihurtzen duten. Metodo zehatzagoen ikerketak 2.74-n adierazitako Taylor seriearen atal gehiago hartzen ditu kontuan emaitza une bakoitzean hobeto gerturatzeko interpolazio zehatzago baten bidez. Hala ere, eta azaldu den moduan, \mathbf{f} -ren hurrenez hurreneko deribazioak lortzen zailak dira.

Azkenekoz, ODE integratzaile baten egonkortasuna garrantzizkoa da. Lausoki adierazita, integrazio metodoak integrazio erroreak balio jakin baten azpian integrazio prozesu osoan zehar mantentzeko duen gaitasuna da.

Metodo ezegonkor batek errore hau esponentzialki haziarazten du, overflow aritmetiko batera iritsiz. Propietate hau, aukeratutako metodoaren menpeko izateaz gain, buruketa motaren menpeko ere bada. Arrazoi honengatik $\dot{y} = \lambda y$ ekuazio diferentziala erabili ohi da, non λ konstante konplexu bat den, metodo ezberdinen egonkortasun ezaugarriak adierazteko; λ eta Δt -ren balio desberdinak erabiliz metodoa egonkorra izateko beharrezkoak diren balioak lortzen dira.

Egonkortasun mota ugari adierazten dituen literatura matematiko ugari aurkitu daiteke, baina gorputz anitzeko sistemak ebazteko bi dira esanguratsuenak: baldintzatutako egonkortasuna eta baldintzarik gabeko egonkortasuna (A-egonkortasuna, izendatze matematikoaren arabera). Egonkortasun zurruna [8] edo L-egonkortasuna izeneko hirugarren mota bat ere esanguratsua da.

Baldintzazkoki egonkorak diren algoritmoak egoera zehatz batzuetan dira egonkorak. Kasu hauetan, Δt denbora unea konstantea da λ -ren edo aldagai multzo hauen arabera. Sistema ez lineal bat ebazteko erabiliz gero, non λ denborarekiko menpeko den, algoritmoa denbora-une jakin baterako egonkorra izan daiteke eta beste baterako ez; ondorioz, une hauek alde zurretik ezagutzea garrantzizkoa da.

Baldintzarik gabe egonkorak diren algoritmoen emaitzek $\dot{y} = \lambda y$ betetzen dute eta zerora bideratzen da $n \rightarrow \infty$ bitartean $\Re(\lambda) < 0$ denean, zeinak esan nahi duen zenbakizko emaitza zerora bideratzen dela emaitza zehatza zerora bideratzen denero. Algoritmo hauek A-egonkor izena ere jasotzen dute. Metodo hauen propietate nagusia haren azpitik egonkorra izateko Δt maximo baten gabezia da.

Zurrunki egonkorak diren algoritmoek frekuentzia altuen disipazioa dakarte, zeina buruketa zurrunetan erabiltzeko propietate interesgarri bat den [115].

2.4.1.1.1 Runge-Kutta metodoak

Euler-en metodoak zehaztasun baxua du, eta ondorioz ez da erabilgarria; Taylor-en metodoa deribazio altuagoak lortzeko zailagotzen da. Hala ere, denbora-unean zehar hainbat puntutan $f(t, y)$ lortuz Taylor-en metodoaren zehaztasuna lortzen duten pauso bakarreko metodoak garatzea posible da. Honen arabera ordena altuagoko deribazioak puntu zehatz batzuetako funtzio

ebaluazioez ordezkatzeko dira. Saillkapen zehatzak aurkitu daitezke bibliografia klasikoan, hala nola Carnahan *et al.*-ena [116] eta Conte eta Boor-ena [117].

Ingeniaritza aplikazioetan zabalki erabiltzen den metodo hauetako bat Runge-Kutta-ren bigarren ordena duen metodo esplizitua da, zeina Euler-en metodo hobetua, eraldatutako metodo trapezoidala edo Heun-en metodoa bezala ere ezaguna den. Metodo hau ondorengo ekuazioen bidez adierazten da:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \quad (2.76)$$

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n) \quad (2.77)$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(t_n + \Delta t, \mathbf{y}_n + \Delta t \mathbf{k}_1) \quad (2.78)$$

Metodo honek bi funtzio ebaluazio pauso behar ditu, eta ondorioz gorputz anitzeko sistemetan azelerazioak denbora une bakoitzean bi aldiz ebatzi behar dira.

Zabalki erabilitako beste metodo bat Runge-Kutta-ren laugarren ordena duen metodo esplizitua da. Metodo honek lau ebaluazio behar ditu denbora une bakoitzeko:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{\Delta t}{6} (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \quad (2.79)$$

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n) \quad (2.80)$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{k}_1\right) \quad (2.81)$$

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{f}\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{k}_2\right) \quad (2.82)$$

$$\mathbf{k}_4 = \mathbf{f}(t_n + \Delta t, \mathbf{y}_n + \Delta t \mathbf{k}_3) \quad (2.83)$$

Metodo hau eta aurrekoa esplizituak dira, \mathbf{k}_i guztiak aldeaz aurretik kalkulaturako aldagaien funtzio bait dira (\mathbf{y}_n). Kalkulatu gabeko aldagai batekiko menpekotasunen bat baldin badago, kasu honetan \mathbf{y}_{n+1} , emaitza lortzeko prozedurak prozesu iteratibo baten beharra du ekuazio ez lineala ebazteko.

r pauso dituen Runge-Kutta-ren metodo orokor batek r ebaluazio behar ditu eta ondorengo forma orokorra du:

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{f}\left(t_n + c_i \Delta t, \mathbf{y}_n + \sum_{j=1}^r a_{ij} \mathbf{k}_j\right) \quad (2.84)$$

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \Delta t \sum_{b_i}^r b_i \mathbf{k}_i \quad (2.85)$$

Ekuazio hauekin, eta haiek osatzen dituzten parametroen balioen konbinazioen arabera, hiru metodo mota lortzen dira:

- $j \geq i$ eta $a_{ij} = 0$: \mathbf{k}_i -ren balioak esplizitoki lor daitezke \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 eta \mathbf{k}_{i-1} aurrez lortutako balioengandik eta metodo esplizitua da.
- $j > i$ eta $a_{ij} = 0$ baina batzutan $a_{ii} \neq 0$: metodoa erdi-esplizitua da.
- Kasu guztietan $a_{ii} \neq 0$: metodoa diagonalki implizitua da.

Metodo implizituertarako, Butcher-ek [118] r pauso dituen metodo implizitu batek $2r$ ordena lor dezakela frogatzen du. $a_{11} = a_{22} = 0$, $a_{21} = a_{12} = 1/2$, $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ eta $b_1 = b_2 = 1/2$ betetzen dituen bi pausoko metodoa Arau Trapezoidalari dagokio, eta Dahlquist-en arabera [119] bigarren ordena duen eta baldintzarik gabe egonkorra den (edo A-egonkorra den) metodorik zehatzena da.

Beste Runge-Kutta metodo implizitu bat Nørsett-ek [120] proposatzen duena da; diagonalki implizitua den eta $a_{11} = a_{22} = \alpha$, $a_{21} = 1 - 2\alpha$, $a_{12} = 0$, $b_1 = b_2 = 0,5$, $c_1 = \alpha$ eta $c_2 = 1 - \alpha$ betetzen duen metodo konfiguragarri bat aurkezten du. α -ren balio orokorrenzat metodoak konbergentzia koadratikoa du; L-egonkorra da $\alpha = 1 \pm \sqrt{2}/2$ betetzekotan, eta A-egonkortasuna eta konbergentzia koadratikoa ditu $\alpha = (3 + \sqrt{6})/2$ betetzekotan, Calahan-en 1968-ko [8] gerturatzearen arabera.

Runge-Kutta metodo esplizituak inplementatzen errazak dira, eta ez dute beste algoritmo baten beharrik haiek martxan jartzeko. Hala ere baldintzatutako egonkortasuna bakarrik dute, eta hainbat funtzio ebaluazio behar dituzte denbora-une berean. Honek sistema ez linealetan kostu konputazionala begiratuta garestitzen ditu gorputz anitzeko sistemen analisirako erabiltzen direnean.

Runge-Kutta metodo implizituak, aldiz, esplizituak baino egonkorragoak eta zehatzagoak dira baina, Arau Trapezoidala ezik, inplementatzen zailagoak dira eta kostu konputazional altuagoa dute. Are gehiago, ekuazio ez lineal multzo bat ebazteko funtzio ebaluazio anitz burutu beharra dago denbora-une berean.

Gainera, Runge-Kutta metodo esplizitu zein implizituek integrazio errorearen pilatzearen hedatzea kalkulatzearen zailtasuna dute, zeinak haren kontrola eta begiztatzea zailtzen duen. Errore hau kontrolatzen duen eta denbora-une tamaina aldagaia darabilen Runge-Kutta metodo bat Fehlberg-ek [121] garatu zuen, zeinaren inplementazioa Burden eta Faire-k azaltzen duten [122].

2.4.1.1.2 Pauso anitzeko metodoak

Taylor-en serieek eta Runge-Kutta metodoek pauso bakarreko sistema izena jasotzen dute \mathbf{y}_{n+1} lortzeko aurreko \mathbf{y}_n soilik beharrezkoa delako, eta ondorioz pauso bakar bat da beharrezkoa (n -tik $n+1$ -ra). Hala izanda, pauso anitzeko metodo batek pauso bat baino gehiago beharko du, hau da, funtzioaren balioa \mathbf{y}_n aurrekoan baino une gehiagotan jakitea beharko du, adibidez \mathbf{y}_{n-1} . Metodo hauek $\dot{\mathbf{y}}=\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ ekuazioa t_{n-p} eta t_{n+1} artean integratuz lortzen da, non p denbora-unearen tamainaren biderkatzaile bat den:

$$\mathbf{y}_{n+1}=\mathbf{y}_{n-p}+\int_{t_{n-p}}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) dt \quad (2.86)$$

$\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ funtzioa integratzeko adibidez BD metodoaren bidez gerturatu daiteke, horretarako $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ -ren aurreko denbora uneetako balioak erabiliz. Prozesu honen azalpen zehatz bat Carnahan *et al.*-en [116] eta Conte eta Boor-en [117] lanetan aurki daiteke. Lortutako emaitza $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ -ren ordenaren eta p -ren balioaren menpeko natura duten metodo multzo bat da; $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ -ren gerturatzeak $n+1$ -ren balioa barne hartzen badu metodoa implizitua da, eta bestela esplizitua da. Metodo implizituak zehatzagoak eta egonkorragoak dira, baina haien erabilpena zailagoa da iterazioen beharra dutelako [8]. $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ n puntutan interpolatutako $\mathbf{p}(t)$ polinomio batez ordezkatzeko posible da, n ordena duen eta Adams-Bashford izena duen metodo esplizitu bat sortuz. $n-1$ eta hurrengoa erabiltzen badira, n ordena duen eta Adams-Moulton izena den metodo implizitu bat lortzen da. Pauso anitzeko metodo baten formula orokorra ondorengo formularekin lortzen da:

$$\sum_{i=0}^{p+1} \alpha_i \mathbf{y}_{n+1-i} + \sum_{i=0}^k \Delta t \beta_i \mathbf{f}(t_{n+1-i}, \mathbf{y}_{n+1-i}) = 0 \quad (2.87)$$

Ekuazio honetan α_i eta β_i metodoa adierazten duten ezaugarriak dira; $\beta_0=0$ izanda $\mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1})$ ez da agertzen, eta hala izanda, metodoa esplizitua da. Bestalde, $\beta_0 \neq 0$ izanda metodoa implizitua da. $\beta_i=0$ izanda $i \geq 1$ -rentzat, BD

metodo bat da. Testuinguru honetan, Arau Trapezoidalari $\alpha_0 = -\alpha_1 = 1$ eta $\beta_0 = \beta_1 = -1/2$ dagokio. Zenbat eta 2.87-ren termino gehiago erabili hare gerturatzea hobe izango da, eta ondorioz metodoaren zehaztasuna hobe izango da. Hala ere atal gehiago erabiltzeak aurreko pausoen informazio gehiagoren gordetzea dakar. Hau ekuazio ugari dituzten gorputz anitzeko sistemetan arazo bat izan daiteke [8]. Arlo honetan, Dahlquist-en teorema [119] ondorengo ondorioak dakartza: 1) ez dago A-egonkortasuna duen pauso anitzeko metodo espliziturik, 2) Pauso anitzeko A-egonkortasuna duen metodo baten zehaztasun ordena ezin da 2 baino handiagoa izan, eta 3) Errore konstante txikiena duen eta A-egonkortasuna duen pauso anitzeko metodoa Arau Trapezoidalari dagokio.

Metodo inplizitu batek, lehen azaldu bezala, emaitza askoz zehatzagoak ematen ditu. Hala ere, eta $\mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1})$ erabiltzen denez, ekuazio sistema ez da lineala gorputz anitzeko sistemetan, \mathbf{y}_{n+1} ebazteko ekuazio multzo ez lineal bat beharrezkoa bait da. Beharrezkoa den iterazio prozesua ordena berbera duen metodo esplizitu baten bidez abiarazi daiteke; Modu honetan, lehenengo pausoak (esplizituak) aurreale lanak egiten ditu, eta bigarrenak (esplizituak) zuzentzaile lanak egiten ditu, emaitza iterazio bakoitzean birfinduz; honek metodo aurreale-zuzentzaile bat osatzen du. Prozesu honetan zehar errorea aurrez finkatutako minimo batera iritsi arte murrizten da, eta orduan algoritmoak hurrengo denbora-unera jauzi egiten du.

Metodo aurreale-zuzentzaileak iterazio bakoitzean konbergentzia egokia izan dezan, Carnahan-ek [116] denbora-une tamainak ondorengo baldintza bete behar duela frogatzen du:

$$\Delta t < \frac{C}{\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{y}} \quad (2.88)$$

Non C metodo esplizitu bakoitzari dagokion konstante bat den. Horrela izanda, denbora-une tamaina egonkortasun irizpidez eta iterazio prozesuaren denbora-une bakoitzean beharrezkoa den konbergentziaz baldintzatuta dago.

Newton-Raphson edo kuasi Newton-Raphson iterazio bat burutzea ere posible da $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ funtzioaren \mathbf{y} -rekiko deribazio bat gehituz, konbergentzia lineal izatetik koadratiko izatera pasatuz. Integratzaile batzuek \mathbf{f}_y diferentzia finituen bidez lortzea edo erabiltzaileak inplementatzea ahalbidetzen dute. Azken kasu honetan \mathbf{f}_y lortzea higidura ekuazioak linealizatzearekiko baliokide da [8].

Azkenekoz, algoritmo aurreale-zuzentzaileen abantaila garrantzitsu bat denbora-une bakoitzean errorea estima dezaketela da. Hau aurreale-zuzentzaile metodoen mozte erroreen bidez lor daiteke. Denbora-une tamaina behar bezain txiki bat erabiltzean errore funtzioa konstante mantentzen dela suposatuz, denbora-une tamaina aldagarria darabilten erabilpen orokorreko metodoen errorea estimatu daiteke [8].

2.4.1.2 Bigarren ordeneko ODE integratzaileak

Aurrez azaldutako metodoek aldagaien transformazio bat behar dute integratuko den ekuazio diferentzialaren ordena 1era jaisteko. Transformazio honek aldagaien bikoizte bat dakar, zeina koste konputazionalarekin lotzen den. Hala ere, 2garren ordena duten eta sistema mekaniko bat adierazten duten ekuazio diferentzialak zuzenean integratzea posible da, ekuazio horiek murriztu edo transformatu beharrik gabe. Metodo hauek dinamika estrukturalen arruntak dira (nondik metodo estruktural izena hartzen duten), baina ez dira gorputz anitzeko sistemetarako hain erabiliak. Sekzio honetan Diferentzia Zentralen (CD) metodoa eta Newmark-en metodo familia azalduko dira; lehenengoa esplizitua da, eta bigarrena implizitua.

2.4.1.2.1 Diferentzia Zentralak

Diferentzia Zentralen metodoa (CD) lehen eta bigarren deribazioak lortzeko 3 elkarren artean berdin banatutako punturen arteko distantzia kentzen duen formulatan oinarrituta dago, ondoren adierazi bezala:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\mathbf{x}(t+\Delta t) - \mathbf{x}(t-\Delta t)}{2\Delta t} \quad (2.89)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\mathbf{x}(t+\Delta t) - 2\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}(t-\Delta t)}{\Delta t^2} \quad (2.90)$$

Oreka t -n ezartzen da eta higidurak $t+\Delta t$ -rako ebazten dira, non Δt denbora-une tamaina berdina den. Ondorioz, metodo hau esplizitua da [123]. Ekuazio hauek erabiliz eta berrordenatuz, ondorengo oreka ekuazioa lortzen da:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{M}{\Delta t^2} + \frac{C}{2\Delta t} \right) \mathbf{x}(t+\Delta t) = \\ & = \mathbf{f}(t) - \left(\frac{M}{\Delta t^2} - \frac{C}{2\Delta t} \right) \mathbf{x}(t-\Delta t) + \left(2\frac{M}{\Delta t^2} - K \right) \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (2.91)$$

Ekuazio honen emaitza higidura bektorea da $(t+\Delta t)$ unean. Abiadura eta azelerazio bektoreak 2.89 eta 2.90 ekuazioen bidez lortzen dira.

Denbora-une tamaina, masa matrizea, moteltze matrizea eta zurruntasun matrizea konstanteak direla suposatuz, emaitzaren atalak denbora-une desberdinetan biderkatzen dituzten koefizienteak konstanteak direla suposatzen da. Bestela eurak denbora-une bakoitzean kalkulatu beharra dago, metodoa garestituz.

Metodo honek baldintzazko egonkortasuna du; sistema egonkorra izan dadin haren radio espektrala 1 edo txikiagoa izan behar da. Baldintza hau ezarriz, eta sistemaren berezko frekuentziarik altuena lortu ondoren, denbora-une tamaina handiena, zeinerako sistemaren egonkortasuna ziurtatzen den, ezartzen duen ekuazioa ondorengoa da:

$$\Delta t_{max} \leq \frac{2}{\omega_{max}} \quad (2.92)$$

2.4.1.2.2 Newmark-en metodo familia

Newmark-en metodoa azelerazio linealaren metodoa orokortu ondoren lortzen den algoritmo familia bat da. Deribazioen arteko menpekotasunak eta emaitza bektorea denbora-une ezberdinetan adierazten dituzten ekuazioak ondorengoak dira:

$$\dot{\mathbf{x}}(t+\Delta t) = \dot{\mathbf{x}}(t) + \Delta t [(1-\gamma)\ddot{\mathbf{x}}(t) + \gamma\ddot{\mathbf{x}}(t+\Delta t)] \quad (2.93)$$

$$\mathbf{x}(t+\Delta t) = \mathbf{x}(t) + \Delta t \dot{\mathbf{x}}(t) + \Delta t^2 [(0,5-\beta)\ddot{\mathbf{x}}(t) + \beta\ddot{\mathbf{x}}(t+\Delta t)] \quad (2.94)$$

Metodo hau inplizitua da eta baldintzarik gabeko egonkortasuna du $2\beta \geq \gamma \geq 1/2$, Bathe-k [124] frogatu bezala. Kasu berezi bat Arau Trapezoidala da, zeinaren arabera $\gamma=0,5$ eta $\beta=0,25$, eta konbergentzia koadratikoa du. Baldintzarik gabeko egonkortasuna betetzen duten gainerako γ eta β balioetarako, konbergentzia gutxinaka 1era jaisten da.

Dinamika estrukturalari dagozkion ekuazioak ebazteko, 2.93 eta 2.94 ekuazioak berridazten dira abiadura eta azelerazio atalak $t+\Delta t$ isolatzeko eta oreka ekuazioan sartu ahal izateko.

Honek, hala ere, arazo bat dakar: Arau Trapezoidala (Trapezoidal Rule, TR) sistema ez linealetan ezartzea zaila da hura ezegonkortzen duten frekuentzia altuak direla eta. Arau Trapezoidalari dagozkionak baino parametro handiagoak erabiltzean arazo hau murrizten da eta aldi berean zenbakizko

moteltzea gehitzen dio sistemari, baina konbergentzia ordena murriztu egiten da. Metodo batzuek efektu hau “lasaitzen” dute eta konbergentzia koadratikoa eta baldintzarik gabeko egonkortasuna lortzen dute. Mota honetako metodorik ezagunenak Hilber-Hughes-Taylor (HHT) eta Wilson- θ [8] metodoak dira.

Hilber-Hughes-Taylor metodoak, HHT edo α metodoa [101] bezala ere ezaguna denak, konbergentzia koadratikoa eta baldintzarik gabeko egonkortasuna lortzen ditu, eta gainera α parametroarekin moldagarria den zenbakizko moteltze aldagaia gehitzen dio sistemari. Ondorioz, oreka ekuazioa ondorengoa da:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}(t+\Delta t) + (1+\alpha) \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}}(t+\Delta t) + (1+\alpha) \mathbf{K} \mathbf{x}(t+\Delta t) = \mathbf{f}(\bar{t}) + \alpha \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}}(t) + \alpha \mathbf{K} \mathbf{x}(t) \quad (2.95)$$

Non:

$$\bar{t} = t + (1+\alpha) \Delta t \quad (2.96)$$

Emaitzarik onenak ematen dituen balioa $[-1/3, 0]$ tartean dago. Erabilitako parametroak (Newmark-en metodo bat izanda, aurrez azalduko γ eta β parametroak erabiltzen dira) bakar batera murriztu daitezke $\gamma = (1-2\alpha)/2$ eta $\beta = (1-\alpha)^2/4$ ezarriz. Sinplifikazio honek konbergentzia koadratikoa eta baldintzarik gabeko egonkortasuna dituen algoritmo bat sortzen du, zeinaren zenbakizko moteltzea α parametroaren funtzio den. $\alpha=0$ izanda, emaitza Arau Trapezoidala da moteltzerik gabe, eta hura handitzeak zenbakizko moteltzearen handitzea dakar.

Azkenekoz, Wilson θ metodoak azelerazio linealaren metodoa (zeinari $\gamma=0,5$ eta $\beta=1/6$ dagokion, hau da, baldintzapeko egonkortasuna du) baldintzarik gabe egonkorra duen metodo batean bihurtzen du. Horretarako oreka ekuazioa Newmark-en gainerako metodoen antzera $t+\Delta t$ unean ebaluatu ordez $t+\theta \Delta t$ unean ebaluatzea proposatzen du, non $\theta > 1,37$. Parametro honek, 1 balioa badu, oreka ekuazioa 2.93 eta 2.94 ekuazioak erabiltzetik sortzen den ekuazio batean bihurtzen du, zeinaren parametroak azelerazio linealari lotuta dauden.

Hilber-ek [125] kokatze metodoak bezala ezagunak diren metodo sorta bat proposatzen du, zeina 3 parametro dituen metodo familia bat den. Metodo familia hau Wilson θ metodoarekin Newmark-en metodoari interpolazio bat inposatuz lortzen da. Ondorioz, 2.93 eta 2.94 ekuazioek orain θ parametroa dute euren baitan:

$$\dot{\mathbf{q}}_{n+\theta} = \dot{\mathbf{q}}_n + \theta \Delta t [(1-\gamma)\ddot{\mathbf{q}}_n + \gamma\ddot{\mathbf{q}}_{n+\theta}] \quad (2.97)$$

$$\mathbf{q}_{n+\theta} = \mathbf{q}_n + \theta \Delta t \dot{\mathbf{q}}_n + \frac{(\theta \Delta t)^2}{2} [(1-2\beta)\ddot{\mathbf{q}}_n + 2\beta\ddot{\mathbf{q}}_{n+\theta}] \quad (2.98)$$

Metodo sorta honek, azaldu den moduan, Wilson θ metodoa dauka haren baitan γ eta β aldagaien balio egokiekin. Are gehiago, eta HHT metodoaren antzera, metodo honek sistemari gehitzen zaion zenbakizko moteltzea kontrolatzea posible egiten du.

2.4.2 DAE integratzaileak

DAE ez linealak bi multzo handitan sailkatzen dira: alde batetik implizituak direnak, eta bestetik erdi esplizituak direnak [8]. Lehenengoak zirkuitu elektrikoei lotutako buruketetan agertzen dira, eta ondorengo itxura dute:

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) = 0 \quad (2.99)$$

Bigarrenak murriztapenak dituzten gorputz anitzeko sistemetan eta kontrol eta bide finkoa duten buruketetan ikusi ohi dira. Bigarren ekuazio multzo honek ondorengo itxura du:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{z}, \mathbf{y}) \quad (2.100)$$

$$0 = \mathbf{g}(t, \mathbf{z}, \mathbf{y}) \quad (2.101)$$

$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ eta $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$ hasierako baldintzak inposatzen zaizkio sistemari.

ODEekin konparatuz, DAEen emaitzaren izate eta bakartasuna ikertzen dituen teoria ez dago guztiz osatuta; are gehiago, emaitza ez da beti existitzen, eta existitzekotan baliteke bakarra ez izatea. Ondorioz, ekuazio hauek dakarten beste arazo bat emaitza beraren existentzia da, analitikoa zein zenbakizkoa. Arazo hauek garrantzizkoak dira ekuazio mota hauek integratzen dituzten metodoak garatzeko; guzti honi buruzko informazio gehiago aurkitu daiteke [126,127]-n.

DAEak euren indize diferentzialaren (edo indizearen) funtzio bezala sailkatzen dira, zeina ODE batean bihurtzeko burutu beharreko deribazio kopurua bezala adierazten den. $\dot{\mathbf{y}}$ funtzioa soilik \mathbf{y} eta t -ren funtzio bezala ebatzi ahal izateko beharrezko diren deribazio kopurua bezala ere adierazi daiteke. Ulertu daitekenez, indizea zenbat eta handiagoa izan are konplexuagoa da ekuazio sistema.

DAEak ebazteko ODEak ebazteko ere erabiltzen diren bi metodo erabiltzen dira: atzeranzko diferentzien metodoak (Backwards Difference, BD) eta Runge-Kutta metodo implizituak. Nahiz eta honek ez duen esan nahi DAE buruketa guztiak ODE integratzaileen bidez ebatzi daitezkeenik, egia da DAE kasu jakin batzuetarako emaitza onak eman dituztela.

DAE baten ebaztea, funtsean, $\dot{\mathbf{y}}$ diferentzia finituen formula baten bidez edo Runge-Kutta metodo implizito baten bidez gerturatzean datza, gero \mathbf{y} gerturatzen duen prozesu iteratibo batekin ekuazio aljebraiko ez linealak ebatziz. Erdi-esplizitoak diren DAEekin prozesua antzerakoa da [8].

2.4.2.1 Atzeranzko diferentzien formulazioa (BD)

Atzeranzko edo BD formulazioa DAEak ebazteko lehen metodo aplikatua izan zen. Egonkortasunaren eta konbergentziaren teoria ia guztiz osatuta dago, eta hura simulatzeko softwarea eskuragai dago [128]. Metodoa atzeranzko ekuazioak sistemaren ekuazioei zuzenean ezartzean datza. Metodo hau murriztutako sistemak integratzeko eskuragai dagoen software komertzialaren aukeretako bat da [129]. Ordezkatzen diren ekuazioak ondorengo gerturatzeak dira:

$$\dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \frac{1}{\Delta t \beta_0} \left(\mathbf{q}_{n+1} - \sum_{i=0}^P \alpha_i \mathbf{q}_{n-i} \right) \quad (2.102)$$

$$\dot{\mathbf{s}}_{n+1} = \frac{1}{\Delta t \beta_0} \left(\mathbf{s}_{n+1} - \sum_{i=0}^P \alpha_i \mathbf{s}_{n-i} \right) \quad (2.103)$$

Oreka ekuazioan ordezkatu eta gero, ondorengo ekuazio aljebraiko ez linealak lortzen dira:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}_{n+1}) \frac{1}{\Delta t \beta_0} \left(\mathbf{s}_{n+1} - \sum_{i=0}^P \alpha_i \mathbf{s}_{n-i} \right) = \mathbf{Q}_{n+1} - \Phi_{\mathbf{q}}^T(\mathbf{q}_{n+1}) \boldsymbol{\lambda}_{n+1} \quad (2.104)$$

$$\frac{1}{\Delta t \beta_0} \left(\mathbf{q}_{n+1} - \sum_{i=0}^P \alpha_i \mathbf{q}_{n-i} \right) = \mathbf{s}_{n+1} \quad (2.105)$$

$$\Phi(t, \mathbf{q}_{n+1}) = 0 \quad (2.106)$$

Ekuazio sistema honen emaitza Newton-Raphson-en bidez lor daiteke matrize tangente bat eskuragai baldin badago; bestela, metodo sekantea edo puntu finko iterazioa ere baliozkoak dira. Haug eta Yen-ek [130] metodo bat proposatu zuten honen harira, zeinean 2.102 eta 2.103 ekuazioak oreka

ekuazioan ordezkutzen diren, eta non oreka ekuazioak koordenada orokortuak erabiliz adierazten diren.

Gear eta Petzold-ek [11] frogatu zuten, 1 indizedun DAE guztientzat, denbora-une tamaina finkoa duen BD metodo baten k -garren pausoak $O(\Delta t^k)$ konbergentzia ratioa duela, hasierako balioak behar bezain zehatzak badira. Gear *et al.*-ek [38] geroago demostrazio hau gehiago landu eta hedatu zuten, DAEak ebazteko metodoek implementazio arazoak bait dituzte buruketa mota hauekin, eta ezegonkortasunak agertu daitezke indize handiagoa duten sistemetan. Hala ere, emaitza promesgarriak lortu izan dira sistema erdi-esplizituen kasu partikularrean, zeinean gorputz anitzeko sistemak dauden. Lotstedt eta Petzold-ek [35] frogatu zuten denbora-une tamaina finkoa duen BD metodo baten k -garren pausoak ere $O(\Delta t^k)$ konbergentzia ordena zuela DAE erdi-esplizituen eta baina 3garren indizedun ekuazioen kasuan, hasierako baldintzak behar bezain zehatzak izatekotan. Emaitza hau alde aurretik orokortu zuten Gear *et al.*-ek [38] 2 indizedun eta denbora-une tamaina aldagaia duten buruketentzat.

Nahiz eta BD metodoek emaitza gogobetegarriak eman, haien implementazioa ez dago arazoez aske. Hasteko, metodoak biribiltze erroreak aurkez ditzake Newton-Raphson iteraziorako erabiltzen den matrize tangente edo kuasi-tangenteak $O(1/\Delta t^m)$ kondizio ordena duelako.

Gainera ezegonkor bilaka daiteke sistemaren murriztapenen eta aldagaien bat-bateko aldaketak direla eta, hala nola kolpeekin edo une bateko murriztapenekin. Hau gertatzearen arrazoa zera da: etenuneetan, metodoak hura adierazten duen polinomio bat egokitzen saiatzen da, horretarako denbora-une tamaina murriztuz. Honek iterazio matrizea gaizki kondizionatuta egotea sortzen du, zeinarengatik Newton-Raphson-en iterazioa ez da gai emaitza bat lortzeko. Arazo hau integrazioa hasierako baldintza konsistenteak erabiliz ekidin daiteke, zeinak murriztapenen ekuazioen deribazio bidez lortzen diren, Steigerwald-ek [131] azaltzen duenez.

Azkenekoz, pauso anitzeko metodoak ez dira berez martxan jartzen. k pauso dituen metodo batek $k-1$ zehatz aski pauso behar ditu, eta hauek sarrera balioekiko sentibera den beste metodo baten bidez lortu beharra dago. Arazo hau iterazio prozesuan zehar BD metodoaren denbora-une tamaina edo ordena aldatzean ere agertzen da.

2.4.2.2 Runge-Kutta metodo implizituak

Runge-Kutta metodo implizituak (IRK, Implicit Runge-Kutta) BD metodoaren ordeko bezala erabiltzen dira DAEak integratzeko. Haiekin parekatuta hainbat abantaila dituzte, hala nola etenuekiko edo orden aldaketekiko hain sentibera ez izatea pauso bakarreko metodoak izanagatik. Gainera euren kabuz jartzen dira martxan, eta ondorioz hasierako baldintzen balioak bakarrik behar dituzte. Metodo hauek, hala ere, ekuazio aljebraiko handiago eta konplexuagoak dakartzate; are gehiago, egonkortasun analisia ez dago guztiz bukatuta eta ez dago softwarerik eskuragai haiek simulatzeko.

Metodoa ezartzeko Runge-Kutta metodo implizituaren 2.84 ekuazioa sistemaren ekuazioetan ezartzen da, ondorengo ekuazioa sortuz:

$$F(t_n + c_i \Delta t, \mathbf{y}_n + \Delta t \sum_{j=1}^r a_{ij} \mathbf{k}_j, \mathbf{k}_i) = 0 \quad (2.107)$$

$$i = 1, 2, \dots, r$$

2.107 ekuazioa ebatzi ondoren, $n+1$ pausoko emaitza 2.85 ekuazioaren bidez lortzen da, eta ondoren gorputz anitzeko sistemaren higidura ekuazioen emaitzari aplikatu dakiok.

Prozesu honekin lortutako ekuazioen tamaina eta konplexutasuna hazten da, eta Newton-Raphson iteraziorako ekuazioaren matrize tangentea lortzea zailgotzen da. Ondorioz inplementazioa are zailagoa bihurtzen da. 1 indizedun DAEen eta 2garren ordendun erdi-esplizituen egonkortasun baldintzak Burrage-k [132] eta Brenan eta Petzold [126]-ek ikertu dituzte.

2.4.2.3 Jacobiarrari lotutako ezegonkortasunak

DAEak ebazterako orduan Hanke *et al.* [133] eta Higuera *et al.*-en [134] ekarpenak garrantzizkoak dira. Nahiz eta 2garren indizedun DAEen egonkortasun arazoak ikertu eta murriztutako sistema mekaniko baten ekuazioa 3garren indizeduna izan, integratzaile implizituek dituzten arazoan inguruan gauza asko argitzen dituzte. Higuera-ek dionez, ekuazioaren “gidatze atala” (*leading term*) ondo egokituta egon ezean, haren azpiespazio hutsa ez da konstante mantenduko eta ondorioz haren egonkortasunari eragingo dio. Hau gertatzen ez bada, ekuazioa kualifikatutzat hartzen da; hau koordinada minimoak erabiltzean gertatzen da. Beste aldetik Hanke-k Higuera-ek aipatzen duen atal bera murriztapenen Jacobiarraren azpiespazio

hutsa dela dio, eta haren biratzeak sistema ezegonkortu dezakela adierazten du.

2.5 Von Newman egonkortasun analisia

Egonkortasun analisi hau, zeina Fourier-en egonkortasun analisi izenez ere ezaguna den, koefiziente konstanteak dituzten ekuazio diferentzial linealei ezartzen zaie. Linealak izan arren, inguruko baldintzak dituzten buruketak asko korapilatu daitezke.

Hala ere buruketa hauen ezegonkortasun arazoak ezagunak dira inguru baldintzak garrantzi gutxikoak direnean edo alde batera utzi daitezkenean, hala nola eremu infinituetan edo eremu finituen gaineko inguru baldintza periodikoetan. Bigarren kasuan x ardatzaren L luzera duen eremu konputazionala periodikoki errepikatzen dela suposatzen da; ondorioz, emaitza eta erroreak bezalako kantitate eta aldagai guztiak Fourier-en serie moduan garatu daitezke $2L$ eremu batean. Frekuentzia transformazio hau Von Neuman-en egonkortasun metodoaren oinarria da.

Aurrez aipatutako baldintzak ez betetzekotan, Hirsch-ek [135] adierazten duenez, egonkortasun analisia modu lokalean egiten da, ekuazio ez linealen koefizienteen “balio izoztuak” erabiliz.

\bar{u}_i^n emaitza zehatza eta u_i^n konputazionalki lortutako gerturatutako emaitza ondorengo formularen bidez daude lotuta:

$$u_i^n = \bar{u}_i^n + \epsilon_i^n \quad (2.108)$$

Non ϵ_i^n n uneko eta i puntuko errorea den. Zenbakizko metodoen batek \bar{u}_i^n emaitza zehatza badu, ϵ_i^n errorea u_i^n diskretizatutako emaitzaren parte da. Datu hauekin, errore ekuazioa lortzen da:

$$\frac{\bar{\epsilon}_i^{n+1} - \bar{\epsilon}_i^n}{\Delta t} = \frac{-a}{2\Delta x} (\bar{\epsilon}_{i+1}^n - \bar{\epsilon}_{i-1}^n) \quad (2.109)$$

Ekuazio honetatik ondorioztatu daiteke errorea denboran zehar aldatzen dela, zenbakizko emaitzaren moduan. 2.108 ekuazioa berridatzi daiteke, non \bar{U}^n emaitza zehatza den:

$$U^n = \bar{U}^n + e^n \quad (2.110)$$

Ondorioz:

$$\bar{U}^{n+1} + e^{n+1} = C \bar{U}^n + C e^n \quad (2.111)$$

Edo, $\bar{U}^n \bar{U}^{n+1} = C \bar{U}^n$ -ren emaitza bezala adieraziz:

$$e^{n+1} = C e^n \quad (2.112)$$

Algoritmoa egonkorra izateko baldintza anplifikazio faktorea ez haztea da. Faktore hau ondorengo ekuazioarekin adierazten da:

$$G = \left| \frac{E^{n+1}}{E^n} \right| \leq 1 \quad (2.113)$$

Faktore hau denbora-une tamainaren, sistemaren berezko frekuentziaren eta erabilitako sarearen tamainaren funtzio da.

3 Aurretiazko kontzeptuak

Oreka ekuazioak eta murriztapenen ekuazioak osatzen dituzten sistemaren parametroak erreferentzia global bakar batekiko adierazi behar dira. Baina hala ere parametro horiek solido zurrun bakoitzari atxikitako erreferentzia sistema lokal batekiko adieraztea interesgarria da, inertzia tentsorea konstante izatea ahalbidetzen bait du 1 ordez $n+1$ erreferentzia sistema erabili arren, non n sistemaren solido kopurua den. Bi kontzeptuek dute zentzua batera erabiltzerakoan; horretarako lehendabizikoz solido bakoitzarekiko adierazita dauden magnitudeak erreferentzia sistema lokalaren bidez zehazten dira, eta ondoren magnitude hauek erreferentzia sistema globalarekiko adierazteko eraldatzen dira, sistema bateratu bakar bat osatuz. Ondorioz, erreferentzia lokal zein globalean adieraztea eta haiek ezberdintzea beharrezkoa da dagokion izendatzea erabiliz, eta baita koordenadak erreferentzia sistemen artean aldatu ahal izatea ere.

Erreferentzia sistema lokal bakoitzaren sorpuntua solido bakoitzaren masa zentroan dago kokatuta, eta haren ardatzak inertzia ardatz nagusiak izan daitezzen dago biratuta. Masa zentro bakoitzaren posizioa koordenada Cartesiarrak erabiliz finkatzen da erreferentzia sistema globalarekiko; orientazioak edozein parametro sortaren bidez adierazi daitezkeen arren hasieran unitatezko kuarternioiak erabiliko dira. Hau aurrerago orokortuko da.

Hasteko matrize eta bektoreak adierazteko erabiliko den izendatzea adieraziko da, zeina erabiliko den erreferentzia sistemaren arabera den. Ondoren ekuazioak linealizatzeko modua laburki azalduko da. Biratze matrizearen ekuazioak eta haren deribazioak kuarternioiak erabiliz garatuko dira, eta azkenekoz koordenada aldaketetarako, ezarritako indarretarako eta energia mekanikoaren formulak lortzeko beharrezko diren eragiketa matematiko eta linealizazioak garatuko dira.

3.1 Adierazpena

Sistemaren higadura kudeatzen duten ekuazioak erreferentzia lokalean ezarritako magnitudeen bidez adierazten dira, hala nola inertzia tentsorea edo solido baten baitako puntu baten masa zentroarekiko distantzia. Baina aldi berean sistemaren koordenadak erreferentzia sistema globalean daude adierazita. Hau dela eta bi erreferentzia sistemak ezberdinduko dituen izendatze bat da beharrezkoa, bektore berbera dagokion erreferentzia sisteman adieraztearren. Horregatik, koordenada lokalen eta globalen artean eta alderantziz aldatzea beharrezkoa da.

Metodo hau erabiliz, \mathbf{r} bektoreak hainbat modu ezberdinetan idatzi daitezke:

- \mathbf{r}^L bezala: erreferentzia sistema lokala da haren sorburua, baina erreferentzia sistema globalera transformatu da. L goi indizearen faltak haren sorburua erreferentzia sistema globala dela esan nahi du.
- $\bar{\mathbf{r}}^L$ bezala: haren sorburua erreferentzia sistema lokala da, baina gainera sistema horretan berean dago adierazita.

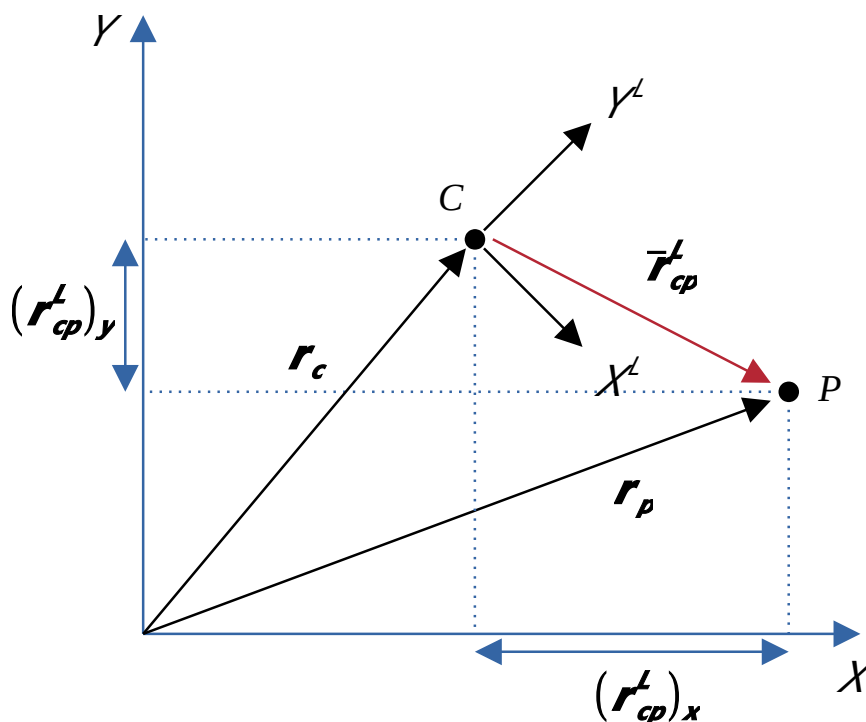


Figure 3.1: vector notation

Gainera, hurrengo izendatzea jarraitu da erabilitako ekuazio eta sinbolo matematikoetarako:

- Bektoreak letra lodi xehean adierazten dira, eta matrizeak letra lodi nagusian. Matrizeak parentesiak erabiliz mugatzen dira haien edukia ikusgai badago, eta bektoreak giltzak erabiliz mugatzen dira kasu berean. Bektoreak edo matrizeak handiegiak badira lerro bakar batean adierazteko orduan haien tamaina txikiagotu da.
- Biderkatze eskalarra erdiko puntu baten bidez adierazten da: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$
- Biderkatze bektoriala \times sinboloaren bidez adierazten da: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

3.2 Linealizazioa

Gurutzatutako kuarternioien biderkatzeak edo kuarternioien funtzio diren bi aldagai edo gehiagoren biderkatzeak dituzten espresioak linealizatu beharra dago oreka ekuazioan eta lotura zinematikoen ekuazioetan modu egokian erabiliko badira.

Bi metodo nagusi daude eskuragai linealizatzerako orduan: Newton, zeinak deribazio zehatzak darabiltzan, eta kuasi-Newton, zeinak deribazio gerturatuak darabiltzan. Hau garrantzizkoa da konbergentziarentzat: Newton-en metodoak konbergentzia koadratikoa lortu dezake, kuasi-Newton-en metodoek konbergentzia superlineala duten bitartean (hau da, 1 baino handiagoa baina 2 baino txikiagoa da). Arrazoi honengatik tesi honetan Newton-en metodoa erabiltzea erabaki da, nahiz eta zalantzarik gabe nekezagoa den.

Newton-en metodoa haren konbergentzia ziurtatuta ez duen metodo ireki bat izanda, haren algoritmoa x_n -ren inguruan garatutako funtzio bat moztutako bigarren ordendun Taylor-en seriean garatuz lortzen da:

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_n)^2 \quad (3.1)$$

Non n iterazioaren errorea, hau da, $|E_n|$, ondorengo formulak adierazten duen:

$$|E_n| \leq \frac{c_2}{2c_1}(x_n - x_{n-1})^2 \quad (3.2)$$

Non:

$$c_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)| \quad (3.3)$$

$$c_1 = \min_{x \in [a, b]} |f'(x)| \quad (3.4)$$

3.3 Unitatezko kuaternioia

Euler-en rotazio teoremaren harabera, hainbat biratzeen ostean solido baten hasierako eta bukaerako posizioa ardatz bakar batekiko biratze baten bidez lortu daiteke; ardatz hau Euler-en polo bezala ezagutzen da. Teorema honen inplikazioetako baten arabera, hainbat ardatz arbitrarioen inguruan biratu den solido batek biratze ardatz baliokide bakar bat du: Euler-en poloa. Honen ondorio gisa, edozein biratze edo biratze multzo Euler-en poloarekiko θ angeluaren biratze bat bezala adierazi daiteke, zeina \mathbf{u} bektore zuzendariarekin adierazten den. Adierazpen hau kuaternioiaren balioarekin lotu daiteke hurrengo ekuazioaren bidez:

$$\mathbf{q} = \text{Rot}(\mathbf{u}, \theta) = (\cos(\theta/2), \mathbf{u} \sin(\theta/2)) \quad (3.5)$$

Gainera, \mathbf{u} bektore zuzendaria unitatezkoa denez solidoaren erreferentzia triedroa erreferentzia sistema globalarekiko unibokoki adierazi daiteke. Honek, halaber, kuaternioiak unitatezko araua bete behar duela esan nahi du:

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = \mathbf{q}^T \mathbf{q} = 1 \quad (3.6)$$

Kuaternioiak atal eskalar bat eta atal bektorial bat dituen arren, eta erraztasun arrazoiak direla eta, hura maneiatzeko 4 dimentsioko bektore baten gisan adieraziko da:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Koordenada Cartesiarrak eta kuaternioiak bateratzen dituen bektore bat erabiliz, solido baten masa zentroaren kokapena eta haren orientazioa adieraztea posible da:

$$\mathbf{x} = \{x \ y \ z \ q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3\}^T \quad (3.8)$$

2.1.3.2 atalean aipatu denez, biratze matrizea kuaternioiari Rodrigues-en formula ezarriz lortzen da. Honek 3 dimentsioko biratze matrize karratu bat sortzen du, zeina ortogonal den eta unitatezko determinantea duen:

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Kuaternioiak ez dira aldatzen haiek adierazteko erabiltzen den erreferentzia sistema aldatuz gero. Hau hurrengo formulari ikus daiteke:

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}) \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Hau 3.10 ekuazioa 3.9 ekuazioarekin garatuz frogatu daiteke. Are gehiago, q_0 inbariantea izanik \mathbf{q} ere hasierako zein biratutako erreferentzia sistemekiko inbariante dela ondorioztatzen da.

Biratze matrizea denborarekiko menpeko da, erreferentzia sistema lokala osatzen duten bektoreez osatuta bait dago: \mathbf{i} , \mathbf{j} eta \mathbf{k} . Bektore hauek erabiliz, Ω abiadurazko eta erreferentzia lokalaren edozein ardatzekiko biratze bat horrela adierazi daiteke:

$$\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t} = \Omega \mathbf{i} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \Omega \mathbf{j} \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t} = \Omega \mathbf{k} \quad (3.13)$$

Matrize formari:

$$\dot{\mathbf{R}} = \Omega \mathbf{R} \quad (3.14)$$

Ortonormalitate propietateak ondorengo idaztea ahalbidetzen du:

$$\Omega = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T \quad (3.15)$$

Denborarekiko \mathbf{R} -ren deribazioa 3.9 deribatuz lortzen da:

$$\dot{\mathbf{R}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 2 \begin{bmatrix} q_0 \dot{q}_0 + q_1 \dot{q}_1 - q_2 \dot{q}_2 - q_3 \dot{q}_3 & \dot{q}_1 q_2 + q_1 \dot{q}_2 - \dot{q}_0 q_3 - q_0 \dot{q}_3 & \dot{q}_1 q_3 + q_1 \dot{q}_3 + \dot{q}_0 q_2 + q_0 \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 q_2 + q_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_0 q_3 + q_0 \dot{q}_3 & q_0 \dot{q}_0 - q_1 \dot{q}_1 + q_2 \dot{q}_2 - q_3 \dot{q}_3 & \dot{q}_2 q_3 + q_2 \dot{q}_3 - \dot{q}_0 q_1 - q_0 \dot{q}_1 \\ \dot{q}_1 q_3 + q_1 \dot{q}_3 - \dot{q}_0 q_2 - q_0 \dot{q}_2 & \dot{q}_2 q_3 + q_2 \dot{q}_3 + \dot{q}_0 q_1 + q_0 \dot{q}_1 & q_0 \dot{q}_0 - q_1 \dot{q}_1 - q_2 \dot{q}_2 + q_3 \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Kuaternioiak unitate araua betetzen duenez, haren deribazioek ere bete beharko dute. 3.6 ekuazioa deribatuz eta sinplifikatuz:

$$q_0 \dot{q}_0 + q_1 \dot{q}_1 + q_2 \dot{q}_2 + q_3 \dot{q}_3 = \mathbf{q}^T \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (3.17)$$

3.15-en ordezkatur:

$$\mathbf{\Omega} = 2 \begin{bmatrix} 0 & -q_1 \dot{q}_2 + q_2 \dot{q}_1 + q_3 \dot{q}_0 - q_0 \dot{q}_3 & -q_1 \dot{q}_3 + q_3 \dot{q}_1 + q_0 \dot{q}_2 - q_2 \dot{q}_0 \\ -q_2 \dot{q}_1 + q_1 \dot{q}_2 + q_0 \dot{q}_3 - q_3 \dot{q}_0 & 0 & -q_2 \dot{q}_3 + q_3 \dot{q}_2 + q_1 \dot{q}_0 - q_0 \dot{q}_1 \\ -q_3 \dot{q}_1 + q_1 \dot{q}_3 + q_2 \dot{q}_0 - q_0 \dot{q}_2 & -q_3 \dot{q}_2 + q_2 \dot{q}_3 + q_0 \dot{q}_1 - q_1 \dot{q}_0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Matrize hau antisimetrikoa da. Ondorioz, abiadura angeluarra bektore forman ondorengo ekuazioaren bidez adierazi daiteke:

$$\boldsymbol{\omega} = 2 \begin{pmatrix} -q_3 \dot{q}_2 + q_2 \dot{q}_3 + q_0 \dot{q}_1 - q_1 \dot{q}_0 \\ -q_1 \dot{q}_3 + q_3 \dot{q}_1 + q_0 \dot{q}_2 - q_2 \dot{q}_0 \\ -q_2 \dot{q}_1 + q_1 \dot{q}_2 + q_0 \dot{q}_3 - q_3 \dot{q}_0 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Azelerazio angeluarra 3.18 berriz deribatuz edo 3.19 deribatuz lor daiteke. Aukeratutako bidea dena dela, azelerazio angeluarraren formula hurrengoa da:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = 2 \begin{pmatrix} -q_3 \ddot{q}_2 + q_2 \ddot{q}_3 + q_0 \ddot{q}_1 - q_1 \ddot{q}_0 \\ -q_1 \ddot{q}_3 + q_3 \ddot{q}_1 + q_0 \ddot{q}_2 - q_2 \ddot{q}_0 \\ -q_2 \ddot{q}_1 + q_1 \ddot{q}_2 + q_0 \ddot{q}_3 - q_3 \ddot{q}_0 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Atal honetan aipatzen diren espresioak lortzeko erabilitako garapen matematikoak aurrez diferentzia zentralentzat erabilitako garapenetan oinarrituak daude, zeinak Urkullu Dr.-earen tesiaren oinarria diren [1].

3.4 Koordenada transformazioak

Solido batean kokatutako puntu bat edo bi solidok partekatzen duten puntu bat bezalako kontzeptu geometriko eta aljebraikoak murriztapenak adierazten dituzten ekuazioen oinarria dira. Malgukiak eta moteltzaileak adierazten dituzten ekuazioak sortzeko ere beharrezkoak dira. Bi betebeharretarako, ekuazioak sistema osoa modelizatzeko erabiltzen diren koordenadak erabiliz sortu beharra dago. Horregatik, koordenada lokal eta globalen artean aldatu ahal izatea beharrezkoa da.

Hurrengo kontzeptuak adieraziko dira: puntu baten eta bektore baten koordenada globalak koordenada lokaletatik hasita, eta baita puntu baten abiadura, azelerazioak eta puntu batean ezarritako indarrak ere, eta azkenekoz

sistema baten energia mekanikoa. Espresio hauek geroago lotura zinematikoentzat eta oreka ekuazioentzat erabiliko dira.

3.4.1 Solido batean kokatutako puntu eta bektore baten koordenada globalak

Solido batean kokatuta dagoen puntu baten koordenada globalak koordenada globaletatik hasita lortzeko hurrengo ekuazioa erabiltzen da:

$$\mathbf{r}_c = \mathbf{r}_k + \mathbf{R}(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{r}}_{ck}^L \quad (3.21)$$

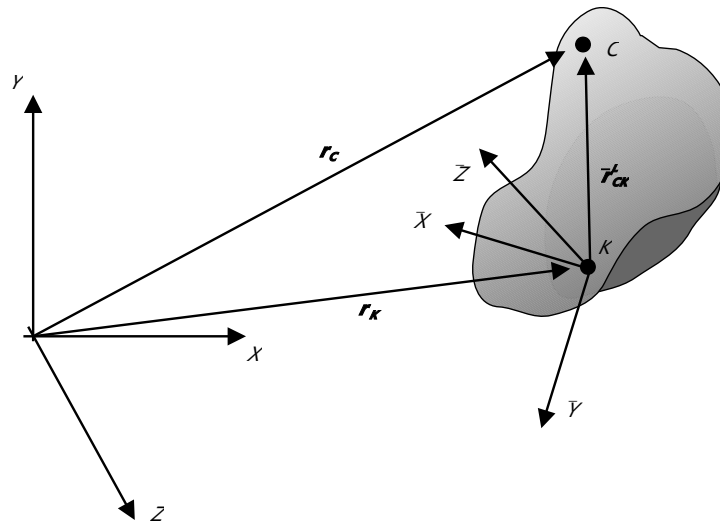


Figure 3.2: global coordinates of a point

Bektoreen kasuan, 3.21 ekuazioaren bigarren atala koordenada lokaletan adierazita dagoen bektore baten koordenada globalak lortzeko erabili daiteke. Ekuazio honetan erabiltzen den biratze matrizea ez da lineala, eta ondorioz hura erabiltzeko aldeztatik Taylor-en serie bidez linealizatu beharra dago. 3.21 ekuazioa Taylor-en serieak erabiliz garatuz:

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}) \bar{\mathbf{r}}^L \simeq \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)}) \bar{\mathbf{r}}^L + \left. \frac{\partial \mathbf{R} \bar{\mathbf{r}}^L}{\partial \mathbf{q}} \right|^{(0)} (\mathbf{q} - \mathbf{q}^{(0)}) \quad (3.22)$$

Hurrengo ekuazioa erabiliz:

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{r}}^L) = \left. \frac{\partial \mathbf{R} \bar{\mathbf{r}}^L}{\partial \mathbf{q}} \right|^{(0)} \quad (3.23)$$

Eta jakinez:

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{r}}^L) \mathbf{q}^{(0)} = -2 \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)}) \bar{\mathbf{r}}^L \quad (3.24)$$

Linealizatutako biratze matrizearen espresioa bektore batez biderkatzerakoan, ondorioz, hurrengoa da:

$$\mathbf{R}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{r}}^L \simeq -\mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)})\bar{\mathbf{r}}^L + \mathbf{S}(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{r}}^L)\mathbf{q} \quad (3.25)$$

Aldaketa hauek 3.21 ekuazioari ezarriz:

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_K - \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)})\bar{\mathbf{r}}_{CK}^L + \mathbf{S}(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{r}}_{CK}^L)\mathbf{q} \quad (3.26)$$

Ekuazio hau matrize forman berridatzi daiteke:

$$\mathbf{r}_C = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{S}(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{r}}_{CK}^L) \end{bmatrix} \mathbf{x}_K - \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)})\bar{\mathbf{r}}_{CK}^L \quad (3.27)$$

Edo, forma trinkoan:

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{H}^{(0)} \mathbf{x}_K - \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)})\bar{\mathbf{r}}_{CK}^L \quad (3.28)$$

Ekuazio hauek bektore baten koordenada lokalak globaletara eraldatzeko erabili daitezke:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{S}(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{v}}^L) \end{bmatrix} \mathbf{x} - \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)})\bar{\mathbf{v}}^L \quad (3.29)$$

3.4.2 Puntu baten koordenada lokalak

Koordenada lokalak globaletara eraldatu diren modu berberean kontrakoa ere egin daiteke. 3.27 ekuazioak $\bar{\mathbf{r}}_{CK}^L$ bektorea koordenada lokaletatik globaletara igarorarazten du, eta hala izanda eragiketa hau alderanzkarria da horretarako \mathbf{R} matrizea alderanzkarria dela jakinez eta hurrengo ekuazioa erabiliz:

$$\mathbf{r}_{CK}^L = \mathbf{R}(\mathbf{q})^T \mathbf{r}_{CK} \quad (3.30)$$

Horretarako, hala ere, beharrezko den transformazio matrizeak ez du 3x3 dimentsioa izango, 4x4 baizik, transformatu beharreko bektorea kuaternioiarena (edo haren deribazioena) izango bait da. Honen ondorioz, beharrezko den matrizeak ondorengo itxura izango du:

$$\mathbf{R}_4^T(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

3.22 ekuazioari ezarritako linealizazio metodo berbera ezarriz, ondorengo ekuazioa lortzen da:

$$\mathbf{R}_4^T(\mathbf{q})\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{R}^T(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \mathbf{v} \simeq \mathbf{R}_4^T(\mathbf{q}^{(0)})\mathbf{v} + \left| \frac{\partial \mathbf{R}_4^T \mathbf{v}}{\partial \mathbf{q}} \right|^{(0)} (\mathbf{q} - \mathbf{q}^{(0)}) \quad (3.32)$$

Hurrengo ekuazioa ezarriz:

$$\mathbf{S}_4^T(\mathbf{q}^{(0)}, \mathbf{v}) = \left| \frac{\partial \mathbf{R}_4^T \mathbf{v}}{\partial \mathbf{q}} \right|^{(0)} \quad (3.33)$$

Eta jakinik:

$$\mathbf{S}_4^T(\mathbf{q}^{(0)}, \mathbf{v})\mathbf{q}^{(0)} = \mathbf{R}_{04}^T(\mathbf{q}^{(0)})\mathbf{v} \quad (3.34)$$

Linealizatutako $\mathbf{R}_4^T(\mathbf{q})\mathbf{v}$ biderkatzea, azkenean, ondorengoa da:

$$\mathbf{R}_4^T(\mathbf{q})\mathbf{v} \simeq \mathbf{R}_4^T(\mathbf{q}^{(0)})\mathbf{v} + \mathbf{R}_{04}^T(\mathbf{q}^{(0)})\mathbf{v} + \mathbf{S}_4^T(\mathbf{q}^{(0)}, \mathbf{v})\mathbf{q} \quad (3.35)$$

3.4.3 Puntu baten abiadura koordenada lokaletatik hasita

3.21 ekuazioarekin hasita, abiadura eta azelerazioen ekuazioak ekuazio hura hurrenez hurren deribatuz lortzen dira. Behin deribatuz:

$$\dot{\mathbf{r}}_c = \dot{\mathbf{r}}_k + \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{q}_k)\bar{\mathbf{r}}_{ck}^L \quad (3.36)$$

Biratze matrizearen lehen deribazioa 3.16 ekuazioak ematen du. Bertatik hasita eta 3.23 erabiliz:

$$\dot{\mathbf{R}}\bar{\mathbf{v}}^L = \mathbf{S}(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{v}}^L)\dot{\mathbf{q}} \quad (3.37)$$

3.36-n ordezkatur:

$$\dot{\mathbf{r}}_c = \dot{\mathbf{r}}_k + \mathbf{S}(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{r}}_{ck}^L)\dot{\mathbf{q}} \quad (3.38)$$

Ekuazio hau matrize forman horrela idatzi daiteke:

$$\dot{\mathbf{r}}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{S}(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{r}}_{ck}^L) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_k \quad (3.39)$$

3.4.4 Puntu baten azelerazioa koordenada lokaletatik hasita

Azkenekoz, 3.36 ekuaziotik hasita eta berriz ere deribatuz C puntuaren azelerazioa lortzen da:

$$\ddot{\mathbf{r}}_c = \ddot{\mathbf{r}}_k + \ddot{\mathbf{R}}(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{r}}_{ck}^L \quad (3.40)$$

3.16 beste behin deribatuz:

$$\ddot{\mathbf{R}} = 2 \begin{bmatrix} (\dot{q}_0)^2 + q_0 \ddot{q}_0 + (\dot{q}_1)^2 + q_1 \ddot{q}_1 - (\dot{q}_2)^2 - q_2 \ddot{q}_2 - (\dot{q}_3)^2 - q_3 \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_1 q_2 + q_1 \ddot{q}_2 + 2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \ddot{q}_0 q_3 + q_0 \ddot{q}_3 + 2 \dot{q}_0 \dot{q}_3 \\ \ddot{q}_1 q_3 + q_1 \ddot{q}_3 + 2 \dot{q}_1 \dot{q}_3 - \ddot{q}_0 q_2 - q_0 \ddot{q}_2 - 2 \dot{q}_0 \dot{q}_2 \\ \ddot{q}_1 q_2 + q_1 \ddot{q}_2 + 2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - \ddot{q}_0 q_3 - q_0 \ddot{q}_3 - 2 \dot{q}_0 \dot{q}_3 \\ (\dot{q}_0)^2 + q_0 \ddot{q}_0 - (\dot{q}_1)^2 - q_1 \ddot{q}_1 + (\dot{q}_2)^2 + q_2 \ddot{q}_2 - (\dot{q}_3)^2 - q_3 \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_2 q_3 + q_2 \ddot{q}_3 + 2 \dot{q}_2 \dot{q}_3 + \ddot{q}_0 q_1 + q_0 \ddot{q}_1 + 2 \dot{q}_0 \dot{q}_1 \\ \ddot{q}_1 q_3 + q_1 \ddot{q}_3 + 2 \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \ddot{q}_0 q_2 + q_0 \ddot{q}_2 + 2 \dot{q}_0 \dot{q}_2 \\ \ddot{q}_2 q_3 + q_2 \ddot{q}_3 + 2 \dot{q}_2 \dot{q}_3 - \ddot{q}_0 q_1 - q_0 \ddot{q}_1 - 2 \dot{q}_0 \dot{q}_1 \\ (\dot{q}_0)^2 + q_0 \ddot{q}_0 - (\dot{q}_1)^2 - q_1 \ddot{q}_1 - (\dot{q}_2)^2 - q_2 \ddot{q}_2 + (\dot{q}_3)^2 + q_3 \ddot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Matrize hau bi matrizeren arteko gehiketa bezala idatzi daiteke:

$$\ddot{\mathbf{R}}(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = \mathbf{T}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{D}(\ddot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) \quad (3.42)$$

Non bi matrizeak hauek diren:

$$\mathbf{T}(\dot{\mathbf{q}}) = 2 \begin{bmatrix} (\dot{q}_0)^2 + (\dot{q}_1)^2 - (\dot{q}_2)^2 - (\dot{q}_3)^2 & 2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - 2 \dot{q}_0 \dot{q}_3 & 2 \dot{q}_1 \dot{q}_3 + 2 \dot{q}_0 \dot{q}_2 \\ 2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + 2 \dot{q}_0 \dot{q}_3 & (\dot{q}_0)^2 - (\dot{q}_1)^2 + (\dot{q}_2)^2 - (\dot{q}_3)^2 & 2 \dot{q}_2 \dot{q}_3 - 2 \dot{q}_0 \dot{q}_1 \\ 2 \dot{q}_1 \dot{q}_3 - 2 \dot{q}_0 \dot{q}_2 & 2 \dot{q}_2 \dot{q}_3 + 2 \dot{q}_0 \dot{q}_1 & (\dot{q}_0)^2 - (\dot{q}_1)^2 - (\dot{q}_2)^2 + (\dot{q}_3)^2 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$\mathbf{D}(\ddot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = 2 \begin{bmatrix} q_0 \ddot{q}_0 + q_1 \ddot{q}_1 - q_2 \ddot{q}_2 - q_3 \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_1 q_2 + q_1 \ddot{q}_2 + \ddot{q}_0 q_3 + q_0 \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_1 q_3 + q_1 \ddot{q}_3 - \ddot{q}_0 q_2 - q_0 \ddot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 q_2 + q_1 \ddot{q}_2 - \ddot{q}_0 q_3 - q_0 \ddot{q}_3 & \ddot{q}_1 q_3 + q_1 \ddot{q}_3 + \ddot{q}_0 q_2 + q_0 \ddot{q}_2 \\ q_0 \ddot{q}_0 - q_1 \ddot{q}_1 + q_2 \ddot{q}_2 - q_3 \ddot{q}_3 & \ddot{q}_2 q_3 + q_2 \ddot{q}_3 - \ddot{q}_0 q_1 - q_0 \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 q_3 + q_2 \ddot{q}_3 + \ddot{q}_0 q_1 + q_0 \ddot{q}_1 & q_0 \ddot{q}_0 - q_1 \ddot{q}_1 - q_2 \ddot{q}_2 + q_3 \ddot{q}_3 \end{bmatrix}$$

Espresso hauekin, 3.40 ekuazioa horrela idatzi daiteke:

$$\ddot{\mathbf{r}}_c = \ddot{\mathbf{r}}_k + \mathbf{T}(\dot{\mathbf{q}}) \bar{\mathbf{r}}_{CK}^L + \mathbf{S}(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{r}}_{CK}^L) \ddot{\mathbf{q}} \quad (3.45)$$

Matrize forman:

$$\ddot{\mathbf{r}}_c = \left[\mathbf{I}_{3 \times 3} \quad \mathbf{S}(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{r}}_{CK}^L) \right] \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{T}(\dot{\mathbf{q}}) \bar{\mathbf{r}}_{CK}^L \quad (3.46)$$

3.4.5 Plano baten koordenada globalak

Atal honetan Urkullu Dr.-eak [1] burututako garapen matematikoak erabili dira. Plano bat espazioan ondorengo espresioaren bidez adierazten da:

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z + e = 0 \quad (3.47)$$

Ondorioz, planoan kokatutako puntu orok ekuazio hau bete behar du. Honek $\{a_1 \ a_2 \ a_3\}^T$ bektorearen eta $\{x \ y \ z\}^T$ puntuen arteko biderketa eskalarra planoaren eta erreferentzia sistemaren arteko distantzia minimoa dela esan nahi du, 3.3 irudian ikusten den moduan.

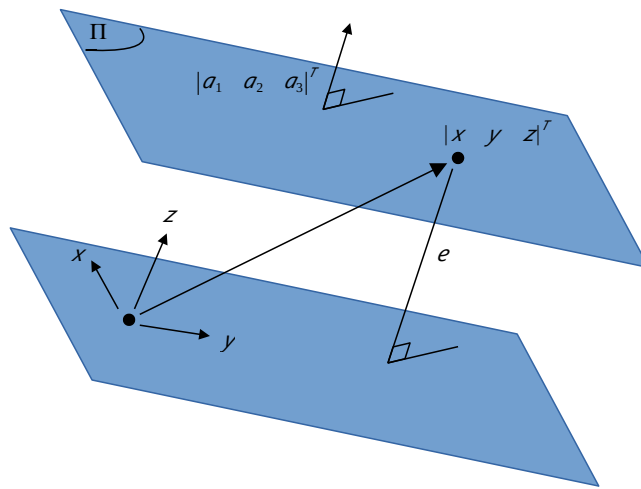


Figure 3.3: global and lokal coordinates of a plane

Solido bati atxikitako plano bat hurrengo ekuazioaren bidez adierazi daiteke:

$$\bar{p}_1 x + \bar{p}_2 y + \bar{p}_3 z + \bar{p}_4 = \bar{\mathbf{p}}^T \bar{\mathbf{r}}_{ck}^L + \bar{p}_4 = 0 \quad (3.48)$$

Non $\bar{\mathbf{p}}$ planoarekiko normala den bektorea den eta $\bar{\mathbf{r}}_{ck}^L$ erreferentzia sistema lokalarekiko adierazita dagoen bektore bat den, zeinak planoari atxikitako puntu bat adierazten duen. Gainera planoarekiko distantzia minimoa da, zeina hurrengo ekuazioetan bezala adieraziko den. Ekuazio hau edozein eskalarrez biderka daiteke planoz aldatu gabe; arrazoi honengatik $\bar{\mathbf{p}}$ bektorea normalizatzen da:

$$\bar{\mathbf{p}}^T \bar{\mathbf{p}} = 1 \quad (3.49)$$

$\bar{\mathbf{r}}_{ck}^L$ bektorea ondorengo ekuazioaren bidez adierazten da:

$$\bar{\mathbf{r}}_{ck}^L = \mathbf{R}(\mathbf{q}_k)^T (\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_k) \quad (3.50)$$

Espresio hau 3.48-n kokatuz eta hura garatuz, hurrengoa lortzen da:

$$(\bar{\mathbf{p}})^T \mathbf{R}(\mathbf{q}_k)^T \mathbf{r}_c - (\bar{\mathbf{p}})^T \mathbf{R}(\mathbf{q}_k)^T \mathbf{r}_k + \bar{e} = 0 \quad (3.51)$$

Non hurrengoa ondorioztatu daitekeen:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^L - (\bar{\mathbf{p}})^T \mathbf{R}(\mathbf{q}_k)^T \mathbf{r}_p \quad (3.52)$$

Koordenada globaletan adierazitako planoaren ekuazioa, koordenada lokaletatik hasita, hurrengo ekuazioa gehitzen denean osatzen da:

$$\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{R}(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{p}}^L \quad (3.53)$$

Espresio hauek ez dira linealak. 3.53 ekuazioa 3.29 linealizatu den moduan linealizatu daiteke. Ekuazio hau eta 3.52, linealizatu eta gero, ondoren adierazi bezala geratzen dira:

$$\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{R}(\mathbf{q}_k^{(0)}) \bar{\mathbf{p}}^L - \mathbf{S}_p(\mathbf{q}_k^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}^L) \mathbf{q}_k^{(0)} + \mathbf{S}_p(\mathbf{q}_k^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}^L) \mathbf{q}_k \quad (3.54)$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^L + (\mathbf{q}_k^{(0)})^T \mathbf{S}_p(\mathbf{q}_k^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}^L)^T \mathbf{r}_k^{(0)} - \left[\mathbf{R}(\mathbf{q}_k^{(0)}) \bar{\mathbf{p}}^L \right]^T \mathbf{r}_k - (\mathbf{r}_k^{(0)})^T \mathbf{S}_p(\mathbf{q}_k^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}^L) \mathbf{q}_k \quad (3.55)$$

3.4.6 Lerro zuzen baten koordenada globalak

Atal honetan Urkullu Dr.-earen [1] garapen matematikoak erabili dira. Hasierako aldagaiak erreferentzia sistema lokalean kokatutako puntu bat eta lerroaren bektore zuzentzailea dira. Datu hauekin, lerro zuzen bat espazioan bi ekuazioren bidez finkatzen da: lehenengoak lerroaren eta koordenada sistema globalaren sorpuntuaren arteko distantzia minimoa adierazten du, eta bigarrenak bektore zuzentzailearen espresioa erreferentzia sistema globalean kokatzen du. Ondorioz, lehen ekuazioa, linealizatu eta gero, ondorengoa da:

$$\begin{aligned} \mathbf{d} = & \left[(\mathbf{r}_k^{(0)})^T \mathbf{S}_p(\mathbf{q}_k^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}) \mathbf{q}_k^{(0)} \right] \mathbf{R}(\mathbf{q}_k^{(0)}) \bar{\mathbf{p}} + \mathbf{R}(\mathbf{q}_k^{(0)}) \bar{\mathbf{d}}^L + \\ & + \left\{ \left[(\bar{\mathbf{p}})^T \mathbf{R}(\mathbf{q}_k^{(0)})^T \mathbf{r}_k^{(0)} \right] \mathbf{S}_p(\mathbf{q}_k^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}) - \mathbf{S}_p(\mathbf{q}_k^{(0)}, \bar{\mathbf{d}}^L) \right\} \mathbf{q}_k^{(0)} + \\ & + \left[\mathbf{I} - \mathbf{R}(\mathbf{q}_k^{(0)}) \bar{\mathbf{p}} (\bar{\mathbf{p}})^T \mathbf{R}(\mathbf{q}_k^{(0)})^T \right] \mathbf{r}_k + \\ & + \left\{ \mathbf{S}_p(\mathbf{q}_k^{(0)}, \bar{\mathbf{d}}^L) - \left[(\bar{\mathbf{p}})^T \mathbf{R}(\mathbf{q}_k^{(0)})^T \mathbf{r}_k^{(0)} \right] \mathbf{I} + \mathbf{R}(\mathbf{q}_k^{(0)}) \bar{\mathbf{p}} (\mathbf{r}_k^{(0)})^T \right\} \mathbf{S}_p(\mathbf{q}_k^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}) \mathbf{q}_k \end{aligned} \quad (3.56)$$

Eta bektore zuzentzaileari lotutako ekuazioa:

$$\mathbf{p} = \mathbf{R}(\mathbf{q}_k^{(0)}) \bar{\mathbf{p}} - \mathbf{S}_p(\mathbf{q}_k^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}) \mathbf{q}_k^{(0)} + \mathbf{S}_p(\mathbf{q}_k^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}) \mathbf{q}_k \quad (3.57)$$

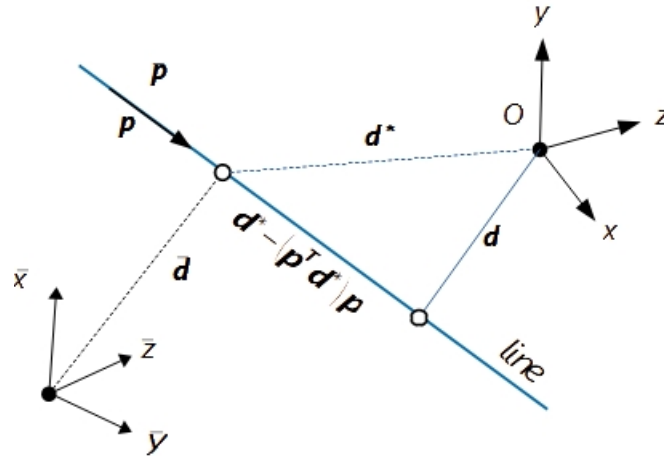


Figure 3.4: geometric interpretation of a straight line

3.5 Biratze matrizeen linealizazioa

3.21 eta 3.32 ekuazioez gain, \mathbf{R} eta \mathbf{R}_4^T matrizeen adierazpen linealizatuak eskuragai edukitzea interesgarria da haiek hurrengo sekzioetan erabili ahal izateko. \mathbf{R} matrizea ondoren adierazi bezala linealizatzen da:

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}) \simeq \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)}) + \left. \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{x}} \right|^{(0)} (\mathbf{q} - \mathbf{q}^{(0)}) \quad (3.58)$$

Espresio honek biratze matrizearen deribazio partzialak dauzka bere baitan kuaternioiaren osagaietako bakoitzarekiko. Osagai hauetako bakoitzarekiko deribazioak ondorengoak dira:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_0} \right|^{(0)} = 2 \begin{bmatrix} q_0^{(0)} & -q_3^{(0)} & q_2^{(0)} \\ q_3^{(0)} & q_0^{(0)} & -q_1^{(0)} \\ -q_2^{(0)} & q_1^{(0)} & q_0^{(0)} \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_1} \right|^{(0)} = 2 \begin{bmatrix} q_1^{(0)} & q_2^{(0)} & q_3^{(0)} \\ q_2^{(0)} & -q_1^{(0)} & -q_0^{(0)} \\ q_3^{(0)} & q_0^{(0)} & -q_1^{(0)} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_2} \right|^{(0)} = 2 \begin{bmatrix} -q_2^{(0)} & q_1^{(0)} & q_0^{(0)} \\ q_1^{(0)} & q_2^{(0)} & q_3^{(0)} \\ -q_0^{(0)} & q_3^{(0)} & -q_2^{(0)} \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

$$\left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_3} \right|^{(0)} = 2 \begin{bmatrix} -q_3^{(0)} & -q_0^{(0)} & q_1^{(0)} \\ q_0^{(0)} & -q_3^{(0)} & q_2^{(0)} \\ q_1^{(0)} & q_2^{(0)} & q_3^{(0)} \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Garapena jarraituz, linealizatutako matrizeak ondorengo itxura du:

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}) \simeq -\mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)}) + \mathbf{T}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{(0)}) \quad (3.63)$$

Non:

$$\mathbf{T}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{(0)}) = 2 \begin{bmatrix} q_0^{(0)} q_0 + q_1^{(0)} q_1 - q_2^{(0)} q_2 - q_3^{(0)} q_3 & q_1^{(0)} q_2 + q_2^{(0)} q_1 - q_0^{(0)} q_3 - q_3^{(0)} q_0 & q_1^{(0)} q_3 + q_3^{(0)} q_1 + q_0^{(0)} q_2 + q_2^{(0)} q_0 \\ q_1^{(0)} q_2 + q_2^{(0)} q_1 + q_0^{(0)} q_3 + q_3^{(0)} q_0 & q_0^{(0)} q_0 - q_1^{(0)} q_1 + q_2^{(0)} q_2 - q_3^{(0)} q_3 & q_2^{(0)} q_3 + q_3^{(0)} q_2 - q_0^{(0)} q_1 - q_1^{(0)} q_0 \\ q_1^{(0)} q_3 + q_3^{(0)} q_1 - q_0^{(0)} q_2 - q_2^{(0)} q_0 & q_2^{(0)} q_3 + q_3^{(0)} q_2 - q_0^{(0)} q_1 - q_1^{(0)} q_0 & q_0^{(0)} q_0 - q_1^{(0)} q_1 - q_2^{(0)} q_2 + q_3^{(0)} q_3 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

Azkenekoz, \mathbf{R}_4^T antzera linealizatzen da:

$$\mathbf{R}_4^T(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{R}^T(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \simeq \mathbf{R}_4^T(\mathbf{q}^{(0)}) + \left| \frac{\partial \mathbf{R}_4^T(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right|^{(0)} (\mathbf{q} - \mathbf{q}^{(0)}) \quad (3.65)$$

Horretarako, \mathbf{R}_4^T -ren deribazio partzialak kuaternioiaren osagaietako ondorengoak dira:

$$\left| \frac{\partial \mathbf{R}_4^T}{\partial q_0} \right|^{(0)} = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_0^{(0)} & q_3^{(0)} & -q_2^{(0)} \\ 0 & -q_3^{(0)} & q_0^{(0)} & q_1^{(0)} \\ 0 & q_2^{(0)} & -q_1^{(0)} & q_0^{(0)} \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

$$\left| \frac{\partial \mathbf{R}_4^T}{\partial q_1} \right|^{(0)} = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_1^{(0)} & q_2^{(0)} & q_3^{(0)} \\ 0 & q_2^{(0)} & -q_1^{(0)} & q_0^{(0)} \\ 0 & q_3^{(0)} & -q_0^{(0)} & -q_1^{(0)} \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

$$\left| \frac{\partial \mathbf{R}_4^T}{\partial q_2} \right|^{(0)} = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q_2^{(0)} & q_1^{(0)} & -q_0^{(0)} \\ 0 & q_1^{(0)} & q_2^{(0)} & q_3^{(0)} \\ 0 & q_0^{(0)} & q_3^{(0)} & -q_2^{(0)} \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

$$\left| \frac{\partial \mathbf{R}_4^T}{\partial q_3} \right|^{(0)} = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q_3^{(0)} & q_0^{(0)} & q_1^{(0)} \\ 0 & -q_0^{(0)} & -q_3^{(0)} & q_2^{(0)} \\ 0 & q_1^{(0)} & q_2^{(0)} & q_3^{(0)} \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

Emaitza ondorengoa da:

$$\mathbf{R}_4^T(\mathbf{q}) \simeq \mathbf{R}_4^T(\mathbf{q}^{(0)}) - \mathbf{R}_{04}^T(\mathbf{q}^{(0)}) + \mathbf{T}_4^T(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{(0)}) \quad (3.70)$$

Non:

$$\mathbf{R}_{04}^T(\mathbf{q}^{(0)}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{R}^T(\mathbf{q}^{(0)}) \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

$$\mathbf{T}_4^T(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{T}^T(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{(0)}) \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Garapen hauek geroago Euler-en ekuazioen baitan erabiliko dira. Ekuazio hauek bektore batekin biderkatuz, 3.34 ekuazioen antzerako espresio batzuk lor daitezke:

$$\mathbf{T}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{(0)}) \bar{\mathbf{v}}^L = \mathbf{S}(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{v}}^L) \mathbf{q} \quad (3.73)$$

$$\mathbf{T}_4^T(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{(0)}) \mathbf{v} = \mathbf{S}_4^T(\mathbf{q}^{(0)}, \mathbf{v}) \mathbf{q} \quad (3.74)$$

Non $\bar{\mathbf{v}}^L$ eta \mathbf{v} bektore lineal konstante edo linealizatuak diren.

