EKONOMIAKO GRADUA

2023/2024 Ikasturtea

HAZKUNDE EKONOMIKOA: GIZA-KAPITALA BARNERATZEN DUEN SOLOW-EN EREDUA

Egilea: Asier Erdozain Perez

Tutorea: Ilaski Barañano Mentxaka

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco

Euskal Herriko Unibertsitatea

Aurkibidea

1. Sarrera 1

2. SOLOW-en eredua 2

2.1. Ekoizpen-funtzioa 2

2.2. Ondasunen eskaria, aurrezkia eta inbertsioa 5

2.3. Inbertsioa eta kapital-metaketa 6

2.4. Aurrezki-tasa eta epe luzeko langileko ekoizpena 12

2.5. Populazioaren hazkunde-tasaren igoeraren eragina egoera geldikorrean 16

3. Aurrerapen teknologikoa Solow-en ereduan barneratuz 17

3.1. Ekoizpen-funtzioa aurrerapen teknologikoarekin 17

3.2. Egoera geldikorra aurrerapen teknologikoarekin 20

3.3 Aurrerapen teknologikoaren hazkundearen eraginak 21

4. Giza-kapitala Solow-en ereduan barneratuz 22

4.1. Giza-kapitala eta ekoizpen-funtzioa 23

4.2. Giza-kapitalaren metaketa 25

4.3. Giza-kapitala barneratzen duen Solow-en ereduaren egoera geldikorreko berezitasunak 31

4.4 Giza-kapitala barneratzen duen Solow-en ereduaren aldeko ebidentzia enpirikoa: Mankiw, Romer eta Weil-en analisia. 33

4.4.1 Estimazio-eredua eraikitzen 34

4.4.2 Mankiw, Romer eta Weil-en estimazioen emaitzak. 38

4.4.3. Mankiw, Romer eta Weil-en estimazioei egindako hainbat kritika. 41

5. ONDORIOAK 46

A. ERANSKINA 49

h* eta k*-ren kalkulua: 49

B. ERANSKINA 49

Tinkotasuna:... 49

6. BIBLIOGRAFIA 51

Laburpena

Lan honek Solow-en hazkunde ekonomikoaren ereduan giza-kapitala barneratzeak ereduak hazkunde ekonomikoa azaltzeko duen gaitasuna hobetzen al duen zehaztea du helburu. Horretarako, lehendabizi, Solow-en oinarrizko ereduaren balizkoak eta ondorioak era sakonean azalduko dira. Behin oinarrizko eredu hau osatuta, giza-kapitala barneratuko da. Hasiera batean, giza-kapitalaren barnerapenak dituen inplikazio teorikoak azalduko dira, ostera gai honen inguruan Mankiw, Romer eta Weil-ek egindako analisi ekonometrikoen emaitzak aztertuz. Azkenik, Mankiw, Romer eta Weil-ek lortu zituzten estimazioen esanguratasuna zalantzatzen duten bi kritika aipatuko dira.

Gako-hitzak: Hazkunde ekonomikoa, Solow-en eredua, giza-kapitala, kapital-metaketa, aurrerapen teknologikoa.

1. Sarrera

Hazkunde ekonomikoa ekonomiaren arloan gehien eztabaidatu eta jorratu den gaietako bat da, gizartearen ongizatean duen eragin zuzenagatik. Adibide batzuk aipatzearren, hazkunde ekonomikoak biztanleen bizi-mailan, aberastasunaren banaketan, gizartearen aurrerakuntzan eta beste hainbat esparrutan du eragina. Baina zer da hazkunde ekonomikoa? Ba, ekonomia batek bere ekoizpen ahalmena handitzeko prozesuari deritzo hazkunde ekonomikoa eta biztanleko Barne Produktu Gordinak denbora tarte luzeetan zehar izandako hedapenaren bitartez neurtu ohi da. Beraz, hori izango da analisiaren sujetua; hau da, biztanleko Barne Produktu Gordinaren hazkundea eragiten duten faktoreak identifikatzeko ahalegina egingo da. Hazkunde ekonomikoa eragiten duten faktore hauek identifikatzeak interes bikoitza dauka. Alde batetik, ekonomia aberatsenen oparotasunaren zergatiak ulertzea eta bestetik, ekonomia txiroenen garapena bultzatzeko politika efektiboak diseinatzea. Hazkunde ekonomikoaren faktoreak identifikatzeko ahalegin eskas batzuk II. Mundu Gerra aurretik egin arren, honen ostean ezarri zen hazkunde ekonomikoa analisi ekonomikoaren ikerketa-alor bat bezala.[1] Testuinguru honetan kokatzen da Solow-en hazkunde-ekonomikoaren eredua.

Robert Merton Solow ekonomialariak hazkunde ekonomikoan eragina duten elementuak identifikatzeko eta aztertzeko ahalegina egin zuen. Horretarako 1956. urtean *"A Contribution to the Theory of Economic Growth"* izenburupeko artikulua argitaratu zuen, bere eredua proposatuz. Aurkeztu zenetik, Solow-en eredua tresna erabakigarria izan da epe luzerako hazkunde ekonomikoaren azterketarako, eta marko teoriko sendoa eman du produkzio-faktoreek eta aurrerapen teknologikoak biztanleko Barne Produktu Gordina handitzen nola laguntzen duten aztertzeko. Solow-en ereduaren funtsezko ezaugarrietako bat konbergentzia baldintzatuaren aurreikuspena da. Honen arabera, aurrezki-tasa berdina, populazioaren hazkunde-tasa berdina eta teknologia berdinak dituzten ekonomiek biztanleko Barne Produktu Gordin maila berberera konbergituko dute. Honek aldi berean, herrialdeen biztanleko Barne Produktu Gordinen ezberdintasunak herrialdeen artean parametro hauek hartzen dituzten balio ezberdinengatik eratortzen direla inplikatzen du. Solow-en lehen eredu honek ez zituen emaitza oso onak izan

[1] Arndt, H.W. (1997). *Economic Development: The history of an Idea.* Chicago IL: University of Chicago Press.

ebidentzia enpirikoarekin alderatzerako orduan, ostera ikusi den bezala hazkunde ekonomikoa azaltzeko esanguratsuak diren hainbat faktore ez dituelako kontuan hartzen. Hala ere, Solow-en oinarrizko ereduak hurrengo urteetan garatutako hazkunde ekonomikoaren analisiaren oinarria ezarri zuen, arrez geroztik ebidentzia enpirikoa hein handiago batean azaltzeko gai izan diren Solow-en eredu sinplearen moldaketak proposatu baitziren.

Lan honetan Solow-en eredua fintzeko ahaleginean giza-kapitala barneratuko da eta ikusiko denez, hazkunde-ekonomikoa era osatuagoa batean azaltzea ahalbidetuko du moldaketa honek. Giza-kapitala lan faktoreak dituen gaitasuna, hezkuntza, trebezia eta produktibitatea areagotzen duten bestelako ezaugarrien maila barneratzen dituen aldagaitzat hartuko da.

Beraz, lan honetan, Solow-en eredua sakonean azalduko da lehenik, ereduak dituen balizkoak eta haietatik eratortzen diren ondorioak azalduz. Behin oinarrizko eredua eraikita, aurrerapen teknologikoa ahalbidetuko da, honek epe luzeko hazkunde-ekonomikoan dituen eraginak aztertzeko. Solow-en eredua guztiz osatzean giza-kapitala barneratuko da ereduan. Hasiera batean, aldagai honen barnerapenak dituen inplikazioak analitikoki eta grafikoki aztertuko dira. Gerora, 1992. urtean Mankiw, Romer eta Weil ekonomialariek giza-kapitala barneratzen duen Solow-en ereduaren analisi ekonometrikoa aztertuko da, oinarrizko ereduaren moldaketa honen aldeko ebidentzia enpirikoa zehazteko asmoarekin. Azkenik estimazio hauei egindako hainbat kritika aipatuko dira.

2. SOLOW-en eredua

2.1. Ekoizpen-funtzioa

Ondasun bakarra eta homogeneoa kontsideratuko da, kontsumo edo inbertsiorako erabili daitekeena. Ekoizpen agregatua t denboraldian Y_t bidez adieraziko da. Bi produkzio-faktoreren laguntzaz ekoitziko da, lana eta kapitala. Ekoizteko aukera teknologikoak ekoizpen-funtzio baten bidez zehaztuko dira:

$$Y = F(K, L)$$

non Y ekoizpen agregatua, K kapitala eta L lana diren.

Kapitalak ekoizpen-faktore fisiko iraunkorrei egiten die erreferentzia, esate baterako: makinak, eraikinak, ekipamendu zientifikoa… Lanari dagokionez, langile kopurua eta hauek lanean ematen dituzten orduak kontuan hartzen ditu. Eredu honetan biztanle guztiak lanean dabiltzanaren balizkoa onartuko da. Teknologiak, lehen aipatu bezala, ekoizteko prozesuan lana eta kapitala konbinatzeko moduari egiten dio erreferentzia. Ekoizpen-funtzio honek lau ezaugarri ditu:[2]

Eskala errendimendu konstanteak: Lana eta kapitala proportzio berean handitzean, ekoizpena ere proportzio berdinean handituko da.

$$xY = F(xK, xL) \qquad \forall x > 0$$

Ekoizpen-faktoreen produktu marjinala positiboa eta beherakorra da: Edozein kapital edo lan maila positiborako ekoizpen-funtzioak produktu marjinal positibo eta beherakorrak ditu ekoizpen-faktore bakoitzarekiko.

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} > 0, \qquad \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2} < 0$$

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial L} > 0, \qquad \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2} < 0$$

Inada baldintzak: Kapitalaren produktu marjinalak infinitura jotzen du kapitala zerora hurbiltzen den heinean eta zerora jotzen du infinitura hurbiltzen den heinean. Beste horrenbeste beteko da lanarentzako.

$$\lim_{K \to 0} \left(\frac{\partial F}{\partial K}\right) = \lim_{L \to 0} \left(\frac{\partial F}{\partial L}\right) = \infty$$

$$\lim_{K \to \infty} \left(\frac{\partial F}{\partial K}\right) = \lim_{L \to \infty} \left(\frac{\partial F}{\partial L}\right) = 0$$

[2] Barro, R. J., & Sala-i-Martin, X. (2004). *Economic Growth* (2. ed.). MIT Press.

Beharrezkotasuna: Ekoizpen faktore bat beharrezkoa da baldin eta faktore horren maila positibo bat nahitaezkoa bada ekoizpen maila positibo bat lortzeko.

$$F(0, L) = F(K, 0) = 0$$

Cobb-Douglas ekoizpen-funtzioak aurreko baldintza guztiak betetzen dituenez ereduan barneratuko den ekoizpen agregatuaren funtzioa izango da:

$$Y = F(K, L) = K^{\alpha} L^{1-\alpha}, \quad non\ 0 < \alpha < 1 \tag{1}$$

Lehen aipatu den moduan, hazkunde ekonomikoaren analisian zentzuzkoena biztanleko errenta mailari erreparatzea litzateke. (1) ekuazioko ekoizpen-funtzioak eskala errendimendu konstanteak dituenez haren aldagaiak langileko terminoetan adierazi daitezke bakoitza bider $\frac{1}{L}$ eginez.

$$\frac{Y}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}$$

Hemendik aurrera hurrengo notazioa erabiliko da: langileko kapital maila $k = \left(\frac{K}{L}\right)$ izango da eta langileko errenta maila $y = \left(\frac{Y}{L}\right)$. Beraz, aurreko ekuazioa notazio honekin berridatziz:

$$y = f(k) = k^{\alpha} \tag{2}$$

Badugu orain hazkunde ekonomikoa aztertzeko oinarrizko ekuazioa; hau da, langileko errenta maila determinatzen duen ekoizpen-funtzioa. (2) ekuazioari erreparatuz hazkunde ekonomikoa bi bidetatik etor daitekeela ondorioztatzen da: aurrerapen teknologikoa eta kapital-metaketa.
Lehenengo kasua alde batera utziko dugu momentuz, kapital-metaketak ekoizpen mailan duen eraginean zentratuz. Horretarako, langileko kapitalaren produktu marjinala (KPM hemendik aurrera) aztertuko dugu; hau da, langileko kapitala unitate infinitesimal batean handitzean langileko ekoizpena zenbatean handituko den.

$$KPM = \frac{\partial y}{\partial k} = \alpha k^{\alpha-1} > 0$$

Ikus daitekeenez, langileko kapital-metaketak eragin positiboa du langileko errentan.

Langileko kapitalaren produktu marjinalak langileko kapital-metaketarekiko duen erlazioa aztertuko da:

$$\frac{\partial KPM}{\partial k} = \alpha(\alpha - 1)k^{\alpha-2} < 0$$

Ikus daitekeenez, kapitalaren produktu marjinala beherakorra da langileko kapital mailarekiko. Hau da, langileko kapitala handitu ahala langileko kapitalaren produktu marjinala (ekoizpenaren gehikuntza, alegia) gero eta txikiagoa izango da.

Analisi marjinal hau egin ostean hurrengoa ondoriozta daiteke: kapital-metaketak hazkunde ekonomikoan eragin positiboa du, baina eragin hau gero eta txikiagoa da langileko kapital maila handitzen den heinean. Epe luzean, beraz, kapital-metaketaren bidez hazkundea mantentzea ezinezkoa izango da.

2.2. Ondasunen eskaria, aurrezkia eta inbertsioa

Solow-en ereduan kapital-metaketa nola ematen den zehazteko aurrezkiak eta inbertsioak ereduan duten izaera ulertu behar da lehenik. Ereduak sektore publikorik gabeko ekonomia itxi bat kontsideratzen du. Ondasunen eskaria (Z) beraz kontsumoak (C) eta inbertsioak (I) osatuko dute: $Z = C + I$. Kontuan hartuta orekan ekoizpena eta eskaria berdinak direla, hurrengoa baiezta daiteke:

$$Z = C + I = Y \qquad (3)$$

Bestalde, sektore publikorik gabeko ekonomiaren testuinguruan kokatuz, errenta erabilgarria (Y^d) errenta osoaren berdina (Y) izango da; hau da, ez da zerga ezta transferentziarik egongo. Ereduaren arabera errentaren zati bat aurreztuko da (S), gainontzekoa kontsumora (C) bideratuz; hau da:

$$Y^d = Y = C + S \tag{4}$$

(3) eta (4) erlazioei erreparatuz argi ikusten da orekan aurrezki eta inbertsio mailak berdinak direla. Beste era batera esanda, orekan aurrezki totala inbertsioa finantzatzeko erabiltzen da: $S = I$.

Aurrezkiari dagokionez ereduak s aurrezki-tasa exogeno eta konstantea kontsideratzen du ($non\ 0 < s < 1$). Beraz t denboraldiko aurrezki totala sY_t izango da, zeina, aldi berean, denboraldi horretako inbertsioa mailaren berdina izango den orekan: $sY_t = I_t$.

2.3. Inbertsioa eta kapital-metaketa

Solow-en ereduan inbertsioa kapital fisikoaren unitate berriak sortzera eta zaharkitutako kapitala ordeztera bideratzen da. Beraz, denboraldi batean inbertitutakoak hurrengo denboraldiko kapital mailan eragin positiboa izango du. Bestalde, kapitala denboraldiro δ proportzioan (non $0 < \delta < 1$) depreziatzen dela suposatuko da. Hau dena kontuan hartuta, kapital fisikoaren metaketa inbertsioaren eta depreziatutako kapital mailaren arteko aldea izango da:

$$\dot{K}_t = I_t - \delta K_t \tag{5}$$

non $\dot{K}_t$ kapital stock-aren denborarekiko (t) deribatua den. Orekan aurrezkia eta inbertsioa berdinak direnez (5) ekuazioa hurrengo eran berridatzi daiteke:

$$\dot{K}_t = sY_t - \delta K_t = s\,F(K_t, L_t) - \delta K_t$$

Solow-en ereduan lana (L) populazioaren hazkundearen eraginez n tasa exogeno eta konstantean hazten da. Beste era batean adierazita: $\frac{\dot{L}}{L} = n > 0$, non $\dot{L}$ lanaren deribatua denborarekiko den. Behin lanaren hazkunde-tasa kontuan hartuta langileko kapital-metaketa nola ematen den aztertu dezakegu (5) ekuazioko bi aldeak bider $\frac{1}{L}$ eginez.

$$\frac{\dot{K}}{L} = s\,f(k) - \delta k \tag{6}$$

(6) ekuazioaren eskuineko aldea langileko terminotan adierazita dagoen arren ezkerraldekoa oraindik ez dago langileko terminotan. Hala ere, $\frac{\dot{K}}{L}$ langileko kapitalaren (k) funtzio bat bezala adieraz daiteke, erlazioaren elementu guztiak langileko terminotan adierazteko lanak erraztuz:

$$\dot{k} = \frac{d(K/L)}{dt} = \frac{\dot{K}L - \dot{L}K}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L} - nk \qquad (7)$$

(7) erlazioa (6) ekuazioan ordeztuz langileko kapital-metaketa deskribatzen duen Solow-en ereduko oinarrizko ekuazioa lortuko da:

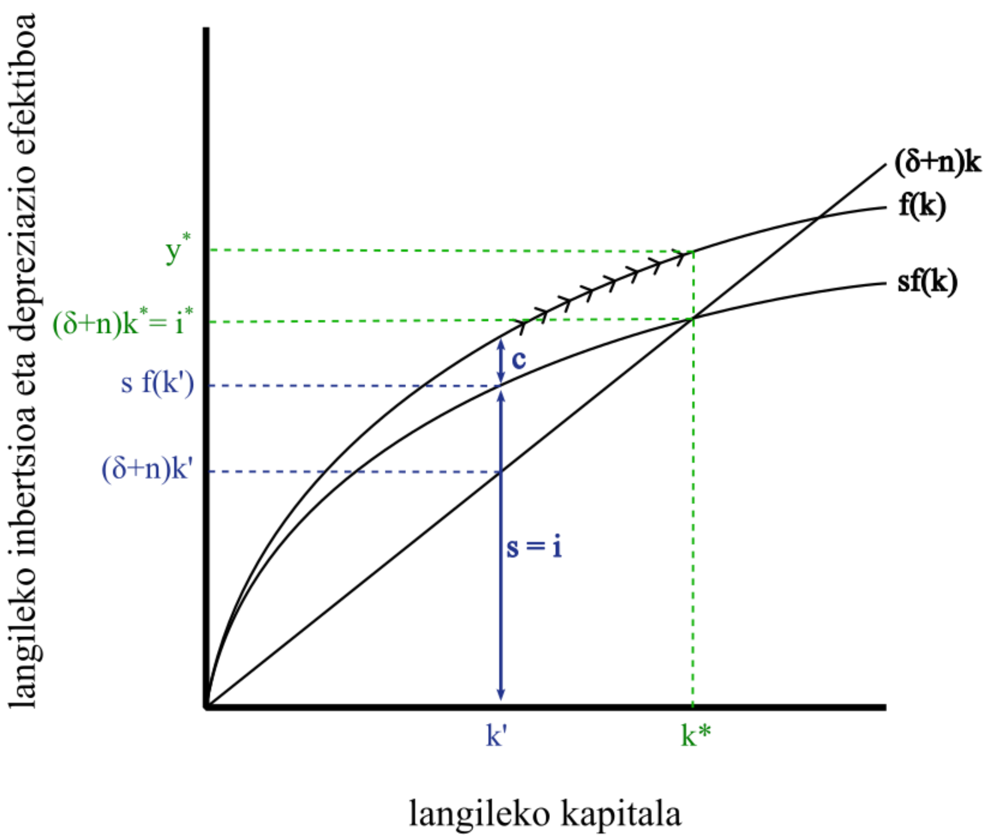
$$\dot{k} = s\,f(k) - (\delta + n)k \qquad (8)$$

Ikus daitekeenez langileko kapital metaketa bi indar kontrajarrien menpe dago: alde batetik langileko inbertsioa $(i = s\,f(k))$ eta bestetik langileko kapitalaren depreziazio efektiboa $((\delta + n)k)$. Inbertsioa denboraldi batetik hurrengora kapital maila berria sortzera bideratzen den errentaren zatia da, kapital-metaketan eragin positiboa gauzatuz. Bestalde, depreziazio efektiboak kapital-metaketari negatiboki eragiten dioten bi indar biltzen ditu. Bata, ekoizpen prozesuan erabiltzearen desgasteagatik kapital fisikoak jasaten duen errendimenduaren txikitzea da. Bestea, populazioaren hazkundearen eraginez ematen den langile kopuruaren handitzeak kapital mailan duen eragin negatiboa da. Hau kapital stock-a gero eta langile gehiagoren artean banatu behar delako gertatzen da. Beraz, kapital metaketa emateko beharrezkoa da langileko inbertsioa jasandako depreziazio efektiboa baino handiagoa izatea. Hau da, $\dot{k} > 0$ emateko hurrengoa bete behar da: $s\,f(k) > (\delta + n)k$.

1. grafikoan ikus daitekeenez egoera hau ez da mugagabeki luzatuko, soilik langileko kapitala $(0, k^*)$ tarteko balioen artean kokatzean emango da. Grafiko honek, langileko kapital metaketa Solow-en ereduan nola ematen den adierazten du[3]. Grafikoan k' mailarako langileko kontsumoa (c) eta langileko inbertsioa (i) adierazi dira. Depreziazio efektiboak k' mailarako $(\delta + n)k'$ balioa

[3] Ikus daitekeenez $sf(k)$ kurba jatorritik abiatzen da [$f(0) = 0$ delako], malda positiboa dauka [$f'(k) > 0$ delako] eta lauagoa bilakatzen da k handitzen den heinean [$f''(k) < 0$ delako]. Inada baldintzek gainera $sf(k)$ kurba $k = 0$ denean bertikala dela eta k infinitura doan heienean lauagoa bilakatzen dela inplikatzen dute. Guzti hau kontuan hartuta, $sf(k)$ kurba eta $(\delta + n)k$ zuzena, jatorria ez ezik, beste behin eta soilik behin berdinduko direla ondoriozta daiteke.

hartuko du. Langileko kapital metaketa ($\dot{k}$) langileko inbertsioaren eta depreziazio efektiboaren arteko aldea izango da aurretik aipatu den bezala. 1. grafikoan beraz, langileko kapital-metaketa $sf(k)$ kurbaren eta $(\delta + n)k$ zuzenaren arteko distantzia bertikala izango da. Kapitalaren produktu marjinala (KPM) beherakorra izanik kapitalaren metaketa hau gero eta txikiagoa izango da. Ekonomia $sf(k) = (\delta + n)k$ egoerara iristerakoan langileko kapital maila konstante



1. grafikoa: *Kapital-metaketa Solow-en oinarrizko ereduan*

mantenduko da denboraldiz denboraldi eta ondorioz kapital-metaketaren eskutik datorren hazkunde ekonomikoa etengo da. Horregatik egoera honi egoera geldikorra deritzo. Ekonomia orok epe luzean bere egoera geldikorrera joko du, eta behin egoera honetara iritsita, aldaketarik izan ezean, langileko errenta maila konstante mantenduko da denboran zehar.

Egoera geldikorrean: $sf(k^*) = (\delta + n)k^*\ ;\ \dot{k}^* = 0\ ;\ \dot{y}^* = 0$

Solow-en ereduan beraz, langileko kapitala (k) eta langileko errenta (y) konstante mantenduko dira behin ekonomia egoera geldikorrean kokatzean. Honek ezinbestean aldagai agregatuak (K eta Y) n tasan haziko direla inplikatzen du. Izan ere, langileko kapitala $\left(k = \frac{K}{L}\right)$ konstante mantentzeko, kapital stock-a (K) lanaren (L) hazkunde-tasa berean hazi beharko da; hau da, n tasan. Beste horrenbeste gertatuko da errenta agregatuaren (Y) kasuan. Beraz, Solow-en oinarrizko ereduaren epe luzeko ondorio nabarmenena egoera geldikorreko hazkunde-tasak ekonomiaren aurrezki-tasarekiko (s) eta teknologia mailarekiko independenteak direla da. Hau da, epe luzeko hazkunde-tasak faktore exogenoengatik zehaztuta daude: langileko aldagaiak ez dira hazten eta aldagai agregatuak populazioaren hazkunde-tasa exogenoaren mailan (n) hazten dira. Ereduak, hala ere, zeresan handiagoa dauka trantsiziozko dinamikak azaltzen. Hau da, ekonomia bat bere egoera geldikorreko langileko errenta mailarantz nola jotzen duen eta nola heldu daitekeen beste ekonomia baten errenta mailan kokatzera. Horretarako, langileko kapitalaren hazkunde-tasaren bilakaerari erreparatzea baliagarria izango da. (8) ekuazioaren bi aldeak zati k eginez langileko kapitalaren hazkunde-tasa lortzen da:

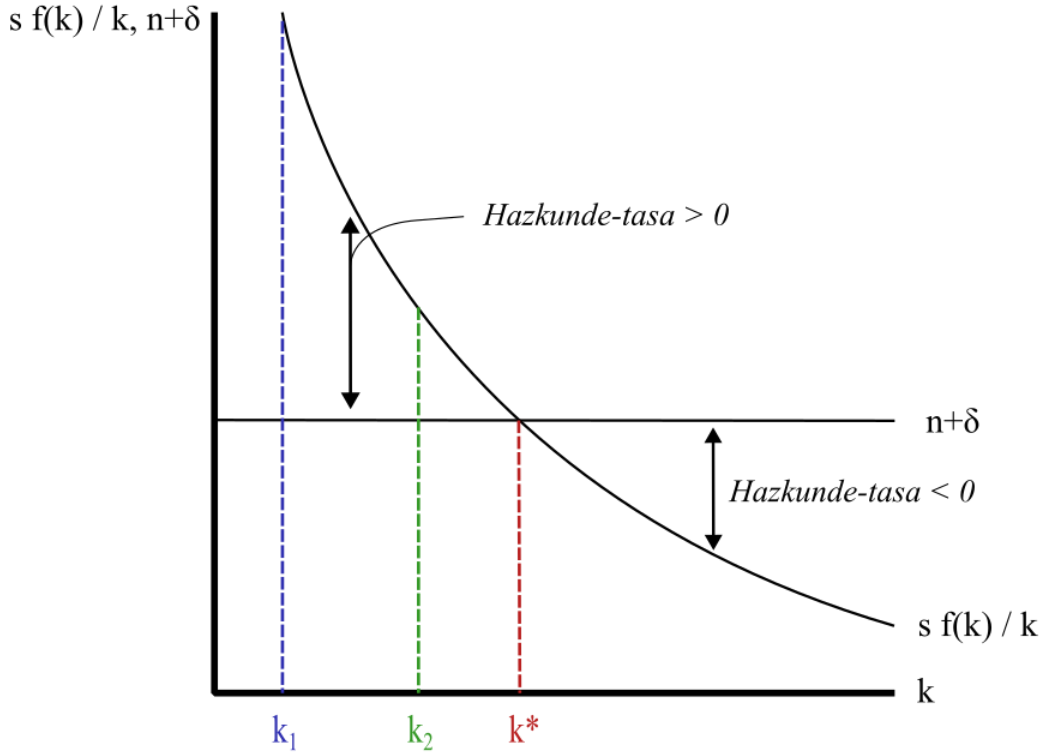
$$\Upsilon_k \equiv \frac{\dot{k}}{k} = \frac{s\,f(k)}{k} - (n + \delta) \tag{9}$$

non Υ_k langileko kapitalaren hazkunde-tasa den.

(9) ekuazioak langileko kapitalaren hazkunde-tasa bi terminoen arteko aldeak zehazten duela adierazten du. Lehenengoari, $\frac{s\,f(k)}{k}$, aurrezki-kurba eta bigarrenari, $(n + \delta)$, depreziazio-kurba esango zaie. 2. grafikoan bi kurba hauek langileko kapital mailarekiko irudikatu dira. Aurrezki-kurbak malda negatiboa duela ikus daiteke. $\frac{s\,f(k)}{k}$-ren deribatua k-rekiko negatiboa da[4]: $s\,(\alpha - 1)k^{\alpha-2} < 0$. Gainera, grafikoan ikus daitekeenez, aurrezki-kurbak infinitura jotzen du k zerora hurbiltzen den heinean eta zerora jotzen du k infinitura hurbiltzen den heinean. Depreziazio-kurba $n + \delta$ mailan kokatzen den zuzen horizontala da. Beraz, langileko kapitalaren hazkunde-tasa aurrezki-kurbaren eta depreziazio-zuzenaren arteko distantzia bertikala izango da. Kontuan

[4] $\frac{s\,f(k)}{k}$-an (2) ekuazioan zehaztutako ekoizpen-funtzioa barneratuz: $\frac{f(k)}{k} = \frac{s\,k^{\alpha}}{k} = s\,k^{\alpha-1}$. Eta k-rekiko deribatuz: $\frac{\partial(.)}{\partial k} = s\,(\alpha - 1)k^{\alpha-2} < 0$.

hartuta $n + \delta > 0$ dela eta $\frac{s\,f(k)}{k}$ infinitutik zerora monotonoki doala, aurrezki-kurba eta depreziazio-zuzena behin eta soilik behin gurutzatuko dira. Beraz, egoera geldikorreko langileko kapital maila (k^*) existitzen dela eta bakarra dela berretsi da.



__2. grafikoa:__ Solow-en oinarrizko ereduaren trantsiziozko dinamikak

2. grafikoan ikus daitekeenez langileko kapital mailak $(0, k^*)$ tarteko balio bat hartzen duenean aurrezki-kurba depreziazio-zuzenaren gainean kokatuko da. Honek langileko kapitalaren hazkunde-tasa positiboa izango dela suposatzen du. Hala ere, langileko kapital maila handitu ahala hazkunde-tasa (Υ_k) murrizten joango da. Langileko kapitala egoera geldikorreko mailara (k^*) hurbiltzen den heinean hazkunde-tasak zerora joko du eta behin k^*-n kokatuta zero izango da. Hazkunde-tasaren joera hau kapitalak produktu marjinal beherakorra duenaren balizkoarengatik ematen da. Arrazoi honengatik langileko kapital maila erlatiboki baxua denean langileko kapitalaren batezbesteko produktua, $f(k)/k$, erlatiboki handia izango da. Ereduak ekoizpenaren s

proportzioa aurreztu eta inbertitzen dela onartzen du. Beraz, langileko kapitala erlatiboki baxua denean kapital unitateko inbertsio gordina, $s\,f(k)/k$, erlatiboki altua izango da ere. Bestalde, langileko kapitala $n + \delta$ tasa konstantean depreziatzen da. Beraz, aurreko dena kontuan hartuta, k handitu ahala kapital unitateko inbertitutako maila gero eta txikiagoa izango da kapital unitateko depreziatutako kantitatea konstante mantentzen den bitartean. Honek, ondorioz, langileko kapitalaren hazkunde-tasa gero eta txikiagoa izatea eragingo du. Grafikoari erreparatuz kontrako kasuan kokatzean kapitalaren bilakaera ikus daiteke. Langileko kapital mailak (k^*, ∞) tarteko balioren bat hartzean aurrezki-kurba depreziazio-zuzenaren azpitik kokatuko da, hazkunde-tasa negatiboak izanik. Langileko kapital maila egoera geldikorrera hurbildu ahala hazkunde-tasak zerorantz joko du. Grafikoki eta analitikoki ikusi denez ekonomia ororen abiapuntua edozein dela ere, dagokion egoera geldikorrera joko du eta behin han kokatuta, aldaketarik izan ezean, bere horretan jarraituko du denboran zehar. Horregatik, egoera geldikorra globalki egonkorra dela esaten da. Hau ulertzeko beste era bat, abiapuntu ezberdinetan kokatuta dauden baina ezaugarri berdinak dituzten bi ekonomiek egoera geldikor berdinera joko dutela litzateke. Demagun abiapuntu ezberdinetan dauden bi ekonomia: 1 eta 2. Bi ekonomia hauek ezaugarri berdinak dituzte, hau da:

Teknologia berdina (ekoizpen-funtzio berdina): $f(k)$

Populazioaren hazkunde-tasa berdina: $n_1 = n_2$

Depreziazio-tasa berdina: $\delta_1 = \delta_2$

Aurrezki-tasa berdina: $s_1 = s_2$

Hasierako denboraldian ordea, 1 ekonomiaren langileko kapital maila k_1 da eta 2 ekonomiarena k_2; non $k_1 < k_2$ den. 2. grafikoan egoera hau irudikatu da eta ikus daitekeenez denboraldi horretan 1 ekonomiaren hazkunde-tasa 2 ekonomiarena baino handiagoa izango da langileko kapital maila baxuagoa duelako. Epe luzera, ordea, bi ekonomiek egoera geldikorreko langileko kapital mailara (k^*) joko dute, ezaugarri berdinak dituztelako. Ekuazioei erreparatuz, bi ekonomiek egoera geldikor berdinera joko dutela argi ikusten da. Aurretik aipatu bezala egoera geldikorrean langileko inbertsioa eta depreziazio efektiboa berdintzen dira, hau da:

$$sf(k^*) = (\delta + n)k^* \tag{10}$$

Kontuan izanda bi ekonomiek teknologia berdina dutela ekoizpen-funtzioa bientzako hurrengoa izango da: $f(k) = k^{\alpha}$. Beraz, ekoizpen-funtzioa (10) ekuazioan ordeztuz eta k^* bakanduz, egoera geldikorrari dagokion langileko kapital maila lortuko da:

$$k^* = \left(\frac{s}{\delta + n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{11}$$

(11) ekuazioari erreparatuz ekonomia baten egoera geldikorreko langileko kapital maila ekonomia horren teknologiaren, aurrezki-tasaren, depreziazio-tasaren eta populazioaren hazkunde-tasaren araberakoa dela ikusten da. 1 eta 2 ekonomiek ezaugarri hauek partekatzen dituztela kontuan hartuta egoera geldikor berdinera joko dute. Egoera geldikorreko langileko errentari dagokionez, k^* ekoizpen-funtzioan ordeztuz lortu daiteke: $y^* = f(k^*) = (k^*)^{\alpha} = \left(\frac{s}{\delta+n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$. Ikus daitekeenez, egoera geldikorreko langileko errenta maila bi ekonomiek partekatzen dituzten ezaugarrien menpekoa da ere. Beraz, nahiz eta abiapuntuan 1 eta 2 ekonomiek langileko errenta maila eta hazkunde-tasa ezberdinak izan, epe luzean langileko errenta maila (y^*) eta hazkunde-tasa berdina izango dituzte. Behin egoera geldikorrean kokatuta ez da langileko kapitalaren ezta langileko errentaren hazkunderik emango, beraz epe luzean kapital-metaketatik eratorritako hazkunde-ekonomikoa etengo da bientzat. Hau da, $\Upsilon_k = 0$ izango da egoera geldikorrean.

