



ZIENTZIA  
ETA TEKNOLOGIA  
FAKULTATEA  
FACULTAD  
DE CIENCIA  
Y TECNOLOGÍA

**50** URTE  
AÑOS  
1968 - 2018

**Biba Zientzia!**  
Ciencia Viva

---

# Homología Singular

---

Trabajo Fin de Grado  
Grado en Matemáticas

**Jon González Martínez**

Trabajo dirigido por  
Marta Macho-Stadler

Leioa, 23 de junio de 2023



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>v</b>
<b>1. Teoría Singular</b>	<b>1</b>
1.1. Grupos de homología singular y propiedades básicas . . . . .	1
1.2. El functor $H_n$ . . . . .	7
1.3. El operador prisma . . . . .	10
1.4. Invarianza por homotopía . . . . .	15
1.5. Teorema de Hurewicz . . . . .	16
<b>2. Teoría Relativa</b>	<b>21</b>
2.1. Grupos de homología relativa . . . . .	21
2.2. El functor a pares $H_n$ . . . . .	24
2.3. Sucesión exacta larga de homología . . . . .	24
2.4. Operadores $Sd_n$ y $T_n$ . . . . .	28
2.5. Teorema de excisión . . . . .	30
2.6. Homología de la $n$ -esfera, $S^n$ . . . . .	33
2.7. La sucesión de Mayer-Vietoris . . . . .	34
2.8. Ejemplos . . . . .	37
<b>A. Preliminares</b>	<b>41</b>
A.1. Categorías y funtores . . . . .	41
A.2. Preliminares afines . . . . .	42
A.3. Varios Resultados . . . . .	44
<b>Bibliografía</b>	<b>45</b>



# Introducción

La *teoría de homología* surgió como una rama de la topología, siendo Henri Poincaré (1854-1912) el primero en introducir este concepto en su famoso artículo *Analysis Situs* en 1895. Su gran intuición le permitió introducir conceptos como la homología y otros objetos algebraicos como el grupo fundamental, si bien su forma de hacerlo no tenía el rigor formal que hoy en día se utiliza.

Este trabajo tiene como finalidad la construcción de invariantes topológicos, es decir, propiedades o estructuras asociadas a espacios topológicos que se mantienen mediante homeomorfismos. Vamos a construir a partir de espacios topológicos, familias numerables de grupos abelianos  $\{H_n(X): n \geq 1\}$  de tal manera que si dos espacios topológicos son homeomorfos, sus respectivos grupos asociados sean isomorfos en todas las dimensiones. Estos grupos, que llamaremos grupos de homología, explicados de manera intuitiva, medirán el número de agujeros de dimensión  $n$  que tiene un espacio. Así pues, la esfera  $S^1$  tendrá como primer grupo de homología a  $\mathbb{Z}$ , mientras que el resto de sus grupos serán isomorfos al grupo trivial, pues la esfera posee un agujero de dimensión 1 y ninguno de dimensión superior. Más en general, la  $n$ -esfera  $S^n$  tendrá como  $n$ -ésimo grupo de homología a  $\mathbb{Z}$ , mientras que el resto, serán triviales, dando a entender que  $S^n$  tiene un agujero de dimensión  $n$  y ninguno de otra dimensión. De manera similar, definiremos el grupo  $H_0(X)$ , el cual tendrá que ver con la conexión por caminos del espacio.

Esto nos va permitir diferenciar de manera rigurosa estructuras como el toro,  $T_1$  y la superficie compacta de género 2,  $T_2$ . Ya que estos son espacios que intuitivamente entendemos que no son homeomorfos, porque observamos que  $T_2$  tiene claramente un asa más que  $T_1$ .

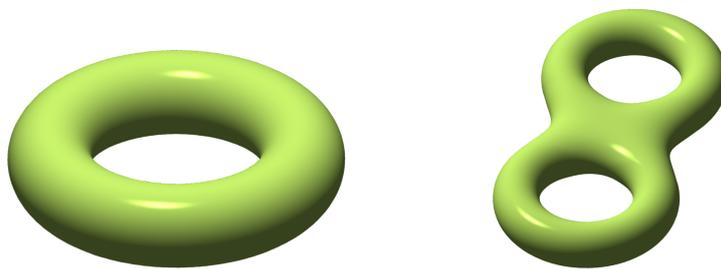


Figura 1: El toro,  $\mathbb{T}_1$  a la izquierda y  $\mathbb{T}_2$  a la derecha.

Sin embargo, probar que no lo son con los invariantes más conocidos puede resultar difícil, pues ambos son compactos, conexos por caminos, localmente conexos por caminos, no contráctiles, metrizable y de dimensión 2. Para el final de este trabajo, seremos capaces de calcular sus grupos de homología y de diferenciarlos.

El orden que vamos a seguir será el siguiente. En el primer capítulo empezaremos construyendo los grupos de homología singular y probaremos varias propiedades básicas de estos mismos. En segundo lugar, veremos que  $H_n$  define un functor de la categoría de espacios topológicos en la de grupos abelianos y como consecuencia, probaremos que los grupos de homología singular son invariantes topológicos. En tercer lugar, definiremos un operador y lo usaremos para probar la invarianza por homotopía de los grupos de homología. Como resultado, probaremos que la homología no es un invariante completo. Por último, veremos la relación entre el primer grupo de homología y el grupo fundamental mediante el *Teorema de Hurewicz*.

En el segundo capítulo nos centraremos más en dar herramientas para calcular grupos de homología. En primer lugar, construiremos los grupos de homología relativa, que son una extensión de los grupos de homología singular y probaremos unos resultados análogos a los vistos con la homología singular. En segundo lugar, veremos que  $H_n$  también es un functor a pares. En tercer lugar, definiremos la sucesión larga de homología y veremos su exactitud. Usaremos esta sucesión para calcular el primer grupo de homología relativa del par  $(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ . En cuarto lugar, veremos unos operadores y los usaremos para probar el *teorema de excisión*. Con este teorema junto con el primer grupo de homología relativa del par  $(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$  podremos calcular los grupos de homología singular de  $\mathbb{S}^n$ . Por último, veremos la *sucesión de Mayer-Vietoris* y probaremos su exactitud. Usaremos esta sucesión para calcular varios grupos homología y finalmente dar un ejemplo de dos espacios con grupos de homología singular isomorfos, pero con distinto tipo de homotopía. Esto nos probará que la homología, desgraciadamente, no nos

permite saber cuando dos espacios son homeomorfos o tienen el mismo tipo de homotopía, solo nos permite saber cuando no lo son o tienen distinto tipo de homotopía.



# Capítulo 1

## Teoría Singular

### 1.1. Grupos de homología singular y propiedades básicas

Vamos a comenzar con la construcción de un nuevo invariante topológico. Para ello empezamos definiendo los conceptos sobre los que trabajaremos.

**Definición 1.1.1.** Denotamos por  $e_i \in \mathbb{R}^n$  con  $i \in \mathbb{N}$  a la  $n$ -tupla que tiene un 1 en la  $i$ -ésima componente y 0 en el resto. Denotamos por  $e_0$  a la  $n$ -tupla formada por todo 0. Dado  $n \in \mathbb{N}$ , llamamos  $n$ -símplice geométrico estándar a la envolvente convexa de  $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ . Se denota por  $\Delta_n$  y posee la topología inducida por la usual sobre  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 1.1.2.** Sea  $X$  un espacio topológico y  $n \in \mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Un  $n$ -símplice singular en  $X$  es una aplicación continua  $\sigma: \Delta_n \rightarrow X$ .

A partir de ahora, si no hay lugar a confusión, usaremos las palabras  $n$ -símplice y  $n$ -símplice singular de manera indistinta. La letra  $X$  la usaremos para denotar espacios topológicos genéricos y la letra  $\sigma$ , queda reservada para denotar  $n$ -símplices en  $X$ . También usaremos la notación  $pct x \in X$  para hacer referencia a todo elemento de  $X$  salvo una cantidad finita de elementos de  $X$ .

Procedamos a definir una suma de manera puramente formal entre  $n$ -símplices singulares en  $X$  y así crear un grupo con el que trabajar.

**Definición 1.1.3.** Sea  $X$  un espacio topológico y  $n \in \mathbb{Z}^+$ . Sea  $S_n(X) = \{\sum_{\sigma} n_{\sigma} \cdot \sigma \mid \sigma \text{ es } n\text{-símplice singular en } X, n_{\sigma} \in \mathbb{Z}, n_{\sigma} = 0 \text{ } pct \sigma\}$  el conjunto de las  $n$ -cadenas singulares. Se define la operación suma sobre  $S_n(X)$  de la siguiente manera:

$$\sum_{\sigma} n_{\sigma} \cdot \sigma + \sum_{\sigma} m_{\sigma} \cdot \sigma = \sum_{\sigma} (n_{\sigma} + m_{\sigma}) \cdot \sigma$$

Por construcción,  $(S_n(X), +)$  es un grupo abeliano, en concreto, es el grupo abeliano libre generado por los  $n$ -símplices singulares en  $X$ .

El elemento neutro de  $(S_n(X), +)$  es el cero o suma nula, y una  $n$ -cadena singular es cero si y solo si todos sus coeficientes son cero.

Procedamos a ver varias definiciones que nos permitirán construir un homomorfismo de  $S_n(X)$  en  $S_{n-1}(X)$ , el homomorfismo frontera o borde. Este homomorfismo será fundamental en la construcción de nuestro invariante topológico.

**Definición 1.1.4.** Sea  $n \in \mathbb{N}$  y  $0 \leq i \leq n$ . Llamamos  $i$ -ésima cara geométrica de  $\Delta_n$  a la única aplicación afín  $\epsilon_n^i: \Delta_{n-1} \rightarrow \Delta_n$  que verifica:

$$\epsilon_n^i(e_j) = \begin{cases} e_j & \text{si } j < i \\ e_{j+1} & \text{si } j \geq i \end{cases}$$

Esta aplicación lleva de manera homeomorfa y afín  $\Delta_{n-1}$  sobre la cara opuesta al vértice  $e_i$  en  $\Delta_n$  y nos permite definir la  $i$ -ésima cara de un  $n$ -símplice singular.

**Definición 1.1.5.** Sea  $X$  un espacio topológico,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq i \leq n$  y  $\sigma$  un  $n$ -símplice singular sobre  $X$ . Llamamos  $i$ -ésima cara de  $\sigma$  a el  $(n-1)$ -símplice singular definido por  $\sigma \circ \epsilon_n^i$ . Lo denotaremos por  $\sigma^{(i)}$ .

Estamos en situación de definir la frontera de un  $n$ -símplice singular.

**Definición 1.1.6.** Dado  $\sigma$  un  $n$ -símplice singular sobre  $X$ , la frontera o borde de  $\sigma$  es la  $(n-1)$ -cadena singular  $\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot \sigma^{(i)} \in S_{n-1}(X)$ . Es la suma formal de las caras de  $\sigma$  dotadas de signo.

Esta aplicación se puede extender de forma lineal a un homomorfismo de grupos abelianos, el homomorfismo frontera, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \partial_n: S_n(X) &\longrightarrow S_{n-1}(X) \\ \sum_{\sigma} n_{\sigma} \cdot \sigma &\longmapsto \partial_n(\sum_{\sigma} n_{\sigma} \cdot \sigma) = \sum_{\sigma} n_{\sigma} \cdot \partial_n(\sigma) \end{aligned}$$

**Observación 1.1.1.** En el caso de  $n = 0$ , no está definido qué es  $\partial_0$ . Definimos por tanto, la frontera de una 0-cadena singular como 0.

Obtenemos así el complejo de cadenas singulares  $\{S_n(X), \partial_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ :

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} S_n(X) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} S_{n-2}(X) \cdots \xrightarrow{\partial_2} S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\partial_0} \{0\}$$

Más adelante veremos que en efecto  $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ . Estos homomorfismos nos permiten construir dos subgrupos de  $S_n(X)$ : el  $Ker(\partial_n)$  y la  $Im(\partial_{n+1})$ . A partir de ahora, vamos a denotar por  $Z_n(X)$  a  $Ker(\partial_n)$  y por  $B_n(X)$  a  $Im(\partial_{n+1})$ .

**Definición 1.1.7.** Un  $n$ -ciclo es una  $n$ -cadena singular  $c$ , tal que  $\partial_n(c) = 0$ . Por tanto,  $Z_n(X)$  es el conjunto de  $n$ -ciclos.

**Definición 1.1.8.** Un  $n$ -borde es una  $n$ -cadena singular  $c$ , tal que existe  $c' \in S_{n+1}(X)$  tal que  $\partial_{n+1}(c') = c$ . Por tanto,  $B_n(X)$  es el conjunto de  $n$ -bordes.

Nuestro objetivo ahora es probar que  $B_n(X)$  está contenido en  $Z_n(X)$ . Para ello nos vamos a ayudar de un lema.

**Lema 1.1.1.** Si  $j < i$ , se verifica  $\epsilon_{n+1}^i \circ \epsilon_n^j = \epsilon_{n+1}^j \circ \epsilon_n^{i-1}$ .

Este lema se prueba con solo desarrollar ambas composiciones y ver que en efecto, son la misma aplicación. Este lema da lugar a la siguiente proposición.

**Proposición 1.1.2.** Para todo  $n \geq 0$  se tiene que  $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$  y por tanto,  $B_n(X) \subseteq Z_n(X)$ .

*Demostración.* Basta con probar que  $\partial_n(\partial_{n+1}(\sigma)) = 0$  para  $\sigma$ , un  $(n+1)$ -símplice singular en  $X$ , ya que por la linealidad de la aplicación frontera, esta propiedad pasa a cadenas.

$$\begin{aligned} \partial_n(\partial_{n+1}(\sigma)) &= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \cdot \partial_n(\sigma \circ \epsilon_{n+1}^i) = \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^n (-1)^{i+j} \cdot \sigma \circ \epsilon_{n+1}^i \circ \epsilon_n^j = \\ &= \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, n+1\} \\ j \in \{0, \dots, n\} \\ j < i}} (-1)^{i+j} \cdot \sigma \circ \epsilon_{n+1}^i \circ \epsilon_n^j + \sum_{\substack{i \in \{0, \dots, n\} \\ j \in \{0, \dots, n\} \\ i \leq j}} (-1)^{i+j} \cdot \sigma \circ \epsilon_{n+1}^i \circ \epsilon_n^j = \\ &= \sum_{\substack{r \in \{0, \dots, n\} \\ j \in \{0, \dots, n\} \\ j < r+1}} (-1)^{r+j+1} \cdot \sigma \circ \epsilon_{n+1}^{r+1} \circ \epsilon_n^j + \sum_{\substack{i \in \{0, \dots, n\} \\ j \in \{0, \dots, n\} \\ i \leq j}} (-1)^{i+j} \cdot \sigma \circ \epsilon_{n+1}^i \circ \epsilon_n^j = \\ &= \sum_{\substack{r \in \{0, \dots, n\} \\ j \in \{0, \dots, n\} \\ j \leq r}} (-1)^{r+j+1} \cdot \sigma \circ \epsilon_{n+1}^j \circ \epsilon_n^r + \sum_{\substack{i \in \{0, \dots, n\} \\ j \in \{0, \dots, n\} \\ i \leq j}} (-1)^{i+j} \cdot \sigma \circ \epsilon_{n+1}^i \circ \epsilon_n^j = 0 \end{aligned}$$

□

Podemos por tanto considerar el cociente de estos dos subgrupos de  $S_n(X)$ , ya que son abelianos y uno está contenido en el otro. Esto nos lleva a la siguiente definición:

**Definición 1.1.9.** Dado  $n \in \mathbb{Z}^+$  y  $X$  un espacio topológico. Llamamos  $n$ -ésimo grupo de homología singular de  $X$  al cociente  $Z_n(X)/B_n(X)$  y se denota por  $H_n(X)$ . Además, si  $c_1, c_2 \in Z_n(X)$  son dos cadenas tales que  $c_1 + B_n(X) = c_2 + B_n(X) \in H_n(X)$ , diremos que son  $n$ -cadenas homólogas.

Se tiene entonces que dos cadenas  $c_1, c_2 \in Z_n(X)$  son homólogas si y solo si existe  $c' \in S_{n+1}(X)$  tal que  $\partial_{n+1}(c') = c_1 - c_2$ .

A partir de ahora, cuando no haya lugar a confusión, usaremos la notación  $\bar{c}$ , para hacer referencia a la clase de equivalencia de la  $n$ -cadena  $c$  en  $H_n(X)$ . Sin embargo, cuando trabajemos con varios grupos cociente emplearemos la notación  $c + B_n(X)$  para dejar claro en que grupo estamos considerando la coclase. También usaremos la notación  $\cong$  para denotar isomorfismos de grupos cuando hablemos de grupos y homeomorfismos cuando hablemos de espacios topológicos.

Veamos varias propiedades de los grupos de homología, que más adelante nos serán de utilidad:

**Proposición 1.1.3.** *Sea  $X$  un espacio topológico. Si  $X = \{x_0\}$ , entonces:*

$$H_n(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

*Demostración.* Sea  $\sigma : \Delta_n \rightarrow \{x_0\}$  un  $n$ -símplice singular en  $X$ . La única aplicación posible es la aplicación constante,  $\sigma(p) = x_0$  para todo  $p \in \Delta_n$ . Denotamos por  $\sigma_n$  al único  $n$ -símplice en  $X$ .

Por consiguiente, se tiene que  $\sigma_n^{(i)} = \sigma_n \circ \epsilon_n^i = \sigma_{n-1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y en consecuencia:

$$\partial_n(\sigma_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot \sigma_{n-1} = \sigma_{n-1} \cdot \sum_{i=0}^n (-1)^i = \begin{cases} \sigma_{n-1} & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y  $\partial_0(\sigma_0) = 0$  por definición de  $\partial_0$ . De aquí se concluye que:

$$\begin{aligned} Z_n(X) &= \{m \cdot \sigma_n \in S_n(X), m \in \mathbb{Z} \mid \partial_n(m \cdot \sigma_n) = m \cdot \partial_n(\sigma_n) = 0\} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ S_n(X) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ Z_0(X) &= \{m \cdot \sigma_0 \in S_0(X), m \in \mathbb{Z} \mid \partial_0(m \cdot \sigma_0) = m \cdot \partial_0(\sigma_0) = 0\} \\ &= S_0(X) \end{aligned}$$

De igual manera, también se razona que:

$$\begin{aligned} B_0(X) &= \{c \in S_0(X) \mid \exists c' \in S_1(X) \text{ tal que } \partial_1(c') = c\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Porque  $\partial_1(c) = 0$  para todo  $c \in S_1(X)$ . Por último:

$$\begin{aligned} B_n(X) &= \{c \in S_n(X) \mid \exists c' \in S_{n+1}(X) \text{ tal que } \partial_{n+1}(c') = c\} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ S_n(X) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Ya que si  $n$  es par,  $\partial_{n+1}(c) = 0$  para todo  $c \in S_{n+1}(X)$  y si  $n$  es impar,  $n+1$  es par y por tanto, dado  $m \cdot \sigma_n \in S_n(X)$ , existe  $m \cdot \sigma_{n+1} \in S_{n+1}(X)$  tal que  $\partial_{n+1}(m \cdot \sigma_{n+1}) = m \cdot \sigma_n$ .

Así concluimos que:

- i)  $H_0(X) = Z_0(X)/B_0(X) = S_0(X)/0 \cong S_0(X)$
- ii) Si  $n > 0$  es par,  $H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X) = 0/0 \cong 0$
- iii) Si  $n$  es impar,  $H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X) = S_n(X)/S_n(X) \cong 0$

Finalmente, se comprueba que  $S_0(X) \cong \mathbb{Z}$  viendo que la siguiente aplicación es un isomorfismo:

$$\begin{aligned} \Phi: S_0(X) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ m \cdot \sigma_0 &\longmapsto m \end{aligned}$$

□

Veamos ahora que relación existe entre los grupos de homología de un espacio topológico y los de sus componentes conexas por caminos.

**Proposición 1.1.4.** *Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $\{X_i \subseteq X \mid i \in I\}$  el conjunto de las componentes conexas por caminos de  $X$ . Entonces:*

$$H_n(X) \cong \bigoplus_{i \in I} H_n(X_i) \quad \forall n \geq 0 \tag{1.1}$$

**Observación 1.1.2.** Si  $\{G_i \mid i \in I\}$  es una familia de grupos,  $\bigoplus_{i \in I} G_i$  es el subgrupo de  $\prod_{i \in I} G_i$  formado por aquellos elementos  $(g_i)_{i \in I}$  tales que solo una familia finita de sus términos es no nula.

*Demostración.* Dado  $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$  un  $n$ -símplice singular sobre  $X$ , como  $\Delta_n$  es convexo, es conexo por caminos, y como  $\sigma$  es una función continua,  $\sigma(\Delta_n)$  es conexo por caminos. Por tanto, existe un único  $i_0 \in I$  tal que  $\sigma(\Delta_n) \subseteq X_{i_0}$ . Así pues, si  $c = \sum_{\sigma} m_{\sigma} \cdot \sigma \in S_n(X)$  es una  $n$ -cadena, podemos escribir  $c = \sum_{i \in I} c_i$ , donde  $c_i \in S_n(X_i)$  es la suma de los  $n$ -símplices que componen  $c$  tales que su imagen está contenida en  $X_i$ , es decir,  $c_i = \sum_{\text{Im}(\sigma) \subseteq X_i} m_{\sigma} \cdot \sigma$ .

Entonces podemos definir la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \varphi_n: S_n(X) &\longrightarrow \bigoplus_{i \in I} S_n(X_i) \\ c &\longmapsto (c_i)_{i \in I} \end{aligned}$$

Esta aplicación es un isomorfismo. Para ver que este isomorfismo se puede restringir a un isomorfismo entre  $Z_n(X)$  y  $\bigoplus_{i \in I} Z_n(X_i)$ , vamos a ver que dado  $c \in S_n(X)$ ,  $c$  es un  $n$ -ciclo si y solo si  $c_i \in S_n(X_i)$  es un  $n$ -ciclo para todo  $i \in I$ .

