Sarriko-On

Competencia Imperfecta

ISBN: 978-84-692-4353-4

Iñaki Aguirre

06-09

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Ekonomia eta Enpresal-Zientzien Fakultatea

eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Notas sobre

COMPETENCIA IMPERFECTA

Iñaki Aguirre

Departamento de Fundamentos del Análisis Económico I

Universidad del País Vasco

ÍNDICE

Tema 1. **El monopolio**

Introducción

1.1. La maximización de beneficios de un monopolista.

1.2. Demanda lineal y demanda de elasticidad constante.

1.3. Estática comparativa.

1.4. Bienestar y producción.

1.5. La discriminación de precios.

1.6. La discriminación de precios de primer grado.

1.7. La discriminación de precios de segundo grado.

1.8. La discriminación de precios de tercer grado.

Tema 2. **Teoría de Juegos No Cooperativos**

Introducción.

2.1. Nociones fundamentales

2.1.1. Juegos en forma extensiva.

2.1.2. Juegos en forma normal

2.2. Conceptos de solución de juegos no cooperativos.

2.2.1. Criterio de dominación.

2.2.2. Criterio de inducción retroactiva.

2.2.3. Equilibrio de Nash.

2.2.4. Problemas y refinamientos del equilibrio de Nash.

2.3. Juegos repetidos.

2.3.1. Horizonte temporal finito.

2.3.2. Horizonte temporal infinito.

2.4. Conclusiones.

Tema 3. **El oligopolio**

Introducción

3.1. El modelo de Cournot.

3.1.1. Duopolio.

3.1.2. Oligopolio (*n* empresas).

3.1.3. Análisis de bienestar.

3.2. El modelo de Bertrand.

3.2.1. Producto homogéneo.

3.2.2. Producto heterogéneo.

3.3. Liderazgo en la elección de la cantidad. Modelo de Stackelberg.

3.4. Colusión y estabilidad de los acuerdos.

3.4.1. Colusión a corto plazo.

3.4.2. Estabilidad de los acuerdos. Horizonte temporal finito e infinito.

Tema 1. **El monopolio**

Introducción

Decimos que una empresa es un monopolio si es el único vendedor de un bien (o bienes) en un determinado mercado.

Problemas: dificultad para definir *bien* y *mercado*.

Las razones que pueden llevar a una empresa a ser monopolista son por ejemplo:

- Control de materias primas.
- Adquisición del derecho exclusivo de venta (patente, subasta..).
- Mejor acceso al mercado de capitales.
- Rendimientos crecientes a escala..etc.

En contraste con una empresa perfectamente competitiva que se enfrenta a una demanda perfectamente elástica (toma el precio como un dato), un monopolista se enfrenta a la demanda de mercado. Por tanto, una empresa con poder de monopolio sobre un cierto mercado será consciente de que la cantidad de producto que puede vender es una función continua del precio que cobre. Es decir, tendrá en cuenta que reducciones en el nivel de producción elevarán el precio que puede cobrar. El monopolio tiene, por tanto, poder para fijar el precio de mercado. Mientras que podemos considerar a una empresa perfectamente competitiva como precio-aceptante o tomadora de precios, un monopolio es precio-decisor o fijador de precios.

1.1. **La maximización de beneficios de un monopolista**

(i) El problema de maximización de beneficios en precios y en cantidades. Condiciones de primer orden. Condiciones de segundo orden. Interpretación gráfica del problema de maximización.

(ii) Interpretación del ingreso marginal.

(iii) Condición ingreso marginal igual al coste marginal.

(iv) Producción y elasticidad.

(v) Índice de Lerner de poder de monopolio.

(vi) Representación gráfica.

(vii) Condiciones de segundo orden.

(i) *El problema de maximización de beneficios en precios y en cantidades*

Hay dos tipos de restricciones que afectan al comportamiento del monopolista:

a) Restricciones tecnológicas resumidas en la función de costes, $C(x)$.

b) Restricciones de demanda: $x(p)$.

Podemos escribir la función de beneficios del monopolista de dos formas alternativas:

- $\Pi(p) = px(p) - C(x(p))$ utilizando la función de demanda.

- $\Pi(x) = p(x)x - C(x)$ utilizando la función inversa de demanda.

La demanda, $x(p)$, y la inversa de demanda, $p(x)$, representan la misma relación entre precio y cantidad demandada aunque desde ópticas distintas. La función de demanda nos dice cuál es la cantidad demandada a cada uno de los precios mientras que la inversa de demanda nos dice cuál es el precio al que se pueden vender x unidades en el mercado.

$$\begin{array}{ccc} \max\limits_{p} \Pi(p) & & \max\limits_{x\geq 0} \Pi(x) \\ \Downarrow^{p^m} & \equiv & \Downarrow^{x^m} \\ x^m = x(p^m) & & p^m = p(x^m) \end{array}$$

Problema de maximización de beneficios en función del precio

$$\max_{p} \Pi(p) \equiv \max_{p} px(p) - C(x(p))$$

$$\Pi^{'}(p) = x(p) + px^{'}(p) - C^{'}(x(p))x^{'}(p) = 0$$

$$\Pi^{''}(p) = 2x^{'}(p) + px^{''}(p) - C^{''}(x(p))\left[x^{'}(p)\right]^2 - C^{'}(x(p))x^{''}(p) < 0$$

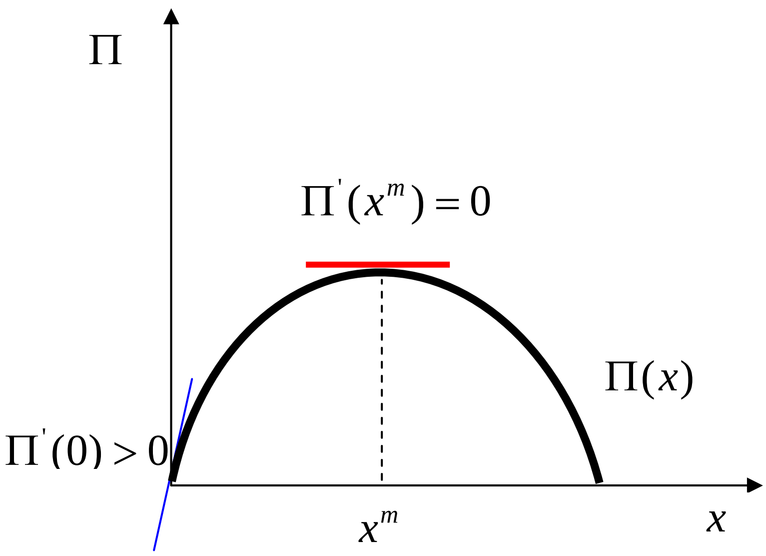
Problema de maximización de beneficios en función de la producción

$$\max_{x\geq 0} \Pi(x) \equiv \max_{x\geq 0} p(x)x - C(x)$$

$$\Pi^{'}(0) = p(0) - C^{'}(0) > 0 \Rightarrow p(0) > C^{'}(0)$$

$\Pi^{'}(x) = p(x) + xp^{'}(x) - C^{'}(x) = 0 \Leftrightarrow \Pi^{'}(x^m) = 0$ Condición de primer orden.

$\Pi^{''}(x) = 2p^{'}(x) + xp^{''}(x) - C^{''}(x) < 0$ Función de beneficios estrictamente cóncava (caso regular).



(ii) *Interpretación del ingreso marginal*

El ingreso marginal, $r'(x)$, es:

$$r'(x) = \underbrace{p(x)} + \underbrace{xp'(x)} \qquad (1)$$

Ingreso adicional por vender una unidad adicional.

Ingreso perdido por tener que vender las unidades ya producidas a un precio menor.

(iii) *Condición ingreso marginal igual a coste marginal*

El nivel de producción que maximiza beneficios (solución interior) satisface:

$$\Pi'(x^m) = r'(x^m) - C'(x^m) = p(x^m) + xp'(x^m) - C'(x^m) = 0 \qquad (2)$$

En el nivel de producción óptimo para el monopolista el beneficio marginal se hace cero, $\Pi'(x^m) = 0;$ es decir, un cambio infinitesimal en el nivel de producción no altera los beneficios. Un nivel de producción tal que $\Pi'(.) > 0$ no puede maximizar beneficios ya que un aumento (infinitesimal) en la producción aumentaría los beneficios. Del mismo modo, un nivel de producción tal que $\Pi'(.) < 0$ no puede maximizar beneficios ya que una reducción (infinitesimal) en la producción aumentaría los beneficios.

En el nivel de producción que maximiza beneficios el ingreso marginal se iguala con el coste marginal, $r'(x^m) = C'(x^m);$ es decir, un cambio infinitesimal en el nivel de producción altera el ingreso total y los costes en la misma medida. (Dicho de otra forma, un aumento infinitesimal en la producción eleva el ingreso en la misma cuantía que lo que aumenta el coste de producción y una reducción infinitesimal en la producción reduce el ingreso en la misma cuantía que lo que se reduce el coste de producción). Un nivel de producción tal que $r^{'}(.) > C^{'}(.)$ no podría maximizar beneficios ya que un aumento infinitesimal en la producción haría que el aumento en el ingreso total fuera mayor que el aumento en los costes de producción (elevando por tanto los beneficios). Similarmente, un nivel de producción tal que $r^{'}(.) < C^{'}(.)$ no podría maximizar beneficios ya que una reducción infinitesimal en la producción haría que la reducción en el ingreso total fuera menor que la reducción en los costes de producción (elevando por tanto los beneficios).

(iv) *Producción y elasticidad:* $|\varepsilon(x)| \geq 1$

Vamos a comprobar que en el nivel de producción de monopolio la elasticidad precio de la demanda en valor absoluto es mayor o igual que 1. Comenzamos definiendo la elasticidad precio de la demanda en valor absoluto:

- en función del precio: $|\varepsilon(p)| = -x^{'}(p)\dfrac{p}{x(p)},$ (3)

- en función de la cantidad: $|\varepsilon(x)| = -\dfrac{1}{p^{'}(x)}\dfrac{p(x)}{x}.$ (4)

Vamos a representar a continuación el ingreso marginal en función de la elasticidad precio de la demanda:

$$r^{'}(x) = p(x) + xp^{'}(x) \qquad (5)$$

$$r^{'}(x) = p(x)\left[1 + x\frac{p^{'}(x)}{p(x)}\right] \qquad (6)$$

$$r^{'}(x) = p(x)\left[1 - \frac{1}{\left|\varepsilon(x)\right|}\right] \qquad (7)$$

En nivel de producción de monopolio se igualan ingreso marginal y coste marginal:

$$r^{'}(x) = p(x)\left[1 - \frac{1}{\left|\varepsilon(x)\right|}\right] = C^{'}(x). \quad (8)$$

Dado que el coste marginal siempre es no negativo (mayor o igual que cero) el ingreso marginal tendrá que ser no negativo y esto ocurre cuando la elasticidad en valor absoluto es mayor o igual que 1. Es decir:

$$C^{'}(x) \geq 0 \Rightarrow p(x)\left[1 - \frac{1}{\left|\varepsilon(x)\right|}\right] \geq 0 \underset{p(x)\geq 0}{\Rightarrow} \left|\varepsilon(x)\right| \geq 1.$$

(v) *Índice de Lerner de poder de monopolio*

Vamos a obtener el Índice de Lerner de poder de monopolio (o poder de mercado) o lo que es lo mismo el margen precio- coste marginal relativo. De la condición (8) obtenemos:

$$p(x) - \frac{p(x)}{\left|\varepsilon(x)\right|} = C^{'}(x).$$

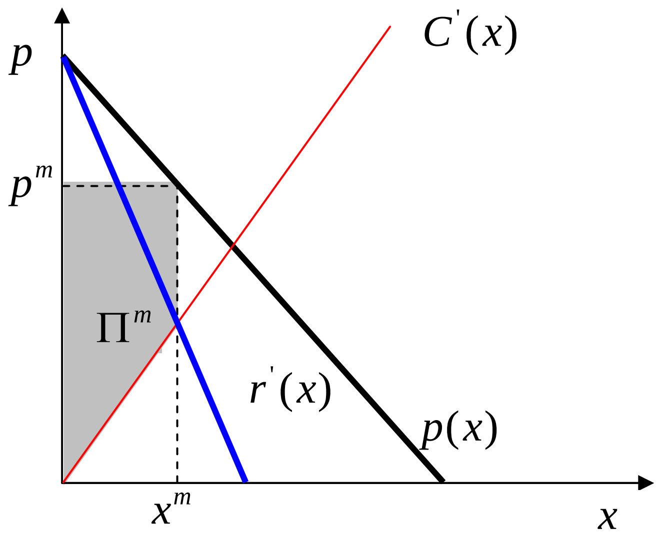
Por tanto obtenemos:

$$\frac{p(x) - C^{'}(x)}{p(x)} = \frac{1}{\left|\varepsilon(x)\right|}. \quad (9)$$

Luego cuanto menor sea la elasticidad precio de la demanda en valor absoluto mayor será el Índice de Lerner. Si $\left|\varepsilon(x)\right| = 0$ el poder de monopolio sería $\frac{p(x) - C^{'}(x)}{p(x)} = \infty$ y si

$|\varepsilon(x)| = \infty$ (como ocurriría con una empresa perfectamente competitiva el poder de monopolio sería nulo, $\dfrac{p(x) - C^{'}(x)}{p(x)} = 0.$

(vi) *Representación gráfica*



El ingreso marginal, $r^{'}(x) = p(x) + xp^{'}(x),$ se encuentra por debajo de la inversa de demanda ya que la función inversa de demanda tiene pendiente negativa, $p^{'}(x) < 0$. Es decir, $r^{'}(x) < p(x)$ si $x > 0,$ pero ambas funciones tienen la misma ordenada $r^{'}(0) = p(0).$ El beneficio del monopolista (si no hay costes fijos) viene dado por:

$$\Pi^m = \Pi(x^m) = p^m x^m - C(x^m) = p^m x^m - \int_0^{x^m} C^{'}(z)dz = \left[p^m - \frac{C(x^m)}{x^m} \right] x^m$$

(vii) *Condiciones de segundo orden*

Interpretación

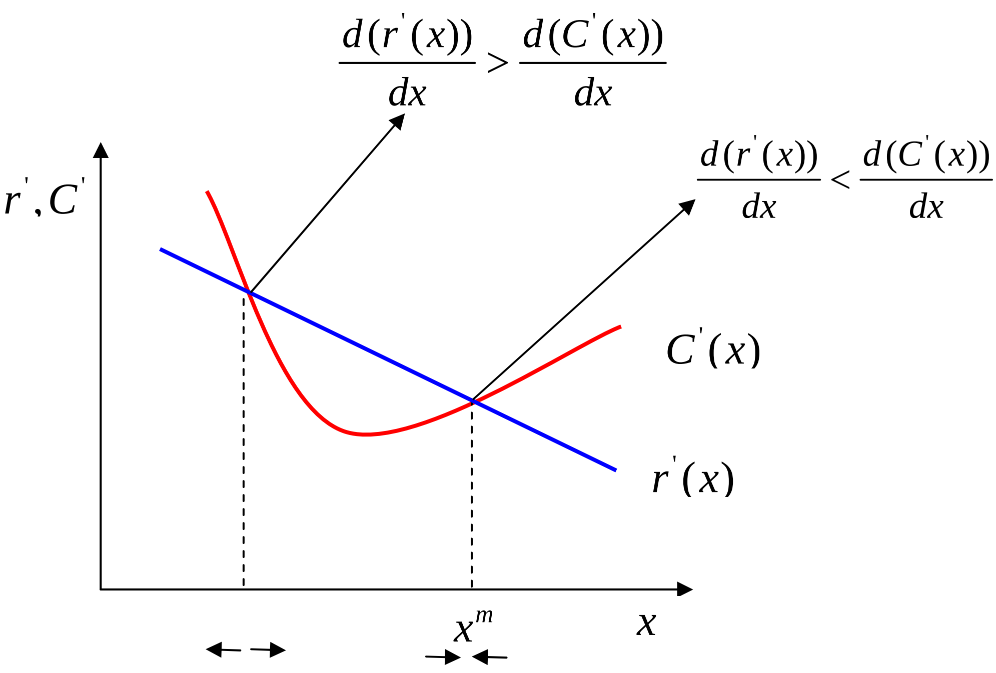
Para hacer más sencillo el análisis supondremos que la función de beneficios es estrictamente cóncava. Es decir:

$$\Pi^{''}(x) = r^{''}(x) - C^{''}(x) = 2p^{'}(x) + xp^{''}(x) - C^{''}(x) < 0 \qquad (10)$$

La condición (10) equivale a decir que la pendiente del ingreso marginal tiene que ser menor que la pendiente del coste marginal:

$$\frac{d(r^{'}(x))}{dx} < \frac{d(C^{'}(x))}{dx}$$

Dicho de otra forma el ingreso marginal debe cortar al coste marginal desde arriba.



Casos

1. Costes estrictamente convexos o lineales: $C^{''}(x) \geq 0$ (CM creciente o constante)

a) Demanda estrictamente cóncava o lineal: $p^{''}(x) \leq 0$

$$\Pi^{''}(x) = 2\underbrace{p^{'}(x)}_{<0} + x\underbrace{p^{''}(x)}_{\leq 0}\underbrace{-C^{''}(x)}_{\leq 0} < 0$$

b) Demanda estrictamente convexa: $p^{''}(x) > 0$

$r^{''}(x) = 2\underbrace{p^{'}(x)}_{<0} + x\underbrace{p^{''}(x)}_{>0}$. Hay que comprobar que $r^{''}(x) < C^{''}(x)$.

2. Costes estrictamente cóncavos: $C^{''}(x) < 0$ (CM decreciente)

Hay que comprobar en cada caso si $r^{''}(x) < C^{''}(x)$.

1.2. **Demanda lineal, demanda de elasticidad constante y coste marginal constante**

(i) *Demanda lineal y coste marginal constante*

Inversa de demanda: $p(x) = a - bx$ ($a > 0, b > 0$).

Coste de producción: $C(x) = cx$ ($c \geq 0$). ($a > c$)

Ingreso marginal: $r^{'}(x) = a - 2bx$.

Pendiente inversa demanda: $p^{'}(x) = -b$

Pendiente ingreso marginal: $\dfrac{d(r^{'}(x))}{dx} = -2b$

Función de beneficios estrictamente cóncava: $\Pi^{''}(x) = r^{''}(x) = -2b < 0$.

Beneficio marginal en cero: $\Pi^{'}(0) = p(0) - C^{'}(0) = a - c > 0$.

Maximización de beneficios: $r^{'}(x^m) = C^{'}(x^m) \Rightarrow a - 2bx^m = c \Rightarrow \quad x^m = \dfrac{a-c}{2b}$

Precio de monopolio: $p^m = p(x^m) \Rightarrow p^m = a - bx^m \Rightarrow \quad p^m = \dfrac{a+c}{2}$

Beneficios de monopolio: $\Pi^m = \Pi(x^m) = [p(x^m) - c]x^m = [p^m - c]x^m = \frac{a-c}{2}\frac{a-c}{2b} = \frac{(a-c)^2}{4b}$

(ii) *Demanda de elasticidad constante y coste marginal constante*

Demanda: $x(p) = Ap^{-b}$ $(A > 0, b > 1)$.

Coste de producción: $C(x) = cx$ $(c > 0)$.

Elasticidad precio de la demanda: $|\varepsilon(p)| = -x'(p)\frac{p}{x(p)} = bAp^{-(b+1)}\frac{p}{Ap^{-b}} = b.$

Inversa de demanda: $p(x) = A^{\frac{1}{b}}x^{-\frac{1}{b}}$.

Ingreso marginal: $r'(x) = A^{\frac{1}{b}}\frac{(b-1)}{b}x^{-\frac{1}{b}}$.

Pendiente ingreso marginal: $r''(x) = -A^{\frac{1}{b}}\frac{(b-1)}{b^2}x^{-\frac{(1+b)}{b}}$.

Función de beneficios estrictamente cóncava:

$$\Pi''(x) = r''(x) = -A^{\frac{1}{b}}\frac{(b-1)}{b^2}x^{-\frac{(1+b)}{b}} < 0 \Leftrightarrow b > 1.$$

Beneficio marginal en cero: $\Pi'(0) = \infty > 0$.

Maximización de beneficios:

$$r'(x^m) = C'(x^m) \Rightarrow r'(x) = A^{\frac{1}{b}}\frac{(b-1)}{b}(x^m)^{-\frac{1}{b}} = c \Rightarrow \quad (x^m)^{-\frac{1}{b}} = A^{-\frac{1}{b}}\frac{b}{(b-1)}c$$

$$\left((x^m)^{-\frac{1}{b}}\right)^{-b} = \left(A^{-\frac{1}{b}}\frac{b}{(b-1)}c\right)^{-b} \Rightarrow x^m = A\left(\frac{b}{(b-1)}\right)^{-b}c^{-b}$$

Precio de monopolio:

$$p^m = p(x^m) \Rightarrow p^m = A^{\frac{1}{b}} (x^m)^{-\frac{1}{b}} = A^{\frac{1}{b}} \left(A \left(\frac{b}{(b-1)} \right)^{-b} c^{-b} \right)^{-\frac{1}{b}} \Rightarrow p^m = \frac{b}{(b-1)} c$$

Beneficios de monopolio:

$$\Pi^m = \Pi(x^m) = [p(x^m) - c] x^m = [p^m - c] x^m = \frac{c}{b-1} A \left(\frac{b}{(b-1)} \right)^{-b} c^{-b} = A \frac{b^{-b}}{(b-1)^{-(b-1)}} c^{-(b-1)}$$

Resolviendo el problema de maximización de beneficios en función del precio se obtiene el Índice de Lerner:

$$\frac{p^m - c}{p^m} = \frac{1}{|\varepsilon(p)|}$$

Con demanda de elasticidad constante la condición nos queda $\frac{p^m - c}{p^m} = \frac{1}{b}$ de donde obtenemos fácilmente el precio de monopolio. Después obtener la producción y los beneficios es directo.

1.3. **Estática comparativa**

Vamos a ver cómo cambian el precio y la producción del monopolista cuando cambian los costes de producción. La intuición económica nos dice que un aumento en el coste marginal del monopolista debería conllevar una reducción en la producción y un aumento en el precio. Supondremos para simplificar que el coste marginal es constante (y que no hay costes fijos). La función de costes es $C(x) = cx$.

$$\max_{x \geq 0} \Pi(x) \equiv \max_{x \geq 0} p(x)x - C(x)$$

$$\Pi^{'}(0) = p(0) - C^{'}(0) > 0 \Rightarrow p(0) > C^{'}(0)$$

$\Pi'(x) = p(x) + xp'(x) - c = 0 \quad (11) \Rightarrow x^m(c) \rightarrow$ producción de monopolio como función implícita del coste marginal.

$\Pi''(x) = 2p'(x) + xp''(x) - C''(x) < 0$ Función de beneficios estrictamente cóncava (caso regular).

Hay dos formas equivalentes de analizar cómo cambia la producción de monopolio cuando cambia el coste marginal:

(i) Diferenciando completamente la condición (11) con respecto a *x* y a *c*.

$\left[2p'(x) + xp''(x)\right]dx - dc = 0$

Despejando:

$$\frac{dx}{dc} = \frac{1}{\underbrace{2p'(x) + xp''(x)}_{\substack{<0 \\ \text{C2ºO}}}} < 0 \qquad (12)$$

Por tanto, un aumento infinitesimal del coste marginal reduce la producción y una reducción infinitesimal del coste marginal eleva la producción.

(ii) Utilizando el hecho de que $x^m(c)$ es una función implícita del coste marginal. Por tanto, por definición $x^m(c)$ satisface la condición de primer orden; es decir

$$p(x^m(c)) + x^m(c)p'(x^m(c)) - c = 0$$

Derivando con respecto al coste marginal:

$2p'(x^m(c))x^{m'}(c) + x^m(c)p''(x^m(c))x^{m'}(c) = 1$

$\left[2p'(x^m(c)) + x^m(c)p''(x^m(c))\right]x^{m'}(c) = 1$

Despejando: $x^{m'}(c) = \dfrac{1}{\left[2p'(x^m(c)) + x^m(c)p''(x^m(c))\right]} < 0$

Una vez obtenido el cambio en la producción al cambiar el coste marginal es directo obtener el cambio en el precio.

$$\frac{dp}{dc}=\frac{dp}{dx}\frac{dx}{dc}=\frac{\overbrace{p^{'}(x)}^{<0}}{\underbrace{2p^{'}(x)+xp^{''}(x)}_{\substack{<0\\ \text{C2ºO}}}}>0 \qquad (13)$$

Ejemplos

(i) Demanda lineal

$$p^m=\frac{a+c}{2}\rightarrow\frac{dp^m}{dc}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{dp}{dc}=\frac{p^{'}(x)}{2p^{'}(x)+x\underbrace{p^{''}(x)}_{=0}}=\frac{1}{2}$$

Con demanda lineal el aumento en el precio es la mitad del aumento en el coste marginal: $dp=\frac{1}{2}dc$

(ii) Demanda de elasticidad constante

$$p^m=\frac{b}{b-1}c\rightarrow\frac{dp^m}{dc}=\frac{b}{b-1}>1$$

$$p(x)=A^{\frac{1}{b}}x^{-\frac{1}{b}}\rightarrow p^{'}(x)=-A^{\frac{1}{b}}\frac{1}{b}x^{-\frac{(1+b)}{b}}\rightarrow p^{''}(x)=A^{\frac{1}{b}}\frac{(1+b)}{b^2}x^{-\frac{(1+2b)}{b}}$$

$$\frac{dp}{dc}=\frac{1}{2+x\frac{p^{''}(x)}{p^{'}(x)}}=\frac{1}{2+x\frac{A^{\frac{1}{b}}\frac{(1+b)}{b^2}x^{-\frac{(1+2b)}{b}}}{-A^{\frac{1}{b}}\frac{1}{b}x^{-\frac{(1+b)}{b}}}}=\frac{1}{2-\frac{(1+b)}{b}}=\frac{b}{b-1}>1$$

Con demanda de elasticidad constante el precio de monopolio aumenta en una cuantía superior al coste marginal: $dp > dc$.

1.4. **Bienestar y producción**

(i) Enfoque del consumidor representativo. Utilidad cuasi-lineal.

(ii) Disposición máxima a pagar y disposición marginal a pagar.

(iii) Función de demanda independiente de la renta.

(iv) Función de bienestar social y nivel de producción maximizador del bienestar social.

(v) Excedente total, excedente del consumidor y excedente del productor.

(vi) Condiciones de eficiencia en presencia de varios consumidores o mercados.

(vii) Comparación entre producción de monopolio y producción eficiente utilizando el problema de maximización de beneficios.

(viii) Comparación entre producción de monopolio y producción eficiente utilizando el problema de maximización del bienestar social.

(ix) Pérdida irrecuperable de eficiencia.

(i) *Enfoque del consumidor representativo*. *Utilidad cuasi-lineal*

Para realizar análisis de bienestar y valorar desde el punto de vista social el comportamiento del monopolio seguiremos el *enfoque del consumidor representativo*. Se supone en este enfoque que la curva de demanda del mercado $x(p)$ se genera maximizando la utilidad (cuasi-lineal) de un único consumidor representativo.

Consideremos una economía en la que sólo hay dos bienes: x e y. Podemos pensar que el bien x es el bien producido en el mercado (monopolístico) que nos interesa. Mientras que el bien *y* recoge "todo lo demás": cantidad de dinero que le queda al consumidor para adquirir otros bienes una vez que ha gastado la cantidad óptima en el bien *x*. Supondremos que el consumidor representativo tiene una *Función de Utilidad Cuasi-lineal*:

$$U(x, y) = u(x) + y \qquad (u(0) = 0; u^{'}(.) > 0; u^{''}(.) < 0)$$

(ii) *Disposición máxima a pagar y disposición marginal a pagar*

Disposición máxima a pagar, $R(x)$: lo máximo que estaría dispuesto a pagar el consumidor por *x* unidades del bien. Estará pagando lo máximo si justo queda indiferente entre consumir *x* unidades pagando $R(x)$ y no consumir el bien, dedicando su dotación de renta, *m*, al consumo del resto de los bienes. Es decir:

$$U(x, m - R(x)) = U(0, m)$$

Nótese que el consumidor debe quedar indiferente y, por tanto, se debe cumplir con igualdad la anterior condición. Si se diera el caso de que $U(x, m - \widetilde{R}(x)) > U(0, m)$ entonces el consumidor estaría dispuesto a pagar una cantidad mayor que $\widetilde{R}(x)$ y si $U(x, m - \widetilde{R}(x)) < U(0, m)$ entonces $\widetilde{R}(x)$ sería mayor que su disposición máxima a pagar.

Como la función de utilidad es cuasi-lineal:

$$U(x, m - R(x)) = U(0, m)$$

$$u(x) + m - R(x) = u(0) + m$$

$$R(x) = u(x)$$

Por tanto, cuando la función de utilidad es cuasi-lineal:

$u(x) \rightarrow$ ***Disposición máxima a pagar***

Disposición marginal a pagar: es el cambio en la disposición máxima a pagar ante una variación infinitesimal en la cantidad consumida.

$$u^{'}(x) \rightarrow \textbf{\textit{Disposición marginal a pagar}}$$

(iii) *Función de demanda independiente de la renta*

$$\begin{array}{l} \max\limits_{x,y} u(x)+y \\ \quad s.a \quad y+px=m \end{array} \equiv \max_{x,y,\lambda} \overbrace{u(x)+y+\lambda\left[m-y-px\right]}^{L(x,y,\lambda)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial x}=u^{'}(x)-\lambda p=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=1-\lambda=0 \end{array}\right\} \rightarrow p=u^{'}(x) \rightarrow \text{ Función inversa de demanda}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=m-y-px=0$$

La función directa de demanda $x(p)$ es la inversa de esta función y por tanto satisface la condición de primer orden:

$$p=u^{'}(x(p)) \rightarrow \text{Función de demanda}$$

Propiedad de la función de utilidad cuasi-lineal: *la función de demanda es independiente de la renta*.

Derivando con respecto a p obtenemos:

$$1=u^{''}(x(p))x^{'}(p)$$

$$x^{'}(p)=\frac{1}{\underbrace{u^{''}(x(p))}_{<0}}<0 \rightarrow \quad \text{pendiente negativa}$$

(iv) *Función de bienestar social y nivel de producción maximizador del bienestar social*

En esta subsección justificaremos la utilización de $W(x) = u(x) - C(x)$ como función de bienestar social.

Vamos a plantear el problema de obtener la asignación que maximiza la utilidad del consumidor representativo, con una restricción de recursos: interpretamos el coste de producción del bien *x* como la cantidad del bien *y* a la que habría que renunciar para tener el bien *x*.

$$\max_{x,y} u(x) + y$$
$$s.a \quad y = m - C(x)$$

Sustituyendo *y* en la función objetivo:

$$\max_{x} u(x) + \underbrace{m}_{\text{constante}} - C(x) \equiv \max_{x} u(x) - C(x)$$

Luego el problema de maximizar el bienestar social consiste en:

$\max_{x \geq 0} W(x) \equiv \max_{x \geq 0} u(x) - C(x)$

$W'(0) = u'(0) - C'(0) > 0$

$W'(x) = u'(x) - C'(x) = 0 \Leftrightarrow \; W'(x^e) = 0$ (13) Condición de primer orden.

