Sarriko-On

Valor de la Información. Cantidad Óptima de Información. Valor de la Flexibilidad

ISBN: 978-84-694-0664-9

José María Usategui Díaz de Otalora

01-11

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Ekonomia eta Enpresal-Zientzien Fakultatea

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Valor de la Información. Cantidad Óptima de Información. Valor de la Flexibilidad.*

José María Usategui

Departamento de Fundamentos del Análisis Económico II

Universidad del País Vasco - Euskal Herriko Unibertsitatea

*Agradezco la financiación de los Ministerios de Educación y Ciencia y de Ciencia e Innovación (ECO 2009-09120 y SEJ20006-06309) y del Departamento de Educación, Universidades e Investigación del Gobierno Vasco (IT-313-07).

Índice

1 Introducción

En este trabajo se analizan las decisiones de un agente económico cualquiera, en un contexto incierto, cuando puede obtener información que resuelve total o parcialmente la incertidumbre. La presentación se centra fundamentalmente en el caso en el que el decisor es neutral ante el riesgo, aunque las situaciones en las que el decisor es averso al riesgo se consideran también en la sección 6. En los problemas estudiados se compara la decisión del agente económico cuando no recibe información con su decisión cuando recibe información, o se consideran los efectos de la expectativa de recibir información en el futuro. La recepción de información permite al agente adaptar su decisión al mensaje proporcionado por esa información y aumentar, como consecuencia de esa adaptación, sus ganancias esperadas (o su utilidad esperada).

El valor de un servicio de información es la cantidad de dinero que está dispuesto a pagar, como máximo, el decisor por utilizar ese servicio de información. Cuando el decisor es neutral ante el riesgo el valor de la información es la diferencia entre las ganancias esperadas del agente económico con información y sus ganancias esperadas sin información. El valor de la información se refiere al valor de una fuente o servicio de información. Es un valor ex-ante, anterior al conocimiento de esa información.

Se denomina información completa a la información que resuelve totalmente la incertidumbre del decisor y permite al decisor saber con seguridad cuál es la situación o el estado en el que se van a producir los resultados de su decisión. Una información que resuelve parcialmente la incertidumbre del decisor es una información incompleta. A menudo hay distintos servicios de información que proporcionan diferentes informaciones incompletas.

La información completa siempre es más valiosa para el decisor que cualquier servicio de información incompleta. El valor de distintos servicios de información incompleta será, en general, diferente. Como se mostrará en la sección 4.2, algunos servicios de información incompleta se pueden comparar por su grado de resolución de la incertidumbre y, si un servicio de información resuelve más incertidumbre que otro, podemos asegurar que el primero es más valioso que el segundo.

Un mensaje proporcionado por un servicio de información induce, por parte del decisor, una revisión de las probabilidades asignadas a los distintos estados o situaciones posibles conforme a la Regla o Teorema de Bayes. El valor de la información es positivo si esa revisión de probabilidades hace que el agente económico modifique su decisión con respecto a la que habría tomado si no hubiera recibido información, al menos para uno de los mensajes que puede proporcionar ese servicio de información. Si la revisión de probabilidades implica que, cualquiera que sea el mensaje recibido, la decisión del agente económico es la misma que habría tomado si no hubiera recibido información, o si no fuera posible reaccionar ante la información recibida (ésta llega demasiado tarde, por ejemplo), el valor de la información sería cero. El valor de la información no puede ser negativo en el contexto considerado aquí (el agente económico siempre tiene la posibilidad de no modificar su decisión cuando recibe la información).

Para que un servicio de información sea valioso para el decisor es preciso que sus mensajes proporcionen información sobre los estados, pero no se requiere ninguna condición sobre el formato de esos mensajes. Además, para que la información sea valiosa es preciso que suministre uno entre varios mensajes alternativos. Si sólo hubiera un mensaje que puede proporcionar la información el decisor no estaría dispuesto a pagar nada por esa información, puesto que ya conoce el mensaje que va a recibir. De hecho, actuará como si ya hubiera recibido ese mensaje porque lo tendrá en cuenta al precisar sus creencias iniciales.

Cuando el decisor puede acceder a varios servicios de información escogerá aquél para el que sea máxima la diferencia entre el valor de la información y el coste para el decisor de conseguir esa información, si esa diferencia es positiva.

La presentación se ha organizado de la siguiente manera: En la sección 2 se estudia el valor de un servicio de información completa, analizando con detalle el problema de elección entre alternativas por parte de un decisor y el problema de inversión en un proyecto nuevo o en un activo arriesgado. En la sección 3 se presenta y discute el proceso de revisión de creencias por parte del decisor cuando recibe información. El valor de la información incompleta se estudia en la sección 4. Para ello se muestra cómo se calcula el valor de un servicio de información incompleta, se analizan, también en este contexto, el problema de elección entre alternativas por parte de un decisor y el problema de inversión en un proyecto nuevo o en un activo arriesgado, se consideran situaciones en las que la incertidumbre tiene varios componentes y se comparan servicios de información que eliminan distintos componentes de esa incertidumbre, y se estudian los valores de informaciones que el decisor recibe simultáneamente y cómo proceder cuando se derivan recomendaciones contradictorias de esos servicios de información.

La sección 5 se centra en la determinación del nivel de información que es óptimo para el decisor cuando éste puede elegir el nivel, calidad, precisión o amplitud de la información a recibir (pero sigue siendo incierto el mensaje que va a recibir) y se analiza el valor de una segunda opinión o información. En la sección 6 se estudia brevemente el valor de la información con aversión al riesgo. La sección 7 analiza el valor de mantener opciones abiertas (el valor de la flexibilidad) en contextos en los que se espera la llegada de información en el futuro y el decisor tiene que escoger entre alternativas que producen beneficios en el presente y en el futuro y que tienen distintos grados de flexibilidad. El trabajo incluye, en la sección 8, catorce Ejercicios que aplican los análisis desarrollados en las secciones anteriores a una gran diversidad de situaciones. Cada Ejercicio se presenta con su solución, a veces en forma abreviada. La presentación se completa con unas Lecturas recomendadas.

2 El valor de la información completa

Un servicio de información que proporciona información completa predice perfectamente lo que va a ocurrir. Si hay n estados o situaciones posibles, la información completa dice cuál de esos n estados va a ocurrir. Ese servicio de información emite, por tanto, un mensaje del grupo de n mensajes constituido por los mensajes asociados a estados. Cada uno de esos mensajes informaría que va a ocurrir con seguridad el estado asociado a ese mensaje. Como el decisor no sabe qué estado va a ocurrir, no sabe tampoco qué mensaje va a recibir. Si cree que hay una probabilidad p_i de que ocurra el estado E_i, creerá también que hay una probabilidad p_i de que el mensaje del servicio de información completa diga que el estado va a ser E_i.

En las dos secciones siguientes se presentan dos problemas de decisión básicos, con incertidumbre y con la posibilidad de obtener información completa. En cada uno de esos contextos se analiza el problema del decisor y se calcula el valor de la información completa.

2.1 Elección entre alternativas con información completa

Un decisor tiene que elegir entre l alternativas X^k, con $k = 1, ..., l$. La situación es incierta ya que puede haber n situaciones o estados E_i posibles. El decisor cree que la probabilidad del estado E_i es $\Pr(E_i) = p_i$. La alternativa X^k proporciona una ganancia x_i^k en el estado E_i (si $x_i^k < 0$, la alternativa X^k ocasiona una pérdida si el estado es E_i). Esas ganancias y pérdidas podrían calcularse en relación a las que se obtendrían con la alternativa correspondiente a la situación preexistente o status quo. Si esta alternativa preexistente fuera también una opción a considerar, proporcionaría una ganancia, en relación a sí misma, igual a cero en cada estado.

Si el decisor no recibe información escogerá la alternativa que maximiza su ganancia esperada, es decir, resolverá $\max_k \left\{ \sum_{i=1}^n \Pr(E_i) x_i^k \right\}$. Cuando recibe información completa resolverá $\max_k \left\{x_i^k\right\}$ si la información indica que el estado va a ser E_i, para $i = 1, ..., n$. Como el decisor cree que la probabilidad de que la información completa indique que el estado va a ser E_i es igual a p_i (para $i = 1, ..., n$), ya que esa es la probabilidad que asigna a priori a ese estado, la ganancia esperada con información completa es $\sum_{i=1}^{n}(\Pr(E_i)\max_k \left\{x_i^k\right\})$. Por tanto, el valor de la información completa es:

$$VI = \sum_{i=1}^{n}(\Pr(E_i)\max_k \left\{x_i^k\right\}) - \max_k \left\{\sum_{i=1}^{n}\Pr(E_i)x_i^k\right\}$$

Considérese, por ejemplo un decisor que tiene que elegir entre las alternativas X^1, X^2 y X^3 en un contexto en el que puede haber dos estados posibles: E_1 y E_2. El decisor cree que la probabilidad del estado E_1 es 0,3 y, por tanto, cree que la probabilidad del estado E_2 es 0,7. Las ganancias de cada alternativa en cada estado son:

ganancias	E_1	E_2
X^1	3	3
X^2	9	0
X^3	2	4

Sin información, el decisor escogerá la alternativa que le proporcione mayor ganancia esperada. El decisor escogerá, en ese caso, la alternativa X^3 ya que:

$$\text{ganancia esperada } (X^1)\text{=3}$$
$$\text{ganancia esperada } (X^2)\text{=0,3(9)+0,7(0)=2,7}$$
$$\text{ganancia esperada } (X^3)\text{=0,3(2)+0,7(4)=3,4}$$

Si, en cambio, el decisor recibe información completa decidiría X^2 si la información le dijera que el estado va a ser E_1 y sólo decidiría X^3 si la información le dijera que el estado va a ser E_2. El decisor no sabe por cuál de los dos estados se va a decantar la información, pero cree que hay una probabilidad 0,3 de que la información diga que el estado va a ser E_1 y cree que hay una probabilidad 0,7 de que la información diga que el estado va a ser E_2. Por tanto, la ganancia esperada del decisor con información completa es:

$$\Pr(E_1)X^2 + \Pr(E_2)X^3\text{=0,3(9)+0,7(4)=5,5}$$

y el valor de la información completa es VI=5,5-3,4=2,1.

2.2 Inversión en un proyecto nuevo o en un activo arriesgado con información completa

Un empresario neutral ante el riesgo tiene que decidir si invierte en un proyecto nuevo (análogamente, un decisor tiene que decidir si invierte en un activo arriesgado). Si realiza la inversión hay una probabilidad p de que obtenga una ganancia igual a x (éxito) y una probabilidad $1-p$ de que obtenga una pérdida igual a z (fracaso), con $x > 0$ y $z > 0$.[1] Si no realiza la inversión sus ganancias son cero. Puede considerarse que, si no realiza la inversión en el proyecto nuevo, invierte en un proyecto alternativo preexistente y que las ganancias y pérdidas de invertir en el nuevo proyecto se calculan en relación a las que se obtendrían invirtiendo en ese proyecto preexistente. Considérese, también, que el coste de la inversión ha sido descontado al calcular los valores de las ganancias o pérdidas en cada situación. Este problema de decisión es un problema de elección entre dos alternativas (invertir en el proyecto nuevo y no invertir en el proyecto nuevo), en una situación en la que sólo hay incertidumbre sobre el resultado de una de las alternativas (invertir en el proyecto nuevo).

En esta situación el empresario realizará la inversión en el proyecto nuevo si $px + (1-p)(-z) > 0 \Leftrightarrow p > \frac{z}{x+z}$ (no realizará la inversión si $p < \frac{z}{x+z}$ y estará indiferente entre realizarla y no realizarla si $p = \frac{z}{x+z}$). Si x aumenta o si z disminuye (o si ocurren ambas cosas), $\frac{z}{x+z}$ disminuye y se amplia el conjunto de valores de p para los que el empresario está dispuesto a realizar la inversión cuando no recibe información (la inversión resulta ahora más atractiva). Si x disminuye o si z aumenta se obtienen los efectos contrarios.

Si el empresario recibiese información completa realizaría la inversión si la información le dijera que la inversión va a ser un éxito, y no realizaría la inversión si la información le dijera que la inversión va a ser un fracaso, ya que la información acierta con lo que va a ocurrir. Como cree que hay una probabilidad p de que la inversión sea un éxito, cree también que hay una probabilidad p de que la información completa diga que la inversión va a ser

[1] Puede considerarse, por ejemplo, que z es la cantidad invertida en el proyecto, que si el proyecto fracasa se pierde esa cantidad invertida, y que si el proyecto tiene éxito se recupera la cantidad invertida y se obtiene, además, una ganancia neta igual x.

un éxito y, por tanto, que hay una probabilidad $1-p$ de que la información completa diga que la inversión va a ser un fracaso. Así, la ganancia esperada con información completa es $px + (1-p)(0) = px$.

El valor de la información completa (o diferencia entre la ganancia esperada con información completa y la ganancia esperada sin información) es:

$$VI = \begin{cases} px & \text{si } p \leq \frac{z}{x+z} \\ \\ (1-p)z & \text{si } p \geq \frac{z}{x+z} \end{cases}$$

VI es nulo cuando $p = 0$ y cuando $p = 1$. En estos casos el empresario está seguro de lo que va a ocurrir, cree que la información completa solamente va a confirmar sus creencias (por supuesto, puede equivocarse) y no está dispuesto a pagar nada por esa información. El valor de la información es máximo cuando $p = \frac{z}{x+z}$, ya que el valor de la información aumenta con p cuando $p < \frac{z}{x+z}$ y disminuye con p cuando $p > \frac{z}{x+z}$ (por tanto, el valor de la información no aumenta siempre con la probabilidad de fracaso). Cuando $p = \frac{z}{x+z}$ el empresario está indiferente entre realizar la inversión y no realizarla, y es entonces cuando la información resulta más útil para elegir entre ambas alternativas. El valor máximo de VI es $VI_{\max} = \frac{xz}{x+z}$. Nótese que $VI_{\max} < x$ y que $VI_{\max} < z$. Obviamente, el decisor no puede estar dispuesto a pagar por la información más que la máxima ganancia (x) que puede obtener. Pero el decisor tampoco está dispuesto a pagar por la información más que la máxima pérdida (z) que puede obtener, ya que si pagara por la información más de z estaría cambiando una pérdida posible igual a z por un pago seguro mayor que z.

VI aumenta con x, cuando $p < \frac{z}{x+z}$. Para estos valores de p, no se realizaría la inversión sin información. Sin embargo, con información completa, cuando el mensaje es que la inversión va a ser un éxito, se obtiene seguro una ganancia igual a x realizando la inversión. Cuando z disminuye, VI disminuye para aquellos valores de p para los que se realizaría la inversión si el empresario no recibiera información. La razón es que la información completa permite ahorrarse las pérdidas z de invertir cuando el mensaje es que la inversión va a ser un fracaso.

Puede expresarse también VI en función de los valores que puede tomar x, o en función de los valores que puede tomar z. Sin información, el empresario realizará la inversión en el proyecto nuevo si $px+(1-p)(-z) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1-p}{p}z$. El valor de la información completa puede expresarse:

$$VI = \begin{cases} px & \text{si } x \leq \frac{1-p}{p}z \text{ (o si } \frac{px}{1-p} \leq z) \\ \\ (1-p)z & \text{si } x > \frac{1-p}{p}z \text{ (o si } z < \frac{px}{1-p}) \end{cases}$$

3 Revisión de creencias cuando se recibe información

El decisor revisa sus creencias sobre las probabilidades de los estados cuando recibe información y utiliza esas creencias revisadas para resolver el problema de decisión al que se enfrenta. Cada mensaje distinto de un servicio de información daría lugar a unas creencias revisadas del decisor que serían diferentes.

Cuando la información es completa, la revisión de creencias es fácil de obtener. En ese caso el número de mensajes es igual al número de estados posibles, ya que cualquier mensaje debe resolver completamente la incertidumbre y, por tanto, debe haber un mensaje distinto para cada estado. Como el mensaje que se reciba dirá con seguridad cuál es el estado que va a ocurrir, si se recibiera el mensaje que pronostica el estado E_i la probabilidad revisada (a posteriori) del estado E_i sería 1 y las probabilidades revisadas de los demás estados serían 0.

Cuando se recibe información incompleta, la revisión de creencias puede obtenerse a veces de forma bastante directa. Considérese, por ejemplo, que hay tres estados posibles, E_1, E_2 y E_3, y que el decisor cree inicialmente que la probabilidad de cada estado es la misma ($\frac{1}{3}$). Si el decisor adquiere un servicio de información que sólo informa si va a ocurrir el estado E_3 o si no va a ocurrir ese estado, la revisión de creencias será de la siguiente forma: Si el mensaje que recibe el decisor es que va a ocurrir E_3, el decisor asignará una probabilidad revisada igual a 1 a ese estado y una probabilidad revisada igual a cero a cada uno de los demás estados. Si el mensaje que recibe el decisor es que no va a ocurrir E_3, el decisor sabe que ocurrirá E_1 o E_2, pero no sabe cuál de esos dos estados ocurrirá. Como inicialmente creía que E_1 y E_2 eran igual de probables, seguirá creyendo que son igual de probables (el mensaje que dice que no va a ocurrir E_3 no da al decisor ningún argumento para dejar de creer que E_1 y E_2 son igual de probables). Por tanto, si recibe el mensaje que dice que no va a ocurrir E_3, la probabilidad revisada para E_3 será 0 y las probabilidades revisadas para los estados E_1 y E_2 serán $0,5$ para cada uno (la suma de las probabilidades tiene que ser 1).

En muchos servicios de información incompleta la revisión de creencias no puede calcularse de forma tan directa. Hay que aplicar el método general de revisión de creencias que utiliza la Regla (o Teorema) de Bayes para revisar las probabilidades asignadas a los estados. El método general de revisión de creencias es aplicable a cualquier servicio de información y procede a partir de las creencias iniciales del decisor (de las probabilidades que asigna inicialmente a los estados). Para calcular la revisión de creencias causada por un servicio de información hace falta considerar, además, la probabilidad que el decisor cree que hay de recibir cada mensaje de ese servicio de información en cada estado posible. Esa probabilidad puede estar basada en la experiencia o en conocimientos previos del decisor.

Este suele ser el contexto al que se enfrenta a menudo un decisor. El decisor no sabe qué estado va a ocurrir, pero tiene unas creencias iniciales representadas por las probabilidades que asigna a cada estado posible. Además, el decisor puede conseguir información, pero esa información es pocas veces completa. Evidentemente el decisor no sabe qué le va a decir la información, pero tiene también unas creencias sobre la probabilidad de que la información consista en el mensaje M_j cuando el estado sea E_i (y esto para cualesquier par i y j). Así, habrá informaciones (mensajes) que considerará poco probables en ciertos estados, pero mucho más probables en otros estados.

Sea $\Pr(E_i)$ la probabilidad que asigna inicialmente el decisor al estado E_i y representemos mediante $\Pr(M_j/E_i)$ la probabilidad de recibir el mensaje M_j cuando el estado es E_i.[2] Para obtener las probabilidades revisadas sobre los estados se calcula en primer lugar la probabilidad de recibir cada mensaje:

$$\Pr(M_j) = \sum_{i=1}^{n} (\Pr(M_j/E_i)\Pr(E_i)),$$

donde n es el número de estados o situaciones posibles. Una vez obtenidas las probabilidades de los mensajes se calculan las probabilidades revisadas de los estados (en función del mensaje recibido) aplicando la Regla o Teorema de Bayes:[3]

$$\Pr(E_i/M_j) = \frac{\Pr(M_j/E_i)\Pr(E_i)}{\Pr(M_j)}$$

La Regla de Bayes implica consistencia en la revisión de las probabilidades de los estados.

Cuando la información es completa la revisión de creencias aplica, de hecho, la Regla de Bayes. En ese caso $\Pr(M_i/E_i) = 1$ para todo i y $\Pr(M_j/E_i) = 0$ para todo $j \neq i$. Para $i = 1, ..., n$, el decisor cree que el servicio de información completa informará que el estado es el E_i con una probabilidad igual a la probabilidad a priori que el propio decisor asignaba a ese estado. Así, $\Pr(M_i)) = \Pr(E_i))$ para todo i, $\Pr(E_i/M_i) = 1$ para todo i y $\Pr(E_j/M_i) = 0$ para todo $j \neq i$.

En un servicio de información incompleta el número de mensajes puede coincidir también con el número de estados. Pero en muchos servicios de

[2] Las probabilidades de los mensajes dado cada estado podrían ser probabilidades en términos esperados. Por ejemplo, $\Pr(M_1/E_2)$ podría depender de alguna variable aleatoria que no esté incorporada en la definición de los estados (la climatología, algún aspecto de la coyuntura económica, la regulación del mercado correspondiente, etc.). Así, $\Pr(M_1/E_2) = 0,3$ puede obtenerse en una situación en la que hay un 50% de posibilidades de que esa probabilidad sea 0,5 y un 50% de posibilidades de que sea 0,1. En todo caso debe ser $\sum_{j=1}^{m} \Pr(M_j/E_i) = 1$ para cualquier estado E_i.