2.4. Aurrezki-tasa eta epe luzeko langileko ekoizpena

Aurreko atalean ezaugarri berdinak dituzten ekonomiek, nahiz eta abiapuntu ezberdina izan, egoera geldikor berdinera joko dutela ikusi da. Orain, ordea, aurrezki-tasa ezberdinek ekonomien epe luzeko errentan duten eragina aztertuko da. Horretarako soilik aurrezki-tasan desberdintzen diren bi ekonomia kontsideratuko ditugu. Demagun $s_2 > s_1$; hau da, 2 ekonomiak 1 ekonomiak baino aurrezki-tasa handiagoa duela. Gainontzeko faktoreak (teknologia, depreziazio-tasa eta populazioaren hazkunde-tasa) berdinak izango dira. Bi ekonomia hauen epe luzeko langileko errenta mailak hurrengo eran alderatu ditzakegu:

$$\frac{y_2^*}{y_1^*} \tag{12}$$

non y_2^* 2. ekonomiaren egoera geldikorreko errenta maila den eta y_1^* 1. ekonomiarena. Aurreko atalean azaldu den bezala ekonomia baten langileko errenta egoera geldikorrean hurrengoa izango da:

$$y^* = f(k^*) = \left(\frac{s}{\delta+n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{13}$$

(13) (12)-an barneratuz:

$$\frac{y_2^*}{y_1^*} = \frac{\left(\frac{s_2}{\delta + n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{\left(\frac{s_1}{\delta + n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}$$

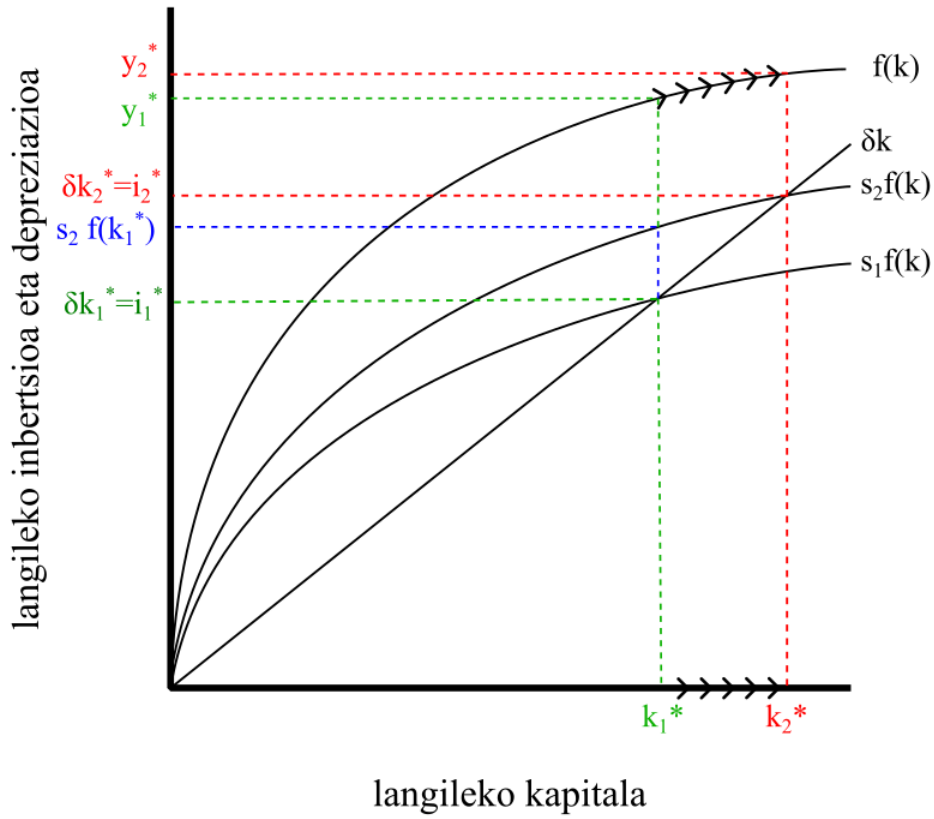
Sinplifikatuz:

$$\frac{y_2^*}{y_1^*} = \left(\frac{s_2}{s_1}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Kontuan hartuta 2. ekonomiak 1. ekonomiak baino aurrezki-tasa handiagoa duela; hau da, $s_2 > s_1$ dela, orduan:

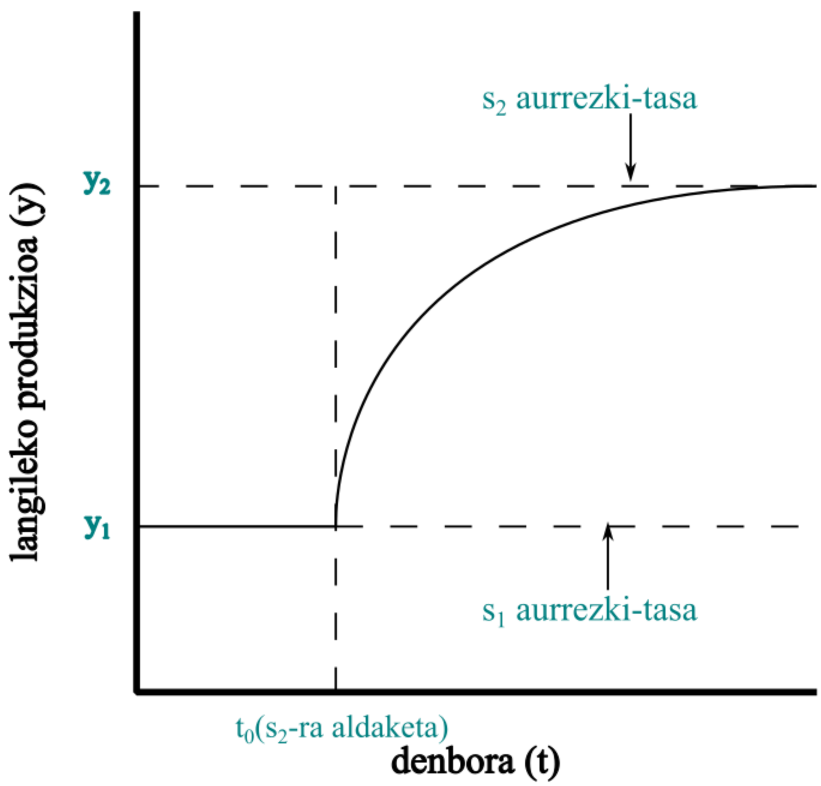
$$\frac{y_2^*}{y_1^*} = \left(\frac{s_2}{s_1}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} > 1 \rightarrow \; y_2^* > y_1^*$$

Beraz, aurrezki-tasa altuena duen ekonomiak epe luzeko langileko errenta maila altuagoa izango du beti, gainontzeko ezaugarriak berdinak dituen kasuan. Beste era batera esanda, herrialde batek bere epe luzeko langileko errenta maila handitu lezake daukan aurrezki-tasa handituz. Kasu hau aztertzeko 3. grafikoa lagungarria suertatu daiteke.



3. grafikoa: *Aurrezki-tasaren hazkundea Solow-en ereduan*

Demagun ekonomia baten aurrezki-tasa handitzen dela, $s_2 > s_1$. Beraz, orain langileko inbertsioa handiagoa izango da langileko kapital maila guztietarako. Langileko inbertsioaren funtzioa $s_1\, f(k)$ izatetik $s_2\, f(k)$ izatera igaroko da, kurba gorantza lerratuz. Ekonomia horren hasierako egoera geldikorrari (k_1^*) erreparatuz argi ikusten da bere egonkortasuna galdu duela aurrezki-tasa s_2-ra handitzean. Orain puntu horretan langileko inbertsioa eta depreziazio efektiboa ez dira berdintzen. Ikusi daitekeenez k_1^*-en inbertsioa depreziatutakoa kapitala baino handiagoa da; $s_2\, f(k_1^*) > (\delta + n)k_1^*$. Beraz, langileko kapitala handituz joango da egoera geldikor berrira heldu arte; hau da, $s_2\, f(k_2^*) = (\delta + n)k_2^*$ izan arte. Egoera geldikor honi dagokion langileko kapital maila aurrekoa baino altuagoa izango da, $k_2^* > k_1^*$, hortaz langileko errenta maila ere handiagoa izango da $y_2^* > y_1^*$.



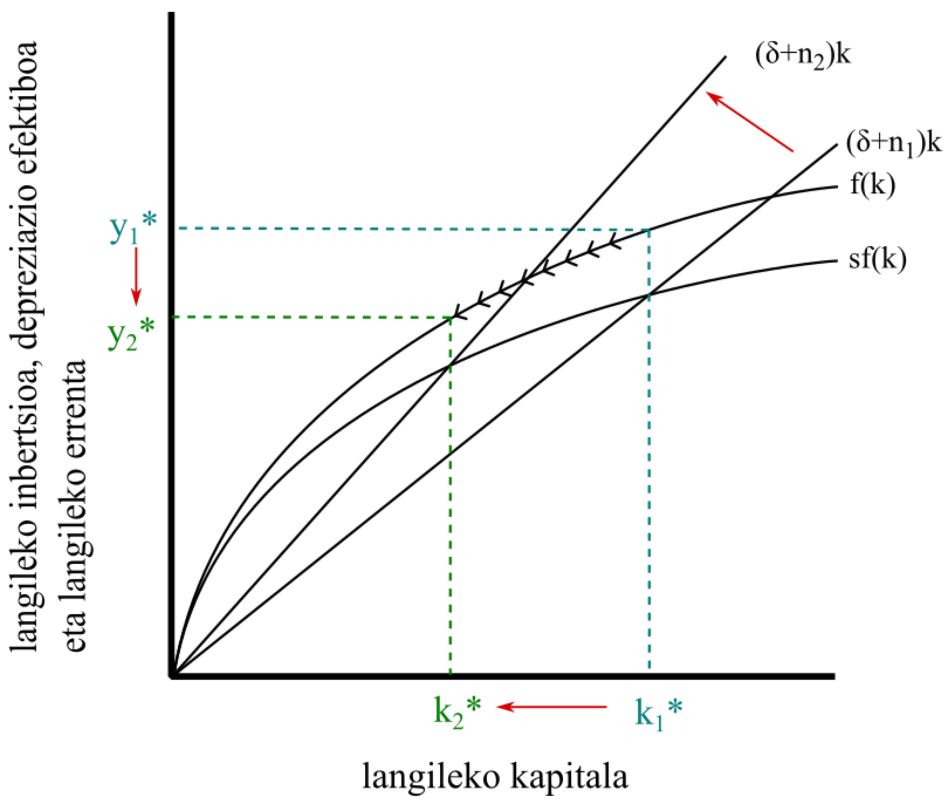
4. grafikoa: *Aurrezki-tasaren hazkundeak eragindako trantsiziozko dinamika Solow-en ereduan*

Ikusi denez, aurrezki-tasaren hazkuntza batek bere langileko errentaren hazkunde bat dakar epe laburrean. Baina epe luzera, behin egoera geldikor berrira iritsita, hazkunde hau etengo da eta egoera geldikor berriari dagokion langileko errenta mailan mantenduko da ekonomia denboraldiz denboraldi.[5] 4. grafikoak aurrezki-tasaren hazkunde batek ekonomian duen epe laburreko eta epe luzeko eraginak erakusten ditu.

[5] Solow, R. M. (1956). A Contribution to the Theory of Economic Growth. *Quarterly Journal of Economics, 70*(1), 65-94.

2.5. Populazioaren hazkunde-tasaren igoeraren eragina egoera geldikorrean

Atal honetan, aurrezki-tasarekin egin den antzera, populazioaren hazkunde-tasaren igoera batek epe laburrean eta epe luzean ekonomian izango dituen eraginak aztertuko dira. 5. grafikoan ikus daitekeenez populazioaren hazkunde-tasaren igoera batek ($n_2 > n_1$) depreziazio efektiboaren zuzenaren malda handituko du ($n_2 + \delta > n_1 + \delta$). Populazioaren hazkunde-tasa handitzean egoera geldikorreko orekaren egonkortasuna galtzen da. Ikus daitekeenez k_1^* puntuan orain inbertsioa mantentze inbertsioa baino txikiagoa litzateke ($sf(k_1^*) < (\delta + n_2)k_1^*$). Aurretik aztertu den kapital-metaketaren dinamika azaltzen duen ekuazioa gogora ekarriz, $\dot{k} = sf(k_t) - (\delta + n)k$, argi ikusten da langileko kapital maila murrizten joango dela. Joera hau egoera geldikor berria lortu arte emango da; hau da, inbertsioa eta depreziazio efektiboaren zuzen berria berdindu arte ($sf(k_2^*) = (\delta + n_2)k_2^*$). Grafikoan egoera geldikor berri horri dagokion langileko kapital maila k_2^* izango litzateke.



***5. grafikoa**: Populazioaren hazkunde-tasaren igoera Solow-en oinarrizko ereduan*

Langileko kapital murrizketa hau kapital stock-a orain biztanle gehiagoren artean banatu behar delako eta inbertsioa hasierako maila berean mantentzen delako ematen da. Honek epe luzeko langileko kapital maila murriztea eragingo du. Era berean epe luzeko langileko errenta ere murriztuko da, aurretik ikusi dugunez langileko ekoizpen funtzioa aldagai bakar honen menpe baitago ($y_2^* = f(k_2^*) < y_1^* = f(k_1^*)$.

3. Aurrerapen teknologikoa Solow-en ereduan barneratuz

Solow-en oinarrizko ereduaren analisian ikusi den moduan hazkunde ekonomikoaren eragileak bi izan daitezke: kapital-metaketa eta aurrerapen teknologikoa. Aurreko atalean kapital-metaketak hazkunde ekonomikoan dituen inplikazioak aztertu dira, eta ikusi denez hazkunde hau mugatua da ekonomia baten epe luzeko hazkundea azaltzerako orduan. Orain analisia aurrerapen teknologikoan zentratuko da. Aurrerapen teknologikoa ekoizpen-funtzioaren doikuntza bat bezala ulertuko da. Doikuntza honek ekoizpen-faktore maila jakin batentzako produkzioa handitzea edo produkzio maila jakin bat ekoizpen-faktore gutxiagorekin ekoiztea ahalbidetuko du. Ekonomia batean hau hainbat arrazoiengatik eman daiteke, lan-indarraren hezkuntza mailaren hobekuntzaren ondorioz adibidez.

3.1. Ekoizpen-funtzioa aurrerapen teknologikoarekin

Aurrerapen teknologikoa ereduan barneratzeko ekoizpen-funtzioari A teknologia aldagaia gehituko zaio. A aldagaiaren hazkunde batek aurrerapen teknologikoa suposatuko du beraz. Orain ekoizpen-funtzioa hurrengoa izango da:

$$Y = F(K, AL) = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}$$

non Y ekoizpen agregatua, K kapitala eta AL lan efektiboa diren. Lan efektiboak lan kantitatea unitate efizienteetan adierazten du. Hau da, langile eta lanordu maila hauek ekoizteko duten gaitasuna kontuan hartuta adieraztea da. Adibidez ekonomia batean aurrerapen teknologikoa dela eta A teknologia aldagaia bikoizten bada hasierako lan kantitatearen (L) erdiarekin ekoizpen maila berdina lortu daiteke. Era berean, aurrerapen teknologikoa ematekotan, lana (L) hasierako kantitate berdinean mantenduta ekoizpen maila handituko litzateke. Solow-en ereduan, denboraldiro teknologia g tasa exogeno konstantean hazten dela suposatuko da. Beraz, lan efektiboa (AL) $n + g$ tasan haziko da denboraldi batetik hurrengora.

Ekoizpen-funtzioaren eskala errendimendu konstanteak direla eta, ekoizpen-funtzioa lan efektiboko unitatetan berridatzi dezakegu aldagai guztiak $\frac{1}{AL}$-rekin biderkatuz. Ekoizpen-funtzioa lan efektiboko terminotan berridatziz:

$$y = f(k) = k^{\alpha}$$

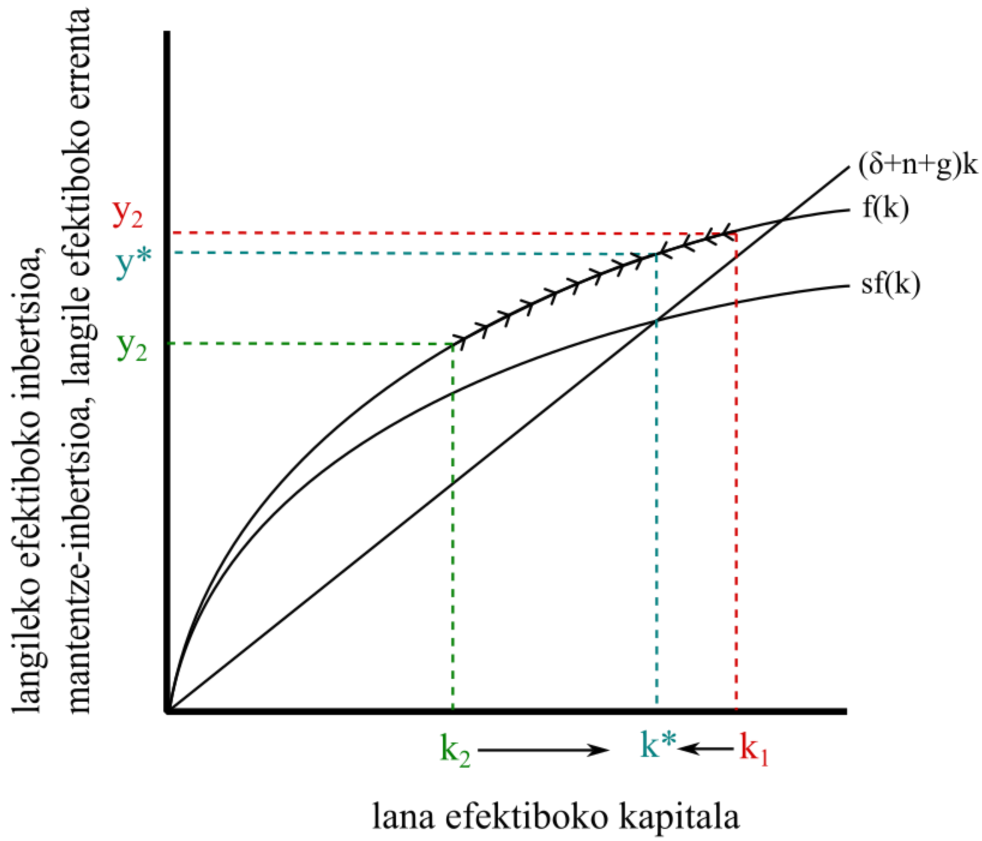
non y lanaren efizientzia unitateko ekoizpena eta k lanaren efizientzia unitateko kapitala diren.