$W''(x) = u''(x) - C''(x) < 0$ Función de bienestar social estrictamente cóncava (caso regular).

Por tanto, en el nivel de producción que maximiza el bienestar social o nivel de producción eficiente se cumple $W'(x^e) = 0 \Leftrightarrow u'(x^e) = C'(x^e)$. Como normalmente supondremos que el coste marginal es constante la condición de eficiencia queda:

$$u'(x^e) = c,$$

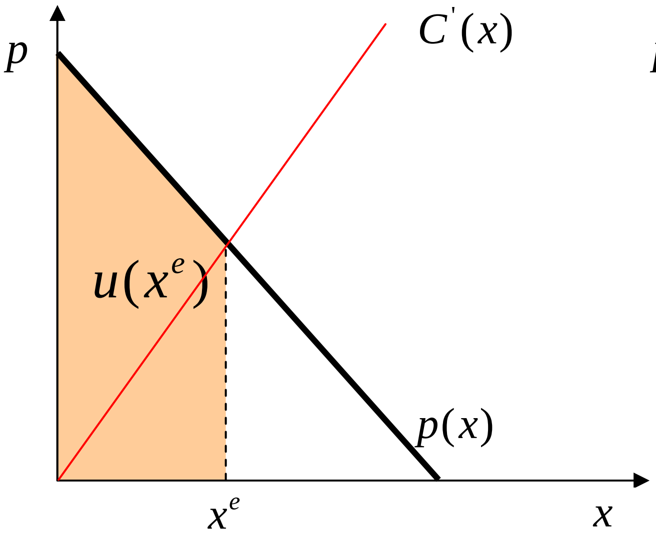
Es decir, en el nivel de producción eficiente la disposición marginal a pagar se iguala con el coste marginal.

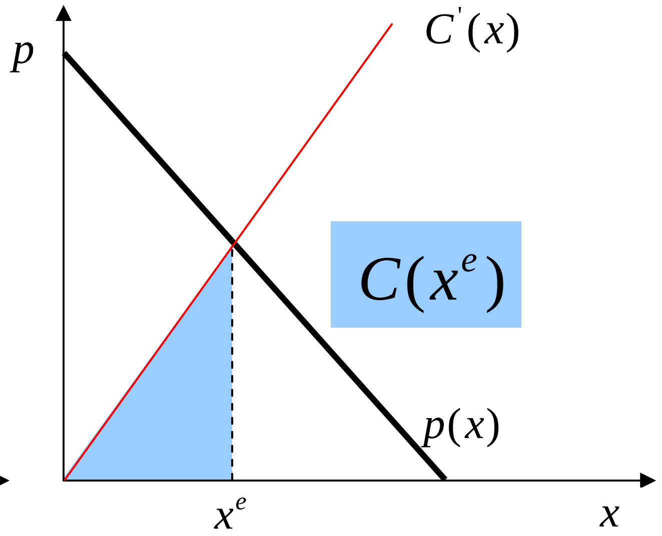
(v) *Excedente total, excedente del consumidor y excedente del productor*

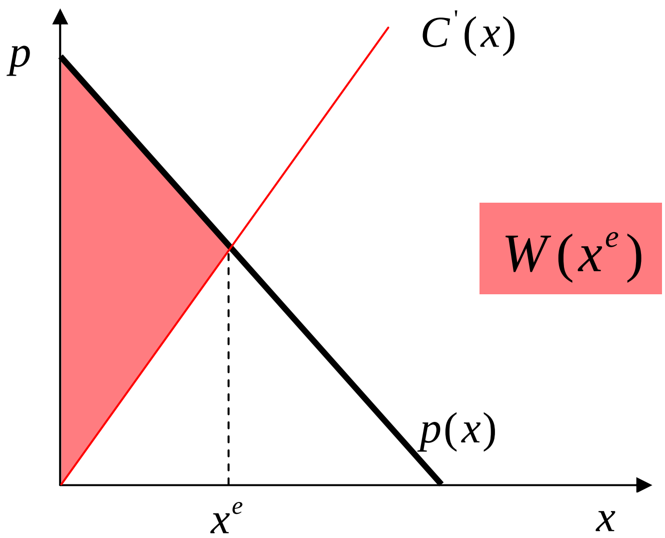
La función $W(x) = u(x) - C(x)$ puede interpretarse también como el excedente total; es decir, la diferencia entre la disposición máxima a pagar y el coste de producción. Por definición se cumple:

$$u(x) - \underbrace{u(0)}_{=0} = \int_0^x u^{'}(z)dz \qquad C(x) - \underbrace{C(0)}_{=F=0} = \int_0^x C^{'}(z)dz$$

Por tanto, maximizar $u(x) - C(x)$ equivale a elegir aquel nivel de producción que maximice el área debajo de la inversa de demanda y encima del coste marginal.



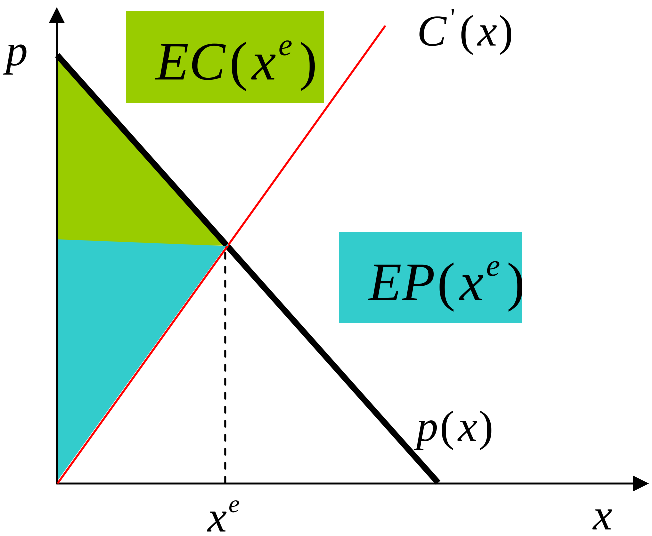




Simplemente sumando y restando el gasto en el bien podemos reescribir el excedente total como:

$$W(x) = u(x) - C(x) = \underbrace{[u(x) - px]}_{EC(x)} + \underbrace{[px - cx]}_{EP(x)}$$

El excedente del consumidor, *EC*(*x*), mide la diferencia entre la disposición máxima a pagar del consumidor y lo que realmente paga. El excedente del productor, *EP*(*x*), mide los beneficios (si no hay costes fijos) de la empresa. Por tanto, el nivel de producción eficiente también maximiza la suma del excedente del consumidor y del excedente del productor.



(vi) *Condiciones de eficiencia en presencia de varios consumidores o mercados*

Consideramos el problema de obtener una asignación eficiente en el sentido de Pareto cuando en la economía hay dos consumidores que tienen funciones de utilidad cuasi-lineal, $u_i(x_i) + y_i$, y una dotación de renta de m_i, $i = 1, 2.$. Vamos a maximizar la utilidad de un agente (por ejemplo el consumidor 1) manteniendo constante la utilidad del otro (por ejemplo, el 2), dada una restricción de recursos (suponemos que el coste marginal es constante e igual a *c*).

$$\max_{x_1,y_1,x_2,y_2} u_1(x_1)+y_1$$
$$s.a\ \ u_2(x_2)+y_2=\overline{u}_2$$
$$y_1+y_2=m_1+m_2-c.(x_1+x_2)$$

Despejando y_2 de la segunda restricción y sustituyendo en la primera, despejando entonces y_1 y sustituyendo en la función objetivo, el problema queda:

$$\max_{x_1,x_2} u_1(x_1)+u_2(x_2)-c.(x_1+x_2)+m_1+m_2-\overline{u}_2$$

Desde las condiciones de primer orden obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} u_1^{'}(x_1^e)-c=0 \\ \\ u_2^{'}(x_2^e)-c=0 \end{array}\right\} \rightarrow u_1^{'}(x_1^e)=u_2^{'}(x_2^e)=c \rightarrow \text{Condición de eficiencia} \quad (14)$$

(vii) *Comparación entre producción de monopolio y producción eficiente utilizando el problema de maximización de beneficios*

$$\max_{x\geq 0} \Pi(x) \equiv \max_{x\geq 0}\ p(x)x-C(x)$$

$$\Pi^{'}(0)=\ p(0)-C^{'}(0)>0 \Rightarrow\ p(0)>C^{'}(0)$$

$\Pi^{'}(x)=\ p(x)+xp^{'}(x)-C^{'}(x)=0 \Leftrightarrow\ \Pi^{'}(x^m)=0$ Condición de primer orden.

$\Pi^{''}(x)=2p^{'}(x)+xp^{''}(x)-C^{''}(x)<0$ Función de beneficios estrictamente cóncava (caso regular).

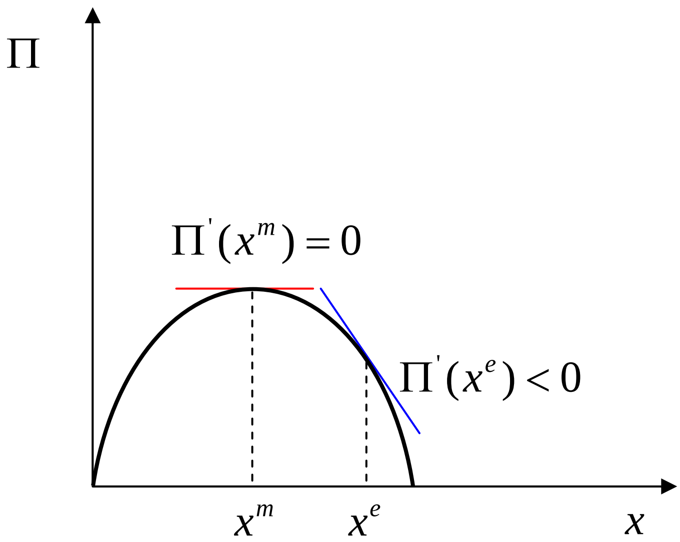
$$\begin{Bmatrix} \Pi'(x^m) = 0 \\ \Pi'(x^e)? \\ \Pi''(x) < 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Pi'(x^e) = \underbrace{p(x^e)}_{=u'(x^e)} + x^e p'(x^e) - C'(x^e) = \underbrace{\left[u'(x^e) - C'(x^e)\right]}_{=0} + x^e \underbrace{p'(x^e)}_{<0} < 0$$

Por definición de
producción eficiente

$$\begin{Bmatrix} \Pi'(x^m) = 0 \\ \Pi'(x^e) < 0 \\ \Pi''(x) < 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \Pi'(x^e) < \Pi'(x^m) \rightarrow x^e > x^m$$

$$\boxed{\Pi''(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{d\Pi'(x)}{dx} < 0 \rightarrow \uparrow x \ \downarrow \Pi'(x)}$$



(vii) *Comparación entre producción de monopolio y producción eficiente utilizando el problema de maximización del bienestar social*

$$\max_{x\geq 0} W(x) \equiv \max_{x\geq 0} u(x) - C(x)$$

$$W'(0) = u'(0) - C'(0) > 0 \Rightarrow \; p(0) > C'(0)$$

$W'(x) = u'(x) - C'(x) = 0 \Leftrightarrow \; W'(x^e) = 0$ Condición de primer orden.

$W''(x) = u''(x) - C''(x) < 0$ Función de bienestar estrictamente cóncava.

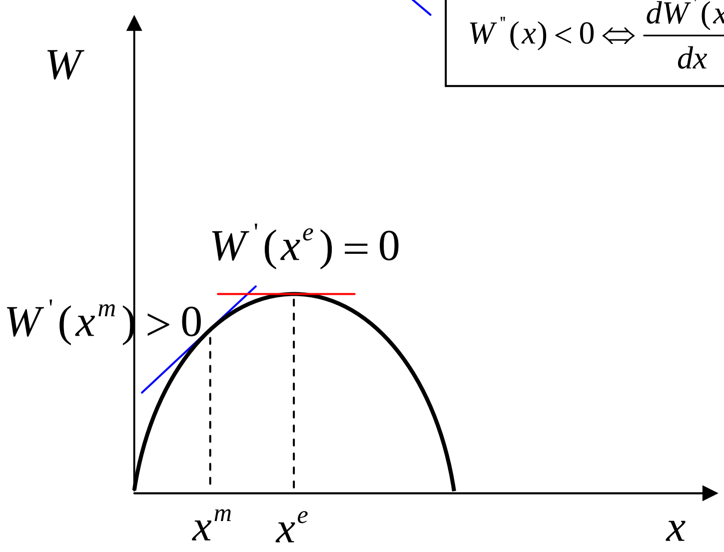
$$\left\{ \begin{matrix} W'(x^e) = 0 \\ W'(x^m)? \\ W''(x) < 0 \end{matrix} \right\}$$

$$W'(x^m) = \underbrace{u'(x^m)}_{p(x^m)} - C'(x^m) = -x^m \overbrace{\underbrace{p'(x^m)}_{<0}}^{u''(x^m)} > 0$$

Por definición de producción de monopolio.

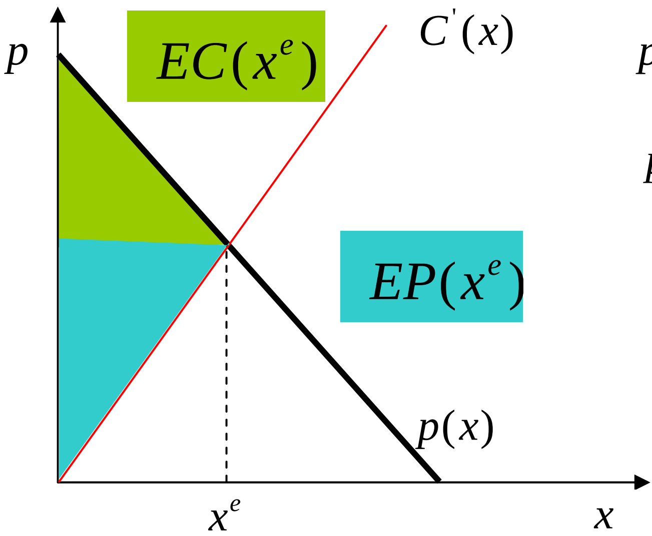
$$\left\{ \begin{matrix} W'(x^e) = 0 \\ W'(x^m) > 0 \\ W''(x) < 0 \end{matrix} \right\} \rightarrow W'(x^e) < W'(x^m) \rightarrow \; x^e > x^m$$

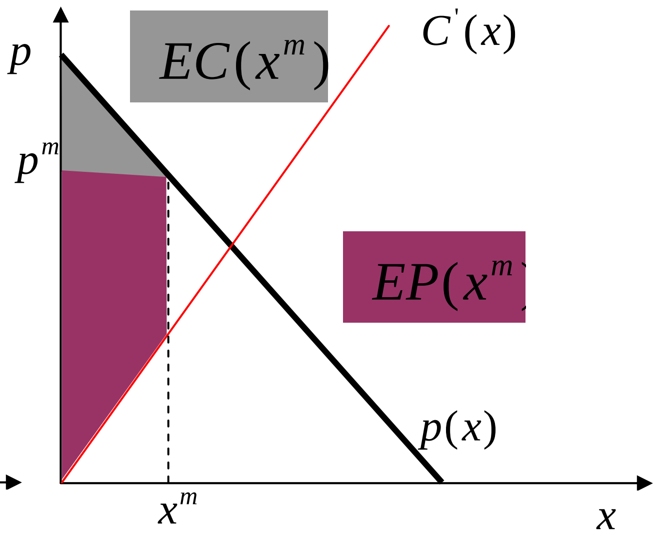
$$W''(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{dW'(x)}{dx} < 0 \rightarrow \uparrow x \; \downarrow W'(x)$$

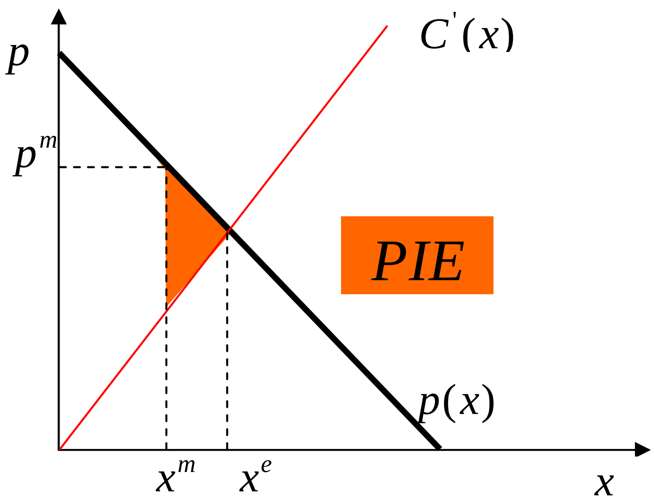


(vii) *Pérdida irrecuperable de eficiencia (PIE)*

$$PIE = W(x^e) - W(x^m) = \int_0^{x^e} [u'(z) - C'(z)]dz - \int_0^{x^m} [u'(z) - C'(z)]dz = \int_{x^m}^{x^e} [u'(z) - C'(z)]dz$$







1.5. ***La discriminación de precios***

(i) Definición.

(ii) Incentivo a discriminar precios.

(iii) Condiciones o requisitos.

(iv) Clasificación o tipos de discriminación de precios (Pigou, 1920).

(v) Ejemplos.

(vi) Modelo.

(i) *Definición*

"Existe discriminación de precios cuando diferentes unidades de un mismo bien son vendidas a precios distintos, bien al mismo consumidor bien a consumidores diferentes".

Discusión

- Diferencias en calidad: transporte de pasajeros, espectáculos culturales y deportivos…
- Un único precio puede ser discriminatorio y precios diferentes no serlo. Diremos que no existe discriminación de precios si la diferencia entre el precio pagado por dos consumidores por una unidad del bien refleja exactamente la diferencia en el coste de servir el bien a esos consumidores.

(ii) *Incentivo a discriminar precios*

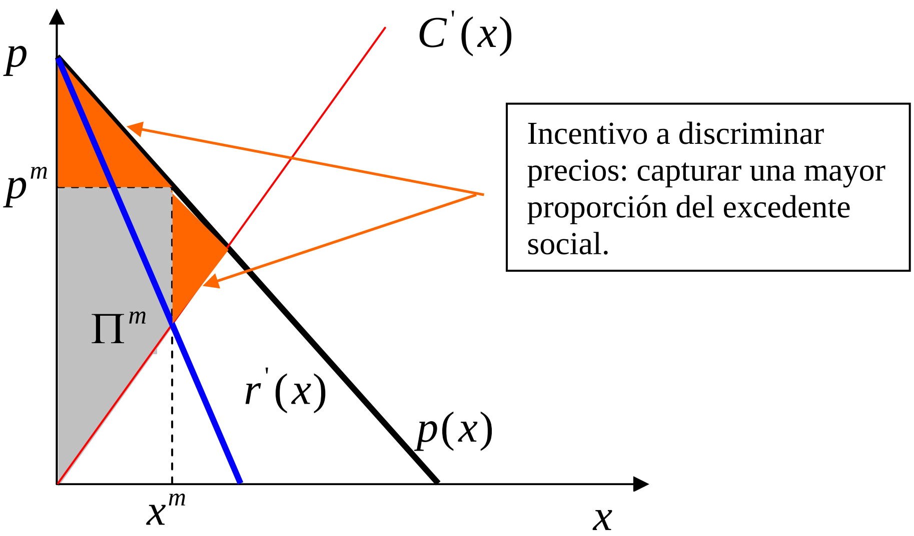
En el nivel de producción de monopolio el ingreso marginal se iguala con el coste marginal: $r'(x^m) = C'(x^m)$. Es decir:

$$\underbrace{p(x^m)} + \underbrace{x^m p'(x^m)} = C'(x^m) \qquad (1)$$

Ingreso adicional por vender una unidad adicional.

Ingreso perdido por tener que vender las unidades ya producidas a un precio menor.

El monopolista estaría dispuesto a vender más unidades si no tuviera que bajar el precio. Existen incentivos a intentar capturar una mayor proporción del excedente del consumidor $\rightarrow$ incentivos a discriminar precios.



(iii) *Condiciones o requisitos*

Para que una empresa pueda discriminar precios se tienen que cumplir dos condiciones:

a) la empresa debe ser capaz de clasificar a los consumidores (lo que depende de la *información*).

b) la empresa debe tener capacidad para impedir la reventa (lo que depende de las posibilidades de arbitraje y de los costes de transacción).

El caso más sencillo de clasificación se produce cuando la empresa recibe una señal exógena (edad, localización, ocupación…) que le permite clasificar a los consumidores en diferentes grupos.

Resulta más difícil clasificar en función de una categoría endógena (por ejemplo, la cantidad comprada o el momento de la compra). En este caso el monopolista debe establecer precios de modo que sean los propios consumidores los que se auto-clasifiquen en las categorías correctas.

(iv) *Clasificación o tipos de discriminación de precios* (Pigou, 1920)

1) **Discriminación de precios de primer grado o discriminación perfecta**.

El vendedor cobra un precio diferente por cada unidad del bien igual a la disposición máxima a pagar por esa unidad. Requiere *información plena* sobre las preferencias de los consumidores y *no* existencia de ningún tipo de *arbitraje*. El monopolista consigue extraer todo el excedente del consumidor.

2) **Discriminación de precios de segundo grado** (o fijación no lineal de precios).

Los precios difieren dependiendo del número de unidades del bien que se compren pero no de unos consumidores a otros. Cada uno de los consumidores se enfrenta a la *misma lista de precios* pero éstos dependen de las cantidades (o de cualquier otra variable; por ejemplo, la calidad del producto) que se compren. Ejs.: descuentos por comprar grandes cantidades del producto. Autoselección.

3) **Discriminación de precios de tercer grado**.

Se cobran precios distintos a diferentes consumidores pero cada uno de ellos paga una cantidad constante (el mismo precio) por cada una de las unidades que compra del bien. La empresa recibe una *señal exógena* que le permite clasificar a los consumidores en diferentes grupos. Se suele decir que es el tipo más frecuente de discriminación de precios. Ejemplos: descuentos a estudiantes, precios diferentes dependiendo del día de la semana etc. Identificación.

En ocasiones se suelen distinguir dos tipos de discriminación de precios: discriminación de precios directa y discriminación de precios indirecta. La discriminación de precios de segundo grado es un caso de discriminación indirecta (los consumidores se enfrentan a una única lista de precios y con sus elecciones se auto-clasifican) mientras que la discriminación de precios de primer grado y la discriminación de precios de tercer grado serían casos de discriminación directa. En el caso de DP3º la empresa establece listas de precios diferentes para consumidores pertenecientes a diferentes grupos o mercados.

(v) *Ejemplos*

Resulta más difícil encontrar ejemplos reales de mercados donde no se practique ningún tipo de discriminación de precios que lo contrario. Aunque a veces no es posible distinguir de una manera nítida cuál es el tipo de discriminación es un ejercicio interesante meditar sobre qué tipo de discriminación de precios se practica en los siguientes casos.

- Tarifas en dos partes: telefonía, Internet, electricidad, televisión por cable… Tarifa plana, bonos por horas etc.

- Tarifas eléctricas diferentes para uso industrial o uso doméstico.

- Descuentos en museos, subscripción de revistas, acontecimientos deportivos o culturales,…para niños, jóvenes o jubilados.

- Tipos de interés preferenciales.

- Bono-metro, bono-bus,…descuentos según cantidad comprada en transportes públicos.

- Diferente calidad de servicio: precios diferentes dependiendo de la calidad del producto en espectáculos deportivos o culturales (tribuna, preferencia, palco…), o en transporte de pasajeros (clase turista, Business class, primera, segunda…).

- Descuentos por compras repetidas.

- Descuentos según cantidad comprada: 2x1, 3x2… en supermercados…

- Servicio a domicilio de comida, tele-tienda…

(vi) *Modelo*

Estudiaremos estos tres tipos de discriminación de precios por medio de un modelo muy sencillo. Supongamos que hay dos consumidores potenciales que tienen funciones de utilidad cuasi-lineal: $u_i(x_i) + y_i, \ \ i = 1, 2.$

$u_i(0) = 0, \ \ i = 1, 2.$

$u_i(x_i)$: disposición máxima a pagar del consumidor $i = 1, 2.$

$u_i^{'}(x_i)$: disposición marginal a pagar del consumidor $i = 1, 2.$

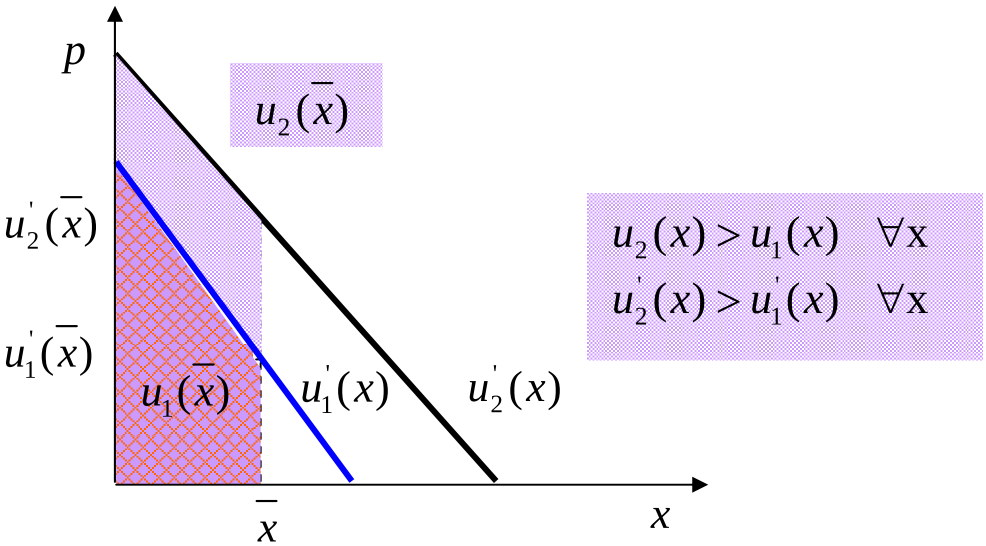
Diremos que el *consumidor 2* es un consumidor de *demanda alta* y que el *consumidor 1* es un consumidor de *demanda baja* si se cumple:

$$u_2(x) > u_1(x) \ \ \forall x$$

$$u_2^{'}(x) > u_1^{'}(x) \ \ \forall x$$

Es decir, el consumidor 2 es un consumidor de demanda alta y el 1 de demanda baja si tanto la disposición máxima a pagar como la disposición marginal a pagar del consumidor 2 son mayores que las del consumidor 1 para todo nivel de consumo.

La comparación de disposición máxima y disposición marginal a pagar sólo tiene sentido hacerla para el mismo nivel de consumo. Además la comparación hay que hacerla para todo nivel de consumo.



Supondremos que el monopolista tiene un coste marginal constante (y no hay costes fijos) $c > 0$. De forma equivalente la función de coste de producción es:

$$C(x) = c.x = c.(x_1 + x_2)$$

1.6. ***La discriminación de precios de primer grado o discriminación perfecta***

(i) Definición y contexto.

(ii) Planteamiento y resolución del problema en el caso de un único consumidor.

(iii) Observaciones. ¿Es eficiente la cantidad ofrecida por el monopolista?

(iv) Planteamiento y resolución del problema en el caso de dos consumidores.

(v) ¿Ofrece el monopolista a los consumidores las cantidades eficientes? Demostración de que el monopolista ofrece una cantidad mayor al consumidor de demanda alta.

(vi) ¿Qué ocurriría si el monopolista no fuera capaz de identificar al consumidor cuando va a comprar el bien.

(i) *Definición y contexto*

El vendedor cobra un precio diferente por cada unidad del bien igual a la disposición máxima a pagar por esa unidad.

Requiere *información plena* sobre las preferencias de los consumidores y *no* existencia de ningún tipo de *arbitraje*. En particular, el monopolista es capaz de identificar al consumidor cuando va a comprar el bien. (Ejemplo clásico: médico de pueblo).

(ii) *Planteamiento y resolución del problema en el caso de un único consumidor*

El monopolista deseará ofrecer al consumidor una combinación (lote) precio-producción (r^*, x^*) que le reporte los mayores beneficios. El monopolista le planteará al consumidor una elección "todo o nada": $\left\langle \begin{array}{c} (r^*, x^*) \\ (0,0) \end{array} \right.$. El consumidor o paga r^* por x^* unidades o se queda sin el bien. El problema de maximización del monopolista es:

$$\begin{array}{l} \max_{r,x} r - cx \\ s.a \ u(x) \geq r \quad (1) \end{array}$$

La restricción (1) la podemos escribir de manera equivalente como $u(x) - r \geq 0$: nos indica que el consumidor debe derivar un excedente no negativo de su consumo del bien *x*. Se denomina este tipo de restricciones como *restricciones de participación* o *restricciones de racionalidad individual*.

Como el monopolista desea maximizar beneficios elegirá la tarifa *r* lo más elevada posible y, por tanto, la restricción (1) se cumplirá con igualdad: $r = u(x)$. Por tanto, el problema consiste en:

$$\begin{array}{l} \max_{x} \overbrace{u(x) - cx}^{\Pi(x)} \\ \dfrac{d\Pi}{dx} = u^{'}(x) - c = 0 \rightarrow \quad u^{'}(x^*) = c \\ \dfrac{d^2\Pi}{dx^2} = u^{''}(x) < 0 \end{array}$$

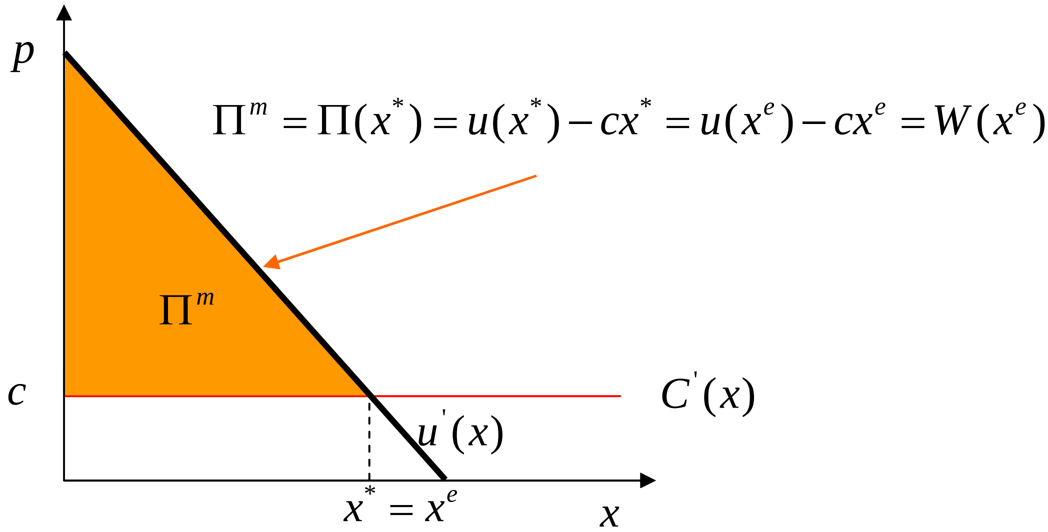
Dado este nivel de producción la tarifa será: $r^* = u(x^*)$.

