



Trabajo fin de grado
Doble Grado en Física y en Ingeniería Electrónica (Física)

Inflación y *reheating* cosmológico

Autor:
Carmelo López Mediavilla
Director:
Joanes Lizarraga Olano

Leioa, 23 de junio de 2023

Índice

1. Introducción	2
2. Cosmología moderna y motivación del modelo inflacionario	4
2.1. Introducción a la cosmología moderna	4
2.1.1. La métrica FRW	4
2.1.2. Solución de las ecuaciones de Einstein	6
2.1.3. Naturaleza del fluido cosmológico	8
2.1.4. Evolución del universo según la teoría estándar	10
2.1.5. Relación entre el espacio-tiempo FRW y el espacio-tiempo de Min- kowski	11
2.1.6. Conexión causal: Horizontes y Radio de Hubble	13
2.2. Problemas del modelo <i>Big Bang</i> sin inflación	15
2.2.1. Problema de horizontes	15
2.2.2. Problema de planitud	16
3. Inflación	18
3.1. Definición de inflación	18
3.2. Revisión de los problemas de la cosmología estándar	19
3.2.1. Problema de horizontes	19
3.2.2. Problema de planitud	20
3.3. El inflatón	20
3.3.1. Condiciones de <i>Slow-Roll</i>	22
3.3.2. Elección del potencial $V(\phi)$	23
3.3.3. Caso particular: $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$	24
4. <i>Reheating</i>	27
4.1. Modelo perturbativo	27
4.2. Resonancia paramétrica	28
4.2.1. Teorema de Floquet	29
4.2.2. Estabilidad de la ecuación de Mathieu	31
4.2.3. Resonancia paramétrica estrecha	32
4.2.4. Resonancia ancha	34
4.3. Revisión del modelo utilizado	36
5. Conclusión y futuros trabajos	37

1. Introducción

La cosmología como descripción del universo, su origen y desarrollo ha sido durante milenios una de las mayores preocupaciones de físicos y filósofos. Tras siglos de carácter especulativo, la teoría newtoniana de la gravedad permitió finalmente establecer unas bases matemáticas para describir el comportamiento del cosmos. Sin embargo, la introducción de la Relatividad General (RG) a principios del siglo pasado ha propiciado una revolución en el estudio de la cosmología que aún sigue en curso. Probablemente, el fin de la concepción estática del universo para adoptar la teoría del universo en expansión sea el cambio más importante que esta teoría ha impulsado.

Por otro lado, los datos que en las últimas décadas se han tomado como consecuencia de una incesante mejoría en la capacidad de los instrumentos y las técnicas de medida, nos han mostrado que la teoría estándar de la cosmología relativista no se ajusta completamente a las observaciones. Datos obtenidos, principalmente del Fondo Cósmico de Microondas, nos indican que la evolución del universo a lo largo de su historia es, según esta teoría, incompatible con su estado actual.

La solución más exitosa planteada hasta el momento como solución a estas incompatibilidades es la teoría de la Inflación. Ésta plantea que el universo sufrió una época de expansión diferente a la esperable según su contenido actual de materia y radiación. Para otorgar un sentido físico compatible con la RG a esta expansión, esta teoría propone la existencia de un campo asociado a una partícula hipotética denominada inflatón, que rigió el comportamiento expansivo del universo durante este periodo. Sin embargo, esta partícula es tan energética que sobrepasa las capacidades de los aceleradores de partículas actuales, por lo que no nos resulta accesible.

Además, la teoría debe contar con un mecanismo que explique por qué en un momento determinado, las partículas de inflatón originarias desaparecieron, dejando un universo en el que únicamente se encuentra materia descrita por el Modelo estándar de partículas. Esta parte de la teoría se denomina *reheating* y es un campo que permanece abierto en la actualidad.

El objetivo de este trabajo es hacer un repaso bibliográfico sobre la teoría actual de la inflación centrándonos finalmente en el estudio del *reheating*. Para ello, se seguirá una línea lógica en la que se propone el modelo inflacionario como solución a las incongruencias derivadas de la cosmología moderna convencional y posteriormente se trata de dar explicación física a este fenómeno para finalmente explicar la manera en que las últimas fases de este proceso pueden enlazarse con nuestro universo actual.

El texto está dividido en tres secciones claramente diferenciadas. El primer capítulo es un resumen de la teoría de la cosmología moderna que se presenta con el objetivo de entender el comportamiento de la evolución física del universo y la relación con su contenido. Posteriormente, presentaremos los problemas derivados de la teoría estándar para justificar la necesidad de la introducción de una teoría correctiva que los solucione.

La segunda sección comienza definiendo el concepto de inflación para seguido mostrar cómo puede solventar los problemas planteados en la sección anterior. A continuación, se propone el campo del inflatón, que nos permitirá describir la partícula hipotética. Siguiendo las referencias, el modelo será el de un campo escalar, que trataremos exclusivamente como un campo clásico. Finalmente, se estudian los requisitos que este campo tiene que presentar para poder ser causante de un periodo inflacionario. Como paso previo a la siguiente sección se trata el comportamiento del campo bajo el efecto de un potencial cuadrático que permita modelizar la evolución del campo en su proceso de decaimiento

provocado por la expansión del universo.

En la tercera sección se hará una introducción a la teoría del *reheating*. Por simplicidad, se considera únicamente una interacción con un campo escalar que represente las partículas en las que el inflatón puede decaer. Se propondrán dos modelos de estudio de la interacción de la partícula inflacionaria con el nuevo campo: un método perturbativo y otro exacto. Comprobaremos que ambos métodos dan resultados completamente diferentes y que esto es consecuencia de que las condiciones bajo las cuales el primero es aplicable está restringida a casos concretos. Por su parte, compararemos los diferentes comportamientos que la solución exacta presenta para distintos valores de los parámetros de la ecuación que determina su evolución y veremos que se producen crecimientos exponenciales en el número de ocupación de la partícula interactuante.

Convenio de signos y notación

En el desarrollo, se utilizará el sistema de unidades naturales de manera que

$$\hbar = c = 1 \quad .$$

En las ecuaciones de Einstein utilizaremos la masa de Planck reducida definida por

$$M_{\text{Pl}} = (8\pi G)^{-1/2} \quad ,$$

donde G es la constante de gravitación universal.

Para la métrica de Minkowski utilizaremos la convención

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Para un espacio-tiempo curvo general denotamos la métrica $g_{\mu\nu}$ de manera que $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$. También definimos $g = \det(g_{\mu\nu})$ y la inversa de la métrica $g^{\mu\nu}$,

$$g^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \delta_\nu^\mu \quad . \quad (1)$$

Si en este espacio-tiempo se tiene la derivada covariante ∇_μ , definimos el operador D'Alembertiano sobre una función escalar ϕ como

$$\square\phi = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) \quad . \quad (2)$$

2. Cosmología moderna y motivación del modelo inflacionario

En esta sección haremos una breve introducción a la física de la cosmología relativista. En esta teoría, la variable que nos determina la evolución del universo es la métrica que, como veremos, mediante argumentos de simetría se puede reducir a una expresión dependiente únicamente de un factor de escala $a(t)$ y una constante k . Nuestro interés se centrará en estudiar el comportamiento temporal de estos parámetros, que determinan la geometría del universo y que se relacionarán con el contenido de energía y materia del universo.

Posteriormente introduciremos una serie de conceptos que nos permitirán estudiar las relaciones causales entre puntos de nuestro espacio-tiempo. Estas herramientas nos permitirán llegar a la conclusión de que existen ciertas discordancias entre las observaciones y el comportamiento esperable.

2.1. Introducción a la cosmología moderna

En Relatividad General, las ecuaciones de campo de Einstein relacionan la métrica de un espacio tiempo con el contenido de energía y materia de este mediante

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{M_{\text{Pl}}^2} T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad . \quad (3)$$

$G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein que incluye términos de la métrica hasta su derivada segunda, mientras que $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento que describe la distribución de energía y materia en el espacio-tiempo. Λ es una constante arbitraria llamada constante cosmológica, un grado de libertad de las ecuaciones de Einstein cuyo significado interpretaremos más adelante.

Encontrar una solución consiste en encontrar una métrica que sea compatible con una distribución de energía adecuada. El modelo utilizado en la cosmología moderna es el de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), que propone una métrica que cumple una serie de simetrías y que es consistente con un universo que contiene un fluido perfecto. Gracias a este modelo se ha podido llegar a hacer especulaciones sobre el estado del universo en tiempos tan tempranos como 10^{-43} segundos tras el *Big Bang* [1].

2.1.1. La métrica FRW

La cosmología moderna se fundamenta principalmente en los siguientes puntos [2]:

- Cuando el universo es tratado a gran escala presenta dos propiedades fundamentales: **homogeneidad e isotropía** ¹.
- El universo se encuentra en estado de expansión. Es decir, a diferencia de lo que tradicionalmente se ha pensado, no es estático.

El primero es conocido como Principio Cosmológico y, a pesar de tener un origen más cercano a la filosofía que a la física, ha sido respaldado por numerosas observaciones. El segundo simplemente nos indica que, a diferencia de la mayoría de los intentos históricos por describir un universo estático, no debemos restringirnos a esta posibilidad.

¹Se puede considerar que esto ocurre a partir de escalas de 300 millones de años luz.

El Principio Cosmológico nos induce a proponer que la métrica es tal que existen observadores para los cuales es homogénea espacialmente e isótropa. Estos observadores se corresponderían aproximadamente a los sistemas de referencia de las galaxias [3].

Una métrica que cuente con estas características tiene como consecuencia que la curvatura espacio-temporal del universo sea constante. Se puede demostrar que mediante los argumentos anteriores la forma más general se expresa [3]

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] , \quad (4)$$

donde $a(t)$ es conocido como el factor de escala cósmico y k es una constante que determina la curvatura espacial.

Esta métrica está expresada en las llamadas **coordenadas comóviles**, para las cuales una galaxia o un observador mantendría unas coordenadas (r, θ, ϕ) fijas en caso de no actuar ninguna fuerza sobre ellas. Por ello, el significado físico del parámetro $a(t)$ es fácil de entender: para k pequeño, la posición física espacial entre dos puntos \vec{R} para un tiempo dado se puede aproximar por

$$\vec{R} = a(t)\vec{r} , \quad (5)$$

siendo \vec{r} el vector de posición en coordenadas comóviles. Es decir, $a(t)$ determina la escala de la posición entre puntos del universo en reposo. Como veremos $k \sim 0$, por lo que esta interpretación es válida; en cualquier caso, $a(t)$ establece la relación entre distancia física y la distancia en coordenadas comóviles. Estos nos indica que esta métrica es compatible con el segundo hecho observacional indicado anteriormente: si $\dot{a}(t) > 0$ actualmente, todos los puntos del espacio se alejan de nosotros y observamos un universo en expansión. De la misma manera, todos los puntos se alejan entre sí.

El factor de escala se toma de tal manera que para el tiempo actual, t_0 , sea igual a la unidad, $a(t_0) = 1$, con lo que distancias físicas y comóviles se igualan.

En los años 20 del siglo pasado ya se comenzó a especular con la posibilidad de que el universo se encontrase en un proceso de expansión. Para entonces Friedmann había propuesto la métrica (4), pero la primera observación que respaldó la teoría del universo dinámico fue el estudio del corrimiento al rojo de la radiación llegada de las galaxias lejanas. Gracias a ella, Hubble y Lemaître publicaron una ley que relaciona la distancia a la que se encuentra una galaxia con la velocidad a la que se aleja de nosotros:

$$\dot{\vec{R}} = H\vec{R} . \quad (6)$$

H es el parámetro de Hubble que, como veremos, se relaciona con el valor de $a(t)$ y, por lo tanto, depende del tiempo. Este es el motivo por el que utilizamos la denominación “parámetro” y no “constante” de Hubble. Sustituyendo en (5) y teniendo en cuenta que, la separación entre dos galaxias en coordenadas comóviles \vec{r} es constante,

$$\dot{\vec{R}} = \dot{a}(t)\vec{r} + a(t)\dot{\vec{r}} = \dot{a}(t)\vec{r} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\vec{R} , \quad (7)$$

es decir,

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} . \quad (8)$$

El parámetro k es una constante y tiene un valor que, en función de su signo, tiene implicaciones en la curvatura espacial:

- $k < 0$: hipersuperficies espaciales positivamente curvadas, isométricas a un hiperboloide de 3 dimensiones.
- $k = 0$: hipersuperficies espaciales planas, isométricas al espacio tridimensional ordinario.
- $k > 0$: hipersuperficies espaciales negativamente curvadas, son isométricas a la 3-esfera.

Para ver esto, hacemos un cambio de coordenadas que nos elimine la dependencia explícita de la métrica en k :

$$r^2 = \Phi_k(\chi) \equiv \begin{cases} \frac{1}{|k|} \sinh^2(\sqrt{|k|}\chi) & k < 0 \\ \chi^2 & k = 0 \\ \frac{1}{k} \sin^2(\sqrt{k}\chi) & k > 0 \end{cases} , \quad (9)$$

con el cual, la métrica FRW se expresa

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(d\chi^2 + \Phi_k(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)) \quad . \quad (10)$$

En definitiva, para cada uno de los tres grupos posibles en los que se puede clasificar el valor de k , todos los casos son isométricos. En numerosas ocasiones los problemas de cosmología se restringen por simplicidad a casos en los que k adopta uno de los siguientes valores: -1 , 0 ó 1 . En nuestro caso, para facilitar desarrollos posteriores, permitiremos que k adopte cualquier valor real.

