Sarriko-On

Ekonomian Lizentziaturako Matematika IV. Azterketak

ISBN: 978-84-695-3036-8

M. Josune Albizuri Irigoien
Arritokieta Chamorro Elosua
Xabier Lasaga Txoperena
Txus Ortells Sasia
Luisma Zupiria Gorostidi

03-12

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Ekonomia eta Enpresal-Zientzien Fakultatea

eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

EKONOMIAN LIZENTZIATURAKO MATEMATIKA IV. AZTERKETAK

M. Josune Albizuri Irigoien
Arritokieta Chamorro Elosua
Xabier Lasaga Txoperena
Txus Ortells Sasia
Luisma Zupiria Gorostidi

AURKIBIDEA

AURKEZPENA

Matematika IV irakasgaia Ekonomia eta Enpresa Zientzien Fakultateko Ekonomia Lizentziaturako bigarren ikasturteko irakasgaia da eta batez ere, ganbiltasuna, ahurtasuna eta hobereneratzea jorratzen ditu.

Bilduma honetan azken urteotan jarri ditugun azterketak eta horien erantzunak aurkituko dituzue. Lehen zatian, azterketen enuntziatuak daude, ikasleak azterketaren orokortasunaz jabetzeko; horrela, erantzuna begiratu gabe, irakurlea azterketa oso bat egiten saia daiteke. Bigarren zatian azterketa horietan jarri diren ariketa guztien erantzunak, gaika eta ordena kronologikoan, aurkitzen dira.

Ariketa hauek egiteko edukiera teorikoa liburu honetan aurki daiteke: *Ekonomilarientzako Matematika Gaiak*, F. Valenciano eta M. Aramendia, Euskal Herriko Unibertsitateko Argitalpen Zerbitzua, 1995.

Irakasgaiaren egitaraua hauxe da:

I. ALGEBRA LINEALA
FORMA KOADRATIKOAK: Forma koadratikoak eta haien adierazpen matriziala. Forma koadratikoen sailkapena. Azpideterminante nagusien irizpidea.

II. ANALISI GANBILA
GANBILTASUNA: Multzo ganbilak $\mathbb{R}^n$-n. Funtzio ganbilak eta ahurrak. Funtzio hertsiki ganbilak eta hertsiki ahurrak. Funtzio koasiganbilak eta koasiahurrak. Funtzio ganbilen eta ahurren propietateak.
DIFERENTZIAGARRITASUNA, GANBILTASUNA ETA AHURTASUNA: Deribatu direkzionala. Funtzio diferentziagarrien deribatu direkzionala. Gradientea. Matrize hessiarra. C^2 klaseko funtzio ganbilen eta ahurren ezaugarriztapena.

III. HOBERENERATZEA ETA GANBILTASUNA
FUNTZIO GANBILEN ETA AHURREN MUTUR PROPIETATEAK: Mutur lokalak eta mutur globalak. Funtzio ganbilen eta ahurren muturrak.
PROGRAMAZIO LINEALEKO SARRERA: Problemaren planteamendu orokorra. Analisi grafikoa.
PROGRAMAZIO EZ LINEALEKO SARRERA: Problemaren planteamendu orokorra. Kuhn-Tucker-en baldintzak; beharra. Kuhn-Tucker-en baldintzak; nahikotasuna.

AZTERKETAK

MATEMATIKA IVko AZTERKETA
EKONOMIA. 2000ko EKAINA

1. (4 puntu) Demagun $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & b \\ c & a & 2 \end{pmatrix}$ matrizea.

i) Baldin badakigu A matrizea $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \ / \ Q(\boldsymbol{x}) \geq 0\} = \mathbb{R}^3$ eta $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \ / \ Q(\boldsymbol{x}) = 0\} = \{(0,0,0)\}$ betetzen duen forma koadratiko baten adierazpen matrizea dela, aurkitu a, b eta c-ren balioak.

ii) a, b eta c-ren zein baliotarako izango da A matrizea,

$$\exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \ / \ Q(\boldsymbol{x}) > 0 \text{ eta } \exists \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3 \ / \ Q(\boldsymbol{y}) < 0$$

betetzen duen forma koadratikoaren adierazpen matrizea?

2. i) (3 puntu) Demagun problema hau:

$$\max/\min f(x,y)$$
$$\begin{cases} y^2 - x \leq 0 \\ x \leq 3. \end{cases}$$

f funtzioa X-n, soluzio egingarrien multzoan, ahurra da eta $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ da. $\boldsymbol{x}$ eta $\boldsymbol{y}$, X-ko puntu bakarrak dira non Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen diren, $\boldsymbol{x}$ puntuan minimoko baldintzak eta $\boldsymbol{y}$ puntuan maximokoak. Aurkitu puntu guztiak non maximoa eta minimoa lortzen diren, eta azaldu zergatik.

ii) (7 puntu) Ebatzi problema hau Kuhn-Tucker-en teoremak erabiliz:

$$\max/\min x^2$$
$$\begin{cases} y^2 - x \leq 0 \\ x \leq 3. \end{cases}$$

3. (6 puntu) Oihal enpresa batek dena erosten duen denda bat alkandorez eta blusez hornitzen du. Jantzien produkzio prozesua hiru sailetan banatuta dago: ebaketa, jostura eta paketatzea. Ebaketaren sailean, 25 langilek lan egiten dute, josturarenean, 35 langilek eta paketatzearenean, 5 langilek, langile bakoitzaren lanaldia 40 ordu astero izanik. Taula honek bi jantziak fabrikatzeko beharrezko den denbora minututan eta sarrerak eurotan unitateko ematen ditu:

	minutuak unitateko			
	ebaketa	jostura	paketatzea	sarrera(€)
alkandorak	20	70	12	20
blusak	60	60	4	30

i) Eman enpresaren asteko produkzio programa haren sarrera maximizatu nahi badu.

ii) Sail bakoitzean langile gehiago kontratatzea nahi izango balu, zenbat kontratatuko luke eta orduko zein soldatarekin?

MATEMATIKA IVko AZTERKETA
EKONOMIA. 2000ko IRAILA

1. (4 puntu) Aurkitu α eta β-ren balioak $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 6 \end{pmatrix}$ adierazpen matrizea duen Q forma koadratikoak hau bete dezan:

i) $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\} \,/\, Q(\boldsymbol{x}) > 0\} = \mathbb{R}^3$.

ii) $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : Q(\boldsymbol{x}) \geq 0$.

2. Demagun

$$\max/\min f(x,y)$$
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + y - 1 \leq 0 \\ x + y \geq -1. \end{cases}$$

f funtzioa $\mathbb{R}^2$ osoan diferentziagarria eta ahurra da eta X problemaren soluzio egingarrien multzoa da.

a) (3 puntu) Azaldu baieztapen hauek zuzenak ala okerrak diren eta zergatik:
   i) $\boldsymbol{z} \in X$ eta $\nabla f(\boldsymbol{z}) = \mathbf{0}$ bada, orduan f-k X-rekiko maximoa $\boldsymbol{z}$ puntuan lortzen du.
   ii) $\boldsymbol{z} \in X$ eta $\nabla f(\boldsymbol{z}) \neq \mathbf{0}$ bada, ziur $\boldsymbol{z}$ ez dela f-ren X-rekiko soluzio hoberena.
   iii) f-ren X-rekiko minimoa erpina ez den mugako puntu batean lor daiteke.

b) (7 puntu) Demagun $f(x,y) = 2x + 2y - (x+y)^2$.
   i) Betetzen dituzte (1,0) eta (0,1) puntuek Kuhn-Tucker-en baldintzak? Soluzio hoberenak dira? Bakarrak dira?
   ii) Betetzen ditu (0,–1) puntuak Kuhn-Tucker-en baldintzak? Zer esan daiteke puntu horri buruz?

3. (6 puntu) Birfindegi batek P_1, P_2 eta P_3 hiru petrolio mota gordina du. Petrolio gordina birfindu ondoren, gasolina eta gasolioa lortzen da. Taula honek, gasolinaren upela bat edo gasolioaren upela bat lortzeko behar diren petrolio gordinen upela kopuruak ematen ditu:

	P_1-en upelak	P_2-ren upelak	P_3-ren upelak
gasolina	4,5	1,8	3,5
gasolioa	3,5	3,6	1,5

Birfindegiak 1.260 upela P_1, 900 upela P_2 eta 870 upela P_3 du. Gasolinaren upela bakoitza 30 eurotan eta gasolioarena 22 eurotan saltzen badu:

i) Eman enpresaren produkzio programa sarrerak maximizatu nahi badu.

ii) Posible izango balitz P_2 eta P_3 petrolio motetako upela gehiago lortzea, interesatuko litzaioke? zenbat upela?, zein preziotan?

iii) Lehen apartatuan saltzen duen gasolioaren upelak baino gehiago saldu nahi izango balu, gasolinaren prezioa mantenduz, zer preziotan saldu behar izango luke gasolioa?

MATEMATIKA IVko AZTERKETA
EKONOMIA. 2001eko EKAINA

1. Demagun $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, -1 \le x+y \le 1,\ -1 \le x-y \le 1\}$ eta $f(x,y) = x^2 + Ay^2 + Bxy$ ($A,B \in \mathbb{R}$).

i) *A* eta *B*-ren zein baliotarako izango da *f* ganbila $\mathbb{R}^2$-n?

A eta *B*-ren zein baliotarako izango da *f* hertsiki ganbila $\mathbb{R}^2$-n?

A eta *B*-ren zein baliotarako izango da *f* ahurra $\mathbb{R}^2$-n?

ii) $A=-1$ eta $B=0$ balioetarako eta *f*-ren gradientea erabiliz, aurkitu zein puntutan lortzen diren *f*-ren *X*-rekiko maximoa eta minimoa.

2. Demagun programazio ez linealeko problema hau:

$$\max\,(-x+4y)$$
$$\begin{cases} x \ge y^2 \\ x+y \ge 2. \end{cases}$$

i) Kalkulatu puntu guztiak non Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen diren.

ii) Kuhn-Tucker-en teoremak erabiliz, zer esan dezakezu i) apartatuan lortu dituzun puntuei buruz?

iii) Orain, problemaren minimoa aurkitu nahi dugu. Kuhn-Tucker-en teoremak erabiliz, non lortuko da? zergatik?

3. Enpresa batek 14 eta 25 hazbeteko telebistak egiten eta saltzen ditu, 400 eta 500 euroko mozkina, hurrenez hurren, lortuz. Produkzio prozesuak hala eskatzen duenez, telebistek enpresaren hiru lantegitik pasatu behar dute. 14 hazbeteko telebistek 1, 3 eta 1 ordu behar dituzte lehen, bigarren eta hirugarren lantegietan, hurrenez hurren, eta 25eko telebistek 2, 1 eta 3. Lehen eta bigarren lantegietan, gehienez, 16 eta 18 ordu eguneko, hurrenez hurren, lan egiten da eta hirugarrenean, gutxienez, 9 ordu eguneko.

i) Aurkitu eguneko produkzio hoberena, enpresak haren mozkina maximizatu nahi badu.

ii) Enpresak nahi izango balu 25 hazbeteko telebistak soilik egitea, zein izan beharko litzateke 14 hazbeteko telebistaren mozkina?

iii) Hasierako baldintzapeetan, enpresak ahal izango balu lantegi batean ordutegia ordu batean handitzea, zein aukeratuko luke?

MATEMATIKA IVko AZTERKETA
EKONOMIA. 2001eko IRAILA

1. Demagun $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x > 0,\, y > 0\}$ multzoa eta $f(x,y) = x^{\alpha} y^{\frac{1}{2}}$ funtzioa, $\alpha > 0$ izanik.

i) α-ren zein baliotarako izango da f hertsiki ahurra X multzoan?

ii) α-ren zein baliotarako izango da f ahurra X multzoan?

iii) α-ren zein baliotarako izango da f ganbila X multzoan?

2. Demagun $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \geq 0,\, 4 \geq y \geq x^2\}$ multzoa eta $f(x,y) = ax^2 + bxy + y^2$ funtzioa. Badakigu (1,1) puntuak maximoko Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen dituela eta $D_{(1,-1)}f(1,1) = 3\sqrt{2}$ dela.

i) Zein balio hartuko dituzte a eta b parametroek eta $f_1(1,1)$ eta $f_2(1,1)$ deribatu partzialek?

Hemendik aurrera $a = 4$ eta $b = -4$ dira.

ii) Funtzio ganbilen eta ahurren mutur propietateak erabiliz, aurkitu $\min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x})$, eta eman minimoa lortzen den puntuak.

iii) Baldin badakigu problemaren maximoa erpin batean dagoela, Kuhn-Tucker-en teoremak erabiliz, aurkitu $\max_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x})$ lortzen den puntuak.

3. Enpresa batek torloju eta azkoin bereziak egiten ditu, eta horretarako M_1, M_2 eta M_3 makinak, bata bestearen atzetik, erabili behar ditu. Torloju bat edo azkoin bat ekoizteko beharrezko denbora makina bakoitzean, makina bakoitzaren astean erabilgarria den denbora eta ekoiztutako unitate bakoitzetik ateratako mozkina taula honetan aurkituko ditugu:

	M_1	M_2	M_3	mozkina (€)
torlojuak	7 min.	7 min.	3,5 min.	0,90€
azkoinak	4 min.	12 min.	16 min.	1€
denbora osoa	7000 min.	8400 min.	8400 min.	

i) Enpresak mozkin handiena lortu nahi badu, aurkitu torloju eta azkoinen asteko produkzio hoberena.

ii) Enpresak nahi izango balu ekoiztutako azkoin kopurua gutxitu, torlojuengatik lortutako mozkina handituz, zein izango da mozkin hori?

iii) Hasierako baldintzapetan, interesatuko litzaioke enpresari M_2 makinaren denbora osoa handitzea? Hala bada, zenbat minututan? Zein preziotan?

iv) Hasierako baldintzapetan, interesatuko litzaioke enpresari M_1 makinaren denbora osoa handitzea? Hala bada, zenbat minututan? Zein preziotan?

MATEMATIKA IVko AZTERKETA
EKONOMIA, 2002ko EKAINA

1. (8 puntu) Demagun $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + ax_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3;\ a \in \mathbb{R}$ forma koadratikoa.

i) Aurkitu a-ren balioak non $\exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \ /\ Q(\boldsymbol{x}) = 0$ betetzen den.

ii) Aurkitu a-ren balioak non $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : Q(\boldsymbol{x}) \geq 0$ betetzen den.

iii) Aurkitu a-ren balioak non $\exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \ /\ Q(\boldsymbol{x}) < 0$ betetzen den.

2. (14 puntu) Demagun $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 4y$ funtzioa eta $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ /\ y \geq x^2,\ y \leq x + 2\}$ multzoa.

i) Funtzio ganbilen eta ahurren mutur propietateak erabiliz, aurkitu $\min\limits_{\boldsymbol{x} \in X} f(\boldsymbol{x})$, lortzen den puntu guztiak adieraziz.

ii) Frogatu $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ puntuak maximoko Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen dituela.

iii) Baiezta dezakegu $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ puntua f-ren X-rekiko soluzio hoberena dela?

3. (8 puntu) Artisau gozodenda baten espezialitateak bizkotxoak eta magdalenak dira. Egunero, 10 dozena baserriko arrautza, 18 kilo irin ekologiko eta 24 kilo azukre beltz ditu haren espezialitateak egiteko; bizkotxo labekada bat egiteko 1 dozena arrautza, 2 kilo irin eta 1 kilo azukre behar ditu, eta magdalenena egiteko, ordea, 1 dozena arrautza, 1 kilo irin eta 3 kilo azukre. Bizkotxo labekada bakoitzetik 8€ko sarrera lortzen du eta magdalenenagatik 6€koa.

i) Kalkulatu espezialitate bakoitzaren eguneko labekada kopurua, gozogileak sarrera maximoa lortzeko.

ii) Gozogileak bizkotxoen produkzioa txikitu nahi badu, zein izan behar du magdalenen sarrerak?

iii) Posible izango balitz eguneroko arrautzen dozena kopurua eta irinaren kiloak handitzea, zenbatetan egingo luke?, zenbat egongo litzateke prest ordaintzeko horiengatik?

MATEMATIKA IVko AZTERKETA
EKONOMIA. 2002ko IRAILA

1. (10 puntu) Demagun $f(x,y)=\alpha x^2+\alpha y^2+2\alpha xy$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ funtzioa eta $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 0\le x\le 1,\, 0\le y\le 1\}$ multzoa.

i) Aztertu f-ren ganbiltasuna edo ahurtasuna α-ren balioetarako.

ii) α-ren zein baliotarako ziurta dezakegu $\min\limits_{\boldsymbol{x}\in A} f(\boldsymbol{x})=f(0,0)$ dela?

iii) α-ren zein baliotarako ziurta dezakegu $\max\limits_{\boldsymbol{x}\in A} f(\boldsymbol{x})=f(0,0)$ dela?

iv) Biz $\alpha=2$. Mutur propietateak erabiliz, aurkitu gutxienez puntu bat non f-ren A-rekiko maximoa lortzen den.

2. (12 puntu) Demagun $f(x,y)=y+ax^2$ funtzioa eta $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2\le y+2,\, y\le 2-x^2\}$ multzoa.

i) Kuhn-Tucker-en teoremak erabiliz, aurkitu a-ren balioak zeinentzat ziurta dezakegun $(0,-2)$ puntua f-ren X-rekiko minimoa dela.

ii) Kuhn-Tucker-en teoremak erabiliz, aurkitu a-ren balioak zeinentzat ziurta dezakegun $(0,-2)$ puntua ez dela f-ren X-rekiko maximoa.

iii) Ebatzi programazio ez linealeko problema hau:

$$\max(y+2x^2)$$
$$\begin{cases} x^2\le y+2 \\ y\le 2-x^2. \end{cases}$$

3. (8 puntu) Lantegi batean zapatak eta botak egiten dira. Lantegian 6 langilek, eguneko 7 ordutan eta asteko 4 egunetan lan egiten dute eta, bestalde, asteko 120 larru-zatiak eskuratzen ditu. Zapata pare bat egiteko 4 lanordu eta 2 larru-zati behar ditu eta bota pare bat egiteko 3 lanordu eta 3 larru-zati. Produzitzen duten guztia saltzen dute, eta gainera, bezero finkoekin hitzartua dute asteko 10 pare bota.

i) Zapata pare baten prezioa 80€koa eta bota pare batena 75€koa badira, aurkitu sarrera maximizatzen duen asteko produkzioa.

ii) Zein prezio maximo eta minimoren artean egon daiteke zapaten prezioa aurreko apartatuan lortutako soluzioa ez aldatzeko?

iii) Interesatuko litzaioke enpresariari eguneko 4 ordu, asteko 4 egunetan eta 10€/ordu soldatarekin lan egingo zuen laguntzaile bat kontratatzea?

MATEMATIKA IVko AZTERKETA
EKONOMIA. 2003ko EKAINA

1. (6 puntu) Demagun $Q(\boldsymbol{x})={}^{t}M(\boldsymbol{x})\begin{pmatrix} \alpha & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}M(\boldsymbol{x})$ forma koadratikoa.

i) Aurkitu α-ren balioak non:

a) $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : Q(\boldsymbol{x}) \geq 0$ eta $\exists \boldsymbol{z} \neq \mathbf{0} \,/\, Q(\boldsymbol{z}) = 0$ den.

b) $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\} : Q(\boldsymbol{x}) > 0$ den.

c) $\exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,/\, Q(\boldsymbol{x}) > 0$ eta $\exists \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3 \,/\, Q(\boldsymbol{y}) < 0$ den.

ii) $\alpha = 0$ denean, zein da $Q(x_1, 0, x_3)$ -k hartzen duen zeinua?

2. (8 puntu) Demagun $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x-y} & x \neq y \\ 2 & x = y \end{cases}$ funtzioa.

Aurkitu norabideak non f-ren deribatu direkzionala (0,0) eta (0,1) puntuetan definituta dagoen. Existitzen da $\nabla f(0,0)$?, eta $\nabla f(0,1)$? Zergatik? Hala bada, kalkulatu.

3. (10 puntu) Demagun $f(x,y) = x^2 + 3y$ funtzioa eta $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leq 4,\ x + y \leq 2\}$ multzoa. Planteatu programazio ez linealeko problema.

i) Aurkitu Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen dituzten puntu guztiak.

ii) Kuhn-Tucker-en teoremak erabiliz, aurkitu f-ren X-rekiko minimoa.

iii) Aurkitu f-ren X-rekiko maximoa.