- (i) Si para todo  $i \in I$ ,  $c_i$  es un  $n$ -ciclo, tenemos que  $\partial_n(c_i) = 0$ . Luego  $0 = \sum_{i \in I} \partial_n(c_i) = \partial_n(\sum_{i \in I} c_i) = \partial_n(c)$  y  $c$  es un  $n$ -ciclo.

- (ii) Partimos de que  $c$  es un  $n$ -ciclo. Si  $c_i \in S_n(X_i)$ , se tiene que  $\partial_n(c_i) \in S_{n-1}(X_i)$ , pues  $Im(\sigma^{(i)}) = Im(\sigma \circ \epsilon_n^i) \subseteq Im(\sigma) \subseteq X_i$  para todo  $\sigma \in S_n(X_i)$ . Luego  $0 = \partial_n(c) = \sum_{i \in I} \partial_n(c_i)$  y como  $\varphi_{n-1}$  es un isomorfismo,  $(0)_{i \in I} = \varphi_{n-1}(0) = \varphi_{n-1}(\sum_{i \in I} \partial_n(c_i)) = (\partial_n(c_i))_{i \in I}$ . Se concluye que  $\partial_n(c_i) = 0$  para todo  $i \in I$  y  $c_i$  es un  $n$ -ciclo para todo  $i \in I$ .

Podemos por tanto restringir  $\varphi_n$  a un isomorfismo de  $Z_n(X)$  en  $\bigoplus_{i \in I} Z_n(X_i)$  y eso nos permite definir el siguiente homomorfismo:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_n: H_n(X) &\longrightarrow \bigoplus_{i \in I} H_n(X_i) \\ \bar{c} &\longmapsto (\bar{c}_i)_{i \in I} \end{aligned}$$

Veamos que está bien definido. Sean  $c_1 = \sum_{i \in I} c_{1i}$ ,  $c_2 = \sum_{i \in I} c_{2i} \in Z_n(X)$  dos  $n$ -cadenas homólogas en  $X$ . Entonces existe  $c = \sum_{i \in I} c_i \in S_{n+1}(X)$  tal que  $\partial_{n+1}(c) = c_1 - c_2$ . Luego  $\sum_{i \in I} (c_{1i} - c_{2i}) = \partial_{n+1}(c) = \sum_{i \in I} \partial_{n+1}(c_i)$  y como  $\varphi_n$  es isomorfismo,  $(c_{1i} - c_{2i})_{i \in I} = \varphi_n(\sum_{i \in I} (c_{1i} - c_{2i})) = \varphi_n(\sum_{i \in I} \partial_{n+1}(c_i)) = (\partial_{n+1}(c_i))_{i \in I}$ , es decir,  $c_{1i} - c_{2i} = \partial_{n+1}(c_i)$  para todo  $i \in I$ . De esto se concluye que  $(\bar{c}_{1i})_{i \in I} = (\bar{c}_{2i})_{i \in I}$  y  $\bar{\varphi}_n$  está bien definido.

Finalmente, para ver que  $\bar{\varphi}_n$  es un isomorfismo, basta con dar su inversa. Definimos para ello:

$$\begin{aligned} \phi_n: \bigoplus_{i \in I} H_n(X_i) &\longrightarrow H_n(X) \\ (\bar{c}_i)_{i \in I} &\longmapsto \bar{c} = \sum_{i \in I} \bar{c}_i \end{aligned}$$

Se comprueba de manera similar a  $\bar{\varphi}_n$  que  $\phi_n$  está bien definida y es un homomorfismo. Además queda claro que  $\phi_n \circ \bar{\varphi}_n = 1_{H_n(X)}$  y  $\bar{\varphi}_n \circ \phi_n = 1_{\bigoplus_{i \in I} H_n(X_i)}$ .  $\square$

**Lema 1.1.5.** *Sea  $\eta: \Delta_1 \longrightarrow [0, 1]$  el homeomorfismo  $(1-t)e_0 + te_1 \longmapsto t$ . Entonces existe una biyección entre los caminos sobre  $X$  y los 1-símplices singulares sobre  $X$ .*

*Demostración.* Sea  $\sigma$  un camino sobre  $X$ , entonces  $\sigma \circ \eta$  es un 1-símplice singular sobre  $X$ . Igualmente, si  $\sigma$  es 1-símplice singular sobre  $X$ , entonces  $\sigma \circ \eta^{-1}$  es un camino sobre  $X$ . Además, como  $\eta$  es un homeomorfismo, esta correspondencia es uno a uno.  $\square$

Gracias a este lema, de ahora en adelante, trataremos los caminos sobre  $X$  y los 1-símplices en  $X$  indistintamente para aligerar notación.

**Lema 1.1.6.** *Si  $X$  es un espacio topológico conexo por caminos, entonces  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ .*

*Demostración.* Recordemos que por definición,  $\partial_0$  es la aplicación que envía toda 0-cadena al 0, luego  $Z_0(X) = Ker(\partial_0) = S_0(X)$ , es decir, toda 0-cadena

es un 0-ciclo. Una 0-cadena genérica se escribe de la forma  $\sum_{x \in X} m_x \cdot x$ , donde  $m_x = 0$  pct  $x$  y  $x$ , no solo es un punto de  $X$ , sino que denota el 0-símplice:

$$\begin{aligned} x: \quad \Delta_0 &\longrightarrow X \\ e_0 &\longmapsto x \end{aligned}$$

Podemos definir ahora la siguiente aplicación:

$$\varphi: \quad \begin{aligned} Z_0(X) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \sum_{x \in X} m_x \cdot x &\longmapsto \sum_{x \in X} m_x \end{aligned}$$

Es un homomorfismo de grupos sobreyectivo. Si probamos que  $\text{Ker}(\varphi) = B_0(X)$ , aplicando el primer teorema de isomorfía tendríamos que  $H_0(X) = Z_0(X)/B_0(X) = Z_0(X)/\text{Ker}(\varphi) \cong \text{Im}(\varphi) = \mathbb{Z}$  y habríamos acabado. Veamos entonces que  $\text{Ker}(\varphi) = \{\sum_{x \in X} m_x \cdot x \in Z_0(X) \mid \sum_{x \in X} m_x = 0\} = B_0(X)$  probando el doble contenido.

- (i) Sea  $c = \sum_{i=0}^m m_i \cdot x_i \in \text{Ker}(\varphi)$  un 0-ciclo, es decir,  $\sum_{i=0}^m m_i = 0$ . Sea  $x \in X$  un punto fijo. Como  $X$  es conexo por caminos, existe  $\sigma_i$ , un camino que une  $x$  con  $x_i$  para todo  $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ . Por el lema anterior, podemos entender estos caminos sobre  $X$  como 1-símplices singulares sobre  $X$ , luego  $\sum_{i=0}^m m_i \cdot \sigma_i$  es una cadena de  $S_1(X)$ . Además, como  $\partial_1(\sigma_i) = \sigma_i \circ \epsilon_1^0 - \sigma_i \circ \epsilon_1^1 = \sigma_i(1) - \sigma_i(0) = x_i - x$ , tenemos que  $\partial_1(\sum_{i=0}^m m_i \cdot \sigma_i) = \sum_{i=0}^m m_i \cdot \partial_1(\sigma_i) = \sum_{i=0}^m m_i \cdot (x_i - x) = \sum_{i=0}^m m_i \cdot x_i - x \cdot \sum_{i=0}^m m_i = \sum_{i=0}^m m_i \cdot x_i - 0 = c$ , es decir,  $c \in B_0(X)$ .
- (ii) Sea  $c \in B_0(X)$ . Entonces existe  $\sum_{i=0}^m m_i \cdot \sigma_i \in S_1(X)$  tal que  $c = \partial_1(\sum_{i=0}^m m_i \cdot \sigma_i) = \sum_{i=0}^m m_i \cdot \partial_1(\sigma_i) = \sum_{i=0}^m m_i \cdot (\sigma_i(1) - \sigma_i(0)) = \sum_{i=0}^m m_i \cdot \sigma_i(1) + \sum_{i=0}^m (-m_i) \cdot \sigma_i(0)$ . Luego la suma de los coeficientes del 0-borde  $c$  es  $\sum_{i=0}^m m_i + \sum_{i=0}^m (-m_i) = 0$  y se concluye que  $c \in \text{Ker}(\varphi)$ .

□

**Corolario 1.1.7.** *Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $\{X_i \subseteq X \mid i \in I\}$  el conjunto de las componentes conexas por caminos de  $X$ , entonces:*

$$H_0(X) \cong \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z} \tag{1.2}$$

Ya conocemos por tanto, el 0-ésimo grupo de homología de cualquier espacio topológico.

## 1.2. El functor $H_n$

A continuación vamos a ver que  $H_n$  define un functor covariante de Top, la categoría de espacios topológicos, en Ab, la categoría de grupos abelianos. Esto tendrá como consecuencia que los grupos de homología son invariantes

topológicos.

Para ver que  $H_n$  es un functor, hay que definir primero como actúa sobre funciones continuas.

**Definición 1.2.1.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua y  $\sigma: \Delta_n \rightarrow X$  con  $n \in \mathbb{Z}^+$ , un  $n$ -símplice singular sobre  $X$ . Entonces  $(f \circ \sigma): \Delta_n \rightarrow Y$  es un  $n$ -símplice singular sobre  $Y$ . Extendiendo por linealidad se obtiene el homomorfismo de grupos:

$$S_n(f): \begin{array}{ccc} S_n(X) & \longrightarrow & S_n(Y) \\ \sum_{\sigma} m_{\sigma} \cdot \sigma & \longmapsto & \sum_{\sigma} m_{\sigma} \cdot (f \circ \sigma) \end{array}$$

Con esta definición se puede intuir como definiremos  $H_n(f)$ . Pero para ver que es correcta, vamos a requerir de varios lemas previos:

**Lema 1.2.1.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua, entonces para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$ , se tiene que  $S_{n-1}(f) \circ \partial_n^X = \partial_n^Y \circ S_n(f)$ , donde  $\partial_n^Z$  denota la aplicación frontera de  $S_n(Z)$  en  $S_{n-1}(Z)$ . Es decir, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} S_n(X) & \xrightarrow{\partial_n^X} & S_{n-1}(X) \\ \downarrow S_n(f) & & \downarrow S_{n-1}(f) \\ S_n(Y) & \xrightarrow{\partial_n^Y} & S_{n-1}(Y) \end{array}$$

A un homomorfismo que conmuta con el operador frontera se le llama homomorfismo en cadenas.

*Demostración.* Es suficiente probar que  $S_{n-1}(f) \circ \partial_n^X(\sigma) = \partial_n^Y \circ S_n(f)(\sigma)$ , para  $\sigma \in S_n(X)$ , un  $n$ -símplice singular sobre  $X$  cualquiera. Sea  $\sigma$  un  $n$ -símplice:

$$\begin{aligned} S_{n-1}(f)(\partial_n^X(\sigma)) &= S_{n-1}(f) \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i (\sigma \circ \epsilon_n^i) \right) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (f \circ (\sigma \circ \epsilon_n^i)) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i ((f \circ \sigma) \circ \epsilon_n^i) = \partial_n^Y(f \circ \sigma) = \partial_n^Y(S_n(f)(\sigma)). \end{aligned}$$

□

**Lema 1.2.2.** Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios topológicos y sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua, entonces para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$  se tiene:

$$S_n(f)(Z_n(X)) \subseteq Z_n(Y) \quad \text{y} \quad S_n(f)(B_n(X)) \subseteq B_n(Y).$$

*Demostración.* Sea  $S_n(f)(c) \in S_n(f)(Z_n(X))$ . Por tanto  $\partial_n^X(c) = 0$ . Por el lema anterior,  $\partial_n^Y(S_n(f)(c)) = S_{n-1}(f)(\partial_n^X(c)) = S_{n-1}(f)(0) = 0$ , es decir,  $S_n(f)(c) \in Z_n(Y)$ , lo que nos da el primer contenido.

Sea  $S_n(f)(c) \in S_n(f)(B_n(X))$ . Por tanto existe  $c' \in S_{n+1}(X)$  tal que  $\partial_{n+1}^X(c') = c$ . Por el lema anterior, tenemos  $S_n(f)(c) = S_n(f)(\partial_{n+1}^X(c')) = \partial_{n+1}^Y(S_{n+1}(f)(c'))$ , es decir,  $S_n(f)(c) \in B_n(Y)$  y hemos acabado.  $\square$

Ya estamos en situación de definir  $H_n(f)$ , probar que está bien definido y de demostrar que  $H_n$  es un functor covariante.

**Teorema 1.2.3.** *Para todo  $n \geq 0$ ,  $H_n: \text{Top} \rightarrow \text{Ab}$  es un functor covariante.*

*Demostración.* Ya hemos definido como actúa  $H_n$  sobre objetos de  $\text{Top}$ , a cada espacio topológico  $X$  le asocia el grupo abeliano  $H_n(X)$ . Definamos como actúa sobre funciones continuas entre espacios topológicos.

Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua. Definimos:

$$H_n(f): \begin{array}{ccc} H_n(X) & \longrightarrow & H_n(Y) \\ \bar{c} & \longmapsto & \overline{S_n(f)(c)} \end{array}$$

donde  $c \in Z_n(X)$ .

- (i) Si  $c \in Z_n(X)$ , por el lema anterior,  $S_n(f)(c) \in Z_n(Y)$ . Luego si  $\bar{c} \in H_n(X)$ , entonces  $\overline{S_n(f)(c)} \in H_n(Y)$ , y la aplicación envía elementos del grupo  $H_n(X)$  en elementos del grupo  $H_n(Y)$ .
- (ii)  $H_n(f)$  está bien definida. Si tomamos  $c_1, c_2 \in Z_n(X)$  dos  $n$ -cadenas homólogas, entonces  $c_1 - c_2 \in B_n(X)$ . Por el lema anterior,  $S_n(f)(B_n(X)) \subseteq B_n(Y)$  y por tanto  $\overline{S_n(f)(c_1) - S_n(f)(c_2)} = \overline{S_n(f)(c_1 - c_2)} \in B_n(Y)$ . Luego  $\overline{S_n(f)(c_1)} = \overline{S_n(f)(c_2)}$ , es decir,  $H_n(f)(\bar{c}_1) = H_n(f)(\bar{c}_2)$ .

Además, como  $S_n(X)$  es un homomorfismo de grupos,  $H_n(X)$  también lo es. También se verifica que  $H_n(1_X) = 1_{H_n(X)}$ , pues dado  $c = \sum_{i=0}^m m_i \cdot \sigma_i \in Z_n(X)$ ,  $H_n(1_X)(\bar{c}) = \overline{S_n(1_X)(c)} = \overline{\sum_{i=0}^m m_i \cdot (1_X \circ \sigma_i)} = \overline{\sum_{i=0}^m m_i \cdot \sigma_i} = \bar{c} = 1_{H_n(X)}(\bar{c})$ .

Y por último,  $H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f)$ . Sea  $c = \sum_{i=0}^m m_i \cdot \sigma_i \in Z_n(X)$ ,  $H_n(g)(H_n(f)(\bar{c})) = H_n(g)(\overline{\sum_{i=0}^m m_i \cdot (f \circ \sigma_i)}) = \overline{\sum_{i=0}^m m_i \cdot (g \circ f \circ \sigma_i)} = H_n(f \circ g)(\bar{c})$ . En definitiva,  $H_n$  es un functor covariante de  $\text{Top}$  en  $\text{Ab}$ .  $\square$

La principal consecuencia de esto, es que  $H_n$  es un invariante topológico.

**Corolario 1.2.4.** *Si  $X$  e  $Y$  son dos espacios topológicos homeomorfos, entonces  $H_n(X) \cong H_n(Y)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$ .*

*Demostración.* Sea  $f: X \rightarrow Y$  el homeomorfismo de  $X$  en  $Y$ . Como  $H_n$  es un functor,  $1_{H_n(Y)} = H_n(1_Y) = H_n(f \circ f^{-1}) = H_n(f) \circ H_n(f^{-1})$  y

$H_n(f)$  es sobreyectivo. Por otro lado,  $1_{H_n(X)} = H_n(1_X) = H_n(f^{-1} \circ f) = H_n(f^{-1}) \circ H_n(f)$  y  $H_n(f)$  es inyectivo. Luego  $H_n(f): H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$  es un homomorfismo biyectivo, es decir, un isomorfismo, con inversa  $H_n(f^{-1})$ . Por tanto  $H_n(X) \cong H_n(Y)$ .  $\square$

El recíproco, desgraciadamente, no es cierto, dos espacios con grupos de homología isomorfos pueden no ser homeomorfos. Esto lo veremos más adelante cuando probemos nuestro siguiente objetivo, la invarianza por homotopía. La homología no es por tanto, un invariante completo.

### 1.3. El operador prisma

Nuestro objetivo en esta sección es construir un operador llamado prisma y probar una propiedad que este verifica. Más adelante, esta propiedad nos será útil para probar la invarianza por homotopías de los grupos de homología. Para ello vamos a necesitar introducir la siguiente notación.

Sean  $p_0, \dots, p_n$  puntos de  $V$ , un espacio afín y sea  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow V$  la única aplicación afín que lleva  $e_i$  en  $p_i$  para  $i \in \{0, \dots, n\}$ . A partir de ahora, vamos a denotar por  $(p_0 \cdots p_n)$  a  $f|_{\Delta_n}$ . En particular, vamos a denotar por  $\delta_n$  a  $(e_0 \cdots e_n) = 1_{\Delta_n}$ , es decir, a la identidad en  $\Delta_n$ . Por otro lado, vamos a denotar por  $(a_0 \cdots \hat{a}_i \cdots a_n)$  a la aplicación  $(a_0 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_n)$  y por tanto, a partir de ahora,  $\delta_n^{(i)} = (e_0 \cdots \hat{e}_i \cdots e_n)$  para  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

**Definición 1.3.1.** Dado  $n \in \mathbb{Z}^+$ , denotamos para  $i \in \{0, \dots, n\}$  los puntos  $a_i = (e_i, 0)$  y  $b_i = (e_i, 1) \in \Delta_n \times [0, 1]$ . Definimos entonces la  $n$ -cadena singular  $P_n^{\Delta_n}(\delta_n) \in S_{n+1}(\Delta_n \times [0, 1])$  mediante:

$$P_n^{\Delta_n}(\delta_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (a_0 \cdots a_i b_i \cdots b_n) \quad (1.3)$$

Así podemos definir el operador prisma, como el homomorfismo de grupos  $P_n^X: S_n(X) \rightarrow S_{n+1}(X \times [0, 1])$ , que verifica:

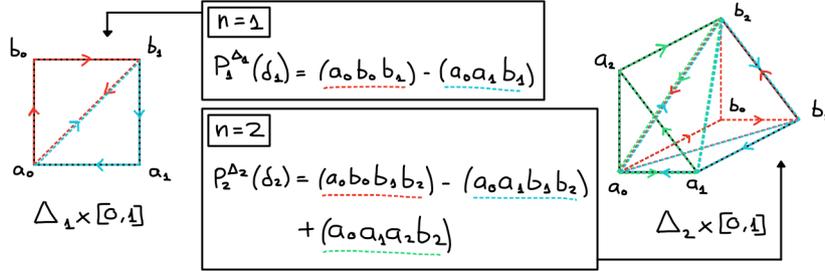
$$P_n^X(\sigma) = S_{n+1}(\sigma \times 1_{[0,1]}) \circ P_n^{\Delta_n}(\delta_n) \quad (1.4)$$

para todo  $\sigma$ ,  $n$ -símplice singular sobre  $X$ .

Cabe destacar que esta definición es congruente consigo misma, ya que la ecuación (1.4) no contradice (1.3), pues si tomamos  $X = \Delta_n$  y  $\sigma = \delta_n$ , se tiene que  $P_n^{\Delta_n}(\delta_n) = S_{n+1}(\delta_n \times 1_{[0,1]}) \circ P_n^{\Delta_n}(\delta_n)$ . Esto se comprueba de manera inmediata ya que:  $S_{n+1}(\delta_n \times 1_{[0,1]}) = S_{n+1}(1_{\Delta_n} \times 1_{[0,1]}) = S_{n+1}(1_{\Delta_n \times [0,1]}) = 1_{S_{n+1}(\Delta_n \times [0,1])}$ .

Intuitivamente, el operador prisma, tal y como es definido por la ecuación (1.4), lo que hace es particionar el prisma  $\Delta_n \times [0, 1]$  en  $n+1$   $(n+1)$ -símplices

singulares sobre  $\Delta_n \times [0, 1]$ . Si  $n = 1$ , lo que hace es separar el cuadrado  $\Delta_1 \times [0, 1]$  en dos triángulos. Si  $n = 2$ , separa el prisma de base triangular  $\Delta_2 \times [0, 1]$  en 3 tetraedros y así sucesivamente. Se aprecia bien en el dibujo.



Veamos a continuación dos propiedades importantes del operador prisma, una de las cuales usaremos luego para probar la invarianza por homotopía.

**Proposición 1.3.1.** *Dados  $X$  e  $Y$  dos espacios topológicos y  $f: X \rightarrow Y$  una función continua, para todo  $n \geq 0$ , el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc}
 S_n(X) & \xrightarrow{P_n^X} & S_{n+1}(X \times [0, 1]) \\
 \downarrow S_n(f) & & \downarrow S_{n+1}(f \times 1_{[0,1]}) \\
 S_n(Y) & \xrightarrow{P_n^Y} & S_{n+1}(Y \times [0, 1])
 \end{array}$$

Es decir,  $P_n^Y \circ S_n(f) = S_{n+1}(f \times 1_{[0,1]}) \circ P_n^X$ . A esta condición se la conoce como condición de naturalidad del operador prisma.