3.6 Bi puntuen arteko unitate bektorea

Bi puntuen arteko \mathbf{l} bektorea $\mathbf{l} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$ bezala adierazten da:

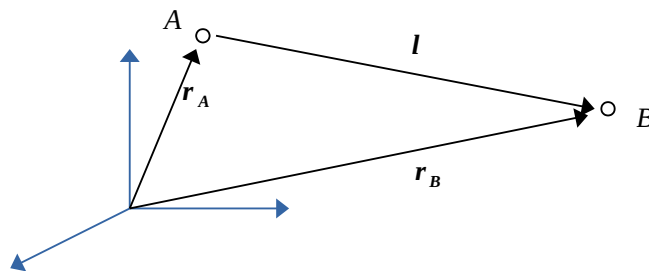


Figure 3.5: vector between two points

\mathbf{l} bektorearen zentzua duen \mathbf{u} unitate bektorea hurrengo ekuazioaren bidez adierazten da:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{l}}{\sqrt{\mathbf{l}^T \mathbf{l}}} \quad (3.75)$$

Espresio hau linealizatzeko, lehenengoz $\sqrt{(\mathbf{l}^T \mathbf{l})}$ linealizatu beharra dago. Hau da:

$$\sqrt{(\mathbf{I}^T \mathbf{I})} \simeq \sqrt{(\mathbf{I}^{(0)T} \mathbf{I}^{(0)})} - \frac{1/2}{\sqrt{(\mathbf{I}^{(0)T} \mathbf{I}^{(0)})}} \mathbf{I}^{(0)T} (\mathbf{I} - \mathbf{I}^{(0)}) = 3/2 \sqrt{(\mathbf{I}^{(0)T} \mathbf{I}^{(0)})} - \frac{1/2}{\sqrt{(\mathbf{I}^{(0)T} \mathbf{I}^{(0)})}} \mathbf{I}^{(0)T} \mathbf{I} \quad (3.76)$$

Ondoren, \mathbf{I} espresio honen bidez zatituko da eta, bi espresio linealen arteko zatiketa lineala izan ezin daitekenez, berriz ere linealizatu beharra dago:

$$\frac{\mathbf{I}}{\sqrt{(\mathbf{I}^T \mathbf{I})}} \simeq \frac{-\mathbf{I}^{(0)}}{2\sqrt{(\mathbf{I}^{(0)T} \mathbf{I}^{(0)})}} + 3/2 \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{I}^{(0)T} \mathbf{I}^{(0)})}} \mathbf{I} \quad (3.77)$$

Modu trinkoan adierazi daiteke:

$$(\mathbf{I}^T \mathbf{I})^{-1/2} \mathbf{I} \simeq \mathbf{u}_I + \mathbf{B}^{(0)} \mathbf{I} \quad (3.78)$$

Non:

$$\mathbf{u}_I = \frac{-\mathbf{I}^{(0)}}{2\sqrt{(\mathbf{I}^{(0)T} \mathbf{I}^{(0)})}} \quad (3.79)$$

$$\mathbf{B}^{(0)} = 3/2 \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{I}^{(0)T} \mathbf{I}^{(0)})}} \quad (3.80)$$

3.7 Puntu batean ezarritako indarra

Puntu arbitrario bitan ezarritako indar eta momentuak solidoaren masa zentrorra igaroarazi beharra dago, eta koordenada sistema globalarekiko adierazi, oreka ekuazioetan parte hartuko badute. Horretarako, indarren kasuan eurek sortzen duten momentua kontuan hartu beharra dago.

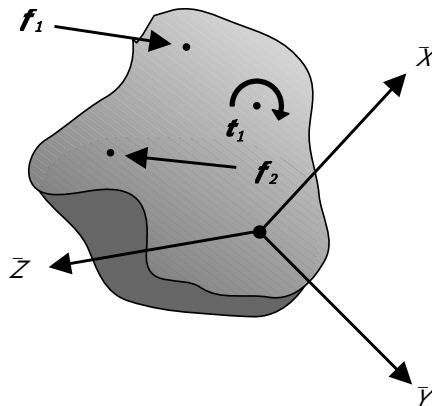


Figure 3.6: Global coordinates of a point

Solido bati C puntuan ezarritako indar eta momentuak, 3.6 irudian adierazi bezala, ondorengo bektorearekin adierazi daitezke:

$$\mathbf{f}_{CK} = \{f_{ckx} \ f_{cky} \ f_{ckz} \ \tau_{ckx} \ \tau_{cky} \ \tau_{ckz}\}^T \quad (3.81)$$

Bektore honetatik, momentuak ezer aldatu gabe iraganarazi daitezke masa zentrorra, baina indarren kasuan haiek sortzen dituzten momentuak ere kontuan hartu beharra dago. Ondorengo idatzi daiteke:

$$\mathbf{f}_K = \mathbf{f}_{CK} + \boldsymbol{\tau}_K = \begin{pmatrix} f_{ckx} \\ f_{cky} \\ f_{ckz} \\ \tau_{ckx} \\ \tau_{cky} \\ \tau_{ckz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_{kx} \\ \tau_{ky} \\ \tau_{kz} \end{pmatrix} \quad (3.82)$$

$\boldsymbol{\tau}_K$ atalak \mathbf{f}_{CK} indarrek masa zentroan sortutako momentuak batzen ditu:

$$\boldsymbol{\tau}_K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ r_{cky} f_{ckz} - r_{ckz} f_{cky} \\ -r_{ckx} f_{ckz} + r_{ckz} f_{ckx} \\ r_{ckx} f_{cky} - r_{cky} f_{ckx} \end{pmatrix} \quad (3.83)$$

Non r_{ckx} , r_{cky} eta r_{ckz} solidoaren masa zentrotik indarra ezartzen den punturainoko distantzia adierazten duten bektorearen erreferentzia sistema globalaren ardatzekiko proiektzioak diren. Transformazio hau ondorengo ekuazioaren bidez adierazi daiteke:

$$\mathbf{f}_K = \mathbf{U}_{CK}(\mathbf{r}_{CK}) \mathbf{f}_{CK} \quad (3.84)$$

Non:

$$\mathbf{U}_{CK}(\mathbf{r}_{CK}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_{ckz} & r_{cky} & 1 & 0 & 0 \\ r_{ckz} & 0 & -r_{ckx} & 0 & 1 & 0 \\ -r_{cky} & r_{ckx} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

3.8 Energia mekanikoa

Higidura infinitesimal bat ezarriz, Newton-en ekuazioek kanpoko indarrek egiten duten lana lortzea ahalbidetzen dute hura energia zinetikoaren aldatzeari berdinduz:

$$\Delta T = W_{ext} \quad (3.86)$$

Kanpo indarrak kontserbatiboak zein ez kontserbatiboak izan daitezke. Lehenengoen propietate baten arabera haien magnitudea eremuaren gradiente negatiboarekiko berdina da, eta haien lana hasierako eta amaierako posizioen araberakoa da soilik. Honen arabera, indar kontserbatibo baten lana energia potentzialaren aldaketa bezala idatzi daiteke, 3.86 ondoren bezala berridatziz:

$$\Delta T + \Delta V = W_{nc} \quad (3.87)$$

Non ΔV energia potentzialaren aldaketa den, zeina indar kontserbatiboan lanarekiko berdina den, eta W_{nc} indar ez kontserbatiboan lana den.

Gorputz anitzeko sistemetan energia potentziala grabitate eremuak eta elementu elastikoez sortzen dute, tesi honetan ikertuko ez diren beste batzuen artean, hala nola eremu elektrikoak. Grabitateari lotutako energia potentziala erreferentzia sistema globalarekiko adierazita ondorengoa da:

$$\Delta V_g = mg \mathbf{u}^T \mathbf{r}_G \quad (3.88)$$

Non m haren energia potentziala kalkulatzeko duen gorputzaren masa den, g grabitate eremuaren balioa den, \mathbf{u}^T grabitate eremuaren norabidea adierazten duen unitate bektore zuzentzailea den eta \mathbf{r}_G solidoaren grabitate zentroaren posizioa den. Sistemaren energia potentzial totala sistema osatzen duten solido guztien energia potentzialak gehituz lortzen da.

Energia potentzial elastikoa, bi solidoren artean kokatutako malguki baten kasuan, ondorengoa da:

$$\Delta V_e = \frac{1}{2} k (l - l_0)^2 \quad (3.89)$$

Non k malgukiaren konstante elastikoa den eta l_0 malgukiaren luzera askea den. l malgukiaren luzera bektorearen modulua adierazten duen eskalar bat da. Hau eta 3.21 ekuazioa erabiliz:

$$\mathbf{l} = \mathbf{r}_P + \mathbf{R}(\mathbf{q}_P) \bar{\mathbf{r}}_{CP}^L - \mathbf{r}_N + \mathbf{R}(\mathbf{q}_M) \bar{\mathbf{r}}_{CN}^L \quad (3.90)$$

l bektorearen modulua ondorengo formularekin lortzen da:

$$l = \sqrt{\mathbf{l}^T \mathbf{l}} \quad (3.91)$$

Energia potentzial elastiko totala sistemaren malguki guztien energia potentzial elastikoak gehituz lortzen da.

Garatuko den hurrengo kontzeptua energia zinetikoa da, zeinarentzat alde zurretik inertzia indarrak lortu behar diren. Erreferentzia sistema lokalean posizio, abiadura eta azelerazioak ondorengo bektoreekin adierazten dira:

$$\mathbf{x}^L(t) = \begin{bmatrix} r_x^L & r_{yL}^L & r_z^L & \theta_x^L & \theta_y^L & \theta_z^L \end{bmatrix}^T \quad (3.92)$$

$$\dot{\mathbf{x}}^L(t) = \begin{bmatrix} \dot{r}_x^L & \dot{r}_y^L & \dot{r}_z^L & \dot{\theta}_x^L & \dot{\theta}_y^L & \dot{\theta}_z^L \end{bmatrix}^T \quad (3.93)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}^L(t) = \begin{bmatrix} \ddot{r}_x^L & \ddot{r}_y^L & \ddot{r}_z^L & \ddot{\theta}_x^L & \ddot{\theta}_y^L & \ddot{\theta}_z^L \end{bmatrix}^T \quad (3.94)$$

Inertzia indarrak ondorengo ekuazioarekin adierazten dira:

$$\mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} m \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \bar{\mathbf{I}}_g \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{x}}(t) \quad (3.95)$$

Non $\bar{\mathbf{M}}$ erreferentzia sistema lokalarekiko adierazita dagoen masa matrizea den eta $\bar{\mathbf{I}}_g$ inertzia tentsorea den, erreferentzia sistema lokalari lotuta berriz ere. Parametro hauekin, energia zinetikoa higidura infinitesimal bat ezarriz inertzia indarrek egiten duten lana bezala adierazten da:

$$\Delta T = \int \mathbf{f}_i d\bar{\mathbf{x}} = \int \bar{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{x}} d\bar{\mathbf{x}} = \int \bar{\mathbf{M}} \frac{d\dot{\mathbf{x}}}{dt} d\bar{\mathbf{x}} = \int \bar{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{x}} d\dot{\mathbf{x}} \quad (3.96)$$

Ondorioz, matrize forman eta erreferentzia sistema lokala erabiliz:

$$\Delta T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \bar{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{x}} \quad (3.97)$$

Azkeneko ekuazio hau abiadura lineal zein angeluarrekiko funtzio da, denak ere erreferentzia sistema lokalean adierazita. Hura garatuz:

$$\Delta T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^T m \dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\omega}}^T \bar{\mathbf{I}}_G \bar{\boldsymbol{\omega}} \quad (3.98)$$

Non $\dot{\mathbf{r}}$ solidoaren grabitate zentroaren abiadura den erreferentzia sistema lokalean, eta $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ abiadura angeluarren bektorea den erreferentzia sistema lokalean, zeina 3.19 erabiliz lortzen den koordenada lokalak erabiliz. Koordenada globaletan adierazitako energia zinetikoa 3.9-n adierazitako $\mathbf{R}(\mathbf{q})$ matrizearen bidez ezarritako koordenada aldaketa baten bidez lortzen da. Emaitza hurrengoa da:

$$\Delta T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^T m \dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega} \quad (3.99)$$

Non $\dot{\mathbf{r}}$ solidoaren grabitate zentroaren abiadura adierazten duen bektorea den, $\boldsymbol{\omega}$ abiadura angeluarren bektorea den eta \mathbf{I}_G inertzia tentsorea den, denak ere erreferentzia sistema globalarekiko adierazita. Azken Ekuazioaren azken atala ondorengo ekuazioaren bidez lortzen da:

$$\mathbf{I}_G = \mathbf{R}(\mathbf{q}) \bar{\mathbf{I}}_G \mathbf{R}(\mathbf{q})^T \quad (3.100)$$

Aldaketa hauekin, 3.97 ekuazioa matrize forman adieraztea posible da erreferentzia sistema globala erabiliz:

$$\Delta T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \begin{bmatrix} m \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_G \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \quad (3.101)$$

Non $\dot{\mathbf{x}}$:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\dot{r}_x \quad \dot{r}_y \quad \dot{r}_z \quad \dot{\omega}_x \quad \dot{\omega}_y \quad \dot{\omega}_z)^T \quad (3.102)$$

Sistemaren energia zinetiko totala sistemak dituen solido guztien energia zinetikoen gehiketa da. Energia mekanikoa energia zinetiko eta potentzial guztien gehiketa da, zeina indar ez kontserbatiborik egon ezean konstante mantentzen den. Hau da:

$$E_{mec} = T + V \quad (3.103)$$

4 Oreka ekuazioak

Sistemari ezarritako indar eta momentuak eta haien eragiten dituzten higidurak momentu lineal eta angeluarraren bidez daude elkarrekiko lotuta:

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{f}_j = m \frac{d^2 \mathbf{x}(t)}{dt^2} \quad (4.1)$$

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{t}_j = \frac{d\mathbf{h}(t)}{dt} \quad (4.2)$$

Lehenengo ekuazioa Newton-en ekuazioari dagokio, eta indar eta higidura linealak lotzen ditu. Bigarrena Euler-en ekuazioari dagokio eta biraketa eta momentuak lotzen ditu.

Newton-Euler-en ekuazioak Newton-en eta Euler-en ekuazioak batuz lortzen dira, zeinak matrize forman ondorengo itxura duten:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{t} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} m\mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_g \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{r}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_g \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Ekuazio honek arazo bat dakar: bigarren atalaren bektore biderketa dela eta, abiadura angeluarra ezin da x , y edo z ardatzekiko biratze angeluen deribazio bezala adierazi, eta ondorioz espresio honen integratze zuzena ezinezkoa da, 4.3 ekuazioan frogatu bezala. Hau lortzeko ekuazioa linealizatu beharra dago.

4.3 ekuazioan adierazten diren ekuazioetatik, Newton-i dagozkionak linealak dira dagoeneko eta ez dira kuaternioiak edo biratze koordenadak erabiltzeko eraldatu behar, ez bait dituzte erabiltzen. Hala ere, Euler-en ekuazioek prozesatze gehiago behar dute.

Euler-en ekuazioak, kuaternioiak eta koordenada lokalak erabiliz adieraziz gero, ondorengo itxura du:

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \bar{\mathbf{I}}_G \bar{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \bar{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \times \bar{\mathbf{I}}_G \bar{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (4.4)$$

Zeina, koordenada globalak erabiltzeko eraldatzean, ondorengora aldatzen den:

$$\mathbf{R}(\mathbf{o}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{R}(\mathbf{o})^T \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\omega}}}{\partial \ddot{\mathbf{o}}} \ddot{\mathbf{o}} = \mathbf{R}(\mathbf{o}) \bar{\mathbf{t}}_e - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}(\mathbf{o}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{R}(\mathbf{o})^T \boldsymbol{\omega} \quad (4.5)$$

Edo:

$$\mathbf{R}(\mathbf{o}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{R}(\mathbf{o})^T \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{o}}} \dot{\mathbf{o}} = \mathbf{R}(\mathbf{o}) \bar{\mathbf{t}}_e - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}(\mathbf{o}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{R}(\mathbf{o})^T \boldsymbol{\omega} \quad (4.6)$$

4.1 Dagoeneko eskuragai dauden eraldaketak

4.5 edo 4.6 ekuazioen transformazioak literaturan aurkitu daitezke. Deribazio analitikoak erabiltze aldera, ondorengo ataletan adierazten den metodoarekiko antzerakoena Haug-ek garatutakoa da, zeina hemen azalduko den.

2.15 eta 2.19 ekuazioak erabiliz ekuazio hauek simetrikoak izateko eraldatu daitezke, Haug-ek azaldu bezala [23]. $\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{o}}}$ -ren bidez aurrebiderkatuz:

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{o}}} \right)^T \mathbf{R}(\mathbf{o}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{R}(\mathbf{o})^T \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\omega}}}{\partial \ddot{\mathbf{o}}} \ddot{\mathbf{o}} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{o}}} \right)^T \mathbf{R}(\mathbf{o}) \bar{\mathbf{t}}_e - \left(\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{o}}} \right)^T (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}(\mathbf{o}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{R}(\mathbf{o})^T \boldsymbol{\omega}) \quad (4.7)$$

Aipatutako azken matrizearen heina beti 3 izanik, azken eragiketa honek beharrezkoak diren eragiketa guztiak mantentzen ditu eta sistema bateragarria da (hasierakoa ere bateragarria baldin bada). Honek masa matrize simetriko bat lortzea ahalbidetzen du. Hala ere, eta orientazio sistema ez erredundanteak erabiliz gero, hala nola kuarternioiak, sistema azpizehaztuta egongo da. Kontuan izan behar da $\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{o}}}$ -ren bidez aurrebiderkatzea dela eta azelerazio angeluarra biderkatzen duen matrizea karratua dela orain.

Haug-ek ondorengo formulazioa darabil biratze matrizea sortzeko:

$$\mathbf{R}(\mathbf{o}) = (\mathbf{o}_0^2 - \mathbf{e}^T \mathbf{e}) \mathbf{I} + 2 \mathbf{e} \mathbf{e}^T + 2 \mathbf{o}_0 \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (4.8)$$

Non:

$$\mathbf{e} = (\mathbf{o}_1 \quad \mathbf{o}_2 \quad \mathbf{o}_3)^T \quad (4.9)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{o}_3 & -\mathbf{o}_2 \\ -\mathbf{o}_1 & 0 & \mathbf{o}_1 \\ \mathbf{o}_2 & -\mathbf{o}_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Eta:

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{o}) = (-\mathbf{e} \quad -(\mathbf{e}x) + \mathbf{o}_0 \mathbf{I}) \quad (4.11)$$

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{o}) = (-\mathbf{e} \quad (\mathbf{e}x) + \mathbf{o}_0 \mathbf{I}) \quad (4.12)$$

Ondorioz, ondorengo adierazpenak betetzen dira:

$$\mathbf{R}(\mathbf{o}) = \mathbf{E}_2(\mathbf{o}) \mathbf{E}_1^T(\mathbf{o}) \quad (4.13)$$

$$2 \mathbf{E}_2(\mathbf{o}) = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{o}}} \quad (4.14)$$

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{o}_1) \mathbf{E}_1^T(\mathbf{o}_2) = \mathbf{E}_2(\mathbf{o}_2) \mathbf{E}_1^T(\mathbf{o}_1) \quad (4.15)$$

Kuaternioiak erabiltzen badira, ondorengo lortzen da:

$$2 \mathbf{E}_2(\mathbf{o})^T \mathbf{E}_2(\mathbf{o}) \mathbf{E}_1^T(\mathbf{o}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{E}_1(\mathbf{o}) \mathbf{E}_2^T(\mathbf{o}) 2 \mathbf{E}_2(\mathbf{o}) \ddot{\mathbf{o}} = 2 \mathbf{E}_2^T(\mathbf{o}) \mathbf{E}_2(\mathbf{o}) \mathbf{E}_1^T(\mathbf{o}) \bar{\mathbf{t}}_e + \quad (4.16)$$

$$- 2 \mathbf{E}_2^T(\mathbf{o}) (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}(\mathbf{o}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{R}^T(\mathbf{o}) \boldsymbol{\omega})$$

Zeinak, azkenean, ondorengora daraman:

$$4 \mathbf{E}_1^T(\mathbf{o}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{E}_1(\mathbf{o}) \ddot{\mathbf{o}} = 2 \mathbf{E}_1^T(\mathbf{o}) \bar{\mathbf{t}}_e - 8 \dot{\mathbf{E}}_1^T(\mathbf{o}, \dot{\mathbf{o}}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{E}_1(\mathbf{o}) \dot{\mathbf{o}} \quad (4.17)$$

Ekuazio hau 4.16 sinplifikatuz lortzen da, 2.17 eta 2.18 erabiliz eta $\dot{\mathbf{E}}_2(\mathbf{o}, \dot{\mathbf{o}}) \mathbf{E}_1(\mathbf{o}) = \mathbf{E}_2(\mathbf{o}) \dot{\mathbf{E}}_1(\mathbf{o}, \dot{\mathbf{o}})$ kontuan hartuz.

Hala ere 4.17 ekuazioa ez da lineala, eta ondorioz Taylor-en serieak erabiliz linealizatu beharra dago. Inertzia tentsorea biderkatzen dituzten matrizeak hala ere linealak dira, eta ondorioz linealizatzeko prozesua jarraitzeko ez dago hauek aldeztirik linealizatu beharrik.

4.2 Solido bakar baten oreka ekuazioa

Euler-en ekuazioa, kuaternioiak erabiliz eta $\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q}$ jakinez, ondorengo ekuazioarekin adierazten da:

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \bar{\mathbf{I}}_G \bar{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \bar{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \times \bar{\mathbf{I}}_G \bar{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (4.18)$$

Non abiadura eta azelerazio angeluarrak eta lortzen den indar momentua erreferentzia sistema lokalarekiko adierazita dauden. Hau garrantzizkoa eta onuratsua da, inertzia tentsorea ez baita aldatzen eta ondorioz metodo sinplifikatzen bait da, baina sistemaren ekuazioak erreferentzia sistema globalarekiko adierazita daudenez hauek erreferentzia sistema batetik bestera

eraldatzearen beharra sortzen du. Ekuazioak erreferentzia sistema globalarekiko adieraztearren, biratze matrizearen bidez biderkatuz:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{R}(\mathbf{q}) \bar{\mathbf{I}}_G \bar{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{R}(\mathbf{q}) \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{I}}_G \bar{\boldsymbol{\omega}} \quad (4.19)$$

Haug-en koordenada globaletarako transformazioarekin konparatuz, tesi honetan azaltzen den ekarpenak ez du hura ekuazio sistema simetriko batean bihurtzen. Ondorioz, massa, zurruntasun eta moteltze matrizeak ez dira simetrikoak, eta propietate ezberdinak dituzte.

Ekuazioa modu ulergarrian adierazi asmoz, gehiketaren atal bakoitza banaka garatuko da. Bi atal hauek $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_\alpha + \boldsymbol{\tau}_{\omega}$ bezala adierazi daitezke. $\boldsymbol{\tau}_\alpha$ lehen atala, 3.20 erabiliz, ondoren bezala adierazi daiteke:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_\alpha &= \mathbf{R}(\mathbf{q}) \bar{\mathbf{I}}_G \bar{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{q}, \ddot{\mathbf{q}}) = 2 \mathbf{R}(\mathbf{q}) \bar{\mathbf{I}}_G \begin{pmatrix} -q_3 \ddot{q}_2 + q_2 \ddot{q}_3 + q_0 \ddot{q}_1 - q_1 \ddot{q}_0 \\ -q_1 \ddot{q}_3 + q_3 \ddot{q}_1 + q_0 \ddot{q}_2 - q_2 \ddot{q}_0 \\ -q_2 \ddot{q}_1 + q_1 \ddot{q}_2 + q_0 \ddot{q}_3 - q_3 \ddot{q}_0 \end{pmatrix} = \\ &= 2 \mathbf{R}(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_0 \\ \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{pmatrix} = \mathbf{R}(\mathbf{q}) \mathbf{J}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} = \\ &= 2 \mathbf{R}(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} I_x \ddot{q}_1 & -I_x \ddot{q}_0 & I_x \ddot{q}_3 & -I_x \ddot{q}_2 \\ I_y \ddot{q}_2 & -I_y \ddot{q}_3 & -I_y \ddot{q}_0 & I_y \ddot{q}_1 \\ I_z \ddot{q}_3 & I_z \ddot{q}_2 & -I_z \ddot{q}_1 & -I_z \ddot{q}_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \mathbf{R}(\mathbf{q}) \mathbf{J}'(\ddot{\mathbf{q}}) \mathbf{q} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Bigarren atala, $\boldsymbol{\tau}_\omega$, ondorengo ekuazioaren arabera adierazi daiteke bektore biderketa garatuz eta koordenada lokalak erabiliz:

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_\omega = \bar{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \times \bar{\mathbf{I}}_G \bar{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{pmatrix} \bar{\omega}_y \bar{\omega}_z (\bar{I}_z - \bar{I}_y) \\ \bar{\omega}_z \bar{\omega}_x (\bar{I}_x - \bar{I}_z) \\ \bar{\omega}_x \bar{\omega}_y (\bar{I}_y - \bar{I}_x) \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

3.19 erabiliz abiadura angeluarraren bektorea ondorengo formularekin adierazi daiteke:

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\omega}} &= 2 \begin{bmatrix} -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{B}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_x(\mathbf{q}) \\ \mathbf{B}_y(\mathbf{q}) \\ \mathbf{B}_z(\mathbf{q}) \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \\ &= 2 \begin{bmatrix} \dot{q}_1 & -\dot{q}_0 & \dot{q}_3 & -\dot{q}_2 \\ \dot{q}_2 & -\dot{q}_3 & -\dot{q}_0 & \dot{q}_1 \\ \dot{q}_3 & \dot{q}_2 & -\dot{q}_1 & -\dot{q}_0 \end{bmatrix} \mathbf{q} = d\mathbf{B}(\dot{\mathbf{q}}) \mathbf{q} = \begin{pmatrix} d\mathbf{B}_x(\dot{\mathbf{q}}) \\ d\mathbf{B}_y(\dot{\mathbf{q}}) \\ d\mathbf{B}_z(\dot{\mathbf{q}}) \end{pmatrix} \mathbf{q} \end{aligned} \quad (4.22)$$

$\bar{\boldsymbol{\tau}}_\omega$ horrela adierazi daiteke:

$$\begin{aligned}
 \bar{\boldsymbol{\tau}}_\omega &= \bar{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \times \bar{\mathbf{I}}_G \bar{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{pmatrix} \bar{\omega}_y \bar{\omega}_z (\bar{I}_z - \bar{I}_y) \\ \bar{\omega}_z \bar{\omega}_x (\bar{I}_x - \bar{I}_z) \\ \bar{\omega}_x \bar{\omega}_y (\bar{I}_y - \bar{I}_x) \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \mathbf{B}_y(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \mathbf{B}_z(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} (\bar{I}_z - \bar{I}_y) \\ \mathbf{B}_z(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \mathbf{B}_x(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} (\bar{I}_x - \bar{I}_z) \\ \mathbf{B}_x(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \mathbf{B}_y(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} (\bar{I}_y - \bar{I}_x) \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \bar{I}_z - \bar{I}_y & 0 & 0 \\ 0 & \bar{I}_x - \bar{I}_z & 0 \\ 0 & 0 & \bar{I}_y - \bar{I}_x \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_y(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \mathbf{B}_z(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{B}_z(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \mathbf{B}_x(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{B}_x(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \mathbf{B}_y(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \\
 &= \bar{\mathbf{I}}_g \begin{pmatrix} \mathbf{B}_y(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \mathbf{B}_z(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{B}_z(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \mathbf{B}_x(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{B}_x(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \mathbf{B}_y(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Ondorioz, kuaternioiak eta 4.20 eta 4.23 erabilia, Euler-en ekuazioak ondorengo itxura du:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_\alpha + \boldsymbol{\tau}_\omega = \mathbf{R}(\mathbf{q}) \mathbf{J}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{R}(\mathbf{q}) \bar{\mathbf{I}}_g \begin{pmatrix} \mathbf{B}_y(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \mathbf{B}_z(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{B}_z(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \mathbf{B}_x(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{B}_x(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \mathbf{B}_y(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} \tag{4.24}$$

Non:

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

4.3 oreka ekuazioak Newmark erabiliz zuzenean integratuko dira, horretarako oreka $t + \Delta t$ unean ezarriz. Honen arabera denbora-une horretan erabiliko den aldagai oro ezezaguna da; ondorioz, aldagai bat baino gehiagoren arteko biderketa bat egotekotan, hura linealizatzea derrigorrezkoa da geroago erabili ahal izateko. Honen arabera, 4.24 osorik linealizatzea beharrezkoa da.

Aipatutako ekuazioak darabiltzan aldagaiak erreferentzia sistema lokalarekiko adierazita daude, eta hori dela eta haiek erreferentzia sistema globalarekiko adierazi beharra dago, horretarako 3.25 biratze matrizeak erabiliz. Are gehiago, sistemaren koordenadak erreferentzia sistema globalarekiko daude adierazita, eta horregatik koordenada hauek erreferentzia sistema lokalarekiko adierazi beharra dago 3.35 ekuazioak erabiliz, hala izanda 4.18 zuzenak izan daitezten eta haiek erabiltzea posible izan dadin. Horrela, sistemaren sarrera zein irteera aldagaiak erreferentzia sistema globalarekiko

adierazita daude baina ekuazioen baitan solido bakoitzaren erreferentzia sistema lokala erabiltzen da, modu horretan inertzia tentsorea konstante mantenduz.

4.24 ekuazioaren lehen atala erreferentzia sistema globalarekiko dago adierazita maina sistemaren aldagaiak erreferentzia sistema lokalarekiko daude adierazita. Haiek erreferentzia sistema globalarekiko adierazteko R_4^T beharrezkoa da:

$$\tau_\alpha = \mathbf{R}(\mathbf{q}) \mathbf{J}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{R}(\mathbf{q}) \mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{R}_4^T(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} \quad (4.26)$$

Matrize biderkatze hau $t+\Delta t$ -n adierazita dagoenez, osorik linealizatu beharra dago:

$$\begin{aligned} \tau_\alpha = & \mathbf{R}(\mathbf{q}) \mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{R}_4^T(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} \simeq \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)}) \mathbf{J}(\mathbf{q}^{(0)}) \mathbf{R}_4^T(\mathbf{q}^{(0)}) \ddot{\mathbf{q}}^{(0)} + \\ & + (\mathbf{R}(\mathbf{q}) - \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)})) \mathbf{J}(\mathbf{q}^{(0)}) \mathbf{R}_4^T(\mathbf{q}^{(0)}) \ddot{\mathbf{q}}^{(0)} + \\ & + \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)}) (\mathbf{J}(\mathbf{q}) - \mathbf{J}(\mathbf{q}^{(0)})) \mathbf{R}_4^T(\mathbf{q}^{(0)}) \ddot{\mathbf{q}}^{(0)} + \\ & + \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)}) \mathbf{J}(\mathbf{q}^{(0)}) (\mathbf{R}_4^T(\mathbf{q}) - \mathbf{R}_4^T(\mathbf{q}^{(0)})) \ddot{\mathbf{q}}^{(0)} + \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)}) \mathbf{J}(\mathbf{q}^{(0)}) \mathbf{R}_4^T(\mathbf{q}^{(0)}) (\ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}^{(0)}) \end{aligned} \quad (4.27)$$

3.25 eta 3.35 ekuazioen ordena aldatuz:

$$(\mathbf{R}(\mathbf{q}) - \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)})) \mathbf{v}^L = \mathbf{S}(\mathbf{q}^{(0)}, \mathbf{v}^L) \mathbf{q} - 2 \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)}) \mathbf{v}^L \quad (4.28)$$

$$(\mathbf{R}_4^T(\mathbf{q}) - \mathbf{R}_4^T(\mathbf{q}^{(0)})) \mathbf{v} = \mathbf{S}_4^T(\mathbf{q}^{(0)}, \mathbf{v}) (\mathbf{q} - \mathbf{q}^{(0)}) \quad (4.29)$$

4.27- ordezkatur, hurrengo ekuazioa lortzen da:

$$\begin{aligned} \tau_\alpha = & \mathbf{R}(\mathbf{q}) \mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{R}_4^T(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} \simeq -3 \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)}) \mathbf{J}(\mathbf{q}^{(0)}) \mathbf{R}_4^T(\mathbf{q}^{(0)}) \ddot{\mathbf{q}}^{(0)} + \\ & - \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)}) \mathbf{J}(\mathbf{q}^{(0)}) \mathbf{S}_4^T(\mathbf{q}^{(0)}, \ddot{\mathbf{q}}^{(0)}) \mathbf{q}^{(0)} + \mathbf{S}(\mathbf{q}^{(0)}, \mathbf{a}) \mathbf{q} + \\ & + \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)}) \mathbf{J}'(\ddot{\mathbf{q}}^{(0)}) \mathbf{q} + \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)}) \mathbf{J}(\mathbf{q}^{(0)}) \mathbf{S}_4^T(\mathbf{q}^{(0)}, \ddot{\mathbf{q}}^{(0)}) \mathbf{q} + \\ & + \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)}) \mathbf{J}(\mathbf{q}^{(0)}) \mathbf{R}_4^T(\mathbf{q}^{(0)}) \ddot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Non:

$$\mathbf{a}(\mathbf{q}^{(0)}, \ddot{\mathbf{q}}^{(0)}) = \mathbf{J}(\mathbf{q}^{(0)}) \mathbf{R}_4^T(\mathbf{q}^{(0)}) \ddot{\mathbf{q}}^{(0)} \quad (4.31)$$

4.24 ekuazioaren bigarren atalaren kasuan prozesua ezberdina da. Lehenengo atalaren kasuan lehen pausoa koordinadak globaletara aldatzea bazen gero linealizatzeko, orain pausoak nahasiagoak dira bektore biderketaren baitan biratze matrizeak erabiltzea posible ez delako. Lehenengo linealizatu beharra dago, gero koordinada aldaketa ezarri eta gero beste linealizazio bat egitea beharrezkoa da. Lehenengoz 4.23 ekuazioa linealizatuz:

$$\bar{\tau}_\omega = \bar{\omega}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \times \bar{\mathbf{I}}_G \bar{\omega}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \bar{\mathbf{I}}_g \begin{pmatrix} \mathbf{B}_y(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \mathbf{B}_z(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{B}_z(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \mathbf{B}_x(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{B}_x(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \mathbf{B}_y(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} \simeq$$

$$\bar{\mathbf{I}}_g \begin{pmatrix} \mathbf{B}_y(\mathbf{q}^{(0)}) \dot{\mathbf{q}}^{(0)} \mathbf{B}_z(\mathbf{q}^{(0)}) \dot{\mathbf{q}}^{(0)} + (\mathbf{B}_y(\mathbf{q}) - \mathbf{B}_y(\mathbf{q}^{(0)})) \dot{\mathbf{q}}^{(0)} \mathbf{B}_z(\mathbf{q}^{(0)}) \dot{\mathbf{q}}^{(0)} \\ \mathbf{B}_z(\mathbf{q}^{(0)}) \dot{\mathbf{q}}^{(0)} \mathbf{B}_x(\mathbf{q}^{(0)}) \dot{\mathbf{q}}^{(0)} + (\mathbf{B}_z(\mathbf{q}) - \mathbf{B}_z(\mathbf{q}^{(0)})) \dot{\mathbf{q}}^{(0)} \mathbf{B}_x(\mathbf{q}^{(0)}) \dot{\mathbf{q}}^{(0)} \\ \mathbf{B}_x(\mathbf{q}^{(0)}) \dot{\mathbf{q}}^{(0)} \mathbf{B}_y(\mathbf{q}^{(0)}) \dot{\mathbf{q}}^{(0)} + (\mathbf{B}_x(\mathbf{q}) - \mathbf{B}_x(\mathbf{q}^{(0)})) \dot{\mathbf{q}}^{(0)} \mathbf{B}_y(\mathbf{q}^{(0)}) \dot{\mathbf{q}}^{(0)} \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} & + \mathbf{B}_y(\mathbf{q}^{(0)}) (\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^{(0)}) \mathbf{B}_z(\mathbf{q}^{(0)}) \dot{\mathbf{q}}^{(0)} + \mathbf{B}_y(\mathbf{q}^{(0)}) \dot{\mathbf{q}}^{(0)} (\mathbf{B}_z(\mathbf{q}) - \mathbf{B}_z(\mathbf{q}^{(0)})) \dot{\mathbf{q}}^{(0)} \\ & + \mathbf{B}_z(\mathbf{q}^{(0)}) (\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^{(0)}) \mathbf{B}_x(\mathbf{q}^{(0)}) \dot{\mathbf{q}}^{(0)} + \mathbf{B}_z(\mathbf{q}^{(0)}) \dot{\mathbf{q}}^{(0)} (\mathbf{B}_x(\mathbf{q}) - \mathbf{B}_x(\mathbf{q}^{(0)})) \dot{\mathbf{q}}^{(0)} \\ & + \mathbf{B}_x(\mathbf{q}^{(0)}) (\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^{(0)}) \mathbf{B}_y(\mathbf{q}^{(0)}) \dot{\mathbf{q}}^{(0)} + \mathbf{B}_x(\mathbf{q}^{(0)}) \dot{\mathbf{q}}^{(0)} (\mathbf{B}_y(\mathbf{q}) - \mathbf{B}_y(\mathbf{q}^{(0)})) \dot{\mathbf{q}}^{(0)} \\ & \left. \begin{aligned} & + \mathbf{B}_y(\mathbf{q}^{(0)}) \dot{\mathbf{q}}^{(0)} \mathbf{B}_z(\mathbf{q}^{(0)}) (\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^{(0)}) \\ & + \mathbf{B}_z(\mathbf{q}^{(0)}) \dot{\mathbf{q}}^{(0)} \mathbf{B}_x(\mathbf{q}^{(0)}) (\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^{(0)}) \\ & + \mathbf{B}_x(\mathbf{q}^{(0)}) \dot{\mathbf{q}}^{(0)} \mathbf{B}_y(\mathbf{q}^{(0)}) (\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^{(0)}) \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Non:

$$\bar{\mathbf{I}}_g = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{I}}_z - \bar{\mathbf{I}}_y & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{I}}_x - \bar{\mathbf{I}}_z & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{I}}_y - \bar{\mathbf{I}}_x \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Multzokatuz eta berriidatziz:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_\omega & = \bar{\omega}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \times \bar{\mathbf{I}}_G \bar{\omega}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \bar{\mathbf{I}}_g \begin{pmatrix} \mathbf{B}_y(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \mathbf{B}_z(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{B}_z(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \mathbf{B}_x(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{B}_x(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \mathbf{B}_y(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} \simeq \\ & \simeq \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{v}_3(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)}) + \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{A}_1(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)}) \mathbf{q} + \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{A}_2(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)}) \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Non:

$$\mathbf{v}_3(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)}) = -3 \begin{pmatrix} \mathbf{B}_y(\mathbf{q}^{(0)}) \dot{\mathbf{q}}^{(0)} \mathbf{B}_z(\mathbf{q}^{(0)}) \dot{\mathbf{q}}^{(0)} \\ \mathbf{B}_z(\mathbf{q}^{(0)}) \dot{\mathbf{q}}^{(0)} \mathbf{B}_x(\mathbf{q}^{(0)}) \dot{\mathbf{q}}^{(0)} \\ \mathbf{B}_x(\mathbf{q}^{(0)}) \dot{\mathbf{q}}^{(0)} \mathbf{B}_y(\mathbf{q}^{(0)}) \dot{\mathbf{q}}^{(0)} \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)}) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_y(\mathbf{q}^{(0)}) \dot{\mathbf{q}}^{(0)} d\mathbf{B}_z(\dot{\mathbf{q}}^{(0)}) + \mathbf{B}_z(\mathbf{q}^{(0)}) \dot{\mathbf{q}}^{(0)} d\mathbf{B}_y(\dot{\mathbf{q}}^{(0)}) \\ \mathbf{B}_z(\mathbf{q}^{(0)}) \dot{\mathbf{q}}^{(0)} d\mathbf{B}_x(\dot{\mathbf{q}}^{(0)}) + \mathbf{B}_x(\mathbf{q}^{(0)}) \dot{\mathbf{q}}^{(0)} d\mathbf{B}_z(\dot{\mathbf{q}}^{(0)}) \\ \mathbf{B}_x(\mathbf{q}^{(0)}) \dot{\mathbf{q}}^{(0)} d\mathbf{B}_y(\dot{\mathbf{q}}^{(0)}) + \mathbf{B}_y(\mathbf{q}^{(0)}) \dot{\mathbf{q}}^{(0)} d\mathbf{B}_x(\dot{\mathbf{q}}^{(0)}) \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

$$\mathbf{B}_y(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = d\mathbf{B}_y(\dot{\mathbf{q}}) \mathbf{q} \quad (4.37)$$

$$\mathbf{A}_2(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)}) = \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_y(\mathbf{q}^{(0)})\dot{\mathbf{q}}^{(0)}\mathbf{B}_z(\mathbf{q}^{(0)}) + \mathbf{B}_z(\mathbf{q}^{(0)})\dot{\mathbf{q}}^{(0)}\mathbf{B}_y(\mathbf{q}^{(0)}) \\ \mathbf{B}_z(\mathbf{q}^{(0)})\dot{\mathbf{q}}^{(0)}\mathbf{B}_x(\mathbf{q}^{(0)}) + \mathbf{B}_x(\mathbf{q}^{(0)})\dot{\mathbf{q}}^{(0)}\mathbf{B}_z(\mathbf{q}^{(0)}) \\ \mathbf{B}_x(\mathbf{q}^{(0)})\dot{\mathbf{q}}^{(0)}\mathbf{B}_y(\mathbf{q}^{(0)}) + \mathbf{B}_y(\mathbf{q}^{(0)})\dot{\mathbf{q}}^{(0)}\mathbf{B}_x(\mathbf{q}^{(0)}) \end{Bmatrix} \quad (4.38)$$

Une honetan 4.34 ekuazioa erreferentzia sistema globalarekiko adierazi beharra dago $\mathbf{R}(\mathbf{q})$ eta $\mathbf{R}_4^T(\mathbf{q})$ biratze matrizeak erabiliz:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_\omega = & \mathbf{R}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{I}}_g\mathbf{v}_3(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)}) + \mathbf{R}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{I}}_g\mathbf{A}_1(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)})\mathbf{q} + \\ & + \mathbf{R}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{I}}_g\mathbf{A}_2(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)})\mathbf{R}_4^T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Nahiz eta 4.34 guztiz lineala den, 4.39 lortzeko biratze matrizeak erabili beharra dagoenez matrizeen arteko biderketa ez linealak berriz agertzen dira. Ondorioz, beste linealizazio bat beharrezkoa da:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_\omega = & \mathbf{R}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{I}}_g\mathbf{v}_3(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)}) + \mathbf{R}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{I}}_g\mathbf{A}_1(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)})\mathbf{q} + \\ & + \mathbf{R}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{I}}_g\mathbf{A}_2(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)})\mathbf{R}_4^T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \simeq \\ & \simeq (\mathbf{R}(\mathbf{q}) - \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)}))\bar{\mathbf{I}}_g\mathbf{v}_3(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)}) + \\ & + (\mathbf{R}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)}))\bar{\mathbf{I}}_g\mathbf{A}_1(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)})\mathbf{q}^{(0)} + \\ + \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)})\bar{\mathbf{I}}_g\mathbf{A}_1(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)})(\mathbf{q} - \mathbf{q}^{(0)}) & + \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)})\bar{\mathbf{I}}_g\mathbf{A}_1(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)})\mathbf{q}^{(0)} + \\ & + (\mathbf{R}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)}))\bar{\mathbf{I}}_g\mathbf{A}_2(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)})\mathbf{R}_4^T(\mathbf{q}^{(0)})\dot{\mathbf{q}}^{(0)} + \\ & + \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)})\bar{\mathbf{I}}_g\mathbf{A}_2(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)})(\mathbf{R}_4^T(\mathbf{q}) - \mathbf{R}_4^T(\mathbf{q}^{(0)}))\dot{\mathbf{q}}^{(0)} + \\ & + \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)})\bar{\mathbf{I}}_g\mathbf{A}_2(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)})\mathbf{R}_4^T(\mathbf{q}^{(0)})(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^{(0)}) + \\ & + \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)})\bar{\mathbf{I}}_g\mathbf{A}_2(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)})\mathbf{R}_4^T(\mathbf{q}^{(0)})\dot{\mathbf{q}}^{(0)} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Berridatziz eta 4.28 eta 4.29 ekuazioak erabiliz:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_\omega = & \mathbf{R}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{I}}_g\mathbf{v}_3(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)}) + \mathbf{R}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{I}}_g\mathbf{A}_1(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)})\mathbf{q} + \\ & + \mathbf{R}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{I}}_g\mathbf{A}_2(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)})\mathbf{R}_4^T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \simeq \\ \simeq -\mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)})\bar{\mathbf{I}}_g\mathbf{v}_3(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)}) - 2\mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)})\bar{\mathbf{I}}_g\mathbf{A}_1(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)})\mathbf{q}^{(0)} & + \\ & - 2\mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)})\bar{\mathbf{I}}_g\mathbf{A}_2(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)})\mathbf{R}_4^T(\mathbf{q}^{(0)})\dot{\mathbf{q}}^{(0)} + \\ & - \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)})\bar{\mathbf{I}}_g\mathbf{A}_2(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)})\mathbf{S}_4^T(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)})\mathbf{q}^{(0)} + \\ & + \mathbf{S}(\mathbf{q}^{(0)}, \mathbf{v}_3(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)}))\mathbf{q} + \mathbf{S}(\mathbf{q}^{(0)}, \mathbf{a}_1)\mathbf{q} + \\ & + \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)})\bar{\mathbf{I}}_g\mathbf{A}_1(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)})\mathbf{q} + \mathbf{S}(\mathbf{q}^{(0)}, \mathbf{a}_2)\mathbf{q} + \\ & + \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)})\bar{\mathbf{I}}_g\mathbf{A}_2(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)})\mathbf{S}_4^T(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)})\mathbf{q} + \\ & + \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)})\bar{\mathbf{I}}_g\mathbf{A}_2(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)})\mathbf{R}_4^T(\mathbf{q}^{(0)})\dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Non:

$$\mathbf{a}_1 = \bar{\mathbf{I}}_g\mathbf{A}_1(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)})\mathbf{q}^{(0)} \quad (4.42)$$

$$\mathbf{a}_2 = \bar{\mathbf{I}}_g\mathbf{A}_2(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)})\mathbf{R}_4^T(\mathbf{q}^{(0)})\dot{\mathbf{q}}^{(0)} \quad (4.43)$$

Garapen hauek guztiak erabiliz, Euler-en linealizatutako ekuazioa lortzen da:

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{q}^{(0)}) \ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)}) \dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)}, \ddot{\mathbf{q}}^{(0)}) \mathbf{q} + \boldsymbol{\tau}^{(0)} \quad (4.44)$$

Non:

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{q}^{(0)}) = \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)}) \mathbf{J}(\mathbf{q}^{(0)}) \mathbf{R}_4^T(\mathbf{q}^{(0)}) \quad (4.45)$$

$$\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)}) = \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{A}_2(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)}) \mathbf{R}_4^T(\mathbf{q}^{(0)}) \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)}, \ddot{\mathbf{q}}^{(0)}) = & \mathbf{S}(\mathbf{q}^{(0)}, \mathbf{a}) + \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)}) \mathbf{J}'(\ddot{\mathbf{q}}^{(0)}) + \\ & + \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)}) \mathbf{J}(\mathbf{q}^{(0)}) \mathbf{S}_4^T(\mathbf{q}^{(0)}, \ddot{\mathbf{q}}^{(0)}) + \\ & + \mathbf{S}(\mathbf{q}^{(0)}, \mathbf{v}_3(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)})) + \mathbf{S}(\mathbf{q}^{(0)}, \mathbf{a}_1) + \\ & + \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{A}_1(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)}) + \mathbf{S}(\mathbf{q}^{(0)}, \mathbf{a}_2) + \\ & + \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{A}_2(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)}) \mathbf{S}_4^T(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)}) \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}^{(0)} = & 3 \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)}) \mathbf{J}(\mathbf{q}^{(0)}) \mathbf{R}_4^T(\mathbf{q}^{(0)}) \ddot{\mathbf{q}}^{(0)} + \\ & + \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)}) \mathbf{J}(\mathbf{q}^{(0)}) \mathbf{S}_4^T(\mathbf{q}^{(0)}, \ddot{\mathbf{q}}^{(0)}) \mathbf{q}^{(0)} + \\ & + \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{v}_3(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)}) + 2 \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{A}_1(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)}) \mathbf{q}^{(0)} + \\ & + 2 \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{A}_2(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)}) \mathbf{R}_4^T(\mathbf{q}^{(0)}) \dot{\mathbf{q}}^{(0)} + \\ & + \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{A}_2(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)}) \mathbf{S}_4^T(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)}) \mathbf{q}^{(0)} \end{aligned} \quad (4.48)$$

Orain arte erabilitako ekuazioek ez dituzte higidura eta indar linealak erabiltzen. Horretarako Newton-en ekuazioak erabili behar dira:

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}}_G \quad (4.49)$$

Ekuazio hauek dagoeneko linealak dira, eta ondorioz ez dute linealizatorik behar. Euler-en ekuazioekin batera erabili daitezke, eta hala izanda sortzen duten sistemak solido baten portaera espazioan erabat adierazten du.

Biak batuz eta indar linealek atala indar elastiko, moteltzaile eta restrizkio indarrak lortzeko garatuz, elementu diskreturik eduki ezean oreka ekuazioak ondorengo itxura du:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}(t+\Delta t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}}(t+\Delta t) + \mathbf{K} \mathbf{x}(t+\Delta t) = \mathbf{f}(t+\Delta t) \quad (4.50)$$

Non:

$$\mathbf{M}(\bar{\mathbf{x}}^{(0)}) = \begin{bmatrix} m \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 4} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \boldsymbol{\mu}(\mathbf{q}^{(0)}) \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

$$\mathbf{C}(\bar{\mathbf{x}}^{(0)}, \dot{\bar{\mathbf{x}}}^{(0)}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 4} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}^{(0)}) \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

$$\mathbf{K}(\bar{\mathbf{x}}^{(0)}, \dot{\bar{\mathbf{x}}}^{(0)}, \ddot{\bar{\mathbf{x}}}^{(0)}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 4} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}^{(0)}, \ddot{\bar{\mathbf{q}}}^{(0)}) \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

$$\mathbf{f}(t + \Delta t) = \mathbf{f}_e(t + \Delta t) + \mathbf{f}_R(t + \Delta t) + \mathbf{f}^{(0)} \quad (4.54)$$

$$\mathbf{f}^{(0)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \boldsymbol{\tau}(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}^{(0)}, \ddot{\bar{\mathbf{q}}}^{(0)}) \end{Bmatrix} \quad (4.55)$$

Haug-ek garatutako metodoarekiko antzekotasunak aurkitu daitezke, bi metodoek Taylor-en serieak erabiltzen bait dituzte oreka ekuazioak linealizatu ahal izateko. Hala ere, ezberdintasun nagusia linealizatzeko erabili den ekuazioa da; Haug-ek beranduago linealizatuko den ekuazio simetriko bat darabil, hemen azaldutako metodoan hau betetzen ez den bitartean. Hori dela eta hainbat ezberdintasun agertzen dira. Hasteko, formulazio simetrikoak solido bakoitzeko ekuazio bat gehiago behar du, zeina ekuazio simetriko hau lortzeko beharrezko den propietateari lotuta dagoen. Bigarrenez, ezin da edozein biratze parametrotarako orokortu; hau hemen azaldutako metodoarekin lortu daiteke. Hala ere, Haug-en metodoa baino konplexuagoa da, atal gehiago linealizatu beharra bait dago. Kontuan hartu beharra dago Haug-en metodoa erabiltzean inertzia tentsorea aurretik eta atzetik biderkatzen duten matrizeak dagoeneko linealak direla, 4.1 atalean adierazi bezala. Honek matrize hauen alde aurreko linealizazioen beharra ezeztatzen du, atal honetan adierazitakoekin ez bezala. Honek gainerako linealizazio prozesu bat ezeztatzen du.

4.3 Solido bakar baten ekuazioen linealizatzea koordenada orokorrak erabiliz

Aurreko atalean orientazio parametroak kuarternioiak izan dira. Hala ere metodo are orokortuago bat erabiltzea posible da, zeinarekin \mathbf{o} -ren bidez adierazten den edozein parametro angeluar erabili daitekeen. Horretarako, prozedura 4.19 ekuazioarekin hasten da berriz ere. Ondoren, sistemaren parametroak biratze matrizearen irauliaren bidez eraldatzen dira:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{R}(\mathbf{o}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{R}^T(\mathbf{o}) \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}(\mathbf{o}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{R}^T(\mathbf{o}) \boldsymbol{\omega} \quad (4.56)$$

Ekuazio hau, linealizatu ondoren, ondorengoa da:

4.3 Solido bakar baten ekuazioen linealizatzea koordenada orokorrak erabiliz

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\tau} \simeq & \mathbf{R}(\mathbf{o}^{(0)}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{R}^T(\mathbf{o}^{(0)}) \dot{\boldsymbol{\omega}}^{(0)} + \mathbf{R}(\mathbf{o}^{(0)}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{R}^T(\mathbf{o}^{(0)}) \left| \frac{d\dot{\boldsymbol{\omega}}}{d\mathbf{o}} \right|_{\mathbf{o}^{(0)}, \dot{\mathbf{o}}^{(0)}, \ddot{\mathbf{o}}^{(0)}} (\mathbf{o} - \mathbf{o}^{(0)}) + \\
 & + \mathbf{R}(\mathbf{o}^{(0)}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{T}(\mathbf{o}^{(0)}, \dot{\boldsymbol{\omega}}^{(0)}) (\mathbf{o} - \mathbf{o}^{(0)}) + \mathbf{S}(\mathbf{o}^{(0)}, \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{R}^T(\mathbf{o}^{(0)}) \dot{\boldsymbol{\omega}}^{(0)}) (\mathbf{o} - \mathbf{o}^{(0)}) + \\
 + & \mathbf{R}(\mathbf{o}^{(0)}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{R}^T(\mathbf{o}^{(0)}) \left| \frac{d\dot{\boldsymbol{\omega}}}{d\dot{\mathbf{o}}} \right|_{\mathbf{o}^{(0)}, \dot{\mathbf{o}}^{(0)}, \ddot{\mathbf{o}}^{(0)}} (\dot{\mathbf{o}} - \dot{\mathbf{o}}^{(0)}) + \mathbf{R}(\mathbf{o}^{(0)}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{R}^T(\mathbf{o}^{(0)}) \left| \frac{d\dot{\boldsymbol{\omega}}}{d\ddot{\mathbf{o}}} \right|_{\mathbf{o}^{(0)}, \dot{\mathbf{o}}^{(0)}, \ddot{\mathbf{o}}^{(0)}} (\ddot{\mathbf{o}} - \ddot{\mathbf{o}}^{(0)}) + \\
 + & \boldsymbol{\omega}^{(0)} \times \mathbf{R}(\mathbf{o}^{(0)}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{R}^T(\mathbf{o}^{(0)}) \boldsymbol{\omega}^{(0)} + \boldsymbol{\omega}^{(0)} \times \mathbf{R}(\mathbf{o}^{(0)}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{R}^T(\mathbf{o}^{(0)}) \left| \frac{d\boldsymbol{\omega}}{d\mathbf{o}} \right|_{\mathbf{o}^{(0)}, \dot{\mathbf{o}}^{(0)}, \ddot{\mathbf{o}}^{(0)}} (\mathbf{o} - \mathbf{o}^{(0)}) + \\
 + & \boldsymbol{\omega}^{(0)} \times \mathbf{R}(\mathbf{o}^{(0)}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{T}(\mathbf{o}^{(0)}, \boldsymbol{\omega}^{(0)}) (\mathbf{o} - \mathbf{o}^{(0)}) + \boldsymbol{\omega}^{(0)} \times \mathbf{S}(\mathbf{o}^{(0)}, \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{R}^T(\mathbf{o}^{(0)}) \boldsymbol{\omega}^{(0)}) (\mathbf{o} - \mathbf{o}^{(0)}) + \\
 & + \left| \frac{d(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}(\mathbf{o}^{(0)}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{R}^T(\mathbf{o}^{(0)}) \boldsymbol{\omega}^{(0)})}{d\boldsymbol{\omega}} \right| \left| \frac{d\boldsymbol{\omega}}{d\mathbf{o}} \right|_{\mathbf{o}^{(0)}, \dot{\mathbf{o}}^{(0)}, \ddot{\mathbf{o}}^{(0)}} (\mathbf{o} - \mathbf{o}^{(0)}) + \\
 & + \boldsymbol{\omega}^{(0)} \times \mathbf{R}(\mathbf{o}^{(0)}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{R}^T(\mathbf{o}^{(0)}) \left| \frac{d\boldsymbol{\omega}}{d\dot{\mathbf{o}}} \right|_{\mathbf{o}^{(0)}, \dot{\mathbf{o}}^{(0)}, \ddot{\mathbf{o}}^{(0)}} (\dot{\mathbf{o}} - \dot{\mathbf{o}}^{(0)}) + \\
 & + \left| \frac{d(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}(\mathbf{o}^{(0)}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{R}(\mathbf{o}^{(0)})^T \boldsymbol{\omega}^{(0)})}{d\boldsymbol{\omega}} \right| \left| \frac{d\boldsymbol{\omega}}{d\dot{\mathbf{o}}} \right|_{\mathbf{o}^{(0)}, \dot{\mathbf{o}}^{(0)}, \ddot{\mathbf{o}}^{(0)}} (\dot{\mathbf{o}} - \dot{\mathbf{o}}^{(0)})
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

Ekuazio hau ondorengo itxuraz antolatu daiteke:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \ddot{\mathbf{o}} + \boldsymbol{\xi} \dot{\mathbf{o}} + \boldsymbol{\kappa} \mathbf{o} \tag{4.58}$$

Non:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{o}^{(0)}, \dot{\mathbf{o}}^{(0)}, \ddot{\mathbf{o}}^{(0)}) = & \mathbf{R}(\mathbf{o}^{(0)}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{R}^T(\mathbf{o}^{(0)}) \left| \frac{d\dot{\boldsymbol{\omega}}}{d\mathbf{o}} \right|_{\mathbf{o}^{(0)}, \dot{\mathbf{o}}^{(0)}, \ddot{\mathbf{o}}^{(0)}} + \\
 + & \mathbf{R}(\mathbf{o}^{(0)}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{T}(\mathbf{o}^{(0)}, \dot{\boldsymbol{\omega}}^{(0)}) + \boldsymbol{\omega}^{(0)} \times \mathbf{R}(\mathbf{o}^{(0)}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{T}(\mathbf{o}^{(0)}, \boldsymbol{\omega}^{(0)}) + \\
 & + \boldsymbol{\omega}^{(0)} \times \mathbf{R}(\mathbf{o}^{(0)}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{R}^T(\mathbf{o}^{(0)}) \left| \frac{d\boldsymbol{\omega}}{d\mathbf{o}} \right|_{\mathbf{o}^{(0)}, \dot{\mathbf{o}}^{(0)}, \ddot{\mathbf{o}}^{(0)}} + \\
 & + \left| \frac{d(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}(\mathbf{o}^{(0)}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{R}^T(\mathbf{o}^{(0)}) \boldsymbol{\omega}^{(0)})}{d\boldsymbol{\omega}} \right| \left| \frac{d\boldsymbol{\omega}}{d\mathbf{o}} \right|_{\mathbf{o}^{(0)}, \dot{\mathbf{o}}^{(0)}, \ddot{\mathbf{o}}^{(0)}} + \\
 + & \mathbf{S}(\mathbf{o}^{(0)}, \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{R}^T(\mathbf{o}^{(0)}) \dot{\boldsymbol{\omega}}^{(0)}) + \boldsymbol{\omega}^{(0)} \times \mathbf{S}(\mathbf{o}^{(0)}, \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{R}^T(\mathbf{o}^{(0)}) \boldsymbol{\omega}^{(0)})
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\xi}(\mathbf{o}^{(0)}, \dot{\mathbf{o}}^{(0)}, \ddot{\mathbf{o}}^{(0)}) = & \mathbf{R}(\mathbf{o}^{(0)}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{R}^T(\mathbf{o}^{(0)}) \left| \frac{d\dot{\boldsymbol{\omega}}}{d\dot{\mathbf{o}}} \right|_{\mathbf{o}^{(0)}, \dot{\mathbf{o}}^{(0)}, \ddot{\mathbf{o}}^{(0)}} + \\
 & + \boldsymbol{\omega}^{(0)} \times \mathbf{R}(\mathbf{o}^{(0)}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{R}^T(\mathbf{o}^{(0)}) \left| \frac{d\boldsymbol{\omega}}{d\dot{\mathbf{o}}} \right|_{\mathbf{o}^{(0)}, \dot{\mathbf{o}}^{(0)}, \ddot{\mathbf{o}}^{(0)}} + \\
 & + \left| \frac{d(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}(\mathbf{o}^{(0)}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{R}^T(\mathbf{o}^{(0)}) \boldsymbol{\omega}^{(0)})}{d\boldsymbol{\omega}} \right| \left| \frac{d\boldsymbol{\omega}}{d\dot{\mathbf{o}}} \right|_{\mathbf{o}^{(0)}, \dot{\mathbf{o}}^{(0)}, \ddot{\mathbf{o}}^{(0)}}
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{R}(\mathbf{o}^{(0)}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{R}^T(\mathbf{o}^{(0)}) \left| \frac{d\dot{\boldsymbol{\omega}}}{d\ddot{\mathbf{o}}} \right|_{\mathbf{o}^{(0)}, \dot{\mathbf{o}}^{(0)}, \ddot{\mathbf{o}}^{(0)}} = \mathbf{R}(\mathbf{o}^{(0)}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{R}^T(\mathbf{o}^{(0)}) \left| \frac{d\boldsymbol{\omega}}{d\ddot{\mathbf{o}}} \right|_{\mathbf{o}^{(0)}, \dot{\mathbf{o}}^{(0)}, \ddot{\mathbf{o}}^{(0)}} \tag{4.61}$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{t} - \mathbf{R}(\mathbf{o}^{(0)}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{R}^T(\mathbf{o}^{(0)}) \dot{\boldsymbol{\omega}}^{(0)} - \boldsymbol{\omega}^{(0)} \times \mathbf{R}(\mathbf{o}^{(0)}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{R}^T(\mathbf{o}^{(0)}) \boldsymbol{\omega}^{(0)} + \mathbf{K} \mathbf{o}^{(0)} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{o}}^{(0)} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{o}}^{(0)} \tag{4.62}$$

$\boldsymbol{\omega}$ parametroa $\ddot{\mathbf{o}}$ -rekiko askea denez $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{d\ddot{\mathbf{o}}} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \ddot{\mathbf{o}}}$ ere $\ddot{\mathbf{o}}$ -rekiko askea da, zeinaren arabera:

$$\mathbf{R}(\mathbf{o}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{R}^T(\mathbf{o}) \left. \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\omega}}}{\partial \ddot{\mathbf{o}}} \right|_{\mathbf{o}^{(0)}, \dot{\mathbf{o}}^{(0)}} \ddot{\mathbf{o}}^{(0)} = \mathbf{R}(\mathbf{o}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{R}^T(\mathbf{o}) \dot{\boldsymbol{\omega}}^{(0)} \quad (4.63)$$

Zeinak, 4.62-ri ezarriz, ondorengoa sortzen duen:

$$\mathbf{f} = \mathbf{t} - \boldsymbol{\omega}^{(0)} \times \mathbf{R}(\mathbf{o}^{(0)}) \bar{\mathbf{I}}_g \mathbf{R}^T(\mathbf{o}^{(0)}) \boldsymbol{\omega}^{(0)} + \mathbf{K} \mathbf{o}^{(0)} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{o}}^{(0)} \quad (4.64)$$

Linealizazio pauso hauek eman ondoren, 4.58 ekuazioaren bidez lortzen den espresioa Newton-en ekuazioarekin batera lotu daiteke 4.2 atalean adierazi den moduan.

4.4 Solido bat baino gehiago duten sistementzako oreka ekuazioa

Aurreko atalean garatutako ekuazioak solido aske batenak dira. Hori dela eta, ekuazio hauetako bakoitzak dagokion solidoa bakarrik adierazten du gainerako solidoekiko loturarik gabe; horregatik, solido bat baino gehiago duten sistementzat matrizeak muntatzea erraza da. n solidoz osatutako sistema batentzat, haiek bere baitan dituen ekuazioa 4.50 ekuazioari dagozkion matrize guztiak zabalduz eta muntatuz lortzen da:

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{x}(t+\Delta t)) \ddot{\mathbf{x}}(t+\Delta t) + \mathbf{C}_i(\mathbf{x}(t+\Delta t)) \dot{\mathbf{x}}(t+\Delta t) + \mathbf{K}_i(\mathbf{x}(t+\Delta t)) \mathbf{x}(t+\Delta t) = \mathbf{f}_e(t+\Delta t) + \mathbf{f}_R(t+\Delta t) + \mathbf{f}^{(0)} \quad (4.65)$$

Non:

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{x}(t+\Delta t)) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1(\mathbf{x}(t+\Delta t)) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2(\mathbf{x}(t+\Delta t)) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{M}_n(\mathbf{x}(t+\Delta t)) \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

$$\mathbf{C}_i(\mathbf{x}(t+\Delta t)) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1(\mathbf{x}(t+\Delta t)) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_2(\mathbf{x}(t+\Delta t)) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{C}_n(\mathbf{x}(t+\Delta t)) \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

$$\mathbf{K}_i(\mathbf{x}(t+\Delta t)) = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1(\mathbf{x}(t+\Delta t)) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t+\Delta t)) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{K}_n(\mathbf{x}(t+\Delta t)) \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

$$\mathbf{f}_e(t+\Delta t) = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{e1}(t+\Delta t) \\ \mathbf{f}_{e2}(t+\Delta t) \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{en}(t+\Delta t) \end{pmatrix} \quad (4.69)$$

$$\mathbf{f}_R(t+\Delta t) = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{R1}(t+\Delta t) \\ \mathbf{f}_{R2}(t+\Delta t) \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{Rn}(t+\Delta t) \end{pmatrix} \quad (4.70)$$

$$\mathbf{x}(t+\Delta t) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(t+\Delta t) \\ \mathbf{x}_2(t+\Delta t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n(t+\Delta t) \end{pmatrix} \quad (4.71)$$

Aipatu beharra dago 4.65 ekuazioak adierazten duen sistema ezin dela ebatzi, oraindik murriztapenak ez bait dira ezarri; ondorioz, restikzio ekuazioak gehitzea eta murriztapen indarrak batzen ituen bektorea garatzea beharrezkoa da. Pauso hau eta gero, eta solidoak malguak ez direnez, bakoitzaren posizio eta orientazioa erabat definituta daude.

4.5 Elementu diskretuak

Malgukiak edo moteltzaileak bezalako elementu diskretuak, linealak edo birakariak izanda, kanpo indar edo momentu bezala adierazten dira. Haiek adierazten dituzten ekuazioak oreka ekuazioak sortzen dituzten aldagaiekiko funtzio bezala adierazi beharra dago, oreka ekuazioan sartuko badira.

4.5.1 Malguki linealak

Bi solidoren C eta D puntuen artean kokatutako malguki batek ondorengo formulak adierazten duen indar bat ezartzen du:

$$\mathbf{f} = -k(l-l_0)\mathbf{u} \quad (4.72)$$

Non k malgukiaren konstante elastikoa den, l malgukiaren luzera C eta D puntuen artean adierazten duen magnitude eskalar bat den, \mathbf{u} unitatezko bektore zuzentzaile bat den zeinak l distantziaren zentzua adierazten duen eta l_0 malgukiaren luzera askea den.

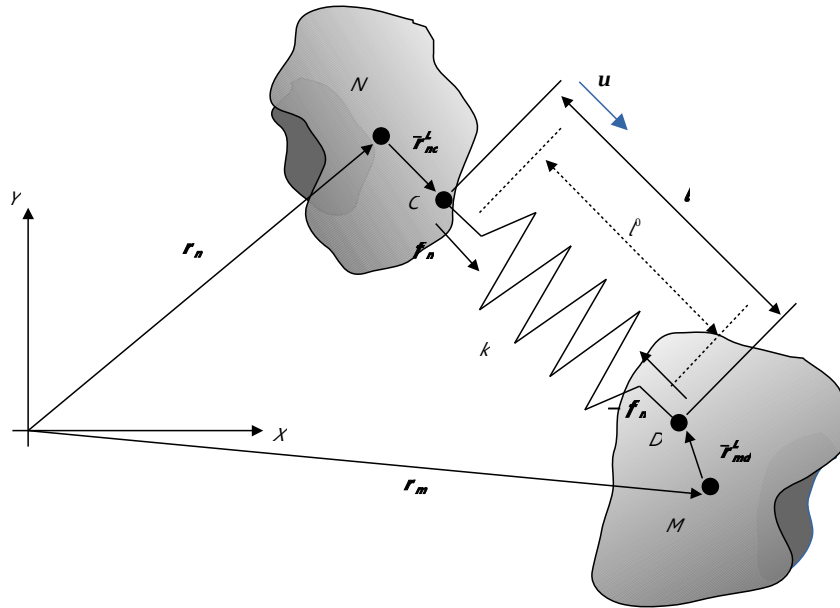


Figure 4.1: linear spring

4.72 ekuazioa ondorengo formularen bidez ere adierazi daiteke:

$$\mathbf{f} = -k(l - l_0)\mathbf{u} = -k\mathbf{l} + k l_0 \mathbf{u} \quad (4.73)$$

\mathbf{l} bektorea ondorengo formularekin adierazten da:

$$\mathbf{l} = \mathbf{r}_c - \mathbf{r}_d = \mathbf{r}_n + \mathbf{R}_n \bar{\mathbf{r}}_{nc}^L - \mathbf{r}_m - \mathbf{R}_m \bar{\mathbf{r}}_{md}^L \quad (4.74)$$

Integrazio metodoa dela eta aldagai hauek ezezagunak direnez eta biratze matrizeak kuaternioiaren atalen biderkatze gurutzatuak dituenenez, 4.74 linealizatu beharra dago. Horretarako, eta 3.63 eta 3.33 erabiliz:

$$\mathbf{l} = \mathbf{r}_n - \mathbf{R}_n^{(0)} \bar{\mathbf{r}}_{nc}^L + \mathbf{S}(\mathbf{q}_n^{(0)}, \bar{\mathbf{r}}_{nc}^L) \mathbf{q}_n - \mathbf{r}_m + \mathbf{R}_m^{(0)} \bar{\mathbf{r}}_{md}^L - \mathbf{S}(\mathbf{q}_m^{(0)}, \bar{\mathbf{r}}_{md}^L) \mathbf{q}_m \quad (4.75)$$

Garapen honen lehen atala 4.73 ekuazioaren lehen atalean ordezkatu daiteke, baina bigarren atalarentzat \mathbf{l} -ren zentzua adierazten duen unitate bektore zuzentzailea beharrezkoa da. Horretarako 3.78 ekuazioa lortzen da. 4.73 ekuazioa, linealizatuta eta modu trinkoan, ondorengo da:

$$\mathbf{f}_{sn} = \mathbf{K}_{sn} \mathbf{x} + \mathbf{f}^{(0)} \quad (4.76)$$

Non:

$$\mathbf{K}_{sn} = (-k + k l_0 \mathbf{B}^{(0)}) \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{snn} & \mathbf{K}_{snm} \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

$$\mathbf{K}_{snn} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{S}(\mathbf{q}_n^{(0)}, \bar{\mathbf{r}}_{nc}^L) \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

$$\mathbf{K}_{snm} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_{3 \times 3} & -\mathbf{S}(\mathbf{q}_m^{(0)}, \bar{\mathbf{r}}_{md}^L) \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

$$\mathbf{f}^{(0)} = k l_0 \mathbf{u}_l + (-k + k l_0 \mathbf{B}^{(0)}) (-\mathbf{R}_n^{(0)} \bar{\mathbf{r}}_{nc}^L + \mathbf{R}_m^{(0)} \bar{\mathbf{r}}_{md}^L) \quad (4.80)$$

Indar bat bezala ordezkatur, $\mathbf{K}_{sn} \mathbf{x}$ atala ekuazioaren beste aldera igaroarazten da, horretarako haren zeinua aldatuz.

Ekuazio honek solido bati ezarritako indarra bakarrik adierazten du; indarra oreka ekuazioan erabiltzeko hura solidoaren grabitate zentrorra iraganarazi beharra dago, eta horretarako indarrak grabitate zentroan ezartzen duen momentua ere kontuan hartu beharra dago, 3.7-n adierazi bezala. Hau hurrengo eraldaketarekin lortzen da:

$$\mathbf{f}_k = \mathbf{f}_{ck} + \boldsymbol{\tau}_{ck} = \mathbf{U}_{ck} \mathbf{f}_{ck} \quad (4.81)$$

Non:

$$\mathbf{U}_{ck} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_z & r_y & 1 & 0 & 0 \\ r_z & 0 & -r_x & 0 & 1 & 0 \\ -r_y & r_x & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

Are gehiago, 4.81 ekuazioak bi solidoetatik batean bakarrik ezarritako indarra adierazten du. Beste solidoari ezarritako indarra 4.77-tik 4.79-rainoko ekuazioak sortu diren modu berean sortzen da, bi solidoak kontuan hartzen dituen zurruntasun matrizea sortuz.