4. (6 puntu) Industria kimiko batek garbiplus eta garbinet garbiketarako bi produktu saltzen ditu. Produktu hauek egiteko bi disolbatzaile mota urarekin modu egokian nahasiz erabiltzen ditu: litro bat garbiplus ekoizteko, 0,005 litro I motako disolbatzaile eta 0,006 litro II motako disolbatzaile behar ditu eta litro bat garbinet ekoizteko, 0,005 litro I motako disolbatzaile eta 0,004 litro II motako disolbatzaile. Industriaren disolbatzaileen erabilgarritasunak, I motako disolbatzailearena 15 litro eguneko eta II motako disolbatzailearena 16 litro eguneko dira; gainera, biltegiratze arazoak direla eta, egunero I motako disolbatzailearen 10 litro, gutxienez, erabili behar ditu. Garbiplus litro bakoitzetik 8€ko mozkina lortzen badu eta garbinet litro bakoitzetik 6€koa:

i) Kalkulatu eguneko garbiketarako produktuen banaketa mozkinak maximizatzeko.

ii) Industriak garbinet soilik egin nahi izango balu, zein izan beharko luke garbiplusaren mozkinak litroko?

iii) Disolbatzaileen erabilgarritasunak handitu ahal izango balitu, disolbatzaile bakoitzaren zenbat litro gehiago egongo litzateke prest eskuratzeko? zein preziotan?

MATEMATIKA IVko AZTERKETA
EKONOMIA. 2003ko IRAILA

1. (4 puntu) Demagun $M(Q)=\begin{pmatrix}\alpha & 0 & \beta\\ 0 & 1 & 0\\ \beta & 0 & \alpha\end{pmatrix}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ izanik, Q forma koadratikoaren adierazpen matrizea.

i) Aurkitu α eta β balioak non Q erdidefinitu positiboa den.

ii) Aurkitu α eta β balioak non $\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 / Q(\boldsymbol{x})>0\}=\mathbb{R}^3-\{\mathbf{0}\}$ betetzen den.

2. (5 puntu) Demagun $f(x,y)=x^2y+(y-4)^2$ funtzioa.

i) Aztertu f-ren ganbiltasuna edo ahurtasuna $\mathbb{R}^2$-n eta $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y\geq x^2+1\}$ multzoan.

ii) Aurki eta irudikatu $B=\{(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\} / D_v f(1,4)>0\}$ multzoa.

iii) Egon daiteke f-ren A-rekiko maximo bat (1,4) puntuan?

3. (12 puntu) Demagun $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \ x^2+\ y^2\leq 4,\ x+y\leq 2,\ y\geq 0\}$ multzoa eta $f(x,y)=4-x^2+2xy-y^2$ funtzioa.

i) Funtzio ganbilen eta ahurren mutur propietateak erabiliz, aurkitu puntua(k) non f-k X-rekiko maximoa lortzen duen, eta haren (haien) balioa.

ii) $\{(x,y)\in X / \ y=0,\ -2\leq x\leq 2\}$, X-ko muga zatian f-ren gradientea erabiliz, azaldu muga zati horretan f-ren muturrak egon daitezkeen.

iii) Egiaztatu $(-\sqrt{2},\sqrt{2}\,)$ puntuak Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen dituela. Baldin badakigu puntu hori dela $\{(x,y)\in X / x^2+y^2=4\}$ X-ko muga zatiaren bakarra non Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen diren, funtzio ganbilen eta ahurren mutur propietateak eta Kuhn-Tucker-en teoremak erabiliz, aurkitu, gutxienez, puntu bat non f-k X-rekiko minimoa lortzen duen.

4. (4 puntu) Artisau batek 36 g kobre, 150 g eztainu eta 30 g urre dauka belarritakoak eta eraztunak egiteko. Belarritako pare bat burutzeko, 2 g kobre, 5 g eztainu eta 1 g urre behar du eta eraztun bat egiteko, 1 g kobre, 5 g eztainu eta 2,5 g. urre. Artisauak belarritako pare bat 20 €tan saltzen badu eta eraztun bat 30 €tan:

i) Zenbat belarritako pare eta eraztun egingo ditu artisauak haren sarrerak maximizatu nahi baditu?

ii) Kobre gehiago erosi ahal izango balu, zenbat gramo eta zein preziotan erosiko luke?

MATEMATIKA IVko AZTERKETA
EKONOMIA. 2004ko EKAINA

1. (5 puntu) Demagun $f(x,y)=|x+y|$ funtzioa. Kalkulatu $D_{(1,1)}f(1,-3)$ deribatu direkzionala. Zein norabidetan dago definitua f-ren deribatu direkzionala (0,0) puntuan?

2. (8 puntu) Funtzio bakoitzerako, aurkitu, existitzen bada, multzo ireki ganbila non ganbila den eta beste ireki ganbila non ahurra den.

i) $f(x,y)=\dfrac{1}{x+y}$.

ii) $g(x,y)=\ln(x+y)$.

3. (12 puntu) Demagun problema hau:

$$\max/\min f(x,y)$$
$$\begin{cases} y^2 \le x \\ y \ge x-2, \end{cases}$$

f funtzioa lineala izanik.

i) Badu soluziorik problemak? Hala bada, esan muturrak barrualdean edo mugan lortzen diren.

ii) $\mathbf{x}$ puntua problemaren soluzioa bada, bete behar ditu Kuhn-Tucker-en baldintzak?

iii) $\mathbf{x}_1$ eta $\mathbf{x}_2$ puntuek minimoko Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen badituzte, esan puntu horietako batean edo bietan problemaren minimoa lortzen den eta zergatik.

iv) (0,0) puntuan problemaren maximoa lortzen bada, KT1 baldintza betearazten duten eskalarrak $\lambda_1=-1$ eta $\lambda_2=0$ izanik, aurkitu puntua(k) non funtzioak minimoa lortzen duen.

4. (5 puntu) Lore saltzaile batek *A* motako eta *B* lore-sorta motak egiten ditu, liliak eta krabelinak erabiliz. Horretarako, 1.800 lili eta 2.400 krabelin ditu. *A* motako lore-sorta bat egiteko, 10 lili eta 20 krabelin erabiltzen ditu eta *B* motakoa egiteko, 20 lili eta 10 krabelin. Bestalde, saltzaileak badaki ezin duela *B* motako 60 lore-sorta baino gehiago saldu. *A* motako lore-sorta bakoitza 20 eurotan eta *B* motakoa 30 eurotan saltzen baditu,

i) Kalkulatu mota bakoitzetik zenbat lore-sorta egin behar ditu haren sarrera maximizatzeko.

ii) Zenbatetan saldu beharko luke *A* motako lore-sorta bakoitza, *B* motako lore-sorta gehiago saldu nahi izango balu?

iii) Krabelin gehiago eskuratu ahal izango balu, zenbat lortuko lituzke? Zer preziotan?

MATEMATIKA IVko AZTERKETA
EKONOMIA. 2004ko IRAILA

1. (8 puntu) Demagun $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + \frac{1}{2}z^2 + xz + \alpha yz$ funtzioa.

i) α-ren zein baliotarako ziurta dezakegu $\mathbb{R}^3$ osoan f ganbila dela?

ii) α-ren zein baliotarako ziurta dezakegu $\mathbb{R}^3$ osoan f hertsiki ganbila dela?

iii) α-ren zein baliotarako ziurta dezakegu $\mathbb{R}^3$ osoan f ez dela ganbila ezta ahurra ere?

2. (12 puntu) Demagun $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y \leq 2 - x^2,\ y \leq x,\ y \geq -x\}$ multzoa eta $f(x,y) = x^2 + 9y^2 + 6xy - 4x - 12y + 4$ funtzioa.

i) Funtzio ganbilen eta ahurren mutur propietateak erabiliz, aurkitu f-ren X-rekiko minimoa.

ii) f-ren gradientea erabiliz, zer esan dezakegu (0,0) eta (1,1) puntuei buruz?

iii) Betetzen ditu (1,1) puntuak Kuhn-Tucker-en baldintzak? Kuhn-Tucker-en teoremak erabiliz, zer esan dezakegu puntu horri buruz?

iv) Betetzen ditu (1/2,1/2) puntuak Kuhn-Tucker-en baldintzak? Ziurta dezakegu f-ren X-rekiko mutur globala dela?

3. (10 puntu) Ospitale batek giltzurrun eta besikula ebakuntzen itxaron zerrendak gutxitu nahi ditu. Ebakuntza kopuru dela eta, besikula ebakuntzak giltzurrunenak baino gehiago egin nahi ditu. Bestalde, egunero, ezin du 50 besikula ebakuntza baino gehiago egin. Giltzurrun ebakuntza bakoitza bi medikurekin eta ordu batean egiten da; besikula ebakuntza bakoitza, ordea, mediku batekin eta ordu batean egiten da. Horrelako ebakuntzetarako, ospitaleak 5 ordu egunean lan egiten duten 16 mediku ditu eta 5 ordu egunean irekita dauden 12 ebakuntza-gela eskaintzen ditu.

i) Maximizatu egunero egin behar diren ebakuntzak.

ii) Interesatuko litzaioke ospitaleari ebakuntza-gela gehiago eskaintzea? Hala bada, zenbat?

iii) Interesatuko litzaioke ospitaleari mediku gehiago kontratatzea? Hala bada, zenbat kontratatuko zuen?

MATEMATIKA IVko AZTERKETA
EKONOMIA. 2005eko EKAINA

1. (4 puntu) Demagun $Q(\boldsymbol{x}) = M^t(\boldsymbol{x})\begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & a & 4 \end{pmatrix}M(\boldsymbol{x})$, $a \in \mathbb{R}$ izanik, forma koadratikoa.

Aurkitu $Q(\boldsymbol{x})$-ren adierazpen matrizea eta esan a-ren zein baliotarako beteko diren kasu hauek, erantzuna azalduz:

i) $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\} : Q(\boldsymbol{x}) < 0$ betetzen da.

ii) $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\} : Q(\boldsymbol{x}) > 0$ betetzen da.

iii) $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : Q(\boldsymbol{x}) \geq 0$ betetzen da.

iv) $\exists \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^3$ non $Q(\boldsymbol{x}_1) < 0$ eta $Q(\boldsymbol{x}_2) > 0$ diren.

2. (10 puntu) Demagun $f(x,y) = -\dfrac{x^2}{y+1}$ funtzioa eta $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leq 5 \leq x + 3y\}$ multzoa.

i) Aztertu f-ren ganbiltasuna edo ahurtasuna X multzoan.

ii) Funtzio ganbilen eta ahurren mutur propietateak erabiliz, aurkitu $\max\limits_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x})$ eta lortzen den puntu guztiak.

iii) Frogatu (2,1) eta (–1,2) puntuek minimoko Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen dituztela.

iv) Baldin badakigu (2,1), (–1,2), $(0,\sqrt{5})$ eta (0,5/3) puntuak minimoko Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen dituzten X-ko muga puntu bakarrak direla, aurkitu $\min\limits_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x})$ eta lortzen den puntu guztiak.

3. (6 puntu) Enpresa batek mahaiak eta aulkiak ekoizten ditu. Horretarako hiru lantegi ditu; lehen lantegian, egurrezko piezak prestatzen dira, bigarrenean, muntatzen dira eta hirugarrenean, bukaera ematen zaie. Taula honetan produktu bakoitza ekoizteko astean beharrezkoak diren orduak ematen dira, hala nola, ekoiztutako unitate bakoitzetik lortzen den mozkina. Enpresak badaki hiru lantegien ahalmen erabilgarriarekin produzitzen duen guztia sal dezakeela.

	Mahaiak	Aulkiak	Ahalmen erabilgarria
1. lantegia	1	3	210
2. lantegia	3	3	270
3. lantegia	4	1	240
Mozkina (€)	60	30	

i) Enpresaren helburua mozkina maximizatzea bada, eman programazio linealeko problema eta aurkitu haren soluzio hoberena.

ii) Zein balioren artean egon beharko du mahai bakoitzaren mozkinak soluzio hoberena lehen apartatuan lortutakoa izaten jarraitzeko?

iii) Zein lantegitan izango litzateke interesgarria asteko ordu ahalmen erabilgarria handitzea? Zenbat ordainduko luke enpresak lantegi horien ahalmenari gehitzen zaien orduengatik?

MATEMATIKA IVko AZTERKETA
EKONOMIA. 2005eko IRAILA

1. (6 puntu) Demagun $f(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cxz + d$ funtzioa.

i) *a*, *b*, *c* eta *d* ezezagunen zein baliotarako izango da *f* forma koadratiko definitu positiboa?

ii) *a*, *b*, *c* eta *d* ezezagunen zein baliotarako izango da *f* forma koadratiko erdidefinitu positiboa?

iii) *a*, *b*, *c* eta *d* ezezagunen zein baliotarako izango da *f* funtzio ganbila?

2. (6 puntu) Demagun $f(x,y) = \left|x^2 - y^2\right|$ funtzioa.

i) Kalkulatu, existitzen badira, $\nabla f(0,0)$ eta $\nabla f(1,0)$ gradienteak.

ii) Kalkulatu $D_{(1,1)}f(0,0)$, $D_{(1,0)}f(0,0)$ eta $D_{(0,1)}f(1,0)$ deribatu direkzionalak.

3. (8 puntu) Demagun $f(x,y) = 5 - 4x^2 + 4xy - y^2$ funtzioa eta $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 \le y \le 4\}$ multzoa.

i) Funtzio ganbilen eta ahurren mutur propietateak erabiliz, aurkitu $\max\limits_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x})$ eta lortzen den puntu guztiak.

ii) Aurkitu Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen dituzten puntu guztiak.

iii) Kuhn-Tucker-en baldintzak beharrezkoak dira *f*-k *X*-rekiko minimoa lortzeko puntu batean?; eta nahikoak?

iv) Aurkitu $\min\limits_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x})$, erantzuna ondo azalduz.

MATEMATIKA IVko AZTERKETA
EKONOMIA. 2006ko EKAINA

1. (7 puntu) Funtzio bakoitzerako, aurkitu $a \in \mathbb{R}$ balioak funtzioa forma koadratikoa izateko, eta hala denean, sailkatu:

i) $f(x,y) = (5x + a)^2$.

ii) $g(x,y) = (2x - ay)^2$.

iii) $h(x,y) = (x + ay)^3$.

2. (6 puntu) Demagun $f(x,y) = e^{xy}$ funtzioa.

i) Zein norabidetan izango da positiboa f-ren deribatu direkzionala $(-1,0)$ puntuan?

ii) Handituko da funtzioaren balioa $(-1,4)$ puntutik $(1,1)$ norabidean eta oso hurbil dagoen beste puntu batera pasatzen denean?

3. (12 puntu) Demagun $f(x,y) = \alpha x^2 - y$, $\alpha \in \mathbb{R}$, eta $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq x^2 - 1,\ y \leq 2\}$.

i) α-ren balio desberdinetarako, aztertu f-ren ganbiltasuna edo ahurtasuna X multzoan.

ii) α-ren zein baliotarako beteko dira Kuhn-Tucker-en baldintzak $(0,-1)$ puntuan?

iii) Kuhn-Tucker-en teoremak erabiliz, α-ren zein baliotarako ziurta dezakegu $(0,-1)$ puntua f-ren X-rekiko maximoa dela?

iv) Kuhn-Tucker-en teoremak erabiliz, α-ren zein baliotarako ziurta dezakegu $(0,-1)$ puntua ez dela f-ren X-rekiko minimoa?

4. (5 puntu) Bi mediku zerbitzutan 10 mediku eta 6 mediku daude. Mediku bakoitzak egunean, gehienez, 10 gaixo hartzen du eta gaixo bakoitzaren kostua, lehen zerbitzuan, 10 €/egun da, bigarrenean 20 €/egun den bitartean. Bi zerbitzuen eguneko aurrekontu bateratua 1.800€koa bada,

i) Aurkitu zerbitzu bakoitzean eguneko gaixoen esleipena, hartutako gaixoen kopurua maximizatu nahi badute.

ii) Lehen zerbitzuak hartutako gaixo kopurua handitu nahi izango balu, zenbat mediku kontratatuko luke, ahalik eta gaixo gehien hartzeko?

MATEMATIKA IVko AZTERKETA
EKONOMIA. 2006ko IRAILA

1. (7 puntu) Demagun $Q(x,y,z) = ax^2 + bz^2 + 2yz + cy^2$ forma koadratikoa. Aurkitu *a*, *b* eta $c \in \mathbb{R}$ balioak non *Q* erdidefinitu negatiboa den.

2. (8 puntu) Demagun $f(x,y) = \ln(x+y)$ funtzioa eta *X*, (1,0), (1,1) eta (0,1) puntuen arteko konbinazio lineal ganbil guztiez osatutako multzoa. Funtzio ganbilen eta ahurren mutur propietateak eta *f*-ren gradientea erabiliz, aurkitu *f*-ren muturrak *X* multzoan, aurkitzen diren puntu guztiak emanez.

3. (10 puntu) Demagun $f(x,y) = x^2 + 10x + y^2$ funtzioa eta $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y^2 - 4 \leq x \leq 5\}$ multzoa.

i) Egiaztatu *X* multzoako (–4,0) eta (5,0) puntuek Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen dituztela.
ii) Kuhn-Tucker-en teoremak erabiliz, zer esan dezakegu aurreko atalean emandako puntuez?
iii) Baldin badakigu Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen dituzten puntu bakarrak, aurreko ataletan aipatutakoez gain, (5,3) eta (5,–3) direla, aurkitu *f*-ren maximoa *X* multzoan (erantzuna ongi azaldu behar da).

4. (5 puntu) Bi mediku zerbitzutan 10 mediku eta 6 mediku daude. Mediku bakoitzak egunean, gehienez, 10 gaixo hartzen du eta gaixo bakoitzaren kostua, lehen zerbitzuan, 10 €/egun da, bigarrenean 20 €/egun den bitartean. Bi zerbitzuen eguneko aurrekontu bateratua 1.800€koa bada,

i) Aurkitu zerbitzu bakoitzean eguneko gaixoen esleipena, hartutako gaixoen kopurua maximizatu nahi badute.
ii) Lehen zerbitzuak hartutako gaixo kopurua handitu nahi izango balu, zenbat mediku kontratatuko luke, ahalik eta gaixo gehien hartzeko?

MATEMATIKA IVko AZTERKETA
EKONOMIA. 2007ko EKAINA

1. (7 puntu) Demagun $f(x,y) = x^2 + y^2 + axy + bx + cy$, $a,b,c \in \mathbb{R}$ izanik, funtzioen familia.

i) $a,b,c \in \mathbb{R}$ zein baliotarako da f forma koadratikoa?

ii) $a,b,c \in \mathbb{R}$ zein baliotarako da f ahurra, ganbila edo hertsiki ganbila?

iii) $a,b,c \in \mathbb{R}$ zein baliotarako beteko da $f(1,1) = 2$ eta $\nabla f(1,1) = (2,-2)$?

iv) $\nabla f(1,1) = (2,-2)$ dela badakigu, zein da $D_{(-3,4)}f(1,1)$ -ren balioa? $\mathbf{v} = (-3,4)$ norabidea funtzioaren hazkunde norabidea da?

2. (16 puntu) Bira $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leq 25,\ x \geq 0\}$ eta $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y$

i) Aurkitu funtzioaren gradienteak (0,–5) eta (0,5) puntuetan. Adierazi grafikoki. Egon daiteke muturren bat puntu horietan?

ii) Funtzio ganbilen eta ahurren mutur propietateak erabiliz, aurkitu f-ren minimo globala X multzoan eta minimoa lortzen den puntua(k), minimo hori existitzen bada.

iii) Egiaztatu (0,–5) eta (0,5) puntuek Kuhn-Tucker-ren baldintzak betetzen dituzten ala ez.

iv) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 = 25,\ x > 0\}$ muga zatiko zein puntutan betetzen dira Kuhn-Tucker-en baldintzak?

v) Baldin badakigu $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x = 0; -5 < y < 5\}$ muga zatian Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen dituen puntu bakarra (0,1) dela, zer esan dezakegu f-ren X-rekiko maximoari buruz? Existitzen bada, zein da eta non lortzen da?