Aurrerapen teknologikoa ereduan barneratzeak kapital-metaketaren prozesuan dauzkan inplikazioei erreparatuko zaie orain. Solow-en oinarrizko ereduan ikusi denez, kapital maila aurrezkiari esker egiten den inbertsioarekin handitzen da eta kapitalak denboran zehar jasaten duen depreziazio efektiboarekin murrizten da. Orain kapital metaketan eragiten duten beste faktore bat egongo da: aurrerapen teknologikoa. Teknologia g tasan hazten denez, aurretik erabiltzen zen teknologia zaharkituta geratzen da. Beraz, kapital maila mantentzeko kapitala berritu beharko da g tasan. Guzti hau kontuan hartuta, orain kapital-metaketa emateko; hau da, lan efektiboko kapital maila handitzeko, inbertsioak kapitalaren depreziazio efektiboaz gain, aurrerapen teknologikoaren efektuak gainditu beharko ditu. Beraz, lan efektiboko kapital-metaketaren prozesua determinatzen duen ekuazioa hurrengoa izango da:

$$\dot{k} = sf(k) - (\delta + n + g)k \tag{14}$$

(14) ekuazioari erreparatuz kapital-metaketan eragin positiboa eta negatiboa duten aldagaiak bereiztu daitezke.

Aurretik aipatu den bezala, inbertsioa $(sf(k_t))$ izango da kapital metaketan eragin positiboa izango duena. Bestalde, kapitalaren depreziazioak, aurrerapen teknologikoak eta populazioaren hazkundeak kapital-metaketan eragin negatiboa izango dute. Lan efektiboko kapitala konstante mantentzeko beraz, inbertsioa kapital maila murrizten duten faktoreei aurre egiteko gai izan beharko da. Horretarako inbertsioak lan efektiboko kapitala $(\delta + n + g)$ mailan haztea lortu beharko du.[6] Azken honi, mantentze-inbertsioa esaten zaio.



***6. grafikoa:** Solow-en eredua aurrerapen teknologikoarekin*

6. grafikoan lan efektiboko kapital-metaketa nola ematen den adierazten da. Solow-en oinarrizko ereduarekin alderatuz, orain kapitala murrizten duten faktoreetan depreziazio efektiboaz gain, aurrerapen teknologikoa kontuan hartu da. Honek ekonomiaren ikuspuntu osatuago bat ematen digu. Epe luzean, oinarrizko ereduan bezala, ekonomiak egoera geldikorrera joko du. Grafikoan k^* puntuak adierazten du egoera geldikorreko lan efektiboko kapital maila. Behin ekonomia puntu honetan kokatuta, lan efektiboko kapital maila eta lan efektiboko ekoizpen maila konstante

[6] Solow, R. M. (1957). Technical Change and the Aggregate Production Function. *Review of Economics and Statistics, 39*(3), 312-320.

mantenduko dira. Hala ere, aurrerapen teknologikoak barneratzeak egoera geldikorrean hainbat aldaketa dakartza.

3.2. Egoera geldikorra aurrerapen teknologikoarekin

Aurrerapen teknologikoa barneratzean ikusi da lan efektiboko kapital maila konstante mantenduko dela behin ekonomia egoera geldikorrean kokatuta. Lan efektiboko kapitala horrela definitu da: $k = \frac{K}{AL}$. Lan efektiboa (AL) aurretik aipatu denez $(g + n)$ tasa konstantean haziko da denboraldiz denboraldi. Beraz, lan efektiboko kapital maila (k) konstante mantentzeko ekonomiako kapital maila (K) $g + n$ tasan hazi beharko da. Berdina gertatzen da ekonomiako ekoizpen agregatuarekin, lan efektiboko ekoizpen maila ere $\left(y = \frac{Y}{AL}\right)$ egoera geldikorrean konstantea delako. Ekoizpena (Y), kapitala (K) eta lan efektiboa (AL) egoera geldikorrean $g + n$ tasa berean hazten direnez, hazkunde orekatua esaten zaio egoera honi.

Hazkunde ekonomikoaren analisian aldiz, ez zaio errenta totalari erreparatzen, langileko errentari baizik. Lan efektiboko ekoizpen maila hurrengo eran adierazi daiteke: $y = \frac{Y}{AL}$, non $\frac{Y}{L}$ langileko errenta maila den. Lan efektiboko ekoizpen maila (y) egoera geldikorrean konstante mantentzen dela kontuan hartuta langileko errenta $\left(\frac{Y}{L}\right)$ g tasa konstantean haziko da epe luzean. Beraz, kapital-metaketak ez bezala, aurrerapen teknologikoak epe luzeko hazkunde ekonomikoa dakar.

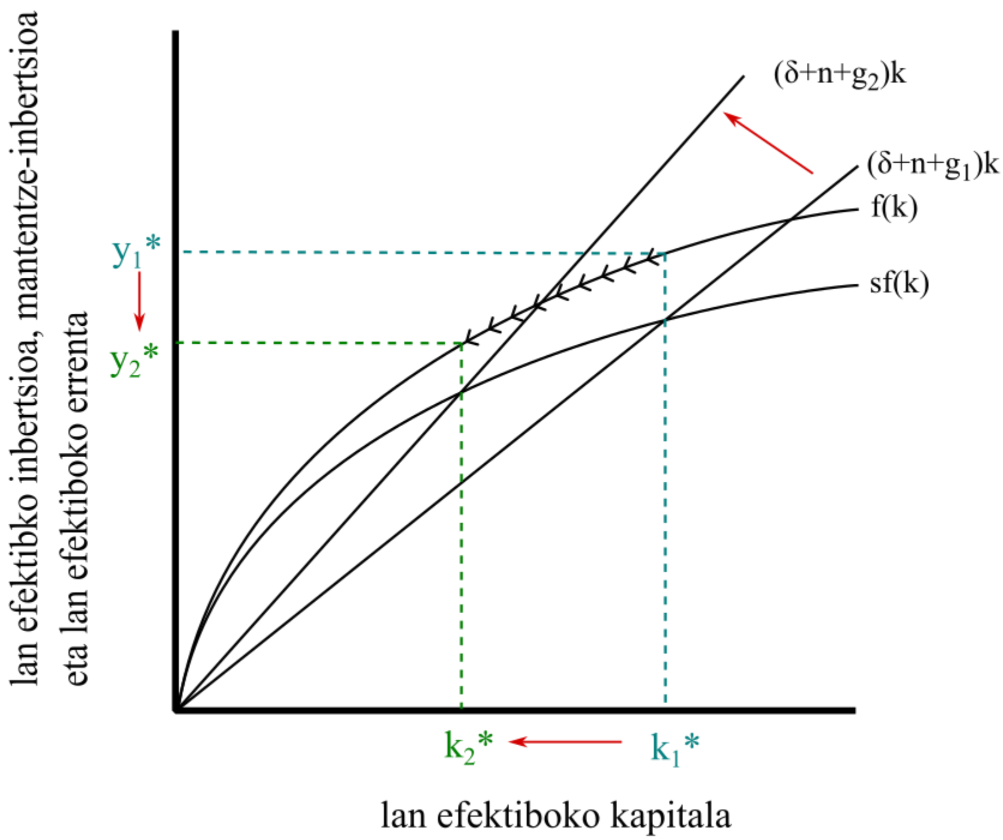
1. Taulan aldagai bakoitza egoera geldikorrean zer tasatan hazten den ikus daiteke:

ALDAGAIA	HAZKUNDE-TASA
KAPITALA	n+g
EKOIZPENA	n+g
LANGILEKO KAPITALA	g
LANGILEKO EKOIZPENA	g
LAN EFEKTIBOKO KAPITALA	0
LAN EFEKTIBOKO ERRENTA	0

1. Taula: *Aldagaien hazkunde-tasa egoera geldikorrean*

3.3 Aurrerapen teknologikoaren hazkundearen eraginak

Behin egoera geldikorreko egoera aztertuta, lan honen 2. atalean populazioaren hazkunde-tasarekin eta aurrezki-tasarekin egin den antzera, aurrerapen teknologikoaren hazkundeak ekonomian izango lituzkeen eraginak aztertuko dira.



*7. **grafikoa**: Aurrerapen teknologikoaren hazkundearen eraginak Solow-en ereduan*

7. grafikoan ikus daitekeenez aurrerapen teknologikoaren hazkunde batek $(g_2 > g_1)$ mantentze-inbertsioaren zuzenaren malda handituko luke $(\delta + n + g_2 > \delta + n + g_1)$. Aldaketa honek egoera geldikorrak zuen egonkortasuna galtzea eragingo du. 7. grafikoari erreparatuz, argi antzematen da aurrerapen teknologikoaren azelerazioaren eraginez orain k_1^* lan efektiboko kapital mailarako mantentze-inbertsioa lan efektiboko inbertsio maila baino altuagoa dela $(sf(k_1^*) <$

$(\delta + n + g_2)k_1^*)$. Kapital-metaketaren prozesua deskribatzen duen ekuazioa kontuan hartuta ($\dot{k} = sf(k) - (\delta + n + g)k$), mantentze-inbertsioaren eta lan efektiboko inbertsioaren desoreka honek lan efektiboko kapitalaren murriztapen bat eragingo duela ondorioztatzen da. Joera hau lan efektiboko inbertsioa aurrerapen teknologikoaren tasa berriari dagokion mantentze-inbertsioa berdindu arte emango da ($sf(k_2^*) = (\delta + n + g_2)k_2^*$), ekonomia egoera geldikor berrian kokatuz. 7. grafikoan egoera geldikor berri honi dagokion lan efektiboko kapital maila k_2^* da.

Aurrerapen teknologikoaren hazkundeak dakarren lan efektiboko kapitalaren murrizketa teknologiaren zaharkitze azkarrago bati dagokio. Lan efektiboko kapitala orain azkarrago zaharkitzen denez egoera geldikorreko maila ez aldatzeko mantentze-inbertsio handiago bati egin behar dio aurre ekonomiak. Beraz, gainontzeko aldagaiak konstante mantentzekotan lan efektiboko kapital maila murriztuko da egoera geldikor berriaren mailan kokatu arte. Era berean epe luzeko langileko errenta ere murriztuko da, aurretik ikusi dugunez lan efektiboko ekoizpen-funtzioa aldagai bakar honen menpe baitago ($y_2^* = f(k_2^*) < y_1^* = f(k_1^*)$. Aurrerapen teknologikoaren hazkundeak orduan lan efektiboko kapital eta ekoizpen mailak murrizten ditu. Langileko kapitala eta ekoizpena aldiz, epe luzean tasa handiagoan haziko dira. 1. taulan adierazi denez egoera geldikorrean langileko kapitala eta langileko errentan aurrerapen teknologikoaren maila zehazten duen g tasan haziko dira. g tasaren hazkunde bat eman denez ($g_1 \rightarrow g_2$ non $g_2 > g_1$) langileko kapitala eta langileko errenta g_2 tasa handiagoan haziko dira epe luzean.

4. Giza-kapitala Solow-en ereduan barneratuz

Lan honetan, orain arte, hazkunde ekonomikoan eragina duten faktoreak identifikatzeko ahalegina egin da Solow-en eredua baliatuz. Hasiera batean aurrezki-tasak eta inbertsioak duten eragina aztertu da. Gero aurrerapen-teknologikoa ereduan barneratu da, hazkunde ekonomikoan izan lezakeen eragina behatzeko. Ikusi denez, aurrerapen teknologikoaren barnerapenak ekonomia baten epe luzeko hazkundearen irudi osatuago bat izatea ahalbidetu du. Atal honetan, helburu berdinarekin giza-kapitala Solow-en ereduan barneratuko da.

Giza-kapitala lan faktoreak dituen gaitasuna, hezkuntza, trebezia eta produktibitatea areagotzen duten bestelako ezaugarrien maila barneratzen dituen aldagaia da. Inolako gaitasun edo hezkuntzarik ez duen lanarekin alderatuta lanaren produktibitate maila efizientzia unitatetan

adierazten du. Beraz, orain lanordu batek efizientzia unitate ezberdinak izango ditu langileen giza-kapital mailaren arabera. Adibide gisa bi zurginen konparaketa erabiliko da. Zurginetako batek 20 urte daramatza lanean. Bestea, aldiz, hasi berria da, eta aisialdirako zurgin ikastaro bat egin du. Biei aulki bat egitea eskatu zaie. Zurgin eskarmentudunak pare bat egunetan amaitu du, besteak aldiz hiru aste behar izan ditu. Hau, zurgin eskarmentudunaren lanordu batek zurgin afizionatuarenak baino efizientzia unitate gehiago dituelako gertatzen da. Giza-**kapitala** esaten zaio gizabanakoek beraien gaitasunetan eta hezkuntza mailan enpresek kapital fisikoan inbertitzen duten arrazoi berdinagatik inbertitzen dutelako: norberaren produktibitatea handitu. Gizabanakoek haien produktibitatea handitu nahi izango dute lan kualifikatuagoek soldata handiagoak dituztelaren esperoan.
Behin giza-kapitala definituta, Solow-en ereduan barneratuko da hazkunde ekonomikoan izan dezakeen eragina aztertzeko.

4.1. Giza-kapitala eta ekoizpen-funtzioa

Giza-kapitala ereduan barneratzeko ekoizpen-funtzioari H aldagaia gehituko zaio. Beraz, orain ekoizpen-funtzioa hurrengoa izango da:

$$Y = F(K, H, AL)$$

non Y ekoizpen agregatua, K kapital fisikoa, H giza-kapitala eta AL lan efektiboa diren. Giza-kapitala aldagaia barneratu denez 2.1. atalean aipatutako ekoizpen-funtzioaren ezaugarriak osatu behar dira. Ekoizpen-funtzioak orain, beraz, hurrengo ezaugarriak izango ditu:

Eskala errendimendu konstanteak: Lana, kapital fisikoa eta giza-kapitala proportzio berean handitzean, ekoizpena ere proportzio berdinean handituko da.

$$xY = F(xK, xH, xAL) \qquad \forall x > 0$$

Ekoizpen-faktoreen produktu marjinala positiboa eta beherakorra da: Edozein kapital fisiko, giza-kapital edo lan maila positiborako ekoizpen-funtzioak produktu marjinal positibo eta beherakorrak ditu ekoizpen faktore bakoitzarekiko.

$$\frac{\partial F(K,H,AL)}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial^2 F(K,H,AL)}{\partial K^2} < 0$$

$$\frac{\partial F(K,H,AL)}{\partial L} > 0, \quad \frac{\partial^2 F(K,H,AL)}{\partial L^2} < 0$$

$$\frac{\partial F(K,H,AL)}{\partial H} > 0, \quad \frac{\partial^2 F(K,H,AL)}{\partial H^2} < 0$$

Inada baldintzak: Kapitalaren produktu marjinalak infinitura jotzen du kapitala zerora hurbiltzen den heinean eta zerora jotzen du infinitura hurbiltzen den heinean. Beste horrenbeste beteko da lanarentzako eta giza-kapitalerako.

$$\lim_{K\to 0}\left(\frac{\partial F}{\partial K}\right) = \lim_{H\to 0}\left(\frac{\partial F}{\partial H}\right) = \lim_{L\to 0}\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right) = \infty$$

$$\lim_{K\to \infty}\left(\frac{\partial F}{\partial K}\right) = \lim_{H\to \infty}\left(\frac{\partial F}{\partial H}\right) = \lim_{L\to \infty}\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right) = 0$$

Beharrezkotasuna: Ekoizpen faktore bat beharrezkoa da baldin eta faktore horren maila positibo bat nahitaezkoa bada ekoizpen maila positibo bat lortzeko.

$$F(0,H,AL) = F(K,0,AL) = F(K,H,0) = 0$$

Oinarrizko ereduan bezala, aurreko baldintza guztiak betetzen dituenez, Cobb-Douglas ekoizpen-funtzioa erabiliko da. Beraz, ekoizpen-funtzioa hurrengoa izango da orain:

$$Y = F(K,H,L) = K^{\alpha}\, H^{\beta}\, (AL)^{1-\beta-\alpha}$$

non $0 < \beta < 1$, $0 < \alpha < 1$ eta $\alpha + \beta < 1$. Eskala errendimendua konstanteak direla eta lan efektiboko terminotan adierazi daiteke aldagai guztiak bider $\frac{1}{AL}$ eginez:

$$y = f(k, h) = k^{\alpha}\, h^{\beta} \tag{17}$$

non y lan efektiboko errenta, k lan efektiboko kapital fisikoa eta h lan efektiboko giza-kapitala diren.

Populazioaren hazkundearen eraginez lana (L) n tasa exogenoan hazten denaren eta aurrerapen-teknologikoaren eraginez teknologia (A) g tasa exogenoan hazten denaren balizkoak mantenduko dira.