Es interesante remarcar que para el caso $k = 0$, que es el más cercano a las observaciones, $\chi = r$. En este caso se recupera la métrica euclidiana en las hipersuperficies espaciales.

En resumen, la geometría del universo quedará determinada por un valor de k y la función $a(t)$.

2.1.2. Solución de las ecuaciones de Einstein

En Relatividad General, una distribución continua de materia o un campo se representa por su tensor de energía-momento. Estos tensores adoptan diferentes formas según el tipo de energía que describen. Como veremos, las características del tensor de energía-momento asociado al contenido del universo determinará la evolución del factor de escala.

En el caso de un fluido perfecto, su tensor de energía-momento se expresa

$$T^\mu{}_\nu = (\rho + P)u^\mu u_\nu - P\delta^\mu{}_\nu \quad , \quad (11)$$

donde ρ , la densidad de energía propia, y P , la presión en el sistema de referencia del fluido en reposo están relacionados por la **ecuación de estado barotrópica**:

$$w \equiv \frac{P}{\rho} \quad . \quad (12)$$

El contenido del universo se modeliza mediante un fluido perfecto de este tipo al que llamaremos fluido cosmológico. Debido a la homogeneidad del espacio, consideraremos

que las distribuciones ρ y P son homogéneas espacialmente, dependiendo únicamente de t . Teniendo esto en cuenta y como consecuencia de la ley de conservación asociada al tensor de energía-momento, utilizando la métrica FRW, llegamos a la **ecuación de continuidad** [4]

$$\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0 \quad . \quad (13)$$

Multiplicando esta expresión por a , obtenemos una diferencial perfecta que podemos integrar para obtener

$$\boxed{\rho a^{3(1+w)} = \text{constante}} \quad . \quad (14)$$

Queremos ver cómo evoluciona un universo formado por este fluido. En primer lugar resolveremos las ecuaciones de Einstein tomando una constante cosmológica nula,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{1}{M_{\text{Pl}}^2}T_{\mu\nu} \quad , \quad (15)$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein, $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, R la curvatura escalar y $g_{\mu\nu}$ la métrica FRW.

Calculando la curvatura de la métrica y utilizando un tensor de energía-momento de la forma expresada en (11), se llega a las **ecuaciones de Friedmann** [1]:

$$\boxed{H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{1}{3M_{\text{Pl}}^2}\rho - \frac{k}{a^2}} \quad (16)$$

y

$$\boxed{\dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6M_{\text{Pl}}^2}(\rho + 3P)} \quad . \quad (17)$$

Nótese que las ecuaciones (13), (16) y (17) no son independientes. La ecuación (17) se puede obtener de derivar (16) y sustituir (13). Además, las dos últimas ecuaciones implican $\dot{k} = 0$, condición necesaria para que el resultado fuese consistente.

Antes de continuar, haremos una pequeña recapitulación. Hasta el momento únicamente hemos utilizado la suposición de que tanto el espacio como la distribución de energía-materia que este contiene son homogéneos espacialmente respecto de ciertos observadores, que coinciden aproximadamente con las galaxias. También hemos supuesto que todo su contenido se comporta como un fluido perfecto. Gracias a la homogeneidad e isotropía todos los grados de libertad se han reducido a la función $a(t)$ y al parámetro k . El conjunto de ecuaciones obtenidas junto con la ecuación de estado barotrópica nos proporcionan una solución para estos parámetros, con lo que la métrica queda totalmente determinada.

Para encontrar la solución $a(t)$ simplemente tenemos que hacer uso de la ecuación de continuidad, (13), y de la ecuación de estado, (12):

$$\frac{d \ln \rho}{d \ln a} = -3(1+w) \quad \Rightarrow \quad a(t) = \begin{cases} t^{\frac{2}{3(1+w)}} & w \neq -1 \\ e^{Ht} & w = -1 \end{cases} \quad . \quad (18)$$

Reformulamos la primera ecuación de Friedmann de un modo que nos resultará útil más adelante. Primero, definimos el ratio de densidad Ω como la razón entre la densidad

de energía del fluido y aquella que hace que la curvatura se anule según (16), $\rho_{\text{crit}}(t) = 3M_{\text{pl}}^2 H^2$,

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_{\text{crit}}} \quad . \quad (19)$$

Así, podemos escribir (16) como

$$1 - \Omega = \frac{-k}{(aH)^2} \quad . \quad (20)$$

2.1.3. Naturaleza del fluido cosmológico

Como hemos visto, la ecuación de estado del fluido determina la evolución de la métrica del universo, por lo cual resulta crucial entender su naturaleza. Consideraremos que el fluido cosmológico está compuesto de diferentes especies, es decir, diferentes tipos de energía o materia, con diferente ecuación de estado. El tensor de energía-momento total será la suma de los correspondientes a cada una,

$$T_{\mu\nu} = \sum_i T_{\mu\nu}^{(i)} \quad , \quad (21)$$

y consecuentemente,

$$P = \sum_i P_i \quad (22)$$

$$\rho = \sum_i \rho_i \quad . \quad (23)$$

Además, cada una de las componentes debe cumplir (13), por lo que

$$\rho_i a^{3(1+w_i)} = cte = \rho_{i,0} \quad . \quad (24)$$

La energía/materia presente en el universo se puede separar en dos grandes bloques, por un lado la materia no relativista y por el otro la radiación, junto con la materia con comportamiento relativista. Consideramos materia relativista aquella cuya energía cinética sea del orden o superior que su masa en reposo.

La materia no relativista se caracteriza por ejercer presión nula, $P_m = 0$, con lo que $w_m = 0$ y

$$\rho_m a^3 = cte = \rho_{m,0} \quad . \quad (25)$$

Por otro lado, en el caso de la radiación $w = 1/3$ y

$$\rho_r a^4 = cte = \rho_{r,0} \quad . \quad (26)$$

Este comportamiento es intuitivo: el primero nos indica la conservación de la masa, mientras que el segundo se puede interpretar como la conservación de fotones, que pierden energía al aumentar su longitud de onda linealmente con a .

En la resolución de las ecuaciones de Einstein no hemos tenido en cuenta el posible efecto de una constante cosmológica no nula. En caso de añadirla, tendríamos que

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{M_{\text{Pl}}^2} T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad . \quad (27)$$

Estamos situando la constante cosmológica en el primer término de la igualdad en una interpretación en la que se considera parte de la energía contenida en el espacio-tiempo. Este punto de vista es el que plantea la existencia de una energía oscura de naturaleza incierta como causante de este término. Sin embargo, la presencia de la constante cosmológica es una consecuencia matemática de una libertad a la hora de postular las ecuaciones de campo de Einstein, por lo que se podría situar en el segundo término de la ecuación o contenido en el tensor de Einstein, representando un significado geométrico. En nuestro caso, seguiremos la primera vía y consideraremos este término como el tensor de energía-momento de otro tipo de especie de manera que

$$(T^\mu{}_\nu)_\Lambda = M_{\text{Pl}}^2 \Lambda \delta^\mu{}_\nu \quad . \quad (28)$$

Comparando con el tensor de un fluido perfecto,

$$P_\Lambda = -\rho_\Lambda \quad \Rightarrow \quad w_\Lambda = -1 \quad . \quad (29)$$

De (14),

$$\rho_\Lambda = cte \quad . \quad (30)$$

En general, la presión y densidad de energía total tendrá que tener en cuenta todas las especies. Sin embargo, los diferentes comportamientos que presenta ρ_i frente a a nos indican que en cada momento de la evolución del universo, una de las especies es mayoritaria y domina el comportamiento de la expansión.

En la Tabla 1 se resume la evolución de la densidad de energía y el factor de escala para universos dominados por las tres diferentes especies que hemos tratado.

Especie dominante	w	$\rho(a)$	$a(t)$
m	0	a^{-3}	$t^{2/3}$
r	1/3	a^{-4}	$t^{1/2}$
Λ	-1	1	e^{Ht}

Tabla 1: Evolución de la densidad de energía en función del parámetro de escala y evolución del parámetro de escala en función del tiempo

Ahora que ya conocemos cómo evoluciona el factor de escala, estudiaremos la dependencia del parámetro de Hubble sobre esta variable. Podemos reformular la primera ecuación de Friedmann (16) teniendo en cuenta los ratios de densidad de energía actuales definidos según

$$\Omega_i = \frac{\rho_{i,0}}{\rho_{\text{crit}}(t_0)} = \frac{\rho_i}{\rho_{\text{crit}}(t_0)} a^{3(1+w_i)} \quad . \quad (31)$$

Estos ratios son constantes por definición. Sustituimos para obtener

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \sum \Omega_i a^{-3(1+w_i)} - \frac{k}{(aH_0)^2} \quad . \quad (32)$$

Las observaciones indican que en la actualidad el universo tiene una geometría espacial prácticamente plana por lo que $k/(aH_0)^2 \sim 0$. Teniendo esto en cuenta y, si conocemos

los valores actuales de los ratios de densidad de energía y el valor actual del parámetro de Hubble, podemos calcular la evolución del parámetro de Hubble en función del factor de escala:

$$H(a) = H_0 \sqrt{\Omega_m a^{-3} + \Omega_r a^{-4} + \Omega_\Lambda} \quad . \quad (33)$$

Para el tiempo actual, experimentalmente se han estimado los siguientes ratios y parámetros ²:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{k}{(aH)^2} \sim 0 \\ \Omega_b \simeq 0,04 \\ \Omega_{dm} \simeq 0,23 \end{array} \right\} \Omega_m \simeq 0,3 \quad [1] \quad (34)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_r \simeq \Omega_m/3400 \\ \Omega_\Lambda \simeq 0,7 \end{array} \right. \quad (35)$$

$$H_0 \sim 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad [5] \quad (35)$$

2.1.4. Evolución del universo según la teoría estándar

La teoría estándar de la evolución del universo asume que su geometría está correctamente descrito por la métrica FRW para un contenido de radiación, materia relativista y materia no relativista. También se considera que existe una densidad de vacío o constante cosmológica no nula que resulta despreciable en las primeras épocas pero que permite explicar la aceleración que actualmente se está produciendo en la expansión del universo. La mayor parte de la radiación contenida proviene del denominado **Fondo Cósmico de Microondas o CMB**, y no es una radiación que provenga de las galaxias, sino que se considera que ha permanecido en el universo desde su creación, y que ha viajado libremente desde que su energía bajó del umbral necesario para ionizar la materia.

Una forma de entender el comportamiento del universo temprano es pensar que el decrecimiento del factor de escala a medida que se retrocede en el tiempo tiene el mismo efecto local que sufre la materia contenida en una caja cuyas paredes se contraen [3]. En el primer momento del universo $a \rightarrow 0$, a lo que se le conoce como la **singularidad** inicial.

Como hemos visto previamente, debido a la diferente evolución de la densidad de energía de la materia ordinaria y la radiación, a medida que vamos atrás en el tiempo la densidad de energía de la radiación aumenta por encima que la de la materia no relativista (Tabla 1).

Hoy en día, la densidad de energía estimada del CMB es aproximadamente 1000 veces menor que la debida a la materia. Por lo tanto, como esta radiación no proviene de la emisión de las estrellas sino que sigue presente a medida que se retrocede en el tiempo, en el periodo de la evolución del universo que el factor de escala, a , fuese 1000 veces menor que el actual, la densidad de energía de la radiación comienza a ser dominante. Podemos considerar que para periodos previos, el universo se comporta en régimen de dominación de radiación y, para épocas posteriores, dominación de materia.

Siguiendo la analogía de la caja comprimiéndose, es esperable que materia y radiación adquieren temperatura a medida que a se reduce. De la mecánica estadística cuántica para partículas sin masa se puede derivar que para radiación termalmente distribuida [3],

$$T \propto \rho^{1/4} \propto a^{-1} \quad . \quad (36)$$

²El subíndice “b” hace referencia a la materia bariónica y el subíndice “dm” a la materia oscura.

Por ello, la energía de los fotones aumenta al retroceder en el tiempo. Para periodos suficientemente tempranos, la energía es tan alta que no permite establecer enlaces entre partículas. Se especula que en estas fases partículas intranucleares, electrones fotones y neutrinos eran libres e interactuaban fuertemente entre ellos [6]. A medida que la temperatura decrece empiezan a aparecer los primeros estados ligados. En primer lugar las partículas intranucleares se habrían unido para formar bariones, que una vez que la energía fuese lo suficientemente baja se formarían los núcleos atómicos.

Para nuestro estudio, el hito más importante sucede en un tiempo aproximado $t_{dc} \simeq 10^{13}s$, correspondiendo a una temperatura $T_{dc} \simeq 3000K$. Es el denominado **desacople** de radiación y materia, que sucede cuando la energía promedio de los fotones comienza a ser menor que la necesaria para ionizar los átomos, de manera que se crea el CMB que actualmente percibimos. En ese momento, radiación y materia dejaron de interactuar, permitiendo a los fotones viajar libremente durante el resto de la evolución del universo. Esta radiación primitiva, que presenta un espectro de cuerpo negro, debido a la expansión del universo, se ha ido enfriando (aumentando su longitud de onda), con lo que actualmente recibimos una radiación correspondiente a un cuerpo negro a una temperatura $T_{CMB} \simeq 3K$. La imagen que percibimos del CMB presenta una gran isotropía, lo que indica una alta homogeneidad en el universo en la época en que se creó. Esta es una de las observaciones que respaldan el Principio Cosmológico. En la Figura 1 se observan una representación del CMB, mostrando las fluctuaciones que su temperatura presenta, de orden mucho menor que T_{CMB} ($\Delta T/T_{CMB} O(10^{-5})$).