3. (7 puntu) Finantza-erakunde batek Iberdrola eta Telefonica akzioak erosteko 12 milioi euro du. Iberdrolaren akzioen dibidendua %12koa da eta Telefonicarenena, aldiz, %8koa. Egoera honetan, erakundeak Iberdrolaren akzioetan Telefonicaren akzioetan bezainbeste diru, gutxienez, inbertitu nahi du. Bestalde, gutxienez, 3 milioi euro sartu nahi du Telefonicaren akzioetan eta, gehienez, 8 milioi euro Iberdrolaren akzioetan.

i) Aurkitu bi enpresen akzioetan kapitalaren banaketa mozkin maximoa lortzeko.

ii) Zein balioren artean egon beharko luke Iberdrolaren akzioen dibidenduak, aurreko atalean lortutako soluzioa hoberena alda ez dadin?

iii) Inbertitu nahi izango balu 12 milioi euro baino gehiago, eta mailegu bat eskatu behar izango balu, zenbat eskatuko luke? zein interes tasatan?

MATEMATIKA IVko AZTERKETA.
EKONOMIA. 2007ko IRAILA

1. (9 puntu) Demagun $f(x, y) = Ax^2 + (B + A)y^2 + 2Axy + 2$, $A, B \in \mathbb{R}$ izanik, funtzioa

i) *A* eta *B*-ren zein baliotarako da *f* forma koadratikoa $\mathbb{R}^2$-n?

ii) *A* eta *B*-ren zein baliotarako da *f* ganbila $\mathbb{R}^2$-n?

A eta *B*-ren zein baliotarako da *f* hertsiki ahurra $\mathbb{R}^2$-n?

iii) Demagun $A=1$, $B=0$ eta $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, / \, y \geq 0, \, y - x \leq 1, \, x + y \leq 1\}$ multzoa. Funtzio ganbilen eta ahurren mutur propietateak erabiliz, kalkulatu *f*-ren maximo eta minimo globalak *X* multzoan eta balio horiek lortzen dituzten puntuak.

2. (10 puntu) Demagun $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, / \, y^2 - x \leq 1, \, y^2 + x \leq 1\}$ eta $f(x, y) = (x - 2)^2 + y^2$.

i) Ziurra da *X* multzoan *f* funtzioak maximo eta minimo globalak lortzen dituela? Hala bada, horietako baten bat *X*-ko barrualdean egon daiteke?

ii) Aurkitu Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen dituzten puntu guztiak.

iii) Aurkitu $\max\limits_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x})$ eta $\min\limits_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x})$ eta lortzen diren puntu guztiak. Erantzuna argi eta garbi azaldu behar duzu.

3. (6 puntu) Ibilgailuen enpresa batek autoak eta furgonetak egiten ditu, 4.000 eta 5.000 euroko mozkina, hurrenez hurren, lortuz. Produkzio prozesuak hala eskatzen duenez, ibilgailuek enpresaren hiru lantegi ezberdinetatik pasatu behar dute. Auto bakoitzak 1, 3 eta 1 ordu behar dituzte *A*, *B* eta *C* lantegietan, hurrenez hurren, eta furgoneta bakoitzak 2, 1 eta 3. *A* eta *B* lantegietan, gehienez, 16 eta 18 ordu eguneko, hurrenez hurren, lan egiten da eta hirugarrenean, gutxienez, 9 ordu eguneko.

i) Aurkitu eguneko produkzio hoberena enpresak haren mozkina maximizatu nahi badu.

ii) Enpresak nahi izango balu furgonetak soilik egitea, zein izan beharko litzateke auto baten mozkina?

iii) Hasierako baldintzapeetan, enpresak ahal izango balu lantegi batean ordutegia ordu batean handitzea, zein aukeratuko luke?

MATEMATIKA IVko AZTERKETA
EKONOMIA. 2008ko EKAINA

1. (5 puntu) Demagun $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 2ayz$, $a \in \mathbb{R}$ izanik, funtzioen familia.

i) *a*-ren zein baliotarako da *f* forma koadratikoa? Sailkatu.

ii) *a*-ren zein baliotarako da *f* funtzio ganbila edo ahurra?

iii) $a = 3$ denean, zein da $D_{(-3,0,4)}f(1,0,1)$ deribatuaren balioa?
v=(−3,0,4) norabidea funtzioaren hazkunde norabidea da?

2. (11 puntu). Demagun $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \le 25,\ 0 \le x \le y \le 4\}$ multzoa eta $f(x,y) = 4x + 4y - x^2 - y^2$ funtzioa.

i) Aurkitu funtzioaren gradienteak (0,4) eta (3,4) puntuetan. Irudikatu *X* multzoan. *X*-rekiko muturren bat egon daiteke emandako puntuetan?

ii) Funtzio ganbilen eta ahurren mutur propietateak erabiliz, aurkitu *f*-ren balio handiena *X* multzoan eta balio hau lortzen du(t)en puntua(k).

iii) Idatzi problema programazio ez linealeko era estandarrean, helburu funtzioa eta murrizketak adieraziz.

iv) Betetzen ditu (0,0) puntuak Kuhn-Tucker-en baldintzak?

v) Baldin badakigu $\{(x,y) \in X \,/\, x^2 + y^2 = 25\}$ muga zatian Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen dituzten puntu bakarrak (3,4) eta $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}\right)$ direla , zer esan dezakegu *f*-ren minimoari buruz *X* multzoan? Existitzen bada, zenbat balio du eta non lortzen da?

3. (4 puntu). Eskoziako enpresa batek whiski arrunta eta berezia ekoizten du, M_1, M_2 eta M_3 hiru malta mota erabiliz. M_1 motako 36 unitate ditu, M_2 motako 25 unitate eta M_3 motako 8 unitate. Whiski arrunteko unitate bat ekoizteko, M_1 motako 6 unitate eta M_2 motako 5 unitate behar ditu, eta whiski bereziko unitate bat ekoizteko, M_1 motako 6 unitate eta M_3 motako 4 unitate behar ditu. Eskaria dela eta, whiski arruntaren produkzioa, gutxienez, whiski bereziaren bezainbestekoa izan behar da. Whiski arruntaren merkatuko prezioa unitateko 20 € da, eta bereziarena, 30 €.

i) Kalkulatu sarrera maximizatzen duen whiski desberdinen produkzioak.

ii) Zein balioren artean egon daiteke whiski arruntaren prezioa, lortutako soluzioa alda ez dadin?

iii) Badakigu M_3 malta motako merkatuko prezioa 3 euro unitatekoa dela, interesatuko litzaioke produkzioa handitzeko malta mota horretatik gehiago eskuratzea?

MATEMATIKA IVko AZTERKETA
EKONOMIA. 2008ko IRAILA

1. (5 puntu) Demagun $Q(x_1,x_2,x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + ax_3^2 + 6x_1x_2$, forma koadratikoen familia.

i) Sailkatu forma koadratikoa a balio desberdinetarako.

ii) a=3 denean, existitzen dira $\boldsymbol{z}$ eta $\boldsymbol{y}$ bi bektore non $Q(\boldsymbol{z})>0$ eta $Q(\boldsymbol{y})<0$ diren?

iii) a=4 denean, demagun f funtzio polinomikoa non $\forall(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$: $H_f(x_1,x_2,x_3) = M(Q)$ f-ren matrize hessiarra den. Zer esan daiteke f funtzioaren ahurtasunaz edo ganbiltasunaz?

2. (9 puntu) Demagun $f(x,y) = x + y^2 - 2$ eta $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y^2 \le x,\ x \le 2 - y,\ y \ge 0\}$.

i) Ziurra da f funtzioak maximo eta minimo globalak lortzen dituela X multzoan? Hala bada, horietako baten bat X-ko barrualdean egon daiteke?

ii) Aurkitu $\{(x,y) \in X \,/\, y^2 = x\}$ muga zatian Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen dituzten puntuak. Zer ondorioak atera ditzakegu puntu horietaz?

iii) Funtzio ganbilen eta ahurren mutur propietateak erabiliz, aurkitu $\max\limits_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x})$.

3. (6 puntu) Enpresa batek L_1, L_2 eta L_3 lehengaiak erabiliz, P_1 eta P_2 bi produktu egiten ditu. Tona bat P_1 produzitzeko, 2 tona L_1, 3 tona L_2 eta tona bat L_3 behar ditu, eta tona bat P_2 egiteko, 3 tona L_1, 2 tona L_2 eta 2 tona L_3. Enpresak gaur egun 100 tona L_1, 120 tona L_2 eta 60 tona L_3 ditu. Tona bat P_1 400 eurotan saltzen du eta tona bat P_2, aldiz, 500 eurotan.

i) Plantea eta ebatzi enpresaren sarrerak maximizatzeko programazio linealeko problema.

ii) P_2-ren salmenta prezioa, zer prezioren artean egon daiteke soluzio hoberena aurrekoa izaten jarraitzeko?

iii) L_1 lehengaiaren tona gehiago erosiko luke enpresak L_1-en kostea 100 €/tona bada? Zenbat erosiko lituzke? Zein izango litzateke soluzio hoberen berria?

MATEMATIKA IVko AZTERKETA
EKONOMIA. 2009ko EKAINA

1. (8 puntu) Demagun $Q(x,y,z) = ax^2 + 2ay^2 + z^2 + 4xy + 2xz$, $a \in \mathbb{R}$ izanik, forma koadratikoa.

i) a-ren zein baliotarako da $Q(\mathbf{x})$ definitu positiboa?, eta erdidefinitu positiboa?

ii) a-ren zein baliotarako da $Q(\mathbf{x})$ definitu negatiboa?, eta erdidefinitu negatiboa?

iii) $a = 2$ denean eta funtzio ganbilen eta ahurren mutur propietateak erabiliz, aurkitu $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / Q(x,y,z) = 0\}$ multzoa.

2. (6 puntu) Pertsona batek 9.000€ ditu *A* eta *B* motako bonoetan inbertitzeko. *A* motako bonoen interes tasa %2koa da eta *B* motakoena %3,5ekoa. Inbertitu nahi badu *A* motako bonoetan, *B* motako bonoetan inbertitutakoaren bezainbeste edo gehiago, eta 4.000 € gutxienez,

i) Lortu bono mota bakoitzean inbertitu behar duena mozkina maximizatu nahi badu.

ii) Zein balioren artean egon daiteke *B* motako bonoen interes tasa, aurreko soluzio alda ez dadin?

3. (10 puntu) Demagun $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy - 8x - 8y$ funtzioa eta multzo hau:

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x-2)^2 \le y \le x\}.$$

i) Baiezta dezakezu (f eta X aztertzen) f-k maximoa eta minimoa lortzen dituen X multzoan?

ii) Kuhn-Tucker-en teoremak erabiliz, aurkitu f-ren maximoa eta minimoa X multzoan.

MATEMATIKA IVko AZTERKETA
EKONOMIA. 2009ko IRAILA

1. (4 puntu) Forma koadratikoen sailkapena erabiliz, frogatu $f(x,y) = ax^2 + 2y^2$, $g(x,y) = x^2 - y^2 + 6xy$ eta $a > 4$ badira, orduan, edozein $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $f(x,y) \geq g(x,y)$ betetzen dela. Betetzen da $f(x,y) = g(x,y)$ punturen baterako?

2. (4 puntu) Demagun $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferentziagarria. $D_{\nabla f(1,1)} f(1,1) = 5$ eta $D_{(1,-1)} f(1,1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dira. Zein balio lor dezake $D_{(1,1)} f(1,1)$-k?

3. (6 puntu) Neguko kanpainarako banku batek 100 milioi euro ditu norbanakoentzako eta enpresentzako maileguak eskaintzeko baldintza hauekin: gutxienez, diruaren erdia norbanakoentzako maileguetan egon beharko da eta enpresentzako diruaren %50 gehi norbanakoentzakoaren %30, 35 milioi euro baino gutxiago izan behar da. Norbanakoentzako maileguen interes tasa %2koa eta enpresentzakoena %4 badira,

i) Aurkitu maileguen banaketa hoberena bankuak mozkina maximizatu nahi badu.
ii) Bankuak enpresentzako maileguetan diru kopurua jaitsi nahi izango balu, haren interes tasa mantenduz, non kokatu beharko zuen norbanakoentzako maileguen interes tasa?
iii) Interesatuko litzaioke bankuari norbanakoentzako maileguen nahitaezko kopurua %50etik %30era jaistea?

4. (10 puntu) Demagun $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 2,\ x \leq y,\ x \geq -y\}$ eta $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$.

i) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ eta (1,1) puntuek Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen dituzte? Kuhn-Tucker-en teoremak erabiliz, zer ondoriozta dezakegu puntu horietaz?
ii) Funtzio ganbilen eta ahurren mutur propietateak erabiliz, aurkitu $\max_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x})$ eta lortzen den puntu guztiak.

MATEMATIKA IVko AZTERKETA
EKONOMIA. 2010eko EKAINA

1. (8 puntu) Demagun $M(Q)=\begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & a \end{pmatrix}$, Q forma koadratikoaren adierazpen matrizea.

i) a=0 denean, existitzen da $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ non $Q(\mathbf{x})$=0 den? Hala bada, aurkitu gutxienez bat.
ii) a=1 denean, existitzen da $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ non $Q(\mathbf{x})$=0 den? Hala bada, aurkitu gutxienez bat.
iii) a=2 denean, existitzen da $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ non $Q(\mathbf{x})$=0 den? Hala bada, aurkitu gutxienez bat.

2. (6 puntu) Enpresa batek A eta B bi produktuak merkaturatu nahi ditu. Horretarako 6.000 euroko aurrekontua du; A produktuaren unitate bakoitzaren ekoizpenak 16 euroko kostua du eta B produktuaren unitate bakoitzarenak 8 eurokoa. Ekoiztutako A produktuaren kopuruak, gutxienez, ekoiztutako guztiaren %20 izan behar du, eta produktuen banaketa egin baino lehen 500 unitateko ahalmena duen biltegi batean gordetzen du. A produktuaren unitate bakoitzak 21 eurotan eta B produktuarenak 14 eurotan saltzen badu,

i) Produktu bakoitzaren zenbat unitate ekoiztu behar du sarrera maximizatu nahi badu?
ii) Produktu bakoitzaren zenbat unitate ekoiztu behar du mozkina maximizatu nahi badu?
iii) Mozkina maximizatu nahi badu, interesatuko litzaioke enpresari biltegiko ahalmena handitzea? Hala bada, zenbat unitate gehiago eta zenbat ordainduko zuen honengatik?

3. (10 puntu) Demagun $f(x,y)=x^2-2y$ funtzioa eta $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\leq 1, x+y\geq -1\}$ multzoa.

i) Existitzen da f-ren muturrik X multzoko barrualdean?
ii) Aurkitu $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2=1,\ x+y>-1\}$ muga zatiko puntu guztiak non Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen diren.
iii) Kuhn-Tucker-en teoremak erabiliz, aurkitu f-ren minimoa X multzoan.
iv) Aurreko emaitzak eta funtzio ganbilen eta ahurren mutur propietateak erabiliz, aurkitu f-ren maximoa X multzoan.

MATEMATIKA IVko AZTERKETA
EKONOMIA. 2010eko IRAILA

1. (4 puntu) Demagun $Q(x,y,z) = Ax^2 + Ay^2 + Az^2 + 2xz$ forma koadratikoa.

i) A-ren zein baliotarako beteko da hau: $\forall(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : Q(x,y,z) \geq 0$?

ii) A-ren zein baliotarako beteko da hau: $\forall(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} : Q(x,y,z) < 0$?

iii) A=−2 denean, kalkulatu $Q(x,y,z) = 0$ betetzen duten puntu guztiak.

2. (6 puntu) Demagun $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = |x| - y$ funtzioa.

i) Kalkulatu $D_v f(0,0)$, $\forall \mathbf{v} \neq (0,0)$.

ii) (1,0) norabidea f-ren handitze edo gutxitze norabidea da (0,0) puntuan?

3. (6 puntu) Inbertitzaile batek 100.000€ du inbertsio fondo batean edo zor publikoaren bonoetan sartzeko. Fondoaren ezegonkortasunagatik, honetan bonoetan bezain beste edo gutxiago inbertitzea erabaki du, eta aldi berean, zor publikoaren gaineko nazioarteko presioagatik, bonoetan 60.000€ edo gutxiago inbertitzea erabaki du. Fondoan duen diruagatik lortzen duen batez besteko korritu tasa %2koa da eta zor publikoaren bonoengatik lortutakoa %1,8 da.

i) Errentagarritasun handiena lortu nahi badu, zenbat sartuko du aktibo bakoitzean?

ii) Fondoaren batez besteko korritu tasa %1,6ra jaisten bada, interesatuko litzaioke inbertsioaren banaketa aldatzea?

iii) Interesatuko litzaioke diru gehiago eskuratzea aktibo horietan sartzeko? Hala bada, zenbat?, zein izango litzateke diru horren errentagarritasuna?

4. (10 puntu) Demagun programazio ez linealeko problema hau:

$$\text{hob}(3x^2 + 3y^2 - 6xy)$$
$$\begin{cases} y \leq x + 1 \\ x + y^2 \leq 1. \end{cases}$$

i) Aurkitu $x + y^2 = 1$ muga zatiko puntu guztiak non minimoko Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen diren.

ii) Kuhn-Tucker-en baldintzak maximorako edo minimorako beharrezkoak edo/eta nahikoak dira?

iii) Kuhn-Tucker-en teoremak erabiliz, zer ondoriozta dezakegu i) eta ii) puntuetatik?

AZTERKETEN ERANTZUNAK

FORMA KOADRATIKOEN ARIKETAK

2000ko ekaina. Demagun $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & b \\ c & a & 2 \end{pmatrix}$.

i) Baldin badakigu A matrizea

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \,/\, Q(x) \geq 0\} = \mathbb{R}^3 \quad \text{eta} \quad \{x \in \mathbb{R}^3 \,/\, Q(x) = 0\} \neq \{(0,0,0)\}$$

betetzen duen forma koadratiko baten adierazpen matrizea dela, aurkitu a, b eta c-ren balioak.

ii) a, b eta c-ren zein baliotarako izango da A matrizea hau betetzen duen forma koadratikoaren adierazpen matrizea: $\exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 / \ Q(\boldsymbol{x})>0$ eta $\exists \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3 / \ Q(\boldsymbol{y})<0$?

Lehen ordenako azpideterminante nagusiak: {1, 0, 2}.
Bigarren ordenako azpideterminante nagusiak: $\{0, 2-c^2, -ab=-a^2\}$.
$|M(Q)|=-ab=-a^2$.

i) $A=M(Q)$ bada simetrikoa izan behar du, eta $a=b$ izango da; eta adierazpen horiek esan nahi dute Q erdidefinitu positiboa dela: beraz, $2-c^2\geq 0$, $-a^2\geq 0$ eta $-a^2=0$, hau da, $a=b=0$ eta $c \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$ (edo $-\sqrt{2} \leq c \leq \sqrt{2}$) denean.

ii) Berriro ere $a=b$ izan behar du, eta Q indefinitua. Q ezin da izan definitua (positiboa zein negatiboa) lehen ordenako azpideterminante nagusi bat 0 delako, eta erdidefinitu negatiboa ere ez lehen ordenako azpideterminante nagusi bi positiboak direlako, beraz, erdidefinitu positiboa ez denean, indefinitua da, hau da, $a=b=0$ eta $c \notin \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$ (edo $c < -\sqrt{2}$ edo $c > \sqrt{2}$), edo bestela, $a=b\neq 0$.

2000ko iraila. Aurkitu α eta β-ren balio ezberdinak $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 6 \end{pmatrix}$ adierazpen matrizea duen Q forma koadratikoak hau bete dezan:

i) $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\} / \ Q(\boldsymbol{x})>0\} = \mathbb{R}^3$.

ii) $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$: $Q(\boldsymbol{x})\geq 0$.

Lehen ordenako azpideterminante nagusiak: $\{\alpha, 1, 6\}$.
Bigarren ordenako azpideterminante nagusiak: $\{\alpha, 6\alpha-\beta^2, 6\}$.
$|M(Q)|=6\alpha-\beta^2$.

i) Hau beteko da Q definitu positiboa denean, hots, azpideterminante nagusiak guztiak >0 direnean: $\alpha>0$ eta $6\alpha-\beta^2>0$. Orduan: $6\alpha>\beta^2$ denean (adierazpen hau gertatzen denean, nahitaez $\alpha>0$ da).

ii) Hau gertatuko da Q definitu positiboa edo erdidefinitu positiboa denean, hots, azpideterminante nagusiak guztiak ≥ 0 direnean: $\alpha\geq 0$ eta $6\alpha-\beta^2\geq 0$. Orduan: $6\alpha\geq\beta^2$ denean.