*Demostración.* Es suficiente con probarlo para un  $n$ -símplice  $\sigma \in S_n(X)$ . Operando obtenemos que:

$$\begin{aligned}
 P_n^Y \circ S_n(f)(\sigma) &= P_n^Y(f \circ \sigma) \stackrel{(1.4)}{=} S_{n+1}((f \circ \sigma) \times 1_{[0,1]}) \circ P_n^{\Delta_n}(\delta_n) = \\
 &S_{n+1}(f \times 1_{[0,1]}) \circ S_{n+1}(\sigma \times 1_{[0,1]}) \circ P_n^{\Delta_n}(\delta_n) \stackrel{(1.4)}{=} S_{n+1}(f \times 1_{[0,1]}) \circ P_n^X(\sigma)
 \end{aligned}$$

□

Para la segunda propiedad necesitamos definir una aplicación. Dado  $t \in [0, 1]$  definimos la aplicación continua  $\lambda_t^X: X \rightarrow X \times [0, 1]$  como  $\lambda_t^X(x) = (x, t)$ . Entonces,  $Id: X \times [0, 1] \rightarrow X \times [0, 1]$ , donde  $Id(x, t) = \lambda_t^X(x) = (x, t)$ , es una homotopía entre  $\lambda_0^X$  y  $\lambda_1^X$ .

**Proposición 1.3.2.** *Sea  $X$  un espacio topológico. El operador prisma verifica la siguiente relación:*

$$\partial_{n+1}^{X \times [0,1]} \circ P_n^X + P_{n-1}^X \circ \partial_n^X = S_n(\lambda_1^X) - S_n(\lambda_0^X) \quad \forall n \geq 0 \quad (1.5)$$

A esta relación se la conoce como relación prismática.

**Observación 1.3.1.** El operador prisma no está definido para  $n$  negativos, sin embargo, se hace el convenio, al igual que con el homomorfismo frontera, y se define  $P_{-1}^X = 0$ , la aplicación nula.

*Demostración.* Para probar la relación (1.5) vamos a demostrar primero la siguiente igualdad:

$$(\partial_{n+1}^{\Delta_n \times [0,1]} \circ P_n^{\Delta_n} + P_{n-1}^{\Delta_n} \circ \partial_n^{\Delta_n})(\delta_n) = (S_n(\lambda_1^{\Delta_n}) - S_n(\lambda_0^{\Delta_n}))(\delta_n) \quad \forall n \geq 0 \quad (1.6)$$

Tenemos que  $(S_n(\lambda_1^{\Delta_n}) - S_n(\lambda_0^{\Delta_n}))(\delta_n) = \lambda_1^{\Delta_n} \circ \delta_n - \lambda_0^{\Delta_n} \circ \delta_n$ . Como además  $\lambda_i^{\Delta_n} \circ \delta_n(e_j) = \lambda_i^{\Delta_n}(e_j) = (e_j, i)$  para todo  $j \in \{0, \dots, n\}$ ; se tiene que  $\lambda_0^{\Delta_n} \circ \delta_n(e_j) = a_j$  y  $\lambda_1^{\Delta_n} \circ \delta_n(e_j) = b_j$  y por tanto  $\lambda_1^{\Delta_n} \circ \delta_n - \lambda_0^{\Delta_n} \circ \delta_n = (b_0 \cdots b_n) - (a_0 \cdots a_n)$ . Así pues,  $(S_n(\lambda_1^{\Delta_n}) - S_n(\lambda_0^{\Delta_n}))(\delta_n) = (b_0 \cdots b_n) - (a_0 \cdots a_n)$  y hemos calculado el término de la derecha de la igualdad (1.6).

Por otro lado, calculemos  $(\partial_{n+1}^{\Delta_n \times [0,1]} \circ P_n^{\Delta_n} + P_{n-1}^{\Delta_n} \circ \partial_n^{\Delta_n})(\delta_n)$ . En primer lugar vamos a hacer el caso en el que  $n > 0$ .

$$\begin{aligned} P_{n-1}^{\Delta_n}(\partial_n^{\Delta_n}(\delta_n)) &= P_{n-1}^{\Delta_n} \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i \delta_n^{(i)} \right) = P_{n-1}^{\Delta_n} \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i (e_0 \cdots \hat{e}_i \cdots e_n) \right) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i P_{n-1}^{\Delta_n}(e_0 \cdots \hat{e}_i \cdots e_n) \stackrel{(1.4)}{=} \\ &\quad \sum_{i=0}^n (-1)^i S_n((e_0 \cdots \hat{e}_i \cdots e_n) \times 1_{[0,1]}) \circ P_{n-1}^{\Delta_{n-1}}(\delta_{n-1}) \stackrel{(1.3)}{=} \\ &\quad \sum_{i=0}^n (-1)^i S_n((e_0 \cdots \hat{e}_i \cdots e_n) \times 1_{[0,1]}) \left( \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j (a_0 \cdots a_j b_j \cdots b_{n-1}) \right) = \\ &\quad \sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j S_n((e_0 \cdots \hat{e}_i \cdots e_n) \times 1_{[0,1]})(a_0 \cdots a_j b_j \cdots b_{n-1}) = \\ &\quad \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{i+j} ((e_0 \cdots \hat{e}_i \cdots e_n) \times 1_{[0,1]}) \circ (a_0 \cdots a_j b_j \cdots b_{n-1}) \end{aligned}$$

Con algunos cálculos se verifica que:

$$((e_0 \cdots \hat{e}_i \cdots e_n) \times 1_{[0,1]}) \circ (a_0 \cdots a_j b_j \cdots b_{n-1}) = \begin{cases} (a_0 \cdots a_j b_j \cdots \hat{b}_i \cdots b_n) & \text{si } j < i \\ (a_0 \cdots \hat{a}_i \cdots a_{j+1} b_{j+1} \cdots b_n) & \text{si } j \geq i \end{cases}$$

Y por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 P_{n-1}^{\Delta_n}(\partial_n^{\Delta_n}(\delta_n)) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j<i} (-1)^{i+j} (a_0 \cdots a_j b_j \cdots \hat{b}_i \cdots b_n) \\
 &+ \sum_{i=0}^n \sum_{j \geq i} (-1)^{i+j} (a_0 \cdots \hat{a}_i \cdots a_{j+1} b_{j+1} \cdots b_n) \\
 &\stackrel{j=k-1}{=} \sum_{i=0}^n \sum_{j<i} (-1)^{i+j} (a_0 \cdots a_j b_j \cdots \hat{b}_i \cdots b_n) \\
 &+ \sum_{i=0}^n \sum_{k>i} (-1)^{i+k-1} (a_0 \cdots \hat{a}_i \cdots a_k b_k \cdots b_n)
 \end{aligned}$$

Calculando el otro sumando, tenemos a su vez que:

$$\begin{aligned}
 \partial_{n+1}^{\Delta_n \times [0,1]} \circ P_n^{\Delta_n}(\delta_n) &= \partial_{n+1}^{\Delta_n \times [0,1]} \left( \sum_{j=0}^n (-1)^j (a_0 \cdots a_j b_j \cdots b_n) \right) \\
 &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \partial_{n+1}^{\Delta_n \times [0,1]} (a_0 \cdots a_j b_j \cdots b_n) \\
 &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i (a_0 \cdots a_j b_j \cdots b_n)^{(i)}
 \end{aligned}$$

Se calcula  $(a_0 \cdots a_j b_j \cdots b_n)^{(i)}$ :

$$(a_0 \cdots a_j b_j \cdots b_n)^{(i)} = \begin{cases} (a_0 \cdots a_j b_j \cdots \hat{b}_{i-1} \cdots b_n) & \text{si } j < i \\ (a_0 \cdots \hat{a}_i \cdots a_j b_j \cdots b_n) & \text{si } j \geq i \end{cases}$$

Y se concluye que:

$$\begin{aligned}
 \partial_{n+1}^{\Delta_n \times [0,1]} \circ P_n^{\Delta_n}(\delta_n) &= \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j<i} (-1)^{j+i} (a_0 \cdots a_j b_j \cdots \hat{b}_{i-1} \cdots b_n) \\
 &+ \sum_{i=0}^n \sum_{j \geq i} (-1)^{j+i} (a_0 \cdots \hat{a}_i \cdots a_j b_j \cdots b_n) \\
 &\stackrel{i=k+1}{=} \sum_{k=0}^n \sum_{j \leq k} (-1)^{j+k+1} (a_0 \cdots a_j b_j \cdots \hat{b}_k \cdots b_n) \\
 &+ \sum_{i=0}^n \sum_{j \geq i} (-1)^{j+i} (a_0 \cdots \hat{a}_i \cdots a_j b_j \cdots b_n)
 \end{aligned}$$

Si calculamos los sumandos en los que  $j = k$  y  $j = i$  obtenemos:

$$\sum_{j=0}^n (-1)^{2j+1} (a_0 \cdots a_j b_{j+1} \cdots b_n) + \sum_{j=0}^n (-1)^{2j} (a_0 \cdots a_{j-1} b_j \cdots b_n) =$$

$$\begin{aligned}
& -(a_0 b_1 \cdots b_n) - (a_0 a_1 b_2 \cdots b_n) - \cdots - (a_0 \cdots a_{n-1} b_n) - (a_0 \cdots a_n) \\
& + (b_0 \cdots b_n) + (a_0 b_1 \cdots b_n) + (a_0 a_1 b_2 \cdots b_n) + \cdots + (a_0 \cdots a_{n-1} b_n) = \\
& \quad -(a_0 \cdots a_n) + (b_0 \cdots b_n)
\end{aligned}$$

De donde finalmente obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\partial_{n+1}^{\Delta_n \times [0,1]} \circ P_n^{\Delta_n}(\delta_n) &= \sum_{k=0}^n \sum_{j < k} (-1)^{j+k+1} (a_0 \cdots a_j b_j \cdots \hat{b}_k \cdots b_n) \\
&+ \sum_{i=0}^n \sum_{j > i} (-1)^{j+i} (a_0 \cdots \hat{a}_i \cdots a_j b_j \cdots b_n) \\
&+ (b_0 \cdots b_n) - (a_0 \cdots a_n)
\end{aligned}$$

Así se concluye que:

$$\partial_{n+1}^{\Delta_n \times [0,1]} \circ P_n^{\Delta_n}(\delta_n) + P_{n-1}^{\Delta_n} \circ \partial_n^{\Delta_n}(\delta_n) = (b_0 \cdots b_n) - (a_0 \cdots a_n)$$

Hemos probado por tanto, la igualdad (1.6) si  $n > 0$ .

En segundo lugar está el caso en el que  $n = 0$ . Es más corto ya que  $P_{-1}^{\Delta_n} = 0$  y por tanto  $\partial_1^{\Delta_0 \times [0,1]} \circ P_0^{\Delta_0}(\delta_0) + P_{-1}^{\Delta_0} \circ \partial_0^{\Delta_0}(\delta_0) = \partial_1^{\Delta_0 \times [0,1]} \circ P_0^{\Delta_0}(\delta_0) = \partial_1^{\Delta_0 \times [0,1]}(a_0 b_0) = (a_0 b_0)^{(0)} - (a_0 b_0)^{(1)} = (b_0) - (a_0)$ . Así pues, queda demostrada la igualdad (1.6).

La relación prismática (1.5) es consecuencia directa de esta igualdad. Solo hay que tomar un  $n$ -símplice  $\sigma \in S_n(X)$  y considerar el homomorfismo  $S_n(\sigma \times 1_{[0,1]})$ . Si lo componemos por la izquierda en la igualdad (1.6), obtenemos:

$$\begin{aligned}
(S_n(\sigma \times 1_{[0,1]}) \circ \partial_{n+1}^{\Delta_n \times [0,1]} \circ P_n^{\Delta_n} + S_n(\sigma \times 1_{[0,1]}) \circ P_{n-1}^{\Delta_n} \circ \partial_n^{\Delta_n})(\delta_n) = \\
(S_n(\sigma \times 1_{[0,1]}) \circ S_n(\lambda_1^{\Delta_n}) - S_n(\sigma \times 1_{[0,1]}) \circ S_n(\lambda_0^{\Delta_n}))(\delta_n).
\end{aligned}$$

Y realizando unos simples cálculos, se comprueba que esta igualdad es en realidad otra forma de escribir la relación prismática:

$$(\partial_{n+1}^{X \times [0,1]} \circ P_n^X + P_{n-1}^X \circ \partial_n^X)(\sigma) = (S_n(\lambda_1^X) - S_n(\lambda_0^X))(\sigma).$$

□

Intuitivamente, la relación prismática nos dice que la frontera orientada,  $\partial_{n+1}^{\Delta_n \times [0,1]} \circ P_n^{\Delta_n}(\delta_n)$ , del prisma particionado en  $n + 1$   $(n + 1)$ -símplices,  $P_n^{\Delta_n}(\delta_n)$ , es la resta de las tapas superior e inferior del prisma,  $(b_0 \cdots b_n) - (a_0 \cdots a_n)$ , salvo un factor corrector,  $P_{n-1}^{\Delta_n} \circ \partial_n^{\Delta_n}(\delta_n)$ , formado por las paredes laterales del prisma.

## 1.4. Invarianza por homotopía

En este apartado vamos a probar la invarianza por homotopía de los grupos de homología. Con el trabajo previo realizado, estamos en situación de probar el lema necesario para dicha prueba. El lema es consecuencia directa de la relación prismática.

**Lema 1.4.1.** *Sea  $X$  un espacio topológico. Entonces, para todo  $n \geq 0$ ,  $H_n(\lambda_0^X) = H_n(\lambda_1^X)$ .*

*Demostración.* Sea  $c \in Z_n(X)$ , y por tanto,  $\partial_n^X(c) = 0$ . Aplicando la relación prismática obtenemos que:

$$\begin{aligned} (S_n(\lambda_1^X) - S_n(\lambda_0^X))(c) &= \partial_{n+1}^{X \times [0,1]} \circ P_n^X(c) + P_{n-1}^X \circ \partial_n^X(c) \\ &= \partial_{n+1}^{X \times [0,1]}(P_n^X(c)) \in B_n(X \times [0,1]) \end{aligned}$$

Luego,  $S_n(\lambda_1^X)(c)$  es homólogo a  $S_n(\lambda_0^X)(c)$  para todo  $n \geq 0$  y por tanto  $H_n(\lambda_0^X) = H_n(\lambda_1^X)$ .  $\square$

A partir de este lema, el resto es inmediato.

**Corolario 1.4.2.** *Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios topológicos y  $f, g : X \rightarrow Y$  dos funciones continuas homótopas. Entonces, para todo  $n \geq 0$  se tiene que  $H_n(f) = H_n(g)$ .*

*Demostración.* Sea  $H : X \times [0,1] \rightarrow Y$  la homotopía de aplicaciones que verifica  $H(x,0) = f(x)$  y  $H(x,1) = g(x)$ . La aplicación  $H \circ \lambda_t^X$  es continua para todo  $t \in [0,1]$ , por ser composición de funciones continuas y además, se verifica que  $H \circ \lambda_0^X = f$  y  $H \circ \lambda_1^X = g$ . Como  $H_n$  es un functor, por el lema anterior,  $H_n(f) = H_n(H \circ \lambda_0^X) = H_n(H) \circ H_n(\lambda_0^X) = H_n(H) \circ H_n(\lambda_1^X) = H_n(H \circ \lambda_1^X) = H_n(g)$  para todo  $n \geq 0$ .  $\square$

**Corolario 1.4.3.** *Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios topológicos con el mismo tipo de homotopía, entonces  $H_n(X) \cong H_n(Y)$  para todo  $n \geq 0$ .*

*Demostración.* Como  $X$  e  $Y$  tienen el mismo tipo de homotopía, existen funciones continuas  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow X$  tales que  $g \circ f$  es homótopa a  $1_X$  y  $f \circ g$  es homótopa a  $1_Y$ . Por el corolario anterior y por ser  $H_n$  functor, se verifica que  $H_n(f) \circ H_n(g) = H_n(f \circ g) = H_n(1_Y) = 1_{H_n(Y)}$  y  $H_n(g) \circ H_n(f) = H_n(g \circ f) = H_n(1_X) = 1_{H_n(X)}$ . Luego  $H_n(f)$  es un homomorfismo biyectivo entre  $H_n(X)$  y  $H_n(Y)$  con inversa  $H_n(g)$ , es decir,  $H_n(f)$  es un isomorfismo.  $\square$

Esta invarianza es de gran ayuda, ya que para calcular los grupos de homología de  $X$ , podemos recurrir a buscar espacios topológicos conocidos, con el mismo tipo de homotopía que  $X$ . Un ejemplo claro sería el caso de los espacios contráctiles, que como tienen el tipo de homotopía de un punto,

conocemos sus grupos de homología por la proposición 1.1.3. Por tanto ya tenemos un claro ejemplo de dos espacios no homeomorfos que tienen grupos de homología isomorfos,  $(\mathbb{R}, \tau_u)$  y un punto  $\{p_0\}$ . Más adelante, cuando tengamos las herramientas necesarias, también veremos dos espacios con distinto tipo de homotopía, con grupos de homología isomorfos.

## 1.5. Teorema de Hurewicz

En esta sección demostraremos el teorema de Hurewicz, descubierto por Witold Hurewicz. Es un teorema muy útil a la hora de calcular el primer grupo de homología,  $H_1(X)$ , de un espacio conexo por caminos. Solamente requiere de conocer el grupo fundamental de  $X$ . Introducimos notación para ello.

A partir de ahora, cuando dos funciones  $f$  y  $g$  sean homótopas lo denotaremos por  $f \sim g$ . Cuando hablemos de dos caminos  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  basados en un mismo punto, entonces  $\sigma_1 \sim \sigma_2$  denotara una homotopía de caminos. Además, emplearemos la notación  $\sigma_1 * \sigma_2$  para denotar el producto de caminos y la notación  $[\sigma_1] * [\sigma_2] = [\sigma_2 * \sigma_1]$  para denotar el producto de clases de homotopía de caminos.

### **Teorema 1.5.1.** *(Teorema de Hurewicz)*

*Sea  $X$  un espacio topológico conexo por caminos y  $x_0 \in X$ , entonces  $H_1(X)$  es isomorfo al abelianizado de  $\Pi_1(X, x_0)$ , el grupo fundamental de  $X$  basado en  $x_0$ .*

*Demostración.* Como  $X$  es conexo por caminos, el grupo fundamental de  $X$  no depende del punto en el que está basado, así que vamos a probar el isomorfismo para un  $x_0 \in X$  genérico. Definimos para ello la aplicación:

$$\chi: \begin{array}{ccc} \Pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & H_1(X) \\ [\sigma] & \longmapsto & \bar{\sigma} \end{array} \quad (1.7)$$

Usamos la notación  $[\sigma]$  para denotar la clase de homotopía del camino  $\sigma$  basado en  $x_0$  y seguimos usando la notación  $\bar{\sigma}$  para denotar la clase de homología del 1-símplice  $\sigma$ . Cabe destacar, que como  $\sigma$  es un camino, no es correcto considerar su clase de homología, pues no es un 1-símplice, pero recordemos que por el lema 1.1.5, hay una correspondencia uno a uno entre caminos y 1-símplices. Por tanto, al escribir  $\bar{\sigma}$  hacemos referencia a la clase de homología del 1-símplice asociado al camino  $\sigma$ ,  $\sigma \circ \eta$ . Recordemos que íbamos a tratar 1-símplices y caminos de manera indistinta.

Para la demostración vamos a ver que  $\chi$  es un homomorfismo de grupos sobreyectivo con núcleo el subgrupo conmutador de  $\Pi_1(X, x_0)$ . Entonces, por el primer teorema de isomorfía habríamos acabado.

En primer lugar, veamos que  $\chi$  está bien definida. Sean  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  dos caminos homótopos basados en  $x_0$  y sea  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  la homotopía entre  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ . Por tanto,  $H(s, 0) = \sigma_1(s)$ ,  $H(s, 1) = \sigma_2(s)$  y  $H(0, t) = x_0 = H(1, t)$  para todo  $t, s \in [0, 1]$ . Veamos que entonces  $\overline{\sigma_1} = \overline{\sigma_2}$ , es decir, que existe  $c \in S_2(X)$  tal que  $\sigma_1 - \sigma_2 = \partial_2(c)$ .

Construimos para eso el 2-símplice  $\sigma : \Delta_2 \rightarrow X$  que manda cada punto  $q = (1-s)e_0 + s(1-t)e_1 + st e_2 \in \Delta_2$  en  $\sigma(q) = H(s, t) \in X$ . Recordemos que todo punto de  $\Delta_2$  se puede escribir de la forma  $(1-s)e_0 + s(1-t)e_1 + st e_2$  con  $s, t \in [0, 1]$ , ya que estas son todas las combinaciones convexas de los puntos  $e_0, e_1$  y  $e_2$  y  $\Delta_2$  es la envolvente convexa de esos tres puntos.

Veamos su continuidad. Sea  $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Delta_2$  la aplicación continua definida como  $f(s, t) = (1-s)e_0 + s(1-t)e_1 + st e_2$ . Corresponde a la aplicación cociente que manda  $\{0\} \times [0, 1]$  a  $e_0$  y es por tanto una identificación. Además, se tiene por la construcción de  $\sigma$  que  $\sigma \circ f = H$ . Usando la proposición del anexo A.3.3, como  $H$  es continua,  $\sigma$  es continua y por tanto, es en efecto, un 2-símplice.

Calculemos ahora su frontera. Tenemos que  $\partial_2(\sigma) = \sigma^{(0)} - \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)}$  y se verifica que:

- (i)  $\sigma^{(0)} = \sigma \circ \epsilon_2^0 = \sigma \circ (e_1 e_2) = x_0$ , pues  $\sigma \circ (e_1 e_2)((1-t)e_0 + te_1) = \sigma(0e_0 + (1-t)e_1 + te_2) = H(1, t) = x_0$  para todo  $t \in [0, 1]$ . Aquí  $x_0$  no solo es un punto de  $X$ , sino que también denota al 1-símplice que manda todo punto de  $\Delta_1$  a  $x_0$ .
- (ii)  $\sigma^{(1)} = \sigma \circ \epsilon_2^1 = \sigma \circ (e_0 e_2) = \sigma_2$ , pues  $\sigma \circ (e_0 e_2)((1-t)e_0 + te_1) = \sigma((1-t)e_0 + 0e_1 + te_2) = H(t, 1) = \sigma_2(t)$  para todo  $t \in [0, 1]$ .
- (iii)  $\sigma^{(2)} = \sigma \circ \epsilon_2^2 = \sigma \circ (e_0 e_1) = \sigma_1$ , pues  $\sigma \circ (e_0 e_1)((1-t)e_0 + te_1) = \sigma((1-t)e_0 + te_1 + 0e_2) = H(t, 0) = \sigma_1(t)$  para todo  $t \in [0, 1]$ .