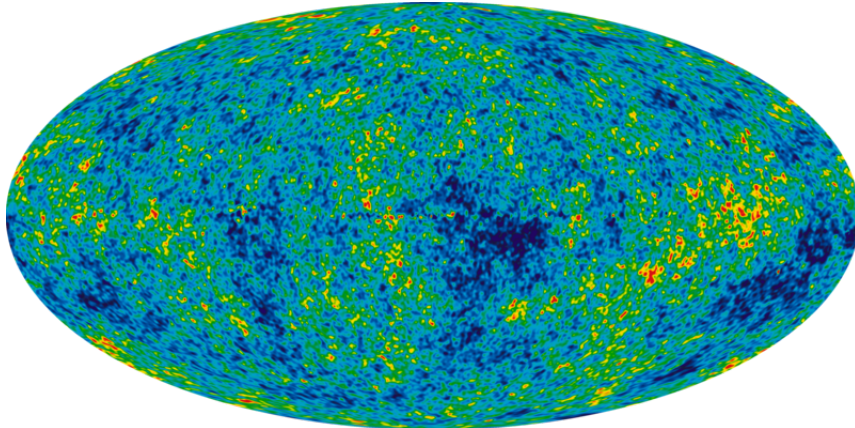


Figura 1: Representación de las fluctuaciones de temperatura del CMB. A pesar de la representación, la fluctuación es varios órdenes menor que T_{CMB} , mostrando en realidad una alta isotropía. Imagen proporcionada por NASA / WMAP Science Team.

2.1.5. Relación entre el espacio-tiempo FRW y el espacio-tiempo de Minkowski

Uno de los problemas del modelo cosmológico descrito hasta el momento fue consecuencia de la detección del CMB. Su alta isotropía no era consistente con las relaciones causales posibles en el espacio-tiempo propuesto. Para poder profundizar en ello tenemos que introducir ciertos conceptos y herramientas geométricas. En lo que resta de esta primera sección, todo lo que desarrollemos sobre la geometría causal del espacio-tiempo será utilizando por simplicidad $k = 0$, muy cercano a las observaciones.

Queremos estudiar cuándo dos puntos del espacio-tiempo están causalmente conectados. Para ello será necesario estudiar la propagación de la luz, es decir, las geodésicas

nulas, $ds^2 = 0$. Teniendo en cuenta la métrica utilizada, es conveniente definir el **tiempo conforme**:

$$\tau = \int \frac{dt}{a(t)} . \quad (37)$$

Con este nuevo conjunto de coordenadas la métrica FRW ($k = 0$) se expresa:

$$ds^2 = a(\tau)^2 [-d\tau^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2] . \quad (38)$$

De manera que la métrica, $g_{\mu\nu} = a^2(\tau)\eta_{\mu\nu}$, es simplemente un múltiplo de la métrica de Minkowski. Por lo tanto, las curvas luminosas ($ds^2 = 0$) unen dos puntos de nuestro espacio tiempo si y sólo si lo hacen en la métrica plana de estas coordenadas. De esa manera, los conos de luz son iguales a los del espacio de Minkowski. Decimos que el espacio-tiempo FRW está conformemente relacionado con el espacio-tiempo de Minkowski [3].

Consideramos que el momento actual está descrito por el tiempo t_0 y el tiempo conforme τ_0 . Los valores del tiempo en el sistema de referencia isótropo pertenece al intervalo $(0, t_{\max})$, donde t_{\max} es finito para un universo que colapsa sobre sí mismo, $a(t \rightarrow t_{\max}) \rightarrow 0$, e infinito si $a(t \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$. Entonces, el espacio de Minkowski relacionado tendrá un límite inferior τ_i y un límite superior τ_{\max}

$$\tau_i = \tau_0 - \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (39)$$

$$\tau_{\max} = \tau_0 + \int_{t_0}^{t_i} \frac{dt}{a(t)} . \quad (40)$$

Concluimos que el comportamiento de $a(t \rightarrow 0)$ y $a(t \rightarrow t_{\max})$ será el responsable de que este espacio tenga límites temporales o estos sean infinitos. En la Figura 2 se ha representado la porción del espacio de Minkowski conformemente relacionada con el espacio-tiempo FRW, mostrando su límite temporal superior e inferior.

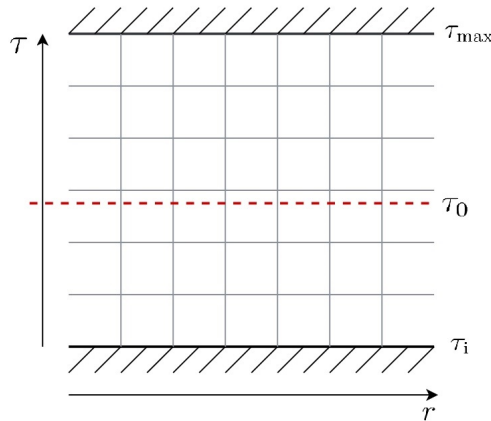


Figura 2: Representación de la dimensión temporal y una dimensión espacial del espacio de Minkowski conformemente relacionado. Este espacio está espacialmente ilimitado, pero dependiendo del comportamiento de $a(t)$ puede tener límites temporales.

La existencia de límites finitos inferior y superior de la variable τ tiene dos consecuencias:

- Si τ está limitado inferiormente, es decir, $\tau_i \neq -\infty$, entonces el cono de luz pasado no recorre todas las coordenadas espaciales. Es decir, la región del espacio que ha podido tener contacto causal con un observador está limitada.
- Si τ está limitado superiormente, es decir, $\tau_{\max} \neq \infty$, el cono de luz futuro está espacialmente limitado, entonces, un evento actual podrá enviar una señal a una región limitada del espacio en todo el futuro del universo.

Teniendo en cuenta la evolución del parámetro de escala para los diferentes tipos de fluido (Tabla 1), vemos que τ_i es finito (se toma $\tau_i = 0$) para universos dominados por radiación ($a \propto t^{1/2}$) y materia ($a \propto t^{2/3}$).

En el caso de un universo en el que únicamente actúa una constante cosmológica, no solamente $\tau_i \rightarrow -\infty$, el comportamiento exponencial también indica que el tiempo t transcurrido desde la singularidad es infinito. Sin embargo, en la cosmología estándar la contribución de la constante cosmológica cuando $a \rightarrow 0$ es despreciable.

2.1.6. Conexión causal: Horizontes y Radio de Hubble

Procedemos a definir dos magnitudes que nos permiten expresar las limitaciones espaciales que sufren los conos de luz pasado y futuro, como hemos comentado en el apartado anterior.

La máxima distancia comóvil a la que luz emitida en el tiempo t_i puede llegar en el tiempo t se define como el **horizonte de partículas** (comóvil),

$$r_p(t) = \tau - \tau_i = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} \quad . \quad (41)$$

El **horizonte de eventos** (comóvil) se define como la distancia que determina la región del espacio desde la cual nunca se recibirá señales luminosas en el futuro,

$$r_e = \int_t^{t_{\max}} \frac{dt}{t} = \tau_{\max} - \tau \quad . \quad (42)$$

Para ayudar a entender el significado geométrico de estas cantidades, se ha representado en la Figura 3 el cono de luz correspondiente a un tiempo arbitrario y sus correspondientes horizontes.

Las distancias físicas de estos horizontes se obtienen simplemente multiplicando por el factor de escala evaluado en el tiempo t ,

$$R_p(t) = a(t)r_p(t) \quad \text{y} \quad (43)$$

$$R_e(t) = a(t)r_e(t) \quad . \quad (44)$$

Otra magnitud importante para el estudio de la causalidad es el **radio de Hubble**, R_H que es simplemente la inversa del parámetro de Hubble,

$$R_H = \frac{1}{H} \quad . \quad (45)$$

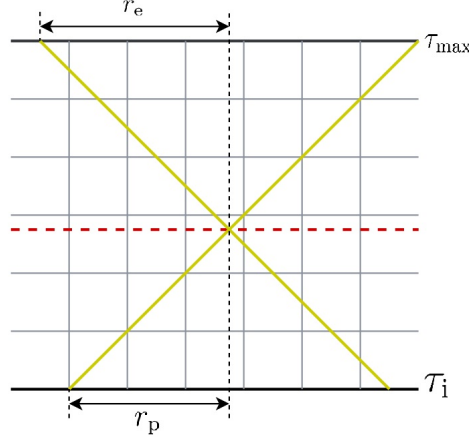


Figura 3: Representación del cono de luz en el espacio conforme. La longitud del cono de luz hasta sus cortes con τ_{\max} y τ_{\min} definen los horizontes de eventos y de partículas.

Igualmente, el valor comóvil del radio de Hubble se obtiene dividiendo entre el factor de escala: $r_H = (aH)^{-1}$. El radio de Hubble indica la distancia de los puntos del universo que desde el punto de vista de un observador se alejan a una velocidad igual a la de la luz. Por ello, ciertas referencias lo interpretan como que una señal luminosa proveniente de puntos más lejanos “no es visible actualmente” [6]. Esto no significa que actualmente no podamos recibir señales luminosas de estos puntos (es decir, que esté fuera del horizonte de partícula), sino que si se mantuviese el valor actual del parámetro de Hubble, esta distancia marcaría el horizonte de eventos (para $t_{\max} \rightarrow \infty$).

$$H = \text{cte} \quad \Rightarrow \quad r_e = \int_t^{t_{\max}} \frac{dt}{a(t)} = \int_t^{t_{\max}} \frac{da}{a^2 H} = -\frac{1}{H} \frac{1}{a} \Big|_t^{t_{\max}} = \frac{1}{aH} = r_H \quad . \quad (46)$$

Donde hemos utilizado que $H = \dot{a}/a$. Con el mismo cambio, podemos expresar el horizonte de partículas comóvil de diferentes maneras:

$$r_p = \int_0^t \frac{dt}{a(t)} = \int_0^a \frac{da'}{H(a')a'^2} = \int_0^a \frac{da'}{a'} r_H(a) = \int_0^a d \ln(a') r_H(a') \quad . \quad (47)$$

Es decir, el horizonte de partículas se expresa como una integral de los valores adoptados por el radio de Hubble a lo largo de la evolución del parámetro a . Recordemos que para $k = 0$ $a(t)$ es siempre una función monótonamente creciente en t por (16). Vemos que los valores de r_H que más contribuyen en el valor de r_p son aquellos correspondientes a valores pequeños de a , es decir, a las primeras épocas en la evolución del universo. Como veremos, uno de los objetivos de la teoría de la inflación es conseguir aumentar el horizonte de partículas, por ello, la evolución del radio de Hubble en este periodo será de gran importancia.

El radio de Hubble también da una idea de la escala de tiempo del universo, pues es precisamente el tiempo que hubiese transcurrido desde la singularidad hasta el momento actual en caso de que su magnitud hubiese sido constante desde entonces:

$$r_H = \text{cte} \quad \Rightarrow \quad t - t_0 = \int_0^1 \frac{1}{aH} da = \int_0^1 r_H da = r_H \quad . \quad (48)$$

2.2. Problemas del modelo *Big Bang* sin inflación

El modelo de *Big Bang* que no incluye un periodo inflacionario se ha visto cuestionado por su inconsistencia con ciertas observaciones experimentales obtenidas. En concreto, dos de sus mayores problemas han surgido de las siguientes observaciones:

- El CMB presenta una gran homogeneidad en el espacio, entre regiones aparentemente no causalmente conexas, según el modelo sin inflación.
- Las mediciones indican que, en la actualidad, la geometría espacial del universo es muy cercana a ser plana. Para que esto sea posible, las condiciones iniciales son muy restrictivas.

2.2.1. Problema de horizontes

Según el modelo no inflacionario, el universo primitivo evolucionó en sus primeras fases bajo dominación de radiación. Como hemos indicado previamente, esto provoca que el espacio de Minkowski conformemente relacionado con nuestro espacio-tiempo esta temporalmente limitado en $\tau_i = 0$. Por ello, existe un horizonte de partículas; dicho de otra manera, el cono de luz pasado de un evento está espacialmente limitado a una porción del universo.

La imagen obtenida del CMB da cuenta de la alta homogeneidad del universo en el tiempo en que se produjo el desacople, t_{dc} . En un fluido ordinario, la homogeneidad se obtiene estadísticamente por la interacción entre las partículas. Para que un estado inhomogéneo se vuelva homogéneo las diferentes partes del fluido tienen que interactuar entre sí. De la misma manera, que diferentes partes del universo presente una alta homogeneidad debería ser consecuencia de que hayan estado en contacto previamente. La explicación de que el universo pueda haber nacido en un estado que fuese homogéneo e isotrópico desde su inicio es poco natural y altamente improbable [3].

La zona del universo que actualmente percibimos en el Fondo de Microondas corresponde a una distancia comóvil $r_{CMB} = \tau_0 - \tau_{rc}$. La pregunta que nos debemos hacer es si toda esta región del espacio estuvo en contacto causal previamente al desacople, es decir, si $r_p(\tau_{dc}) > r_{CMB}$ (Incluso sería más lógico pedir $2r_p(\tau_{dc}) > r_{CMB}$ para que todos los puntos del espacio hayan estado en contacto con todos los demás). Como veremos, esto no sucede en el modelo cosmológico estándar.