2002ko ekaina. Demagun forma koadratiko hau:

$$Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3;\ \ a\in\mathbb{R}.$$

i) Aurkitu a-ren balioak non $\exists \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3/\ Q(\boldsymbol{x})=0$ betetzen den.

ii) Aurkitu a-ren balioak non $\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$: $Q(\boldsymbol{x})\geq 0$ betetzen den.

iii) Aurkitu a-ren balioak non $\exists \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3/\ Q(\boldsymbol{x})<0$ betetzen den.

$M(Q)$ lortuko dugu eta baita ere haren azpideterminante nagusiak:

$M(Q)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & a & 0\\ -1 & 0 & a\end{pmatrix}$ eta azpideterminante nagusiak:

Lehen ordenako azpideterminante nagusiak: $\{1, a, a\}$.
Bigarren ordenako azpideterminante nagusiak: $\{a-1, a-1, a^2\}$.
$|M(Q)|=a^2-2a=a(a-2)$.

i) Hau beti gertatuko da, $\boldsymbol{x}=(0,0,0)$ hartuz $Q(0,0,0)=0$ baita.

ii) Hau gertatuko da Q definitu positiboa edo erdidefinitu positiboa denean:
$D+$: 1. ordenako azpideterminante nagusiak: $a>0$.
2. ordenako azpideterminante nagusiak: $a>1$.
$|M(Q)|$: $a>2$.
Beraz, Q definitua positiboa da $a>2$ denean.
$ED+$: 1. ordenako azpideterminante nagusiak: $a\geq 0$.
2. ordenako azpideterminante nagusiak: $a\geq 1$.
$|M(Q)|$: $a=2$ ($a=0$ ezinezkoa da, bigarren azpideterminante nagusiak negatiboa egiten baita).
Hau da, Q erdidefinitua positiboa da $a=2$ denean.

Beraz, $a\geq 2$ denean beteko da.

iii) Hau da, Q definitu negatiboa, erdidefinitu negatiboa edo indefinitua denean baina definitu negatiboa edo erdidefinitu negatiboa ezin da izan lehen ordenako azpideterminante nagusi bat 1 delako. Beraz, indefinitua denean gertatuko da, hots, $a<2$ denean.

2003ko ekaina. Demagun forma koadratiko hau: $Q(\boldsymbol{x})={}^{t}M(\boldsymbol{x})\begin{pmatrix} \alpha & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}M(\boldsymbol{x})$.

i) Aurkitu α-ren balioak non:
   a) $\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$: $Q(\boldsymbol{x})\geq 0$ eta $\exists \boldsymbol{z}\neq\boldsymbol{0}/Q(\boldsymbol{z})=0$ den.
   b) $\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3-\{\boldsymbol{0}\}$: $Q(\boldsymbol{x})>0$ den.
   c) $\exists \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3/Q(\boldsymbol{x})>0$ eta $\exists \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^3/Q(\boldsymbol{y})<0$ den.

ii) $\alpha=0$ baliorako, zein da $Q(x_1,0,x_3)$-k hartzen duen zeinua?

Kalkulatuko ditugu $M(Q)$-ren azpideterminante nagusiak:
1. ordenako azpideterminante nagusiak: $\{\alpha, \alpha, 1\}$.
2. ordenako azpideterminante nagusiak: $\{\alpha^2-2, \alpha, \alpha-1\}$.
3. ordenako azpideterminante nagusia: $\alpha^2-\alpha-2$.

i.a) Hau gertatuko da Q erdidefinitu positiboa denean: erdidefinitu positiboa izateko azpideterminante nagusi guztiek ≥ 0 izan behar dute $|M(Q)|=0$rekin batera; beraz,
Lehen ordenakoak: $\alpha\geq 0$.
Bigarren ordenakoak: $\alpha \geq \sqrt{2}$ edo $\alpha \leq -\sqrt{2}$, $\alpha\geq 1$.
Hirugarren ordenakoa: $\alpha^2-\alpha-2=(\alpha-2)(\alpha+1)=0$, $\alpha=2$ edo $\alpha=-1$.
Eta guztiak batera, $\alpha=2$ denean soilik betetzen dela ondorioztatzen dugu.

i.b) Definitu positiboa izateko azpideterminante nagusi guztiek >0 izan behar dute; beraz,
Lehen ordenakoak: $\alpha>0$.
Bigarren ordenakoak: $\alpha > \sqrt{2}$ edo $\alpha < -\sqrt{2}$, $\alpha>1$.
Hirugarren ordenakoak: $\alpha^2-\alpha-2=(\alpha-2)(\alpha+1)>0$, eta hau gertatzen da bi adierazpenak positiboak edo negatiboak direnean, hau da, $\alpha>2$ edo $\alpha<-1$ denean.
Eta guztiak batera, $\alpha>2$ denean soilik betetzen dela ondorioztatzen dugu.

i.c) Noiz da indefinitua? Lehen ordenako azpideterminante bat 1 da, beraz, ezin da inoiz izan definitu negatiboa ezta ere erdidefinitu negatiboa. Orduan, $\alpha<2$ denean indefinitua izango da.

ii) $\alpha=0$ denez, $Q(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=x_3^2+2\sqrt{2}x_1x_2+2x_2x_3$, eta orduan

$$Q(x_1,0,x_3)=x_3^2\geq 0.$$

2003ko iraila. Demagun $M(Q)=\begin{pmatrix}\alpha & 0 & \beta\\ 0 & 1 & 0\\ \beta & 0 & \alpha\end{pmatrix}$ $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ izanik, forma koadratiko baten adierazpen matrizea.

i) Aurkitu α,β balioak non Q erdidefinitu positiboa den.

ii) Aurkitu α,β balioak non $\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 / Q(\boldsymbol{x})>0\}=\mathbb{R}^3-\{\mathbf{0}\}$ betetzen den.

Lehenengoz $M(Q)$-ren azpideterminante nagusiak aterako ditugu:
1. ordenako azpideterminante nagusiak: $\{\alpha, 1, \alpha\}$.
2. ordenako azpideterminante nagusiak: $\{\alpha, \alpha^2-\beta^2, \alpha\}$.
$|M(Q)|=\alpha^2-\beta^2$.

i) Q erdidefinitu positiboa izateko azpideterminante nagusi guztiek $\geq$ izan behar dute eta $|M(Q)|=0$.
Orduan, $\alpha^2-\beta^2=0$ eta $\alpha\geq 0$, hau da, $|\alpha|=|\beta|$ edo $\alpha=\pm\beta$, $\alpha\geq 0$ baldintzarekin batera.

ii) Q definitu positiboa izateko azpideterminante nagusi guztiek $>$ izan behar dute: $\alpha^2-\beta^2>0$ eta $\alpha>0$, hau da, $|\alpha|>|\beta|$ eta α positiboa denez, $\alpha>|\beta|$, $\alpha>0$ baldintzarekin batera.

2005eko ekaina. Demagun $Q(\boldsymbol{x})$ forma koadratikoa horrela definitua:

$$Q(\boldsymbol{x})={}^tM(\boldsymbol{x})\begin{pmatrix}a & -1 & 0\\ 1 & 1 & a\\ 0 & a & 4\end{pmatrix}M(\boldsymbol{x}),\ a\in\mathbb{R} \text{ izanik.}$$

Aurkitu $Q(\boldsymbol{x})$-ren adierazpen matrizea eta esan a-ren zein baliotarako beteko diren kasu hauek, erantzuna azalduz:

i) $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3-\{\mathbf{0}\}$: $Q(\boldsymbol{x})<0$ betetzen da.

ii) $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3-\{\mathbf{0}\}$: $Q(\boldsymbol{x})>0$ betetzen da.

iii) $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$: $Q(\boldsymbol{x})\geq 0$ betetzen da.

iv) $\exists\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\in\mathbb{R}^3$ non $Q(\boldsymbol{x}_1)<0$ eta $Q(\boldsymbol{x}_2)>0$ den.

$$M(Q)=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & 1 & a\\ 0 & a & 4\end{pmatrix}.$$

Lehen ordenako azpideterminante nagusiak: $\{a, 1, 4\}$.
Bigarren ordenako azpideterminante nagusiak: $\{a, 4a, 4-a^2\}$.
$|M(Q)|=4a-a^3=a(4-a^2)$.

i) Q inoiz ez da definitu negatiboa izango (lehen ordenako bi azpideterminante nagusiak positiboak dira).

ii) Q definitu positiboa izateko azpideterminante nagusiak guztiek >0 izan beharko dute: $a>0$ eta $4-a^2>0$, hau da, $0<a<2$ denean.

iii) Hau beteko da Q definitu positiboa edo erdidefinitu positiboa denean; Q erdidefinitu positiboa izateko: $a\geq 0$ $4-a^2\geq 0$ eta $a(4-a^2)=0$, hots, $a=0$ edo $a=2$ denean, beraz, eskatutakoa beteko da $0\leq a\leq 2$ denean.

iv) Horretarako Q-k indefinitua izan behar du, eta erdidefinitu negatiboa izan ezin denez (lehen ordenako bi azpideterminante nagusiak >0 dira), $a<0$ edo $a>2$ denean beteko da.

2005eko iraila. Demagun $f(x,y,z)=ax^2+by^2+cxz+d$.

i) *a, b, c, d* ezezagunen zein baliotarako izango da f forma koadratiko definitu positiboa?

ii) *a, b, c, d* ezezagunen zein baliotarako izango da f forma koadratiko erdidefinitu positiboa?

iii) *a, b, c, d* ezezagunen zein baliotarako izango da f funtzio ganbila?

i) f forma koadratikoa izateko, $d=0$ izan behar da. Bestalde, definitu positiboa izateko haren adierazpen matrizea kalkulatuko dugu: $M(f)=\begin{pmatrix} a & 0 & c/2 \\ 0 & b & 0 \\ c/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ eta sailkatuko dugu:

Lehen ordenako azpideterminante nagusiak: $\{a, b, 0\}$.
Bigarren ordenako azpideterminante nagusiak: $\{ab, -c^2/4, 0\}$.
$|M(f)|=-bc^2/4$.
Eta lehen ordenako azpideterminante nagusi bat zero denez, inoiz ez da izango definitu positiboa.

ii) Erdidefinitu positiboa izateko, $d=0$ izateaz gain, $a\geq 0$, $b\geq 0$, $ab\geq 0$, $-c^2/4\geq 0$, $-bc^2/4=0$, hau da, $a\geq 0$, $b\geq 0$, $c=0$ eta $d=0$.

iii) $f\in C^2(\mathbb{R}^3)$ denez, matrize hessiarraren metodoa aplikatuko dugu:

$$H_f(x,y,z)=\begin{pmatrix} 2a & 0 & c \\ 0 & 2b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lehen ordenako azpideterminante nagusiak: $\{2a, 2b, 0\}$.
Bigarren ordenako azpideterminante nagusiak: $\{4ab, -c^2, 0\}$.
$|H_f(x,y,z)|=-2bc^2$.
Eta $H_f(x,y,z)$ definitu edo erdidefinitu positiboa denean, hau da, $a\geq 0$, $b\geq 0$ eta $c=0$ denean, f ganbila izango da (d edozein izanda).

2006ko ekaina. Funtzio bakoitzerako aurkitu $a\in\mathbb{R}$ balioak non forma koadratikoa den, eta hala denean, sailkatu:

i) $f(x,y)=(5x+a)^2$.

ii) $g(x,y)=(2x-ay)^2$.

iii) $h(x,y)=(x+ay)^3$.

i) $f(x,y)=25x^2+a^2+10ax$ denez, f forma koadratikoa izango da a=0 denean soilik. Horrela $f(x,y)=25x^2$ izango da eta $M(f)=\begin{pmatrix}25 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ denez, f erdidefinitu positiboa izango da.

ii) $g(x,y)=4x^2+a^2y^2-4axy$ da eta funtzio hau a-ren edozein baliotarako forma koadratikoa da. $M(g)=\begin{pmatrix}4 & -2a\\ -2a & a^2\end{pmatrix}$ denez, a-ren edozein baliotarako erdidefinitu positiboa da.

iii) $h(x,y)=x^3+a^3y^3+3ax^2y+3a^2xy^2$ denez, inoiz ez da forma koadratikoa izango.

2006ko iraila. Demagun $Q(x,y,z)=ax^2+bz^2+2yz+cy^2$ forma koadratikoa. Aurkitu $a,b,c\in\mathbb{R}$ balioak non Q erdidefinitu negatiboa den.

Q-ren adierazpen matrizea $M(Q)=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & c & 1\\ 0 & 1 & b\end{pmatrix}$ da eta sailkatu dugu:

Lehen ordenako azpideterminante nagusiak: $\{a, c, b\}$.
Bigarren ordenako azpideterminante nagusiak: $\{ac, ab, cb-1\}$.
$|M(Q)|=acb-a=a(cb-1)$.

Q erdidefinitu negatiboa izateko lehen ordenako azpideterminante nagusiek ≤ 0 izan behar dute:

$$a\leq 0,\ c\leq 0,\ b\leq 0.$$

Bigarren ordenako azpideterminante nagusiek ≥ 0 izan behar dute: $ac\geq 0$, $ab\geq 0$, $cb\geq 1$.
Eta $|M(Q)|=0$: $a(cb-1)=0$.
Beraz, Q erdidefinitu negatiboa izango da

$a=0$, $c<0$, $b<0$ eta $cb\geq 1$ denean edo $cb=1$ eta $a\leq 0$, $c<0$, $b<0$ denean.

2008ko iraila. Demagun forma koadratikoen familia hau:

$$Q(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+ax_3^2+6x_1x_2.$$

i) Sailkatu forma koadratikoa a balio desberdinetarako.
ii) a=3 denean, existitzen dira $\boldsymbol{z}$ eta $\boldsymbol{y}$ bi bektore non $Q(\boldsymbol{z})>0$ eta $Q(\boldsymbol{y})<0$ diren?
iii) a=4 denean, demagun f funtzio polinomikoa non haren matrize hessiarra hau den: $\forall(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3:\ H_f(x_1,x_2,x_3)=M(Q)$. Zer esan daiteke f funtzioaren ahurtasunaz edo ganbiltasunaz?

i) Haren adierazpen matrizea hauxe da: $M(Q)=\begin{pmatrix}a & 3 & 0\\ 3 & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$ eta azpideterminante nagusiak:

1. ordenakoak: $\{a, a, a\}$.
2. ordenakoak: $\{a^2-9, a^2, a^2\}$.
$|M(Q)|=a^3-9a$.

Q definitu positiboa da azpideterminante nagusi guztiak >0 badira, hau da,
$a>0$, $a^2-9>0$ [$a<-3$ edo $a>3$], $a^3-9a>0$ [$-3<a<0$ edo $a>3$].
Hau da, Q definitu positiboa da $a>3$ denean.

Q erdidefinitu positiboa da azpideterminante nagusi guztiak ≥ 0 badira eta $|M(Q)|=0$ bada: $|M(Q)|=a^3-9a=a(a+3)(a-3)=0 \Rightarrow a=0$, $a=-3$ edo $a=3$. Baina $a=0$ edo $a=-3$ denean, beste azpideterminante nagusiak negatiboak dira, beraz,
Q erdidefinitu positiboa da $a=3$ denean.

Q definitu negatiboa da ordena bakoitiko azpideterminante nagusiak <0 eta ordena bikoitiko azpideterminante nagusiak >0 badira, hau da,
$a<0$, $a^2-9>0$ [$a<-3$ edo $a>3$], $a^3-9a<0$ [$0<a<3$ edo $a<-3$].
Hau da, Q definitu negatiboa da $a<-3$ denean.

Q erdidefinitu negatiboa da ordena bakoitiko azpideterminante nagusiak ≤ 0, ordena bikoitiko azpideterminante nagusiak ≥ 0 eta $|M(Q)|=0$ badira, hau da,
$|M(Q)|=a^3-9a=0$ [$a=-3$ edo $a=0$ edo $a=3$]. $a=3$ bada erdidefinitu positiboa da, $a=0$ bada indefinitua da eta $a=-3$ denean, erdidefinitu negatiboa.
Hau da, Q erdidefinitu negatiboa da $a=-3$ denean.

Eta $-3<a<3$ denean, ordena bakoitiko azpideterminanteak zeinu ezberdinetakoak dira, hots,
Q indefinitua da $-3<a<3$ denean.

ii) $a=3$ denean, Q erdidefinitu positiboa da eta $\forall(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 : Q(x_1,x_2,x_3)\geq 0$ betetzen da, beraz, ez da existitzen $\boldsymbol{y}$ non $Q(\boldsymbol{y})<0$ den.

iii) $H_f(x_1,x_2,x_3)=M(Q)=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Jakiteko f ganbila edo ahurra den, sailkatuko dugu haren matrize hessiarra: lehen egin dugun bezala, $a=4>3$ denez, matrize hau definitu positiboa da eta beraz, f hertsiki ganbila da.

2009ko ekaina. Demagun $Q(\boldsymbol{x})$ forma koadratikoa:

$$Q(x,y,z)=ax^2+2ay^2+z^2+4xy+2xz\ ,\quad a\in\mathbb{R}\ \text{izanik.}$$

i) a-ren zein baliotarako da $Q(\boldsymbol{x})$ definitu positiboa? ¿eta erdidefinitu positiboa?
ii) a-ren zein baliotarako da $Q(\boldsymbol{x})$ definitu negatiboa? ¿eta erdidefinitu negatiboa?
iii) $a=2$ denean eta funtzio ganbilen eta ahurren mutur propietateak erabiliz, aurkitu $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / Q(x,y,z)=0\}$ multzoa.

Q-ren adierazpen matrizea $M(Q) = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & 2a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ da.

Lehen ordenako azpideterminante nagusiak: $\{a,\ 2a,\ 1\}$.

Bigarren ordenako azpideterminante nagusiak: $\{2a^2 - 4,\ a-1,\ 2a\}$.

$|M(Q)| = 2a^2 - 2a - 4$.

i) Q definitu positiboa da azpideterminante nagusi guztiak positiboak badira:
$a > 0$,
$2a^2 - 4 > 0$ (hots, $a > \sqrt{2}$ edo $\cancel{a < -\sqrt{2}}$),
$a - 1 > 0$ (hots, $a > 1$),
$2a^2 - 2a - 4 = (a+1)(a-2) > 0$ (hots, $\cancel{a < -1}$ edo $a > 2$).
Beraz, $a > 2$ denean, Q definitu positiboa da.

Q erdidefinitu positiboa da azpideterminante nagusi guztiak $\geq$ badira eta $|M(Q)| = 0$ bada, hau da, $a = 2$ denean.

ii) Q inoiz ez da izango definitu edo erdidefinitu negatiboa, lehen ordenako azpideterminante bat positiboa delako.

iii) $Q(x,y,z) = 2x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy + 2xz$ izango da, erdidefinitu positiboa ($\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : Q(\boldsymbol{x}) \geq 0$) eta $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / Q(x,y,z) = 0\}$ multzoan dauden puntuetan Q-k minimoa lortzen du.
Ganbila al da Q? Matrize hessiarraren metodoa erabiliko dugu: $Q \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ eta

$$H_Q(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matrize hau erdidefinitu positiboa da ($H_Q(x,y,z) = 2M(Q)$), beraz, Q ganbila da eta minimoa gradientea baliogabetzen den puntuetan aurkituko dugu:

$$\nabla Q(x,y,z) = (4x + 4y + 2z,\ 8y + 4x,\ 2z + 2x) = (0,0,0) \Rightarrow x = -z,\ 2y = z.$$

Hau da, multzo honetan: $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / Q(x,y,z) = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = -z,\ 2y = z\}$.

2009ko iraila. Forma koadratikoen sailkapena erabiliz, frogatu $f(x,y) = ax^2 + 2y^2$, $g(x,y) = x^2 - y^2 + 6xy$ eta $a > 4$ badira, orduan edozein $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $f(x,y) \geq g(x,y)$ betetzen dela. Betetzen al da $f(x,y) = g(x,y)$ punturen baterako?

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ f(x,y) \geq g(x,y) \Rightarrow f(x,y) - g(x,y) \geq 0$ eta

$f(x,y) - g(x,y) = ax^2 + 2y^2 - x^2 + y^2 - 6xy = (a-1)x^2 + 3y^2 - 6xy$.

Eta $f-g$ forma koadratikoa sailkatuko dugu: $M(f-g)=\begin{pmatrix} a-1 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ denez, 1. ordenako azpideterminante nagusiak: $\{a-1, 3\}$ eta $|M(f-g)|=3a-12$.