(iii) *Observaciones*

a) ¿**Es eficiente la cantidad ofrecida por el monopolista**?

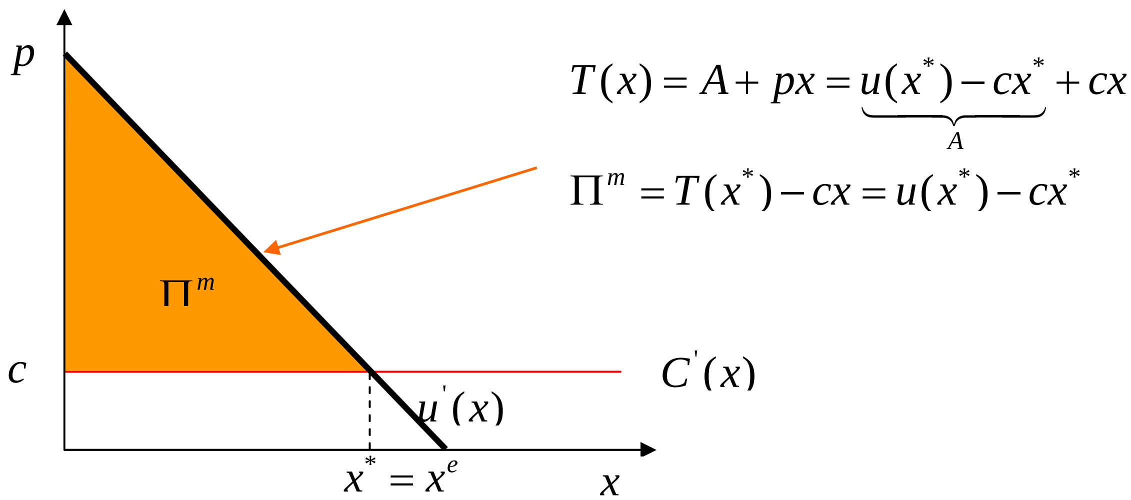
El monopolista produce una cantidad eficiente en el sentido de Pareto, $x^* = x^e$, ya que ofrece una cantidad tal que se iguala la disposición marginal a pagar con el coste marginal.

(Repasar el problema de maximización del bienestar social y compararlo con el que acabamos de resolver). Sin embargo, el monopolista se queda con todo el excedente social.



b) El monopolista produce la misma cantidad que produciría si se comportara como una empresa perfectamente competitiva. Si tomara el precio como un dato entonces su decisión de producción sería $p(x) = c$ pero como la utilidad es cuasi-lineal $p(x) = u'(x)$ y en consecuencia $u'(x) = c$. Sin embargo, la distribución de las ganancias del comercio sería la opuesta.

c) Podríamos obtener los mismos resultados mediante una **tarifa en dos partes**.



d) Obtendríamos el mismo resultado si el monopolista vendiera al consumidor cada unidad de producción a un precio distinto e igual a su disposición máxima a pagar por esa unidad. Supongamos que descomponemos la producción en n partes iguales de tamaño Δx de modo que $x = n\Delta x.$ La disposición máxima a pagar por la 1ª unidad de consumo viene dada por:

$$u(0) + m = u(\Delta x) + m - p_1 \rightarrow u(0) = u(\Delta x) - p_1$$

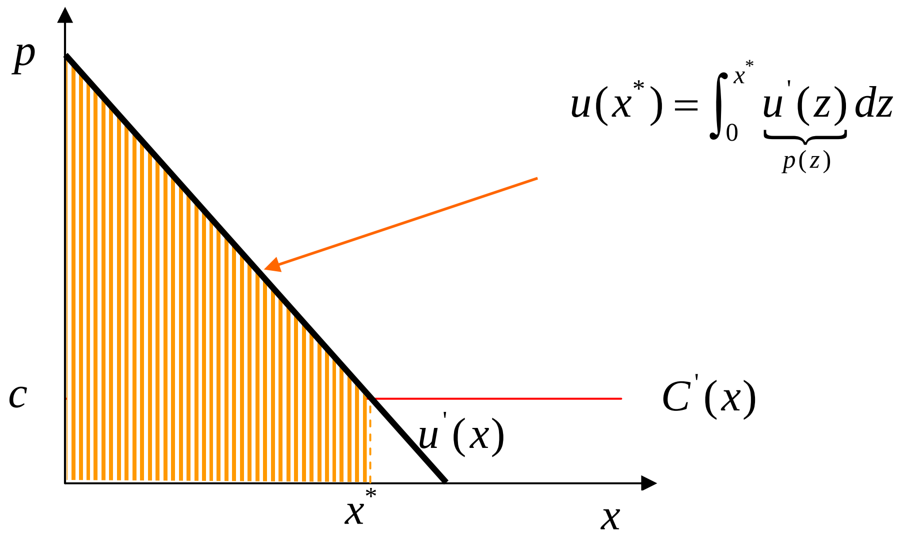
La disposición máxima a pagar por la 2ª unidad de consumo sería:

$$u(\Delta x) + m - p_1 = u(2\Delta x) + m - p_1 - p_2 \rightarrow u(\Delta x) = u(2\Delta x) - p_2$$

Y así sucesivamente. Obtendríamos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{c} u(0) = u(\Delta x) - p_1 \\ u(\Delta x) = u(2\Delta x) - p_2 \\ u(2\Delta x) = u(3\Delta x) - p_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u((n-1)\Delta x) = u(n\Delta x) - p_n \end{array}$$

Sumando y teniendo en cuenta que $u(0) = 0$ obtenemos $u(\underbrace{n\Delta x}_{x}) = \sum_{i=1}^{n} p_i.$ Cuando el tamaño de estas unidades Δx se vuelve infinitesimal, obtenemos que plantear una única opción "todo o nada" al consumidor equivale a venderle cada una de las unidades (infinitesimales) del bien a un precio igual a la disposición marginal a pagar por ella.



(iv) *Planteamiento y resolución del problema en el caso de dos consumidores*

El monopolista deseará ofrecer al consumidor $i,\ i=1,2,$ una combinación (lote) precio-producción (r_i^*, x_i^*) que le reporte los mayores beneficios. El monopolista le planteará al consumidor $i,\ i=1,2,$ una elección "todo o nada": $\left\langle \begin{matrix} (r_i^*, x_i^*) \\ (0,0) \end{matrix} \right.$. El consumidor $i,\ i=1,2,$ o paga r_i^* por x_i^* unidades o se queda sin el bien. El problema de maximización del monopolista es:

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{r_1, x_1, r_2, x_2} & r_1 + r_2 - c.(x_1 + x_2) \\ s.a & u_1(x_1) - r_1 \geq 0 \\ & u_2(x_2) - r_2 \geq 0 \end{array} \quad \underset{\text{maximización de beneficios}}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{l} r_1 = u_1(x_1) \\ r_2 = u_2(x_2) \end{array}$$

Por tanto, el problema nos queda:

$$\max_{x_1, x_2} u_1(x_1) + u_2(x_2) - c.(x_1 + x_2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \Pi}{\partial x_1} = u_1^{'}(x_1) - c = 0 \\ \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial x_2} = u_2^{'}(x_2) - c = 0 \end{array}\right\} \rightarrow u_1^{'}(x_1^*) = u_2^{'}(x_2^*) = c$$

Dados estos niveles de producción las tarifas serán: $r_1^* = u_1(x_1^*)$ y $r_2^* = u_2(x_2^*)$.

(v) *¿Ofrece el monopolista a los consumidores las cantidades eficientes? Demostración de que el monopolista ofrece una cantidad mayor al consumidor de demanda alta*

El monopolista ofrece las cantidades eficientes: $x_1^* = x_1^e$ y $x_2^* = x_2^e$. (Repasar el problema de obtener una asignación eficiente y compararlo con el problema resuelto en esta subsección).

Vamos a demostrar a continuación que el monopolista ofrece una cantidad mayor al consumidor de demanda alta: $x_2^* > x_1^*$.

$$\left.\begin{array}{l} u_1'(x_1^*) = c \\ \\ u_2'(x_2^*) = c \end{array}\right\} u_2'(x_2^*) = u_1'(x_1^*) < u_2'(x_1^*)$$

Consumidor 2 demanda alta:
$u_2'(x) > u_1'(x) \quad \forall x$

Por tanto, $u_2'(x_2^*) < u_2'(x_1^*)$ pero como la función u_2 es estrictamente cóncava entonces $\frac{d(u_2'(x))}{dx} < 0$ y por tanto $x_2^* > x_1^*$.

(vi) *¿Qué ocurriría si el monopolista no fuera capaz de identificar al consumidor cuando va a comprar el bien?*

(Esta subsección servirá para introducir la discriminación de precios de segundo grado).

Supongamos ahora que el monopolista no es capaz de identificar a los consumidores cuando acuden a comprar el bien. Es decir, no puede realizar ofertas personalizadas y por tanto se verá restringido a establecer una única lista de precios. Supongamos que establece una lista de precios utilizando las tarifas y cantidades óptimas bajo discriminación perfecta:

$$\left\langle \begin{array}{c} (r_1^*, x_1^*) \\ (r_2^*, x_2^*) \\ (0,0) \end{array} \right.$$

donde $r_1^* = u_1(x_1^*)$ y $r_2^* = u_2(x_2^*)$. Comprobamos cómo el consumidor de demanda alta tiene incentivos a comprar el lote diseñado para el de demanda baja.

$$0 = \underbrace{u_2(x_2^*) - r_2^*} < \underbrace{u_2(x_1^*) - r_1^*} = \underbrace{u_2(x_1^*) - u_1(x_1^*)}_{>0}$$

Incentivo a realizar arbitraje personal.

Excedente que obtendría el consumidor 2 si compra el lote diseñado para él.

Excedente que obtendría el consumidor 2 si compra el lote diseñado para el consumidor 1.

1.7. ***La discriminación de precios de segundo grado*** **(o fijación no lineal de precios)**

(Términos clave: no identificación, única lista de precios y autoselección).

(i) Definición y contexto.

(ii) Restricciones de participación y de autoselección. Interpretación.

(iii) Demostración de qué restricciones se cumplen con igualdad. Interpretación.

(iv) Planteamiento y resolución del problema de maximización de beneficios.

(v) Observaciones. ¿Ofrece el monopolista cantidades eficientes? Demostración de que el monopolista ofrece una cantidad menor que la eficiente al consumidor de demanda baja.

(vi) ¿Bajo qué condiciones decide el monopolista ofrecer el bien a ambos consumidores?

(vii) Representación gráfica.

(i) *Definición y contexto*

Los precios difieren dependiendo del número de unidades del bien que se compren pero no de unos consumidores a otros.

Nos situamos en un contexto en el que el monopolista conoce las preferencias (conoce la distribución de preferencias) de los consumidores, pero *no* es capaz de *identificar* al consumidor cuando va a comprar el bien. Se ve obligado a establecer una única lista de precios y dejar que sean los consumidores los que se auto-clasifiquen o auto-seleccionen. En este sentido se dice que es un tipo de discriminación indirecta. Los consumidores se enfrenta a la *misma lista de precios* pero éstos dependen de las cantidades (o de cualquier otra variable; por ejemplo, la calidad del producto) que se compren.

(ii) *Restricciones de participación y de autoselección. Interpretación*

El objetivo será diseñar de manera óptima la lista de precios de modo que cada consumidor elija la combinación precio-cantidad diseñada para él.

$$\left\langle \begin{array}{l} (r_1, x_1) \longleftarrow \boxed{\text{Consumidor 1}} \\ (r_2, x_2) \longleftarrow \boxed{\text{Consumidor 2}} \\ (0,0) \end{array} \right.$$

Restricciones del monopolista

- **Restricciones de participación** (o racionalidad individual)

$$u_1(x_1) - r_1 \geq 0 \quad (1)$$

$$u_2(x_2) - r_2 \geq 0 \quad (2)$$

Estas restricciones garantizan que cada consumidor desea comprar el bien. Cada consumidor obtiene al menos tanta utilidad consumiendo el bien como no consumiendo. O dicho de otro modo, cada consumidor obtiene un excedente no negativo comprando el bien.

- **Restricciones de autoselección** (o compatibilidad de incentivos)

$$u_1(x_1) - r_1 \geq u_1(x_2) - r_2 \quad (3)$$

$$u_2(x_2) - r_2 \geq u_2(x_1) - r_1 \quad (4)$$

Estas restricciones garantizan que cada consumidor prefiere la combinación precio-cantidad diseñada para él a la combinación precio-cantidad diseñada para el otro consumidor. Dicho de otra forma, estas restricciones previenen el arbitraje personal: cada consumidor obtiene un excedente por lo menos tan alto eligiendo el lote diseñado para él como eligiendo el lote diseñado para el otro consumidor.

(iii) ***Demostración*** *de qué restricciones se cumplen con igualdad*

Vamos a agrupar las restricciones de acuerdo con el consumidor.

$$\text{(1) y (3)} \rightarrow \begin{cases} r_1 \leq u_1(x_1) & \text{(1)'} \\ r_1 \leq u_1(x_1) - u_1(x_2) + r_2 & \text{(2)'} \end{cases}$$

$$\text{(2) y (4)} \rightarrow \begin{cases} r_2 \leq u_2(x_2) & \text{(3)'} \\ r_2 \leq u_2(x_2) - u_2(x_1) + r_1 & \text{(4)'} \end{cases}$$

El monopolista desea maximizar beneficios y, por tanto, desea elegir r_1 y r_2 lo más alto que se pueda. Por tanto, sólo una de las dos primeras desigualdades y sólo una de las dos segundas serán efectivas (se cumplirán con igualdad). El supuesto de que el consumidor 2 es el consumidor de demanda alta y el consumidor 1 el consumidor de demanda baja (es decir, se cumple: $u_2(x) > u_1(x) \;\; \forall x$ y $u_2^{'}(x) > u_1^{'}(x) \;\; \forall x$) es suficiente para determinar las restricciones que son efectivas.

1) **Demostración de que (4)' se cumple con igualdad y (3)' con desigualdad estricta**

Supongamos por el contrario que (3)' se cumple con igualdad y por tanto que $r_2 = u_2(x_2)$. Entonces $(4)' \rightarrow r_2 \leq r_2 - u_2(x_1) + r_1 \rightarrow r_1 \geq u_2(x_1)$. Como el consumidor 2 es el de demanda alta $u_2(x) > u_1(x)\ \ \forall x$ entonces $r_1 \geq u_2(x_1) > u_1(x_1)$. Es decir, $r_1 > u_1(x_1)$ y por tanto no se cumpliría la restricción (1)' lo que supone una contradicción. (No es compatible que se cumpla con igualdad la restricción de participación del consumidor de demanda alta con que el consumidor de demanda baja compre el bien). En conclusión, (3)' no es efectiva y (4)' si lo es:

$$r_2 = u_2(x_2) - u_2(x_1) + r_1 \quad (5)$$

2) **Demostración de que (1)' se cumple con igualdad y (2)' con desigualdad estricta**

Supongamos por el contrario que (2)' se cumple con igualdad y por tanto que $r_1 = u_1(x_1) - u_1(x_2) + r_2$. Sustituyendo r_2 desde la condición (5) obtenemos:

$$\cancel{r_1} = u_1(x_1) - u_1(x_2) + \underbrace{u_2(x_2) - u_2(x_1) + \cancel{r_1}}_{=r_2}$$

Esto implica

$$u_2(x_2) - u_2(x_1) = u_1(x_2) - u_1(x_1)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} u_2^{'}(t)dt = \int_{x_1}^{x_2} u_1^{'}(t)dt$$

$$\int_{x_1}^{x_2} [u_2^{'}(t) - u_1^{'}(t)]dt = 0$$

Pero esto viola el supuesto de que el consumidor 2 es el consumidor de demanda alta, $u_2^{'}(x) > u_1^{'}(x)\ \ \forall x$. Por tanto, (2)' no es efectiva y si lo es (1)':

$$r_1 = u_1(x_1) \quad (6)$$

Interpretación

Al consumidor de demanda baja, ya que no tiene incentivos a realizar arbitraje, se le cobrará su disposición máxima a pagar. Al consumidor de demanda alta, que tiene incentivos a realizar arbitraje personal (y hacerse pasar por un consumidor de demanda baja), se le cobrará el precio máximo que le induzca a elegir el lote destinado a él (justo la cantidad de dinero tal que el consumidor de demanda alta queda indiferente entre su lote y el destinado al consumidor de demanda baja).

Vamos a ver de otra forma por qué al consumidor de demanda alta hay que dejarle con algo de excedente. Consideremos la restricción de autoselección del consumidor de demanda alta:

$$u_2(x_2) - r_2 \geq u_2(x_1) - r_1 \quad (4)$$

Hay que notar que, compatible con que el consumidor de demanda baja compre el bien, el lado derecho de esta restricción es positivo. Es decir, si eligiéramos el valor máximo para r_1 la condición (4) nos quedaría:

$$u_2(x_2) - r_2 \geq u_2(x_1) - u_1(x_1) > 0$$

ya que el consumidor 2 es el consumidor de demanda alta. (Lo que implica que la restricción de participación del consumidor 2 no se puede satisfacer con igualdad). Pero dado que le tiene que dejar con excedente positivo al consumidor de demanda alta, le dejará con el mínimo excedente posible, dejando al consumidor 2 indiferente entre elegir el lote diseñado para él y el lote diseñado para el consumidor 1. Es decir, (reordenando la restricción (5)):

$$u_2(x_2) - r_2 = u_2(x_1) - u_1(x_1) > 0$$

ya que como el consumidor de demanda baja no tiene incentivos a realizar arbitraje (obtendría un excedente negativo) el monopolista le cobra su disposición máxima a pagar $r_1 = u_1(x_1)$.

(iv) *Planteamiento y resolución del problema de maximización de beneficios*

$$\begin{aligned} &\max_{r_1,x_1,r_2,x_2} r_1 + r_2 - c.(x_1 + x_2) \\ &s.a \quad \begin{array}{l} u_1(x_1) - r_1 \geq 0 \quad (1) \\ u_2(x_2) - r_2 \geq 0 \quad (2) \\ u_1(x_1) - r_1 \geq u_1(x_2) - r_2 \quad (3) \\ u_2(x_2) - r_2 \geq u_2(x_1) - r_1 \quad (4) \end{array} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} &\max_{r_1,x_1,r_2,x_2} r_1 + r_2 - c.(x_1 + x_2) \\ &s.a \quad \begin{array}{l} r_1 = u_1(x_1) \quad (6) \\ r_2 = u_2(x_2) - [u_2(x_1) - r_1] \quad (5) \end{array} \end{aligned}$$

El problema quedaría:

$$\max_{x_1,x_2} \overbrace{u_1(x_1) + u_2(x_2) - [u_2(x_1) - u_1(x_1)] - c.(x_1 + x_2)}^{\Pi(x_1,x_2)}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = u_1'(\tilde{x}_1) - c - [u_2'(\tilde{x}_1) - u_1'(\tilde{x}_1)] = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_2} = u_2'(\tilde{x}_2) - c = 0 \quad (8)$$

Las tarifas vendrán dadas por:

$$\begin{aligned} \tilde{r}_1 &= u_1(\tilde{x}_1) \\ \tilde{r}_2 &= u_2(\tilde{x}_2) - [u_2(\tilde{x}_1) - u_1(\tilde{x}_1)] \end{aligned}$$

(v) *Observaciones*

1) **El monopolista ofrece al consumidor de demanda alta la cantidad eficiente y le deja con un excedente positivo**.

La condición (8) implica $u_2^{'}(\tilde{x}_2) = c$ y, por tanto, el monopolista ofrece al consumidor de demanda alta la cantidad eficiente $\tilde{x}_2 = x_2^e$ (comprobar condiciones de eficiencia).

Además le cobra un precio (tarifa) menor que su disposición máxima a pagar dejándole con un excedente positivo e igual al que obtendría si se hiciera pasar por un consumidor de demanda baja y eligiera el lote diseñado para consumidor 1. $\tilde{r}_2 = u_2(\tilde{x}_2) - [u_2(\tilde{x}_1) - u_1(\tilde{x}_1)]$ y por tanto su excedente sería: $u_2(\tilde{x}_2) - \tilde{r}_2 = [u_2(\tilde{x}_1) - u_1(\tilde{x}_1)]$.

2) **El monopolista ofrece al consumidor de demanda baja una cantidad menor que la eficiente (demostración) y le deja con un excedente nulo**.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = u_1^{'}(\tilde{x}_1) - c - \underbrace{[u_2^{'}(\tilde{x}_1) - u_1^{'}(\tilde{x}_1)]}_{>0} = 0 \quad (7)$$

Como el consumidor 2 es el de demanda alta $[u_2^{'}(\tilde{x}_1) - u_1^{'}(\tilde{x}_1)] > 0$ y entonces de la condición (7) obtenemos $u_1^{'}(\tilde{x}_1) > c.$ Por definición la producción eficiente satisface $u_1^{'}(x_1^e) = c,$ por lo que se cumple $u_1^{'}(\tilde{x}_1) > u_1^{'}(x_1^e).$ Como la disposición máxima a pagar es una función estrictamente cóncava:

$$\left.\begin{array}{l} u_1^{'}(\tilde{x}_1) > u_1^{'}(x_1^e) \\ \\ \dfrac{d(u_1^{'}(x_1))}{dx_1} < 0 \end{array}\right\} \rightarrow \tilde{x}_1 < x_1^e$$

Veamos cuál es la intuición de este resultado. Para ello vamos a interpretar el beneficio marginal de x_1 y evaluarlo en diferentes niveles de producción.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = \underbrace{u_1^{'}(x_1) - c}_{>0(x_1 < x_1^*)} - \underbrace{[u_2^{'}(x_1) - u_1^{'}(x_1)]}_{>0}$$

Beneficio marginal desde el consumidor 1: un cambio en la cantidad ofrecida a este consumidor cambia el beneficio que obtiene el monopolista desde él.

Beneficio marginal desde el consumidor 2: un cambio en la cantidad ofrecida al consumidor 1 cambia el excedente que tiene que dejar al consumidor 2 para que no haga arbitraje.

$$\frac{\partial \Pi(x_1^*)}{\partial x_1} = \underbrace{u_1^{'}(x_1^*) - c}_{=0} - \underbrace{[u_2^{'}(x_1^*) - u_1^{'}(x_1^*)]}_{>0} < 0$$

Partiendo de la cantidad x_1^* una reducción en la cantidad ofrecida al consumidor 1 eleva el beneficio ya que se reduce el excedente que tiene que dejar el monopolista al consumidor 2. Considerando ahora una cantidad de x_1 tal que $\tilde{x}_1 < x_1 < x_1^*$ se cumple:

$$\frac{\partial \Pi(x_1)}{\partial x_1} = \underbrace{u_1^{'}(x_1) - c}_{>0} - \underbrace{[u_2^{'}(x_1) - u_1^{'}(x_1)]}_{>0} < 0$$

Al monopolista le compensa seguir reduciendo x_1 ya que la ganancia en beneficios desde el consumidor de demanda alta por dejarle con menor excedente compensa la pérdida de beneficios desde el consumidor de demanda baja por ofrecerle una cantidad menor.

$$\frac{\partial \Pi(\tilde{x}_1)}{\partial x_1} = u_1^{'}(\tilde{x}_1) - c - \underbrace{[u_2^{'}(\tilde{x}_1) - u_1^{'}(\tilde{x}_1)]}_{>0} = 0$$

En $\tilde{x}_1$ la ganancia marginal, de una reducción infinitesimal en x_1, desde el consumidor de demanda alta por dejarle con menor excedente se iguala con la pérdida marginal desde el consumidor de demanda baja por ofrecerle una cantidad menor.

Además le cobra un precio (tarifa) igual que su disposición máxima a pagar dejándole con un excedente nulo: $\tilde{r}_1 = u_1(\tilde{x}_1)$.

(vi) *¿Bajo qué condiciones decide el monopolista ofrecer el bien a ambos consumidores?*

El monopolista decidirá ofrecer el bien a ambos consumidores siempre que obtenga mayores beneficios que ofreciendo el bien exclusivamente al consumidor de demanda alta. Es decir, ofrecerá el bien a ambos consumidores si se cumple:

$$\Pi(0, x_2^*) \leq \Pi(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$$

$$u_2(x_2^*) - cx_2^* \leq \underbrace{u_1(\tilde{x}_1)}_{\tilde{r}_1} - c\tilde{x}_1 + \underbrace{u_2(x_2^*) - [u_2(\tilde{x}_1) - u_1(\tilde{x}_1)]}_{\tilde{r}_2} - cx_2^*$$

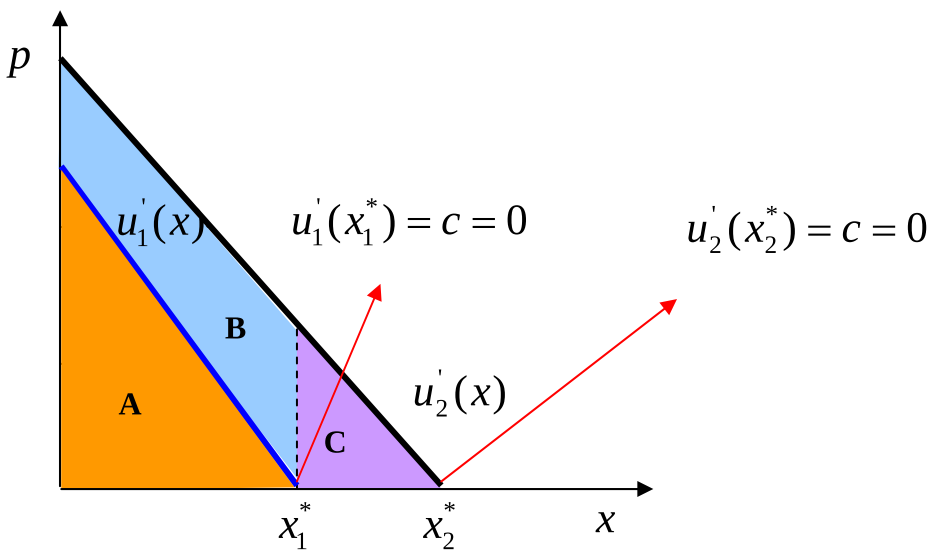
$$[u_2(\tilde{x}_1) - u_1(\tilde{x}_1)] \leq u_1(\tilde{x}_1) - c\tilde{x}_1$$

Si esta condición no se cumple el monopolista decidiría ofrecer el bien exclusivamente al consumidor de demanda alta. Otra forma de verlo consiste en considerar el beneficio marginal de x_1. Si fuera negativo para todo nivel de x_1

$$\frac{\partial \Pi(x_1)}{\partial x_1} = \underbrace{u_1'(x_1) - c}_{>0} - \underbrace{[u_2'(x_1) - u_1'(x_1)]}_{>0} < 0 \quad \forall x_1$$

entonces el monopolista decidiría no ofrecer nada al consumidor de demanda baja, ya que para todo nivel de x_1 reducir la cantidad ofrecida al consumidor de demanda baja elevaría el beneficio.

(vi) *Análisis gráfico (coste marginal nulo)*



Discriminación perfecta

$$\left\langle \begin{array}{l} (r_i^*, x_i^*) \\ (0,0) \end{array} \right. \quad i = 1,2$$

$$u_1'(x_1^*) = u_2'(x_2^*) = \underbrace{0}_{c}$$

$$r_1^* = u_1(x_1^*) \equiv A$$

$$r_2^* = u_2(x_2^*) \equiv A + B + C$$

$$\Pi^* = u_1(x_1^*) + u_2(x_2^*) \equiv \underbrace{A}_{r_1^*} + \underbrace{A + B + C}_{r_2^*}$$

No identificación

Supongamos que el monopolista no conoce la identidad del consumidor y que establece una única lista de precios donde mantiene las combinaciones precio-cantidad óptimas bajo discriminación perfecta. El consumidor 2 tendría incentivos a realizar arbitraje personal.

$$\left\langle \begin{array}{l} (\underbrace{r_1^*}_{A}, x_1^*) \\ (\underbrace{r_2^*}_{A+B+C}, x_2^*) \\ (0,0) \end{array} \right.$$

Consumidor 1

Consumidor 2

$$\boxed{0 = \underbrace{A+B+C}_{u_2(x_2^*)} - \underbrace{(A+B+C)}_{r_2^*} < \underbrace{A+B}_{u_2(x_1^*)} - \underbrace{A}_{r_1^*} = B}$$

Discriminación de segundo grado

Las restricciones que se cumplen con igualdad son:

$r_1 = u_1(x_1) \equiv A(x_1) \rightarrow$ al consumidor 1 se le cobra el área debajo de la inversa de demanda.

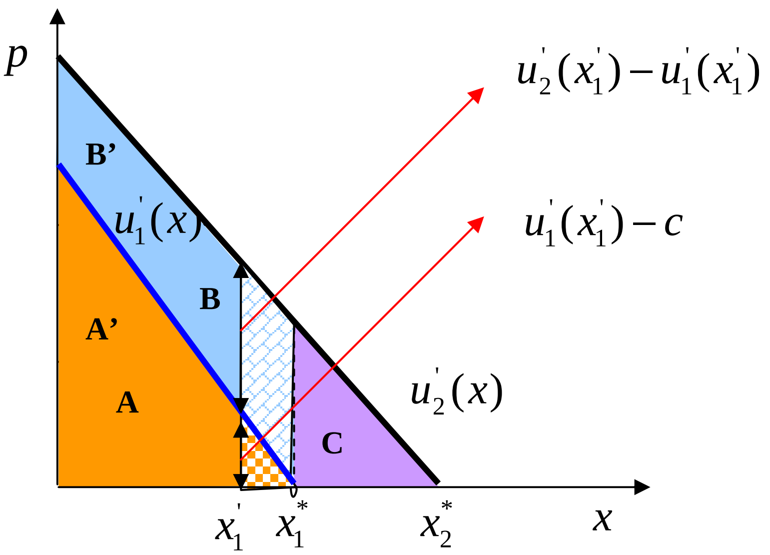
$u_2(x_2) - r_2 = u_2(x_1) - r_1 \equiv B(x_1) \rightarrow$ al consumidor 2 hay que dejarle con un excedente $B(x_1)$ (el mínimo posible) para que no haga arbitraje.