4.5.2 Moteltzaile linealak

Bi solido ezberdinei dagozkien bi punturen artean kokatutako moteltzaile lineal baten ekuazioa ondorengoa da:

$$\mathbf{f}_{dn} = -c(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u} \quad (4.83)$$

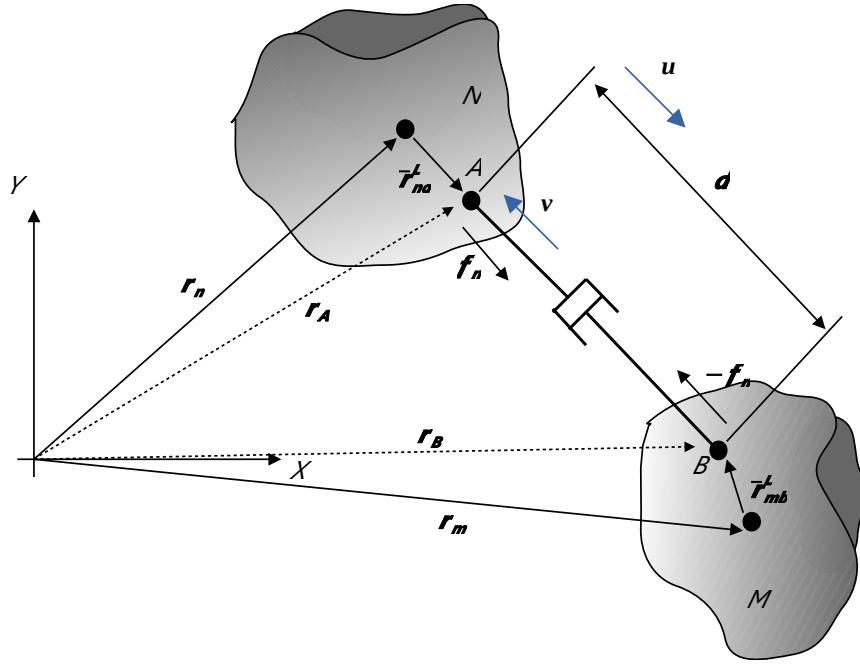


Figure 4.2: Linear damper

Ekuazio honetan ezezaguna den aldagai bakarra abiadura da, unitatezko bektore zuzentzailea 3.77 ekuazioarekin ezaguna bait da. Abiadura guztiz eskumara uztearren ekuazioaren atalak berrordenatuz:

$$\mathbf{f}_{dn} = -c(\mathbf{u}\mathbf{u}^T)\mathbf{v} \quad (4.84)$$

Abiadura hurrengoa da:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B = \dot{\mathbf{r}}_N + \mathbf{S}(\mathbf{q}_N, \bar{\mathbf{r}}_{na}^L)\dot{\mathbf{q}}_N - \dot{\mathbf{r}}_M - \mathbf{S}(\mathbf{q}_M, \bar{\mathbf{r}}_{mb}^L)\dot{\mathbf{q}}_M \quad (4.85)$$

Atal hau ez da lineala. Ondorengo ekuazioaren bidez linealizatzen da:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B = \dot{\mathbf{r}}_N + \mathbf{S}(\mathbf{q}_N, \bar{\mathbf{r}}_{na}^L)\dot{\mathbf{q}}_N - \dot{\mathbf{r}}_M - \mathbf{S}(\mathbf{q}_M, \bar{\mathbf{r}}_{mb}^L)\dot{\mathbf{q}}_M \approx \\ \dot{\mathbf{r}}_N - \mathbf{S}(\mathbf{q}_N^{(0)}, \bar{\mathbf{r}}_{na}^L)\dot{\mathbf{q}}_N^{(0)} + \mathbf{S}(\mathbf{q}_N^{(0)}, \bar{\mathbf{r}}_{na}^L)\dot{\mathbf{q}}_N + \mathbf{S}(\dot{\mathbf{q}}_N^{(0)}, \bar{\mathbf{r}}_{na}^L)\mathbf{q}_N + \\ - \dot{\mathbf{r}}_M + \mathbf{S}(\mathbf{q}_M^{(0)}, \bar{\mathbf{r}}_{mb}^L)\dot{\mathbf{q}}_M^{(0)} - \mathbf{S}(\mathbf{q}_M^{(0)}, \bar{\mathbf{r}}_{mb}^L)\dot{\mathbf{q}}_M - \mathbf{S}(\dot{\mathbf{q}}_M^{(0)}, \bar{\mathbf{r}}_{mb}^L)\mathbf{q}_M \end{aligned} \quad (4.86)$$

4.84-n sartuz haren atal guztiak linealak dituen ekuazio bat lortzen da, baina hala ere haiek biderkatzean lortzen dena ez da lineala. Ondorioz, beste linealizazio bat beharrezkoa da:

$$\mathbf{f}_{dn} = -c\mathbf{u}\mathbf{u}^T\mathbf{v} \approx -c(-2\mathbf{u}^{(0)}\mathbf{u}^{T(0)}\mathbf{v}^{(0)} + 2\mathbf{u}^{(0)}\mathbf{v}^{T(0)}\mathbf{u} + \mathbf{u}^{(0)}\mathbf{u}^{T(0)}\mathbf{v}) \quad (4.87)$$

Linealizatutako garapenak 3.78 eta 4.86-n ordezkatzuz, ondorengo ekuazioa lortzen da:

$$\mathbf{f}_{dn} = \mathbf{C}_d\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_d\mathbf{x} + \mathbf{f}_d^{(0)} \quad (4.88)$$

Non:

$$\mathbf{C}_d = -c \mathbf{u}^{(0)} \mathbf{u}^{(0)T} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{dnn} & \mathbf{C}_{dnm} \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

$$\mathbf{C}_{dn} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{S}(\mathbf{q}_N^{(0)}, \bar{\mathbf{r}}_{na}^L) \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

$$\mathbf{C}_{dnm} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_{3 \times 3} & -\mathbf{S}(\mathbf{q}_M^{(0)}, \bar{\mathbf{r}}_{mb}^L) \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

$$\mathbf{K}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{dnn} & \mathbf{S}_{dnm} \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{dnn} = & -c \mathbf{u}^{(0)} \mathbf{v}^{(0)T} \mathbf{B}^{(0)} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{S}(\mathbf{q}_N^{(0)}, \bar{\mathbf{r}}_{na}^L) \end{bmatrix} + \\ & -c \mathbf{u}^{(0)} \mathbf{u}^{(0)T} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{S}(\dot{\mathbf{q}}_N^{(0)}, \bar{\mathbf{r}}_{na}^L) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.93)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{dnm} = & -c \mathbf{u}^{(0)} \mathbf{v}^{(0)T} \mathbf{B}^{(0)} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & -\mathbf{S}(\mathbf{q}_M^{(0)}, \bar{\mathbf{r}}_{mb}^L) \end{bmatrix} + \\ & -c \mathbf{u}^{(0)} \mathbf{u}^{(0)T} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{S}(\dot{\mathbf{q}}_M^{(0)}, \bar{\mathbf{r}}_{mb}^L) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.94)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_d^{(0)} = & 2c \mathbf{u}^{(0)} \mathbf{u}^{(0)T} - 2c \mathbf{u}^{(0)} \mathbf{v}^{(0)T} \mathbf{u}_l - 2c \mathbf{u}^{(0)} \mathbf{v}^{(0)T} \mathbf{B}^{(0)} \left(-\mathbf{R}_N^{(0)} \bar{\mathbf{r}}_{na}^L + \mathbf{R}_M^{(0)} \bar{\mathbf{r}}_{mb}^L \right) + \\ & -c \mathbf{u}^{(0)} \mathbf{u}^{(0)T} \left(\mathbf{S}(\mathbf{q}_N^{(0)}, \bar{\mathbf{r}}_{na}^L) \dot{\mathbf{q}}_N^{(0)} + \mathbf{S}(\mathbf{q}_M^{(0)}, \bar{\mathbf{r}}_{mb}^L) \dot{\mathbf{q}}_M^{(0)} \right) \end{aligned} \quad (4.95)$$

Ekuazio honetan, 4.76 ekuazioaren antzera, atal batzuk ($\mathbf{C}_d \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_d \mathbf{x}$, zehatzago esanda) ekuazioaren beste aldera igaroarazten dira haien zeinuak aldaraziz.

Indar hauek baliteke solidoen grabitate zentroetan ezarrita ez egotea; hori dela eta, eta oreka ekuazioan erabiliko badira, lehenengo haiek dagozkien solidoen grabitate zentroetara iraganarazi beharra dago, eta dagozkien momentuak ere kontuan hartu beharra dago 4.81 ekuazioaren bidez. Horretarako, 4.88 ekuazioaren matrize eta bektoreak hedatu beharra dago ondorengo ekuazio multzoaren bidez:

$$\mathbf{C}_d^e = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_d \\ \mathbf{0}_{3 \times 4} \end{bmatrix} \quad (4.96)$$

$$\mathbf{K}_d^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_d \\ \mathbf{0}_{3 \times 4} \end{bmatrix} \quad (4.97)$$

$$\mathbf{f}_d^{(0)e} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_d^{(0)} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} \quad (4.98)$$

Modu honetan, moteltzaileak solidoaren grabitate zentroan ezarritako indar eta momentuak ondorengo ekuazioaren bidez adierazi daitezke:

$$\mathbf{f}_{d1}^{total} = \mathbf{U}_{AG} \left(\mathbf{C}_d^e \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_d^e \mathbf{x} + \mathbf{f}_d^{(0)e} \right) \quad (4.99)$$

$$\mathbf{f}_{d2}^{total} = -\mathbf{U}_{BG} \left(\mathbf{C}_d^e \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_d^e \mathbf{x} + \mathbf{f}_d^{(0)e} \right) \quad (4.100)$$

Azkenekoz, bi solidoei ezarritako indar bektorea ondorengoa da:

$$\mathbf{f}_d^{total} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{d1}^{total} \\ \mathbf{f}_{d2}^{total} \end{Bmatrix} \quad (4.101)$$

5 Murriztapenak

Oreka ekuazioak linealizatu ondoren sistema osatzen duten murriztapenak ezarri behar zaizkio ekuazio sistema horri. Bi motako murriztapenak dira beharrezkoak: alde batetik koordenada murriztapenak, zeintzuk posizio, abiadura eta azelerazio murriztapenak ezartzen dituzten, eta bestetik murriztapen indarrak. Hiru murriztapen mota hauek erabiltzearen beharra azaltzen duten garapen matematikoak 6 atalean aurkitu aditezke. Hala ere, eta garapen hauek ulertzeko alde aurretik murriztapenak nola adierazi eta erabiltzen diren jakitea beharrezkoa denez, murriztapen mota guztiak adierazi ondoren azaldu da haien beharra.

Murriztapenen garapen matematikoak egin ondoren haien inplementazioa azaltzen da eta murriztapen mota ezberdinak garatzen dira.

5.1 Koordenada murriztapenak

Murriztapenak ondorengo ekuazio orokorraren bidez adierazten dira:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (5.1)$$

Ekuazio hau ez da lineala. Ondorioz, eta hura linealizatzeko Taylor-en serieak erabiliz:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{q}(\mathbf{x}^{(0)}) + \left. \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^{(0)}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}) = 0 \quad (5.2)$$

Ekuazio hau ondoren adierazi bezala berriatzi daiteke:

$$\mathbf{H}_L(\mathbf{x}^{(0)}) \mathbf{x} = \mathbf{H}_L(\mathbf{x}^{(0)}) \mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{q}(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{b}_L \quad (5.3)$$

Ekuazio hau $\mathbf{x}(t+\Delta t)$ lortzeko erabiliz, $\mathbf{x}^{(0)}$ bektorea $\mathbf{x}(t+\Delta t)$ -ren azkeneko estimazio ezaguna da. Ondorioz, hurrengoa idatzi daiteke:

$$\mathbf{x}(t+\Delta t) = \mathbf{x}_p + \mathbf{N}_H \boldsymbol{\alpha}(t+\Delta t) \quad (5.4)$$

Non N_H H_L -ren azpiespazio hutsa den eta \mathbf{x}_p 6.5-ren emaitza partikularra den. N_H eta \mathbf{x}_p -ren edozein espresioak emaitza egokia sortuko luke, teorikoki. \mathbf{x}_p -rentzako aukera begi-bistako bat karratu minimoen emaitza da, zenbakizko baldintzatze egokia emango bait du. \mathbf{x}_p -ren emaitza sakabanatu bat erabilgarria izan daitekela pentsa daiteke, baina \mathbf{x}_p bektore bat izanda aukera honek ez ditu abantaila asko. \mathbf{x}_p -ren espresio ezberdinen erabiltzeak emaitza egokiak eman beharko lituzke, \mathbf{x}_p -ren balioak txikiak baldin badira. N_H -ren kasuan, funtsezko oinarri bat erabiltzeak espresio sakabanatu bat sortuko luke, zeinak kostu konputazionala murriztuko lukeen, Coleman-ek [136] aipatu bezala. Gainera, garrantzizkoa da $\boldsymbol{\alpha}(t+\Delta t)$ integratzen ari den denbora-unean bakarrik baliozkoa den koordenada minimo multzo bat izatea. Koordenada hauek denbora-unez aldatu ahala aldatzen dira. Murriztapen eskleronomiko eta holonomoetarako, abiadura murriztapenak ondoren adierazi bezala idatzi daitezke 5.2 denborarekiko deribatuz:

$$\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \simeq \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{x}^{(0)}, \dot{\mathbf{x}}^{(0)}) + \left. \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^{(0)}, \dot{\mathbf{x}}^{(0)}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}) + \left. \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right|_{\mathbf{x}^{(0)}} (\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}^{(0)}) = \mathbf{0} \quad (5.5)$$

Ekuazio hau ondoren adierazten den moduan berrantolatu daiteke:

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}^{(0)}) \dot{\mathbf{x}} = -\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{x}^{(0)}, \dot{\mathbf{x}}^{(0)}) + \mathbf{H}(\mathbf{x}^{(0)}) \dot{\mathbf{x}}^{(0)} + \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{x}^{(0)}, \dot{\mathbf{x}}^{(0)}) \mathbf{x}^{(0)} - \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{x}^{(0)}, \dot{\mathbf{x}}^{(0)}) \mathbf{x} \quad (5.6)$$

5.4 erabiliz:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{x}^{(0)}) \dot{\mathbf{x}} = & -\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{x}^{(0)}, \dot{\mathbf{x}}^{(0)}) + \mathbf{H}(\mathbf{x}^{(0)}) \dot{\mathbf{x}}^{(0)} + \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{x}^{(0)}, \dot{\mathbf{x}}^{(0)}) \\ & - \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{x}^{(0)}, \dot{\mathbf{x}}^{(0)}) \mathbf{x}_p - \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{x}^{(0)}, \dot{\mathbf{x}}^{(0)}) N_H \boldsymbol{\alpha} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Ekuazio sistema hau ebatztean lortutako emaitza ondoren adierazi bezala idatzi daiteke:

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}_p + N_H \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \dot{\mathbf{X}}_p \boldsymbol{\alpha} \quad (5.8)$$

Non $\dot{\mathbf{x}}_p$ ondorengo ekuazioaren emaitza den:

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}^{(0)}) \dot{\mathbf{x}} = -\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{x}^{(0)}, \dot{\mathbf{x}}^{(0)}) + \mathbf{H}(\mathbf{x}^{(0)}) \dot{\mathbf{x}}^{(0)} + \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{x}^{(0)}, \dot{\mathbf{x}}^{(0)}) (\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}_p) \quad (5.9)$$

Eta $\dot{\mathbf{X}}_p$ ondorengo ekuazioaren emaitza den:

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}^{(0)}) \dot{\mathbf{X}}_p = -\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{x}^{(0)}, \dot{\mathbf{x}}^{(0)}) N_H \quad (5.10)$$

Aipatu beharra dago $\dot{\mathbf{x}}_p$ zein $\dot{\mathbf{X}}_p$ sistema linealen emaitza bezala lortzen direla (5.7-ren emaitza bezala, hain zuzen), eta ez aldeztu aurretik lortutako ekuazioen deribazio bezala; haien gaineko puntua unitateen arteko koherentzia

mantentzarren erabiltzen da, adierazten dituzten murriztapenak abiadurazkoak bait dira. Azelerazio ekuazioentzat, beste behin deribatuz:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}) \simeq & \ddot{\mathbf{q}}(\mathbf{x}^{(0)}, \dot{\mathbf{x}}^{(0)}, \ddot{\mathbf{x}}^{(0)}) + \left. \frac{\partial \ddot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^{(0)}, \dot{\mathbf{x}}^{(0)}, \ddot{\mathbf{x}}^{(0)}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}) + \\ & + 2 \left. \frac{\partial \ddot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right|_{\mathbf{x}^{(0)}, \dot{\mathbf{x}}^{(0)}} (\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}^{(0)}) + \left. \frac{\partial \ddot{\mathbf{q}}}{\partial \ddot{\mathbf{x}}} \right|_{\mathbf{x}^{(0)}} (\ddot{\mathbf{x}} - \ddot{\mathbf{x}}^{(0)}) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Ekuazio hau ondoren adierazi bezala berridatzi eta berrantolatu daiteke:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{x}^{(0)}) \ddot{\mathbf{x}} = & -\ddot{\mathbf{q}}(\mathbf{x}^{(0)}, \dot{\mathbf{x}}^{(0)}, \ddot{\mathbf{x}}^{(0)}) + \ddot{\mathbf{H}}(\mathbf{x}^{(0)}, \dot{\mathbf{x}}^{(0)}, \ddot{\mathbf{x}}^{(0)}) \mathbf{x}^{(0)} + \\ & + 2 \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{x}^{(0)}, \dot{\mathbf{x}}^{(0)}) \dot{\mathbf{x}}^{(0)} + \mathbf{H}(\mathbf{x}^{(0)}) \ddot{\mathbf{x}}^{(0)} + \\ & - \ddot{\mathbf{H}}(\mathbf{x}^{(0)}, \dot{\mathbf{x}}^{(0)}, \ddot{\mathbf{x}}^{(0)}) \mathbf{x} - 2 \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{x}^{(0)}, \dot{\mathbf{x}}^{(0)}) \dot{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (5.12)$$

5.4 eta 5.8 sartuz:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{x}^{(0)}) \ddot{\mathbf{x}} = & -\ddot{\mathbf{q}}(\mathbf{x}^{(0)}, \dot{\mathbf{x}}^{(0)}, \ddot{\mathbf{x}}^{(0)}) + \ddot{\mathbf{H}} \mathbf{x}^{(0)} + 2 \dot{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{x}}^{(0)} + \mathbf{H} \ddot{\mathbf{x}}^{(0)} + \\ & - \ddot{\mathbf{H}} \mathbf{x}_p - 2 \dot{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{x}}_p - 2 \dot{\mathbf{H}} \mathbf{N}_H \dot{\boldsymbol{\alpha}} - (2 \dot{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{X}}_p + \ddot{\mathbf{H}} \mathbf{N}_H) \boldsymbol{\alpha} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Sistema honen emaitza ondorengoa da:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{x}}_p + \ddot{\mathbf{X}}_{p1} \boldsymbol{\alpha} + \ddot{\mathbf{X}}_{p2} \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{N}_H \ddot{\boldsymbol{\alpha}} \quad (5.14)$$

Non $\ddot{\mathbf{X}}_{p1}$ eta $\ddot{\mathbf{X}}_{p2}$ hurrengo ekuazioekiko emaitza partikularrak diren:

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}^{(0)}) \ddot{\mathbf{X}}_{p1} = -2 \ddot{\mathbf{H}}(\mathbf{x}^{(0)}, \dot{\mathbf{x}}^{(0)}) \dot{\mathbf{X}}_p - \ddot{\mathbf{H}}(\mathbf{x}^{(0)}, \dot{\mathbf{x}}^{(0)}, \ddot{\mathbf{x}}^{(0)}) \mathbf{N}_H \quad (5.15)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}^{(0)}) \ddot{\mathbf{X}}_{p2} = -2 \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{x}^{(0)}, \dot{\mathbf{x}}^{(0)}) \mathbf{N}_H \quad (5.16)$$

Gainera, ondorengoa ikus daiteke:

$$\ddot{\mathbf{X}}_{p2} = 2 \dot{\mathbf{X}}_p \quad (5.17)$$

Metodo honen bidez lortutako soluzio partikularrek hautazko balioak dituzte, baina garrantzizkoa da hala ez izatea eta arau minimodun emaitza bat lortzea. Murriztapen erredundanteen kasuan, hobe da karratu minimoen emaitza lortzea.

Oreka ekuazioa, ekuazio hauek sartuta, ondorengoa izango da:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_L (\ddot{\mathbf{x}}_p + \ddot{\mathbf{X}}_{p1} \boldsymbol{\alpha} + \ddot{\mathbf{X}}_{p2} \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{N}_H \ddot{\boldsymbol{\alpha}}) + \mathbf{C}_L (\dot{\mathbf{x}}_p + \\ + \mathbf{N}_H \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \dot{\mathbf{X}}_p \boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{K}_L (\mathbf{x}_p + \mathbf{N}_H \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{f}_L + \mathbf{G}_L^T \boldsymbol{\lambda} \end{aligned} \quad (5.18)$$

Berrantolatuz:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_L \mathbf{N}_H \ddot{\boldsymbol{\alpha}} + (\mathbf{C}_L \mathbf{N}_H + 2 \mathbf{M}_L \dot{\mathbf{X}}_P) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + (\mathbf{K}_L \mathbf{N}_H + \mathbf{C}_L \dot{\mathbf{X}}_P + \\ + \mathbf{M}_L \ddot{\mathbf{X}}_{P1}) \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{f}_L - \mathbf{K}_L \mathbf{x}_P - \mathbf{C}_L \dot{\mathbf{x}}_P - \mathbf{M}_L \ddot{\mathbf{x}}_P + \mathbf{G}_L^T \boldsymbol{\lambda} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Hau da integratuko den ekuazio sistema, nahiz eta oraindik ez murriztu gabe dagoen. Horretarako, sistema \mathbf{G} -ren azpiespazio hutsa erabiliz murriztu daiteke (non \mathbf{G} murriztapenen Jacobiarra den biratze eta higidurak erabiliz):

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_G^T \mathbf{M}_L \mathbf{N}_H \ddot{\boldsymbol{\alpha}} + (\mathbf{N}_G^T \mathbf{C}_L \mathbf{N}_H + 2 \mathbf{N}_G^T \mathbf{M}_L \dot{\mathbf{X}}_P) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \\ + (\mathbf{N}_G^T \mathbf{K}_L \mathbf{N}_H + \mathbf{N}_G^T \mathbf{C}_L \dot{\mathbf{X}}_P + \mathbf{N}_G^T \mathbf{M}_L \ddot{\mathbf{X}}_{P1}) \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{N}_G^T \mathbf{f}_L + \\ - \mathbf{N}_G^T \mathbf{K}_L \mathbf{x}_P - \mathbf{N}_G^T \mathbf{C}_L \dot{\mathbf{x}}_P - \mathbf{N}_G^T \mathbf{M}_L \ddot{\mathbf{x}}_P + \mathbf{N}_G^T \mathbf{G}_L^T \boldsymbol{\lambda} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Modu honetan, sistema beste batera murrizten da, zeinaren emaitzak murriztapenek baimentzen dituzten higidurak diren. Zentzu honetan, \mathbf{G} -ren azpiespazio hutsak sistemak baimentzen dituen mugimenduak adierazten ditu higidurak eta biratzeak erabiliz. Aipatu beharra dago orain arte aurkeztu denaren berritasuna ez dela \mathbf{G}_L -ren azpiespazio hutsaren erabilera sistema murriztea lortzeko, egin ohi den moduan \mathbf{x} eta haren deribazioak integratu beharrean $\boldsymbol{\alpha}$ eta haren deribazioak integratuko direla baizik. Horrela izanda, integratzen den atala koordinada minimo multzo bat da, zeinak sistemaren askatasun graduak adierazten dituen.

Egonkortasun analisia egiteko erabili diren frekuentziak murriztutako sistemarenak direla ere kontuan hartu da, eta ondorioz hauek murriztutako masa eta zurruntasun matrizeak erabiliz lortu beharra dago, zeintzuk, hurrenez hurren, $\mathbf{M}_R = \mathbf{N}_G^T \mathbf{M}_L \mathbf{N}_H$ eta $\mathbf{K}_R = \mathbf{N}_G^T \mathbf{K}_L \mathbf{N}_H + \mathbf{N}_G^T \mathbf{C}_L \dot{\mathbf{X}}_P + \mathbf{N}_G^T \mathbf{M}_L \ddot{\mathbf{X}}_{P1}$ diren.

Kostu konputazionala aldatu daiteke parametro gehiago lortzearen beharrez, hala nola $\mathbf{N}_G^T \mathbf{C}_L \mathbf{N}_H + 2 \mathbf{N}_G^T \mathbf{M}_L \dot{\mathbf{X}}_P$ eta $\mathbf{N}_G^T \mathbf{K}_L \mathbf{N}_H + \mathbf{N}_G^T \mathbf{C}_L \dot{\mathbf{X}}_P + \mathbf{N}_G^T \mathbf{M}_L \ddot{\mathbf{X}}_{P1}$, baina hala ere $\mathbf{N}_G^T \mathbf{K}_L \mathbf{N}_H$, $\mathbf{N}_G^T \mathbf{C}_L \mathbf{N}_H$, $\mathbf{N}_G^T \mathbf{M}_L$ eta $\mathbf{N}_G^T \mathbf{C}_L$ lortzea beharrezkoa denez, hiru murriztutako matrizeen biderkatzeak lortzea da beharrezko bakarrik. $\ddot{\mathbf{X}}_{P1}$ eta $\dot{\mathbf{X}}_P$ emaitza partzialak lortzea ere garrantzizkoa da, baina \mathbf{N}_H -ren faktORIZAZIOA beharrezkoa denez aukeratutako metodoa dena dela, ez du kostu gehiago sortzen.

Azkenekoz, $\mathbf{N}_G^T \mathbf{G}_L^T \boldsymbol{\lambda}$ guztiz ezeztatzen da haren ortogonalitate propietatea dela eta. Metodo implizituek aurreko linealizazio baten baitako $\mathbf{G}_L^T \boldsymbol{\lambda}$ -ren balioa behar dute, eta atal honen zati bat bakarrik ezeztatzen da ortogonalitate propietatea dela eta. Linealizazio honen atal ez ezeztatuak \mathbf{K}_L zurruntasun matrizeari eta \mathbf{f}_L bektoreari gehitzen zaizkio.

Zenbakiz integratzeko, Newmark bezalako integratzaileek $\boldsymbol{\alpha}(t+\Delta t)$ eta $\boldsymbol{\alpha}(t)$ eta euren deribazioak elkarrekin lotzen dituzte. Atal hauek aurreko denbora-unetik har daitezkeela pentsa daiteke, baina eragiketa hau ez da zuzena linealizazioa denbora-une bakoitzean berriztatzen bada; hala izanda, integrazioa zuzena izan dadin hura denbora-une berean eta iterazio berean egitea beharrezkoa da. $\boldsymbol{\alpha}(t)$ -ren balio egokiak lortzeko, t unean lortutako balioak $\mathbf{N}_H(t+\Delta t)$ -k adierazten duen norabidean proiektatu beharra dago. Proiektzio hau lortzeko, eta 5.1 irudian adierazten den moduan:

$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = \mathbf{x}_p(t+\Delta t) + \mathbf{N}_H(t+\Delta t) \boldsymbol{\alpha}^{(2)}(t) \quad (5.21)$$

Non $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ $\mathbf{x}(t)$ -ren proiektzioa den $\mathbf{N}_H(t+\Delta t)$ -rekiko. $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ zein $\boldsymbol{\alpha}^{(2)}(t)$ ez dira ezagunak. Hala ere, hurrengoa adierazi daiteke:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_p(t+\Delta t) + \mathbf{N}_H(t+\Delta t) \boldsymbol{\alpha}^{(2)}(t) \quad (5.22)$$

Ekuzio hau gaindeterminatuta dago eta gainera ez da bateragarria, $t+\Delta t$ -en garatutako linealizazioak ez bait ditu t -n ezarritako murriztapenak betetzen. Arazo hau ebazteko karratu minimoen emaitza baten bidez lortzen da, zeina aipatu bezala t -n lortutako koordenadak $t+\Delta t$ -en lortutako linealizazioan proiektatzearen baliokide den.

Modu honetan $\boldsymbol{\alpha}^{(2)}(t)$ -ren balioa lortzen da, zeinak $\mathbf{N}_H(t+\Delta t) \boldsymbol{\alpha}^{(2)}(t)$ -ri zentzu fisikoa ematen dion $\mathbf{x}_p(t+\Delta t)$ puntutik $\mathbf{x}(t)$ -engandik gertuen dagoen puntu baterainoko distantzia bezala $\mathbf{N}_H(t+\Delta t)$ -k adierazitako bidea jarraituz, modu honetan kalkulaturako distantzia $\mathbf{x}(t)$ -en proiektzioa $\mathbf{N}_H(t+\Delta t)$ -rengan izanda. Proiektaturako puntu hau $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ da [137].

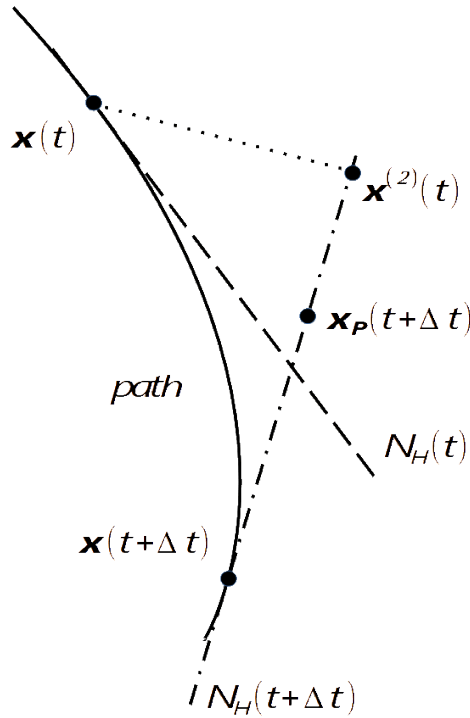


Figure 5.1: projection of $\alpha(t)$

Abiadura eta azelerazioetarako prozesua berdina da, horretarako 5.8 eta 5.14 ekuazioak erabiliz:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{x}}_p(t+\Delta t) + \dot{\mathbf{X}}_p(t+\Delta t) \boldsymbol{\alpha}^{(2)}(t) + \mathbf{N}_H(t+\Delta t) \dot{\boldsymbol{\alpha}}^{(2)}(t) \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}}(t) = & \ddot{\mathbf{x}}_p(t+\Delta t) + \ddot{\mathbf{X}}_{p_1}(t+\Delta t) \boldsymbol{\alpha}^{(2)}(t) + \\ & + \ddot{\mathbf{X}}_{p_2}(t+\Delta t) \dot{\boldsymbol{\alpha}}^{(2)}(t) + \mathbf{N}_H(t+\Delta t) \ddot{\boldsymbol{\alpha}}^{(2)}(t) \end{aligned} \quad (5.24)$$

Ikusi daitekenez $\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t)$ -ren proiektzioa $\boldsymbol{\alpha}(t)$ -ren proiektzioaren menpekoa da ere, eta $\ddot{\boldsymbol{\alpha}}(t)$ -ren proiektzioa $\boldsymbol{\alpha}(t)$ -ren eta $\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t)$ -ren proiektzioen menpekoa da ere.

5.2 Murriztapen indarren linealizazioa

Murriztapen indarrei dagokien atala, hau da, $\mathbf{f}_R(t+\Delta t)$, Lagrange-ren biderkatzaileen bitartez adierazten da:

$$\mathbf{f}_R(t+\Delta t) = \mathbf{G}^T(t+\Delta t) \boldsymbol{\lambda}(t+\Delta t) \quad (5.25)$$

Non murriztapenen Jacobiarra den, biratze eta higidura linealak erabiliz adierazita. Zehazte hau beharrezkoa da, indarren bektorea ($\boldsymbol{\lambda}$ erabiliz adierazita) biratzeak eta higidura linealak erabiliz adierazten bait da, murriztapenak kuaternioiak erabiliz adierazten diren bitartean. Ikus

daitekenez, indarrak adierazten dituen formula $t+\Delta t$ unean ebaluatutako bi atalen biderketaz osatuta dago, eta ondorioz ez da ezaguna. Hau dela eta biderketa Taylor-en serieak erabiliz linealizatu beharra dago:

$$\mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda} \simeq \mathbf{G}^{T(0)} \boldsymbol{\lambda}^{(0)} + \mathbf{G}^{T(0)} (\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^{(0)}) + \left. \frac{\partial \mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda}}{\partial \mathbf{x}} \right|^{(0)} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}) \quad (5.26)$$

Berrantolatuz:

$$\mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda} \simeq \mathbf{G}^{T(0)} \boldsymbol{\lambda} + \left. \frac{\partial \mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda}}{\partial \mathbf{x}} \right|^{(0)} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}) \quad (5.27)$$

Ekuazio honek, oreka ekuazioan inplementatzean ikusiko denez, zurruntasun matrizean sartuko den atal bat, indar askeen bektorean sartuko den beste atal bat eta azkenekoz oreka ekuazioaren baitako elementu askeen ataletan sartzen den hirugarren atal bat dauzka. Erabiliko den integrazio metodoa ezarri ondoren (Newmark, kasu honetan), 5.27 ekuazioaren lehen atala eta metodoa ezartzetik geratzen diren sistemaren aldagaiak dira ezagutzen ez diren aldagai bakarrak. Atal hau \mathbf{G} matrizearen azpiespazio hutsa erabiliz ezeztatzen da sistemaren emaitza beharrezko den denbora-unean lortzeko. Hala ere, eta nahiz eta emaitza lortzeko ezeztatu, haren balioa jakitea beharrezkoa da hurrengo denbora-unearen emaitza lortzeko. Haren balioa \mathbf{G} -ren azpiespazio hutsaz biderkatuta ez dagoen ekuazioa erabiliz lortzen da.

5.3 Lokailu zinematikoak

Atal honetan hainbat lokailu zinematiko garatuko dira. Bost garapen matematiko egingo dira lokailu bakoitzaren baitan; lehenengo hirurak koordenada garapenak dira eta posizio, abiadura eta azelerazio murriztapenak osatzen dituzte. Gainerako biak erreferentzia sistema globalean adierazitako biratzeak erabiliz sortutako murriztapenak eta 5.27 ekuazioaren atalak dira. Posizio murriztapenak eta biratzeak erabiliz adierazitako murriztapenak Urkullu Dr.-earen garapen matematikoetatik atera dira [1], zeinei abiadura eta azelerazio murriztapenak eta $\left. \frac{\partial \mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda}}{\partial \mathbf{x}} \right|^{(0)}$ matrizea gehitu zaien.

5.3.1 Lokailu esferikoa

Lokailu esferikoa bi solidok partekatzen duten puntu baten bidez adierazten da. Horretarako, eta solido bati dagokion puntuaren kontzeptua erabiliz:

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_N + \mathbf{R}(\mathbf{q}_N) \bar{\mathbf{r}}_{CN}^L = \mathbf{r}_M + \mathbf{R}(\mathbf{q}_M) \bar{\mathbf{r}}_{CM}^L \quad (5.28)$$

Murriztapena ondorengo formularekin adierazten da:

$$\mathbf{q}_S(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{r}}) = \mathbf{r}_N + \mathbf{R}(\mathbf{q}_N) \bar{\mathbf{r}}_{CN}^L - \mathbf{r}_M - \mathbf{R}(\mathbf{q}_M) \bar{\mathbf{r}}_{CM}^L \quad (5.29)$$

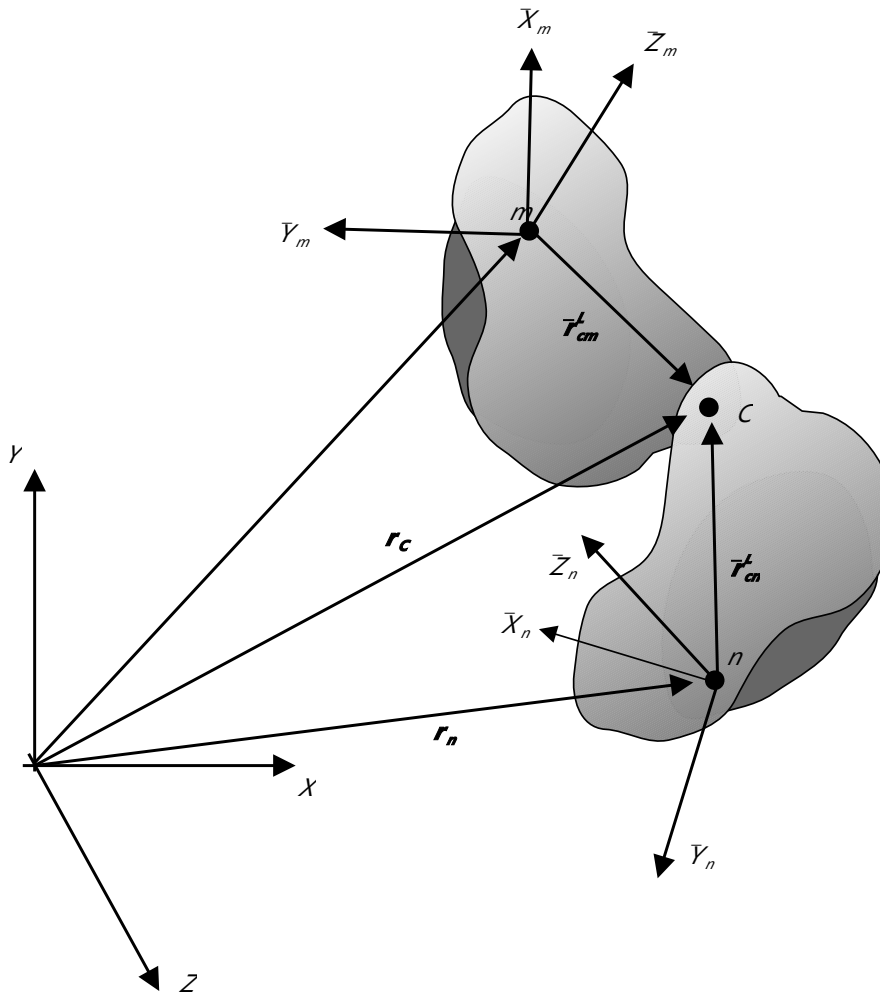


Figure 5.2: spherical joint

5.3.1.1 Koordenada murriztapenak

Atal honetan koordenada murriztapenak garatuko dira.

5.3.1.1.1 Posizioak

Ekuazio hau ez da lineala, eta horrela izanda eta 3.4.1 atalean aipatu denez linealizazioa beharrezkoa da. Linealizatu ondoren eta 5.1 ekuazioa erabiliz, ondorengo espresioa lortzen da:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{S}(\mathbf{q}_N^{(0)}, \bar{\mathbf{r}}_{CN}^L) & -\mathbf{I}_{3 \times 3} & -\mathbf{S}(\mathbf{q}_M^{(0)}, \bar{\mathbf{r}}_{CM}^L) \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{R}(\mathbf{q}_N^{(0)}) \bar{\mathbf{r}}_{CN}^L - \mathbf{R}(\mathbf{q}_M^{(0)}) \bar{\mathbf{r}}_{CM}^L \quad (5.30)$$

Non:

$$\mathbf{H}^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{S}(\mathbf{q}_N^{(0)}, \bar{\mathbf{r}}_{CN}^L) & -\mathbf{I}_{3 \times 3} & -\mathbf{S}(\mathbf{q}_M^{(0)}, \bar{\mathbf{r}}_{CM}^L) \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

5.3.1.1.2 Abiadurak

5.29 ekuazioa deribatuz:

$$\frac{\partial \mathbf{q}_s(\mathbf{x})}{\partial t} = \dot{\mathbf{r}}_N + \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{q}_N) \bar{\mathbf{r}}_{CN}^L - \dot{\mathbf{r}}_M - \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{q}_M) \bar{\mathbf{r}}_{CM}^L \quad (5.32)$$

Ekuazio hau, zeina aurreko iterazioan ebaluatu den, 5.9 eta 5.10 ekuazioen parte da. Posizio murriztapena adierazi ondoren, ezezaguna den matrize bakarra $\dot{\mathbf{H}}^{(0)}$ da. Matrize hau ondorengo ekuazioarekin adierazi daiteke:

$$\dot{\mathbf{H}}^{(0)} = \frac{\partial \mathbf{H}^{(0)}}{\partial t} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{S}(\dot{\mathbf{q}}_N^{(0)}, \bar{\mathbf{r}}_{CN}^L) & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{S}(\dot{\mathbf{q}}_M^{(0)}, \bar{\mathbf{r}}_{CM}^L) \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

5.3.1.1.3 Azelerazioak

Murriztapen ekuazioa beste behin deribatuz:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{q}_s(\mathbf{x})}{\partial t^2} = \ddot{\mathbf{r}}_N + \ddot{\mathbf{R}}(\mathbf{q}_N) \bar{\mathbf{r}}_{CN}^L - \ddot{\mathbf{r}}_M - \ddot{\mathbf{R}}(\mathbf{q}_M) \bar{\mathbf{r}}_{CM}^L \quad (5.34)$$

Ekuazio hau, zeina aurreko iterazioan ebaluatu den, 5.12-n ordezkutzen da eta, 5.15 eta 5.16-rekin batera, azelerazio murriztapenen ekuazioak sortzen ditu. Ekuazio hauetatik, adierazteke dagoen atal bakarra $\ddot{\mathbf{H}}^{(0)}$ da:

$$\ddot{\mathbf{H}}^{(0)} = \frac{\partial^2 \mathbf{H}^{(0)}}{\partial t^2} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{S}(\ddot{\mathbf{q}}_N^{(0)}, \bar{\mathbf{r}}_{CN}^L) & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{S}(\ddot{\mathbf{q}}_M^{(0)}, \bar{\mathbf{r}}_{CM}^L) \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

5.3.1.2 Indar murriztapenak

Lokailu esferiko batean, \mathbf{G} matrizea ondoren adierazi bezala idatzi daiteke:

$$\mathbf{G}_{CN} = \begin{bmatrix} 0 & (\mathbf{R}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{r}}_{CN}^L)_z & -(\mathbf{R}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{r}}_{CN}^L)_y \\ -(\mathbf{R}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{r}}_{CN}^L)_z & 0 & (\mathbf{R}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{r}}_{CN}^L)_x \\ (\mathbf{R}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{r}}_{CN}^L)_y & -(\mathbf{R}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{r}}_{CN}^L)_x & 0 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

Lokailu esferikoak bi solido lotzen baditu, bi solidoen lotura adierazten duen \mathbf{G} matrizea ondoren bezala adierazten da:

$$\mathbf{G} = [\mathbf{I}_{3 \times 3} \quad \mathbf{G}_{CN} \quad -\mathbf{I}_{3 \times 3} \quad -\mathbf{G}_{CM}] \quad (5.37)$$

$\mathbf{F}_R = \mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda}$ ekuazioa 5.26-k adierazi bezala linealizatzen da.

$\left| \frac{\delta \mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda}}{\delta \mathbf{x}} \right|_0 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ atala ondoren adierazi bezala garatzen da:

$$\mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ -(\mathbf{R}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{r}}_{CN}^L)_z \lambda_2 + (\mathbf{R}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{r}}_{CN}^L)_y \lambda_3 \\ (\mathbf{R}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{r}}_{CN}^L)_z \lambda_1 - (\mathbf{R}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{r}}_{CN}^L)_x \lambda_3 \\ -(\mathbf{R}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{r}}_{CN}^L)_y \lambda_1 + (\mathbf{R}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{r}}_{CN}^L)_x \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

Deribatuz eta aurreko iterazioan ebaluatuz:

$$\left| \frac{\partial \mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda}}{\partial \mathbf{x}} \right|^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 4} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & -\mathbf{S}(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{r}}_{CN}^L)_z \lambda_2^{(0)} + \mathbf{S}(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{r}}_{CN}^L)_y \lambda_3^{(0)} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{S}(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{r}}_{CN}^L)_z \lambda_1^{(0)} - \mathbf{S}(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{r}}_{CN}^L)_x \lambda_3^{(0)} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & -\mathbf{S}(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{r}}_{CN}^L)_y \lambda_1^{(0)} + \mathbf{S}(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{r}}_{CN}^L)_x \lambda_2^{(0)} \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

5.3.2 Biratze lokailua

Lokailu hau bektore partekatu batekiko biraketa ezik gainerako biraketak murriztu zaizkion lokailu esferiko baten baliokide da. Biratze lokailu bat adierazten duen ekuazioak partekatutako biratze bektore bat ezartzen du; horretarako, eta beharrezko transformazioak egin eta gero, solido bakoitzak bektore berbera solidoari dagokion erreferentzia sistema lokalean adierazita eduki behar du. Hau ondorengo murriztapenaren bidez adierazten da:

$$\mathbf{q}_R(\mathbf{x}) = \mathbf{R}(\mathbf{q}_N) \bar{\mathbf{v}}_N^L - \mathbf{R}(\mathbf{q}_M) \bar{\mathbf{v}}_M^L \quad (5.40)$$

5.3.2.1 Koordenada murriztapenak

Atal honetan koordenada murriztapenak garatuko dira.

5.3.2.1.1 Posizioak

3.29-n adierazi bezala, 5.40 ekuazioa linealizatu ondoren hau matrize forman ondorengo formularekin adierazten da:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{S}(\mathbf{q}_N^{(0)}, \bar{\mathbf{v}}_N^L) & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{S}(\bar{\mathbf{q}}_M^{(0)}, \bar{\mathbf{v}}_M^L) \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{R}(\mathbf{q}_N^{(0)}) \bar{\mathbf{v}}_N^L - \mathbf{R}(\mathbf{q}_M^{(0)}) \bar{\mathbf{v}}_M^L \quad (5.41)$$

Biratzte lokailuari dagokion $\mathbf{H}^{(0)}$ matrizea, ondorioz, hurrengoa da:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{(0)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{S}(\mathbf{q}_N^{(0)}, \bar{\mathbf{v}}_N^L) & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{S}(\mathbf{q}_M^{(0)}, \bar{\mathbf{v}}_M^L) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{S}_v(\mathbf{q}_N^{(0)}, \bar{\mathbf{v}}_N^L) & \mathbf{S}_v(\mathbf{q}_M^{(0)}, \bar{\mathbf{v}}_M^L) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.42)$$

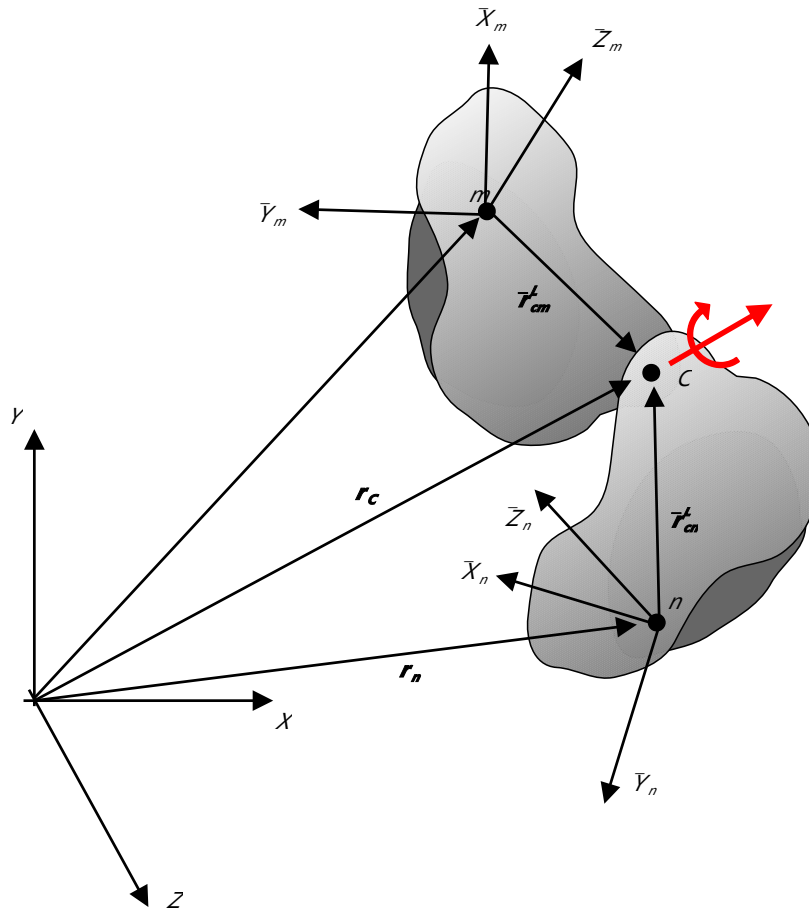


Figure 5.3: R joint

5.3.2.1.2 Abiadurak

5.40 ekuazioa deribatuz:

$$\frac{\partial \mathbf{q}_R(\mathbf{x})}{\partial t} = \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{q}_N) \bar{\mathbf{v}}_N^L - \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{q}_M) \bar{\mathbf{v}}_M^L \quad (5.43)$$

$\dot{\mathbf{H}}^{(0)}$ matrizea ondorengoa da:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{H}}^{(0)} &= \frac{\partial \mathbf{H}^{(0)}}{\partial t} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{S}(\dot{\mathbf{q}}_N^{(0)}, \bar{\mathbf{v}}_N^L) & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{S}(\dot{\mathbf{q}}_M^{(0)}, \bar{\mathbf{v}}_M^L) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{S}_v(\dot{\mathbf{q}}_N^{(0)}, \bar{\mathbf{v}}_N^L) & \mathbf{S}_v(\dot{\mathbf{q}}_M^{(0)}, \bar{\mathbf{v}}_M^L) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (5.44)$$

5.3.2.1.3 Azelerazioak

Azelerazio murriztapenak murriztapenen ekuazioak berriz ere deribatuz lortzen dira:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{q}_R(\mathbf{x})}{\partial t^2} = \ddot{\mathbf{R}}(\mathbf{q}_N) \bar{\mathbf{v}}_N^L - \ddot{\mathbf{R}}(\mathbf{q}_M) \bar{\mathbf{v}}_M^L \quad (5.45)$$

$\ddot{\mathbf{H}}^{(0)}$ matrizea ondorengoa da:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{H}}^{(0)} &= \frac{\partial \dot{\mathbf{H}}^{(0)}}{\partial t} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{S}(\ddot{\mathbf{q}}_N^{(0)}, \bar{\mathbf{v}}_N^L) & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{S}(\ddot{\mathbf{q}}_M^{(0)}, \bar{\mathbf{v}}_M^L) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{S}_v(\ddot{\mathbf{q}}_N^{(0)}, \bar{\mathbf{v}}_N^L) & \mathbf{S}_v(\ddot{\mathbf{q}}_M^{(0)}, \bar{\mathbf{v}}_M^L) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (5.46)$$

5.3.2.2 Indar murriztapenak

Kasu honetan, bektore partekatu bat adierazten duen \mathbf{G} matrizea ondorengoa da:

$$\mathbf{G}_{CN} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{G}(\mathbf{q}_N, \bar{\mathbf{v}}_N^L) \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

Non:

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}_N, \bar{\mathbf{v}}_N^L) = \begin{bmatrix} 0 & (\mathbf{R}(\mathbf{q}) \bar{\mathbf{v}}_N^L)_z & -(\mathbf{R}(\mathbf{q}) \bar{\mathbf{v}}_N^L)_y \\ -(\mathbf{R}(\mathbf{q}) \bar{\mathbf{v}}_N^L)_z & 0 & (\mathbf{R}(\mathbf{q}) \bar{\mathbf{v}}_N^L)_x \\ (\mathbf{R}(\mathbf{q}) \bar{\mathbf{v}}_N^L)_y & -(\mathbf{R}(\mathbf{q}) \bar{\mathbf{v}}_N^L)_x & 0 \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

Solido bat baino gehiago baldin badaude, \mathbf{G} matrizeak ondorengo itxura du:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{G}_{CN} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{G}_{CM} \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

$\left| \frac{\delta \mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda}}{\delta \mathbf{x}} \right|^{(0)}$ atalak lokailu esferiko baten dimentsio berberak ditu, baina bektorea adierazten duten eta solido bakoitzari gehitu behar zaizkion bi atal gehiago ditu. Bektore partekatuaren atala bakarrik garatuz eta $\mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda}$ -z biderkatuz:

$$\mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -(\mathbf{R}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{v}})_z \lambda_2 + (\mathbf{R}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{v}})_y \lambda_3 \\ (\mathbf{R}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{v}})_z \lambda_1 - (\mathbf{R}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{v}})_x \lambda_3 \\ -(\mathbf{R}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{v}})_y \lambda_1 + (\mathbf{R}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{v}})_x \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (5.50)$$

Deribatuz:

$$\left| \frac{\partial \mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda}}{\partial \mathbf{x}} \right|^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 4} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & -\mathbf{S}(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{v}})_z \lambda_2^{(0)} + \mathbf{S}(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{v}})_y \lambda_3^{(0)} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{S}(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{v}})_z \lambda_1^{(0)} - \mathbf{S}(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{v}})_x \lambda_3^{(0)} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & -\mathbf{S}(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{v}})_y \lambda_1^{(0)} + \mathbf{S}(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{v}})_x \lambda_2^{(0)} \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

Biratze lokailuaren espresioa lokailu esferikoaren eta partekatutako bektorearen ekuazioak batuz lortzen da.

5.3.3 Plano lokailua

Lokailu hau bi ekuazio erabiliz sortzen da. Lehenengoak solidoaren puntu batek ezaguna den plano batekiko distantzia finko bat izatea inposatzen du, eta bigarrenak partekatutako bektore bat ezartzen du biratze lokailuaren antzera.

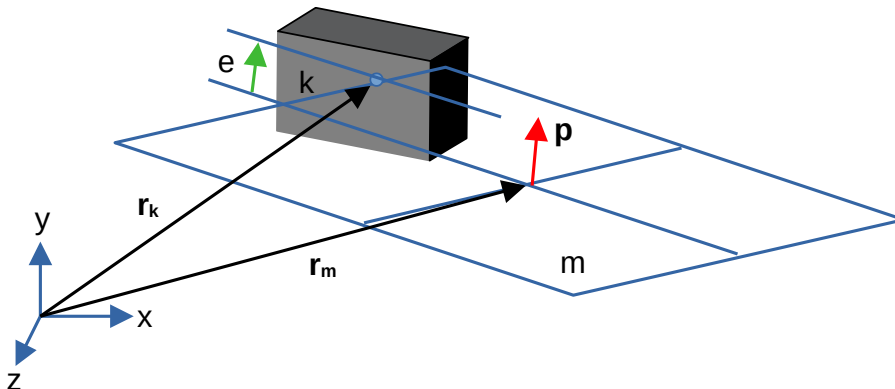


Figure 5.4: planar joint

Lehenengo ekuazioa eskalarra da, eta distantzia minimoa adierazten duen e bektoreaz eta planoarekiko normala den \mathbf{p} bektoreaz osatuta dago. Bi solidorekin:

$$\mathbf{q}_e(\mathbf{x}, e) = \bar{\mathbf{e}}_k - \bar{\mathbf{p}}_k^T \mathbf{R}_k^T \mathbf{r}_k - \bar{\mathbf{e}}_m + \bar{\mathbf{p}}_m^T \mathbf{R}_m^T \mathbf{r}_m \quad (5.52)$$

Bigarren ekuazioa 5.40 bezalakoa da:

$$\mathbf{q}_v(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{R}_k \bar{\mathbf{p}}_k - \mathbf{R}_m \bar{\mathbf{r}}_m = 0 \quad (5.53)$$

5.3.3.1 Koordenada murriztapenak

Atal honetan koordenada murriztapen guztiak garatuko dira.

5.3.3.1.1 Posizioak

5.52 eta 5.53 ekuazioak linealizatuz gero, haietariko bakoitzak 5.3-ren itxura izango du, non 5.52 eta 5.53 ekuazioak aurreko denbora-unean ebaluatu eta gero sartzen diren. Matrize forman eta linealizatu eta gero, 5.52 ekuazioak ondorengo itxura du:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{S}_e(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_k) & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{S}_e(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_m) \end{bmatrix} \mathbf{x} = \bar{\mathbf{e}}_k + \bar{\mathbf{p}}_k^T \mathbf{S}_p(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_k) \mathbf{r}_k^{(0)} + \bar{\mathbf{e}}_m - \bar{\mathbf{p}}_m^T \mathbf{S}_p(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_m) \mathbf{r}_m^{(0)} \quad (5.54)$$

Non:

$$\mathbf{S}_e(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_k) = \begin{bmatrix} (\mathbf{R}_k^{(0)} \bar{\mathbf{p}}_k)^T & \mathbf{r}_k^{T(0)} \mathbf{S}_p(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_k) \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

$$\mathbf{H}_e^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{S}_e(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_k) & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{S}_e(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_m) \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

$$\mathbf{b}_e = \bar{\mathbf{e}}_k + \bar{\mathbf{p}}_k^T \mathbf{S}_p(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_k) \mathbf{r}_k^{(0)} + \bar{\mathbf{e}}_m - \bar{\mathbf{p}}_m^T \mathbf{S}_p(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_m) \mathbf{r}_m^{(0)} \quad (5.57)$$

Beste aldetik, 5.53 ekuazioak ondorengo matrize forma du:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{S}_v(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_k) & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{S}_v(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_m) \end{bmatrix} \mathbf{x} = -\mathbf{R}_m \bar{\mathbf{p}}_m + \mathbf{S}_v(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_m) \mathbf{q}_m^{(0)} + \mathbf{R}_k \bar{\mathbf{p}}_k - \mathbf{S}_v(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_k) \mathbf{q}_k^{(0)} \quad (5.58)$$

Ekuazio honetatik ondorengo ezaguna da:

$$\begin{aligned} & \mathbf{S}_v(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_m) \mathbf{q}_m^{(0)} - \mathbf{S}_v(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_k) \mathbf{q}_k^{(0)} = \\ & = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{S}_v(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_k) & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{S}_v(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_m) \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(0)} \end{aligned} \quad (5.59)$$

$$\mathbf{H}_v^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{S}_v(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_k) & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{S}_v(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_m) \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

$$\mathbf{b}_v = -\mathbf{R}_m \bar{\mathbf{p}}_m + \mathbf{S}_v(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_m) \mathbf{q}_m^{(0)} + \mathbf{R}_k \bar{\mathbf{p}}_k - \mathbf{S}_v(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_k) \mathbf{q}_k^{(0)} \quad (5.61)$$

Plano lokailua sortzen duten bi ekuazioak matrize forman batu daitezke ondorengo ekuazioak sortzeko:

$$\mathbf{H}^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_e^{(0)} \\ \mathbf{H}_v^{(0)} \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

$$\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} \mathbf{b}_e \\ \mathbf{b}_v \end{Bmatrix} \quad (5.63)$$

5.3.3.1.2 Abiadurak

Aurreko ataletan garatutako lokailuen antzera, abiadura murriztapenak lokailuaren ekuazioak deribatuz lortzen dira, kasu honetan 5.52 eta 5.53, eta ondoren 5.9 eta 5.10 ekuazioak erabiltzen dira. Deribatuz:

$$\dot{\mathbf{q}}_e(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, e) = -\bar{\mathbf{p}}_k^T \dot{\mathbf{R}}_k^T \mathbf{r}_k - \bar{\mathbf{p}}_k^T \mathbf{R}_k^T \dot{\mathbf{r}}_k + \bar{\mathbf{p}}_m^T \dot{\mathbf{R}}_m^T \mathbf{r}_m + \bar{\mathbf{p}}_m^T \mathbf{R}_m^T \dot{\mathbf{r}}_m \quad (5.64)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_v(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{p}) = \dot{\mathbf{R}}_k \bar{\mathbf{p}}_k - \dot{\mathbf{R}}_m \bar{\mathbf{p}}_m = 0 \quad (5.65)$$

$\dot{\mathbf{H}}^{(0)}$ matrizea 5.62-ren denborarekiko deribazioa da:

$$\dot{\mathbf{H}}^{(0)} = \begin{bmatrix} \left(\dot{\mathbf{R}}_k(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)}) \bar{\mathbf{p}}_k \right)^T & \dot{\mathbf{r}}_k^{T(0)} \mathbf{S}_p(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_k) + \mathbf{r}_k^{T(0)} \mathbf{S}_p(\dot{\mathbf{q}}^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_k) \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{S}_v(\dot{\mathbf{q}}^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_k) \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

5.3.3.1.3 Azelerazioak

Azelerazio murriztapenak abiadura murriztapenak berriz ere deribatuz lortzen dira. Hala izanda, 5.64 eta 5.65 deribatuz:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_e(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, e) = & -\bar{\mathbf{p}}_k^T \ddot{\mathbf{R}}_k^T \mathbf{r}_k - 2\bar{\mathbf{p}}_k^T \dot{\mathbf{R}}_k^T \mathbf{v}_k - \bar{\mathbf{p}}_k^T \mathbf{R}_k^T \mathbf{a}_k + \\ & + \bar{\mathbf{p}}_m^T \ddot{\mathbf{R}}_m^T \mathbf{r}_m + 2\bar{\mathbf{p}}_m^T \dot{\mathbf{R}}_m^T \mathbf{v}_m + \bar{\mathbf{p}}_m^T \mathbf{R}_m^T \mathbf{a}_m \end{aligned} \quad (5.67)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_v(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \mathbf{p}) = \ddot{\mathbf{R}}_k \bar{\mathbf{p}}_k - \ddot{\mathbf{R}}_m \bar{\mathbf{p}}_m = 0 \quad (5.68)$$

$\ddot{\mathbf{H}}^{(0)}$ matrizea 5.66-ren denborarekiko deribazioa bezala adierazten da:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{H}}^{(0)} = & \begin{bmatrix} \left(\ddot{\mathbf{R}}_k(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)}) \bar{\mathbf{p}}_k \right)^T \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \\ & \left[\begin{array}{l} \dot{\mathbf{r}}_k^{T(0)} \mathbf{S}_p(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_k) + 2\dot{\mathbf{r}}_k^{T(0)} \mathbf{S}_p(\dot{\mathbf{q}}^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_k) + \mathbf{r}_k^{T(0)} \mathbf{S}_p(\ddot{\mathbf{q}}^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_k) \\ \mathbf{S}_v(\ddot{\mathbf{q}}^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_k) \end{array} \right] \end{aligned} \quad (5.69)$$

5.3.3.2 Indar murriztapenak

\mathbf{G} matrizea lortzeko lehenengo 5.52 funtzioaren deribazio bat lortu beharra dago. Solido bakar baterako:

$$d(\mathbf{q}_e(\mathbf{x}, e)) = d(\bar{\mathbf{e}} - \bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{R}^T \mathbf{r}) = 0 \quad (5.70)$$

Garatuz:

$$d(\mathbf{q}_e(\mathbf{x}, e)) = -\bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{R}^T d\mathbf{r} - \mathbf{r}^T d\mathbf{R} \bar{\mathbf{p}} \quad (5.71)$$

$d\mathbf{r}$ eta $d\mathbf{R} \bar{\mathbf{p}}$ atalak ezagunak dira:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{I}_{3 \times 3} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad (5.72)$$

$$d\mathbf{R} \bar{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} 0 & (\mathbf{R} \bar{\mathbf{p}})_z & -(\mathbf{R} \bar{\mathbf{p}})_y \\ -(\mathbf{R} \bar{\mathbf{p}})_z & 0 & (\mathbf{R} \bar{\mathbf{p}})_x \\ (\mathbf{R} \bar{\mathbf{p}})_y & -(\mathbf{R} \bar{\mathbf{p}})_x & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d\theta_x \\ d\theta_y \\ d\theta_z \end{pmatrix} = \mathbf{G}_v(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} d\theta_x \\ d\theta_y \\ d\theta_z \end{pmatrix} \quad (5.73)$$

5.73 ekuazioa aurrez azaldutako lokailuengandik da ezaguna. Horrela izanda, 5.71 matrize forman berridaztea posible da:

$$d(\mathbf{q}_e(\mathbf{x}, e)) = \begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{R}^T \mathbf{I}_{3 \times 3} & -\mathbf{r}^T \mathbf{G}_v(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ d\theta_x \\ d\theta_y \\ d\theta_z \end{pmatrix} = \mathbf{G}_e(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{p}}) d\mathbf{x} = 0 \quad (5.74)$$

Solido bakar bat adierazten duen ekuazio hau bi solido adierazteko hedatu daiteke:

$$d(\mathbf{q}_e(\mathbf{x}, e)) = \mathbf{G}_e(\mathbf{x}_k, \bar{\mathbf{p}}) d\mathbf{x}_k - \mathbf{G}_e(\mathbf{x}_m, \bar{\mathbf{p}}) d\mathbf{x}_m = 0 \quad (5.75)$$

Beste aldetik, 5.53 ekuazioa 5.48 ekuazioa deribatu den moduan deribatu daiteke. Bi matrize hauen lotura, solido bakar baten kasuan, ondorengo matrizearen bidez adierazi daiteke:

$$\mathbf{G}_p(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{p}}) = \begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{R}^T & -\mathbf{r}^T \mathbf{G}_v(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{G}_v(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}) \end{bmatrix} \quad (5.76)$$

Azkenekoz, ekuazio hau Lagrange-ren biderkatzaileez biderkatu beharra dago eta \mathbf{x} -en bidez deribatu. Lehenengoz biderketa eginez:

$$\mathbf{G}_p^T \boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} -\mathbf{R} \bar{\mathbf{p}} \lambda_1 \\ -\mathbf{G}_v^T(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}) \mathbf{r} \lambda_1 + \mathbf{G}_v^T(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (5.77)$$

\mathbf{x} -z deribatuz:

$$\left| \frac{\partial \mathbf{G}_p^T \boldsymbol{\lambda}}{\partial \mathbf{x}} \right|^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{S}(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}) \lambda_1^{(0)} \\ -\mathbf{G}_v(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}) \lambda_1^{(0)} & \mathbf{G}_f(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\lambda}) \end{bmatrix} \quad (5.78)$$

Non:

$$\mathbf{G}_f(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{S}(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{p}})_z & -\mathbf{S}(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{p}})_y \\ -\mathbf{S}(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{p}})_z & 0 & \mathbf{S}(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{p}})_x \\ \mathbf{S}(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{p}})_y & -\mathbf{S}(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{p}})_x & 0 \end{bmatrix} \mathbf{r}^{(0)} \lambda_1 + \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{S}(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{p}})_z & \mathbf{S}(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{p}})_y \\ \mathbf{S}(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{p}})_z & 0 & -\mathbf{S}(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{p}})_x \\ -\mathbf{S}(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{p}})_y & \mathbf{S}(\mathbf{q}^{(0)}, \bar{\mathbf{p}})_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{Bmatrix} \quad (5.79)$$

5.3.4 Lokailu zilindrikoa

Lokailu zilindriko batek lerro zuzen baten baitako biraketa eta haren zentzuan zeharkako higidura baimentzen ditu. Lokailua adierazteko bi ekuazio erabiliko dira: lehenengoak lerroarekiko distantzia minimoa ezartzen du eta besteak bektore partekatatu bat ezartzen du, zeina lerroaren unitatezko bektore zuzentzailea den.

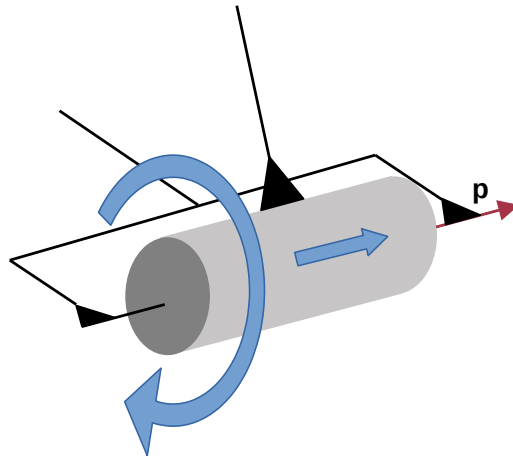


Figure 5.5: cylindrical joint

Solido batetik beste solido batean dagoen lerro batekiko distantzia minimoa ondorengo ekuazioak adierazten du:

$$\mathbf{f}_r(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{d}) = \mathbf{r}_k - [\bar{\mathbf{p}}_k^T \mathbf{R}_k^T \mathbf{r}_k] \mathbf{R}_k \bar{\mathbf{p}}_k + \mathbf{R}_k \bar{\mathbf{d}}_k + \mathbf{r}_m + [\bar{\mathbf{p}}_m^T \mathbf{R}_m^T \mathbf{r}_m] \mathbf{R}_m \bar{\mathbf{p}}_m - \mathbf{R}_m \bar{\mathbf{d}}_m \quad (5.80)$$

Bigarren ekuazioak bi solidoek partekatzen duten bektore bat adierazten du. Hura adierazteko ekuazioa aurrez biratze lokailuan 5.40 eta plano lokailuan erabili da.

5.3.4.1 Koordenada murriztapenak

Atal honetan koordenada murriztapenei dagozkien ekuazioak garatuko dira.

5.3.4.1.1 Posizioak

5.80 ekuazioak, linealizatu eta gero, ondorengo itxura du:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{S}_d(\mathbf{x}_k^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_k, \bar{\mathbf{d}}_k) \mathbf{x}_k - \mathbf{S}_d(\mathbf{x}_m^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_m, \bar{\mathbf{d}}_m) \mathbf{x}_m = \\
 & = -\left[\mathbf{r}_k^T \mathbf{S}_p(\mathbf{q}_k^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_k) \right] \mathbf{R}_k^{(0)} \bar{\mathbf{p}}_k - \mathbf{R}_k^{(0)} \bar{\mathbf{d}}_k + \\
 & - \left\{ \left[\bar{\mathbf{p}}_k^T \mathbf{R}_k^{(0)} \mathbf{r}_k^{(0)} \right] \mathbf{S}_p(\mathbf{q}_k^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_k) - \mathbf{S}_p(\mathbf{q}_k^{(0)}, \bar{\mathbf{d}}_k) \right\} \mathbf{q}_k^{(0)} + \\
 & + \left[\mathbf{r}_m^T \mathbf{S}_p(\mathbf{q}_m^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_m) \right] \mathbf{R}_m^{(0)} \bar{\mathbf{p}}_m + \mathbf{R}_m^{(0)} \bar{\mathbf{d}}_m + \\
 & + \left\{ \left[\bar{\mathbf{p}}_m^T \mathbf{R}_m^{(0)} \mathbf{r}_m^{(0)} \right] \mathbf{S}_p(\mathbf{q}_m^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_m) - \mathbf{S}_p(\mathbf{q}_m^{(0)}, \bar{\mathbf{d}}_m) \right\} \mathbf{q}_m^{(0)}
 \end{aligned} \tag{5.81}$$

Non:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_d(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{d}}) = & \left[\left[\mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{R}_k^{(0)} \bar{\mathbf{p}}_k \bar{\mathbf{p}}_k^T \mathbf{R}_k^{T(0)} \right] \right. \\
 & \left. \left[\mathbf{S}_p(\mathbf{q}_k^{(0)}, \bar{\mathbf{d}}_k) - \left[\bar{\mathbf{p}}_k^T \mathbf{R}_k^{T(0)} \mathbf{r}_k^{(0)} + \mathbf{R}_k^{(0)} \bar{\mathbf{p}}_k \mathbf{r}_k^{T(0)} \right] \mathbf{S}_p(\mathbf{q}_k^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_k) \right] \right]
 \end{aligned} \tag{5.82}$$

Azken ekuazio honetatik $\mathbf{H}^{(0)}$ -ren ekuazioa lortzen da:

$$\mathbf{H}^{(0)} = \left[\mathbf{S}_d(\mathbf{x}_k^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_k, \bar{\mathbf{d}}_k) \quad - \mathbf{S}_d(\mathbf{x}_m^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_m, \bar{\mathbf{d}}_m) \right] \tag{5.83}$$

5.3.4.1.2 Abiadurak

Abiadura murriztapenak 5.80 ekuazioa eta bektorea partekatzea ezartzen duen ekuazioa deribatuz eta 5.9 eta 5.10 ekuazioak erabiliz lortzen da:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{f}_r}{\partial t} = & \dot{\mathbf{r}}_k - \left[\bar{\mathbf{p}}_k^T \dot{\mathbf{R}}_k^T \mathbf{r}_k \right] \mathbf{R}_k \bar{\mathbf{p}}_k - \left[\bar{\mathbf{p}}_k^T \mathbf{R}_k^T \dot{\mathbf{r}}_k \right] \mathbf{R}_k \bar{\mathbf{p}}_k + \\
 & - \left[\bar{\mathbf{p}}_k^T \mathbf{R}_k^T \mathbf{r}_k \right] \dot{\mathbf{R}}_k \bar{\mathbf{p}}_k + \dot{\mathbf{R}}_k \bar{\mathbf{d}}_k - \dot{\mathbf{r}}_m + \left[\bar{\mathbf{p}}_m^T \dot{\mathbf{R}}_m^T \mathbf{r}_m \right] \mathbf{R}_m \bar{\mathbf{p}}_m + \\
 & + \left[\bar{\mathbf{p}}_m^T \mathbf{R}_m^T \dot{\mathbf{r}}_m \right] \mathbf{R}_m \bar{\mathbf{p}}_m + \left[\bar{\mathbf{p}}_m^T \mathbf{R}_m^T \mathbf{r}_m \right] \dot{\mathbf{R}}_m \bar{\mathbf{p}}_m - \dot{\mathbf{R}}_m \bar{\mathbf{d}}_m
 \end{aligned} \tag{5.84}$$

$\dot{\mathbf{H}}^{(0)}$ matrizea 5.83-ren denborarekiko deribazioa bezala adierazten da:

$$\dot{\mathbf{H}}^{(0)} = \left[\mathbf{S}_d(\mathbf{x}_k^{(0)}, \dot{\mathbf{x}}_k^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_k, \bar{\mathbf{d}}_k) \quad - \mathbf{S}_d(\mathbf{x}_m^{(0)}, \dot{\mathbf{x}}_m^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_m, \bar{\mathbf{d}}_m) \right] \tag{5.85}$$

Non:

$$S_d(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{d}}) = \frac{\partial S_d(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{d}})}{\partial t} = [\mathbf{T}, \mathbf{Y}] \quad (5.86)$$

$$\mathbf{T} = -\dot{\mathbf{R}}_k^{(0)} \bar{\mathbf{p}}_k \bar{\mathbf{p}}_k^T \mathbf{R}_k^{T(0)} - \mathbf{R}_k^{(0)} \bar{\mathbf{p}}_k \bar{\mathbf{p}}_k^T \dot{\mathbf{R}}_k^{T(0)} \quad (5.87)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} = & S_p(\dot{\mathbf{q}}_k^{(0)}, \bar{\mathbf{d}}_k) - [\bar{\mathbf{p}}_k^T \dot{\mathbf{R}}_k^{(0)} \mathbf{r}_k^{(0)} + \bar{\mathbf{p}}_k^T \mathbf{R}_k^{T(0)} \dot{\mathbf{r}}_k^{(0)} + \dot{\mathbf{R}}_k^{(0)} \bar{\mathbf{p}}_k \mathbf{r}_k^{T(0)} + \\ & + \mathbf{R}_k^{(0)} \bar{\mathbf{p}}_k \dot{\mathbf{r}}_k^{T(0)}] S_p(\mathbf{q}_k^{(0)}, \bar{\mathbf{d}}_k) - [\bar{\mathbf{p}}_k^T \mathbf{R}_k^{(0)} \mathbf{r}_k^{(0)} + \mathbf{R}_k^{(0)} \bar{\mathbf{p}}_k \mathbf{r}_k^{(0)}] S_p(\dot{\mathbf{q}}_k^{(0)}, \bar{\mathbf{d}}_k) \end{aligned} \quad (5.88)$$

5.3.4.1.3 Azelerazioak

Azelerazio murriztapenak abiadura murriztapenen ekuazioa beste behin deribatuz lortzen dira, hau da 5.84 deribatuz. Deribatuz eta multzokatuz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{f}_r}{\partial t^2} = & \ddot{\mathbf{r}}_k - \bar{\mathbf{p}}_k^T \ddot{\mathbf{R}}_k^T \mathbf{r}_k \mathbf{R}_k \bar{\mathbf{p}}_k - \bar{\mathbf{p}}_k^T \mathbf{R}_k^T \ddot{\mathbf{r}}_k \mathbf{R}_k \bar{\mathbf{p}}_k + \\ & - \bar{\mathbf{p}}_k^T \mathbf{R}_k^T \mathbf{r}_k \dot{\mathbf{R}}_k \bar{\mathbf{p}}_k - 2 \bar{\mathbf{p}}_k^T \dot{\mathbf{R}}_k^T \dot{\mathbf{r}}_k \mathbf{R}_k \bar{\mathbf{p}}_k - 2 \bar{\mathbf{p}}_k^T \dot{\mathbf{R}}_k^T \mathbf{r}_k \dot{\mathbf{R}}_k \bar{\mathbf{p}}_k + \\ & - 2 \bar{\mathbf{p}}_k^T \mathbf{R}_k^T \dot{\mathbf{r}}_k \dot{\mathbf{R}}_k \bar{\mathbf{p}}_k + \ddot{\mathbf{R}}_k \bar{\mathbf{d}}_k - \ddot{\mathbf{r}}_m + \bar{\mathbf{p}}_m^T \ddot{\mathbf{R}}_m^T \mathbf{r}_m \mathbf{R}_m \bar{\mathbf{p}}_m + \\ & + \bar{\mathbf{p}}_m^T \mathbf{R}_m^T \ddot{\mathbf{r}}_m \mathbf{R}_m \bar{\mathbf{p}}_m + \bar{\mathbf{p}}_m^T \mathbf{R}_m^T \mathbf{r}_m \ddot{\mathbf{R}}_m \bar{\mathbf{p}}_m + \\ & + 2(\mathbf{p}_m^L)^T \dot{\mathbf{R}}_m^T \dot{\mathbf{r}}_m \mathbf{R}_m \bar{\mathbf{p}}_m + 2 \bar{\mathbf{p}}_m^T \dot{\mathbf{R}}_m^T \mathbf{r}_m \dot{\mathbf{R}}_m \bar{\mathbf{p}}_m + \\ & + 2 \bar{\mathbf{p}}_m^T \mathbf{R}_m^T \dot{\mathbf{r}}_m \dot{\mathbf{R}}_m \bar{\mathbf{p}}_m - \ddot{\mathbf{R}}_m \bar{\mathbf{d}}_m \end{aligned} \quad (5.89)$$

$\ddot{\mathbf{H}}^{(0)}$ matrizeak ondorengo itxura du:

$$\ddot{\mathbf{H}}^{(0)} = [S_d(\mathbf{x}_k^{(0)}, \dot{\mathbf{x}}_k^{(0)}, \ddot{\mathbf{x}}_k^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_k, \bar{\mathbf{d}}_k) \quad -S_d(\mathbf{x}_m^{(0)}, \dot{\mathbf{x}}_m^{(0)}, \ddot{\mathbf{x}}_m^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_m, \bar{\mathbf{d}}_m)] \quad (5.90)$$

Non:

$$S_d(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{d}}) = \frac{\partial^2 S_d(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{d}})}{\partial t^2} = \left[\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} \right] \quad (5.91)$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} = -\ddot{\mathbf{R}}_k^{(0)} \bar{\mathbf{p}}_k \bar{\mathbf{p}}_k^T \mathbf{R}_k^{T(0)} - \mathbf{R}_k^{(0)} \bar{\mathbf{p}}_k \bar{\mathbf{p}}_k^T \ddot{\mathbf{R}}_k^{T(0)} - 2 \dot{\mathbf{R}}_k^{(0)} \bar{\mathbf{p}}_k \bar{\mathbf{p}}_k^T \dot{\mathbf{R}}_k^{T(0)} \quad (5.92)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} = & S_p(\dot{\mathbf{q}}_k^{(0)}, \bar{\mathbf{d}}_k) - [\bar{\mathbf{p}}_k^T \ddot{\mathbf{R}}_k^{T(0)} \mathbf{r}_k^{(0)} + \bar{\mathbf{p}}_k^T \mathbf{R}_k^{T(0)} \ddot{\mathbf{r}}_k^{(0)} + 2 \bar{\mathbf{p}}_k^T \dot{\mathbf{R}}_k^{T(0)} \dot{\mathbf{r}}_k^{(0)} + \\ & + \ddot{\mathbf{R}}_k^{(0)} \bar{\mathbf{p}}_k \mathbf{r}_k^{T(0)} + \mathbf{R}_k^{(0)} \bar{\mathbf{p}}_k \ddot{\mathbf{r}}_k^{T(0)} + 2 \dot{\mathbf{R}}_k^{(0)} \bar{\mathbf{p}}_k \dot{\mathbf{r}}_k^{T(0)}] S_p(\mathbf{q}_k^{(0)}, \bar{\mathbf{d}}_k) + \\ & - [\bar{\mathbf{p}}_k^T \mathbf{R}_k^{T(0)} \mathbf{r}_k^{(0)} + \mathbf{R}_k^{(0)} \bar{\mathbf{p}}_k \mathbf{r}_k^{T(0)}] S_p(\dot{\mathbf{q}}_k^{(0)}, \bar{\mathbf{d}}_k) \end{aligned} \quad (5.93)$$

5.3.4.2 Indar murriztapenak

\mathbf{G} matrizea lortzeko lehenik 5.80 ekuazioa deribatu beharra dago:

$$\begin{aligned} d\mathbf{f}_r(\mathbf{x}, \mathbf{d}) = & d\left(\mathbf{r} - [\bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{R}^T \mathbf{r}] \mathbf{R} \bar{\mathbf{p}} + \mathbf{R} \bar{\mathbf{d}}\right) = \\ = & d\mathbf{r} - d([\bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{R}^T \mathbf{r}] \mathbf{R} \bar{\mathbf{p}} + \mathbf{R} \bar{\mathbf{d}}) \end{aligned} \quad (5.94)$$

Ekuazio honetatik, $d\mathbf{r}$ eta $d\mathbf{R}\bar{\mathbf{d}}$ atalak aurreko ataletik ezagunak dira:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{I}_{3 \times 3} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad (5.95)$$

$$d\mathbf{R}\bar{\mathbf{d}} = \mathbf{G}_v(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{d}}) d\theta \quad (5.96)$$

$$\mathbf{G}_v(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{d}}) = \begin{bmatrix} 0 & (\mathbf{R}\bar{\mathbf{d}})_z & -(\mathbf{R}\bar{\mathbf{d}})_y \\ -(\mathbf{R}\bar{\mathbf{d}})_z & 0 & (\mathbf{R}\bar{\mathbf{d}})_x \\ (\mathbf{R}\bar{\mathbf{d}})_y & -(\mathbf{R}\bar{\mathbf{d}})_x & 0 \end{bmatrix} \quad (5.97)$$

Lehenago aipatu denez, koordenada murriztapenei dagozkien posizio murriztapenak eta atal honetan adierazten diren eta \mathbf{G} lortzeko beharrezko diren indar murriztapenak Urkullu Dr.-earen garapenetatik [1] atera dira. Matrize honen azkeneko itxura hurrengoa da:

$$d\mathbf{f}_r = \mathbf{G}_r(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{d}}) d\mathbf{x} \quad (5.98)$$

$$\mathbf{G}_r(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{d}}) = [\mathbf{G}_r(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{d}})_1 \quad \mathbf{G}_r(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{d}})_2] \quad (5.99)$$

Non:

$$\mathbf{G}_r(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{d}})_1 = \mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{R}\bar{\mathbf{p}}[\bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{R}^T] \quad (5.100)$$

$$\mathbf{G}_r(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{d}})_2 = \mathbf{R}\bar{\mathbf{p}}\mathbf{r}^T \mathbf{G}_v(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}) - [\bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{R}^T \mathbf{r}] \mathbf{G}_v(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}) + \mathbf{G}_v(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{d}}) \quad (5.101)$$

Matrize forman eta partekatutako bektorearen atalarekin bateratuz:

$$\mathbf{G}_c(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{d}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_r(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{d}})_1 & \mathbf{G}_r(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{d}})_2 \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{G}_v(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}) \end{bmatrix} \quad (5.102)$$

Azkenekoz, matrize honekin $\left| \frac{\partial \mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda}}{\partial \mathbf{x}} \right|^{(0)}$ lortzen da. Lehenengo 5.102 iraulia $\boldsymbol{\lambda}$ -z biderkatuz:

$$\mathbf{G}_c^T \boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_r(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{d}})_1^T \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \\ \mathbf{G}_r(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{d}})_2^T \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} + \mathbf{G}_v(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}})^T \begin{pmatrix} \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (5.103)$$

Eta azkenekoz \mathbf{x} -rekiko deribatuz:

$$\left| \frac{\partial \mathbf{G}_c^T \boldsymbol{\lambda}}{\partial \mathbf{x}} \right|^{(0)} = \left(\begin{array}{c} \left| \frac{\partial \mathbf{G}_r(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{d}})_1^T \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{Bmatrix}}{\partial \mathbf{x}} \right|^{(0)} \\ \left| \frac{\partial \mathbf{G}_r(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{d}})_2^T \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{Bmatrix}}{\partial \mathbf{x}} \right|^{(0)} + \left| \frac{\partial \mathbf{G}_v(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}})^T \begin{Bmatrix} \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{Bmatrix}}{\partial \mathbf{x}} \right|^{(0)} \end{array} \right) \quad (5.104)$$

5.3.5 Prisma lokailua

Matematikoki, prisma lokailu bat lerro murriztapen batez eta bi partekatutako bektore bidez adierazten da, bektoreetako bat lerroaren unitate bektore zuzentzailea izanda eta bestea plano berberean dagoen eta bektore zuzentzailearekiko perpendikularra den beste bektore bat izanda. Horrela, murriztapen honek lerroan zeharkako higidura bakarrik baimentzen du, lokailu zilindrikoaren haren biratzea ezeztatuz.