Para demostrarlo, vamos a calcular la razón $\theta = \frac{r_p(\tau_{dc})}{r_{CMB}}$,

$$r_p(\tau_{dc}) = \int_0^{a(\tau_{dc})} \frac{da}{a^2 H(a)} \quad , \quad (49)$$

$$r_{CMB} = \int_{a(\tau_{dc})}^{a_0} \frac{da}{a^2 H(a)} \quad . \quad (50)$$

Utilizando (33) y teniendo en cuenta $a(\tau_{dc}) \simeq 1/1000$ [6], numéricamente obtenemos

$$\theta \simeq 0,0217 \quad . \quad (51)$$

Como $\theta \ll 1$ podemos interpretarlo como el ángulo que forman desde nuestro punto de vista las mayores distancias que pueden estar causalmente conectadas en el CMB. Por lo tanto,

$$\theta = 1,16^\circ \quad . \quad (52)$$

Entonces, según nuestro modelo, no tiene justificación que regiones del CMB separadas para mayores ángulos sean homogéneas. Tampoco tendría sentido que las fluctuaciones estén correlacionadas para ángulos mayores. En la Figura 4 se representa los conos de luz correspondientes a dos puntos de la región espacial que actualmente percibimos como CMB separados por un ángulo de 90° .

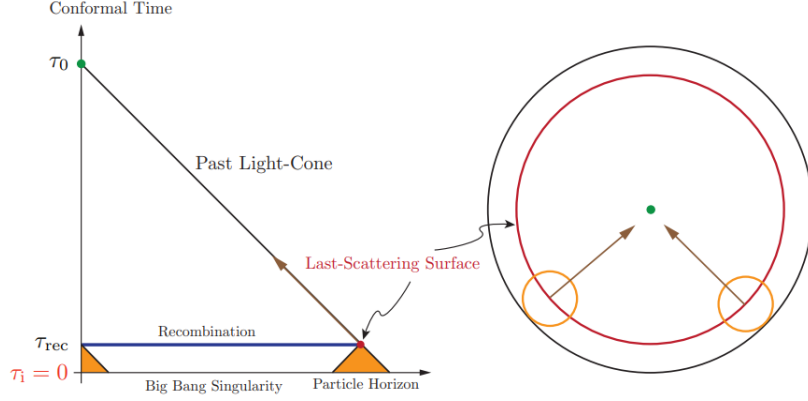


Figura 4: Los conos de luz pasados para puntos del CMB separados más de $1,16^\circ$ cortan con τ_i sin solaparse, por lo que no han estado nunca en contacto causal según el modelo *Big Bang* estándar. Imagen extraída de [2].

2.2.2. Problema de planitud

Utilizando (32) podemos ver cómo evoluciona el radio comóvil de Hubble:

$$r_H(a) = (aH)^{-1} = \frac{1}{aH_0} \left(\sum \Omega_i a^{-3(1+w_i)} - \frac{k}{(aH_0)^2} \right)^{-1/2} \quad . \quad (53)$$

Aproximando para una única especie dominante,

$$r_H(a) \simeq \frac{1}{H_0} a^{\frac{1}{2}(3w_i+1)} \quad . \quad (54)$$

Teniendo en cuenta que durante la mayor parte de la historia del universo, según el modelo estándar del *Big Bang* la especie dominante ha sido radiación o materia, $dr_H/da > 0$. Recordamos que habíamos escrito la primera ecuación de Friedmann de la forma

$$1 - \Omega = \frac{-k}{(aH)^2} = -k r_H^2 \quad . \quad (55)$$

Si el universo es espacialmente plano ($k = 0$) entonces $\Omega = 1$ y esta situación se mantiene en toda su evolución. En cambio, si la curvatura es no nula, entonces se incrementa con el tiempo. Es decir, la situación $\Omega = 1$ es un punto de equilibrio inestable. Para el segundo caso, podemos comparar los parámetros de curvatura en dos momentos de la evolución:

$$\frac{|1 - \Omega|_1}{|1 - \Omega|_2} = \frac{r_H(a_1)}{r_H(a_2)} \simeq \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{(3w_i+1)} \quad . \quad (56)$$

La última aproximación se refiere a la evolución del parámetro de curvatura en intervalos en los que una única especie pueda tomarse por dominante.

Como en la actualidad $|\Omega - 1| \sim 1$, para tiempos tempranos este valor tendría que haber estado muy cerca de 0. Por ejemplo, para el periodo de nucleosíntesis se calcula [1]

$$|\Omega(a_{\text{BBN}}) - 1| \leq \mathcal{O}(10^{-16}) \quad . \quad (57)$$

Para que esto se cumpla $\rho(t) \simeq \rho_{\text{crit}}(t)$ con una muy alta exactitud durante este tiempo.

3. Inflación

Hemos visto en el primer apartado que, si bien la cosmología estándar en su versión original parece describir correctamente la evolución actual del universo, plantea serios problemas cuando se extrapola a las primeras fases de su expansión.

Como hemos deducido, la evolución del universo viene determinada por la naturaleza de su contenido, y los ratios actualmente presentes de materia y radiación parecen incompatibles con una expansión que solucione los problemas planteados. Por ello, mediante el modelo inflacionario, propondremos la existencia de una nueva especie presente únicamente en las primeras fases de la expansión del universo que nos permita solucionar estas incongruencias.

Sin embargo, no comenzaremos especulando sobre la naturaleza de esta especie, sino que definiremos la inflación como un fenómeno puramente geométrico y, a partir de ahí, buscaremos las características que debe cumplir.

Finalmente, propondremos un campo asociado a una partícula, el **inflatón**, que tenga el comportamiento requerido. Se utilizará para ello un campo escalar real por ser esta la realización más simple. Estudiaremos bajo qué condiciones esta partícula produce inflación y sentaremos las bases sobre las que poder estudiar su decaimiento.

El tratamiento que se hará de los campos será puramente clásico, pues únicamente nos interesa su comportamiento global.

3.1. Definición de inflación

Definimos el periodo inflacionario como aquel en el que el radio de Hubble comóvil disminuye:

$$\frac{d}{dt}r_H = \frac{d}{dt}(aH)^{-1} < 0 \quad . \quad (58)$$

Como podemos ver,

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = \frac{d}{dt}(\dot{a}^{-1}) = -\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2} \quad , \quad (59)$$

por lo que una definición equivalente del periodo inflacionario es que la expansión del universo sea acelerada:

$$\boxed{\frac{d^2}{dt^2}a > 0} \quad . \quad (60)$$

Teniendo en cuenta (17), esta condición es también equivalente a que el universo este dominado en esta fase por una especie que cumpla

$$\rho + 3P < 0 \quad \Rightarrow \quad P < -\frac{1}{3}\rho \quad . \quad (61)$$

Es decir, necesitamos que la especie dominante en este periodo del universo proporcione una presión negativa. Como hemos visto, esto no sucede cuando el universo está dominado por materia o por radiación. Por el momento, para simplificar, centraremos nuestro estudio en una inflación que cumple $\boxed{P = -\rho}$. Además, consideraremos que en esta etapa ρ se mantiene constante, con lo que $H = H_I$ también lo será debido a (16) A un espacio-tiempo dominado por esta especie se le llama **espacio-tiempo de de Sitter**. Este tipo de comportamiento es el mismo deducido en (29) y (30) para una constante cosmológica

pero, como el efecto de Ω_Λ se vuelve despreciable para periodos tempranos del universo, su naturaleza debe ser diferente.

Como ya resolvimos en (18), para este espacio-tiempo el parámetro de escala evoluciona

$$a(t) = a_i e^{H_I(t-t_i)} \quad . \quad (62)$$

siendo a_i el valor del factor de escala en el momento que comienza la inflación, y t_i el tiempo en que esto sucede. No confundir con el t_i de la sección anterior, que indicaba el tiempo correspondiente a la singularidad inicial y que, a partir de ahora, será simplemente $t = 0$.

Para medir la magnitud de la expansión del universo durante el tiempo que dura la inflación, es útil definir el *número de e-folds* N como

$$e^N = \frac{a(t_f)}{a(t_i)} \quad . \quad (63)$$

Si suponemos $N(t)$ función del tiempo $t \in \{t_i, t_f\}$, $N(t) = \ln \frac{a(t)}{a(t_i)}$

$$dN = H dt \quad . \quad (64)$$

Si la inflación termina en el tiempo t_f , calculamos N para H_I constante:

$$N = H_I(t_f - t_i). \quad (65)$$

3.2. Revisión de los problemas de la cosmología estándar

3.2.1. Problema de horizontes

Un periodo inflacionario que dure el tiempo suficiente nos elimina automáticamente el problema de horizontes. Recordamos que el problema consistía en que el horizonte de partículas para $\tau = \tau_{dc}$ no era lo suficientemente grande como para abarcar todo el espacio que actualmente percibimos como CMB. Vemos que añadir una inflación en la evolución del universo nos permite agrandar este horizonte tanto como necesitemos. Con la definición que hemos hecho del periodo inflacionario como un espacio-tiempo de de Sitter,

$$r_p(\tau_{dc}) = \int_0^{a(t_{dc})} \frac{da}{a^2 H(a)} = \int_0^{a(t_i)} \frac{da}{a^2 H(a)} + \int_{a(t_i)}^{a(t_f)} \frac{da}{a^2 H_I} + \int_{a(t_f)}^{a(t_{dc})} \frac{da}{a^2 H(a)} \quad , \quad (66)$$

donde la inflación se produce entre los tiempos t_i y t_f . El segundo término se integra fácilmente:

$$\int_{a(t_i)}^{a(t_f)} \frac{da}{a^2 H_I} = -\frac{1}{H_I} \frac{1}{a(t)} \Big|_{a(t_i)}^{a(t_f)} = \frac{1}{H_I} \left(\frac{1}{a(t_i)} - \frac{1}{a(t_f)} \right) \quad . \quad (67)$$

Si suponemos que el comportamiento inflacionario sucede para periodos suficientemente tempranos de la evolución del universo ($a \rightarrow 0$) podemos aumentar arbitrariamente el horizonte de partículas para cualquier tiempo. De forma equivalente, podríamos enviar $\tau_i \rightarrow -\infty$ con lo que el espacio de Minkowski conformemente relacionado con el nuestro

se extendería infinitamente hacia atrás en el tiempo conforme, permitiendo que el cono de luz pasado no se viese espacialmente limitado.

En la Figura 5 se observa como alejando τ_i hacia $-\infty$ los horizontes de partículas de los diversos puntos que hoy percibimos como CMB acaban solapando.

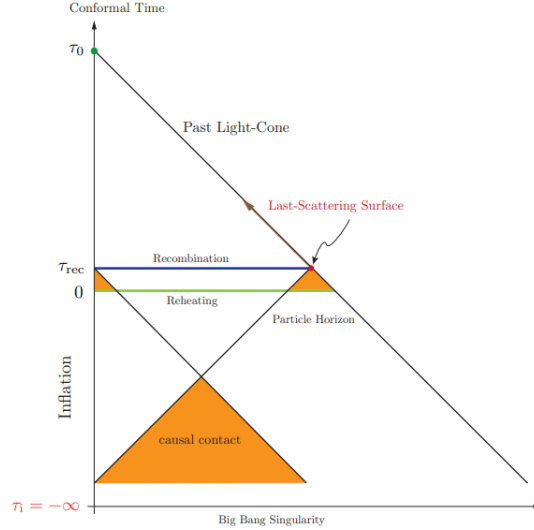


Figura 5: Representación en tiempo conforme del horizonte de partículas para dos puntos del CMB percibido actualmente. Vemos que los conos de luz se han alargado hacia el pasado en el tiempo conforme, con lo que puede tener contacto causal. Imagen extraída de [2] .

3.2.2. Problema de planitud

Como durante un periodo de inflación que cumpla la condición de de Sitter el parámetro de Hubble se mantiene constante, es evidente que $r_H = (aH)^{-1}$ decrece, al contrario de lo que ocurría en las fases de dominación de materia o radiación. (55) (con $k \neq 0$) se expresa

$$|\Omega - 1| = \frac{k}{H_I^2} \frac{1}{a^2} \quad , \quad (68)$$

con lo que $\Omega = 1$ pasa de ser un punto de equilibrio inestable a un atractor. La evolución de la curvatura durante el periodo de inflación:

$$\frac{|\Omega - 1|_f}{|\Omega - 1|_i} = \left(\frac{a_i}{a_f}\right)^2 = e^{-2N} \quad , \quad (69)$$

de manera que la inflación produce las condiciones iniciales necesarias para que la curvatura espacial actual se mantenga pequeña si dura el suficiente número de e-folds.

3.3. El inflatón

Proponemos la existencia de un campo real escalar al que exigiremos que cumpla las condiciones necesarias para que se produzca la inflación y que esté mínimamente acoplado a la gravedad, es decir, que la interacción entre el campo y la métrica sea exclusivamente mediante el elemento de volumen e independiente de términos que incluyan tensores de curvatura o curvatura escalar.