Horrela, $f-g$ forma koadratikoa erdidefinitu edo definitu positiboa denean, edozein $(x,y)\in\mathbb{R}^2$: $f(x,y)-g(x,y)\geq 0$ izango da hots,

$a-1\geq 0 \Rightarrow a\geq 1$ eta $3a-12\geq 0 \Rightarrow a\geq 4$.

$a=4$ denean erdidefinitu positiboa izango da eta $a>4$ denean, definitu positiboa.

Bestalde, argi dago *f* eta *g* forma koadratikoak direnez, $f(0,0)=g(0,0)=0$ dela.

2010eko ekaina. Demagun $M(Q)=\begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & a \end{pmatrix}$, *Q* forma koadratikoaren adierazpen matrizea.

i) $a=0$ denean, existitzen da $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ non $Q(\mathbf{x})=0$ den? Hala bada, aurkitu gutxienez bat.
ii) $a=1$ denean, existitzen da $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ non $Q(\mathbf{x})=0$ den? Hala bada, aurkitu gutxienez bat.
iii) $a=2$ denean, existitzen da $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ non $Q(\mathbf{x})=0$ den? Hala bada, aurkitu gutxienez bat.

Q forma koadratikoa sailkatuko dugu *a*-ren balioen arabera:
$M(Q)$-ren lehen ordenako azpideterminante nagusiak: $\{a, 2, a\}$.
$M(Q)$-ren lehen ordenako azpideterminante nagusiak: $\{2a, a^2-1, 2a\}$.
$|M(Q)|=2a^2-2=2(a^2-1)$.
Q definitu positiboa da azpideterminante nagusi guztiak >0 badira: $a>0$, $a^2-1>0 \Rightarrow a>1$ edo $a<-1$, hau da $a>1$.
Q erdidefinitu positiboa da azpideterminante nagusi guztiak ≥ 0 badira eta $|M(Q)|=0$: $a\geq 0$, $a^2-1=0 \Rightarrow a=\pm 1$, hau da, $a=1$.
Q inoiz ez da izango negatiboa (definitua zein erdidefinitua) lehen ordenako azpideterminante nagusi bat $2>0$ delako.
Beste edozein kasutan, indefinitua da.

i) $a=0$ bada, $Q(x,y,z)=2y^2-2xz$ da eta, adibidez, $Q(1,1,1)=0$.
ii) $a=1$ bada, *Q* erdidefinitu positiboa da eta $Q(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2-2xz$ da. Eta, adibidez, $Q(1,0,1)=0$.
iii) $a=2$ bada, *Q* definitu positiboa da eta ez da existitzen $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ non $Q(\mathbf{x})=0$ den.

2010eko iraila. Demagun $Q(x,y,z)=Ax^2+Ay^2+Az^2+2xz$.

i) *A*-ren zein baliotarako beteko da hau: $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : Q(x,y,z)\geq 0$?
ii) *A*-ren zein baliotarako beteko da hau: $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\} : Q(x,y,z)<0$?
iii) $A=-2$ denean, kalkulatu $Q(x,y,z)=0$ betetzen duten puntu guztiak.

Lehenengoz sailkatuko dugu forma koadratikoa, *A*-ren balio ezberdinen arabera:

$$M(Q)=\begin{pmatrix} A & 0 & 1 \\ 0 & A & 0 \\ 1 & 0 & A \end{pmatrix}.$$

1. ordenako azpideterminante nagusiak: $\{A, A, A\}$.
2. ordenako azpideterminante nagusiak: $\{A^2, A^2-1, A^2\}$.
$|M(Q)|=A^3-A=A(A^2-1)$.

Orduan, Q definitu positiboa izango da AN guztiak >0 direnean: $A>0$, $A^2-1>0 \Rightarrow A>1$.

Q erdidefinitu positiboa izango da AN guztiak ≥ 0 direnean eta $|M(Q)|=A(A^2-1)=0$:
$A=0$ denean, bigarren ordenako AN bat negatiboa irteten da (indefinitua beraz).
$A^2-1=0 \Rightarrow A=\pm 1$, baina $A\geq 0$ izan behar denez, $A=1$ denean ED+ da.

Q definitu negatiboa izango da: $A<0$, $A^2-1>0$ eta $A(A^2-1)<0 \Rightarrow A<-1$.

Q erdidefinitu negatiboa izango da: $A\leq 0$, $A^2-1\geq 0$ eta $A(A^2-1)=0 \Rightarrow A=-1$.

Eta geratzen diren baliotarako, $-1<A<1$, Q indefinitua izango da.

i) Hau beteko da Q definitu edo erdidefinitu positiboa denean: $A\geq 1$ denean.

ii) Honek esan nahi du Q definitu negatiboa dela, beraz, $A<-1$ denean.

iii) Kasu honetan, Q definitu negatiboa eta $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, Q(x,y,z)=0\}=\{(0,0,0)\}$.

GANBILTASUNAREN ETA AHURTASUNAREN ARIKETAK

2001eko ekaina. Demagun $f(x,y)=x^2+Ay^2+Bxy$ $(A,B\in\mathbb{R})$ eta $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / -1\le x+y\le 1, -1\le x-y\le 1\}$.

i) A eta B-ren zein baliotarako izango da f ganbila $\mathbb{R}^2$-n?

A eta B-ren zein baliotarako izango da f hertsiki ganbila $\mathbb{R}^2$-n?

A eta B-ren zein baliotarako izango da f ahurra $\mathbb{R}^2$-n?

ii) $A=-1$, $B=0$ balioetarako eta f-ren gradientea erabiliz, aurkitu zein puntutan lortzen diren f-ren X-rekiko maximo eta minimoa.

i) $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$, beraz, matrize hessiarraren metodoa aplikatuko dugu:

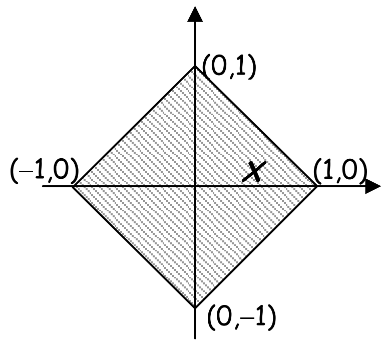
$H_f(x,y)=\begin{pmatrix} 2 & B \\ B & 2A \end{pmatrix}$; lehen ordenako azpideterminante nagusiak: $\{2, 2A\}$ eta bigarren ordenako azpideterminante nagusia: $4A-B^2$.

Orduan, $\mathbb{R}^2$ irekia denez, f ganbila izateko H_f puntu guztietan definitu edo erdidefinitu positiboa izatea beharrezkoa eta nahikoa da, hots, azpideterminante nagusi guztiek ≥ 0 izan behar dute: $2\ge 0$, $2A\ge 0$ eta $4A-B^2\ge 0$, hau da, $4A\ge B^2$.

Hertsiki ganbila izango da azpideterminante nagusi guztiek >0 direnean: $2>0$, $2A>0$ eta $4A-B^2>0$, hau da, $4A>B^2$.

Ahurra izateko, $\mathbb{R}^2$ irekia denez H_f puntu guztietan definitu edo erdidefinitu negatiboa izatea beharrezkoa eta nahikoa da, hau da, lehen ordenako azpideterminante nagusiek ≤ 0 izan behar dute baina $2>0$ da, beraz, ez dira existitzen A eta B-ren balioak non f ahurra den.

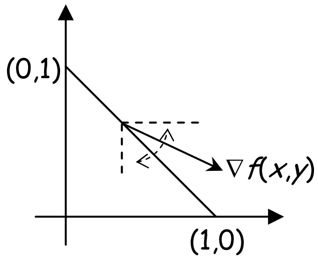
ii) $f(x,y)=x^2-y^2$. Gradientea erabiltzeko funtzioak diferentziagarria izan behar du ($f\in C^2(\mathbb{R}^2)$).



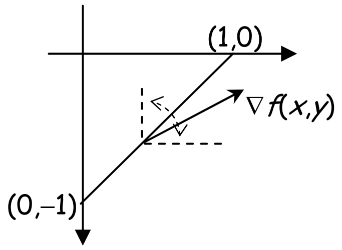
$\nabla f(x,y)=(2x,-2y)$

Hasteko, $\nabla f(x,y)=(0,0)\Rightarrow(x,y)=(0,0)\in X$ (barruko puntu bakarra non zerbait egon daitekeen).

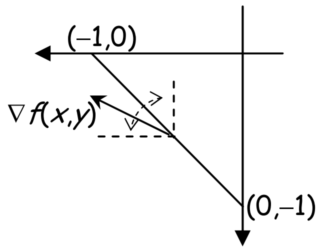
Aztertuko dugu muga: zatika egingo dugu eta utziko dugu bukaerako (1,0), (0,1), (–1,0) eta (0,–1), muga zatiak ebakitzen diren puntuak.



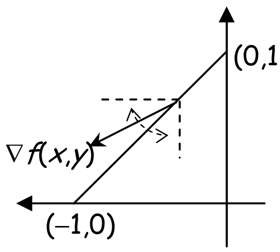
$\overline{(0,1)(1,0)}$ zatian gradientea $(+,-)$ modukoa da eta irudian ikusten den bezala funtzioak ezin du hartu puntu hauetan maximo edo minimoa.



$\overline{(0,-1)(1,0)}$ zatian gradientea $(+,+)$ modukoa da eta irudian ikusten den bezala funtzioak ezin du hartu puntu hauetan maximo edo minimoa.

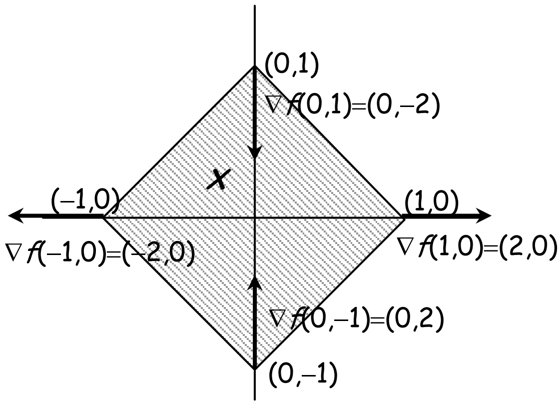


$\overline{(0,-1)(-1,0)}$ zatian gradientea $(-,+)$ modukoa da eta irudian ikusten den bezala funtzioak ezin du hartu puntu hauetan maximo edo minimoa.



$\overline{(0,1)(-1,0)}$ zatian gradientea $(-,-)$ modukoa da eta irudian ikusten den bezala funtzioak ezin du hartu puntu hauetan maximo edo minimoa.

Orain aztertuko ditugu, banan-banan, (1,0), (0,1), (–1,0) eta (0,–1) puntuak:



Argi dago (1,0) eta (–1,0) puntuetan maximoa egon daitekeela eta (0,1) eta (0,–1) puntuetan, ordea, minimoa. Eta hauek, (0,0) puntuarekin batera dira puntu bakarrak non zerbait egon daitekeela eta f jarraia X trinkoan denez, ziur maximoa eta minimoa lortzen dela, beraz:

$f(0,0)=0$; $f(1,0)=1$; $f(-1,0)=1$; $f(0,1)=-1$; $f(0,-1)=-1$, orduan (1,0) eta (–1,0) puntuetan f-ren X-rekiko maximoa lortzen da eta (0,1) eta (0,–1) puntuetan f-ren X-rekiko minimoa lortzen da.

2001eko iraila. Demagun $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \ x>0,\ y>0\}$multzoa eta $f(x,y)=x^{\alpha}y^{\frac{1}{2}}$ funtzioa, $\alpha>0$ izanik.

i) α-ren zein baliotarako izango da f hertsiki ahurra X multzoan?
ii) α-ren zein baliotarako izango da f ahurra X multzoan?
iii) α-ren zein baliotarako izango da f ganbila X multzoan?

$f\in C^2(\mathbb{R}^2)$ beraz, $H_f(x,y)=\begin{pmatrix} \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}\alpha x^{\alpha-1}y^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2}\alpha x^{\alpha-1}y^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{4}x^{\alpha}y^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$.

Lehen ordenako azpideterminante nagusiak: $\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^{\frac{1}{2}}$, $-\frac{1}{4}x^{\alpha}y^{-\frac{3}{2}}$.

Eta $|H_f(x,y)|=\frac{1}{4}x^{2\alpha-2}y^{-1}(\alpha(1-2\alpha))$.

i) $\forall(x,y)\in X$: $H_f(x,y)$ definitu negatiboa bada, hau da,

$$\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^{\frac{1}{2}}<0\ ,\ -\frac{1}{4}x^{\alpha}y^{-\frac{3}{2}}<0 \quad \text{eta} \quad \frac{1}{4}x^{2\alpha-2}y^{-1}(\alpha(1-2\alpha))>0$$

badira; orduan,

$\alpha(\alpha-1)<0$ eta $\alpha(1-2\alpha)>0$, hots, $\alpha<\frac{1}{2}$ (gogoratu $\alpha>0$ dela) denean f X multzoan hertsiki ahurra izango da.

ii) $\forall(x,y)\in X$: $H_f(x,y)$ definitu edo erdidefinitu negatiboa bada, hau da,

$$\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^{\frac{1}{2}}\le 0\ ,\ -\frac{1}{4}x^{\alpha}y^{-\frac{3}{2}}\le 0 \quad \text{eta} \quad \frac{1}{4}x^{2\alpha-2}y^{-1}(\alpha(1-2\alpha))\ge 0$$

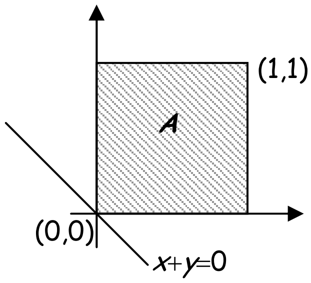
badira; orduan,

$\alpha(\alpha-1)\le 0$ eta $\alpha(1-2\alpha)\ge 0$, hots, $\alpha\le\frac{1}{2}$ denean f X multzoan ahurra izango da.

iii) f inoiz ez da izango ganbila lehen ordenako azpideterminante nagusi bat (bigarrena hain zuzen) negatiboa delako.

2002ko iraila. Demagun $f(x,y)=\alpha x^2+\alpha y^2+2\alpha xy$ funtzioa eta $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \ 0\le x\le 1;\ 0\le y\le 1\}$ multzoa.

i) Aztertu f-ren ganbiltasuna edo ahurtasuna α-ren balio desberdinetarako.
ii) α-ren zein baliotarako ziurta dezakegu $\min_{\mathbf{x}\in A} f(\mathbf{x})=f(0,0)$ dela?
iii) α-ren zein baliotarako ziurta dezakegu $\max_{\mathbf{x}\in A} f(\mathbf{x})=f(0,0)$ dela?
iv) Biz $\alpha=2$. Mutur propietateak erabiliz, aurkitu gutxienez puntu bat non f-ren A-rekiko maximoa lortzen den.



i) $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ denez, matrize hessiarraren metodoa erabiliko dugu:

$f_1(x,y)=2\alpha x+2\alpha y.$
$f_2(x,y)=2\alpha y+2\alpha x.$
$f_{11}(x,y)=2\alpha.$
$f_{12}(x,y)=2\alpha.$
$f_{22}(x,y)=2\alpha.$

Eta $H_f(x,y)=\begin{pmatrix} 2\alpha & 2\alpha \\ 2\alpha & 2\alpha \end{pmatrix}$ denez $\alpha \geq 0$ denean matrizea erdidefinitu positiboa da, hots, f ganbila eta $\alpha \leq 0$ denean matrizea erdidefinitu negatiboa da eta beraz, f ahurra.

ii) $\alpha \geq 0$ denean f ganbila denez, gradientea zero egiten bada, puntu horretan edo horietan aurkituko dugu minimoa, orduan:
$\nabla f(x,y)=(2\alpha x+2\alpha y,\ 2\alpha y+2\alpha x)=(0,0) \Rightarrow x+y=0$ denean f-ren minimoa lortuko dugu eta ezaugarri hau betetzen duen A-ko puntu bakarra (0,0) dela argi dago (irudian ikusten dugu).

iii) Aurreko puntuan bezala, $\alpha \leq 0$ denean f ahurra da eta gradientea zero egiten da $x+y=0$ denean. Puntu hauetan f-k maximoa lortuko du eta ezaugarri hau betetzen duen A-ko puntu bakarra (0,0) dela argi dago (irudian ikusten dugu).

iv) $f(x,y)=2x^2+2y^2+4xy$ da, jarraia eta ganbila $\alpha=2$ delako, A trinkoa da, beraz f-ren A-rekiko maximoa existitzen da eta mutur propietateek esaten duten moduan, gutxienez A-ren erpin batean aurkituko dugu. (0,0) kenduta minimoa delako, (1,0), (0,1) eta (1,1) dira geratzen diren erpinak eta f-n ordezkatu ondoren, maximoa (1,1) puntuan dagoela ondorioztatzen dugu.

2003ko ekaina. Demagun funtzio hau:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{x-y} & x \neq y \\ 2 & x=y \end{cases}.$$

Aurkitu norabideak non f-ren deribatu direkzionala (0,0) eta (0,1) puntuetan definituta dagoen. Existitzen al da $\nabla f(0,0)$?, eta $\nabla f(0,1)$? Zergatik? Hala bada, kalkulatu.

(0,0) puntuan funtzioa ez da jarraia eta ondorioz, ez da diferentziagarria. Deribatu direkzionala kalkulatzeko, formula hau erabiliko dugu:

$$\forall(v_1,v_2)\neq(0,0):\quad D_v f(0,0)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{f(tv_1,tv_2)-f(0,0)}{\|tv\|}.$$

Orain berezitu behar dugu $v_1=v_2$ denean eta $v_1\neq v_2$ denean:

$v_1=v_2$ denean $D_v f(0,0)=\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{2-2}{\|tv\|}=0$

eta $v_1\neq v_2$ denean $D_v f(0,0)=\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{\frac{t^2v_1^2}{tv_1-tv_2}-2}{\|tv\|}\not\exists$

Beraz, (0,0) puntuan deribatu direkzionala $v_1=v_2$ norabideetan soilik existitzen da.

(0,1) puntuan funtzioak ez ditu inolako arazorik ematen (puntuan bertan eta alboko puntuetan funtzioaren lehen zatia soilik aplikatzen da eta funtzioaren zati hau diferentziagarria da (0,1) puntuaren ingurunean) orduan:

$$D_v f(0,1)=\frac{v_1f_1(0,1)+v_2f_2(0,1)}{\|v\|}=\frac{v_1\left[\frac{x^2-2xy}{(x-y)^2}\right]_{(0,1)}+v_2\left[\frac{x^2}{(x-y)^2}\right]_{(0,1)}}{\|v\|}=0.$$

Beraz, edozein norabidetan deribatu direkzionala (0,1) puntuan 0 da.

Existitzen al dira gradienteak? (0,0) puntuan ez, funtzioa diferentziagarria ez delako (diferentziagarria izango balitz, deribatu direkzionala edozein norabidetan existitu beharko zuen, eta hau ez da gertatzen) eta (0,1) puntuan bai, lehen aipatu dugunez, f puntu honetan diferentziagarria delako.

$$\nabla f(0,1)=(f_1(0,1),f_2(0,1))=\left(\left[\frac{x^2-2xy}{(x-y)^2}\right]_{(0,1)},\left[\frac{x^2}{(x-y)^2}\right]_{(0,1)}\right)=(0,0).$$

2003ko iraila. Demagun $f(x,y)=x^2y+(y-4)^2$ funtzioa.

i) Aztertu f-ren ganbiltasuna edo ahurtasuna $\mathbb{R}^2$-n eta $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,y\geq x^2+1\}$ multzoan.

ii) Aurki eta irudikatu $B=\{(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\,/\,D_v f(1,4)>0\}$ multzoa.

iii) Egon daiteke (1,4) puntuan f-ren A-rekiko maximo bat?

i) $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$ polinomikoa delako beraz, matrize hessiarraren metodoa aplikatuko dugu:

$f_1(x,y)=2xy$.

$f_2(x,y)=x^2+2(y-4)$.

$f_{11}(x,y)=2y$.

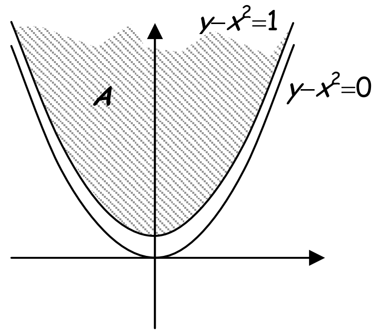
$f_{12}(x,y)=2x$.

$f_{22}(x,y)=2$.