4.2. Giza-kapitalaren metaketa

Giza-kapitalaren metaketak aurretik lan honetan jorratu den kapital fisikoaren metaketaren itxura hartuko du. Hau da, errentaren zati bat giza-kapitalean inbertitzeko aurreztuko da, kapital fisikoarekin ematen den bezala. Giza-kapitalaren aurrezki maila s_h aurrezki-tasa exogeno eta konstanteak zehaztuko du (non $0 < s_h < 1$). Beraz orain bi aurrezki-tasa izango ditugu. Bata giza-kapitalean inbertitzera bideratua (s_h) eta bestea, kapital fisikoaren inbertsiora bideratua (s_k). Era berean, giza-kapitala kapital fisikoa depreziatzen den moduan depreziatuko da. Giza-kapitalaren eta kapital fisikoaren depreziazio-tasak δ_h eta δ_k izango dira hurrenez hurren. 2.3. atalean erabili den prozedura berdina jarraituz lan efektiboko giza-kapitalaren (h) eta lan efektiboko kapital fisikoaren (k) metaketak nola ematen diren adierazten dituzten oinarrizko ekuazioak lor daitezke:

$$\dot{k} = s_k\, f(k, h) - (\delta_k + n + g)k$$

$$\dot{h} = s_h\, f(k, h) - (\delta_h + n + g)h$$

Lan efektiboko giza-kapitalaren metaketa, kapital fisikoarena bezala, bi indar kontrajarrien menpekoa izango da: lan efektiboko inbertsioa eta mantentze-inbertsioa. Lehenengoa bigarrena baino handiago den bitartean lan efektiboko giza-kapital maila handituko da; hau da; $s_h\, f(k, h) >$

$(\delta_h + n + g)h$ bada, orduan $\dot{h} > 0$. Beste horrenbeste lan efektiboko kapital fisikoaren kasuan. Testuan aurretik ekuazio hauen dinamikak lantzean ikusi denez, egoera hau ez da denboran zehar infinituki mantenduko. Helduko da bi indarrak berdintzen diren unea eta une horretan ekonomia egoera geldikorrera helduko da. Baina giza-kapitala ereduan barneratzeak egoera geldikorrean berezitasun bat sortu du. Orain egoera geldikorra lan efektiboko kapital fisikoaz gain, lan efektiboko giza-kapitalaren menpe dago ere. Beraz, egoera geldikorra bi aldagai hauen konbinazio batek zehaztuko du: (k^*, h^*) zeinak hurrengo baldintzak beteko dituen:

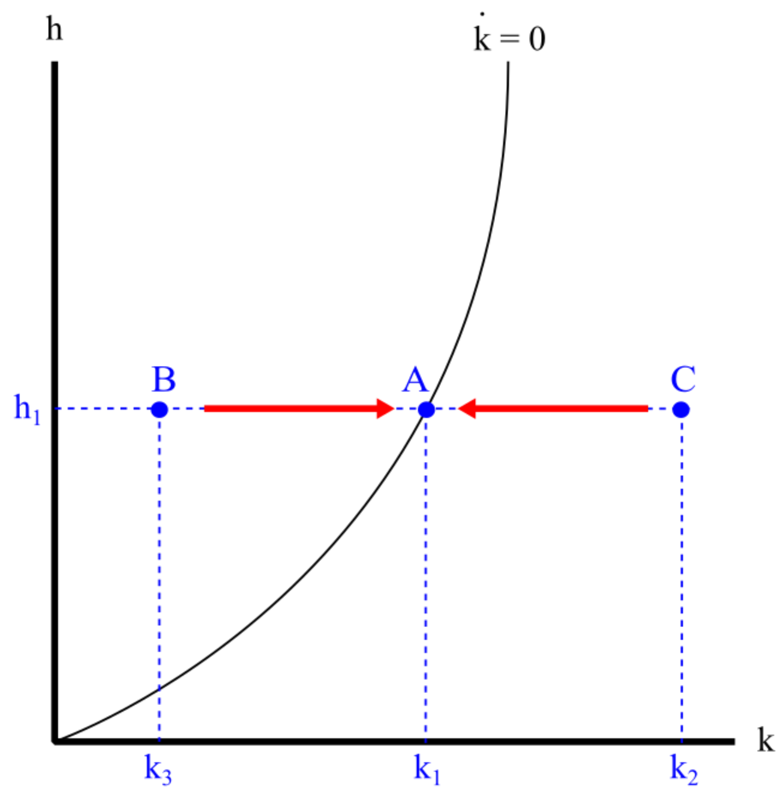
$$\dot{k} = s_k\, f(k^*, h^*) - (\delta_k + n + g)k^* = 0 \tag{15}$$

$$\dot{h} = s_h\, f(k^*, h^*) - (\delta_h + n + g)h^* = 0 \tag{16}$$

Egoera geldikor berri hau (k^*, h^*), Solow-en oinarrizko ereduko egoera geldikorra bezala, bakarra eta globalki egonkorra den aztertuko da orain. Horretarako, egoera geldikorra determinatzen duten (15) eta (16) ekuazioek (k, h) espazioan duten portaera grafikoki eta analitikoki behatuko da.

(15) ekuazioaren maldaren zeinua eta joera (beherakorra, gorakorra edo konstantea den) aztertuko da lehenik. $\dot{k} = 0$ izateko $s_k\, f(k, h) = (\delta_k + n + g)k$ berdintza bete behar da. k ezkerreko aldera pasatuz eta $f(k, h) = k^\alpha\, h^\beta$ dela gogora ekarriz, berdintza hurrengo eran berridatzi daiteke: $s_k\, k^{\alpha-1}\, h^\beta = \ (\delta_k + n + g)$. h bakanduz: $h = \left(\frac{\delta_k+n+g}{s_k}\right)^{\frac{1}{\beta}}\, k^{\frac{1-\alpha}{\beta}}$. Orain, $\left(\frac{\delta_k+n+g}{s_k}\right)^{\frac{1}{\beta}} = Q$ izendatuz, $\dot{k} = 0$-ren malda hurrengoa izango da orduan: $malda = \left.\frac{\partial h}{\partial k}\right|_{\dot{k}=0} = Q\ \frac{1-\alpha}{\beta}\ k^{\frac{1-\alpha}{\beta}-1} > 0$. Kontuan hartuta α eta β hurrengo eran $0 < \beta < 1$, $0 < \alpha < 1$ eta $\alpha + \beta < 1$ definitu direla $\dot{k} =$ 0-ren malda positiboa dela ondorioztatzen da. Maldaren joerari erreparatuko zaio orain: $\frac{\partial\, malda}{\partial k} = Q\ \frac{1-\alpha}{\beta}\ \left(\frac{1-\alpha}{\beta} - 1\right)\ k^{\frac{1-\alpha}{\beta}-2} > 0$. $\dot{k} = 0$-ren malda gorakorra dela ondorioztatzen da 8. grafikoan ikus daitekeenez. $\dot{k} = 0$-ren malda positiboa eta gorakorra izatea ekoizpen-faktoreen produktu marjinala positibo eta beherakorrak direnaren balizkoa onartzearen ondorioa da. Hau era intuitibo batean ulertzeko, lan efektiboko kapital fisikoaren (k) hazkundeak egoera geldikorreko $s_k\, f(k, h) = (\delta_k + n + g)k$ berdintzaren bi aldeetan duen eragina aztertuko da. Lan efektiboko

kapital fisikoaren inbertsioari $(s_k\, f(k,h))$ erreparatuz gero k handitu heinean hazkunde-tasa positibo baino beherakorra izango duela antzeman daiteke.



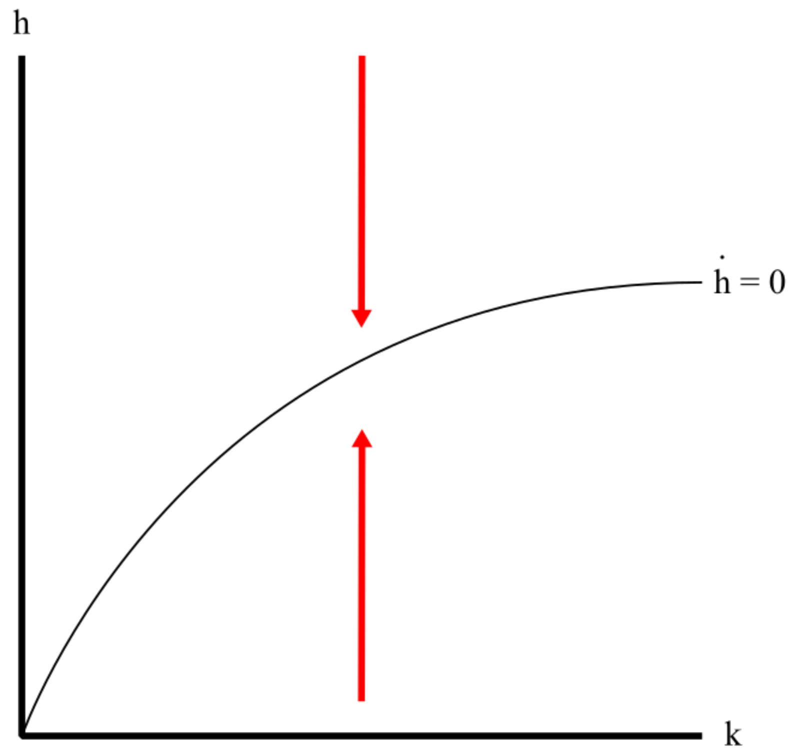
8. grafikoa: *$\dot{k} = 0$-ren portaera (k,h) espazioan*

Lehen aipatu bezala, ekoizpen-faktoreen produktu marjinala positiboa baina beherakorra dela kontsideratzen du Solow-en ereduak, beraz lan efektiboko ekoizpena, $f(k,h)$, gero eta kantitate txikiagoan haziko da k handitzen den heinean. Kapital fisikoaren inbertsiora bideratutako aurrezki-tasa (s_k) konstante mantentzekotan, ekuazioko ezkerreko espresioaren $(s_k\, f(k,h))$-ren gehikuntza gero eta txikiagoa izango dela argi ikusten da. Orain berdintzaren eskuineko espresioari, $(\delta_k + n + g)k$, erreparatuko zaio. Kasu honetan k marjinalki handitzean $(\delta_k + n + g)$ kantitate positibo eta konstantean haziko da beti. Beraz, k handitzen den heinean, egoera geldikorreko $\dot{k} = 0$ baldintza mantendu dadin, $s_k\, f(k,h) = (\delta_k + n + g)k$ berdintzako bi aldeen arteko aldakuntzen desoreka gero eta handiagoa konpentsatzen joan beharko da lan-efektiboko giza-kapitalaren (h) hazkunde progresibo batekin, azken honek, berdintzaren ezkerreko aldeko

$f(k,h)$ handituko baitu. Bai giza-kapitalaren eta kapital fisikoaren produktu marjinalak beherakorrak direnez, berdintza mantentzeko beharrezkoa izango den lan efektiboko giza-kapital maila gero eta handiagoa izango da. Horregatik, $\dot{k} = 0$-ren malda gorakorra izango da.

Orain analisi berdina egingo da (16) ekuazioarentzako. $\dot{h} = 0$ egoera geldikorreko baldintzatik hurrengo berdintza eratortzen da: $s_h\, f(k,h) = (\delta_h + n + g)k$. h ezkerreko aldera pasatuz eta $f(k,h) = k^\alpha\, h^\beta$ dela gogora ekarriz, berdintza hurrengo eran berridatzi daiteke: $s_h\, k^\alpha\, h^{\beta-1} = (\delta_h + n + g)$. h bakanduz: $h = \left(\frac{\delta_h+n+g}{s_h}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}\ k^{-\frac{\alpha}{\beta-1}}$. Orain $\left(\frac{\delta_h+n+g}{s_h}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} = Z$ izendatuz $\dot{h} = 0$-ren malda hurrengoa izango da: $malda = \left.\frac{\partial h}{\partial k}\right|_{\dot{h}=0} = Z\ \frac{\alpha}{1-\beta}\ k^{\frac{\alpha}{1-\beta}-1} > 0$. $\dot{h} = 0$-ren malda positiboa da. Maldaren joerari erreparatuko zaio orain: $\frac{\partial\, malda}{\partial k} = Z\ \frac{\alpha}{1-\beta}\ \left(\frac{\alpha}{1-\beta} - 1\right)\ k^{\frac{\alpha}{1-\beta}-2} < 0$. $\dot{h} = 0$-ren malda positiboa baino beherakorra dela ondorioztatzen da. Egia esan $\dot{k} = 0$-ren itxura berdina hartzen du, eta aurretik aipatutako arrazoi berdinengatik gainera, Solow-en ereduaren ekoizpen-faktoreen produktu marjinalak positiboak eta beherakorrak direnaren balizkoengatik alegia. Baina $\dot{h} = 0$-ren kasuan malda beherakorra da bi kurbak ardatz berdinak dituzten grafikoetan irudikatuta daudelako, beraz alderantzizko itxura hartzen du 9. grafikoan ikus daitekeenez. Behin, egoera geldikorreko baldintzak biltzen dituzten $\dot{k} = 0$ eta $\dot{h} = 0$ kurben itxura zehaztuta 10. grafikoan ikus daitekeenez jatorria ez ezik soilik behin gurutzatuko dira bi kurbak. Honek egoera geldikorra existitzen dela eta bakarra dela baieztatzen du. Gurutzatzen diren puntuak (k^*, h^*) egoera geldikorreko lan efektiboko kapital fisikoa eta giza-kapitala adieraziko ditu, $\dot{k} = 0$ eta $\dot{h} = 0$ baldintzak betetzen dituen (k,h)-ren konbinazio bakarra baita.

Behin egoera geldikorra existitzen dela eta bakarra dela ikusita, orain egoera geldikorra globalki egonkorra den aztertuko da; hau da, ekonomia batek, edozein $k_0 > 0$ eta $h_0 > 0$ abiapuntuan kokatuta, beti epe luzean egoera geldikorrera (k^*, h^*) joko duen zehaztuko da. Horretarako 8. eta 9. grafikoei erreparatuko zaie lan efektiboko kapital fisikoa (k) eta lan efektiboko giza-kapitala (h) $\dot{k} = 0$ eta $\dot{h} = 0$ kurbetatik kanpo kokatzen direnean zelako dinamikak sortzen diren aztertuz. $\dot{k} = 0$ kurbaren eskumaldean kokatzean, kapital fisiko gehiegi egongo da ekonomian une hartan dagoen lan eta giza-kapital mailetarako. Honek esan nahi du giza-kapital eta lan maila jakin batzuetarako $\dot{k} = 0$ egiten duen kapital fisiko maila baino handiagoa dagoela ekonomian une hartan.



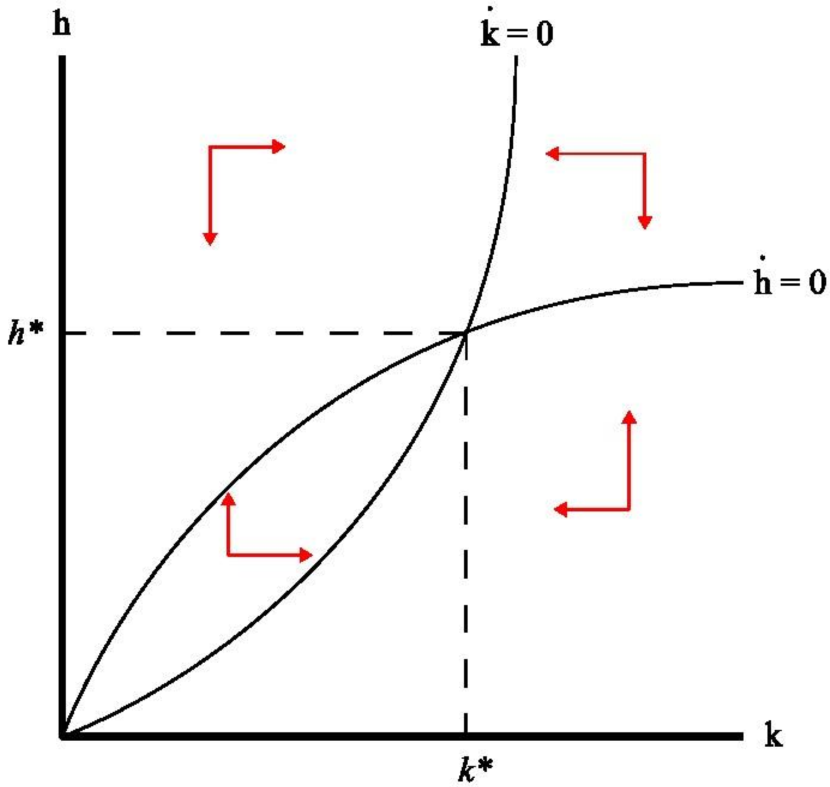
9. grafikoa: $\dot{h} = 0$*-ren portaera* (k, h) *espazioan*

Beraz, kapital fisikoaren produktu marjinala beherakorra denez, $s_k\, f(k, h) < (\delta_k + n + g)k$ egoera emango litzateke. Kapitalaren metaketaren nondik norakoak azaltzen dituen $\dot{k} = s_k\, f(k, h) - (\delta_k + n + g)k$ ekuazioa gogora ekarriz, $s_k\, f(k, h) < (\delta_k + n + g)k$ egoeran kokatzen den ekonomia batek lan efektiboko kapitalaren murriztapena jasango duela ondorioztatzen da, hau da: $\dot{k} < 0$ emango da. Lan efektiboko kapitala beraz, murrizten joango da ekonomiaren giza-kapital eta lan maileterako $\dot{k} = 0$ baldintza betetzen duen mailara heldu arte, hau da: $\dot{k} = 0$ kurban kokatu arte. 8. grafikoan egoera hau C puntuaren (h_1, k_2) bitartez irudikatu da. Ikus daitekeenez, C puntuan h_1 giza-kapital mailarentzako $\dot{k} = 0$ egiten duen kapital fisiko maila (k_1) baino handiagoa dago $(k_2 > k_1)$. Beraz, aipatutako arrazoiengatik lan efektiboko kapital fisikoa murrizten joango da, h_1 giza-kapital mailarentzako $\dot{k} = 0$ egiten duen lan efektiboko kapital fisikora (k_1) heldu arte. 8. grafikoan trantsizio dinamika hau C puntutik A puntura doan geziarekin irudikatu da. Grafikoarekin jarraituz, $\dot{k} = 0$ kurbaren ezkerraldean kokatzean kontrako egoera ematen dela ikus daiteke. Kasu honetan, B puntuan, h_1 giza-kapital mailarentzako $\dot{k} = 0$ egiten duen kapital fisiko maila (k_1) baino txikiagoa da ($k_3 < k_1$). Beraz, lan efektiboko kapital fisikoa handituz joango da $\dot{k} = 0$ egiten duen lan efektiboko kapital fisikora (k_1) heldu arte, B puntutik C puntura doan gezi gorriak erakusten duen moduan. Behin lan efektiboko kapital fisikoa $\dot{k} = 0$ kurban kokatuta, egoera horretan mantenduko da denboraldiz denboraldi, ez baitu hazkunderik ez murriztapenik jasango. Beraz, berdin da ekonomia $\dot{k} = 0$ kurbaren ezkerrean edo eskuinean kokatzea, beti ere $\dot{k} = 0$ kurbara joko baitu.

Beste horrenbeste emango da $\dot{h} = 0$ kurbarako. Kasu honetan, kurbaren gainetik kokatzean, giza-kapital gehiegi egongo da ekonomian une hartan dagoen lan eta kapital fisiko mailetarako. Beraz, lan efektiboko giza-kapitala murrizten joango da $\dot{h} = 0$ kurban kokatu arte. Kurbaren azpitik kokatzean aldiz, ekonomiaren kapital fisiko eta lan mailetarako giza-kapital kantitate txikiegia egongo da. Beraz, handituz joango da $\dot{h} = 0$ kurban kokatu arte. 9. grafikoan geziekin irudikatu dira dinamika hauek.