Este campo vendrá descrito por la acción

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{M_{Pl}^2}{2} \mathcal{R} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] . \quad (70)$$

El primer término, correspondiente al primer sumando de la densidad lagrangiana, es la denominada acción gravitacional de Einstein-Hilbert. Los dos últimos, que denotaremos S_ϕ , describen la dinámica del campo ϕ mínimamente acoplado a la gravedad. La acción total no describe únicamente el comportamiento del inflatón sino que, si se trata la métrica como un campo tensorial, también conduce a las ecuaciones de campo de Einstein mediante el calculo variacional ordinario, es decir, las ecuaciones de Friedmann también son consecuencia de esta acción.

La ecuación de Euler-Lagrange aplicada a ϕ describe la dinámica del campo:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) + \sqrt{-g} V_{,\phi} = 0 . \quad (71)$$

Es decir, cumple la ecuación de Klein-Gordon en un espacio-tiempo con curvatura:

$$\square \phi + V_{,\phi} = 0 . \quad (72)$$

El tensor de energía-momento de este campo se calcula variacionalmente de la siguiente manera [7]

$$T_{\mu\nu} \equiv - \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_\phi}{\delta g^{\mu\nu}} . \quad (73)$$

Teniendo en cuenta que $\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}$ obtenemos

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial^\sigma \phi \partial_\sigma \phi + g_{\mu\nu} V(\phi) . \quad (74)$$

En adelante, haremos las siguientes consideraciones:

- ϕ es espacialmente homogéneo (en el sistema de referencia del fluido), es decir, $\phi(\vec{x}, t) = \phi(t)$
- La métrica $g_{\mu\nu}$ es la correspondiente a la métrica FRW con $k = 0$, es decir, espacialmente plana.

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^{-2} \end{pmatrix} \quad y \quad \sqrt{-g} = a^3 \quad (75)$$

La ecuación del movimiento con estas condiciones se reduce a

$$\boxed{\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0} . \quad (76)$$

Vemos que la expansión del universo provoca una “fricción” que se manifiesta en el término disipativo dependiente de H .

Obtenemos, para las componentes del tensor de energía-momento (comparando con (11)),

$$\rho_\phi = -T^0_0 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (77)$$

$$p_\phi = \frac{T^i_i}{3} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad . \quad (78)$$

Hemos utilizado $\partial_0\phi = \dot{\phi}$.

Suponiendo que en el periodo inflacionario el universo esté dominado por esta especie, utilizando (16) con $k = 0$, calculamos el parámetro de Hubble,

$$H^2 = \frac{1}{3M_{\text{Pl}}^2}\rho_\phi = \frac{1}{3M_{\text{Pl}}^2} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) \quad . \quad (79)$$

Por otro lado, la ecuación de estado barotrópica correspondiente a esta especie

$$\omega_\phi \equiv \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)} \quad . \quad (80)$$

Este campo puede producir una presión negativa en el caso de que el potencial sea mayor que la energía cinética. Además, para el caso $|V(\phi)| \gg |\dot{\phi}^2|$ se obtiene el límite de de Sitter ($w = -1$). En este caso, si además $V(\phi)$ se mantiene constante según evoluciona ϕ , conseguimos un H constante.

3.3.1. Condiciones de *Slow-Roll*

Para que el campo del inflatón sea compatible con el comportamiento descrito, tendremos que establecer ciertas condiciones sobre su comportamiento. Estas son las llamadas **condiciones de *slow-roll***.

Reescribimos (17):

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6M_{\text{Pl}}^2}(\rho + 3P) = H^2(1 - \varepsilon) \quad , \quad (81)$$

donde definimos el parámetro de *slow-roll* ε así:

$$\varepsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{d \ln H}{dN} \quad . \quad (82)$$

Se produce inflación con la condición $\varepsilon < 1$ y se obtiene un parámetro de Hubble aproximadamente constante con $\varepsilon \rightarrow 0$.

Sustituyendo con los valores del inflatón:

$$\varepsilon = \frac{3}{2}(w_\phi + 1) = \frac{1}{2M_{\text{Pl}}^2} \frac{\dot{\phi}^2}{H^2} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)} \quad . \quad (83)$$

Para que la inflación se mantenga el tiempo suficiente, necesitamos que el parámetro ε se mantenga pequeño. Definimos un segundo parámetro de *slow-roll* η :

$$\eta \equiv \frac{\dot{\varepsilon}}{H\varepsilon} = \frac{d \ln \varepsilon}{dN} \quad . \quad (84)$$

Escribimos las condiciones de *slow-roll*:

$$\boxed{|\varepsilon| \ll 1} \quad (85)$$

$$\boxed{|\eta| \ll 1} \quad . \quad (86)$$

La primera implica que se produzca inflación y que la variación de H por *e-fold* sea pequeña ($\varepsilon > 0$). La segunda provoca que esta situación se prolongue lo suficiente durante la expansión.

Trasladamos estas condiciones a las ecuaciones del apartado anterior. De la primera condición:

$$|\varepsilon| \ll 1 \quad \Rightarrow \quad V(\phi) \gg \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H^2 \simeq \frac{1}{3M_{\text{Pl}}^2}V(\phi)} \quad . \quad (87)$$

De la segunda condición y la ecuación del movimiento:

$$|\eta| \ll 1 \quad \rightarrow \quad \boxed{3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0} \quad . \quad (88)$$

Si consideramos que las condiciones de *slow-roll* se cumplen durante la mayor parte del periodo de inflación, utilizando (87) y (88) podemos aproximar el número total de e-folds en función de la variación del campo:

$$N = \int_{t_i}^{t_f} H dt = \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi \simeq \frac{1}{M_{\text{Pl}}^2} \int_{\phi_f}^{\phi_i} \frac{V}{V_{,\phi}} d\phi \quad . \quad (89)$$

3.3.2. Elección del potencial $V(\phi)$

La inflación, según este modelo, sucedió a unas escalas energéticas muy altas (quizás $\sim 10^{15} \text{ GeV}$ [1]), mucho mayores que las accesibles por los aceleradores de partículas construidos hasta el momento. Por ello, no podemos tener conocimiento sobre el potencial que actúa sobre el inflatón. En su lugar, se postula una función $V(\phi)$ y se comprueba si los resultados derivados de esta elección se ajustan con las observaciones.

Las condiciones de *slow-roll* determinan dos condiciones sobre la forma del potencial. Definimos los parámetros de *slow-roll* del potencial:

$$\epsilon_V(\phi) \equiv \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \left(\frac{V_{,\phi}}{V} \right)^2 \quad (90)$$

$$\eta_V(\phi) \equiv M_{\text{Pl}}^2 \frac{V_{,\phi\phi}}{V} \quad . \quad (91)$$

Para la aproximación *slow-roll*, estos parámetros se relacionan con los parámetros de *slow-roll* anteriormente definidos (de Hubble) según [1]

$$\varepsilon \simeq \epsilon_V, \quad \eta \simeq \eta_V - \epsilon_V \quad . \quad (92)$$

La primera relación se puede obtener mediante el uso de (87) (88) y (83).

Por lo tanto, debemos exigir $\{\epsilon_V, |\eta_V|\} \ll 1$ para el régimen de *slow-roll*. La inflación acaba cuando se violan estas condiciones:

$$\varepsilon(\phi_f) \simeq 1, \quad \epsilon_V(\phi_f) \simeq 1 \quad . \quad (93)$$

Algunos de los modelos de potencial más utilizados son los siguientes [8]:

Modelo monomial de tipo caótico

$$V(\phi) = m^{4-n}|\phi|^n \quad . \quad (94)$$

Cuando se toma $n = 2$ se obtiene inflación caótica, que describiremos en el siguiente apartado.

Modelo de tipo Starobinsky

$$V(\phi) = V_0 \left(1 - \exp \left(\frac{|\phi|}{v} \right) \right)^2 \quad , \quad (95)$$

donde v es una constante.

Inflación de monodromía

$$V(\phi) = \mu^3 \left(\sqrt{\phi^2 + \phi_c^2} - \phi_c \right) \quad , \quad (96)$$

con constantes μ y ϕ_c .

3.3.3. Caso particular: $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$

Vamos a considerar como caso particular que el potencial del inflatón viene expresado por un único término de masa. Como hemos dicho, a este modelo se le denomina de inflación caótica.

Los parámetros de slow-roll del potencial resultan ser

$$\epsilon_V(\phi) = \eta_V(\phi) = 2 \left(\frac{M_{\text{Pl}}}{\phi} \right)^2 \quad , \quad (97)$$

con lo que la inflación terminará cuando

$$\epsilon_V(\phi_f) \simeq 1 \quad \Rightarrow \quad \phi_f \simeq \sqrt{2}M_{\text{Pl}} \quad . \quad (98)$$

Si la inflación comienza con un valor ϕ_i , utilizando (89) y el valor calculado de ϕ_f , calculamos el número de e-folds que dura la inflación

$$N = \frac{\phi_i^2}{4M_{\text{Pl}}^2} - \frac{1}{2} \quad . \quad (99)$$

Para que la inflación solvete los problemas de planitud y horizontes se necesita $N \sim 40 - 60$ [2]. Entonces, el valor inicial del campo tendrá que ser aproximadamente

$$\phi_i \sim 15M_{\text{Pl}} \quad . \quad (100)$$

Para este potencial, $\Delta\phi = \phi_i - \phi_f > M_{\text{Pl}}$, por lo que es de tipo Large-Field. Esto tiene implicaciones importantes, pues este tipo de potenciales indican que las ondas gravitacionales producidas durante la inflación pueden ser detectables en un futuro próximo. Estas son perturbaciones en la métrica que se propagan por el universo a la velocidad de la luz y deben ser producidas por eventos altamente energéticos para poder ser apreciables.

Si tomamos las ecuaciones que determinan la dinámica sin aproximación *slow-roll*,

$$\begin{cases} \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + m^2\phi = 0 \\ H^2 = \frac{1}{6M_{\text{Pl}}^2} (\dot{\phi}^2 + m^2\phi^2) \end{cases}, \quad (101)$$

podemos ver que, en efecto, el campo decae al mínimo de potencial. Para ello, representaremos la evolución sobre el espacio de fases, es decir, representaremos $\frac{d}{dt}(\phi, \dot{\phi}) = (\dot{\phi}, \ddot{\phi})$. Mediante (101) podemos obtener $\ddot{\phi}(\dot{\phi}, \phi)$. En la Figura 6 se ha representado un diagrama de flujo para unos valores simples de potencial. En esta imagen se observa claramente que el punto $(\dot{\phi}, \phi) = (0, 0)$ es un atractor, con lo que se cumple nuestra hipótesis de que el campo decae a un mínimo de potencial en torno al cual oscila.

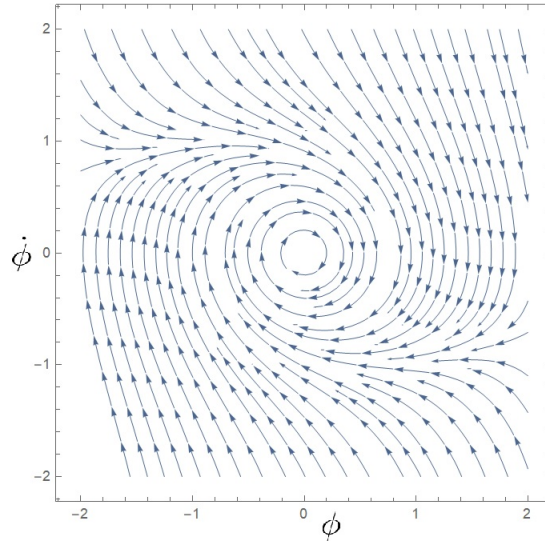


Figura 6: Representación de la evolución del campo ϕ sobre su espacio de fases. Se ha utilizado el programa Mathematica para su representación. Las unidades del campo son tales que $M_{\text{Pl}} = 1$ y, además, se ha tomado $m = 1$ por simplicidad.

Este potencial no es especialmente adecuado para describir el campo del inflatón, ya que durante una parte importante de la evolución del campo no se cumplen las condiciones de *slow-roll* más que de forma aproximada. Sin embargo, es un potencial que describe adecuadamente las oscilaciones del campo cuando este se encuentra cerca de su mínimo de potencial. Esto será de gran importancia en la próxima sección, cuando se exponga el mecanismo de decaimiento del inflatón en otros tipos de partículas, y es esta la razón por la que se ha presentado este potencial.

Tratamos de encontrar una expresión explícita de la evolución del campo bajo este potencial. Para ello reparametrizamos el campo mediante

$$\begin{cases} \phi = \sqrt{6}H \frac{M_{\text{Pl}}}{m} \cos \theta \\ \dot{\phi} = \sqrt{6}H M_{\text{Pl}} \sin \theta \end{cases} \quad (102)$$

que, por definición, cumplen la segunda ecuación de (101). Por otro lado, derivando la segunda ecuación (101) y sustituyendo con la primera:

$$2H\dot{H} = \frac{1}{3M_{\text{Pl}}^2} (\ddot{\phi} + m^2\phi)\dot{\phi} = -\frac{H}{M_{\text{Pl}}^2} \dot{\phi}^2 \quad . \quad (103)$$

Simplificando y sustituyendo (102) obtenemos

$$\dot{H} = -\frac{1}{2M_{\text{Pl}}^2} = -3H^2 \sin^2 \theta \quad . \quad (104)$$

Por otro lado, para que las definiciones (102) sean compatibles necesitamos que

$$\frac{d}{dt}(H \cos \theta) = mH \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \dot{H} \cos \theta - H \sin \theta \dot{\theta} = mH \sin \theta \quad . \quad (105)$$

Sustituyendo (104),

$$\dot{\theta} = -m - 3H \sin \theta \cos \theta = -m - \frac{3}{2} H \sin^2(2\theta) \quad , \quad (106)$$

donde hemos utilizado la correspondiente identidad trigonométrica. Si tenemos en cuenta que, por (104), el valor de H decae continuamente, para tiempos avanzados de la oscilación $\dot{\theta} \rightarrow -m$ y

$$\theta = -mt \quad . \quad (107)$$

Insertando este resultado en (104),

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -3 \sin^2(mt) \quad \Rightarrow \quad \frac{dH}{H^2} = -\frac{3}{2} (1 - \cos(2mt)) dt \quad , \quad (108)$$

que tiene como solución

$$\frac{1}{H} = \frac{3}{2} \left(t - \frac{\sin(2mt)}{m} \right) \quad \Rightarrow \quad H \sim \frac{2}{3t} \quad , \quad (109)$$

para $mt \gg 1$.