Eta $H_f(x,y)=\begin{pmatrix}2y & 2x\\ 2x & 2\end{pmatrix}$.

1. ordenako azpideterminante nagusiak: $\{2y, 2\}$.

$|H_f(x,y)|=4y-4x^2=4(y-x^2)$.

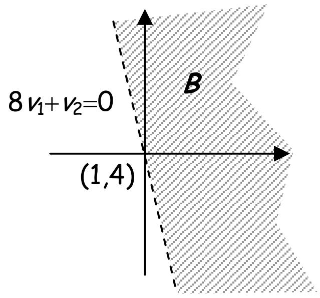


Orduan, $\mathbb{R}^2$-n (multzo irekia) f ez da ezer azpideterminante nagusiek ez baitute zeinua mantentzen. A-n ordea, ganbila da azpideterminante nagusi guztiak $\geq$ direlako.

ii) $$D_v f(x,y) = \frac{v_1 f_1(x,y) + v_2 f_2(x,y)}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \frac{v_1 2xy + v_2(x^2 + 2y - 8)}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

$$D_v f(1,4) = \frac{8v_1 + v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} > 0 \Rightarrow 8v_1 + v_2 > 0 \Rightarrow 8v_1 > -v_2.$$

$$B = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 / 8v_1 > -v_2\}.$$



iii) f diferentziagarria da eta mutur bat izateko A-ren barrualdean [(1,4)$\in$int(A)] $\nabla f(x,y)=(0,0)$ izatea baldintza beharrezkoa da eta hori ez da gertatzen, beraz, ezinezkoa da.

2004ko ekaina. Demagun $f(x,y) = |x + y|$ funtzioa. Kalkulatu $D_{(1,1)}f(1,-3)$. Zein norabidetarako dago definitua f-ren deribatu direkzionala (0,0) puntuan?

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y, & x + y \geq 0 \\ -x - y, & x + y < 0 \end{cases}.$$ Eta (1,–3) puntuaren ingurunean, $f(x,y)=-x-y$ izango da, diferentziagarria, eta $f_1(1,-3)=-1$ eta $f_2(1,-3)=-1$. Orduan,

$$D_{(1,1)}f(1,-3) = \frac{f_1(1,-3) + f_2(1,-3)}{\sqrt{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}}.$$

Funtzioa ez da diferentziagarria (0,0) puntuan, beraz, limitea erabiliko dugu:

$$\forall(v_1, v_2) \neq (0,0): \quad D_{(v_1,v_2)}f(0,0) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{f(0 + tv_1, 0 + tv_2) - f(0,0)}{\|tv\|} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{|tv_1 + tv_2|}{\|tv\|} =$$

$$= \begin{cases} v_1 + v_2 \geq 0 \Rightarrow \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \dfrac{t(v_1 + v_2)}{t\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \dfrac{v_1 + v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \\ v_1 + v_2 < 0 \Rightarrow \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \dfrac{t(-v_1 - v_2)}{t\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \dfrac{-v_1 - v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \end{cases}$$

Hau da, edozein norabidetan existitzen da.

2004ko ekaina. Funtzio bakoitzerako, aurkitu, existitzen bada, multzo ireki ganbila non ganbila den eta beste ireki ganbila non ahurra den.

i) $f(x,y) = \dfrac{1}{x + y}$.

ii) $g(x,y) = \ln(x + y)$.

i) f-ren existentzi eremua: $D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x+y\neq 0\}$. Eta $f\in C^2(D_f)$ denez:

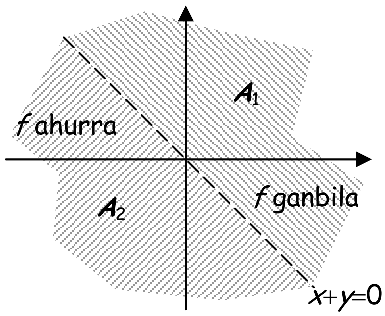
$$f_1(x,y) = f_2(x,y) = -\frac{1}{(x + y)^2}, \quad f_{11}(x,y) = f_{12}(x,y) = f_{22}(x,y) = \frac{2}{(x + y)^3}.$$

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{2}{(x+y)^3} & \frac{2}{(x+y)^3} \\ \frac{2}{(x+y)^3} & \frac{2}{(x+y)^3} \end{pmatrix}.$$

1. ordenako azpideterminante nagusiak: $\left\{\frac{2}{(x+y)^3},\frac{2}{(x+y)^3}\right\}$.

$|H_f(x,y)|=0$.

Orduan, $A_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x+y>0\}$ ireki ganbilean f ganbila da eta $A_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x+y<0\}$ ireki ganbilean f ahurra da.



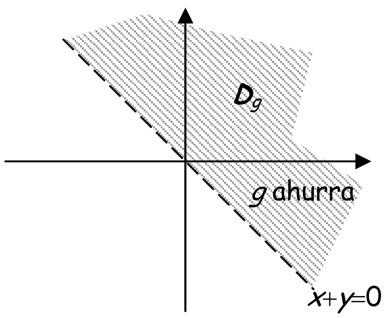
ii) g-ren existentzi eremua: $D_g=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x+y>0\}$. Eta $g\in C^2(D_g)$ denez:

$$g_1(x,y)=g_2(x,y)=\frac{1}{x+y},\quad g_{11}(x,y)=g_{12}(x,y)=g_{22}(x,y)=-\frac{1}{(x+y)^2}.$$

Eta matrize hessiarra: $H_g(x,y)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{(x+y)^2} & -\frac{1}{(x+y)^2} \\ -\frac{1}{(x+y)^2} & -\frac{1}{(x+y)^2} \end{pmatrix}$.

1. ordenako azpideterminante nagusiak: $\left\{-\frac{1}{(x+y)^2},-\frac{1}{(x+y)^2}\right\}$.

$|H_g(x,y)|=0$.



Orduan, $D_g=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x+y>0\}$ osoan, irekia eta ganbila dena, g ahurra da. Eta ez da existitzen multzo ireki ganbila non g ganbila den.

2004ko iraila. Demagun $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + \frac{1}{2}z^2 + xz + \alpha yz$.

i) α-ren zein baliotarako ziurta dezakegu $\mathbb{R}^3$ osoan f ganbila dela?

ii) α-ren zein baliotarako ziurta dezakegu $\mathbb{R}^3$ osoan f hertsiki ganbila dela?

iii) α-ren zein baliotarako ziurta dezakegu $\mathbb{R}^3$ osoan f ez dela ganbila ezta ahurra ere?

$f \in C^2(\mathbb{R}^3)$ eta matrize hessiarraren metodoa erabiliko dugu:

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

1. ordenako azpideterminante nagusiak: {4, 2, 1}.
2. ordenako azpideterminante nagusiak: $\{8, 3, 2-\alpha^2\}$.
$|H_f(x,y,z)| = 6-4\alpha^2$.

i) Azpideterminante nagusi guztiak >0 edo ≥ 0 badira, f ganbila izango da:

$2-\alpha^2 \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq \alpha \leq \sqrt{2}$ eta $6-4\alpha^2 \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{\frac{3}{2}} \leq \alpha \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Beraz, $-\sqrt{\frac{3}{2}} \leq \alpha \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$ denean, f $\mathbb{R}^3$ osoan ganbila izango da.

ii) Azpideterminante nagusi guztiak >0 badira, f hertsiki ganbila izango da:

$2-\alpha^2 > 0 \Rightarrow -\sqrt{2} < \alpha < \sqrt{2}$ eta $6-4\alpha^2 > 0 \Rightarrow -\sqrt{\frac{3}{2}} < \alpha < \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Beraz, $-\sqrt{\frac{3}{2}} < \alpha < \sqrt{\frac{3}{2}}$ denean, f $\mathbb{R}^3$ osoan hertsiki ganbila izango da.

iii) $\alpha < -\sqrt{\frac{3}{2}}$ edo $\alpha > \sqrt{\frac{3}{2}}$ denean, azpideterminante nagusi batzuk positiboak eta beste batzuk negatiboak dira, eta $\mathbb{R}^3$ irekia denez, f ez da izango ganbila ezta ahurra ere.

2005eko iraila. Demagun funtzio hau: $f(x,y) = |x^2 - y^2|$.

i) Kalkulatu, existitzen badira, $\nabla f(0,0)$ eta $\nabla f(1,0)$.

ii) Kalkulatu deribatu direkzional hauek: $D_{(1,1)}f(0,0)$, $D_{(1,0)}f(0,0)$ eta $D_{(0,1)}f(1,0)$.

i) $f(x,y) = |x^2 - y^2| = \begin{cases} x^2 - y^2, & x^2 - y^2 \geq 0 \\ y^2 - x^2, & x^2 - y^2 \leq 0 \end{cases}$, beraz, funtzio honek arazoak ematen ditu $x^2 = y^2$ denean (hots, (0,0) puntuan baina ez (1,0) puntuan).
Kalkula ditzagun, existitzen badira, $f_1(0,0)$ eta $f_2(0,0)$:

$$f_1(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h^2|}{h} = 0.$$

$$f_2(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|-h^2|}{h} = 0.$$

Beraz, $\nabla f(0,0)=(0,0)$.

Bestalde, (1,0)-ren ingurunean $x^2-y^2>0$ denez, $f_1(x,y)=2x$ eta $f_2(x,y)=-2y$, beraz, $\nabla f(1,0)=(f_1(1,0),\ f_2(1,0))=(2,0)$.

ii) $$D_{(1,1)}f(0,0) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{f(t,t)-f(0,0)}{t\sqrt{2}} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{|t^2-t^2|}{t\sqrt{2}} = 0.$$

$$D_{(1,0)}f(0,0) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t\sqrt{2}} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{|t^2|}{t\sqrt{2}} = 0.$$

$$D_{(0,1)}f(1,0) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{f(1,t)-f(1,0)}{t} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{|1-t^2|-1}{t} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{-t^2}{t} = 0.$$

Edo $D_{(0,1)}f(1,0) = \dfrac{0\cdot f_1(1,0)+f_2(1,0)}{1} = 0.$

2006ko ekaina. Demagun $f(x,y)=e^{xy}$ funtzioa.

i) Zein norabidetan izango da positiboa f-ren deribatu direkzionala $(-1,0)$ puntuan?

ii) Handituko da funtzioaren balioa $(-1,4)$ puntutik $(1,1)$ norabidean eta oso hurbil dagoen beste puntu batera pasatzen denean?

---

i) $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ denez, diferentziagarria da.

$f_1(x,y) = ye^{xy}$ eta $f_1(-1,0) = 0.$

$f_2(x,y) = xe^{xy}$ eta $f_2(-1,0) = -1.$

direnez,

$$D_{(v_1,v_2)}f(-1,0) = \frac{v_1f_1(-1,0)+v_2f_2(-1,0)}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} = \frac{-v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}.$$

Orduan, $\{(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2 / v_2<0\}$ norabideetan f-ren deribatu direkzionala $(-1,0)$ puntuan positiboa izango da.

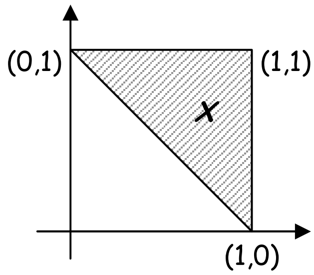
ii) Horretarako f-ren deribatu direkzionala $(-1,4)$ puntuan eta $(1,1)$ norabidean kalkulatuko dugu:

$$D_{(1,1)}f(-1,4) = \frac{f_1(-1,4)+f_2(-1,4)}{\sqrt{2}} = \frac{4e^{-4}-e^{-4}}{\sqrt{2}} = \frac{3e^{-4}}{\sqrt{2}} > 0.$$

Eta positiboa denez, funtzioa $(1,1)$ norabidean eta balio nahiko txikirako handitzen da.

2006ko iraila. Demagun $f(x,y)=\ln(x+y)$ funtzioa eta *X*, (1,0), (1,1) eta (0,1) puntuen arteko konbinazio lineal ganbil guztiez osatutako multzoa. Funtzio ganbilen eta ahurren mutur propietateak eta *f*-ren gradientea erabiliz, aurkitu *X*-rekiko *f*-ren muturrak, aurkitzen diren puntu guztiak aipatuz.

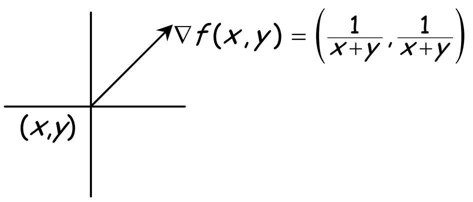
f-ren eremua: $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x+y>0\}$.
Eta $X\subset E$.



f jarraia (*f* C^2 klasekoa da *E* multzoan) *X* multzo trinkoan (irudian ikusten da) denez, *X*-rekiko *f*-ren maximoa eta minimoa existitzen dira.

Azter dezagun *f*-ren ganbiltasuna edo ahurtasuna: $H_f(x,y)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{(x+y)^2} & -\frac{1}{(x+y)^2} \\ -\frac{1}{(x+y)^2} & -\frac{1}{(x+y)^2} \end{pmatrix}$ eta matrize hessiar hau *f*-ren existentzi eremuan erdidefinitu negatiboa denez, *f* ahurra da.

Maximoari dagokionez, *f* ahurra izanik, *X*-ko punturen batean $\nabla f(x,y)=0$ bada, bertan egongo da maximoa baina $\nabla f(x,y)=\left(\frac{1}{x+y},\frac{1}{x+y}\right)\neq(0,0)$ denez, maximoa mugako edozein puntutan egon daiteke (konturatu *X*-ko barrualdean ezin duela ezer lortu funtzioak, ez maximo ezta minimoa ere). Erabil dezagun *f*-ren gradientea hautagaiak lortzeko: *X*-ko edozein puntutan *f*-ren gradientearen bi osagaiak positiboak eta berdinak dira, beraz, maximoa izateko hautagai bakarra (1,1) puntua da, hau da, (1,1) puntuan *f*-k *X*-rekiko maximo global bakarra ($f(1,1)=\ln 2$) lortzen du.



Minimoari dagokionez, *f* ahurra denez gutxienez erpin batean lortuko da eta bi besterik ez daude (bestean, (1,1) hain zuzen, maximoa lortzen da!) $f(1,0)=f(0,1)=\ln 1=0$. Eta argi dago $\overline{(1,0)(0,1)}$ segmentu osoan ere (bertan $x+y=1$ baita) balio bera lortzen duela funtzioak, hau da, $\overline{(1,0)(0,1)}$ segmentu osoan *f*-k *X*-rekiko minimo globala lortzen duela.

2007ko ekaina. Demagun $f(x,y)=x^2+y^2+axy+bx+cy$ funtzioen familia, $a,b,c\in\mathbb{R}$ izanik.

i) $a,b,c\in\mathbb{R}$ zein baliotarako da forma koadratikoa?

ii) $a,b,c\in\mathbb{R}$ zein baliotarako da ahurra, ganbila edo hertsiki ganbila?

iii) $a,b,c\in\mathbb{R}$ zein baliotarako beteko da hau: $f(1,1)=2$ eta $\nabla f(1,1)=(2,-2)$?

iv) $\nabla f(1,1)=(2,-2)$ dela badakigu, zein da $D_{(-3,4)}f(1,1)$-ren balioa? $v=(-3,4)$ norabidea funtzioaren handitze norabide al da?

i) $\forall a\in\mathbb{R}$, $b=c=0 \Rightarrow Q(x,y)=x^2+y^2+axy$.

ii) $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$ eta haren matrize hessiarra:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x,y)=2x+ay+b \\ \\ f_2(x,y)=2y+ax+c \end{array}\right\} \to \begin{cases} f_{11}(x,y)=2 \\ f_{12}(x,y)=f_{21}(x,y)=a \\ f_{22}(x,y)=2 \end{cases} \Rightarrow \quad H_f(x,y)=\begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 2 \end{pmatrix}.$$

Lehen ordenako azpideterminante nagusiak $2>0$, $2>0$.

Bigarren ordenakoa: $|H_f(x,y)|=4-a^2$. Orduan,

• $a=\pm 2$, $|H_f(x,y)|=0 \Rightarrow H_f(x,y)$ erdidefinitu positiboa da, hau da, funtzioa ganbila da.

• $a\in(-2,2)$, $|H_f(x,y)|>0 \Rightarrow H_f(x,y)$ definitu positiboa da, hau da, funtzioa hertsiki ganbila da.

• $a\in(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$, $|H_f(x,y)|<0 \Rightarrow H_f(x,y)$ indefinitua da.

Laburpen moduan, $\forall b,c\in\mathbb{R}$, funtzioa $a=\pm 2$ bada ganbila da eta $a\in(-2,2)$ bada, hertsiki ganbila. Inoiz ez da ahurra izango.

iii)
$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} f(1,1)=2+a+b+c=2 \\ f_1(1,1)=2+a+b=2 \end{array}\right\} \longrightarrow c=0 \\ f_2(1,1)=2+a+c=-2 \xrightarrow{c=0} a=-4 \end{array}\right\} \to b=4.$$

iv) $D_{(-3,4)}f(1,1)=\dfrac{-3f_1(1,1)+4f_2(1,1)}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}=\dfrac{(-3)\cdot 2+4\cdot(-2)}{\sqrt{25}}=-\dfrac{14}{5}<0$, beraz, $(-3,4)$ norabidea gutxitze norabidea da, haren deribatu direkzionala negatiboa delako.

2007ko iraila. Demagun $f(x,y)=Ax^2+(B+A)y^2+2Axy+2$ funtzioa, $A,B\in\mathbb{R}$ izanik.

i) A,B-ren zein baliotarako da f $\mathbb{R}^2$-n forma koadratikoa?

ii) A,B-ren zein baliotarako da f $\mathbb{R}^2$-n ganbila?

A,B-ren zein baliotarako da f $\mathbb{R}^2$-n hertsiki ahurra?

iii) Demagun $A=1$, $B=0$ eta $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y\geq 0, y-x\leq 1, x+y\leq 1\}$ multzoa. Funtzio ganbilen eta ahurren mutur propietateak erabiliz, kalkulatu f-ren X-rekiko maximo eta minimo globalak eta balio hauek lortzen dituzten puntuak.

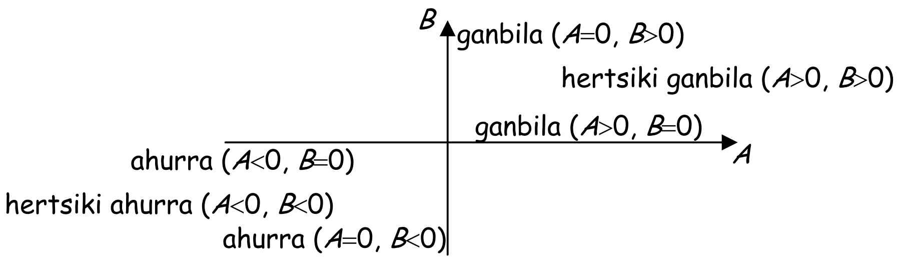
i) Ezinezkoa da, 2 solte bat agertzen delako.

ii) Horretarako matrize hessiarraren metodoa erabiliko dugu:

$$f \in C^2(\mathbb{R}^2): \begin{cases} f_1(x,y) = 2Ax + 2Ay. \\ f_2(x,y) = 2(B+A)y + 2Ax. \\ f_{11}(x,y) = 2A. \\ f_{12}(x,y) = f_{21}(x,y) = 2A. \\ f_{22}(x,y) = 2(B+A). \end{cases} \Rightarrow H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2A & 2A \\ 2A & 2(B+A) \end{pmatrix}.$$

1. ordenako azpideterminante nagusiak: $\{2A,\ 2(B+A)\}$.
$|H_f(x,y)| = 4A(B+A) - 4A^2 = 4AB$.

• $H_f(x,y)$ definitu positiboa da $A>0$, $B+A>0$ eta $AB>0$ badira, eta beraz, f hertsiki ganbila izango da.
• $H_f(x,y)$ erdidefinitu positiboa da $A\geq 0$, $B+A\geq 0$ eta $AB=0$ badira, eta beraz, f ganbila izango da.
• $H_f(x,y)$ definitu negatiboa da $A<0$, $B+A<0$ eta $AB>0$ badira, eta beraz, f hertsiki ahurra da.