Beraz, atal honetan egindako analisiaren ondoren, giza-kapitala Solow-en ereduan barneratzean egoera geldikorra bakarra eta globalki egonkorra izaten jarraitzen duela ondorioztatzen da. 10. grafikoak bakarka egindako bi analisiak biltzen ditu, egoera geldikor bakarra ($\dot{k} = 0$ eta $\dot{h} = 0$ kurben ebakipuntua) dagoela eta hau globalki egonkorra dela adieraziz, azken hau gezien bidez. Geziek ekonomia $\dot{k} = 0$ eta $\dot{h} = 0$ kurbetatik kanpo kokatzean ematen diren trantsizio dinamikak adierazten dituzte.

10. grafikoari erreparatuz $\dot{k} = 0$ eta $\dot{h} = 0$ kurbek (k^*, h^*) ebakipuntuan ez ezik jatorrian ere, (0,0) puntuan, gurutzatzen direla ikus daiteke. Hala ere, (0,0) puntua ez da egoera geldikor egonkorra, jatorrian kokatzen den ekonomia batean aldaketa txiki bat gertatzekotan, geziek erakusten duten dinamikari begiratuta, ekonomia egoera horretatik aldenduko zelako. Dinamikak ekonomia (k^*, h^*)- ra eramango du.



__10. grafikoa:__ Lan efektiboko giza-kapitalaren eta kapital fisikoaren dinamikak Solow-en ereduan giza-kapitalarekin

4.3. Giza-kapitala barneratzen duen Solow-en ereduaren egoera geldikorreko berezitasunak

Aurreko atalean ikusi denez giza-kapitala Solow-en ereduan barneratzeak ez ditu oinarrizko ereduan egoera geldikorrak zituen ezaugarri batzuk galdu: existitzen dela, bakarra dela eta globalki egonkorra dela. Baina atal honetan giza-kapitalak Solow-en ereduan barneratzeak oinarrizko ereduarekiko dituen berezitasunak aztertuko dira.

Solow-en oinarrizko ereduaren arrazoinamendu berdina jarraituz orain aldagai bakoitzaren hazkunde-tasak 2. taulan adierazitakoak izango dira.

ALDAGAIA	HAZKUNDE-TASA
KAPITAL FISIKOA	n+g
EKOIZPENA	n+g
GIZA-KAPITALA	n+g
LANGILEKO KAPITAL FISIKOA	g
LANGILEKO EKOIZPENA	g
LANGILEKO GIZA-KAPITALA	g
LAN EFEKTIBOKO KAPITALA	0
LAN EFEKTIBOKO ERRENTA	0
LAN EFEKTIBOKO GIZA-KAPITALA	0

2. Taula: *Aldagaien hazkunde-tasa egoera geldikorrean giza-kapitala barneratzen duen Solow-en ereduan*

(17) ekoizpen-funtzioa (15) eta (16) ekuazioetan barneratuz eta k eta h bakanduz egoera geldikorreko lan efektiboko kapital fisiko eta giza-kapital maila zer faktoreren menpekoa den ikus daiteke:[7]

$$k^* = \left(\left(\frac{s_k}{n+g+\delta_k}\right)^{1-\beta}\left(\frac{s_h}{n+g+\delta_h}\right)^{\beta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \tag{18}$$

$$h^* = \left(\left(\frac{s_k}{n+g+\delta_k}\right)^{\alpha}\left(\frac{s_h}{n+g+\delta_h}\right)^{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \tag{19}$$

(18) eta (19) ekuazioei erreparatuz kapital fisikora bideratutako aurrezki-tasaren (s_k) hazkuntza batek egoera geldikorreko lan efektiboko kapital fisikoa (k^*) handitzeaz gain giza-kapitala (h^*) ere handituko duela ondorioztatzen da. Beste horrenbeste giza-kapitalera bideratutako aurrezki-tasarentzako (s_k). Honen zergatia bai lan efektiboko giza-kapitalera bideratutako inbertsioa bai eta kapital fisikora bideratutakoa ere lan efektiboko ekoizpenaren menpekoak direlako da. Adibidez, kapital fisikora bideratutako aurrezki-tasaren (s_k) hazkuntza batek, k^* handituz, lan efektiboko ekoizpena (y) handituko du. Lan efektiboko ekoizpena (y) handitzean, nahiz eta giza-kapitalera bideratutako aurrezki-tasa (s_h) konstante mantendu, giza-kapitalera bideratutako

[7]A eranskinean kalkuluen garapena.

inbertsioa ($s_h\, y$) handituko da, y-ren menpekoa baita. (18) eta (19) ekuazioak (17) ekuazioko ekoizpen-funtzioan ordeztuz egoera geldikorreko lan efektiboko errenta maila lortuko da:

$$y^* = f(k^*, h^*) = \left(\frac{s_k}{n + g + \delta_k}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{s_h}{n + g + \delta_h}\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} \tag{20}$$

(20) ekuazioari erreparatuz kapital fisikoaren eta giza-kapitalaren aurrezki-tasen lan efektiboko errentari egiten dioten ekarpen erlatiboa kapital fisikoak eta giza-kapitalak errentan duten partaidetzaren araberakoa izango dela ondorioztatzen da.[8] Hau da, α gero eta handiagoa denean s_k garrantzitsuagoa izango da eta β handiagoa denean ordea, s_h garrantzitsuagoa izango da.

Beraz, bigarren taulan ikusi denez, Solow-en oinarrizko ereduarekin alderatuz, giza-kapitala ereduan barneratzeak ez du eraginik izan aldagaien epe luzeko hazkunde-tasetan. Hala ere, aurrezki-tasen ($s_k$eta s_h) hazkunde batek epe luzeko errenta maila (y) oinarrizko ereduan baino gehiago handituko duela ikusi da (18) eta (19) ekuazioen analisia egiterakoan.

4.4 Giza-kapitala barneratzen duen Solow-en ereduaren aldeko ebidentzia enpirikoa: Mankiw, Romer eta Weil-en analisia.

Hazkunde ekonomikoaren eragileak bilatzeko ahaleginean testuan osatzen joan den eredua datuetara nola moldatzen den aztertuko da orain. Horretarako Mankiw, Romer eta Weil-ek 1992an argitaratutako *"A contribution to the empirics of economic growth"* artikuluan egindako analisia baliatuko da. Mankiw, Romer eta Weil-ek, garai hartan eskuragarri zituzten datuekin, erregresio-

[8] Solow-en ereduak merkatu-lehiakorrak suposatzen ditu eta beraz, ekoizpen-faktoreei haien produktu marjinalaren arabera ordaintzen zaie. Kapital fisikoaren produktu marjinala $(KPM) = \frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha\, K^{\alpha-1}\, H^{\beta}\, (AL)^{1-\alpha-\beta}$ eta giza-kapitalaren produktu marjinala $(HPM) = \beta\, K^{\alpha}\, H^{\beta-1}\, (AL)^{1-\alpha-\beta}$. Beraz, kapital fisikoari ordainketa: $KPM \bullet K$ eta giza-kapitalari ordainketa: $HPM \bullet H$. Bi espresio hauek garatuz faktore bakoitzak errentan duen partaidetza ekoizpen-funtzioan duten berretzailea dela ondorioztatzen da:

- $KPM \bullet K = \alpha\, K^{\alpha-1}\, H^{\beta}\, (AL)^{1-\alpha-\beta}\, K = \alpha\, K^{\alpha}\, H^{\beta}\, (AL)^{1-\alpha-\beta} = \boldsymbol{\alpha} Y \rightarrow \boldsymbol{\alpha} = \frac{KPM \bullet K}{Y}$
- $HPM \bullet H = \beta\, K^{\alpha}\, H^{\beta-1}\, (AL)^{1-\alpha-\beta}\, H = \beta\, K^{\alpha}\, H^{\beta}\, (AL)^{1-\alpha-\beta} = \boldsymbol{\beta} Y \rightarrow \boldsymbol{\beta} = \frac{HPM \bullet H}{Y}$

analisia deritzon prozesu estatistikoa erabili zuten Solow-en oinarrizko ereduaren eta giza-kapitala barneratzen duen Solow-en ereduaren aldeko ebidentzia enpirikoa zein zen zehazteko asmoarekin.

4.4.1 Estimazio-eredua eraikitzen

Ereduaren lehenengo balizkoa mundua $j = 1, \ldots, N$ herrialdez osatuta dagoela da. Herrialde bakoitza guztiz isolaturik dagoen uharte bat balitz bezala hartuko da; hau da, herrialdeen arteko elkarreraginik ez dela existitzen suposatuko da. Balizko honi esker, herrialde bakoitzaren ekonomia Solow-en ereduaren kasu partikular bat bezala aztertu daiteke. Beraz, j herrialdearen ekoizpen agregatuaren-funtzioa t denboraldian hurrengoa izango da:

$$Y_j(t) = K_j^{\alpha}(t)\, H_j^{\beta}(t)\, (A_j(t)\, L_j(t))^{1-\alpha-\beta}$$

Herrialdeak haien aurrezki-tasetan ($s_{k,j}$ eta $s_{h,j}$), populazioaren hazkunde-tasetan (n_j) eta aurrerapen teknologikoaren tasan (g_j) desberdintzen direla onartuko da. Estimazioaren helburua herrialdeen arteko desberdintasun hauek herrialdeen artean existitzen diren bizi-mailaren (langileko errentaren) ezberdintasunak azaltzeko gai diren aztertzea da. Solow-en ereduaren arabera aurrezki-tasa handiagoek egoera geldikorreko, hau da, epe luzeko errenta handitzen dutela ikusi da. Bestalde, populazioaren hazkunde-tasaren hazkunde batek epe luzeko langileko errenta maila murriztuko luke. Aurrerapen teknologikoari dagokionez, langileko errenta epe luzean aurrerapen teknologikoaren tasa berean haziko dela ikusi da. Beraz, analisia herrialdeen arteko alderaketan oinarrituko da, Solow-en ereduak aurreikusten dituen erlazio hauek zer puntutaraino esanguratsuak diren zehaztuz. Horretarako herrialde guztiak bere egoera geldikorrean kokatzen direla suposatuko da. Balizko honek ez du emaitzetan eragin handirik izango herrialdeak haien egoera geldikorretik gertu kokatzen diren kasurako. Bat-bateko hazkunde izugarria edo hazkundearen eten bat jasaten ari diren herrialdeak kontuan hartzekotan balizko honek estimazioen emaitzetan arazo handiak sortuko lituzke. Behin herrialde oro dagokion egoera geldikorrean kokatzen dela onartuta (20) ekuazioan oinarrituz j herrialdearen langileko errenta zehaztu daiteke:[9]

$$\frac{Y_j(t)}{L_j(t)} = A_j(t)\left(\frac{s_{k,j}}{n_j + g_j + \delta_k}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}}\left(\frac{s_{h,j}}{n_j + g_j + \delta_h}\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} \qquad (21)$$

Non $\frac{Y_j(t)}{L_j(t)}$ j herrialdearen egoera geldikorreko langileko errenta den t denboraldian. (21) ekuazioari erreparatuz atera daitekeen ondorioetako bat herrialdeen arteko aurrerapen teknologikoaren (g_j) ezberdintasunak herrialdeen arteko epe luzeko langileko errentan ezberdintasunak eragingo dituela da, $A_j(t)$ aldagaia herrialde bakoitzean tasa ezberdinean haziko zelako. Herrialdeek aurrerapen teknologikoaren tasa ezberdina dutenaren ala orokorrean mundu mailako aurrerapen teknologikoaren tasa orokor bat dagoenaren arteko eztabaida dago hazkunde-ekonomikoaren arloan. Bi hipotesien aldeko arrazoiak eta ebidentziak daude.[10] Solow-en ereduak aurrerapen teknologikoaren-tasa exogenoa kontsideratzen duenez Mankiw, Romer eta Weil-ek zentzuzkoagoa ikusi zuten herrialdeen artean komuna den aurrerapen teknologikoaren-tasa (g) onartzea. Beraz j herrialdearen teknologia maila t denboraldia hurrengoa izango da:

$$A_j(t) = \overline{A_j}\, e^{gt} \qquad (22)$$

non $\overline{A_j}$ j herrialdearen jatorrizko teknologia maila den; hau da, $t = 0$ denboraldian herrialde horrek duen teknologia maila[11]. Beraz, (22) ekuaziotik herrialdeek teknologia mailetan dituzten desberdintasunak haien jatorrizko teknologia maila $(\overline{A_j})$ ezberdinengatik ematen direla ondorioztatzen da, aurrerapen teknologikoaren tasa berdina baitute guztiok: g. Herrialde bakoitzaren jatorrizko teknologia mailan $(\overline{A_j})$ desberdintasunak faktore askorengatik eman

---

[9] (20) ekuazioan egoera geldikorreko lan efektiboko errenta adierazi da; hau da: $y^* = \frac{Y}{AL}$, non y^* egoera geldikorreko lan efektiboko errenta den. Beraz, langileko errenta $\left(\frac{Y}{L}\right)$ (20) ekuazioaren bi aldeak A-rengatik biderkatuz lortuko litzateke: $A\,y^* = \frac{Y}{L}$.

[10] Acemoglu, Daron (2007). *Introduction to Modern Economic Growth.* Princeton University Press.

[11] $t = 0$ denboraldiran j herrialdearen teknologia maila hurrengoa da: $A_j(0) = \overline{A_j}\, e^{g0} = \overline{A_j}$.

daitezke: baliabideen dotazioak ezberdinak direlako, instituzioak (adibidez legedia) ezberdinak direlako, herrialdeen geografia edo klima partikularrengatik… Behin teknologia definituta, egoera geldikorreko langileko errenta zehazten duen (21) ekuazioan logaritmoak hartuz, langileko errenta biztanleriaren hazkunde-tasarekin eta kapital fisikoaren eta giza-kapitalaren metaketarekin erlazionatzen duen ekuazioa lortzen da:

$$\ln\frac{Y_j(t)}{L_j(t)} = \ln\overline{A_j} + gt + \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}\ln\left(\frac{s_{k,j}}{n_j+g+\delta_k}\right) + \frac{\beta}{1-\alpha-\beta}\ln\left(\frac{s_{h,j}}{n_j+g+\delta_h}\right) \tag{23}$$

$\ln\overline{A_j}$ aldagaia ikusgaitza da, ezin izan zaio balio zehatzik eman. Beraz, estimatzerako orduan erroreak barneratuko du aldagai hau. Hazkunde-ekonomikoaren eredu gehienek herrialdeen arteko teknologia ezberdintasunak, $\ln\overline{A_j}$, kapital fisikoarekin eta giza-kapitalarekin korrelatuta daudela onartzen dute. Hau horrela izatekotan, estimazioak aldagai nabarien omisioaren eraginez alboratuak eta ez tinkoak izango lirateke.[12] Arazo hau konpontzeko; hau da, estimazioak egokiak izan daitezen, herrialdeen teknologia mailaren aldagaiari beste balizko bat gehituko zaio. Orain j herrialdearen jatorrizko teknologia maila ($\overline{A_j}$) hurrengo eran definituko da: $\overline{A_j} = \varepsilon_j\, A$; non ε_j j herrialdearen berariazko perturbazioa edo errorea den eta A herrialde guztiek partekatzen duten teknologia maila den; hau da, orain herrialdeen jatorrizko teknologia maila herrialde bakoitzaren berariazko termino batengatik (ε_j) biderkatutako elementu komun batek (A) zehaztuko du. Herrialde bakoitzaren berariazko perturbazioa (ε_j) ereduaren gainontzeko aldagaiekiko independientea dela kontsideratuko da. Honek ε_j ereduko gainontzeko aldagaiekin erlazionatuta ez dagoela esan nahi du. ε_j erregresio linealeko eskumaldeko aldagai azaltzaileekiko independientea bada, $\ln\overline{A_j}$ (errore terminoaren barne dagoela gogora ekarriz) ez da aldagai azaltzaile horiekin korrelatuta egongo. Erroreko terminoak aldagai azaltzaileekin korrelatuta ez daudenean aldagai azaltzaileen koefizienteen estimazio tinkoak lortu daitezke. Beraz, teknologiaren inguruko balizko honi esker orain bai, hurrengo ekuazioa karratu txikien arrunten (KTA hemendik aurrera) bidez estimatu daiteke:

[12] B eranskinean tinkotasunaren inguruko azalpenak emango dira.

$$\ln\frac{Y_j}{L_j} = konstantea + \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}\ln(s_{k,j}) - \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}\ln(n_j + g + \delta_k) + \frac{\beta}{1-\alpha-\beta}\ln(s_{h,j}) - \frac{\beta}{1-\alpha-\beta}\ln(n_j + g + \delta_h) + \varepsilon_j \qquad (24)$$

δ_k, δ_h eta g konstanteei dagokien balioa emanez eta herrialdeen datuak baliatuz bakoitzari dagozkion $s_{k,j}$, $s_{h,j}$ eta n_j datu bidez kalkulatuz, (24) ekuazioaren aldagai azaltzaileen balioak lortuko lirateke, $\ln(s_{k,j})$, $\ln(s_{h,j})$, $\ln(n_j + g + \delta_k)$ eta $\ln(n_j + g + \delta_h)$ alegia. Behin aldagai azaltzaileen balioak kalkulatuta (24) ekuazioa KTA bidez estimatu litzateke α eta β parametroen estimazioak lortuz.[13] Horrela aldagai azaltzaileek epe luzeko langileko errentan duten eragina estimatu litzateke. Mankiw, Romer eta Weil-ek aldagaien balioak determinatzeko Summers eta Heston-ek 1988an eraikitako *Real National Accounts*-eko datuak erabili zituzten, bai eta Banku Mundialeko *World Tables* eta 1988ko *World Development Report* ere. Kapital-fisikora bideratutako aurrezki-tasa ($s_{k,j}$) hurrengo eran kalkulatu zuten $= \frac{INBERTSIOA}{BARNE\ PRODUKTU\ GORDINA}$. Giza-kapitalera bideratutako aurrezki-tasarako ($s_{h,j}$) aldiz, SCHOOL deituriko proxy bat erabili zuten. Honek, lan egiteko adinean zeuden biztanleen artean bigarren hezkuntzan jarraitzen zutenen ehunekoa adierazten zuen. Giza-kapital eta kapital fisikoa tasa berean depreziatzen zirela suposatu zuten ere $\delta_k = \delta_h = \delta$. Are gehiago, $g + \delta = 0{,}05$ onartu zuten.[14]

[13] Karratu txikien arrunta (KTA) datu-multzo baten hurbilketa lineal hoberena kalkulatzeko metodo estatistikoa da. Demagun (x_i, y_i) puntuen multzo bat dugula. Datu gisa dugun puntuen multzo horren bi aldagaien arteko erlazioa zein den zehaztu nahi dugu. Horretarako $y = mx + b$ (non m zuzenaren malda eta b ordenatua jatorrian diren) funtzio lineala doituko dugu y aldagaien aurreikusitako balioen $(\hat{y}_i)$ eta benetako balioen (y_i) arteko aldearen karratuen gehikuntza minimoa emateko. Era honetan $\sum_{i=1}^{n}|\hat{y}_i - y_i|^2$minimizatzen duten m eta b parametroak estimatuko dira. Metodo estatistiko hau KTA da.