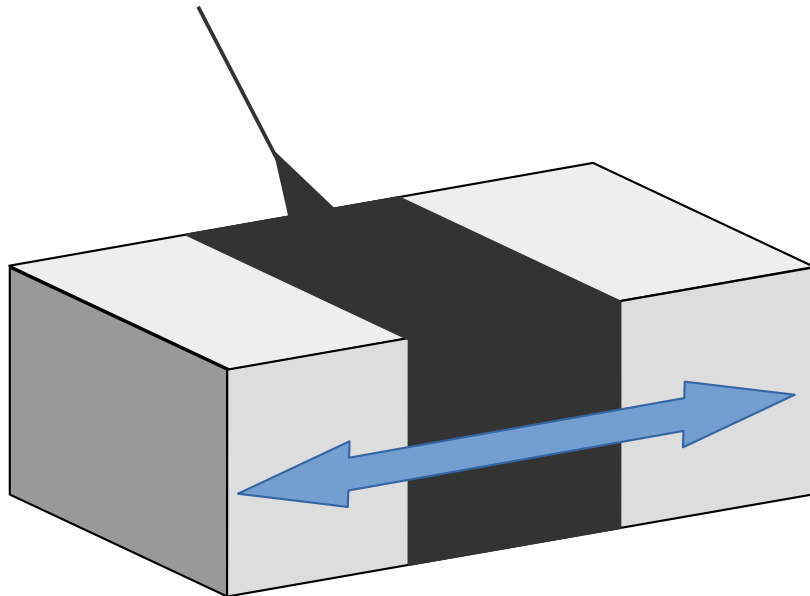


Figure 5.6: prism joint

Lokailu hau adierazten duen ekuazio sistema, ondorioz, lokailu zilindrikoarekiko berbera da, zeinari beste bektore murriztapen bat gehitu zaion.

5.3.5.1 Koordenada murriztapenak

Atal honetan koordenada murriztapenei dagozkien ekuazioak garatuko dira.

5.3.5.1.1 Posizioak

Prisma lokailu baten posizio murriztapenak, aipatu bezala, lerro murriztapen batez eta bi partekatutako bektore murriztapenez osatuta dago. Murriztapen hauek guztiak aurreko ataletan zehar linealizatu izan dira; hau dela eta, amaierako emaitzak bakarrik idatziko dira:

$$\mathbf{H}^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_d(\mathbf{x}_k^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_k, \bar{\mathbf{d}}_k) & -\mathbf{S}_d(\mathbf{x}_m^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_m, \bar{\mathbf{d}}_m) \\ \mathbf{S}_v(\mathbf{q}_k^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_k) & \mathbf{S}_v(\mathbf{q}_m^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_m) \\ \mathbf{S}_v(\mathbf{q}_k^{(0)}, \bar{\mathbf{v}}_k) & \mathbf{S}_v(\mathbf{q}_m^{(0)}, \bar{\mathbf{v}}_m) \end{bmatrix} \quad (5.105)$$

5.3.5.1.2 Abiadurak

Kasu honetan, eta denborarekiko deribatuz, $\dot{\mathbf{H}}^{(0)}$ matrizeak ondorengo itxura du:

$$\dot{\mathbf{H}}^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_d(\mathbf{x}_k^{(0)}, \dot{\mathbf{x}}_k^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_k, \bar{\mathbf{d}}_k) & -\mathbf{S}_d(\mathbf{x}_m^{(0)}, \dot{\mathbf{x}}_m^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_m, \bar{\mathbf{d}}_m) \\ \mathbf{S}_v(\dot{\mathbf{q}}_k^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_k) & \mathbf{S}_v(\dot{\mathbf{q}}_m^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_m) \\ \mathbf{S}_v(\dot{\mathbf{q}}_k^{(0)}, \bar{\mathbf{v}}_k) & \mathbf{S}_v(\dot{\mathbf{q}}_m^{(0)}, \bar{\mathbf{v}}_m) \end{bmatrix} \quad (5.106)$$

5.3.5.1.3 Azelerazioak

Azkenekoz, eta denborarekiko berriz ere deribatuz, azelerazio murriztapenek ondorengo itxura dute:

$$\ddot{\mathbf{H}}^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_d(\mathbf{x}_k^{(0)}, \dot{\mathbf{x}}_k^{(0)}, \ddot{\mathbf{x}}_k^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_k, \bar{\mathbf{d}}_k) & -\mathbf{S}_d(\mathbf{x}_m^{(0)}, \dot{\mathbf{x}}_m^{(0)}, \ddot{\mathbf{x}}_m^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_m, \bar{\mathbf{d}}_m) \\ \mathbf{S}_v(\ddot{\mathbf{q}}_k^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_k) & \mathbf{S}_v(\ddot{\mathbf{q}}_m^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_m) \\ \mathbf{S}_v(\ddot{\mathbf{q}}_k^{(0)}, \bar{\mathbf{v}}_k) & \mathbf{S}_v(\ddot{\mathbf{q}}_m^{(0)}, \bar{\mathbf{v}}_m) \end{bmatrix} \quad (5.107)$$

5.3.5.2 Indar murriztapenak

Ekuazio bat baino gehiago duten aurrez garatutako murriztapenen antzera, kasu honetan \mathbf{G} matrizeak ondorengo itxura du:

$$\mathbf{G}_p(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{d}}, \bar{\mathbf{v}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_r(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{d}})_1 & \mathbf{G}_r(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{d}})_2 \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{G}_v(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{G}_v(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{v}}) \end{bmatrix} \quad (5.108)$$

$\left| \frac{\partial \mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda}}{\partial \mathbf{x}} \right|^{(0)}$ atala lortzeko, lehenengo 5.108 irauli eta $\boldsymbol{\lambda}$ -z biderkatu beharra dago:

$$\mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda} = \left(\begin{array}{c} \mathbf{G}_r(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{d}})_1^T \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{Bmatrix} \\ \mathbf{G}_r(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{d}})_2^T \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{Bmatrix} + \mathbf{G}_v^T(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}) \begin{Bmatrix} \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{Bmatrix} + \mathbf{G}_v(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{v}}) \begin{Bmatrix} \lambda_7 \\ \lambda_8 \\ \lambda_9 \end{Bmatrix} \end{array} \right) \quad (5.109)$$

Azkenekoz, \mathbf{x} -rekiko deribatuz:

$$\left| \frac{\partial \mathbf{G}_c^T \boldsymbol{\lambda}}{\partial \mathbf{x}} \right|^{(0)} = \left(\begin{array}{c} \left| \frac{\partial \mathbf{G}_r(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{d}})_1^T \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{Bmatrix}}{\partial \mathbf{x}} \right|^{(0)} \\ \left| \frac{\partial \mathbf{G}_r(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{d}})_2^T \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{Bmatrix}}{\partial \mathbf{x}} \right|^{(0)} + \left| \frac{\partial \mathbf{G}_v^T(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}) \begin{Bmatrix} \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{Bmatrix}}{\partial \mathbf{x}} \right|^{(0)} + \left| \frac{\partial \mathbf{G}_v(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{v}}) \begin{Bmatrix} \lambda_7 \\ \lambda_8 \\ \lambda_9 \end{Bmatrix}}{\partial \mathbf{x}} \right|^{(0)} \end{array} \right) \quad (5.110)$$

5.3.6 Lokailu unibertsala

Lokailu hau bi ekuazio sortzen dute. 5.7 irudian ikus daitezenez, lehenengoak bi solidok partekatzen duten puntu bat finkatzen du, zeinak hiru murriztapen ekuazio sortzen dituen. Bigarrenak \mathbf{p}_k eta \mathbf{p}_m bektoreen arteko biderketa eskalarra konstante izatea ezartzen du, non bektore bakoitza lokailuan parte hartzen duten k eta m solido bakoitzari dagozkion. Horretarako, hautatutako bektoreak lokatuta dauden bi solidoen biratze ardatzak dira.

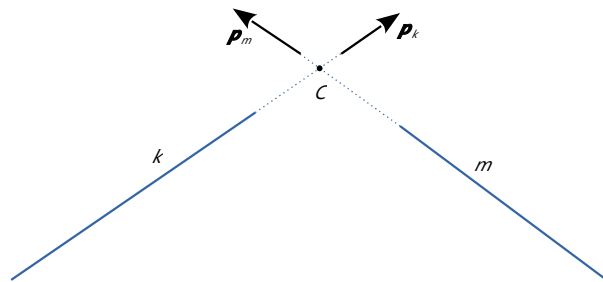


Figure 5.7: representation of the universal joint

Bi solidok partekatzen duten puntu baten ekuazioa lokailu esferikorako garatu denez, biderketa eskalar konstantearen ekuazioa bakarrik garatuko da. Bi murriztapenak adierazten dituzten ekuazioak ondorengoak dira:

$$\mathbf{q}_S(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{r}}) = \mathbf{r}_N + \mathbf{R}(\mathbf{q}_N) \bar{\mathbf{r}}_{CN}^L - \mathbf{r}_M - \mathbf{R}(\mathbf{q}_M) \bar{\mathbf{r}}_{CM}^L \quad (5.111)$$

$$\mathbf{q}_{esc}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{p}}) = (\mathbf{R}(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{p}}_k^L)^T \mathbf{R}(\mathbf{q}_m) \bar{\mathbf{p}}_m^L - a = 0 \quad (5.112)$$

Azkeneko ekuazio honetan a biderketa eskalarraren balioa da. Ekuazioak modu egokian lan egin dezan bi bektoreen arteko angeluak angelu zuzena izan behar du; zorionez, lokailu honen adierazpenik arruntena hori da.

5.3.6.1 Koordenada murriztapenak

Atal honetan lokailu unibertsalaren koordenada murriztapenei dagozkien ekuazioak garatuko dira.

5.3.6.1.1 Posizioak

5.112 linealizatuz, ondorengoa lortzen da:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{R}(\mathbf{q}_m^{(0)}) \bar{\mathbf{p}}_m^L)^T \mathbf{S}_v(\mathbf{q}_k^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_k^L) \mathbf{x}_k + (\mathbf{R}(\mathbf{q}_k^{(0)}) \bar{\mathbf{p}}_k^L)^T \mathbf{S}_v(\mathbf{q}_m^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_m^L) \mathbf{x}_m = \\ & \quad = (\mathbf{R}(\mathbf{q}_k^{(0)}) \bar{\mathbf{p}}_k^L)^T \mathbf{R}(\mathbf{q}_m^{(0)}) \bar{\mathbf{p}}_m^L + a + \\ & \quad - (\mathbf{R}(\mathbf{q}_k^{(0)}) \bar{\mathbf{p}}_k^L)^T [\mathbf{R}(\mathbf{q}_m^{(0)}) \bar{\mathbf{p}}_m^L - \mathbf{S}_v(\mathbf{q}_m^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_m^L) \mathbf{x}_m^{(0)}] + \\ & \quad - (\mathbf{R}(\mathbf{q}_m^{(0)}) \bar{\mathbf{p}}_m^L)^T [\mathbf{R}(\mathbf{q}_k^{(0)}) \bar{\mathbf{p}}_k^L - \mathbf{S}_v(\mathbf{q}_k^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_k^L) \mathbf{x}_k^{(0)}] \end{aligned} \quad (5.113)$$

Ondorioz, 5.113 ekuazio sistema matrize forman ondorengoa izango da:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 7} & \cdots & (\mathbf{R}(\mathbf{q}_m^{(0)}) \bar{\mathbf{p}}_m^L)^T \mathbf{S}_v(\mathbf{q}_k^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_k^L) & \cdots \\ & & (\mathbf{R}(\mathbf{q}_k^{(0)}) \bar{\mathbf{p}}_k^L)^T \mathbf{S}_v(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{p}}_m) & \cdots & \mathbf{0}_{1 \times 7} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_k \\ \vdots \\ \mathbf{x}_m \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix} = a + \quad (5.114)$$

$$+ (\mathbf{R}(\mathbf{q}_k^{(0)}) \bar{\mathbf{p}}_k^L)^T \mathbf{S}_v(\mathbf{q}_m^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_m^L) \mathbf{x}_m^{(0)} - (\mathbf{R}(\mathbf{q}_m^{(0)}) \bar{\mathbf{p}}_m^L)^T [\mathbf{R}(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{p}}_k^L - \mathbf{S}_v(\mathbf{q}_k^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_k^L) \mathbf{x}_k^{(0)}]$$

Espresio hau, modu trinkoan:

$$\mathbf{H}_{esc}(\mathbf{x}_k^{(0)}, \mathbf{x}_m^{(0)}, \mathbf{p})_{1 \times 7n} \mathbf{x} = \mathbf{b}_{esc}(\mathbf{x}_k^{(0)}, \mathbf{x}_m^{(0)}, \mathbf{p})_{1 \times 1} \quad (5.115)$$

Azkenekoz, lokailu unibertsalaren espresioa 5.114 eta 5.111-ren espresio linealizatua bata bestearen gainean jarriz lortzen da:

$$\mathbf{H}_{cr}^{(0)}(\mathbf{x}_k^{(0)}, \mathbf{x}_m^{(0)}, \mathbf{r}, \mathbf{p})_{4 \times 7n} \mathbf{x} = \mathbf{b}_{cr}(\mathbf{x}_k^{(0)}, \mathbf{x}_m^{(0)}, \mathbf{r}, \mathbf{p})_{4 \times 1} \quad (5.116)$$

Non $\mathbf{H}_{cr}^{(0)}$ matrizea ondorengoa den:

$$\mathbf{H}_{cr}^{(0)}(\mathbf{x}_k^{(0)}, \mathbf{x}_m^{(0)}, \mathbf{r}, \mathbf{p})_{4 \times 7n} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_s^{(0)}(\mathbf{x}_k^{(0)}, \mathbf{x}_m^{(0)}, \mathbf{r}) \\ \mathbf{H}_{esc}^{(0)}(\mathbf{x}_k^{(0)}, \mathbf{x}_m^{(0)}, \mathbf{p}) \end{bmatrix} \quad (5.117)$$

Eta \mathbf{b}_{cr} bektorea:

$$\mathbf{b}_{cr}(\mathbf{x}_k^{(0)}, \mathbf{x}_m^{(0)}, \mathbf{r}, \mathbf{p})_{4 \times 7n} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_s(\mathbf{x}_k^{(0)}, \mathbf{x}_m^{(0)}, \mathbf{r}) \\ \mathbf{b}_{esc}(\mathbf{x}_k^{(0)}, \mathbf{x}_m^{(0)}, \mathbf{p}) \end{bmatrix} \quad (5.118)$$

5.3.6.1.2 Abiadurak

Abiadura murriztapenak adierazten dituen $\dot{\mathbf{H}}^{(0)}$ matrizea $\mathbf{H}^{(0)}$ matrizea denborarekiko deribatuz lortzen da. Pauso hau dagoeneko garatu egin da lokailu esferikoan, eta ondorioz biderketa eskalarraren espresioa bakarrik garatuko da hemen:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_{esc}^{(0)} = \frac{\partial \mathbf{H}_{esc}^{(0)}}{\partial t} = & \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 7} & \cdots & (\dot{\mathbf{R}}(\mathbf{q}_m^{(0)}) \bar{\mathbf{p}}_m^L)^T \mathbf{S}_v(\mathbf{q}_k^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_k^L) + (\mathbf{R}(\mathbf{q}_m^{(0)}) \bar{\mathbf{p}}_m^L)^T \mathbf{S}_v(\dot{\mathbf{q}}_k^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_k^L) & \cdots \\ (\dot{\mathbf{R}}(\mathbf{q}_k^{(0)}) \bar{\mathbf{p}}_k^L)^T \mathbf{S}_v(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{p}}_m) + (\mathbf{R}(\mathbf{q}_k^{(0)}) \bar{\mathbf{p}}_k^L)^T \mathbf{S}_v(\dot{\mathbf{q}}_m^j, \bar{\mathbf{p}}_m) & \cdots & \mathbf{0}_{1 \times 7} \end{bmatrix} \\ & (5.119) \end{aligned}$$

Non biratze matrizearen deribazioa 3.16 den.

5.3.6.1.3 Azelerazioak

$\ddot{\mathbf{H}}^{(0)}$ matrizea, zeina azelerazio murriztapenatarako beharrezkoa den, 5.119 denborarekiko berriz ere deribatuz lortzen da. Abiadurekin egin den bezala, biderketa eskalarraren matrizea bakarrik garatuko da:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{H}}_{esc}^{(0)} &= \frac{\partial \mathbf{H}_{esc}^{(0)}}{\partial t} = [\mathbf{0}_{1 \times 7} \quad \dots \\ & (\ddot{\mathbf{R}}(\mathbf{q}_m^{(0)}) \bar{\mathbf{p}}_m^L)^T \mathbf{S}_v(\mathbf{q}_k^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_k^L) + 2(\dot{\mathbf{R}}(\mathbf{q}_m^{(0)}) \bar{\mathbf{p}}_m^L)^T \mathbf{S}_v(\dot{\mathbf{q}}_k^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_k^L) + (\mathbf{R}(\mathbf{q}_m^{(0)}) \bar{\mathbf{p}}_m^L)^T \mathbf{S}_v(\ddot{\mathbf{q}}_k^{(0)}, \bar{\mathbf{p}}_k^L) \quad \dots \\ & (\ddot{\mathbf{R}}(\mathbf{q}_k^{(0)}) \bar{\mathbf{p}}_k^L)^T \mathbf{S}_v(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{p}}_m) + 2(\dot{\mathbf{R}}(\mathbf{q}_k^{(0)}) \bar{\mathbf{p}}_k^L)^T \mathbf{S}_v(\dot{\mathbf{q}}_m^j, \bar{\mathbf{p}}_m) + (\mathbf{R}(\mathbf{q}_k^{(0)}) \bar{\mathbf{p}}_k^L)^T \mathbf{S}_v(\ddot{\mathbf{q}}_m^j, \bar{\mathbf{p}}_m) \\ & \quad \dots \quad \mathbf{0}_{1 \times 7}] \end{aligned} \quad (5.120)$$

Non biratze matrizearen bigarren deribazioa 3.41 den.

5.3.6.2 Indar murriztapenak

\mathbf{G} matrizea 5.111 eta 5.112 ekuazioei higidura infinitesimal bat ezarriz lortzen da. 5.111-ren higidura infinitesimalak dagoeneko dagokion atalean garatu direnez, kasu honetan 5.112-ri dagozkion ekuazioak bakarrik garatuko dira. Emaitza ondorengoa da:

$$\mathbf{q}_{esc}(\mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{p}}_k^L) d\mathbf{x}_k + \mathbf{q}_{esc}(\mathbf{q}_m, \bar{\mathbf{p}}_m^L) d\mathbf{x}_m = 0 \quad (5.121)$$

Non:

$$\mathbf{q}_{esc}(\mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{p}}_k^L) = [\mathbf{0}_{1 \times 3} \quad (\mathbf{R}(\mathbf{q}_m) \bar{\mathbf{p}}_m^L)^T \mathbf{q}_g(\mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{p}}_k^L)] \quad (5.122)$$

n solidorentzat, matrize forman ondorengo itxura du:

$$[\mathbf{0}_{1 \times 6} \quad \dots \quad \mathbf{q}_{esc}(\mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{p}}_k^L) \quad \dots \quad \mathbf{q}_{esc}(\mathbf{q}_m, \bar{\mathbf{p}}_m^L) \quad \dots \quad \mathbf{0}_{1 \times 6}] \begin{pmatrix} d\mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ d\mathbf{x}_k \\ \vdots \\ d\mathbf{x}_m \\ \vdots \\ d\mathbf{x}_n \end{pmatrix} = 0 \quad (5.123)$$

Hau da:

$$\mathbf{G}_{esc}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{p})_{1 \times 6n} d\mathbf{x} = 0 \quad (5.124)$$

Lokailu unibertsalaren gainontzeko baldintzak batuz, \mathbf{G} matrizea lortzen da:

$$\mathbf{G}_{cr}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{r}, \mathbf{p})_{4 \times 6n} d\mathbf{x} = 0 \quad (5.125)$$

Non:

$$\mathbf{G}_{cr}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_s(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{r}) \\ \mathbf{G}_{esc}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{p}) \end{bmatrix} \quad (5.126)$$

Azkeneko matrize honetatik hasita, $\left| \frac{\partial \mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda}}{\partial \mathbf{x}} \right|^{(0)}$ atala lehenengoz 5.126-ren iraulitako matrizea $\boldsymbol{\lambda}$ bektoreaz biderkatuz lortzen da:

$$\mathbf{G}_{cr}^T \boldsymbol{\lambda} = \left\{ \mathbf{G}_s^T \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} + \mathbf{G}_{esc}^T \begin{bmatrix} \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix} \right\} \quad (5.127)$$

Azkenekoz, \mathbf{x} -rekiko deribatuz:

$$\left| \frac{\partial \mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda}}{\partial \mathbf{x}} \right|^{(0)} = \left\{ \left| \frac{\partial \mathbf{G}_s^T \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}}{\partial \mathbf{x}} \right|^{(0)} + \left| \frac{\partial \mathbf{G}_{esc}^T \begin{bmatrix} \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix}}{\partial \mathbf{x}} \right|^{(0)} \right\} \quad (5.128)$$

5.3.7 Kuaternioiaren araua eta haren deribazioak

Kuaternioiaren araua ez da murriztapen bat orain arte azaldutako gainerako murriztapenak ulertu daitezkeen moduan, baina hala balitz bezala erabili da murriztapenek oreka ekuazioarengan duten eragina dela eta. Hala ere, eta gainerako murriztapenekin ez bezala, ez dago sistemarengan eragina duen indar murriztapenik.

Kuaternioiak biratze bakar bat adierazi dezan hura unitatezko izatea derrigorrezkoa da. Baldintza hau murriztapen bezala idatziz:

$$\mathbf{q}_q(\mathbf{x}) = \mathbf{q}^T \mathbf{q} - 1 = 0 \quad (5.129)$$

Ekuazio hau ez da lineala, eta ondorioz hura linealizatu beharra dago 5.1-en antzera. Linealizazio honen ondorioz 5.3-ren itxurako espresio bat lortzen da, non:

$$\mathbf{H}^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 3} & 2\mathbf{q}^{T(0)} \end{bmatrix} \quad (5.130)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{q}^{T(0)} \mathbf{q}^{(0)} + 1 \quad (5.131)$$

Abiadura murriztapenak 5.129 deribatuz lortzen dira:

$$\frac{\partial \mathbf{q}_q(\mathbf{x})}{\partial t} = 2 \mathbf{q}^T \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (5.132)$$

Eta murriztapenaren ekuazio linealizatua 5.6-tik lortzen da. Horretarako:

$$\left| \frac{\partial \mathbf{q}_q(\mathbf{x})}{\partial t} \right|^{(0)} = 2 \mathbf{q}^{T(0)} \dot{\mathbf{q}}^{(0)} \quad (5.133)$$

$$\dot{\mathbf{H}}^{(0)} = \frac{\partial \mathbf{H}^{(0)}}{\partial t} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 3} & 2 \dot{\mathbf{q}}^{T(0)} \end{bmatrix} \quad (5.134)$$

Azkenekoz, azelerazio murriztapenak 5.132 deribatuz lortzen dira:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{q}_q(\mathbf{x})}{\partial t^2} = 2 \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} + 2 \mathbf{q}^T \ddot{\mathbf{q}} = 0 \quad (5.135)$$

Azelerazio murriztapenaren ekuazio linealizatua 5.12-tik lortzen da. Horretarako:

$$\left| \frac{\partial^2 \mathbf{q}_q(\mathbf{x})}{\partial t^2} \right|^{(0)} = 2 \dot{\mathbf{q}}^{T(0)} \dot{\mathbf{q}}^{(0)} + 2 \mathbf{q}^{T(0)} \ddot{\mathbf{q}}^{(0)} \quad (5.136)$$

$$\ddot{\mathbf{H}}^{(0)} = \frac{\partial^2 \mathbf{H}^{(0)}}{\partial t^2} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 3} & 2 \ddot{\mathbf{q}}^{T(0)} \end{bmatrix} \quad (5.137)$$

Espresio hauek, gainerako murriztapenei dagozkien espresioekin batera, posizio, abiadura eta azelerazioen emaitza partikularrak lortzeko eta sistema mugatzen duen \mathbf{H} matrizea lortzeko dira beharrezkoak. Are gehiago: \mathbf{x} eta haren deribazioak niderkatzen dituen \mathbf{H} matrizea berdina izanik, \mathbf{H} matrize honek eta kuaternioiaren araua ezartzen duen matrizeak sistemaren murriztapen matrizea osatzen dute, kuaternioiak erabiliz adierazita.

Aipatu beharra dago adierazitako ekuazio hauek kuaternioi bakar bati ezartzen diotela dagokion araua. Kuaternioi bat baino gehiago erabiltzekotan, normalizatzen dituen matrizeak kuaternioiak beste ilara izango ditu, eta erabilitako matrizearen antolakuntza dela medio, kuaternioi bakoitzari ilara bakar bat egokituko zaio haren araua gainerako kuaternioiekiko askea izan dadin.

5.4 Matrizeen muntatzea

Aurreko atalean solido bakar baten oreka ekuazioak garatu dira, eta ondoren solido anitzeko sistema baten baitan erabiliak izan daitezten

gainontzeko solidoekin batera muntatu dira haren ekuazioak. Muntatze prozesu hau murriztapenekin ere egin beharra dago, matrize bakar batek sistema osoari dagozkion murriztapenak ezartzea lortuz.

Murriztapen guztiak batzen dituen matrize hau murriztapen bakoitzari dagokion matrizea bata bestearen gainean jarriz lortzen da, murriztapenak dituzten solido guztiei dagokien murriztapena ezartzea lortuz. Horrela izanda, \mathbf{H} matrize globalak ondorengo espresioa du:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \mathbf{H}(\mathbf{q}_N, \bar{\mathbf{r}}_{Ng}^L) & \cdots & \mathbf{0}_{3 \times 7} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{H}(\mathbf{q}_N, \bar{\mathbf{r}}_{NM}^L) & \cdots & \mathbf{H}(\mathbf{q}_M, \bar{\mathbf{r}}_{MN}^L) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \quad (5.138)$$

\mathbf{G} matrizea pilatze prozedura berbera erabiliz lortzen da. \mathbf{H} zein \mathbf{G} matrizeak, sistemaren murriztapen guztiak haren baitan dituenean, sistemaren matrize Jacobiarra izena jasotzen du. Matrize hau, aurrez aipatu denez, ondo egokituta egon behar da [134] eta haren azpiespazio hutsa konstantea izan behar da [133,134] egonkortasun arazoak ekiditeko.

Azkenekoz, inposatutako murriztapen guztiak haren baitan dituen $\left. \frac{\delta \mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda}}{\delta \mathbf{x}} \right|_0$ matrizea diagonalaki antolatuta dagoen matrize bat da, zeinaren diagonalaren atal bakoitza posizio bakoitzean parte hartzen duten solidoei dagozkien matrizeen gehiketa den.

Formulazio hau ondorengo ekuazioaren bidez adierazten da:

$$\left. \frac{\delta \mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda}}{\delta \mathbf{x}} \right|_{total}^{(0)} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^j \left. \frac{\delta \mathbf{G}_i^T \boldsymbol{\lambda}_i}{\delta \mathbf{x}_i} \right|_1^{(0)} & \mathbf{0}_{6 \times 7} & \cdots & \mathbf{0}_{6 \times 7} \\ \mathbf{0}_{6 \times 7} & \sum_{i=1}^j \left. \frac{\delta \mathbf{G}_i^T \boldsymbol{\lambda}_i}{\delta \mathbf{x}_i} \right|_n^{(0)} & \cdots & \mathbf{0}_{6 \times 7} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{6 \times 7} & \mathbf{0}_{6 \times 7} & \cdots & \sum_{i=1}^j \left. \frac{\delta \mathbf{G}_i^T \boldsymbol{\lambda}_i}{\delta \mathbf{x}_i} \right|_m^{(0)} \end{bmatrix} \quad (5.139)$$

Modu honetan, 1 eta n , solidoak lokatzen dituen lokailu batek bi $\left. \frac{\partial \mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda}}{\partial \mathbf{x}} \right|_0$ matrize erabiliko ditu, non haietako bakoitza 5.139-n adierazi bezala kokatuko den; gainera, edozein solido lokailu gehiagorekin lokatuta badago dagozkion matrizeak toki berean gehituko dira.

6 Metodo implizituen egonkortasunari buruz

Metodo implizituek egonkortasun arazoak dituztela ezaguna da. Metodo hauek baldintzarik gabe izan daitezke egonkorak eta honek (teorikoki behintzat) denbora-unearen tamainak ez duela haien egonkortasuna baldintzatuko esan nahi du. Hala ere, denbora-une tamaina maximo bat badago zeinaren gainetik ezegonkortzen diren, Petzold *et al.*-ek [138] adierazi bezala.

Are gehiago, eta ohiko metodoak darabilen prozedura dela eta, ezinezkoa da lan-eremua adierazten duen egonkortasun mugak lortzeko egonkortasun analisi bat burutzea. Honek ezegonkortasunak, agertzen direnean, ustekabekoak izatea egiten du, ez bait dago haiek aurreikusteko modurik eta are gutxiago haien eragina moteltzerik. Higuera *et al.*-ek [134] arazo hauek atal gidariaren (*leading term*) baldintzatze txar bati dagokiola diote, zeinaren azpiespazio hutsa ez den konstante mantentzen koordenada minimoak erabiltzean gertatzen den moduan. Euren aldetik, Hanke *et al.*-ek [133] arazo hauek Jacobiarraren azpiespazio hutsaren biratze bati egozten dizkiote, modu honetan bi ikuspuntuak antzerakoak izanik. Ondorio hauek 2 indizedun DAEei ezartzen zaizkie, baina Jacobiarraren azpiespazio hutsaren biratzeak dakartzan arazoak indize handiagoko DAEetan ere ikusi daitezke [137]. Higuera-ek aipatutako atal gidaria (*leading term*) eta Hanke-k aipatutako Jacobiarra aurreko ataletan garatutako \mathbf{H} eta \mathbf{G} matrizeak dira.

Atal honetan ohiko metodoa azaltzen da, eta hark dituen arazoak erakusteko adibide batzuk azaltzen dira. Azkenekoz, egonkortasun analisi bat burutzea ahalbidetzen duen ordezeko metodo bat aurkezten da.

6.1 Ohiko metodoa

4.50 oreka ekuazioak eta sistemari ezarritako murriztapenek 3 indizedun DAE sistema bat sortzen dute. Murriztapenak modu orokorrean ondorengo ekuazioaren bidez idatzi daitezke:

$$\mathbf{q}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (6.1)$$

Gorputz anitzeko sistema bat adierazten duen 3 indizedun ekuazio diferentzial aljebraiko bat ebazteko ohiko prozedura ondorengoa da: lehenengoz integratzailea (Newmark, kasu honetan) ezartzen zaio koordenada orokorrak erabiliz idatzi den oreka ekuazioari, eta ondoren murriztapenak ezartzen zaizkio integratzailea ezarri eta gero eskuragai dagoen aldagai bakarrari. Posizio murriztapenak erabili badira, integratzaileak ondorengo sistemarekiko baliokide den sistema bat sortzen du:

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t + \Delta t) = \mathbf{g}_1 + \mathbf{G}_{L1}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (6.2)$$

Abiadura murriztapenak erabili badira, sistema baliokidea ondorengoa da:

$$\mathbf{A}_2 \dot{\mathbf{x}}(t + \Delta t) = \mathbf{g}_2 + \mathbf{G}_{L2}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (6.3)$$

Eta azkenekoz, azelerazio murriztapenentzat:

$$\mathbf{A}_3 \ddot{\mathbf{x}}(t + \Delta t) = \mathbf{g}_3 + \mathbf{G}_{L3}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (6.4)$$

Non azpi-indize desberdinak dituzten \mathbf{g} parametroak murriztapenak jadanik ezarri zaizkion oreka ekuazioaren bektore askeak diren. 6.1 ekuazioaz adierazitako murriztapenak linealizatu beharra dago, eta linealizazioa sistemari inposatzen zaizkion murriztapen motaren araberakoa izango da. 3 indizedun formulazio baten kasuan, eta aurreko ataletan ikusi bezala, 6.1 ekuazioak ondorengo itxura izango du:

$$\mathbf{H}_L \mathbf{x}(t + \Delta t) = \mathbf{b}_L \quad (6.5)$$

Ohiko metodoaren diagrama, sistemari ezarritako murriztapenak direnak direla, ondorengoa da:

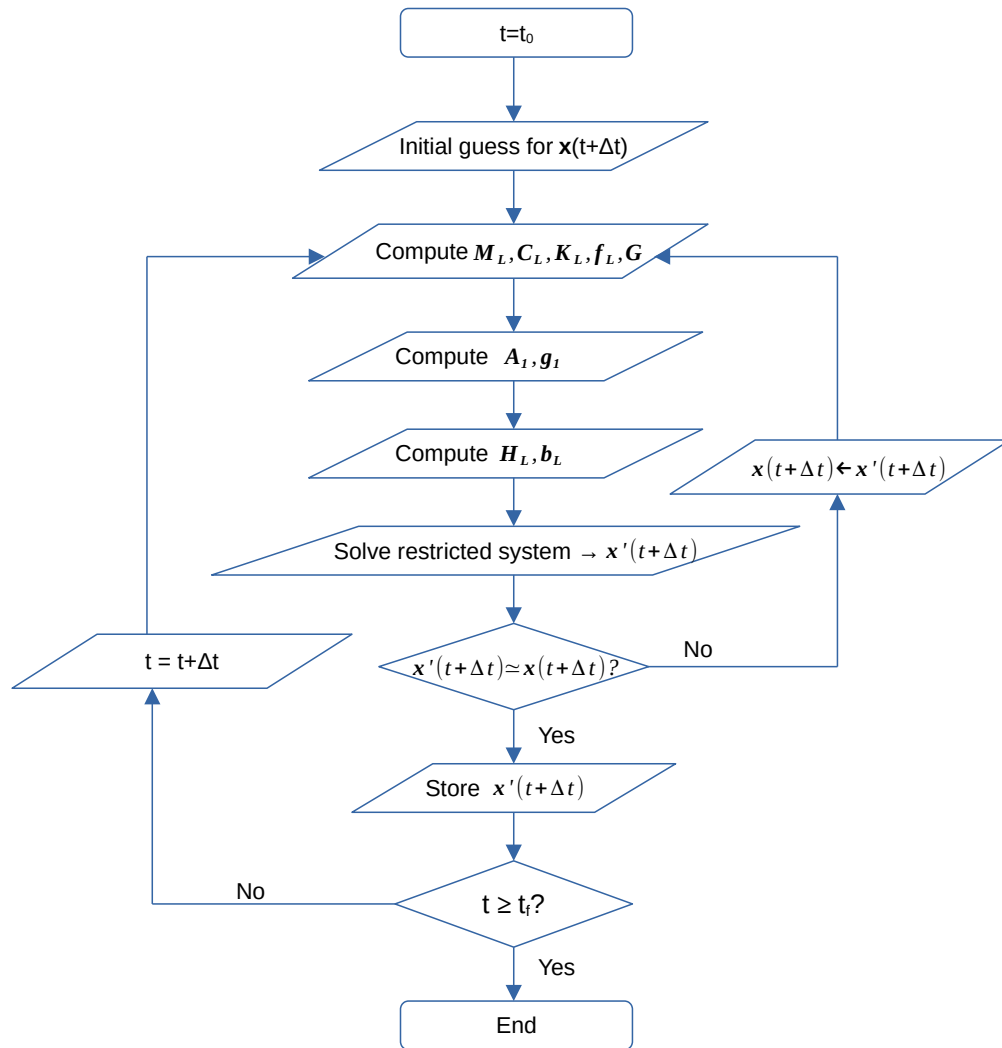


Figure 6.1: workflow of the traditional approach

Metodo honek, zoritxarrez, murriztapen mota bat bakarrik ezarri diezaioke sistemari, ondorioz gainerakoak betetzea ez lortuz. Hau ondorengo arrazoitzearen bidez frogatu daiteke: Newmark erabiliz integratzeko N funtzio eta N_R murriztapen dituen sistema batean, indar ezezagunen kopurua N_R da. Horrela izanda, denbora-une bakoitzean $3N+N_R$ aldagai ezezagun ebatzi beharra dago, zeinerako $2N$ Newmark-en ekuazio, N oreka ekuazio eta $3N_R$ murriztapen ekuazio (murriztapen indarren bi deribazioak kontuan hartuta) dauden. Honek $3N+3N_R$ ekuazio ematen ditu $3N+N_R$ aldagai ezezagunentzat, eta bi zenbaki hauek berdinak izatea lortzeko modu bakarra $2N_R$ murriztapen ekuazio ez erabiltzea da. Hau da, posizioak, abiadura edo azelerazioak bakarrik erabili daitezke, baina inoiz ez bat baino gehiago aldi berean. Posizio murriztapenak ezartzeak abiadura eta azelerazio murriztapenak ez betetzea dakar, eta abiadura edo azelerazio murriztapenak ezartzeak posizio murriztapenak ez erabiltzetik sortzen den higadura parasito edo *drift* bat dakar.

Newmark-en metodoa konfiguragarria da. Aldatu daitezkeen parametroek egonkortasunean eragina dute, egonkortasun eremuaren mugen ondorengo ekuazioa sortuz:

$$\Delta t \leq \frac{1}{\omega_{max}} \sqrt{\frac{1}{0,5\alpha - \beta}} \quad (6.6)$$

Non ω_{max} integratuko den sistemaren berezko frekuentziarik altuena den. $\alpha > 0.5$ eta $\beta > 0.5\alpha$ izanda metodoak baldintzarik gabeko egonkortasuna du (A-egonkortasuna), eta $\alpha > 0.5$ eta $\beta < 0.5\alpha$ izanda metodoak baldintzapeko egonkortasuna du. Zoritxarrez ODE integratzaile hau DAE bati ezarriz gero ezinezkoa da ODEen egonkortasun analisi bat egitea. Honek denbora-une tamaina maximoa murriztea dakar (eta ondorioz eraginkortasuna ere), eta haren portaera iragarriezin bihurtzen du. Arazo hau ebazteko modu arrunt bat L-egonkortasuna duten metodoak dira, zeinek frekuentzia altuetan moteltze bat sartzen duten, hala nola HHT [139–141] metodoak, baina frekuentzia baxuetan ere gehitzen dute aipatutako moteltzea.

6.2 Adibideak

Atal honetan ohiko metodoaren egonkortasun arazoak erakusteko garatu den adibide bat aurkezten da. Atsedenean dagoen eta grabitateak eragiten dion pendulu bat da, zeinari momentu armoniko bat ezarri zaion. Teorikoki denbora-une tamaina handi batek ez luke arazorik sortu behar, baina erabilitako metodoaren arabera baliteke hau posible ez izatea ezezonkortasunak direla eta.

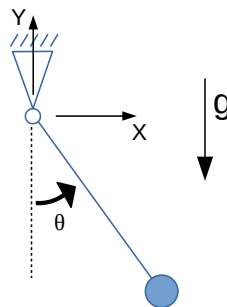


Figure 6.2: simple 2D pendulum

Ezarrirako momentua ondorengoa da:

$$\tau = \tau_0 \sin(\bar{\omega} t) \quad (6.7)$$

Penduloak unitatezko masa eta luzera du Sistema Internazionallean adierazita, eta baita $\tau_0=0.1$ eta $\bar{\omega}=0.1$ ere. Oreka ekuazioa, θ aldagaia sistemaren parametro bezala erabiliz, ondorengoa da:

$$mL^2\ddot{\theta}(t)+mgL\sin(\theta(t))-T(t)=0 \quad (6.8)$$

Ekuazio hau, linealizatu eta berrantolatu ondoren, ondorengoa da:

$$mL^2\ddot{\theta}(t)+mgL\cos(\theta_0)\theta(t)=T(t)-mgL\sin(\theta_0)+mgL\cos(\theta_0)\theta_0 \quad (6.9)$$

Ondorioz, sistemaren berezko frekuentzia ondorengoa izango litzateke:

$$\omega=\sqrt{\frac{mg\cos(\theta)}{mL}} \quad (6.10)$$

Zeinaren balio maximoa, $\theta=0$ izanda, $\omega_{max}=\sqrt{\frac{g}{L}}$ den. Sistemaren berezko frekuentzia maximoa $\omega_{max}=3.1304951$ da. Diferentzia zentralen kasuan, denbora-une tamaina maximoa ondorengoa da:

$$\Delta t_{maxs}=\frac{2}{\omega_{max}}=0.6388765 \quad (6.11)$$

Hala ere, eta buruketa modu egokian adieraztearren, ezarritako momentuaren ziklo bakoitzeko 10 puntu adieraztea desiragarria da. Honen arabera, kasu honetan, denbora-une tamaina egokia ondorengoa da:

$$\Delta t_{maxt}=\frac{2\Pi}{10\bar{\omega}}\simeq 6.28 \quad (6.12)$$

Are gehiago: grabitateak eragindako oszilazioak modu egokian adierazi nahi badira, haiek modu seguru batean adierazteko ondorengoa idatzi daiteke:

$$\Delta t_{maxg}=\frac{2\Pi}{10\omega_{max}}\simeq 0.2 \quad (6.13)$$

Aipatutako denbora-une tamaina ezberdinek sistema egonkortasunak ikertzeko egokia egiten dute, Δt_{maxt} gainerako biak baino askoz handiagoa bait da, eta baita integratzaileak behar duena baino handiagoa ere.

Diferentzia zentralak erabiliz, ondorengo emaitzak lortzen dira 0.01, 0.1, 0.6 and 0.7 denbora-une tamaintzat:

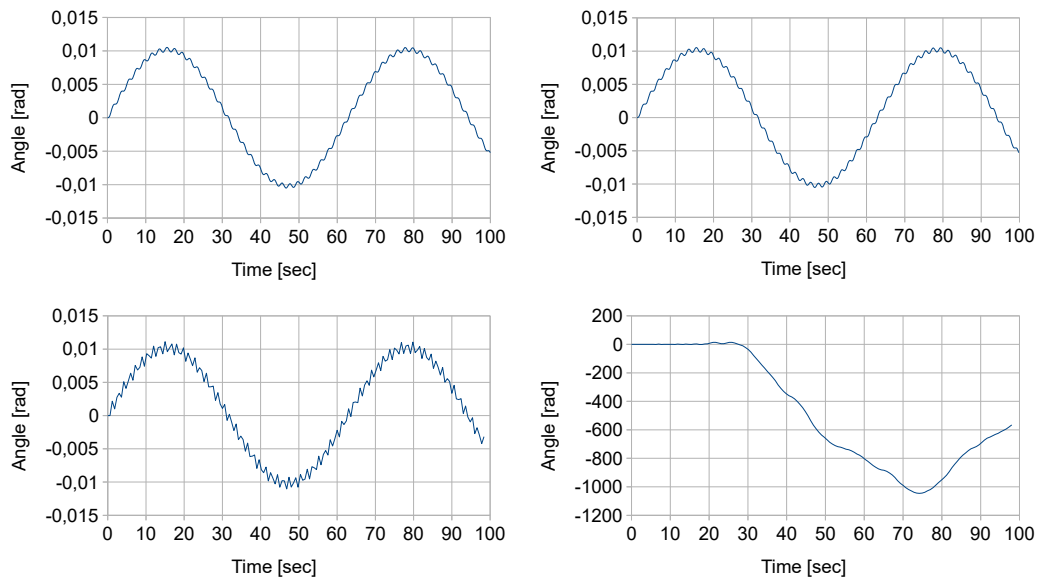


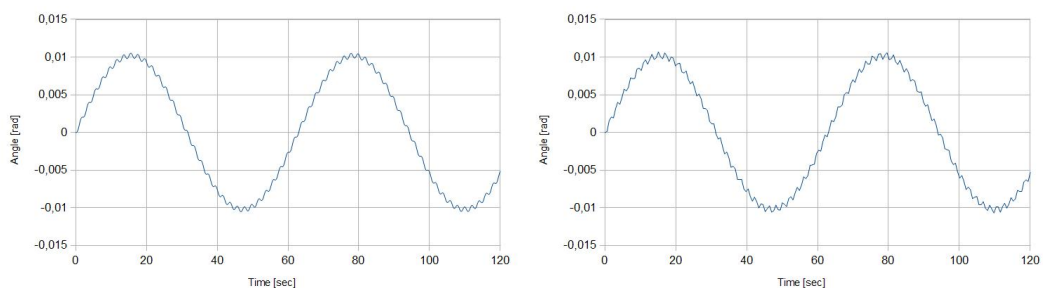
Figure 6.3: results using CD for step sizes of 0.01, 0.1, 0.6 and 0.7

6.11-n adierazi direnak baino denbora-une tamaina txikiagoentzat metodoa egonkorra da eta emaitza arrazoizkoak ematen ditu nahiz eta oszilazioa 0.6-rekin ondo ez adierazi (zeinarentzat denbora-une tamaina egokia 0.2-n estimatu den). 6.11 ekuazioak aurreikusi bezala, 0.7 tamainako denbora-une batek ezegonkortasunak dakartza.

Koordenada minimoak oraindik erabiliz baina orain Newmark-en ekuazioak erabiliz baldintzapeko egonkortasuna duten balioekin, hala nola Fox-Goodwin ($\alpha=0.5$ eta $\beta=1/12$), zeinaren denbora-une tamaina maximoa ondorengoa den:

$$\Delta t_{max} \leq \frac{1}{\omega_{max}} \sqrt{\frac{1}{0.5\alpha - \beta}} = 0.78246 \quad (6.14)$$

Emaitzak ondorengoak dira:



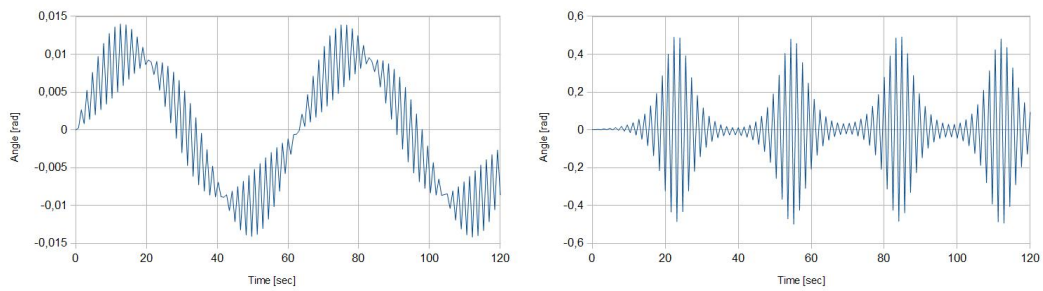


Figure 6.4: 2D pendulum using minimum coordinates and FG. Time increments of 0.1, 0.6, 0.78 and 0.79

Emaitzek aurreikuspenak betetzen dituzte 0.7 eta denbora-une tamaina txikiagoek emaitza onak ematen dituzte. 0.78 tamainako denbora-une batek indarraren eragina ongi adierazten du baina ez da grabitatearen eragina modu egokian adierazteko gai, irudian erakusten den oszilazioaren arazoia hau izanik. Eta azkenekoz 0.79 tamainako denbora-une batek integrazioa ezegonkortzen du 6.14-k aurreikusi bezala.

Sistema ohiko metodoa erabiliz ebatziko bada, biratze lokailu bat erabili beharra dago. Ohiko metodoak (2D koordenadak erabiliz) Arau Trapezoidalaren parametroak erabiliz ($\alpha=0.5$ eta $\beta=0.25$) konbergentzia egokia du, nahiz eta arrunta ez izan, ondorengo emaitzekin:

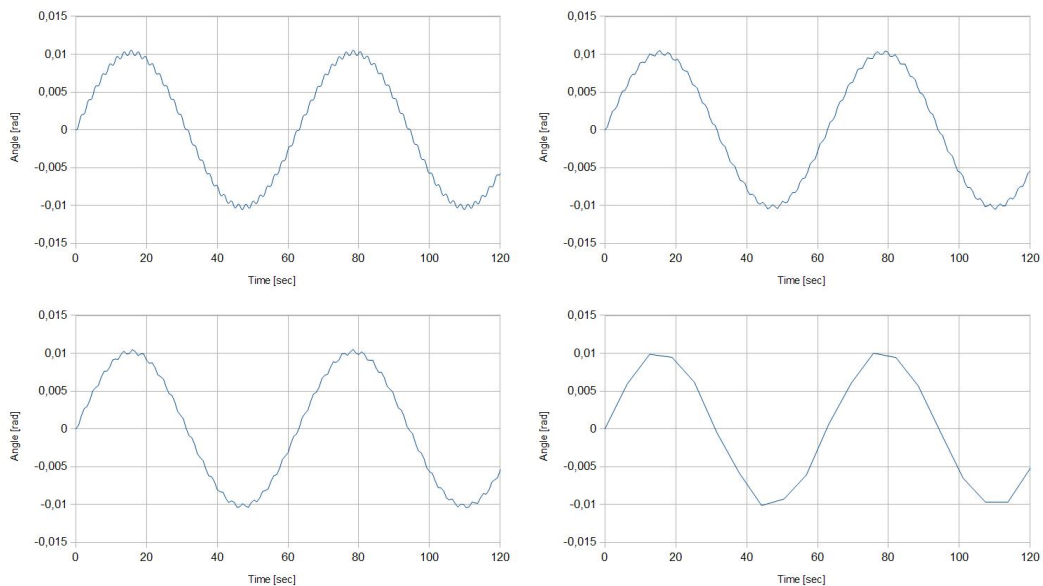


Figure 6.5: 2D pendulum, traditional method, TR. Time steps of 0.1, 0.7, 0.79 and 6

Hala ere baldintzapeko eremuari dagozkion parametroak erabiltzen badira, erabilitako denbora-une tamaina dena dela, sistemak huts egiten du teorikoki hala izan behar ez balitz ere. Fox-Goodwin-en parametroekin ($\alpha=0.5$ eta $\beta=1/12$):

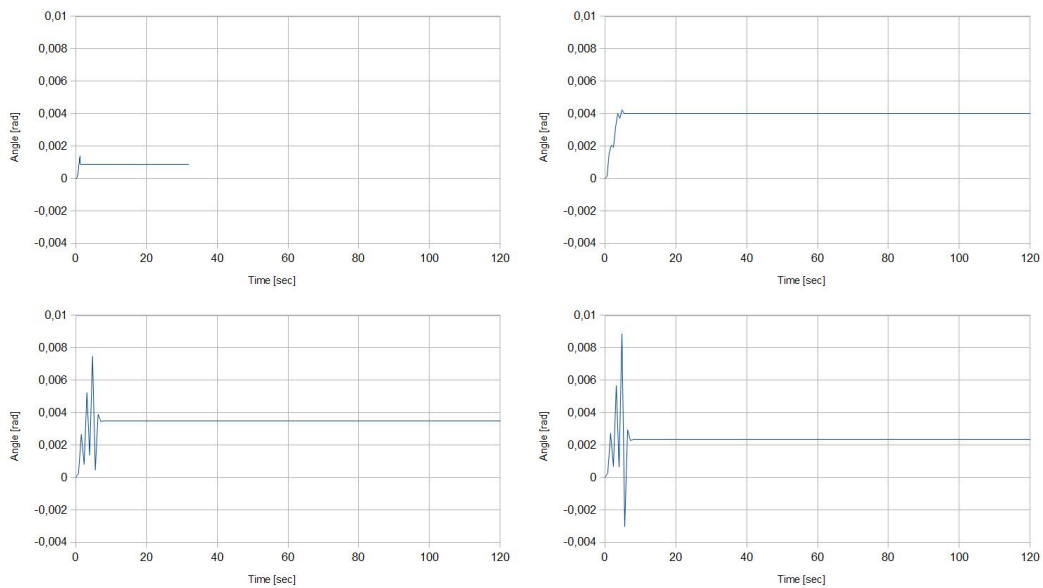


Figure 6.6: 2D pendulum, traditional method, FG. Time steps of 0.1, 0.6, 0.78 and 0.79

Koordenada minimoak erabiltzean sistemak emaitza egokiak emateak, alde batetik, eta murriztapenak (eta ohiko metodoa) erabiltzean sistema berberak huts egin izanak, bestetik, arazoa murriztapenak ezartzeko erabili den prozedura dela ondorioztatzea dakar. $\Delta t=0.1$ denbora-une tamainarako eta momentuaren zabalera ezberdinak erabiliz, penduluaren denborarekiko portaera ondorengoa da:

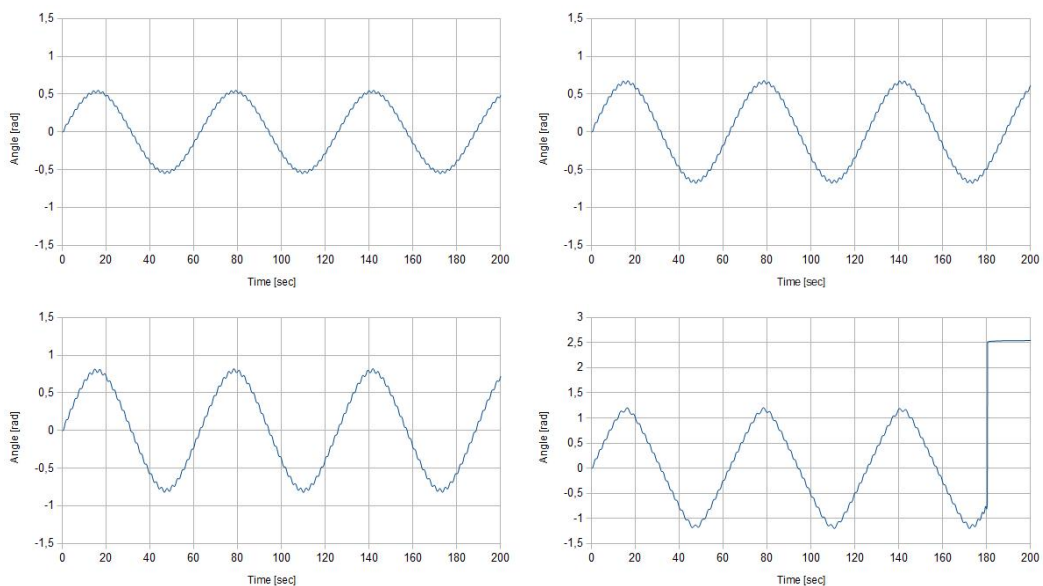


Figure 6.7: 2D pendulum, traditional method. Results for amplitudes of 5, 6, 7 and 9

Koordenada minimoen emaitzekin alderatuz ($\Delta t=0.1s$ eta Arau Trapezoidalari dagozkion Newmark-en parametroak erabiliz), hauek emaitza oso ezberdinak ematen dituzte, ondorengo grafikoetan ikus daitezkeez:

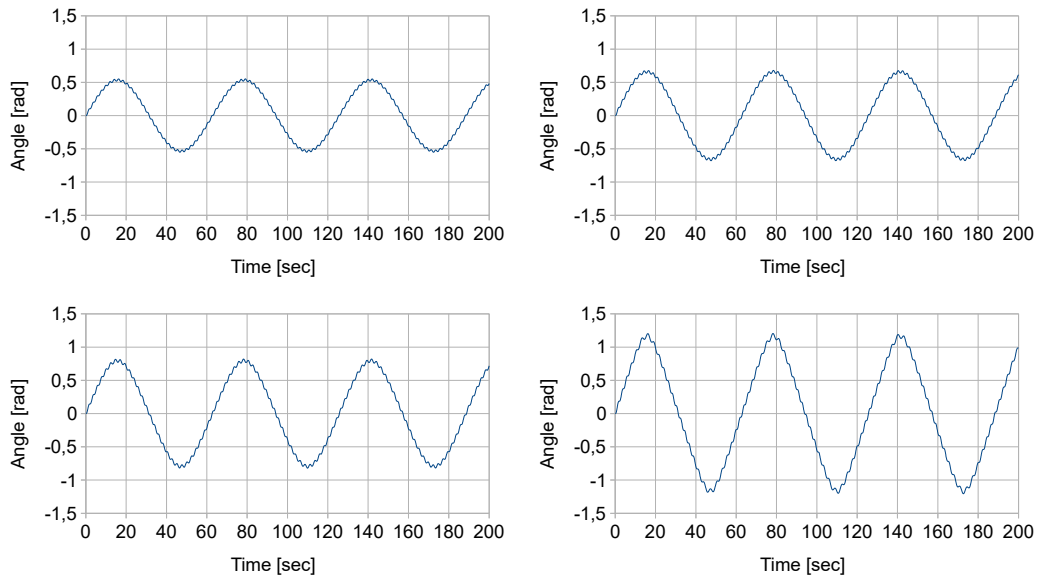


Figure 6.8: 2D pendulum, minimal coordinates, amplitudes of 5, 6, 7 and 9

6.7 grafikoen arabera konbergentzia arazo bati lotuta egon daiteke sistemaren hutsegitea, baina parametro berberentzat lortutako indar murriztapenen emaitzek ezegonkortasunaren berezko natura erakusten dute 6.9 grafikoan:

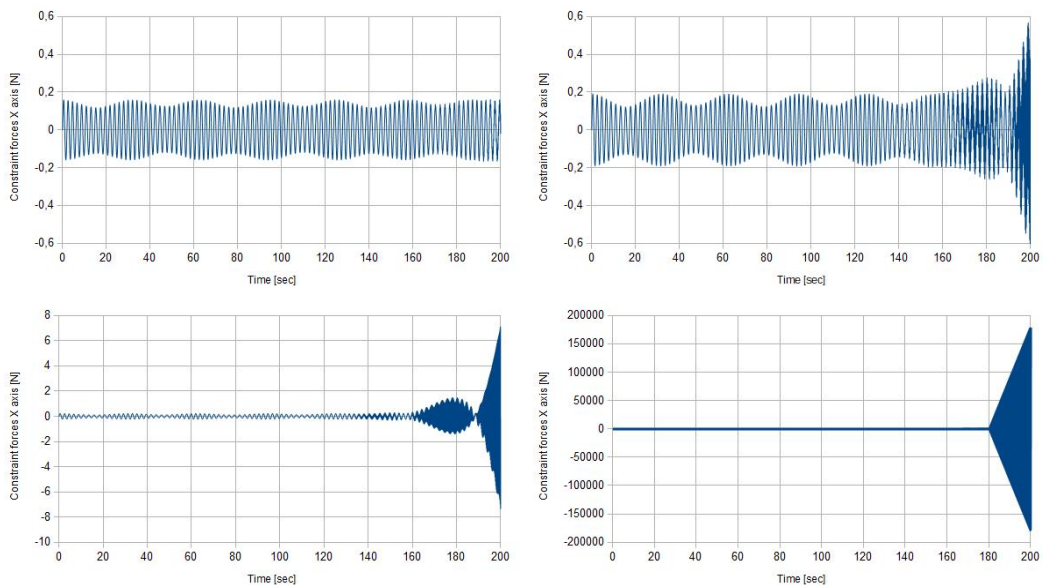


Figure 6.9: 2D pendulum, traditional method. Constraint forces for amplitudes of 5, 6, 7 and 9

Ohiko metodoarekin murriztapenak ezartzen direnean 6.9 grafikoan ikus daitekenez, ezarritako indarraren zabalera handitu ahala murriztapen indarrak ere hazi egiten dira. Honek Higuera-ek [134] diona baieztatzen du, zeinaren arabera atal gidaria (*leading term*) ongi baldintzatua egon behar den eta haren azpiespazio hutsa konstante mantendu behar den edo, Hanke-k [133] atal

berberari buruz dionez, Jacobiarraren azpiespazio hutsa konstante mantendu beharra dago eta ezin du birarik egin. Zentzu honetan murriztapen indarren atala, zeina 5.25 ekuazioaren bidez adierazten den, Lagrange-ren biderkatzaileez biderkatuta dagoen Jacobiarra da. Ondorioz, 6.9 irudiak Jacobiarraren biratzea irudikatzen du.

Eragin hau irudikatzeko erabili daitekeen beste sistema bat Negrut-ek [142] garatutako pendulu bikoitza da. Elkarri lokailu birakari batez lotutako bi barrez osatuta dago, eta lehenengo barra elementu finkoari ere lotuta dago beste biratze lokailu baten bidez. Are gehiago, sistema honek barren arteko lokailuetan malguki eta moteltzaile birakariak ditu. Sistema erraztearren 2D eremu batean garatu da, non malguki eta moteltzaile birakariak linealizaziorik behar ez duten, eta non euren berezko konstanteak dagozkien matrizeetan eduki ditzaketen. Sistemaren itxura ondorengoa da:

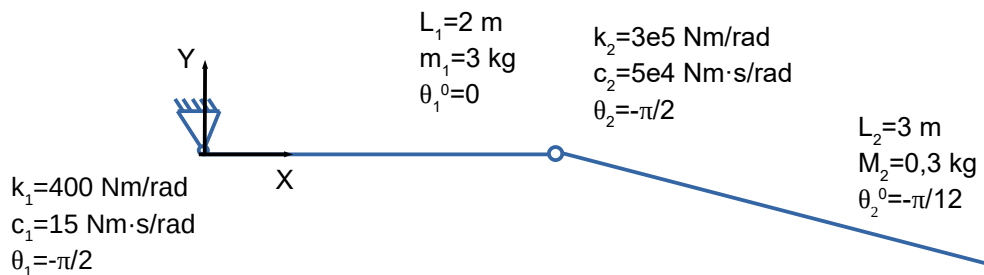


Figure 6.10: double pendulum

Adibide hau interesgarria da metodoaren balioetasuna egonkortasunarekin frogatzeko. Ohiko metodoarekin sistema honek zenbakizko moteltze handia ematen duen Newmark-en parametro sorta bat behar du, baldintzarik gabeko egonkortasunaren eremuan asko barneratuz. Arau Trapezoidalari gerturatzen zaizkion baina hala ere baldintzarik gabeko egonkortasunaren eremuan dauden parametro batzuk erabiltzean, hala nola $1e-3s$ denbora-une tamaina bat eta $\alpha=0.5000005$ eta $\beta=0.2500006$, ondorengo emaitzak lortzen dira lehen barraren angeluarentzat:

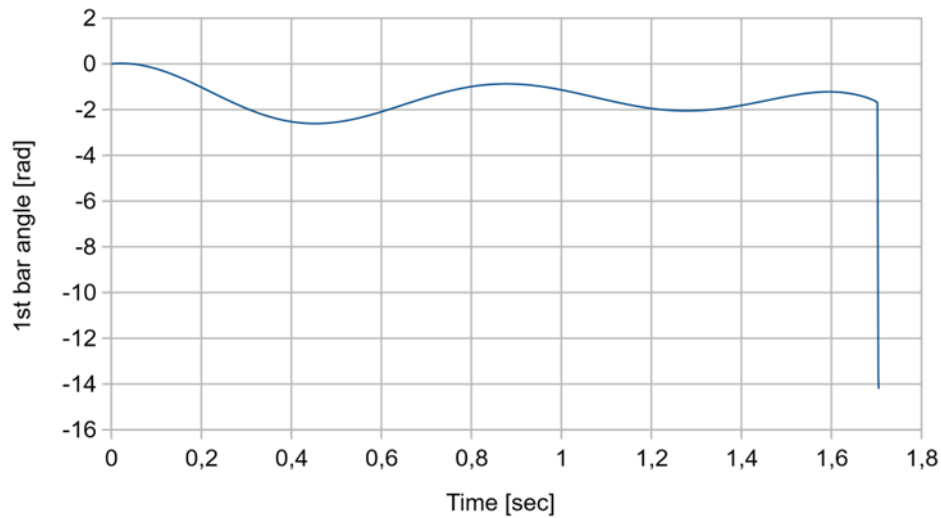


Figure 6.11: 1st bar angle of the double pendulum, traditional method

Parametro hauekin, murriztapen indarrek ondorengo itxura dute:

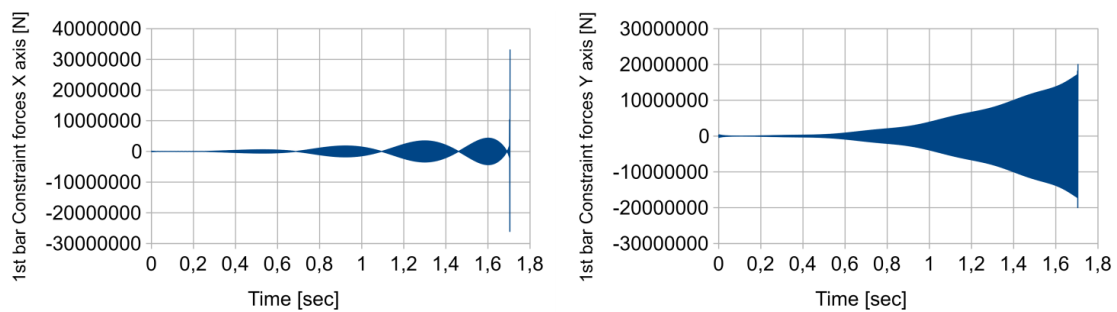


Figure 6.12: values of the constraint forces, double pendulum

Grafiko hauek erakusten dituzten emaitzek 6.11 grafikoek ematen dituzten sistemekin alderatuz, ezegonkortasuna murriztapen indarren aldatze batek sortzen duela pentsarazi dezakete, hauek azpiespazio hutsaren biratze batek eraginda egonda Hanke-k [133] aipatu bezala. Portaera hau pendulo zurrunaren adibidearen 6.9 irudian ere ikusi daiteke. Arau Trapezoidalari dagokion parametro sorta batek sistemari huts eginarazten dio, 6.11 grafikoari dagozkionak baino are txikiagoak bait dira.

6.3 Ohiko metodoaren arazoak

Sistema linealen egonkortasuna ikertzeko modurik zuzenena $t+\Delta t$ uneko aldagaiak t unearakiko adierazten dituen matrizeak sortzen duen handitzea ikertzea da, seguraski. Newmark-en kasuan eta askatasun gradu bakar batentzat, matrize hau hurrengoa da:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} \Delta t^2 \ddot{x}(t+\Delta t) \\ \Delta t \dot{x}(t+\Delta t) \\ x(t+\Delta t) \end{pmatrix} = \\
 = a & \begin{bmatrix} (4(\alpha-1)\xi\omega\Delta t + \omega^2(2\beta-1)\Delta t^2) & (-2\omega^2\Delta t^2 - 4\xi\omega\Delta t) & (-2\omega^2\Delta t^2) \\ (2(1-\alpha) + 2(\beta-\alpha)\omega^2\Delta t^2) & (2(\beta-\alpha)\omega^2\Delta t^2 + 2) & -2\alpha\omega^2\Delta t^2 \\ ((1-2\beta) + (\alpha-2\beta)2\xi\omega\Delta t) & (2 + (\alpha-\beta)4\xi\omega\Delta t) & (2 + 4\alpha\xi\omega) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta t^2 \ddot{x}(t) \\ \Delta t \dot{x}(t) \\ x(t) \end{pmatrix} \\
 & = [A] \begin{pmatrix} \Delta t^2 \ddot{x}(t) \\ \Delta t \dot{x}(t) \\ x(t) \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

Non:

$$a = \frac{1}{(2 + 4\alpha\xi\omega\Delta t + 2\beta\omega^2\Delta t^2)} \tag{6.16}$$

[A] matrizearen berezko balioak 1 baino handiagoa ez izatea inposatuz, 6.6 ekuazioa lortzen da. Ekuazio hau ODE lineal entzat egokia da, integratuko den sistemaren frekuentziak konstanteak bait dira. Sistema ez lineal entzat honen bat-bateko ez betetze batek errorearen hazte ezegonkor bat eragingo luke, zeina integrazio prozesuarentzat garrantzizkoa izan ez daitekeen; dena den, sistema egonkorra izango da ez betetze hori ez gertatzekotan, zeina pendulu sinplearekin frogatu den. Honek baldintza ez lineal entzako baldintzarik gabeko egonkortasuna duten integratzaileak garatzea ahalbidetzen du murriztapenik ez aplikatzekotan.

Sistema murriztu batean integratzeko funtzio batean oinarritutako murriztapenak (3 indizedun formulazioan), haren lehen deribazioan (2 indizedun formulazioa) edo haren bigarren deribazioan (1 indizedun formulazioa) ezarri daitezke. Metodirik azkarrena 3 indizedun formulazioa da. Sistemaren egonkortasuna ziurtatze aldera linealizatutako murriztapenak ikertzea beharrezkoa da, zeinak 6.5 ekuazioarekin adierazten diren eta zeinen arabera:

$$\mathbf{H}_L = \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \tag{6.17}$$

Oreka ekuazioa erabiliz, ondorengo moduan adierazi daitekeen sistema bat lortzen da:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_L \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}(t+\Delta t) + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_L \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t+\Delta t) + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_L \\ \mathbf{H}_L \end{bmatrix} \mathbf{x}(t+\Delta t) = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_L + \mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{b}_L \end{pmatrix} \tag{6.18}$$

$\boldsymbol{\lambda}$ ere ebazteko aldagai bezala erabiliz, 6.18 ondoren adierazi bezala berridatzi daiteke:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_L & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}(t+\Delta t) \\ \ddot{\boldsymbol{\lambda}}(t+\Delta t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_L & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t+\Delta t) \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t+\Delta t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_L & -\mathbf{G}^T \\ \mathbf{H}_L & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}(t+\Delta t) \\ \boldsymbol{\lambda}(t+\Delta t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_L \\ \mathbf{b}_L \end{Bmatrix} \quad (6.19)$$

Sistemaren berezko frekuentzia infinituki handia dela suposatuz eta 6.6 ekuazioaren arabera, sistema egonkorra izango da $0.5\alpha - \beta \leq 0$ betetzen bada. Horrela izanda, hau da Fox-Goodwin-ek hutsegitearen arrazoia hautatutako denbora-une tamaina dena dela. Newmark-en metodo klasikoa erabiliko bada $\alpha > 0.5$ eta $\beta > 0.5\alpha$ bete beharra dago, zeinak ez duen denbora-une tamaina maximorik finkatzen; hau dela eta, buruketa baldintza jakin batzuk betetzen direnean ebatzi daiteke.