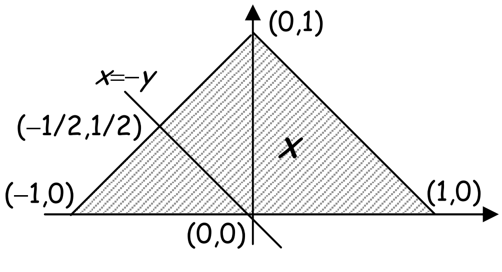


Orduan, $A\geq 0$ eta $B\geq 0$ denean, f ganbila izango da eta $A<0$ eta $B<0$ denean, hertsiki ahurra.

iii) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy + 2$ izango da. Eta aurreko apartatuan egin dugun legez, f ganbila da. f jarraia eta X trinkoa denez, f-ren X-rekiko maximoa eta minimoa existitzen dira.
$\nabla f(x,y) = (2x+2y, 2x+2y)$ X-ko punturen batean zero egiten bada, bertan minimo globala izango dugu:
$\nabla f(x,y) = (2x+2y, 2x+2y) = (0,0) \Rightarrow x+y=0$, beraz,

$$\{(x,y) \in X \,/\, x = -y\} = \overline{(0,0)(-1/2,1/2)}$$

multzoan minimo globala lortzen da ($\min_{x\in X} f(\boldsymbol{x}) = 2$)



Maximoari dagokionez, f ganbila denez, gutxienez erpin batean egongo da (gogoratu f jarraia X trinkoan dela) eta 3 daude:

$$f(-1,0)=f(0,1)=f(1,0)=3.$$

Beraz, maximoa hiru erpinetan dago... eta $\overline{(1,0)(0,1)}$ segmentu osoan ere (segmentu hau $x+y=1$ zuzenean dago eta funtzioan zuzen hau ordezkatuz 3 lortzen da beti: $f(x,y)=(x+y)^2+2$).

2008ko ekaina. Demagun funtzioen familia hau:

$$f(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2-2xy+2xz+2ayz\ ,\ a\in\mathbb{R}\ \text{izanik.}$$

i) $a\in\mathbb{R}$ zein baliotarako da forma koadratikoa? Sailkatu.

ii) $a\in\mathbb{R}$ zein baliotarako da funtzio ganbila edo ahurra?

iii) $a=3$ denean, zein da $D_{(-3,0,4)}f(1,0,1)$ deribatuaren balioa? $v=(-3,0,4)$ norabidea funtzioaren handitze norabidea da?

i) $a\in\mathbb{R}$ edozein izanda, f beti izango da forma koadratikoa. Sailkatzeko aztertuko dugu haren adierazpen matrizea:

$$M(f)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & a\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}.$$

1. ordenako azpideterminante nagusiak: {1, 2, 1}.
2. ordenako azpideterminante nagusiak: {1, $2-a^2$, 0}.
$|M(f)|=-a^2-2a-1$.
Eta orduan,
definitua ezin da izan, bigarren ordenako azpideterminante nagusiak bat zero delako.
erdidefinitu negatiboa ere ez, lehen ordenako azpideterminante nagusiak positiboak direlako.
erdidefinitu positiboa $-a^2-2a-1=-(a+1)^2=0$ denean, hots, $a=-1$ denean ($2-a^2>0$ da).
indefinitua beste edozein kasutan, hau da, $a\neq-1$ denean.

ii) $f\in C^2(\mathbb{R}^3)$ denez, matrize hessiarraren metodoa erabiliko dugu:

$$f_1(x,y,z)=2x-2y+2z\ \rightarrow\begin{cases}f_{11}(x,y,z)=2.\\ f_{12}(x,y,z)=-2.\\ f_{13}(x,y,z)=2.\end{cases}$$

$$f_2(x,y,z)=4y-2x+2az\ \rightarrow\begin{cases}f_{21}(x,y,z)=-2.\\ f_{22}(x,y,z)=4.\\ f_{23}(x,y,z)=2a.\end{cases}$$

$$f_3(x,y,z)=2z+2x+2ay\ \rightarrow\begin{cases}f_{31}(x,y,z)=2.\\ f_{32}(x,y,z)=2a.\\ f_{33}(x,y,z)=2.\end{cases}$$

Beraz, $H_f(x,y,z)=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 2a \\ 2 & 2a & 2 \end{pmatrix}$ da. Eta $H_f(x,y,z)=2M(f)$ denez, a=–1 denean H_f erdidefinitu positiboa izango da eta ondorioz, f ganbila. Beste a-ren edozein baliotarako f ez da ezer izango.

iii) $D_{(v_1,v_2,v_3)}f(x,y,z)=\dfrac{v_1f_1(x,y,z)+v_2f_2(x,y,z)+v_3f_3(x,y,z)}{\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}$.

$f_1(x,y,z)=2x-2y+2z\rightarrow f_1(1,0,1)=4.$
$f_2(x,y,z)=4y-2x+6z\rightarrow f_2(1,0,1)=4.$
$f_3(x,y,z)=2z+2x+6y\rightarrow f_3(1,0,1)=4.$

Orduan:

$$D_{(-3,0,4)}f(1,0,1)=\frac{-3\cdot 4+0\cdot 4+4\cdot 4}{\sqrt{(-3)^2+0^2+4^2}}=\frac{4}{5}>0\,.$$

Beraz, v=(–3,0,4) funtzioaren handitze norabidea da.

2009ko iraila. Demagun $f:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}$ funtzio diferentziagarria, $\mathrm{D}_{\nabla f(1,1)}f(1,1)=5$ eta $\mathrm{D}_{(1,-1)}f(1,1)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ betetzen dituelarik. Zein balio lor dezake $\mathrm{D}_{(1,1)}f(1,1)$-k?

$\mathrm{D}_{\nabla f(1,1)}f(1,1)=\mathrm{D}_{(f_1(1,1),f_2(1,1))}f(1,1)=\dfrac{f_1(1,1)f_1(1,1)+f_2(1,1)f_2(1,1)}{\sqrt{f_1^2(1,1)+f_2^2(1,1)}}=\dfrac{f_1^2(1,1)+f_2^2(1,1)}{\sqrt{f_1^2(1,1)+f_2^2(1,1)}}=5$, beraz,

$f_1^2(1,1)+f_2^2(1,1)=25$.

Bestalde, $\mathrm{D}_{(1,-1)}f(1,1)=\dfrac{f_1(1,1)-f_2(1,1)}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow f_1(1,1)-f_2(1,1)=1$.

Sistema hau lortuz eta ebatziz,

$$\left.\begin{aligned} f_1^2(1,1)+f_2^2(1,1)=25 \\ f_1(1,1)-f_2(1,1)=1 \end{aligned}\right\}\Rightarrow f_1^2(1,1)+(f_1(1,1)-1)^2=25\Rightarrow 2f_1^2(1,1)-2f_1(1,1)-24=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} f_1(1,1)=4,\ f_2(1,1)=3. \\ f_1(1,1)=-3,\ f_2(1,1)=-4. \end{cases}$$

Eta orduan,

$$\mathrm{D}_{(1,1)}f(1,1)=\frac{f_1(1,1)+f_2(1,1)}{\sqrt{2}}=\frac{4+3}{\sqrt{2}}=\frac{7}{\sqrt{2}},$$

edo

$$\mathrm{D}_{(1,1)}f(1,1)=\frac{-3-4}{\sqrt{2}}=-\frac{7}{\sqrt{2}}.$$

2010eko iraila. Demagun $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y)=|x|-y$.

i) Kalkulatu $D_v f(0,0)$, $\forall \boldsymbol{v} \neq (0,0)$.

ii) (1,0) norabidea f-ren handitze edo gutxitze norabidea da (0,0) puntutik hasita?

i) Funtzio hau, (0,0) puntuan ez da diferentziagarria x-ren balio absolutuaren deribatua x=0 denean existitzen ez delako, beraz, definizioa erabili behar dugu:

$$D_{(v_1,v_2)}f(0,0)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{f(tv_1,tv_2)-f(0,0)}{\sqrt{t^2v_1^2+t^2v_2^2}}=\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{|tv_1|-tv_2}{t\sqrt{v_1^2+v_2^2}}=\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{t|v_1|-tv_2}{t\sqrt{v_1^2+v_2^2}}=\frac{|v_1|-v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}.$$

ii) $D_{(1,0)}f(0,0)=\frac{1}{1}=1>0$, beraz, (1,0) norabidea handitze norabidea da.

PROGRAMAZIO EZ LINEALAREN ARIKETAK

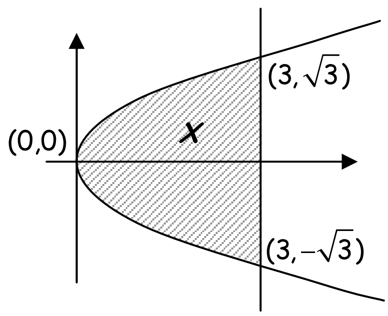
2000ko ekaina. i) Demagun problema hau:

$$\max/\min f(x,y)$$
$$\begin{cases} y^2 - x \le 0 \\ x \le 3 \end{cases}$$

f X-n, soluzio egingarrien multzoan, ahurra eta $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ izanik. $\boldsymbol{x}$ eta $\boldsymbol{y}$ puntuak dira X-ko puntu bakarrak non Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen diren, $\boldsymbol{x}$ puntuan minimokoak eta $\boldsymbol{y}$ puntuan maximokoak. Aurkitu puntu guztiak non maximoa eta minimoa lortzen diren eta azaldu zergatik.

ii) Ebatzi problema Kuhn-Tucker-en teoremak erabiliz:

$$\max/\min x^2$$
$$\begin{cases} y^2 - x \le 0 \\ x \le 3 \end{cases}$$



i) $g^1(x,y)=y^2-x$ eta $g^2(x,y)=x-3$ izanik,

EB1: f, g^1, g^2 $\mathbb{R}^2$ ireki eta ganbilean diferentziagarriak.

EB2: g^1, g^2 $\mathbb{R}^2$-n ganbilak. g^2 lineal afina da, beraz ganbila eta $g^1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$ denez hessiarraren metodoa aplikatuko dugu: $H_{g^1}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, erdidefinitu positiboa, hau da, g^1 ere ganbila da.

EB3: $\text{int}(X) \neq \emptyset$ adibidez, (1,0): $g^1(1,0)=-1<0$ eta $g^2(1,0)=-2<0$.

EB4: f ahurra da.

Orduan, EB1, EB2 eta EB3 betetzen direnez, KT baldintzak beharrezkoak dira, hau da, puntu batek ez baditu betetzen KT ez da ezer izango eta betetzen baditu, izan daiteke; beraz, $\boldsymbol{x}$ minimorako hautagai bakarra da eta $\boldsymbol{y}$ maximorako hautagai bakarra. Bestalde f jarraia ($f \in C^1(\mathbb{R}^2)$) X trinkoan (irudia) denez, maximoa eta minimoa existituko dira, eta ondorioz, $\boldsymbol{x}$ f-ren X-rekiko minimoa da eta $\boldsymbol{y}$ f-ren X-rekiko maximoa.

ii) EB1: f,g^1,g^2 $\mathbb{R}^2$ ireki eta ganbilean diferentziagarriak.

EB2: g^1,g^2 $\mathbb{R}^2$-n ganbilak. g^2 lineal afina da, beraz ganbila eta $g^1\in C^2(\mathbb{R}^2)$ denez matrize hessiarraren metodoa aplikatuko dugu: $H_{g^1}(x,y)=\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}$, erdidefinitu positiboa, hau da, g^1 ganbila da.

EB3: int(X)$\neq\emptyset$ adibidez, (1,0): $g^1(1,0)=-1<0$ eta $g^2(1,0)=-2<0$.

EB4: $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$: $H_f(x,y)=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$, erdidefinitu positiboa, beraz, f ganbila da.

Eta Kuhn-Tucker-en baldintzak:

KT1: $\nabla f(x,y)+\lambda_1\nabla g^1(x,y)+\lambda_2\nabla g^2(x,y)=(0,0)$.

$(2x,0)+\lambda_1(-1,2y)+\lambda_2(1,0)=(0,0)$.

KT2: $\lambda_1 g^1(x,y)=0$; $\lambda_2 g^2(x,y)=0$.

KT3: $g^1(x,y)\leq 0$; $g^2(x,y)\leq 0$.

KT4: $\lambda_1,\lambda_2\geq 0$ (min); $\lambda_1,\lambda_2\leq 0$ (max).

KT2tik hasiko gara, lau kasuak aztertzen:

a) $\lambda_1=\lambda_2=0$.

KT1en: $\nabla f(x,y)=(2x,0)=(0,0)\Rightarrow(0,0)\in X$.

b) $\lambda_1=g^2(x,y)=0$.

KT1en: $(2x,0)+\lambda_2(1,0)=(0,0)$, $x-3=0$ ekuazioarekin batera, $(3,y)\in X$, $\lambda_2=-6$ izanik.

c) $\lambda_2=g^1(x,y)=0$.

KT1en: $(2x,0)+\lambda_1(-1,2y)=(0,0)$, $y^2-x=0$ ekuraziarekin batera, (0,0) berriro irteten da.

d) $g^1(x,y)=g^2(x,y)=0$.

Hemendik $(3,\sqrt{3})$ eta $(3,-\sqrt{3})$ puntuak sortzen dira eta hauek ere lehen irten dira.

Beraz, (0,0) [$\lambda_1=\lambda_2=0$] puntuan maximoko eta minimoko Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen dira eta $(3,y)$, non $y\in\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$ den, puntuetan maximoko KT baldintzak.

Orduan, f jarraia X trinkoan denez maximoa eta minimoa existitzen dira. Bestalde, EB1, EB2, EB3 eta EB4[f ganbila] betetzen dira, orduan, (0,0) puntuak minimoko KT baldintzak betetzen dituenez minimoa da. EB1, EB2, EB3 betetzen dira, eta ondorioz, KT beharrezkoa da eta maximoko KT baldintzak betetzen dituzten puntu bakarrak $(3,y)$ direnez, $f(3,y)=9$ izanik, hauek guztiak maximoak dira.

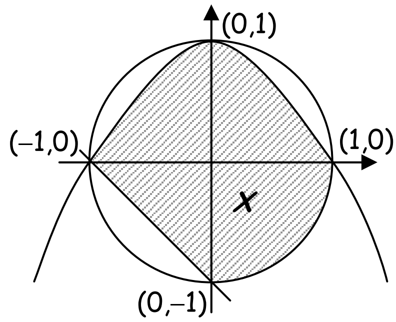
2000ko iraila. Demagun

$$\max/\min f(x,y)$$
$$\begin{cases} x^2+y^2\le 1 \\ x^2+y-1\le 0 \\ x+y\ge -1 \end{cases}$$

f $\mathbb{R}^2$ osoan diferentziagarria eta ahurra eta X problemaren soluzio egingarrien multzoa izanik.

a) Azaldu baieztapen hauek zuzenak ala okerrak diren eta zergatik:
   i) $\mathbf{z}\in X$ eta $\nabla f(\mathbf{z})=\mathbf{0}$ bada, orduan f-k X-rekiko maximoa $\mathbf{z}$ puntuan lortzen du.
   ii) $\mathbf{z}\in X$ eta $\nabla f(\mathbf{z})\neq\mathbf{0}$ bada, ziur $\mathbf{z}$ ez dela f-ren X-rekiko soluzio hoberena.
   iii) f-ren X-rekiko minimoa erpina ez den mugako puntu batean lor daiteke.

b) Demagun $f(x,y)=2x+2y-(x+y)^2$.
   i) (1,0) eta (0,1) puntuek Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen al dituzte? Soluzio hoberenak al dira? Bakarrak al dira?
   ii) (0,–1) puntuak Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen al ditu? Zer esan daiteke puntu honi buruz?



a.i) Zuzena da. f ahurra denean, $\nabla f(\mathbf{z})=\mathbf{0}$ bada $\mathbf{z}\in X$ puntuan maximoa lortzen da.

a.ii) Ez da zuzena. $\mathbf{z}$ muga puntua izanik, edozein gauza izan daiteke.

a.iii) Zuzena da. f ahurra denean, minimoa gutxienez erpin batean egongo da, ez nahitaez.

b.i) Problema horrela geratzen da:

$$\max/\min\ 2x+2y-(x+y)^2$$
$$\begin{cases} x^2+y^2-1\le 0 \\ x^2+y-1\le 0 \\ x-y-1\le 0 \end{cases}$$

$g^1(x,y)=x^2+y^2-1$, $g^2(x,y)=x^2+y-1$, $g^3(x,y)=-x-y-1$ izanik.

Kuhn-Tucker-en baldintzak:

KT1: $\nabla f(x,y)+\lambda_1\nabla g^1(x,y)+\lambda_2\nabla g^2(x,y)+\lambda_3\nabla g^3(x,y)=(0,0)$.
$(2-2x-2y,2-2x-2y)+\lambda_1(2x,2y)+\lambda_2(2x,1)+\lambda_3(-1,-1)=(0,0)$.

KT2: $\lambda_1 g^1(x,y)=0$, $\lambda_2 g^2(x,y)=0$, $\lambda_3 g^3(x,y)=0$.

KT3: $g^1(x,y)\le 0$, $g^2(x,y)\le 0$, $g^3(x,y)\le 0$.

KT4: $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_3 \geq 0$ (minimorako).
$\lambda_1 \leq 0$, $\lambda_2 \leq 0$, $\lambda_3 \leq 0$ (maximorako).

(1,0) puntua:
KT1: $(0,0)+\lambda_1(2,0)+\lambda_2(2,1)+\lambda_3(-1,-1)=(0,0)$.
$$\left.\begin{aligned} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0.$$
KT2: $\lambda_1 g^1(1,0)=\lambda_1 0=0$, $\lambda_2 g^2(1,0)=\lambda_2 0=0$, $\lambda_3 g^3(1,0)=\lambda_3(-2)=0 \Rightarrow \lambda_3=0$.
KT3: $g^1(1,0)=0$, $g^2(1,0)=0$, $g^3(1,0)=-2<0$.
KT4: $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=0$ (min eta max).

(0,1) puntua:
KT1: $(0,0)+\lambda_1(0,2)+\lambda_2(0,1)+\lambda_3(-1,-1)=(0,0)$.
$$\left.\begin{aligned} -\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \; 2\lambda_1=-\lambda_2=0$$ (hala da, bestela zeinu ezberdinetakoak izango lirateke).
KT2: $\lambda_1 g^1(0,1)=\lambda_1 0=0$, $\lambda_2 g^2(0,1)=\lambda_2 0=0$, $\lambda_3 g^3(0,1)=\lambda_3(-2)=0 \Rightarrow \lambda_3=0$.
KT3: $g^1(0,1)=0$, $g^2(0,1)=0$, $g^3(0,1)=-2<0$.
KT4: $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=0$ (min eta max).

Soluzio hoberenak diren jakiteko, erregulartasun baldintzak aztertuko ditugu:
EB1: f, g^1, g^2, g^3 $\mathbb{R}^2$-n diferentziagarriak dira.
EB2: g^1, g^2, g^3 ganbilak; g^3 lineala delako eta
$g^1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$: $H_{g^1}(x,y)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, hots, g^1 $\mathbb{R}^2$ osoan ganbila da.
$g^2 \in C^2(\mathbb{R}^2)$: $H_{g^2}(x,y)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, hots, g^2 $\mathbb{R}^2$ osoan ganbila da.
EB3: $\mathrm{int}(X)\neq\emptyset$ (irudian ikusten da).
EB4: $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$: $H_f(x,y)=\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ erdidefinitu negatiboa da, hots, f $\mathbb{R}^2$ osoan ahurra da.
Beraz, EB1, EB2 eta EB4 [f ahurra] betetzen direnez, maximoko KT baldintzak betetzen dituzten puntuak maximoak izango dira, hots, (1,0) eta (0,1). Bakarrak al dira? Ez, bi puntu hauek lotzen dituen segmentu osoan ere maximoa lortuko da.

b.ii) (0,–1) puntua:
KT1: $(4,4)+\lambda_1(0,-2)+\lambda_2(0,1)+\lambda_3(-1,-1)=(0,0)$.
$$\left.\begin{aligned} 4 - \lambda_3 &= 0 \\ 4 - 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda_3=4,\ \lambda_1=0.$$
KT2: $\lambda_1 g^1(0,-1)=\lambda_1 0=0$, $\lambda_2 g^2(0,-1)=\lambda_2(-2)=0 \Rightarrow \lambda_2=0$, $\lambda_3 g^3(0,-1)=\lambda_3 0=0$.
KT3: $g^1(0,-1)=0$, $g^2(0,-1)=-2<0$, $g^3(0,-1)=0$.
KT4: $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=4$ (min).
EB1, EB2 eta EB3 betetzen direnez, minimoko KT baldintzak beharrezkoak dira, beraz, (0,–1) izan daiteke minimoa baina ezin dugu KT teoremekin ezer ondorioztatu.