[14] Mankiw, Romer eta Weil-ek balizko honetan aldaketa nabariek estimazioetan ez zutela eragin esanguratsurik izango esan zuten. Romer-ek aurretik egindako kalkuluetan $\delta = 0{,}03$ inguruan kokatzen zela kalkulatu zuen. Bestalde g laginaren herrialdeen langileko errentaren batez besteko hazkunde-tasatik eratorri zuten eta gutxi gorabehera $g = 0{,}2$ zela determinatu zuten.

4.4.2 Mankiw, Romer eta Weil-en estimazioen emaitzak.

Mankiw, Romer eta Weil-ek hasiera batean Solow-en oinarrizko eredua, giza-kapitala kontuan hartu gabe, datuetara zelan moldatzen zen aztertu nahi izan zuten. Horretarako (24) ekuazioan $\beta = 0$ inposatuz giza-kapitala kanpoan utziko da. Estimazioaren helburua, lehen esan bezala, herrialde bakoitza bere egoera geldikorrean kokatuta dagoela suposatuz, haien bizi-mailen (langileko errenten) desberdintasunak Solow-en ereduan hazkunde ekonomikoaren eragile gisa identifikatzen diren aldagaien eskutik zer neurritan datorren zehaztea da. Beraz, estimaziorako analisi transbertsala egingo da; hau da, hainbat herrialdeen datuak momentu jakin batean (t jakin batean) erabiliko dira. Guzti hau kontuan hartuta, Solow-en oinarrizko eredurako erabiliko den estimazio ekuazioa t denboraldi jakin bateko langileko errenta mailarako hurrengoa izango da:

$$\ln\frac{Y_j}{L_j} = konstantea + \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln\left(s_{k,j}\right) - \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln\left(n_j + g + \delta_k\right) + \varepsilon_j \qquad (25)$$

$\ln\left(s_{k,j}\right)$ eta $\ln\left(n_j + g + \delta_h\right)$ terminoak banaka adierazteak, herrialdeak egoera geldikorrean kokatzen direnez, haien koefizienteak balio absolutuan berdinak eta kontrako zeinudunak izan behar direnaren murrizketa egiaztatzea ahalbidetzen du.

Mankiw, Romer eta Weil-ek hainbat lagin erabili zituzten estimazioak egiteko. Behaketa gehien biltzen zituen lagina 98 herrialdeek osatzen zuten. Lagina estimaziorako beharrezko diren datuak eskuragarri zituzten herrialde guztiengatik osatuta zegoen, soilik petrolio-industria jarduera ekonomiko nagusitzat zuten herrialdeak baztertuz. Herrialde hauek baztertzeko arrazoia haien Barne Produktu Gordinaren zati handiena jadanik herrialdean existitzen diren baliabide naturaletatik datorrelako da, ez balio erantsia sortzen duten jarduera ekonomikotik. Beraz, Solow-en hazkunde ekonomikoaren ereduak herrialde hauen hazkunde-tasak kalkulatzeko ez dirudi erraminta hoberena. Lehen estimazio honetarako beraz, 98 herrialde hauen 1985. urteko datuak erabili zituzten.

SOLOW-EN OINARRIZKO EREDUAREN ESTIMAZIOAK (MRW-1992)	
Menpeko aldagaia: $ln \frac{Y_{1985}}{L_{1985}}$	
$konstantea$	5.48 (1.59)
$\ln(s_k)$	1.42 (0.14)
$\ln(n + \delta\ + g)$	-1.97 (0.56)
R^2	0.59
$\hat{\alpha}$	0.59
$Behaketa\ kantitatea$	98

***3. taula**: Mankiw, Romer eta Weil-en estimazioak Solow-en oinarrizko ereduaren inguruan.*

Mankiw, Romer eta Weil-ek lortu zituzten emaitzak 3. taulan ikus daitezke. Lortutako estimazioek $\frac{\alpha}{1-\alpha}$-entzako 1,4 inguruko koefizientea ematen dute. Beraz, α-ak 0,59 balioa duela estimatzen da. Aurretik aipatu dugunez, Solow-en ereduan α-k kapital fisikoak errentan duen partaidetza adierazten du $\left(\frac{KPM\ x\ K}{Y} = \alpha\right)$ eta hau datuen arabera $\frac{1}{3}$-en inguruan kokatzen da. Beraz, Mankiw Romer eta Weil-ek Solow-en oinarrizko ereduan oinarritutako estimazio erregresioak α gainestimatzen duela ondorioztatzen da. Emaitza honen kausa naturala errorearen (ε_j) eta $\ln(s_{k,j})$-aren artean nolabaiteko korrelazioa egotea izango litzateke. Hau azaltzeko bi arrazoi izan daitezke. Bata, teknologia ortogonalaren balizkoa ez dela oso errealista eta bestea, giza-kapital maila ezberdinak $\ln(s_{k,j})$ aldagaiarekin korrelatuak egotea. Azken kasu honetan estimazioak alboratuak izango lirateke aldagai esanguratsu baten omisioa dela eta. Mankiw, Romer eta Weil-ek bigarren arrazoi hau kontsideratu zuten eta giza-kapitala barneratzen duen (24) ekuazioa erabili zuten estimazio berriak egiteko. Estimazioen emaitzak 4. taulan ikus daitezke.

GIZA-KAPITALA BARNERATZEN DUEN SOLOW-EN EREDUAREN ESTIMAZIOAK (MRW-1992)	
Menpeko aldagaia: $ln\frac{Y_{1985}}{L_{1985}}$	
$konstantea$	6.89 (1.17)
$\ln(s_k)$	0.69 (0.13)
$\ln(n+\ \delta+g)$	-1.73 (0.41)
$\ln(s_h)$	0.66 (0.07)
R^2	0.78
$\hat{\alpha}$	0.30
$\hat{\beta}$	0.28
$Behaketa\ kantitatea$	98

4. taula: *Mankiw, Romer eta Weil-en estimazioak giza-kapitala barneratzen duen Solow-en ereduaren inguruan.*

Ikus daitekeenez erregresioak orain askoz emaitza hobeak lortu ditu. Alde batetik, R^2 handitu egin da 0.78 balioa lortu arte. Honek menpeko aldagaiaren $\left(ln\frac{Y_{1985}}{L_{1985}}\right)$ aldakuntzaren %78 erregresioko aldagai azaltzaileen$\left(\ln\left(s_{k,j}\right),\ \ln\left(s_{h,j}\right) \text{ eta } \ln(n_j+\delta+g)\right)$ aldakuntzaren eskutik datorrela esan nahi du. Bestalde α-ak orain 0,3 balioa, datuek aurreikusten duten balioa, hartzen duela estimatzen da.[15] Beraz, Mankiw, Romer eta Weil-ek emaitza hauek giza-kapitala

[15] Mankiw, N. G., Romer, D., & Weil, D. N. (1992). A Contribution to the empirics of Economic Growth. *Quarterly Journal of Economics, 107*(2), 407-437.

barneratzen duen Solow-en ereduaren aldeko ebidentzia garrantzitsutzat interpretatu zituzten. Esan bezala, teknologia amankomunaren balizkopean, giza-kapitalean eta kapital fisikoan egindako inbertsioak herrialdeen arteko langileko errenta mailaren ezberdintasunen % 78 azaltzen dute eta gainera $\hat{\alpha}$ balioa estimatua ereduak aurreikusten duen α baliora asko hurbiltzen da. Emaitza hauek ontzat jotzekotan beraz, teknologiaren rola nahiko murriztua dela ondorioztatzen da. Herrialdeen langileko errenta desberdintasunen hiru laurden inguru giza-kapitalean eta kapital fisikoan egindako inbertsio mailak azaltzen badu, teknologiak askoz jota herrialdeen langileko errentaren desberdintasunen laurdena azalduko luke. Beraz, Mankiw, Romer eta Weil-ek lortutako emaitzen arabera garapen bidean dauden herrialdeak hazteko politika efektiboenak, giza-kapitalean eta kapital fisikoan egin beharreko inbertsioak izango lirateke.

4.4.3. Mankiw, Romer eta Weil-en estimazioei egindako hainbat kritika.

Mankiw, Romer eta Weil-ek lortu zituzten emaitzak giza-kapitala barneratzen duen Solow-en eredua neurri handi batean babesten dute. Hala ere, badira hainbat arrazoi egindako estimazioak guztiz esanguratsuak eta zuzenak ez direla pentsatzeko. Atal honetan arrazoi horietako bi azalduko dira.

Lehenengoa, herrialdeen arteko teknologia maila ezberdintasunak gainontzeko aldagai azaltzaileekiko independenteak direla onartzea balizko oso errealista ez izatea da. Zentzuzkoena herrialdeen jatorrizko teknologia maila ($\bar{A}_j$) kapital fisikora bideratutako aurrezki-tasarekin ($s_{k,j}$) eta giza-kapitalera bideratutako aurrezki-tasarekin ($s_{h,j}$) korrelatuta egotea litzateke. Beste era batera esanda, herrialde produktiboagoek kapital fisikoan eta giza-kapitalean gehiago inbertitzeak logikoa dirudi. Hau horrela dela pentsatzeko bi arrazoi daude gutxienez. Bata, jatorrizko teknologia maila altuagoa duten herrialdeek nagusitasun hori teknologian gehiago inbertitu izan dutelako onartzea da. Teknologia maila, kapital maila bezala, inbertitzeko portaeraren araberako emaitza da.[16] Beraz, zentzuzkoa da herrialde bat teknologian gehiago inbertitzera bultzatu duen arrazoi sorta berdinagatik herrialde horrek kapital fisikoan eta giza-kapitalean ere inbertsio handiagoa egitea. Korrelazioaren aldeko beste arrazoia, ekoizpen-funtzioan deskribatu denez,

[16] Xehetasun gehiagorako ikus: Acemoglu, Daron (2007). *Introduction to Modern Economic Growth (or. 131-133).* Princeton University Press.

teknologiaren, giza-kapitalaren eta kapital fisikoaren artean osagarritasun erlazio bat existitzen dela da. Beraz, jatorrizko teknologia maila altuagoa duten herrialdeentzako onuragarriagoa izango da kapital fisiko eta giza-kapital mailak handitzea.

Bi kasuetan (24) estimazio ekuazioko errorea (ε_j) gainontzeko aldagai azaltzaileekin korrelatuta egongo da, hortaz ez du independentziaren baldintza beteko. Ondorioz, KTA-ren bidez α eta β-aren estimazioak gorantza alboratuak izango dira. Era berean, R^2, herrialdeen langileko errenta desberdintasunak zein neurritan kapital-fisikoaren eta giza-kapitalaren desberdintasunen eskutik datozen zehazten duen adierazlea, gorantza alboratua izango da.

Mankiw, Romer eta Weil-en metodoari bigarren kritikak (24) ekuazioa erabiltzean α eta β-en estimazioek hartzen dituzten balioekin du zerikusia. Jakina denez, (24) estimazio ekuazioa oso erabilgarria da α-ren balio estimatua ($\hat{\alpha}$) benetako balioarekin alderatu daitekeelako. Giza-kapitala barneratzean, estimazioen emaitzak aztertzerakoan ikusi da α-ren balio estimatua datuetatik eratorritako benetako baliora asko hurbiltzen dela. Orain, analisi berdina egingo da β-rentzat, giza-kapitalak errentan duen garrantzi estimatua errealitateko baliora zenbat hurbiltzen den zehazteko.

Aurretik aipatu denez, Mankiw, Romer eta Weil-ek giza-kapitalera bideratutako aurrezki-tasarako ($s_{h,j}$) SCHOOL deituriko proxy bat erabili zuten. Honek lan egiteko adinean zeuden biztanleen artean bigarren hezkuntzan jarraitzen zutenen ehunekoa adierazten du. Estimazioetarako erabilitako lagineko herrialdeek $s_{h,j}$ aldagairako % 0,4 eta % 12 arteko balioak hartzen dituzte. Gogora ekarriz $\ln(s_{h,j})$ aldagaiaren koefizienteak Mankiw, Romer eta Weil-en estimazioan 0,66 balioa hartzen duela, (24) ekuazioa erabiliz, giza-kapitalean gehien inbertitzen duen herrialdearen eta gutxien inbertitzen duenaren esperotako langileko errenta ezberdintasuna kalkulatu daiteke, gainontzeko aldagaiak konstante mantenduz.

$$\ln\frac{Y(s_{h,j}=12)}{L(s_{h,j}=12)} - \ln\frac{Y(s_{h,j}=0.4)}{L(s_{h,j}=0.4)} = \left(\widehat{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}}\right)(\ln(12)-\ln(0{,}4))$$
$$= 0{,}66\,(\ln(12)-\ln(0{,}4)) \approx 2{,}24$$

Beraz, gainontzeko aldagaiak konstante mantenduta, $s_{h,j} = 12$ balioa hartzen duen herrialde baten langileko errenta $s_{h,j} = 0{,}4$ balioa hartzen duen herrialde batena baino $e^{2,24} \approx \mathbf{9,5}$ aldiz handiagoa dela estimatzen da Mankiw, Romer eta Weil-en emaitzak erabiliz.

Orain, aurreikuspen hau mikroekonomiako ebidentziarekin bateragarria den aztertuko da. Horretarako, eskola urte gehigarriek errenta proportzionalki handitzen dutela onartzen duen Mincer-en diru-sarreren funtzioa erabiliko da:[17]

$$\ln w_i = X_i \Upsilon + \phi\, S_i \tag{26}$$

non $\ln w_i$ i gizabanakoaren soldataren logaritmo naturala, X_i i gizabanakoaren hainbat ezaugarri biltzen dituen bektorea (hala nola lan-esperientzia, generoa…), Υ X_i-k biltzen dituen aldagaiekin lotutako koefizienteen bektorea, S_i i gizabanakoaren hezkuntza urte kopurua eta ϕ hezkuntza urte gehigarri batek soldataren logaritmo naturalean duen eragina neurtzen duen koefizientea diren. Mikroekonomiaren arloan egindako hainbat ikerketek (26) ekuazioa datuetara ongi moldatzen dela baieztatu dute eta ϕ 0,06 eta 0,1 balioen artean kokatzen dela estimatzen da. Hau da, hezkuntza urte gehigarri batek gizabanako baten soldata % 6 eta % 10 artean handitzen duela estimatzen da. Aurretik ikusi dugunez, ekoizpen-faktoreen merkatuak (lan-merkatua kasu honetan) lehiakorrak izatekotan soldatak lanaren produktu marjinalaren merkatu balioa hartuko du. Beraz, lan-merkatu lehiakor baten testuinguruan hezkuntza urte gehigarri batek langileko produktibitatea % 6 eta %10 artean handituko dela ondorioztatzen da.

Orain arte aipatutakoarekin, batezbestekoz biztanleriaren hezkuntza urte desberdina izateagatik bi herrialdeen arteko errenta ezberdintasuna zein izango den aurreikusi daiteke, baina bi ohar kontuan hartuta.

Lehenengoa (26) ekuazioan agertzen den erlazioa herrialde guztietara luzatu daitekeela izango da. Hau da, soldaten beste determinanteak alde batera utzita, edozein herrialdeko gizabanako baten soldata-funtzioa bere hezkuntza urteen menpeko funtzio baten bidez adierazi daitekeela $w_i = f\,(S_i)$. Herrialde guztientzat f funtzio hau funtzio esponentzial berberarekin hurbildu daitekeela suposatuko dugu $\left(f(S_i)\ \approx e^{\phi S_i}\right)$, (26) ekuazioaren itxura har dezan.

Bigarren oharra giza-kapitalak kanpo-eraginik sortzen ez duela onartzea izango da. Hau da, langile baten giza-kapital mailak gainontzeko langileen produktibitatean ez duela zuzenean eragiten

[17] Mincer-en diru-sarreren funtzioa mikroekonomian erabiltzen den eredu ekonometrikoa da, diru-sarreren eta gizabanakoen hainbat ezaugarriren arteko erlazioa aztertzeko, bereziki hezkuntza eta lan-esperientzia. Ereduak garatu zuen Jacob Mincer ekonomialariaren izena hartzen du.

suposatzea. Balizko hau barneratzeak ez gaitu errealitatetik urruntzen, ebidentziak erakutsi duenez giza-kapitalak kanpo-eraginak sortzeko kasuan hauek oso txikiak dira, ez oso esanguratsuak.