Luego tenemos que  $\partial_2(\sigma) = x_0 - \sigma_2 + \sigma_1$ . Consideramos entonces el 2-símplice  $\sigma_{x_0}$  definido como  $\sigma_{x_0}(q) = x_0$  para todo  $q \in \Delta_2$ . Este símplice verifica  $\partial_2(\sigma_{x_0}) = x_0 - x_0 + x_0 = x_0$ . Por tanto,  $\partial_2(\sigma - \sigma_{x_0}) = x_0 - \sigma_2 + \sigma_1 - x_0 = \sigma_1 - \sigma_2$ , es decir,  $\overline{\sigma_1} = \overline{\sigma_2}$  y  $\chi$  está bien definida.

En segundo lugar, vamos a ver que  $\chi$  es un homomorfismo de grupos. Para ello tenemos que ver que dados dos caminos  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  basados en  $x_0$ , entonces  $\chi([\sigma_1] * [\sigma_2]) = \chi([\sigma_2 * \sigma_1]) = \chi([\sigma_1]) + \chi([\sigma_2])$ , es decir,  $\overline{\sigma_2 * \sigma_1} = \overline{\sigma_1} + \overline{\sigma_2}$ . Para ello, hay que encontrar una 2-cadena  $c$  tal que  $\partial_2(c) = \sigma_1 + \sigma_2 - (\sigma_2 * \sigma_1)$ . Definimos para ello la aplicación  $\sigma : \Delta_2 \rightarrow X$  como

$$\sigma(p) = \begin{cases} \sigma_2(t_2 - t_0) & \text{si } t_0 \leq t_2 \\ \sigma_1(1 + t_2 - t_0) & \text{si } t_0 > t_2 \end{cases}$$

donde  $p = t_0 e_0 + t_1 e_1 + t_2 e_2 \in \Delta_2$  con  $t_0 + t_1 + t_2 = 1$  y  $t_i \geq 0$  para todo  $i \in \{0, 1, 2\}$ . El punto  $p$  es una combinación convexa cualquiera de los puntos

$e_0, e_1$  y  $e_2$ . La aplicación  $\sigma$  es continua porque  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  son continuas y en  $t_0 = t_2$ ,  $\sigma_2(0) = x_0 = \sigma_1(1)$ , por tanto  $\sigma$  es un 2-símplice.

Calculemos ahora  $\partial_2(\sigma) = \sigma^{(0)} - \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)}$ , su frontera.

$$(i) \quad \sigma^{(0)} = \sigma \circ (e_1 e_2) = \sigma_2 \text{ pues se verifica } \sigma \circ (e_1 e_2)((1-t)e_0 + te_1) = \sigma(0e_0 + (1-t)e_1 + te_2) = \sigma_2(t) \text{ para todo } t \in [0, 1].$$

$$(ii) \quad \sigma^{(1)} = \sigma \circ (e_0 e_2) = \sigma_2 * \sigma_1 \text{ pues se verifica } \sigma \circ (e_0 e_2)((1-t)e_0 + te_1) = \sigma((1-t)e_0 + 0e_1 + te_2) = \begin{cases} \sigma_2(2t-1) & \text{si } t \geq 1/2 \\ \sigma_1(2t) & \text{si } t < 1/2 \end{cases} = \sigma_2 * \sigma_1(t) \text{ para todo } t \in [0, 1].$$

$$(iii) \quad \sigma^{(2)} = \sigma \circ (e_0 e_1) = \sigma_1 \text{ pues se verifica } \sigma \circ (e_0 e_1)((1-t)e_0 + te_1) = \sigma((1-t)e_0 + te_1 + 0e_2) = \sigma_1(t) \text{ para todo } t \in [0, 1].$$

Por tanto,  $\partial_2(\sigma) = \sigma_1 + \sigma_2 - (\sigma_2 * \sigma_1)$  y se concluye que  $\chi$  es un homomorfismo.

En tercer lugar, vamos a ver que  $\chi$  es una aplicación sobreyectiva. Sea  $c = \sum_{i=0}^n n_i \sigma_i \in Z_1(X)$ , es decir,  $0 = \partial_1(c) = \sum_{i=0}^n n_i (\sigma_i(1) - \sigma_i(0))$ . Se concluye de la igualdad que si  $\{x_1, \dots, x_r\}$  son los distintos representantes del conjunto  $\{\sigma_i(0), \sigma_i(1) \mid i \in \{0, \dots, n\}\}$ , entonces

$$\sum_{\sigma_i(1)=x_j} n_i - \sum_{\sigma_i(0)=x_j} n_i = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, r\}.$$

Como  $X$  es conexo por caminos, denotamos por  $\eta_{\sigma_i(0)}$  y  $\eta_{\sigma_i(1)}$  los caminos que unen  $x_0$  con  $\sigma_i(0)$  y  $\sigma_i(1)$  respectivamente. Elegimos los caminos de tal manera que no dependan del índice, sino solo del punto  $\sigma_i(0)$  ó  $\sigma_i(1)$ , es decir, si  $\sigma_i(\delta) = \sigma_j(\delta)$  con  $i \neq j$ , entonces  $\eta_{\sigma_i(\delta)} = \eta_{\sigma_j(\delta)}$ . Entonces, reagrupando los  $\eta_{\sigma_i(\delta)}$  iguales tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n n_i (\eta_{\sigma_i(1)} - \eta_{\sigma_i(0)}) &= \eta_{x_1} \left( \sum_{\sigma_i(1)=x_1} n_i - \sum_{\sigma_i(0)=x_1} n_i \right) + \dots + \\ &\eta_{x_r} \left( \sum_{\sigma_i(1)=x_r} n_i - \sum_{\sigma_i(0)=x_r} n_i \right) = \eta_{x_1} \cdot 0 + \dots + \eta_{x_r} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, si denotamos ahora por  $\beta_i$  al 1-símplice  $\eta_{\sigma_i(0)} + \sigma_i - \eta_{\sigma_i(1)}$ , tenemos que:

$$\sum_{i=0}^n n_i \beta_i = - \sum_{i=0}^n n_i (\eta_{\sigma_i(1)} - \eta_{\sigma_i(0)}) + \sum_{i=0}^n n_i \sigma_i = \sum_{i=0}^n n_i \sigma_i = c$$

Y finalmente, si denotamos por  $\gamma_i$  al camino basado en  $x_0$ ,  $\eta_{\sigma_i(1)}^{-1} * \sigma_i * \eta_{\sigma_i(0)}$ , tenemos:

$$\chi([\gamma_i]) = \chi([\eta_{\sigma_i(0)}]) + \chi([\sigma_i]) - \chi([\eta_{\sigma_i(1)}]) = \overline{\beta_i}$$

$$\chi \left( \left[ \prod_{i=0}^n \gamma_i^{n_i} \right] \right) = \chi \left( \prod_{i=0}^n [\gamma_i]^{n_i} \right) = \sum_{i=0}^n n_i \chi([\gamma_i]) = \sum_{i=0}^n n_i \bar{\beta}_i = \bar{c}$$

Se concluye que  $\chi$  es sobreyectiva.

Por último, vamos a ver que  $Ker(\chi) = [\Pi_1(X, x_0), \Pi_1(X, x_0)]$ , es el subgrupo conmutador de  $\Pi_1(X, x_0)$ . Un contenido se obtiene de que  $H_1(X)$  es abeliano, ya que eso implica que para cualesquiera  $\sigma_1, \sigma_2 \in \Pi_1(X, x_0)$  :

$$\chi([\sigma_1] * [\sigma_2]) = \chi([\sigma_1]) + \chi([\sigma_2]) = \chi([\sigma_2]) + \chi([\sigma_1]) = \chi([\sigma_2] * [\sigma_1]) \Rightarrow$$

$$\chi([\sigma_1] * [\sigma_2] * [\sigma_1]^{-1} * [\sigma_2]^{-1}) = \chi([\sigma_1] * [\sigma_2] * ([\sigma_2] * [\sigma_1])^{-1}) =$$

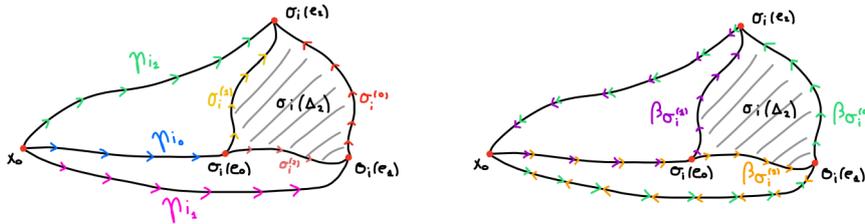
$$\chi([\sigma_1] * [\sigma_2]) - \chi([\sigma_2] * [\sigma_1]) = 0 \Rightarrow [\Pi_1(X, x_0), \Pi_1(X, x_0)] \subseteq Ker(\chi)$$

El otro contenido lleva más trabajo. Sea  $\sigma$  un camino basado en  $x_0$  tal que  $\chi([\sigma]) = \bar{0}$ , es decir, un elemento de  $Ker(\chi)$ . Eso implica que  $\bar{\sigma} = \bar{0}$  y existe una 2-cadena  $c = \sum_{i=0}^n n_i \sigma_i$  tal que  $\sigma = \partial_2(c) = \sum_{i=0}^n n_i (\sigma_i^{(0)} - \sigma_i^{(1)} + \sigma_i^{(2)})$ . Si denotamos por  $\{\sigma, \tau_1, \dots, \tau_r\}$  a los distintos 1-símplices del conjunto de símplices  $\{\sigma_i^{(j)} \mid i \in \{0, \dots, n\}, j \in \{0, 1, 2\}\}$ , la igualdad  $\sigma = \partial_2(c)$  implica que:

$$\sum_{\sigma_i^{(0)}=\sigma} n_i - \sum_{\sigma_i^{(1)}=\sigma} n_i + \sum_{\sigma_i^{(2)}=\sigma} n_i = 1$$

$$\sum_{\sigma_i^{(0)}=\tau_j} n_i - \sum_{\sigma_i^{(1)}=\tau_j} n_i + \sum_{\sigma_i^{(2)}=\tau_j} n_i = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, r\}$$

Por otro lado, como  $X$  es conexo por caminos, tomamos ahora caminos  $\eta_{i_0}, \eta_{i_1}$  y  $\eta_{i_2}$  que unen  $x_0$  con  $\sigma_i(e_0)$ ,  $\sigma_i(e_1)$  y  $\sigma_i(e_2)$  respectivamente. Estos caminos, al igual que en la etapa anterior, los tomamos de forma que solo dependan de los extremos y no de los índices. Definimos con ellos los siguientes tres caminos basados en  $x_0$ :  $\beta_{\sigma_i^{(0)}} = \eta_{i_2}^{-1} * \sigma_i^{(0)} * \eta_{i_1}$ ,  $\beta_{\sigma_i^{(1)}} = \eta_{i_2}^{-1} * \sigma_i^{(1)} * \eta_{i_0}$  y  $\beta_{\sigma_i^{(2)}} = \eta_{i_1}^{-1} * \sigma_i^{(2)} * \eta_{i_0}$ . Nótese que  $\beta_\sigma = c_{x_0} * \sigma * c_{x_0}$ , donde  $c_{x_0}$  es el camino constante que vale  $x_0$  para todo  $t$  y por tanto  $[\beta_\sigma] = [\sigma]$ . Definimos con estos caminos a su vez, los caminos  $\beta_i = \beta_{\sigma_i^{(2)}} * \beta_{\sigma_i^{(1)}}^{-1} * \beta_{\sigma_i^{(0)}}$ .



$$\beta_i = (\eta_{i_1}^{-1} * \sigma_i^{(2)} * \eta_{i_0}) * (\eta_{i_0}^{-1} * (\sigma_i^{(1)})^{-1} * \eta_{i_2}) * (\eta_{i_2}^{-1} * \sigma_i^{(0)} * \eta_{i_1}) = \\ \eta_{i_1}^{-1} * \sigma_i^{(2)} * \eta_{i_0} * \eta_{i_0}^{-1} * (\sigma_i^{(1)})^{-1} * \eta_{i_2} * \eta_{i_2}^{-1} * \sigma_i^{(0)} * \eta_{i_1} \sim \eta_{i_1}^{-1} * \sigma_i^{(2)} * (\sigma_i^{(1)})^{-1} * \sigma_i^{(0)} * \eta_{i_1}$$

Como además  $\Delta_2$  es contráctil,  $\sigma_i^{(2)} * (\sigma_i^{(1)})^{-1} * \sigma_i^{(0)} \sim c_{\sigma_i(e_1)}$  y por ello:

$$\beta_i \sim \eta_{i_1}^{-1} * \sigma_i^{(2)} * (\sigma_i^{(1)})^{-1} * \sigma_i^{(0)} * \eta_{i_1} \sim \eta_{i_1}^{-1} * c_{\sigma_i(e_1)} * \eta_{i_1} \sim \eta_{i_1}^{-1} * \eta_{i_1} \sim c_{x_0}$$

Luego  $[\beta_i] = [c_{x_0}]$ , es el elemento neutro de  $\Pi_1(X, x_0)$  y por tanto  $\prod_{i=0}^n [\beta_i]^{n_i} = [c_{x_0}]$ .

Ahora vamos a denotar por  $\tilde{\beta}_i$  a la coclase de  $[\beta_i]$  en el abelianizado de  $\Pi_1(X, x_0)$ , es decir, en  $C = \Pi_1(X, x_0) / [\Pi_1(X, x_0), \Pi_1(X, x_0)]$ . Por la igualdad anterior tenemos que  $\prod_{i=0}^n \tilde{\beta}_i^{n_i} = \tilde{c}_{x_0} = 1_C$ , es el elemento neutro. A su vez, como el cociente es abeliano por ser el abelianizado de  $\Pi_1(X, x_0)$ , podemos agrupar los  $\tilde{\beta}_{\sigma_i^{(j)}}$  iguales en el producto y obtenemos que:

$$\prod_{i=0}^n \tilde{\beta}_i^{n_i} = \prod_{i=0}^n \tilde{\beta}_{\sigma_i^{(2)}}^{n_i} * \tilde{\beta}_{\sigma_i^{(1)}}^{-n_i} * \tilde{\beta}_{\sigma_i^{(0)}}^{n_i} \\ = \tilde{\beta}_{\sigma}^{\left( \sum_{\sigma_i^{(0)}=\sigma} n_i - \sum_{\sigma_i^{(1)}=\sigma} n_i + \sum_{\sigma_i^{(2)}=\sigma} n_i \right)} \dots \tilde{\beta}_{\tau_r}^{\left( \sum_{\sigma_i^{(0)}=\tau_r} n_i - \sum_{\sigma_i^{(1)}=\tau_r} n_i + \sum_{\sigma_i^{(2)}=\tau_r} n_i \right)} \\ = \tilde{\beta}_{\sigma}^1 \tilde{\beta}_{\tau_1}^0 \dots \tilde{\beta}_{\tau_r}^0 = \tilde{\beta}_{\sigma} = \tilde{\sigma}$$

Por tanto,  $1_C = \tilde{c}_{x_0} = \prod_{i=0}^n \tilde{\beta}_i^{n_i} = \tilde{\sigma}$ , es decir,  $[\sigma] \in [\Pi_1(X, x_0), \Pi_1(X, x_0)]$  y por tanto  $\text{Ker}(\chi) \subseteq [\Pi_1(X, x_0), \Pi_1(X, x_0)]$ .  $\square$

**Corolario 1.5.2.** *Si  $X$  es conexo por caminos,  $\chi$  es un isomorfismo si y solo si  $\Pi_1(X)$  es abeliano.*

Veamos varias aplicaciones del teorema:

**Ejemplos.** .

- (i)  $H_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z} \cong \Pi_1(\mathbb{S}^1)$  donde  $\mathbb{S}^1$  es la 1-esfera.
- (ii)  $H_1(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong \Pi_1(\mathbb{T}^2)$  donde  $\mathbb{T}^2$  es el toro.
- (iii)  $H_1(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \Pi_1(\mathbb{RP}^2)$  donde  $\mathbb{RP}^2$  es el plano proyectivo real.
- (iv) Si  $X$  es simplemente conexo,  $H_1(X) = 0 \cong \Pi_1(X)$ , en particular,  $H_1(\mathbb{S}^n) = 0$  para todo  $n > 1$ .
- (v)  $H_1(\infty) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  porque  $\Pi_1(\infty) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ . La figura del ocho o rosa de dos pétalos,  $\infty = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1 \vee (x+1)^2 + y^2 = 1\}$ , es un subespacio de  $(\mathbb{R}^2, \tau_u)$ .
- (vi)  $H_1(\mathbb{T}_g) \cong \mathbb{Z}^{2g}$  pues  $\Pi_1(\mathbb{T}_g) = \langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle$ , donde  $\mathbb{T}_g$  es la superficie compacta de género  $g$ .

## Capítulo 2

# Teoría Relativa

En este capítulo vamos a introducir una generalización de los grupos de homología singular, los grupos de homología relativa. Estos nuevos grupos van a depender de un par  $(X, A)$  de espacios topológicos, donde  $X$  será el espacio principal sobre el que trabajaremos y  $A$  será un subespacio de  $X$ . Esta generalización nos va a permitir desarrollar herramientas muy útiles para el cálculo de grupos de homología. Por ejemplo, el teorema de excisión y la sucesión de Mayer-Vietoris.

Como estos nuevos grupos van a ser un cociente de subgrupos de  $S_n(X)/S_n(A)$ , sustituiremos la notación  $\bar{c}$  por  $c + B_n(X)$ , si la coclase se considera en  $H_n(X)$ , ó por  $c + B_n(X, A)$ , si se considera en  $H_n(X, A)$ . Así no habrá lugar a confusión sobre en qué grupo se está trabajando.

### 2.1. Grupos de homología relativa

Sea  $X$  un espacio topológico y  $A \subseteq X$  un subconjunto. Definimos para todo  $n \geq 0$  el conjunto  $S_n(A) = \{\sum_{\sigma} n_{\sigma} \cdot \sigma \in S_n(X) \mid \sigma(\Delta_n) \subseteq A\}$ . Tiene estructura de subgrupo de  $S_n(X)$  ya que dados  $\sigma_1, \sigma_2 : \Delta_n \rightarrow A$ , entonces  $\sigma_1 - \sigma_2 \in S_n(A)$  por construcción de  $S_n(A)$ . Además, como  $S_n(X)$  es abeliano, podemos considerar el grupo cociente:

$$S_n(X)/S_n(A).$$

Por otro lado, el homomorfismo frontera  $\partial_n : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$  verifica que  $\partial(S_n(A)) \subseteq S_{n-1}(A)$ . Esto se debe a que dado  $\sigma : \Delta_n \rightarrow A$ ,  $\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \circ \epsilon_n^i$  donde  $\sigma \circ \epsilon_n^i(\Delta_{n-1}) \subseteq \sigma(\Delta_n) \subseteq A$ . Por tanto, el homomorfismo frontera induce un homomorfismo bien definido sobre los cocientes:

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_n : S_n(X)/S_n(A) &\longrightarrow S_{n-1}(X)/S_{n-1}(A) \\ c + S_n(A) &\longmapsto \partial_n(c) + S_{n-1}(A) \end{aligned}$$

Si definimos  $\Pi_n : S_n(X) \rightarrow S_n(X)/S_n(A)$  como  $\Pi_n(c) = c + S_n(X)$ , la aplicación cociente, se comprueba que  $\bar{\partial}_n$  verifica  $\bar{\partial}_n \circ \Pi_n(c) = \Pi_{n-1} \circ \partial_n(c)$ .

Además, de igual manera que  $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ , se tiene que  $\bar{\partial}_{n-1} \circ \bar{\partial}_n$  es la aplicación nula. En efecto, si  $c \in S_n(X)$ ,  $\bar{\partial}_{n-1} \circ \bar{\partial}_n(c + S_n(A)) = \bar{\partial}_{n-1}(\partial_n(c) + S_{n-1}(A)) = \partial_{n-1} \circ \partial_n(c) + S_{n-2}(A) = S_{n-2}(A)$ .

Así, podemos considerar los siguientes dos subgrupos  $S_n(X)/S_n(A)$ : el  $Ker(\bar{\partial}_n)$  y la  $Im(\bar{\partial}_{n+1})$ . Como hemos visto que  $\bar{\partial}_{n-1} \circ \bar{\partial}_n = 0$ , la  $Im(\bar{\partial}_{n+1})$  es subgrupo de  $Ker(\bar{\partial}_n)$ . Esto nos permite considerar el cociente.

**Definición 2.1.1.** Sea  $X$  un espacio topológico y  $A \subseteq X$ . Llamamos  $n$ -ésimo grupo de homología relativa de  $X$  módulo  $A$  a:

$$H_n(X, A) = Ker(\bar{\partial}_n)/Im(\bar{\partial}_{n+1})$$

Sin embargo, trabajar en un cociente de cocientes, como lo son los grupos de homología relativa, es muy engorroso. Idealmente nos gustaría trabajar en un grupo más sencillo, isomorfo a  $H_n(X, A)$ . Definimos para ello los siguientes subgrupos.

**Definición 2.1.2.** Sea  $X$  un espacio topológico y  $A \subseteq X$ . Definimos el subgrupo de  $S_n(X)$ :

$$\begin{aligned} Z_n(X, A) &= \Pi_n^{-1}(Ker(\bar{\partial}_n)) = \{c \in S_n(X) | \bar{\partial}_n(c + S_n(A)) = S_{n-1}(A)\} \\ &= \{c \in S_n(X) | \partial_n(c) \in S_{n-1}(A)\}. \end{aligned}$$

Se le llama grupo de los  $n$ -ciclos relativos de  $X$  módulo  $A$ .