Beste aldetik, ezaguna da bigarren deribazioa darabilten formulazioak egonkorragoak izan ohi direla. Ekuazio baliokidea kasu honetan hurrengoa izango litzateke:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_L & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_L & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}(t+\Delta t) \\ \ddot{\boldsymbol{\lambda}}(t+\Delta t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_L & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t+\Delta t) \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t+\Delta t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_L & -\mathbf{G}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}(t+\Delta t) \\ \boldsymbol{\lambda}(t+\Delta t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_L \\ \mathbf{c}_L \end{Bmatrix} \quad (6.20)$$

Metodo honek balio ez-hutsak masa matrizean sartzen ditu zurruntasun matrizean sartu ordez, eta ez du arazorik sortzen. Arazoa bestelakoa da: higidura parasito edo *drift* bat sortzen da hura ekiditeko ezarri beharreko posizio murriztapenik ez dagoelako. Baumgarte-ren egonkortzearekin edo antzerako proiektzio metodoren batekin ebatzi daiteke; hala ere, aukeratutako metodoa dena dela, $t+\Delta t$ eta t uneetan ebaluatutako funtzioak lotuko dira eta zurruntasun portaera izango dute, egonkortasun analisia baliogabetuz eta ondorioz egonkortasun muga aurreikustea ekidinez. Are gehiago, egonkortasun metodoek sistemari ekuazio gehiago gehitzen dizkiote, eta ondorioz konpromisozko emaitza bat lortzera behartzen dute.

6.4 Metodo ezberdin bat: koordenada minimoak

Ustekabeko egonkortasun arazoek ez dirudite buruketaren ez linealtasunari lotuta daudenik, sistemari murriztapen ez linealak ezarri izanari baizik. Ondorioz koordenada minimoak erabiliz ebatzi diren buruketek, espero daitekenez, ez dute ustekabeko portaerarik. Honen harira, eta [134]-n aipatu bezala, koordenada minimoen erabilerak DAE kualifikatu bat sortzen du. Koordenada minimoak erabiltzean murriztapenik ez dagoela eta ondorioz benetan ODE bat ebazten dela argudiatu daiteke. Dena den, koordenada minimoak darabiltzaten formulazioak ez dira orokorrak, eta hala izanda

murriztapenak erabiliz DAEak integratzeko eta arazo hau ekiditeko modu bat aurkitzea litzateke egokiena. Hau egiteko modu bat koordenada independenteen bektorea eta haren deribazioak (zeinek guztiak *manifold* multzoa osatzen duten) integratzea da, koordenada minimoek egiten dutena hain zuzen hau izanik. Hau *manifold*-aren linealizazio bat integrazioa burutzen deneko pauso berberean integratuz lortzen da. Horretarako posizio, abiadura eta azelerazio murriztapenak denak batera sistemari ezartzea beharrezkoa da, 5 atalean azaldu denez. Aldaketa guzti hauekin, prozesuaren diagrama ondorengoa da:

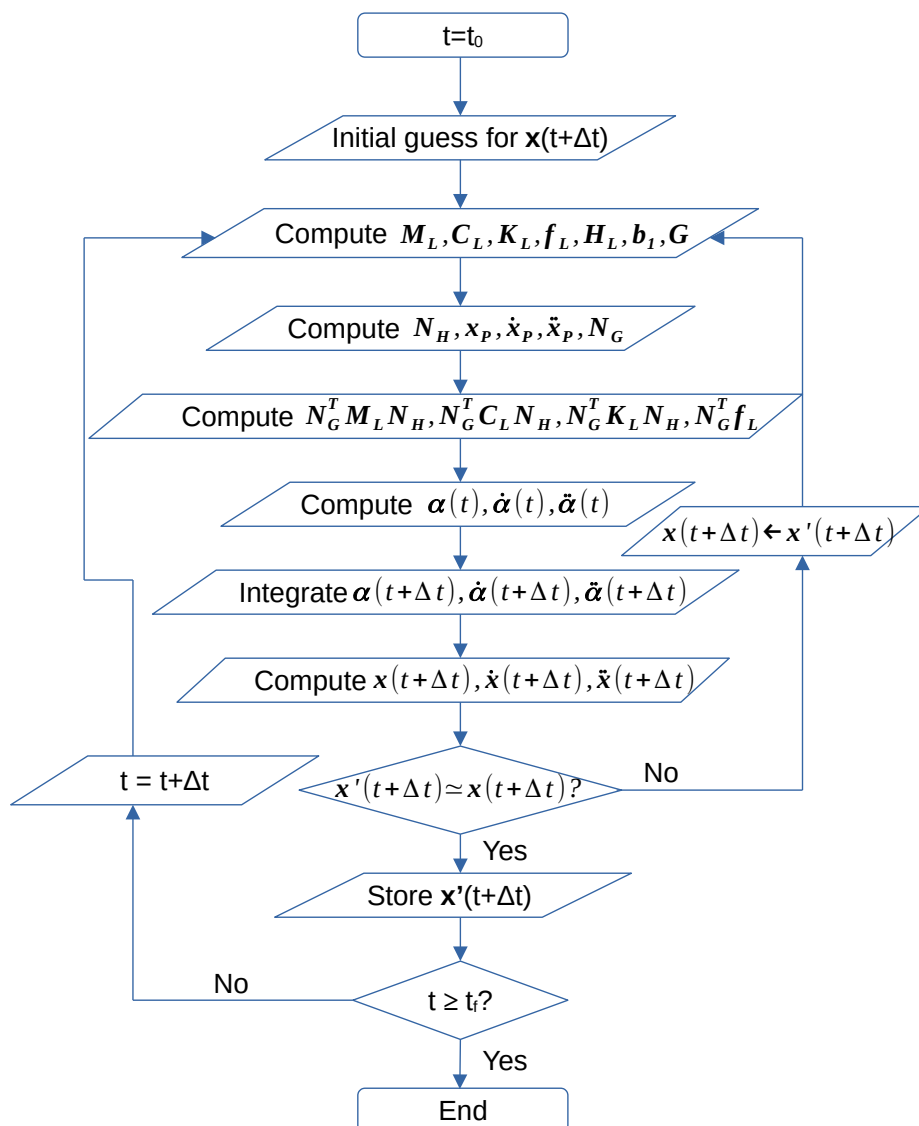


Figure 6.13: workflow of the proposed method

7 Integration using Newmark

Once the constraints are applied to the system of equations, this is ready for being integrated. This way, and after also eliminating the variables that represent the constraint forces between the involved solids, the equation system that results of it has as many unknown variables as equations. This determined system is solved iteratively.

With the equilibrium set in $t+\Delta t$, and if equation 5.27 is to be employed, constraint forces need to be known in the time instant each iteration is performed, since they are part of the matrices and vectors that form the reduced system. It is possible to extract them from the reduced equation system after applying the iterative method and before eliminating them premultiplying the equation system with the null space of the constraints Jacobian, where the only unknown is the constraints forces vector. Everything else in this equation system is known.

7.1 The integration method

Newmark's method is an implicit integration method that showcases the particularity of being configurable, which affects its stability and convergence order, being both related to each other. This theoretically allows the use of a time step as big as wanted without having stability issues. Depending on the chosen parameters it can have quadratic convergence in the limit with parameters related to the Trapezoidal Rule. It is also possible to make it conditionally stable, as with the parameters related to the Linear Acceleration or Fox-Goodwin. On these last two cases the maximum step size is given by the stability limit.

7.2 Application of the integration method

Newmark's equations are:

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta t \dot{x}(t) + (\Delta t)^2 ((0,5 - \beta) \ddot{x}(t) + \beta \ddot{x}(t+\Delta t)) \quad (7.1)$$

$$\dot{x}(t+\Delta t) = \dot{x}(t) + \Delta t ((1 - \alpha) \ddot{x}(t) + \alpha \ddot{x}(t+\Delta t)) \quad (7.2)$$

These equations transform equation 5.20, which contains vector α and its derivatives, into an equation that only has one out of these three vectors in the instant $t+\Delta t$. If vectors other than the solution vector are included they are evaluated in the instant t and are therefore known instead of unknown variables. In this case and as stated on section 6.4 a transformation for having only displacements has been chosen, this is, α , for which a previous modification of the Newmark equations is required. Acceleration related to instant $t+\Delta t$ is isolated from equation 7.1:

$$\ddot{x}(t+\Delta t) = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (x(t+\Delta t) - x(t)) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{x}(t) - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{x}(t) \quad (7.3)$$

Substituting it in the second one:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t+\Delta t) &= \frac{\alpha}{\beta \Delta t} (x(t+\Delta t) - x(t)) + \\ &- \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) \dot{x}(t) - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\alpha}{\beta} - 2 \right) \ddot{x}(t) \end{aligned} \quad (7.4)$$

These two equations can be expressed in a compact form:

$$\ddot{x}(t+\Delta t) = a_0 (x(t+\Delta t) - x(t)) - a_1 \dot{x}(t) - a_2 \ddot{x}(t) \quad (7.5)$$

$$\dot{x}(t+\Delta t) = a_5 (x(t+\Delta t) - x(t)) - a_6 \dot{x}(t) - a_7 \ddot{x}(t) \quad (7.6)$$

Moreover, these equations have to be applied exclusively to vector α and its derivatives. This is:

$$\ddot{\alpha}(t+\Delta t) = a_0 (\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)) - a_1 \dot{\alpha}(t) - a_2 \ddot{\alpha}(t) \quad (7.7)$$

$$\dot{\alpha}(t+\Delta t) = a_5 (\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)) - a_6 \dot{\alpha}(t) - a_7 \ddot{\alpha}(t) \quad (7.8)$$

Substituting in 5.20 and rearranging:

$$\begin{aligned} N_G^T \mathbf{A} \alpha(t+\Delta t) &= N_G^T (\mathbf{f}_e(t+\Delta t) + \mathbf{f}_1(t+\Delta t)) + \\ - N_G^T (\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}_p(t+\Delta t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}}_p(t+\Delta t) + \mathbf{K}_e \mathbf{x}_p(t+\Delta t)) &+ \\ + N_G^T \mathbf{M} N_H (a_0 \alpha(t) + a_1 \dot{\alpha}(t) + a_2 \ddot{\alpha}(t)) &+ \\ + N_G^T (\mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}}_{p2} + \mathbf{C} N_H) (a_5 \alpha(t) + a_6 \dot{\alpha}(t) + a_7 \ddot{\alpha}(t)) & \end{aligned} \quad (7.9)$$

Where:

$$\mathbf{A} = a_0 \mathbf{M} \mathbf{N}_H + a_5 (\mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}}_{p2} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{N}}_H) + (\mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}}_{p1} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}}_p + \mathbf{K}_e \mathbf{N}_H) \quad (7.10)$$

Form 7.9 $\boldsymbol{\alpha}(t+\Delta t)$ is obtained, and through 5.4 the complete solution is obtained. Derivatives of $\boldsymbol{\alpha}(t+\Delta t)$ are obtained through Newmark's equations 7.7 and 7.8, and lastly through 5.8 and 5.14 velocities and accelerations are obtained.

Since both $\mathbf{N}_C(t+\Delta t)$ and $\boldsymbol{\alpha}(t+\Delta t)$ are unknown, an iterative method is necessary for solving the problem in all the time instants the simulation is running.

By premultiplying with the null space of \mathbf{G}_0^T term $\mathbf{G}_0^T \boldsymbol{\lambda}(t+\Delta t)$ is removed from the equation, but this is also an inconvenience: knowing $\boldsymbol{\lambda}(t+\Delta t)$ is required for carrying on with the next iteration, as indicated by equation 5.27. This $\boldsymbol{\lambda}(t+\Delta t)$ is obtained by subtracting it from $\mathbf{G}_0^T \boldsymbol{\lambda}(t+\Delta t)$ in 5.19, hence obtaining \mathbf{G}_0^T with the last known value of $\mathbf{x}(t+\Delta t)$. This step is carried out just before the constrained equilibrium equations 7.9 are applied and the solution extracted.

Using an iterative scheme, the null space will always be calculated using the last known value of \mathbf{x} and its derivatives, from which $\boldsymbol{\alpha}(t+\Delta t)$ will be obtained. This fact is relevant, since it means that both \mathbf{N}_h and \mathbf{N}_C and the particular solutions of position, velocity and acceleration are also obtained from the last known \mathbf{x} and its derivatives, and they will be subsequently known in every moment.

7.2.1 Normalization of the solution

Although the norm of the quaternion is included in the constraints matrix, once the solution is obtained it is mandatory to normalize again both vector \mathbf{x} and its derivatives; this way it is certain that the rotation matrices obtained from it are precise and do not accumulate error. This is achieved as indicated in this section.

The normalized quaternion is obtained from a non normalized and known $\mathbf{q}^{(0)}$ through the following expression:

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{q}^{(0)}}{\sqrt{(\mathbf{q}^{(0)T} \mathbf{q}^{(0)})}} \quad (7.11)$$

The norm of the first derivative of the quaternion is extracted from the derivative of the norm of the quaternion 5.132. If $\dot{\mathbf{q}}$ fulfills the norm, it can be formulated that:

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}^{(0)} + \Delta \dot{\mathbf{q}} \quad (7.12)$$

Introducing 7.12 into 5.132 and rearranging:

$$\mathbf{q}^T \Delta \dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{q}^T \dot{\mathbf{q}}^{(0)} \quad (7.13)$$

This equation has four solutions, out of which the one being used is the one with minimum norm. Employing the quaternion for that matter:

$$\Delta \dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{q}(\mathbf{q}^T \mathbf{q})^{-1} \mathbf{q}^T \dot{\mathbf{q}}^{(0)} \quad (7.14)$$

Assuming that the quaternion \mathbf{q} is already normalized:

$$\Delta \dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{q} \mathbf{q}^T \dot{\mathbf{q}}^{(0)} \quad (7.15)$$

After this last step, the normalized vector $\dot{\mathbf{q}}$ is obtained through equation 7.12. Employing a single equation for representing it:

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}^{(0)} - \mathbf{q} \mathbf{q}^T \dot{\mathbf{q}}^{(0)} \quad (7.16)$$

Lastly, the normalized expression of the second derivative of the quaternion can be obtained from derivating the equation of the norm of the quaternion 5.135 once more. Being $\ddot{\mathbf{q}}$ a vector that fulfills the norm, it can be stated that:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \ddot{\mathbf{q}}^{(0)} + \Delta \ddot{\mathbf{q}} \quad (7.17)$$

Introducing it in 5.135 and rearranging:

$$\mathbf{q}^T \Delta \ddot{\mathbf{q}} = -\dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{q}^T \ddot{\mathbf{q}}^{(0)} \quad (7.18)$$

As with the velocity norm, it is mandatory to obtain the minimum norm solution:

$$\Delta \ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{q}(\mathbf{q}^T \mathbf{q})^{-1} (\dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{q}^T \ddot{\mathbf{q}}^{(0)}) \quad (7.19)$$

And if the quaternion is already normalized:

$$\Delta \ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{q}(\dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{q}^T \ddot{\mathbf{q}}^{(0)}) \quad (7.20)$$

Applying 7.17 a normalized expression of vector $\ddot{\mathbf{q}}$ is obtained. Expressed in a single equation:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \ddot{\mathbf{q}}^{(0)} - \mathbf{q}(\dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{q}^T \ddot{\mathbf{q}}^{(0)}) \quad (7.21)$$

8 Numerical results

The importance of multibody systems and the lack of available normalized problems with which to evaluate different existing topologies contrast sharply. The contributions of González *et al.* [143], included in the problems collection of IFToMM on its web page, are in this sense a very valuable tool that has been employed in this PhD thesis.

The methodology has been implemented on GNU Octave in the first place. Some examples have also been solved using a commercial software (MSC Adams Student Edition).

The implementation on GNU Octave has been employed mainly for analyzing precision and stability, since being an interpreted language the speed of a compiled language is not reachable.

Later, these same problems have been implemented in C in order to check their efficiency employing an optimized compiled language.

Unless said otherwise, all the examples have been developed in a 3D environment using quaternions.

8.1 Measurements

The problems obtained from the IFToMM website are compared to the solution obtained using the method explained in this PhD thesis. In these cases the parameter with which the validity of the simulation is checked is the mechanical energy. If not, the variable against which the validity is checked is mentioned for each case.

Also, and because the method employed for solving the equations is configurable, if a set of parameters belonging to the conditional stability region is employed (Linear Acceleration or Fox-Goodwin) the maximum step size for the system to be stable will be indicated.

8.2 Mechanisms

In this chapter the mechanisms modeled using GNU Octave are included. As has been exposed, models simulated using this software focus on precision and stability, leaving the efficiency aside.

8.2.1 Simple pendulum

Several different configurations are included here, all of which have in common that a simple pendulum with a point mass is employed. In the first one a resting pendulum is employed to which a harmonic torque is imposed, in a way that a stiffness appears when applying the integration method. This example has been solved employing several different methods along the elaboration process of the method developed in this document for checking the validity of the required assumptions on each step. All of the intermediate solutions have been included in section 6.2, where the corresponding reason for its employment is appointed in each case. The result obtained with the proposed method in this PhD thesis is showcased here.

The second configuration simulates a simple pendulum that starts from the horizontal position and is abandoned to the action of gravity. This example is extracted from the IFToMM Benchmark website.

8.2.1.1 Stiff simple pendulum

This example, among others, is employed in [137] for demonstrating the validity of the developed method. It is a simple pendulum that is resting to which a torque with the following expression is applied:

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_0 \sin(\bar{\omega} t) \quad (8.1)$$

The system has the following aspect:

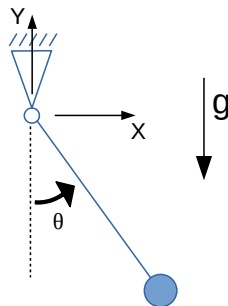
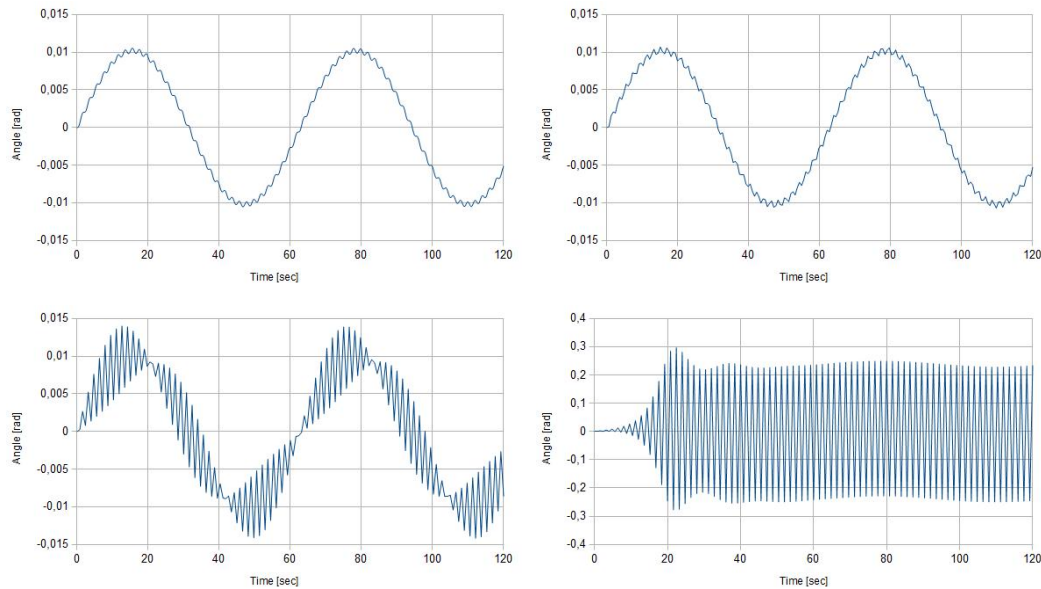


Figure 8.1: simple 2D pendulum

Results included in section 6.2 change dramatically when employing the method exposed in this PhD thesis. The following results have been obtained with a set of Newmark parameters corresponding to Fox-Goodwin instead of the Trapezoidal Rule:

**Figure 8.2:** 2D pendulum, proposed method, FG. Step sizes of 0,1, 0,6, 0,78 and 0,79

These results are more similar to the ones obtained employing minimal coordinates, as shown in figure 6.4, where the maximum step size is again $\Delta t_{max} \leq 0.78246$, and have nothing to do with the ones obtained by employing the traditional method with the same parameters as the ones employed for representing figure 6.6.

8.2.1.2 Simple pendulum with no torque applied

Lastly, a 3D modelization of the simple pendulum with the same parameters as the ones exposed in the previous example is included, with neither torques nor forces applied and whose initial position is horizontal, abandoning it afterwards to the action of gravity. This example has been modeled after the example found in the IFToMM website. Coordinate x along all the simulation time, for a step size of $0.001s$ and a set of Newmark parameters corresponding to the Trapezoidal Rule ($\alpha=0.5$ and $\beta=0.25$), presents the following aspect:

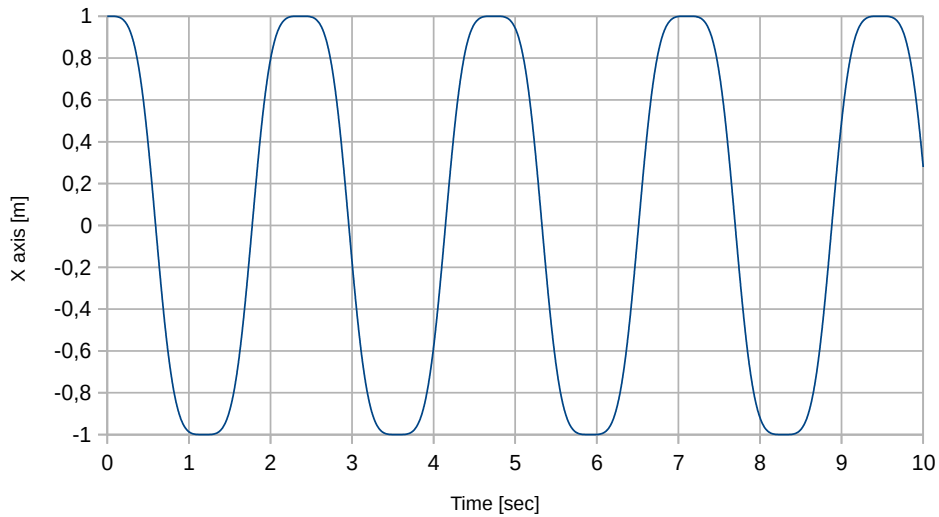


Figure 8.3: x coordinate of the 3D simple pendulum

The mechanical energy drift of the system under the same simulation conditions is:

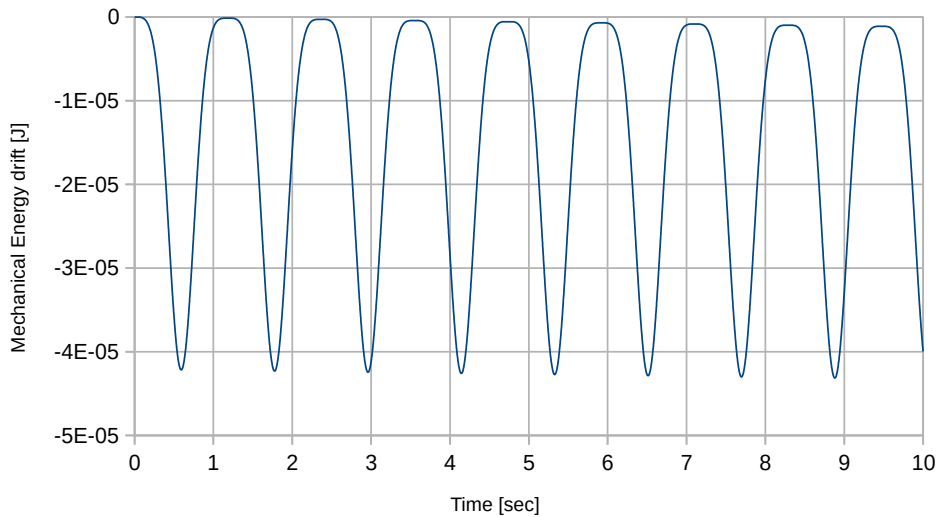


Figure 8.4: mechanical energy drift of the 3D simple pendulum

On the IFToMM Multibody website it is indicated that, for the method to be considered valid, the drift of this last plotted parameter is required to stay below $5 \cdot 10^{-5} J$. As can be appreciated in figure 8.4, this margin is fulfilled.

8.2.2 Double pendulum

The employment of the hereby presented method throws results that are completely different to the ones obtained with the traditional method as exemplified in section 6.2. The method is stable in the conditionally stable

region and with a set of parameters with the Fox-Goodwin configuration ($\alpha=0.5$ and $\beta=1/12$). For a step size of $5e-4$ s, the result for the angle of the first bar is as follows:

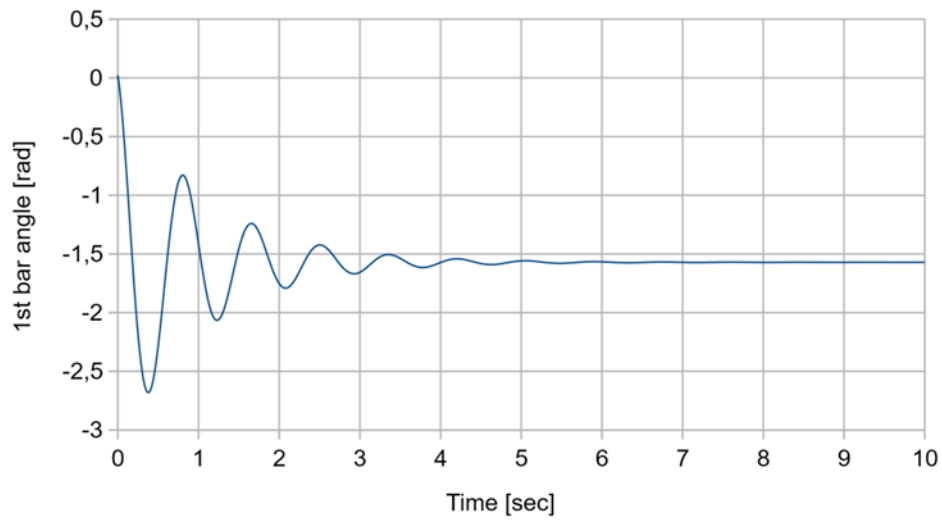


Figure 8.5: angle of the first bar of the double pendulum, FG

Furthermore, position, velocity and acceleration constraints are fulfilled as follows:

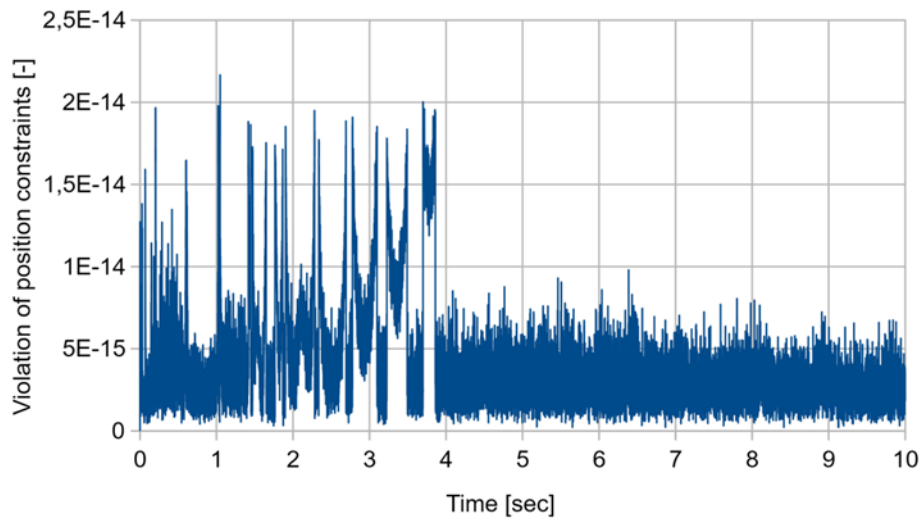


Figure 8.6: evolution of the norm of the violation of position constraints

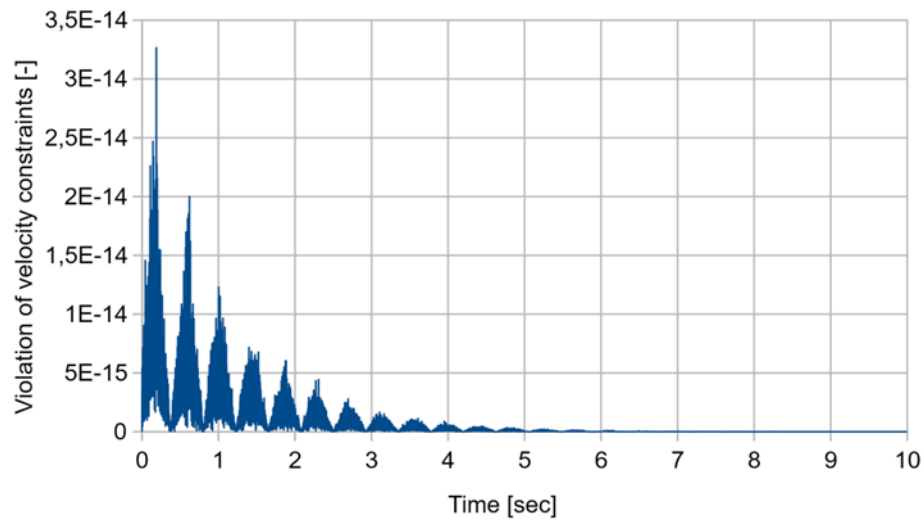


Figure 8.7: evolution of the norm of the violation of velocity constraints

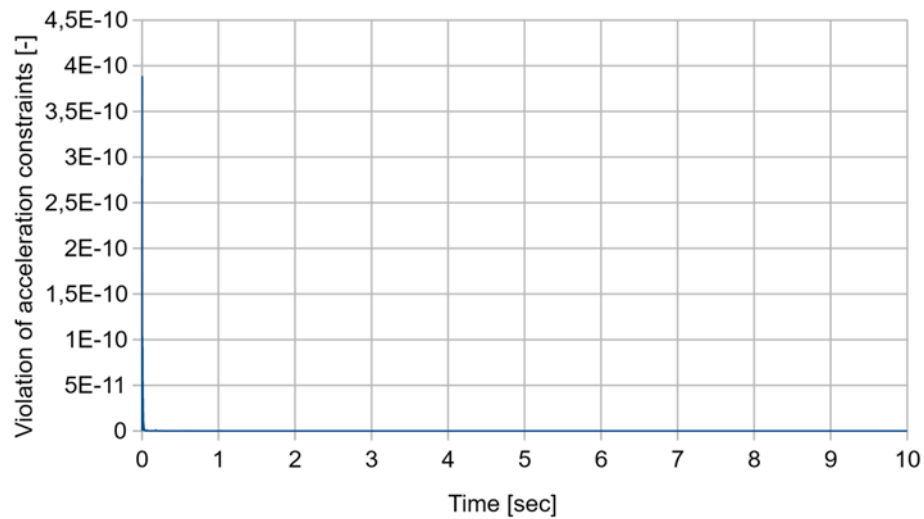


Figure 8.8: evolution of the norm of the violation of acceleration constraints

Lastly, the maximum natural frequency of the system along the simulation time is:

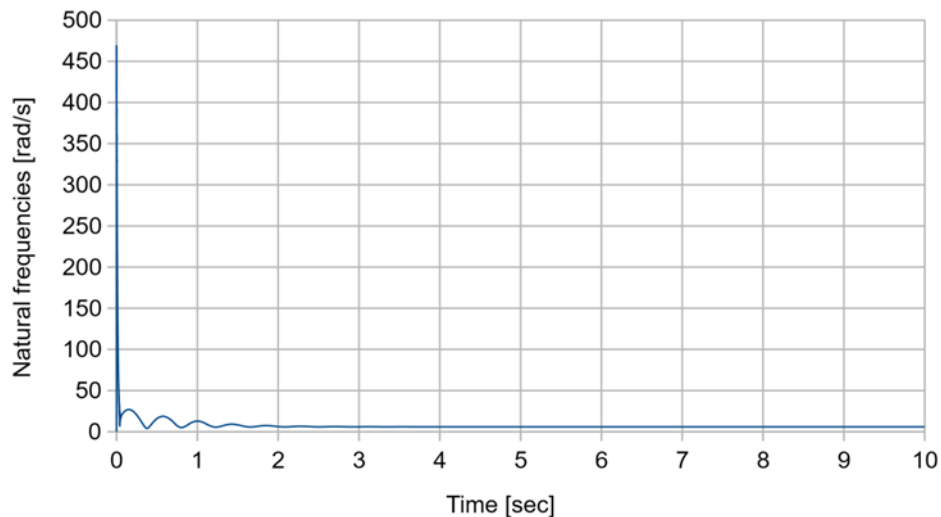


Figure 8.9: maximum natural frequency of the double pendulum

The abrupt peak of the initial value is related to the initial conditions produced by the springs and dampers. Still, the maximum step size given by the stability analysis is $5e-3s$ for Fox-Goodwin. For these parameters, the angle of the first bar is:

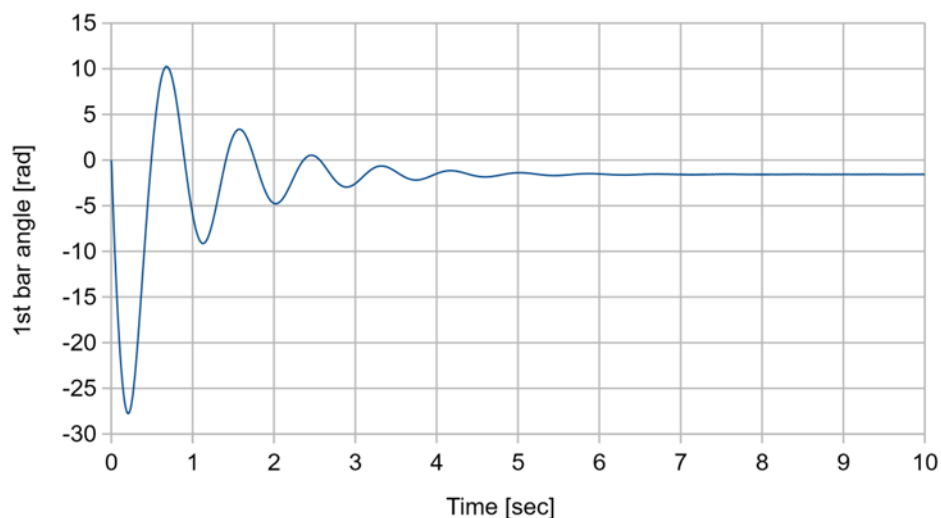


Figure 8.10: angle of the first bar using FG and a step size of $5e-3s$

As can be seen, this step size does not yield a very precise result. However, the relevance of this solution lies on the fact that in this case the method is still stable within the estimated margins.

8.2.3 Spinning top

This example is taken from the PhD thesis and the publications related to it developed by Dr. Urkullu [1,144,145]. The system itself is similar to the 3D single pendulum in the sense that it is formed by a single solid locked to a fixed point using a spherical joint. But unlike the pendulum it has a distributed mass and an initial angular velocity, and a variable force is applied to it. The system is as follows:

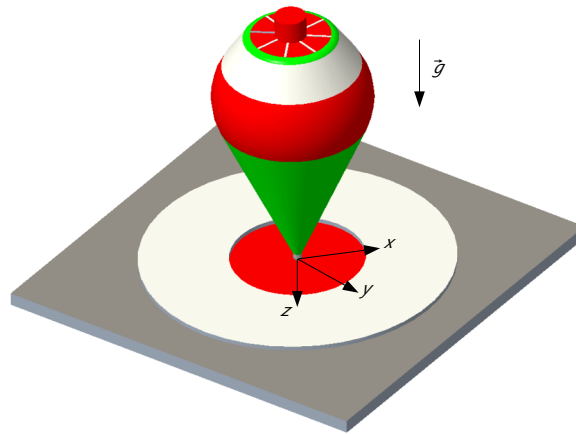


Figure 8.11: spinning top

The system has a mass of $1.7355017 \cdot 10^{-2} \text{ kg}$ and inertias on axes x and y of $I_x = 3.256544 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ and of $I_z = 1.99486 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ on the z axis. The center of gravity is found at $(0 \ 0 \ -0.03993)^T$. Starting from the position represented in figure 8.11 with an initial angular velocity of 523.6 rad/s , the system is abandoned to the action of gravity and the applied variable force.

The force is applied in the center of gravity along the direction of axis x and has the following aspect:

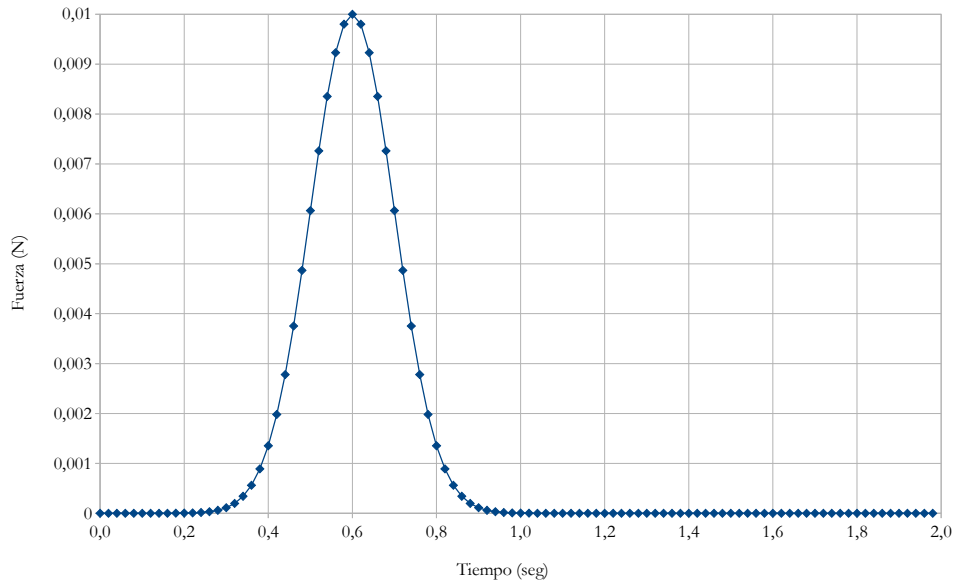


Figure 8.12: variable force applied to the spinning top

This graph is the plot of the following formula:

$$f_x(t) = 0.01 e^{-\frac{(t-0.6)^2}{2 \cdot 0.1^2}} \text{ (N)} \quad (8.2)$$

For a step size of 0.001s and a set of parameters corresponding to the Trapezoidal Rule, the Pitch and Roll have the following aspect:

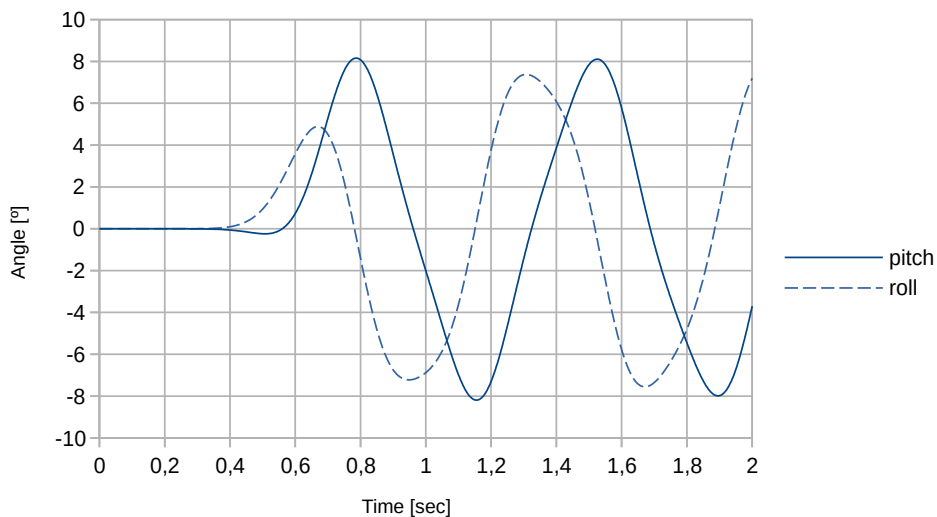


Figure 8.13: pitch and roll angles of the spinning top

The data provided by the original problem also includes the angular velocity variation, the linear velocity of the center of mass and the violation of position constraints. Since data related to the violation of velocity and acceleration constraints is also available when employing the method

developed in this PhD thesis, they will also be included in the results of this example. Angular velocity along time is:

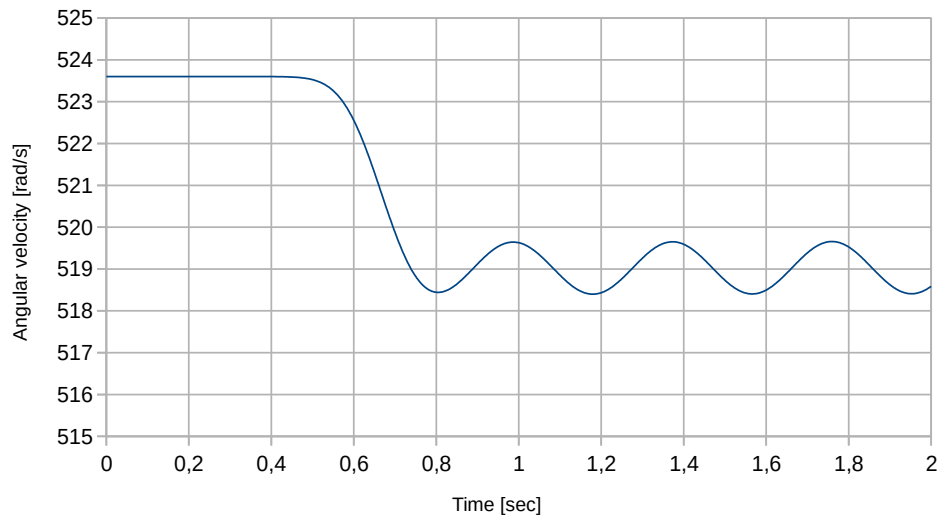


Figure 8.14: angular velocity of the spinning top

The linear velocity of the center of mass is:

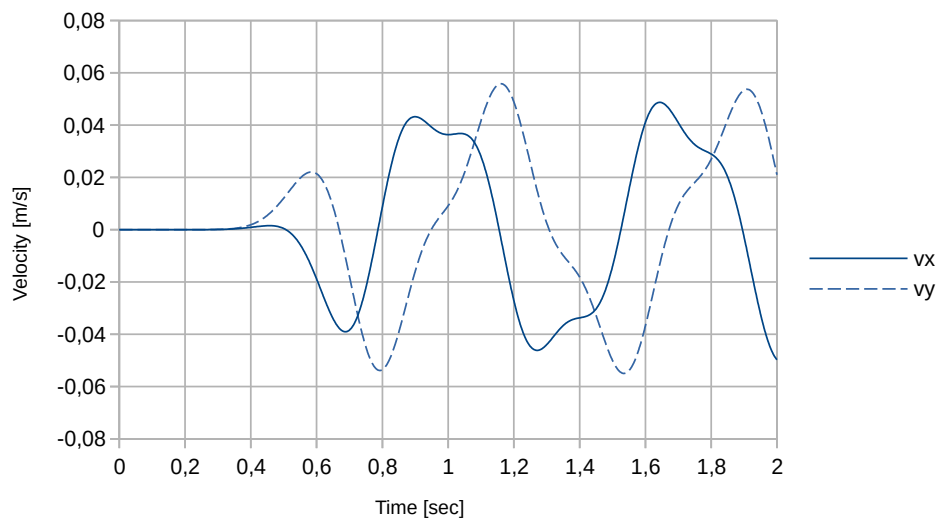


Figure 8.15: linear velocity of the center of mass of the spinning top

The violation of the position constraints is:

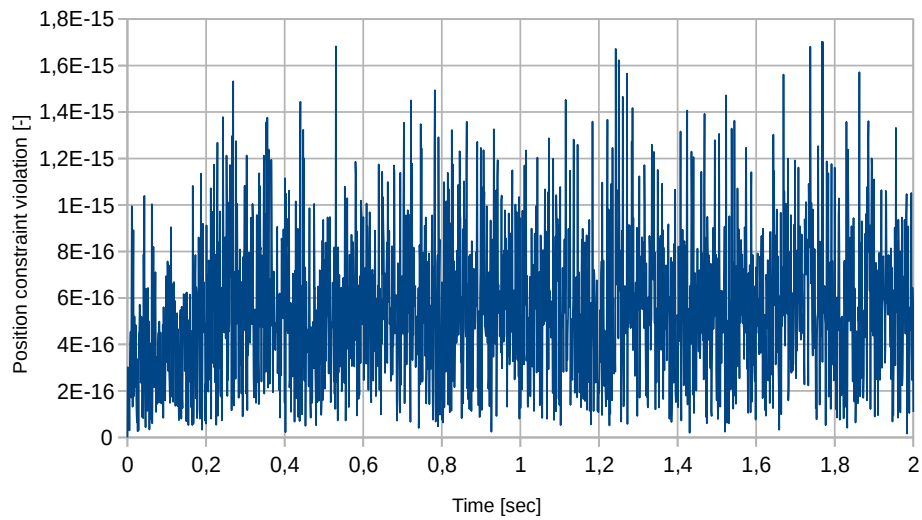


Figure 8.16: violation of the position constraints of the spinning top

And, lastly, the ones corresponding to velocities and accelerations:

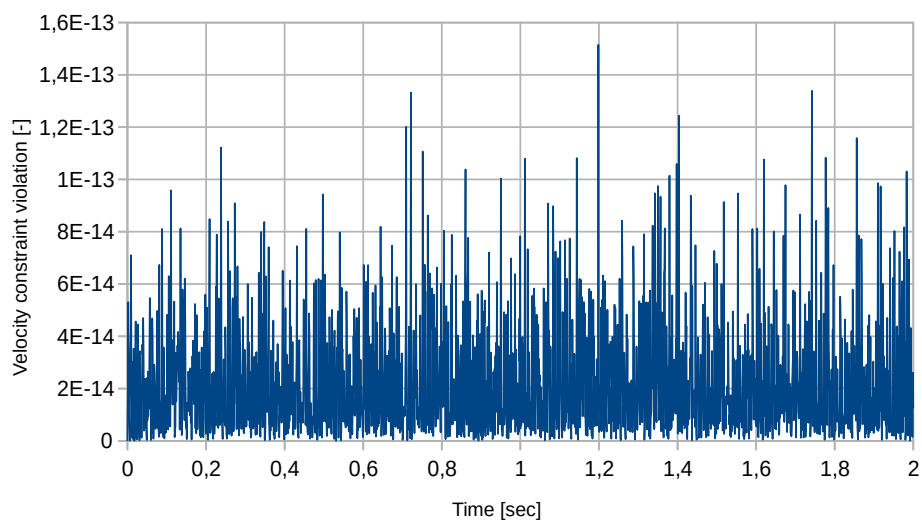


Figure 8.17: violation of the velocity constraints of the spinning top

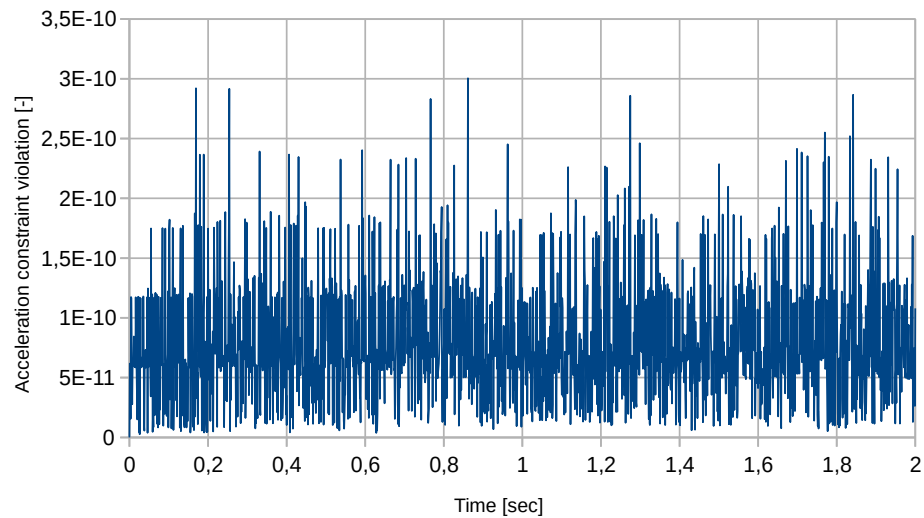


Figure 8.18: violation of the acceleration constraints of the spinning top

8.2.4 Four bar mechanism

This model is a middle ground model that can be understood as a previous step to the one found in the IFToMM website, but that has been still considered of enough interest to be included here. It comprises three bars of identical mass, length and inertia properties, locked to each other using R joints and therefore forming an articulated four bar mechanism. The aspect of the mechanism is as follows:

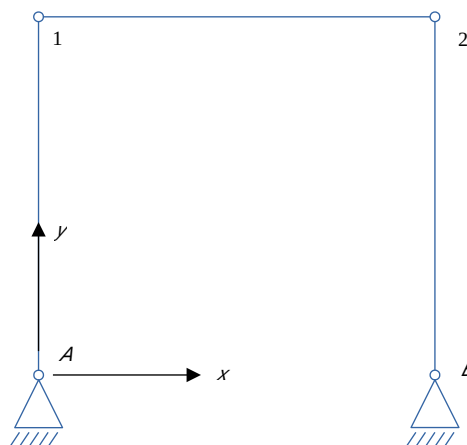


Figure 8.19: four bar mechanism

The three bars have each a mass of 1 kg and a length of 1 m . The fixed points A and B are also separated a distance of 1 m , and A is considered as the coordinate system origin. Starting from the represented position, the system has an initial velocity of 1 m/s on point 1 in the negative direction of axis x .

There is no external force applied excepting its own weight. This system has been solved in a 2D environment with a set of Newmark parameters related to Fox-Goodwin ($\alpha=0.5$ and $\beta=1/12$). For these Newmark parameters, the maximum step size is $\Delta t_{max} \leq 0.1044$ s. The chosen step size is 0.01 s.

The position of point 1 along the simulation time is:

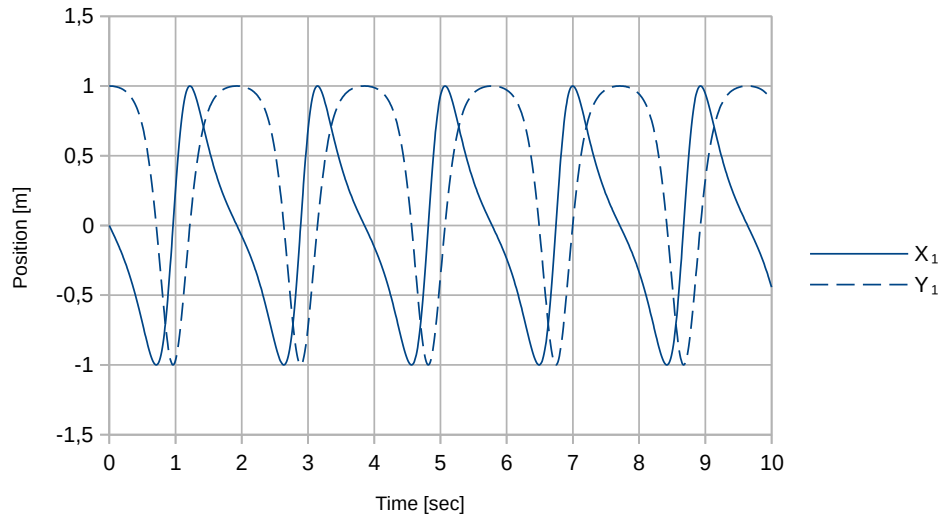


Figure 8.20: displacement of point 1 of the four bar mechanism

The mechanical energy drift, on the other side, is:

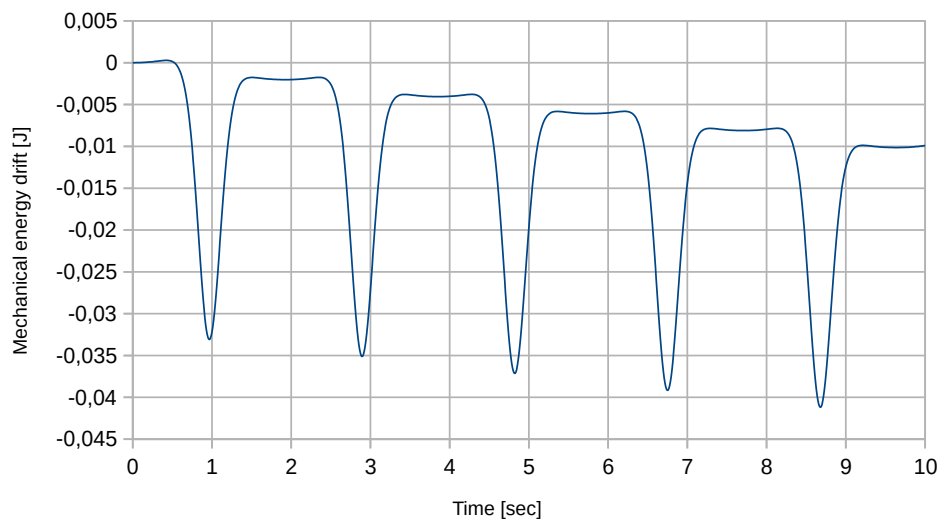


Figure 8.21: mechanical energy drift of the four bar mechanism

Lastly, the position, velocity and acceleration constraints are fulfilled as follows:

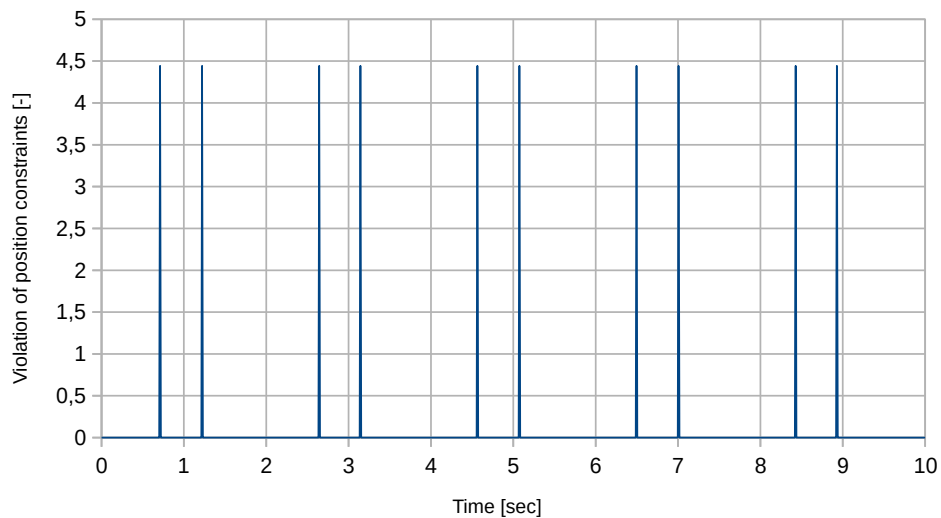


Figure 8.22: violation of position constraints of the four bar mechanism

It is worth mentioning the fact that, although they are actually fulfilled, as can be seen several peaks appear in the position constraints violation graph. This is due to the system passing through singular positions in those points, in which it gains a degree of freedom. This position is that in which the three bars are parallel to each other and are in a horizontal position. These peaks appear regardless of the chosen Newmark parameter set, but do not destabilize the system.

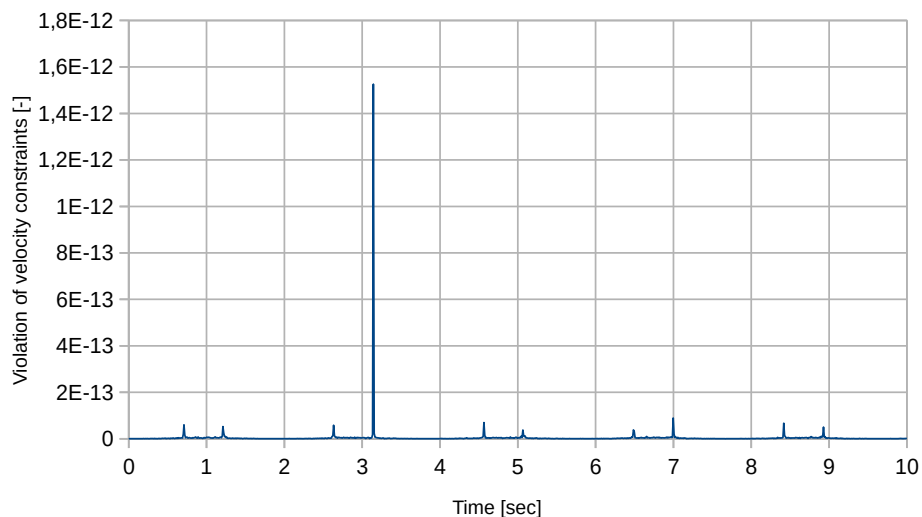


Figure 8.23: violation of the velocity constraints for the four bar mechanism

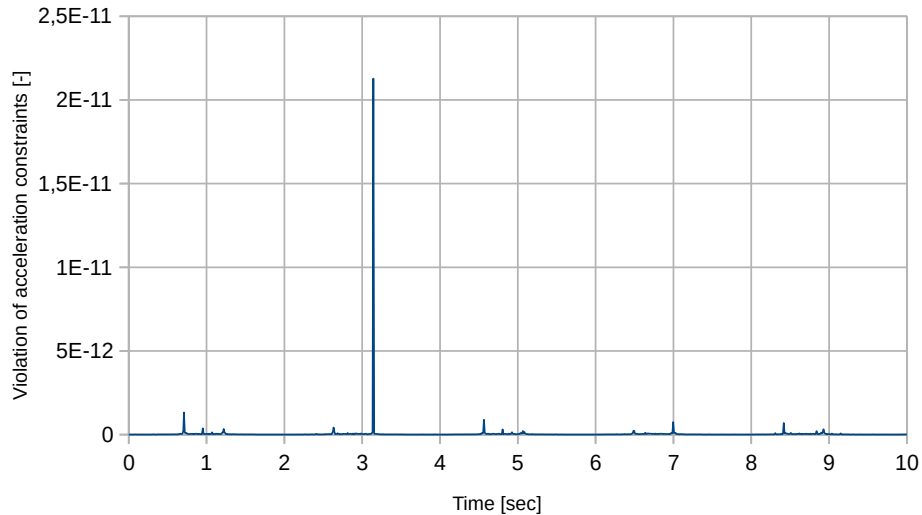


Figure 8.24: violation of the acceleration constraints of the four bar mechanism

8.2.5 Double four bar mechanism

This example is taken from the IFToMM website. As mentioned, the previous example is a previous step towards simulating this system. This example has the following aspect:

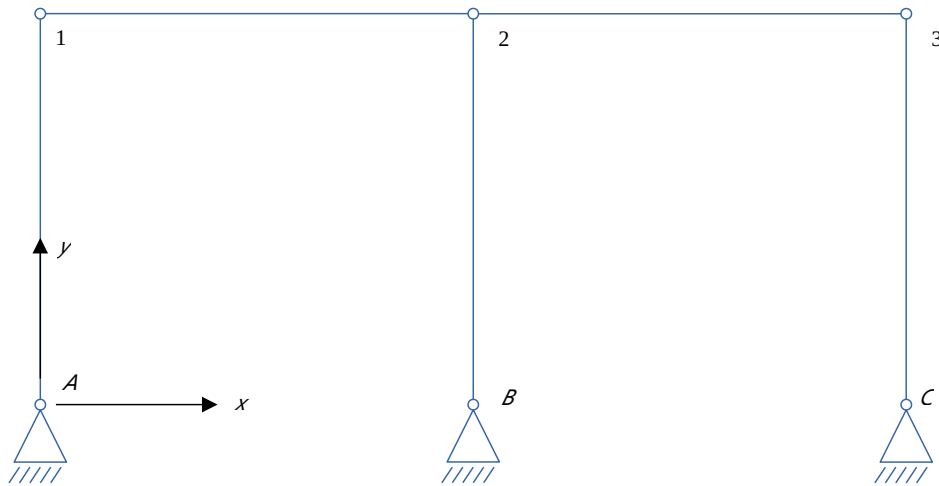


Figure 8.25: double four bar mechanism

As with the previous mechanism, in this case all five bars have each one an equal mass of 1 kg and an equal length of 1 m . Point A is considered as the coordinates origin. Starting from the position represented in the figure and with an initial velocity on point 1 of 1 m/s in the positive direction of x , the system is abandoned to the action of gravity. The system has been solved using a set of Newmark parameters corresponding to Fox-Goodwin ($\alpha=0.5$

and $\beta=1/12$). With these parameters, the maximum step size is $\Delta t_{max} \leq 7.2947 \cdot 10^{-2}$ s. The chosen step size is 0.01 s.

For comparison purposes, the website provides the position and velocity of point 1 along the x axis, the mechanical energy drift and the violation of position, velocity and acceleration constraints. Coordinate x of point 1 is:

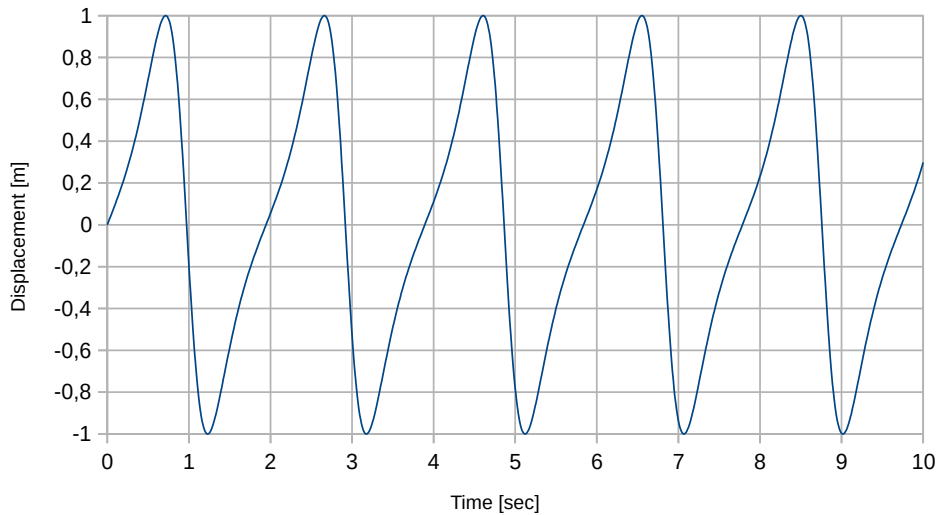


Figure 8.26: coordinate x of point 1 of the double four bar mechanism

Component x of the velocity of point 1 is:

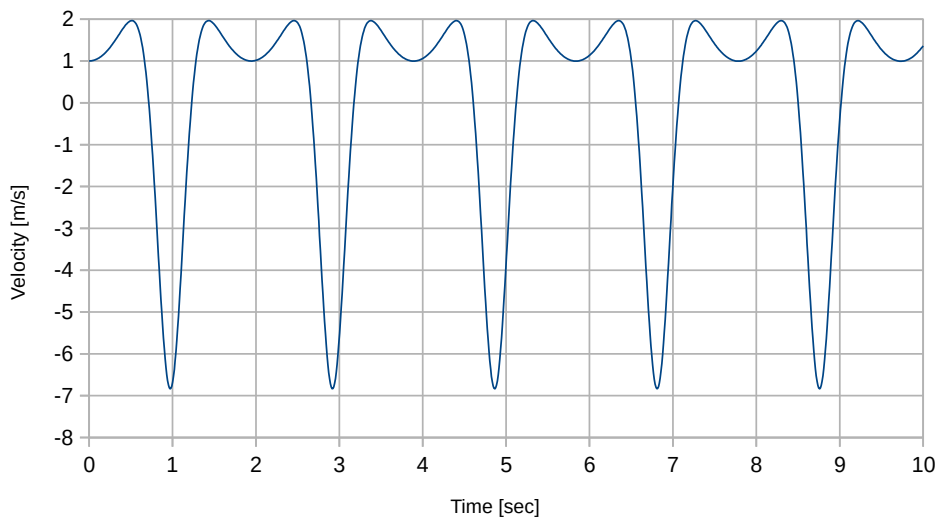


Figure 8.27: component x of the velocity of point 1 of the double four mar mechanism

The mechanical energy drift:

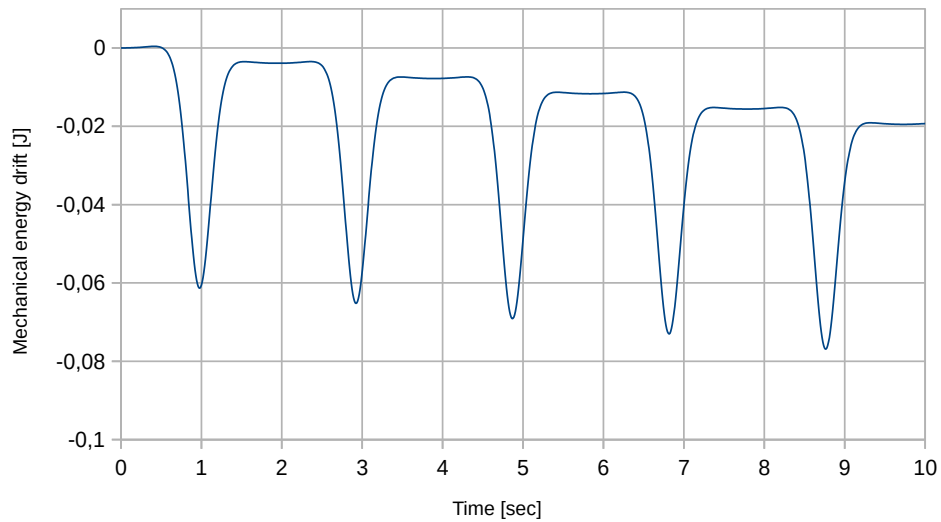


Figure 8.28: mechanical energy drift of the double four bar mechanism

For the method to be valid this variation is required to stay below $0.1 J$. As can be seen in figure 8.28 this margin is fulfilled.

Lastly, the violation of position, velocity and acceleration constraints is as follows:

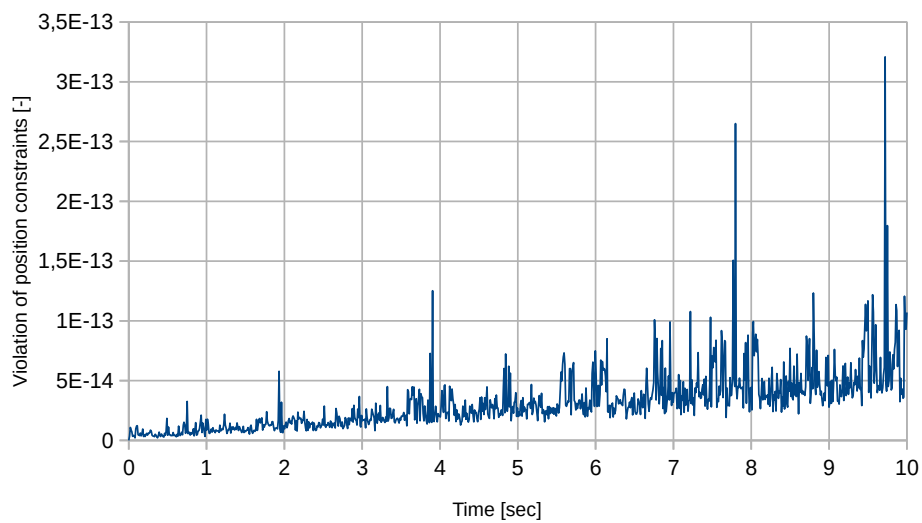


Figure 8.29: violation of position constraints of the double four bar mechanism

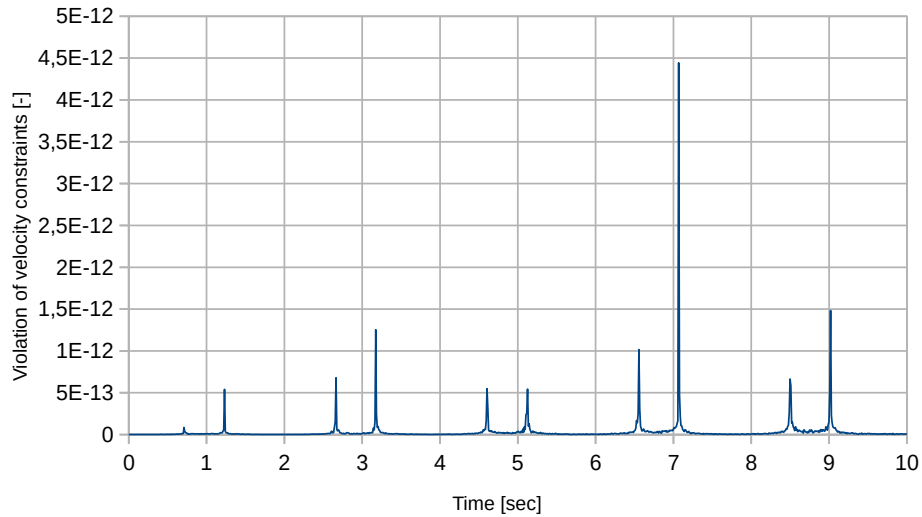


Figure 8.30: violation of the velocity constraints of the double four bar mechanism

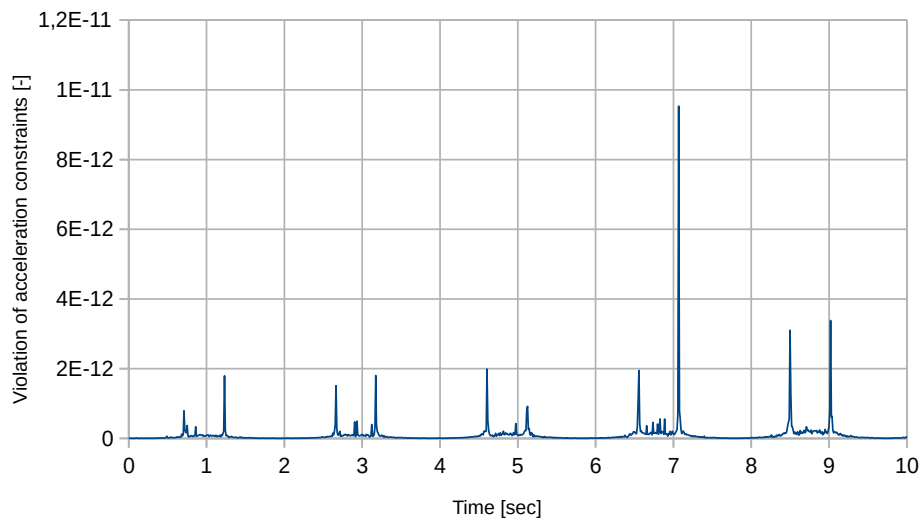


Figure 8.31: violation of the acceleration constraints of the double four bar mechanism

8.2.6 Bricard mechanism

This 3D mechanism has been taken from the IFToMM website. Its appearance is as shown in the next figure:

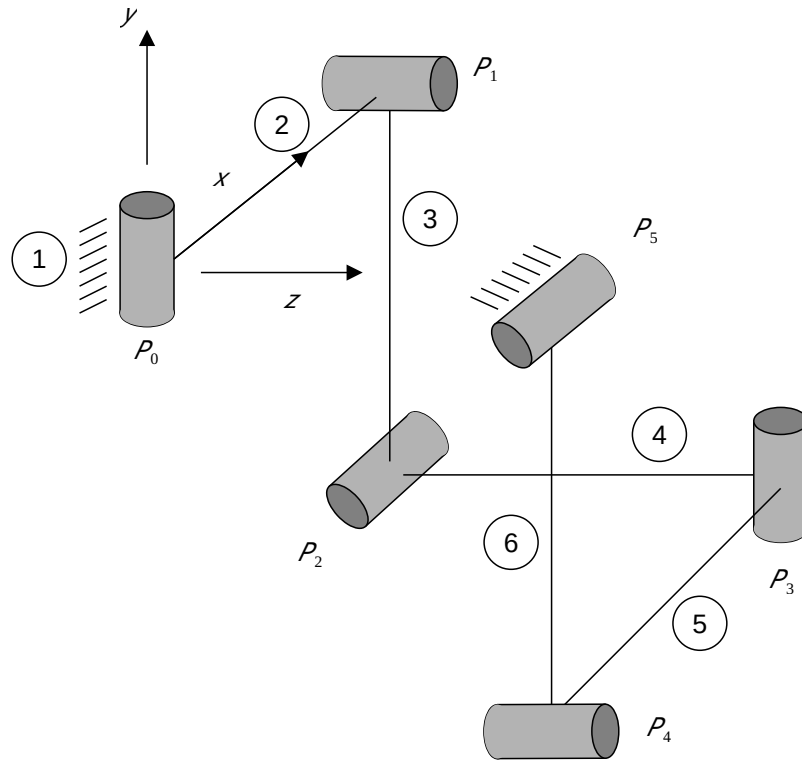


Figure 8.32: Bricard mechanism

This mechanism has the particularity of having a single degree of freedom. The starting point is the one represented in figure 8.32, which is also detailed in table 8.1:

Point	x	y	z	Joint axis
P ₀	0	0	0	y
P ₁	1	0	0	z
P ₂	1	-1	0	x
P ₃	1	-1	1	y
P ₄	0	-1	1	z
P ₅	0	0	1	x

Table 8.1: initial position of the Bricard mechanism

The results given on the IFToMM website are the following: position of point P_2 , mechanical energy drift and violation of position and velocity constraints. As with previous examples, and since the data is available, violation of acceleration constraints is also shown.

For a set of parameters corresponding to Fox-Goodwin ($\alpha=0.5$ and $\beta=1/12$), the maximum step size is $\Delta t_{max} \leq 3.375985 \cdot 10^{-2}$ s for the stability

criterion to be fulfilled. Taking this into account, the chosen step size is $1 \cdot 10^{-2}$ s. The coordinates of point P_2 along time are as follows:

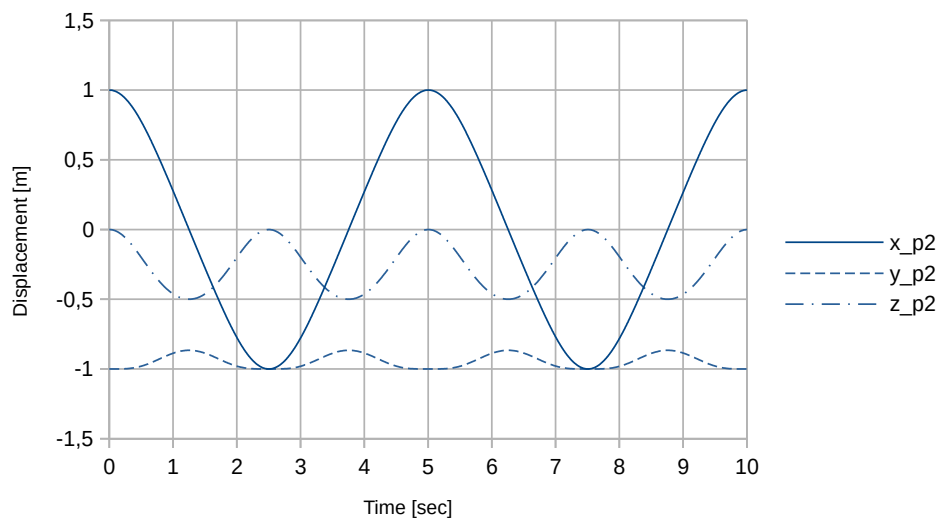


Figure 8.33: coordinates of point P2 of the Bricard mechanism

The mechanical energy drift is as follows:

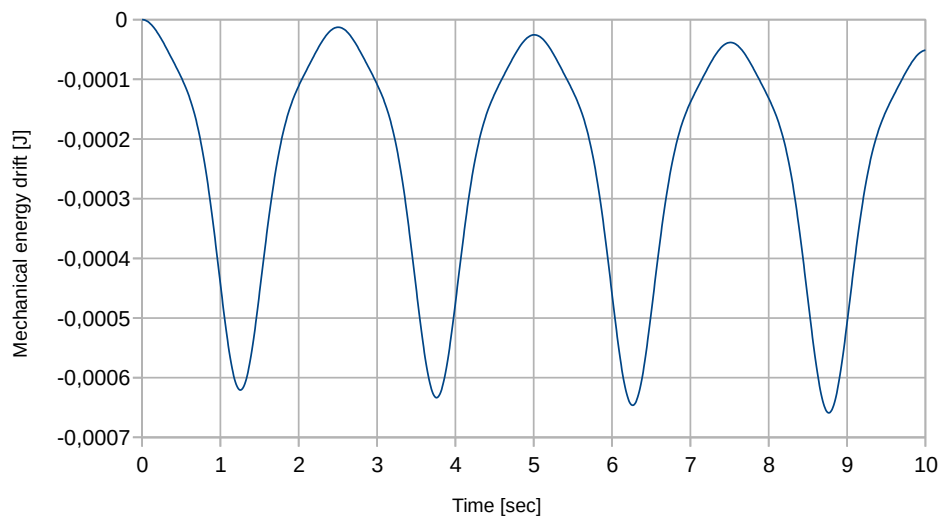


Figure 8.34: mechanical energy drift of the Bricard mechanism

It is indicated on the website that, for the method to be considered valid, the maximum drift of the mechanical energy cannot be greater than $0.001 J$. As can be seen, this margin is fulfilled.