[3] Nótese que, por la Regla de Bayes, es

$$\Pr(M_1).\Pr(E_1/M_1) + \Pr(M_2).\Pr(E_1/M_2) + \Pr(M_3).\Pr(E_1/M_3) =$$

$$= \Pr(E_1).(\Pr(M_1/E_1) + \Pr(M_2/E_1) + \Pr(M_3/E_1)) = \Pr(E_1).1 = \Pr(E_1)$$

información incompleta el número de mensajes es menor que el número de estados. Considérese el servicio de información incompleta analizado anteriormente en este apartado: hay tres estados posibles, E_1, E_2 y E_3, el decisor cree inicialmente que la probabilidad de cada estado es la misma ($\Pr(E_i) = \frac{1}{3}$ para todo i) y el servicio de información sólo puede comunicar si va a ocurrir el estado E_3 o si no va a ocurrir ese estado. En este caso sería:

$\Pr(M/E)$	E_1	E_2	E_3
$M_1 : E_3$ *ocurre*	0	0	1
$M_2 : E_3$ *no ocurre*	1	1	0

$$\Pr(M_1) = \sum_{i=1}^{n}(\Pr(M_1/E_i)\Pr(E_i)) = \frac{1}{3},$$

$$\Pr(M_2) = \sum_{i=1}^{n}(\Pr(M_2/E_i)\Pr(E_i)) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

y

$\Pr(E/M)$	M_1	M_2
E_1	0	$\frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$
E_2	0	$\frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$
E_3	$\frac{1/3}{1/3} = 1$	0

El decisor debe tratar cualquier información incompleta que reciba como un mensaje a tener en cuenta para revisar sus creencias sobre las probabilidades de los estados. Considérese una empresa que contrata a unos expertos para que le informen sobre la conveniencia de comercializar un producto nuevo que acaba de desarrollar. Los mensajes de los expertos pueden ser de distintos tipos. Considérense los siguientes tipos de mensaje:

i) “Las ventas en el mercado están aumentando un 15% en relación al año pasado”. En este caso el experto aporta un dato.

ii) “Estimo que hay un 60% de posibilidades de que el producto tenga éxito si se comercializa”. En este caso el experto nos comunica su estimación sobre un resultado.

iii) “Mi recomendación es comercializar el producto”. En este caso el experto aporta su opinión sobre la alternativa con mayor ganancia (o con mayor utilidad) esperada.

Estos tres tipos de mensajes deben ser tratados de la misma manera por el decisor. El decisor tiene que combinar sus probabilidades (o creencias) a priori con las probabilidades que cree que hay de recibir cada mensaje en cada estado para obtener el valor de la información. Sin embargo, la matriz de probabilidades de cada mensaje en cada estado depende no sólo de la credibilidad que otorgue el decisor al experto, sino también del tipo de mensajes que elabore el experto (datos, estimaciones sobre resultados, recomendación sobre la alternativa a elegir, etc.). En cualquier caso, el servicio de información será valioso para el decisor siempre que los mensajes, cualquiera que sea su formato, proporcionen información sobre los estados.

4 El valor de la información incompleta

En esta parte del trabajo se analizan situaciones en las que el decisor puede acceder a un servicio de información incompleta y se calcula el valor de la información incompleta en esas situaciones. La información puede ser incompleta de diversas maneras y, por tanto, podría haber distintos servicios de información que proporcionen diferentes informaciones incompletas. Los valores de distintos servicios de información incompleta serán, en general, diferentes. Cuando el decisor neutral ante el riesgo puede optar entre varios servicios de información incompleta escogerá aquél que aumenta más su ganancia esperada, es decir, el servicio de información incompleta para el que es mayor la diferencia entre valor de la información y coste de obtener esa información.

El valor de un servicio de información incompleta es igual a la diferencia entre la ganancia esperada con ese servicio de información incompleta y la ganancia esperada sin información. La ganancia esperada con un servicio de información incompleta es igual a la suma de los productos de la probabilidad de recibir cada mensaje por la ganancia esperada que se obtiene con la alternativa que proporciona la mayor ganancia esperada si se recibe ese mensaje (y se revisan en consecuencia las probabilidades de los estados).

En las secciones siguientes se plantean varios problemas básicos que son suficientemente amplios como para incluir muchas situaciones reales de elección entre alternativas con incertidumbre y con la posibilidad de obtener información incompleta. En cada uno de esos contextos se analiza el problema del decisor y se calculan los valores de los servicios de informaciones incompleta existentes.

4.1 Elección entre alternativas con información incompleta

En esta sección el contexto de partida es análogo al de la sección 2.1. Un decisor tiene que elegir entre l alternativas X^k, con $k = 1, ..., l$. La situación es incierta ya que puede haber n situaciones o estados E_i posibles, $i = 1, ..., n$. El decisor cree que la probabilidad del estado E_i es $\Pr(E_i) = p_i$. La alternativa X^k proporciona una ganancia x_i^k en el estado E_i (si $x_i^k < 0$, la alternativa X^k ocasiona una pérdida si el estado es E_i). Esas ganancias y pérdidas podrían calcularse en relación a las que se obtendrían con una alternativa que representaría la situación preexistente o status quo. Si esta alternativa preexistente fuera también una opción a considerar, proporcionaría una ganancia, en relación a sí misma, igual a cero en cada estado.

Si el decisor no recibe información escogerá la alternativa que maximiza su ganancia esperada, es decir, resolverá $\max_k \left\{\sum_{i=1}^n \Pr(E_i)x_i^k\right\}$. Si recibe información incompleta esa información consiste en m mensajes M_j, $j = 1, ..., m$. Las creencias del decisor se concretan en las probabilidades $\Pr(E_i)$ y $\Pr(M_j/E_i)$ para $i = 1, ..., n$ y $j = 1, ..., m$.

La ganancia esperada con la alternativa X^k cuando se recibe el mensaje M_j es $\sum_{i=1}^n \Pr(E_i/M_j)x_i^k$. Por tanto, la alternativa que escogería el decisor si recibiera el mensaje M_j sería X^k tal que k sea la solución de $\max_k \left\{\sum_{i=1}^n \Pr(E_i/M_j)x_i^k\right\}$. La ganancia esperada con ese servicio de información incompleta puede expresarse, teniendo en cuenta la Regla o

Teorema de Bayes:

$$\sum_{j=1}^{m} \Pr(M_j) \max_k \left\{ \sum_{i=1}^{n} \Pr(E_i/M_j) x_i^k \right\} = \sum_{j=1}^{m} \max_k \left\{ \sum_{i=1}^{n} \Pr(E_i/M_j) \Pr(M_j) x_i^k \right\}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \max_k \left\{ \sum_{i=1}^{n} \Pr(M_j/E_i) \Pr(E_i) x_i^k \right\}$$

El valor del servicio de información incompleta es, por tanto:

$$VI = \sum_{j=1}^{m} \max_k \left\{ \sum_{i=1}^{n} \Pr(M_j/E_i) \Pr(E_i) x_i^k \right\} - \max_k \left\{ \sum_{i=1}^{n} \Pr(E_i) x_i^k \right\}$$

En consecuencia, no hace falta calcular las probabilidades de los mensajes ni las probabilidades revisadas o a posteriori de los estados para calcular el valor de un servicio de información incompleta.[4]

Nótese que la alternativa escogida si se recibiera el mensaje M_j sería la alternativa X^k, tal que k es la solución de $\max_k \left\{ \sum_{i=1}^{n} \Pr(M_j/E_i) \Pr(E_i) x_i^k \right\}$, ya que:

$$\sum_{i=1}^{n} \Pr(E_i/M_j) x_i^k = \frac{1}{\Pr(M_j)} \sum_{i=1}^{n} \Pr(M_j/E_i) \Pr(E_i) x_i^k$$

Si la alternativa escogida es independiente del mensaje recibido (se escoge la misma alternativa con cualquier mensaje), esa alternativa será también la que se escogería sin información, ya que para cualquier alternativa X:

$$\sum_{i=1}^{n} \Pr(E_i) x_i^k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\Pr(E_i/M_j) \Pr(M_j)) x_i^k$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \Pr(M_j) \sum_{i=1}^{n} \Pr(E_i/M_j) x_i^k,$$

Por tanto, en ese caso $\max_k \left\{ \sum_{i=1}^{n} \Pr(E_i/M_j) x_i^k \right\} = \max_k \left\{ \sum_{i=1}^{n} \Pr(E_i) x_i^k \right\}$ para todo M_j y el valor de la información incompleta sería nulo.

El valor de la información incompleta también es nulo cuando la probabilidad de cada mensaje es la misma en todos los estados (aunque

[4] Sin embargo, como veremos en las secciones siguientes, a veces será útil obtener estas probabilidades para calcular el valor de la información.

las probabilidades de mensajes diferentes sean distintas). Nótese que si $\Pr(M_j/E_i)$ tiene el mismo valor para cualquier i será:

$$\sum_{j=1}^{m} \max_k \left\{ \sum_{i=1}^{n} \Pr(M_j/E_i) \Pr(E_i) x_i^k \right\} = \sum_{j=1}^{m} \Pr(M_j/E_i) \max_k \left\{ \sum_{i=1}^{n} \Pr(E_i) x_i^k \right\}$$

$$= \max_k \left\{ \sum_{i=1}^{n} \Pr(E_i) x_i^k \right\} (\sum_{j=1}^{m} \Pr(M_j/E_i)) = \max_k \left\{ \sum_{i=1}^{n} \Pr(E_i) x_i^k \right\}$$

y, por tanto, el valor de esa información incompleta sería nulo.

4.2 Informaciones incompletas comparables

Los cálculos que se han presentado en la sección 4.1 permiten saber cuál es el servicio de información incompleta más valioso entre varios servicios de información incompleta alternativos y averiguar cuánto está dispuesto a pagar el decisor por cada servicio de información incompleta. Pero los valores de algunos servicios de información incompleta se pueden comparar por su grado de resolución de la incertidumbre, sin necesidad de calcular explícitamente esos valores. Considérese, por ejemplo, que la incertidumbre del decisor se refiere a cuál de dos estados E_1 o E_2 va a ocurrir y que hay dos posibles servicios de información incompleta, el M y el N. El servicio M proporciona el mensaje M_1 o el mensaje M_2 y el servicio N proporciona el mensaje N_1 o el mensaje N_2. Supóngase que las probabilidades a posteriori (después de recibir un mensaje) del estado E_1 cumplen $\Pr(E_1/M_2) < \Pr(E_1/M_1)$ y $\Pr(E_1/N_2) < \Pr(E_1/N_1)$. En este caso el servicio M de información incompleta es más informativo que el servicio N si los mensajes de M permiten al decisor discriminar mejor entre los estados que los mensajes de N, es decir, si:

$$\Pr(E_1/M_2) < \Pr(E_1/N_2) < \Pr(E_1/N_1) < \Pr(E_1/M_1)$$

(el servicio M sería también más informativo que el servicio N si la desigualdad que está más a la derecha, o la que está más a la izquierda, se sustituye por una igualdad).[5] Si el servicio M es más informativo que el

[5] Nótese que

$$\Pr(E_1/M_2) < \Pr(E_1/N_2) < \Pr(E_1/N_1) < \Pr(E_1/M_1) \Leftrightarrow$$

servicio N, el valor de la información proporcionada por M es mayor que el valor de la información proporcionada por N. Por ejemplo, si un servicio de información incompleta M es una expansión que conserva la media (*mean-preserving spread* en el espacio de probabilidades a posteriori de los estados) de un servicio de información incompleta N, el servicio M es más informativo que el servicio N.[6]

4.3 Inversión en un proyecto nuevo o en un activo arriesgado con información incompleta

Un empresario neutral ante el riesgo tiene que decidir si invierte en un proyecto nuevo. Si realiza la inversión hay una probabilidad p de que obtenga una ganancia igual a x (éxito: estado E) y una probabilidad $1-p$ de que obtenga una pérdida igual a z (fracaso: estado F), con $x > 0$ y $z > 0$. Si no realiza la inversión sus beneficios son cero. Puede considerarse que, si no realiza la inversión en el proyecto considerado aquí, invierte en un proyecto alternativo preexistente y que las ganancias y pérdidas de invertir en el proyecto nuevo se miden en relación a las que se obtendrían invirtiendo en ese proyecto preexistente. Este problema de decisión es un problema de elección entre dos alternativas (invertir en el proyecto nuevo y no invertir en el proyecto nuevo), en una situación en la que sólo hay incertidumbre sobre el resultado de una de las alternativas (invertir en el proyecto nuevo).

En esta situación, si no recibe información, el empresario realizará la inversión si $px-(1-p)z > 0 \Leftrightarrow p > \frac{z}{x+z}$ (no realizará la inversión si $p < \frac{z}{x+z}$ y estará indiferente entre realizarla y no realizarla si $p = \frac{z}{x+z}$). Si x aumenta o si z disminuye (o si ocurren ambas cosas), $\frac{z}{x+z}$ disminuye y se amplia el conjunto de valores de p para los que el empresario está dispuesto a realizar la inversión cuando no recibe información (la inversión resulta ahora más atractiva). Si x disminuye o si z aumenta se obtienen los efectos contrarios.

$$\Leftrightarrow \Pr(E_2/M_1) < \Pr(E_2/N_1) < \Pr(E_2/N_2) < \Pr(E_2/M_2)$$

y que, por tanto, la comparación entre los servicios de información M y N sería análoga considerando las probabilidades a posteriori del estado E_2.

[6] En este caso N es una contracción de M que conserva la media.

Suponga que el empresario puede recibir como información los mensajes M_1 y M_2, y cree que, si la inversión fuera un éxito en caso de realizarse (estado E_1), habría una probabilidad q de recibir el mensaje M_1 y que, si la inversión fuera un fracaso en caso de realizarse (estado E_2), habría una probabilidad r de recibir el mensaje M_2. Se considera, sin pérdida de generalidad, que $q \geq 1 - r$ (se denomina M_1 al mensaje que es más probable cuando el estado es E_1 que cuando el estado es E_2; si cada mensaje fuera igual de probable en cada estado, se denomina mensaje M_1 a cualquiera de los dos mensajes). Se desea determinar cuál es el valor de este servicio de información incompleta.

Con ese servicio de información incompleta las probabilidades de cada mensaje dado cada estado ($\Pr(M_j/E_i)$) son, por tanto:

$\Pr(M_j/E_i)$	$\acute{e}xito : E_1$	$fracaso : E_2$
M_1	q	$1 - r$
M_2	$1 - q$	r

La ganancia esperada con este servicio de información incompleta es (véase la sección 4.1):

$$\max\{\Pr(M_1/E_1)\Pr(E_1)x - \Pr(M_1/E_2)\Pr(E_2)z, 0\}$$

$$+ \max\{\Pr(M_2/E_1)\Pr(E_1)x - \Pr(M_2/E_2)\Pr(E_2)z, 0\}$$

$$= \max\{qpx - (1-r)(1-p)z, 0\} + \max\{(1-q)px - r(1-p)z, 0\}$$

Nótese que $qpx - (1-r)(1-p)z > 0 \Leftrightarrow p > \frac{(1-r)z}{qx+(1-r)z}$ y que $(1-q)px - r(1-p)z > 0 \Leftrightarrow p > \frac{rz}{(1-q)x+rz}$. Así, cuando recibe el mensaje M_1 el empresario invertirá si y sólo si $p > \frac{(1-r)z}{qx+(1-r)z}$ y cuando recibe el mensaje M_2 invertirá si y sólo si $p > \frac{rz}{(1-q)x+rz}$.[7]

El valor de la información depende de los valores de los parámetros. Si $q + r = 1$ ($\Leftrightarrow q = 1 - r$), el valor de la información es nulo. La razón es que entonces $qpx - (1-r)(1-p)z = q(px - (1-p)z)$, $(1-q)px - r(1-p)z = (1-q)(px - (1-p)z)$, y $q(px - (1-p)z)$ y $(1-q)(px - (1-p)z)$ tienen el

[7] Como se ha mostrado en la sección 4.1, la alternativa X^k, tal que k es la solución de $\max_k \left\{\sum_{i=1}^{n} \Pr(M_j/E_i)\Pr(E_i)x_i^k\right\}$, sería la alternativa escogida si se recibiera el mensaje M_j.

mismo signo que $px-(1-p)z$ (o las tres expresiones son positivas, o las tres son negativas, o las tres expresiones son nulas). Por tanto, la decisión del empresario será la misma si no se recibe información o si se recibe cualquiera de los dos mensajes: o invierte en los tres casos o no invierte en ninguno de ellos. Cuando la probabilidad de cada mensaje es la misma en los dos estados (aunque un mensaje pueda ser más probable que el otro en ambos estados), el valor de la información es nulo ya que las probabilidades a posteriori de los estados coinciden con las probabilidades a priori, cualquiera que sea el mensaje recibido:

$$\begin{aligned} &\Pr(M_j/E_1) = \Pr(M_j/E_2) \\ \Leftrightarrow\ &\Pr(M_j) = \Pr(M_j/E_1)\Pr(E_1) + \Pr(M_j/E_2)\Pr(E_2) \\ &= \Pr(M_j/E_1) = \Pr(M_j/E_2) \\ \Leftrightarrow\ &\Pr(E_i/M_j) = \frac{\Pr(M_j/E_i)\Pr(E_i)}{\Pr(M_j)} = \Pr(E_i) \end{aligned}$$

En este caso ninguno de los dos mensajes permite discriminar entre los estados (cada mensaje es igual de probable en los dos estados).[8]

Si $q+r>1$ ocurre que $\frac{(1-r)z}{qx+(1-r)z} < \frac{z}{x+z} < \frac{rz}{(1-q)x+rz}$ y, en consecuencia, la información modifica la decisión en dos casos. Cuando el decisor recibe el mensaje M_1 y $\frac{(1-r)z}{qx+(1-r)z} < p < \frac{z}{x+z}$ decide invertir en el proyecto nuevo y, sin embargo, sin información no habría realizado esa inversión. Por otra parte, cuando el decisor recibe el mensaje M_2 y $\frac{z}{x+z} < p < \frac{rz}{(1-q)x+rz}$ no invierte en el proyecto nuevo y, sin embargo, sin información sí habría invertido en ese proyecto. El valor de la información (VI) en este caso es, por tanto:

$$VI = \begin{cases} 0 \ \text{ cuando } p \le \frac{(1-r)z}{qx+(1-r)z} \\ pqx-(1-p)(1-r)z \ \text{ cuando } \frac{(1-r)z}{qx+(1-r)z} < p < \frac{z}{x+z} \\ -p(1-q)x+(1-p)rz \text{ cuando } \frac{z}{x+z} < p < \frac{rz}{(1-q)x+rz} \\ 0 \text{ cuando } \frac{rz}{(1-q)x+rz} \le p \end{cases}$$

Nótese que VI es siempre positivo o cero cuando $q+r>1$. El valor de la información es máximo cuando $p=\frac{z}{x+z}$, es decir, cuando el decisor estaría indiferente entre invertir y no invertir en el proyecto nuevo si no

[8]Cuando se espera recibir siempre el mismo mensaje ($q=1$ y $r=0$, o $q=0$ y $r=1$) el decisor ya sabe qué mensaje va a recibir y, como se ha argumentado en la sección 1, no está dispuesto a pagar nada por la información.

recibiera información. El valor de la información es creciente en p cuando $\frac{(1-r)z}{qx+(1-r)z} < p < \frac{z}{x+z}$ y es decreciente en p cuando $\frac{z}{x+z} < p < \frac{rz}{(1-q)x+rz}$. Cuando $q+r > 1$, el valor máximo de VI es $VI_{\max} = \frac{xz}{x+z}(q+r-1)$. Este valor máximo aumenta con q y con r (cuando q aumenta, o cuando r aumenta, los mensajes permiten discriminar mejor entre los estados).

Puede expresarse también VI en función de los valores que puede tomar x, en función de los valores que puede tomar z, o en función de los valores que pueden tomar q o r. Nótese que un aumento en x puede reducir el valor de la información incompleta para ciertos valores de p. Si la ganancia en caso de éxito fuera $x' > x$, de forma que$\frac{z}{x+z} < \frac{rz}{(1-q)x'+rz} < p < \frac{rz}{(1-q)x+rz}$, sería $VI(x') = 0$ mientras que $VI(x) = -p(1-q)x + (1-p)rz > 0$. Cuando la ganancia en caso de éxito es x', y $\frac{rz}{(1-q)x'+rz} < p$, el decisor realiza la inversión siempre (cuando no recibe información, cuando recibe el mensaje M_1 y cuando recibe el mensaje M_2). Análogamente, cuando z disminuye el valor de la información puede aumentar. Por último, cuando q aumenta, o cuando r aumenta, VI aumenta, y el valor de la información es positivo para un intervalo más amplio de valores de p.

4.4 Inversión en un proyecto nuevo cuando la incertidumbre tiene varios componentes

A veces la incertidumbre tiene varios componentes y la información resuelve sólo uno de esos componentes de incertidumbre. En ese caso se pueden obtener y comparar los valores de los distintos servicios de información que eliminan la incertidumbre de cada uno de esos componentes. Considérese un empresario neutral ante el riesgo que tiene que decidir si invierte en un proyecto nuevo. Hay una probabilidad p de que la situación económica sea buena y una probabilidad $1-p$ de que la situación económica sea mala. Si realiza la inversión y la situación económica es buena hay una probabilidad q de que obtenga una ganancia igual a x (BE, éxito en una situación económica buena) y una probabilidad $1-q$ de que obtenga una pérdida igual a z (BF, fracaso en una situación económica buena), con $x > 0$ y $z > 0$. Si realiza la inversión y la situación económica es mala hay una probabilidad r de que obtenga una pérdida igual a z (MF, fracaso en una situación económica mala) y una probabilidad $1-r$ de que obtenga una ganancia igual a x (ME, éxito en una situación económica mala). Se considera que $q > 1-r$ (lo cual implica $q+r > 1$). También se considera que merecería la pena realizar la inversión si la situación económica fuera buena: $qx-(1-q)z > 0$ ($\Leftrightarrow \frac{z}{q(x+z)} < 1$) y que no merecería la pena realizar la inversión si la situación económica fuera mala: $(1-r)x - rz < 0$. Si el empresario no realiza la inversión sus beneficios son cero.