**Definición 2.1.3.** Sea  $X$  un espacio topológico y  $A \subseteq X$ . Definimos el subgrupo de  $S_n(X)$ :

$$\begin{aligned} B_n(X, A) &= \Pi_n^{-1}(Im(\bar{\partial}_{n+1})) \\ &= \{c \in S_n(X) | \Pi_n(c) \in Im(\bar{\partial}_{n+1})\} \\ &= \{c \in S_n(X) | \exists \tilde{c} \in S_{n+1}(X) \text{ tal que } c + S_n(A) = \bar{\partial}_{n+1}(\tilde{c} + S_{n+1}(A))\} \\ &= \{c \in S_n(X) | \exists \tilde{c} \in S_{n+1}(X) \text{ tal que } c + S_n(A) = \partial_{n+1}(\tilde{c}) + S_n(A)\} \\ &= \{c \in S_n(X) | \exists \tilde{c} \in S_{n+1}(X) \text{ y } c_A \in S_n(A) \text{ tales que } c + c_A = \partial_{n+1}(\tilde{c})\}. \end{aligned}$$

Se le llama grupo de los  $n$ -bordes relativos de  $X$  módulo  $A$ .

Se puede comprobar con estas definiciones que en efecto  $S_n(A) \subseteq B_n(X, A) \subseteq Z_n(X, A)$ . El primer contenido se debe a que toda  $n$ -cadena de  $A$  verifica  $c_A - c_A = \partial_{n+1}(0)$ . El segundo contenido se debe a que si una  $n$ -cadena de  $X$ ,  $c$ , pertenece a  $B_n(X, A)$ , entonces existe  $\tilde{c} \in S_{n+1}(X)$  y  $c_A \in S_n(A)$  tal que  $c = c_A + \partial_{n+1}(\tilde{c})$ . Por tanto  $\partial_n(c) = \partial_n(c_A + \partial_{n+1}(\tilde{c})) = \partial_n(c_A) + 0 \in S_{n-1}(A)$ , es decir,  $c \in Z_n(X, A)$ .

Por tanto, podemos considerar el cociente de  $Z_n(X, A)$  y de  $B_n(X, A)$ .

**Lema 2.1.1.** Sea  $X$  un espacio topológico y  $A \subseteq X$ . Entonces:

$$H_n(X, A) \cong Z_n(X, A)/B_n(X, A)$$

*Demostración.* Tenemos por un lado que:

$$Z_n(X, A)/S_n(A) = \Pi_n^{-1}(Ker(\bar{\partial}_n))/S_n(A) = Ker(\bar{\partial}_n)$$

$$B_n(X, A)/S_n(A) = \Pi_n^{-1}(Im(\bar{\partial}_{n+1}))/S_n(A) = Im(\bar{\partial}_{n+1})$$

Por tanto:

$$H_n(X, A) = Ker(\bar{\partial}_n)/Im(\bar{\partial}_{n+1}) = \frac{Z_n(X, A)/S_n(A)}{B_n(X, A)/S_n(A)}$$

Usando el tercer teorema de isomorfía para grupos, como son grupos abelianos y  $S_n(A) \subseteq B_n(X, A) \subseteq Z_n(X, A)$ , se tiene:

$$\frac{Z_n(X, A)/S_n(A)}{B_n(X, A)/S_n(A)} \cong Z_n(X, A)/B_n(X, A)$$

□

Gracias a este lema, podemos denotar cada elemento de  $H_n(X, A)$  por  $c + B_n(X, A)$ , en vez de tener que usar la engorrosa notación del doble cociente:  $(c + S_n(A)) + Ker(\bar{\partial}_{n+1})$ .

Si tomamos  $A = \emptyset$ , entonces  $S_n(A) = \{0\}$  para todo  $n \geq 0$  y se comprueba de manera inmediata que  $H_n(X, \emptyset) \cong H_n(X)$ . Por ello, los resultados de homología relativa generalizan y engloban los de homología singular. A continuación vamos a ver las generalizaciones a la homología relativa de resultados ya vistos para la homología singular.

**Proposición 2.1.2.** *Si  $\{X_i \subseteq X | i \in I\}$  es el conjunto de las componentes conexas por caminos de  $X$  y  $A_i = A \cap X$  para todo  $i \in I$ , entonces:*

$$H_n(X, A) \cong \bigoplus_{i \in I} H_n(X_i, A_i) \quad \forall n \geq 0$$

*Demostración.* Es suficiente con adaptar la prueba de la proposición 1.1.4, teniendo en cuenta que  $A_i$  no tiene que ser conexo por caminos. □

**Proposición 2.1.3.** *Si  $X$  es conexo por caminos y  $A \neq \emptyset$ , entonces  $H_0(X, A) = 0$ .*

*Demostración.* Sea  $a \in A$  y sea  $c = \sum n_x x \in S_0(X)$ . Denotamos por  $\sigma_x$  al camino que une  $a$  y  $x$ . Entonces  $\partial_1(\sum n_x \sigma_x) = c - \sum n_x a$ , es decir,  $c \in B_0(X, A)$ . Luego  $S_0(X) = B_0(X, A)$  y  $H_0(X, A) = 0$ . □

## 2.2. El functor a pares $H_n$

En esta sección vamos a demostrar que  $H_n$  es un functor de ParTop, la categoría de pares de espacios topológicos, en Ab, la categoría de grupos abelianos. Asigna a cada par  $(X, A)$  el grupo  $H_n(X, A)$ . Queda por definir como actúa sobre funciones continuas.

Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios topológicos,  $A \subseteq X$ ,  $B \subseteq Y$  y  $f : X \rightarrow Y$  una función continua tal que  $f(A) \subseteq B$ . Esta situación la denotaremos por  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ . En tal caso, el homomorfismo  $S_n(f) : S_n(X) \rightarrow S_n(Y)$  verifica  $S_n(f)(S_n(A)) \subseteq S_n(B)$ . En efecto, si  $\sigma \in S_n(A)$ , es decir,  $\sigma(\Delta_n) \subseteq A$ , entonces  $S_n(f)(\sigma)(\Delta_n) = (f \circ \sigma)(\Delta_n) = f(\sigma(\Delta_n)) \subseteq f(A) \subseteq B$ , es decir,  $S_n(f)(\sigma) \in S_n(B)$ . De este contenido se concluye que:

$$(i) \quad S_n(f)(Z_n(X, A)) \subseteq Z_n(Y, B).$$

Sea  $\sigma \in Z_n(X, A)$ , luego  $\partial_n^X(\sigma) \in S_{n-1}(A)$ . Entonces, por el lema 1.2.1,  $\partial_n^Y(S_n(f)(\sigma)) = S_{n-1}(f)(\partial_n^X(\sigma)) \in S_{n-1}(B)$  porque  $S_{n-1}(f)(S_{n-1}(A)) \subseteq S_{n-1}(B)$ . Por tanto,  $S_n(f)(\sigma) \in Z_n(Y, B)$ .

$$(ii) \quad S_n(f)(B_n(X, A)) \subseteq B_n(Y, B).$$

Sea  $\sigma \in B_n(X, A)$ , luego existen  $\tilde{c} \in S_{n+1}(X)$  y  $c_A \in S_n(A)$  tales que  $\sigma = c_A + \partial_{n+1}^X(\tilde{c})$ . Entonces, usando otra vez el lema 1.2.1,  $S_n(f)(\sigma) = S_n(f)(c_A) + S_n(f)(\partial_{n+1}^X(\tilde{c})) = S_n(f)(c_A) + \partial_{n+1}^Y(S_{n+1}(f)(\tilde{c}))$  donde  $S_n(f)(c_A) \in S_n(B)$  porque  $S_n(f)(S_n(A)) \subseteq S_n(B)$ . En resumen,  $S_n(f)(\sigma) \in B_n(Y, B)$ .

Por tanto, podemos pasar al cociente y obtener un homomorfismo de grupos bien definido:

$$\begin{aligned} H_n(f) : \quad H_n(X, A) &\longrightarrow H_n(Y, B) \\ c + B_n(X, A) &\longmapsto S_n(f)(c) + B_n(Y, B) \end{aligned}$$

Este homomorfismo es functorial a pares, es decir:

$$(i) \quad H_n(1_X) = 1_{H_n(X, A)}.$$

$$(ii) \quad H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f) \text{ donde } g : (Y, B) \rightarrow (Z, C) \text{ es otra función continua.}$$

## 2.3. Sucesión exacta larga de homología

Habiendo definido como actúa  $H_n$  sobre funciones continuas, casi tenemos las herramientas necesarias para definir la sucesión exacta larga de homología. Procedemos a definir las últimas dos herramientas necesarias, el término sucesión exacta y el homomorfismo de enlace.

**Definición 2.3.1.** Sean  $\{G_i\}_{i \in \mathbb{Z}^+}$  una sucesión de grupos y  $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  una sucesión de homomorfismos que forman un complejo de cadenas:

$$\dots \xrightarrow{f_{n+2}} G_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} G_n \xrightarrow{f_n} G_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \dots$$

Se dice que forman una sucesión exacta si  $Im(f_{n+1}) = Ker(f_n)$  para todo  $n \geq 1$ .

**Definición 2.3.2.** Sea  $X$  un espacio topológico y  $A \subseteq X$ . Para todo  $n \geq 1$  definimos el homomorfismo de enlace como:

$$\begin{aligned} \delta_n : \quad H_n(X, A) &\longrightarrow H_{n-1}(A) \\ c + B_n(X, A) &\longmapsto \partial_n(c) + B_{n-1}(A) \end{aligned}$$

La aplicación  $\delta_n$  está bien definida. En primer lugar, como  $c \in Z_n(X, A)$ ,  $\partial_n(c) \in S_{n-1}(A)$ . Luego  $\partial_{n-1}(\partial_n(c)) = 0$  y por tanto  $\partial_n(c) \in Z_{n-1}(A)$ , es decir,  $\partial_n(c) + B_{n-1}(A) \in H_{n-1}(A)$ . En segundo lugar, si  $c_1 + B_n(X, A) = c_2 + B_n(X, A)$ , veamos que  $\partial_n(c_1) + B_{n-1}(A) = \partial_n(c_2) + B_{n-1}(A)$ . Partimos de que  $c_1 - c_2 \in B_n(X, A)$ , es decir, existen  $c_A \in S_n(A)$  y  $\tilde{c} \in S_{n+1}(X)$  tales que  $c_1 - c_2 = c_A + \partial_{n+1}(\tilde{c})$ . Aplicando la función frontera  $\partial_n(c_1) - \partial_n(c_2) = \partial_n(c_A) + \partial_n(\partial_{n+1}(\tilde{c})) = \partial_n(c_A) \in S_{n-1}(A) \subseteq B_{n-1}(X, A)$ . Por tanto  $\delta_n$  está bien definida. Por último,  $\delta_n$  es homomorfismo porque  $\partial_n$  lo es. Por tanto, ya podemos definir la sucesión larga de homología.

**Definición 2.3.3.** Sea  $X$  un espacio topológico y  $A \subseteq X$ . Consideramos las aplicaciones continuas de inclusión de  $A$  en  $X$  y la identidad en  $X$ ;  $i_A : A \rightarrow X$  y  $1_X : (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$  respectivamente. La sucesión larga de homología del par  $(X, A)$  es:

$$\dots \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{H_n(i_A)} H_n(X) \xrightarrow{H_n(1_X)} H_n(X, A) \xrightarrow{\delta_n} \dots$$

**Teorema 2.3.1.** Sea  $X$  un espacio topológico y  $A \subseteq X$ . La sucesión larga de homología del par  $(X, A)$  es exacta.

*Demostración.* Veamos primero que  $Im(H_n(i_A)) = Ker(H_n(1_X))$ :

(i)  $Im(H_n(i_A)) \subseteq Ker(H_n(1_X))$

Sea  $c \in Z_n(A)$ . Entonces tenemos  $H_n(1_X)(H_n(i_A)(c + B_n(A))) = H_n(1_X)(c + B_n(X)) = c + B_n(X, A) = B_n(X, A)$  porque  $Z_n(A) \subseteq S_n(A) \subseteq B_n(X, A)$ .

(ii)  $Ker(H_n(1_X)) \subseteq Im(H_n(i_A))$

Sea  $c \in Z_n(X)$  tal que  $H_n(1_X)(c + B_n(X)) = B_n(X, A)$ . Entonces  $c + B_n(X, A) = B_n(X, A)$  y  $c \in B_n(X, A)$ . Luego existen  $c_A \in S_n(A)$  y  $\tilde{c} \in S_{n+1}(X)$  tales que  $c = c_A + \partial_{n+1}(\tilde{c})$ . Aplicando el operador frontera y como  $c \in Z_n(X)$ ,  $0 = \partial_n(c) = \partial_n(c_A) + 0$ . Luego  $c_A \in Z_n(A)$  y  $H_n(i_A)(c_A + B_n(A)) = c_A + B_n(X) = c + B_n(X)$  porque  $c - c_A = \partial_{n+1}(\tilde{c})$ .

Veamos ahora que  $Im(H_n(1_X)) = Ker(\delta_n)$ :

- (i)  $Im(H_n(1_X)) \subseteq Ker(\delta_n)$   
 Sea  $c \in Z_n(X)$ . Entonces  $\delta_n(H_n(1_X)(c+B_n(X))) = \delta_n(c+B_n(X, A)) = \partial_n(c) + B_{n-1}(A) = B_{n-1}(A)$  pues  $\partial_n(c) = 0$ .
- (ii)  $Ker(\delta_n) \subseteq Im(H_n(1_X))$   
 Sea  $c \in Z_n(X, A)$  tal que  $\delta_n(c) = B_{n-1}(A)$ . Entonces  $\partial_n(c) + B_{n-1}(A) = B_{n-1}(A)$  y  $\partial_n(c) \in B_{n-1}(A)$ . Luego existe  $\tilde{c} \in S_n(A)$  tal que  $\partial_n(\tilde{c}) = \partial_n(c)$ , es decir,  $\partial_n(c - \tilde{c}) = 0$  y  $c - \tilde{c} \in Z_n(X)$ . Por tanto, tenemos  $H_n(1_X)((c - \tilde{c}) + B_n(X)) = (c - \tilde{c}) + B_n(X, A) = c + B_n(X, A)$  pues  $\tilde{c} \in S_n(A) \subseteq B_n(X, A)$ .

Veamos por último que  $Im(\delta_n) = Ker(H_{n-1}(i_A))$ :

- (i)  $Im(\delta_n) \subseteq Ker(H_{n-1}(i_A))$   
 Sea  $c \in Z_n(X, A)$ . Entonces  $H_{n-1}(i_A)(\delta_n(c+B_n(X, A))) = H_{n-1}(i_A)(\partial_n(c) + B_{n-1}(A)) = \partial_n(c) + B_{n-1}(X) = B_{n-1}(X)$ .
- (ii)  $Ker(H_{n-1}(i_A)) \subseteq Im(\delta_n)$   
 Sea  $c \in Z_{n-1}(A)$  tal que  $H_{n-1}(i_A)(c+B_{n-1}(A)) = B_{n-1}(X)$ . Entonces  $c \in B_{n-1}(X)$ , es decir, existe  $\tilde{c} \in S_n(X)$  tal que  $\partial_n(\tilde{c}) = c \in Z_{n-1}(A)$  y  $\tilde{c} \in Z_n(X, A)$ . Por tanto  $\delta_n(\tilde{c} + B_n(X, A)) = \partial_n(\tilde{c}) + B_{n-1}(A) = c + B_{n-1}(A)$ .

Aunque pareciera que hemos acabado, queda ver que la sucesión es exacta a derecha, es decir,  $Im(H_0(1_X)) = Ker(\delta_0) = H_0(X, A)$ .

$$\dots \xrightarrow{H_0(i_A)} H_0(X) \xrightarrow{H_0(1_X)} H_0(X, A) \xrightarrow{\delta_0} \{0\}$$

Eso equivale a ver que  $H_0(1_X)$  es un homomorfismo sobreyectivo. Sea  $c \in Z_0(X, A)$ , luego  $c \in S_0(X)$  y  $\partial_0(c) \in S_{-1}(A) = \{0\}$ . Entonces  $\partial_0(c) = 0$  y  $c \in Z_0(X)$ . Por tanto  $H_0(1_X)(c + B_0(X)) = c + B_0(X, A)$  y  $H_0(1_X)$  es sobreyectivo.  $\square$

Entre sus muchos usos, esta sucesión nos sirve para calcular los grupos de homología relativa del par  $(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ , como veremos en el siguiente ejemplo. Estos grupos nos serán de gran utilidad para calcular los de  $\mathbb{S}^n$  en el futuro.

**Ejemplo 2.3.1.** Sea  $\mathbb{D}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$  y  $\mathbb{S}^{n-1} = fr(\mathbb{D}^n)$ , la frontera de  $\mathbb{D}^n$ . Vamos a trabajar sobre el par  $(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$  y su sucesión larga de homología.

El disco  $\mathbb{D}^n$  es contráctil, luego tiene el tipo de homotopía de un punto y por la invarianza por homotopía (Corolario 1.4.3), un punto y  $\mathbb{D}^n$  tienen grupos de homología isomorfos. Como los grupos de homología de un punto ya los calculamos (Proposición 1.1.3), sabemos que  $H_q(\mathbb{D}^n) = 0$  para todo  $q \geq 1$  y  $H_0(\mathbb{D}^n) = \mathbb{Z}$ . Además, por la proposición 2.1.3, sabemos que

$H_0(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) = 0$  para todo  $n \geq 1$ . Por tanto la sucesión queda:

Si  $q \geq 1$ :

$$\underbrace{H_{q+1}(\mathbb{D}^n)}_{\{0\}} \xrightarrow{H_{q+1}(1_{\mathbb{D}^n})} H_{q+1}(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\delta_{q+1}} H_q(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{H_q(i_{\mathbb{S}^{n-1}})} \underbrace{H_q(\mathbb{D}^n)}_{\{0\}}$$

Y  $\delta_{q+1}$  es un isomorfismo,  $H_{q+1}(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \cong H_q(\mathbb{S}^{n-1})$  para todo  $q \geq 1$ .

Si  $q = 0$  y  $n > 1$ :

$$\{0\} \longrightarrow H_1(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\delta_1} \underbrace{H_0(\mathbb{S}^{n-1})}_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{H_0(i_{\mathbb{S}^{n-1}})} \mathbb{Z} \longrightarrow \underbrace{H_0(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})}_{\{0\}}$$

Como  $H_0(i_{\mathbb{S}^{n-1}})$  es un homomorfismo sobreyectivo de  $\mathbb{Z}$  en  $\mathbb{Z}$ , es un isomorfismo. Luego  $Im(\delta_1) = Ker(H_0(i_{\mathbb{S}^{n-1}})) = 0$  y  $\delta_1$  es la aplicación nula. Como también es inyectiva,  $H_1(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) = 0$  para todo  $n > 1$ .

Si  $q = 0$  y  $n = 1$ :

$$\{0\} \longrightarrow H_1(\mathbb{D}^1, \mathbb{S}^0) \xrightarrow{\delta_1} \underbrace{H_0(\mathbb{S}^0)}_{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}} \xrightarrow{H_0(i_{\mathbb{S}^0})} \mathbb{Z} \longrightarrow \underbrace{H_0(\mathbb{D}^1, \mathbb{S}^0)}_{\{0\}}$$

Entendiendo como está definida  $H_0(i_{\mathbb{S}^0})$ , se puede comprobar que es el homomorfismo que verifica  $H_0(\mathbb{S}^0)((1, 0)) = 1 = H_0(\mathbb{S}^0)((0, 1))$ . Tenemos por tanto, que  $Ker(H_0(i_{\mathbb{S}^0})) = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \mid a + b = 0\} \cong \mathbb{Z}$  y por ello  $Im(\delta_1) \cong \mathbb{Z}$ . Aplicando el primer teorema de isomorfía a  $\delta_1$  obtenemos que  $H_1(\mathbb{D}^1, \mathbb{S}^0) \cong \mathbb{Z}$ .

En último lugar, tenemos una proposición que utilizaremos más adelante para probar la exactitud de la sucesión de Mayer-Vietoris, la cual definiremos en un futuro.

**Proposición 2.3.2.** *Sea  $X$  un espacio topológico y  $A \subseteq X$ . La sucesión larga de homología es functorial en  $(X, A)$ , es decir, si  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  es una función continua, los cuadrados del siguiente diagrama son conmutativos.*

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\delta_{n+1}^X} & H_n(A) & \xrightarrow{H_n(i_A)} & H_n(X) & \xrightarrow{H_n(1_X)} & H_n(X, A) & \xrightarrow{\delta_n^X} & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & H_n(f|_A) & & H_n(f) & & H_n(f) & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \xrightarrow{\delta_{n+1}^Y} & H_n(B) & \xrightarrow{H_n(i_B)} & H_n(Y) & \xrightarrow{H_n(1_Y)} & H_n(Y, B) & \xrightarrow{\delta_n^Y} & \dots \end{array}$$

*Demostración.* Se comprueba directamente que  $H_n(f \circ i_A) = H_n(i_B \circ f|_A)$  y  $H_n(f \circ 1_X) = H_n(1_Y \circ f)$ , mientras que  $H_{n-1}(f|_A) \circ \delta_n^X = \delta_n^Y \circ H_n(f)$  es consecuencia directa del lema 1.2.1.  $\square$

### 2.4. Operadores $Sd_n$ y $T_n$

En esta sección vamos a construir dos operadores necesarios para la prueba del teorema de excisión, el operador subdivisión baricéntrica y el operador  $T_n$ . En primer lugar los definiremos para el caso simplicial y en segundo lugar, extenderemos la definición para un espacio topológico  $X$  cualquiera.