Inicialmente mantenemos las cantidades ofrecidas; sólo ajustamos las tarifas.

$$\left\langle \begin{array}{l} (\underbrace{\overline{r}_1}_{A}, x_1^*) \\ (\underbrace{\overline{r}_2}_{A+C}, x_2^*) \\ (0,0) \end{array} \right. \qquad \Pi(x_1^*, x_2^*) = 2A + C$$

$$\Pi(x_1^{'}, x_2^*) = A' + A + B + C - B'$$

$$\Pi(x_1^{'}, x_2^*) - \Pi(x_1^*, x_2^*) \equiv -(A - A') + (B - B') > 0$$

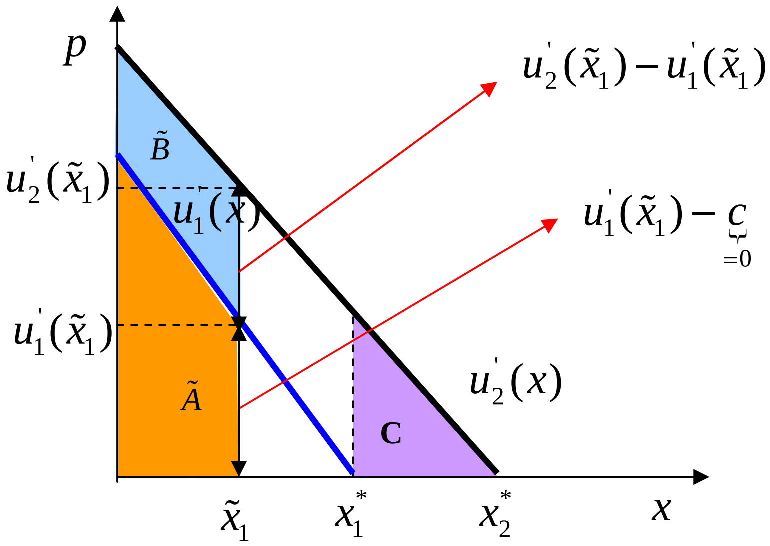


$$\left\langle \begin{array}{l} (\tilde{r}_1, \tilde{x}_1) \\ (\tilde{r}_2, \tilde{x}_2) \\ (0,0) \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial \Pi(\tilde{x}_1)}{\partial x_1} = u_1^{'}(\tilde{x}_1) - c - \underbrace{[u_2^{'}(\tilde{x}_1) - u_1^{'}(\tilde{x}_1)]}_{>0} = 0$$

Como estamos suponiendo que el coste marginal es cero:

$$\frac{\partial \Pi(\tilde{x}_1)}{\partial x_1} = u_1^{'}(\tilde{x}_1) - \underbrace{[u_2^{'}(\tilde{x}_1) - u_1^{'}(\tilde{x}_1)]}_{>0} = 0 \rightarrow u_1^{'}(\tilde{x}_1) = u_2^{'}(\tilde{x}_1) - u_1^{'}(\tilde{x}_1)$$

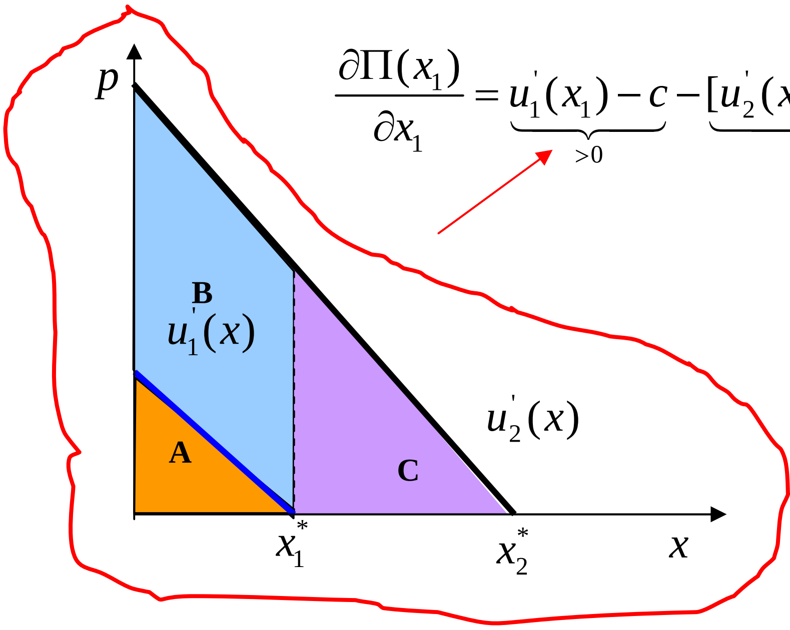


$$\Pi(\tilde{x}_1, \underbrace{\tilde{x}_2}_{x_2^*}) = u_1(\tilde{x}_1) - \underbrace{c}_{0}\tilde{x}_1 + u_2(x_2^*) - [u_2(\tilde{x}_1) - u_1(\tilde{x}_1)] - \underbrace{c}_{0} x_2^* \equiv \tilde{A} + A + B + C - \tilde{B}$$

Sólo ofrecer el bien al consumidor de demanda alta

$$\frac{\partial \Pi(x_1)}{\partial x_1} = \underbrace{u_1^{'}(x_1) - c}_{>0} - \underbrace{[u_2^{'}(x_1) - u_1^{'}(x_1)]}_{>0} < 0 \quad \forall x_1$$

$$\left\langle \begin{array}{l} (\underbrace{r_2^{*}}_{A+B+C}, x_2^{*}) \\ (0,0) \end{array} \right.$$



1.8. ***La discriminación de precios de tercer grado***

(i) Definición y contexto.

(ii) Maximización de beneficios. Regla de la inversa de la elasticidad.

(iii) Comparación de beneficios con el caso de precio uniforme (precio simple de monopolio).

(iv) Efectos sobre el bienestar social.

(i) *Definición y contexto*

Existe discriminación de precios de tercer grado cuando se cobra a consumidores pertenecientes a distintos grupos o submercados precios diferentes, pero cada consumidor paga el mismo precio por cada una de las unidades que adquiere. Éste es probablemente el tipo más común de discriminación de precios. Ejemplos: descuentos a estudiantes, precios diferentes dependiendo del día de la semana etc.

El monopolista recibe una *señal exógena* que le permite distinguir m mercados o submercados completamente separados: $\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = 0.$ Éste es un tipo de *discriminación directa*: el monopolista establece listas de precios diferentes para consumidores pertenecientes a diferentes grupos o mercados. *Identificación*: el monopolista clasifica a cada consumidor en un grupo.

(ii) *Maximización de beneficios. Regla de la inversa de la elasticidad*

Vamos a considerar el caso más sencillo en el que $m = 2$: el monopolista clasifica a los consumidores en dos grupos o mercados cuyas funciones inversas de demanda son $p_1(x_1)$ y $p_2(x_2)$, con $p_i'(x_i) < 0$, $i = 1,2$. El monopolista puede establecer precios diferentes en los dos mercados pero dentro de cada mercado no puede discriminar. El problema de maximización es:

$$\max_{x_1, x_2} \overbrace{p_1(x_1)x_1 + p_2(x_2)x_2 - c.(x_1 + x_2)}^{\Pi(x_1, x_2)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \Pi}{\partial x_1} = p_1(x_1) + x_1 p_1'(x_1) - c = 0 \quad (1) \\ \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial x_2} = p_2(x_2) + x_2 p_2'(x_2) - c = 0 \quad (2) \end{array}\right\} (i) \rightarrow IM_1 = IM_2 = c$$

$$(i) \rightarrow p_i(x_i) + x_i p_i'(x_i) = c$$

$$p_i(x_i)[1+\frac{x_i p_i^{'}(x_i)}{p_i(x_i)}]=c$$

$$p_i(x_i)[1+\frac{1}{\varepsilon_i(x_i)}]=c$$

$$p_i(x_i)[1-\frac{1}{|\varepsilon_i(x_i)|}]=c$$

$$p_i(x_i)=\frac{c}{1-\frac{1}{|\varepsilon_i(x_i)|}} \qquad i=1,2.$$

Por tanto, $p_1(x_1)>p_2(x_2)$ sii $|\varepsilon_1(x_1)|<|\varepsilon_2(x_2)|$. En consecuencia se cobrará el precio más bajo al mercado cuya demanda sea más elástica; es decir, al mercado más sensible al precio.

(iii) *Comparación de beneficios con el caso de precio uniforme (precio simple de monopolio)*.

El beneficio del monopolista bajo discriminación de precios de tercer grado es por lo menos tan alto como el beneficio bajo precio uniforme. La razón es sencilla: bajo discriminación de precios de tercer grado siempre podría elegir los precios iguales si eso fuera lo más rentable.

(iv) *Efectos sobre el bienestar social*

1) ¿Cuál es el problema?

2) Cotas al cambio en el bienestar social.

3) Aplicaciones:

a) Demanda lineal.

b) Apertura de mercados.

1) **¿Cuál es el problema?**

El objetivo de esta sección es comparar desde el punto de vista del bienestar social la discriminación de precios de tercer grado con el precio uniforme o precio simple de monopolio. En general, un movimiento desde precio uniforme a discriminación de precios de tercer grado beneficia a algunos agentes y perjudica a otros.

Beneficiados por la DP3º: el monopolista y los consumidores del mercado de mayor elasticidad (ya que el precio baja en ese mercado).

Perjudicados por la DP3º: los consumidores del mercado de menor elasticidad (ya que el precio aumenta).

Luego el efecto sobre el bienestar social queda indeterminado.

2) **Cotas al cambio en el bienestar social**

Supongamos para simplificar que sólo hay dos mercados y partamos de una función de utilidad agregada de la forma: $u_1(x_1)+u_2(x_2)+y_1+y_2$, donde x_1 y x_2 son los consumos del bien *x* por parte de los dos grupos e $y=y_1+y_2$ es el dinero que se gasta en otros bienes de consumo. Las funciones u_1 y u_2 son estrictamente cóncavas. Las funciones inversas de demanda de los dos submercados son: $p_1(x_1)=u_1^{'}(x_1)$ y $p_2(x_2)=u_2^{'}(x_2)$.

Si $C(x_1,x_2)$ es el coste de ofrecer x_1 y x_2 podemos medir el bienestar social como:

$$W(x_1,x_2)=u_1(x_1)+u_2(x_2)-C(x_1,x_2)$$

Consideramos dos configuraciones de la producción (x_1^0,x_2^0) y (x_1^1,x_2^1) cuyos precios son (p_1^0,p_2^0) y (p_1^1,p_2^1), respectivamente. Supongamos que el conjunto inicial de precios corresponde con el precio uniforme (precio simple de monopolio) $p_1^0 = p_2^0 = p^0$ y que p_1^1 y p_2^1 son los precios bajo discriminación de precios de tercer grado. Consideraremos el paso de $\boldsymbol{x}^0$ a $\boldsymbol{x}^1$. Debido a la estricta concavidad de u_1 y u_2 tenemos que (ver Apéndice):

$$\left.\begin{array}{l} u_1(x_1^1) < u_1(x_1^0) + \overbrace{u_1'(x_1^0)}^{p_1(x_1^0)=p_1^0}\,\overbrace{(x_1^1 - x_1^0)}^{\Delta x_1} \quad (1) \rightarrow \Delta u_1 < p_1^0 \Delta x_1 \\ \\ u_1(x_1^0) < u_1(x_1^1) + \underbrace{u_1'(x_1^1)}_{p_1(x_1^1)=p_1^1}\,\underbrace{(x_1^0 - x_1^1)}_{-\Delta x_1} \quad (1)' \rightarrow \Delta u_1 > p_1^1 \Delta x_1 \end{array}\right\} \rightarrow p_1^0 \Delta x_1 > \Delta u_1 > p_1^1 \Delta x_1 \quad (3)$$

$$\left.\begin{array}{l} u_2(x_2^1) < u_2(x_2^0) + \overbrace{u_2'(x_2^0)}^{p_2(x_1^0)=p_2^0}\,\overbrace{(x_2^1 - x_2^0)}^{\Delta x_2} \quad (2) \rightarrow \Delta u_2 < p_2^0 \Delta x_2 \\ \\ u_2(x_2^0) < u_2(x_2^1) + \underbrace{u_2'(x_2^1)}_{p_2(x_1^1)=p_2^1}\,\underbrace{(x_2^0 - x_2^1)}_{-\Delta x_2} \quad (2)' \rightarrow \Delta u_2 > p_2^1 \Delta x_2 \end{array}\right\} \rightarrow p_2^0 \Delta x_2 > \Delta u_2 > p_2^1 \Delta x_2 \quad (4)$$

Sumando (3) y (4)

$$p_1^0 \Delta x_1 + p_2^0 \Delta x_2 > \Delta u_1 + \Delta u_2 > p_1^1 \Delta x_1 + p_2^1 \Delta x_2$$

donde

$$\begin{array}{c} \Delta u = \Delta u_1 + \Delta u_2;\ \Delta x_1 = x_1^1 - x_1^0;\ \Delta x_2 = x_2^1 - x_2^0 \\ p_1^0 = p_1(x_1^0) = u_1'(x_1^0);\ p_2^0 = p_2(x_2^0) = u_2'(x_2^0); \\ p_1^1 = p_1(x_1^1) = u_1'(x_1^1);\ p_2^1 = p_2(x_2^1) = u_2'(x_2^1). \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Delta W = W(x_1^1, x_2^1) - W(x_1^0, x_2^0) &= \underbrace{u_1(x_1^1) - u_1(x_1^0)}_{\Delta u_1} + \underbrace{u_2(x_2^1) - u_2(x_2^0)}_{\Delta u_2} - [\underbrace{C(x_1^1, x_2^1) - C(x_1^0, x_2^0)}_{\Delta C}] \\ &= \Delta u_1 + \Delta u_2 - \Delta C \end{aligned}$$

Por tanto,

$$p_1^0 \Delta x_1 + p_2^0 \Delta x_2 - \Delta C > \Delta W > p_1^1 \Delta x_1 + p_2^1 \Delta x_2 - \Delta C$$

Si el coste marginal es constante:

$$\Delta C = c(x_1^1 + x_2^1) - c(x_1^0 + x_2^0) = c\Delta x_1 + c\Delta x_2$$

Con lo que las cotas al cambio en el bienestar nos quedan:

$$\underbrace{(p_1^0 - c)\Delta x_1 + (p_2^0 - c)\Delta x_2}_{\text{Cota superior}} > \Delta W > \underbrace{(p_1^1 - c)\Delta x_1 + (p_2^1 - c)\Delta x_2}_{\text{Cota inferior}} \quad (5)$$

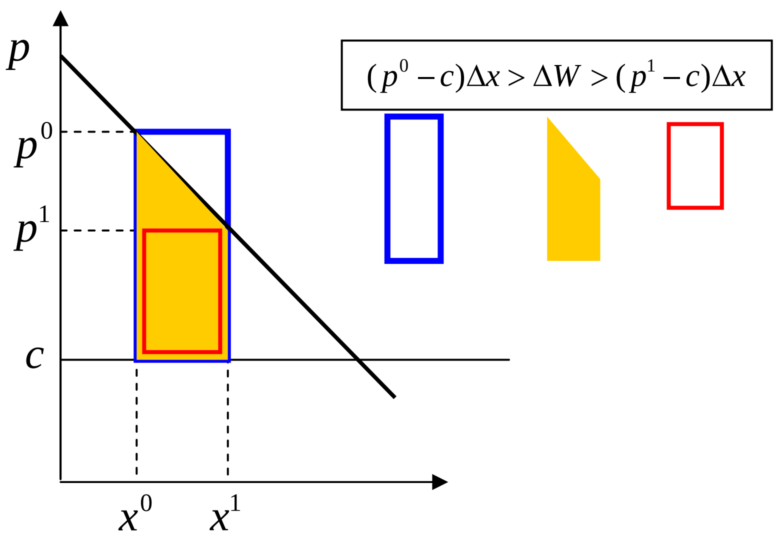
Como $p_1^0 = p_2^0 = p^0$ las cotas del cambio en el bienestar son:

$$\underbrace{(p^0 - c)\overbrace{(\Delta x_1 + \Delta x_2)}^{\Delta x}}_{\text{Cota superior}} > \Delta W > \underbrace{(p_1^1 - c)\Delta x_1 + (p_2^1 - c)\Delta x_2}_{\text{Cota inferior}} \quad (6)$$

- Cota superior: implica que una *condición necesaria* para que aumente el bienestar social, $\Delta W > 0$, es que aumente la producción total. Supongamos por el contrario que $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 \leq 0$. Como $(p^0 - c) > 0$ entonces $(4) \rightarrow \Delta W < 0$.

- Cota inferior: indica que una condición suficiente para que aumente el bienestar bajo discriminación de precios de tercer grado es que sea positiva la suma de las variaciones de la producción ponderadas por la diferencia entre el precio bajo discriminación y el coste marginal.

Gráficamente para el caso de un único mercado las cotas quedarían:



3) **Aplicaciones**

a) ***Demanda lineal***

Supongamos que las demandas de los dos mercados vienen dadas por $x_i(p_i) = \frac{a_i}{b_i} - \frac{1}{b_i} p_i,\ i = 1,2,$ y el coste marginal constante es nulo, $c = 0$. El problema de maximización de beneficios bajo discriminación de precios de tercer grado es:

$$\max_{p_1, p_2} p_1 x_1(p_1) + p_2 x_2(p_2)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p_1} = x_1(p_1) + p_1 x_1^{'}(p_1) = 0 \rightarrow \frac{a_1}{b_1} - \frac{1}{b_1} p_1 - \frac{1}{b_1} p_1 = 0 \rightarrow p_1^1 = \frac{a_1}{2};\ x_1^1 = \frac{a_1}{2b_1}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p_2} = x_2(p_2) + p_2 x_2^{'}(p_2) = 0 \rightarrow \frac{a_2}{b_2} - \frac{1}{b_2} p_2 - \frac{1}{b_2} p_2 = 0 \rightarrow p_2^1 = \frac{a_2}{2};\ x_2^1 = \frac{a_2}{2b_2}$$

La cantidad total vendida es:

$$x^1 = x_1^1 + x_2^1 = \frac{a_1}{2b_1} + \frac{a_2}{2b_2} = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{2b_1 b_2}$$

Bajo precio uniforme:

$$\max_{p} p x_1(p) + p x_2(p)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p} = x_1(p) + x_2(p) + p x_1^{'}(p) + p x_2^{'}(p) \rightarrow \frac{a_1}{b_1} - \frac{1}{b_1} p + \frac{a_2}{b_2} - \frac{1}{b_2} p - \frac{1}{b_1} p - \frac{1}{b_2} p = 0$$

$$\rightarrow p^0 = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{2(b_1 + b_2)};$$

$$x_1^0 = \frac{a_1}{b_1} - \frac{1}{b_1} \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{2(b_1 + b_2)} = \frac{2a_1 b_1 + 2a_1 b_2 - a_1 b_2 - a_2 b_1}{2b_1(b_1 + b_2)} = \frac{2a_1 b_1 + a_1 b_2 - a_2 b_1}{2b_1(b_1 + b_2)}$$

$$x_1^0 = \frac{a_2}{b_2} - \frac{1}{b_2} \frac{a_2 b_1 + a_1 b_2}{2(b_1 + b_2)} = \frac{2a_2 b_2 + 2a_2 b_1 - a_2 b_1 - a_1 b_2}{2b_2(b_1 + b_2)} = \frac{2a_2 b_2 + a_2 b_1 - a_1 b_2}{2b_2(b_1 + b_2)}$$

La cantidad total vendida es:

$$x^0 = x_1^0 + x_2^0 = \frac{2a_1b_1 + a_1b_2 - a_2b_1}{2b_1(b_1+b_2)} + \frac{2a_2b_2 + a_2b_1 - a_1b_2}{2b_2(b_1+b_2)}$$
$$= \frac{2a_1b_1b_2 + a_1(b_2)^2 - a_2b_1b_2 + 2a_2b_1b_2 + a_2(b_1)^2 - a_1b_1b_2}{2b_1b_2(b_1+b_2)}$$
$$= \frac{a_1b_1b_2 + a_1(b_2)^2 + a_2b_1b_2 + a_2(b_1)^2}{2b_1b_2(b_1+b_2)} = \frac{(a_1b_2 + a_2b_1)(b_1+b_2)}{2b_1b_2(b_1+b_2)} = \frac{a_1b_2 + a_2b_1}{2b_1b_2}$$

Por tanto, la producción es la misma bajo ambas políticas de precios. Es decir, $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 0$. Es decir, $\Delta x_1 = -\Delta x_2$. Las cotas quedarían

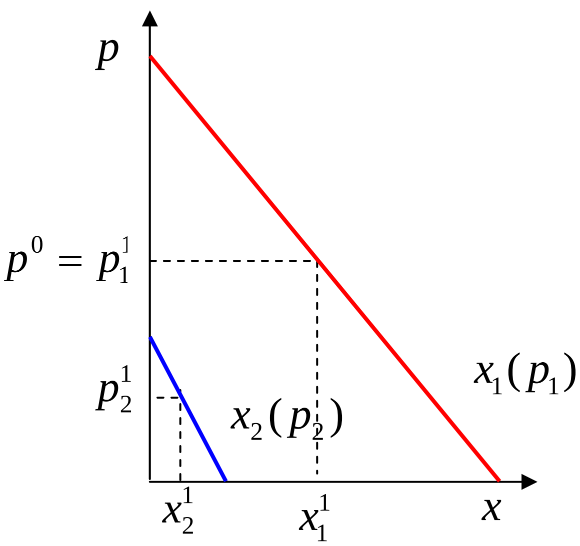
$$(p^0 - c)\overbrace{\underbrace{(\Delta x_1 + \Delta x_2)}_{=0}}^{\Delta x} > \Delta W > \underbrace{(p_1^1 - c)\Delta x_1 + (p_2^1 - c)\Delta x_2}_{<0} \quad (6)$$

Luego el bienestar disminuye: $\Delta W < 0$.

Como veremos a continuación el anterior resultado depende crucialmente de que todos los mercados sean servidos bajo precio uniforme.

b) ***Apertura de mercados***

Imaginemos que las demandas de los dos mercados son como las que aparecen en el gráfico adjunto.



Si el monopolista tuviera que vender al mismo precio debería bajar tanto el precio en el mercado 1 que la reducción de beneficios en ese mercado no se vería compensada. Por tanto,

$$(\underbrace{p_1^1}_{p^0} - c)\underbrace{(\underbrace{\Delta x_1}_{=0} + \underbrace{\Delta x_2}_{>0})}_{>0} > \Delta W > \underbrace{\underbrace{(p_1^1 - c)\underbrace{\Delta x_1}_{=0}}_{=0} + \underbrace{(p_2^1 - c)\underbrace{\Delta x_2}_{>0}}_{>0}}_{>0} \quad (6)$$

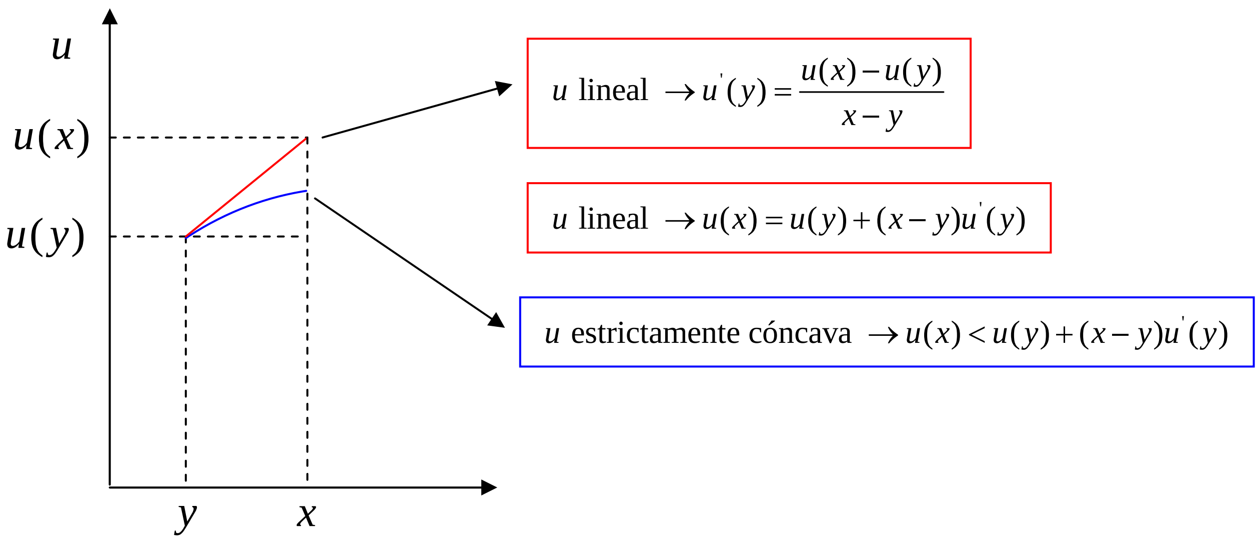
Por tanto, como la cota inferior es positiva $\Delta W > 0$. Pero no sólo aumenta el bienestar; de hecho la discriminación de precios domina en el sentido de Pareto al precio uniforme. Al pasar de precio uniforme a discriminación de precios de tercer grado aumentan los beneficios del monopolista, mejoran los consumidores del mercado 2 y los consumidores del mercado uno están igual.

Apéndice

Si *u* es una función estrictamente cóncava para todo *x* e *y* se cumple:

$$u(x) < u(y) + u^{'}(y)(x - y).$$

Las tangentes siempre quedan por encima de la función si ésta es estrictamente cóncava.



Tema 2. **Teoría de Juegos No Cooperativos**

Introducción

La Teoría de los Juegos no Cooperativos estudia y modela *situaciones de conflicto* entre agentes económicos; es decir, estudia situaciones en las que los beneficios (ganancias, utilidad o pagos) de cada agente económico dependen no sólo de sus propios actos sino también de los actos de los demás agentes.

Supondremos *jugadores racionales* y, por tanto, cada uno de ellos tratará de maximizar su función de beneficios (utilidad o pagos) dadas sus conjeturas o creencias sobre cómo van a actuar los otros jugadores. El resultado del juego dependerá de las acciones de todos los jugadores.

Una característica fundamental de los juegos no cooperativos es que *no* se pueden establecer *contratos* entre los jugadores que se hagan cumplir por terceros. Es decir, no existe una institución externa (p.e. tribunales de justicia) que sea capaz de hacer cumplir los acuerdos. En este contexto, la cooperación entre los jugadores sólo surgirá como equilibrio o propuesta de solución si está en el mejor interés de los jugadores actuar así.

Para cada juego trataremos de proponer una "solución" que sea una predicción razonable del *comportamiento racional* de los jugadores (OBJETIVO).

Nos interesa la Tª de los Juegos no Cooperativos porque es de gran utilidad para modelar y comprender los problemas económicos *multipersonales* caracterizados por *interdependencia estratégica*. Como ejemplo consideremos la competencia entre las empresas de una industria. La competencia perfecta y el monopolio puro (en el sentido de no estar amenazado por la entrada) son casos muy especiales y poco realistas. Lo frecuente es encontrarse en la realidad industrias en las que existen pocas empresas (o existen muchas pero un número pequeño de ellas produce un porcentaje muy elevado de la producción total). Cuando hay pocas empresas, la competencia entre ellas estará mediatizada por consideraciones estratégicas: cada empresa toma sus decisiones (precio, producción, publicidad..) teniendo en cuenta o conjeturando el comportamiento de las demás. Por tanto, la competencia en un oligopolio, claramente la podemos ver como un juego no cooperativo donde las empresas son los jugadores. Así, muchas de las predicciones o propuestas de solución que provienen de la Teoría de los Juegos nos serán de gran utilidad para entender el comportamiento de los agentes económicos bajo interacción estratégica

En la sección 2, definiremos las principales nociones de la Teoría de los juegos. Veremos que existen dos formas de representar un juego: la forma extensiva y la forma normal o estratégica. En la sección 3, analizaremos los principales conceptos de solución y los problemas que éstos presentan. Estudiaremos el equilibrio de Nash y los refinamientos. La sección 4 estudia los juegos repetidos y, por último, en la sección 5 se presentan algunas conclusiones.

2.1. **Nociones fundamentales**

Existen dos formas de representar un juego: la forma extensiva y la forma normal o estratégica. Vamos a comenzar analizando los principales elementos de un juego en forma extensiva.

2.2.1. **Juegos en forma extensiva** (dinámicos o secuenciales)

Un juego en forma extensiva especifica:

1) Los jugadores.
2) El orden del juego.
3) Las elecciones factibles para un jugador cuando le toca el turno (en cada nodo de decisión).
4) La información que tiene cada jugador en cada uno de sus turnos de juego (nodos).

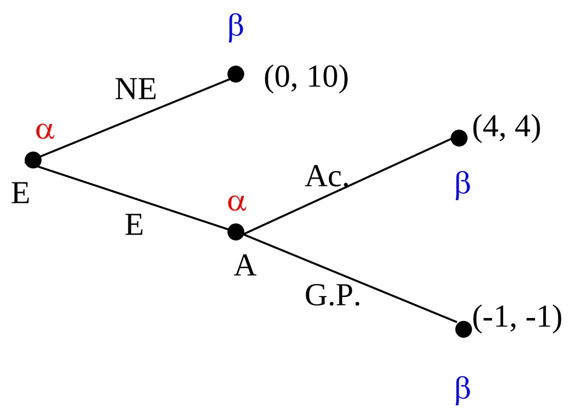
5) Los pagos para cada jugador como una función de los movimientos seleccionados.

6) Distribuciones de probabilidad para movimientos de la naturaleza.

Un juego en forma extensiva se suele describir a través de un *árbol de decisión*. Un árbol de decisión está constituido por ramas y nodos. Hay dos tipos de nodos: nodos de decisión y nodos terminales. Hay que señalar en cada nodo el agente que tiene que tomar la decisión. Cuando alcanzamos un nodo de decisión, el agente de ese nodo tiene su turno y elige en qué dirección ir. Cuando se alcanza un nodo terminal se producen pagos: un vector de pagos en cada nodo terminal que nos dice lo que gana cada jugador.

EJEMPLO 1: Juego de entrada

Consideremos una industria en la que hay una empresa establecida, A, y un entrante potencial, E. En la primera etapa del juego el entrante potencial decide si entrar o no en la industria. Si decide no entrar el juego termina y se producen pagos (A obtiene el beneficio de monopolio) y si decide entrar entonces le toca el turno a la empresa establecida, A, que tiene que decidir si acomodarse a la entrada de E (repartirse el mercado) o comenzar una guerra de precios mutuamente perjudicial. En forma extensiva el juego quedaría representado de la siguiente forma:



Jugadores: E y A.

Acciones: *E* (entrar), *NE* (no entrar), *Ac.* (acomodar), *G.P.* (guerra de precios).

Nodos de decisión: α.

Nodos terminales: β.

(x, y): vector de pagos. x: pago para el jugador E; y: pago para el jugador A.

En cada nodo terminal se tienen que especificar los pagos de cada uno de los jugadores (incluso aunque alguno de ellos no haya llegado "físicamente" a jugar).

Supuestos:

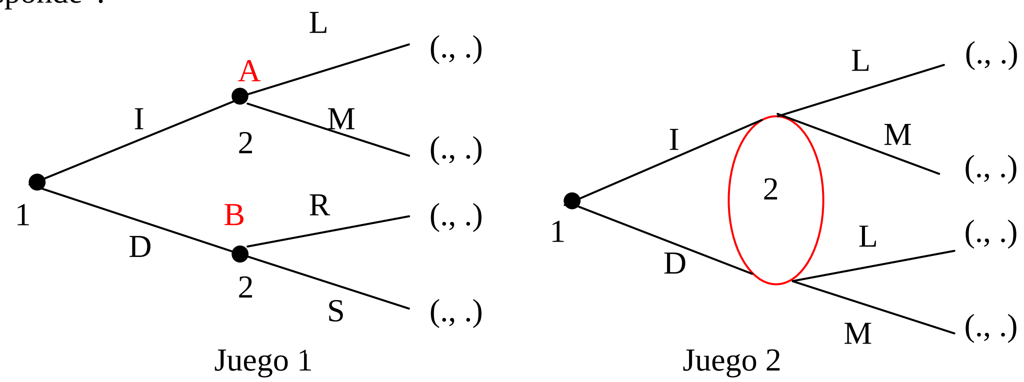
(i) Todos los jugadores tienen la misma percepción de cómo es el juego.