Entonces, para este periodo de oscilación, el factor de escala debería evolucionar según

$$\frac{da}{dt} = aH \quad \Rightarrow \quad \frac{da}{a} = \frac{2}{3} \frac{dt}{t} \quad \Rightarrow \quad a(t) \propto t^{2/3} \quad . \quad (110)$$

En resumen, el campo del inflatón, en un modelo en el que no interacciona con ningún otro campo, una vez que se aproxima al mínimo de su potencial, su comportamiento asintótico se puede describir como el de un campo oscilante de amplitud variable y frecuencia m :

$$\phi = \Phi(t) \cos(mt) \quad , \quad (111)$$

y con una amplitud que evoluciona aproximadamente

$$\Phi(t) \simeq \sqrt{\frac{8}{3}} \frac{M_{\text{Pl}}}{mt} \propto a(t)^{-3/2} \quad . \quad (112)$$

Es importante destacar que en todo este desarrollo el inflatón no está decayendo en otras partículas. El hecho de que pierda en amplitud es únicamente debido a la expansión del universo que el propio campo ϕ está provocando. Como veremos, cuando consideramos campos interactuantes, la velocidad de decaimiento del campo del inflatón será mayor.

4. *Reheating*

En el modelo que hemos propuesto para el inflatón en el capítulo anterior se mostraba el comportamiento general de esta partícula. El campo comienza en un estado en que el potencial de la partícula es notablemente mayor que su energía cinética, y para que la inflación producida dé buenos resultados, este estado de alto potencial debe mantenerse durante el tiempo suficiente. Finalmente, el campo deja de cumplir las condiciones de slow-roll y el proceso inflacionario cesa, mientras que el campo comienza a oscilar alrededor de un mínimo de potencial.

Cuando el inflatón se encuentra en esta situación de mínimo potencial, la mayor parte de su densidad de energía, ρ_ϕ , corresponde a la energía cinética. Para evitar un universo vacío necesitamos que esta energía se convierta en partículas del Modelo Estándar. Es por ello que debemos introducir nuevos campos que describan este tipo de partículas y que tengan la capacidad de interactuar con el campo del inflatón, los cuales no han sido contemplados en la sección anterior. La introducción de estos campos implicará la aparición de nuevos canales de decaimiento de la partícula a otras posibles componentes (hipotéticas).

Continuaremos con nuestro modelo de campos clásicos describiendo las partículas. Proponemos un modelo que nos permita observar un comportamiento aproximado introduciendo un nuevo campo escalar χ acoplado al campo del inflatón y que representa otro tipo de partícula en el que este puede decaer. Por simplicidad, y a diferencia de las referencias [9] y [10], no introduciremos un acople con un campo fermiónico. En particular, el acople lo realizaremos mediante un término de interacción $-\sigma\chi^2\phi$, que se deduce de las teorías gauge con ruptura espontánea de simetría [10]. Insistimos en que este es un *toy model*, no necesariamente realista, para poder describir los rasgos más importantes del proceso.

Nuestro tratamiento del *reheating* comenzará con un modelo perturbativo en el que consideraremos que la tasa de *decay* del inflatón en el nuevo campo se puede calcular y es independiente de las oscilaciones del campo. Esto nos permitirá obtener una ecuación equivalente a (76) con una corrección en el término disipativo. En segundo lugar, veremos que realizando un estudio más exhaustivo de la evolución de los campos se puede llegar a crecimientos exponenciales del campo χ .

4.1. Modelo perturbativo

El proceso de *reheating* se produce en el entorno de un mínimo de potencial de ϕ , con lo que la acción, teniendo en cuenta la interacción de los campos, nos queda:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{M_{Pl}^2}{2} \mathcal{R} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \chi \partial_\nu \chi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \sigma \chi^2 \phi \right] . \quad (113)$$

En unidades naturales, la densidad lagrangiana debe tener unidades de m^4 , por lo que σ debe ser un parámetro con unidades de masa. Hemos considerado que $m_\chi = 0$.

Si consideramos que la velocidad de *decay* del inflatón es pequeña ($m \gg \Gamma$) y no tenemos en cuenta la reacción del campo χ sobre el campo ϕ , la solución de la ecuación de la evolución de ϕ será de la misma forma oscilante que en el caso no interactuante con el potencial en ϕ^2 dada por (111). Utilizando esta ecuación y teniendo en cuenta que $\rho_\phi = 1/2 (\dot{\phi}^2 + m^2 \phi^2)$,

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}m^2\Phi^2 \quad . \quad (114)$$

Un campo escalar oscilante con frecuencia m se puede interpretar como una onda coherente de partículas ϕ con momento nulo y densidad de partículas $n_\phi = \rho_\phi/m$ [9]. Por lo tanto, para nuestro modelo, tenemos una densidad de partículas

$$n_\phi = \frac{1}{2}m\Phi^2 \quad . \quad (115)$$

Se utilizan técnicas ordinarias de teoría cuántica de campos (QFT) para calcular la tasa de *decay* del inflatón en el campo χ . A pesar de no haber sido estudiadas por el momento, esto no afecta al posterior desarrollo del trabajo. Se utiliza el resultado proporcionado por [11]:

$$\Gamma_{\phi \rightarrow \chi\chi} = \frac{\sigma^2}{8\pi m} \quad . \quad (116)$$

En nuestro modelo, este es el único canal de decaimiento del campo ϕ , por lo que $\Gamma = \Gamma_{\phi \rightarrow \chi\chi}$. Pero, como (115) está definido sobre volúmenes comóviles, el *decay* de ϕ viene dado por

$$\frac{d}{dt}(a^3 n_\phi) = -\Gamma a^3 n_\phi \quad , \quad (117)$$

con solución

$$n_\phi \propto a^{-3}(t)e^{-\Gamma t} \quad \Rightarrow \quad \Phi \propto a^{-3/2}(t)e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \quad . \quad (118)$$

Hemos recuperado (112) con un término exponencial adicional debido al *decay* del inflatón en el campo χ . En consecuencia, la pérdida de energía del campo ϕ es más rápida.

De manera alternativa (117) se puede reescribir

$$\dot{n}_\phi = -(\Gamma + 3H)n_\phi \quad . \quad (119)$$

Para $\Gamma \rightarrow 0$ y $H \sim 2/3t$ recuperamos el comportamiento de la sección anterior, para campos no interactuantes:

$$\dot{\Phi} = -\frac{\Phi}{t} \quad \Rightarrow \quad \Phi \propto t^{-1} \quad , \quad (120)$$

con lo que podemos interpretar que Γ simplemente hace aumentar el término de fricción de la ecuación del campo, resultando [9]

$$\ddot{\phi} + (3H + \Gamma)\dot{\phi} + m^2\phi = 0 \quad . \quad (121)$$

4.2. Resonancia paramétrica

Consideramos el campo escalar real clásico χ interactuando con ϕ según (113). En este caso no consideraremos que el campo sea homogéneo espacialmente. Esta no homogeneidad se discutirá más adelante. Entonces, su desarrollo de Fourier se expresa como

$$\chi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \chi_k(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \quad . \quad (122)$$

Con $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, a^2, a^2, a^2)$ las funciones $\chi_k(t)$ deben satisfacer la ecuación dinámica

$$\ddot{\chi}_k + 3H\dot{\chi}_k + (k^2 + 2\sigma\phi(t))\chi_k = 0 \quad . \quad (123)$$

Ignoramos el efecto de la expansión del universo pues, como veremos, este es despreciable frente al comportamiento que encontraremos. También consideramos $\phi(t) = -\Phi(t)\cos(mt)$ (simplemente un cambio en la fase, para escribir la ecuación en una forma estandarizada), entonces podemos reparametrizar la ecuación para obtener

$$\boxed{\chi_k'' + (A_k - 2q \cos 2z)\chi_k = 0} \quad , \quad (124)$$

donde hemos definido

$$A_k = 4 \left(\frac{k}{m} \right)^2 \quad , \quad (125)$$

$$q = \frac{4\sigma\Phi}{m^2} \quad y \quad (126)$$

$$z = \frac{mt}{2} \quad . \quad (127)$$

(124) es la ecuación de Mathieu, cuyas soluciones han sido estudiadas profundamente. Su principal característica consiste en que presenta inestabilidades exponenciales en ciertas bandas de resonancia.

4.2.1. Teorema de Floquet

Para analizar el comportamiento de la ecuación de Mathieu, nos interesa estudiar el caso general de un oscilador con velocidad angular dependiente del tiempo y periódico. Es decir, estudiaremos ecuaciones de la forma

$$\ddot{u}_k + \omega^2(k, t)u_k(t) = 0 \quad , \quad (128)$$

con $\omega(k, t + T) = \omega(k, t)$. Claramente, (124) es una ecuación de este tipo, con $\omega^2 = A_k - 2q\cos 2z$ y $T = \pi$.

El Teorema De Floquet establece que la solución más general de esta ecuación viene dada por

$$u_k(t) = e^{\mu_k t} \mathcal{P}_{k+}(t) + e^{-\mu_k t} \mathcal{P}_{k-}(t) \quad , \quad (129)$$

donde a μ_k se le llama el exponente de Floquet y $\mathcal{P}_{k\pm}(t+T) = \mathcal{P}_{k\pm}(t)$ [10]. Por lo tanto, en caso de que μ_k no sea imaginario puro, una de las dos soluciones crecerá exponencialmente.

Demostración:

Como la ecuación (128) es invariante ante traslaciones temporales $t \rightarrow t + T$, si $u_k(t)$ es una solución, entonces $u_k(t + T)$ también debe serlo. Sean $u_{k1}(t)$ y $u_{k2}(t)$ dos soluciones linealmente independientes. Entonces, por lo anterior, $u_{ki}(t+T) = \sum_{j=1}^2 B_{ij} u_{kj}(t)$. Diagonalizando B_{ij} , cambiamos la base a $v_{ki}(t) : v_{ki}(t+T) = \sum_{j=1}^2 \lambda_i \delta_{ij} v_{kj}(t) = \lambda_i v_{ki}(t)$. La función más general que cumple esta propiedad se puede escribir como $v_{ki}(t) = (\lambda_i)^{t/T} \mathcal{P}_{ki}(t)$ con $\mathcal{P}_{ki}(t+T) = \mathcal{P}_{ki}(t)$.

Por otro lado, como $v_{ki}(t)$ son soluciones de (128),

$$\begin{cases} v_{k1}''v_{k2} - \omega^2 v_{k1}v_{k2} = 0 \\ v_{k2}''v_{k1} - \omega^2 v_{k2}v_{k1} = 0 \end{cases} \Rightarrow v_{k1}''v_{k2} - v_{k2}''v_{k1} = \frac{d}{dt}(v_{k1}'v_{k2} - v_{k2}'v_{k1}) = \frac{d}{dt}W[v_{k1}, v_{k2}] = 0, \quad (130)$$

donde $W[v_{k1}, v_{k2}] = v_{k1}'v_{k2} - v_{k2}'v_{k1}$ es el Wronskiano de las soluciones. Por lo tanto, el Wronskiano es una constante, pero tenemos que $W[v_{k1}, v_{k2}](t+T) = \lambda_1\lambda_2W[v_{k1}, v_{k2}](t)$, así que concluimos que $\lambda_2 = \lambda_1^{-1}$. Reescribiendo $\mathcal{P}_{k\pm}$ con los coeficientes adecuados para la combinación lineal y $\lambda_1 = e^{\mu_k T}$ obtenemos la solución general dada de la forma (129). ■

Hemos visto que los exponentes de Floquet se obtienen simplemente tomando logaritmos en la igualdad $(\lambda_i)^{t/T} = e^{\mu_k t}$,

$$\mu_k = \ln(\lambda_1)/T \quad . \quad (131)$$

Sin embargo, este desarrollo únicamente nos da cuenta del carácter exponencialmente inestable que presentará el oscilador para ciertos parámetros, puesto que para conocer los valores de μ_k correspondientes a una $\omega(k, t)$ dada, tenemos que resolver (124) explícitamente.