En este contexto pueden analizarse y compararse un servicio de información que resolvería la incertidumbre sobre el resultado (ganancia o pérdida) de la inversión en el proyecto nuevo si la situación económica fuera buena, un servicio de información que resolvería la incertidumbre sobre el resultado de la inversión si la situación económica fuera mala y un servicio de información que determine si la situación económica va a ser buena o mala. Hay cuatro estados o situaciones posibles: BE, BF, ME y MF, con probabilidades pq, $p(1-q)$, $(1-p)(1-r)$ y $(1-p)r$, respectivamente. Sin información el empresario realizará la inversión si:

$$p(qx-(1-q)z)+(1-p)((1-r)x-rz) > 0 \Leftrightarrow p > \frac{(x+z)r-x}{(x+z)(q+r-1)}$$

Nótese que $\frac{(x+z)r-x}{(x+z)(q+r-1)} > 0$ ya que $q+r-1 > 0$ y $(x+z)r-x > 0$. Además, $\frac{(x+z)r-x}{(x+z)(q+r-1)} < \frac{z}{q(x+z)} < 1$ y $\frac{(x+z)r-x}{(x+z)(q+r-1)}$ disminuye con q y aumenta con r.

Con un servicio de información que resolvería la incertidumbre sobre el resultado de la inversión en el proyecto nuevo si la situación económica fuera buena se puede recibir el mensaje BE o el mensaje BF. El empresario cree que si la situación económica es buena hay una probabilidad q de recibir el mensaje BE y una probabilidad $1-q$ de recibir el mensaje BF. Las probabilidades a posteriori (o revisadas) de los estados después de recibir alguno de esos mensajes son:

$\Pr(E/M)$	BE	BF	ME	MF
mensaje BE	p	0	$(1-p)(1-r)$	$(1-p)r$
mensaje BF	0	p	$(1-p)(1-r)$	$(1-p)r$

La recepción del mensaje BE indica que $q=1$ y la recepción del mensaje BF indica que $q=0$ y que $r=1$. Por tanto, cuando el mensaje sea BE se realizará la inversión si $p > \frac{(x+z)r-x}{(x+z)r}$ y cuando el mensaje sea BF no se realizará la inversión ya que $-pz-(1-p)((1-r)x-rz)<0$.[9] La ganancia esperada con un servicio de información que resolvería la incertidumbre sobre el resultado de la inversión si la situación económica fuera buena, en el caso en que se realizara la inversión cuando se recibe el mensaje BE, es, por tanto:

$$q(px+(1-p)((1-r)x-rz))$$

En consecuencia, el valor de ese servicio de información es:

$$VI=\begin{cases} 0 & \text{si } p\leq\frac{(x+z)r-x}{(x+z)r} \\ q(px+(1-p)((1-r)x-rz)) & \text{si } \frac{(x+z)r-x}{(x+z)r}<p<\frac{(x+z)r-x}{(x+z)(q+r-1)} \\ p(1-q)z+(1-q)(1-p)(r(x+z)-x) & \text{si}\frac{(x+z)r-x}{(x+z)(q+r-1)}\leq p \end{cases}$$

Cuando $\frac{(x+z)r-x}{(x+z)(q+r-1)}<p$, un servicio de información que resolvería la incertidumbre sobre el resultado de la inversión si la situación económica fuera buena permite no sólo evitar las pérdidas $(p(1-q)z)$ asociadas a un fracaso de la inversión si la situación económica es buena, sino también, en el caso en que el mensaje sea BF, evitar las pérdidas $((1-q)(1-p)(r(x+z)-x))$ que se producirían si se invierte y la situación económica es mala.

Con un servicio de información que resolvería la incertidumbre sobre el resultado de la inversión en el proyecto nuevo si la situación económica fuera mala se puede recibir el mensaje ME o el mensaje MF. El empresario cree que si la situación económica es mala hay una probabilidad $1-r$ de recibir el mensaje ME y una probabilidad r de recibir el mensaje MF. Las probabilidades a posteriori (o revisadas) de los estados después de recibir alguno de esos mensajes son:

$\Pr(E/M)$	BE	BF	ME	MF
mensaje ME	pq	$p(1-q)$	$1-p$	0
mensaje MF	pq	$p(1-q)$	0	$1-p$

La recepción del mensaje ME indica que $r=0$ y la recepción del mensaje MF indica que $r=1$. Por tanto, si el mensaje es ME se realizará la inversión si $p<\frac{x}{(x+z)(1-q)}$ y si el mensaje es MF se realizará la inversión si $p>\frac{z}{q(x+z)}$. Pero $qx-(1-q)z>0\Rightarrow x>(x+z)(1-q)$ y, por tanto, si el mensaje

[9]Si se considerara que el mensaje BF implica MF (si la situación económica fuera mala, la inversión fracasaría, ya que fracasaría incluso si la situación económica fuera buena) el resultado sería el mismo.

recibido es ME la inversión se realizará para cualquier valor de p.[10] Además, $\frac{z}{q(x+z)} > \frac{(x+z)r-x}{(x+z)(q+r-1)}$.

La ganancia esperada con un servicio de información que resolvería la incertidumbre sobre el resultado de la inversión si la situación económica fuera mala, en el caso en el que se realizara la inversión cuando se recibe el mensaje ME pero no cuando se recibe el mensaje MF, es, por tanto:

$$(1-r)(p(qx-(1-q)z)+(1-p)x)$$

Además, la ganancia esperada con un servicio de información que resolvería la incertidumbre sobre el resultado de la inversión si la situación económica fuera mala, en el caso en el que se realizara la inversión tanto cuando se recibe el mensaje ME como cuando se recibe el mensaje MF, es la misma que la ganancia esperada sin información. En consecuencia, el valor de ese servicio de información es:

$$VI = \begin{cases} (1-r)(p(qx-(1-q)z)+(1-p)x) \text{ si } p \leq \frac{(x+z)r-x}{(x+z)(q+r-1)} \\ -rp(qx-(1-q)z)+(1-p)rz \text{ si } \frac{(x+z)r-x}{(x+z)(q+r-1)} < p < \frac{z}{q(x+z)} \\ 0 \quad \text{si} \frac{z}{q(x+z)} \leq p \end{cases}$$

Cuando $\frac{(x+z)r-x}{(x+z)(q+r-1)} < p < \frac{z}{q(x+z)}$, un servicio de información que resolvería la incertidumbre sobre el resultado de la inversión si la situación económica fuera mala permite evitar las pérdidas asociadas a un fracaso de la inversión si la situación económica es mala pero también, en el caso en que el mensaje sea MF, hace que se pierdan las ganancias que se obtendrían con la inversión si la situación económica fuera buena. Lo que ocurre es que esta pérdida de ganancias es menor que el ahorro de pérdidas cuando $p < \frac{z}{q(x+z)}$.

Con un servicio de información que diga si la situación económica va a ser buena o mala, se puede recibir el mensaje B o el mensaje M. El empresario cree que hay una probabilidad p de recibir el mensaje B y una probabilidad $1-p$ de recibir el mensaje M. Las probabilidades a posteriori (o revisadas) de los estados después de recibir alguno de esos mensajes son:

$\Pr(E/M)$	$\underline{BE}$	$\underline{BF}$	$\underline{ME}$	$\underline{MF}$
mensaje B	q	$1-q$	0	0
mensaje M	0	0	$1-r$	r

[10] Si se considerara que el mensaje ME implica BE (si la situación económica fuera buena, la inversión tendría éxito, ya que tendría éxito incluso si la situación económica fuera mala) el resultado sería el mismo.

La recepción del mensaje B indica que $p = 1$ y la recepción del mensaje M indica que $p = 0$. Por tanto, si el mensaje es B se realizará la inversión y si el mensaje es M no se realizará la inversión. La ganancia esperada con un servicio de información que diga si la situación económica es buena o mala es $p(qx - (1 - q)z)$. En consecuencia, el valor de ese servicio de información es:

$$VI = \begin{cases} p(qx - (1 - q)z) \text{ si } p \leq \frac{(x+z)r-x}{(x+z)(q+r-1)} \\ \\ -(1 - p)((1 - r)x - rz) \text{ si} \frac{(x+z)r-x}{(x+z)(q+r-1)} < p \end{cases}$$

Las creencias del decisor y los resultados posibles de la inversión determinarán cuál de los tres servicios de información considerados tiene un valor mayor. Considérese, por ejemplo, que $x = 8$, $z = 3$, $p = 0,3$, $q = 0,6$ y $r = 0,9$. En este caso si el empresario no obtuviera información no realizaría la inversión en el proyecto nuevo ya que $p = 0,3 < \frac{(x+z)r-x}{(x+z)(q+r-1)} = 0,345$. El valor de un servicio de información que resolvería la incertidumbre sobre el resultado de la inversión en el proyecto nuevo, si la situación económica fuera buena, es $0,\ 642$, el valor de un servicio de información que resolvería la incertidumbre sobre el resultado de esa inversión, si la situación económica fuera mala, es $0,668$, y el valor de un servicio de información que indique si la situación económica va a ser buena o mala es $1,08$. Sin embargo, si $p = 0,4$ el valor de un servicio de información que resolvería la incertidumbre sobre el resultado de la inversión en el proyecto nuevo, si la situación económica es buena, es $0,\ 936$, el valor de un servicio de información que resolvería la incertidumbre sobre el resultado de esa inversión, si la situación económica es mala, es $1,879$, y el valor de un servicio de información que indique si la situación económica va a ser buena o mala es $1,14$. Por tanto, en este contexto el servicio de información más valioso no tiene por qué ser el que indique si la situación económica va a ser buena o mala.

Debe notarse que el valor de un servicio de información que resuelva la incertidumbre sobre el resultado de la inversión cuando se sabe que la situación económica es buena es distinto del valor de un servicio de información que resolvería la incertidumbre sobre el resultado de la inversión si la situación económica fuera buena. En el caso de este último servicio de información no sabemos todavía si la situación económica va a ser buena o mala. Por la misma razón, el valor de un servicio de información que resuelva la incertidumbre sobre el resultado de la inversión cuando se sabe que la situación económica es mala es distinto del valor de un servicio de información que resolvería la incertidumbre sobre el resultado de la inversión si la situación económica fuera mala.

Se ha considerado hasta ahora en el análisis realizado en esta sección que $qx - (1-q)z > 0$ y que $(1-r)x - rz < 0$. Pero ésto podría ocurrir sólo para ciertos valores de los parámetros. Para simplificar la presentación, considérese que $q = 0,6$, $r = 0,8$ y $p = 0,5$. En este caso, cuando la situación económica es buena, se realizará la inversión si $0,6x - 0,4z > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{z} > \frac{2}{3}$, y, cuando la situación económica es mala, se realizará la inversión si $0,2x - 0,8z > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{z} > 4$. Sabemos que, sin información, el empresario realizará la inversión si $0,5 > \frac{0,8(x+z)-x}{0,4(x+z)}$, es decir, si $\frac{x}{z} > \frac{3}{2}$. La ganancia esperada con una información que indique si la situación económica va a ser buena o mala será 0 si $\frac{x}{z} \leq \frac{2}{3}$ (no se realiza la inversión, independientemente de cuál sea el mensaje), $0,5(0,6x - 0,4z)$ si $\frac{2}{3} < \frac{x}{z} \leq 4$ (se invierte sólo si el mensaje indica que la situación económica es buena), y $0,5(0,6x - 0,4z) + 0,5(0,2x - 0,8z)$ $(= 0,4x - 0,6z)$ si $4 < \frac{x}{z}$ (se realiza la inversión, independientemente de cuál sea el mensaje). Por tanto, el valor de la información que indica si la situación económica va a ser buena o mala puede expresarse de la siguiente manera:[11]

$$VI = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{x}{z} \leq \frac{2}{3} \\ 0,5(0,6x - 0,4z) & \text{si } \frac{2}{3} < \frac{x}{z} \leq \frac{3}{2} \\ -0,5(0,2x - 0,8z) & \text{si } \frac{3}{2} < \frac{x}{z} \leq 4 \\ 0 & \text{si } 4 < \frac{x}{z} \end{cases}$$

Nótese que el máximo valor de la información se obtiene cuando $\frac{x}{z} = \frac{3}{2}$ (cuando, en caso de no recibir información, el empresario está indiferente entre invertir y no invertir).

4.5 Valores de informaciones simultáneas

Un decisor tiene que elegir entre dos alternativas para invertir una cantidad determinada. Si invierte en la alternativa o activo A conseguirá

[11] Nótese que $-0,5(0,2x - 0,8z) > 0$ cuando $\frac{x}{z} \leq 4$.

una ganancia igual a x_A si la situación económica evoluciona bien (expansión fuerte: E) o una pérdida igual a z_A si la situación económica evoluciona peor (expansión moderada o recesión: R), con $x_A > 0$ y $z_A > 0$. Si invierte en la alternativa o activo B conseguirá una ganancia igual a x_B si hay una expansión fuerte en la economía o una pérdida igual a z_B si hay expansión moderada o recesión, con $x_B > 0$ y $z_B > 0$. El decisor cree que la probabilidad de expansión fuerte es p y la probabilidad de expansión moderada o recesión es $1 - p$. Se va a considerar, sin pérdida de generalidad, que $x_A \geq x_B$, que $z_A \geq z_B$ y que las dos alternativas son diferentes (se denomina A a la alternativa que proporciona mayor ganancia en caso de expansión fuerte de la economía). Si el decisor no realiza la inversión sus ganancias son cero.

Se considera que $px_A - (1-p)z_A > 0$ y $px_B - (1-p)z_B > 0$ (esto implica que $p > \max\left\{\frac{z_A}{x_A+z_A}, \frac{z_B}{x_B+z_B}\right\}$). Por tanto, cuando el decisor no adquiere información invierte en A si $px_A - (1-p)z_A > px_B - (1-p)z_B$, invierte en B si $px_A - (1-p)z_A < px_B - (1-p)z_B$ e invierte en cualquiera de las dos alternativas si $px_A - (1-p)z_A = px_B - (1-p)z_B$.

Suponga que el decisor puede adquirir dos servicios de información, M y N. El servicio de información M es un servicio que acierta siempre cuando va a ocurrir E pero que sólo acierta con una probabilidad r cuando va a ocurrir R (es un buen servicio para predecir las expansiones fuertes). Se denotan mediante M_E y M_R los mensajes que puede proporcionar el servicio de información M: M_E es el mensaje que dice que va a haber una expansión fuerte y M_R es el mensaje que dice que va a haber una expansión moderada o recesión. El servicio de información N es, en cambio, un servicio que acierta siempre cuando va a ocurrir R pero que sólo acierta con una probabilidad q cuando va a ocurrir E (es un buen servicio para predecir las expansiones moderadas o recesiones). Se denotan mediante N_E y N_R los mensajes que puede proporcionar el servicio de información N: N_E es el mensaje que dice que va a haber una expansión fuerte y N_R es el mensaje que dice que va a haber una expansión moderada o recesión. La probabilidad esperada de que el servicio de información M acierte el estado que va a ocurrir es $p + (1-p)r$ y la probabilidad esperada de que el servicio de información N acierte el estado que va a ocurrir es $pq + 1 - p$.

Se determina, en primer lugar, cuál sería el valor de cada uno de estos servicios de información incompleta si se adquirieran por separado. Con el servicio de información incompleta M las probabilidades de cada mensaje dado cada estado ($\Pr(M/E)$) son:

$\Pr(M/E)$	E	R
M_E	1	$1-r$
M_R	0	r

Cuando se recibe el mensaje M_R, la probabilidad de R es 1, ya que el mensaje M_R no se puede recibir cuando el estado es E. En consecuencia, el decisor no invierte cuando el mensaje es M_R.

Nótese que, con los valores numéricos considerados:

$$\Pr(M_E) = 1(p) + (1-r)(1-p) = 1 - r(1-p),$$

$$\Pr(M_R) = r(1-p)$$

y

$\Pr(E/M)$	M_E	M_R
E	$\frac{p}{1-r(1-p)}$	0
R	$\frac{(1-r)(1-p)}{1-r(1-p)}$	1

Por tanto, si el decisor recibe el mensaje M_E invertirá en A cuando $px_A - (1-r)(1-p)z_A > px_B - (1-r)(1-p)z_B$, invertirá en B cuando $px_A - (1-r)(1-p)z_A < px_B - (1-r)(1-p)z_B$ e invertirá en cualquiera de las dos alternativas cuando $px_A - (1-r)(1-p)z_A = px_B - (1-r)(1-p)z_B$.

Sean:

$$G_A^{M_E} = \Pr(M_E/E)\Pr(E)x_A - \Pr(M_E/R)\Pr(R)z_A = px_A - (1-r)(1-p)z_A,$$

y

$$G_B^{M_E} = \Pr(M_E/E)\Pr(E)x_B - \Pr(M_E/R)\Pr(R)z_B = px_B - (1-r)(1-p)z_B,$$

La ganancia esperada con el servicio de información incompleta M es, por tanto (véase la sección 4.1):

$$\max\left\{G_A^{M_E}, G_B^{M_E}, 0\right\} + 0$$

El valor del servicio de información incompleta M (o diferencia entre la ganancia esperada con esa información incompleta y la ganancia esperada sin información) se obtiene de la siguiente manera:

i) Caso en el que se invierte en la alternativa A si no se recibe información: $px_A - (1-p)z_A > px_B - (1-p)z_B$ (también puede incluirse aquí, sin pérdida de generalidad, el caso $px_A - (1-p)z_A = px_B - (1-p)z_B$). Como $px_A - px_B > -(1-r)((1-p)z_B - (1-p)z_A)$, la ganancia esperada con este servicio de información incompleta es $px_A - (1-r)(1-p)z_A$. Por tanto, el valor de esa información es $r(1-p)z_A$.

ii) Caso en el que se invierte en la alternativa B si no se recibe información: $(px_B - (1-p)z_B > px_A - (1-p)z_A)$. En este caso puede ocurrir $px_A - (1-r)(1-p)z_A > px_B - (1-r)(1-p)z_B$. El valor de la información es, por tanto:

$$VI = \begin{cases} r(1-p)z_B & \text{si } G_B^{M_E} > G_A^{M_E} \\ G_A^{M_E} - (px_B - (1-p)z_B) & \text{si } G_A^{M_E} > G_B^{M_E} \end{cases}$$

Nótese que el valor de la información es positivo o nulo en todos los casos presentados.

Con el servicio de información incompleta N las probabilidades de cada mensaje dado cada estado ($\Pr(N/E)$) son:

$\Pr(N/E)$	E	R
N_E	q	0
N_R	$1-q$	1

Cuando se recibe el mensaje N_E, la probabilidad de E es 1, ya que el mensaje N_E no se puede recibir cuando el estado es E. En consecuencia, el decisor invierte en A cuando el mensaje es N_E.

Nótese que, con los valores numéricos considerados:

$$\Pr(N_E) = qp,$$

$$\Pr(N_R) = (1-q)p + 1 - p = 1 - qp$$

y

$\Pr(E/M)$	N_E	N_R
E	1	$\frac{(1-q)p}{1-qp}$
R	0	$\frac{1-p}{1-qp}$

Por tanto, si el decisor recibe el mensaje N_R invertirá en A cuando $(1-q)px_A - (1-p)z_A > (1-q)px_B - (1-p)z_B$, invertirá en B cuando $(1-q)px_A - (1-p)z_A < (1-q)px_B - (1-p)z_B$ e invertirá en cualquiera de las dos alternativas cuando $(1-q)px_A - (1-p)z_A = (1-q)px_B - (1-p)z_B$.

Sean:

$$G_A^{N_R} = \Pr(N_R/E)\Pr(E)x_A - \Pr(N_R/R)\Pr(R)z_A = (1-q)px_A - (1-p)z_A$$

y

$$G_B^{N_R} = \Pr(N_R/E)\Pr(E)x_B - \Pr(N_R/R)\Pr(R)z_B = (1-q)px_B - (1-p)z_B$$

La ganancia esperada con el servicio de información incompleta N es (véase la sección 4.1):

$$qpx_A + \max\left\{G_A^{N_R}, G_B^{N_R}, 0\right\}$$

El valor del servicio de información incompleta N (o diferencia entre la ganancia esperada con la información incompleta y la ganancia esperada sin información) se obtiene de la siguiente manera:

i) Caso en el que se invierte en la alternativa A si no se recibe información. El valor de la información es:

$$VI = \begin{cases} -G_A^{N_R} & \text{si } 0 > \max\left\{G_A^{N_R}, G_B^{N_R}\right\} \\ 0 & \text{si } G_A^{N_R} > \max\left\{0, G_B^{N_R}\right\} \\ G_B^{N_R} - G_A^{N_R} & \text{si } G_B^{N_R} > \max\left\{G_A^{N_R}, 0\right\} \end{cases}$$

ii) Caso en el que se invierte en la alternativa B si no se recibe información. En este caso $G_B^{N_R} > G_A^{N_R}$. El valor de la información es:

$$VI = \begin{cases} qpx_A - px_B + (1-p)z_B & \text{si } 0 > \max\left\{G_A^{N_R}, G_B^{N_R}\right\} \\ qp(x_A - x_B) & \text{si } G_B^{N_R} > \max\left\{G_A^{N_R}, 0\right\} \end{cases}$$

El valor de la información es positivo o nulo en todos los casos presentados.

Para simplificar la presentación en el resto de la sección se van a considerar los siguientes valores para los parámetros: $p = 0,4$, $r = 0,7$, $q = 0,5$, $x_A = 5$, $z_A = 3$, $x_B = 4$ y $z_B = 2$. Con estos valores de los parámetros si no se recibe información el decisor invierte en la alternativa B. El valor del servicio de información M es 0,86 y el valor del servicio de información N es 0,6.

Por tanto, el servicio de información M es más valioso. Sin embargo la probabilidad esperada de acertar (la fiabilidad) es casi la misma con los dos servicios de información: 0,82 ($= p + r(1-p)$) con el servicio de información M y 0,80 ($= qp + 1 - p$) con el servicio de información N.