(ii) Información completa: cada jugador conoce las características de los demás jugadores: preferencias y espacios de estrategias.

(iii) Memoria perfecta: cada agente recuerda todo lo que ha jugado.

Definición 1: **Conjunto de información**

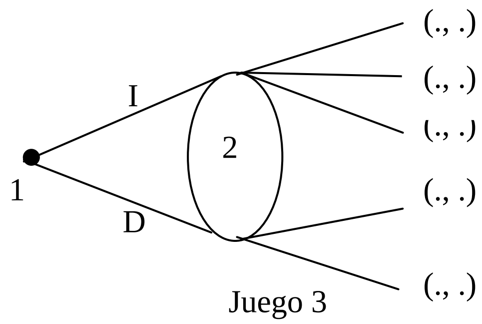
"Es la información de la que dispone cada jugador en cada nodo de decisión que le corresponde".



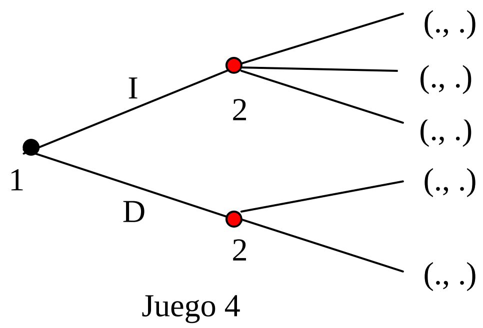
En el juego 1 el jugador 2 tiene diferente información en cada uno de sus dos nodos. En *A*, si le toca jugar sabe que el jugador 1 ha jugado *I* y en *B* que ha jugado *D*. Decimos que estos conjuntos de información constan de un único nodo de decisión. En el juego 2, el jugador 2 tiene la misma información en sus dos nodos de decisión. Es decir, el conjunto de información constaría de dos nodos de decisión.

Un juego en el que existen conjuntos de información de más de un nodo se dice que es un juego de información imperfecta: alguno de los jugadores no observa los movimientos del otro o de los otros jugadores. Abusando del lenguaje se suele llamar conjunto de información al conjunto de nodos en los que un mismo jugador tiene que jugar en ausencia de información sobre el nodo concreto en el que se encuentra.

El hecho de que todos los jugadores sepan el tipo de juego que están jugando y el supuesto de memoria perfecta limitan las situaciones en las que podemos tener conjuntos de información con más de un nodo.

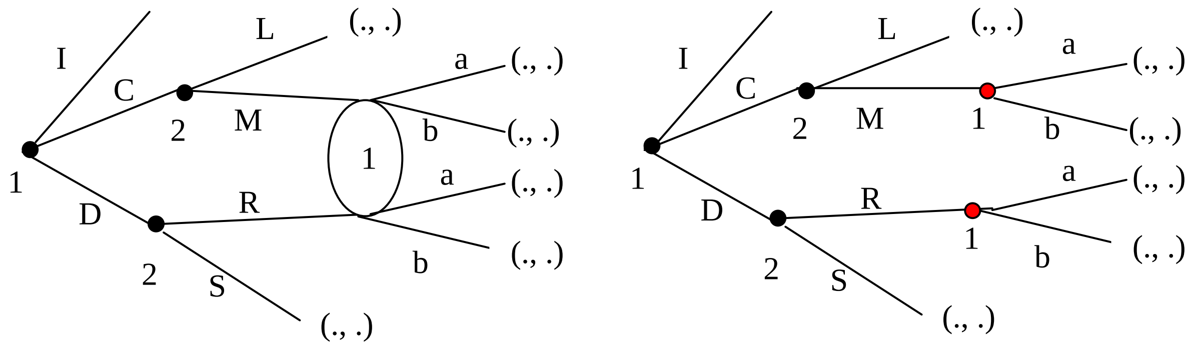


Juego 3



Juego 4

El juego 3 está mal representado ya que no sería un juego de información imperfecta. Si el jugador 2 conoce el juego, cuando le toque jugar y se enfrente a tres alternativas automáticamente deducirá que se encuentra en el nodo superior. Es decir, el juego en forma extensiva debería ser como el del juego 4. Por tanto, *si un conjunto de información consta de dos o más nodos de decisión, en cada uno de ellos el número de opciones (acciones o movimientos) debe ser el mismo*.



Juego 5 Juego 6

El supuesto de memoria perfecta impide situaciones como la del juego 5. El jugador 1 cuando le toca jugar en su segundo nodo de decisión "recuerda" perfectamente lo que hizo en el primero. La forma extensiva debería ser como la del juego 6.

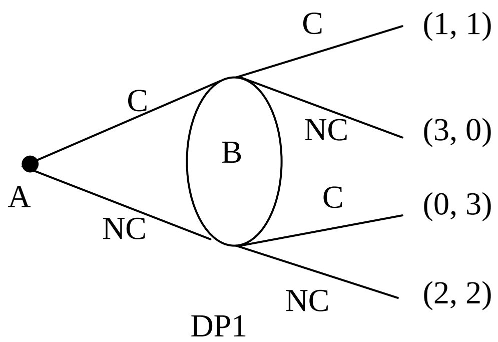
Definición 2: **Subjuego**

"Lo que queda por jugar a partir de un nodo de decisión, siempre y cuando lo que quede por jugar no forme parte de un conjunto de información de dos o más nodos. Al formar subjuegos se miran partes del árbol de decisión que puedan construirse sin romper ningún conjunto de información. Un subjuego comienza en un conjunto de información de un único nodo de decisión y todos los nodos de decisión de un mismo conjunto de información deben pertenecer al mismo subjuego."

EJEMPLO 2: El dilema del prisionero

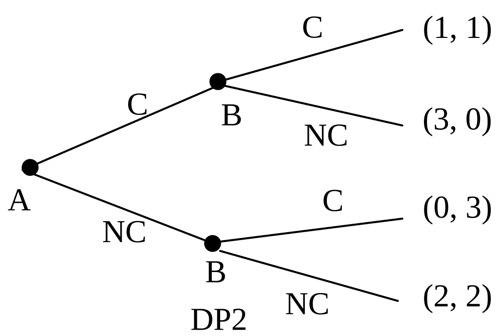
Dos individuos, A y B, son detenidos como sospechosos de haber cometido conjuntamente un delito. La policía les interroga en habitaciones separadas de forma que no hay comunicación entre ellos. Cada uno tiene la posibilidad de confesarse culpable (*C*) o no confesar (*NC*). Si sólo confiesa uno éste queda en libertad y las autoridades culpan al otro condenándole a 6 meses. Si ambos niegan su participación son condenados a 1 mes cada uno y si ambos confiesan son condenados a 3 meses cada uno.

- **Caso simultáneo**: cada individuo toma su decisión sin saber lo que ha decidido el otro.



Hay un conjunto de información con dos nodos de decisión. Es un juego de información imperfecta. Sólo hay un subjuego que coincide con el propio juego.

- **Caso secuencial**: el segundo observa la elección tomada por el primero (y éste lo sabe).



El juego DP2 es un juego de información perfecta y tiene tres subjuegos. “En los juegos de información perfecta hay tantos subjuegos como nodos de decisión”.

Definición 3: **Estrategia**

“Una estrategia de un jugador es una descripción completa de *lo que haría* en caso de ser llamado a jugar en cada uno de sus nodos de decisión. Hay que especificarlo incluso en aquellos nodos que no fueran alcanzables para él dado el comportamiento actual del otro o de los otros jugadores”. Es un *plan de comportamiento* o *plan de conducta* (Ejemplos: entrenador de baloncesto, demanda del consumidor, oferta de la empresa competitiva…). Es una función en la que cada jugador asigna una acción a cada nodo que le corresponde. Una estrategia de un jugador tiene tantas componentes como conjuntos de información tenga el jugador.

Definición 4: **Acción**

“Es una elección (decisión o movimiento) en un nodo de decisión”

Las acciones son “físicas” y las estrategias son “conjeturales”.

Definición 5: **Jugada o combinación de estrategias**

“Es una especificación de una estrategia para cada uno de los jugadores”. El resultado (vector de pagos) de una jugada debe quedar inequívocamente determinado.

EJEMPLO 1: Juego de entrada

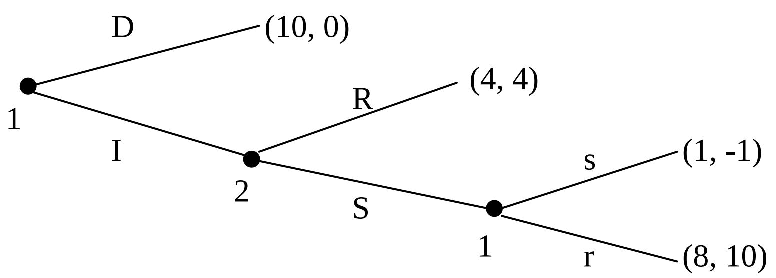
Es un juego de información perfecta y dos subjuegos. Cada jugador tiene dos estrategias: $S_E = \{NE, E\}$ y $S_A = \{Ac., G.P.\}$. Combinaciones de estrategias: (*NE*, *Ac*.), (*NE*, *G.P*.), (*E*, *Ac*.) y (*E*, *G.P*.).

EJEMPLO 2: Dilema del prisionero

DP1: Es un juego de información imperfecta y tiene un subjuego. Cada jugador tiene dos estrategias: $S_A = \{C, NC\}$ y $S_B = \{C, NC\}$. Combinaciones de estrategias: (*C*, *C*), (*C*, *NC*), (*NC*, *C*) y (*NC*, *NC*).

DP2: Es un juego de información perfecta y tiene tres subjuegos. El jugador A tiene dos estrategias $S_A = \{C, NC\}$ pero el jugador B tiene cuatro $S_B = \{CC, CNC, NCC, NCNC\}$. Combinaciones de estrategias: (*C*, *CC*), (*C*, *CNC*), (*C*, *NCC*), (*C*, *NCNC*), (*NC*, *CC*), (*NC*,*CNC*), (*NC*, *NCC*) y (*NC*, *NCNC*).

EJEMPLO 3



El jugador 1 tiene en su primer nodo de decisión dos posibles acciones, *D* e *I*, y en el segundo nodo también dos acciones: *s* y *r*. $S_1 = \{Ds, Dr, Is, Ir\}$ y $S_2 = \{R, S\}$.

2.1.2. **Juegos en forma normal o estratégica** (simultáneos o estáticos)

Un juego en forma normal se describe por:

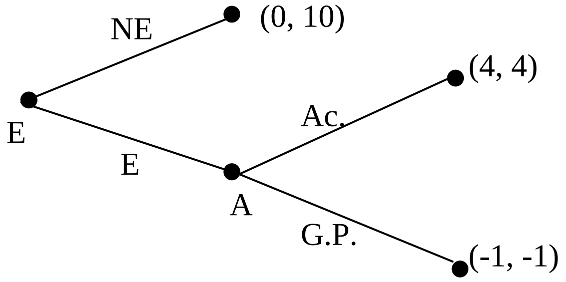
1) Los jugadores.

2) El conjunto (o espacio) de estrategias de cada jugador.

3) Una función de pagos que asigna a cada combinación de estrategias un vector de pagos.

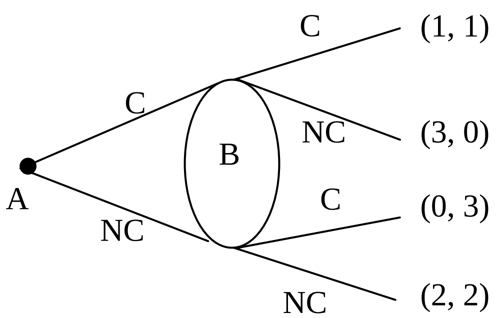
El elemento clave de esta forma de representar un juego es la descripción de los pagos del juego en función de las estrategias de los jugadores, sin explicitar las acciones que se van tomando a lo largo del juego. La representación gráfica, para dos jugadores, es una matriz (binaria) de pagos que tiene como entradas las posibles estrategias de los dos jugadores.

EJEMPLO 1: Juego de entrada

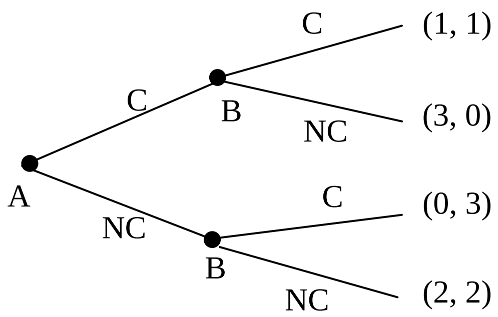


		A: Ac.	A: G.P.
E	NE	(0, 10)	(0, 10)
E	E	(4, 4)	(-1, -1)

EJEMPLO 2: Dilema del prisionero

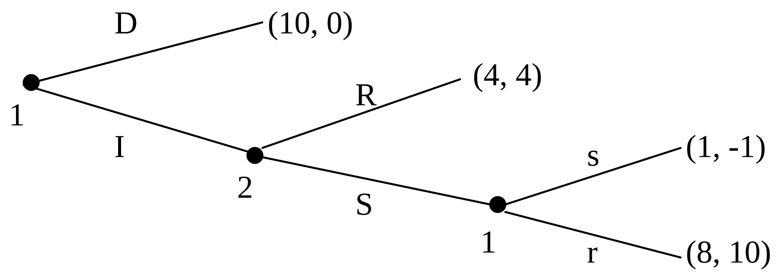


		B: C	B: NC
A	C	(1, 1)	(3, 0)
A	NC	(0, 3)	(2, 2)



		B			
		CC	CNC	NCC	NCNC
A	C	(1, 1)	(1, 1)	(3, 0)	(3, 0)
	NC	(0, 3)	(2, 2)	(0, 3)	(2, 2)

EJEMPLO 3



		2	
		R	S
1	Ds	(10, 0)	(10, 0)
	Dr	(10, 0)	(10, 0)
	Is	(4, 4)	(1, -1)
	Ir	(4, 4)	(8, 10)

Relación entre juegos en forma normal y juegos en forma extensiva

a) Para todo juego en forma extensiva tenemos de forma inequívoca un juego en forma normal que le corresponde. Esto es debido a que el juego en forma normal se describe en función de las estrategias de los jugadores.

b) (Problema) Juegos diferentes en forma extensiva pueden tener la misma forma normal. (Ejemplo: dilema del prisionero, DP1, cambiando el orden del juego).

2.2. **Conceptos (criterios) de solución de juegos no cooperativos**

El objetivo es intentar predecir cómo se van a comportar los jugadores cuando se enfrentan a un determinado juego. NOTA: "Una propuesta de solución no es un vector de pagos sino una combinación de estrategias, una para cada jugador, que conducirá a un vector de pagos. Nos interesa predecir comportamientos, no ganancias.

Notación

i: Jugador representativo, $i = 1,\dots, n$

S_i: conjunto o espacio de estrategias del jugador i.

$s_i \in S_i$: estrategia del jugador i.

$s_{-i} \in S_{-i}$: estrategia o combinación de estrategias del otro jugador (o los otros jugadores).

$\Pi_i(s_i, s_{-i})$: beneficio o ganancia del agente i correspondiente a la combinación de estrategias $s \equiv (s_1, s_2, \dots\dots, s_n) \equiv (s_i, s_{-i})$.

2.2.1. **Criterio de dominación**

Definición 6: **Estrategia dominante**

"Una estrategia es estrictamente dominante para un jugador si lleva a unos resultados estrictamente mejores (mayores ganancias) que el resto de sus estrategias ante cualquier combinación de estrategias de los demás jugadores".

"s_i^D es una estrategia dominante del jugador i si $\Pi_i(s_i^D, s_{-i}) > \Pi_i(s_i, s_{-i}), \forall s_i \in S_i, s_i \neq s_i^D; \forall s_{-i}$"

EJEMPLO 2: Dilema del prisionero

En el juego DP1 “confesar”, *C*, es una estrategia dominante para cada jugador. Independientemente de lo que haga el otro jugador lo mejor que puede hacer cada uno es confesar.

La presencia de estrategias dominantes conduce a una solución del juego. Cada jugador utilizará su estrategia dominante. La propuesta de solución para el juego DP1 será la combinación de estrategias (*C*, *C*).

Definición 7: **Dominación (estricta)**

“Decimos que una estrategia domina estrictamente a otra para un jugador cuando conduce a mejores resultados cualesquiera que sean las estrategias seguidas por los demás jugadores”.

“Si $\Pi_i(s_i^d, s_{-i}) > \Pi_i(s_i^{dd}, s_{-i}), \forall s_{-i}$, entonces s_i^d domina estrictamente a s_i^{dd}”.

El criterio de dominación consiste en la eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas. Obviamente, una estrategia está dominada cuando existe otra que la domina.

EJEMPLO 4

			2	
		t_1	t_2	t_3
1	s_1	(4, 3)	(2, 7)	(0, 4)
	s_2	(5, 5)	(5, -1)	(-4, -2)

En este juego no existen estrategias dominantes. Sin embargo, la presencia de estrategias dominadas nos va a permitir predecir un resultado. Vamos a aplicar el criterio de dominación. Como la estrategia t_3 es una estrategia estrictamente dominada por t_2 el jugador 1 puede conjeturar (predecir) que el jugador 2 nunca utilizará esa estrategia. Dada esta conjetura, que supone racionalidad del jugador 2, para el jugador 1 s_2 es mejor que s_1. La estrategia s_1 sólo sería utilizada ante la posibilidad de que el jugador 2 juegue t_3. Como el jugador 1 piensa que el jugador 2 es racional asignará una probabilidad nula a que el jugador 2 juegue t_3. En ese caso, el jugador 1 debería jugar s_2 y si el jugador 2 es racional lo mejor que podría hacer es jugar t_1. La utilización del criterio de dominación sucesiva o repetida (eliminando las estrategias dominadas y computando los juegos reducidos) permite resolver el juego.

EJEMPLO 5

		2	
		t_1	t_2
1	s_1	(10, 0)	(5, 2)
	s_2	(10, 1)	(2, 0)

En este juego no existen estrategias dominantes ni estrategias dominadas (estrictamente).

Definición 8: **Dominación débil**

“Una estrategia domina débilmente a otra para un jugador si lleva a resultados por lo menos tan buenos como la segunda cualesquiera que sean las estrategias seguidas por los demás jugadores, y estrictamente mejores que la segunda para alguna combinación de estrategias de los demás”.

"Si $\Pi_i(s_i^{db}, s_{-i}) \geq \Pi_i(s_i^{ddb}, s_{-i}), \forall s_{-i}$, y $\exists s_{-i}$ tal que $\Pi_i(s_i^{db}, s_{-i}) > \Pi_i(s_i^{ddb}, s_{-i})$, entonces s_i^{db} domina débilmente a s_i^{ddb}".

En el Ejemplo 5, s_1 domina débilmente a s_2. El jugador 2 podría conjeturar que el jugador 1 jugará s_1 y ante esta conjetura lo mejor que podría hacer sería jugar t_2. Siguiendo el criterio de dominación débil nuestra propuesta de solución sería (s_1, t_2).

Sin embargo, la aplicación sucesiva del criterio de dominación débil puede llevar a resultados problemáticos como ocurre en el Ejemplo 6, o a no proponer ninguna solución como ocurre en el Ejemplo 7 (al no existir ni estrategias dominantes, ni dominadas, ni débilmente dominadas).

EJEMPLO 6

		t_1	t_2	t_3
1	s_1	(10, 0)	(5, 1)	(4, -200)
	s_2	(10, 100)	(5, 0)	(0, -100)

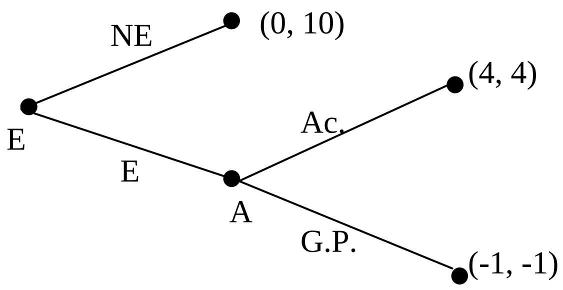
EJEMPLO 7

		2		
		t_1	t_2	t_3
1	s_1	(4, 10)	(3, 0)	(1, 3)
	s_2	(0, 0)	(2, 10)	(10, 3)

2.2.2. **Criterio de inducción retroactiva**

Vamos a utilizar el criterio de dominación para analizar la forma extensiva. Consideremos el Ejemplo 1.

EJEMPLO 1: Juego de entrada



		A	
		Ac.	G.P.
E	NE	(0, 10)	(0, 10)
	E	(4, 4)	(-1, -1)

En el juego en forma normal, el jugador A tiene una estrategia débilmente dominada: *G.P.*. El jugador E podría conjeturar esto y jugar *E*. Sin embargo, el jugador E también podría haber elegido *NE* para asegurarse el pago ante la posibilidad de que A jugara *G.P.*.

En el juego en forma extensiva, la solución es más natural. Se aplica la inducción hacia atrás o inducción retroactiva. El jugador E como juega primero puede conjeturar, correctamente, que si juega *E* seguro que el jugador A elegirá *Ac*.. El jugador E al jugar antes que A puede anticipar el comportamiento de A. En la forma extensiva tenemos más información ya que cuando A juega conoce el movimiento de E. El criterio de inducción retroactiva consiste en aplicar el criterio de dominación sucesiva de forma retroactiva comenzando desde el último(s) subjuego(s). En el Ejemplo 1, en forma extensiva, el criterio de inducción retroactiva propone como solución (*E*, *Ac*.).

Resultado: *Si el juego es de información perfecta y sin empates, el criterio de inducción retroactiva nos llevará a una única propuesta de solución.*

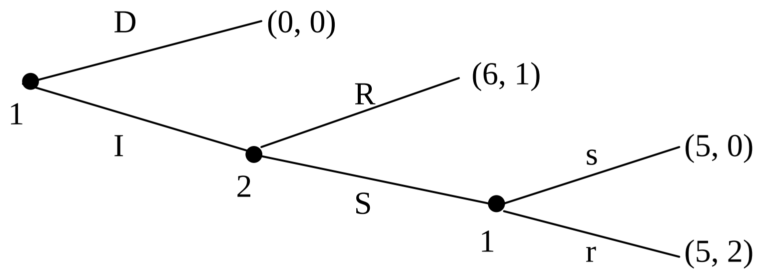
Problemas

(i) *Posibilidad de empates*.

(ii) *Información imperfecta*. Existencia de conjuntos de información con más de un nodo.

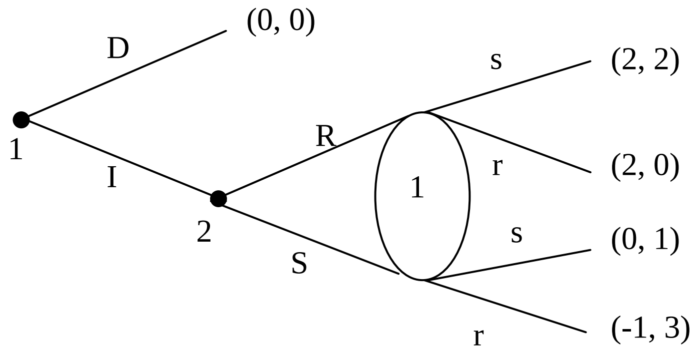
(iii) El éxito de la inducción hacia atrás reside en que todas las conjeturas sobre la racionalidad de los agentes se verifiquen exactamente con independencia de lo largo que sea el camino hacia atrás. (Requiere *racionalidad ilimitada*)

EJEMPLO 8



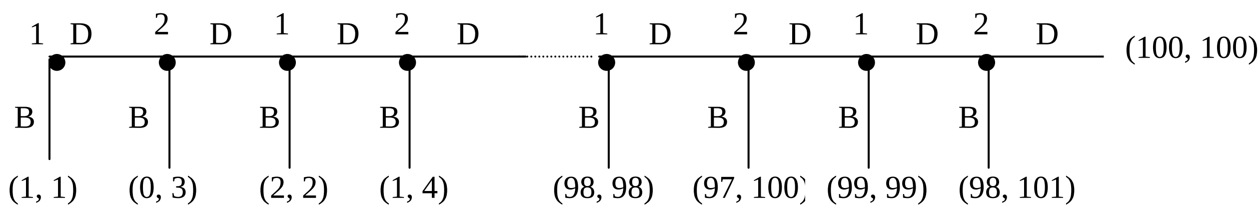
La inducción retroactiva no nos lleva a ninguna propuesta de solución ya que en el último subjuego el jugador 1 está indiferente entre *s* y *r*. En el subjuego anterior el jugador 2 no tendría una acción dominada (ya que no sería capaz de predecir el comportamiento del jugador1).

EJEMPLO 9



No podemos aplicar el criterio de inducción retroactiva.

EJEMPLO 10: El ciempiés de Rosenthal (1981)



En el resultado de inducción retroactiva los pagos son (1, 1). ¿Es posible otra racionalidad?

2.2.3. **Equilibrio de Nash**

El jugador *i*, *i* = 1,…, *n*, viene caracterizado por:

(i) Su espacio estratégico: S_i.

(ii) Una función de beneficios o función de ganancias, $\Pi_i(s_i, s_{-i})$ donde $s_i \in S_i$ y $s_{-i} \in S_{-i}$.

Cada jugador tratará de maximizar su función de beneficios (utilidad o ganancias) eligiendo una estrategia apropiada con conocimiento de los espacios estratégicos y las funciones de beneficios de los otros jugadores aunque sin conocer la estrategia concreta utilizada por los rivales. Por tanto, cada jugador debe conjeturar la estrategia utilizada por los rivales.

Definición 9: **Equilibrio de Nash**

"Una jugada o combinación de estrategias $s^* \equiv (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ constituye un equilibrio de Nash si el resultado para cada uno de los jugadores es mejor o igual que el resultado que obtendrían, permaneciendo constante la jugada de los demás, jugando otra estrategia. Es decir, $s^* \equiv (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ es un equilibrio de Nash si:

$\Pi_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq \Pi_i(s_i, s_{-i}^*)\ \forall s_i \in S_i, \forall i, i = 1, \ldots, n$."

En una situación de equilibrio se tienen que cumplir dos condiciones:

(i) Las *conjeturas* de los jugadores sobre cómo van a jugar los rivales deben ser *correctas*.

(ii) Ningún jugador tiene incentivos a cambiar su estrategia dadas las estrategias de los demás jugadores. Éste es un elemento de *racionalidad individual*: dado lo que hacen los demás hacerlo lo mejor posible. O lo que es lo mismo, ningún jugador aumenta sus beneficios (utilidad o pagos) mediante una *desviación unilateral*.

Ser equilibrio de Nash es una *condición necesaria* o requisito mínimo para que cualquier propuesta de solución de un juego sea una predicción razonable del comportamiento racional de los jugadores. Sin embargo, como ya veremos no es una condición suficiente. Es decir, no basta con que una combinación de estrategias sea equilibrio de Nash para que sea nuestra predicción de la solución de un juego.

Definición 10: **Equilibrio de Nash**

"Una jugada o combinación de estrategias $s^* \equiv (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ constituye un equilibrio de Nash si la estrategia de cada jugador es la mejor respuesta (o al menos una de ellas) ante las estrategias seguidas por los otros jugadores." Es decir, $s^* \equiv (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ es un equilibrio de Nash si: $s_i^* \in MR_i(s_{-i}^*) \forall i, i = 1, \ldots, n$ donde $MR_i(s_{-i}^*) = \left\{ s_i^{'} \in S_i : \Pi_i(s_i^{'}, s_{-i}^*) \geq \Pi_i(s_i, s_{-i}^*),\ \forall s_i \in S_i, s_i \neq s_i^{'} \right\}$

Una forma sencilla de calcular los equilibrios de Nash consiste en construir los conjuntos de mejores respuestas de cada jugador ante las estrategias (o combinaciones de estrategias) del otro (o los otros jugadores) y buscar aquellas combinaciones de estrategias que sean mutuamente mejores respuestas.

EJEMPLO 11

		2		
		h	i	j
	a	(5, 3)	(5, $\underline{11}$)	($\underline{20}$, 5)
1	b	($\underline{9}$, $\underline{11}$)	(2, 8)	(15, 6)
	c	(3, $\underline{10}$)	($\underline{10}$, 2)	(0, 5)

s_1	MR_2	s_2	MR_1
a	i	h	b
b	h	i	c
c	h	j	a

La combinación de estrategias (b, h) constituye el único equilibrio de Nash del juego.

EJEMPLO 7

		2		
		t_1	t_2	t_3
1	s_1	($\underline{4}$, $\underline{10}$)	($\underline{3}$, 0)	(1, 3)
	s_2	(0, 0)	(2, $\underline{10}$)	($\underline{10}$, 3)

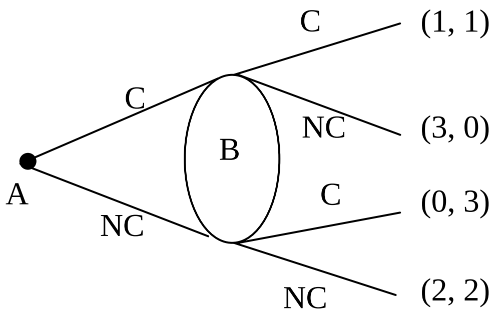
Nótese que para este juego el criterio de dominación no nos proponía ninguna solución. Sin embargo, la combinación de estrategias (s_1, t_1) constituye el único equilibrio de Nash del juego.

2.3. **Problemas y refinamientos del equilibrio de Nash**

2.3.1. **Posibilidad de ineficiencia**

Es habitual encontrar juegos en los que el equilibrio de Nash no es óptimo de Pareto (eficiente).

EJEMPLO 2: Dilema del prisionero



		B	
		C	NC
A	C	(1, 1)	(3, 0)
	NC	(0, 3)	(2, 2)

(C, C) es un equilibrio de Nash en estrategias dominantes. Sin embargo, encontramos otra combinación de estrategias (NC, NC) en la que ambos jugadores obtienen mayores ganancias.

2.3.2. **Inexistencia de equilibrio de Nash**

EJEMPLO 12

		2	
		t_1	t_2
1	s_1	($\underline{1}$, 0)	(0, $\underline{1}$)
	s_2	(0, $\underline{1}$)	($\underline{1}$, 0)

En este juego no existe equilibrio de Nash en estrategias puras. Sin embargo, permitiendo la utilización de estrategias mixtas (distribuciones de probabilidad sobre el espacio de estrategias puras de un jugador) se obtiene el resultado de que "siempre existe equilibrio de Nash en estrategias mixtas (juegos finitos)".

2.3.3. **Multiplicidad de equilibrios de Nash**

Vamos a distinguir dos tipos de juegos.