**Definición 2.4.1.** Sea  $\sigma = (a_0 \cdots a_n) \in S_n(\Delta_q)$  y  $p \in \Delta_q$ . El cono de  $\sigma$  sobre  $p$  es  $p\sigma \in S_{n+1}(\Delta_q)$  definido por  $p\sigma = (pa_0 \cdots a_n)$ . Si  $\sigma = 0$ ,  $p\sigma$  se define como 0. Este operador se puede extender de manera lineal sobre las  $n$ -cadenas simpliciales como:

$$\begin{aligned} S_n(\Delta_q) &\longrightarrow S_{n+1}(\Delta_q) \\ c = \sum n_i \sigma_i &\longmapsto pc = \sum n_i (p\sigma_i) \end{aligned}$$

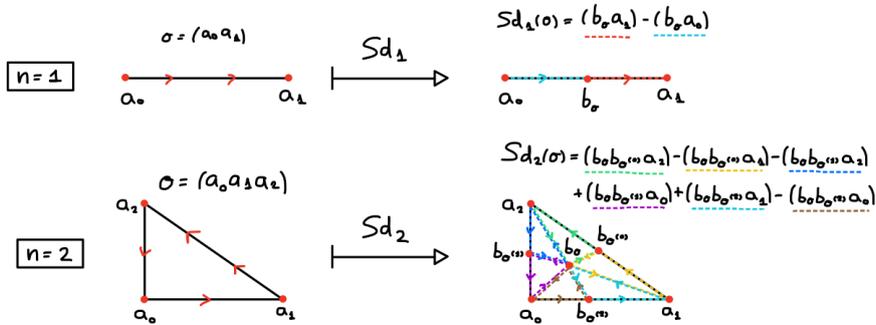
Además, se puede comprobar fácilmente con la definición que si  $n = 0$ , entonces  $\partial_1(pc) = c - (\sum n_i)(p)$  y si  $n > 0$ , entonces  $\partial_{n+1}(pc) = c - p\partial_n(c)$ .

**Definición 2.4.2.** Definimos el operador subdivisión baricéntrica de manera inductiva como el operador  $Sd_n : S_n(\Delta_q) \longrightarrow S_n(\Delta_q)$  donde:

$$Sd_n(\sigma) = \begin{cases} \sigma & \text{si } n = 0 \\ b_\sigma(Sd_{n-1}(\partial_n(\sigma))) & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

y  $b_\sigma \in \Delta_q$  denota el baricentro del símplice  $\sigma = (a_0 \cdots a_n)$ , es decir,  $b_\sigma = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n a_i$ . Este operador se extiende de manera lineal sobre  $n$ -cadenas para obtener un homomorfismo.

Intuitivamente, el operador  $Sd_n$  divide un  $n$ -símplice singular sobre  $\Delta_q$ ,  $\sigma_n = (a_0 \cdots a_n)$ , en  $n$ -símplices más pequeños. Si denotamos por  $\sigma_i$  a uno de los  $i$ -símplices que componen la frontera de  $\sigma_{i+1}$ , para  $i \in \{n, \dots, 1\}$ , obtenemos una cadena  $\sigma_n > \sigma_{n-1} > \cdots > \sigma_1$ , donde  $\sigma_{i+1} > \sigma_i$  indica que  $\sigma_i$  pertenece a la frontera de  $\sigma_{i+1}$ . Esto nos permite describir los  $n$ -símplices más pequeños que obtenemos de la subdivisión baricéntrica. Son los  $n$ -símplices que tienen como  $(n+1)$  v rtices, los baricentros de los  $\sigma_i$  con  $i \in \{1, \dots, n\}$  y un  $a_j$  con  $j \in \{0, \dots, n\}$ . Por tanto,  $Sd_n(\sigma)$  es una suma con signo de  $n$ -símplices de la forma  $(b_{\sigma_n} b_{\sigma_{n-1}} \cdots b_{\sigma_1} a_j)$ . Veámoslo en un dibujo.



**Lema 2.4.1.** *El operador subdivisión baricéntrica es una aplicación en cadenas, es decir, hace el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc}
 S_n(\Delta_q) & \xrightarrow{Sd_n} & S_n(\Delta_q) \\
 \downarrow \partial_n & & \downarrow \partial_n \\
 S_{n-1}(\Delta_q) & \xrightarrow{Sd_{n-1}} & S_{n-1}(\Delta_q)
 \end{array}$$

*Demostración.* Basta con probar la conmutatividad sobre un  $n$ -símplice. Procedemos con inducción sobre  $n$  para  $n \geq 1$  y probamos el caso  $n = 0$  por separado. El caso  $n = 0$  es directo. Por un lado,  $\partial_0(Sd_0(\sigma)) = \partial_0(\sigma) = 0$  porque  $\partial_0$  es la aplicación nula. Por otro lado,  $Sd_{-1}(\partial_0(\sigma)) = Sd_{-1}(0) = 0$ , haciendo el convenio de que  $Sd_{-1}$  es la aplicación nula. Pasando a la inducción,  $n = 1$ , tenemos por un lado  $Sd_0(\partial_1(\sigma)) = \partial_0(\sigma)$  y por el otro lado, tenemos  $\partial_1(Sd_1(\sigma)) = \partial_1(b_\sigma(\partial_1(\sigma))) = \partial_1(\sigma) - b_\sigma + b_\sigma$ , de donde se concluye la igualdad. Asumimos cierto para  $n - 1$ , entonces  $\partial_n(Sd_n(\sigma)) = \partial_n(b_\sigma(Sd_{n-1}(\partial_n(\sigma)))) = Sd_{n-1}(\partial_n(\sigma)) - b_\sigma(\partial_{n-1}(Sd_{n-1}(\partial_n(\sigma)))) = Sd_{n-1}(\partial_n(\sigma)) - b_\sigma(Sd_{n-1}(\partial_{n-2}(\partial_n(\sigma)))) = Sd_{n-1}(\partial_n(\sigma))$ .  $\square$

Ya hemos construido el primer operador,  $Sd_n$ . Ahora podemos definir el segundo operador,  $T_n$ , a partir del primero.

**Definición 2.4.3.** Definimos el operador  $T_n : S_n(\Delta_q) \rightarrow S_{n+1}(\Delta_q)$  de manera inductiva como  $T_n(\sigma) = b_\sigma(Sd_n(\sigma) - \sigma - T_{n-1}(\partial_n(\sigma)))$  si  $n > 0$  y  $T_0 = 0$ . Lo extendemos de manera lineal a  $n$ -cadenas para obtener un homomorfismo de grupos.

**Lema 2.4.2.** *El homomorfismo  $T_n$  es una homotopía en cadenas entre  $Sd_n$  y  $1_{S_n(\Delta_q)}$ , es decir,  $\partial_{n+1} \circ T_n + T_{n-1} \circ \partial_n = Sd_n - 1_{S_n(\Delta_q)}$  para todo  $n \geq 0$ .*

*Demostración.* La demostración es muy similar a la del lema 2.4.1. Se razona por inducción los casos  $n \geq 1$  y el caso  $n = 0$  es directo.  $\square$

Por este último lema, las aplicaciones  $Sd_n$  y  $1_{S_n(\Delta_q)}$  inducen aplicaciones idénticas sobre los grupos de homología, ya que si  $c \in Z_n(\Delta_q)$ , entonces  $Sd_n(c) - 1_{S_n(\Delta_q)}(c) = \partial_{n+1} \circ T_n(c) + T_{n-1} \circ \partial_n(c) = \partial_{n+1}(T_n(c)) \in B_n(\Delta_n)$ .

Ahora nos gustaría extender estos dos operadores definidos sobre el espacio topológico  $\Delta_q$ , a un espacio topológico  $X$  cualquiera pero sin perder las propiedades que hemos demostrado hasta ahora. Aprovechando que  $\sigma = S_n(\sigma)(1_{\Delta_n})$  e intentando hacer que verifiquen la condición de naturalidad, definimos:

$$\begin{array}{lcl}
 Sd_n^X : S_n(X) & \longrightarrow & S_n(X) \\
 & \sigma & \longmapsto S_n(\sigma)(Sd_n(1_{\Delta_n})) \\
 T_n^X : S_n(X) & \longrightarrow & S_{n+1}(X) \\
 & \sigma & \longmapsto S_{n+1}(\sigma)(T_n(1_{\Delta_n}))
 \end{array}$$

Con estas definiciones se puede comprobar que los operadores verifican las siguientes propiedades:

- (i) Si tomamos  $X = \Delta_q$ , las nuevas definiciones coinciden con las vistas anteriormente.
- (ii) Verifican la condición de naturalidad, es decir,  $S_n(f) \circ Sd_n^X = Sd_n^Y \circ S_n(f)$  y  $S_n(f) \circ T_n^X = T_n^Y \circ S_n(f)$  para toda  $f : X \rightarrow Y$  continua.
- (iii) Como consecuencia del lema 2.4.1,  $Sd_n^X$  es también una aplicación en cadenas, es decir,  $\partial_n^X \circ Sd_n^X = Sd_{n-1}^X \circ \partial_n^X$ .
- (iv) Como consecuencia del lema 2.4.2,  $T_n^X$  es también una homotopía en cadenas entre  $Sd_n^X$  y  $1_{S_n(X)}$ , es decir,  $\partial_{n+1}^X \circ T_n^X + T_{n-1}^X \circ \partial_n^X = Sd_n^X - 1_{S_n(X)}$ .

Tenemos ya las principales herramientas de la prueba del teorema de excisión.

## 2.5. Teorema de excisión

En esta sección vamos finalmente a demostrar el teorema de excisión. El teorema de excisión facilita el calculo de grupos de homología relativa de un par  $(X, A)$ . Impone unas condiciones bajo las cuales, un subconjunto  $U$  de  $A$ , puede excindirse, es decir, ser eliminado del espacio topológico sin afectar a los grupos de homología. El teorema afirma que bajo ciertas condiciones,  $H_n(X - U, A - U) \cong H_n(X, A)$  para todo  $n \geq 0$ . Así, en ciertas ocasiones, podremos prescindir de trozos de un espacio topológico que dificultan el cálculo de su homología. Veamos varios resultados previos y definiciones de conceptos necesarios.

**Definición 2.5.1.** El diámetro de un  $n$ -símplice afín  $\sigma \in S_n(\Delta_q)$  es  $\text{diám}(\sigma) = \sup\{\|a - b\| \mid a, b \in \sigma(\Delta_n)\}$  donde  $\|\cdot\|$  denota la norma euclídea.

**Lema 2.5.1.** Sea  $\sigma \in S_n(\Delta_q)$ , entonces, todo  $n$ -símplice afín  $\sigma_i$  que aparece en la expresión de  $Sd_n(\sigma) = \sum n_i \sigma_i$  tiene diámetro menor o igual que  $\frac{p}{p+1} \text{diám}(\sigma)$ .

*Demostración.* Es consecuencia directa del siguiente resultado (A.3.1). Si  $w_1, \dots, w_k \in \mathbb{R}^n$  y  $m < k \leq p + 1$ , entonces:

$$\left\| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w_i - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m w_i \right\| \leq \frac{p}{p+1} \max\|w_i - w_j\|$$

Solo hay que tomar como  $w_i$  los vértices de  $\sigma$  y obtenemos el resultado.  $\square$

**Corolario 2.5.2.** Si  $n \leq q$ , todo  $n$ -símplice afin  $\sigma_i$  que aparece en la expresión de  $Sd_n^k((e_0 \cdots e_n)) = \sum n_i \sigma_i \in S_n(\Delta_q)$  tiene diámetro menor o igual que  $(\frac{p}{p+1})^k \cdot \text{diám}((e_0 \cdots e_q))$  y esta cota converge a cero cuando  $k$  tiende a infinito.

Hemos probado por tanto, que podemos hacer un  $n$ -símplice de un diámetro tan pequeño como queramos, solo hay que aplicar el operador  $Sd_n$  un número suficiente de veces. Definamos de manera rigurosa qué es que un símplice sea "pequeño" en homología.

**Definición 2.5.2.** Sea  $X$  un espacio topológico y  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  un cubrimiento por abiertos de  $X$ . Se dice que un  $n$ -símplice singular  $\sigma$  es pequeño de orden  $\mathcal{U}$  si  $\sigma(\Delta_n)$  está contenido en algún  $U_i$ . Se dice que una  $n$ -cadena,  $c = \sum n_i \sigma_i$ , es pequeña de orden  $\mathcal{U}$  si todos los  $n$ -símplices,  $\sigma_i$ , que aparecen en su expresión son pequeños de orden  $\mathcal{U}$ .

**Corolario 2.5.3.** Sea  $X$  un espacio topológico,  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  un cubrimiento por abiertos de  $X$  y  $\sigma \in S_n(X)$ . Entonces existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $(Sd_n^X)^k(\sigma)$  es pequeño de orden  $\mathcal{U}$ .

*Demostración.* Su demostración es consecuencia directa del lema del número de Lebesgue (A.3.2) aplicado a símplices y del corolario 2.5.2.  $\square$

Hemos obtenido una forma de convertir cadenas en cadenas pequeñas de orden  $\mathcal{U}$ . Veamos ahora que al hacerlas pequeñas, su clase de homología relativa se mantiene.

**Teorema 2.5.4.** Toda clase de homología relativa de  $H_n(X, A)$  puede representarse con un ciclo relativo pequeño de orden  $\mathcal{U}$ .

*Demostración.* Sea  $c \in Z_n(X, A)$ . Vamos a probar que  $(Sd_n^X)^{k-1}(c) - (Sd_n^X)^k(c) \in B_n(X, A)$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Por la homotopía en cadenas sabemos que  $(Sd_n^X)^k(c) - (Sd_n^X)^{k-1}(c) = \partial_{n+1}^X \circ T_n^X((Sd_n^X)^{k-1}(c)) + T_{n-1}^X \circ \partial_n^X((Sd_n^X)^{k-1}(c))$ . Como  $c \in Z_n(X, A)$ ,  $\partial_n^X(c) \in S_{n-1}(A)$  y por tanto  $T_{n-1}^X \circ \partial_n^X((Sd_n^X)^{k-1}(c)) = T_{n-1}^X \circ (Sd_{n-1}^X)^{k-1}(\partial_n^X(c)) \in S_n(A) \subseteq B_n(X, A)$ . Por tanto, como  $\partial_{n+1}^X \circ T_n^X((Sd_n^X)^{k-1}(c)) \in B_n(X, A)$ ,  $(Sd_n^X)^k(c) - (Sd_n^X)^{k-1}(c) \in B_n(X, A)$ . Entonces  $c - (Sd_n^X)^k(c) = c - Sd_n^X(c) + \cdots + (Sd_n^X)^{k-1}(c) - (Sd_n^X)^k(c) \in B_n(X, A)$  y  $c + B_n(X, A) = (Sd_n^X)^k(c) + B_n(X, A)$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Por el corolario 2.5.3, existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $(Sd_n^X)^{k_0}(c)$  es pequeño de orden  $\mathcal{U}$ .  $\square$

Por último, veamos la definición de excisión antes de empezar con el teorema de excisión.

**Definición 2.5.3.** Sea  $U \subseteq A \subseteq X$ . Se dice que  $U$  puede excindirse o que la inclusión  $j : H_n(X - U, A - U) \rightarrow (X, A)$  es una excisión, si  $j$  induce un isomorfismo  $H_n(j) : H_n(X - U, A - U) \rightarrow H_n(X, A)$  para todo  $n \geq 0$ .

Para el enunciado del teorema de excisión introducimos la siguiente notación: la clausura de un conjunto  $U$  la denotaremos por  $\bar{U}$  y su interior lo denotaremos por  $\overset{\circ}{U}$ .

**Teorema 2.5.5.** (*Teorema de excisión*)

Sea  $U \subseteq X$  tal que  $\bar{U} \subset \overset{\circ}{A}$ , entonces  $U$  puede excindirse.

*Demostración.* Sea  $c \in Z_n(X, A)$  y  $\mathcal{U} = \{X - \bar{U}, \overset{\circ}{A}\}$  un cubrimiento por abiertos de  $X$ . Por el teorema 2.5.4, existe  $z = \sum_{i=0}^r n_i \sigma_i \in Z_n(X, A)$  tal que  $c + B_n(X, A) = z + B_n(X, A)$  y  $z$  es pequeño de orden  $\mathcal{U}$ . Sea  $I = \{i_0, \dots, i_m\}$  el conjunto de subíndices tales que  $\sigma_i(\Delta_n) \subseteq X - \bar{U}$  y  $J = \{i_{m+1}, \dots, i_r\}$  el conjunto de subíndices tales que  $\sigma_i(\Delta_n) \subseteq \overset{\circ}{A} \subseteq A$ . Como  $S_n(A) \subseteq B_n(X, A)$ ,  $\sum_{i \in J} n_i \sigma_i \in B_n(X, A)$  y se tiene que  $z + B_n(X, A) = \sum_{i \in I} n_i \sigma_i + B_n(X, A)$  con  $\sum_{i \in I} n_i \sigma_i \in Z_n(X - U, A - U)$ . Por tanto hemos encontrado  $\tilde{c} = \sum_{i \in I} n_i \sigma_i \in Z_n(X - U, A - U)$  tal que  $H_n(j)(\tilde{c} + B_n(X - U, A - U)) = c + B_n(X, A)$  y  $H_n(j)$  es sobreyectiva.

Sea  $c \in Z_n(X - U, A - U)$  tal que  $H_n(j)(c + B_n(X - U, A - U)) = B_n(X, A)$ . Entonces existen  $\tilde{c} \in S_{n+1}(X)$  y  $c_A \in S_n(A)$  tal que  $c = c_A + \partial_{n+1}(\tilde{c})$ . Por el corolario 2.5.3, existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $(Sd_{n+1}^X)^k(\tilde{c})$  es pequeño de orden  $\mathcal{U} = \{X - \bar{U}, \overset{\circ}{A}\}$ . Luego  $(Sd_{n+1}^X)^k(\tilde{c}) = c_1 + c_2$ , donde  $c_1 \in S_{n+1}(X - U)$  y  $c_2 \in S_{n+1}(A)$ . Entonces tenemos que  $(Sd_n^X)^k(c) = (Sd_n^X)^k(c_A) + (Sd_n^X)^k(\partial_{n+1}(\tilde{c})) = (Sd_n^X)^k(c_A) + \partial_{n+1}((Sd_{n+1}^X)^k(\tilde{c})) = (Sd_n^X)^k(c_A) + \partial_{n+1}(c_1) + \partial_{n+1}(c_2)$ . Y por tanto:

$$\underbrace{(Sd_n^X)^k(c) - \partial_{n+1}(c_1)}_{\in S_n(X - U)} = \underbrace{(Sd_n^X)^k(c_A) + \partial_{n+1}(c_2)}_{\in S_n(A)}$$

De ahí se concluye que  $(Sd_n^X)^k(c) - \partial_{n+1}(c_1) \in S_n(A - U) \subseteq B_n(X - U, A - U)$  y como  $\partial_{n+1}(c_1) \in B_n(X - U, A - U)$ ,  $(Sd_n^X)^k(c) \in B_n(X - U, A - U)$ . En resumen,  $z + B_n(X - U, A - U) = (Sd_n^X)^k(c) + B_n(X - U, A - U) = 0 + B_n(X - U, A - U)$  y por tanto  $\text{Ker}(H_n(j)) = B_n(X - U, A - U)$ , es inyectiva.  $\square$

El problema del teorema de excisión, es que en ocasiones, las hipótesis pueden ser muy restrictivas. Para esas situaciones tenemos el siguiente teorema, que amplía los casos en los que  $U$  puede excindirse.

**Teorema 2.5.6.** *Sea  $V \subseteq U \subseteq A \subseteq X$ . Si  $V$  puede excindirse y  $X - U$  es un retracto por deformación de  $X - V$ , entonces  $U$  puede excindirse.*

*Demostración.* Sea  $r : X - V \rightarrow X - U$  la retracción. Por ser retracto por deformación, la aplicación  $1_{X-V}$  es homótopa a la aplicación  $i_{X-U} \circ r$ , donde  $i_{X-U} : (X - U, A - U) \rightarrow (X - V, A - V)$  es la aplicación inclusión y  $1_{X-U} = r \circ i_{X-U}$ . Por el corolario 1.4.2,  $1_{H_n(X-U, A-U)} = H_n(1_{X-V}) = H_n(i_{X-U} \circ r) = H_n(i_{X-U}) \circ H_n(r)$  y  $H_n(i_{X-U})$  es sobreyectiva. Como además,  $1_{H_n(X-U, A-U)} = H_n(r) \circ H_n(i_{X-U})$ ,  $H_n(i_{X-U})$  es inyectiva y por

tanto, un isomorfismo. Si denotamos por  $j_U : (X - U, A - U) \rightarrow (X, A)$  y por  $j_V : (X - V, A - V) \rightarrow (X, A)$  a las inclusiones, tenemos que  $H_n(j_U) = H_n(j_V) \circ H_n(i_{X-U})$  donde  $H_n(j_V)$  es isomorfismo porque  $V$  puede excindirse y  $H_n(i_{X-U})$  es isomorfismo por lo visto al principio de la demostración. Luego  $H_n(j_U)$  es un isomorfismo para todo  $n \geq 0$  y  $U$  puede excindirse.  $\square$

Veamos una aplicación del teorema. Este corolario nos será de ayuda en el cálculo de la homología de la  $n$ -esfera en la siguiente sección.

**Corolario 2.5.7.** Sean  $E_n^+ = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \mid x_{n+1} \geq 0\}$  y  $E_n^- = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \mid x_{n+1} \leq 0\}$  las semiesferas cerradas de la esfera  $\mathbb{S}^n$ . Entonces, la inclusión  $j : (E_n^+, \mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow (\mathbb{S}^n, E_n^-)$  es una excisión.

*Demostración.* Basta con aplicar el teorema 2.5.6 tomando  $X = \mathbb{S}^n$ ,  $A = E_n^-$ ,  $U = E_n^-$  y  $V = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \mid x_{n+1} \leq \frac{1}{2}\}$ . Comprobemos las hipótesis. Se tiene que  $V \subseteq U \subseteq A \subseteq X$  y además,  $X - U = E_n^+$  es retracto por deformación de  $X - V$ , siendo la retracción:

$$r((x_1, \dots, x_{n+1})) = \begin{cases} (x_1, \dots, x_{n+1}) & \text{si } (x_1, \dots, x_{n+1}) \in E_n^+ \\ \frac{(x_1, \dots, x_n, 0)}{\|(x_1, \dots, x_n, 0)\|} & \text{si } (x_1, \dots, x_{n+1}) \notin E_n^+ \end{cases}$$

Por último, por el teorema de excisión, como  $\bar{V} \subseteq \overset{\circ}{A}$ ,  $V$  puede excindirse, luego, aplicando el teorema 2.5.6, obtenemos que  $U$  puede excindirse y por tanto  $H_q(E_n^+, \mathbb{S}^{n-1}) \cong H_q(\mathbb{S}^n, E_n^-)$  para todo  $q \geq 0$ .  $\square$

## 2.6. Homología de la $n$ -esfera, $\mathbb{S}^n$

Con todo el trabajo realizado hasta ahora, estamos casi en situación de calcular los grupos de homología de la  $n$ -esfera. Solamente nos queda una última proposición por demostrar:

**Proposición 2.6.1.** Para todo  $q \geq 2$  y  $n \geq 1$ , se tiene que  $H_q(\mathbb{S}^n) \cong H_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1})$  y  $H_1(\mathbb{S}^n, E_n^-) \cong H_1(\mathbb{S}^n)$ .