The violation of position and velocity constraints are:

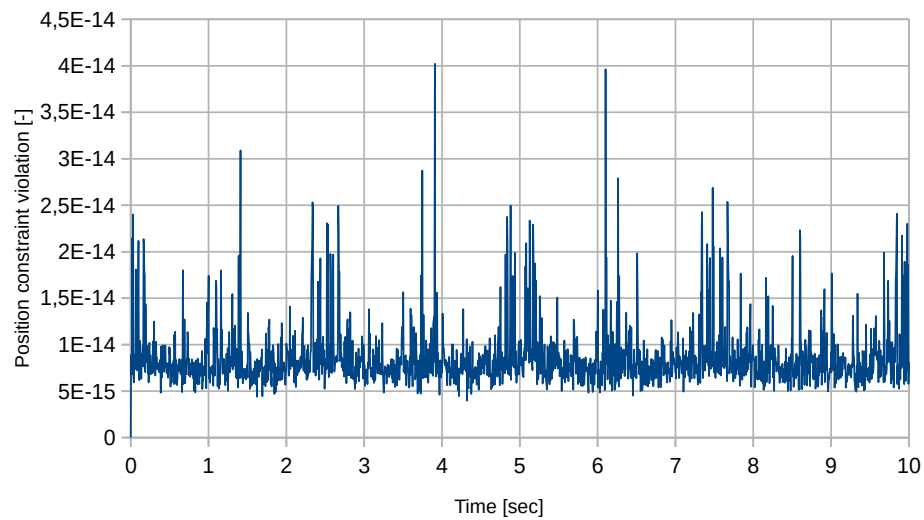


Figure 8.35: violation of position constraints of the Bricard mechanism

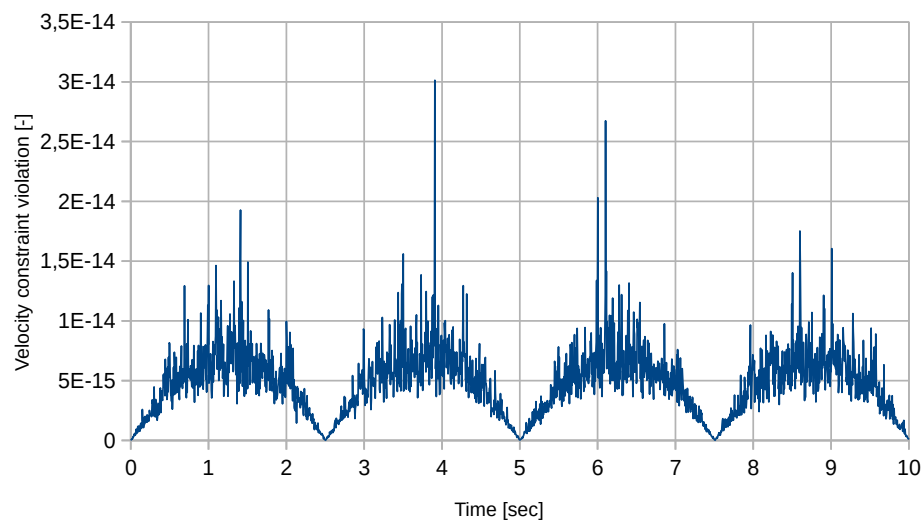


Figure 8.36: violation of the velocity constraints of the Bricard mechanism

Lastly, the violation of acceleration constraints is:

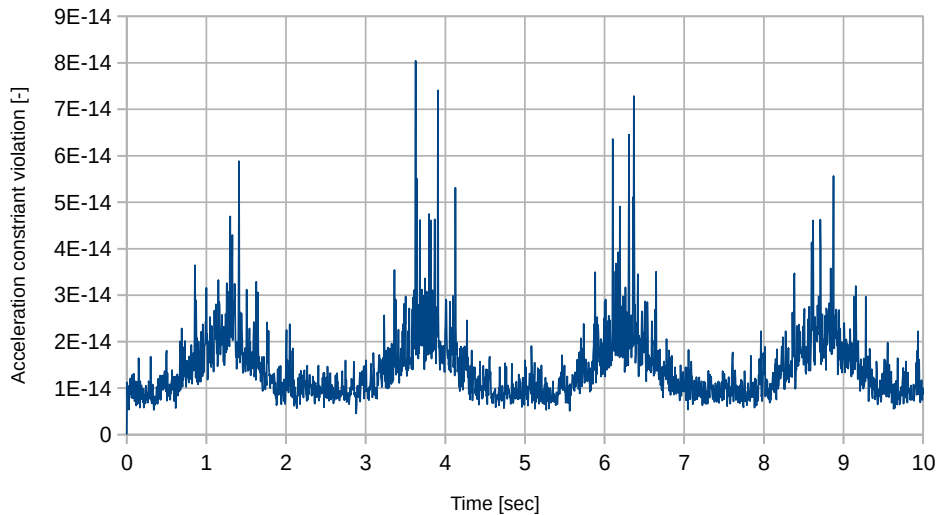


Figure 8.37: violation of acceleration constraints of the Bricard mechanism

8.2.7 Slider-crank mechanism

This mechanism is also taken from the IFToMM website. It has the following aspect:

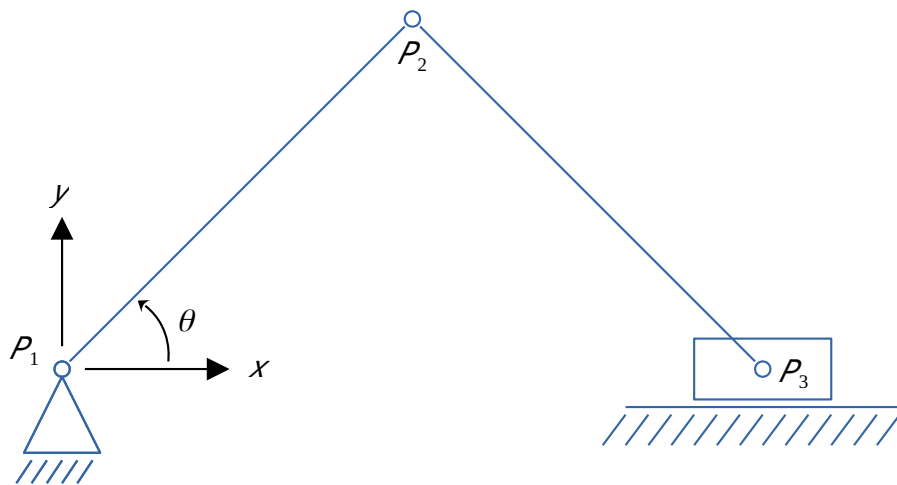


Figure 8.38: slider-crank mechanism

The initial position is the one represented in figure 8.38, with an initial angle of $\theta(0)=\pi/4$. Point 3 has an initial velocity of $v_3=4\text{ m/s}$ along the negative direction of axis x . The following data is provided on the website: x and y coordinates of P_2 , mechanical energy drift and the violation of position and velocity constraints. Also acceleration constraints will be added, since with the hereby developed method that data is available. For solving the system a 2D coordinate system has been employed, and a Newmark

parameter set related to Fox-Goodwin ($\alpha=0.5$ and $\beta=1/12$, which conditions the time step to be $\Delta t_{max} \leq 8.22568 \cdot 10^{-2}$ s); therefore, the chosen time step is 0.001 s.

Coordinates of point P_2 are:

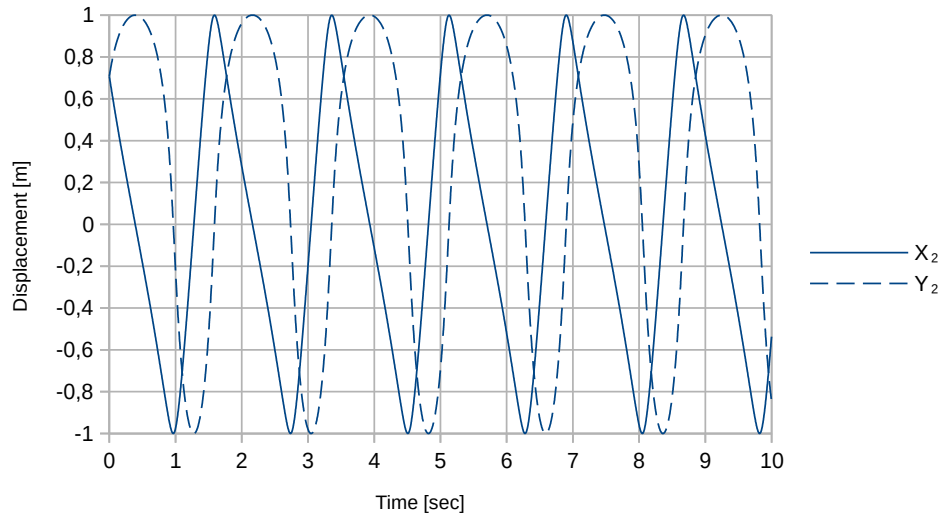


Figure 8.39: coordinates of point 2 of the slider-crank mechanism

The mechanical energy drift is:

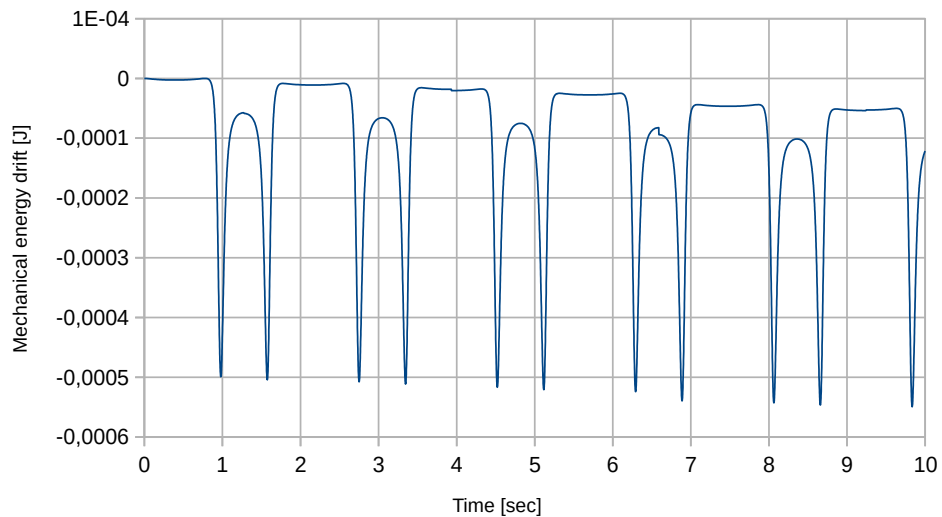


Figure 8.40: mechanical energy drift of the slider-crank mechanism

The maximum variation of this last parameter for the system to be considered valid is 0.001 J. As can be seen in figure 8.40, this margin is fulfilled. The position and velocity constraints are as follows:

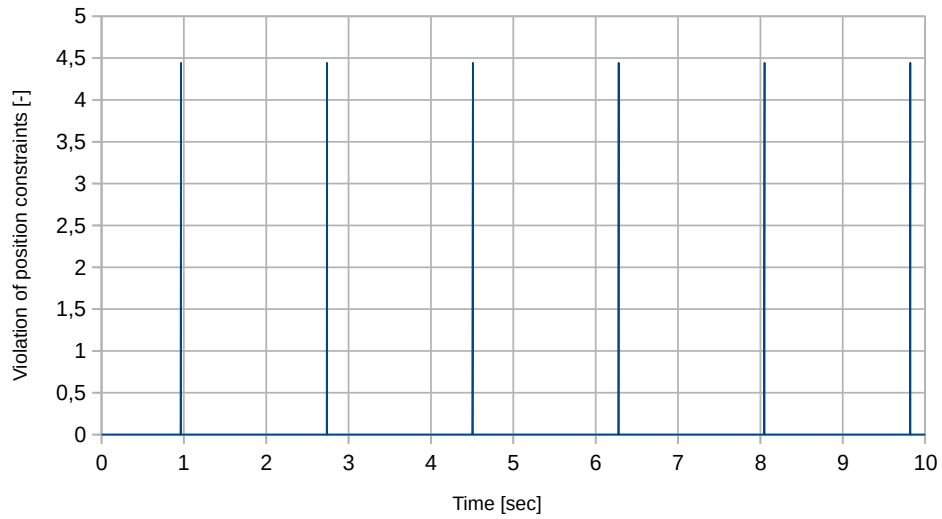


Figure 8.41: violation of the position constraints of the slider-crank mechanism

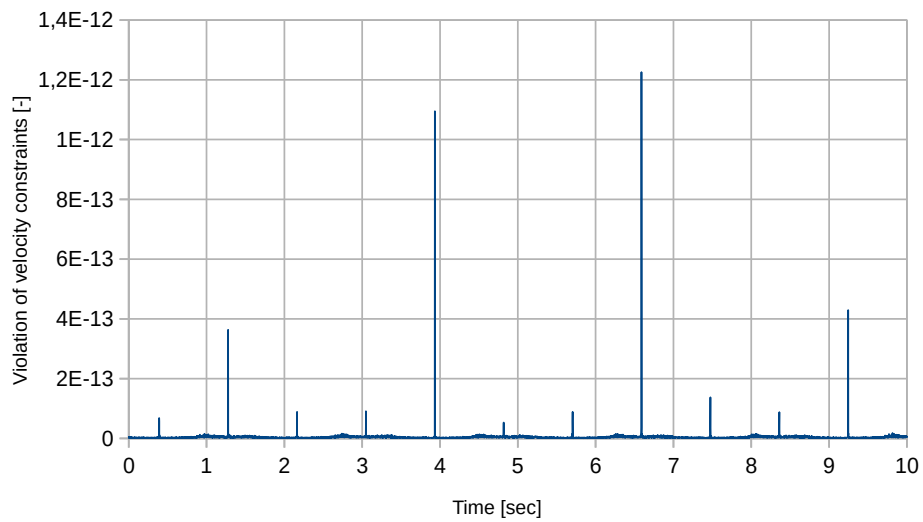


Figure 8.42: violation of the velocity constraints of the slider-crank mechanism

And, lastly, the violation of acceleration constraints:

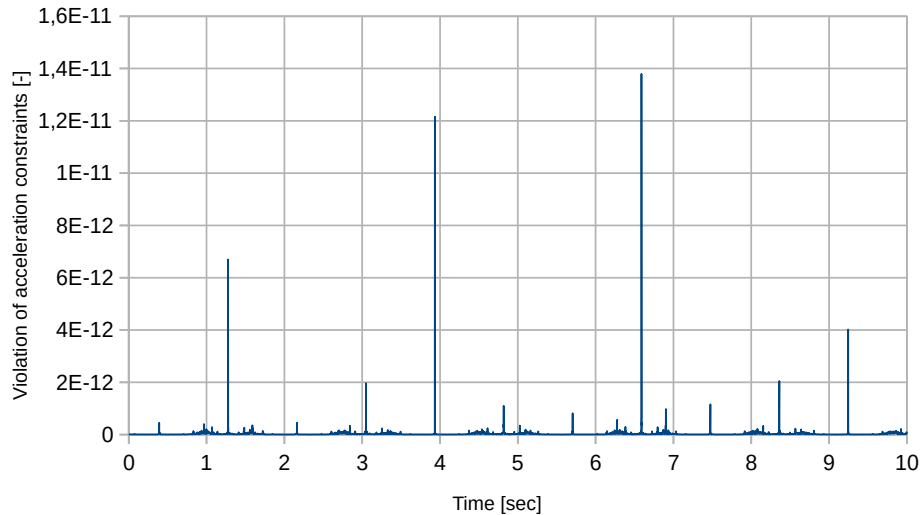


Figure 8.43: violation of the acceleration constraints of the slider-crank mechanism

This mechanism goes through a singular position when the bars are aligned and in vertical position (both on top and below) and therefore point 1 coincides with point 3. This situation is reflected in figure 8.41 in the same fashion as it was also represented on the bar mechanisms 8.2.4 and 8.2.5. Also a small jump in the mechanical energy drift graph 8.40 can be appreciated, which coincides with the lower singular position.

8.2.8 Andrews squeezer mechanism

This mechanism has been modeled according to the one available in the IFToMM website. For this purpose, a 2D coordinate system has been employed.

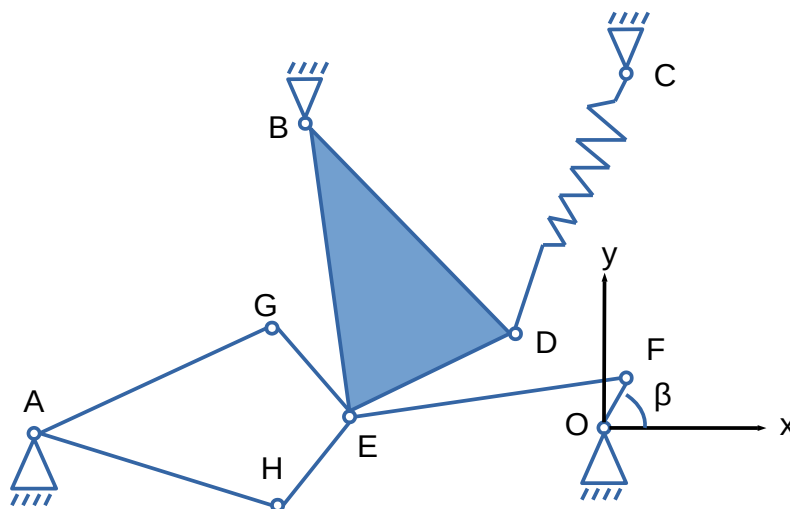


Figure 8.44: Andrews squeezer mechanism

Several data is provided on the website, such as the coordinates of point F, the internal energy drift taking the torque applied in O into account, and the violation of position and velocity constraints. The expression of the internal energy with the applied torque included has the following expression:

$$\Delta U = T + V - E_0 - \tau(\beta - \beta_0) \quad (8.3)$$

Where T is the kinetic energy, V is the potential energy (in this case the effects of the potential energy are not taken into account, but the spring provides the system with potential energy), E_0 is the value of the mechanical energy (kinetic + potential) on the first instant, and τ is the value of the applied torque in O.

The chosen Newmark parameter set is that related to Fox-Goodwin ($\alpha=0.5$ and $\beta=1/12$), which in turn makes the maximum time step be $\Delta t_{max} \leq 5.4391 \cdot 10^{-4}$ s. The chosen step size is $2 \cdot 10^{-6}$ s.

Point F presents the following coordinates:

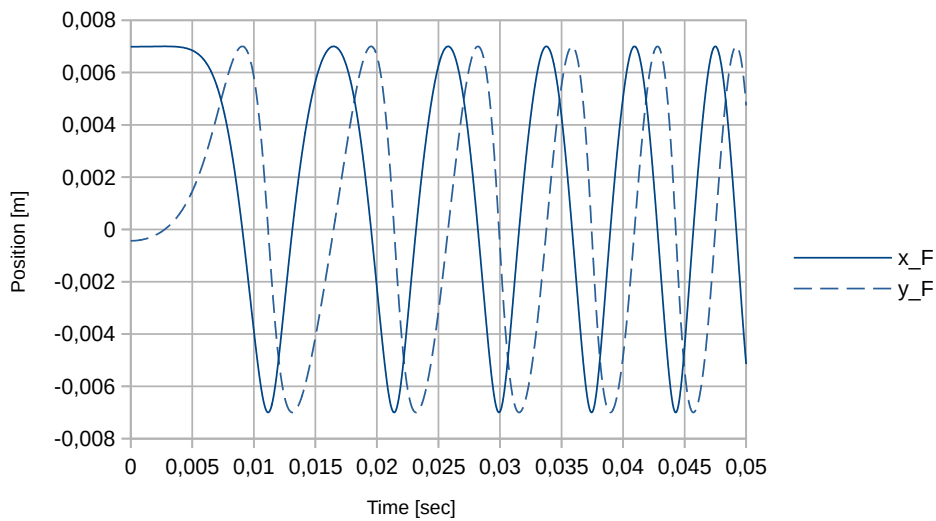


Figure 8.45: x and y coordinates of point F of the Andrews squeezer mechanism

The mechanical energy drift is:

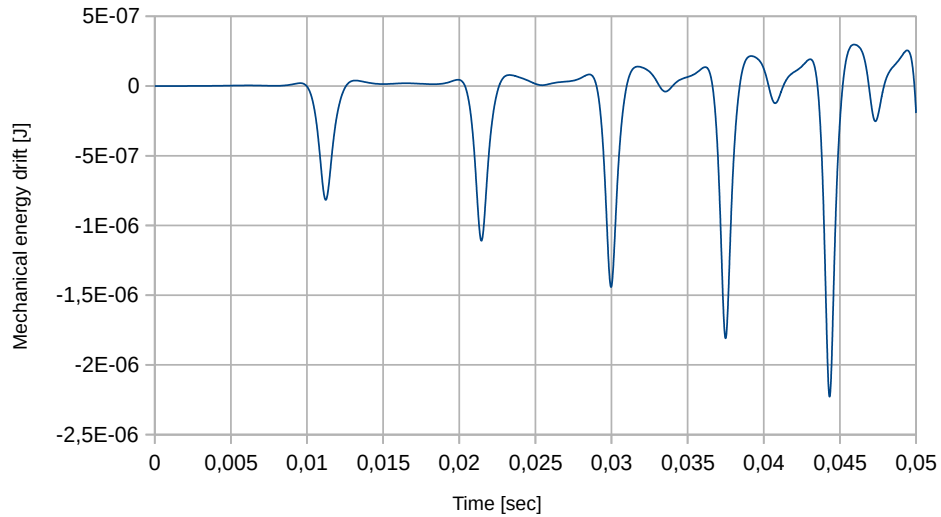


Figure 8.46: mechanical energy drift of the Andrews squeezer mechanism

Authors of the example indicate on the website that, for the employed method to be valid, this variation should be kept below $10^{-5} J$. As can be seen in figure 8.46, this margin is fulfilled.

The position and velocity constraints are:

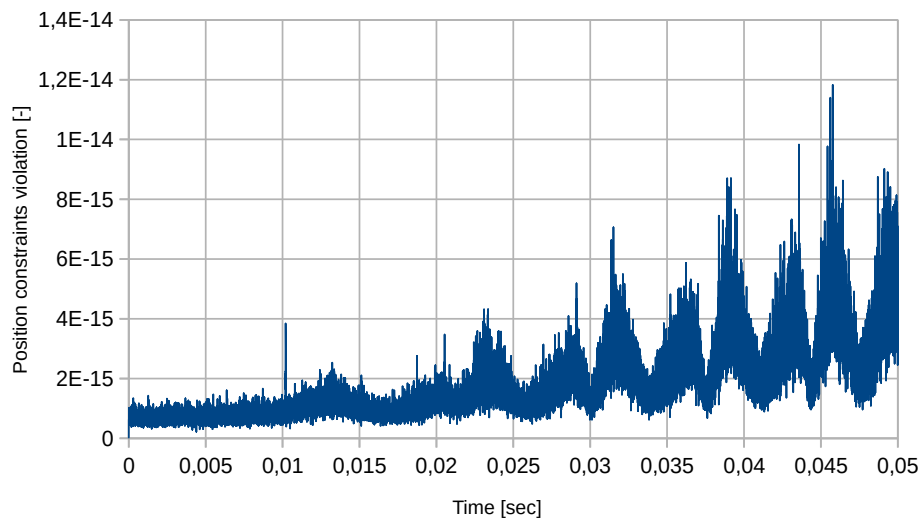


Figure 8.47: violation of position constraints of the Andrews squeezer mechanism

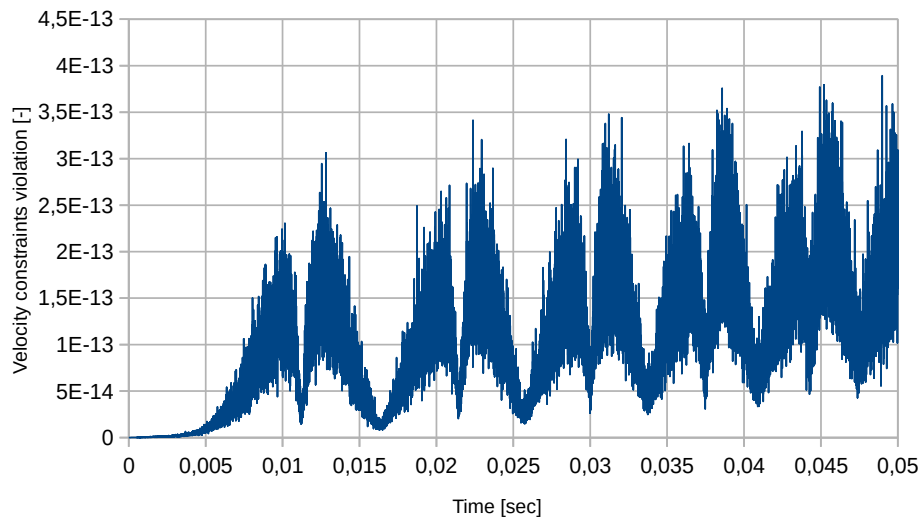


Figure 8.48: violation of the velocity constraints of the Andrews squeezer mechanism

And, lastly, the violation of the acceleration constraints:

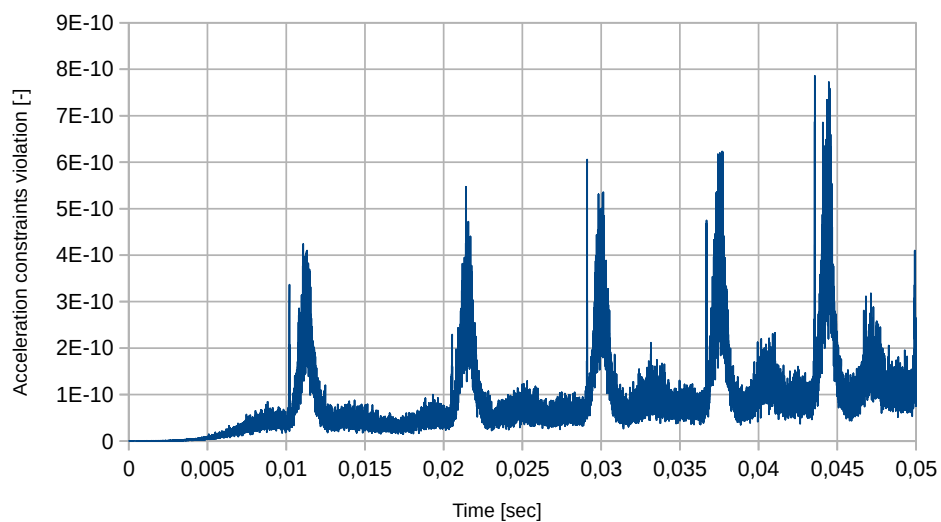


Figure 8.49: violation of the acceleration constraints of the Andrews Squeezer mechanism

8.3 C implementation

An implementation in C/C++ has been carried out in order to test the efficiency of the method developed in this PhD thesis; for this purpose, some of the mechanisms analyzed in the previous section have been employed. Results will be compared to the ones obtained with other methods on the IFToMM Benchmark website. Through this comparison the efficiency and employability of the method for solving multibody systems will be objectively visible. These analyses have been carried out with a computer that, unless

mentioned otherwise, has an Intel Xeon E5 2637 v3 processor fixed to 3.5GHz. The presented time is the average of 10 analyses.

8.3.1 Pendulum

The first example to be modeled is the simple pendulum, which has also been modeled in section 8.2.1.2 and was solved using OCTAVE. Results available on the IFToMM Benchmark website, together with the ones obtained by Dr. Urkullu using CD (DIMCD row) [145], are as follows:

Method	Author	Coord.	Δt (sec)	E (J)	CPU (s)	Processor	Geekbench
MbsLab	F. González	Natural 3D	0	4.85e-5	0.53	i5 4250U	3000
OpenSim 3.2	L. Tagliapietra	Natural	1e-6 - 1.e-3	0	0.64	i5 4570	4100
Biolim al- pha	F. González	Indep. Rel.	0	9.17e-6	0.03	i7 4790K	5000
DIMCD	G. Urkullu	Cartesian 3D	0	3.61e-5	0.0394	Ryzen 5 2600	4700

Table 8.2: IFToMM Benchmark results for the pendulum

Out of the available results the most efficient one is Biolim. The employment of independent relative coordinates highly reduces computational cost, but requires a particular design of the algorithm for each problem. On the other hand OpenSim is more precise with a low computational cost due to the employment of a variable step size.

Results obtained by Dr. Urkullu using CD (DIMCD row) [145] are competitive, since it is faster than MbsLab and OpenSim although this last one is hard to compare due to the variable time step. It is worth adding that, also, since the system is formed by a single solid, the use of sparse matrices does not add any special advantage.

In this context, the method presented in this document presents a mechanical energy drift of $1.22185 \cdot 10^{-5} J$ (see figure 8.50) when employing a step size of $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4} s$ and a Newmark parameter set corresponding to Fox-Goodwin. With this configuration the system clocks an average of 0.4588041 s.

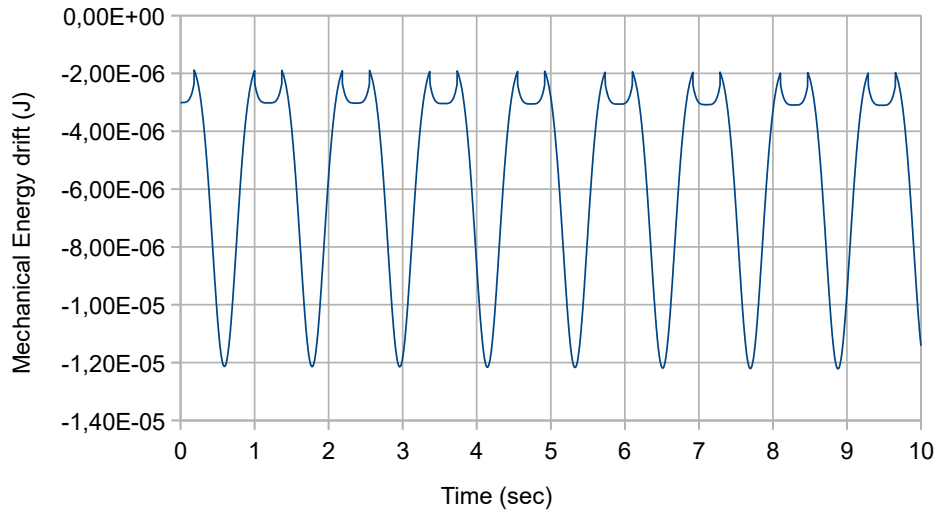


Figure 8.50: mechanical energy drift of the simple pendulum

8.3.2 Spinning top

This example can only be compared to the results obtained by Dr. Urkullu when using CD, since it is an example created during the method corresponding to his PhD thesis. This example is interesting because, since a high rotation is provided around one of its axes, gyroscopic effects appear.

In this chapter the convergence of the method developed in this PhD thesis has been tested against the convergence of the CD method employed originally, and the times of both methods have also been compared. For the error calculation the following set of equations taken from [145] have been employed:

$$e_j(t_i) = \frac{|x_j(t_i) - x_j^{ref}(t_i)|}{\max\{|x_j^{ref}(t_i)|, x_j^{threshold}\}} \quad (8.4)$$

$$e_{total} = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (e_j(t_i))^2} \quad (8.5)$$

Where the reference is the CD method with a convergence error of 10^{-12} and a step size of 10^{-6} s. The differences between both methods are shown in the following table:

	CD		Newmark	
Step size	e	CPU (sec)	e	CPU (sec)
2e-3	0.26	23	530,6	0.04414914

1e-3	7.3e-2	31	155,6	0.08684953
5e-4	1.84e-2	53	39,98	0.1765176
2,5e-4	-	-	10,05	0.3487091
1e-4	7.3e-4	162	1.61e-3	0.5768488
5e-5	1.84e-4	317	0,4	1.144151
2,5e-5	-	-	0,1	2.310811
1e-5	6.93e-6	1517	0,01	5.740266

Table 8.3: Comparison between Newmark and CD

As can be seen the presented method also has quadratic convergence. It is slower when compared to CD, but this is expected given the amount of variables per iteration it needs to calculate.

Since this example is not available on the IFToMM Multibody website, for comparing its veracity the displacement along axis X and angular velocity around axis Z are plotted and compared:

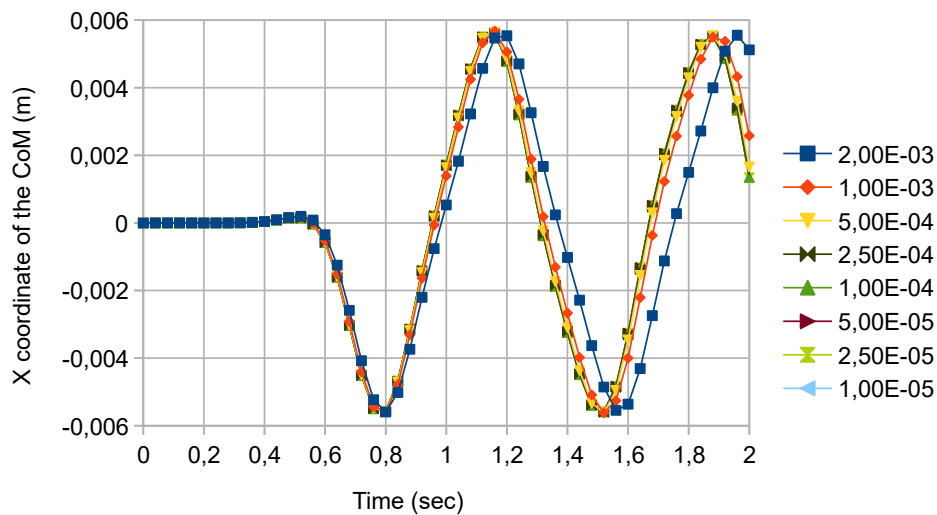


Figure 8.51: X coordinate of the CoG for different step sizes

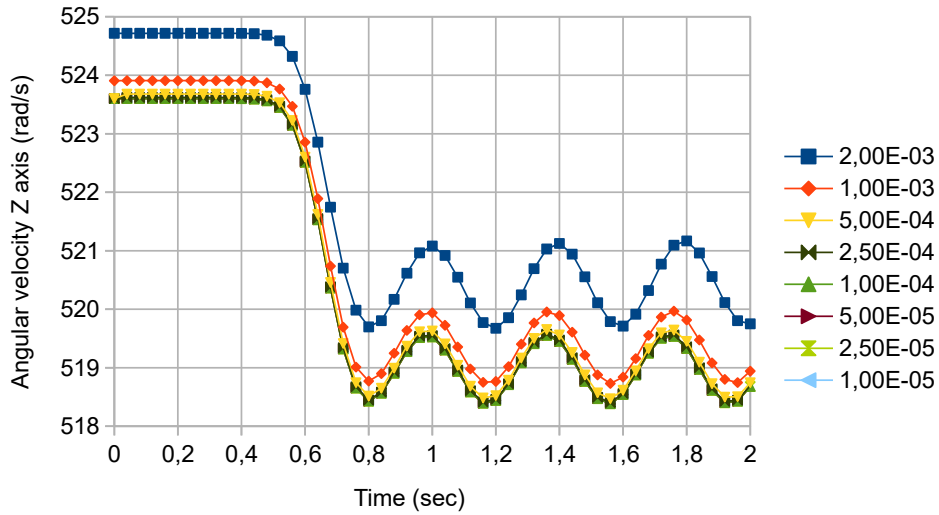


Figure 8.52: angular velocity around axis Z for different time steps

For the same reason as before the obtained results have been compared to the ones obtained by a commercial software (ADAMS), more precisely with the GSTIFF and WSTIFF methods. For this purpose a common convergence error of $1 \cdot 10^{-6}$ has been used in ADAMS and a step size of $5 \cdot 10^{-4}$ s both in ADAMS and C/C++, although a variation of the step size has been necessary in ADAMS, letting both methods go down to $2 \cdot 10^{-4}$ s. Results are compared as follows:

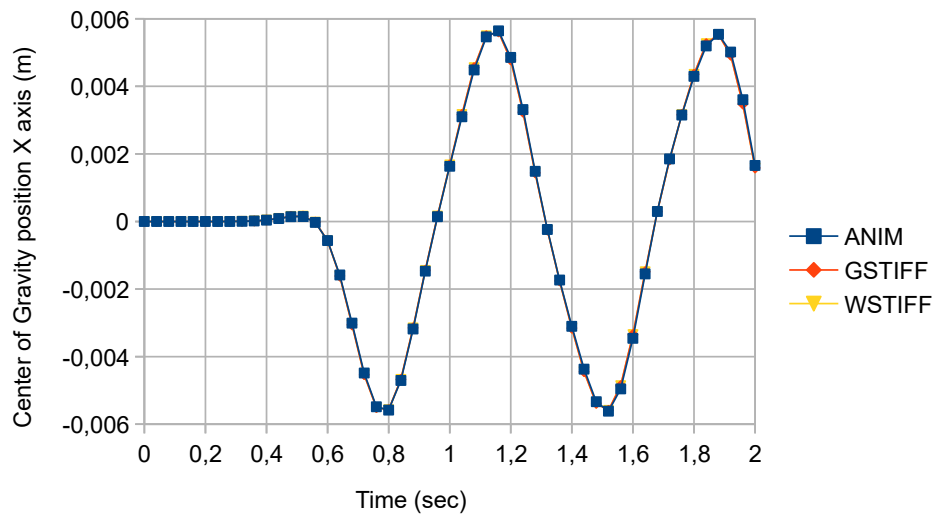


Figure 8.53: X coordinate of the CoG for different methods

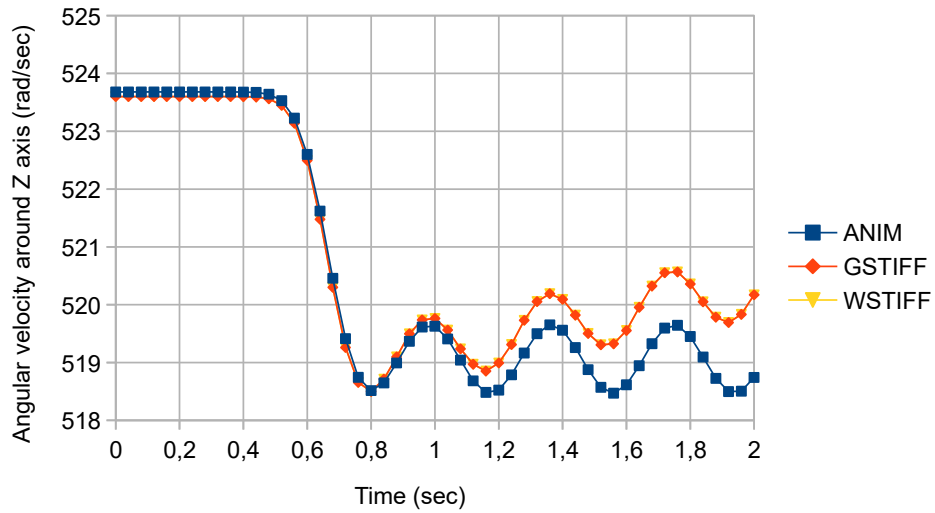


Figure 8.54: angular velocity around axis Z for different methods

Finally, the violation of the position constraints is shown in the following graph:

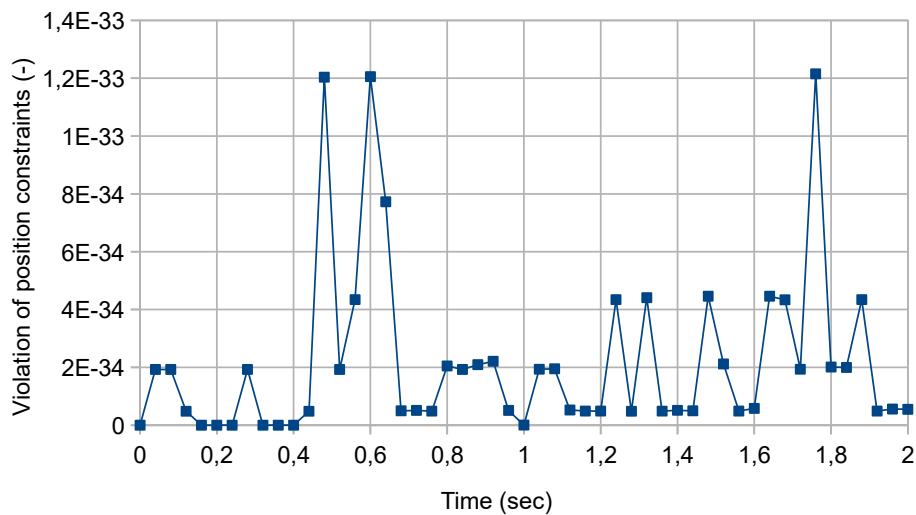


Figure 8.55: violation of the position constraints

8.3.3 Double four bar mechanism

This example has more results on the IFToMM Benchmark website:

Method	Author	Coord.	Δt (sec)	E (J)	CPU (s)	Processor	Geekbench
Index-3 ALF	J. Cuadrado	Natural	0.01	0.09	0.6	C2 Duo E6550	1400
Index-3	A. Luances	Relatives	0.01	0.01	1.7	C2 Duo	1400

ALF						E6550	
MbsLab	F. González	Natural 3D	0.01	0.09	0.15	C2 Duo E8400	1900
OpenMBS	R. Pastorino	Natural 2D	0.01	0.09	0.13	Beagle-BoneB	N/A
Index-3 ALF	R. Pastorino	Natural 2D	0.01	0.09	0	i7 3740QM	3800
Non-Recursive NEF	M. Burkhardt	Minimal	Variable	0	0.06	i7 3770	4000
MBDyn	P. Masarati	3D	0.01	0.09	0.33	i7 2620M	3000
Non-Recursive NEF	M. Burkhardt	Minimal	0.01	0	0.02	SnapDrag S800	N/A
Non-Recursive NEF	M. Burkhardt	Minimal	0.01	0	0	i7 960	2700
Solid-Works	C. Chaojie	Natural 2D	0.01	0	48.77	C2 Duo E8400	1900
OpenSim	L. Tagliapietra	Natural	1e-3 - 1e-2	0	0.46	i5 4570	4000
Biolim	F. Mouzo	Relative	0.01	0.03	0.02	i7 6700K	5400
DIMCD	G. Urkullu	Cartesian 3D	0.02	0.09	0.03	Ryzen 5 2600	4700

Table 8.4: results for the double four bar mechanism, IFToMM Benchmark website

From the results of table 8.4 it can be thought that 0.01s is a good result, but this assertion needs to be done carefully, since most of the employed methods use minimal or relative coordinates. These methods reduce computational cost but are not general methods, and therefore cannot be compared to them (among which the method explained in this document is included). Some 2D implementations are also included, whose efficiency is higher due to the variable reduction it requires. Therefore, out of all the available results the ones that have to be taken into account are the ones by Tagliapietra (using OpenSim), Masarati (MBDyn), Urkullu (DIMCD) and Gonzalez (MBSLab). These methods clock respectively at 0.456s, 0.325s,

0.0325s and 0.145s. The method developed in this document clocks at 0.4s, which is a good result for it being implicit and unconditionally stable.

8.3.4 Bricard Mechanism

This example also has results on the IFToMM Benchmark website:

Método	Author	Coord.	Δt (sec)	E (J)	CPU (s)	Procesador	Geek-bench
Index-3 ALF	F. González	Natural 3D	0.01	0	0.13	i7-3770	4000
OpenSim 3.2	L. Tagliapietra	Natural	1e-3 - 1e-2	0	0.26	i5-4570	4100
DIMCD	G. Urkullu	Cartesian 3D	0.02	0	0.08	Ryzen 5 2600	4700

Table 8.5: results for the Bricard mechanism, IFToMM Benchmark website

This mechanism has been solved using Fox-Goodwin parameters. With a step size of 0.01 s, the time average clocks in 0.3479798s and the maximum mechanical energy drift is $6.89807 \cdot 10^{-4} J$. This drift can be seen in the following graph:

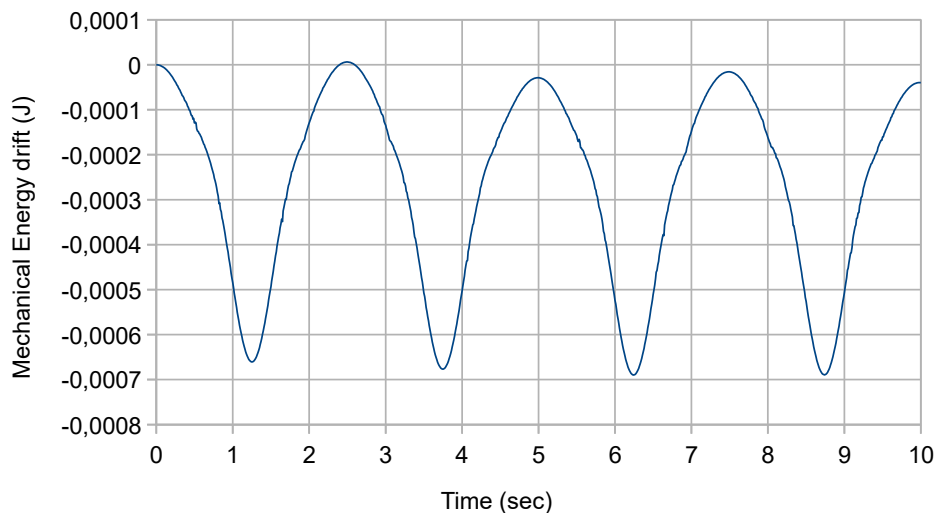


Figure 8.56: mechanical energy drift of the Bricard mechanism

Finally, the violation of position constraints is shown in the next graph:

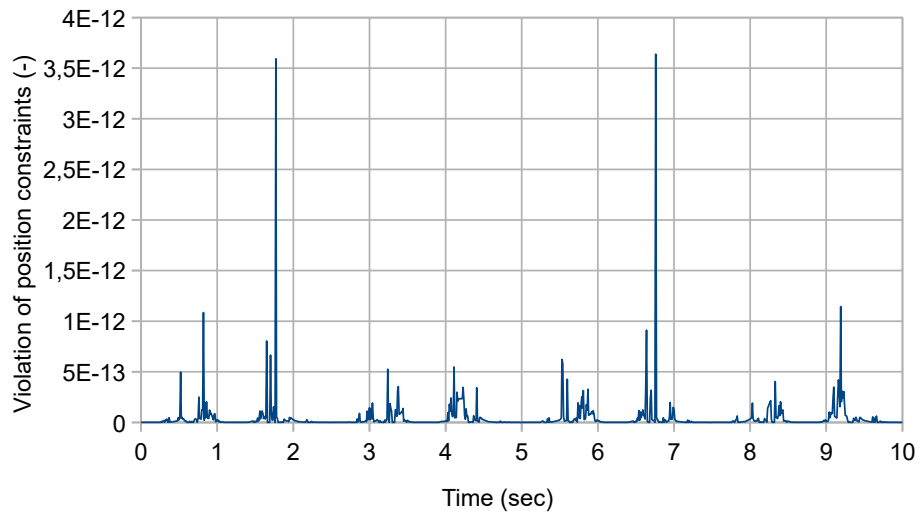


Figure 8.57: violation of position constraints of the Bricard mechanism

9 Other contributions

In this section first a generalization of orientation coordinates will be carried out, and then a family of semi-explicit methods will be developed. On one hand, and since only quaternions have been employed in this PhD thesis excepting one section, it makes sense to have the possibility of employing other types of coordinates for representing the orientation. It makes even more sense for this maneuver to be a generalization, so any parameter can be employed. On the other hand, and since Newmark's method is configurable and has different stability and convergence properties depending on its parameters, the employment of configurable parameters on a scheme that starts with CD is tempting to try; the validity of this approach is developed later. Also, concepts like the definition of explicit method, order and degree of a method will be revisited.

9.1 Generalization of the linearization process for explicit methods

Until now quaternions have been employed for representing the orientation of a rigid solid in space, and the linearizations of the equilibrium equations have been carried out through their use. But it is also possible to represent the orientation with generalized parameters and to perform the linearizations according to them, in such a way that any set of parameters can be employed for representing the orientation, such as the Euler angles, generalized Euler parameters, Gibbs vector and so on. For this purpose, it is necessary to develop the required linearizations for these generalized coordinates.

Two types of linearizations are required for the mentioned purpose: on one side the equilibrium and springs and dampers equations need to be linearized, and on the other hand constraints also need to be linearized (ref. Generalized coord.)

9.1.1 Equilibrium equation

The starting point is the equilibrium equation, which is formed by the Newton-Euler equations 4.3. As explained on section 4.2, at first the equilibrium equation is written employing local coordinates. Starting from Newton's equation:

$$\begin{bmatrix} m_p & 0 & 0 \\ 0 & m_p & 0 \\ 0 & 0 & m_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\bar{x}}_p \\ \ddot{\bar{y}}_p \\ \ddot{\bar{z}}_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_{xP} \\ \bar{f}_{yP} \\ \bar{f}_{zP} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} m_p & 0 & 0 \\ 0 & m_p & 0 \\ 0 & 0 & m_p \end{bmatrix} \ddot{\bar{\mathbf{x}}}_p = \bar{\mathbf{f}}_p \quad (9.1)$$

Where m_p is the total mass of the solid and $\bar{\mathbf{f}}_p$ is the force vector applied to the rigid solid expressed in the local reference frame and applied to the center of gravity of the solid.

For expressing these equations in the global reference frame it is necessary to employ the rotation matrix $\mathbf{R}(\mathbf{o}_p)$, so it is written:

$$\mathbf{R}(\mathbf{o}_p) \begin{bmatrix} m_p & 0 & 0 \\ 0 & m_p & 0 \\ 0 & 0 & m_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\bar{x}}_p \\ \ddot{\bar{y}}_p \\ \ddot{\bar{z}}_p \end{Bmatrix} = \mathbf{R}(\mathbf{o}_p) \begin{Bmatrix} \bar{f}_{xP} \\ \bar{f}_{yP} \\ \bar{f}_{zP} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{xP} \\ f_{yP} \\ f_{zP} \end{Bmatrix} \quad (9.2)$$

Where \mathbf{o}_p is the coordinates vector that represents the orientation of the solid. For also expressing the coordinates in the global reference frame:

$$\mathbf{R}(\mathbf{o}_p) \begin{bmatrix} m_p & 0 & 0 \\ 0 & m_p & 0 \\ 0 & 0 & m_p \end{bmatrix} \mathbf{R}^T(\mathbf{o}_p) \begin{Bmatrix} \ddot{\bar{x}}_p \\ \ddot{\bar{y}}_p \\ \ddot{\bar{z}}_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{xP} \\ f_{yP} \\ f_{zP} \end{Bmatrix} = \mathbf{M}_{TP} \ddot{\mathbf{x}}_p = \mathbf{f}_p \quad (9.3)$$

This equation employs Cartesian coordinates for defining the equilibrium in linear displacements and is already linear, and therefore does not need more mathematical processing.

The next step are Euler's equations, which expressed in the local coordinate frame are expressed on equation 4.18:

$$\bar{\mathbf{t}}_p = \bar{\mathbf{I}}_{gP} \dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}}_p + \bar{\boldsymbol{\omega}}_p \times \bar{\mathbf{I}}_{gP} \bar{\boldsymbol{\omega}}_p \quad (9.4)$$

Where $\dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}}_p$ is the angular acceleration of the solid, $\bar{\boldsymbol{\omega}}_p$ is the angular velocity of the solid, $\bar{\mathbf{t}}_p$ is the external torques vector applied to the solid and $\bar{\mathbf{I}}_{gP}$ is the inertia tensor, all of which are expressed on the local coordinate frame. Therefore:

$$\bar{\mathbf{I}}_{gP} = \begin{bmatrix} I_{xP} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yP} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zP} \end{bmatrix} \quad (9.5)$$

For expressing 9.4 in the global reference frame it is required for it to be premultiplied by the rotation matrix:

$$\mathbf{R}(\mathbf{o}_P) \bar{\mathbf{t}}_P = \mathbf{R}(\mathbf{o}_P) \bar{\mathbf{I}}_{gP} \dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}}_P + \mathbf{R}(\mathbf{o}_P) \bar{\boldsymbol{\omega}}_P \times \bar{\mathbf{I}}_{gP} \bar{\boldsymbol{\omega}}_P \quad (9.6)$$

Changing the coordinates also to global:

$$\mathbf{R}(\mathbf{o}_P) \bar{\mathbf{t}}_P = \mathbf{R}(\mathbf{o}_P) \bar{\mathbf{I}}_{gP} \mathbf{R}^T(\mathbf{o}_P) \dot{\boldsymbol{\omega}}_P + \mathbf{R}(\mathbf{o}_P) \bar{\boldsymbol{\omega}}_P \times \bar{\mathbf{I}}_{gP} \mathbf{R}^T(\mathbf{o}_P) \boldsymbol{\omega}_P \quad (9.7)$$

This equation can be rewritten as:

$$\mathbf{R}(\mathbf{o}_P) \bar{\mathbf{t}}_P = \mathbf{R}(\mathbf{o}_P) \bar{\mathbf{I}}_{gP} \mathbf{R}^T(\mathbf{o}_P) \dot{\boldsymbol{\omega}}_P + \boldsymbol{\omega}_P \times \mathbf{R}(\mathbf{o}_P) \bar{\mathbf{I}}_{gP} \mathbf{R}^T(\mathbf{o}_P) \boldsymbol{\omega}_P \quad (9.8)$$

Out of this equation, and since the equilibrium is set in t for obtaining results in $t+\Delta t$ because it is applied to explicit methods, only term $\boldsymbol{\omega}_P$ is required to be linearized:

$$\boldsymbol{\omega}_P = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{o}_P, \dot{\mathbf{o}}_P) \simeq \boldsymbol{\omega}(\mathbf{o}_P, \dot{\mathbf{o}}_P^{(0)}) + \left. \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_P}{\partial \dot{\mathbf{o}}_P} \right|_{(\mathbf{o}_P, \dot{\mathbf{o}}_P^{(0)})} (\dot{\mathbf{o}}_P - \dot{\mathbf{o}}_P^{(0)}) \quad (9.9)$$

Where $\dot{\mathbf{o}}_P$ is the derivative of \mathbf{o}_P along time and $\dot{\mathbf{o}}_P^{(0)}$ represents the term relative to which the series expansion is performed. Applying this linearization to 9.8:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{o}_P) \bar{\mathbf{t}}_P &\simeq \mathbf{R}(\mathbf{o}_P) \bar{\mathbf{I}}_{gP} \mathbf{R}(\mathbf{o}_P)^T \dot{\boldsymbol{\omega}}_P^{(0)} + \mathbf{R}(\mathbf{o}_P) \bar{\mathbf{I}}_{gP} \mathbf{R}(\mathbf{o}_P)^T \left. \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\omega}}_P}{\partial \dot{\mathbf{o}}_P} \right|_{\mathbf{o}_P^{(0)}, \dot{\mathbf{o}}_P^{(0)}, \ddot{\mathbf{o}}_P^{(0)}} (\dot{\mathbf{o}}_P - \dot{\mathbf{o}}_P^{(0)}) + \\ &+ \mathbf{R}(\mathbf{o}_P) \bar{\mathbf{I}}_{gP} \mathbf{R}(\mathbf{o}_P)^T \left. \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\omega}}_P}{\partial \ddot{\mathbf{o}}_P} \right|_{\mathbf{o}_P^{(0)}, \dot{\mathbf{o}}_P^{(0)}, \ddot{\mathbf{o}}_P^{(0)}} (\ddot{\mathbf{o}}_P - \ddot{\mathbf{o}}_P^{(0)}) + \boldsymbol{\omega}_P^{(0)} \times \mathbf{R}(\mathbf{o}_P) \bar{\mathbf{I}}_{gP} \mathbf{R}(\mathbf{o}_P)^T \boldsymbol{\omega}_P^{(0)} + \\ &+ \boldsymbol{\omega}_P^{(0)} \times \mathbf{R}(\mathbf{o}_P) \bar{\mathbf{I}}_{gP} \mathbf{R}(\mathbf{o}_P)^T \left. \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_P}{\partial \dot{\mathbf{o}}_P} \right|_{\mathbf{o}_P^{(0)}, \dot{\mathbf{o}}_P^{(0)}, \ddot{\mathbf{o}}_P^{(0)}} (\dot{\mathbf{o}}_P - \dot{\mathbf{o}}_P^{(0)}) + \\ &+ \left. \frac{\partial (\boldsymbol{\omega}_P \times \mathbf{R}(\mathbf{o}_P) \bar{\mathbf{I}}_{gP} \mathbf{R}(\mathbf{o}_P)^T \boldsymbol{\omega}_P^{(0)})}{\partial \boldsymbol{\omega}_P} \right|_{\mathbf{o}_P^{(0)}, \dot{\mathbf{o}}_P^{(0)}, \ddot{\mathbf{o}}_P^{(0)}} \left. \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_P}{\partial \dot{\mathbf{o}}_P} \right|_{\mathbf{o}_P^{(0)}, \dot{\mathbf{o}}_P^{(0)}, \ddot{\mathbf{o}}_P^{(0)}} (\dot{\mathbf{o}}_P - \dot{\mathbf{o}}_P^{(0)}) \end{aligned} \quad (9.10)$$

Rearranging, a linearized expression of Euler's equation for an explicit method is obtained:

$$\mathbf{M}_{RP}(\mathbf{o}_P, \dot{\mathbf{o}}_P^{(0)}) \ddot{\mathbf{o}}_P + \mathbf{C}_{RP}(\mathbf{o}_P, \dot{\mathbf{o}}_P^{(0)}) \dot{\mathbf{o}}_P = \mathbf{f}_{RP}(\mathbf{o}_P, \dot{\mathbf{o}}_P^{(0)}, \ddot{\mathbf{o}}_P^{(0)}) \quad (9.11)$$

Where:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{RP}(\mathbf{o}_P, \dot{\mathbf{o}}_P^{(0)}) = & \mathbf{R}(\mathbf{o}_P) \bar{\mathbf{I}}_{gP} \mathbf{R}(\mathbf{o}_P^{(0)})^T \left. \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\omega}}_P}{\partial \dot{\mathbf{o}}_P} \right|_{\mathbf{o}_P, \dot{\mathbf{o}}_P^{(0)}} + \\ & \boldsymbol{\omega}_P^{(0)} \times \mathbf{R}(\mathbf{o}_P) \bar{\mathbf{I}}_{gP} \mathbf{R}(\mathbf{o}_P^{(0)})^T \left. \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_P}{\partial \dot{\mathbf{o}}_P} \right|_{\mathbf{o}_P, \dot{\mathbf{o}}_P^{(0)}} + \left. \frac{\partial (\boldsymbol{\omega}_P \times \mathbf{R}(\mathbf{o}_P) \bar{\mathbf{I}}_{gP} \mathbf{R}(\mathbf{o}_P^{(0)})^T \boldsymbol{\omega}_P^{(0)})}{\partial \boldsymbol{\omega}_P} \right|_{\dot{\mathbf{o}}_P^{(0)}} \left. \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_P}{\partial \dot{\mathbf{o}}_P} \right|_{\mathbf{o}_P, \dot{\mathbf{o}}_P^{(0)}} \end{aligned} \quad (9.12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{RP}(\mathbf{o}_P, \dot{\mathbf{o}}_P^{(0)}, \ddot{\mathbf{o}}_P^{(0)}) = & \mathbf{R}(\mathbf{o}_P) \bar{\mathbf{t}} + \\ & - \mathbf{R}(\mathbf{o}_P) \bar{\mathbf{I}}_{gP} \mathbf{R}(\mathbf{o}_P)^T \dot{\boldsymbol{\omega}}_P^{(0)} - \boldsymbol{\omega}_P^{(0)} \times \mathbf{R}(\mathbf{o}_P) \bar{\mathbf{I}}_{gP} \mathbf{R}(\mathbf{o}_P)^T \boldsymbol{\omega}_P^{(0)} + \mathbf{M}_{RP} \ddot{\mathbf{o}}_P^{(0)} + \mathbf{C}_{RP} \dot{\mathbf{o}}_P^{(0)} \end{aligned} \quad (9.13)$$

Compared to [144], equations 9.11, 9.12 and 9.13 include terms related to orientation clearly separated from the others. This means that the linearization is correct, once the expressions of $\mathbf{R}(\mathbf{o}_P)$, $\boldsymbol{\omega}_P^{(0)}$, $\dot{\boldsymbol{\omega}}_P^{(0)}$, $\left. \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_P}{\partial \dot{\mathbf{o}}_P} \right|_{\mathbf{o}_P, \dot{\mathbf{o}}_P^{(0)}}$ and $\left. \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\omega}}_P}{\partial \dot{\mathbf{o}}_P} \right|_{\mathbf{o}_P, \dot{\mathbf{o}}_P^{(0)}}$ are obtained. The equations related to linear displacements 9.3 are not affected by this linearization. Moreover, in an object oriented approach implementing different orientation systems is not difficult.

9.1.2 Constraints equations

Since these developments will be applied to an explicit method, the constraints equations will be formulated using displacements instead of velocities or accelerations. For this purpose the planar constraint will be developed.

Two solids M and P are considered for this purpose, whose movement is restricted by a planar joint through plane π . For defining the joint the fact that they share a common plane has to be taken into account; because of that, the distance vector in global coordinates between both solids is the same. This will lead to an underdetermined problem when the plane crosses the reference frame's origin, since the distance will be zero; for avoiding this, a vector normal to the plane \mathbf{v} and a scalar that determines the distance e are employed. This also avoids scaling problems.

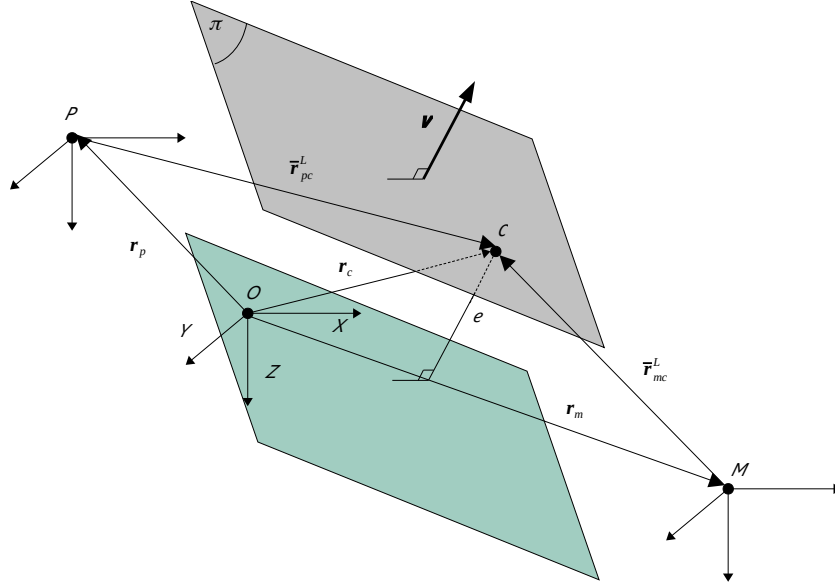


Figure 9.1: planar joint

The formulation of this joint leads to two sets of conditions. The first one makes planes of both solids have the same orientation, which can be achieved through a unit vector which is perpendicular to the planes. The second set of conditions makes both planes coincide, which uses the minimum distance condition of the planes referred to the global reference frame. Therefore, it can be stated that:

$$\mathbf{q}_{pl}(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_v(\mathbf{x}) \\ \mathbf{q}_e(\mathbf{x}) \end{Bmatrix} \quad (9.14)$$

Where in this case $\mathbf{q}_v(\mathbf{x})$ is the common vector constraint using vector \mathbf{v} , and $\mathbf{q}_e(\mathbf{x})$ is the minimum distance constraint referred to the global reference frame. The common vector constraint is known [144], and the minimum distance constraint can be formulated as follows:

$$q_e = e_p - e_m = 0 \quad (9.15)$$

Therefore, for solid P :

$$e_p = [\mathbf{R}(\mathbf{o}_p) \bar{\mathbf{v}}_p^L]^T [\mathbf{r}_p + \mathbf{R}(\mathbf{o}_p) \bar{\mathbf{r}}_{pc}^L] \quad (9.16)$$

Developing:

$$e_p = [\mathbf{R}(\mathbf{o}_p) \bar{\mathbf{v}}_p^L]^T \mathbf{r}_p + [\mathbf{R}(\mathbf{o}_p) \bar{\mathbf{v}}_p^L]^T \mathbf{R}(\mathbf{o}_p) \bar{\mathbf{r}}_{pc}^L \quad (9.17)$$

Where e_p is the minimum distance referred to the global reference system from plane π , $\mathbf{R}(\mathbf{o}_p)$ is the rotation matrix of solid P , $\bar{\mathbf{v}}_p^L$ is vector \mathbf{v} expressed

using local coordinates that correspond to solid P , \mathbf{r}_p is the position of the reference local frame related to solid P expressed using global coordinates and $\bar{\mathbf{r}}_{pc}^L$ is the position of point C measured in the local reference frame of P . The second term to the right of equation 9.17 can be written as:

$$e_p^L = [\mathbf{R}(\mathbf{o}_p) \bar{\mathbf{v}}_p^L]^T \mathbf{R}(\mathbf{o}_p) \bar{\mathbf{r}}_{pc}^L \quad (9.18)$$

In the case of employing a marker for defining the point and the plane on each solid $\bar{\mathbf{r}}_{pc}^L$ would be the coordinates vector of a point on a plane, and in this case the minimum distance would be calculated by the scalar product of the unit vector normal to the plane and $\bar{\mathbf{r}}_{pc}^L$. If, for instance, the unit vector \mathbf{z} of a reference frame fixed to the marker was employed:

$$e_p^L = [\mathbf{R}(\mathbf{o}_p) \bar{\mathbf{v}}_p^L]^T \mathbf{R}(\mathbf{o}_p) \bar{\mathbf{r}}_{pc}^L = (\bar{\mathbf{v}}_p^L)^T \bar{\mathbf{r}}_{pc}^L = (\mathbf{R}(\mathbf{o}_{mzp})^T)^T \bar{\mathbf{r}}_{pc}^L \quad (9.19)$$

Where $\mathbf{R}(\mathbf{o}_{mzp})^T$ is the last column of the rotation matrix of the marker. Therefore, if the same is done to solid M the minimum distance constraint $q_e(\mathbf{x})$ will be:

$$q_e = e_p - e_m = [\mathbf{R}(\mathbf{o}_p) \bar{\mathbf{v}}_p^L]^T \mathbf{r}_p + e_p^L - [\mathbf{R}(\mathbf{o}_m) \bar{\mathbf{v}}_m^L]^T \mathbf{r}_m - e_m^L = 0 \quad (9.20)$$

The constant vector constraint, lastly, would be [144]:

$$\mathbf{q}_v(\mathbf{x}) = \mathbf{R}(\mathbf{o}_p) \bar{\mathbf{v}}_p^L - \mathbf{R}(\mathbf{o}_m) \bar{\mathbf{v}}_m^L \quad (9.21)$$

While the equilibrium equation is evaluated in t , for using explicit methods constraints equations cannot be evaluated in the same instant as the equilibrium equations; in this case, and for obtaining the results in $t + \Delta t$, \mathbf{r}_p , \mathbf{o}_p , \mathbf{r}_m and \mathbf{o}_m must be evaluated in $t + \Delta t$ on equations 9.20 and 9.21. This requires the equations to be linearized, since these variables are not known. The result of the linearization can be written as

$$\mathbf{H}_{pl}(\mathbf{x}^{(0)}) \mathbf{x} = \mathbf{b}_{pl}(\mathbf{x}^{(0)}) \quad (9.22)$$

In the case of a planar joint (ref. Generalized coord.):

$$\mathbf{H}_{pl}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} \dots & \frac{\partial \mathbf{q}_v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{r}_p} & \frac{\partial \mathbf{q}_v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{o}_p} & \dots & \frac{\partial \mathbf{q}_v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{r}_m} & \frac{\partial \mathbf{q}_v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{o}_m} & \dots \\ \dots & \frac{\partial q_e(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{r}_p} & \frac{\partial q_e(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{o}_p} & \dots & \frac{\partial q_e(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{r}_m} & \frac{\partial q_e(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{o}_m} & \dots \end{bmatrix} \quad (9.23)$$

Where, for the common vector constraint $\mathbf{q}_v(\mathbf{x})$:

$$\frac{\partial \mathbf{q}_v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{r}_p} = \mathbf{0} \quad (9.24)$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}_v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{o}_p} = \left. \frac{\partial (\mathbf{R}(\mathbf{o}_p) \bar{\mathbf{v}}_p^L)}{\partial \mathbf{o}_p} \right|_{\mathbf{o}_p^{(0)}} = \mathbf{S}(\mathbf{o}_p^{(0)}, \bar{\mathbf{v}}_p^L) \quad (9.25)$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}_v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{r}_m} = \mathbf{0} \quad (9.26)$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}_v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{o}_m} = - \left. \frac{\partial (\mathbf{R}(\mathbf{o}_m) \bar{\mathbf{v}}_m^L)}{\partial \mathbf{o}_m} \right|_{\mathbf{o}_m^{(0)}} = -\mathbf{S}(\mathbf{o}_m^{(0)}, \bar{\mathbf{v}}_m^L) \quad (9.27)$$

And for the minimum distance constraint $\mathbf{q}_e(\mathbf{x})$:

$$\frac{\partial \mathbf{q}_e(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{r}_p} = [\mathbf{R}(\mathbf{o}_p^{(0)}) \bar{\mathbf{v}}_p^L]^T \quad (9.28)$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}_e(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{o}_p} = (\mathbf{r}_p^{(0)})^T \left. \frac{\partial (\mathbf{R}(\mathbf{o}_p) \bar{\mathbf{u}}_p^L)}{\partial \mathbf{o}_p} \right|_{\mathbf{o}_p^{(0)}} = (\mathbf{r}_p^{(0)})^T \mathbf{S}(\mathbf{o}_p^{(0)}, \bar{\mathbf{u}}_p^L) \quad (9.29)$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}_e(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{r}_m} = -[\mathbf{R}(\mathbf{o}_m^{(0)}) \bar{\mathbf{v}}_m^L]^T \quad (9.30)$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}_e(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{o}_m} = -(\mathbf{r}_m^{(0)})^T \left. \frac{\partial (\mathbf{R}(\mathbf{o}_m) \bar{\mathbf{u}}_m^L)}{\partial \mathbf{o}_m} \right|_{\mathbf{o}_m^{(0)}} = -(\mathbf{r}_m^{(0)})^T \mathbf{S}(\mathbf{o}_m^{(0)}, \bar{\mathbf{u}}_m^L) \quad (9.31)$$

On the other side, vector $\mathbf{b}_{pl}(\mathbf{x}^{(0)})$ is defined as:

$$\mathbf{b}_{pl}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}(\mathbf{o}_m^{(0)}) \bar{\mathbf{v}}_m^L - \mathbf{S}(\mathbf{o}_m^{(0)}, \bar{\mathbf{v}}_m^L) \mathbf{o}_m^{(0)} - \mathbf{R}(\mathbf{o}_p^{(0)}) \bar{\mathbf{v}}_p^L + \mathbf{S}(\mathbf{o}_p^{(0)}, \bar{\mathbf{v}}_p^L) \mathbf{o}_p^{(0)} \\ -e_p^L - (\mathbf{r}_p^{(0)})^T \mathbf{S}(\mathbf{o}_p^{(0)}, \bar{\mathbf{v}}_p^L) \mathbf{o}_p^{(0)} + e_m^L + (\mathbf{r}_m^{(0)})^T \mathbf{S}(\mathbf{o}_m^{(0)}, \bar{\mathbf{v}}_m^L) \mathbf{o}_m^{(0)} \end{Bmatrix} \quad (9.32)$$

The expression of $\mathbf{S}(\mathbf{o}, \mathbf{r})$ depends on the chosen orientation system. This matrix is already defined for quaternions [144].

Developing a linearized expression of the constraints forces is also required. For this purpose, it is necessary to consider the constraints forces to be perpendicular to the infinitesimal movements the mechanism allows to the solids that form it. Taking into account the fact that the equilibrium equations are expressed as three linear equilibrium equations, one per each Cartesian axis, and the torques around the same axes, the infinitesimal movements must be represented in the same system.

Since the method to which these linearizations and equations are applied is explicit, forces are evaluated in the initial instant of the step to be solved, and

therefore equations 9.20 and 9.21 are evaluated in t , where \mathbf{o}_p is known, while 9.23 is evaluated in $t + \Delta t$. An infinitesimal movement can be expressed as:

$$\mathbf{G}_{pl}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (9.33)$$

Where matrix $\mathbf{G}_{pl}(\mathbf{x})$ is:

$$\mathbf{G}_{pl}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dots & \frac{\partial \mathbf{q}_v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{r}_p} & \frac{\partial \mathbf{q}_v(\mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\theta}_p} & \dots & \frac{\partial \mathbf{q}_v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{r}_m} & \frac{\partial \mathbf{q}_v(\mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\theta}_m} & \dots \\ \dots & \frac{\partial \mathbf{q}_e(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{r}_p} & \frac{\partial \mathbf{q}_e(\mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\theta}_p} & \dots & \frac{\partial \mathbf{q}_e(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{r}_m} & \frac{\partial \mathbf{q}_e(\mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\theta}_m} & \dots \end{bmatrix} \quad (9.34)$$

The forces constraint for the common vector is:

$$\frac{\partial \mathbf{q}_v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{r}_p} = \mathbf{0} \quad (9.35)$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}_v(\mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\theta}_p} = \frac{\partial (\mathbf{R}(\mathbf{o}_p) \bar{\mathbf{v}}_p^L)}{\partial \boldsymbol{\theta}_p} = [\mathbf{R}(\mathbf{o}_p) \bar{\mathbf{v}}_p^L] \times \mathbf{I} \quad (9.36)$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}_v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{r}_m} = \mathbf{0} \quad (9.37)$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}_v(\mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\theta}_m} = \frac{-\partial (\mathbf{R}(\mathbf{o}_m) \bar{\mathbf{v}}_m^L)}{\partial \boldsymbol{\theta}_m} = -[\mathbf{R}(\mathbf{o}_m) \bar{\mathbf{v}}_m^L] \times \mathbf{I} \quad (9.38)$$

And for the minimum distance:

$$\frac{\partial \mathbf{q}_e(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{r}_p} = [\mathbf{R}(\mathbf{o}_p) \bar{\mathbf{v}}_p^L]^T \quad (9.39)$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}_e(\mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\theta}_p} = \mathbf{r}_p^T \frac{\partial (\mathbf{R}(\mathbf{o}_p) \bar{\mathbf{u}}_p^L)}{\partial \boldsymbol{\theta}_p} = [\mathbf{R}(\mathbf{o}_p) \bar{\mathbf{u}}_p^L] \times \mathbf{r}_p \quad (9.40)$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}_e(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{r}_m} = -[\mathbf{R}(\mathbf{o}_m) \bar{\mathbf{v}}_m^L]^T \quad (9.41)$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}_e(\mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\theta}_m} = -\mathbf{r}_m^T \frac{\partial (\mathbf{R}(\mathbf{o}_m) \bar{\mathbf{u}}_m^L)}{\partial \boldsymbol{\theta}_m} = -[\mathbf{R}(\mathbf{o}_m) \bar{\mathbf{u}}_m^L] \times \mathbf{r}_m \quad (9.42)$$

Since the constraint forces are perpendicular to the infinitesimal displacements, constraint forces can be written as:

$$\mathbf{f}_r = \mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (9.43)$$

9.1.3 Representations of the rotation

Once the development of the expressions of the matrices and vectors expressed in previous chapters is done, expressions of $\mathbf{R}(\mathbf{o})$, $\boldsymbol{\omega}^{(0)}$, $\dot{\boldsymbol{\omega}}^{(0)}$, $\left|\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{o}}}\right|_{\mathbf{o}, \dot{\mathbf{o}}^{(0)}}$ and $\left|\frac{\partial \dot{\boldsymbol{\omega}}}{\partial \dot{\mathbf{o}}}\right|_{\mathbf{o}, \dot{\mathbf{o}}^{(0)}}$ need to be previously known in order to obtain the expressions of the equilibrium equation and the constraints. Matrix $\mathbf{S}(\mathbf{o}, \mathbf{r})$ is also required for introducing relationships between solids, as is the case with the planar joint. All these terms are not related to the inertia properties of the solids and are only a function of the method employed for representing the orientation. At this point, the interactions between the selected orientation parameters and the equation system will be analyzed. For this purpose, and since the quaternions have already been used in this PhD thesis for performing the required developments, three other parameter sets will be analyzed: Euler angles, reduced Euler-Rodrigues parameters and the Gibbs vector. These two last representation methods are included as types of vectorial parametrization of the rotation [22].

9.1.3.1 Euler angles

The term Euler angles is not referred to a single set of parameters, but to a set of parameters that define the rotation around the three main reference axes. The use of Euler angles has as an advantage the fact that it provides a simple system with the minimum number of parameters, but it has several drawbacks; to begin with, it is mandatory to keep the values of the angles between $-\pi$ and π in order not to lose precision, and it also showcases a Gimbal Lock. Lastly, it makes an extensive use of trigonometric expressions that are not linear.