2.3.3.1. ***Sin posibilidad de refinamiento o selección***

EJEMPLO 13: La batalla de los sexos

Una pareja de novios tiene que elegir entre ir al cine o al teatro. El novio prefiere el cine al teatro, pero prefiere ir al teatro acompañado que ir solo al cine. Similarmente (pero al contrario) para la novia. El juego en forma normal es:

		Na	
		C	T
No	C	($\underline{3}$, $\underline{2}$)	(1, 1)
	T	(1, 1)	($\underline{2}$, $\underline{3}$)

En este juego hay dos equilibrios de Nash: (C, C) y (T, T). Existe un problema de *coordinación pur*a.

2.3.3.2. ***Con posibilidad de refinamiento o selección***

a) *Criterio de eficiencia*

Elegir el equilibrio de Nash que proporcione mayores pagos a los jugadores. No es en general un buen criterio de selección.

b) *Criterio de dominación débil*

El criterio consiste en eliminar aquellos equilibrios de Nash basados en estrategias débilmente dominadas. Aunque como concepto de solución no es bueno, nos permite seleccionar entre los equilibrios de Nash.

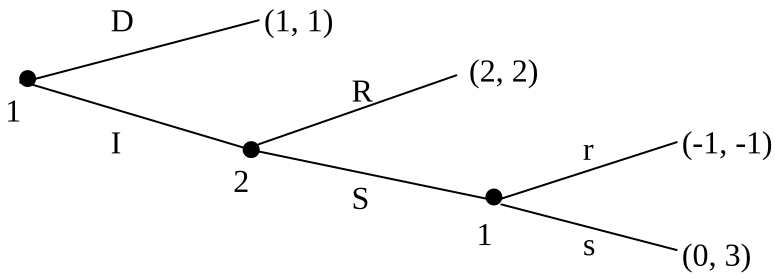
EJEMPLO 14

		2	
		D	I
1	D	($\underline{1}$, $\underline{1}$)	(0, 0)
	I	(0, 0)	($\underline{0}$, $\underline{0}$)

Equilibrios de Nash: (*D*, *D*) y (*I*, *I*). Jugar *I* es una estrategia débilmente dominada para cada jugador. Jugando *D* cada jugador se garantiza un pago por lo menos tan alto como jugando *I*. Tenderíamos a rechazar (*I*, *I*) por estar basado en estrategias débilmente dominadas. Por tanto, proponemos como solución la combinación de estrategias (*D*, *D*).

c) *Criterio de inducción retroactiva y equilibrio perfecto en subjuegos*

EJEMPLO 15



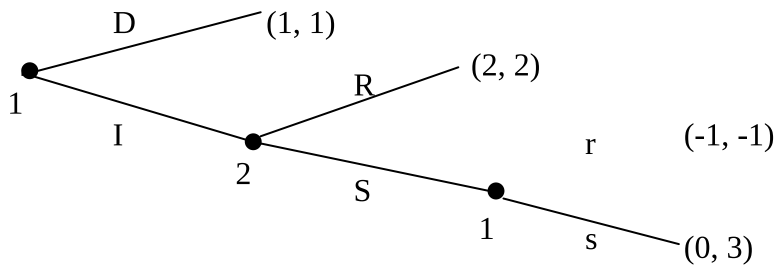
s_1	MR_2	s_2	MR_1
Dr	R, S	R	Ir, Is
Ds	R, S	S	Dr, Ds
Ir	R		
Is	S		

En este juego hay tres equilibrios de Nash: (*Dr*, *S*), (*Ds*, *S*) y (*Ir*, *R*). Comencemos mirando a la solución eficiente: (*Ir*, *R*). Este equilibrio de Nash presenta un problema: en su segundo nodo de decisión el jugador 1, aunque no es alcanzable, está anticipando (amenazando) que jugaría *r*. Amenazando con *r* trata de conseguir que el jugador 2 juegue *R* y así obtener más pago. Pero este equilibrio está basado en una amenaza no creíble: aunque, dada la estrategia del jugador 2, el segundo nodo de decisión del jugador 1 no es alcanzable, si lo fuera el jugador 1 nunca elegiría *r* ya que es una acción dominada (amenaza no creíble) por *s* en el último subjuego. El refinamiento que vamos a utilizar consiste en la eliminación de aquellos equilibrios basados en amenazas no creíbles (es decir, acciones dominadas dentro de los subjuegos). De la utilización conjunta de la noción de equilibrio de Nash y del criterio de inducción retroactiva surge la noción de:

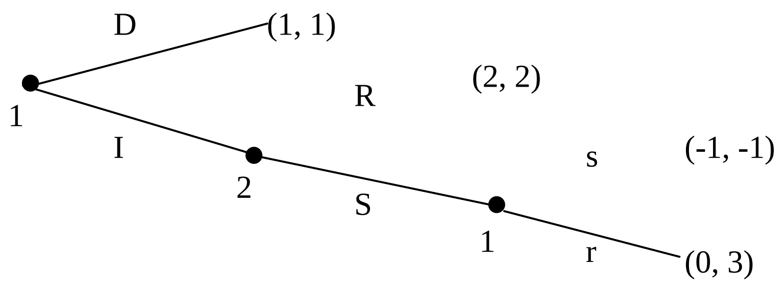
Definición 11: **Equilibrio perfecto en subjuegos**

"Una jugada o combinación de estrategias $s^* \equiv (s_1^*, \ldots, s_n^*)$, que sea equilibrio de Nash, constituye un *equilibrio perfecto en subjuegos* si las partes relevantes de las estrategias de equilibrio de cada uno de los jugadores son también de equilibrio para cada uno de los subjuegos.”

En el Ejemplo 15 (*Dr*, *S*) y (*Ir*, *R*) no son equilibrios perfectos en subjuegos. El equilibrio perfecto en subjuegos se obtiene por inducción retroactiva. Comenzamos por el último subjuego. En este subjuego *r* es una acción dominada; por tanto, no puede formar parte de la estrategia del jugador 1 en un equilibrio perfecto en subjuegos, de modo que la eliminamos y computamos el juego reducido



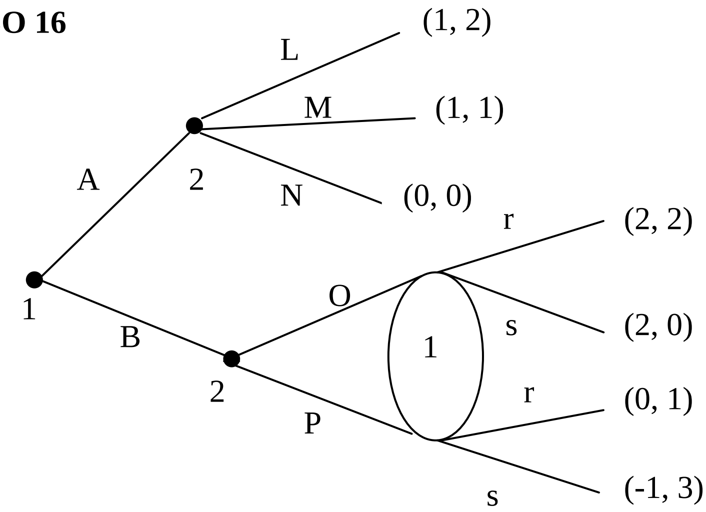
En la segunda etapa de la inducción retroactiva nos fijamos en el anterior subjuego, el correspondiente al jugador 2. En este subjuego *R* es una acción dominada para el jugador 2. Dado que el jugador 2 anticipa que el jugador 1 no va a jugar *r* jugar *R* es una acción dominada o amenaza no creíble. Por tanto, la eliminamos y computamos el juego reducido



En su primer nodo de decisión el jugador 1 tiene como acción dominada (en el juego reducido) *I*, y por tanto jugará *D*. Luego el equilibrio perfecto en subjuegos es (*Ds*, *S*).

Podemos interpretar la lógica de la inducción retroactiva de la siguiente forma. Cuando el jugador 2 tiene que elegir debería conjeturar que si juega *S* el jugador 1 seguro que jugará *s*. El jugador 2 es capaz de predecir el comportamiento racional del jugador 1 ya que este último observa la acción elegida por él. Si el jugador 1 es igualmente racional debería anticipar el comportamiento del jugador 2 y jugar *D*.

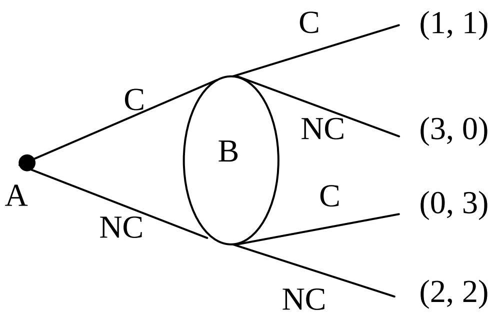
EJEMPLO 16



En este juego hay múltiples equilibrios de Nash y no podemos aplicar la inducción retroactiva al tener un subjuego de información imperfecta. Lo que hacemos es resolver el subjuego inferior del jugador 2 como si fuera un juego en si mismo. En este subjuego hay un equilibrio de Nash que es *O*, *r*. En el subjuego superior la única amenaza creíble del jugador 2 es *L*. Por tanto, el jugador 1 tiene que elegir entre *A* y *B* anticipando que si elige *A* el jugador 2 elegirá *L* y que si elige *B*, el jugador 2 y el 1 jugarán *O*, *r*. Por tanto, el equilibrio perfecto en subjuegos es (*Br*, *LO*). Hay que notar que las partes relevantes de las estrategias de equilibrio son también de equilibrio en cada uno de los subjuegos.

2.3. **Juegos repetidos**

EJEMPLO 2: Dilema del prisionero



		B	
		C	NC
A	C	(1, 1)	(3, 0)
	NC	(0, 3)	(2, 2)

Cuando el juego se juega una vez (*C*, *C*) es un equilibrio de Nash en estrategias dominantes y la cooperación o colusión entre los jugadores no se puede sostener como equilibrio. Aunque los jugadores obtendrían mayores pagos en la combinación de estrategias (*NC*, *NC*) ambos tendrían incentivos a desviarse utilizando su estrategia dominante. En esta sección vamos a estudiar las posibilidades de cooperación entre los jugadores cuando el juego se repite.

2.3.1. **Horizonte temporal finito**

Supongamos que el juego (el dilema del prisionero) se repite un número finito de veces: **T** (conocido por ambos jugadores). Conocemos que si T = 1 el único equilibrio de Nash del juego es (*C*, *C*).

Lo primero que hay que notar es que si el juego se repite durante T periodos, una estrategia de un jugador en el juego repetido debe indicar lo que haría este jugador en cada etapa del juego contingente con la historia pasada.

Vamos a utilizar un argumento de *inducción retroactiva* para mostrar que en el único equilibrio perfecto en subjuegos de este juego repetido cada jugador (independientemente de la historia pasada) elegirá “confesar” en cada etapa del juego. Consideremos T, t = 1, 2,….., T, iteraciones del dilema del prisionero.

Comencemos mirando al periodo **T**: en esta última etapa del juego todo lo anterior (la historia pasada del juego) resulta irrelevante (ya que no existe futuro) y sólo queda por jugar una vez el dilema del prisionero. Por tanto, como cada jugador tiene como estrategia dominante (cuando el juego se juega sólo una vez) “confesar”, en el último periodo cada jugador decidirá “confesar”. La única razón para jugar “no confesar” en una etapa del juego sería para intentar mejorar en el futuro ya que esta acción podría ser interpretada como un signo de buena voluntad por el otro jugador consiguiendo su cooperación. Pero en la última etapa del juego ya no hay futuro y por tanto (*C*, *C*) es inevitable.

Consideremos ahora el periodo T-1. Dado que los jugadores anticipan que en el último periodo no van a cooperar, lo mejor que pueden hacer en el periodo T-1 es seguir su estrategia dominante a corto plazo, es decir, “confesar”. La única razón para jugar “no confesar” en esta etapa del juego sería para intentar mejorar en el futuro, pero en el periodo T los jugadores elegirán (*C*, *C*). El mismo argumento se aplicaría a los periodos T-2, T-3,….hasta el periodo 1. Por tanto, el equilibrio perfecto en subjuegos del dilema del prisionero repetido un número finito de veces T, consiste simplemente en T repeticiones del equilibrio de Nash a corto plazo. Por tanto, si el juego se repitiera un número finito (y conocido) de veces, en el único equilibrio perfecto en subjuegos cada jugador elegiría su estrategia dominante a corto plazo en cada ronda del juego. Luego la cooperación entre los jugadores no se puede sostener como equilibrio cuando el horizonte temporal es finito.

2.3.2. **Horizonte temporal infinito**

Hay dos formas de interpretar un horizonte temporal infinito:

(i) *Interpretación literal*: el juego se repite infinitos periodos. En este contexto, cuando un jugador compara una estrategia con otra debería comparar el valor presente descontado de las respectivas ganancias. Sea δ el factor de descuento, 0 < δ < 1. Si r es el tipo de interés, $\delta = \dfrac{1}{1+r}$.

(ii) *Interpretación informacional*: no se conoce la duración del juego. En cada etapa del juego existe una probabilidad 0 < δ < 1 de que el juego continúe. En este marco, cada jugador debería comparar el pago esperado (que también se podría descontar) de las diferentes estrategias.

En este contexto, una estrategia de un jugador especificará su comportamiento en cada periodo ***t*** como una función de la historia pasada del juego. Represente $H_{t-1} = \{s_{1\tau}, s_{2\tau}\}_{\tau=1}^{t-1}$, donde $s_{i\tau} \in \{C, NC\}$, la historia pasada del juego.

En primer lugar nótese que hay un equilibrio perfecto en subjuegos del juego infinitamente repetido en el que cada jugador juega C (su estrategia dominante a corto plazo) en cada periodo. Cada jugador tendría como estrategia “confesar en cada periodo con independencia de la historia pasada del juego”.

Vamos a ver si además del anterior equilibrio, hay algún equilibrio perfecto en subjuegos en el que los jugadores cooperen. Consideremos la siguiente combinación de estrategias a largo plazo. $s_i^c \equiv \{s_{it}(H_{t-1})\}_{t=1}^{\infty}$

donde,

$$s_{it}(H_{t-1}) = \begin{cases} NC & \text{si todos los elementos de } H_{t-1} \text{ son iguales a } (NC, NC) \text{ o } t = 1 \\ C & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

i =1,2.

Nótese que estas estrategias a largo plazo incorporan "amenazas implícitas de castigo" en caso de violación del acuerdo (implícito) de cooperación. La amenaza para que sea creíble debe ser equilibrio de Nash.

Para ver si en este contexto se puede sostener como equilibrio la cooperación, tenemos que comprobar que los jugadores no tienen incentivos a desviarse; es decir, que la combinación de estrategias (s_1^c, s_2^c) constituye un equilibrio de Nash del juego repetido. El valor presente descontado de las ganancias futuras del jugador *i* de cooperar viene dado por:

$$\pi_i(s_i^c, s_j^c) = 2 + 2\delta + 2\delta^2 + ... = 2(1 + \delta + \delta^2 + ...) = \frac{2}{1-\delta}$$

Supongamos que el jugador *i* se desvía y lo hace en el primer periodo del juego. Dado que el otro jugador si sigue su estrategia le penalizará durante el resto del juego lo mejor que puede hacer si confiesa en el primer periodo es confesar también durante el resto del juego. Sus ganancias vendrían dadas por:

$$\pi_i(s_i, s_j^c) = 3 + 1\delta + 1\delta^2 + ... = 3 + \delta(1 + \delta + \delta^2 + ...) = 3 + \delta\frac{1}{1-\delta}$$

La cooperación será equilibrio de Nash si ninguno de los jugadores tiene incentivos a desviarse; es decir, si $\pi_i(s_i^c, s_j^c) \geq \pi_i(s_i, s_j^c)$. Es inmediato comprobar que si $\delta \geq \frac{1}{2}$ ninguno de los jugadores tiene incentivos a romper el acuerdo de colusión.

Vamos a comprobar a continuación como el equilibrio es perfecto en subjuegos: es decir, que las amenazas son creíbles. Consideremos un subjuego que surge después de que una desviación se ha producido. Las estrategia de cada jugador exige "confesar" en todo periodo futuro independientemente del comportamiento de su rival. Este par de estrategias constituye un equilibrio de un dilema del prisionero infinitamente repetido ya que cada jugador si no se desvía obtendría un pago de (si la desviación se ha producido en el periodo T-1)

$$\delta^{T-1}(1+\delta+\delta^2+...)=\frac{\delta^{T-1}}{1-\delta}$$

mientras que obtendría un pago de 0 cada periodo que se desviase de la estrategia cooperativa.

El análisis anterior sirve como ejemplo de un principio general que ocurre en situaciones de juegos repetidos con horizonte temporal infinito. En estos juegos es posible sostener como equilibrio comportamientos que no son de equilibrio en el corto plazo. Esto se produce gracias a la "amenaza implícita de castigo" de que en caso de incumplimiento del acuerdo se "castiga" durante el resto del juego. De modo que el aumento de beneficios (derivado de la violación del acuerdo) a corto plazo no compensa la pérdida de beneficios durante el resto del juego.

2.4. **Conclusiones**

Hemos visto diferentes métodos de resolución de juegos, aunque ninguno de ellos está exento de problemas. El criterio de dominación (eliminación de estrategias dominadas) aunque útil para resolver algunos juegos no sirve para otros al no realizar ninguna propuesta de solución. La versión "débil" de este criterio (eliminación de estrategias débilmente dominadas) es de gran utilidad para seleccionar entre los equilibrios de Nash especialmente en juegos en forma normal o estratégica. El criterio de inducción retroactiva permite realizar propuestas de solución en juegos en forma extensiva. Tiene la importante propiedad de que para juegos de información perfecta y sin empates conduce a una única propuesta de solución. Pero la posibilidad de empates, la existencia de información imperfecta y la racionalidad ilimitada que puede requerir en algunos juegos son los principales problemas que presenta. Este criterio de inducción retroactiva resulta de gran utilidad para seleccionar entre los equilibrios de Nash (en juegos en forma extensiva). De la utilización conjunta de este criterio y de la noción de equilibrio de Nash surge el concepto de equilibrio perfecto en subjuegos.

Aunque también presenta problemas (ineficiencia, inexistencia y multiplicidad) el equilibrio de Nash es el criterio de solución más general y más ampliamente utilizado para resolver juegos. Se considera que ser equilibrio de Nash es una condición necesaria (aunque no suficiente) para que cualquier propuesta de solución sea una predicción razonable del comportamientos racional de los jugadores. Si para algún juego se propone como solución una combinación de estrategias que no constituye un equilibrio de Nash, esta predicción sobre el comportamiento de los jugadores se vería desmentida por el propio desarrollo del juego. Al menos un jugador tendría incentivos a cambiar su estrategia con respecto a la predicha para él. En conclusión, aunque presenta problemas, existe cuasiunanimidad sobre que toda propuesta de solución debe ser como mínimo equilibrio de Nash.

Tema 3. **El oligopolio**

Introducción

La Tª de los Juegos no Cooperativos es de gran utilidad para modelar problemas económicos con muchos agentes caracterizados por *interdependencia estratégica,* en particular para analizar la competencia entre las empresas de una industria. La competencia perfecta y el monopolio puro (en el sentido de no estar amenazado por la entrada) son estructuras de mercado poco realista. Lo frecuente son industrias en las que existen pocas empresas o existen muchas pero un número pequeño de ellas produce un porcentaje muy elevado de la producción total. Con pocas empresas, la competencia estará caracterizada por consideraciones estratégicas: cada empresa toma sus decisiones (precio, producción, publicidad, gastos en I+D..) teniendo en cuenta o conjeturando el comportamiento de las demás. La competencia en un oligopolio, la podemos ver por tanto como un juego no cooperativo donde las empresas son los jugadores. Así, adoptaremos una perspectiva de Teoría de los Juegos para analizar los diferentes modelos de oligopolio. Para cada caso nos preguntaremos cuál es el juego que están jugando las empresas (información, orden de juego, estrategias..) y cuál la noción de equilibrio. Una diferencia importante entre los juegos del capítulo anterior y los que resolveremos en este capítulo es que aquéllos eran juegos finitos mientras que éstos son juegos infinitos.

3.1. **El modelo de Cournot**

3.1.1. ***Duopolio***

(i) Contexto.

(ii) Representación del juego en forma normal.

(iii) Noción de equilibrio.

(iv) Función de mejor respuesta. Caracterización del equilibrio.

(v) Ejemplo. Representación gráfica.

(i) *Contexto*

El modelo de duopolio de Cournot tiene cuatro características básicas:

a) Consideramos un mercado en el que hay *2 empresas*.

b) *Producto homogéneo*. Es decir, desde el punto de vista de los consumidores los productos producidos por las dos empresas son sustitutivos perfectos.

c) *Competencia en cantidades*. La variable de elección de cada empresa es el nivel de producción. Sean x_1 y x_2 los niveles de producción de las empresas 1 y 2, respectivamente.

d) *Elección simultánea*. Las empresas tienen que elegir simultáneamente sus niveles de producción. Es decir, cada empresa tendrá que elegir su nivel de producción sin conocimiento sobre cuál será la elección del rival. Elección simultánea no significa necesariamente que las elecciones se realicen en el mismo instante de tiempo. Un contexto equivalente sería uno en el que una empresa elige primero su nivel de producción y luego una segunda empresa elige su producción pero sin observar la decisión adoptada por la primera. En otros términos, elección secuencial junto con información imperfecta (el jugador que juega en segundo lugar no observa lo que hace el que juega en primer lugar) equivaldría a elección simultánea.

La función inversa de demanda es $p(x)$, siendo $p^{'}(x) < 0$. Como el producto es homogéneo, el precio al que puede vender su producción cualquiera de las empresas dependerá de la producción agregada: $p(x) = p(x_1 + x_2)$.

El coste de producción de la empresa i es $C_i(x_i)$, i=1,2.

(ii) *Representación del juego en forma normal*

1) $i = 1, 2.$ (Jugadores)

2) $x_i \geq 0.$ Como estrategia para el jugador i nos valdría cualquier cantidad no negativa (cualquier número real no negativo). De manera equivalente podemos representar las estrategias del jugador *i* como $x_i \in [0, \infty)$, $i = 1, 2.$

3) La ganancia que obtiene cada empresa dada la combinación de estrategias (x_1, x_2) es:

$$\left.\begin{array}{l}\Pi_1(x_1, x_2) = p(x_1 + x_2)x_1 - C_1(x_1) \\ \\ \Pi_2(x_1, x_2) = p(x_1 + x_2)x_2 - C_2(x_2)\end{array}\right\} \equiv \Pi_i(x_i, x_j) = p(x_i + x_j)x_i - C_i(x_i),\ i, j = 1, 2,\ j \neq i.$$

(iii) *Noción de equilibrio. Equilibrio Cournot-Nash*

Es muy sencillo adaptar la definición de equilibrio de Nash que consideramos en el capítulo anterior al nuevo contexto.

“ $s^* \equiv (s_1^*, .., s_n^*)$ es un equilibrio de Nash si: $\Pi_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq \Pi_i(s_i, s_{-i}^*)\ \forall s_i \in S_i, \forall i, i = 1, ..., n$.”

En el juego de duopolio de Cournot diremos:

“(x_1^*, x_2^*) es un equilibrio de Cournot-Nash si $\Pi_i(x_i^*, x_j^*) \geq \Pi_i(x_i, x_j^*) \ \forall x_i \geq 0, i, j = 1, 2, j \neq i$ ”.

Resultará más útil la segunda definición basada en las mejores respuestas.

“$s^* \equiv (s_1^*, .., s_n^*)$ es un equilibrio de Nash si: $s_i^* \in MR_i(s_{-i}^*) \ \forall i, i = 1, .., n$ donde $MR_i(s_{-i}^*) = \left\{ s_i^{'} \in S_i : \Pi_i(s_i^{'}, s_{-i}^*) \geq \Pi_i(s_i, s_{-i}^*), \ \forall s_i \in S_i, s_i \neq s_i^{'} \right\}$”.

En el juego de duopolio de Cournot diremos:

“(x_1^*, x_2^*) es un equilibrio de Cournot-Nash si $x_i^* = f_i(x_j^*), \ i, j = 1, 2, j \neq i$ ”.

Donde $f_i(x_j)$ es la función de mejor respuesta de la empresa *i* ante las producciones de la empresa *j*.

(iv) *Función de mejor respuesta. Caracterización del equilibrio*

El procedimiento que seguiremos para obtener el equilibrio de Nash será similar al que utilizábamos en el capítulo anterior. En primer lugar, calcularemos la mejor respuesta de cada jugador ante las posibles estrategias del rival y posteriormente buscaremos una combinación de estrategias que sean mutuamente una la mejor respuesta de la otra.

Dada una estrategia de la empresa *j* buscaremos aquella estrategia que le dé mayores beneficios a la empresa *i*. Es decir, dada la estrategia $x_j \geq 0$ la mejor respuesta de la empresa *i* consistirá en elegir una estrategia x_i tal que:

$$\max_{x_i \geq 0} \Pi_i(x_i, x_j) \equiv p(x_i + x_j)x_i - C_i(x_i)$$
$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial x_i} = p(x_i + x_j) + x_i p^{'}(x_i + x_j) - C_i^{'}(x_i) = 0 \ \ (1) \rightarrow \overline{f}_i(x_j)$$
$$\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial x_i^2} = 2p^{'}(x_i + x_j) + x_i p^{''}(x_i + x_j) - C_i^{''}(x_i) < 0$$

Teniendo en cuenta la restricción de no negatividad, $x_i \geq 0,$ o en términos de teoría de juegos que la mejor respuesta debe pertenecer al espacio de estrategias del jugador, la función de mejor respuesta será: $f_i(x_j) = \max\left\{ \overline{f}_i(x_j), 0 \right\}$.

El equilibrio de Cournot-Nash es una combinación de estrategias (x_1^*, x_2^*) tal que la estrategia de cada empresa es su mejor respuesta ante la estrategia del rival. Es decir,

$$\left.\begin{array}{l} x_1^* = f_1(x_2^*) = \max\left\{ \overline{f}_1(x_2^*), 0 \right\} \\ \\ x_2^* = f_2(x_1^*) = \max\left\{ \overline{f}_2(x_1^*), 0 \right\} \end{array}\right\} \leftrightarrow x_i^* = f_i(x_j^*) = \max\left\{ \overline{f}_i(x_j^*), 0 \right\}, \ i, j = 1, 2, \ j \neq i.$$

Vamos a olvidarnos ahora de la restricción de no negatividad y vamos a suponer que la función de mejor respuesta está plenamente caracterizada por la condición (1) (solución interior). Por definición la función de mejor respuesta debe cumplir la condición de primer orden: $\frac{\partial \Pi_i(f_i(x_j), x_j)}{\partial x_i} = 0 \rightarrow$ la mejor respuesta de la empresa *i* ante $x_j \geq 0$ es $f_i(x_j).$ En el equilibrio de Cournot-Nash se cumple $\frac{\partial \Pi_i(x_i^*, x_j^*)}{\partial x_i} = 0$ ya que $x_i^* = f_i(x_j^*), \ i = 1, 2.$ Tenemos una forma sencilla de comprobar si una combinación de estrategias es un equilibrio de Nash: calcular el beneficio marginal de cada empresa correspondiente a esa combinación de estrategias y si alguno es distinto de cero no se cumpliría la condición de equilibrio.

$$\frac{\partial \Pi_i(\hat{x}_i,\hat{x}_j)}{\partial x_i} > 0 \to f_i(\hat{x}_j) > \hat{x}_i \to (\hat{x}_i,\hat{x}_j) \text{ no es equilibrio de Cournot-Nash.}$$

$$\frac{\partial \Pi_i(\hat{x}_i,\hat{x}_j)}{\partial x_i} < 0 \to f_i(\hat{x}_j) < \hat{x}_i \to (\hat{x}_i,\hat{x}_j) \text{ no es equilibrio de Cournot-Nash.}$$

(v) *Ejemplo. Representación gráfica*

Vamos a considerar el caso de demanda lineal y coste marginal constante: $p(x) = a - bx$ y $C_i(x_i) = c_i x_i,\ i = 1,2.$ Supondremos para simplificar que el coste marginal es igual para ambas: $c_i = c > 0,\ i = 1,2.$ ($a > c$ para que el ejemplo tenga sentido).

Comenzamos obteniendo la función de mejor respuesta para la empresa $i,\ i = 1,2.$

$$\max_{x_i \geq 0} \Pi_i(x_i,x_j) \equiv p(x_i + x_j)x_i - C_i(x_i) \equiv [a - b(x_i + x_j)]x_i - cx_i \equiv [a - c - b(x_i + x_j)]x_i$$

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial x_i} = p(x_i + x_j) + x_i p'(x_i + x_j) - C_i'(x_i) = a - 2bx_i - bx_j - c = 0 \to \overline{f}_i(x_j) \frac{a - c - bx_j}{2b}$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial x_i^2} = -2b < 0$$

Luego la función de mejor respuesta quedaría:

$$f_i(x_j) = \max\left\{ \overline{f}_i(x_j), 0 \right\} = \max\left\{ \frac{a - c - bx_j}{2b}, 0 \right\}.$$

En el equilibrio de Cournot-Nash se cumple:

$$x_1^* = f_1(x_2^*) = \max\left\{ \frac{a - c - bx_2^*}{2b}, 0 \right\} \underbrace{\geq 0}_{\text{ya que } a>c}$$

$$x_2^* = f_2(x_1^*) = \max\left\{ \frac{a - c - bx_1^*}{2b}, 0 \right\} \underbrace{\geq 0}_{\text{ya que } a>c}$$

Resolviendo el sistema:

$$x_1^* = f_1(x_2^*) = f_1(\underbrace{f_2(x_1^*)}_{x_2^*})$$

$$x_1^* = \frac{a-c-bx_2^*}{2b} = \frac{a-c-b\left(\dfrac{a-c-bx_1^*}{2b}\right)}{2b} = \frac{\dfrac{a-c+bx_1^*}{2}}{2b} = \frac{a-c+bx_1^*}{4b} \rightarrow x_1^* = \frac{a-c}{3b}.$$

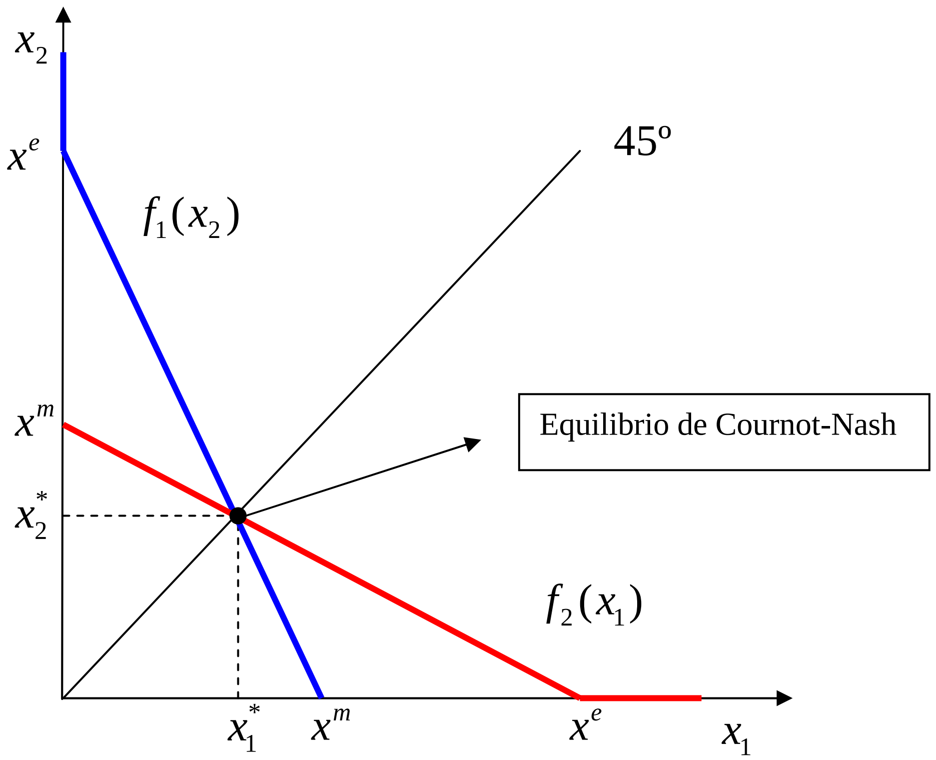
$$\rightarrow x_2^* = \frac{a-c-bx_1^*}{2b} = \frac{a-c-b\left(\dfrac{a-c}{3b}\right)}{2b} = \frac{2(a-c)}{6b} = \frac{a-c}{3b}.$$

La producción total en el equilibrio de Cournot-Nash es: $x^* = x_1^* + x_2^* = \dfrac{2(a-c)}{3b}$ y el precio de equilibrio $p^* = p(x_1^* + x_2^*) = a - b\dfrac{2(a-c)}{3b} = \dfrac{a+2c}{3}$. Por último los beneficios son:

$$\Pi_1^* = \Pi_1(x_1^*, x_2^*) = [p(x_1^* + x_2^*) - c]x_1^* = \frac{a-c}{3}\frac{a-c}{3b} = \frac{(a-c)^2}{9b}$$

$$\Pi_2^* = \Pi_2(x_1^*, x_2^*) = [p(x_1^* + x_2^*) - c]x_2^* = \frac{a-c}{3}\frac{a-c}{3b} = \frac{(a-c)^2}{9b}.$$

Representación gráfica



3.1.2. ***Oligopolio***

(i) Representación del juego en forma normal.