Considérese ahora que los dos servicios de información se adquieren simultáneamente (el decisor consulta a los dos grupos de expertos que suministran información). Si se recibe el mensaje M_R es seguro que el estado es R y, por tanto, debe recibirse también N_R. Si se recibe el mensaje N_E es seguro que el estado es E y, por tanto, debe recibirse también M_E. Pero puede recibirse también el par de mensajes (M_E, N_R.). Así, el decisor recibirá uno de los siguientes tres pares de mensajes: (M_E, N_R.), (M_E, N_E.) o (M_R, N_R.). Si los dos servicios de información dicen que va a haber una expansión fuerte (mensajes M_E y N_E), el decisor deducirá que el estado es E e invertirá en A. Si los dos servicios de información dicen que va a haber una expansión moderada o una recesión (mensajes M_R y N_R), el decisor deducirá que el estado es R y no invertirá. Si el servicio de información M predice que va a haber una expansión fuerte (mensaje M_E) y el servicio de información N predice que va a haber una expansión moderada o una recesión (mensaje N_R), la mejor respuesta del decisor a M_E es invertir en A y la mejor respuesta del decisor a N_R es no invertir.

Cuando las recomendaciones de los dos servicios de información son diferentes, se puede proceder de la siguiente manera: Como la probabilidad esperada de acertar (la fiabilidad) es 0,82 con el servicio de información M y 0,80 con el servicio de información N, pondérese por $\frac{0{,}82}{0{,}82+0{,}80}$ la probabilidad a posteriori de cada estado después de recibir el mensaje M_E y por $\frac{0{,}80}{0{,}82+0{,}80}$ la probabilidad a posteriori de cada estado después de recibir el mensaje N_R, para calcular las probabilidades a posteriori de los estados cuando se recibe el par de mensajes (M_E, N_R). Estas probabilidades ponderadas de los estados se utilizarán para escoger la mejor alternativa cuando se recibe ese par de mensajes.

Nótese que, con los valores numéricos considerados:

$$\Pr(M_E) = 1(0,4) + (1 - 0,7)(0,6) = 0,58,$$

$$\Pr(N_R) = (1 - 0,5)(0,4) + 1(0,6) = 0,8$$

y

$\Pr(E/M)$	M_E	N_R
E	$\frac{0{,}4}{0{,}58}$	$\frac{0{,}2}{0{,}8} = \frac{1}{4}$
R	$\frac{0{,}18}{0{,}58}$	$\frac{0{,}6}{0{,}8} = \frac{3}{4}$

Las probabilidades ponderadas de los estados serían:

$$\Pr(E/M_E, N_R) = \frac{0,82}{0,82+0,80}(\frac{0,4}{0,58}) + \frac{0,80}{0,82+0,80}(\frac{1}{4}) = 0,47254$$

$$\Pr(R/M_E, N_R) = \frac{0,82}{0,82+0,80}(\frac{0,18}{0,58}) + \frac{0,80}{0,82+0,80}(\frac{3}{4}) = 0,52746$$

Utilizando estas probabilidades ponderadas de los estados, la ganancia esperada con la alternativa A sería: $0,473(5) - 0,527(3) = 0,78$ y la ganancia esperada con la alternativa B sería: $0,473(4) - 0,527(2) = 0,835$. En este caso el decisor escogería B, es decir, una alternativa distinta tanto de la alternativa (A) que habría elegido si sólo hubiera atendido la información (M_E) proporcinada por el servicio de información M como de la alternativa (no invertir) que habría elegido si sólo hubiera atendido la información (N_R) proporcinada por el servicio de información N.

El valor de la información cuando los dos servicios de información se adquieren simultáneamente es:

$$VI = \Pr(M_E, N_E)(5) + \Pr(M_E, N_R)(0,835) + \Pr(M_R, N_R)(0)$$

Como:

$$\Pr(M_E, N_E) = \Pr(M_E/N_E)\Pr(N_E) = (1)\Pr(N_E) = 0,2,$$

$$\Pr(M_R, N_R) = \Pr(N_R/M_R)\Pr(M_R) = (1)\Pr(M_R) = 0,42$$

y, por tanto:

$$\Pr(M_E, N_R) = 1 - 0,2 - 0,42 = 0,38,$$

obtenemos que:

$$VI = 0,2(5) + 0,38(0,835) + 0,42(0) = 1,3173.$$

El valor de la información cuando los dos servicios de información se adquieren simultáneamente es mayor que el valor de la información de cada servicio de información cuando se adquiere de forma exclusiva, aunque es menor que la suma de esos valores de la información correspondientes a la adquisición en exclusiva de cada servicio de información.

5 Nivel de información óptimo para el decisor. El valor de una segunda opinión.

En esta sección se estudia en primer lugar la determinación del nivel de información óptimo para el decisor cuando éste puede elegir distintos grados de precisión de la información, con un coste de adquirir la información que aumenta con el grado de precisión. A continuación se analizan el valor de una segunda opinión (o de una segunda información), cuando ya se ha recibido una primera opinión o información, y el valor de una opinión o información adicional, cuando el decisor posee varios opiniones o informaciones previas.

5.1 Nivel de información óptimo para el decisor

Si se puede decidir el nivel (cantidad o calidad) de información a adquirir, ¿cuánta información adquirirá el decisor? Al decisor le merece la pena adquirir información adicional mientras el aumento en la ganancia esperada con una unidad adicional de información sea mayor que el coste de adquirir esa unidad de información.

En algunas situaciones hay que decidir ex-ante la cantidad de información a adquirir: por ejemplo, ¿a cuántas personas entrevistar antes de decidir sobre el lanzamiento de un nuevo producto al mercado? o ¿cuántas pruebas exigir antes de autorizar la comercialización de un producto (de un medicamento, por ejemplo)? En otros casos la decisión es secuencial: si se han adquirido una serie de unidades de información, ¿merece la pena adquirir una unidad más (ir a una tienda más, consultar otro artículo sobre un tema que nos interesa, consultar otra página web, entrevistar a otro candidato para un trabajo, visitar otro piso más, buscar otra oferta de trabajo)? El nivel de información elegido, en ambas situaciones, debe ser aquél para el que se igualen el valor o ganancia marginal y el coste marginal.

Considérese un inversor neutral ante el riesgo que, con una inversión igual a 1, obtendría una ganancia $x > 0$ si la situación económica en el futuro fuera buena o perdería lo invertido si esa situación económica fuera mala. El decisor cree que hay una probabilidad p de que, en el futuro, la situación económica sea buena y que la probabilidad de que esa situación económica sea mala es $1-p$. Para resolver total o parcialmente la incertidumbre, el decisor puede adquirir información. El coste de adquirir información con un grado de precisión q es $C(q)=q^2$ (por tanto, $\frac{dC(q)}{dq}=2q$). Una información con un grado de precisión q indica con una probabilidad q que la situación económica va a ser buena, cuando es esto lo que va a ocurrir, e indica también con una probabilidad q que la situación económica va a ser mala, cuando es esto lo que va a ocurrir. Se analiza a continuación el caso en el que $q \geq 0,5$ (el análisis del caso $q<0,5$ sería análogo).

A partir del análisis desarrollado en la sección 4.3, notando que $r=q$ y $z=1$, podemos obtener el valor de la información. Si $q=0,5$, el valor de la información es nulo ya que ninguno de los dos mensajes permite discriminar entre los estados. Si $q>0,5$ la información modifica la decisión en dos casos. Cuando el decisor recibe el mensaje *buena* y $\frac{(1-r)z}{qx+(1-r)z}<p<\frac{z}{x+z}$ decide invertir y, sin embargo, sin información no habría invertido. Por otra parte, cuando el decisor recibe el mensaje *mala* y $\frac{z}{x+z}<p<\frac{rz}{(1-q)x+rz}$ escoge no invertir y, sin embargo, sin información habría invertido. El valor de la información (VI) en este caso es, por tanto:

$$VI=\begin{cases} 0 \text{ cuando } p \leq \frac{1-q}{qx+1-q} \\ pqx-(1-p)(1-q) \text{ cuando } \frac{1-q}{qx+1-q}<p<\frac{1}{x+1} \\ -p(1-q)x+(1-p)q \text{ cuando } \frac{1}{x+1}<p<\frac{q}{(1-q)x+q} \\ \text{cuando } \frac{q}{(1-q)x+q} \leq p \end{cases}$$

El valor de la información es máximo cuando $p=\frac{1}{x+1}$, es decir, cuando el decisor estaría indiferente entre invertir y no invertir, si no recibiera información. Nótese que, para cualquier valor de p para el que el valor de la información es positivo, ocurre que el valor de la información aumenta con q.

El valor marginal de la información en este caso es $\frac{dVI}{dq}=px+1-p$. El nivel de información (grado de precisión) que escogerá el decisor será, por tanto, $px+1-p=2q \Leftrightarrow q=\frac{px+1-p}{2}$.[12] Si, por ejemplo, $x=3$ y $p=0,2$ será

[12] La condición $\frac{dVI}{dq}=\frac{dC(q)}{dq}$ es la condición necesaria que debe cumplir el nivel de

$q = 0,7$ y se cumple $\frac{1-q}{qx+1-q} < p < \frac{1}{x+1}$. Si, en cambio, $x = 2$ y $p = 0,6$ será $q = 0,8$ y se cumple $\frac{1}{x+1} < p < \frac{q}{(1-q)x+q}$.

5.2 El valor de una segunda opinión

Se analiza en esta sección el valor de un segundo servicio de información, cuando se ha obtenido previamente información de un servicio de información incompleta, en un contexto en el que los mensajes de los dos servicios de información son independientes. El valor de un segundo servicio de información, cuando ya se ha recibido un mensaje proporcionado por un primer servicio de información incompleta, se calcula como en las secciones 3 y 4.1, utilizando las probabilidades revisadas de los estados tras la recepción de ese mensaje como probabilidades a priori para la revisión de probabilidades de los estados con ese segundo servicio de información. El valor del segundo servicio de información depende, por tanto, del mensaje que se haya recibido en el primer servicio de información.[13] Considérese que hay n estados E_i, $i = 1, ..., n$, y que el decisor tiene que elegir entre l alternativas X^k, con $k = 1, ..., l$. La alternativa X^k proporciona una ganancia x_i^k en el estado E_i, con $i = 1, ..., n$ y $k = 1, ..., l$. Hay dos servicios de información incompleta M y M'. El servicio de información M consiste en m posibles mensajes M_j, $j = 1, ..., m$, y el servicio de información M' consiste en m' mensajes M'_h, $h = 1, ..., m'$. La ganancia esperada por el decisor con ese par de servicios de información cuando recibe primero un mensaje del servicio de información M y luego recibe un mensaje del servicio de información M' es:

$$\sum_{j=1}^{m} \Pr(M_j) \sum_{h=1}^{m'} \max_k \left\{ \sum_{i=1}^{n} \Pr(M'_h/E_i) \Pr(E_i/M_j) x_i^k \right\}$$

El valor esperado de la utilización consecutiva de los dos servicios de información incompleta no depende del orden en el que se contraten los dos

información para maximizar la ganancia del decisor. La solución obtenida cumple en este caso también la condición suficiente para maximizar la ganancia del decisor ya que $\frac{d^2VI}{dq^2} = 0 < 2 = \frac{d^2C(q)}{dq^2}$.

[13]El valor de un servicio de información adicional cuando ya se han recibido mensajes de varios servicios de información previos se calcula de forma análoga a partir de las probabilidades revisadas en función de los mensajes anteriores.

servicios de información. La ganancia esperada por el decisor con el par de servicios de información cuando recibe primero un mensaje del servicio de información M y luego recibe un mensaje del servicio de información M' es la misma que la ganancia esperada por el decisor con el par de servicios de información cuando recibe primero un mensaje del servicio de información M' y luego recibe un mensaje del servicio de información M ya que, utilizando el Teorema de Bayes:

$$\sum_{j=1}^{m} \Pr(M_j) \sum_{h=1}^{m'} \max_k \left\{ \sum_{i=1}^{n} \Pr(M'_h/E_i) \Pr(E_i/M_j) x_i^k \right\}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{h=1}^{m'} \max_k \left\{ \sum_{i=1}^{n} \Pr(M'_h/E_i) \Pr(M_j/E_i) \Pr(E_i) x_i^k \right\}$$

$$= \sum_{h=1}^{m'} \sum_{j=1}^{m} \max_k \left\{ \sum_{i=1}^{n} \Pr(M'_h/E_i) \Pr(M_j/E_i) \Pr(E_i) x_i^k \right\}$$

$$= \sum_{h=1}^{m'} \Pr(M'_h) \sum_{j=1}^{m} \max_k \left\{ \sum_{i=1}^{n} \Pr(M_j/E_i) \Pr(E_i/M'_h) x_i^k \right\}$$

6 El valor de la información con aversión al riesgo

En las secciones anteriores se ha considerado que el decisor era neutral ante el riesgo. En esta sección se incluye una extensión de los análisis realizados en esas secciones a aquellas situaciones en las que el decisor es averso al riesgo.

Si el decisor fuera averso al riesgo las ganancias en unidades monetarias que resultan con cada alternativa en cada estado deben transformarse en unidades de utilidad conforme a la función de utilidad del decisor. Si el decisor es averso al riesgo esa función de utilidad debe ser cóncava (por ejemplo, $u(x) = \sqrt{x}$, donde x mide las ganancias en dinero). Si se cumplen los axiomas que hacen válida la Teoría de la Utilidad Esperada se puede calcular la utilidad esperada del decisor sin información y la utilidad esperada del decisor con información.

Considérese un decisor que tiene que elegir entre l alternativas X^k, con $k = 1, ..., l$. La situación es incierta ya que puede haber n situaciones o estados E_i posibles. El decisor cree que la probabilidad del estado E_i es $\Pr(E_i) = p_i$. La alternativa X^k proporciona una ganancia x_i^k en el estado E_i (si $x_i^k < 0$, la alternativa X^k ocasiona una pérdida si el estado es E_i). Considérese que puede aplicarse la Teoría de la Utilidad Esperada de forma que la utilidad esperada de la alternativa X^k si no se recibe información es igual a $\sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i^k)$.

Si el decisor no recibe información escogerá la alternativa que maximiza su utilidad esperada, es decir, resolverá $\max_k \left\{\sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i^k)\right\}$. Cuando recibe información completa resolverá $\max_k \left\{u(x_i^k)\right\}$ si la información indica que el estado va a ser E_i, para $i = 1, ..., n$. Como el decisor cree que la probabilidad de que la información completa indique que el estado va a ser E_i es igual p_i (para $i = 1, ..., n$), ya que esa es la probabilidad que asigna a priori a ese estado, la utilidad esperada con información completa es $\sum_{i=1}^{n}(p_i \max_k \left\{u(x_i^k)\right\})$. Sin embargo, el valor de la información completa no es igual a $\sum_{i=1}^{n}(p_i \max_k \left\{u(x_i^k)\right\})- \max_k \left\{\sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i^k)\right\}$, ya que ese valor debe expresarse en unidades monetarias. El valor de la información completa (VI) es igual a la máxima cantidad de dinero que está dispuesto a pagar el decisor por esa información. Por tanto, VI se obtiene a partir de:

$$\sum_{i=1}^{n}(p_i \max_k \left\{u(x_i^k - VI)\right\}) = \max_k \left\{\sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i^k)\right\}$$

Para calcular el valor de la información completa en el ejemplo presentado en la sección 2.1 consideremos que $u(x) = \sqrt{x}$. Sin información, el decisor escogerá X^3 ya que:

$$\begin{gathered}\text{ganancia esperada } (X^1)=\sqrt{3} = 1,732\\ \text{ganancia esperada } (X^2)=0{,}3\sqrt{9}+0{,}7(0)=0{,}9\\ \text{ganancia esperada } (X^3)=0{,}3\sqrt{2}+0{,}7\sqrt{4}=1{,}824\end{gathered}$$

El valor de la información completa cumplirá:

$$0,3\sqrt{10 - VI} + 0,7\sqrt{4 - VI} = 1,824 \Leftrightarrow VI = 2,0479.$$

El análisis sería análogo para estudiar la inversión en un proyecto nuevo o en un activo arriesgado con información completa. Considérese en la situación estudiada en la sección 2.2 que $u(x)$ es cóncava y que el decisor tiene una riqueza inicial igual a w. El decisor realizará la inversión, si no recibe información, cuando:

$$pu(w+x) + (1-p)u(w-z) > u(w) \Rightarrow p > \frac{u(w) - u(w-z)}{u(w+x) - u(w-z)}$$

El valor de la información completa es:

- si $p \geq \frac{u(w)-u(w-z)}{u(w+x)-u(w-z)}$: el valor VI que resuelve:

$$pu(w+x-VI) + (1-p)u(w-VI) = pu(w+x) + (1-p)u(w-z)$$

- si $p \leq \frac{u(w)-u(w-z)}{u(w+x)-u(w-z)}$: el valor VI que resuelve:

$$pu(w+x-VI) + (1-p)u(w-VI) = u(w)$$

Nótese que $VI = 0$ cuando $p = 0$ y cuando $p = 1$. Además, cuando $p \leq \frac{u(w)-u(w-z)}{u(w+x)-u(w-z)}$, VI aumenta con p ya que:

$$\frac{dVI}{dp} = -\frac{u(w+x-VI) - u(w-VI)}{-pu'(w+x-VI) - (1-p)u'(w-VI)} > 0,$$

y, cuando $p \geq \frac{u(w)-u(w-z)}{u(w+x)-u(w-z)}$, VI disminuye con p ya que:

$$\begin{aligned}
\frac{dVI}{dp} &= -\frac{u(w+x-VI) - u(w-VI) - u(w+x) + u(w-z)}{-pu'(w+x-VI) - (1-p)u'(w-VI)} \\
&= \frac{u(w-z) - u(w-VI) - (u(w+x) - u(w+x-VI))}{-pu'(w+x-VI) - (1-p)u'(w-VI)} < 0.
\end{aligned}$$

Esta última desigualdad tiene en cuenta que $VI < z$ (como se indica en la sección 2.2, el decisor no puede estar dispuesto a pagar por la información más que la máxima pérdida (z) que puede obtener, ya que si pagara por la información más de z estaría cambiando una pérdida posible igual a z por un pago seguro mayor que z). Por tanto, el valor de la información es máximo cuando $p = \frac{u(w)-u(w-z)}{u(w+x)-u(w-z)}$.

El cálculo del valor de la información incompleta para un decisor averso al riesgo sería análogo.

7 Flexibilidad e información.

En esta parte del trabajo se estudia la relación entre la llegada de información en el futuro y el valor de adoptar en el presente una decisión flexible que puede modificarse, sin coste o con un coste no demasiado alto, cuando se recibe esa información. Se denomina valor de la flexibilidad al aumento en la ganancia esperada (o en la utilidad esperada) que obtiene el decisor al adoptar una decisión flexible en el presente que le permite aprovechar esa información que se recibe en el futuro. El valor de la flexibilidad es, así, el valor de mantener opciones abiertas cuando se espera la llegada de información en el futuro.

En las dos secciones siguientes se analiza el problema del decisor y se calcula el valor de la flexibilidad en dos problemas de decisión básicos, que incluyen gran parte de las situaciones en las que es relevante el cálculo del valor de la flexibilidad.

7.1 Elección entre alternativas y flexibilidad

Considérese una situación en la que el decisor puede escoger entre alternativas que producen ganancias en varios periodos de tiempo. Puede ocurrir, por ejemplo, que haya dos periodos (1 y 2: presente y futuro) y que cada alternativa produzca beneficios (o costes) en cada uno de los periodos. El decisor deberá tener en cuenta en su elección no sólo las ganancias de cada alternativa en el presente sino también sus ganancias en el futuro. Para ello deberá descontar las ganancias futuras (multiplicándolas por su factor de descuento δ) para convertir las unidades monetarias del futuro en unidades monetarias del presente.

Cuando hay dos periodos existe la posibilidad de que el decisor elija realizar una determinada alternativa en el presente y opte, en cambio, por una alternativa diferente en el futuro. Sin embargo, la posibilidad de cambiar de una alternativa a otra depende del grado de flexibilidad de la alternativa inicial. Una alternativa es totalmente flexible si se puede cambiar desde esa alternativa a cualquier otra sin ningún coste (los costes de cambiar a cualquier otra alternativa son nulos). Una alternativa es irreversible si no es factible cambiar desde esa alternativa a ninguna otra o si los costes de cambiar a cualquier otra alternativa son muy elevados. Por último, una alternativa es parcialmente flexible si se puede cambiar de esa alternativa a otra u otras incurriendo en costes de cambio que no son altos. Así, el grado de flexibilidad de una alternativa disminuye al aumentar los costes de cambiar de esa a lternativa a otras alternativas.

A veces se pueden comparar las alternativas según su grado de flexibilidad. La alternativa A es más flexible que la alternativa B si para toda alternativa C, tal que $C \neq A$ y $C \neq B$, el coste de cambiar de la alternativa A a C es menor que el coste de cambiar de B a C y el coste de cambiar de A a B es menor que el coste de cambiar de B a A (la definición se mantiene si sustituimos menor por menor o igual en todos los costes de cambio excepto en uno de ellos). Claramente, una alternativa totalmente flexible es más flexible que cualquier alternativa que no sea totalmente flexible y una alternativa irreversible es menos flexible que cualquier alternativa que no sea irreversible.

Considérese un decisor neutral ante el riesgo que tiene que elegir entre alternativas con distintos grados de flexibilidad y que se enfrenta a un horizonte de dos periodos en el que hay incertidumbre sobre los beneficios de cada alternativa en el segundo periodo. Al final del primer periodo se recibe información que resuelve total o parcialmente la incertidumbre sobre las ganancias que proporciona cada alternativa en el segundo periodo. Esta información podría, por tanto, utilizarse para decidir la alternativa que se llevará a cabo en el segundo periodo, excepto si se ha escogido una alternativa irreversible en el presente. Después de esa elección de alternativa a realizar en el futuro se resuelve el resto de la incertidumbre (cuando la información ha sido incompleta) y se sabe cuál es el estado en el futuro.