*Demostración.* Consideremos el homeomorfismo  $P : (E_n^+, \mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$  que consiste en proyectar las  $n$  primeras coordenadas:  $P((x_1, \dots, x_{n+1})) = (x_1, \dots, x_n)$ . Este induce un isomorfismo  $H_q(P)$ . Entonces tenemos que para todo  $n \geq 1$  y  $q \geq 2$ :

$$H_q(\mathbb{S}^n, E_n^-) \stackrel{2,6,7}{\cong} H_q(E_n^+, \mathbb{S}^{n-1}) \stackrel{H_q(P)}{\cong} H_q(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \stackrel{\text{Ejemplo 2.3.1}}{\cong} H_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1})$$

Como  $E_n^-$  es contráctil, tiene el tipo de homotopía de un punto,  $p_0$ , y aplicando el teorema de invarianza por homotopía de la homología relativa obtenemos que  $H_q(\mathbb{S}^n, E_n^-) \cong H_q(\mathbb{S}^n, p_0) \cong H_q(\mathbb{S}^n)$ . Por tanto  $H_q(\mathbb{S}^n) \cong H_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ .

$H_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1})$  para todo  $n \geq 1$  y  $q \geq 2$ .

Para el otro isomorfismo, consideramos la sucesión exacta:

$$\{0\} \longrightarrow H_1(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{H_1(1_{\mathbb{S}^n})} H_1(\mathbb{S}^n, E_n^-) \xrightarrow{\delta_1} H_0(E_n^-) \xrightarrow{H_0(i_{E_n^-})} H_0(\mathbb{S}^n) \longrightarrow \{0\}$$

Como conocemos los grupos de homología  $H_0$  de un conexo por caminos y sabemos como actúa la aplicación  $H_0(i_{E_n^-})$ , se puede comprobar que  $H_0(i_{E_n^-})$  es un isomorfismo. De ello se concluye que  $\text{Im}(\delta_1) = \text{Ker}(H_0(i_{E_n^-})) = 0$  y el homomorfismo  $\delta_1$  es la aplicación nula. Por tanto,  $\text{Im}(H_1(1_{\mathbb{S}^n})) = \text{Ker}(\delta_1) = H_1(\mathbb{S}^n, E_n^-)$  y  $H_1(1_{\mathbb{S}^n})$  es sobreyectiva. Como también es inyectiva por la exactitud de la sucesión,  $H_1(1_{\mathbb{S}^n})$  es en concreto un isomorfismo y  $H_1(\mathbb{S}^n, E_n^-) \cong H_1(\mathbb{S}^n)$ .  $\square$

Finalmente, obtenemos como corolario, los grupos de homología de la  $n$ -esfera.

**Corolario 2.6.2.** Para todo  $q \geq 1$  y  $n \geq 1$ , se tiene:

$$H_q(\mathbb{S}^n) \cong H_q(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } q = n \\ 0 & \text{si } q \neq n \end{cases}$$

*Demostración.* Si  $n \geq q$ :

$$\begin{aligned} H_q(\mathbb{S}^n) &\stackrel{2.6.1}{\cong} H_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \stackrel{2.6.1}{\cong} \dots \stackrel{2.6.1}{\cong} H_1(\mathbb{S}^{n-q+1}) \stackrel{2.6.1}{\cong} H_1(\mathbb{S}^{n-q+1}, E_{n-q+1}^-) \\ &\stackrel{2.5.7}{\cong} H_1(E_{n-q+1}^+, \mathbb{S}^{n-q}) \stackrel{H_1(P)}{\cong} H_1(\mathbb{D}^{n-q+1}, \mathbb{S}^{n-q}) \stackrel{\text{Ejemplo 2.3.1}}{\cong} \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = q \\ 0 & \text{si } n > q \end{cases} \end{aligned}$$

Si  $n < q$ :

$$H_q(\mathbb{S}^n) \stackrel{2.6.1}{\cong} H_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \stackrel{2.6.1}{\cong} \dots \stackrel{2.6.1}{\cong} H_{q-n}(\mathbb{S}^0) \stackrel{1.1.3 \text{ y } 1.1.4}{\cong} 0$$

$\square$

## 2.7. La sucesión de Mayer-Vietoris

En esta sección vamos a construir la sucesión de Mayer-Vietoris y a probar su exactitud. Esta sucesión relaciona los grupos de homología de dos subespacios  $X_1$  y  $X_2$  de  $X$ , con los grupos de homología de  $X$  y con los de  $X_1 \cap X_2$ . Más adelante veremos varios ejemplos de como se puede emplear, calculando los grupos de homología de la rosa de  $n$  pétalos y los de la superficie compacta de género  $g$ . Empezamos definiendo un nuevo concepto.

**Definición 2.7.1.** Sea  $X$  un espacio topológico y  $X_1, X_2 \subseteq X$  dos subespacios. Se dice que la terna  $(X, X_1, X_2)$  es exacta si las inclusiones  $k_1 : (X_1, X_1 \cap X_2) \longrightarrow (X_1 \cup X_2, X_2)$  y  $k_2 : (X_2, X_1 \cap X_2) \longrightarrow (X_1 \cup X_2, X_1)$  son excisiones. En tal caso  $H_n(k_1) : H_n(X_1, X_1 \cap X_2) \cong H_n(X_1 \cup X_2, X_2)$  y  $H_n(k_2) : H_n(X_2, X_1 \cap X_2) \cong H_n(X_1 \cup X_2, X_1)$  para todo  $n \geq 0$ .

**Ejemplo 2.7.1.** Si  $X = X_1 \cup X_2$  y  $X_1$  y  $X_2$  son abiertos, entonces la terna  $(X, X_1, X_2)$  es exacta. Solo hay que tomar  $A = X_1$  y  $U = X_1 - (X_1 \cap X_2)$  y utilizar el teorema de excisión. Como  $X - U = X_2$ ,  $U$  es cerrado y entonces  $\bar{U} = U \subseteq X_1 = \hat{X}_1 = \hat{A}$ , es decir, se verifican las hipótesis del teorema de excisión y  $U$  puede excindirse. Análogamente, si  $A = X_2$ ,  $X_2 - (X_1 \cap X_2)$  también puede excindirse.

Procedemos con el lema de Barratt-Whitehead, el cual necesitaremos para la demostración de la exactitud de la sucesión de Mayer-Vietoris.

**Lema 2.7.1.** (*Lema de Barratt-Whitehead*)

Dado un diagrama de grupos y homomorfismos como el siguiente:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \cdots & \rightarrow & C_{i+1} & \xrightarrow{h_{i+1}} & A_i & \xrightarrow{f_i} & B_i & \xrightarrow{g_i} & C_i & \xrightarrow{h_i} & A_i & \rightarrow & \cdots \\ & & | & & | & & | & & | & & | & & \\ & & \gamma_{i+1} & & \alpha_i & & \beta_i & & \gamma_i & & \alpha_{i-1} & & \\ & & \downarrow & & \\ \cdots & \rightarrow & \hat{C}_{i+1} & \xrightarrow{\hat{h}_{i+1}} & \hat{A}_i & \xrightarrow{\hat{f}_i} & \hat{B}_i & \xrightarrow{\hat{g}_i} & \hat{C}_i & \xrightarrow{\hat{h}_i} & \hat{A}_i & \rightarrow & \cdots \end{array}$$

Si los cuadrados conmutan, las dos filas son sucesiones exactas y los  $\gamma_i$  son isomorfismos, entonces existe una sucesión exacta larga:

$$\cdots \rightarrow A_i \xrightarrow{\Phi_i} \hat{A}_i \oplus B_i \xrightarrow{\Psi_i} \hat{B}_i \xrightarrow{\Upsilon_i} A_{i-1} \rightarrow \cdots$$

Donde:

- (i)  $\Phi_i(a_i) = (\alpha_i \oplus f_i)(a_i, a_i) = (\alpha_i(a_i), f_i(a_i))$
- (ii)  $\Psi_i(\hat{a}_i, b_i) = -\hat{f}_i(\hat{a}_i) + \beta_i(b_i)$
- (iii)  $\Upsilon_i(\hat{b}_i) = h_i \circ (\gamma_i)^{-1} \circ \hat{g}_i(\hat{b}_i)$

A esta sucesión se la llama sucesión de Barratt-Whitehead asociada al diagrama.

*Demostración.* Veamos en primer lugar que  $Im(\Psi_i) = Ker(\Upsilon_i)$ :

- (i) Sea  $\Psi_i(\hat{a}_i, b_i) \in Im(\Psi_i)$ , entonces se tiene que  $\Upsilon_i(\Psi_i(\hat{a}_i, b_i)) = \Upsilon_i(-\hat{f}_i(\hat{a}_i) + \beta_i(b_i)) = h_i \circ (\gamma_i)^{-1} \circ \hat{g}_i(-\hat{f}_i(\hat{a}_i) + \beta_i(b_i)) = h_i \circ (\gamma_i)^{-1} \circ \hat{g}_i \circ \beta_i(b_i) = h_i \circ g_i(b_i) = 0$  porque  $\hat{g}_i \circ \hat{f}_i = 0$ ,  $(\gamma_i)^{-1} \circ \hat{g}_i \circ \beta_i = g_i$  y  $h_i \circ g_i = 0$ . Luego  $Im(\Psi_i) \subseteq Ker(\Upsilon_i)$ .
- (ii) Sea  $\hat{b}_i \in Ker(\Upsilon_i)$ . Luego  $h_i \circ (\gamma_i)^{-1} \circ \hat{g}_i(\hat{b}_i) = 0$  y  $(\gamma_i)^{-1} \circ \hat{g}_i(\hat{b}_i) \in Ker(h_i) = Im(g_i)$ . Por tanto existe  $b_i \in B_i$  tal que  $g_i(b_i) = (\gamma_i)^{-1} \circ \hat{g}_i(\hat{b}_i)$  y se tiene que  $\hat{g}_i(\hat{b}_i - \beta_i(b_i)) = \hat{g}_i(\hat{b}_i) - \hat{g}_i \circ \beta_i(b_i) = \hat{g}_i(\hat{b}_i) - \gamma_i \circ g_i(b_i) = 0$ , es decir,  $\hat{b}_i - \beta_i(b_i) \in Ker(\hat{g}_i) = Im(\hat{f}_i)$ . De donde se deduce que existe  $\hat{a}_i \in \hat{A}_i$  tal que  $\hat{f}_i(\hat{a}_i) = \hat{b}_i - \beta_i(b_i)$ . Reordenando los términos,  $\hat{b}_i = \hat{f}_i(\hat{a}_i) + \beta_i(b_i) = \Psi_i(-\hat{a}_i, b_i)$  y  $Im(\Psi_i) \supseteq Ker(\Upsilon_i)$ .

Veamos en segundo lugar que  $Im(\Phi_i) = Ker(\Psi_i)$ :

- (i) Sea  $\Phi_i(a_i) \in Im(\Phi_i)$ , entonces  $\Psi_i \circ \Phi_i(a_i) = \Psi_i(\alpha_i(a_i), f_i(a_i)) = -\hat{f}_i \circ \alpha_i(a_i) + \beta_i \circ f_i(a_i) = 0$  porque  $\hat{f}_i \circ \alpha_i = \beta_i \circ f_i$ . Luego  $Im(\Phi_i) \subseteq Ker(\Psi_i)$ .
- (ii) Sea  $(\hat{a}_i, b_i) \in Ker(\Psi_i)$ , es decir,  $\hat{f}_i(\hat{a}_i) = \beta_i(b_i)$ . Como  $\hat{g}_i \circ \hat{f}_i = 0$ ,  $0 = \hat{g}_i \circ \hat{f}_i(\hat{a}_i) = \hat{g}_i \circ \beta_i(b_i) = \gamma_i \circ g_i(b_i)$  y dado que  $\gamma_i$  es un isomorfismo,  $g_i(b_i) = 0$ , es decir,  $b_i \in Ker(g_i) = Im(f_i)$ . Luego existe  $a_i \in A_i$  tal que  $f_i(a_i) = b_i$  y por tanto,  $\beta_i(b_i) = \beta_i(f_i(a_i)) = \hat{f}_i(\alpha_i(a_i))$ . Se concluye que  $\hat{f}_i(\hat{a}_i - \alpha_i(a_i)) = \hat{f}_i(\hat{a}_i) - \beta_i(b_i) = 0$  y  $\hat{a}_i - \alpha_i(a_i) \in Ker(\hat{f}_i) = Im(\hat{h}_{i+1})$ , es decir, existe  $\hat{c}_{i+1} \in C_{i+1}$  tal que  $\hat{h}_{i+1}(\hat{c}_{i+1}) = \hat{a}_i - \alpha_i(a_i)$ . De nuevo, como  $\gamma_{i+1}$  es un isomorfismo, existe  $c_{i+1} \in C_{i+1}$  tal que  $\gamma_{i+1}(c_{i+1}) = \hat{c}_{i+1}$  y por tanto  $\hat{a}_i - \alpha_i(a_i) = \hat{h}_{i+1}(\gamma_{i+1}(c_{i+1})) = \alpha_i \circ h_{i+1}(c_i)$ , i.e.,  $\hat{a}_i = \alpha_i(a_i + h_{i+1}(c_i))$ . Finalmente,  $\Phi_i(a_i + h_{i+1}(c_i)) = (\alpha_i(a_i + h_{i+1}(c_i)), f_i(a_i + h_{i+1}(c_i))) = (\hat{a}_i, f_i(a_i)) = (\hat{a}_i, b_i) \in Im(\Phi_i)$  y  $Im(\Phi_i) \supseteq Ker(\Psi_i)$ .

Veamos por último que  $Im(\Upsilon_{i+1}) = Ker(\Phi_i)$ :

- (i) Sea  $\Upsilon_{i+1}(\hat{b}_{i+1}) \in Im(\Upsilon_{i+1})$ , entonces  $\Phi_i(\Upsilon_{i+1}(\hat{b}_{i+1})) = \Phi_i(h_{i+1} \circ (\gamma_{i+1})^{-1} \circ \hat{g}_{i+1}(\hat{b}_{i+1})) = (\alpha_i \circ h_{i+1} \circ (\gamma_{i+1})^{-1} \circ \hat{g}_{i+1}(\hat{b}_{i+1}), f_i \circ h_{i+1} \circ (\gamma_{i+1})^{-1} \circ \hat{g}_{i+1}(\hat{b}_{i+1})) = (\hat{h}_{i+1} \circ \gamma_{i+1} \circ (\gamma_{i+1})^{-1} \circ \hat{g}_{i+1}(\hat{b}_{i+1}), 0) = (\hat{h}_{i+1} \circ \hat{g}_{i+1}(\hat{b}_{i+1}), 0) = (0, 0)$  porque  $f_i \circ h_{i+1} = 0$ ,  $\alpha_i \circ h_{i+1} = \hat{h}_{i+1} \circ \gamma_{i+1}$  y  $\hat{h}_{i+1} \circ \hat{g}_{i+1} = 0$ . Por tanto  $Im(\Upsilon_{i+1}) \subseteq Ker(\Phi_i)$ .
- (ii) Sea  $a_i \in Ker(\Phi_i)$ , es decir,  $a_i \in Ker(\alpha_i) \cap Ker(f_i) = Ker(\alpha_i) \cap Im(h_{i+1})$ . Por tanto existe  $c_{i+1} \in C_{i+1}$  tal que  $h_{i+1}(c_{i+1}) = a_i$ , y entonces  $0 = \alpha_i(a_i) = \alpha_i(h_{i+1}(c_{i+1})) = \hat{h}_{i+1}(\gamma_{i+1}(c_{i+1}))$ , es decir,  $\gamma_{i+1}(c_{i+1}) \in Ker(\hat{h}_{i+1}) = Im(\hat{g}_{i+1})$ . Luego existe  $\hat{b}_{i+1} \in \hat{B}_i$  tal que  $\hat{g}_{i+1}(\hat{b}_{i+1}) = \gamma_{i+1}(c_{i+1})$ , i.e.,  $(\gamma_{i+1})^{-1} \circ \hat{g}_{i+1}(\hat{b}_{i+1}) = c_{i+1}$ . Finalmente, tenemos que  $\Upsilon_{i+1}(\hat{b}_{i+1}) = h_{i+1} \circ (\gamma_{i+1})^{-1} \circ \hat{g}_{i+1}(\hat{b}_{i+1}) = h_{i+1}(c_{i+1}) = a_i \in Im(\Upsilon_{i+1})$  y  $Im(\Upsilon_{i+1}) \supseteq Ker(\Phi_i)$ .

□

La sucesión de Mayer-Vietoris es la sucesión de Barratt-Whitehead asociada a un diagrama concreto. Veamos qué diagrama es.

**Proposición 2.7.2.** *Sea  $(X, X_1, X_2)$  una terna exacta donde  $X = X_1 \cup X_2$  y sea  $A = X_1 \cap X_2$ . Si denotamos por  $i$  a las inclusiones, entonces el diagrama:*

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \rightarrow & H_n(A) & \xrightarrow{H_n(i_A^{X_1})} & H_n(X_1) & \xrightarrow{H_n(1_{X_1}^A)} & H_n(X_1, A) & \xrightarrow{\delta_n^{(X_1, A)}} & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & H_n(i_A^{X_2}) & & H_n(i_{X_1}^X) & & H_n(i_{X_1}) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \cdots & \rightarrow & H_n(X_2) & \xrightarrow{H_n(i_{X_2}^X)} & H_n(X) & \xrightarrow{H_n(1_X^{X_2})} & H_n(X, X_2) & \xrightarrow{\delta_n^{(X, X_2)}} & \cdots
 \end{array}$$

Verifica las hipótesis del lema de Barratt-Whitehead.

*Demostración.* Ambas filas son exactas por el teorema 2.3.1, ya que son las sucesiones largas de homología de los pares  $(X_1, A)$  y  $(X, X_2)$ . Además,  $H_n(i_{X_1})$  es un isomorfismo para todo  $n \geq 0$  porque la terna  $(X, X_1, X_2)$  es exacta y por tanto  $i_{X_1} : (X_1, A) \rightarrow (X, X_2)$  es una excisión. Por último, la conmutatividad de los cuadrados es consecuencia directa de la proposición 2.3.2.  $\square$

**Definición 2.7.2.** Sea  $(X, X_1, X_2)$  una terna exacta. Se llama sucesión de Mayer-Vietoris de la terna  $(X, X_1, X_2)$ , a la sucesión de Barratt-Whitehead asociada al diagrama de la proposición 2.7.2. Esta sería:

$$\cdots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{\Phi_n} H_n(X_1) \oplus H_n(X_2) \xrightarrow{\Psi_n} H_n(X) \xrightarrow{\Upsilon_n} H_{n-1}(A) \rightarrow \cdots$$

Donde:

- (i)  $\Phi_n = H_n(i_A^{X_1}) \oplus H_n(i_A^{X_2})$
- (ii)  $\Psi_n = -H_n(i_{X_2}^X) + H_n(i_{X_1}^X)$
- (iii)  $\Upsilon_n = \delta_n^{X_1, A} \circ (H_n(i_{X_1}))^{-1} \circ H_n(1_{X_2}^X)$

**Teorema 2.7.3.** *La sucesión de Mayer-Vietoris es exacta.*

*Demostración.* Es consecuencia directa del lema de Barratt-Whitehead, el cual podemos aplicar por la proposición 2.7.2.  $\square$

Veamos finalmente como se puede aplicar esta sucesión al cálculo de grupos de homología. Procedemos por tanto con dos ejemplos, la rosa de  $n$  pétalos y la superficie compacta de género  $g$ .

## 2.8. Ejemplos

**Definición 2.8.1.** La rosa de  $n$  pétalos la denotamos por  $G_n$  y la definimos de forma recursiva como:

- (i)  $G_1 = \mathbb{S}^1$
- (ii)  $G_n = \mathbb{S}^1 \cup_p G_{n-1}$  donde  $G_{n-1} \cap \mathbb{S}^1 = \{p\}$  para todo  $n \geq 2$ .

Es la suma topológica de  $n$  copias de  $\mathbb{S}^1$  identificadas a través de un punto  $p$ .

**Proposición 2.8.1.** *Sea  $n \in \mathbb{N}$ , entonces:*

$$H_q(G_n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } q=0 \\ \mathbb{Z} \oplus \overset{(n)}{\cdots} \oplus \mathbb{Z} & \text{si } q=1 \\ 0 & \text{si } q>1 \end{cases}$$

*Demostración.* Vamos a calcular la sucesión de Mayer-Vietoris de la terna  $(G_n, G_{n-1}, \mathbb{S}^1)$  con  $n \geq 2$ . Veamos que es una terna exacta, para ello vamos a ver que si  $A = \mathbb{S}^1$ , entonces  $\mathbb{S}^1 - \{p\}$  puede excindirse y que si  $A = G_{n-1}$ , entonces  $G_{n-1} - \{p\}$  puede excindirse.

Empecemos con el primer caso:  $A = \mathbb{S}^1$  y  $U = \mathbb{S}^1 - \{p\}$ . Vamos a aplicar el teorema 2.5.6, tomando como  $V$  media esfera abierta de  $\mathbb{S}^1 - \{p\}$ . En tal caso  $V \subseteq U$ ,  $X - U$  es retracto por deformación de  $X - V$  y  $V$  puede excindirse por el teorema de excisión ( $\bar{V} \subseteq \mathbb{S}^1 - \{p\} = \dot{A}$ ). Por tanto, se puede aplicar el teorema 2.5.6 y  $U$  puede excindirse.