(ii) Noción de equilibrio. Función de mejor respuesta. Equilibrio de Cournot-Nash..

(iii) Índice de Lerner.

(iv) Casos especiales. Coste marginal constante.

(i) *Representación del juego en forma normal*

1) $i = 1, 2, ..., n.$ (Jugadores)

2) $x_i \geq 0.$ De manera equivalente, $x_i \in [0, \infty),\ i = 1, 2, .., n.$

3) La ganancia que obtiene cada empresa dada la combinación de estrategias (x_i, x_{-i}) es:

$$\Pi_i(x_i, x_{-i}) = p(\underbrace{x_i + x_{-i}}_{x})x_i - C_i(x_i),\ i = 1, 2, ..., n.$$

La forma de representar el juego en forma normal ha variado ligeramente. Dada la combinación de estrategias $(x_1, x_2, ..., x_n)$ lo relevante para la empresa $i,\ i = 1, 2, ..., n,$ es la cantidad total producida por el resto de las empresas, $x_{-i} = \sum_{j \neq i} x_j.$ Por tanto, (x_i, x_{-i}) no es realmente una combinación de estrategias y $\Pi_i(x_i, x_{-i})$ sería el beneficio asociado a toda combinación de estrategias en la que la empresa *i* está produciendo x_i y el resto de empresas en agregado producen x_{-i} (siendo irrelevante para la empresa i cómo se distribuye la producción x_{-i} entre las *n* -1 empresas).

(iii) *Noción de equilibrio. Funciones de mejor respuesta. Equilibrio Cournot-Nash*

En el juego de oligopolio de Cournot diremos que

“$(x_1^*, x_2^*, .., x_n^*) \equiv (x_i^*, x_{-i}^*)$ es un equilibrio de Cournot-Nash si:

$$\Pi_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geq \Pi_i(x_i, x_{-i}^*) \ \forall x_i \geq 0,\ \forall i, i = 1, 2, ..., n.\text{”}.$$

En términos de mejores respuestas la definición es:

“$(x_1^*, x_2^*, .., x_n^*) \equiv (x_i^*, x_{-i}^*)$ es un equilibrio de Cournot-Nash si $x_i^* = f_i(x_{-i}^*),\ \forall i, i = 1, 2, .., n.$”.

Donde $f_i(x_{-i})$ es la función de mejor respuesta de la empresa *i* ante todas aquellas combinaciones de estrategias cuya producción total sea x_{-i}.

Vamos a obtener la mejor respuesta de la empresa *i* ante todas aquellas combinaciones de estrategias cuya producción total sea x_{-i}. La mejor respuesta de la empresa *i* consistirá en elegir una estrategia x_i tal que:

$$\max_{x_i \geq 0} \Pi_i(x_i, x_{-i}) \equiv p(x_i + x_{-i})x_i - C_i(x_i)$$

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial x_i} = p(x_i + x_{-i}) + x_i p^{'}(x_i + x_{-i}) - C_i^{'}(x_i) = 0 \quad (1) \rightarrow \overline{f}_i(x_{-i})$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial x_i^2} = 2p^{'}(x_i + x_{-i}) + x_i p^{''}(x_i + x_{-i}) - C_i^{''}(x_i) < 0$$

Teniendo en cuenta la restricción de no negatividad, $x_i \geq 0,$ o en términos de teoría de juegos que la mejor respuesta debe pertenecer al espacio de estrategias del jugador, la función de mejor respuesta será: $f_i(x_{-i}) = \max\left\{\overline{f}_i(x_{-i}), 0\right\}$.

El equilibrio de Cournot-Nash es una combinación de estrategias $(x_1^*, x_2^*, .., x_n^*) \equiv (x_i^*, x_{-i}^*)$ tal que $x_i^* = f_i(x_{-i}^*),\ \forall i, i = 1, 2, .., n.$”.

Vamos a olvidarnos ahora de la restricción de no negatividad y vamos a suponer que la función de mejor respuesta está plenamente caracterizada por la condición (1) (solución interior). Por definición la función de mejor respuesta debe cumplir la condición de primer orden: $\dfrac{\partial \Pi_i(f_i(x_{-i}), x_{-i})}{\partial x_i} = 0 \rightarrow$ la mejor respuesta de la empresa *i* ante $x_{-i} \geq 0$ es $f_i(x_{-i})$. En el equilibrio de Cournot-Nash se cumple $\dfrac{\partial \Pi_i(x_i^*, x_{-i}^*)}{\partial x_i} = 0$ ya que $x_i^* = f_i(x_{-i}^*),\ i = 1, 2, ..., n.$

De nuevo podríamos comprobar si una combinación de estrategias es un equilibrio de Nash calculando el beneficio marginal de cada empresa correspondiente a esa combinación de estrategias y si alguno es distinto de cero no se cumpliría la condición de equilibrio.

$\dfrac{\partial \Pi_i(\hat{x}_i, \hat{x}_{-i})}{\partial x_i} > 0 \rightarrow f_i(\hat{x}_{-i}) > \hat{x}_i \rightarrow (\hat{x}_i, \hat{x}_{-i})$ no es equilibrio de Cournot-Nash.

$\dfrac{\partial \Pi_i(\hat{x}_i, \hat{x}_{-i})}{\partial x_i} < 0 \rightarrow f_i(\hat{x}_{-i}) < \hat{x}_i \rightarrow (\hat{x}_i, \hat{x}_{-i})$ no es equilibrio de Cournot-Nash.

(iii) *Índice de Lerner*

Suponiendo que la solución es interior vamos a transformar la condición (1) hasta obtener el Índice de Lerner de poder de mercado.

$$p(\underbrace{x_i + x_{-i}}_{x}) + x_i p'(x_i + x_{-i}) - C_i'(x_i) = 0$$

$$p(x)[1 + x_i \frac{p'(x)}{p(x)}] - C_i'(x_i) = 0$$

$$p(x)[1 + \frac{x_i}{x} \underbrace{\frac{xp'(x)}{p(x)}}_{-\frac{1}{|\varepsilon(x)|}}] - C_i'(x_i) = 0$$

Definiendo la cuota de mercado de la empresa *i* como $s_i = \frac{x_i}{x}$ obtenemos:

$$p(x)[1 - \frac{s_i}{|\varepsilon(x)|}] - C_i^{'}(x_i) = 0$$

Luego el Índice de Lerner de poder de mercado de la empresa *i* queda

$$\frac{p(x) - C_i^{'}(x_i)}{p(x)} = \frac{s_i}{|\varepsilon(x)|}$$

Luego el modelo de Cournot se encuentra entre el caso de monopolio ($s_i = 1$) y la competencia perfecta ($\lim_{s_i \to 0} \frac{p - C^{'}}{p} = 0$).

(iv) *Casos especiales*. *Coste marginal constante*

a) **Coste marginal constante:** $c_i > 0,\ i = 1,..,n.$

En equilibrio se tiene que cumplir la condición de primer orden de cada una de las empresas (solución interior):

$$p(\underbrace{x_i^* + x_{-i}^*}_{x^*}) + x_i^* p^{'}(x_i^* + x_{-i}^*) - c_i = 0 \quad i = 1, 2.., n.$$

Sumando las *n* condiciones de primer orden:

$$np(x^*) + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^*}_{x^*} p^{'}(x^*) - \sum_{i=1}^{n} c_i = 0$$

Es decir

$$np(x^*) + x^* p^{'}(x^*) = \sum_{i=1}^{n} c_i$$

Luego la producción agregada de la industria en el equilibrio de Cournot-Nash depende exclusivamente de la suma de los costes marginales (en una solución interior con las *n* empresas produciendo cantidades positivas), no de su distribución entre las empresas.

b) **Coste marginal constante común:** $c_i = c > 0,\ i = 1,..,n.$

El índice de Lerner es:

$$\frac{p(x)-c}{p(x)} = \frac{s_i}{|\varepsilon(x)|}$$

Si tenemos en cuenta que si el producto es homogéneo y el coste marginal es el mismo el equilibrio de Cournot-Nash debe ser simétrico entonces:

$$s_i = \frac{x_i^*}{x^*} = \frac{\overline{x}^*}{n\overline{x}^*} = \frac{1}{n},\quad i = 1,..,n.$$

Si la elasticidad de la demanda fuera constante entonces:

$$\frac{p(x)-c}{p(x)} = \frac{1}{n|\varepsilon|}$$

Por tanto, según aumenta el número de empresas el margen precio-coste marginal relativo (el índice de Lerner) disminuye y en el límite cuando $n \to \infty$ entonces $p \to c.$

3.1.3. ***Análisis de bienestar***

Vamos a realizar el análisis de bienestar para el caso sencillo en que el coste marginal es constante y común para todas las empresas.

$$p(\underbrace{x_i^* + x_{-i}^*}_{x^*}) + x_i^* p^{'}(x_i^* + x_{-i}^*) - c = 0 \quad i = 1,2..,n.$$

Sumando las *n* condiciones de primer orden:

$$np(x^*) + x^* p'(x^*) - nc = 0$$

El procedimiento que seguiremos para comparar el nivel de producción del equilibrio de Cournot-Nash con el nivel de producción eficiente es similar al que seguimos en el capítulo de monopolio.

(*Repasar la obtención de la función de bienestar social*)

$$\max_{x \geq 0} W(x) \equiv \max_{x \geq 0} u(x) - C(x)$$

$$W'(0) = u'(0) - C'(0) > 0 \Rightarrow \; p(0) > C'(0)$$

$W'(x) = u'(x) - C'(x) = 0 \Leftrightarrow \; W'(x^e) = 0$ Condición de primer orden.

$W''(x) = u''(x) - C''(x) < 0$ Función de bienestar estrictamente cóncava.

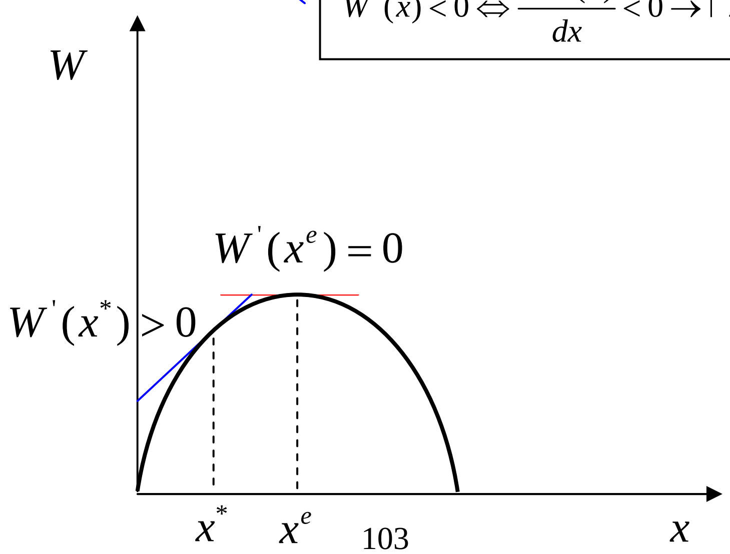
$$\left\{ \begin{array}{c} W'(x^e) = 0 \\ W'(x^*)? \\ W''(x) < 0 \end{array} \right\}$$

$$W'(x^*) = \underbrace{u'(x^*)}_{p(x^*)} - C'(x^*) = -\frac{x^*}{n} \overbrace{\underbrace{p'(x^*)}_{<0}}^{u''(x^*)} > 0$$

Por definición de producción de Cournot.

$$\left\{ \begin{array}{l} W'(x^e) = 0 \\ W'(x^*) > 0 \\ W''(x) < 0 \end{array} \right\} \rightarrow W'(x^e) < W'(x^*) \rightarrow \; x^e > x^*$$

$$W''(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{dW'(x)}{dx} < 0 \rightarrow \uparrow x \; \downarrow W'(x)$$



3.2. **El modelo de Bertrand**

3.2.1. ***Producto homogéneo***

(i) Contexto.

(ii) Demanda residual.

(iii) Representación del juego en forma normal. Noción de equilibrio.

(iv) Paradoja de Bertrand. Caracterización del equilibrio y unicidad.

(i) *Contexto*

El modelo de Bertrand se caracteriza por los siguientes elementos:

1) Consideramos una industria en la que hay *2 empresas*.

2) Las empresas venden un *producto homogéneo*.

3) *Competencia en precios*.

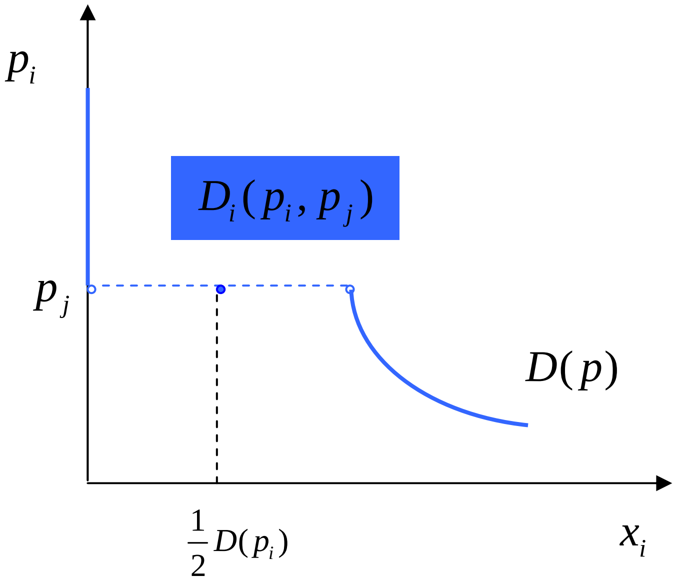
4) *Elección simultánea*. Cada empresa tiene que elegir el precio para su producto sin conocer cuál es la elección de la empresa rival. De nuevo elección simultánea no significa que la elección se realice en el mismo instante de tiempo; lo relevante es que aunque una empresa juegue primero la que juegue después no observe el comportamiento de la primera.

5) *Coste marginal constante* y *común* para las dos empresas: $c_1 = c_2 = c > 0$.

(ii) *Demanda residual*

Las empresas venden un producto homogéneo y compiten en precios. Luego desde el punto de vista de los consumidores lo único relevante es la relación que exista entre los precios de las dos empresas; así los consumidores comprarán el bien a la empresa que venda más barato. Es decir, si una empresa establece un precio inferior al de la otra, la primera "se quedaría" con todo el mercado y la segunda no vendería nada. Si ambas establecen el mismo precio entonces los consumidores estarían indiferentes entre comprar a una empresa o comprar a la otra. Para simplificar haremos el supuesto de que en caso de igualdad de precios cada empresa vendería a la mitad del mercado. La demanda residual de la empresa *i*, $i, j = 1, 2,\ j \neq i,$ sería:

$$D_i(p_i, p_j) = \begin{cases} D(p_i) & p_i < p_j \\ \frac{1}{2}D(p_i) & p_i = p_j \\ 0 & p_i > p_j \end{cases}$$



(iii) *Representación del juego en forma normal. Noción de equilibrio*

El juego en **forma normal** es:

1) $i = 1, 2.$ (Jugadores)

2) $p_i \geq 0.$ Como estrategia para el jugador *i* nos valdría cualquier precio no negativo (cualquier número real no negativo). De manera equivalente podemos representar las estrategias del jugador *i* como $p_i \in [0, \infty),\ i = 1, 2.$

3) La ganancia que obtiene cada empresa dada la combinación de estrategias (p_1, p_2) es:

$$\left.\begin{array}{l} \Pi_1(p_1, p_2) = (p_1 - c)D_1(p_1, p_2) \\ \\ \Pi_2(p_1, p_2) = (p_2 - c)D_2(p_1, p_2) \end{array}\right\} \equiv \Pi_i(p_i, p_j) = (p_i - c)D_i(p_i, p_j),\ i, j = 1, 2,\ j \neq i$$

Donde la demanda residual de la empresa $i,\ i, j = 1, 2,\ j \neq i,$ es:

$$D_i(p_i, p_j) = \begin{cases} D(p_i) & p_i < p_j \\ \frac{1}{2} D(p_i) & p_i = p_j \\ 0 & p_i > p_j \end{cases}.$$

En el juego de duopolio de Bertrand diremos que

"(p_1^*, p_2^*) es un equilibrio de Bertrand-Nash si:

$$\Pi_i(p_i^*, p_j^*) \geq \Pi_i(p_i, p_j^*)\ \forall p_i \geq 0,\ i, j = 1, 2,\ j \neq i$$ ".

Para hacer más sencillo el análisis, utilizaremos exclusivamente esta definición ya que como la demanda residual de cada empresa es una función discontinua del precio no podemos utilizar las técnicas habituales de optimización (de hecho, en vez de obtener funciones de mejor respuesta obtendríamos correspondencias de mejor respuesta y el análisis sería un poco más complejo).

(iv) *Paradoja de Bertrand. Caracterización del equilibrio y unicidad*

Vamos a demostrar que el único equilibrio de Nash del juego de Bertrand es:

$$p_1^* = p_2^* = c$$

Este resultado se conoce como la *paradoja de Bertrand*:

"*Bastan dos empresas compitiendo en precios para que se alcance un resultado competitivo*".

Demostración

Demostraremos que la combinación de estrategias $p_1^* = p_2^* = c$:

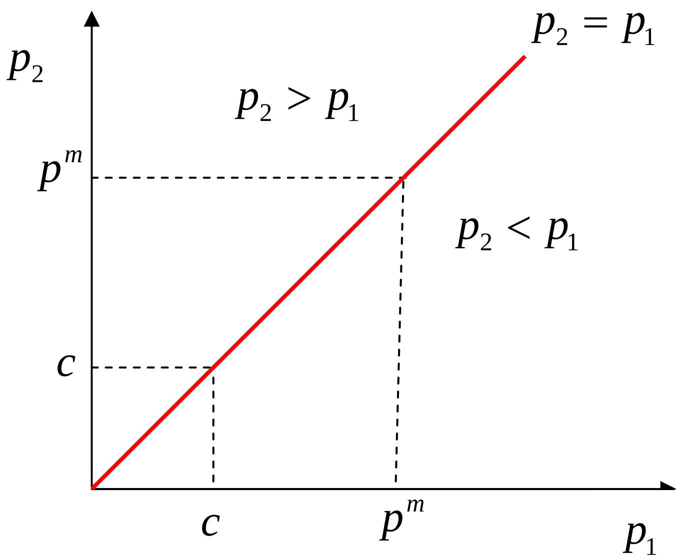
a) Es equilibrio de Nash.

b) Es el único equilibrio de Nash.

a) El beneficio de cada empresa en la combinación de estrategias (c,c) es: $\Pi_i(c,c)=(c-c)\frac{1}{2}D(c)=0,\ i=1,2.$ Si la empresa i se desvía unilateralmente fijando un precio $p_i > c$ su beneficio sería nulo ya que no vendería a nadie. Si baja el precio $p_i < c$ vendería a todo el mercado pero obtendría beneficios negativos. Por tanto,

$$\Pi_i(c,c) \geq \Pi_i(p_i,c)\ \forall p_i \geq 0,\ i,\ j=1,2,\ j \neq i$$

b) Vamos a demostrar que ninguna otra combinación de estrategias puede ser equilibrio de Nash. En el gráfico adjunto aparecen los diferentes tipos de combinaciones de estrategias que se pueden dar. Seguiremos el siguiente procedimiento para comprobar si una combinación de estrategias es equilibrio o no: calculamos el beneficio que obtiene cada jugador en esa combinación de estrategias y nos preguntamos si alguno de los jugadores tiene incentivos a desviarse de manera unilateral. Para descartar una combinación de estrategias como equilibrio de Nash basta con comprobar que al menos un jugador puede mejorar desviándose unilateralmente.



1) Precios iguales: $p_i = p_j$

a) ¿ $p_i = p_j > c$ EN? NO. En una combinación de estrategias como ésta la ganancia de cada empresa sería: $\Pi_i(p_i, p_j) = (p_i - c)D_i(p_i, p_j) = (p_i - c)\frac{1}{2}D(p_i)$. Cualquier empresa tendría incentivos a desviarse unilateralmente. Por ejemplo, podemos elegir $p_i^{'} = p_i - \varepsilon$ (donde ε es una cantidad arbitraria positiva y lo suficientemente pequeña):

$$(p_i^{'} - c)D(p_i^{'}) = (p_i^{'} - c)D_i(p_i^{'}, p_j) = \Pi_i(p_i^{'}, p_j) > \Pi_i(p_i, p_j) = (p_i - c)D_i(p_i, p_j) = (p_i - c)\frac{1}{2}D(p_i).$$

De hecho existirían múltiples (infinitas) desviaciones tales que la empresa *i* mejora con una desviación unilateral.

b) ¿ $p_i = p_j < c$ EN? NO. En una combinación de estrategias como ésta la ganancia de cada empresa sería: $\Pi_i(p_i, p_j) = \underbrace{(p_i - c)}_{<0}D_i(p_i, p_j) = (p_i - c)\frac{1}{2}D(p_i) < 0.$ Cualquier empresa tendría incentivos a desviarse unilateralmente. Por ejemplo, cualquier $p_i^{'} > p_i$:

$$0 = (p_i^{'} - c)\underbrace{D_i(p_i^{'}, p_j)}_{=0} = \Pi_i(p_i^{'}, p_j) > \Pi_i(p_i, p_j) = (p_i - c)D_i(p_i, p_j) = (p_i - c)\frac{1}{2}D(p_i).$$

2) Precios diferentes: $p_i \neq p_j$

c) ¿ $p_i > p_j > c$ EN? NO. En una combinación de estrategias como ésta la ganancia de la empresa *i* sería nula $\Pi_i(p_i, p_j) = (p_i - c)D_i(p_i, p_j) = 0$ y la de la empresa *j* sería

$\Pi_j(p_i, p_j) = (p_j - c)D_j(p_i, p_j) = (p_j - c)D(p_j) > 0.$ Para la empresa i cualquier desviación unilateral $p_i^{'}$ tal que $c < p_i^{'} \leq p_j$ eleva beneficios:

$$(p_i^{'} - c)\underbrace{D(p_i^{'})}_{\text{si } p_i^{'} < p_j} = (p_i^{'} - c)D_i(p_i^{'}, p_j) = \Pi_i(p_i^{'}, p_j) > \Pi_i(p_i, p_j) = (p_i - c)D_i(p_i, p_j) = (p_i - c)0 = 0.$$

Aunque hemos demostrado ya que la combinación de estrategias (p_i, p_j), con $p_i > p_j > c$ no puede ser equilibrio podemos comprobar que en muchos casos la empresa j también tendría incentivos a desviarse unilateralmente. (Por ejemplo, si $p^m \geq p_i > p_j > c$ cualquier desviación unilateral $p_i > p_j^{'} > p_j$ eleva los beneficios de la empresa *j*. Para los casos $p_i > p_j > p^m > c$ y $p_i > p^m > p_j > c$ es también inmediato encontrar desviaciones que elevan el beneficio de la empresa *j*. La única situación en la que la empresa j no tendría incentivos a desviarse sería aquélla en la que $p_i > p^m = p_j > c$).

d) Otros casos:

- ¿ $p_i > c \geq p_j$ EN? NO. La empresa i no tendría incentivos a desviarse unilateralmente mientras que para la empresa j cuando $p_i > c > p_j$ cualquier $p_j^{'} > p_j$ eleva beneficios y si $p_i > c = p_j$ elevando convenientemente el precio la empresa *j* eleva beneficios. Por ejemplo, si $p^m \geq p_i > c = p_j$ cualquier $p_i > p_j^{'} > c$ eleva los beneficios de la empresa *j*. Si $p_i > p^m > c = p_j$ cualquier precio $p^m > p_j^{'} > c$ (y otros muchos) eleva los beneficios de la empresa *j*.
- ¿ $c \geq p_i > p_j$ EN? NO. La empresa i no tendría incentivos a desviarse unilateralmente mientras que para la empresa j cualquier $p_j^{'} > p_j$ eleva beneficios

3.2.2. ***Producto heterogéneo*** (productos diferenciados)

(i) Producto heterogéneo. Demanda residual.

(ii) Representación del juego en forma normal.

(iii) Noción de equilibrio. Función de mejor respuesta. Equilibrio de Bertrand-Nash.

(i) *Producto heterogéneo. Demanda residual*

Vamos a mantener el resto de los supuestos del modelo de Bertrand (dos empresas, elección simultánea, coste marginal constante e idéntico, competencia en precios) pero ahora supondremos que las dos empresas venden productos heterogéneos. Es decir, las empresas venden productos que son sustitutivos cercanos pero imperfectos.

La demanda del producto producido por la empresa *i*, la demanda residual, viene dada por $D_i(p_i, p_j)$. Supondremos que $\frac{\partial D_i}{\partial p_i} < 0$, $\frac{\partial D_i}{\partial p_j} > 0$ y $\left|\frac{\partial D_i}{\partial p_i}\right| > \frac{\partial D_i}{\partial p_j}$; es decir, la demanda del producto *i* es una función decreciente del precio del producto *i*, los productos son sustitutivos y tiene más efecto sobre la cantidad demandada del producto *i* el cambio en el precio de ese producto que el cambio en el precio de un producto sustitutivo.

(ii) *Representación del juego en forma normal. Noción de equilibrio*

El juego en **forma normal** es:

1) $i = 1, 2.$ (Jugadores)

2) $p_i \geq 0.$ Como estrategia para el jugador *i* nos valdría cualquier precio no negativo (cualquier número real no negativo). De manera equivalente podemos representar las estrategias del jugador *i* como $p_i \in [0, \infty)$, $i = 1, 2.$

3) La ganancia que obtiene cada empresa dada la combinación de estrategias (p_1, p_2) es:

$$\left.\begin{aligned}\Pi_1(p_1, p_2) = (p_1 - c)D_1(p_1, p_2)\\ \Pi_2(p_1, p_2) = (p_2 - c)D_2(p_1, p_2)\end{aligned}\right\} \equiv \Pi_i(p_i, p_j) = (p_i - c)D_i(p_i, p_j),\ i, j = 1, 2,\ j \neq i$$

Ahora la demanda dirigida a cada producto es una función continua de su precio.

(iii) *Noción de equilibrio. Función de mejor respuesta. Equilibrio de Bertrand-Nash*

En términos de mejores respuestas la definición de equilibrio de Bertrand-Nash es:

"(p_1^*, p_2^*) es un equilibrio de Bertrand-Nash si $p_i^* = g_i(p_j^*),\ \forall i, j = 1, 2,\ j \neq i.$".

Donde $g_i(p_j)$ es la función de mejor respuesta de la empresa *i* ante el precio p_j de la empresa rival.

La mejor respuesta de la empresa *i* consistirá en elegir una estrategia p_i tal que:

$$\max_{p_i \geq 0} \Pi_i(p_i, p_j) \equiv (p_i - c)D_i(p_i, p_j)$$

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial p_i} = D_i(p_i, p_j) + (p_i - c)\frac{\partial D_i}{\partial p_i} = 0 \quad (1) \rightarrow g_i(p_j)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial p_i^2} = 2\frac{\partial D_i}{\partial p_i} + (p_i - c)\frac{\partial^2 D_i}{\partial p_i^2} < 0.$$

3.3. **Liderazgo en la elección de la cantidad. Modelo de Stackelberg**

(i) Contexto.

(ii) Juego en dos etapas. Información perfecta. Noción de estrategia.

(iii) Inducción retroactiva. Equilibrio perfecto en subjuegos.

(iv) Ejemplo: demanda lineal y coste marginal constante.

(v) Otros equilibrios de Nash no perfectos en subjuegos.

(i) *Contexto*

El modelo de duopolio de Stackelberg tiene cuatro características básicas:

a) Consideramos un mercado en el que hay *2 empresas*.

b) *Producto homogéneo*. Es decir, desde el punto de vista de los consumidores los productos producidos por las dos empresas son sustitutivos perfectos.

c) *Competencia en cantidades*. La variable de elección de cada empresa es el nivel de producción. Sean x_1 y x_2 los niveles de producción de las empresas 1 y 2, respectivamente.

d) *Elección secuencial*. Una de las empresas (la líder), la empresa 1, elige primero su nivel de producción. A continuación la otra empresa (la seguidora), la empresa 2, elige su nivel de producción después de observar la producción elegida por la empresa 1. Desde el punto de vista de teoría de juegos se trataría de un juego de información perfecta.

(ii) *Juego en dos etapas. Información perfecta. Estrategia*

Las empresas van a jugar un juego en dos etapas:

Etapa 1: la empresa 1 elige su nivel de producción $x_1 \geq 0$.