En este contexto hay que analizar si merece la pena adoptar en el presente una decisión más flexible que pueda modificarse en el futuro en función de la información recibida. Considérese que la alternativa más flexible es la que proporciona menos ganancias en el presente y/o que hay ciertos costes de cambiar desde la alternativa más flexible a otras alternativas. En ese caso, escoger en el primer periodo una alternativa menos flexible puede implicar pérdidas en el futuro por la imposibilidad de modificar en el segundo periodo la decisión tomada, pero escoger la alternativa más flexible implica pérdidas en el presente y quizá incurrir en ciertos costes de cambio en el futuro.

El decisor escogerá en el presente la alternativa que le proporcione una ganancia esperada mayor teniendo en cuenta las ganancias en el presente y las ganancias en el futuro. Las ganancias en el presente son conocidas. Las ganancias en el futuro también son conocidas si se ha adoptado una alternativa irreversible en el presente. En cambio, cuando se adopta una alternativa flexible en el presente existe la posibilidad de cambiar a otras alternativas flexibles en el futuro. Además, en este caso, la decisión sobre a qué alternativa cambiar puede depender del mensaje (información) recibido. Por tanto, cuando se ha escogido esa alternativa flexible en el presente, hay que estudiar el cambio de alternativa en el futuro para cada mensaje posible y calcular la ganancia que se espera obtener como media en el futuro. Una vez calculada la ganancia esperada en el futuro de cada decisión que se adopte en el presente, pueden calcularse las ganancias totales de adoptar cada decisión en el presente y compararlas.

La ganancia esperada que puede obtenerse, en el futuro, con la adopción de una alternativa flexible en el presente puede calcularse mediante un procedimiento similar al utilizado en la sección 4.1. Considérese que un decisor ha escogido una alternativa flexible, X^1, en el presente y que, en el futuro, puede cambiar a cualquier alternativa entre l alternativas X^k, con $k = 1, ..., l$ (si $k = 1$ el decisor escogería en el futuro lo misma alternativa que en el presente). La situación en el futuro es incierta ya que puede haber n situaciones o estados E_i posibles, $i = 1, ..., n$. El decisor cree que la probabilidad del estado E_i es $\Pr(E_i) = p_i$. La alternativa X^k proporciona una ganancia x_i^k en el futuro si el estado E_i (si $x_i^k < 0$, la alternativa X^k ocasiona una pérdida si el estado es E_i). El coste de cambiar de la alternativa X^1 a la alternativa X^k es c^{1k} (nótese que $c^{11} = 0$). Si el decisor recibe información al final del presente, esa información consiste en m mensajes M_j, $j = 1, ..., m$. Las creencias del decisor se concretan en las probabilidades $\Pr(E_i)$ y $\Pr(M_j/E_i)$ para $i = 1, ..., n$ y $j = 1, ..., m$.

La ganancia esperada en el futuro con la alternativa X^k cuando se recibe el mensaje M_j es $\sum_{i=1}^{n} \Pr(E_i/M_j)x_i^k$. Por tanto, cuando ha escogido X^1 en el presente, la alternativa que escogería el decisor si recibiera el mensaje M_j sería X^k tal que k sea la solución de $\max_k \left\{\sum_{i=1}^{n} \Pr(E_i/M_j)(x_i^k - c^{1k})\right\}$. La ganancia esperada, en el futuro, si se escoge la alternativa X^1 en el presente puede expresarse, teniendo en cuenta la Regla o Teorema de Bayes:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m} \Pr(M_j) \max_k \left\{ \sum_{i=1}^{n} \Pr(E_i/M_j)(x_i^k - c^{1k}) \right\} \\
&= \sum_{j=1}^{m} \max_k \left\{ \sum_{i=1}^{n} \Pr(E_i/M_j) \Pr(M_j)(x_i^k - c^{1k}) \right\} \\
&= \sum_{j=1}^{m} \max_k \left\{ \sum_{i=1}^{n} \Pr(M_j/E_i) \Pr(E_i)(x_i^k - c^{1k}) \right\}
\end{aligned}$$

La ganancia esperada de escoger la alternativa X^1 en el presente es, por tanto, la suma de la ganancia que proporciona esa alternativa en el presente más esta expresión de la ganancia esperada esperada en el futuro cuando se ha escogido X^1 en el presente. Por tanto, no hace falta calcular las probabilidades de los mensajes ni las probabilidades revisadas o a posteriori de los estados para calcular el valor de la flexibilidad.

Nótese, además, que, cuando se ha elegido X^1 en el presente, la alternativa escogida en el futuro si se recibiera el mensaje M_j sería la alternativa X^k, tal que k es la solución de $\max_k \left\{\sum_{i=1}^{n} \Pr(M_j/E_i) \Pr(E_i)(x_i^k - c^{1k})\right\}$, ya que:

$$\sum_{i=1}^{n} \Pr(E_i/M_j)(x_i^k - c^{1k}) = \frac{1}{\Pr(M_j)} \sum_{i=1}^{n} \Pr(M_j/E_i) \Pr(E_i)(x_i^k - c^{1k})$$

La alternativa más flexible es más valiosa (y es más probable que sea adoptada en el presente) cuando se espera la llegada de más información en el futuro y cuando los costes de cambiar a otras acciones son menores. Si esa alternativa proporciona menos beneficios en el presente que las demás alternativa será, también, más probable que sea la alternativa escogida en el presente cuando se descuenta menos el futuro (es decir, cuando el factor de descuento es mayor).

7.2 Inversión en un proyecto nuevo y flexibilidad

Considérese una situación en la que hay varios periodos y un decisor neutral ante el riesgo tiene que elegir entre dos alternativas: escoger en el primer periodo una decisión irreversible (realizar una inversión en el presente: alternativa I) o esperar hasta que se resuelva la incertidumbre al principio del segundo periodo y decidir entonces si realizar esa decisión irreversible o no (no invertir en el presente: alternativa NI). Se considera, por tanto, que, o no se realiza nunca la inversión o la inversión se realiza en uno de los dos primeros periodos. La alternativa I es irreversible (no se puede deshacer la inversión realizada y recuperar el dinero invertido) y la alternativa NI es totalmente flexible. Así, si hace NI en el primer periodo puede decidir entre hacer NI o hacer I en los periodos segundo y siguientes.

El contexto es tal que hay incertidumbre sobre los beneficios de la inversión en los periodos segundo y siguientes. En el futuro (periodos segundo y siguientes) puede ocurrir el estado E_A o puede ocurrir el estado E_B. El decisor cree que hay una probabilidad q de que ocurra el estado E_A y una probabilidad $1-q$ de que ocurra el estado E_B. Esta incertidumbre se resuelve, completa o parcialmente, al principio del segundo periodo.

Las ganancias con la alternativa NI son nulas en cada periodo.[14] Realizar la alternativa I tiene un coste C (es la cuantía de la inversión a realizar). Ese coste se paga en el periodo en el que se realiza la inversión. Las ganancias que proporciona la inversión en el presente, en el futuro en el estado E_A y en el futuro en el estado E_B son, respectivamente, G, G_A y G_B. Supóngase que $G_A > C > G_B$ y que, por tanto, no se invertirá en el segundo periodo si ocurre el estado E_B. Si no se descuenta el futuro y se recibe información completa al final del primer periodo, los beneficios esperados de invertir en el primer periodo son

$$G + qG_A + (1-q)G_B - C$$

y los beneficios esperados de no invertir en el primer periodo e invertir en el

[14]Podría considerarse que todas las ganancias se expresan como ganancias adicionales en relación a las ganancias en el mejor uso alternativo al que puede dedicarse el dinero que requiere la inversión considerada.

segundo periodo sólo si ocurre E_A son

$$q(G_A - C) + 0.$$

Por tanto, el beneficio esperado adicional de aplazar la decisión de invertir (o valor de la flexibilidad: VF) es

$$VF = q(G_A - C) - (G + qG_A + (1-q)G_B - C) = (1-q)(C - G_B) - G$$

Así, VF es positivo si $(1-q)(C-G_B) > G$ y, en ese caso, aumenta con C y disminuye con q, con G_B y con G. Nótese, también, que VF aumenta si se produce un aumento en G_A y una disminución en G_B de forma que $qG_A + (1-q)G_B$ permanezca constante, es decir, si hay más incertidumbre sobre los beneficios futuros. Si $(1-q)(C-G_B) < G$ el beneficio adicional de aplazar la decisión de invertir es negativo y, en consecuencia, el decisor debe realizar la inversión en el primer periodo.

Si se descuenta el futuro, con un factor de descuento igual a δ, el beneficio adicional de aplazar la decisión de invertir sería (se descuentan las ganancias G_A y G_B, que son unidades monetarias obtenidas en el segundo periodo, y los costes de la inversión, cuando ésta se realiza en el segundo periodo):

$$VF = \delta q(G_A - C) - (G + \delta(qG_A + (1-q)G_B) - C) = (1-\delta q)C - \delta(1-q)G_B - G$$

En consecuencia, cuando δ aumenta el beneficio esperado adicional de aplazar la decisión de invertir disminuye si $G_B > \frac{-qC}{1-q}$ y aumenta si $G_B < \frac{-qC}{1-q}$.[15] Si, en el caso en que $G_B > \frac{-qC}{1-q}$, hubiera un aumento en δ y, también, un aumento en la incertidumbre sobre los beneficios futuros (un aumento en G_A y una disminución en G_B de forma que $qG_A + (1-q)G_B$ permanezca constante, por ejemplo), existirían dos efectos de signo contrario sobre el beneficio esperado adicional de aplazar la decisión de invertir y la variación en VF dependería de cuál de los dos efectos domine.[16] Un cambio en δ podría hacer que el

[15] Un aumento en δ puede, por ejemplo, producirse como consecuencia de una disminución en el tipo de interés.

[16] A veces, la inversión en el presente se reduce aunque los tipos de interés disminuyan. La razón, a menudo, es que hay un aumento en la incertidumbre sobre el futuro que causa un aplazamiento de las inversiones por parte de las empresas. En ese caso, el efecto del aumento en la incertidumbre sobre el beneficio adicional de aplazar la decisión de invertir es mayor que el efecto de una disminución de los tipos de interés sobre ese beneficio adicional.

decisor cambie su decisión e invierta en el primer periodo, en vez de esperar al segundo periodo para tomar su decisión.

Considérese ahora que no se descuenta el futuro y que, mientras no se realice la inversión, puede obtenerse un rendimiento alternativo con el dinero que cuesta la inversión. Así, si el rendimiento que puede obtenerse en el primer periodo es rC (r podría ser el tipo de interés) y el que puede obtenerse en el conjunto de los periodos siguientes es γC (γ podría ser igual a $(1+r)^n$ si hay n periodos después del primero), los beneficios esperados de no invertir en el primer periodo e invertir en el segundo periodo sólo si ocurre E_A serían:

$$rC + q(G_A - C) + (1-q)\gamma C$$

En consecuencia, el decisor preferirá aplazar su decisión de invertir al segundo periodo si

$$rC + q(G_A - C) + (1-q)\gamma C > G + qG_A + (1-q)G_B - C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C > \frac{G + (1-q)G_B}{r + (1-q)(1+\gamma)} \Leftrightarrow (1-q)(C - G_B) + C(r + \gamma(1-q)) > G$$

Por tanto, un aumento en r o en γ hace que el decisor esté más dispuesto a posponer su decisión de inversión hasta el segundo periodo.

El adelanto o retraso en la llegada de la información también puede afectar a la decisión de invertir. Considérese que no se descuenta el futuro, que no puede obtenerse un rendimiento alternativo con el dinero que cuesta la inversión y que G son las ganancias que proporciona la inversión tanto en el primer periodo como en el segundo periodo, y G_A y G_B a las ganancias que proporciona la inversión, respectivamente, en los periodos tercero y siguientes en el estado E_A y en el estado E_B. Nótese que, en esta situación, la inversión se realiza en uno de los tres primeros periodos o no se realiza nunca.

Si la información completa llega al final del primer periodo, el decisor no esperará al tercer periodo para decidir sobre la inversión. Los beneficios esperados de invertir en el primer periodo son

$$G + G + qG_A + (1-q)G_B - C$$

Los beneficios de esperar la llegada de información completa para decidir sobre la inversión e invertir en el segundo periodo sólo si ocurriera E_A son

$$q(G + G_A - C)$$

Si la información completa llega, en cambio, al final del segundo periodo, el decisor no realizará la inversión en el segundo periodo, ya que obtendría más beneficios realizando esa inversión en el primer periodo (si realizara la inversión en el segundo periodo perdería las ganancias del primer periodo). Los beneficios esperados de invertir en el primer periodo siguen siendo los mismos que cuando la información llega al final del primer periodo.Los beneficios de esperar a la llegada de la información completa y realizar la inversión en el tercer periodo, si ocurre E_A, serían

$$q(G_A - C)$$

Si el decisor esperara al tercer periodo para invertir cuando llegue información completa al final del segundo periodo, también esperaría al segundo periodo para invertir si la información llegara al final del primer periodo, ya que $q(G + G_A - C) > q(G_A - C)$. Pero puede ocurrir que el decisor invierta en el primer periodo si la información llega al final del segundo periodo y que, en cambio, espere al segundo periodo para invertir si la información llega al final del primer periodo. Esto último ocurrirá si

$$q(G + G_A - C) > G + G + qG_A + (1 - q)G_B - C > q(G_A - C) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2G}{1-q} + G_B > C > \frac{2-q}{1-q}G + G_B \Leftrightarrow$$
$$2G > (1 - q)(C - G_B) > (2 - q)G.$$

En este caso, un adelanto en la llegada de la información retrasa la realización de la inversión. Nótese, sin embargo, que los beneficios esperados del decisor aumentan cuando la incertidumbre se resuelve antes.

8 Ejercicios propuestos y soluciones

Esta sección incluye una serie de ejercicios que ilustran y aplican los análisis desarrollados en las secciones anteriores. La sección incluye también las soluciones de los ejercicios propuestos, aunque en algunos casos esas soluciones se presentan de forma abreviada.

8.1 Valor de la información completa

Ejercicio A: Petición de ordenadores para la campaña de Navidad

El dueño de una tienda de informática tiene que decidir el número de ordenadores de un determinado tipo que va a pedir a su suministrador para la campaña de Navidad. Puede vender cada ordenador a 1200 euros pero no sabe cuál va a ser la cantidad demandada de ese tipo de ordenadores. Cree que hay una probabilidad igual a 0,4 de que la cantidad demandada sea 100 ordenadores y una probabilidad igual a 0,6 de que la cantidad demandada sea 60 ordenadores. Considérese que el dueño de la tienda es neutral ante el riesgo y tiene que elegir entre dos alternativas: pedir 100 ordenadores a su suministrador o pedirle 60 ordenadores. Si le pide 60 ordenadores, tiene que pagar 820 euros por cada uno al suministrador. Si, en cambio, le pide 100 ordenadores, cada uno le cuesta 700 euros (el suministrador le hace un descuento cuando le compra más ordenadores). Si el dueño de la tienda devuelve un ordenador al suministrador, éste sólo le reintegra la mitad de lo que había pagado el dueño de la tienda por ese ordenador. Se desea analizar qué valor tendría una información completa (que resuelva completamente la incertidumbre) para el dueño de esta tienda.

Si, en el momento de realizar la petición de ordenadores al suministrador, el dueño de la tienda no conociera el precio al que se van a poder vender los ordenadores, ¿cómo dependería el valor de la información completa del precio r estimado por el dueño de la tienda? Considérese que $r > 820$.

Solución

En este Ejercicio los estados son la situación en la que la cantidad demandada es 100 (expansión fuerte) y la situación en la que la cantidad demandada es 60 (expansión moderada o recesión). Las alternativas son pedir 100 ordenadores al suministrador y pedir 60 ordenadores al suministrador.

Si el dueño de la tienda no recibe ninguna información que resuelva su incertidumbre escogerá aquella alternativa que maximice sus beneficios esperados, dadas las probabilidades que asigna a cada nivel de demanda. El beneficio esperado si pide 60 ordenadores al suministrador es $60(1200-820) = 22800$, y el beneficio esperado si pide 100 ordenadores es:

$$0,6\,[60(1200-700)+(100-60)(350-700)]+$$
$$+0,4\,[100(1200-700)]=29600$$

Por tanto, el dueño de la tienda pedirá 100 ordenadores si no recibe información. En este caso espera ganar 16000 euros con una probabilidad 0,6 y 50000 euros con una probabilidad 0,4.

Consideremos ahora que el dueño de la tienda puede adquirir un servicio de información que le proporciona información completa sobre cuál va a ser la demanda de ese tipo de ordenadores (supongamos, por ejemplo, que se realiza un buen estudio de mercado que suministra esa información). En este caso el dueño de la tienda comprará 60 ordenadores si el servicio de información le dice que la cantidad demandada va a ser igual a 60 y, en cambio, comprará 100 ordenadores si el servicio de información le dice que la cantidad demandada va a ser igual a 100. Como el decisor cree inicialmente que hay una probabilidad igual a 0,6 de que la demanda sea 60, cree también que la probabilidad de que la información (completa) indique que la demanda es 60 será 0,6, y, análogamente, cree que la probabilidad de que la información (completa) indique que la demanda es 100 será 0,4. La ganancia esperada cuando se recibe información completa es, por tanto:

$$0,6\,[60(1200-820)]+0,4\,[100(1200-700)]=33680$$

En consecuencia, el valor de la información completa es:

$$33680 - 29600 = 4080$$

El dueño de la tienda estaría dispuesto a pagar hasta 4080 euros por un estudio de mercado que proporcionara información completa.

Con un servicio que le proporcione información completa el dueño de la tienda de informática consigue evitar la compra de 100 ordenadores cuando la demanda resulta ser 60 (con lo que evita tener que devolver 40 ordenadores y perder dinero con esas devoluciones). Sin embargo, al pedir 60 ordenadores cuando la demanda resulte ser 60 tendrá que pagar 820 por cada ordenador al suministrador en vez de los 700 euros que habría pagado si hubiera pedido 100 ordenadores.

Si el dueño de la tienda cree que el precio al que se van a poder vender los ordenadores va a ser r, la ganancia esperada si pide 60 ordenadores al suministrador será $60(r - 820)$ (como $r > 820$ pedir 60 ordenadores al suministrador es una alternativa viable) y la ganancia esperada si pide 100 ordenadores será $0,4(100(r-700))+0,6(60(r-700)+(100-60)(350-700) = 0,4(100(r-700)) + 0,6(60r - 56000)$. Como

$$0,4(100(r - 700)) + 0,6(60r - 56000) > 60(r - 820) \Leftrightarrow r > 775,$$

y hemos considerado que $r > 820$, el dueño de la tienda de informática pedirá 100 ordenadores al suministrador si no obtiene información.

La ganancia esperada con información completa es $0,4(100(r - 700)) + 0,6(60(r - 820))$. Por tanto, el valor de la información completa es $0,6(60(r-820)-(60r-56000)) = 4080$. El valor de la información completa no depende de r en este Ejercicio, ya que las pérdidas por devoluciones de ordenadores al suministrador no dependen del precio al que se venden los ordenadores. $\square$

Ejercicio B: Petición de ordenadores para la campaña de Navidad con aversión al riesgo

Resuelva de nuevo el Ejercicio A considerando que el dueño de la tienda de informática es averso al riesgo de forma que la utilidad que le proporcionan unas ganancias iguales a x es $u(x) = \sqrt{x}$. Analice el caso en el cada ordenador puede venderse a 1200 euros.

Solución

Si no recibe ninguna información que resuelva su incertidumbre, la utilidad esperada del dueño de la tienda de informática con cada decisión será:

$$U(60) = \sqrt{60(1200 - 820)} = 151$$

$$U(100) = 0,6\sqrt{60(1200 - 700) + 40(350 - 700)} +$$
$$+0,4\left[\sqrt{100(1200 - 700)}\right] = 165,34$$

El dueño de la tienda pedirá 100 ordenadores si no recibe información también cuando tiene el grado de aversión al riesgo que considerado en este ejercicio.

Si el dueño de la tienda recibe información completa sobre cuál va a ser la demanda de ese tipo de ordenadores comprará 60 ordenadores si la demanda va a ser igual a 60 y, en cambio, comprará 100 ordenadores si la demanda es igual a 100. Como el decisor cree inicialmente que hay una probabilidad igual a 0,6 de que la demanda sea 60, cree también que la probabilidad de que la información (completa) indique que la demanda es 60 será 0,6, y, análogamente, cree que la probabilidad de que la información (completa) indique que la demanda es 100 será 0,4. La utilidad esperada del decisor cuando se recibe información completa es, por tanto:

$$0,6\sqrt{60(1200 - 820)} + 0,4\sqrt{100(1200 - 700)} = 180,04$$

Para calcular el valor de la información completa (la máxima cantidad que estaría dispuesto a pagar el dueño de la tienda de ordenadores por esa información completa) resolvemos

$$0,6\sqrt{60(1200-820)-x}+0,4\sqrt{100(1200-700)-x}=165,34$$

La solución es $x = 4862,8$. El dueño de la tienda estaría dispuesto a pagar hasta $4862,8$ euros por un estudio de mercado que proporcionara información completa. Esta cantidad es superior a la cantidad (4080 euros) que estaba dispuesto a pagar por esa información un dueño de la tienda neutral ante el riesgo (véase el Ejercicio A). $\square$

Ejercicio C: Elección de cultivo

Un agricultor debe decidir qué cultivar en una finca que posee. Está indeciso entre los cultivos A y B ya que sus ganancias pueden dependen de si la primavera es lluviosa o seca. Si cultiva A sus ganancias son 400 independientemente de lo lluviosa que sea la primavera. Si cultiva B sus ganancias son 450 si la primavera es lluviosa y 225 si la primavera es seca. El agricultor es neutral ante el riesgo y cree que hay una probabilidad p de que la primavera sea seca. Conteste a las siguientes preguntas:

i) ¿para qué valores de p decidirá el agricultor cultivar A?,

ii) si existe la posibilidad de adquirir una información que predice con certeza el tiempo que hará en primavera, ¿cuál es el valor de esa información para el agricultor?