The configuration ZXZ will be developed, where the angles are α , β and γ . Relevant matrices and vectors are:

$$\mathbf{R}(\mathbf{o}) = \begin{bmatrix} c\alpha c\gamma - s\alpha c\beta s\gamma & -c\alpha s\gamma - s\alpha c\beta c\gamma & s\alpha s\beta \\ s\alpha c\gamma + c\alpha c\beta s\gamma & -s\alpha s\gamma + c\alpha c\beta c\gamma & -c\alpha s\beta \\ s\beta s\gamma & s\beta c\gamma & c\beta \end{bmatrix} \quad (9.44)$$

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{o}, \dot{\mathbf{o}}) = \begin{bmatrix} c\alpha \dot{\beta} + s\alpha s\beta \dot{\gamma} \\ s\alpha \dot{\beta} - c\alpha s\beta \dot{\gamma} \\ \dot{\alpha} + c\beta \dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad (9.45)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{o}, \dot{\mathbf{o}}, \ddot{\mathbf{o}}) = \begin{Bmatrix} c\alpha \ddot{\beta} + s\alpha s\beta \ddot{\gamma} - s\alpha \dot{\alpha} \dot{\beta} + c\alpha s\beta \dot{\alpha} \dot{\gamma} + s\alpha c\beta \dot{\beta} \dot{\gamma} \\ s\alpha \ddot{\beta} - c\alpha s\beta \ddot{\gamma} + c\alpha \dot{\alpha} \dot{\beta} + s\alpha s\beta \dot{\alpha} \dot{\gamma} - c\alpha c\beta \dot{\beta} \dot{\gamma} \\ \ddot{\alpha} + c\beta \ddot{\gamma} - s\beta \dot{\beta} \dot{\gamma} \end{Bmatrix} \quad (9.46)$$

$$\left| \frac{\partial \boldsymbol{\omega}(\mathbf{o}, \dot{\mathbf{o}})}{\partial \dot{\mathbf{o}}} \right| = \begin{bmatrix} 0 & c\alpha & s\alpha s\beta \\ 0 & s\alpha & -c\alpha s\beta \\ 1 & 0 & c\beta \end{bmatrix} \quad (9.47)$$

$$\left| \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{o}, \dot{\mathbf{o}}, \ddot{\mathbf{o}})}{\partial \ddot{\mathbf{o}}} \right| = \begin{bmatrix} \dot{\gamma} c\alpha s\beta - \dot{\beta} s\alpha & \dot{\gamma} s\alpha c\beta - \dot{\alpha} s\alpha & \dot{\alpha} c\alpha s\beta + \dot{\beta} s\alpha c\beta \\ \dot{\gamma} s\alpha s\beta + \dot{\beta} c\alpha & \dot{\alpha} c\alpha - \dot{\gamma} c\alpha c\beta & \dot{\alpha} s\alpha s\beta - \dot{\beta} c\alpha c\beta \\ 0 & -\dot{\gamma} s\beta & -\dot{\beta} s\beta \end{bmatrix} \quad (9.48)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{o}, \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} c\alpha s\beta v_3 + (s\alpha s\gamma - c\alpha c\beta c\gamma)v_2 + (-c\alpha c\beta s\gamma - s\alpha c\gamma)v_1 \\ s\alpha s\beta v_3 + (-c\alpha s\gamma - s\alpha c\beta c\gamma)v_2 + (c\alpha c\gamma - s\alpha c\beta s\gamma)v_1 \\ 0 \\ s\alpha c\beta v_3 + s\alpha s\beta c\gamma v_2 + s\alpha s\beta s\gamma v_1 & (s\alpha c\beta s\gamma - c\alpha c\gamma)v_2 + (-c\alpha s\gamma - s\alpha c\beta c\gamma)v_1 \\ -c\alpha c\beta v_3 - c\alpha s\beta c\gamma v_2 - c\alpha s\beta s\gamma v_1 & (-c\alpha c\beta s\gamma - s\alpha c\gamma)v_2 + (c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma)v_1 \\ -s\beta v_3 + c\beta c\gamma v_2 + c\beta s\gamma v_1 & s\beta c\gamma v_1 - s\beta s\gamma v_2 \end{bmatrix} \quad (9.49)$$

Where $c\alpha$ and $s\alpha$ mean, respectively, $\cos\alpha$ and $\sin\alpha$. This representation describes the singularities of this approach in an interesting way. Making $\beta=0$, 9.47 turns into:

$$\left| \frac{\partial \boldsymbol{\omega}(\mathbf{o}, \dot{\mathbf{o}})}{\partial \dot{\mathbf{o}}} \right|_{\beta=0} = \begin{bmatrix} 0 & c(\alpha) & 0 \\ 0 & s(\alpha) & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.50)$$

The determinant $\left| \frac{\partial \boldsymbol{\omega}(\mathbf{o}, \dot{\mathbf{o}})}{\partial \dot{\mathbf{o}}} \right|$ is zero, which also makes zero the determinant of 9.11; this is, it is a singular matrix, and therefore an equilibrium equation is lost. What is more: since the applied forces do not depend on the representation of the chosen orientation, the equation system will probably be incompatible. The fact that the system can move in any direction (the manifold is not limited by the representation system of the orientation) makes this problem not to be accepted as a Gimbal Lock problem, but has similar consequences: the system will not be able to move away from the singularity unless it is helped to do so somehow. A habitual solution is the use of an additional rotation, but that would mean the loss of the main advantage of the Euler angles, which is the minimum number of parameters. It is also worth taking into account that the system will be ill conditioned for small values of β due to the low values of the determinant of the mass matrix. And it is also important to notify the consequences of the singularity in a numerical

integration method; in a singular configuration, the two angles that do not define the singularity α and γ can have any value, given that $\alpha+\beta$ is kept constant. This means that, in the case of the system moving away from the singular point when using CD, both derivatives of α and β will be random numbers, since it is employed:

$$\dot{\alpha} = \frac{\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t-\Delta t)}{2\Delta t} \quad (9.51)$$

And therefore this derivative depends on the value in $t-\Delta t$, which is not defined if it comes from the singularity instant. Therefore, it is advisable to avoid the use of the Euler angles if assuring that the system is far from singular positions in all the integration time is not possible.

9.1.3.2 Vectorial parametrization of the rotation

The vectorial parametrization of the rotation is characterized by the use of a minimum number of parameters, which for representing the rotation is three. These theories come from the application of the Euler theorem, which states that a rigid solid or coordinate system can be determined from its initial position to the final position through a single rotation of an angle θ around a single axis $\mathbf{n}=[n_1 \ n_2 \ n_3]^T$, being the axis fixed in both positions. Therefore, the rotation parameters around the said axis can be defined as:

$$\mathbf{o} = o(\theta)\mathbf{n} \quad (9.52)$$

Where $o(\theta)$ is the generating function. Different choices of this function lead to different parametrizations of the rotation, such as the Gibbs vector or the Wiener-Milencovic parameters. It is important to point out that the rotation vector is parallel to the eigenvector corresponding to the unit eigenvalue of the rotation tensor. This proves that the parametrization of the rotation is of tensorial nature.

Bauchau [10,22] presents an explicit very useful formulation of the rotation matrix expressed in the terms corresponding to the vectorial parametrization obtained from the Rodrigues rotation equation:

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \xi_1(\theta)\tilde{\mathbf{O}} + \xi_2(\theta)\tilde{\mathbf{O}}\tilde{\mathbf{O}} \quad (9.53)$$

Where:

$$\xi_1(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{o(\theta)} \quad (9.54)$$

$$\zeta_2(\theta) = \frac{1 - \cos(\theta)}{o^2(\theta)} \quad (9.55)$$

$$\tilde{\mathbf{O}} = \begin{bmatrix} 0 & -o_3 & o_2 \\ o_3 & 0 & -o_1 \\ -o_2 & o_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.56)$$

Being $\tilde{\mathbf{O}}$ the skew-symmetric matrix. However, this vectorial parametrization has a drawback: according to [146], any parametrization that employs a minimum number of parameters will have singularities; this is, there is no parametrization that has three terms and has no singularities. Still, it is worth clarifying that those singularities sometimes happen out of range and that a re-scaling is possible. Several types of singularities can be found, being one of the most intuitive that in which the parameters \mathbf{o} tend to infinite, but another one caused by a loss of rank of the mass matrix can also appear.

9.1.3.3 Reduced Euler-Rodrigues parameters

Reduced Euler-Rodrigues parameters are formed with the following generating function:

$$o(\theta) = b(\theta) = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (9.57)$$

Therefore the reduced parameters are:

$$\mathbf{o} = \mathbf{b} = b(\theta) \mathbf{n} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) n_x \\ 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) n_y \\ 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) n_z \end{bmatrix} \quad (9.58)$$

Defining:

$$b_0 = \sqrt{1 - \frac{\mathbf{b}^T \mathbf{b}}{4}} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (9.59)$$

The rotation matrix is achieved by introducing $\zeta_1(\theta) = b_0$ and $\zeta_2(\theta) = 0.5$ in 9.53, hence making the rotation matrix be:

$$R(\mathbf{o}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -b_3^2 - b_2^2 + 2 & -b_3 \sqrt{-b_3^2 - b_2^2 - b_1^2 + 4} + b_1 b_2 & b_2 \sqrt{b_3^2 - b_2^2 - b_1^2 + 4} + b_1 b_3 \\ b_3 \sqrt{-b_3^2 - b_2^2 - b_1^2 + 4} + b_1 b_2 & -b_3^2 - b_1^2 + 2 & -b_1 \sqrt{-b_3^2 - b_2^2 - b_1^2 + 4} + b_2 b_3 \\ -b_2 \sqrt{-b_3^2 - b_2^2 - b_1^2 + 4} + b_1 b_3 & b_1 \sqrt{-b_3^2 - b_2^2 - b_1^2 + 4} + b_2 b_3 & -b_2^2 - b_1^2 + 2 \end{bmatrix} \quad (9.60)$$

Other relevant terms of this parametrization are:

$$\omega(\mathbf{o}, \dot{\mathbf{o}}) = \frac{1}{2B_1} \left\{ \begin{aligned} & -B_2(b_1 b_3 \dot{b}_3 + b_1 b_2 \dot{b}_2 + (-b_3^2 - b_2^2 + 4) \dot{b}_1) + \\ & -B_2(b_2 b_3 \dot{b}_3 + (-b_3^2 - b_1^2 + 4) \dot{b}_2 + b_1 b_2 \dot{b}_1) + \\ & B_2((b_2^2 + b_1^2 - 4) \dot{b}_3 - b_2 b_3 \dot{b}_2 - b_1 b_3 \dot{b}_1) + \\ & -(-b_2 b_3^2 - b_2^3 + (4 - b_1^2) b_2) \dot{b}_3 - (b_3^3 + (b_2^2 + b_1^2 - 4) b_3) \dot{b}_2 \\ & - (b_1 b_3^2 + b_1 b_2^2 + b_1^3 - 4 b_1) \dot{b}_3 - ((-b_2^2 - b_1^2 + 4) b_3 - b_3^3) \dot{b}_1 \\ & + (b_1 b_3^2 + b_1 b_2^2 + b_1^3 - 4 b_1) \dot{b}_2 + (-b_2 b_3^2 - b_2^3 + (4 - b_1^2) b_2) \dot{b}_1 \end{aligned} \right\} \quad (9.61)$$

$$\dot{\omega}(\mathbf{o}, \dot{\mathbf{o}}, \ddot{\mathbf{o}}) = \frac{1}{2B_3} \left\{ \begin{aligned} & B_4 - (-b_2 b_3^4 + ((8 - 2b_1^2) b_2 - 2b_2^3) b_3^2 - b_2^5 + (8 - 2b_1^2) b_2^3 + (-b_1^4 + 8b_1^2 - 16) b_2) \ddot{b}_3 + \\ & B_5 - (b_1 b_3^4 + (2b_1 b_2^2 + 2b_1^3 - 8b_1) b_3^2 + b_1 b_2^4 + (2b_1^3 - 8b_1) b_2^2 + b_1^5 - 8b_1^3 + 16b_1) \ddot{b}_3 + \\ & B_6 + (b_1 b_3^4 + (2b_1 b_2^2 + 2b_1^3 - 8b_1) b_3^2 + b_1 b_2^4 + (2b_1^3 - 8b_1) b_2^2 + b_1^5 - 8b_1^3 + 16b_1) \ddot{b}_2 + \\ & -(b_3^5 + (2b_2^2 + 2b_1^2 - 8) b_3^3 + (b_4^2 + (2b_1^2 - 8) b_2^2 + b_1^4 - 8b_1^2 + 16) b_3) \ddot{b}_2 \\ & - (-b_3^5 + (-2b_2^2 - 2b_1^2 + 8) b_3^3 + (-b_4^2 + (8 - 2b_1^2) b_2^2 - b_1^4 + 8b_1^2 - 16) b_3) \ddot{b}_1 \\ & + (-b_2 b_3^4 + ((8 - 2b_1^2) b_2 - 2b_2^3) b_3^2 - b_2^5 + (8 - 2b_1^2) b_2^3 + (-b_1^4 + 8b_1^2 - 16) b_2) \ddot{b}_1 \end{aligned} \right\} \quad (9.62)$$

$$\left| \frac{\partial \omega(\mathbf{o}, \dot{\mathbf{o}})}{\partial \dot{\mathbf{o}}} \right| = \frac{1}{2B_1} \begin{bmatrix} B_2(b_3^2 + b_2^2 - 4) \\ -b_1 b_2 B_2 + b_3^3 - (-b_2^2 - b_1^2 + 4) b_3 \\ -b_1 b_3 B_2 - b_2 b_3^2 - b_2^3 - (b_1^2 - 4) b_2 \\ -b_1 b_2 B_2 - b_3^3 - (b_2^2 + b_1^2 - 4) b_3 & -b_1 b_3 B_2 + b_2 b_3^2 + b_2^3 - (4 - b_1^2) b_2 \\ B_2(b_3^2 + b_1^2 - 4) & -b_2 b_3 B_2 - b_1 b_3^2 - b_1 b_2^2 - b_1^3 + 4 b_1 \\ -b_2 b_3 B_2 + b_1 b_3^2 + b_1 b_2^2 + b_1^3 - 4 b_1 & (b_2^2 + b_1^2 - 4) B_2 \end{bmatrix} \quad (9.63)$$

$$\left| \frac{\partial \dot{\omega}(\mathbf{o}, \dot{\mathbf{o}}, \ddot{\mathbf{o}})}{\partial \ddot{\mathbf{o}}} \right| = \frac{B_2}{B_3} \begin{bmatrix} (b_1^2 b_3 \dot{b}_3 + b_1^2 b_2 \dot{b}_2 + (-b_1 b_3^2 - b_1 b_2^2 + 4 b_1) \dot{b}_1) \\ (b_1 b_2 b_3 \dot{b}_3 + b_1 b_2^2 \dot{b}_2 + (-b_2 b_3^2 - b_2^3 + 4 b_2) \dot{b}_1) \\ (b_1 b_3^2 \dot{b}_3 + b_1 b_2 b_3 \dot{b}_2 + ((4 - b_2^2) b_3 - b_3^3) \dot{b}_1) \\ (b_1 b_2 b_3 \dot{b}_3 + (-b_1 b_3^2 - b_1^3 + 4 b_1) \dot{b}_2 + b_1^2 b_2 \dot{b}_1) & -((b_1 b_2^2 + b_1^3 - 4 b_1) \dot{b}_3 - b_1 b_2 b_3 \dot{b}_2 - b_1^2 b_3 \dot{b}_1) \\ (b_2^2 b_3 \dot{b}_3 + ((4 - b_1^2) b_2 - b_2 b_3^2) \dot{b}_2 + b_1 b_2^2 \dot{b}_1) & -((b_2^3 + (b_1^2 - 4) b_2) \dot{b}_3 - b_2^2 b_3 \dot{b}_2 - b_1 b_2 b_3 \dot{b}_1) \\ (b_2 b_3^2 \dot{b}_3 + ((4 - b_1^2) b_3 - b_3^3) \dot{b}_2 + b_1 b_2 b_3 \dot{b}_1) & -((b_2^2 + b_1^2 - 4) b_3 \dot{b}_3 - b_2 b_3^2 \dot{b}_2 - b_1 b_3^2 \dot{b}_1) \end{bmatrix} \quad (9.64)$$

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{S}(\mathbf{o}, \mathbf{v}) = \\
 & \frac{1}{2B_1} \left[\begin{aligned}
 & (B_2(b_1b_2v_3 - b_1b_3v_2) + (b_3^3 + (b_2^2 + b_1^2 - 4)b_3)v_3 + (b_2b_3^2 + b_2^3 + (b_1^2 - 4)b_2)v_2) \\
 & - (B_2((b_3^2 + b_2^2 + 2b_1^2 - 4)v_3 - b_1b_3v_1) + (2b_1b_3^2 + 2b_1b_2^2 + 2b_1^3 - 8b_1)v_2 + (-b_2b_3^2 - b_2^3 + (4 - b_1^2)b_2)v_1) \\
 & ((-2b_1b_3^2 - 2b_1b_2^2 - 2b_1^3 + 8b_1)v_3 + B_2((b_3^2 + b_2^2 + 2b_1^2 - 4)v_2 - b_1b_2v_1) + (b_3^3 + (b_2^2 + b_1^2 - 4)b_3)v_1) \\
 & (B_2((b_3^2 + 2b_2^2 + b_1^2 - 4)v_3 - b_2b_3v_2) + (b_1b_3^2 + b_1b_2^2 + b_1^3 - 4b_1)v_2 + (-2b_2b_3^2 - 2b_2^3 + (8 - 2b_1^2)b_2)v_1) \\
 & - (B_2(b_1b_2v_3 - b_2b_3v_1) + ((-b_2^2 - b_1^2 + 4)b_3 - b_3^3)v_3 + (-b_1b_3^2 - b_1b_2^2 - b_1^3 + 4b_1)v_1) \\
 & ((-2b_2b_3^2 - 2b_2^3 + (8 - 2b_1^2)b_2)v_3 + B_2(b_1b_2v_2 + (-b_3^2 - 2b_2^2 - b_1^2 + 4)v_1) + (b_3^3 + (b_2^2 + b_1^2 - 4)b_3)v_2) \\
 & (B_2(b_2b_3v_3 + (-2b_3^2 - b_2^2 - b_1^2 + 4)v_2) + (b_1b_3^2 + b_1b_2^2 + b_1^3 - 4b_1)v_3 + ((-2b_2^2 - 2b_1^2 + 8)b_3 - 2b_3^3)v_1) \\
 & - (B_2(b_1b_3v_3 + (-2b_3^2 - b_2^2 - b_1^2 + 4)v_1) + (-b_2b_3^2 - b_2^3 + (4 - b_1^2)b_2)v_3 + (2b_3^3 + (2b_2^2 + 2b_1^2 - 8)b_3)v_2) \\
 & (B_2(b_1b_3v_2 - b_2b_3v_1) + (b_2b_3^2 + b_2^3 + (b_1^2 - 4)b_2)v_2 + (b_1b_3^2 + b_1b_2^2 + b_1^3 - 4b_1)v_1)
 \end{aligned} \right] \\
 & (9.65)
 \end{aligned}$$

Where:

$$B_1 = b_3^2 + b_2^2 + b_1^2 - 4 \quad (9.66)$$

$$B_2 = \sqrt{-b_3^2 - b_2^2 - b_1^2 + 4} \quad (9.67)$$

$$B_3 = (b_3^4 + (2b_2^2 + 2b_1^2 - 8)b_3^2 + b_2^4 + (2b_1^2 - 8)b_2^2 + b_1^4 - 8b_1^2 + 16) \quad (9.68)$$

$$\begin{aligned}
 & B_4 = -B_2 \{ (b_1b_3^3 + (b_1b_2^2 + b_1^3 - 4b_1)b_3)\ddot{b}_3 + (b_1b_2b_3^2 + b_1b_2^3 + (b_1^3 - 4b_1)b_2)\ddot{b}_2 + \\
 & + (-b_3^4 + (-2b_2^2 - b_1^2 + 8)b_3^2 - b_2^4 + (8 - b_1^2)b_2^2 + 4b_1^2 - 16)\ddot{b}_1 + (b_1b_2^2 + b_1^3 - 4b_1)\dot{b}_3^2 + \\
 & + (-2b_1b_2b_3\dot{b}_2 - 2b_1^2b_3\dot{b}_1)\dot{b}_3 + (b_1b_3^2 + b_1^3 - 4b_1)\dot{b}_2^2 - 2b_1^2b_2\dot{b}_1\dot{b}_2 + (b_1b_3^2 + b_1b_2^2 - 4b_1)\dot{b}_1^2 \} \\
 & (9.69)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & B_5 = B_2 \{ (b_2b_3^3 + (b_2^2 + (b_1^2 - 4)b_2)b_3)\ddot{b}_3 + (-b_3^4 + (-b_2^2 - 2b_1^2 + 8)b_3^2 + (4 - b_1^2)b_2^2 - b_1^4 + 8b_1^2 - 16)\ddot{b}_2 + \\
 & + (b_1b_2b_3^2 + b_1b_2^3 + (b_1^3 - 4b_1)b_2)\ddot{b}_1 + (b_2^2 + (b_1^2 - 4)b_2)\dot{b}_3^2 + (-2b_2^2b_3\dot{b}_2 - 2b_1b_2b_3\dot{b}_1)\dot{b}_3 + \\
 & + (b_2b_3^2 + (b_1^2 - 4)b_2)\dot{b}_2^2 - 2b_1b_2\dot{b}_1\dot{b}_2 + (b_2b_3^2 + b_2^3 - 4b_2)\dot{b}_1^2 \} \\
 & (9.70)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & B_6 = B_2 \{ ((b_2^2 + b_1^2 - 4)b_3^2 + b_2^4 + (2b_1^2 - 8)b_2^2 + b_1^4 - 8b_1^2 + 16)\ddot{b}_3 + (((4 - b_1^2)b_2 - b_2^3)b_3 - b_2b_3^3)\ddot{b}_2 + \\
 & + ((-b_1b_2^2 - b_1^3 + 4b_1)b_3 - b_1b_3^3)\ddot{b}_1 + (-b_2^2 - b_1^2 + 4)b_3\dot{b}_3^2 + (2b_2b_3^2\dot{b}_2 + 2b_1b_3^2\dot{b}_1)\dot{b}_3 + \\
 & + ((4 - b_1^2)b_3 - b_3^3)\dot{b}_2^2 + 2b_1b_2b_3\dot{b}_1\dot{b}_2 + ((4 - b_2^2)b_3 - b_3^3)\dot{b}_1^2 \} \\
 & (9.71)
 \end{aligned}$$

Parametrization vectors based on sine families do not present the problem with which the parameters tend to infinity for certain values of angle θ , and this is not an exception. However when analyzing the singularities of matrix $\left| \frac{\partial \boldsymbol{\omega}(\mathbf{o}, \dot{\mathbf{o}})}{\partial \dot{\mathbf{o}}} \right|$ the opposite can be concluded. Its determinant is as follows:

$$\det \left| \frac{\partial \boldsymbol{\omega}(\mathbf{o}, \dot{\mathbf{o}})}{\partial \dot{\mathbf{o}}} \right| = \frac{-2\sqrt{-b_3^2 - b_2^2 - b_1^2 + 4}}{b_3^2 + b_2^2 + b_1^2 - 4} \quad (9.72)$$

Expression $b_3^2+b_2^2+b_1^2-4=0$ implies the existence of a singularity, more precisely when the angle turns $-\pi$ or π . For instance if the solid rotates an angle π around the x axis the combination of parameters is $b_1=2$ and $b_2=b_3=0$, making the relevant matrices of the system take the following forms:

$$\mathbf{R}(\mathbf{o}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (9.73)$$

$$\left| \frac{\partial \boldsymbol{\omega}(\mathbf{o}, \dot{\mathbf{o}})}{\partial \dot{\mathbf{o}}} \right| = \begin{bmatrix} \frac{0}{0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{0}{0} & \frac{0}{0} \\ 0 & \frac{0}{0} & \frac{0}{0} \end{bmatrix} \quad (9.74)$$

The mass matrix turns singular in the singular point and the equilibrium equations of the system are lost. It can be asserted, therefore, that the range of the reduced Euler-Rodrigues parameters is $|\theta| < \pi$, and that its use is not advisable when finite rotation movements are produced.

9.1.3.4 Gibbs vector

The Gibbs vector has the following associated generating function:

$$o(\theta) = c(\theta) = 2 \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (9.75)$$

Therefore, Gibbs vector parameters are:

$$\mathbf{o} = \mathbf{c} = c(\theta) \mathbf{n} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) n_x \\ 2 \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) n_y \\ 2 \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) n_z \end{Bmatrix} \quad (9.76)$$

Employing the auxiliary parameter c_0 , the rotation matrix is achieved by substituting $\zeta_1(\theta) = c_0$ and $\zeta_2(\theta) = c_0/2$ in 9.53:

$$c_0 = \frac{1}{1 + \frac{\mathbf{c}^T \mathbf{c}}{4}} = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (9.77)$$

Therefore, the rotation matrix is:

$$\mathbf{R}(\mathbf{o}) = \frac{1}{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + 4} \begin{bmatrix} -c_3^2 - c_2^2 + c_1^2 + 4 & -4c_3 + 2c_1c_2 & 4c_2 + 2c_1c_3 \\ 4c_3 + 2c_1c_2 & -c_3^2 + c_2^2 - c_1^2 + 4 & -4c_1 + 2c_3c_2 \\ -4c_2 + 2c_3c_1 & 4c_1 + 2c_3c_2 & c_3^2 - c_2^2 - c_1^2 + 4 \end{bmatrix} \quad (9.78)$$

The angular velocity:

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{o}, \dot{\mathbf{o}}) = \frac{2}{c_3^2 + c_2^2 + c_1^2 + 4} \begin{Bmatrix} c_2\dot{c}_3 - c_3\dot{c}_2 + 2\dot{c}_1 \\ -c_1\dot{c}_3 + 2\dot{c}_2 + c_3\dot{c}_1 \\ 2\dot{c}_3 + c_1\dot{c}_2 - c_2\dot{c}_1 \end{Bmatrix} \quad (9.79)$$

And the matrix $\frac{\partial \boldsymbol{\omega}(\mathbf{o}, \dot{\mathbf{o}})}{\partial \dot{\mathbf{o}}}$:

$$\left| \frac{\partial \boldsymbol{\omega}(\mathbf{o}, \dot{\mathbf{o}})}{\partial \dot{\mathbf{o}}} \right| = \frac{2}{c_3^2 + c_2^2 + c_1^2 + 4} \begin{bmatrix} 2 & -c_3 & c_2 \\ c_3 & 2 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 2 \end{bmatrix} \quad (9.80)$$

Other relevant terms are:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{o}, \dot{\mathbf{o}}, \ddot{\mathbf{o}}) = \frac{1}{C_1} \left\{ \begin{aligned} & (2c_2c_3^2 + 2c_2^3 + (2c_1^2 + 8)c_2)\ddot{c}_3 + ((-2c_2^2 - 2c_1^2 - 8)c_3 - 2c_3^3)\ddot{c}_2 + (4c_3^2 + 4c_2^2 + 4c_1^2 + 16)\ddot{c}_1 + \\ & -(2c_1c_3^2 + 2c_1c_2^2 + 2c_1^3 + 8c_1)\ddot{c}_3 - (4c_3^2 - 4c_2^2 - 4c_1^2 - 16)\ddot{c}_2 - ((-2c_2^2 - 2c_1^2 - 8)c_3 - 2c_3^3)\ddot{c}_1 + \\ & (4c_3^2 + 4c_2^2 + 4c_1^2 + 16)\ddot{c}_3 + (2c_1c_3^2 + 2c_1c_2^2 + 2c_1^3 + 8c_1)\ddot{c}_2 + (-2c_2c_3^2 - 2c_2^3 + (-2c_1^2 - 8)c_2)\ddot{c}_1 + \\ & -4c_2c_3\dot{c}_3^2 + ((4c_3^2 - 4c_2^2)\dot{c}_2 + (-8c_3 - 4c_1c_2)\dot{c}_1)\dot{c}_3 + 4c_2c_3\dot{c}_2^2 + (4c_1c_3 - 8c_2)\dot{c}_1\dot{c}_2 - 8c_1\dot{c}_1^2 \\ & + 4c_1c_3\dot{c}_3^2 - ((8c_3 - 4c_1c_2)\dot{c}_2 - (4c_3^2 - 4c_1^2)\dot{c}_1)\dot{c}_3 - 8c_2\dot{c}_2^2 - (4c_2c_3 + 8c_1)\dot{c}_1\dot{c}_2 - 4c_1c_3\dot{c}_1^2 \\ & - 8c_3\dot{c}_3^2 + ((-4c_1c_3 - 8c_2)\dot{c}_2 + (4c_2c_3 - 8c_1)\dot{c}_1)\dot{c}_3 - 4c_1c_2\dot{c}_2^2 + (4c_2^2 - 4c_1^2)\dot{c}_1\dot{c}_2 + 4c_1c_2\dot{c}_1^2 \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (9.81)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{o}, \dot{\mathbf{o}}, \ddot{\mathbf{o}})}{\partial \dot{\mathbf{o}}} \right| = \frac{1}{C_1} \left[\begin{aligned} & -((8c_3 + 4c_1c_2)\dot{c}_3 + (8c_2 - 4c_1c_3)\dot{c}_2 + 16c_1\dot{c}_1) \\ & -((4c_3^2 - 4c_1^2)\dot{c}_3 + (4c_2c_3 + 8c_1)\dot{c}_2 + 8c_1c_3\dot{c}_1) \\ & ((4c_2c_3 - 8c_1)\dot{c}_3 + (4c_2^2 - 4c_1^2)\dot{c}_2 + 8c_1c_2\dot{c}_1) \\ & ((4c_3^2 - 4c_2^2)\dot{c}_3 + 8c_2c_3\dot{c}_2 + (4c_1c_3 - 8c_2)\dot{c}_1) & -(8c_2c_3\dot{c}_3 + (4c_2^2 - 4c_3^2)\dot{c}_2 + (8c_3 + 4c_1c_2)\dot{c}_1) \\ & -((8c_3 - 4c_1c_2)\dot{c}_3 + 16c_2\dot{c}_2 + (4c_2c_3 + 8c_1)\dot{c}_1) & (8c_1c_3\dot{c}_3 + (4c_1c_2 - 8c_3)\dot{c}_2 + (4c_1^2 - 4c_3^2)\dot{c}_1) \\ & -((4c_1c_3 + 8c_2)\dot{c}_3 + 8c_1c_2\dot{c}_2 + (4c_1^2 - 4c_2^2)\dot{c}_1) & -(16c_3\dot{c}_3 + (4c_1c_3 + 8c_2)\dot{c}_2 + (8c_1 - 4c_2c_3)\dot{c}_1) \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (9.82)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{o}, \mathbf{v}) = \frac{1}{C_1} \begin{bmatrix} (2c_3^3 + (2c_2^2 - 2c_1^2 + 8)c_3 - 8c_1c_2)v_3 + (2c_2c_3^2 + 8c_1c_3 + 2c_2^3 + (8 - 2c_1^2)c_2)v_2 + (4c_1c_3^2 + 4c_1c_2^2)v_1 \\ -(4c_3^3 + 4c_1c_2c_3 + 4c_2^2 - 4c_1^2 + 16)v_3 - (4c_1c_2^2 + 16c_1)v_2 - (-2c_2c_3^2 + 8c_1c_3 - 2c_2^3 + (2c_1^2 - 8)c_2)v_1 \\ -(4c_1c_3^2 + 16c_1)v_3 - (-4c_3^3 + 4c_1c_2c_3 - 4c_2^2 + 4c_1^2 - 16)v_2 - (-2c_3^3 + (-2c_2^2 + 2c_1^2 - 8)c_3 - 8c_1c_2)v_1 \\ (4c_2^2 - 4c_1c_2c_3 - 4c_2^2 + 4c_1^2 + 16)v_3 + (2c_1c_3^2 + 8c_2c_3 - 2c_1c_2^2 + 2c_1^3 + 8c_1)v_2 + (-4c_1^2 - 16)c_2v_1 \\ (2c_3^3 + (-2c_2^2 + 2c_1^2 + 8)c_3 + 8c_1c_2)v_3 + (4c_2c_3^2 + 4c_1^2c_2)v_2 + (2c_1c_3^2 - 8c_2c_3 - 2c_1c_2^2 + 2c_1^3 + 8c_1)v_1 \\ -(4c_2c_3^2 + 16c_2)v_3 - (-2c_3^3 + (2c_2^2 - 2c_1^2 - 8)c_3 + 8c_1c_2)v_2 - (4c_3^2 + 4c_1c_2c_3 - 4c_2^2 + 4c_1^2 + 16)v_1 \\ -(2c_1c_3^2 + 8c_2c_3 - 2c_1c_2^2 - 2c_1^3 - 8c_1)v_3 - (-4c_3^2 + 4c_1c_2c_3 + 4c_2^2 + 4c_1^2 + 16)v_2 - (4c_1^2 + 16)c_3v_1 \\ -(2c_2c_3^2 - 8c_1c_3 - 2c_2^3 + (-2c_1^2 - 8)c_2)v_3 - (4c_2^2 + 16)c_3v_2 - (4c_3^2 + 4c_1c_2c_3 - 4c_2^2 - 4c_1^2 - 16)v_1 \\ (4c_2^2 + 4c_1^2)c_3v_3 + (-2c_2c_3^2 - 8c_1c_3 + 2c_2^3 + (2c_1^2 + 8)c_2)v_2 + (-2c_1c_3^2 + 8c_2c_3 + 2c_1c_2^2 + 2c_1^3 + 8c_1)v_1 \end{bmatrix} \quad (9.83)$$

Where:

$$C_1 = c_3^4 + (2c_2^2 + 2c_1^2 + 8)c_3^2 + c_2^4 + (2c_1^2 + 8)c_2^2 + c_1^4 + 8c_1^2 + 16 \quad (9.84)$$

Triangularizing 9.80, it can be written:

$$\text{tri} \left| \frac{\partial \boldsymbol{\omega}(\mathbf{o}, \dot{\mathbf{o}})}{\partial \dot{\mathbf{o}}} \right| = \begin{bmatrix} 4 & -2c_3 & 2c_2 \\ 0 & 4c_3^2 + 16 & -4c_2c_3 - 8c_1 \\ 0 & 0 & 16c_3^2 + 16c_2^2 + 16c_1^2 + 64 \end{bmatrix} \quad (9.85)$$

This matrix is singular when $c_3^2 + c_2^2 + c_1^2 + 4 = 0$ is fulfilled, but a combination of values that fulfills this condition does not exist. However the Gibbs vector is not free of singularities; the generating function $2 \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ is singular when the angle is equal to π , where it tends to infinity. In a similar fashion to the reduced Euler-Rodrigues parameters, the stability range of the Gibbs vector is $|\theta| < \pi$ and is not suitable for finite rotations.

9.1.4 Examples

Two mechanisms will be employed for testing the methodology explained in this section, and three objectives will be aimed: the first one is to verify that the methodology is correct regarding versatility and behavior. The second is to check if the singularities match the theoretical developments, and the third is to draw conclusions about the suitability of the employed parametrization.

The employed algorithm has been tested in different computers, all of which are based on a x86_64 architecture. The performance limit has been disabled on all simulations, making the CPU work at nominal speed. Multithreading has not been used. The method has been implemented on GCC in Linux, and has been compiled with -O3 flags. LAPACK has been

employed, which also employs BLAS, which has been tested for different applications (OpenBLAS, ATLAS, iMKL) with similar results. The implementation has been carried out through an object oriented programming where the values are introduced manually, without using an automatization code with library codes. Commercial software has also been used on Windows 10 with the CPU acceleration disabled.

9.1.4.1 Spatial pendulum

The mechanism can be seen in figure 9.2. This mechanism is made of a point mass of 1kg and a massless rod that is 1m long, which is connected to a fixed point through a spherical joint. The system moves from the initial position in which velocities are zero due to the action of gravity. Total energy is obtained as the sum of the kinetic and potential energies and taking the initial value as a reference, and as such the value that is preserved along the simulation is zero. In tables 9.1, 9.2 and 9.3 the simulation error is shown; this error is the greatest value of the mechanical energy drift from the zero reference.

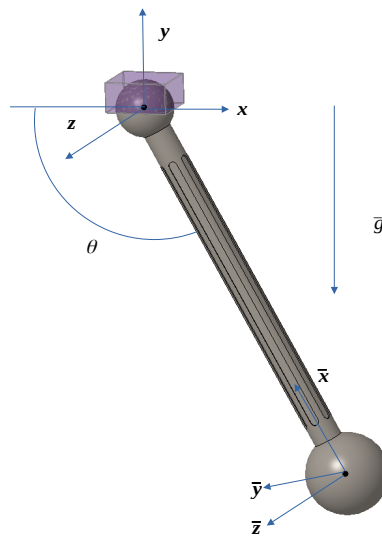


Figure 9.2: spatial pendulum

Three simulations are proposed: for the first one the conditions (called type 1 conditions) are an initial angle of $\theta = \pi/4$ with a step size of $1 \cdot 10^{-3} s$ and an integration error tolerance of $1 \cdot 10^{-8}$, through 4s of simulation. Under these conditions the main angle varies between $\pi/4$ and $3\pi/4$, and as such no method will have stability problems. Results of the different integration method are shown in the following table:

Method	Accuracy	Time (s)
Unit quaternion	8.078e-06	0.234
Euler ZXZ	8.078e-06	0.172
Reduced Euler-Rodrigues	8.078e-06	0.203
Gibbs vector	8.078e-06	0.187

Table 9.1: results of the spatial pendulum for different methods under type 1 conditions

As can be seen in figure 9.3 all orientation methods bring a good solution and are not affected by the precision. The main difference resides in the computational cost, where the slowest one corresponds to the unit quaternion. This phenomenon can be explained by the use of four parameters and the constraint equation that is imposed by the norm of the quaternion.

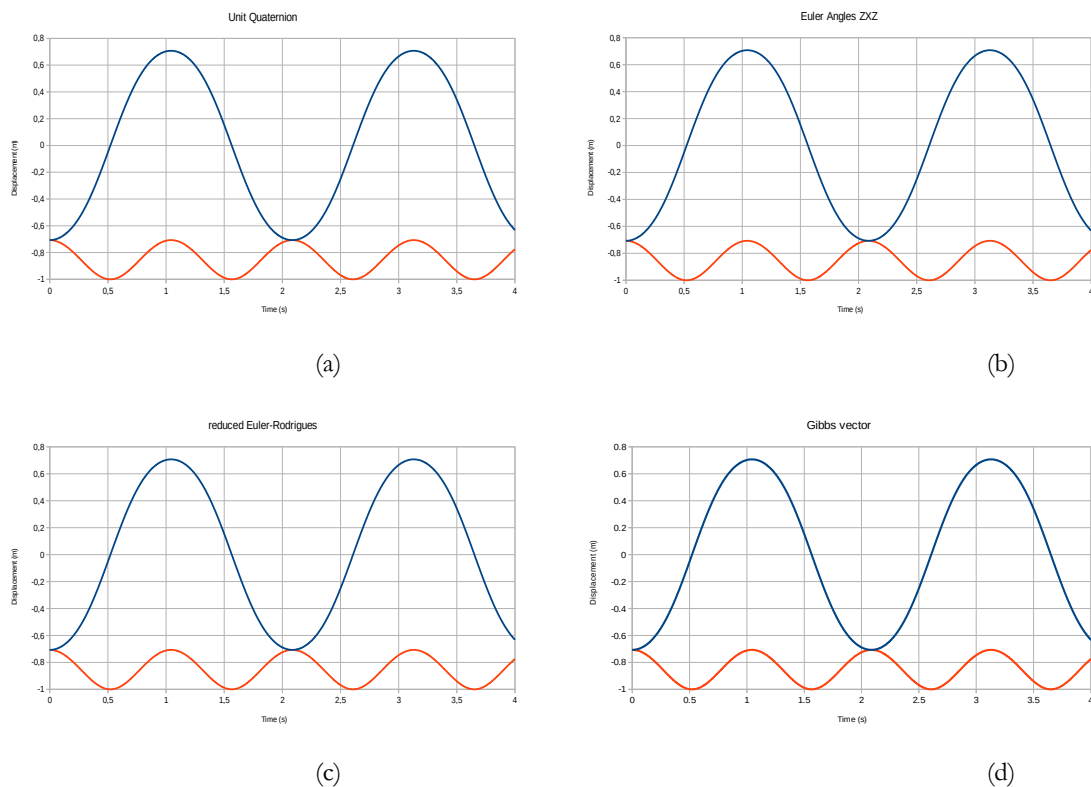


Figure 9.3: x and y coordinates of different orientation methods under type 1 conditions: a) unit quaternion, b) Euler angles, c) reduced Euler-Rodrigues and d) Gibbs vector

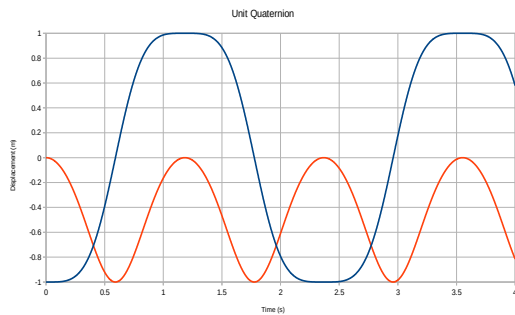
Type 2 conditions are as follows: $\theta_0=0$, and the remaining parameters are the same as the ones found in the type 1 conditions, and therefore the main angle varies between 0 and π . This change makes some orientation methods

have stability issues, as has been elaborated in section 9.1.3. The results of the different orientation methods are summarized in the following table:

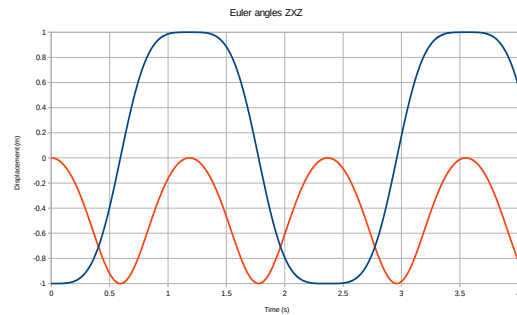
Method	Accuracy	Time (s)
Unit quaternion	3.6e-5	0.234
Euler ZXZ	3.6e-5	0.172
reduced Euler-Rodrigues	-	-
Gibbs vector	-	0.218

Table 9.2: results of the spatial pendulum for different orientation methods under type 2 conditions

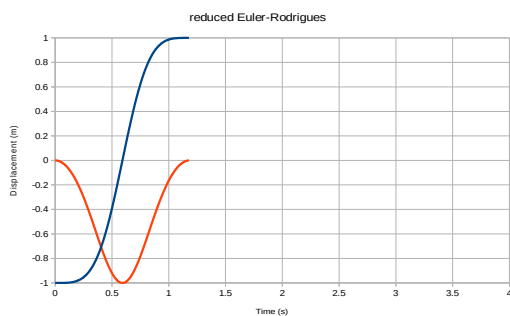
Methods that present a singularity in π are not able to continue the simulation. The reduced Euler-Rodrigues parametrization, for instance, converges correctly until the main angle reaches the value of π ; in that moment the mass matrix turns singular and a loss of equilibrium happens in the equations of the system. The same happens to the Gibbs vector, although in this case the simulation keeps running until the singularity is reached. In that moment the configuration of the mechanism varies and x goes from 1 to -1.



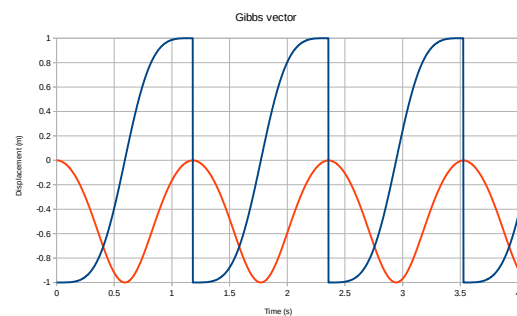
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure 9.4: x and y coordinates for different orientation methods under type 2 conditions:
 a) unit quaternion, b) Euler angles, c) reduced Euler-Rodrigues and d) Gibbs vector

As can be seen in figure 9.5, when the reduced parameter of Euler-Rodrigues gets close to 2 the function is asymptotic, which coincides with $\theta = \pi$. In the case of the parameter corresponding to the Gibbs vector, it tends to infinity when reaching the singularity.

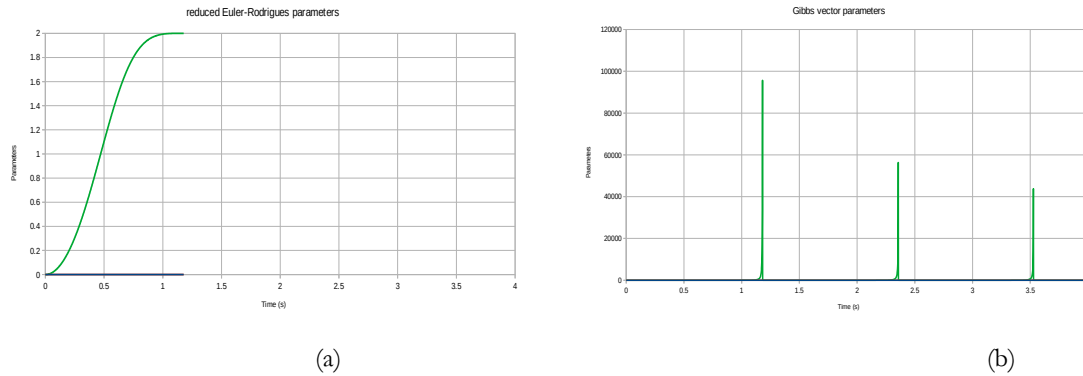


Figure 9.5: parameters of reduced Euler-Rodrigues and Gibbs vector for type 2 conditions: a) reduced Euler-Rodrigues and b) Gibbs vector

For type 3 conditions a harmonic torque is introduced around axis z that responds to the following equation: $F_z = t \cos(2\pi 2t)$ where t is time. The remaining of the conditions are: an initial angle of $\theta_0 = 0$, a step size of $1 \cdot 10^{-3}$ s, a convergence error tolerance of $1 \cdot 10^{-8}$ and a simulation that lasts 4s. Under these conditions, the maximum main angle is of 3.136 rad.

Method	Accuracy	Time (s)
Unit quaternion	0.058	0.234
Euler ZXZ	-	1.062
reduced Euler-Rodrigues	-	13.65
Gibbs vector	0.058	0.312

Table 9.3: results of the spatial pendulum for different orientation methods under type 3 conditions

In this case only 2 out of 4 methods finish the simulation, which are the unit quaternion and the Gibbs vector. The fastest option between these two is the quaternion, and as such it can be deduced that, although it employs 4 terms and the quaternion norm, it's the most robust option. As mentioned the maximum value of the main angle is 3.136 rad, and the Gibbs vector is capable

of finishing the simulation, unlike in the previous case. In this case the reason why Euler-Rodrigues fails is instability, since while the Gibbs vector tends to infinity reduced Euler-Rodrigues is asymptotic. As a result the algorithm has difficulties to converge in the surroundings of the instability, and if results are obtained, the integration tolerance needs to be widened and the step size reduced. Results found in 9.6 c) have been obtained, following this reasoning, with a step size of $1 \cdot 10^{-5}$ s and an integration tolerance of $1 \cdot 10^{-2}$. It can also be stated, in order to say it otherwise, that the mass matrix turns singular when the main angle is near the undetermined point when employing reduced Euler-Rodrigues parameters. In comparison, the parameters of the Gibbs vector are infinite but the mass matrix does not turn singular, as seen in figure 9.7.

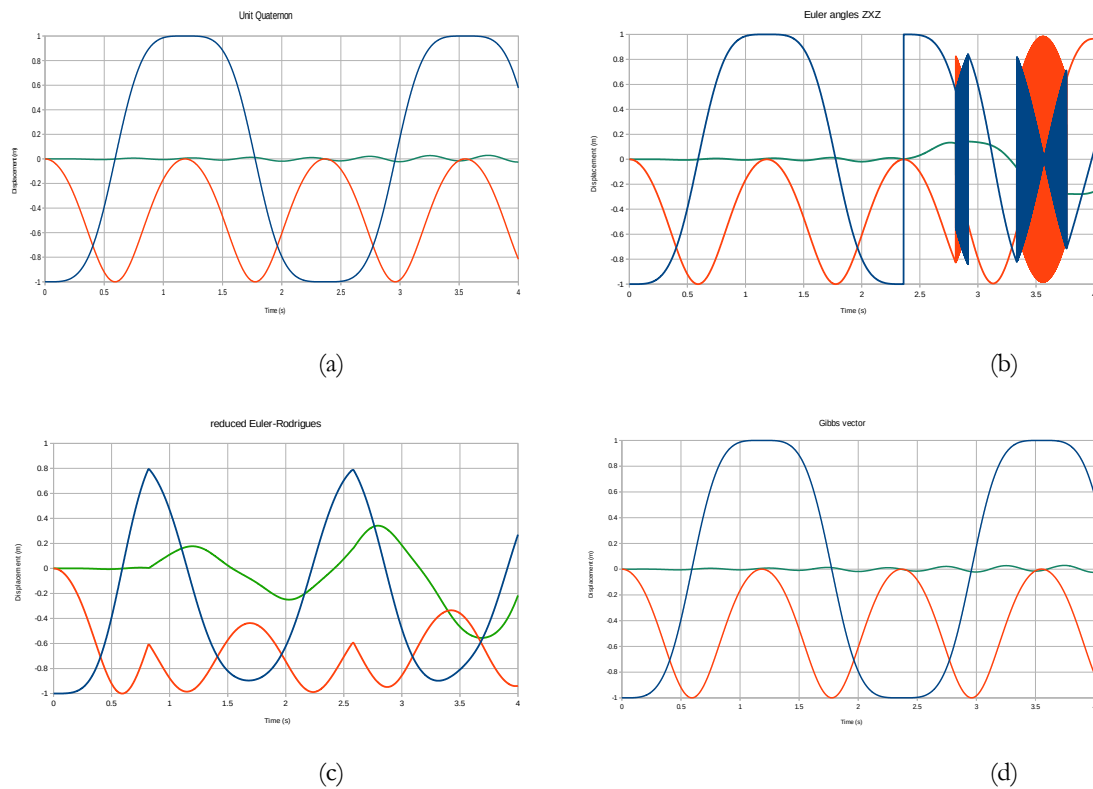


Figure 9.6: x, y and z coordinates for different integration methods under type 3 conditions: a) unit quaternion, b) Euler angles, c) reduced Euler-Rodrigues and d) Gibbs vector

It can be proven that, indeed, the simulation cannot be completed using Euler angles. It has been mentioned that, when $\beta=0$, the system is in a blocked position in which parameters α and γ can take any value. This fact can be checked in figure 9.7. Simulations under type 1 and type 2 conditions throw different results: although α and γ take any value, the algorithm makes these values correspond to the ones related to minimum energy, which makes the problem not manifest itself despite being there. However type 3

conditions introduce an external force and therefore the position of the system is not clear; with this, a duplicity in the representation of the orientation is observed.

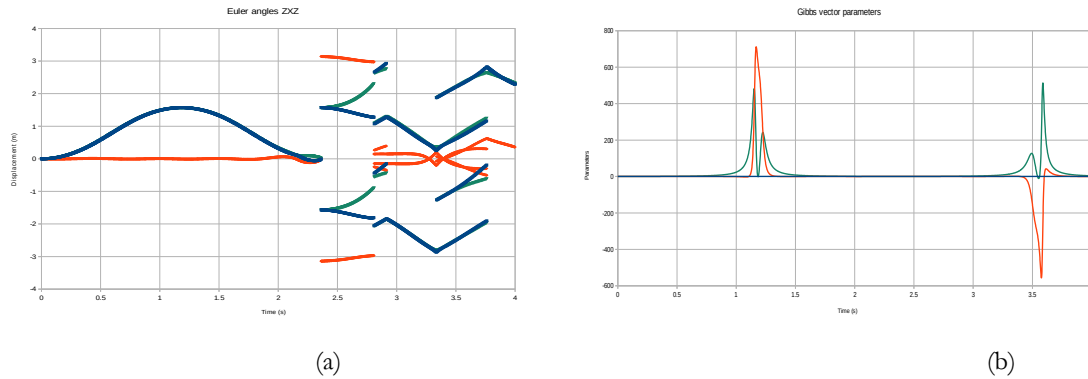


Figure 9.7: Euler angles ZYZ and Gibbs vector parameters under type 3 conditions: a) Euler angles and b) Gibbs vector

9.1.4.2 Planar slider-crank mechanism

As shown in figure 9.8, this system is formed by two rods and a slider. The only force that is imposed to the mechanism is gravity, and as such the conservation of mechanical energy is a good parameter for measuring the quality of the simulation. Both bars have a length of 1m, weight 1kg and have a section width of 0.1m. The slider does not have mass. The initial position of the angle is $\theta = \pi/4$ and does not have an initial velocity. The maximum variation of mechanical energy must be kept below 0.001J during the 10 seconds the simulation lasts.

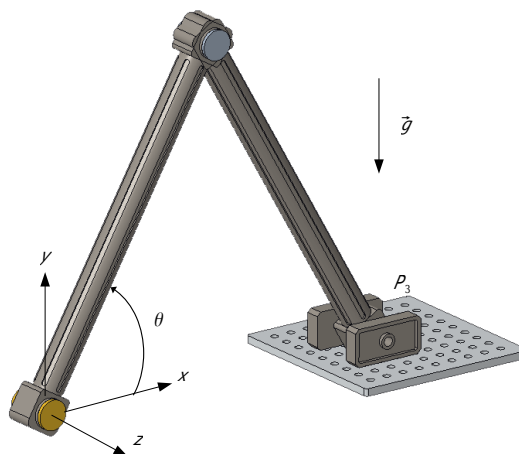


Figure 9.8: planar slider-crank mechanism

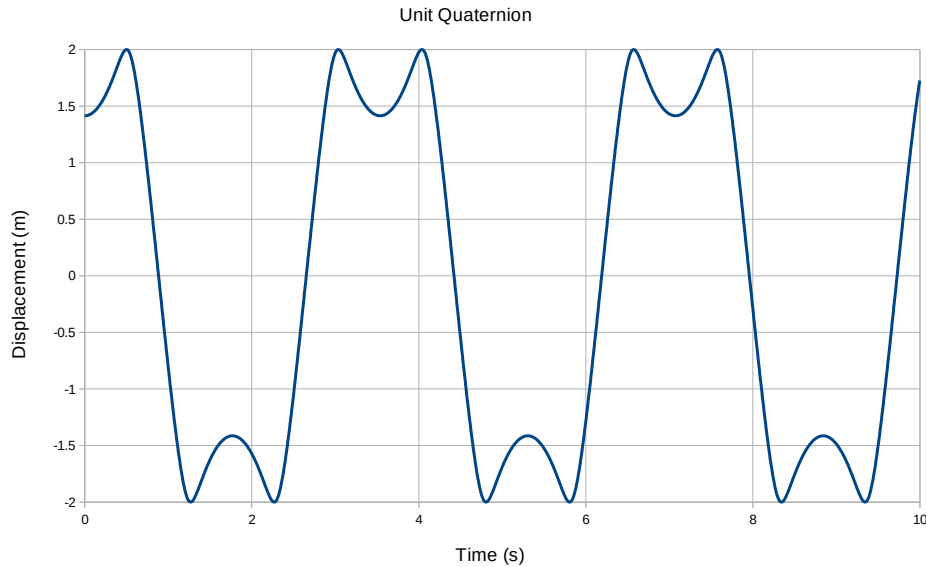


Figure 9.9: displacement of the slider using quaternions

The method fulfills the quality criteria with a step size of $3 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ and an integration tolerance of $1 \cdot 10^{-8}$. Under these conditions the maximum energy drift is of $5 \cdot 10^{-4} \text{ J}$.

Method	Accuracy	Time (s)
Unit quaternion	5e-4	0.172
Euler ZZZ	-	-
reduced Euler-Rodrigues	-	-
Gibbs vector	-	-

Table 9.4: results of the slider-crank mechanism for different orientation methods

As can be seen in table 9.4, only the unit quaternion is able to perform the entirety of the simulation correctly as represented in figure 9.9, which proves once more the absence of singularities of the unit quaternion. It can also be observed, analyzing Euler angles, that the absolute reference system is placed in such a way that axis z is the one defining the movement plane, and because of that parameter β is zero. As a consequence, several different parameter combinations that give the same result exist, and make this mechanism not to be univocally defined. Reduced Euler-Rodrigues parameters, as expected, do not complete the simulation. The mass matrix turns singular when the parameter reaches values of 2 or -2 and the method is not able to continue solving the equations system. Lastly, using the Gibbs vector the parameter

turns to infinity when the solid gets close to the singularity, and therefore the simulation cannot continue. The behavior of the four analyzed representations of the rotation can be observed in figure 9.10. When comparing the results corresponding to the Gibbs vector of the spatial pendulum and the planar slider-crank mechanism it is observed that, despite the problems, the spatial pendulum is able to finish the simulation while the slider-crank fails. This can be explained by the fact that not only one solid reaches the singularity, but two; and, as expected, several numerical problems arise. It is worth emphasizing that the mechanism goes through several singular configurations, none of which is a problem for the methods; the only problems they have are their own singularities.

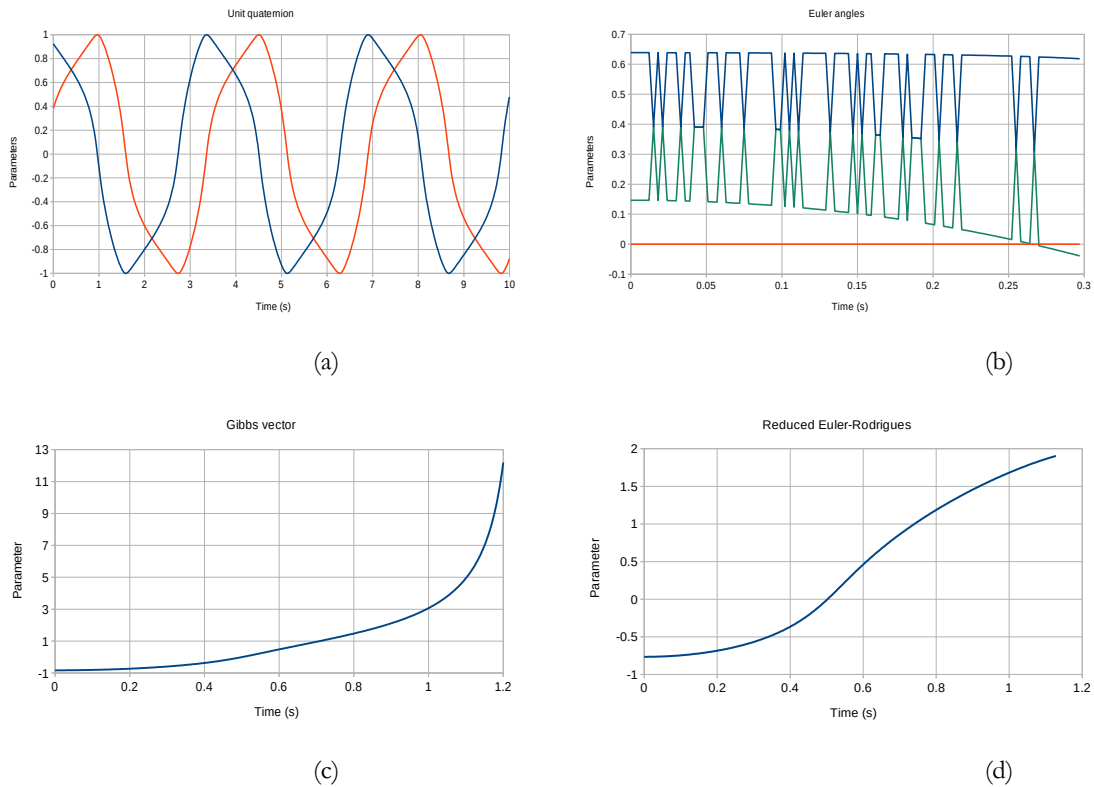


Figure 9.10: behavior of the parameters in the planar slider-crank mechanism: a) unit quaternion, b) Euler angles for ZXZ, c) reduced Euler-Rodrigues and d) Gibbs vector

It has been mentioned that Euler angles fail because the absolute reference frame is positioned in a way that makes $\beta=0$. If the reference frame is changed by moving the mechanism to plane xz , for instance, no singularities are detected in the initial values problem, but the simulation fails anyway when the angle is greater than π in second 1.3 of the simulation. Until this moment it works perfectly and the mechanical energy drift is kept below $5.54 \cdot 10^{-4} J$. These problems may be solved employing re scaling.

9.2 A family of conditionally explicit methods for order 2 ODEs

It has been mentioned earlier that there are two possible procedures for integrating order 2 ODEs numerically: the most used one is to reduce the order of the ODE by duplicating variables, allowing the use of 1st order methods for solving it. The other procedure solves the equations directly without duplicating variables. This is the one used usually in structural mechanics, and therefore these integrators are known as structural integrators.

The CD method solves the following order 2 ODE:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (9.86)$$

Employing the following equations:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\mathbf{x}(t+\Delta t) - \mathbf{x}(t-\Delta t)}{2\Delta t} \quad (9.87)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\mathbf{x}(t+\Delta t) - 2\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}(t-\Delta t)}{\Delta t^2} \quad (9.88)$$

Substituting in 9.86, and as elaborated in [1], the following equation is achieved:

$$\left(\frac{\mathbf{M}}{(\Delta t)^2} + \frac{\mathbf{C}}{2\Delta t} \right) \mathbf{x}(t+\Delta t) = \mathbf{f}(t) + \left(\frac{-\mathbf{M}}{(\Delta t)^2} + \frac{\mathbf{C}}{2\Delta t} \right) \mathbf{x}(t-\Delta t) - \left(\mathbf{K} - \frac{2\mathbf{M}}{(\Delta t)^2} \right) \mathbf{x}(t) \quad (9.89)$$

This expression is solved on each step for obtaining the value of $\mathbf{x}(t+\Delta t)$.

This method is very useful in structural dynamics due to its extremely low cost and predictable stability. It is valid for linear problems and also for non-linear ones; however, if any of the matrices of the system depends on the velocity an iterative method is required. Furthermore, and as can be seen in equation 9.89, derivatives of vector \mathbf{x} are not stored, which is beneficial in structural dynamics but can be a problem if the method is to be generalized to other problems such as the multibody system dynamics. In this field velocities and accelerations are required, and as such equations 9.87 and 9.88 must be used after the integration process. This is a problem, since the mentioned equations present heavy cancellation and can therefore limit the potential precision that could be obtained.

The CD method is usually classified as explicit, but it's not always a good classification. For both linear and non linear problems, in the absence of gyroscopic effects matrices \mathbf{M} , \mathbf{C} and \mathbf{K} and vector \mathbf{f} do not depend on the velocity vector and, therefore, the resulting problem is indeed explicit. However, in the presence of gyroscopic effects the method behaves as implicit due to the cross product of the angular velocities found in the Euler equation. Still, the fact that it depends on the velocity and not on the position has some advantages, since the dependency related to velocity is not as important as the dependency related to position. And, lastly, the mass matrix \mathbf{M} does not depend on velocity, thus making the method implicit. However, and since it is not strictly incorrect to call it explicit on its usual application field, it will be classified as conditionally explicit in this PhD thesis.

A general expression of this method can be formulated using 9.87 and 9.88, along with:

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}(t), t) \quad (9.90)$$

Hence, the following can be written for structural and multibody dynamics:

$$\mathbf{g}(t) = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f}(t) - \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{K}\mathbf{x}(t)) \quad (9.91)$$

\mathbf{M} , \mathbf{C} and \mathbf{K} are constant in structural linear dynamics, but depend on $\mathbf{x}(t)$ in structural non linear dynamics. Furthermore, \mathbf{C} also depends on $\dot{\mathbf{x}}(t)$ in 3D multibody dynamics.

9.2.1 Elimination of the cancellation problems on CD

The problem can be reformulated making the solution be set in accelerations. In the case of DAEs position constraints are also required (for avoiding the drift), but reformulated into accelerations. Multiplying 9.87 by $2\Delta t$ and 9.88 by Δt^2 :

$$2\Delta t\dot{\mathbf{x}}(t) + \Delta t^2\ddot{\mathbf{x}}(t) = 2\mathbf{x}(t + \Delta t) - 2\mathbf{x}(t) \quad (9.92)$$

Which is a rearranged expression for the truncated Taylor series for displacements:

$$\mathbf{x}(t + \Delta t) = \mathbf{x}(t) + \Delta t\dot{\mathbf{x}}(t) + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{\mathbf{x}}(t) \quad (9.93)$$

Writing the same equation but eliminating $x(t+\Delta t)$, The truncated Taylor series for $t-\Delta t$ is achieved:

$$x(t-\Delta t)=x(t)-\Delta t \dot{x}(t)+\frac{\Delta t^2}{2} \ddot{x}(t) \quad (9.94)$$

This proves that the equations of the CD method are equivalent to 9.93 and 9.94. Reformulating 9.93 on the previous instant:

$$x(t)=x(t-\Delta t)+\Delta t \dot{x}(t-\Delta t)+\frac{\Delta t^2}{2} \ddot{x}(t-\Delta t) \quad (9.95)$$

And combining it with 9.94:

$$\dot{x}(t)=\dot{x}(t-\Delta t)+\frac{\Delta t}{2} \ddot{x}(t-\Delta t)+\frac{\Delta t}{2} \ddot{x}(t) \quad (9.96)$$

Introducing it in 9.93:

$$x(t+\Delta t)=x(t)+\Delta t \dot{x}(t-\Delta t)+\frac{\Delta t^2}{2} \ddot{x}(t-\Delta t)+\frac{\Delta t^2}{2} \ddot{x}(t) \quad (9.97)$$

The performed modification lies within equations 9.93 and 9.96. Equation 9.97 can be used for DAEs for the constraints to be introduced as position constraints but expressed as accelerations. This way velocity constraints can be introduced, but will lead to a displacement vector that verifies the constraints, hence avoiding drifts.

9.2.2 Importance of the cancellation problem

As on section 6.2, the most practical way to showcase in this case the limitations of the CD equations when compared to the proposed equations 9.93 and 9.96 is through an example. For this purpose the pendulum described on the IFToMM Benchmark website is used, which consists on a point mass of 1kg separated 1m from a fixed point through a massless rod. The system moves by the action of gravity. In this case the system is parameterized by a single parameter θ :

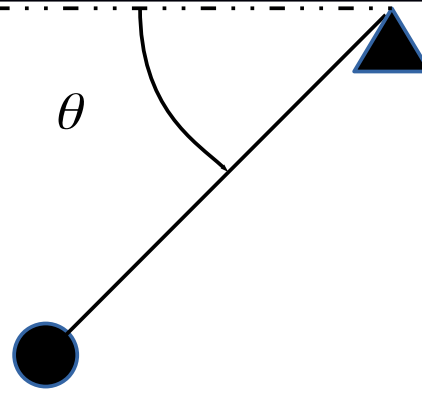


Figure 9.11: simple pendulum

The ODE that characterizes the system is:

$$\ddot{\theta} = g L \cos \theta \quad (9.98)$$

Because the forces applied to the system are conservative the mechanical energy is a good parameter for measuring the error. The IFToMM website proposes to simulate 10s in which the mechanical energy drift shall not be greater than $5 \cdot 10^{-5} J$. However in this case the goal is to obtain the highest possible precision with both schemes.

Timestep	Error, Central Differences	Error, Reformulated CD
1e-3	2.00492e-05	2.00492e-05
1e-4	2.00597e-07	2.00492e-7
1e-5	2.46675e-08	2.01399e-09
1e-6	3.66886e-07	2.26645e-11
1e-7	0.000622766	1.82251e-08
1e-8	0.270486	1.79363e-08

Table 9.5: mechanical energy drift of the simple pendulum

As can be seen on table 9.5 for big step sizes the error coincides, but as the step size is reduced the error increases in the classic formulation when compared to the reformulated one. In this precise problem the error only appear when computing velocities and accelerations due to the cancellation of equations 9.87 and 9.88, but in the general case it can be a problem if the differential equation depends on velocity. It is also interesting to observe that, with a certain step size, the reformulated version also reduces its precision; however, this reduction does not seem to increase as the one of the classic approach does.

9.2.3 Generalization of the CD method and local error

Just solving the cancellation problem is enough to justify a reformulation of the problem, but it also leads to an interesting idea. Equations 9.93 and 9.96 can be modified in a way that a more precise method is obtained:

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta t \dot{x}(t) + \frac{\Delta t^2}{2} (\alpha \ddot{x}(t) + (1-\alpha) \ddot{x}(t-\Delta t)) \quad (9.99)$$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(t-\Delta t) + \Delta t (\beta \ddot{x}(t) + (1-\beta) \ddot{x}(t-\Delta t)) \quad (9.100)$$

It is intuitive to find similarities between these equations and Newmark equations 7.1 and 7.2. The employment of configurable parameters α and β allows for the modification of the stability and convergence properties of the method. It can be thought that equation 9.99 lacks coherence because it should weight $\ddot{x}(t)$ and $\ddot{x}(t+\Delta t)$, but this leads to several inconveniences. To begin with, knowing $\ddot{x}(t+\Delta t)$ would be necessary, and this is only achieved in the next step of the employed method. Moreover, it would not be possible to take advantage of the use of configurable parameters for modifying the error in each step. Furthermore, it happens that $\ddot{x}(t+\Delta t) = \ddot{x}(t) + \Delta t \ddot{\ddot{x}}(t) + O(\Delta t^2)$ and $\ddot{x}(t) = \ddot{x}(t-\Delta t) + \Delta t \ddot{\ddot{x}}(t-\Delta t) + O(\Delta t^2)$, and as such the error committed in 9.99 is $O(\Delta t^3)$.

A way of taking advantage of using equations 9.99 and 9.100 is to analyze the error in each case. Considering the known values of a step as exact, and calling the approximate values \bar{x} , the following equations are achieved in each case:

$$\ddot{\bar{x}}(t) = f(\dot{\bar{x}}, \bar{x}, t) \quad (9.101)$$

$$\bar{x}(t+\Delta t) = \bar{x}(t) + \Delta t \dot{\bar{x}}(t) + \frac{\Delta t^2}{2} (\alpha \ddot{\bar{x}}(t) + (1-\alpha) \ddot{\bar{x}}(t-\Delta t)) \quad (9.102)$$

$$\dot{\bar{x}}(t) = \dot{\bar{x}}(t-\Delta t) + \Delta t (\beta \ddot{\bar{x}}(t) + (1-\beta) \ddot{\bar{x}}(t-\Delta t)) \quad (9.103)$$

It can be written:

$$\ddot{\bar{x}}(t) = \mathbf{g}(\dot{\bar{x}}, \bar{x}, t) = \mathbf{g}(\dot{\bar{x}}, \bar{x}, t) + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \dot{\bar{x}}} \right|_{\dot{\bar{x}}, \bar{x}, t} (\dot{\bar{x}} - \dot{x}) + O((\dot{\bar{x}} - \dot{x})^T (\dot{\bar{x}} - \dot{x})) \quad (9.104)$$

On the other side, the exact expression for the first derivative is:

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(t-\Delta t) + \Delta t \ddot{x}(t-\Delta t) + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\ddot{x}}(t-\Delta t) + O(\Delta t^3) \quad (9.105)$$

Subtracting it to 9.103:

$$\dot{\bar{x}}(t) - \dot{x}(t) = \Delta t \beta (\ddot{\bar{x}}(t) - \ddot{x}(t - \Delta t)) - \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\bar{x}}(t) + O(\Delta t^3) \quad (9.106)$$

Assuming $\ddot{\bar{x}}(t)$ to have a greater order error, it can be written:

$$\dot{\bar{x}}(t) - \dot{x}(t) = \Delta t \beta (\ddot{\bar{x}}(t) - \ddot{x}(t - \Delta t)) - \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\bar{x}}(t) + O(\Delta t^3) \quad (9.107)$$

Taking into account:

$$\ddot{\bar{x}}(t) = \ddot{x}(t - \Delta t) + \Delta t \ddot{\bar{x}}(t - \Delta t) + O(\Delta t^2) \quad (9.108)$$

The following is achieved:

$$\dot{\bar{x}}(t) - \dot{x}(t) = \Delta t^2 \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \ddot{\bar{x}}(t) + O(\Delta t^3) \quad (9.109)$$

Where it is deduced that the error in $\dot{\bar{x}}(t)$ is $O(\Delta t^2)$ and that, therefore, the assumption about $\ddot{\bar{x}}(t)$ was correct since, according to 9.104:

$$\ddot{\bar{x}}(t) = \mathbf{g}(\dot{\bar{x}}, \mathbf{x}, t) = \mathbf{g}(\dot{x}, \mathbf{x}, t) + O(\Delta t^2) \quad (9.110)$$

Moreover, employing the equivalent value to the one used on CD of $\beta = 0.5$ the error in $\dot{\bar{x}}(t)$ is now $O(\Delta t^3)$. According to 9.102 the exact expression would be:

$$\mathbf{x}(t + \Delta t) = \mathbf{x}(t) + \Delta t \dot{\mathbf{x}}(t) + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \frac{\Delta t^3}{6} \ddot{\mathbf{x}}(t) + O(\Delta t^4) \quad (9.111)$$

Subtracting it to 9.102 and taking into account that the error $\ddot{\bar{x}}(t)$ is of greater order:

$$\bar{\mathbf{x}}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t + \Delta t) = \Delta t (\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) - \dot{\mathbf{x}}(t)) + \frac{\Delta t^2}{2} ((\alpha - 1)(\ddot{\bar{\mathbf{x}}}(t) - \ddot{\mathbf{x}}(t - \Delta t))) - \frac{\Delta t^3}{6} \ddot{\bar{\mathbf{x}}}(t) + O(\Delta t^4) \quad (9.112)$$

It can be written:

$$\ddot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \ddot{\mathbf{x}}(t - \Delta t) + \Delta t \ddot{\bar{\mathbf{x}}}(t - \Delta t) + O(\Delta t^2) \quad (9.113)$$

Which leads to:

$$\bar{\mathbf{x}}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t + \Delta t) = \Delta t^3 \left(\left(\beta - \frac{1}{2} \right) + \frac{\alpha - 1}{2} - \frac{1}{6} \right) \ddot{\bar{\mathbf{x}}}(t) + O(\Delta t^4) \quad (9.114)$$

For a value of $\beta=0.5$ the 3rd order error can be eliminated by making $\alpha=4/3$, but it is interesting to consider whether this maneuver is worth it or not. If the usual definition of order for ODEs is taken into account, and as exposed in [147], the order of a method is equal to the lowest order that appears in the variable and its first derivative. According to this definition, increasing the error order of the variable by employing $\alpha=4/3$ will not change the general order, but two important facts need to be considered; first, the first derivative is multiplied by Δt on the equations of motion, which means that the influence it has over the displacements is an order higher. This means that the error reduction on displacements obtained by eliminating the 3rd order error can be considerable. Second, every reduction of the error at no cost is of interest. The possible cost of this change in α may manifest itself as an instability. Therefore, first the stability will be studied, for which the equations are formulated as follows:

$$\begin{Bmatrix} x(t+\Delta t) \\ \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{Bmatrix} = \mathbf{A} \begin{Bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t-\Delta t) \\ \ddot{x}(t-\Delta t) \end{Bmatrix} + \mathbf{b} \quad (9.115)$$

The usual stability analysis for structural dynamics will be carried out aiming to obtain the step size required for the integrator to be stable. For simplifying purposes the damping is considered non existent, which turns matrix \mathbf{A} into:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\alpha+2\beta}{2} \Delta t^2 \omega^2 & \Delta t \left(\frac{3}{2} - \frac{\alpha+2\beta}{2} \right) \Delta t^2 \\ -\beta \Delta t \omega^2 & 1 & (1-\beta) \Delta t \\ -\omega^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.116)$$

For the system to be stable the spectral radius of matrix \mathbf{A} must be smaller than 1. The characteristic polynomial of \mathbf{A} is:

$$\lambda^3 + \left(\left(\beta + \frac{\alpha}{2} \right) \Delta t^2 \omega^2 - 2 \right) \lambda^2 + \left(\left(\frac{3}{2} - (\alpha + \beta) \right) \Delta t^2 \omega^2 + 1 \right) \lambda + \frac{(\alpha-1)}{2} \Delta t^2 \omega^2 \quad (9.117)$$

Making $|\lambda|=1$ the limits of stability are obtained. For $\alpha=1$ and $\beta=0.5$ it is obtained that $\Delta t \leq 2/\omega$, which is predictable, since these parameters correspond to CD. The alternative with $\alpha=4/3$ and $\beta=0.5$ requires

$\Delta t \leq \sqrt{\frac{12}{5}} \frac{1}{\omega} \approx 1.549 \frac{1}{\omega}$. Another possible parameter combination is $\alpha=2$ and $\beta=0.5$, which makes $\Delta t \leq \sqrt{\frac{4}{3}} \frac{1}{\omega} \approx 1.1547 \frac{1}{\omega}$.

9.2.4 Performance of the method

Two examples will be used for testing the performance of the method. The first one has been exposed previously; the second one will be used for testing the stability. Three sets of different parameters will be employed, which share the value $\beta=0.5$, while α varies between 1, 4/3 and 2. $\alpha=1$ coincides with the expected behavior of CD.

Timestep	Error, $\alpha=1$	Error, $\alpha=4/3$	Error, $\alpha=2$
1e-3	2.00492e-05	1.27955e-05	3.85689e-06
1e-4	2.00492e-7	1.21061e-07	3.99453e-08
1e-5	2.01399e-09	1.21132e-09	3.99361e-10
1e-6	2.26645e-11	1.64668e-11	1.06274e-11
1e-7	1.82251e-08	1.8225e-08	1.82247e-08
1e-8	1.79363e-08	1.79362e-08	1.79362e-08

Table 9.6: mechanical energy drift for different configurations

The remaining results are surprising; $\alpha=4/3$ provides a moderate improvement as expected, but $\alpha=2$ provides an improvement that is as considerable as unexpected. This improvement is due to the fact that the global error does not always correspond to the local error. Values of β that are different to 0.5 do not provide any substantial improvement to the method regarding stability or order increase.

Another interesting phenomenon that can also be observed is that the saturation of the floating points precision is the same in all methods. This means that, for small values of Δt , the floating points precision is not able to improve the precision. This fact is not completely unexpected, since there may be evidence that supports the idea that this phenomenon depends on the method's parameters.

The next example is a simple single degree of freedom (dof) vibration model. This example is employed due to the fact that the system can be

“tuned” easily in such a way that the natural frequency and therefore the stiffness vary. It is also a classic problem in structural dynamics, and as such it covers an area different to what the pendulum covers (which is more related to the multibody dynamics) while also maintaining simplicity.