En el que caso que estamos tratando, $\omega(k, t) = A_k - 2q\cos 2z$, con lo que la ecuación es invariante ante el cambio $z \rightarrow -z$, de manera que podemos encontrar un conjunto de soluciones independientes par e impar. Estas soluciones son unas funciones especiales, dependientes de los parámetros A_k y q , denominadas funciones de Mathieu par e impar $Ce_{A_k, q}(z)$ y $Se_{A_k, q}(z)$ respectivamente. Consideraremos que estas funciones están normalizadas de manera que $Ce_{A_k, q}(0) = 1$ y $Se'_{A_k, q}(0) = 1$. Evidentemente, estas funciones corresponderán al coseno y al seno con frecuencia angular $\sqrt{A_k}$ cuando $q = 0$.

Por el mismo razonamiento utilizado en la demostración, como las funciones de Mathieu son soluciones de la ecuación,

$$\begin{pmatrix} Ce(z+T) \\ Se(z+T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ce(z) \\ Se(z) \end{pmatrix} \quad , \quad (132)$$

así como la derivada de esta expresión. Evaluando en $z = 0$ y teniendo en cuenta las condiciones iniciales con la normalización indicada, podemos identificar

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ce(T) & Ce'(T) \\ Se(T) & Se'(T) \end{pmatrix} \quad . \quad (133)$$

Los valores propios de esta matriz se encuentran fácilmente:

$$[Ce(T) - \lambda][Se'(T) - \lambda] - Se(T)Ce'(T) = 0 \quad , \quad (134)$$

cuya solución es simplemente (adoptamos $T = \pi$ en concordancia con (124))

$$\lambda = \frac{Ce(\pi) + Se'(\pi)}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(Ce(\pi) - Se'(\pi))^2 + 4Se(\pi)Ce'(\pi)} \quad . \quad (135)$$

Recordemos que $Ce(z)$ y $Se(z)$ son funciones de A_k y q , con lo que de esta manera podemos obtener $\mu_k(A_k, q)$.

Una consecuencia directa de que la solución de la ecuación del campo χ se resuelva como una combinación lineal de funciones de Mathieu es que, si las condiciones iniciales

del campo son nulas en velocidad y en amplitud, entonces el campo se mantendrá nulo constantemente. Por ello, si no hay energía en las fluctuaciones iniciales del campo, su interacción con el inflatón no provocará ningún tipo de resonancia paramétrica. Este es el motivo de que las fluctuaciones del vacío, aunque pequeñas, se vuelvan indispensables para entender su comportamiento [10]. Además, la no homogeneidad espacial de estas fluctuaciones son las que provocan que el campo χ no sea espacialmente homogéneo, puesto que si únicamente hubiese fluctuaciones con $k = 0$, por el motivo anterior, únicamente encontraríamos esta componente una vez que el campo haya experimentado la resonancia. En este trabajo no trataremos este fenómeno más que para justificar la evolución del campo χ .

4.2.2. Estabilidad de la ecuación de Mathieu

Hemos visto cuál es el método para encontrar los exponentes de Floquet de la ecuación de Mathieu. Ahora, los evaluaremos numéricamente en las variables (A_k, q) para analizar las consecuencias físicas que la resonancia paramétrica puede tener en el comportamiento del campo χ .

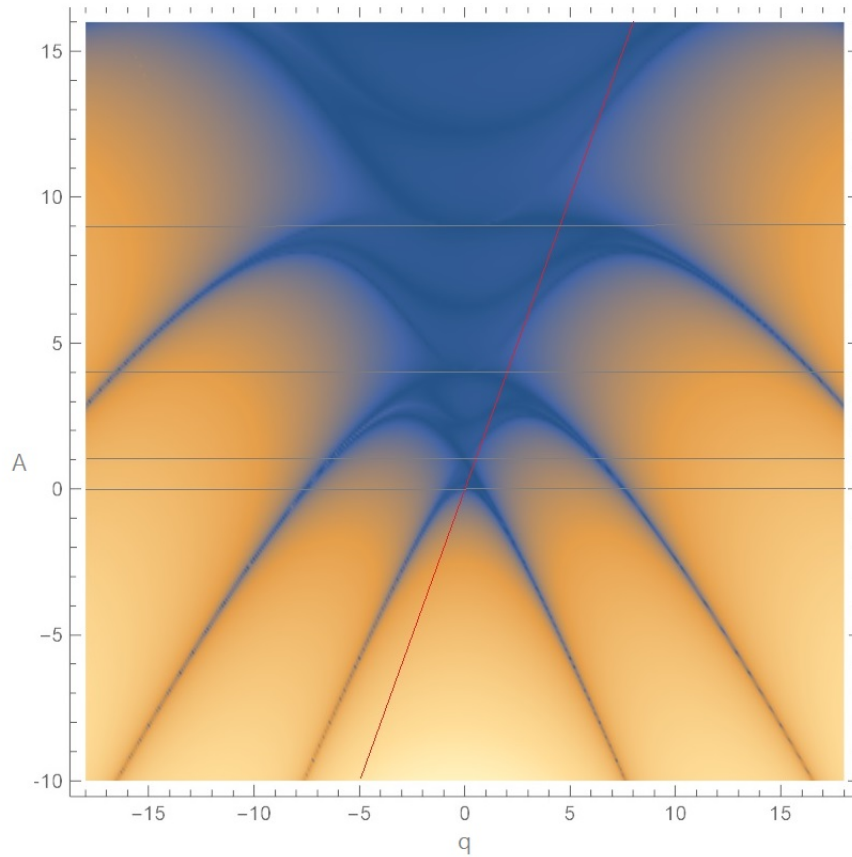


Figura 7: Carta de estabilidad de la ecuación de Mathieu realizada mediante Mathematica siguiendo el procedimiento indicado en la sección 4.2.1 y representando el valor absoluto de $\Re(\mu_k)$ en el rango $(0, 3'16)$. Las zonas en azul oscuro corresponden a zonas estables con $\Re(\mu_k) \simeq 0$ mientras que las zonas anaranjadas representan regiones de inestabilidad con $\Re(\mu_k)$ del orden de la unidad. Se ha representado en rojo la recta $A_k = 2q$ y se ha marcado con líneas grises los valores $A_k = 0, 1, 4, 9$.

En la Figura 7 se ha representado el valor absoluto de la parte real del exponente de Floquet de la ecuación de Mathieu. Estas cantidades se comportan de manera que, si bien su valor cambia de forma continua al modificar los parámetros, lo hacen de manera brusca en una serie de bandas. En las zonas que se han representado de color azul, la parte real de los coeficientes es muy cercana a 0, por lo que el comportamiento de las funciones correspondientes presentarán comportamientos estables. Las zonas representadas en amarillo muestran zonas de la carta en la que la parte real de los coeficientes aumenta bruscamente a valores del orden de la unidad y, por lo tanto, provocan un comportamiento altamente inestable en las funciones correspondientes. Vemos que para $A_k > 0$ existe una zona de estabilidad limitada aproximadamente por $A_k > 2|q|$. Además, en esta región penetran bandas de inestabilidad que tienden a $A_k = n^2$ para n entero cuando $|q| \rightarrow 0$. Las inestabilidades que ocurren en esta región, concentradas en $A_k^{(n)} = n^2$ son conocidas como **resonancia paramétrica estrecha**.

Para $2|q| > A_k$, $\omega(k, t)$ toma valores imaginarios para ciertas fases de cada oscilación y el comportamiento de la ecuación ya no se puede tratar como un movimiento armónico perturbado. Las inestabilidades producidas en esta región son mucho mayores y no están concentradas en bandas estrechas como en el caso de la resonancia estrecha. A estas inestabilidades se las conoce como **resonancia paramétrica ancha**.

4.2.3. Resonancia paramétrica estrecha

Se puede demostrar que, realizando un tratamiento perturbativo alrededor de $A_k^{(1)}$, $A_k = 1 + a$, $a \ll 1$, $q \ll 1$, el coeficiente de Floquet en su entorno viene expresado por [12]

$$\mu_k^2 = \frac{1}{4} \left(q^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right) \quad , \quad (136)$$

que tiene un valor máximo en $A_k = A_k^{(1)} = 1$ dado por

$$\mu_k = \frac{|q|}{2} \quad . \quad (137)$$

La región de inestabilidad en este entorno corresponde a aquella en que (136) es real:

$$-2|q| < a < 2|q| \quad . \quad (138)$$

En la Figura 8 se observa que el límite de estabilidad calculado perturbativamente sobre la representación que hemos realizado de las regiones de estabilidad para la región cercana a $A_k^{(1)}$.

También se puede demostrar que las bandas de inestabilidad para n arbitrario tienen una anchura $\Delta a \propto |q|^n$, por lo que la primera banda será la que tenga más importancia en la creación de partículas.

Trasladamos estos resultados a la interpretación física del comportamiento del campo χ . La relación (125) conlleva que en el entorno de $k = m/2$ se producirá un aumento exponencial del campo χ , es decir, una gran parte de las partículas creadas tendrán una distribución de momentos altamente concentrada en $m/2$. El campo sufrirá en este entorno una inestabilidad que crecerá con $\exp(qz/2)$ y, utilizando (126) y (127), esto significa un crecimiento proporcional a $\exp(\sigma\Phi t/m)$.

La ecuación (128) se puede derivar de la acción de un oscilador armónico de velocidad angular variable por lo que la energía del modo \mathbf{k} es $\frac{1}{2}|\dot{\chi}_{\mathbf{k}}|^2 + \frac{1}{2}\omega_{\mathbf{k}}^2(t)|\chi_{\mathbf{k}}|^2$.

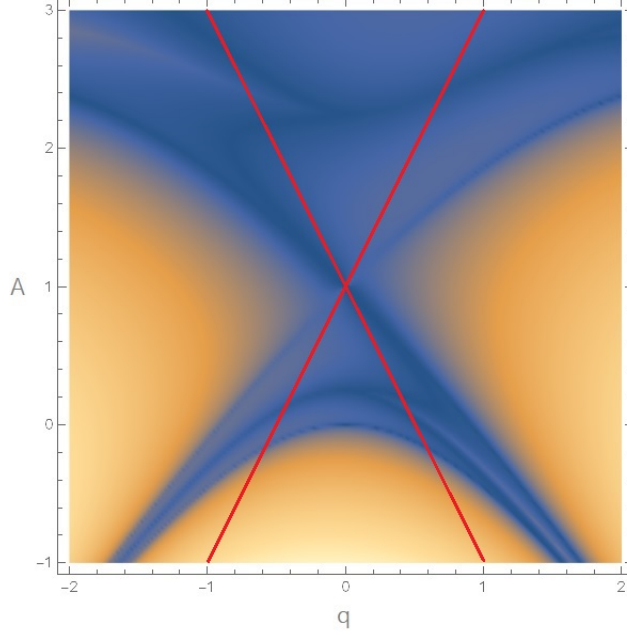


Figura 8: Carta de estabilidad de la ecuación de Mathieu en el entorno de $(A_k, q) = (1, 0)$, primera zona de resonancia estrecha. En rojo se marca los límites de la zona de estabilidad calculada mediante el método perturbativo.

Relacionando este resultado con $E_{\mathbf{k}}^\chi = \omega_k(t) (n_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2})$, obtenemos

$$n_{\mathbf{k}}^\chi = \frac{\omega_k}{2} \left(\frac{|\dot{\chi}_{\mathbf{k}}|^2}{\omega_k^2} + |\chi_{\mathbf{k}}|^2 \right) - \frac{1}{2} \quad , \quad (139)$$

por lo que el número de ocupación medio en la primera banda de inestabilidad $n_{|\mathbf{k}| \simeq m/2}^\chi \propto \exp(2\sigma\Phi t/m)$.

El hecho de que la resonancia principal se produzca con $k = \frac{m}{2}$ tiene una interpretación sencilla: puesto que hemos considerado $m_\chi = 0$, cuando una partícula ϕ decae crea dos partículas χ con momento $k \sim \frac{m}{2}$ [9]. Visto de este modo, el comportamiento es muy similar al del modelo perturbativo, aunque los resultados son totalmente diferentes.

Aunque los dos métodos utilizados para la descripción del *decay* del inflatón parecen contradictorios, veremos que en realidad describen dos efectos diferentes que no son excluyentes. Ignoraremos el efecto de la expansión del universo por simplicidad.

Recordamos que en el modelo perturbativo, la cantidad de partículas producidas era independiente del número de partículas χ creadas previamente, dependía exclusivamente de ϕ mediante $\dot{n}^\chi = 2\Gamma n^\phi = \Gamma m \Phi^2$, con $\Gamma = \frac{\sigma^2}{8\pi m}$. En la resonancia estrecha el número de partículas χ creadas en la banda de resonancia sí que depende de las creadas anteriormente cuando el comportamiento es exponencial: $\dot{n}_{|\mathbf{k}| \simeq m/2}^\chi = \frac{2\sigma\Phi}{m} n_{|\mathbf{k}| \simeq m/2}^\chi$.

Esta diferencia implica que el efecto del decaimiento en el modelo perturbativo sea despreciable frente al producido por la resonancia paramétrica. Como muestra (120), el efecto de la expansión del universo es del orden del producido en el modelo perturbativo, con lo que se justifica que no hayamos tenido en cuenta la expansión del universo en (124).

Sin embargo, aunque el efecto global de la resonancia paramétrica sea dominante, esta sucede únicamente para unas pocas componentes χ_k cuya k se encuentra en la región inestable, mientras que el modelo perturbativo continúa siendo válido para la mayoría

de las χ_k . Además, como el ratio de creación de partículas en resonancia depende de la amplitud Φ , el modelo perturbativo también vuelve a ser válido cuando el campo del inflatón es lo suficientemente pequeño [9].