Solución

i) Cuando el agricultor no recibe información ganará 400 si cultiva A y $225p+(1-p)450 = 450-225p$ si cultiva B. Como $400 > 450-225p \Leftrightarrow p > \frac{2}{9}$, el agricultor cultivará A si su p es tal que $p > \frac{2}{9}$ y, en cambio, cultivará B si su p es tal que $p < \frac{2}{9}$ (estará indiferente entre ambas alternativas cuando $p = \frac{2}{9}$).

ii) Si la información indica que la primavera será seca el agricultor cultivará A y ganará 400. Si la información indica que la primavera será lluviosa el agricultor cultivará B y ganará 450. Por tanto, la ganancia esperada con esta información completa es:

$$400p + 450(1 - p) = 450 - 50p$$

El valor de esta información completa depende de p. Si $p < \frac{2}{9}$ (sin información cultivaría B) el valor de la información completa es:

$$450 - 50p - (450 - 225p) = 175p$$

Si $p > \frac{2}{9}$ (sin información cultivaría A) el valor de la información completa es:

$$450 - 50p - (400) = 50 - 50p$$

El valor de la información es máximo cuando $p = \frac{2}{9}$ (el valor de la información aumenta con p cuando $p < \frac{2}{9}$ y disminuye con p cuando $p > \frac{2}{9}$). Cuando $p = \frac{2}{9}$ el agricultor está indiferente entre cultivar A o cultivar B y es entonces cuando la información resulta más útil para elegir entre ambas alternativas.

Nótese que este Ejercicio es un caso particular de la situación analizada en la sección 2.2. Los estados son aquí "primavera lluviosa" y "primavera no lluviosa", $x = 450 - 400 = 50$ y $z = 400 - 225 = 175$. $\square$

Ejercicio D: Establecimiento de una oficina comercial en un país extranjero

Un empresario de la Unión Europea que es neutral ante el riesgo tiene que decidir si establece o no una delegación u oficina comercial en el país H. El empresario sabe que la Unión Europea está negociando un acuerdo comercial con ese país y cree que hay una probabilidad p de que el acuerdo se firme. Si el empresario establece la delegación y se firma el acuerdo sus ganancias son 200 (millones de euros), y si establece una delegación y no se firma el acuerdo sus pérdidas son 40. Si el empresario no establece una delegación sus ganancias son cero. Conteste las siguientes preguntas:

i) ¿para qué valores de p decidirá el empresario establecer la delegación si no recibe ninguna información sobre la firma del acuerdo?,

ii) ¿qué valor tendría para el empresario conocer con seguridad si se va a firmar el acuerdo con H o no?

Solución

Este Ejercicio es un caso particular de la situación analizada en la sección 2.2. Aquí el empresario tiene que decidir si establece una delegación u oficina comercial en el país H, los estados son la situación en la que la que se firma el acuerdo comercial con el país H (éxito) y la situación en la que no se firma el acuerdo con el país H (fracaso), $x = 200$ y $z = 40$. Si no obtiene información el empresario establece la delegación sólo si $p > \frac{40}{200+40} = \frac{1}{6}$. El valor de la información completa es $200p$ si $p \leq \frac{1}{6}$ y $40(1-p)$ si $p \geq \frac{1}{6}$. $\square$

Ejercicio E: Dos alternativas de inversión e información completa

Un decisor puede elegir entre dos alternativas para invertir una cantidad determinada. Si invierte en la alternativa o activo A conseguirá una ganancia igual a x_A si la situación económica evoluciona bien (expansión fuerte) o una pérdida igual a z_A si la situación económica evoluciona peor (expansión moderada o recesión), con $x_A > 0$ y $z_A > 0$. Si invierte en la alternativa o activo B conseguirá una ganancia igual a x_B si hay una expansión fuerte en la economía o una pérdida igual a z_B si hay una expansión moderada o recesión, con $x_B > 0$ y $z_B > 0$. El decisor cree que la probabilidad de expansión fuerte es p y la probabilidad de expansión moderada o recesión es $1 - p$. Considérese que $x_A \geq x_B$, que $z_A \geq z_B$ y que las dos alternativas son diferentes. Si el decisor no realiza la inversión sus ganancias son cero. Calcule el valor de la información completa.

Solución

La ganancia esperada del decisor si invierte en la alternativa A es $px_A - (1-p)z_A$ y su ganancia esperada si invierte en la alternativa B es $px_B - (1-p)z_B$. Por tanto, cuando no recibe información no invierte si $0 \geq \max(px_A - (1-p)z_A, px_B - (1-p)z_B)$ ($\Leftrightarrow p < \min\left\{\frac{z_A}{x_A+z_A}, \frac{z_B}{x_B+z_B}\right\}$) y decide invertir si $0 < \max(px_A + (1-p)z_A, px_B - (1-p)z_B)$. En este último caso invierte en A si $px_A - (1-p)z_A > px_B - (1-p)z_B$ ($\Leftrightarrow p > \frac{z_A - z_B}{x_A - x_B + z_A - z_B}$), invierte en B si $px_A - (1-p)z_A < px_B - (1-p)z_B$ e invierte en cualquiera de las dos alternativas si $px_A - (1-p)z_A = px_B - (1-p)z_B$.

Nótese que $x_A z_B < x_B z_A \Leftrightarrow \frac{z_B}{x_B+z_B} < \frac{z_A}{x_A+z_A}$ y que, además, $x_A z_B < x_B z_A \Leftrightarrow \frac{z_A}{x_A+z_A} < \frac{z_A-z_B}{x_A-x_B+z_A-z_B}$. Por tanto, cuando $\frac{x_A}{z_A} < \frac{x_B}{z_B}$ un decisor que no reciba información invierte en A si $\frac{z_A-z_B}{x_A-x_B+z_A-z_B} \leq p \leq 1$, invierte en B si $\frac{z_B}{x_B+z_B} < p \leq \frac{z_A-z_B}{x_A-x_B+z_A-z_B}$ y no invierte si $0 \leq p \leq \frac{z_B}{x_B+z_B}$. Cuando $\frac{x_A}{z_A} \geq \frac{x_B}{z_B}$, en cambio, un decisor que no reciba información invierte en A si $\frac{z_A}{x_A+z_A} < p \leq 1$ y no invierte si $0 \leq p \leq \frac{z_A}{x_A+z_A}$. Un decisor que no reciba información nunca invierte en B cuando $\frac{x_A}{z_A} \geq \frac{x_B}{z_B}$.

Si el decisor recibiera información completa y la información le dijera que va a haber una expansión económica fuerte invertiría en A si $x_A > x_B$ y estaría indiferente entre invertir en A o en B si $x_A = x_B$. Si la información le dijera que va a haber una expansión moderada o una recesión no invertiría. Como cree que hay una probabilidad p de que haya una expansión, cree también que hay una probabilidad p de que la información completa diga que va a haber una expansión en la economía y, por tanto, que hay una probabilidad $1-p$ de que la información completa diga que va a haber una recesión. Así, con información completa la ganancia esperada del decisor es px_A.

El valor de la información completa (o diferencia entre la ganancia esperada con información completa y la ganancia esperada sin información) se presenta en tres partes, en función de la decisión que se toma cuando no se recibe información:

i) Caso en el que se invierte en la alternativa A si no se recibe información ($\frac{x_A}{z_A} < \frac{x_B}{z_B}$ y $\frac{z_A - z_B}{x_A - x_B + z_A - z_B} \leq p \leq 1$, o $\frac{x_A}{z_A} \geq \frac{x_B}{z_B}$ y $\frac{z_A}{x_A + z_A} < p \leq 1$). El valor de la información es $VI = (1-p)z_A$.

ii) Caso en el que se invierte en la alternativa B si no se recibe información ($\frac{x_A}{z_A} < \frac{x_B}{z_B}$ y $\frac{z_B}{x_B + z_B} < p \leq \frac{z_A - z_B}{x_A - x_B + z_A - z_B}$). El valor de la información es $VI = p(x_A - x_B) + (1-p)z_B$.

iii) Caso en el que no se invierte si no se recibe información ($\frac{x_A}{z_A} < \frac{x_B}{z_B}$ y $0 \leq p \leq \frac{z_B}{x_B + z_B}$, o $\frac{x_A}{z_A} \geq \frac{x_B}{z_B}$ y $0 \leq p \leq \frac{z_A}{x_A + z_A}$). El valor de la información es $VI = px_A$.

Nótese que el valor de la información es positivo o nulo en todos los casos presentados. Cuando $p = 0$, o cuando $p = 1$, el valor de la información es cero. En estos casos el decisor está seguro de lo que va a ocurrir y cree que la información completa solamente va a confirmar sus creencias (por supuesto, puede equivocarse) y no está dispuesto a pagar nada por esa información. Cuando $\frac{x_A}{z_A} < \frac{x_B}{z_B}$ el valor de la información es máximo en $p = \frac{z_A - z_B}{x_A - x_B + z_A - z_B}$ si $\frac{d(p(x_A - x_B) + (1-p)z_B)}{dp} = x_A - x_B - z_B \geq 0$, y en $p = \frac{z_B}{x_B + z_B}$ si $x_A - x_B - z_B \leq 0$. Cuando $\frac{x_A}{z_A} \geq \frac{x_B}{z_B}$ el valor de la información es máximo en $p = \frac{z_A}{x_A + z_A}$. $\square$

8.2 Valor de la información incompleta

Ejercicio F: Renovación de producto y publicidad

Considérese una empresa que tiene que tomar decisiones en un contexto de incertidumbre en el que no sabe cómo va a variar en el futuro la demanda de productos como el suyo. En concreto, la demanda futura puede ser menor (estado E_1), igual (estado E_2) o mayor (estado E_3) que la actual. La empresa tiene que decidir entre las siguientes tres alternativas:

$\rightarrow A$: seguir como hasta ahora en términos de características del producto de la empresa y niveles de publicidad,

$\rightarrow B$: mantener las características del producto y realizar una campaña publicitaria intensa, y

$\rightarrow C$: renovar profundamente el producto y lanzarlo al mercado mediante la correspondiente campaña publicitaria.

El empresario o gerente que debe elegir entre estas tres alternativas es neutral ante el riesgo. Las creencias iniciales de ese decisor son tales que asigna la misma probabilidad a priori a cada estado ($\Pr(E_1)=\Pr(E_2)=\Pr(E_3)=\frac{1}{3}$). Las ganancias que se derivan de cada alternativa dependen del estado en que se desarrollen esas alternativas. Las ganancias que se obtienen con cada alternativa en cada estado (en miles de euros) se recogen en la siguiente matriz (un número negativo indica pérdidas):

	E_1	E_2	E_3
A	24	60	96
B	0	80	130
C	-30	74	151

Así, por ejemplo, renovar profundamente el producto y lanzarlo al mercado mediante la correspondiente campaña publicitaria sería la mejor alternativa si la demanda va a ser mayor en el futuro. Conteste las siguientes preguntas:

i) ¿qué alternativa escogerá la empresa si no recibe información sobre cuál va a ser la demanda futura?,

ii) ¿qué alternativa escogerá la empresa si recibe información completa sobre la demanda futura?, ¿qué valor tiene para ella esa información?,

iii) ¿qué alternativa escogerá la empresa si recibe una información (incompleta) sobre la demanda futura que sólo le informa sobre si va a aumentar la demanda o no (es decir, que sólo le informa sobre si va a ocurrir el estado E_3 o no)?, ¿qué valor tiene esa información para la empresa?

Solución

Este Ejercicio puede resolverse utilizando el análisis incluido en las secciones 2.1, 3 y 4.1.

i) e ii): Si la empresa no recibiera información escogería la alternativa B (mantener las características del producto y realizar una campaña publicitaria intensa), ya que es la que le proporciona la mayor ganancia esperada, y tendría una ganancia esperada igual 70. Si la empresa recibiera información completa sobre cuál va a ser la demanda futura de productos como el suyo escogerá A si el servicio de información informa que el estado es E_1, B si informa que E_2 y C si informa que E_3. La ganancia esperada (a priori) con este servicio de información perfecta sería:

$$\frac{1}{3}.24 + \frac{1}{3}.80 + \frac{1}{3}.151 = 85$$

Por tanto, el decisor estará dispuesto a pagar como máximo por ese servicio de información completa: $85 - 70 = 15$ con lo que el valor de la información completa es 15.

iii) Un servicio de información incompleta que sólo informa sobre si E_3 ocurrirá o no es un servicio que no puede distinguir entre E_1 y E_2. Si el servicio de información informa que el estado es E_3 la empresa hará C. Si la información recibida indica que E_3 no ocurrirá la empresa asignará las mismas probabilidades a posteriori (es decir, una vez recibida esa información) a los estados E_1 y E_2 y, por tanto, creerá que hay una probabilidad $\frac{1}{2}$ de que el estado sea el E_1 y una probabilidad $\frac{1}{2}$ de que el estado sea E_2. Si la empresa recibe el mensaje de que E_3 no ocurrirá decidirá realizar la acción A ya que la ganancia esperada con cada acción será:

ganancia esperada (A)=$\frac{1}{2}(24+60)$=42
ganancia esperada (B)=$\frac{1}{2}(0+80)$=40
ganancia esperada (C)=$\frac{1}{2}(-30+74)$=22

La empresa, conforme a sus creencias iniciales cree que hay una probabilidad $\frac{1}{3}$ de que el mensaje indique que E_3 ocurrirá y una probabilidad

$\frac{2}{3}$ de que el mensaje indique que E_3 no ocurrirá. Por tanto, la ganancia esperada (a priori) con este servicio de información incompleta es:

$$\frac{2}{3}.42 + \frac{1}{3}.151 = \frac{235}{3}$$

Por tanto, la empresa estará dispuesta a pagar como máximo por ese servicio de información incompleta: $\frac{235}{3} - 70 = 8,33$. Lógicamente el valor de un servicio de información incompleta, en este caso $8,33$, es menor que el valor de la información completa (15). □

Ejercicio G: Revisión de creencias

Considere una situación en la que hay tres posibles estados, E_1, E_2 y E_3, y las probabilidades a priori que asigna un decisor neutral ante el riesgo a cada estado son $\Pr(E_1) = 0,1$, $\Pr(E_2) = 0,5$ y $\Pr(E_3) = 0,4$. Se puede conseguir o generar información sobre los estados y esa información consiste en la recepción del mensaje M_1 o del mensaje M_2. Calcule las probabilidades que asignaría el decisor a cada estado después de recibir cada mensaje (probabilidades revisadas o a posteriori) en los siguientes casos:

i) El decisor cree que las probabilidades de recibir cada mensaje en cada estado ($\Pr(M/E)$) vienen dadas por la siguiente matriz:

$\Pr(M/E)$	E_1	E_2	E_3
M_1	$0,9$	$0,3$	0
M_2	$0,1$	$0,7$	1

ii) Los mensajes sólo informan sobre si va a ocurrir el estado E_2 o no, de forma que si el decisor recibe el mensaje M_1 sabrá que ocurrirá E_2, pero si recibe el mensaje M_1 sólo sabrá que no ocurrirá E_2 (y que, por tanto puede ocurrir E_1 o E_3).

Solución

i) A partir del análisis desarrollado en la sección 3 sabemos que $\Pr(M_j) = \sum_{i=1}^{3}(\Pr(M_j/E_i)\Pr(E_i))$, $j = 1, 2$. Por tanto, $\Pr(M_1) = 0,24$ y $\Pr(M_2) = 0,76$. Aplicando la Regla de Bayes:

$$\Pr(E_i/M_j) = \frac{\Pr(M_j/E_i)\Pr(E_i)}{\Pr(M_j)}$$

se obtiene:

$\Pr(E/M)$	M_1	M_2
E_1	$0,375$	$0,013$
E_2	$0,625$	$0,461$
E_3	0	$0,526$

Si la información consiste en el mensaje M_1 el decisor cambia la distribución de probabilidades a priori sobre los estados (0,1, 0,5, 0,4) por la distribución de probabilidades a posteriori (0,375, 0,625, 0) que es más favorable para los estados 1 y 2. Si la información consiste en el mensaje M_2 ocurre lo contrario.

ii) Un servicio de información incompleta que sólo informa sobre si E_2 ocurrirá o no es un servicio que no puede distinguir entre E_1 y E_3. Si la información recibida indica que E_2 ocurrirá (E_2 sí), las probabilidades a posteriori para el decisor (es decir, las probabilidades revisadas una vez recibida esa información) serán $\Pr(E_1/E_2\ sí) = 0$, $\Pr(E_2/E_2\ sí) = 1$ y $\Pr(E_3/E_2\ sí) = 0$. Si la información recibida indica que E_2 no ocurrirá (E_2 no), el decisor mantendrá la misma proporción entre las probabilidades de los estados E_1 y E_3 que tenía a priori (no hay ninguna razón para cambiar sus creencias iniciales sobre cuánto más probable es E_3 que E_1) y, por tanto, seguirá creyendo que E_3 es cuatro veces más probable que E_1. Así, las probabilidades a posteriori para el decisor, cuando la información recibida indica que E_2 no ocurrirá, serán $\Pr(E_1/E_2\ no) = \frac{0,1}{0,1+0,4} = 0,2$, $\Pr(E_2/E_2\ no) = 0$ y $\Pr(E_3/E_2\ no) = \frac{0,4}{0,1+0,4} = 0,8$. $\square$

Ejercicio H: Elección entre alternativas

Un decisor neutral ante el riesgo que tiene que decidir entre las acciones A, B y C. Las ganancias que se derivan de cada acción dependen del estado (de la economía, etc...) en que se desarrollen esas acciones. Hay tres estados posibles que denominamos E_1, E_2 y E_3. Las creencias iniciales del decisor son tales que asigna la misma probabilidad a priori a cada estado ($\Pr(E_1)=\Pr(E_2)=\Pr(E_3)=\frac{1}{3}$). Las ganancias que se obtienen con cada acción $X \in \{A, B, C\}$ en cada estado $g(X/E)$ se recogen en la siguiente matriz:

$g(X/E)$	E_1	E_2	E_3
A	1	5	9
B	6	2	8
C	7	4	3

Conteste las siguientes preguntas:

i) ¿Cuál es el valor de la información completa?

ii) ¿Cuál es el valor de un servicio de información que sólo informa sobre si ocurrirá E_2 o si no ocurrirá E_2?

iii) ¿Cuál es el valor de un servicio de información incompleta con tres mensajes posibles, M_1, M_2 y M_3, tales que las probabilidades de cada mensaje dado cada estado ($\Pr(M/E)$) son:

$\Pr(M/E)$	E_1	E_2	E_3
M_1	$0,6$	$0,2$	$0,1$
M_2	$0,3$	$0,6$	$0,3$
M_3	$0,1$	$0,2$	$0,6$

?

iv) ¿Cuál es el valor de un servicio de información incompleta con tres mensajes posibles, N_1, N_2 y N_3, tales que las probabilidades de cada mensaje dado cada estado ($\Pr(N/E)$) son:

$\Pr(N/E)$	E_1	E_2	E_3
N_1	$0,45$	$0,4$	$0,3$
N_2	$0,25$	$0,3$	$0,3$
N_3	$0,3$	$0,3$	$0,4$

?

Solución

Véanse las secciones 2.1, 3 y 4.1.

i) Si el decisor no recibe información escogerá la acción B, que es la que le proporciona la mayor ganancia esperada, y su ganancia esperada será $\frac{16}{3}$. Si el decisor recibe información completa sobre el estado hará C si el servicio de información informa que el estado es E_1, A si informa que E_2 y A si informa que E_3 y su ganancia esperada (a priori) con este servicio de información perfecta será:

$$\frac{1}{3}.7+\frac{1}{3}.5+\frac{1}{3}.9=\frac{21}{3}$$

Por tanto, el valor de la información completa es $\frac{5}{3}$.

ii) Un servicio de información que sólo informa sobre si ocurrirá E_2 o si no ocurrirá E_2 no permite distinguir entre E_1 y E_3. Si el servicio de información informa que el estado es E_2 el decisor hará A. Si la información recibida indica que E_2 no ocurrirá el decisor asignará las mismas probabilidades a posteriori (es decir, una vez recibida esa información) a los estados E_1 y E_3 y, por tanto, creerá que hay una probabilidad $\frac{1}{2}$ de que el estado sea el E_1 y una probabilidad $\frac{1}{2}$ de que el estado sea E_3. Las razones para estas probabilidades a posteriori de los estados E_1 y E_3 son que a priori el decisor creía que todos los estados eran igual de probables y que el mensaje recibido, que E_2 no ocurrirá, no da al decisor ningún argumento para dejar de creer que E_1 y E_3 son igual de probables.