El segundo caso es análogo al primero, solo hay que aplicar el teorema 2.5.6 tomando  $A = G_{n-1}$ ,  $U = G_{n-1} - \{p\}$  y  $V = U - N$ , donde  $N$  es un entorno pequeño de  $\{p\}$ . Por tanto  $G_{n-1} - \{p\}$  puede excindirse y  $(G_n, G_{n-1}, \mathbb{S}^1)$  es una terna exacta.

Ahora ya podemos considerar la sucesión de Mayer-Vietoris, y aprovechando que ya conocemos los grupos de homología de un punto  $\{p\}$  y de  $\mathbb{S}^1$  la podemos calcular.

Si  $q \geq 2$ :

$$\cdots \rightarrow \{0\} \xrightarrow{\Phi_q} H_q(G_{n-1}) \oplus H_q(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\Psi_q} H_q(G_n) \xrightarrow{\Upsilon_q} \{0\} \rightarrow \cdots$$

Luego,  $\Psi_q$  es un isomorfismo por la exactitud de la sucesión ( $\text{Ker}(\Psi_q) = \text{Im}(\Phi_q) = 0$ ,  $\text{Im}(\Psi_q) = \text{Ker}(\Upsilon_q) = H_q(G_n)$ ), es decir, hemos probado que para todo  $q \geq 2$ ,  $H_q(G_{n-1}) \oplus H_q(\mathbb{S}^1) \cong H_q(G_n)$ .

Si  $q = 1$ :

$$\cdots \rightarrow \{0\} \xrightarrow{\Phi_1} H_1(G_{n-1}) \oplus H_1(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\Psi_1} H_1(G_n) \xrightarrow{\Upsilon_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\Phi_0} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \cdots$$

La aplicación  $\Phi_0$  proviene de la inclusión de  $\{p\}$  en  $G_{n-1}$  y  $\mathbb{S}^1$ . Denotamos por  $\sigma$  al único 0-símplice en  $\{p\}$ , el cual verifica  $\sigma(e_0) = p$ . Entonces  $\Phi_0(\sigma + B_0(\{p\})) = (\sigma + B_0(G_{n-1}), \sigma + B_0(\mathbb{S}^1))$ , es decir,  $\Phi_0$  manda el generador de  $H_0(\{p\})$  en la 2-tupla formada por los generadores de  $H_0(G_{n-1})$  y  $H_0(\mathbb{S}^1)$ . Visto como un homomorfismo de  $\mathbb{Z}$  en  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , es el homomorfismo que verifica  $\Phi_0(1) = (1, 1)$ . Por tanto,  $0 = \text{Ker}(\Phi_0) = \text{Im}(\Upsilon_1)$  y  $\Upsilon_1$  es la aplicación nula. De ahí se concluye que  $\text{Im}(\Psi_1) = \text{Ker}(\Upsilon_1) = H_1(G_n)$  y  $\Psi_1$  es sobreyectiva. Como además  $\Psi_1$  también es inyectiva por la exactitud de la sucesión ( $\text{Ker}(\Psi_1) = \text{Im}(\Phi_1) = 0$ ), es un isomorfismo, es decir,  $H_q(G_{n-1}) \oplus H_q(\mathbb{S}^1) \cong H_q(G_n)$  para todo  $q \geq 1$ .

Finalmente, razonando por inducción obtenemos los grupos de homología:

$$H_q(G_1) \cong H_q(\mathbb{S}^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } q = 0, 1 \\ 0 & \text{si } q > 1 \end{cases}$$

$$H_q(G_n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } q = 0 \\ H_q(G_{n-1}) \oplus H_q(\mathbb{S}^1) & \text{si } q \geq 1 \end{cases} \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } q = 0 \\ H_1(G_{n-1}) \oplus \mathbb{Z} & \text{si } q = 1 \\ H_q(G_{n-1}) \oplus 0 & \text{si } q > 1 \end{cases}$$

$$\cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } q = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \overset{(n)}{\dots} \oplus \mathbb{Z} & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{si } q > 1 \end{cases}$$

□

Otro ejemplo bonito sería el de la superficie compacta de género  $g$ , la cual denotamos por  $\mathbb{T}_g$ .

**Proposición 2.8.2.** *Sea  $g \in \mathbb{N}$ , entonces:*

$$H_n(\mathbb{T}_g) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n=0,2 \\ \mathbb{Z} \oplus \overset{2g}{\dots} \oplus \mathbb{Z} & \text{si } n=1 \\ 0 & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$$

*Demostración.* Sea  $p \in \mathbb{T}_g$ . Definimos  $X_1 = \mathbb{T}_g - N$  donde  $N$  es un entorno cerrado pequeño de  $p$  y definimos  $X_2$  como un entorno abierto y contráctil de  $p$  que contiene a  $N$ . Consideramos entonces la terna  $(\mathbb{T}_g, X_1, X_2)$ , la cual es exacta por lo visto en el ejemplo 2.7.1. Podemos por tanto considerar su sucesión de Mayer-Vietoris. Aprovechando que  $X_1$  tiene el mismo tipo de homotopía que  $G_{2g}$ , que  $X_2$  es contráctil y que  $X_1 \cap X_2$  tiene el tipo de homotopía de  $\mathbb{S}^1$ , podemos calcular sus grupos de homología gracias a la invarianza por homotopías. Esto nos simplifica la sucesión.

Si  $n \geq 3$ :

$$\dots \rightarrow 0 \oplus 0 \xrightarrow{\Psi_n} H_n(\mathbb{T}_g) \xrightarrow{\Upsilon_n} 0 \rightarrow \dots$$

Se concluye entonces que  $H_n(\mathbb{T}_g) = 0$  para todo  $n \geq 3$ .

Si  $n = 2$ :

$$\dots \rightarrow 0 \oplus 0 \xrightarrow{\Psi_2} H_2(\mathbb{T}_g) \xrightarrow{\Upsilon_2} \mathbb{Z} \rightarrow \dots$$

La aplicación  $\Upsilon_2$  es inyectiva por la exactitud de la sucesión. Aplicando el primer teorema de isomorfía,  $H_2(\mathbb{T}_g)$  es isomorfo a un subgrupo de  $(\mathbb{Z}, +)$ . Los subgrupos de  $\mathbb{Z}$  son el  $\{0\}$  y  $n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$  con  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $\Upsilon_2$  no es la aplicación nula,  $H_2(\mathbb{T}_g) \cong \mathbb{Z}$ .

Solo quedan por calcular  $H_0(\mathbb{T}_g)$  y  $H_1(\mathbb{T}_g)$ . Como  $\mathbb{T}_g$  es conexo por caminos,  $H_0(\mathbb{T}_g) \cong \mathbb{Z}$  por el lema 1.1.6. Por otro lado, podemos aplicar el teorema de Hurewicz para calcular  $H_1(\mathbb{T}_g)$ , ya que sabemos que  $H_1(\mathbb{T}_g) \cong Ab(\Pi_1(\mathbb{T}_g)) \cong \mathbb{Z} \oplus \overset{2g}{\dots} \oplus \mathbb{Z}$ . □

Finalmente ya podemos dar el ejemplo de dos espacios topológicos, con distinto tipo de homotopía, pero con grupos de homología isomorfos. Definimos para ello el subespacio de  $\mathbb{R}^3$  con la topología inducida por la usual,  $A \cup B \cup C$ , donde  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ ,  $B = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 | (x-2)^2 + y^2 = 1\}$  y  $C = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 | (x-4)^2 + y^2 = 1\}$ . Vamos a ver que tiene grupos de homología isomorfos a los de la superficie compacta de género 1, el toro.

**Proposición 2.8.3.** *El espacio  $A \cup B \cup C$  y  $\mathbb{T}_1$  tienen distinto tipo de homotopía, sin embargo, tienen grupos de homología isomorfos.*

*Demostración.* En primer lugar, ambos espacios tienen distinto tipo de homotopía porque  $\Pi_1(A \cup B \cup C) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ , pero  $\Pi_1(\mathbb{T}_1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Es decir, tienen grupos fundamentales no isomorfos siendo los grupos fundamentales invariantes por homotopía. En segundo lugar, como ya conocemos los grupos de homología de  $\mathbb{T}_1$ , basta con comprobar que:

$$H_n(A \cup B \cup C) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0, 2 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$$

Consideramos la terna  $(X, X_1, X_2)$  donde  $X = A \cup B \cup C$ ,  $X_1 = A \cup B - \{(3, 0, 0)\}$  y  $X_2 = X - \{(-1, 0, 0)\}$ . Es exacta por el ejemplo 2.7.1, ya que  $X_1$  y  $X_2$  son abiertos en  $X$  y  $X = X_1 \cup X_2$ . Podemos por tanto considerar su sucesión de Mayer-Vietoris. Como además sabemos que  $X_1$  tiene el tipo de homotopía de  $\mathbb{S}^2$ ,  $X_2$  tiene el de  $G_2$  y  $A = X_1 \cap X_2$  es contráctil, la sucesión queda:

Si  $n \geq 3$ :

$$\dots \rightarrow 0 \oplus 0 \xrightarrow{\Psi_n} H_n(X) \xrightarrow{\Upsilon_n} 0 \rightarrow \dots$$

Se concluye entonces que  $\Upsilon_n$  es un isomorfismo y por tanto,  $H_n(A \cup B \cup C) = 0$  para todo  $n \geq 3$ .

Si  $n = 2$ :

$$\dots \rightarrow 0 \xrightarrow{\Phi_2} \mathbb{Z} \oplus 0 \xrightarrow{\Psi_2} H_2(X) \xrightarrow{\Upsilon_2} 0 \rightarrow \dots$$

Se concluye de la exactitud de la sucesión que  $\Phi_2$  es un isomorfismo y por tanto,  $H_2(A \cup B \cup C) \cong \mathbb{Z}$ .

Los últimos dos grupos se calculan aparte. Como  $X$  es conexo por caminos,  $H_0(A \cup B \cup C) \cong \mathbb{Z}$  por el lema 1.1.6 y aplicando el teorema de Hurewicz, obtenemos  $H_1(A \cup B \cup C) \cong \text{Ab}(\Pi_1(A \cup B \cup C)) = \text{Ab}(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .  $\square$

En definitiva, la homología es una herramienta que nos ayuda a diferenciar espacios topológicos no homeomorfos y con distinto tipo de homotopía, pero no es capaz de decirnos cuando dos espacios sí son homeomorfos o si tienen el mismo tipo de homotopía. No es un invariante completo.

# Apéndice A

## Preliminares

Antes de empezar conviene dejar claros varios términos que vamos a emplear a lo largo del trabajo. Vamos a resumirlos en estos preliminares para que su uso en un futuro no desconcierte.

### A.1. Categorías y funtores

**Definición A.1.1.** Una categoría  $C$  está formada por:

- (i) Una clase de objetos,  $Obj(C)$ .
- (ii) A cada par ordenado de objetos  $(X, Y)$  le corresponde un conjunto de morfismos  $hom_C(X, Y)$ . Dos familias de morfismos  $hom_C(X, Y)$  y  $hom_C(X', Y')$  son disjuntas si los pares  $(X, Y)$  y  $(X', Y')$  son distintos. Un elemento  $f \in hom_C(X, Y)$  lo denotamos por  $f : X \rightarrow Y$ .
- (iii) Dada una terna de objetos  $(X, Y, Z)$ , se define una aplicación

$$\circ : hom_C(X, Y) \times hom_C(Y, Z) \rightarrow hom_C(X, Z)$$

llamada composición que verifica:

- a) Asociatividad:  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ .
- b) Identidad: Existe  $1_X \in hom_C(X, X)$ , el morfismo identidad.

**Definición A.1.2.** Un functor covariante  $T$ , de una categoría  $C_1$  en una categoría  $C_2$ , denotado por  $T : C_1 \rightarrow C_2$ , consiste en:

- (i) Una función  $T$  que asocia a cada objeto,  $X$ , de  $C_1$  un objeto,  $T(X)$ , de  $C_2$ .
- (ii) Una función, denotada también  $T$ , que asocia a cada morfismo  $f \in hom_{C_1}(X, Y)$ , un morfismo  $T(f) \in hom_{C_2}(T(X), T(Y))$ . Esta función verifica:

- a)  $T(1_X) = 1_{T(X)}$ .  
 b)  $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$ .

## A.2. Preliminares afines

**Definición A.2.1.** Un espacio afín  $(A, V, f)$ , es un conjunto  $A$  junto con un  $K$ -espacio vectorial  $V$  y una aplicación

$$\begin{aligned} f: A \times A &\longrightarrow V \\ (a, b) &\longmapsto f(a, b) = \vec{ab} \end{aligned}$$

que verifica:

- i) Para cada  $p \in A$  la aplicación  $f_p: A \longrightarrow V$  con  $f_p(q) = \vec{pq}$  es biyectiva.  
 ii)  $\forall p, q, r \in A$  se verifica  $\vec{pq} + \vec{qr} = \vec{pr}$ .

Dados  $p, q \in A$ , se suele denotar por  $q - p$  al vector  $\vec{pq}$  y dados  $p \in A$  y  $v \in V$ , se denota por  $p + v$  al único punto  $q \in A$  tal que  $q - p = v$ .

**Definición A.2.2.** Sea  $A$  un espacio afín. Un conjunto de puntos  $\{p_0, \dots, p_n\} \subset A$  se dicen afínmente independientes si los  $n$  vectores  $p_1 - p_0, \dots, p_n - p_0$  son linealmente independientes. La independencia no depende de la ordenación de los puntos.

**Definición A.2.3.** Sea  $A$  un espacio afín sobre un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial. Dados  $p_0, p_1, \dots, p_n \in A$  y  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  tales que  $\sum_{i=0}^n a_i = 1$ , se define el punto  $s = \sum_{i=0}^n a_i p_i \in A$  como el único punto en  $A$  que verifica  $\forall p \in A \quad s - p = a_0 \cdot (p_0 - p) + \dots + a_n \cdot (p_n - p)$ .

**Observaciones 1.** Nótese que dado  $p \in A$ , siempre va a existir  $s \in A$  tal que  $f_p(s) = s - p = \sum_{i=0}^n a_i \cdot (p_i - p)$  pues la aplicación  $f_p$  es sobreyectiva. Además, dados  $p_1, p_2, s_1, s_2 \in A$  tales que  $s_1 - p_1 = \sum_{i=0}^n a_i \cdot (p_i - p_1)$  y  $s_2 - p_2 = \sum_{i=0}^n a_i \cdot (p_i - p_2)$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} s_1 - p_2 &= (s_1 - p_1) + (p_1 - p_2) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot (p_i - p_1) + (p_1 - p_2) \cdot \sum_{i=0}^n a_i \\ &= \sum_{i=0}^n a_i \cdot ((p_i - p_1) + (p_1 - p_2)) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot (p_i - p_2) = s_2 - p_2 \end{aligned}$$

Luego  $s_1 - p_2 = s_2 - p_2$ , y por tanto  $s_1 = s_2$ . En resumen, el punto  $\sum_{i=0}^n a_i p_i$  está bien definido y no depende de  $p$ .

**Definición A.2.4.** Sea  $A$  un espacio afín sobre un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial y  $p, q \in A$  dos puntos distintos de  $A$ . Se llama segmento entre  $p$  y  $q$  al conjunto de puntos  $\{tp + (1-t)q: 0 \leq t \leq 1\} \subset A$ .

**Definición A.2.5.** Sea  $A$  un espacio afín sobre un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial y  $B \subset A$  un subconjunto de  $A$ . Se dice que  $B$  es convexo si dados  $x, y \in B$  dos puntos distintos cualesquiera en  $B$ , el segmento entre  $x$  e  $y$  está contenido en  $B$ .

**Teorema A.2.1.** Sea  $A$  un espacio afín sobre un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial y  $\{B_i\}_{i \in I}$  una familia de subconjuntos de  $A$  convexos. Entonces  $B = \bigcap_{i \in I} B_i$  es convexo.

*Demostración.* Dados  $x, y \in B$ , se tiene que  $x, y \in B_i \forall i \in I$ . Como  $B_i$  es convexo  $\forall i \in I$ , el segmento entre  $x$  e  $y$  está contenido en  $B_i \forall i \in I$ . Es decir, el segmento entre  $x$  e  $y$  está contenido en la intersección de los  $B_i$  y por tanto  $B$  es convexo.  $\square$

**Definición A.2.6.** Sea  $A$  un espacio afín sobre un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial y  $B \subset A$ . Por el teorema A.2.1, podemos definir el subconjunto convexo generado por  $B$  como la intersección de todos los subconjuntos convexos de  $A$  que contienen a  $B$ . Esta intersección es no vacía porque  $A$  es convexo y contiene a  $B$ . A este subconjunto se le llama la envolvente convexa de  $B$  y se denota por  $[B]$ .

Dados  $p_0, \dots, p_m \in A$ ,  $m+1$  puntos linealmente independientes de  $A$ , se llama  $m$ -símplice afín de vértices  $\{p_0, \dots, p_m\}$  a la envolvente convexa de  $\{p_0, \dots, p_m\}$ , es decir, a  $[p_0, \dots, p_m]$ .

**Ejemplo A.2.1.** En el espacio afín  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, f(u, v) = v - u)$  con  $n \in \mathbb{N}$  definimos  $e_i = (\delta_1^i, \dots, \delta_n^i)$  con  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$  donde  $\delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ . Se tiene que  $e_0, \dots, e_n$  son puntos linealmente independientes pues los vectores  $\{e_1 - e_0, \dots, e_n - e_0\} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$  son linealmente independientes, por tanto tenemos que  $[e_0, \dots, e_n]$  es un  $n$ -símplice afín. A este símplice se le llama símplice geométrico estándar y se le denota por  $\Delta_n = [e_0, \dots, e_n]$ . Consiste de todas las combinaciones lineales convexas  $t_0 e_0 + \dots + t_n e_n$  con  $t_0 + \dots + t_n = 1$  y  $t_i \geq 0$  para todo  $i \in \{0, \dots, n\}$ .

**Definición A.2.7.** Dados  $(A_1, V_1, f_1)$  y  $(A_2, V_2, f_2)$  dos espacios afines. Una aplicación afín entre ellos consta de un par de aplicaciones  $(f, g)$  donde  $f : A_1 \rightarrow A_2$  y  $g : V_1 \rightarrow V_2$  satisfacen:

- i)  $g$  es lineal
- ii)  $g(q - p) = f(q) - f(p) \quad \forall p, q \in A_1$
- iii)  $f(p + v) = f(p) + g(v) \quad \forall p \in A_1, \forall v \in V_1$

A la restricción de una aplicación afín a un símplice afín también se la llama aplicación afín.

**Teorema A.2.2.** Sea  $[p_0, \dots, p_m]$  un  $m$ -símplice,  $[q_0, \dots, q_n]$  un  $n$ -símplice y  $f : \{p_0, \dots, p_m\} \rightarrow [q_1, \dots, q_n]$  una aplicación. Entonces existe una única aplicación afín  $T : [p_0, \dots, p_m] \rightarrow [q_1, \dots, q_n]$  tal que  $T(p_i) = f(p_i)$  para todo  $i \in \{0, \dots, m\}$ .

**Proposición A.2.3.** Toda aplicación afín de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^m$  es continua.

### A.3. Varios Resultados

**Proposición A.3.1.** Si  $w_1, \dots, w_k \in \mathbb{R}^n$  y  $m < k \leq p + 1$ , entonces:

$$\left\| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w_i - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m w_i \right\| \leq \frac{p}{p+1} \max \|w_i - w_j\|$$

*Demostración.* Como  $\frac{x}{x+1}$  es una función creciente y  $m < k \leq p + 1$ , basta con probar:

$$\left\| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w_i - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m w_i \right\| \leq \frac{k-1}{k} \max \|w_i - w_j\|$$

. Haciendo varios cálculos:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m w_i - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w_i \right\| &= \left\| \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m w_i - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^m w_i - \frac{1}{k} \sum_{i=m+1}^k w_i \right\| = \\ \left\| \frac{k-m}{mk} \sum_{i=1}^m w_i - \frac{1}{k} \sum_{i=m+1}^k w_i \right\| &= \frac{k-m}{k} \left\| \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m w_i - \frac{1}{k-m} \sum_{i=m+1}^k w_i \right\| \end{aligned}$$

Pero los puntos  $\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m w_i$  y  $\frac{1}{k-m} \sum_{i=m+1}^k w_i$  están en la envolvente convexa de los puntos  $\{w_1, \dots, w_k\}$ , luego la expresión anterior:

$$\leq \frac{k-m}{k} \max \|w_i - w_j\| \leq \frac{k-1}{k} \max \|w_i - w_j\|$$

□

**Lema A.3.2.** (Lema del número de Lebesgue)

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y compacto. Sea  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  un cubrimiento por abiertos de  $X$ . Entonces existe un  $\epsilon > 0$ , llamado número de Lebesgue, tal que para todo  $A \subseteq X$  con diámetro menor que  $\epsilon$ , existe  $U_{i_\epsilon}$  tal que  $A \subseteq U_{i_\epsilon}$ .

**Proposición A.3.3.** Sea  $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$  una identificación y  $g : (Y, \tau_Y) \rightarrow (Z, \tau_Z)$  una aplicación. Entonces  $g$  es continua si  $g \circ f$  lo es.

*Demostración.* Sea  $V \in \tau_Z$ . Como  $g \circ f$  es continua,  $(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V)) \in \tau_X$  y por ser  $f$  identificación,  $f^{-1}(g^{-1}(V)) \in \tau_X$  si y solo si  $g^{-1}(V) \in \tau_Y$ . Luego  $g^{-1}(V) \in \tau_Y$  y  $g$  es continua. □

# Bibliografía

- [1] M. J. Greenberg, J. R. Harper, *Algebraic Topology: A First Course*, The Benjaming Cummings Publishing Co., EE.UU., 1981.
- [2] Manuel Pulido Monroy, *Topología Algebraica: Homología Singular*, Trabajo de fin de grado, Junio 2015. (<https://eprints.ucm.es/id/eprint/73540/1/manuel-pulido-monroy-topologia-tfg.pdf>)
- [3] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cornell University, EE.UU., 2002.
- [4] J. R. Munkres, *Elements of Algebraic Topology*, Addison-Wesley Publishing.