4.2.4. Resonancia ancha

El fenómeno de la resonancia ancha ocurre para valores de q lo suficientemente grandes como para que la aproximación perturbativa no sea válida. En la Figura 9 se muestra el límite en la carta de estabilidad de la ecuación de Mathieu que, como hemos dicho anteriormente, se establece en $A_k - 2|q| < 0$, que aplicado al campo χ ,

$$\Phi(t) > \frac{k^2}{2\sigma} \quad . \quad (140)$$

Por lo tanto, la resonancia ancha se produce para valores de la amplitud de $\phi(t)$ suficientemente grandes. En esta situación el valor del exponente de Floquet es elevado para un amplio rango de k y el *reheating* se vuelve altamente eficiente.

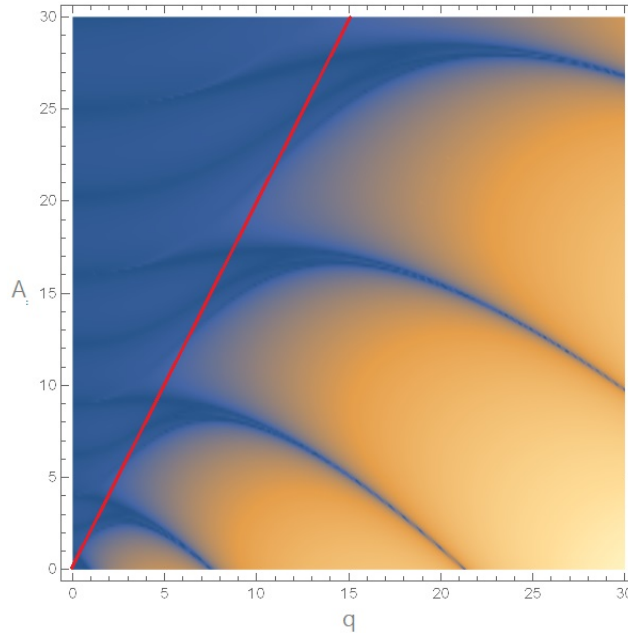
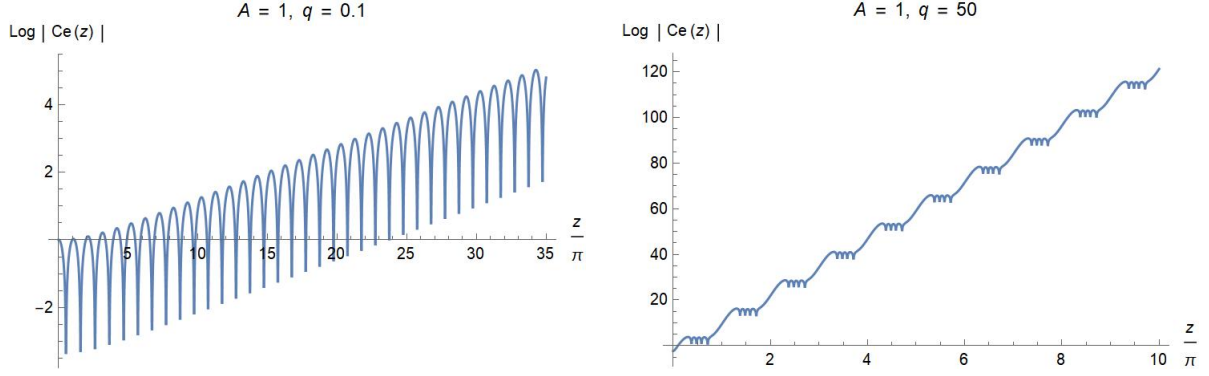


Figura 9: Carta de estabilidad de la ecuación de Mathieu para $q > 0$. En rojo se marca el límite que diferencia las zonas de estabilidad respecto de las que producen resonancia ancha.

A pesar de que estos parámetros conllevan un crecimiento exponencial similar al de la resonancia estrecha, difiere en esta en un punto esencial: las partículas no se crean de forma continua, sino por “impulsos”.

Para hacernos una primera idea de la diferencia entre estos dos comportamientos representaremos dos funciones de Mathieu, una correspondiente a la región de resonancia paramétrica estrecha y otra correspondiente a la resonancia ancha. En la Figura 10 se han representado dos de estas funciones, pares, para ambos casos.

Como hemos adelantado, en el gráfico se ve claramente que para el caso de la resonancia ancha la amplificación del campo, y por lo tanto la creación de partículas χ no es constante, sino que se divide en pulsos de frecuencia igual a la del campo del inflatón.



(a) Logaritmo de la función de Mathieu para para $A_k = 1$ y $q = 0,1$, zona de resonancia estrecha. La amplitud de las oscilaciones crece de manera exponencial de forma continua.

(b) Logaritmo de la función de Mathieu para para $A_k = 1$ y $q = 50$, zona de resonancia ancha. La amplitud del campo sufre crecimientos exponenciales alternados con periodos de relativa estabilidad.

Figura 10: Comparación de las funciones de Mathieu para resonancia estrecha y ancha. Se ha representado la variable temporal de manera que sus unidades sean iguales al número de periodos que ha oscilado el campo $\phi(t)$.

El resultado anterior es fácil de entender utilizando el método WKB [13]. Este se utiliza para encontrar aproximaciones a ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables y es muy útil en cálculos semiclásicos en mecánica cuántica. Proponemos para (128) una solución de la forma

$$u_k = \alpha e^{iS(t)} \quad . \quad (141)$$

Sustituimos en la ecuación para obtener

$$-S'(t)^2 + iS''(t) + \omega^2(t) = 0 \quad , \quad (142)$$

y hacemos la suposición $|S''(t)| \ll S'(t)^2$, con lo que obtenemos la relación

$$S'(t) = \pm \omega(t) \quad . \quad (143)$$

La condición impuesta se convierte en

$$\frac{|\omega''(t)|}{\omega^2(t)} \ll 1 \quad , \quad (144)$$

conocida como condición de adiabaticidad. La solución no será válida en las regiones temporales que no se cumpla esta condición. En los intervalos en los que sí se cumpla, la solución será de la forma

$$u_k(t) = \alpha_+ e^{+i \int \omega(t) dt} + \alpha_- e^{-i \int \omega(t) dt} \quad . \quad (145)$$

En nuestro caso, $\omega^2(z) = A_k - 2q \cos 2z$ y $2|q| > A_k$, con lo cual podemos dividir la evolución en tres clases:

- Cuando $\omega^2 > 0$, entonces $\omega = \sqrt{|A_k - 2q \cos 2z|}$ y se trata de un oscilador de frecuencia variable. En la Figura 10 corresponde a los periodos de estabilidad.

- Si $\omega^2 < 0$, entonces $\omega = i\sqrt{|A_k - 2q\cos 2z|}$. La solución tienen una componente creciente exponencialmente y otra decreciente, pero el efecto de la segunda es despreciable.
- Cada vez que se pasa de un estado a otro $\omega \sim 0$, con lo que se rompe la condición de adiabaticidad y la solución pierde su validez.

4.3. Revisión del modelo utilizado

Como indicamos al principio de la sección, el modelo utilizado para el estudio del *reheating* ha sido un modelo de juguete, no necesariamente realista, sobre el que además hemos realizado una serie de aproximaciones. De hecho, la elección del término de interacción entre campos ha sido en parte arbitraria, pues no todas las referencias utilizadas desarrollaban el mismo modelo.

Los resultados obtenidos, por el contrario, presentan un comportamiento físico altamente satisfactorio y genérico. Hemos conseguido un modelo que explica cómo, simplemente a partir de su interacción con el inflatón, se puede obtener otro tipo de partículas convencionales o que decaigan en estas.

Los procesos estudiados son sumamente energéticos, por lo que es posible que dejasen trazas en forma de ondas gravitacionales. La medición y estudio futuro de estas podrían darnos más información que permitiese especificar mejor el modelo que describe la inflación.

Por último, remarcar que el desarrollo anterior se ha realizado en el régimen lineal, en el cual el inflatón no siente la presencia de la partícula χ . Teniendo en cuenta que hemos encontrado comportamientos exponenciales para este campo, este alcanza rápidamente altas energías, por lo que esta aproximación podría ser errónea. El análisis presentado, en consecuencia, sólo sería válido para fases en que el campo χ fuese lo suficientemente pequeño, resultando en la aparición de ecuaciones completamente no lineales para describir las fases posteriores. Entonces el sistema debería tratarse mediante métodos numéricos que tratasen las ecuaciones diferenciales acopladas en su totalidad, como las simulaciones *lattice*.

5. Conclusión y futuros trabajos

En la primera sección del trabajo se han introducido las herramientas fundamentales para el estudio de la cosmología relativista. Se ha relacionado la evolución de la geometría del universo con el contenido de este y, mediante los conceptos presentados de los horizontes, se ha concluido que las observaciones experimentales son incompatibles con el contenido actual del universo.

En la segunda sección se ha presentado la inflación como modelo de la evolución del universo, que ha sido capaz de solucionar los problemas planteados en la sección anterior. Para proporcionar a este comportamiento justificación física se ha propuesto la existencia de un campo escalar asociado a una partícula, denominada inflatón, cuyo comportamiento ha sido descrito en términos de campos clásicos.

Para poder enlazar esta fase inflacionaria con el estado actual del universo, en la tercera sección se ha descrito el proceso conocido como *reheating*. Así, haciendo uso de un *toy model* en que la partícula del inflatón interactúa con un segundo campo escalar, se han encontrado las vías que el inflatón utiliza para decaer en las partículas presentes actualmente. Para ello se ha utilizado un modelo perturbativo y finalmente otro que, mediante la teoría de la resonancia paramétrica, ha sido capaz de predecir comportamientos exponenciales en el decaimiento del inflatón.

Este trabajo se ha desarrollado siguiendo, en su mayor parte, una serie de artículos sobre inflación publicados en las últimas décadas. La mayor dificultad en su realización ha sido el intento de coordinar diversos textos de muy diferente profundidad con bibliografía básica de los grandes temas de la física, de manera que se obtuviese un resultado homogéneo y accesible para un estudiante de física de último año. Para ello, se ha tratado de fundamentar matemáticamente muchos de los pasos realizados de manera que el lector pueda seguir el texto de manera rigurosa sin tener que hacer uso de herramientas y bibliografía externa.

A pesar de ser un trabajo sobre inflación, una gran parte del texto se ha centrado en la cosmología general que, por ser necesaria para la justificación del modelo inflacionario, he considerado que merecía un tratamiento con la suficiente profundidad. Ello ha supuesto que la introducción del modelo del inflatón haya sido tratada simplemente como un puente para poder tratar el *reheating*. Finalmente, únicamente se ha presentado la teoría más básica del *reheating*, ya que una mayor profundidad no hubiese correspondido al nivel con el que se ha enfocado el trabajo.

Es por ello que existen numerosas direcciones hacia las que poder ampliar este texto. Obviando que se pueda estudiar la cosmología con mayor detalle, en el ámbito de la inflación y el *reheating* han quedado muchos caminos abiertos. Por ejemplo, la forma que adopta el potencial del campo ϕ se ha dejado en el aire, siendo esta un tema de relevancia actual. También se podía haber estudiado este campo de manera que no presentase una homogeneidad espacial absoluta, sino una serie de perturbaciones que expliquen las anisotropías del CMB. En el estudio del *reheating* se ha supuesto un término de interacción que no tiene por qué ser el que mejor se ajuste a la realidad; las posibilidades de variar la acción que describe el proceso son prácticamente infinitas. Otro ejemplo sería el de considerar campos acoplados no mínimamente a la gravedad.

Referencias

- [1] Daniel Baumann. TASI lectures on inflation. Department of Physics, Harvard University, Cambridge, MA 02138, USA. School of Natural Sciences, Institute for Advanced Study, Princeton, NJ 08540, USA.
- [2] Daniel Baumann. The physics on inflation: A course for graduate students in particle physics and cosmology. Department of Physics, Harvard University, Cambridge, MA 02138, USA. School of Natural Sciences, Institute for Advanced Study, Princeton, NJ 08540, USA.
- [3] Robert M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984.
- [4] A. Riotto. Inflation and the theory of cosmological perturbations. NFN, Sezione di Padova, via Marzolo 8, I-35131, Padova, Italy.
- [5] N. Aghanim, Y. Akrami, M. Ashdown, J. Aumont, et al. Planck 2018 results. vi. cosmological parameters. *Astronomy and Astrophysics* 646, 2020.
- [6] Andrew Liddle. *An Introduction to Modern Cosmology*. Wiley, 2015.
- [7] S. Mukhanov, V. F.; Winitzki. *Introduction to Quantum Effects in Gravity*. Cambridge University Press, 2007.
- [8] Peter Adshead, John T. Giblin, Mauro Pieroni, and Zachary J. Weiner. Constraining axion inflation with gravitational waves from preheating. *Phys. Rev. D* 101, 2020.
- [9] Lev Kofman, Andrei Linde, and Alexei A. Starobinsky. Towards the theory of reheating after inflation. *Physical Review D*, 1997.
- [10] Kaloian Lozanov. Lectures on reheating after inflation, febrero 2018.
- [11] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. CRC Press, 1995.
- [12] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Mecánica*. Editorial Reverté, 1965.
- [13] Luis de la Peña. *Introducción a la mecánica cuántica*. Fondo de Cultura Económica, 1979.