Por tanto, si el decisor recibe como mensaje que E_2 no ocurrirá decidirá realizar la acción B ya que:

ganancia esperada $(A)=\frac{1}{2}(1+9)=\frac{10}{2}$
ganancia esperada $(B)=\frac{1}{2}(6+8)=\frac{14}{2}$
ganancia esperada $(C)=\frac{1}{2}(7+3)=\frac{10}{2}$

El decisor, conforme a sus creencias iniciales cree que hay una probabilidad $\frac{1}{3}$ de que el mensaje indique que E_2 ocurrirá y una probabilidad

$\frac{2}{3}$ de que el mensaje indique que E_2 no ocurrirá. Por tanto, la ganancia esperada (a priori) con este servicio de información incompleta es:

$$\frac{2}{3}.\frac{14}{2}+\frac{1}{3}.5=\frac{19}{3}$$

Así, el decisor estará dispuesto a pagar como máximo por ese servicio de información completa: $\frac{19}{3}-\frac{16}{3}=\frac{3}{3}=1$.

iii) Con este servicio de información incompleta hay que calcular $\max_{X\in\{A,B,C\}}\left\{\sum_{i=1}^{3}\Pr(M_j/E_i)\Pr(E_i)g(X/E_i)\right\}$ para cada mensaje M_j, con $j\in\{1,2,3\}$. Se obtiene:

$$\begin{array}{c}\sum_{i=1}^{3}\Pr(M_1/E_i)\Pr(E_i)g(A/E_i)=\frac{2,5}{3}\\ \sum_{i=1}^{3}\Pr(M_1/E_i)\Pr(E_i)g(B/E_i)=\frac{4,8}{3}\\ \sum_{i=1}^{3}\Pr(M_1/E_i)\Pr(E_i)g(C/E_i)=\frac{5,3}{3}\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\sum_{i=1}^{3}\Pr(M_2/E_i)\Pr(E_i)g(A/E_i)=2\\ \sum_{i=1}^{3}\Pr(M_2/E_i)\Pr(E_i)g(B/E_i)=1,8\\ \sum_{i=1}^{3}\Pr(M_2/E_i)\Pr(E_i)g(C/E_i)=1,8\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\sum_{i=1}^{3}\Pr(M_3/E_i)\Pr(E_i)g(A/E_i)=\frac{6,5}{3}\\ \sum_{i=1}^{3}\Pr(M_3/E_i)\Pr(E_i)g(B/E_i)=\frac{5,8}{3}\\ \sum_{i=1}^{3}\Pr(M_3/E_i)\Pr(E_i)g(C/E_i)=\frac{3,3}{3}\end{array}$$

Por tanto, la ganancia esperada con este servicio de información incompleta es $\frac{5,3}{3}+2+\frac{6,5}{3}=\frac{17,8}{3}$ y el valor de esa información incompleta es $\frac{17,8}{3}-\frac{16}{3}=\frac{1,8}{3}$. El valor de este servicio de información incompleta es menor que el valor del servicio de información incompleta considerado en el apartado b).

Para cualquier mensaje M_j y para cualquier alternativa X ocurre que:

$$\sum_{i=1}^{3}\Pr(E_i/M_j)g(X/E_i)=\frac{1}{\Pr(M_j)}\sum_{i=1}^{3}\Pr(M_j/E_i)\Pr(E_i)g(X/E_i).$$

Por tanto, la alternativa para la que se maximiza $\sum_{i=1}^{3}\Pr(M_j/E_i)\Pr(E_i)g(X/E_i)$ será la alternativa escogida cuando se recibe el mensaje M_j. Así, el decisor hará C si recibe el mensaje M_1 y hará A tanto si recibe el mensaje M_2 como si recibe el mensaje M_3.

iv) Con este servicio de información incompleta hay que calcular $\max_{X\in\{A,B,C\}}\left\{\sum_{i=1}^{3}\Pr(N_j/E_i)\Pr(E_i)g(X/E_i)\right\}$ para cada mensaje N_j, con $j\in\{1,2,3\}$. Se obtiene:

$$\begin{array}{c}\sum_{i=1}^{3}\Pr(N_1/E_i)\Pr(E_i)g(A/E_i)=\frac{5{,}15}{3}\\ \sum_{i=1}^{3}\Pr(N_1/E_i)\Pr(E_i)g(B/E_i)=\frac{5{,}9}{3}\\ \sum_{i=1}^{3}\Pr(N_1/E_i)\Pr(E_i)g(C/E_i)=\frac{5{,}65}{3}\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\sum_{i=1}^{3}\Pr(N_2/E_i)\Pr(E_i)g(A/E_i)=\frac{4{,}45}{3}\\ \sum_{i=1}^{3}\Pr(N_2/E_i)\Pr(E_i)g(B/E_i)=\frac{4{,}5}{3}\\ \sum_{i=1}^{3}\Pr(N_2/E_i)\Pr(E_i)g(C/E_i)=\frac{3{,}85}{3}\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\sum_{i=1}^{3}\Pr(N_3/E_i)\Pr(E_i)g(A/E_i)=\frac{5{,}4}{3}\\ \sum_{i=1}^{3}\Pr(N_3/E_i)\Pr(E_i)g(B/E_i)=\frac{5{,}6}{3}\\ \sum_{i=1}^{3}\Pr(N_3/E_i)\Pr(E_i)g(C/E_i)=\frac{4{,}5}{3}\end{array}$$

Cualquiera que sea el mensaje que reciba (N_1, N_2 o N_3), el decisor hará B. El valor de este servicio de información es, por tanto, nulo, ya que el decisor sabe que debe hacer B, independientemente de lo que diga la información. En efecto, la ganancia esperada con este servicio de información incompleta es $\frac{5{,}9}{3}+\frac{4{,}5}{3}+\frac{5{,}6}{3}=\frac{16}{3}$ y el valor de esa información incompleta es $\frac{16}{3}-\frac{16}{3}=0$.

Nota: El apartado ii) podría haberse resuelto como los apartados iii) e iv). Para ello basta con observar que en ii) la probabilidad de los mensajes dados los estados es (sea M_1 el mensaje que indica que E_2 ocurrirá y M_2 el mensaje que indica que E_2 no ocurrirá):

$\Pr(M/E)$	E_1	E_2	E_3
M_1	0	1	0
M_2	1	0	1

Ejercicio I: Decisión de inversión e información incompleta

Un decisor neutral ante el riesgo tiene que decidir si realiza una inversión en un activo arriesgado. Si no realiza la inversión sus beneficios son cero. Si realiza la inversión sus beneficios son 100 si el estado es E (expansión económica) y -40 (negativos) si el estado es R (recesión económica). La probabilidad que el decisor asigna a priori al estado E es 0,3.

i) ¿Qué acción realizará el decisor si no recibe información adicional?

ii) Suponga que el decisor puede recibir como información los mensajes M_1 y M_2, de forma que cree que la probabilidad de recibir el mensaje M_1 si el estado es E es 0,6 y la probabilidad de recibir el mensaje M_1 si el estado de la naturaleza es R es 0,2. Determine cuál es el valor de este servicio de información incompleta.

Solución

Véase el análisis realizado en la sección 4.3. En este Ejercicio $p = 0,3$, $x = 100$ y $z = 40$.

Si el decisor no recibe información decidirá invertir en el activo arriesgado ya que la ganancia esperada si invierte es 20. En el servicio de información incompleta considerado $q = 0,6$, $r = 0,8$ y $\frac{z}{x+z} < p < \frac{rz}{(1-q)x+rz}$. Por tanto, el valor de ese servicio de información incompleta es $-p(1-q)x+(1-p)rz = 10,4$. $\square$

Ejercicio J: Búsqueda de petróleo mediante perforaciones

Considere un decisor neutral ante el riesgo que es dueño de una finca en la que puede haber petróleo. El decisor tiene que decidir si realiza perforaciones en su terreno o no, y cree que la probabilidad de que haya petróleo (estado E_1) es $\frac{1}{3}$ y, por tanto, la probabilidad de que no haya petróleo (estado E_2) es $\frac{2}{3}$. Si decide perforar gana 1000 millones de euros si encuentra petróleo pero pierde 300 millones de euros si no encuentra petróleo (o si la cantidad o características cualitativas del petróleo que encuentra desaconsejan su extracción). Si decide no perforar sus ganancias son cero. Para conseguir información el dueño de la finca puede encargar un estudio geológico del terreno. Conteste las siguientes preguntas:

i) Hay una probabilidad igual a 0,6 de que el estudio geológico suministre información completa y una probabilidad igual a 0,4 de que ese estudio no sea capaz de proporcionar ninguna información útil al decisor. ¿Cuánto estaría dispuesto a pagar como máximo el decisor por ese estudio geológico?

ii) ¿Realizará perforaciones el dueño del terreno si el estudio geológico sólo le proporciona información incompleta (sobre si hay petróleo o no en su finca) de forma que la empresa cree que si el estado es E_1 el estudio geológico dirá que hay petróleo en la finca con una probabilidad $0,6$, pero que si el estado es E_2 el estudio geológico dirá que hay petróleo en la finca con una probabilidad de sólo $0,2$?, ¿Qué valor tiene esa información incompleta para la empresa?

iii) Obtenga el valor del estudio geológico considerado en ii) cuando el dueño de la finca cree que la probabilidad de que haya petróleo (estado E_1) es $\frac{1}{4}$ y pierde 400 millones de euros si realiza perforaciones y no encuentra petróleo.

Solución

Este Ejercicio es un caso particular de las situaciones analizadas en las secciones 2.2 y 4.3. Aquí el empresario tiene que decidir si realiza perforaciones para buscar petróleo, los estados son la situación en la que se encuentra petróleo (éxito) y la situación en la que no se encuentra petróleo (fracaso), $p = \frac{1}{3}$, $x = 1000$ y $z = 300$.

i) Si no obtiene información el dueño de la finca decide realizar perforaciones en su finca ya que $\frac{1}{3} > \frac{z}{x+z} = \frac{300}{1300} = 0,231$. El valor de la información completa es $(1 - \frac{1}{3})300 = 200$ millones de euros. Como sólo hay una probabilidad igual a 0,6 de que el estudio geológico proporcione información completa lo máximo que estaría dispuesto a pagar el dueño de la finca por el estudio geológico sería $0,6(200) = 120$.

ii) En este caso $q = 0,6$, $r = 0,8$ y $\frac{z}{x+z} < p < \frac{rz}{(1-q)x+rz}$. El valor del servicio de información incompleta considerado es $-p(1-q)x+(1-p)rz = \frac{80}{3}$.

iii) En este caso, el dueño de la finca no hará perforaciones en su terreno si no obtiene información ya que $\frac{1}{4} < \frac{z}{x+z} = \frac{400}{1400}$. Ahora $\frac{(1-r)z}{qx+(1-r)z} < p < \frac{z}{x+z}$ y el valor del servicio de información incompleta considerado es $pqx - (1-p)(1-r)z = 90$. $\square$

Ejercicio K: Comercialización de un producto nuevo

Una empresa neutral ante el riesgo ha desarrollado un producto nuevo y tiene que decidir si introducirlo en el mercado (comercializarlo) o no. Si comercializa el producto y la comercialización es un éxito la empresa gana 8 (millones de euros). Pero si comercializa el producto y la comercialización fracasa la empresa pierde 2. La empresa cree que hay un 40 por ciento de posibilidades de que el producto sea un éxito (estado E_1) y un 60 por ciento de posibilidades de que el producto fracase (estado E_2). Si no comercializa el producto su ganancia es 0. Si la empresa puede conseguir información, la forma en que obtiene esa información es con un estudio de mercado o mediante un test de mercado consistente en lanzar el producto en una ciudad, región o país que considera representativo del mercado total. Deseamos contestar las siguientes preguntas:

i) ¿comercializará su producto la empresa si no consigue información sobre cuál va a ser el resultado, éxito o fracaso, que obtendrá si lanza su producto en el mercado total?,

ii) ¿comercializará su producto la empresa si, mediante un estudio o test de mercado, consigue información completa sobre cuál va a ser el resultado, éxito o fracaso, que obtendrá si lanza su producto en el mercado total?, ¿qué valor tiene para ella esa información completa?,

iii) ¿comercializará su producto la empresa si el test sólo le proporciona información incompleta (sobre cuál va a ser el resultado, éxito o fracaso, que obtendrá si lanza su producto en el mercado total) de forma que la empresa cree que si el estado es E_1 el test tendrá éxito con una probabilidad $\frac{6}{7}$, pero si el estado es E_2, la probabilidad de que el test tenga éxito es sólo $\frac{2}{7}$?, ¿qué valor tiene esa información incompleta para la empresa?,

iv) considere que la empresa puede realizar el test de mercado en la ciudad (región o país) C o en la ciudad (región o país) D. Realizando el test de mercado en C obtiene información completa y, en cambio, realizándolo en D obtiene la información incompleta analizada en la pregunta c) (puede considerarse que C es más representativa del mercado total o más grande que D). Si los costes de realizar los tests de mercado son, respectivamente, 0,6 en C y 0,3 en D, ¿en cuál de las dos ciudades (regiones o países) realizará el test de mercado la empresa?

Solución

Este Ejercicio puede resolverse utilizando los desarrollos incluidos en las secciones 2.1 y 4.1. Aquí la empresa tiene que decidir si comercializa el producto nuevo, los estados son la situación en la que la que la comercialización es un éxito y la situación en la que la comercialización fracasa, $p = 0,4$, $x = 8$ (millones) y $z = 2$ (millones). Si no obtiene información la empresa decide comercializar el producto ya que $0,4 > \frac{2}{8+2} = 0,2$. El valor de la información completa es $(1 - 0,4)2 = 1,2$ millones de euros. En la información incompleta de la parte c) del Ejercicio es $q = \frac{6}{7}$ y $r = \frac{5}{7}$. Como $\frac{6}{7} + \frac{5}{7} > 1$ y $\frac{z}{x+z} = 0,2 < p = 0,4 < \frac{rz}{(1-q)x+rz} = 0,55$, el valor de esa información incompleta es $-p(1-q)x+(1-p)rz = 0,4$. Es mejor realizar el test en la ciudad C que en la ciudad D porque la diferencia entre el valor de la información (completa) y el coste de obtener esa información en C es $1,2 - 0,6 = 0,6$ y, en cambio, la diferencia entre el valor de la información (incompleta) y el coste de esta información en D es $0,4 - 0,3 = 0,1$. $\square$

8.3 Valor de la flexibilidad

Ejercicio L: ¿Invertir ahora, o esperar y decidirlo más adelante?

Un decisor neutral ante el riesgo tiene que elegir entre las alternativas Invertir (I) y No Invertir (NI) en el primer periodo en un contexto en el que hay incertidumbre sobre los beneficios de la inversión en los periodos segundo y siguientes. La alternativa I es irreversible (no se puede deshacer la inversión realizada y recuperar el dinero invertido) y la alternativa NI es totalmente flexible. Así, si hace NI en el primer periodo puede decidir entre hacer NI o hacer I en los periodos segundo y siguientes. La incertidumbre se resuelve, completa o parcialmente, al principio del segundo periodo.

En el futuro (periodos segundo y siguientes) puede ocurrir el estado E_A o puede ocurrir el estado E_B. El decisor cree que hay una probabilidad 0,6 de que ocurra el estado E_A (y, por tanto, cree que $\Pr(E_B) = 0,4$).

Las ganancias con la alternativa NI son nulas en cada periodo.[17] La alternativa I proporciona unas ganancias de 200 en el primer periodo (en el presente). Las ganancias que se obtienen con la alternativa I en el futuro (en los demás periodos), expresadas en unidades monetarias del periodo segundo, son 3000 si el estado es E_A y 1000 si el estado es E_B. Se considera que, o no se realiza nunca la inversión o la inversión se realiza en uno de los dos primeros periodos. Por último, realizar la alternativa I tiene un coste de 1800 (es la cuantía de la inversión a realizar). Ese coste se paga en el periodo en el que se realiza la inversión.

Calcule el valor de la flexibilidad, considerando que una unidad monetaria ganada en el futuro equivale a una unidad monetaria ganada en el presente (por tanto, el decisor no descuenta el futuro y su factor de descuento es uno), en las siguientes situaciones:

i) se recibe información completa al final del primer periodo,

ii) se recibe información completa al final del primer periodo en una situación en la que, mientras no se realice la inversión, puede obtenerse un rendimiento de los 1800 euros que cuesta esa inversión que es igual a 100 en el primer periodo y a 700 en el conjunto de los periodos segundo y siguientes,

[17] Podría considerarse que todas las ganancias se expresan como ganancias adicionales en relación a las ganancias en el mejor uso alternativo al que puede dedicarse el dinero que requiere la inversión considerada.

iii) se recibe información completa al final del primer periodo en una situación en la que la alternativa I proporciona unas ganancias de 200 en cada uno de los periodos primero y segundo, y unas ganancias en el conjunto de los demás periodos tercero y siguientes iguales a 3000 si el estado es E_A y 1000 si el estado es E_B,

iv) se recibe información completa al final del segundo periodo en la situación considerada en iii).

Solución

i) Los beneficios esperados de invertir en el primer periodo son positivos ya que

$$200 + 0,6(3000) + 0,4(1000) - 1800 = 600 > 0$$

(es decir, el valor presente neto esperado de la inversión es positivo). Sin embargo, no es esa la mejor alternativa para el decisor. Es mejor no invertir en el primer periodo e invertir en el segundo periodo sólo si el estado es E_A (y, por tanto, no invertir si el estado resulta ser E_B) ya que, entonces, los beneficios esperados son

$$0,6(3000 - 1800) + 0 = 720 > 600$$

En este último caso la inversión sólo se realiza si el estado es E_A y, por tanto, el coste de la inversión sólo se paga con una probabilidad 0,6. El beneficio adicional si se aplaza la decisión de invertir (si se mantiene la opción de hacer I o hacer NI en el futuro) es 720-600=120. Este es el valor de optar por la alternativa flexible o valor de la flexibilidad (VF).

Si se realiza la inversión en el primer periodo hay que tener en cuenta el coste de oportunidad que supone la pérdida de la opción de decidir sobre la inversión en el segundo periodo. Ese coste de oportunidad es 720 en este ejemplo y, por tanto, el beneficio neto esperado de realizar la inversión en el primer periodo, en vez de esperar hasta el segundo periodo, es 600-720=-120<0.[18]

[18] Al invertir en el primer periodo, en vez de esperar al segundo periodo, el decisor consigue apropiarse de las ganancias (200) del primer periodo, pero se arriesga a perder 1800-1000=800 en el segundo periodo, con una probabilidad igual a 0,4. Por tanto, al invertir en el primer periodo sus ganancias esperadas varían en 200-0,4(800)=-120.

ii) Los beneficios esperados de no invertir en el primer periodo, e invertir en el segundo periodo sólo si ocurre E_A serían:

$$100 + 0,6(3000 - 1800) + 0,4(700) = 1100$$

Por tanto, en este caso, el valor de la flexibilidad sería 1100-600=500.

iii) Nótese que, en esta situación, la inversión se realiza en uno de los tres primeros periodos o no se realiza nunca. Si la información completa llega al final del primer periodo, el decisor no esperará al tercer periodo para decidir sobre la inversión. Los beneficios esperados de invertir en el primer periodo son

$$200 + 200 + 0,6(3000) + 0,4(1000) - 1800 = 800$$

Si el decisor esperara a la llegada de la información completa para decidir sobre la inversión sólo realizaría la inversión, en el segundo periodo, si ocurriera E_A. Los beneficios de esta alternativa serían

$$0,6(200 + 3000 - 1800) = 840$$

Por tanto, si la información completa llegara al final del primer periodo el decisor aplazaría la inversión hasta el segundo periodo y sólo invertiría si ocurre E_A. El valor de la flexibilidad sería 840-800=40.

iv) En este caso el decisor no realizará la inversión en el segundo periodo, ya que obtendría más beneficios realizando esa inversión en el primer periodo. Los beneficios esperados de invertir en el primer periodo son 800, como antes, y si realizara la inversión en el segundo periodo perdería las ganancias del primer periodo. Alternativamente, el decisor podría esperar a la llegada de la información completa y realizar la inversión en el tercer periodo si ocurre E_A. Los beneficios de esta alternativa serían

$$0,6(3000 - 1800) = 720$$

Por tanto, si la información completa llegara al final del segundo periodo el decisor realizaría la inversión en el primer periodo.

Si comparamos este resultado con el obtenido en iii), obtenemos que, en este caso, un adelanto en la llegada de información retrasa la realización de la inversión. Nótese, sin embargo, que los beneficios esperados del decisor aumentan cuando la incertidumbre se resuelve antes. □

Ejercicio M: Disponibilidad en el futuro de una tecnología nueva con un coste de instalación incierto

Considérese un mercado en el que la venta de un producto permite obtener 200 como ganancias en el primer periodo y 2000 en el conjunto de los periodos segundo y siguientes. Para fabricar ese producto puede utilizarse la tecnología T, que está disponible desde el primer periodo. El coste de instalación de esa tecnología es 1800. En el segundo periodo va a estar disponible una tecnología nueva N cuyo coste de instalación es incierto. Este coste será 1200 con probabilidad 0,6 y 2500 con probabilidad 0,4. Esta incertidumbre se resuelve al final del primer periodo.

Cambiar de la tecnología T a la tecnología N es muy costoso. Así, el decisor, que es neutral ante el riesgo, tiene dos alternativas: empezar a fabricar el producto en el primer periodo utilizando la tecnología T y continuar utilizando esa tecnología en los periodos siguientes, o esperar hasta el segundo periodo para empezar a fabricar el producto y decidir entonces qué tecnología utilizar. Calcule el valor de la flexibilidad (de esperar hasta el segundo periodo para decidir la tecnología a utilizar).

Solución

Si se decide esperar hasta el segundo periodo para decidir la tecnología a utilizar, se escogerá la tecnología N para fabricar el producto si el coste de instalación de esa tecnología es 1200 y se utilizará, en cambio, la tecnología T para fabricar el producto si el coste de instalación de la tecnología N es 2500. Si se empezara a fabricar el producto en el primer periodo (con la tecnología T) los beneficios serían

$$200 + 2000 - 1800 = 400$$

Si se empezara a fabricar el producto en el segundo periodo los beneficios serían

$$0,6(2000-1200)+0,4(2000-1800)=560>400$$

El valor de la flexibilidad, o de mantener la opción de adoptar la nueva tecnología, es, por tanto, 560-400=160.[19] $\square$

Ejercicio N: Elección entre alternativas y flexibilidad

Un decisor neutral ante el riesgo tiene que elegir en un contexto de dos periodos (presente y futuro) entre las alternativas A, B y C. La alternativa A es flexible y las alternativas B y C son irreversibles. En el futuro puede ocurrir el estado E_1 o puede ocurrir el estado E_2. El decisor cree que hay una probabilidad 0,6 de que ocurra el estado E_1 (y, por tanto, cree que $\Pr(E_2)=0,4$).