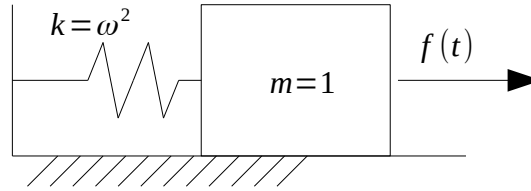


Figure 9.12: 1dof system

If $f(t)$ is a harmonic force with a low frequency compared to ω the system could be solved with a considerable Δt , but the stability would be compromised. In this example the following will be employed:

$$f(t)=\text{sen}(\bar{\omega}t) \quad (9.118)$$

Where the considered low frequencies are $\omega=1$ and $\bar{\omega}=0.01$. For the initial transient to be as low as possible the initial values $\dot{x}(0)=\frac{-\bar{\omega}}{\omega^2-\bar{\omega}^2}$ and $x(0)=0$ will be applied. Taking the frequency of the force into account, an adequate step size for solving the problem could be modeled as $\Delta t=\frac{2\cdot\pi}{10\bar{\omega}}=60$ for obtaining 10 points per cycle. Still, the limitations would appear as instabilities. In table 9.7 the theoretical limits of the stability can be found.

α	β	Δt_{max}
1	0.5	2
1.3333	0.5	1549
2	0.5	1154

Table 9.7: stability limits for different configurations

On the other side, the spectral radii related to each configuration can be seen on figure 9.13.

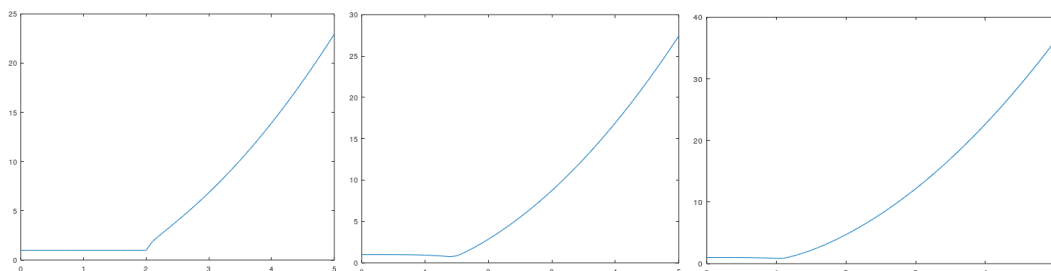


Figure 9.13: spectral radii related to the stability matrix with respect to $\Delta t\omega$ employing $\beta=0.5$, $\alpha=1$, $\alpha=4/3$ and $\alpha=2$ respectively

Therefore, the problem has been tested for the stability limits mentioned in 9.2.3, and the correspondence between the theoretical values and the reality can be checked:

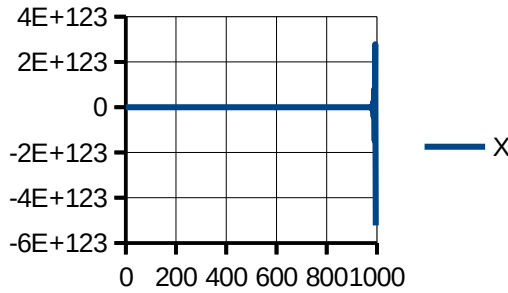


Figure 9.14: unstable result ($\alpha=1$, $\beta=0.5$, $\Delta t=2.1$)

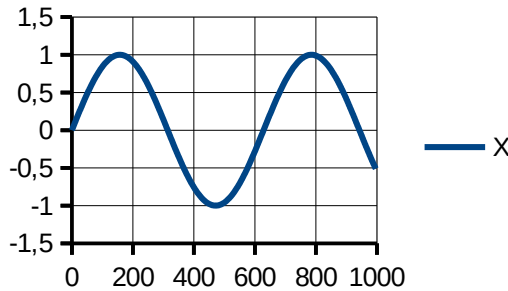


Figure 9.15: stable result ($\alpha=1$, $\beta=0.5$, $\Delta t=2$)

As expected, $\Delta t=2.1$ is unstable in all configurations. $\Delta t=2$ only gives stable results for $\alpha=1$ and $\beta=0.5$. The employment of higher values of α will give results similar to figure 9.14. A small step size of $\Delta t=1.54$ allows the use of $\alpha=4/3$, but it is still unstable for $\alpha=2$. Finally, and as predicted, all methods are stable for $\Delta t=1.15$ and give similar results. This problem is clearly limited by stability, and therefore the use of an implicit unconditionally stable method would have been a better choice.

9.2.5 Global convergence

Being o_2 the local error order in the first derivative and o_1 the local error order in the function, it can be written:

$$err(\dot{x}(t+2\Delta t)) = err(\dot{x}(t+\Delta t)) + O_2(\Delta t^{o_2}) = 2O_2(\Delta t^{o_2}) \quad (9.119)$$

From where it is deduced:

$$err(\dot{x}(t+n\Delta t))=err(\dot{x}(t+(n-1)\Delta t))+O_2(\Delta t^{o_2})=nO_2(\Delta t^{o_2}) \quad (9.120)$$

The error in the function gets more complicated. Starting from:

$$\begin{aligned} err(x(t+2\Delta t)) &= \Delta t err(\dot{x}(t+\Delta t)) + err(x(t+\Delta t)) + O_1(\Delta t^{o_1}) = \\ &= \Delta t O_2(\Delta t^{o_2}) + O_1(\Delta t^{o_1}) + O_1(\Delta t^{o_1}) = \Delta t O_2(\Delta t^{o_2}) + 2O_1(\Delta t^{o_1}) \end{aligned} \quad (9.121)$$

$$\begin{aligned} err(x(t+3\Delta t)) &= \Delta t err(\dot{x}(t+2\Delta t)) + err(x(t+2\Delta t)) + O_1(\Delta t^{o_1}) = \\ &= 2\Delta t O_2(\Delta t^{o_2}) + O_1(\Delta t^{o_1}) + 2O_1(\Delta t^{o_1}) + \Delta t O_2(\Delta t^{o_2}) = 3\Delta t O_2(\Delta t^{o_2}) + 3O_1(\Delta t^{o_1}) \end{aligned} \quad (9.122)$$

$$\begin{aligned} err(x(t+4\Delta t)) &= \Delta t err(\dot{x}(t+3\Delta t)) + err(x(t+3\Delta t)) + O_1(\Delta t^{o_1}) = \\ &= 6\Delta t O_2(\Delta t^{o_2}) + 4O_1(\Delta t^{o_1}) \end{aligned} \quad (9.123)$$

And, therefore:

$$err(x(t+n\Delta t)) = \frac{(n-1)*n}{2} \Delta t O_2(\Delta t^{o_2}) + nO_1(\Delta t^{o_1}) \quad (9.124)$$

Taking into account that $n=T/\Delta t$:

$$err(x(t+n\Delta t)) \simeq \frac{T^2}{2\Delta t} O_2(\Delta t^{o_2}) + \frac{T}{\Delta t} O_1(\Delta t^{o_1}) \quad (9.125)$$

For the case where $\beta=0.5$:

$$O_2(\Delta t^3) = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) \Delta t^3 \ddot{x}(t-\Delta t) = \frac{1}{12} \Delta t^3 \ddot{x}(t-\Delta t) + O(\Delta t^4) = \frac{1}{12} \Delta t^3 \ddot{x}(t) + O(\Delta t^4) \quad (9.126)$$

$$O_1(\Delta t^{o_1}) = \Delta t^3 \left(\frac{\alpha-1}{2} - \frac{1}{6}\right) \ddot{x}(t) + O(\Delta t^4) \quad (9.127)$$

And then:

$$err(x(t+n\Delta t)) \simeq T^2 \left(\frac{\Delta t^2}{24} \ddot{x}(t) + O_{2p}(\Delta t^4) \right) + T \left(\Delta t^2 \left(\frac{\alpha-1}{2} - \frac{1}{6} \right) \ddot{x}(t) + O(\Delta t^4) \right) \quad (9.128)$$

Therefore for a particular integration period T the error is $O(\Delta t^2)$, regardless of the value α may have. Unfortunately α cannot be used for reducing the global error.

9.2.6 Higher degree methods

In this context, the term “degree” is referred to the number of derivatives that are taken into account in the integration process. As such, the methods that use equations 9.101 to 9.103 would be third degree methods.

Taking into account what has been explained before it can be inferred that it is possible to generalize the exposed ideas in order to achieve a method with an even higher order. With this purpose, the following equations can be formulated:

$$\mathbf{x}(t+\Delta t)=\mathbf{x}(t)+\Delta t\dot{\mathbf{x}}(t)+\frac{\Delta t^2}{2}\ddot{\mathbf{x}}(t)+\frac{\Delta t^3}{6}(\alpha\ddot{\mathbf{x}}(t)+(1-\alpha)\ddot{\mathbf{x}}(t-\Delta t)) \quad (9.129)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\dot{\mathbf{x}}(t-\Delta t)+\Delta t\ddot{\mathbf{x}}(t-\Delta t)+\frac{\Delta t^2}{2}((1-\beta)\ddot{\mathbf{x}}(t-\Delta t)+\beta\ddot{\mathbf{x}}(t)) \quad (9.130)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}(t)=\ddot{\mathbf{x}}(t-\Delta t)+\Delta t((1-\gamma)\ddot{\mathbf{x}}(t-\Delta t)+\gamma\ddot{\mathbf{x}}(t)) \quad (9.131)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{g}(\dot{\mathbf{x}}(t),\mathbf{x}(t),t) \quad (9.132)$$

With these equations a 4th order method is achieved. An equation with the following form can also be used:

$$\ddot{\mathbf{x}}(t)=\dot{\mathbf{g}}(\ddot{\mathbf{x}}(t),\dot{\mathbf{x}}(t),\mathbf{x}(t),t) \quad (9.133)$$

This last equation eliminates the need for employing 9.131, but has a few drawbacks. First, it is necessary to perform the derivative well, be it analytically or numerically, for it to be employed in 9.132; performing it numerically is equal to 9.131 with $\gamma=0$. Second, γ cannot be employed for reducing the error or improving stability. For analyzing convergence it can be assumed that the previous results are obtained with no error:

$$\bar{\mathbf{x}}(t+\Delta t)=\mathbf{x}(t)+\Delta t\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t)+\frac{\Delta t^2}{2}\ddot{\bar{\mathbf{x}}}(t)+\frac{\Delta t^3}{6}((1-\alpha)\ddot{\bar{\mathbf{x}}}(t-\Delta t)+\alpha\ddot{\bar{\mathbf{x}}}(t)) \quad (9.134)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t)=\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t-\Delta t)+\Delta t\ddot{\bar{\mathbf{x}}}(t-\Delta t)+\frac{\Delta t^2}{2}((1-\beta)\ddot{\bar{\mathbf{x}}}(t-\Delta t)+\beta\ddot{\bar{\mathbf{x}}}(t)) \quad (9.135)$$

$$\ddot{\bar{\mathbf{x}}}(t)=\ddot{\bar{\mathbf{x}}}(t-\Delta t)+\Delta t((1-\gamma)\ddot{\bar{\mathbf{x}}}(t-\Delta t)+\gamma\ddot{\bar{\mathbf{x}}}(t)) \quad (9.136)$$

$$\ddot{\bar{\mathbf{x}}}(t)=\mathbf{g}(\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t),\mathbf{x}(t),t) \quad (9.137)$$

The exact accelerations equation:

$$\ddot{x}(t) = \ddot{x}(t - \Delta t) + \Delta t \ddot{x}(t - \Delta t) + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{x}(t - \Delta t) + O(\Delta t^3) \quad (9.138)$$

Subtracting 9.138 and 9.136 and assuming the error in $\ddot{x}(t)$ to be insignificant:

$$0 = \Delta t(-\gamma \ddot{x}(t - \Delta t) + \gamma \ddot{x}(t)) - \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{x}(t - \Delta t) - O(\Delta t^3) \quad (9.139)$$

It can be stated that:

$$\ddot{x}(t) = \ddot{x}(t - \Delta t) + \Delta t \ddot{x}(t - \Delta t) + O(\Delta t^2) \quad (9.140)$$

And, therefore:

$$0 = \Delta t(-\gamma \ddot{x}(t) + \gamma \Delta t \ddot{x}(t - \Delta t) + \gamma \ddot{x}(t)) - \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{x}(t - \Delta t) - O(\Delta t^3) \quad (9.141)$$

Also:

$$\ddot{x}(t) - \ddot{x}(t) = \Delta t \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{2} - \gamma \right) \ddot{x}(t - \Delta t) + O(\Delta t^2) \quad (9.142)$$

For eliminating the 1st order error on this equation $\gamma = 0.5$ is required. For the velocity equations, the exact expression is:

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(t - \Delta t) + \Delta t \ddot{x}(t - \Delta t) + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{x}(t - \Delta t) + \frac{\Delta t^3}{6} \ddot{x}(t - \Delta t) + O(\Delta t^4) \quad (9.143)$$

Subtracting 9.142 and 9.129:

$$\dot{x}(t) - \dot{x}(t) = -\beta \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{x}(t - \Delta t) + \beta \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{x}(t) - \frac{\Delta t^3}{6} \ddot{x}(t - \Delta t) + O(\Delta t^4) \quad (9.144)$$

It can be written:

$$\ddot{x}(t) = \ddot{x}(t - \Delta t) + \Delta t \ddot{x}(t - \Delta t) + O(\Delta t^2) \quad (9.145)$$

Which leads to:

$$\dot{x}(t) - \dot{x}(t) = \beta \frac{\Delta t^2}{2} (\ddot{x}(t) - \ddot{x}(t)) \ddot{x}(t - \Delta t) + O(\Delta t^2) + \Delta t^3 \left(\frac{\beta}{2} - \frac{1}{6} \right) \ddot{x}(t - \Delta t) + O(\Delta t^4) \quad (9.146)$$

Employing 9.142:

$$\dot{x}(t) - \dot{x}(t) = \Delta t^3 \left(\frac{\beta}{2\gamma} \left(\frac{1}{2} - \gamma \right) + \frac{\beta}{2} - \frac{1}{6} \right) \ddot{x}(t - \Delta t) + O(\Delta t^4) \quad (9.147)$$

This proves that the local error in $\bar{x}(t)$ is, in the worst case, of order Δt^3 . This fact provides validity to the assumption about the precision of $\bar{x}(t)$. For canceling the error of order Δt^3 , and assuming that $\gamma=0.5$, $\beta=1/3$ is required.

Lastly the values of the function remain. It can be written:

$$\mathbf{x}(t+\Delta t)=\mathbf{x}(t)+\Delta t\dot{\mathbf{x}}(t)+\frac{\Delta t^2}{2}\ddot{\mathbf{x}}(t)+\frac{\Delta t^3}{6}\ddot{\mathbf{x}}(t)+\frac{\Delta t^4}{24}\ddot{\mathbf{x}}(t-\Delta t)+O(\Delta t^5) \quad (9.148)$$

Therefore:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+\Delta t)-\bar{\mathbf{x}}(t+\Delta t)=\Delta t(\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t)-\dot{\mathbf{x}}(t))+ \\ +\frac{\Delta t^3}{6}(\ddot{\bar{\mathbf{x}}}(t)-\alpha\ddot{\mathbf{x}}(t)-(1-\alpha)\ddot{\bar{\mathbf{x}}}(t-\Delta t))+\frac{\Delta t^4}{24}\ddot{\bar{\mathbf{x}}}(t-\Delta t)+O(\Delta t^5) \end{aligned} \quad (9.149)$$

Using:

$$\ddot{\bar{\mathbf{x}}}(t)=\ddot{\bar{\mathbf{x}}}(t-\Delta t)+\ddot{\bar{\mathbf{x}}}(t-\Delta t)+O(\Delta t^2) \quad (9.150)$$

It yields:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+\Delta t)-\bar{\mathbf{x}}(t+\Delta t)=\Delta t(\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t)-\dot{\mathbf{x}}(t))+ \\ +\frac{\Delta t^3}{6}(\ddot{\bar{\mathbf{x}}}(t)-\alpha\ddot{\mathbf{x}}(t)-(1-\alpha)(\ddot{\bar{\mathbf{x}}}(t)-\Delta t\ddot{\bar{\mathbf{x}}}(t-\Delta t)))+\frac{\Delta t^4}{24}\ddot{\bar{\mathbf{x}}}(t-\Delta t)+O(\Delta t^5) \end{aligned} \quad (9.151)$$

And:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+\Delta t)-\bar{\mathbf{x}}(t+\Delta t)=\Delta t(\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t)-\dot{\mathbf{x}}(t))+ \\ -\frac{\Delta t^3}{6}\alpha(\ddot{\bar{\mathbf{x}}}(t)-\ddot{\mathbf{x}}(t))+\Delta t^4\left(\frac{1}{24}+\frac{1-\alpha}{6}\right)\ddot{\bar{\mathbf{x}}}(t-\Delta t)+O(\Delta t^5) \end{aligned} \quad (9.152)$$

Using 9.142:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+\Delta t)-\bar{\mathbf{x}}(t+\Delta t)=\Delta t(\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t)-\dot{\mathbf{x}}(t))+ \\ +\Delta t^4\left(-\frac{\alpha}{6\gamma}\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)+\frac{1}{24}+\frac{1-\alpha}{6}\right)\ddot{\bar{\mathbf{x}}}(t-\Delta t)+O(\Delta t^5) \end{aligned} \quad (9.153)$$

Introducing 9.147, the final expression is:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+\Delta t)-\bar{\mathbf{x}}(t+\Delta t)=\Delta t^4\left(\frac{\beta}{2\gamma}\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)+\frac{\beta}{2}-\frac{1}{6}+ \right. \\ \left. -\frac{\alpha}{6\gamma}\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)+\frac{1}{24}+\frac{1-\alpha}{6}\right)\ddot{\bar{\mathbf{x}}}(t-\Delta t)+O(\Delta t^5) \end{aligned} \quad (9.154)$$

Assuming $\gamma=0.5$ and $\beta=1/3$, and aiming to cancel the 4th order local error, a value of $\alpha=5/4$ is required.

An equation of the following form is required for analyzing the stability of the method:

$$\begin{pmatrix} x(t+\Delta t) \\ \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \\ \ddot{\ddot{x}}(t) \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t-\Delta t) \\ \ddot{x}(t-\Delta t) \\ \ddot{\ddot{x}}(t-\Delta t) \end{pmatrix} + \mathbf{b} \quad (9.155)$$

Rearranging equations 9.129 to 9.132, it is obtained:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\alpha+3\beta+3\gamma}{6\gamma} \Delta t^2 \omega^2 & \Delta t & \left(1 - \frac{\alpha+3\beta}{6\gamma}\right) \Delta t^2 & \left(\frac{2}{3} - \frac{\alpha+3\beta}{6\gamma}\right) \Delta t^3 \\ -\frac{\beta}{2\gamma} \Delta t \omega^2 & 1 & \left(1 - \frac{\beta}{2\gamma}\right) \Delta t & \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{2\gamma}\right) \Delta t^2 \\ -\omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\omega^2}{\Delta t \gamma} & 0 & -\frac{1}{\Delta t \gamma} & 1 - \frac{1}{\gamma} \end{bmatrix} \quad (9.156)$$

When employing values of $\alpha=5/4$, $\beta=1/3$ and $\gamma=0.5$ the system is always unstable, regardless of how small the chosen step size is. Moreover, the spectral radius tends asymptotically to 1 as the step size decreases. This means that, for small values of Δt and if the total integration time is not very long, these parameters will give acceptable results. However this maneuver has to be done carefully. A good parameter choice seems to be $\alpha=1/4$, $\beta=1/3$ and $\gamma=0.5$. Under these circumstances, the system is stable for $\Delta t < \frac{1.264911}{\omega}$ providing quite good results. Surprisingly, the more α increases the more the results and stability improve, achieving a maximum in $\alpha=3/4$ where $\Delta t < \frac{1.7310020041}{\omega}$. This value is close to the one corresponding to CD, but with an improved convergence order. However, greater values of α lead to an instability for the same parameters of γ and β . On table 9.8 the results thrown by these sets of parameters for the simple pendulum can be seen. Since the jerk was necessary, its value in the first instant has been introduced as $\ddot{\ddot{x}}(0)=0$.

Timestep	Error, $\alpha=5/4$	Error, $\alpha=1/4$	Error, $\alpha=3/4$
1e-3	5.54996e-11	8.67265e-7	4.33641e-07
1e-4	4.64517e-13	8.67649e-10	4.33944e-10

9.2 A family of conditionally explicit methods for order 2 ODEs

1e-5	1.74234e-11	1.88095e-11	1.85597e-11
1e-6	2.49294e-11	2.48228e-11	2.48228e-11
1e-7	1.77952e-08	1.77952e-8	1.77952e-8

Table 9.8: results for the 4th degree method

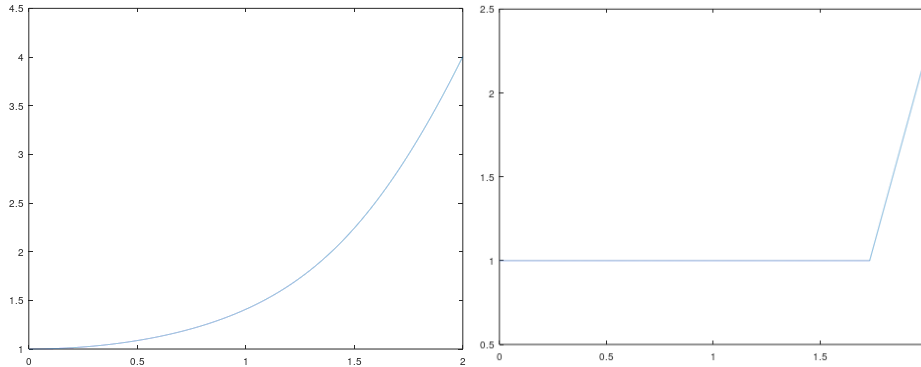


Figure 9.16: spectral radii of the stability matrix with respect to $\Delta t\omega$ and values of α of $5/4$ and $3/4$.

The results obtained with $\alpha=5/4$ are impressive: the amount of significant digits is more than the double of the amount of significant digits obtained with CD. As mentioned previously, these results carry with themselves a considerable inconvenience, which is that the method is always unstable, as can be seen in figure 9.16. On the other side, results obtained with $\alpha=3/4$ are also interesting. Despite having similar stability limits it improves the results obtained by using CD and also improves the results obtained with the best combination of parameters related to the 2nd degree formulation. An interesting phenomenon can be observed for very small step sizes; in these cases, the error grows the same way it did in the original CD approach. This happens because, when employing 9.131 for obtaining $\ddot{x}(t)$:

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{\gamma} \ddot{x}(t) - \frac{1}{\gamma} \ddot{x}(t - \Delta t) + \Delta t \frac{(1 - \gamma)}{\gamma} \ddot{x}(t - \Delta t) \quad (9.157)$$

Which leads to cancellation for small step sizes. It is also interesting to watch the method's behavior for $\alpha=5/4$. As mentioned earlier the method is unstable, since the spectral radius is bigger than 1 regardless of the employed step size, but it is also true that it decreases as the step size also decreases. Aiming to check how this fact translates to real problems a 1dof model similar to the one employed for checking the stability of the 2nd degree methods has been used. In this case parameters $\omega=1$ and $\bar{\omega}=10$ have been used, with a total integration time of 1000s.

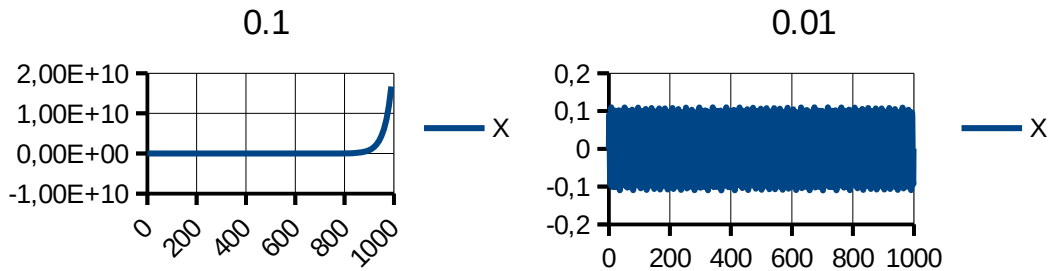


Figure 9.17: results of the 1dof model for $\alpha=5/4$ and step sizes of 0,1 and 0,01

Surprisingly, the integrator is able to perform the integration along the 1000s with a step size of 0.01 without showing signs of instability. The instability has been checked to begin to be visible at 5000s and forward. With a step size of 0.001 the instability is spotted at 50000s inside the simulation. In table 9.9 the values of the spectral radius and integration times in which the instability is clearly visible can be seen. Obviously these last data are approximated and should not be taken as a reference for the total integration time without performing a more elaborated analysis beforehand.

$\Delta t \omega$	Spectral radii	Approximate point of appreciation of instability
0.1	1.0033389	500
0.01	1.00003333389	5000
0.001	1.000000333333389	50000

Table 9.9: experimental results for $\alpha=5/4$

After checking these results, whether a perturbation for stabilizing the method can be introduced can be asked, and the answer is affirmative. Employing $\gamma=0.5+0.0005$ the spectral radius, at least numerically, is kept below or equal to 1 for $\Delta t \omega < 0.001$. Moreover, the employment of $\beta=1/3+0.01$ along $\gamma=0.5+0.0005$ leads to the same situation for values that fulfill $\Delta t \omega < 0.07$. These modifications, however, affect precision, making it be similar to the one obtained using $\alpha=1/4$ or worse.

On the other side, it can also be tempting to use the following equations for developing a 5th degree method:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(t+\Delta t) = & \mathbf{x}(t) + \Delta t \dot{\mathbf{x}}(t) + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \\
 & + \frac{\Delta t^3}{6} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \frac{\Delta t^4}{24} ((1-\alpha)\ddot{\mathbf{x}}(t-\Delta t) + \alpha \ddot{\mathbf{x}}(t))
 \end{aligned} \tag{9.158}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) = & \dot{\mathbf{x}}(t-\Delta t) + \Delta t \ddot{\mathbf{x}}(t-\Delta t) + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{x}}(t-\Delta t) + \\ & + \frac{\Delta t^3}{6} ((1-\beta) \ddot{\mathbf{x}}(t-\Delta t) + \beta \ddot{\mathbf{x}}(t)) \end{aligned} \quad (9.159)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \ddot{\mathbf{x}}(t-\Delta t) + \Delta t \ddot{\mathbf{x}}(t-\Delta t) + \frac{\Delta t^2}{2} ((1-\gamma) \ddot{\mathbf{x}}(t-\Delta t) + \gamma \ddot{\mathbf{x}}(t)) \quad (9.160)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \ddot{\mathbf{x}}(t-\Delta t) + \Delta t ((1-\zeta) \ddot{\mathbf{x}}(t-\Delta t) + \zeta \ddot{\mathbf{x}}(t)) \quad (9.161)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}(t), t) \quad (9.162)$$

For a non damped system, the matrix that defines stability is:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\alpha+4\beta+6\gamma+4\zeta}{12\gamma} \Delta t^2 \omega^2 & \Delta t \left(1 - \frac{\alpha+4\beta+4\zeta}{12\gamma}\right) \Delta t^2 & \left(\frac{2}{3} - \frac{\alpha+4\beta+4\zeta}{12\gamma}\right) \Delta t^3 & \left(\frac{3}{4} - \frac{\alpha+4\beta+4\zeta}{24\gamma}\right) \Delta t^4 \\ \frac{-\beta}{3\gamma} \Delta t \omega^2 & 1 & \left(1 - \frac{\beta}{3\gamma}\right) \Delta t & \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{3\gamma}\right) \Delta t^2 & \left(\frac{1}{6} - \frac{\beta}{6\gamma}\right) \Delta t^3 \\ -\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-2\zeta}{\gamma} \frac{\omega^2}{\Delta t} & 0 & -\frac{2\zeta}{\gamma} \frac{1}{\Delta t} & \left(1 - \frac{2\zeta}{\gamma}\right) & \left(1 - \frac{\zeta}{\gamma}\right) \Delta t \\ \frac{-2}{\gamma} \frac{\omega^2}{\Delta t^2} & 0 & -\frac{2}{\gamma} \frac{1}{\Delta t^2} & -\frac{2}{\gamma} \frac{1}{\Delta t} & 1 - \frac{1}{\gamma} \end{bmatrix} \quad (9.163)$$

In this case obtaining the values for which the system is stable is harder. The optimal case for reducing the error as much as possible is $\zeta=0,5$, $\gamma=1/3$, $\beta=1/4$ and $\alpha=6/5$, although this configuration is unfortunately unstable. The use of parameters $\zeta=\gamma=\beta=1$ and $\alpha=4/5$ leads to a conditionally stable method.

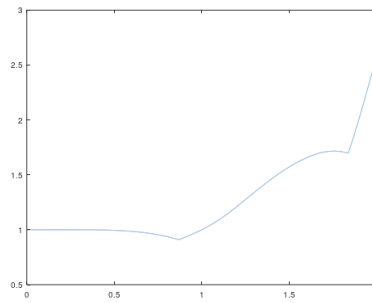


Figure 9.18: spectral radius of the stability matrix related to $\Delta t\omega$ for $\alpha=4/5$ and $\zeta=\gamma=\beta=1$

The stability condition for this set of parameters is $\Delta t < 1/\omega$. This is a competitive value for this method, since it allows having 4th order convergence along with a small stability penalization compared to CD. When applied to the simple pendulum problem, this method gives the following results:

Timestep	Error
1e-3	6.71276e-11
8e-4	2.73115e-11
6e-4	8.56559e-12
4e-4	1.69198e-12
2e-4	4.98795e-13
1e-4	1.96447e-11
1e-5	1.79337e-11
1e-6	1.89836e-11
1e-7	1.77951e-08

Table 9.10: results for the 5th degree method, $\alpha=4/5$ and $\zeta=\gamma=\beta=1$

It can be observed that the results are similar to the ones obtained with the unstable configuration of the 4th degree method, but in this case the method is conditionally stable. It can also be observed that cancellation issues make the precision decrease for step sizes below $2 \cdot 10^{-4}$, in a similar fashion to the other methods.

An interesting consideration about equations 9.116, 9.156 and 9.163 is that, due to how the method is built, its characteristic polynomial is a function of $\Delta t \omega$, which allows having expressions of the step size limit as a function of the inverse of the system's natural frequency. This leads to a quite predictable stability limit.

9.2.7 Considerations regarding the local convergence order of the methods for integrating second order ODEs

As mentioned by Hairer *et al.* [147], the reason according to which 2nd order ODE integrators receive their name is based on the smallest order of the error committed both in the variable and in its first derivative. For instance, the classic CD method is considered as a 2nd order method because the error in velocities is $O(\Delta t^3)$, which also happens in the variables. This is useful for comparing methods that duplicate variables, because the error will always coincide. On the other hand, it is hard to deny that the influence of the error on the first derivative is multiplied by the step size. This is more evident when

9.2 *A family of conditionally explicit methods for order 2 ODEs*

higher order methods explained in this section are observed, where the error of higher derivatives is computed. As can be seen, the best result is obtained with an error of $O(\Delta t^2)$ in the third derivative. A generalization of the usual method for naming it leads to the conclusion according to which it is an order 1 or linear method, while its convergence is clearly better than CD. Because of this, a change in the form according to which these methods are named is proposed, according to which the convergence order of the method should be calculated by obtaining, for each derivative, its truncation error and adding the order of the derivative to it, and subtracting 1 to the smallest of these values. With this proposal, the classification of the methods described until now should be as follows:

Method	2 nd degree		3 rd degree		4 th degree	
	Central Diff.	$\alpha=4/3$	$\alpha=2$	$\alpha=1/4$	$\alpha=5/4$	As here presented
Order	2	3	2	3	4	4

Table 9.11: local convergence of the proposed methods

It can be surprising for the case $\alpha=2$ that the convergence is lower than for $\alpha=4/3$ given that it leads to better results, but it must be remembered that the classification is based on the local convergence.

9.3 A Multibody formulation for Discrete Elements: propagation of a shock wave across a stiff beam

In this chapter a different model will be analyzed. Only stiff solids that form mechanisms using constraints have been modeled and used so far, but in this case the algorithms developed in this PhD thesis (which are designed for solving the equations of multibody dynamics) will be used for solving a model that is formed by Discrete Elements. The results obtained by this analysis will be compared against the ones obtained with a commercial software suitable for multibody systems, and then against the ones obtained from a FEM analysis, which acts as a reference. All these analyses, together, will test the possibility of applying a Multibody formulation, which is intended to solve systems formed by stiff solids, to systems that are formed by Discrete Elements.

The physical system analyzed for this purpose is a continuous beam across which a shock wave propagates. For analyzing it using the Multibody approach the beam is modeled as a chain of point masses and springs, whose only degree of freedom is the displacement along its longitudinal axis. On the other side, the FEM analysis is carried out on a beam with a round section.

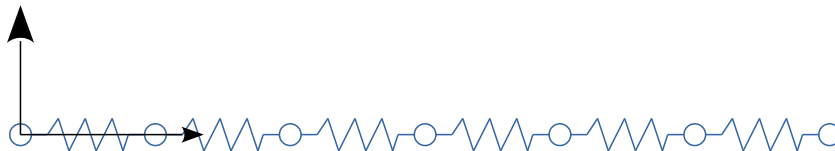


Figure 9.19: mass-spring chain

The input function should represent a sudden change in position for introducing a velocity bump, but as tempting as it is to employ impulse functions this should be avoided by all means in order to have a consistent result. Moreover, when modeling real hits the equivalent mathematical function is far from being an impulse function; it resembles more a displaced cosine function, for instance. With all this in mind, and in order to introduce a unit velocity jump to the system, the position input to the first solid of the chain is the following piecewise function:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{0.04}{\pi} - \frac{0.04}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{0.04} t\right) & t \leq 0.04 \\ \frac{0.08}{\pi} & t > 0.04 \end{cases} \quad (9.164)$$

Which, graphically, is as follows:

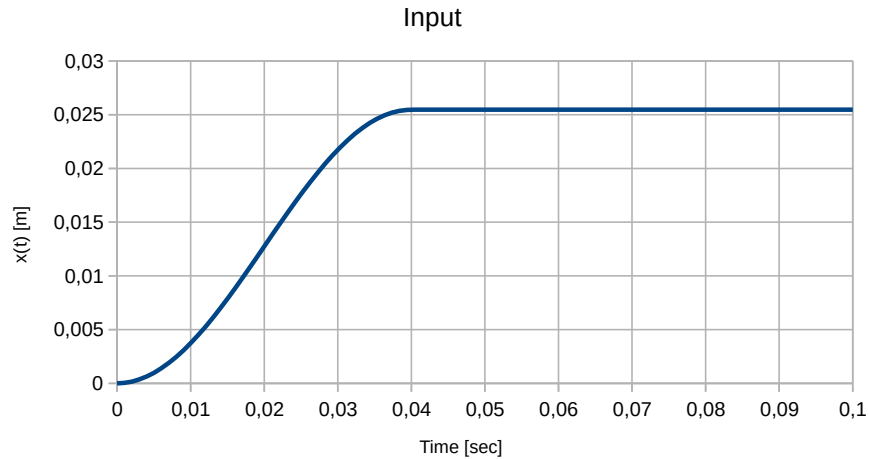


Figure 9.20: input function

The time step should therefore be small enough to represent the initial curve with at least 20 points. For this purpose, a step size of 0.001s has been chosen.

9.3.1 Finite elements model

The continuous model of a beam has been tested using finite elements software ANSYS. For this purpose, and since the stiffness and density units must be coherent between the different models, the following correlations apply:

$$\rho = \frac{m_T}{V_T} \quad (9.165)$$

$$k_{beam} = \frac{AE}{L_0} \quad (9.166)$$

The input function is the one shown in figure 9.20. Still, and since a velocity input is also available on ANSYS, its equivalent (this is, the time derivative of 9.164) can also be used. The employed model is the following one:

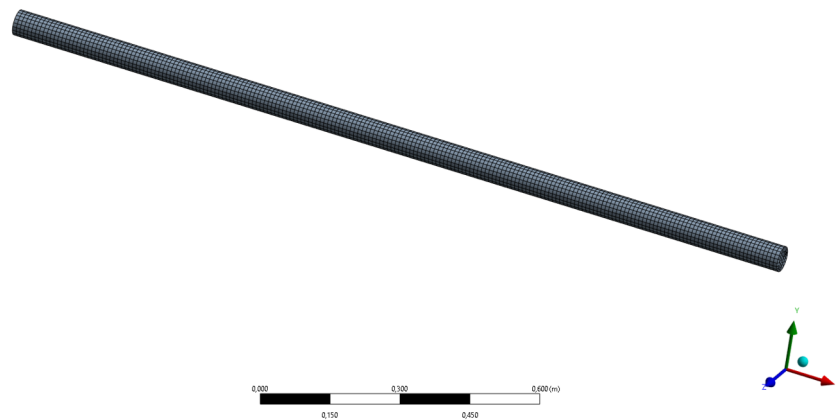


Figure 9.21: finite element model

This model has the following mechanical properties: $\rho=2.2237\text{ kg/m}^3$ and $E=1801.2\text{ Pa}$, with a total length of 1.8 m . With this, the free edge and two intermediate sections showcase the following velocity graph:

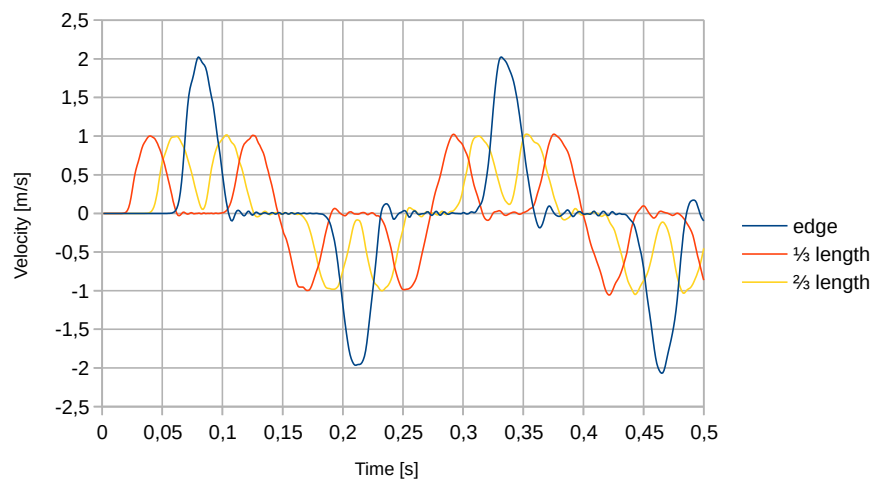


Figure 9.22: finite element model results for the velocity of the free edge and intermediate sections

This graph shows a duplication of the peak velocity related to the free edge. Additionally, after the velocity peak an oscillation occurs in each section for a bit until it settles down. Attention must be given to this reminiscent oscillation too in the next section for validation purposes.

9.3.2 Minimal coordinates model

The system is also represented, as mentioned, using a chain of point masses and springs. However, and if several models are to be employed to represent the same continuous beam, some particularities have to be addressed; if the beam's mass and stiffness is considered always the same, representing it with a varying number of point masses and springs means that these should change accordingly. As such, the sum of all the masses should match the beam's mass, and the average stiffness of all the springs should also match the beam's stiffness. This is:

$$m_{pointmass} = \frac{m_T}{n_{masses}} \quad (9.167)$$

$$k_{spring} = n_{springs} k_{beam} \quad (9.168)$$

Where:

$$n_{springs} = n_{masses} - 1 \quad (9.169)$$

The distance between solids is also relevant, since the total length should be kept constant. This length will also coincide with the unloaded length of each spring. This is:

$$l_{mass} = \frac{l_T}{n_{masses}} \quad (9.170)$$

When a shock wave is running along a continuous material, and according to the simulations carried out using ANSYS, the other edge is supposed to present a peak velocity that doubles the input. For a unit input velocity (or its position equivalent 9.164), this means that the system's parameters should be around $m_T = 0.04 \text{ kg}$ and $k_T = 10 \text{ N/m}$, for example.

Since the proposed mechanism moves along a single dimension, an ad hoc minimal coordinates model seems suitable for it. The equation that leads the motion of the system is, therefore, as follows:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{k} \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{f} \quad (9.171)$$

Where:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m \end{bmatrix} \quad (9.172)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix} \quad (9.173)$$

$$\mathbf{f} = k \begin{pmatrix} x_i \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ l_0 \end{pmatrix} \quad (9.174)$$

Where x_i is the input function defined by 9.164.

If equation 9.171 is to be integrated using an implicit integrator, such as Newmark, the equilibrium needs to be set in $t+\Delta t$, which yields:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}(t+\Delta t) = k \mathbf{A} \mathbf{x}(t+\Delta t) + \mathbf{f}(t+\Delta t) \quad (9.175)$$

Then, using equation 7.5 and rearranging:

$$(a_0 \mathbf{M} - k \mathbf{A}) \mathbf{x}(t+\Delta t) = \mathbf{M} (a_0 \mathbf{x}(t) + a_1 \dot{\mathbf{x}}(t) + a_2 \ddot{\mathbf{x}}(t)) + \mathbf{f}(t+\Delta t) \quad (9.176)$$

Results obtained with the method described in this document will be checked against the ones obtained with MSC ADAMS. Since an academic license is being used, the chain is limited to 20 solids (and 19 springs).

An initial model with 10 masses and 9 springs throws the following results:

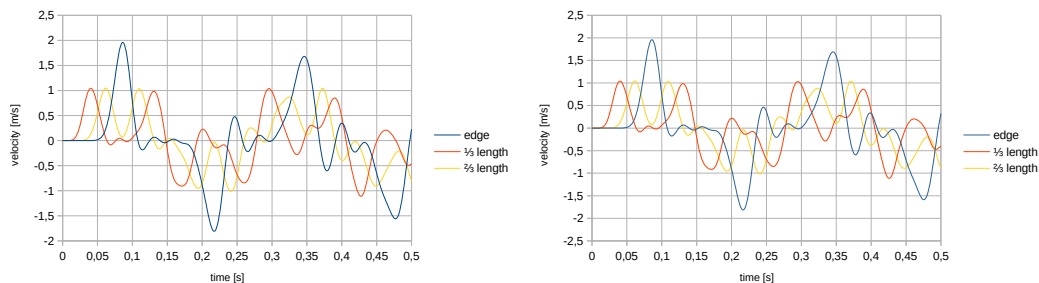


Figure 9.23: results for a 10 masses model, corresponding to the minimal coordinates model (left) and the solution obtained by ADAMS (right)

9.3 A Multibody formulation for Discrete Elements: propagation of a shock wave across a stiff beam

This model replicates the duplication of the edge velocity but, when compared to fig. 9.22, the results are not as accurate enough. Still the minimal coordinates model and the ADAMS model throw almost identical results.

Then, and using the maximum possible number of solids available on ADAMS, a system of 20 masses and 19 springs renders the following:

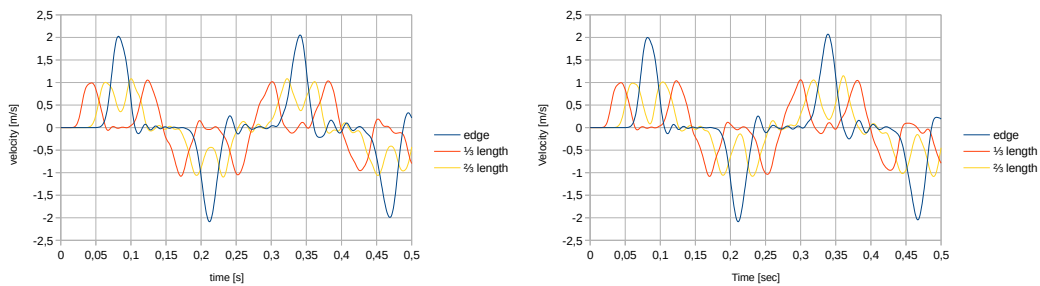


Figure 9.24: results for 20 solids with a total mass of 0.04kg, a total stiffness of 10N/m and a time step of 0.001s, corresponding to the minimal coordinates model (left) and to the solution obtained by ADAMS (right)

This model gets closer to the results of the finite element model, which has been taken as a reference given the fact that it's the only model that really represents a continuous beam. Still, more solids would very likely provide a more precise result when using the discretized models.

Similarities between the minimal coordinates model and the results obtained by ADAMS allow to wonder what happens with a system that has more masses and springs; still, this system cannot be simulated by ADAMS, leaving the minimal coordinates model as the only source of information. 100 elements have been used for this purpose:

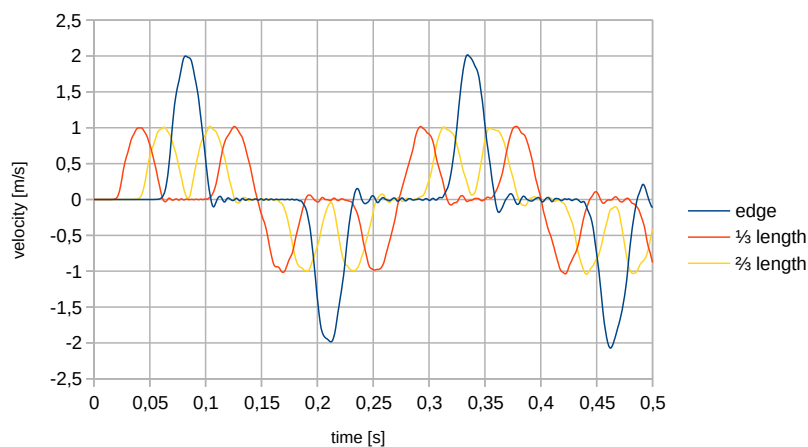


Figure 9.25: results for a total mass of 0.04kg, 100 masses, a total stiffness of 10N/m and a time step of 0.001s

The oscillation after the velocity peak is smaller as the number of masses increases. However, and since it is also visible on the finite element model, it can be assumed as a behavior that is inherent to the continuous beam itself rather than a particularity of the discretization. This, in turn, validates the discretization model.

Lastly, a greater number of masses should provide a result which gets closer to the one obtained using finite elements.

Still, this is a very preliminary study of this phenomenon, and despite showing promising results a more thoughtful analysis is necessary.

10 Conclusions and future work

In this chapter the conclusions of the work included in this PhD thesis are summarized. Also some future developments derived from this conclusions are presented.

A new algorithm to integrate the equations of multibody dynamics using Newmark has been developed. This method takes advantage of the use of fundamental null space basis to integrate the equations in the manifold, so unconditionally stable behavior without the introduction of numerical damping can be achieved. The algorithm has shown predictable behavior and reliability.

The algorithm has been tested using some examples of the iftomm multibody benchmark, showing a reasonable performance taking into account that the fastest methods are of explicit nature, which are of lower computational cost but can be unstable in other problems. Some other stability bounded examples have been solved with a good performance.

Although the method has been implemented using general orientation coordinates, its formulation has been developed with a broader scope in mind, thus allowing its implementation with other coordinate systems.

Newmark approach has been implemented using analytic derivatives. The implementation of these derivatives can be used also in other implicit schemes such as Wilson-Theta or HHT.

A set of analytic derivatives required for modeling some joints have been developed. This includes not only the constraint, but also its first and second derivatives. These can also be used in other integration schemes.

A method for the general linearization of the equations (including equilibrium and constraints) regardless of the chosen orientation representation has been developed. This method allows for an object oriented

approach, thus simplifying the use of different orientation parameter sets when this is required. The method has been successfully tested with explicit methods.

A new set of conditionally explicit methods of general use has been developed. These methods are based on the classical structural central difference method, but allow for a higher degree of convergence at a very limited computational cost. They also eliminate the cancellation issues that appear with the classical central difference approach.

A preliminary study of the applicability of structural methods for the resolution of Discrete Element problems has been carried out. It shows promising results.

These improvements lead to some ideas to be studied. The general formulation of the orientation representation, which have been carried out for explicit schemes, should be easily migrated to implicit schemes such as the here presented.

The implementation of the algorithm developed in this document can surely be improved. For example, one could take advantage of the relationship of the Jacobian Matrix and the force constraint matrix.

The new conditionally explicit methods have currently been studied for simple ODE problems. They should be thoroughly tested for DAEs.

As shown in this PhD thesis, the use of the here presented algorithms can be of good use for solving Discrete Element models. A proper evaluation of this should be performed. In order to do so, a proper implementation of the algorithms for this task is required.

11 Itzultze-taula

EUSKERA	ENGLISH	SPANISH	context
-ra bideratzen da	tends to	tiende a	-
adierazi	represent/express	representar/expresar	-
adierazpena/espresioa	expression	expresión	-
alderantzigarri	invertible	invertible	matrix
alderantzizkoa	inverse	inversa	matrix
Arau Trapezoidala	Trapezoidal Rule	Regla Trapezoidal	-
araua	norm	norma	vector
arrazoitze	reasoning	razonamiento	-
askatasun graduak	degrees of freedom	grados de libertad	-
aurrebiderkatu	premultiply	premultiplicar	-
auresalea	predictor	predictor	method
azpiespazio hutsa	null space	subespacio nulo	-
azpiespazio islatua	image space	subespacio espejo	-
azpizehaztuak	underdetermined	indeterminado	-
baldintza nahikoak	sufficient conditions	condiciones suficientes	-
baldintzapeko egonkortasuna	conditional stability	estabilidad condicional	-
baldintzarik gabeko egonkortasuna	unconditional stability	estabilidad incondicional	-
baliokidetasuna	equivalence	equivalencia	-
bateragarria	compatible	compatible	matrix
begizta irekia	open loop	lazo abierto	-
begizta itxia	closed loop	lazo cerrado	-
berezko balio	eigenvalue	valor propio	-

berezko bektore	eigenvector	vector propio	-
berezko frekuentzia	natural frequency	frecuencia natural	-
berritasuna	novelty	novedad	-
berriztatu	update	actualizar	-
bideragarritasun	viability	viabilidad	-
biratze matrizea	rotation matrix	matriz de rotación	-
birfindu	refine	refinar	-
biribiltze erroreak	rounding errors	errores de redondeo	-
desberdintzak	inequalities	desigualdades	-
ebatzi	solve	resolver	-
egokitze	conditioning	condicionamiento	-
egonkor	constant	constante	-
egonkortu	stabilize	estabilizar	-
emaitza	solution	solución	-
emaitza bakarra	unique solution	solución única	-
eraginkor	efficient	eficiente	-
eremu	domain	dominio	-
etenuneak	discontinuities	discontinuidades	-
ezarri	define	definir	-
ezarri	impose	imponer	constraints
ezaugarri zinematikoak	kinematic characteristics	características cinemáticas	-
forma	form	forma	-
funtsezko	fundamental	fundamental	-
gainjarri	overlap	superponer	-
gainzehaztuak	overdetermined	sobredeterminado	-
gogobetegarri	satisfactory	satisfactorio	-
gorputz anitzeko sistemak	multibody systems	sistemas multicuerpo	-
hautazko	arbitrary	arbitrario	-
hedatutako Lagrange	augmented Lagrange	Lagrange aumentado	-
hedatze	expansion	expansión	-
hein	rank	rango	matrix

higidura eremua	displacement field	campo de desplazamientos	-
hondatu	corrupt	corromper	-
hurbildu	approximate	aproximado	-
hurbilketa numerikoa	numerical approximation	aproximación numérica	-
inbariante	invariant	invariante	-
inguruko baldintzak	boundary conditions	condiciones de contorno	-
iragarriezin	unpredictable	impredecible	-
iraulia	transposed	traspuesta	matrix
itzulgarria	invertible	invertible	matrix
Jacobiarra	Jacobian	Jacobiano	matrix
karratu minimo	minimum squares	mínimos cuadrados	result
koordinada askeak	free/independent coordinates	coordenadas libres/independientes	-
koordinada orokortuak	generalized coordinates	coordenadas generalizadas	-
oste konputazionala	computational cost	coste computacional	-
Lagrange gehitua	augmented Lagrange	Lagrange aumentado	-
Lagrange-ren biderkatzaileak	Lagrange multipliers	multiplicadores de Lagrange	-
lausoki	diffusely	difusamente	-
lehen motako Lagrange-ren ekuazioa	first class Lagrange equation	ecuación de Lagrange de primera clase	-
lehiakor	competitive	competitivo	-
lokailu	joint	par	-
lotu	link	conectar	-
malgu	flexible	flexible	-
menpeko koordinadak	dependent coordinates	coordenadas dependientes	-
metodo	approach	enfoque	-
moteltze	damping	amortiguamiento	-
moztu	truncate	truncar	Taylor series
multzo	set	conjunto	-
murriztua	reduced	reducido	system
noranzkoaren jarraitasuna	directional continuity	continuidad direccional	-
oinarri	base	base	-

ordezkatu	replace	sustituir	-
oreka ekuazioa	equilibrium equation	ecuación de equilibrio	-
osagai ortogonala	orthogonal complement	complemento ortogonal	-
parekatu	compare	comparar	-
pisatze	metering	metrado	-
prozedura	procedure	procedimiento	-
murriztapenak	constraints	restricciones	-
sakabanatu	sparse	dispersa	matrix
sendoa	robust	robusto	-
sistema murriztuak	constrained systems	sistemas restringidos	-
trinko	consistent	consistente	-
unibokoki	univocally	unívocamente	-
unitatezko	unity	unitario	vector
zatitze	partition	partición	
zenbakizko	numerical	numérico	method
zenbatzaile	counter	contador	-
ziklo	cycle	ciclo	-
zorrotz	tight/strict	estrictas	-
zurrun	stiff	rígido	-
zurruntasun	stiffness	rigidez	Matrix etc
zuzentzaile	direction	director	vector
zuzentzaile	corrector	corrector	method

12 Bibliography

- [1] G. Urkullu Martín, Integración de las ecuaciones de la dinámica de sistemas multicuerpo mediante diferencias centrales de orden dos., (2019).
- [2] V. García Marina, Síntesis dimensional óptima de mecanismos planos con restricciones geométricas, University of the Basque Country, 2015.
- [3] I. Heras Miguel, Four-point contact slewing bearings for wind turbines: advances in structural modelling and friction torque calculation, University of the Basque Country, 2018.
- [4] I. Martín Lorenzo, Study of the structural behaviour and analytical characterization of wire-race slewing bearings, University of the Basque Country, 2022.
- [5] I. Coria Martínez, Tetraparametric assembly method for the simulation and optimization of bolt tightening sequences in ASME ring type joints, University of the Basque Country, 2018.
- [6] M. Armentia, Mechanical analysis and design of dental restorations: fatigue, microgap and screw loosening, University of the Basque Country, 2023.
- [7] A.A. Shabana, Computational dynamics, John Wiley & Sons, 2009.
- [8] J.G. De Jalon, E. Bayo, Kinematic and dynamic simulation of multibody systems: the real-time challenge, Springer Science & Business Media, 2012.
- [9] J. Cuadrado, J. Cardenal, E. Bayo, Modeling and solution methods for efficient real-time simulation of multibody dynamics, *Multibody Syst. Dyn.* 1 (1997) 259–280. doi:<https://doi.org/10.1023/A:1009754006096>.

- [10] O.A. Bauchau, Flexible multibody dynamics, Springer Science & Business Media, 2010.
- [11] C.W. Gear, L.R. Petzold, ODE methods for the solution of differential/algebraic systems, *SIAM J. Numer. Anal.* 21 (1984) 716–728.
- [12] C. Gear, Simultaneous numerical solution of differential-algebraic equations, *IEEE Trans. Circuit Theory.* 18 (1971) 89–95.
- [13] B. Paul, D. Krajinovic, Computer analysis of machines with planar motion: Part 1—Kinematics, (1970).
- [14] B. Paul, D. Krajinovic, Computer Analysis of Machines With Planar Motion: Part 2—Dynamics, (1970).
- [15] P.N. Sheth, J.J. Uicker Jr, IMP (Integrated Mechanisms Program), a computer-aided design analysis system for mechanisms and linkage, (1972).
- [16] D.A. Smith, M.A. Chace, A.C. Rubens, The automatic generation of a mathematical model for machinery systems, (1973).
- [17] J.G. de Jalon, M.A. Serna, R. Avilés, Computer method for kinematic analysis of lower-pair mechanisms—I velocities and accelerations, *Mech. Mach. Theory.* 16 (1981) 543–556.
- [18] M.A. Serna, R. Avilés, J.G. de Jalón, Dynamic analysis of plane mechanisms with lower pairs in basic coordinates, *Mech. Mach. Theory.* 17 (1982) 397–403.
- [19] J.G. De Jalon, J. Unda, A. Avello, Natural coordinates for the computer analysis of multibody systems, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 56 (1986) 309–327.
- [20] J. García de Jalón, J. Unda, A. Avello, J.M. Jiménez, Dynamic analysis of three-dimensional mechanisms in “natural” coordinates, *J. Mech. Des. Trans. ASME.* 109 (1987) 460–465. doi:10.1115/1.3258818.
- [21] M. Pucheta, C.J. Paz, M.E. Pereyra, Representaciones cinemáticas de orientación y ecuaciones de estimación, *Mecánica Comput.* 33 (2014) 2303–2324.

-
- [22] O.A. Bauchau, L. Trainelli, The vectorial parameterization of rotation, *Nonlinear Dyn.* 32 (2003) 71–92.
- [23] R. Serban, E.J. Haug, Kinematic and kinetic derivatives in multibody system analysis, in: *Int. Des. Eng. Tech. Conf. Comput. Inf. Eng. Conf.*, American Society of Mechanical Engineers, 1997: p. V002T29A075.
- [24] E. Jarzębowska, Quasi-coordinates based dynamics modeling and control design for nonholonomic systems, *Nonlinear Anal. Theory, Methods Appl.* 71 (2009) e118–e131.
- [25] A.B. Byachkov, V.M. Suslonov, Maggi’s equations in terms of quasi-coordinates, *Regul. Chaotic Dyn.* 7 (2002) 269–279.
- [26] J.G. de Jalón, M.D. Gutierrez-Lopez, Multibody dynamics with redundant constraints and singular mass matrix: existence, uniqueness, and determination of solutions for accelerations and constraint forces, *Multibody Syst. Dyn.* 30 (2013) 311–341.
- [27] T.R. Kane, D.A. Levinson, *Dynamics, theory and applications*, McGraw Hill, 1985.
- [28] H. Baruh, *Analytical dynamics*, WCB/McGraw-Hill Boston, 1999.
- [29] P. Appell, *Sur une forme generale des equations de la dynamique.*, (1900).
- [30] J.W. Gibbs, On the fundamental formulae of dynamics, *Am. J. Math.* 2 (1879) 49–64.
- [31] E.A. Desloge, The Gibbs–Appell equations of motion, *Am. J. Phys.* 56 (1988) 841–846.
- [32] M. Borri, C. Bottasso, P. Mantegazza, Equivalence of Kane’s and Maggi’s equations, *Meccanica.* 25 (1990) 272–274.
- [33] J. Angeles, S.K. Lee, The formulation of dynamical equations of holonomic mechanical systems using a natural orthogonal complement, (1988).
- [34] P.E. Nikravesh, *Computer-aided analysis of mechanical systems*, Prentice-hall Englewood Cliffs, NJ, 1988.

- [35] P. Lötstedt, L. Petzold, Numerical solution of nonlinear differential equations with algebraic constraints. I. Convergence results for backward differentiation formulas, *Math. Comput.* 46 (1986) 491–516.
- [36] H. Hemami, F.C. Weimer, Modeling of nonholonomic dynamic systems with applications, (1981).
- [37] P. Lötstedt, Mechanical systems of rigid bodies subject to unilateral constraints, *SIAM J. Appl. Math.* 42 (1982) 281–296.
- [38] C.W. Gear, B. Leimkuhler, G.K. Gupta, Automatic integration of Euler-Lagrange equations with constraints, *J. Comput. Appl. Math.* 12 (1985) 77–90.
- [39] T.R. Kane, C.F. Wang, On the derivation of equations of motion, *J. Soc. Ind. Appl. Math.* 13 (1965) 487–492.
- [40] J. Unda, J. García de Jalón, F. Losantos, R. Enparantza, A comparative study on some different formulations of the dynamic equations of constrained mechanical systems, *J. Mech. Des. Trans. ASME.* 109 (1987) 466–474. doi:10.1115/1.3258819.
- [41] F.E. Udwadia, R.E. Kalaba, H.-C. Eun, Equations of motion for constrained mechanical systems and the extended d’Alembert’s principle, *Q. Appl. Math.* 55 (1997) 321–331.
- [42] F.E. Udwadia, R.E. Kalaba, The explicit Gibbs-Appell equation and generalized inverse forms, *Q. Appl. Math.* 56 (1998) 277–288.
- [43] F.E. Udwadia, R.E. Kalaba, What is the general form of the explicit equations of motion for constrained mechanical systems?, *J. Appl. Mech.* 69 (2002) 335–339.
- [44] F.E. Udwadia, R.E. Kalaba, On the foundations of analytical dynamics, *Int. J. Non. Linear. Mech.* 37 (2002) 1079–1090.
- [45] W.C. Walton, E.C. Steeves, A new matrix theorem and its application for establishing independent coordinates for complex dynamical systems with constraints, National Aeronautics and Space Administration, 1969.
- [46] R.A. Wehage, E.J. Haug, Generalized coordinate partitioning for dimension reduction in analysis of constrained dynamic systems, (1982).

-
- [47] P.E. Nikravesh, I.S. Chung, Application of Euler parameters to the dynamic analysis of three-dimensional constrained mechanical systems, (1982).
- [48] R.P. Singh, P.W. Likins, Singular value decomposition for constrained dynamical systems, (1985).
- [49] N.K. Mani, E.J. Haug, K.E. Atkinson, Application of singular value decomposition for analysis of mechanical system dynamics, (1985).
- [50] C. Wampler, K. Buffinton, J. Shu-Hui, Formulation of equations of motion for systems subject to constraints, (1985).
- [51] S.S. Kim, M.J. Vanderploeg, QR decomposition for state space representation of constrained mechanical dynamic systems, (1986).
- [52] J.G. de Jalón, J.M. Jiménez, A. Avello, F. Martín, J. Cuadrado, Real time simulation of complex 3-D multibody systems with realistic graphics, in: *Real-Time Integr. Methods Mech. Syst. Simul.*, Springer, 1990: pp. 265–292.
- [53] A. Avello, J.M. Jiménez, E. Bayo, J.G. de Jalón, A simple and highly parallelizable method for real-time dynamic simulation based on velocity transformations, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 107 (1993) 313–339.
- [54] A. Kurdila, J.G. Papastavridis, M.P. Kamat, Role of Maggi's equations in computational methods for constrained multibody systems, *J. Guid. Control. Dyn.* 13 (1990) 113–120.
- [55] C.G. Liang, G.M. Lance, A differentiable null space method for constrained dynamic analysis, (1987).
- [56] J.W. Kamman, R.L. Huston, Constrained multibody system dynamics an automated approach, *Comput. Struct.* 18 (1984) 999–1003.
- [57] J.W. Kamman, R.L. Huston, Dynamics of constrained multibody systems, (1984).
- [58] M. Borri, C.L. Bottasso, P. Mantegazza, Acceleration projection method in multibody dynamics, (1992).

- [59] J.C. Chiou, K.C. Park, C. Farhat, A natural partitioning scheme for parallel simulation of multibody systems, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 36 (1993) 945–967.
- [60] I.F. de Bustos, V. García-Marina, G. Urkullu, M. Abasolo, An efficient LDU algorithm for the minimal least squares solution of linear systems, *J. Comput. Appl. Math.* 344 (2018) 346–355.
- [61] G. Peters, J.H. Wilkinson, The least squares problem and pseudo-inverses, *Comput. J.* 13 (1970) 309–316.
- [62] W. Sautter, Fehleranalyse für die Gauß-Elimination zur Berechnung der Lösung minimaler Länge, *Numer. Math.* 30 (1978) 165–184.
- [63] A. Arabyan, F. Wu, An improved formulation for constrained mechanical systems, *Multibody Syst. Dyn.* 2 (1998) 49–69.
- [64] G.H. Golub, C.F. Van Loan, *Special linear systems*, Matrix Comput. 2nd Ed. Balt. John Hopkins Univ. Press. (1989).
- [65] W. Blajer, A projection method approach to constrained dynamic analysis, (1992).
- [66] W. Blajer, Projective formulation of Maggi’s method for nonholonomic systems analysis, *J. Guid. Control. Dyn.* 15 (1992) 522–525.
- [67] W. Blajer, An orthonormal tangent space method for constrained multi-body systems, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 121 (1995) 45–57.
- [68] O.P. Agrawal, S. Saigal, Dynamic analysis of multi-body systems using tangent coordinates, *Comput. Struct.* 31 (1989) 349–355.
- [69] C.W. Gear, Differential-algebraic equation index transformations, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 9 (1988) 39–47.
- [70] K.E. Brenan, S.L. Campbell, L.R. Petzold, *Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations*, Siam, 1996.
- [71] L. Petzold, P. Lötstedt, Numerical solution of nonlinear differential equations with algebraic constraints II: Practical implications, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 7 (1986) 720–733.
- [72] E. Eich, Convergence results for a coordinate projection method applied to mechanical systems with algebraic constraints, *SIAM J. Numer. Anal.* 30 (1993) 1467–1482.

-
- [73] J. Yen, E.J. Haug, T.O. Tak, Numerical methods for constrained equations of motion in mechanical system dynamics, *J. Struct. Mech.* 19 (1991) 41–76.
- [74] J. Yen, Constrained equations of motion in multibody dynamics as ODEs on manifolds, *SIAM J. Numer. Anal.* 30 (1993) 553–568.
- [75] F.A. Potra, J. Yen, Implicit Numerical Integration for Euler-Lagrange Equations via Tangent Space Parametrization*, *J. Struct. Mech.* 19 (1991) 77–98.
- [76] E.J. Haug, J. Yen, Implicit numerical integration of constrained equations of motion via generalized coordinate partitioning, (1992).
- [77] J. Yen, L. Petzold, S. Raha, A time integration algorithm for flexible mechanism dynamics: The DAE α -method, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 158 (1998) 341–355.
- [78] M. Borri, L. Trainelli, A. Croce, The embedded projection method: a general index reduction procedure for constrained system dynamics, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 195 (2006) 6974–6992.
- [79] J. Baumgarte, Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 1 (1972) 1–16.
- [80] H.E.M. Eich, Regularization methods for constrained mechanical multibody systems, *ZAMM-Journal Appl. Math. Mech. Für Angew. Math. Und Mech.* 75 (1995) 761–773.
- [81] P.E. Nikravesh, R.A. Wehage, O.K. Kwon, Euler parameters in computational kinematics and dynamics. Part 1, (1985).
- [82] T.W. Park, E.J. Haug, A hybrid numerical integration method for machine dynamic simulation, (1986).
- [83] K.C. Park, J.C. Chiou, Stabilization of computational procedures for constrained dynamical systems, *J. Guid. Control. Dyn.* 11 (1988) 365–370.
- [84] K.C. Park, J.C. Chiou, J.D. Downer, Explicit-implicit staggered procedure for multibody dynamics analysis, *J. Guid. Control. Dyn.* 13 (1990) 562–570.

- [85] E. Bayo, J.G. De Jalon, M.A. Serna, A modified Lagrangian formulation for the dynamic analysis of constrained mechanical systems, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 71 (1988) 183–195.
- [86] E. Bayo, J.G. de Jalon, A. Avello, J. Cuadrado, An efficient computational method for real time multibody dynamic simulation in fully Cartesian coordinates, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 92 (1991) 377–395.
- [87] A.J. Kurdila, J.L. Junkins, S. Hsu, Lyapunov stable penalty methods for imposing holonomic constraints in multibody system dynamics, *Nonlinear Dyn.* 4 (1993) 51–82.
- [88] S. Yoon, R.M. Howe, D.T. Greenwood, Geometric elimination of constraint violations in numerical simulation of Lagrangian equations, (1994).
- [89] W. Blajer, W. Schiehlen, W. Schirm, A projective criterion to the coordinate partitioning method for multibody dynamics, *Arch. Appl. Mech.* 64 (1994) 86–98.
- [90] W. Blajer, Elimination of constraint violation and accuracy aspects in numerical simulation of multibody systems, *Multibody Syst. Dyn.* 7 (2002) 265–284.
- [91] W. Blajer, A geometric unification of constrained system dynamics, *Multibody Syst. Dyn.* 1 (1997) 3–21.
- [92] Z. Terze, D. Lefeber, O. Muftić, Null space integration method for constrained multibody systems with no constraint violation, *Multibody Syst. Dyn.* 6 (2001) 229–243.
- [93] E. Bayo, A. Avello, Singularity-free augmented Lagrangian algorithms for constrained multibody dynamics, *Nonlinear Dyn.* 5 (1994) 209–231.
- [94] E. Bayo, R. Ledesma, Augmented Lagrangian and mass-orthogonal projection methods for constrained multibody dynamics, *Nonlinear Dyn.* 9 (1996) 113–130.
- [95] W. Schiehlen, Computational aspects in multibody system dynamics, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 90 (1991) 569–582.

-
- [96] A.A. Shabana, Flexible Multibody Dynamics: Review of Past and Recent Developments, *Multibody Syst. Dyn.* 1 (1997) 189–222. doi:10.1023/A:1009773505418.
- [97] F. González, J. Kövecses, Use of penalty formulations in dynamic simulation and analysis of redundantly constrained multibody systems, *Multibody Syst. Dyn.* 29 (2013) 57–76. doi:10.1007/s11044-012-9322-y.
- [98] A. Cardona, An integrated approach to mechanism analysis, PhD thesis, (1989).
- [99] A. Cardona, M. Geradin, Time integration of the equations of motion in mechanism analysis, *Comput. Struct.* 33 (1989) 801–820.
- [100] N.M. Newmark, A method of computation for structural dynamics, *J. Eng. Mech. Div.* 85 (1959) 67–94.
- [101] H.M. Hilber, T.J.R. Hughes, R.L. Taylor, Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics, *Earthq. Eng. Struct. Dyn.* 5 (1977) 283–292.
- [102] T.J.R. Hughes, Analysis of transient algorithms with particular reference to stability behavior, *Comput. Methods Transient Anal.* 84-29160 12-64). Amsterdam, North-Holland, 1983. (1983) 67–155.
- [103] O.A. Bauchau, G. Damilano, N.J. Theron, Numerical integration of non-linear elastic multi-body systems, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 38 (1995) 2727–2751.
- [104] O.A. Bauchau, C.L. Bottasso, L. Trainelli, Robust integration schemes for flexible multibody systems, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 192 (2003) 395–420.
- [105] J. Chung, G.M. Hulbert, A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized- α method, (1993).
- [106] O.A. Bauchau, N.J. Theron, Energy decaying scheme for nonlinear elastic multi-body systems, *Comput. Struct.* 59 (1996) 317–331.
- [107] P. Betsch, The discrete null space method for the energy consistent integration of constrained mechanical systems: Part I: Holonomic constraints, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 194 (2005) 5159–5190.

- [108] P. Betsch, S. Leyendecker, The discrete null space method for the energy consistent integration of constrained mechanical systems. Part II: Multibody dynamics, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 67 (2006) 499–552.
- [109] S. Leyendecker, P. Betsch, P. Steinmann, The discrete null space method for the energy-consistent integration of constrained mechanical systems. Part III: Flexible multibody dynamics, *Multibody Syst. Dyn.* 19 (2008) 45–72.
- [110] O. Gonzalez, Mechanical systems subject to holonomic constraints: Differential–algebraic formulations and conservative integration, *Phys. D Nonlinear Phenom.* 132 (1999) 165–174.
- [111] P. Betsch, P. Steinmann, A DAE approach to flexible multibody dynamics, *Multibody Syst. Dyn.* 8 (2002) 365–389.
- [112] M. Arnold, A perturbation analysis for the dynamical simulation of mechanical multibody systems, *Appl. Numer. Math.* 18 (1995) 37–56.
- [113] E.L. Ince, *Ordinary differential equations*, Courier Corporation, 1956.
- [114] C.W. Gear, *Numerical initial value problems in ordinary differential equations*, Prentice-Hall Ser. Autom. Comput. (1971).
- [115] E. Hairer, G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations II*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1991. doi:10.1007/978-3-662-09947-6.
- [116] B. Carnahan, J.O. Wilkes, Numerical Methods for ChE Problems, *Chem. Eng. Educ.* 7 (1973) 80–83.
- [117] S.D. Conte, C. De Boor, *Elementary numerical analysis: an algorithmic approach*, SIAM, 2017.
- [118] J.C. Butcher, Implicit runge-kutta processes, *Math. Comput.* 18 (1964) 50–64.
- [119] G.G. Dahlquist, A special stability problem for linear multistep methods, *BIT Numer. Math.* 3 (1963) 27–43.
- [120] S.P. Nørsett, One-step methods of Hermite type for numerical integration of stiff systems, *BIT Numer. Math.* 14 (1974) 63–77.

-
- [121] E. Fehlberg, Klassische runge-kutta-formeln vierter und niedrigerer ordnung mit schrittweisen-kontrolle und ihre anwendung auf waermeleitungsprobleme, *Computing*. 6 (1970) 61–71.
- [122] R.L. Burden, J.D. Faires, *Numerical analysis* 4th Ed, Bost. PWS-Kent. (1989).
- [123] L. Komzsik, *What every engineer should know about computational techniques of finite element analysis*, CRC Press, 2019.
- [124] K.J. Bathe, E.L. Wilson, Stability and accuracy analysis of direct integration methods, *Earthq. Eng. Struct. Dyn.* 1 (1972) 283–291.
- [125] H.M. Hilber, *Analysis and design of numerical integration methods in structural dynamics.*, University of California, Berkeley, 1976.
- [126] K.E. Brenan, L.R. Petzold, The Numerical Solution of Higher Index Differential/Algebraic Equations by Implicit Methods, *SIAM J. Numer. Anal.* 26 (1989) 976–996.
- [127] E.J. Haug, R.C. Deyo, *Real-time integration methods for mechanical system simulation*, Springer Science & Business Media, 2013.
- [128] L.R. Petzold, *Description of dassl: a differential/algebraic system solver*, Sandia National Labs., Livermore, CA (USA), 1982.
- [129] M.A. Chace, Methods and experience in computer aided design of large-displacement mechanical systems, in: *Comput. Aided Anal. Optim. Mech. Syst. Dyn.*, Springer, 1984: pp. 233–259.
- [130] E.J. Haug, J. Yen, Generalized coordinate partitioning methods for numerical integration of differential-algebraic equations of dynamics, in: *Real-Time Integr. Methods Mech. Syst. Simul.*, Springer, 1990: pp. 97–114.
- [131] M.F. Steigerwald, BDF Methods for DAEs in Multi-body Dynamics: Shortcomings and Improvements, in: *Real-Time Integr. Methods Mech. Syst. Simul.*, Springer, 1990: pp. 345–352.
- [132] K. Burrage, Efficiently implementable algebraically stable Runge–Kutta methods, *SIAM J. Numer. Anal.* 19 (1982) 245–258.

- [133] M. Hanke, E.I. Macana, R. März, On asymptotics in case of linear index-2 differential-algebraic equations, *SIAM J. Numer. Anal.* 35 (1998) 1326–1346.
- [134] I. Higuera, R. März, C. Tischendorf, Stability preserving integration of index-2 DAEs, *Appl. Numer. Math.* 45 (2003) 201–229.
- [135] C. Hirsch, Numerical computation of internal and external flows: The fundamentals of computational fluid dynamics, Elsevier, 2007.
- [136] T.F. Coleman, A. Verma, A preconditioned conjugate gradient approach to linear equality constrained minimization, *Comput. Optim. Appl.* 20 (2001) 61–72.
- [137] I. Fernández de bustos, H. Uriarte, G. Urkullu, V. García-Marina, A non-damped stabilization algorithm for multibody dynamics, *Meccanica.* 57 (2022) 371–399. doi:10.1007/s11012-021-01433-0.
- [138] U.M. Ascher, L.R. Petzold, Stability of computational methods for constrained dynamics systems, *SIAM J. Sci. Comput.* 14 (1993) 95–120.
- [139] L.O. Jay, D. Negrut, Extensions of the HHT- α method to differential-algebraic equations in mechanics, *Electron. Trans. Numer. Anal.* 26 (2007) 190–208.
- [140] D. Dopico, U. Lugris, M. Gonzalez, J. Cuadrado, IRK vs structural integrators for real-time applications in MBS, *J. Mech. Sci. Technol.* (2005). doi:10.1007/bf02916159.
- [141] J. Cuadrado, D. Dopico, M.A. Naya, M. Gonzalez, Penalty, semi-recursive and hybrid methods for MBS real-time dynamics in the context of structural integrators, *Multibody Syst. Dyn.* (2004). doi:10.1023/B:MUBO.0000044421.04658.de.
- [142] B. Gavrea, D. Negrut, F.A. Potra, The Newmark integration method for simulation of multibody systems: analytical considerations, in: *ASME 2005 Int. Mech. Eng. Congr. Expo.*, American Society of Mechanical Engineers, 2005: pp. 1079–1092.
- [143] M. González, D. Dopico, U. Lugrís, J. Cuadrado, A benchmarking system for MBS simulation software: Problem standardization and performance measurement, *Multibody Syst. Dyn.* 16 (2006) 179–190.

- [144] G. Urkullu, I.F. de Bustos, V. García-Marina, H. Uriarte, Direct integration of the equations of multibody dynamics using central differences and linearization, *Mech. Mach. Theory.* 133 (2019) 432–458.
- [145] G. Urkullu, I. Fernández-de-Bustos, A. Olabarrieta, R. Ansola, Estudio de la eficiencia del método de integración directa mediante diferencias centrales (DIMCD)., *DYNA-Ingeniería e Ind.* 96 (2021).
- [146] J. Stuelpnagel, On the parametrization of the three-dimensional rotation group, *SIAM Rev.* 6 (1964) 422–430.
- [147] E. Hairer, S. Norsett, G. Wanner, Solving Ordinary Differential Equations I, *Comput. Math.* 8 (1987).