Beraz, behin puntu hauek argituta, mikroekonomiako soldaten ekuaziotik herrialdeen arteko errenta ezberdintasunak aztertzera igaro daiteke. Analisia arlo batetik bestera transmititzeko gakoa hurrengoa da: eskala errendimendu konstanteekin, merkatu lehiakorrak izanez eta giza-kapitalaren kanpo-eraginen gabezian, langileen produktibitate ezberdintasunak zuzenean langileko errentaren desberdintasunak ekarriko dituzte. Hau erakusteko j herrialdeko f enpresa bakoitzak hurrengo ekoizpen-funtzioa duela suposatuko da:

$$y_{f,j} = K_f^{1-\alpha} \left(A_j\, H_f\right)^{\alpha}$$

non $y_{f,j}$ j herrialdeko f enpresaren ekoizpena, A_j herrialdeko enpresa guztiek duten teknologia maila, K_f eta H_f f enpresak dituen kapital fisiko eta giza-kapital mailak diren hurrenez hurren. Suposatuko da j herrialdeko f enpresa guztiek kapitalaren R_j kostu berdinari egiten diotela aurre. Merkatu lehiakorren balizkopean kapitalaren kostua kapitalaren produktu marjinalaren (KPM) berdina izango da, enpresen mozkinen maximizazio problematik eratortzen denez:[18]

$$R_j = (1-\alpha)\left(\frac{K_f}{A_j\, H_f}\right)^{-\alpha} \qquad (27)$$

Merkatuak lehiakorrak direnez eta enpresa guztiek baldintza berberetan jarduten dutenez, kapital fisiko/giza-kapital proportzioa $\left(\frac{K_f}{H_f}\right)$ berdina izan behar da orekan dauden enpresa guztientzat. Ondorioz, langile guztiek, haien hezkuntza maila edozein dela ere, kapital fisiko/giza-kapital

[18] $KPM = \frac{\partial y_{f,j}}{\partial K} = (1-\alpha)\left(\frac{K_f}{A_j\, H_f}\right)^{-\alpha} = R_j$. (27) ekuaziotik orekako kapital fisiko/giza-kapital proportzioa lortu daiteke: $\left(\frac{K_j}{H_j}\right)^{-\alpha} = \frac{R_j}{(1-\alpha)A_j^{\alpha}} \rightarrow \frac{K_j}{H_j} = \left(\frac{1-\alpha}{R_j}\right)^{\frac{1}{\alpha}} A_j$.

proportzio horretan lan egin beharko dute. Merkatu lehiakorren beste ondorio bat giza-kapitalaren produktu marjinala giza-kapital unitateko soldataren balio berdina izango duela da, hau da:[19]

$$w_j = \frac{\partial F(K,H)}{\partial H} = \alpha\,(1-\alpha)^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}} A_j\, R_j^{\frac{-(1-\alpha)}{\alpha}}$$

non w_j j herrialdeko giza-kapitalaren unitateko soldata den. Beraz, h_i giza-kapital unitate dituen i langilearen lan errenta hurrengoa izango da $h_i\, w_j$. Eskala errendimendu konstanteen testuinguruan beraz, langile baten giza-kapitala bikoiztekotan bere soldata era bikoiztuko litzateke.

Hurrengo pausoa j herrialdearentzako ekoizpen-funtzio agregatua zehaztea izango da. Horretarako (27) ekuaziotik K, kapital fisikoaren aldagaia bakanduko da eta ekoizpen-agregatuaren ekuazioan barneratuko da:[20]

$$Y_j = (1-\alpha)^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}} R_j^{-\frac{(1-\alpha)}{\alpha}} A_j H_j$$

non H_j j herrialdearen giza-kapital totala den. Ekuazio honek, gainontzeko aldagaiak (A_j eta R_j) konstante mantenduz, giza-kapitalaren aldaketa batek errenta totalean proportzio berdineko aldaketa eragingo duela adierazten du. Hau da, eskala errendimendu konstanteen eta merkatu lehiakorren testuinguruan herrialde osoaren giza-kapitalaren bikoizte batek errenta osoaren bikoiztea ekarriko du.

Erlazio honek, Mincer-en ereduan aipatutako hezkuntza urte gehigarri batek produktibitatean eta beraz soldatan duen eraginaren estimazioak $(\%\,6-\%\,10)$ ezagututa herrialdeen arteko giza-kapital agregatu maila ezberdinek haien artean zer errenta desberdintasun eragin ditzaketen

---

[19] Orekako kapital fisiko/giza-kapital proportzioa kontuan hartuz: $\frac{K_j}{H_j} = \left(\frac{1-\alpha}{R_j}\right)^{\frac{1}{\alpha}} A_j$. Orain, giza-kapitalaren produktu marjinala $\left(\frac{\partial y_{f,j}}{\partial H}\right)$ kalkulatuz eta w_j j herrialdeko giza-kapitalaren unitateko soldataren berdina dela kontuan hartuz $w_j = \alpha \left(\frac{K_f}{H_f}\right)^{1-\alpha} A_j$. Azkenik orekako kapital fisiko/giza-kapital proportzioa soldataren espresioan ordezkatuz: $w_j = \alpha\,(1-\alpha)^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}} A_j\, R_j^{\frac{-(1-\alpha)}{\alpha}}$.

[20] (27) ekuaziotik K_j bakanduz: $K_j = (1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} R_j^{-\frac{1}{\alpha}} A_j\, H_j$. Orain K_j ekoizpen-funtzioan ordeztuz: $Y_j = (1-\alpha)^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}} R_j^{-\frac{(1-\alpha)}{\alpha}} \left(A_j\, H_j\right)^{(1-\alpha)} \left(A_j\, H_j\right)^{\alpha} = (1-\alpha)^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}} R_j^{\frac{-(1-\alpha)}{\alpha}} \left(A_j\, H_j\right)$.

aurreikustea ahalbidetzen du. Mankiw, Romer eta Weil-ek estimazioetarako erabili zuten lagineko herrialdeen artean existitzen den batezbesteko hezkuntza urteen alde handiena hamabi urtekoa baino apur bat txikiagoa da (% 0.4 eta % 12 artean egonik $s_{h,j}$). Beraz erreferentzia hori erabiliko da giza-kapital gehien eta gutxien duten herrialdeen artean espero den errenta desberdintasuna kalkulatzeko. Beraz, batezbestekoz 12 hezkuntza-urte gehiago dituen herrialde batek beste herrialdeak baino $e^{(0,06x12)} \approx 2{,}05$ eta $e^{(0,10x12)} \approx 3{,}3$ aldiz giza-kapital gehiago izatea espero da. Lehen aipatu denez, eskala errendimendu konstanteekin, merkatu lehiakorren presentzian eta giza-kapitalaren kanpo-eraginen gabeziaren testuinguruan giza-kapitala handitzen den proportzio berean handituko da ekoizpen-agregatua; hau da, errenta. Beraz, gainontzeko aldagaiak konstante mantenduz, Mankiw, Romer eta Weil-ek erabilitako laginean, giza-kapital gehien duen herrialdeak giza-kapital gutxien duen herrialdea baino $[2-3]$ aldiz errenta handiagoa izatea espero da, Mankiw Romer eta Weil-ek estimatutako 9,5 bider handiagoa izan beharko zelaren zifratik urrun. Analisi honen ondorioa Mankiw, Romer eta Weil-ek giza-kapitalak errentan duen garrantzia gainestimatu zutela da. Haiek aurreikusitako balioak ez datoz bat existitzen den ebidentziarekin. Giza-kapitalaren garrantziaren gainestimazio hau, lehen aipatu bezala, (24) estimazio ekuazioko errorea (ε_j) gainontzeko aldagai azaltzaileekin korrelatuta egoteagatik gerta daiteke.

5. ONDORIOAK

Lan honetan epe luzean hazkunde ekonomikoaren atzean egon daitezkeen faktoreak aztertzen dira. Horretarako, Solow-en hazkunde ekonomikoaren eredua baliatu da. Eredu honetan ekonomia itxia da, ekoizpen-funtzioak eskala errendimendu konstanteak ditu eta ez dago sektore publiko zein kanpo sektorerik. Aurrekoaz gain, ereduak estandar neoklasikoak betetzen dituen ekoizpen-funtzioa kontsideratzen du. Lan honen kasuan Cobb-Douglas ekoizpen-funtzioa erabili da ereduaren analisirako. Behin eredua eraikita, hazkunde ekonomikoa soilik bi bidetatik etor daitekeela ikusi da: kapital-metaketa eta aurrerapen teknologikoa. Kapital-metaketaren kasua aztertzerakoan, bakarrik epe laburreko hazkunde ekonomikoa azaltzeko gai dela ondorioztatu da. Beraz, aurrerapen teknologikoak hazkunde ekonomikoan izan dezakeen eragina aztertu da gerora. Orain bai, aurrerapen teknologikoak epe luzeko hazkunde ekonomikoa eragiten duela ikusi da. Are gehiago, ekonomia epe luzean aurrerapen teknologikoaren tasa berdinean hazten dela ondorioztatu da. Puntu honetan, ereduan giza-kapitala barneratu da hazkunde ekonomikoaren irudi fidelago eta osatuago bat lortzeko itxaropenarekin. Aldagai berri honen barnerapenak ez ditu ereduaren oinarrizko ondorioak kolokan jarri eta hazkunde ekonomikoa hobeto ulertzen lagundu du. Alde batetik, giza-kapitalaren barneratzeak ez ditu Solow-en ereduko epe luzeko aurreikuspenak aldatu; hau da, ekonomia oro epe luzean egoera geldikorrera joko du eta egoera geldikor hau existitzen da, bakarra da eta globalki egonkorra da. Bestalde, bai kapital fisikora zein giza-kapitalera bideratutako aurrezki-tasen hazkunde batek epe laburrean oinarrizko ereduan aurreikusitakoa baino biztanleko BPG-aren hazkunde handiagoa dakarrela ikusi da, haien elkarreraginarengatik. Behin eredua guztiz osatua, datuetara nola moldatzen den aztertu da, Mankiw, Romer eta Weil ekonomilariek 1992. urtean giza-kapitala barneratzen duen Solow-en ereduaren inguruan egin zuten analisi ekonometrikoa baliatuz. Azkenik, analisi honen estimazioek izan litzaketen arazoak eta emaitzen esanguratasuna komentatu dira. Guzti honekin eta laburbilduz, atera daitezkeen ondorio nagusiak hurrengoak dira:

- Giza-kapitala Solow-en ereduan barneratzeak ez ditu oinarrizko ereduaren ondorio nagusiak kolokan jartzen, bi ereduek hurrengo ezaugarriak partekatzen baitituzte:
    - Ekonomia orok epe luzean bere egoera geldikorrera joko du, eta behin egoera honetara iritsita, aldaketarik izan ezean, bere horretan mantenduko da denboran zehar.
    - Egoera geldikorrak hurrengo ezaugarriak ditu: existitzen da, bakarra da eta globalki egonkorra da.
    - Epe luzean biztanleko BPG aurrerapen-teknologikoaren tasa berean haziko da.

- Hala ere, giza-kapitala Solow-en ereduan barneratzeak hainbat aldaketa inplikatzen ditu eta lanean ikusi denez, honek eredua datuetara askoz hobeto moldatzea ekarri du:
    - Kapital fisikora bideratutako aurrezki-tasaren hazkunde batek oinarrizko ereduan aurreikusitako biztanleko BPG-aren epe laburreko hazkunde-tasa baino handiagoa dakar. Hau, giza-kapitalera bideratutako aurrezki-tasarekin duen, eta oinarrizko ereduan kontuan hartu ez den, elkarreraginagatik suertatzen da.
    - Mankiw, Romer eta Weil-en estimazioetan ikusi denez giza-kapitala kontuan hartzeak ereduaren doikuntza datuetara asko hobetzen du. Oinarrizko ereduan $R^2 =$

0,59 den bitartean, giza-kapitala barneratzean $R^2 = 0{,}78$ izatera pasatzen da. Honek, giza-kapitalean eta kapital fisikoan egindako inbertsioak herrialdeen arteko langileko errenta mailaren ezberdintasunen % 78 azaltzen duela esan nahi du.

- Gainera Mankiw, Romer eta Weil-ek Solow-en oinarrizko ereduaren estimazioek kapital fisikoaren eragina errentan gainestimatzen zutela ikusi da. Giza-kapitala barneratzean aldiz, kapital fisikoaren eragin estimatu hau datuek adierazten duten baliora asko hurbiltzen dela ikusi da.

Beraz, giza-kapitala barneratzen duen Solow-en ereduak hazkunde ekonomikoa azaltzeko oinarrizko ereduak baino gaitasun handiagoa duela ikusi da. Hala ere, Mankiw, Romer eta Weil-en estimazioei hainbat kritika egin zaizkie, haien esanguratasuna zalantzan jarriz. Lanean kritika hauetako bi aipatu dira. Bata, Mankiw, Romer eta Weil-ek onartutako teknologia amankomunen balizkoa oso errealista ez izatea da. Bestea, giza-kapitalak errentan duen eragina gainestimatzen dutela da.

Orokorrean, lan honetan egindako analisitik Solow-en ereduan giza-kapitala barneratzeak hazkunde ekonomikoaren ikuspegi fidelago eta osatuago bat izatea ahalbidetzen duela ondorioztatzen da.

A. ERANSKINA

h* eta k*-ren kalkulua:

(15) eta (16) ekuazioek adierazten dutenez, egoera geldikorrean: $s_k\, f(k,h) = (\delta_k + n + g)k$ eta $s_h\, f(k,h) = (\delta_h + n + g)h$. Ekuazio hauetan $y = f(k,h) = k^{\alpha}\, h^{\beta}$ ekoizpen-funtzioa barneratuz: $s_k k^{\alpha}\, h^{\beta} = (\delta_k + n + g)k$ eta $s_h k^{\alpha}\, h^{\beta} = (\delta_h + n + g)h$. Bi ekuazio hauek sinplifikatzeko eta k eta h-ren artean erlazio zuzen bat lortzeko lehenengo ekuazioa bigarrenarekin zatituko da, hurrengoa adierazpena lortuz: $\frac{s_k}{s_h} = \frac{(\delta_k+n+g)k}{(\delta_h+n+g)h}$. Espresio honetatik h bakanduz: $h = k\, \frac{s_h(\delta_k+n+g)}{s_k(\delta_h+n+g)}$. Eta lehenengo ekuazioan h ordeztuz: $s_k\, k^{\alpha}\, \left(k\, \frac{s_h(\delta_k+n+g)}{s_k(\delta_h+n+g)}\right)^{\beta} = (\delta_k + n + g)k$. Sinplifikatuz: $s_k\, k^{\alpha+\beta-1} \frac{s_h^{\beta}(\delta_k+n+g)^{\beta}}{s_k^{\beta}(\delta_h+n+g)^{\beta}} = (\delta_k + n + g)$. Bi aldeak $(\delta_k + n + g)$-kin zatituz: $s_k\, k^{\alpha+\beta-1} \frac{s_h^{\beta}(\delta_k+n+g)^{\beta-1}}{s_k^{\beta}(\delta_h+n+g)^{\beta}} = 1$. k bakanduz eta berretzailea konpartitzen duten parametroak ordenatuz egoera geldikorreko lan efektiboko kapital fisikoaren maila zehazten duen (18) espresioa lortuko da: $k^* = \left(\left(\frac{s_k}{n+g+\delta_k}\right)^{1-\beta} \left(\frac{s_h}{n+g+\delta_h}\right)^{\beta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}$. Beste horrenbeste egoera geldikorreko lan efektiboko giza-kapital mailarako (h).

B. ERANSKINA

Tinkotasuna:

Tinkotasuna konbergentziaren ideia intuitiboa da. Demagun segida bat non bere elementuak gero eta gehiago hurbiltzen diren beste elementu batera. Azken elementu hau limitetzat hartuko da.

Adibidez: $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots\right\}$; $\frac{1}{n}$, $n = 1,2,3,4$ ... Ikus daitekeenez segida honen elementuek zerora hurbiltzen dira n handitzen den heinean, inoiz zero baliora helduko ez diren arren. Beraz, ezarri nahi den tolerantziaren (μ) menpe segida zerora nahiko hurbildu dela kontsideratuko da. Adibidez $\mu = 0.01$, $\mu = 0.0001$ edo $\mu = 0.0000001$. Beraz aldagai aleatorioen segida batek $\{X_n / N \geq 1\}$ X aldagai aleatoriora probabilitatean konbergituko du baldin eta $\lim_{n \to \infty} P\{|X_n - X| \leq \mu\} = 1$, $\forall \mu > 0$. Honek esan nahi du n-k infinitura jotzean aldagai aleatorioaren segidak hartzen duen balioa X aldagaiaren balioari ezarritako tolerantzia mailaren barruan kokatzeko probabilitatea 1 dela. Behin konbergentzia probabilitatean zer den azalduta parametro baten estimazioa tinkoa izatea zerk egiten duen zehaztuko da. θ parametroaren estimatzaile bat, $\hat{\theta}_n$, tinkoa izango da baldin eta θ-ra probabilitatean konbergitzen badu; hau da: $\lim_{n \to \infty} P\left\{\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| \leq \mu\right\} = 1, \ \forall \mu > 0$. Estimatzaile baten tinkotasunaren idea nagusia n datu (behaketa) nahikoren estimatzailea parametroaren benetako baliora gero eta gehiago hurbilduko dela da. Tinkotasunak laginaren tamaina handitzean estimazioaren bariantza txikitzen dela eta ondorioz, estimatzailea zehatzagoa bilakatzen dela suposatzen du.

6. BIBLIOGRAFIA

- Acemoglu, D. (2009). *Introduction to Modern Economic Growth*. Princeton University Press.

- Arndt, H.W. (1997). *Economic Development: The History of an Idea.* Chicago IL: University of Chicago Press.

- Barro, R. J., & Sala-i-Martin, X. (2004). *Economic Growth* (2. ed.). MIT Press.

- Mankiw, N. G., Romer, D., & Weil, D. N. (1992). A Contribution to the Empirics of Economic Growth. *Quarterly Journal of Economics, 107*(2), 407-437.

- Solow, R. M. (1956). A Contribution to the Theory of Economic Growth. *Quarterly Journal of Economics, 70*(1), 65-94.

- Solow, R. M. (1957). Technical Change and the Aggregate Production Function. *Review of Economics and Statistics, 39*(3), 312-320.