Las ganancias de cada acción en el presente y en el futuro (en el futuro en función de que ocurra E_1 o E_2) se recogen en la tabla siguiente:

	presente	*futuro* E_1	*futuro* E_2
A	100	120	90
B	120	190	60
C	130	40	220

Este ejercicio se desarrolla en tres apartados que analizan, respectivamente, la importancia de: i) grado de resolución de la incertidumbre en el futuro, ii) el grado de flexibilidad de las alternativas (es decir, los costes de cambiar a otras alternativas) e iii) la ponderación del futuro en la decisión a tomar:

i) grado de resolución de la incertidumbre en el futuro

Analicemos en primer lugar la importancia del grado de resolución de la incertidumbre, como consecuencia de la información que se espera recibir u

[19] No se está considerando que pueda obtenerse un rendimiento del dinero que no se utiliza en el primer periodo cuando se decide esperar al segundo periodo para empezar a producir. Esto podría añadirse fácilmente al análisis.

obtener en el futuro. Esta información llegará al final del periodo presente, antes de que se tome una decisión sobre la alternativa que se llevará a cabo en el futuro (si existe margen para escoger una alternativa en el futuro, es decir, si no se ha escogido una alternativa irreversible en el presente). Después de esa elección de alternativa en el futuro, se resuelve la incertidumbre y se sabe cuál es el estado en el futuro. Considérese que para el decisor una unidad monetaria ganada en el futuro equivale a una unidad monetaria ganada en el presente. Por tanto, el decisor no descuenta el futuro y su factor de descuento es uno. Considérese, también, que la alternativa A es totalmente flexible. Deseamos contestar las siguientes preguntas:

a) ¿qué alternativas escogerá el decisor, en el presente y en el futuro, si no espera la llegada de información sobre cuál va a ser el estado futuro?,

b) ¿qué alternativas escogerá el decisor, en el presente y en el futuro, si espera la llegada de información completa, al final del periodo presente, sobre cuál va a ser el estado futuro?, ¿qué valor tiene esa información para el decisor?, ¿es valiosa la flexibilidad?,

c) ¿qué alternativas escogerá el decisor, en el presente y en el futuro, si espera la llegada, al final del periodo presente, de información incompleta (sobre cuál va a ser el estado futuro) que proporcione el mensaje M_1 (va a ocurrir E_1) o el mensaje M_2 (va a ocurrir E_2), de forma que la empresa cree que, si el estado es E_1, la probabilidad de recibir el mensaje M_1 es $\frac{6}{7}$, pero que, si el estado es E_2, la probabilidad de recibir el mensaje M_1 es sólo $\frac{1}{7}$?, ¿qué valor tiene esa información para el decisor?, ¿es valiosa la flexibilidad?,

d) ¿qué alternativas escogerá el decisor, en el presente y en el futuro, si espera la llegada, al final del periodo presente, de información incompleta que proporcione el mensaje N_1 (va a ocurrir E_1) o el mensaje N_2 (va a ocurrir E_2), de forma que la empresa cree que, si el estado es E_1, la probabilidad de recibir el mensaje N_1 es $0,7$, pero que, si el estado es E_2, la probabilidad de recibir el mensaje N_1 es $0,4$ (nótese que esta información es más incompleta que la información incompleta considerada en c)?, ¿qué valor tiene esa información para el decisor?, ¿es valiosa la flexibilidad?, *Solución*

a) Si el decisor no espera la llegada de información que resuelva parcial o totalmente la incertidumbre existente en el futuro, tomará su decisión teniendo en cuenta las ganancias esperadas con cada posible alternativa o combinación de alternativas que pueda escoger. Si el decisor hace B en el presente, tendrá que hacer también B en el futuro, ya que la alternativa B es irreversible. Por la misma razón, tendrá que hacer C en el futuro si decide C en el presente. En cambio, si realiza A en el presente, podrá seguir en el futuro con A o cambiar a B o a C, ya que A es flexible.

La ganancia esperada si el decisor hace A en el presente y en el futuro es

$$100 + 0,6(120) + 0,4(90) = 208$$

La ganancia esperada si el decisor hace B en el presente y en el futuro es

$$120 + 0,6(190) + 0,4(60) = 258$$

Por último, la ganancia esperada si el decisor hace C en el presente y en el futuro es

$$130 + 0,6(40) + 0,4(220) = 242$$

Nótese que el decisor prefiere hacer B en el presente y en el futuro que hacer A en el presente y B en el futuro, ya que la única diferencia entre estas dos alternativas es lo que se hace en el presente, y ocurre que en el presente B es mejor que A. Por la misma razón, el decisor prefiere hacer C en el presente y en el futuro que hacer A en el presente y C en el futuro. En consecuencia, las alternativas A en el presente y B en el futuro, y A en el presente y C en el futuro, nunca serán escogidas por el decisor. Por tanto, teniendo en cuenta los cálculos anteriores, el decisor hará B en el presente y B en el futuro cuando no recibe información, y su ganancia esperada será 258.

b) Si el decisor recibe información que resuelve completamente su incertidumbre sobre el futuro, creerá que la probabilidad de que la información (completa) indique que el estado será E_1 es 0,6, ya que cree inicialmente que hay una probabilidad igual a 0,6 de que el estado sea E_1. Por la misma razón, el decisor creerá que la probabilidad de que la información indique que el estado es E_2 será 0,4.

Cuando el decisor recibe información al final del periodo presente, querrá elegir en el futuro aquella alternativa que, en función de la información recibida, proporcione mayor ganancia. En este caso, el decisor en el futuro querrá hacer B si la información dice que el estado futuro va a ser E_1, y querrá hacer C si la información dice que el estado futuro va a ser E_2. Para adaptarse de forma óptima a la información recibida, y hacer B si la información dice que el estado va a ser E_1 y C si la información dice que el estado va a ser E_2, el decisor tiene que escoger A en el presente, ya que A es flexible. Estudiemos cuál es la ganancia que espera obtener el decisor si realiza A en el presente y se adapta de forma óptima a la información recibida, es decir, si hace B cuando la información dice que el estado futuro va a ser E_1 y hace C cuando la información dice que el estado futuro va a ser E_2. La ganancia esperada con esta alternativa será:

$$100 + 0,6(190) + 0,4(220) = 302$$

Por tanto, cuando el decisor espera la llegada de información completa al final del primer periodo puede obtener una ganancia esperada (302) mayor que la máxima ganancia esperada que puede obtener si no espera la llegada de información adicional (258). A la diferencia entre la máxima ganancia esperada que puede obtener con información y la máxima ganancia esperada que puede obtener sin información le llamamos valor de la flexibilidad (o valor de la información completa recibida por el decisor). En este caso el valor de la flexibilidad es $302 - 258 = 44$.[20]

c) Ahora el decisor recibe una información incompleta (sobre cuál va a ser el estado futuro) al final del periodo presente, que proporciona el mensaje M_1

[20] Si la alternativa que el decisor prefiere realizar (en el futuro) con cada mensaje recibido fuera la misma, la flexibilidad sólo sería valiosa si sus beneficios en el presente fueran mayores que los beneficios en el presente de esa alternativa que es la mejor a realizar en el futuro. En este Ejercicio, la flexibilidad no sería valiosa si la alternativa elegida con cada mensaje recibido fuera la misma.

o el mensaje M_2, y que resuelve parcialmente su incertidumbre sobre el futuro. El decisor cree que, si el estado es E_1, la probabilidad de recibir el mensaje M_1 es $\frac{6}{7}$, pero que, si el estado es E_2, la probabilidad de recibir el mensaje M_1 es sólo $\frac{1}{7}$. Para calcular las ganancias con cada alternativa, cuando se espera la llegada de información, necesitamos las probabilidades a posteriori y las probabilidades de recibir cada mensaje. Para obtenerlas utilizamos el método general de revisión de creencias desarrollado en la sección 3. Las probabilidades de cada mensaje dado cada estado ($\Pr(M/E)$) son:

$\Pr(M/E)$	M_1	M_2
E_1	$\frac{6}{7}$	$\frac{1}{7}$
E_2	$\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$

Por tanto, la probabilidad de obtener cada mensaje será:

$$\Pr(M_1) = \frac{6}{7}(0,6) + \frac{1}{7}(0,4) = \frac{4}{7}$$

$$\Pr(M_2) = \frac{1}{7}(0,6) + \frac{6}{7}(0,4) = \frac{3}{7}$$

Para calcular las probabilidades a posteriori de cada estado dado cada mensaje ($\Pr(E/M)$), utilizamos el Teorema de Bayes:

$$\Pr(E/M) = \Pr(E)\frac{\Pr(M/E)}{\Pr(M)}$$

Por tanto:

$\Pr(E/M)$	M_1	M_2
E_1	$0,9$	$0,2$
E_2	$0,1$	$0,8$

Cuando recibe información al final del periodo presente, el decisor puede estar interesado en hacer A en el presente y elegir en el futuro aquella alternativa que proporcione mayor ganancia esperada. Como con cada mensaje (con cada revisión de probabilidades de los estados) puede cambiar la alternativa que proporciona mayor ganancia esperada en el futuro, haciendo A en el presente (es decir, optando por la alternativa flexible) el decisor puede realizar en el futuro una alternativa determinada si el mensaje recibido es M_1 y, en cambio, escoger otra alternativa distinta si el mensaje recibido es M_2.

Estudiamos en primer lugar qué alternativa querría realizar en el futuro el decisor para cada uno de los mensajes del servicio de información. Si el mensaje recibido es M_1, la ganancia esperada con cada alternativa en el futuro será (nótese que $\Pr(E_1/M_1) = 0,9$):

$$\begin{array}{rc} A: & 0,9(120) + 0,1(90) = 117 \\ B: & 0,9(190) + 0,1(60) = 177 \\ C: & 0,9(40) + 0,1(220) = 58 \end{array}$$

Por tanto, si el decisor recibiese el mensaje M_1 querría hacer en el futuro la alternativa B.

Si el mensaje recibido es M_2, la ganancia esperada con cada alternativa en el futuro será (nótese que $\Pr(E_1/M_2) = 0,2$):

$$\begin{array}{rc} A: & 0,2(120) + 0,8(90) = 96 \\ B: & 0,2(190) + 0,8(60) = 86 \\ C: & 0,2(40) + 0,8(220) = 184 \end{array}$$

En consecuencia, si el decisor recibiese el mensaje M_2 querría hacer en el futuro la alternativa C. Así, el decisor querría realizar en el futuro B si recibiese el mensaje M_1, pero desearía realizar C si recibiese el mensaje M_2. Por tanto, el decisor sólo puede adaptarse de forma óptima a la información recibida si realiza la alternativa A en el presente, ya que A es la única alternativa flexible flexible. Estudiemos cuál es la ganancia que espera obtener el decisor si realiza A en el presente y se adapta de forma óptima a la información recibida, es decir, si hace B cuando recibe el mensaje M_1 y C cuando recibe el mensaje M_2. La ganancia esperada en ese caso será:

$$100 + \Pr(M_1)(177) + \Pr(M_2)(184) = 280$$

La diferencia entre la máxima ganancia esperada que puede obtener el decisor con la información incompleta y la máxima ganancia esperada que puede obtener sin información es el valor de la flexibilidad (o valor de la información incompleta recibida por el decisor). En este caso, por tanto, el valor de la flexibilidad será $280 - 258 = 22$. Lógicamente, el valor de la flexibilidad es menor cuando se recibe información incompleta que cuando se recibe información completa.

Nótese que para calcular la ganancia esperada en el futuro cuando decide A en el presente podríamos haber procedido como en la sección 7.1. Habría que calcular $\max_{X\in\{A,B,C\}}\left\{\sum_{i=1}^{2}\Pr(M_j/E_i)\Pr(E_i)g(X/E_i)\right\}$ para cada mensaje M_j, con $j \in \{1,2\}$. Se obtiene:

$$
\begin{array}{c}
\frac{6}{7}(0.6)(120)+\frac{1}{7}(0.4)(90)=66.857\\
\frac{6}{7}(0.6)(190)+\frac{1}{7}(0.4)(60)=101.14\\
\frac{6}{7}(0.6)(40)+\frac{1}{7}(0.4)(220)=33.143
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
\frac{1}{7}(0.6)(120)+\frac{6}{7}(0.4)(90)=41.143\\
\frac{1}{7}(0.6)(190)+\frac{6}{7}(0.4)(60)=36.857\\
\frac{1}{7}(0.6)(40)+\frac{6}{7}(0.4)(220)=78.857
\end{array}
$$

El decisor querría realizar en el futuro B si recibiese el mensaje M_1, pero desearía realizar C si recibiese el mensaje M_2. Por tanto, el decisor sólo puede adaptarse de forma óptima a la información recibida si escoge la alternativa A en el presente, ya que A es la única alternativa flexible flexible. La ganancia que espera obtener el decisor si realiza A en el presente y se adapta de forma óptima a la información recibida, es decir, si hace B cuando recibe el mensaje M_1 y C cuando recibe el mensaje M_2 será:

$$100+101.14+78.857=279,997$$

Por tanto, el valor de la flexibilidad es 279,997-258=21,997.[21]

d) Calculando $\max_{X\in\{A,B,C\}}\left\{\sum_{i=1}^{2}\Pr(N_j/E_i)\Pr(E_i)g(X/E_i)\right\}$ para cada mensaje N_j, con $j \in \{1,2\}$, se obtiene (véase la sección 7.1):

$$
\begin{array}{c}
0.7(0.6)(120)+0.4(0.4)(90)=64.8\\
0.7(0.6)(190)+0.4(0.4)(60)=89.4\\
0.7(0.6)(40)+0.4(0.4)(220)=52.0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
0.3(0.6)(120)+0.6(0.4)(90)=43.2\\
0.3(0.6)(190)+0.6(0.4)(60)=48.6\\
0.3(0.6)(40)+0.6(0.4)(220)=60.0
\end{array}
$$

[21] La diferencia con el valor obtenido mediante el procedimiento anterior se debe al número limitado de decimaled considerado en este caso.

Así, el decisor querría realizar en el futuro B si recibiese el mensaje N_1 pero desearía realizar C si recibiese el mensaje N_2. Por tanto, el decisor sólo puede adaptarse de forma óptima a la información recibida si escoge la alternativa A en el presente ya que A es flexible. La ganancia que espera obtener el decisor si realiza A en el presente y se adapta de forma óptima a la información recibida, es decir, si hace B cuando recibe el mensaje N_1 y C cuando recibe el mensaje N_2 será:

$$100 + 89,4 + 60 = 249,4$$

Por tanto, en este caso el decisor no escoge la alternativa flexible cuando espera recibir esa información incompleta, incluso aunque sea totalmente flexible (no hay costes de cambiar de A a otras alternativas). El decisor prefiere escoger B en el presente, aunque sea una alternativa irreversible. La razón es que las ganancias que se obtienen al adaptarse en el futuro a la información recibida no compensan por la pérdida de ganancias en el presente cuando se elije la alternativa A, en vez de la alternativa B.

ii) grado de flexibilidad

Estudiemos ahora la importancia del grado de flexibilidad (es decir, de los costes de cambiar a otras alternativas). Si la alternativa A es parcialmente flexible (es decir, si hay costes de cambiar de A a la alternativa B y/o a la alternativa C), ¿cómo varían la elección del decisor y el valor de la flexibilidad con los costes de cambio cuando se espera la llegada de la información incompleta de la pregunta c) del apartado i)? Analícese la situación cuando cuesta 12 cambiar de A a B y 18 cambiar de A a C. Si el coste de cambiar de A a B aumenta hasta x, donde $x > 12$, ¿para qué valores de x se obtiene un valor de la flexibilidad positivo?

Solución

Nótese, en primer lugar, que, si cuesta x cambiar de A a B y 18 cambiar de A a C, la mejor respuesta a M_2 sigue siendo C y la mejor respuesta a M_1 sigue siendo B si $x < 60$. Por tanto, si $x = 12$, la ganancia que espera obtener el decisor si realiza A en el presente y se adapta de forma óptima a la información recibida, es decir, si hace B cuando recibe el mensaje M_1 y C cuando recibe el mensaje M_2 será:

$$100 + \Pr(M_1)(177 - 12) + \Pr(M_2)(184 - 18) = 265,43$$

Por tanto, el valor de la flexibilidad en este caso será $265,43 - 258 = 7,43$. Como era de esperar, al ser A menos flexible (hay costes de cambio para pasar a otras alternativas) la ganancia del decisor al decidir A (en vez de escoger la mejor de las alternativas irreversibles) es menor que la obtenida en el apartado c) de i). Este nuevo valor de la flexibilidad puede obtenerse también sustrayendo el valor esperado de los costes de cambio, asociados a esa adaptación de forma óptima a la información recibida, del valor de la flexibilidad obtenido en el apartado c) de i):

$$22 - (\Pr(M_1)(12) + \Pr(M_2)(18)) = 7,43$$

Si los costes de cambio son mayores el valor de la flexibilidad disminuye. Para niveles suficientemente elevados de los costes de cambio, puede ocurrir que al decisor no le interese realizar la alternativa flexible (cuya flexibilidad es menor al aumentar los costes de cambio) en el presente, aunque espere recibir información al final del primer periodo. Si cambiar de A a B cuesta x y cambiar de A a C cuesta 18, la ganancia que espera obtener el decisor si realiza A en el presente y se adapta de forma óptima a la información recibida, es decir, si hace B cuando recibe el mensaje M_1 y C cuando recibe el mensaje M_2 será:

$$100 + \Pr(M_1)(177 - x) + \Pr(M_2)(184 - 18) = 272,29 - \frac{4}{7}x$$

En este caso el valor de la flexibilidad sólo será positivo si $272,29 - \frac{4}{7}x > 258 \Longleftrightarrow x < 25$. Si $x > 25$, el decisor preferirá hacer B en el presente y en el futuro. Nótese que el valor esperado de los costes de cambio asociados a esa adaptación de forma óptima a la información recibida es:

$$\Pr(M_1)(x) + \Pr(M_2)(18) = \frac{4x + 54}{7},$$

y que $22 - \frac{4x+54}{7} > 0 \Leftrightarrow x < 25$.

iii) ponderación del futuro

Consideramos en este apartado la importancia del nivel al que se pondera el futuro para la decisión a tomar. Si el decisor descuenta el futuro, ¿cómo varían la elección del decisor y el valor de la flexibilidad con la tasa de descuento cuando se espera la llegada de la información incompleta de la pregunta c) del apartado i)? Analícese la situación cuando el factor de descuento es 0,8. Considérese que A es totalmente flexible.

Solución

¿Qué ocurre si el decisor descuenta el futuro? La alternativa flexible (A) es la que proporciona menos ganancias en el presente. El interés del decisor en esa alternativa se basa en su flexibilidad, que permite lograr mayores ganancias en el futuro adaptando la alternativa a realizar en el futuro a la información que llegue al final del periodo presente. Por tanto, si se descuentan las ganancias futuras el valor de la flexibilidad disminuirá.

Si el factor de descuento es $\delta = 0,8$ y no hay costes de cambiar de A a otra alternativa, la ganancia esperada si el decisor hace A en el presente y en el futuro es

$$100 + 0,8(0,6(120) + 0,4(90)) = 186,4$$

La ganancia esperada si el decisor hace B en el presente y en el futuro es

$$120 + 0,8(0,6(190) + 0,4(60)) = 230,4$$

Por último, la ganancia esperada si el decisor hace C en el presente y en el futuro es

$$130 + 0,8(0,6(40) + 0,4(220)) = 219,6$$

Por tanto, sin información el decisor haría B en el presente y en el futuro (no hará A en el presente y B o C en el futuro por el mismo argumento presentado en el caso en el que no se descontaba el futuro).

La ganancia que espera obtener el decisor si realiza A en el presente y se adapta de forma óptima a la información recibida, es decir, si hace B cuando recibe el mensaje M_1 y C cuando recibe el mensaje M_2 será:

$$100 + 0,8(\Pr(M_1)(177) + \Pr(M_2)(184)) = 244$$

Por tanto, el valor de la flexibilidad en este caso será $244 - 230,4 = 13,6$, que es menor que el valor de la flexibilidad (22) obtenido para el caso en el que no se descontaba el futuro y no había costes de cambiar de A a otra alternativa.[22] $\square$

[22]No obstante, si la alternativa A proporcionara más beneficios en el presente que otras alternativas, podría ocurrir que el valor de la flexibilidad fuera mayor cuando se descuenta más el futuro.

Lecturas recomendadas y referencias bibliográficas

Una referencia clásica sobre el valor de la información es Hirshleifer y Riley (1992), capítulo 5. Análisis más recientes pueden encontrarse en Birchler y Bütler (2007), capítulos 4 y 5, y en Gollier (2001), capítulo 24. Esos trabajos proporcionan otras referencias útiles. Un análisis completo de la interacción entre información y flexibilidad en el contexto de decisiones de inversión puede encontrarse en Dixit y Pindyck (1994).

Birchler, *U.* y *M. Bütler*, 2007. Information Economics. Routledge. Londres.

Dixit, *A.K.* y *R.S. Pindyck*, 1994. Investment under Uncertainty. Princeton University Press.

Gollier, *C.*, 2001. The Economics of Risk and Time. The MIT Press. Cambridge. Massachusetts.

Hirshleifer, *J.* y *J.G. Riley*, 1992. The Analytics of Uncertainty and Information. Cambridge University Press.