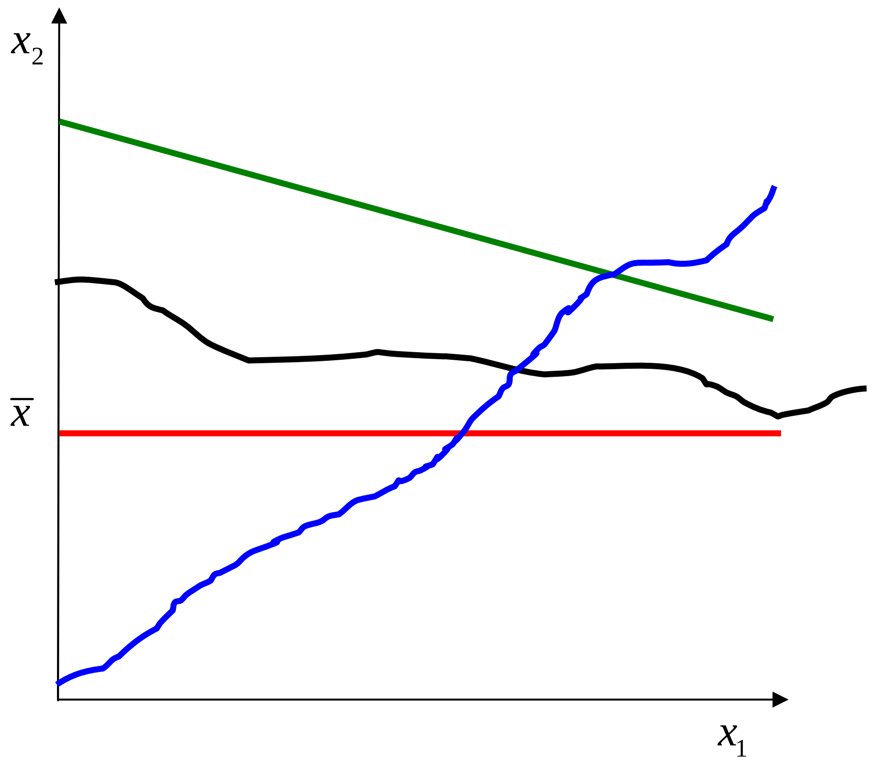
Etapa 2: la empresa 2 elige su nivel de producción $x_2 \geq 0$ después de observar cuál ha sido la producción elegida por la empresa 1.

Dado que ambos jugadores deben percibir el juego de la misma forma no sólo el jugador 2 observa la elección del jugador 1 sino que el jugador 1 cuando toma su decisión sabe que el jugador 2 observa su elección. Es decir, la información es perfecta y ambos jugadores tienen la misma percepción sobre cómo es el juego.

(Nota: un juego en dos etapas, es decir secuencial, pero donde el que juega en segundo lugar no observa la producción elegida por el que juega en primer lugar, es decir de información imperfecta, sería a todos los efectos equivalente a un juego simultáneo, como lo es el juego de Cournot.).

Los espacios de estrategias de los jugadores serían los siguientes:

- $x_1 \geq 0$: como estrategia para el jugador 1 nos valdría cualquier cantidad no negativa (cualquier número real no negativo; de forma equivalente $x_1 \in [0,\infty)$).



- La descripción de las estrategias del jugador 2 es más compleja. Hay que recordar que una estrategia es una descripción completa de lo que haría un jugador si es llamado a jugar en cada uno de sus nodos de decisión, con independencia de que sea alcanzable dado el comportamiento del otro o de los otros jugadores. En el juego que estamos considerando cada posible producción de la empresa 1 genera un nodo de decisión diferente para la empresa 2. Por tanto, una estrategia de la empresa 2 será una función $x_2(x_1)$ que nos diga cuánto va a producir la empresa 2 ante cada posible producción de la empresa 1.

(iii) *Inducción retroactiva. Equilibrio perfecto en subjuegos*

Aunque el juego parece muy complejo sabemos que en los juegos información perfecta y si empates la inducción retroactiva propone una única combinación de estrategias como solución, que coincidirá con el equilibrio perfecto en subjuegos. El procedimiento será similar al que utilizamos con los juegos finitos del capítulo anterior.

Comenzaremos situándonos en los últimos subjuegos, es decir en la etapa 2.

Etapa 2

Vamos a eliminar en cada subjuego las amenazas no creíbles o acciones dominadas. Dada una producción de la empresa 1 (un subjuego) x_1 la única amenaza creíble consistirá en elegir por parte de la empresa 2 el nivel de producción que maximice beneficios:

$$\max_{x_2 \geq 0} \Pi_2(x_1, x_2) \equiv p(x_1 + x_2)x_2 - C_2(x_2)$$

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial x_2} = p(x_1 + x_2) + x_2 p^{'}(x_1 + x_2) - C_2^{'}(x_2) = 0 \quad (1) \rightarrow \overline{f}_2(x_1)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial x_2^2} = 2p^{'}(x_1 + x_2) + x_2 p^{"}(x_1 + x_2) - C_2^{"}(x_2) < 0$$

Teniendo en cuenta la restricción de no negatividad, $x_2 \geq 0$, obtenemos:

$f_2(x_1) = \max\left\{ \overline{f}_2(x_1), 0 \right\} \rightarrow$ ***Estrategia de la empresa 2 en el equilibrio perfecto en subjuegos***.

En los juegos finitos, el procedimiento continuaba eliminando todas las amenazas increíbles y computando el juego reducido. En el juego que nos ocupa eliminar todas las amenazas increíbles equivale a eliminar todas las estrategias del jugador 1 diferentes a $f_2(x_1) = \max\left\{ \overline{f}_2(x_1), 0 \right\}$.

Etapa 1

El jugador 1 anticipa que la empresa 2 se comportará en cada subjuego de acuerdo con la estrategia $f_2(x_1) = \max\left\{ \overline{f}_2(x_1), 0 \right\}$. La función de beneficios en forma reducida para la empresa 1 es: $\Pi_1(x_1, f_2(x_1)) \equiv p(x_1 + f_2(x_1))x_1 - C_1(x_1)$. Luego el problema de la empresa 1 será:

$$\max_{x_1 \geq 0} \Pi_1(x_1, f_2(x_1)) \equiv p(\underbrace{x_1 + f_2(x_1)}_{x})x_1 - C_1(x_1).$$

$$\frac{d\Pi_1}{dx_1} = p(x_1 + x_2) + x_1[1 + f_2^{'}(x_1)]p^{'}(x_1 + x_2) - C_1^{'}(x_1) = 0 \quad (2) \rightarrow x_1^L$$

$$\frac{d^2\Pi_1}{dx_1^2} < 0$$

Por tanto, el **equilibrio perfecto en subjuegos** es la combinación de estrategias

$$(x_1^L, f_2(x_1)).$$

(iv) *Ejemplo: demanda lineal y coste marginal constante*

Etapa 2

Vamos a eliminar en cada subjuego las amenazas no creíbles o acciones dominadas. Dada una producción de la empresa 1 (un subjuego) x_1 la única amenaza creíble consistirá en elegir por parte de la empresa 2 el nivel de producción que maximice beneficios:

$$\max_{x_2 \geq 0} \Pi_2(x_1, x_2) \equiv p(x_1+x_2)x_2 - C_2(x_2) \equiv [a-b(x_1+x_2)]x_2 - cx_2$$

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial x_2} = p(x_1+x_2) + x_2 p^{'}(x_1+x_2) - C_2^{'}(x_2) = 0 \;\; (1) \rightarrow \bar{f}_2(x_1) = \frac{a-c-bx_1}{2b}$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial x_2^2} = 2p^{'}(x_1+x_2) + x_2 p^{''}(x_1+x_2) - C_2^{''}(x_2) = -2b < 0$$

Teniendo en cuenta la restricción de no negatividad, $x_2 \geq 0,$ obtenemos:

$$f_2(x_1) = \max\left\{\bar{f}_2(x_1), 0\right\} = \max\left\{\frac{a-c-bx_1}{2b}, 0\right\}$$ ***Estrategia de la empresa 2 en el EPS.***.

Etapa 1

El jugador 1 anticipa que la empresa 2 se comportará en cada subjuego de acuerdo con la estrategia $f_2(x_1) = \max\left\{\bar{f}_2(x_1), 0\right\} = \max\left\{\frac{a-c-bx_1}{2b}, 0\right\}.$ La función de beneficios en forma reducida para la empresa 1 es: $\Pi_1(x_1, f_2(x_1)) \equiv p(x_1 + f_2(x_1))x_1 - C_1(x_1).$ Luego el problema de la empresa 1 será:

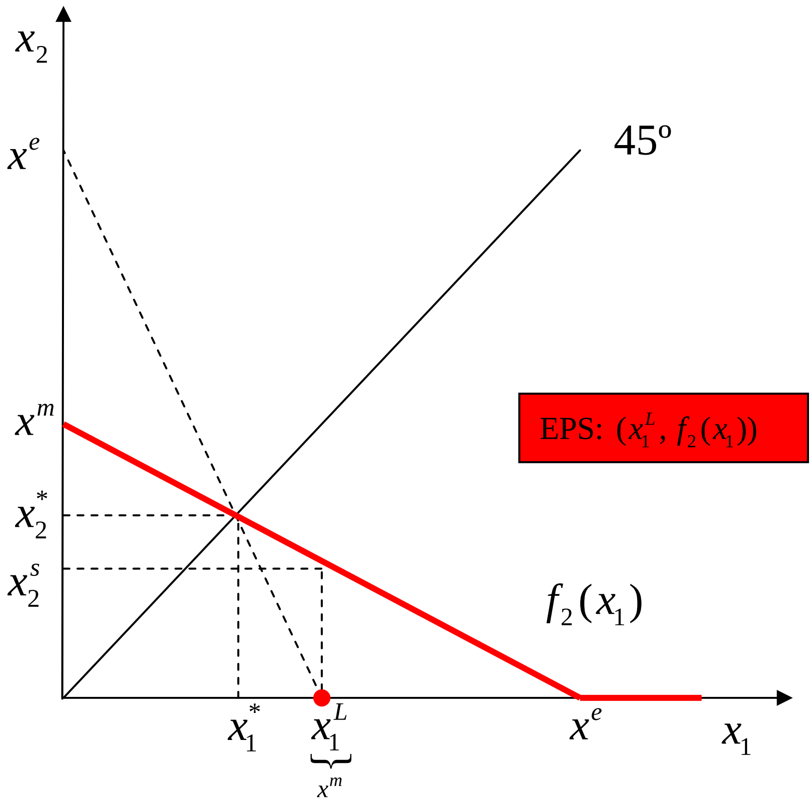
$$\max_{x_1 \geq 0} \Pi_1(x_1, f_2(x_1)) \equiv [a-c-b(x_1 + f_2(x_1))]x_1 \equiv [a-c-b(x_1 + \frac{a-c-bx_1}{2b})]x_1 \equiv [\frac{a-c-bx_1}{2}]x_1$$

$$\frac{d\Pi_1}{dx_1} = p(x_1+x_2) + x_1[1+f_2^{'}(x_1)]p^{'}(x_1+x_2) - C_1^{'}(x_1) = a-c-2bx_1 = 0 \;\; (2) \rightarrow x_1^L = \frac{a-c}{2b}$$

$$\frac{d^2\Pi_1}{dx_1^2} < 0$$

Por tanto, el **equilibrio perfecto en subjuegos** es la combinación de estrategias

$$(x_1^L, f_2(x_1)).$$



Para calcular los beneficios que obtiene cada empresa tenemos que jugar el juego:

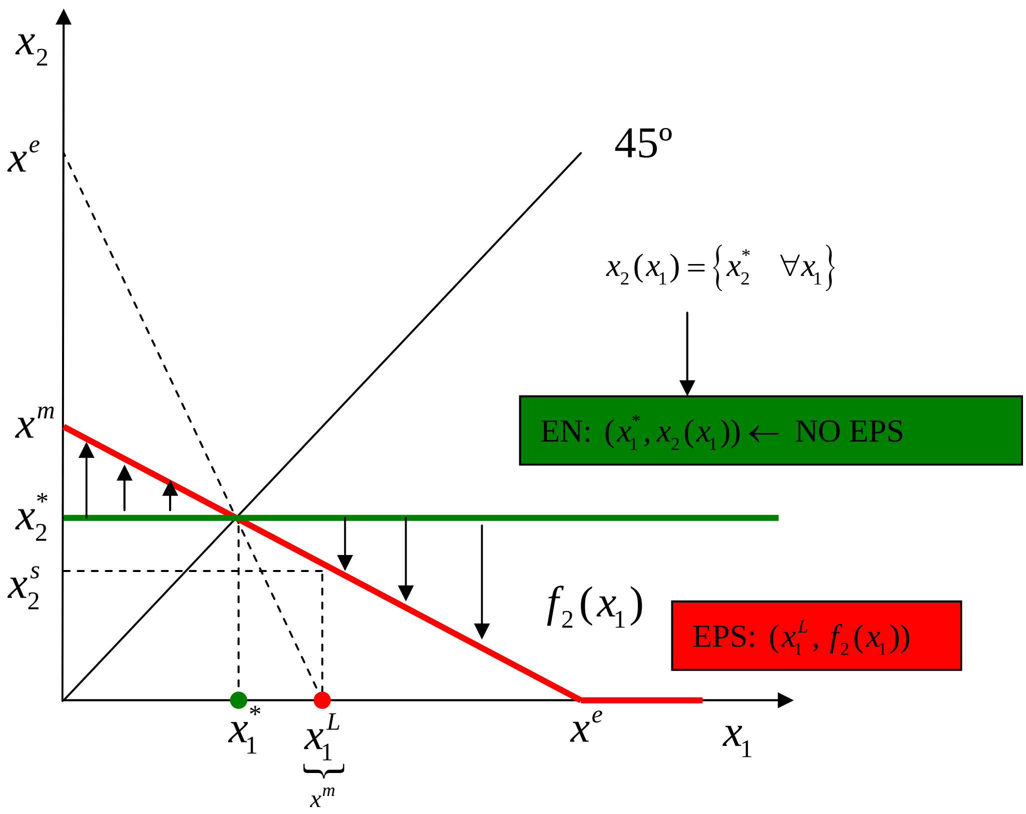
$$x_2^s = f_2(x_1^L) = \frac{a-c-bx_1^L}{2b} = \frac{a-c-b\left(\frac{a-c}{2b}\right)}{2b} = \frac{a-c}{4b}$$

$$x^s = x_1^L + x_2^s = \frac{a-c}{2b} + \frac{a-c}{4b} = \frac{3(a-c)}{4b}$$

$$p^s = p(x^s) = a - bx^s = a - b\frac{3(a-c)}{4b} = \frac{a+3c}{4};\ \ p^s - c = \frac{a-c}{4}$$

$$\Pi_1^L = (p^s - c)x_1^L = \frac{(a-c)}{4}\frac{(a-c)}{2b} = \frac{(a-c)^2}{8b} =;\ \ \Pi_2^s = (p^s - c)x_2^s = \frac{(a-c)}{4}\frac{(a-c)}{4b} = \frac{(a-c)^2}{16b}.$$

(v) *Otros equilibrios de Nash no perfectos en subjuegos*



2.4. **Colusión y estabilidad de los acuerdos**

2.4.1. ***Colusión a corto plazo***

(i) Modelo de Cournot. El acuerdo de colusión no es equilibrio a corto plazo.

(ii) Modelo de Bertrand. El acuerdo de colusión no es equilibrio a corto plazo.

(i) *Modelo de Cournot. El acuerdo de colusión no es equilibrio a corto plazo*

Si las empresas fueran a coludir estarían interesadas en maximizar los beneficios agregados.

$$\max_{x_1, x_2} \Pi_1(x_1, x_2) + \Pi_2(x_1, x_2) \equiv p(x_1 + x_2)x_1 - C_1(x_1) + p(x_1 + x_2)x_2 - C_2(x_2)$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial \Pi}{\partial x_1} = p(x_1^m + x_2^m) + (x_1^m + x_2^m)\, p^{'}(x_1^m + x_2^m) - C_1^{'}(x_1^m) = 0 \ \ (1) \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial x_2} = p(x_1^m + x_2^m) + (x_1^m + x_2^m)\, p^{'}(x_1^m + x_2^m) - C_2^{'}(x_2^m) = 0 \ \ (2)\end{array}\right\} IM_I = C_1^{'} = C_2^{'}$$

Cuando los costes marginales son iguales y constantes las condiciones (1) y (2) son idénticas. El sistema de dos ecuaciones tendría infinitas soluciones: cualquier par de producciones tal que $x_1 + x_2 = x^m$ maximizaría el beneficio de la industria. En estos casos siempre nos referiremos al acuerdo de colusión simétrico en el que cada empresa produce la mitad de la producción de monopolio: $x_i^m = \dfrac{x^m}{2},\ i = 1, 2.$

Vamos a comprobar cómo el acuerdo de colusión no se puede mantener como equilibrio cuando el juego se juega sólo una vez. Es decir, demostraremos que la combinación de estrategias (x_1^m, x_2^m) no es un equilibrio de Nash del juego de Cournot.

Dada la estrategia $x_j \geq 0$ la mejor respuesta de la empresa *i* consiste en elegir una estrategia x_i tal que:

$$\max_{x_i \geq 0} \Pi_i(x_i, x_j) \equiv p(x_i + x_j)x_i - C_i(x_i)$$

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial x_i} = p(x_i + x_j) + x_i\, p^{'}(x_i + x_j) - C_i^{'}(x_i) = 0 \ \ (1) \rightarrow \overline{f}_i(x_j)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial x_i^2} = 2\,p^{'}(x_i + x_j) + x_i\, p^{''}(x_i + x_j) - C_i^{''}(x_i) < 0$$

Teniendo en cuenta la restricción de no negatividad, $x_i \geq 0,$ o en términos de teoría de juegos que la mejor respuesta debe pertenecer al espacio de estrategias del jugador, la función de mejor respuesta será: $f_i(x_j) = \max\left\{ \overline{f}_i(x_j), 0 \right\}$.

Para comprobar cómo la combinación de estrategias (x_1^m, x_2^m) no es un equilibrio de Nash calculamos el beneficio marginal de cada empresa:

$$\frac{\partial \Pi_i(x_i^m, x_j^m)}{\partial x_i} = p(x_i^m + x_j^m) + x_i^m p^{'}(x_i^m + x_j^m) - C_i^{'}(x_i^m) = -x_j^m \underbrace{p^{'}(x_i^m + x_j^m)}_{<0} > 0$$

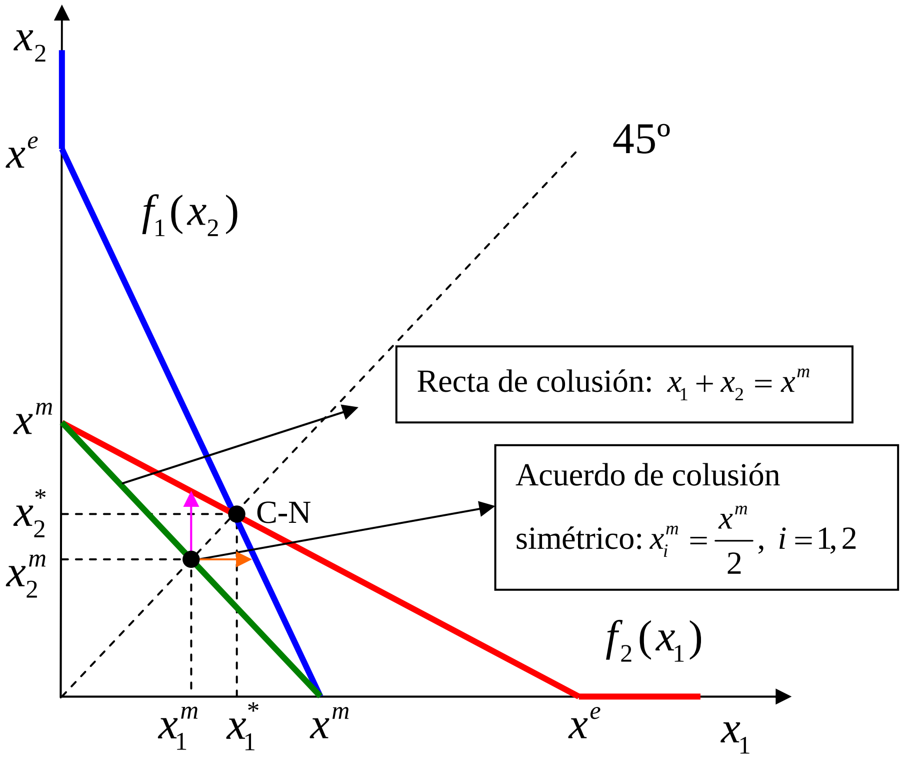
Definición de acuerdo de colusión.

Luego partiendo del acuerdo de colusión un aumento en la producción eleva el beneficio de la empresa *i*, y por tanto la empresa *i* tendría incentivos a romper el acuerdo de colusión. Visto de otra forma, dada la definición de función de mejor respuesta $\frac{\partial \Pi_i(f_i(x_j^m), x_j^m)}{\partial x_i} = 0$ y por tanto como $\frac{\partial \Pi_i(x_i^m, x_j^m)}{\partial x_i} > 0$ entonces $f_i(x_j^m) > x_i^m$.

Dado que conocemos cuál sería la desviación óptima de la empresa *i* si decidiera romper el acuerdo de colusión, $f_i(x_j^m),$ vamos a llamar $\overline{\Pi}_i$ al beneficio que obtendría la empresa *i* si ella se desvía óptimamente del acuerdo de colusión y la empresa rival lo respeta. Es decir,

$$\overline{\Pi}_i = \Pi_i(f_i(x_j^m), x_j^m).$$

Análisis gráfico: demanda lineal y coste marginal constante



Oligopolio

Este resultado lo podemos generalizar inmediatamente al caso de *n* empresas. La condición que define el acuerdo de colusión (la combinación de estrategias que maximiza el beneficio agregado) sería:

$$p(x_i^m + x_{-i}^m) + (x_i^m + x_{-i}^m)\,p'(x_i^m + x_{-i}^m) - C_i'(x_i^m) = 0 \quad i = 1,..,n.$$

Para comprobar cómo la combinación de estrategias $(x_1^m, .., x_n^m)$ no es un equilibrio de Nash calculamos el beneficio marginal de cada empresa:

$$\frac{\partial \Pi_i(x_i^m, x_{-i}^m)}{\partial x_i} = p(x_i^m + x_{-i}^m) + x_i^m\, p'(x_i^m + x_{-i}^m) - C_i'(x_i^m) = -x_{-i}^m \underbrace{p'(x_i^m + x_{-i}^m)}_{<0} > 0$$

Definición de acuerdo de colusión.

Luego partiendo del acuerdo de colusión un aumento en la producción eleva el beneficio de la empresa *i*, y por tanto la empresa *i* tendría incentivos a romper el acuerdo de colusión. Visto de otra forma, dada la definición de función de mejor respuesta $\frac{\partial \Pi_i(f_i(x_{-i}^m), x_{-i}^m)}{\partial x_i} = 0$ y por tanto como $\frac{\partial \Pi_i(x_i^m, x_{-i}^m)}{\partial x_i} > 0$ entonces $f_i(x_{-i}^m) > x_i^m$.

Dado que conocemos cuál sería la desviación óptima de la empresa *i* si decidiera romper el acuerdo de colusión, $f_i(x_{-i}^m)$, vamos a llamar $\overline{\Pi}_i$ al beneficio que obtendría la empresa *i* si ella se desvía óptimamente del acuerdo de colusión y las demás empresas lo respetan. Es decir,

$$\overline{\Pi}_i = \Pi_i(f_i(x_{-i}^m), x_{-i}^m).$$

(ii) *Modelo de Bertrand. El acuerdo de colusión no es equilibrio a corto plazo*

Consideramos el modelo de Bertrand con producto homogéneo y coste marginal constante e idéntico. La combinación de estrategias que representa el acuerdo de colusión simétrico es (p^m, p^m). La ganancia que obtendría cada empresa sería:

$$\Pi_i^m = \Pi_i(p^m, p^m) = (p^m - c)\frac{1}{2}D(p^m) = \frac{1}{2}\Pi^m$$

Ya vimos cómo una combinación de estrategias del tipo $p_i = p_j > c$ no era equilibrio de Nash. Cualquier empresa tendría incentivos a desviarse unilateralmente. Por ejemplo, podemos elegir $p_i^{'} = p^m - \varepsilon$ (donde ε es una cantidad arbitraria positiva y lo suficientemente pequeña). Existen infinidad de desviaciones tales que la empresa *i* mejora.

Es más problemático encontrar desviación óptima de la empresa *i*. Lo mejor es reducir el precio del rival en una cantidad positiva lo más pequeña posible, $\varepsilon > 0, \varepsilon \to 0$. Aunque no tenemos bien definida esta desviación óptima estaremos tan cerca del precio de monopolio como deseemos. Vamos a llamar $\overline{\Pi}_i$ al beneficio que obtendría la empresa *i* si ella se desvía óptimamente del acuerdo de colusión y la empresa rival lo respeta. Es decir,

$$\overline{\Pi}_i = \Pi_i(p^m - \varepsilon, p^m) = (p^m - \varepsilon - c)D(p^m - \varepsilon) \underbrace{\simeq}_{\varepsilon \to 0} (p^m - c)D(p^m) = \Pi^m$$

3.4.2. *Estabilidad de los acuerdos. Horizonte temporal finito e infinito*

Hemos visto que a corto plazo la colusión no se puede mantener como equilibrio tanto si el juego de referencia es el de Cournot como si es el de Bertrand. En esta sección vamos a estudiar las posibilidades de cooperación o colusión entre las empresas cuando el juego se repite.

(i) ***Horizonte temporal finito***

Argumento de inducción retroactiva: la cooperación o colusión no se puede sostener como equilibrio (en cada etapa las empresas se comportarán como a corto plazo). El razonamiento es equivalente al del dilema del prisionero.

(ii) ***Horizonte temporal infinito***

Hay dos formas de interpretar un horizonte temporal infinito:

(i) *Interpretación literal*: el juego se repite infinitos periodos. En este contexto, cuando un jugador compara una estrategia con otra debería comparar el valor presente descontado de las respectivas ganancias. Sea δ el factor de descuento, 0 < δ < 1. Si r es el tipo de interés, $\delta = \dfrac{1}{1+r}$.

(ii) *Interpretación informacional*: no se conoce la duración del juego. En cada etapa del juego existe una probabilidad 0 < δ < 1 de que el juego continúe. En este marco, cada jugador debería comparar el pago esperado (que también se podría descontar) de las diferentes estrategias.

Vamos a ver que la existencia de amenazas implícitas de castigo puede servir para mantener la colusión como equilibrio del juego repetido.

En primer lugar nótese que hay un equilibrio perfecto en subjuegos del juego infinitamente repetido en el que cada jugador juega la estrategia de equilibrio de Nash a corto plazo en cada periodo. En el modelo de Cournot consistiría para cada jugador en producir la cantidad de Cournot en cada período con independencia de la historia pasada del juego. En el modelo de Bertrand consistiría para cada jugador en poner un precio igual al coste marginal en cada período con independencia de la historia pasada del juego.

Vamos a ver si además del anterior equilibrio, hay un equilibrio perfecto en subjuegos en el que los jugadores cooperen. Consideremos la siguiente combinación de estrategias a largo plazo: $s_i^c \equiv \{s_{it}^c(H_{t-1})\}_{t=1}^{\infty}, \quad i = 1, 2,$

donde,

$$s_{it}^{c}(H_{t-1}) = \begin{cases} \overbrace{\text{"cooperar"}}^{\text{coludir}} \text{ si todos los elementos de } H_{t-1} \text{ son iguales a ("cooperar","cooperar") o } t=1 \\ \text{"no cooperar"(estrategia de EN a corto plazo)} \qquad \text{en caso contrario} \end{cases}$$

(en Cournot:

$$s_{it}^{c}(H_{t-1}) = \begin{cases} x_i^m & \text{si todos los elementos de } H_{t-1} \text{ son iguales a } (x_i^m, x_{-i}^m) \text{ o } t=1 \\ x_i^* & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad)$$

(en Bertrand:

$$s_{it}^{c}(H_{t-1}) = \begin{cases} p^m & \text{si todos los elementos de } H_{t-1} \text{ son iguales a } (p^m, p^m) \text{ o } t=1 \\ c & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad)$$

Nótese que estas estrategias a largo plazo incorporan “amenazas implícitas de castigo” en caso de violación del acuerdo (implícito) de cooperación. La amenaza para que sea creíble debe ser equilibrio de Nash.

Para ver si en este contexto se puede sostener como equilibrio la cooperación, tenemos que comprobar que los jugadores no tienen incentivos a desviarse; es decir, que la combinación de estrategias (s_1^c, s_2^c) constituye un equilibrio de Nash del juego repetido.

Notación

$\Pi_i^m \rightarrow$ beneficio bajo colusión de la empresa *i* en cada etapa del juego.

$\Pi_i^* \rightarrow$ beneficio en la solución a corto plazo de la empresa *i* en cada etapa del juego.

$\overline{\Pi}_i \rightarrow$ beneficio de la empresa *i* si las demás cooperan y ella se desvía.

$$\overline{\Pi}_i > \Pi_i^m > \Pi_i^*$$

El valor presente descontado de las ganancias futuras del jugador *i* de cooperar viene dado por:

$$\pi_i(s_i^c, s_j^c) = \Pi_i^m + \delta\Pi_i^m + \delta^2\Pi_i^m + ... = \Pi_i^m(1+\delta+\delta^2+...) = \frac{\Pi_i^m}{1-\delta}$$

Si el jugador *i* se desvía en el primer periodo, sus ganancias vendrían dadas por:

$$\pi_i(\overline{s}_i, s_j^c) = \overline{\Pi}_i + \delta\Pi_i^* + \delta^2\Pi_i^* + ... = \overline{\Pi}_i + \delta(1+\delta+\delta^2+...)\Pi_i^* = \overline{\Pi}_i + \delta\frac{\Pi_i^*}{1-\delta}$$

La cooperación será equilibrio de Nash si ninguno de los jugadores tiene incentivos a desviarse; es decir, si $\pi_i(s_i^c, s_j^c) \geq \pi_i(\overline{s}_i, s_j^c)$. Es inmediato comprobar que si $\delta \geq \overline{\delta}$ ninguno de los jugadores tiene incentivos a romper el acuerdo de colusión, donde

$$\overline{\delta} = \frac{\overline{\Pi}_i - \Pi_i^m}{\overline{\Pi}_i - \Pi_i^*}.$$

Bibliografía Básica

Varian, H. R., 1992, *Análisis Microeconómico*, tercera edición, Barcelona: Antoni Bosch editor. Cap. 13, secciones 13.6, 13.7, 13.9 y 13.10. Cap. 14, secciones: introducción, 14.1, 14.2, 14.3, 14.5, 14.6, 14.7 y 14.8. Cap. 16, secciones: 16.1, 16.3, 16.4, 16.5, 16.6, 16.10 y 16.11.

Bibliografía Complementaria

Kreps, D. M., 1994, *Curso de Teoría Microeconómica*, McGraw-Hill.

Tirole, J., 1990, *La Teoría de la Organización Industrial*, Ariel Economía.

Varian, H. R., 1998, *Microeconomía Intermedia: Un Enfoque Moderno*, cuarta edición, Barcelona: Antoni Bosch editor.