2001eko ekaina. Demagun programazio ez linealeko problema:

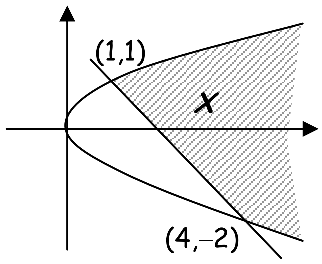
$$\max\,(-x+4y)$$

$$\begin{cases} x \geq y^2 \\ x+y \geq 2 \end{cases}$$

i) Kalkulatu puntu guztiak non Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen diren.

ii) Kuhn-Tucker-en teoremak erabiliz, zer esan dezakezu i) apartatuan lortu dituzun puntuei buruz?

iii) Orain. problemaren minimoa aurkitu nahi dugu. Kuhn-Tucker-en teoremak erabiliz, non lortuko da? zergatik?



i) Murrizketak ≤ 0 moduan idatziko ditugu:

$$\max\, -x+4y$$

$$\begin{cases} y^2 - x \leq 0 \\ 2-x-y \leq 0 \end{cases}$$

Eta gradienteak hauek dira: $\nabla f(x,y)=(-1,4)$; $\nabla g^1(x,y)=(-1,2y)$; $\nabla g^2(x,y)=(-1,-1)$.

Kuhn-Tucker-en baldintzak:

KT1: $\nabla f(x,y)+\lambda_1\nabla g^1(x,y)+\lambda_2\nabla g^2(x,y)=(0,0)$.

KT2: $\lambda_1 g^1(x,y)=0$; $\lambda_2 g^2(x,y)=0$.

KT3: $g^1(x,y)\leq 0$; $g^2(x,y)\leq 0$.

KT4: $\lambda_1,\lambda_2\geq 0$ (minimorako).

$\lambda_1,\lambda_2\leq 0$ (maximorako).

KT2tik hasiko gara, lau kasuak aztertzen:

a) $\lambda_1=\lambda_2=0$.

KT1en: $\nabla f(x,y)=(0,0)=(-1,4)$ eta hau ezinezkoa da.

b) $\lambda_1=g^2(x,y)=0$.

KT1en: $\nabla f(x,y)+\lambda_2\nabla g^2(x,y)=(0,0)$.

$(-1,4)+\lambda_2(-1,-1)=(0,0)$.

$$\left.\begin{aligned} -1-\lambda_2 &= 0 \\ 4-\lambda_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ eta hau ezinezkoa da.}$$

c) $\lambda_2=g^1(x,y)=0$.

KT1en: $\nabla f(x,y)+\lambda_1\nabla g^1(x,y)=(0,0)$.

$(-1,4)+\lambda_1(-1,2y)=(0,0)$.

$$\left.\begin{array}{r} -1-\lambda_1 = 0 \\ 4+2\lambda_1 y = 0 \end{array}\right\} \lambda_1=-1 \text{ eta } y=2.$$

$g^1(x,y)=0=y^2-x;\ x=4.$

Eta (4,2) puntuak KT3 eta KT4 (max) ere betetzen ditu.

d) $g^1(x,y)=g^2(x,y)=0$.

Hemendik (1,1) eta (4,–2) puntuak sortzen dira:

(1,1) puntua: KT1en $\nabla f(1,1)+\lambda_1\nabla g^1(1,1)+\lambda_2\nabla g^2(1,1)=(0,0)$.

$(-1,4)+\lambda_1(-1,2)+\lambda_2(-1,-1)=(0,0)$.

$$\left.\begin{array}{r} -1-\lambda_1-\lambda_2 = 0 \\ 4+2\lambda_1-\lambda_2 = 0 \end{array}\right\} \lambda_1=-5/3,\ \lambda_2=2/3 \text{ (ez ditu betetzen Kuhn-Tucker-en baldintzak).}$$

(4,–2) puntua: KT1en $\nabla f(4,-2)+\lambda_1\nabla g^1(4,-2)+\lambda_2\nabla g^2(4,-2)=(0,0)$.

$(-1,4)+\lambda_1(-1,-4)+\lambda_2(-1,-1)=(0,0)$.

$$\left.\begin{array}{r} -1-\lambda_1-\lambda_2 = 0 \\ 4-4\lambda_1-\lambda_2 = 0 \end{array}\right\} \lambda_1=5/3,\ \lambda_2=-8/3 \text{ (ez ditu betetzen Kuhn-Tucker-en baldintzak).}$$

Beraz, puntu bakarra non Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen diren (4,2) $\lambda_1=-1$ eta $\lambda_2=0$ da.

ii) eta iii) Orain erregulartasun baldintzak aztertuko ditugu:

EB1: f, g^1, g^2 $\mathbb{R}^2$ ireki eta ganbilean diferentziagarriak. Hiruak polinomikoak dira.

EB2: g^1, g^2 $\mathbb{R}^2$-n ganbilak. g^2 lineal afina da, beraz ganbila da eta $g^1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$ denez, $H_{g^1}(x,y)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ erdidefinitu positiboa da, hau da, g^1 ganbila da.

EB3: $\text{int}(X)\neq\emptyset$ adibidez, (3,0): $g^1(3,0)=-3<0$ eta $g^2(3,0)=-1<0$.

EB4: f lineala da beraz, ganbila eta ahurra da.

Orduan, EB1, EB2 eta EB3 betetzen direnez, Kuhn-Tucker-en baldintzak (bai maximokoak bai minimokoak) beharrezkoak dira soluzio hoberena izateko (puntu batek KT baldintzak betetzen baditu izan daiteke soluzio hoberena eta ez baditu betetzen ez da izango ezer).

EB1, EB2 eta EB4 (ganbila eta ahurra) betetzen direnez, maximoko Kuhn-Tucker-en baldintzak nahikoak dira puntuan maximoa lortzeko eta minimoko Kuhn-Tucker-en baldintzak nahikoak dira puntuan minimoa lortzeko (puntu batek KT baldintzak betetzen baditu izango da soluzio hoberena eta ez baditu betetzen ez dakigu zer gertatzen den).

Beraz, (4,2) puntuan maximoa lortzen da eta minimoa ez da existitzen (bestela, KT baldintzak bete beharko lituzke, beharrezkoak direlako).

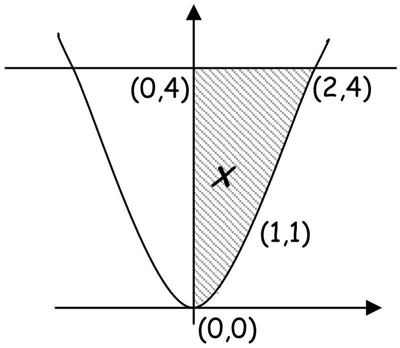
2001eko iraila. Demagun $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x\geq 0,\ 4\geq y\geq x^2\}$ multzoa eta $f(x,y)=ax^2+bxy+y^2$ funtzioa. Badakigu (1,1) puntuak maximoko Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen dituela eta $D_{(1,-1)}f(1,1)=3\sqrt{2}$ dela.

i) Zein balioak hartuko dituzte a eta b parametroek eta $f_1(1,1)$ eta $f_2(1,1)$ deribatu partzialek?

Har dezagun hemendik aurrera a=4 eta b=–4 direla.

ii) Funtzio ganbilen eta ahurren mutur propietateak erabiliz, aurkitu $\min\limits_{x\in X} f(x,y)$ eta adierazi puntuak non minimoa lortzen den.

iii) Baldin badakigu problemaren maximoa erpin batean dagoela eta Kuhn-Tucker-en teoremak erabiliz, aurkitu puntuak non $\max\limits_{x\in X} f(x,y)$ lortzen den.



i) Problema era estandarrean idatziko dugu:

$$\max/\min\ (ax^2+bxy+y^2)$$

$$\begin{cases} -x\leq 0 \\ y-4\leq 0 \\ x^2-y\leq 0 \end{cases}$$

$g^1(x,y)=-x;\ g^2(x,y)=y-4;\ g^3(x,y)=x^2-y$ izanik.

Eta Kuhn-Tucker-en baldintzak:

KT1: $\nabla f(x,y)+\lambda_1\nabla g^1(x,y)+\lambda_2\nabla g^2(x,y)+\lambda_3\nabla g^3(x,y)=(0,0)$.

$(2ax+by,2y+bx)+\lambda_1(-1,0)+\lambda_2(0,1)+\lambda_3(2x,-1)=(0,0)$.

KT2: $\lambda_1 g^1(x,y)=0,\ \lambda_2 g^2(x,y)=0,\ \lambda_3 g^3(x,y)=0$.

KT3: $g^1(x,y)\leq 0,\ g^2(x,y)\leq 0,\ g^3(x,y)\leq 0$.

KT4: $\lambda_1\geq 0,\ \lambda_2\geq 0,\ \lambda_3\geq 0$ (minimorako).

$\lambda_1\leq 0,\ \lambda_2\leq 0,\ \lambda_3\leq 0$ (maximorako).

Gure kasuan, (1,1) puntuak Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen ditu, beraz

KT2tik $\lambda_1 g^1(1,1)=0,\ \lambda_2 g^2(1,1)=0,\ \lambda_3 g^3(1,1)=0;\ g^1(1,1)=-1<0\Rightarrow \lambda_1=0;\ g^2(1,1)=-3<0\ \Rightarrow \lambda_2=0;$ $g^3(1,1)=0$ (Honela KT3 ere betetzen dela frogatzen dugu).

KT1etik $(2a+b,2+b)+\lambda_3(2,-1)=(0,0)$.

$2a+b+2\lambda_3=0$.

$2+b-\lambda_3=0$.

Eta badakigu ere $D_{(1,-1)}f(1,1)=3\sqrt{2}$ dela, hots,

$D_{(1,-1)}f(1,1)=\dfrac{f_1(1,1)-f_2(1,1)}{\sqrt{2}}=\dfrac{2a+b-2-b}{\sqrt{2}}=\dfrac{2a-2}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$; beraz $2a-2=6$, $a=4$.

Eta aurreko ekuazioetan ordezkatuz, $b=-4$ eta $\lambda_3=-2$ ($\lambda_3<0$, maximoko KT baldintzak betetzen dituelako). Orduan, $f_1(1,1)=4$ eta $f_2(1,1)=-2$.

ii) $f(x,y)=4x^2-4xy+y^2$ izanik, X multzoa trinkoa eta ganbila da eta $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$, orduan matrize hessiarraren metodoa aplikatuko dugu jakiteko ganbila edo ahurra den:

$H_f(x,y)=\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$; lehen ordenako azpideterminante nagusiak 8 eta 2 positiboak dira eta matrizearen determinantea 0 da, hau da matrize erdidefinitu positiboa da, beraz f $\mathbb{R}^2$ osoan ganbila da. f-ren gradientea (0,0) egiten bada $\nabla f(x,y)=(8x-4y,-4x+2y)=(0,0)$ X-ko punturen batean, hor izango dugu minimoa; orduan, $\{(x,y)\in X/\ 2x-y=0\}=\overline{(0,0)(2,4)}$ puntuetan f-ren X-rekiko minimo globala lortzen da.

iii) Erpin batean baldin badago, (0,4) puntuan edo parabolan dauden punturen batean egongo da [(0,0) eta (2,4) puntuetan minimoa dugu!] Kuhn-Tucker-en baldintzak aplikatuko ditugu parabolan (hirugarren murrizketan) dauden puntuetatik hautagaia(k) lortzeko (hau da, baldintza beharrezkoa, erregulartasun baldintzak betetzen diren bitartean: EB1: f, g^1, g^2, g^3 diferentziagarriak dira, EB2: g^1, g^2, g^3 ganbilak dira eta EB3: $\text{int}(X)\neq\emptyset$) Horretarako KT2tik $\lambda_1=\lambda_2=g^3(x,y)=0$ kasua aztertuko dugu:
KT1en: $(8x-4y,-4x+2y)+\lambda_3(2x,-1)=(0,0)$, $x^2-y=0$ ekuazioarekin batera puntu bakar bat sortzen da: (1,1) eta $\lambda_3=-2$ (lehen lortu duguna). Beraz, erpin guztien artean (problemak esaten du maximoa erpin batean dagoela!) maximoa edo (1,1)-en edo (0,4)-n egon daiteke; funtzioan ordezkatzen ditugu bi puntu hauek $f(1,1)=1$ eta $f(0,4)=16$ lortuz, orduan (0,4) puntuan f-ren X-rekiko maximo globala lortzen da.

2002ko ekaina. Demagun

$$f(x,y)=x^2+y^2-2xy+4x-4y \text{ eta } X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\,y\geq x^2,\ \ y\leq x+2\}.$$

i) Funtzio ganbil eta ahurren mutur propietateak erabiliz, aurkitu $\min\limits_{x\in X} f(\boldsymbol{x})$, lortzen den puntu guztiak adieraziz.

ii) Frogatu $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ puntuak f-ren X-rekiko maximoko problemarako Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen dituela.

iii) Baiezta dezakegu $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ puntua f-ren X-rekiko soluzio hoberena dela?

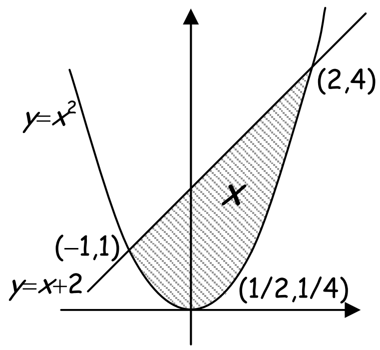
i) Azter dezagun f-ren ganbiltasuna edo ahurtasuna: $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$ denez

$f_1(x,y)=2x-2y+4$.
$f_2(x,y)=2y-2x-4$.
$f_{11}(x,y)=2$.
$f_{12}(x,y)=-2$.
$f_{22}(x,y)=2$.

Eta $H_f(x,y)=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ denez, matrizea erdidefinitu positiboa da, hots, f ganbila da.

Orduan, gradientea zero egiten bada punturen batean, f-ren minimoa izango dugu:

$\nabla f(x,y)=(2x-2y+4,\ 2y-2x-4) \Rightarrow y-x=2$ denean zero egiten da beraz:
$m=\{(x,y)\in X/\ y-x=2\}=\overline{(-1,1)(2,4)}$ multzo osoan minimoa dugu.



ii) Problema era estandarrean idatziko dugu:

$$\max/\min\ x^2+y^2-2xy+4x-4y$$
$$\begin{cases} x^2-y\le 0 \\ y-x-2\le 0 \end{cases}$$

eta Kuhn-Tucker-en baldintzak:
KT1: $(2x-2y+4,\ 2y-2x-4)+\lambda_1(2x,-1)+\lambda_2(-1,1)=(0,0)$.
KT2: $\lambda_1(x^2-y)=0$; $\lambda_2(y-x-2)=0$.
KT3: $x^2-y\le 0$; $y-x-2\le 0$.
KT4: $\lambda_1,\lambda_2\le 0$ (max).

$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ ordezkatuko dugu baldintzetan:

KT1: $\left(\frac{9}{2},-\frac{9}{2}\right)+\lambda_1(1,-1)+\lambda_2(-1,1)=(0,0) \Rightarrow \lambda_1=-\frac{9}{2}$; $\lambda_2=0$.

KT2: $\lambda_1(x^2-y)=-\frac{9}{2}\cdot 0=0$; $\lambda_2(y-x-2)=0$.

KT3: $x^2-y\le 0$; $y-x-2\le 0$; $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)\in X$.

KT4: $\lambda_1=-\frac{9}{2}$; $\lambda_2=0$ (maximoko KT).

iii) Erregulartasun baldintzak aztertuko ditugu:
EB1: f, g^1, g^2 $\mathbb{R}^2$-n diferentziagarriak dira polinomikoak direlako.

EB2: g^1 eta g^2 $\mathbb{R}^2$-n ganbilak; g^2 lineal afina delako eta $g^1\in C^2(\mathbb{R}^2)$: $H_{g^1}(x,y)=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$,

erdidefinitu positiboa, hau da, g^1 ere ganbila da.
EB3: $\mathrm{int}(X)\neq\varnothing$ (irudian ikusten den moduan).
EB4: f ganbila da (lehen atera dugu).

Beraz, EB1, EB2 eta EB3 betetzen direnez lortutako puntua maximorako hautagaia da baina funtzioa ez da ahurra, hots, ez dira betetzen Kuhn-Tucker-en baldintzak nahikoak egiten dituzten erregulartasun baldintzak, eta ondorioz, Kuhn-Tucker-en teoremekin ezin dugu ezer ziurtatu.
Baina f jarraia eta ganbila X trinkoan denez ziur maximoa lortzen dela; aurki dezagun maximoko KT baldintzak betetzen dituzten puntu guztiak:

KT2tik:
a) $\lambda_1=\lambda_2=0$; Lehen atera ditugun puntuak dira, $\overline{(-1,1)(2,4)}$ minimoak hain zuzen.

b) $\lambda_1=g^2=0$.

$$\begin{cases} 2x-2y+4-\lambda_2=0 \\ 2y-2x-4+\lambda_2=0 \\ y-x-2=0 \end{cases} \Rightarrow \overline{(-1,1)(2,4)} \text{ berriro irteten dira.}$$

c) $\lambda_2=g^1=0$

$$\begin{cases} 2x-2y+4+2\lambda_1 x=0 \\ 2y-2x-4-\lambda_1=0 \\ x^2-y=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \text{Lehen atera duguna sortzen da: } \left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right),\ \lambda_1=-\frac{9}{2}.$$

d) $g^1=g^2=0$
Hauek dira $(-1,1)$ eta $(2,4)$ eta minimoak dira.

Beraz, KT baldintzak betetzen dituzte puntu guztiak lortu ditugu, eta horien artean maximoa egongo da (KT beharrezkoak dira maximorako) orduan, $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ puntua maximoa da (besterik ez dagoelako).

2002ko iraila. Demagun $f(x,y)=y+ax^2$ eta $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x^2\le y+2;\ y\le 2-x^2\}$.

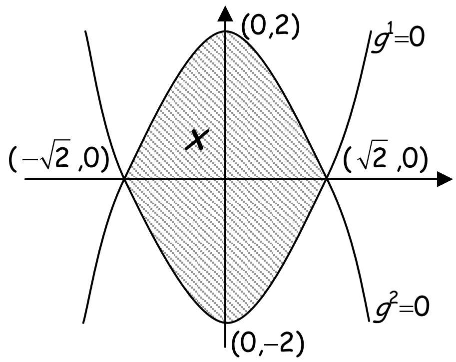
i) Kuhn-Tucker-en teoremak erabiliz aurkitu a-ren balioak zeinentzat ziurta dezakegun $(0,-2)$ puntua f-ren X-rekiko minimoa dela.
ii) Kuhn-Tucker-en teoremak erabiliz aurkitu a-ren balioak zeinentzat ziurta dezakegun $(0,-2)$ puntua ez dela f-ren X-rekiko maximoa.
iii) Ebatzi programazio ez linealeko problema:

$$\max\ (y+2x^2)$$
$$x^2\le y+2$$
$$y\le 2-x^2$$

i) Problema era estandarrean idatziko dugu (X soluzio egingarrien multzoa izanik):

$$\max/\min\ y+ax^2$$
$$\begin{cases} x^2-y-2\le 0 \\ x^2+y-2\le 0 \end{cases}$$

$f(x,y) = y + ax^2;\ g^1(x,y) = x^2 - y - 2;\ g^2(x,y) = x^2 + y - 2$ izanik.



Ikus dezagun (0,–2) puntuak Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen dituen:

KT1: $(2ax,1)+\lambda_1(2x,-1)+\lambda_2(2x,1)=(0,0)$.

(0,–2) punturako: $(0,1)+\lambda_1(0,-1)+\lambda_2(0,1)=(0,0) \Rightarrow 1-\lambda_1+\lambda_2=0$.

KT2: $\lambda_1(x^2-y-2)=0;\ \lambda_2(x^2+y-2)=0$.

(0,–2) punturako: $\lambda_2=0$.

KT3: $g^1(0,-2)=0;\ g^2(0,-2)=-4<0$.

KT4: $\lambda_1=1,\ \lambda_2=0$ (minimoko KT).

Beraz, (0,–2) puntuak minimoko KT baldintzak betetzen ditu. Minimoa dela ziurtatzeko erregulartasun baldintzak aztertuko ditugu:

EB1: f, g^1, g^2 $\mathbb{R}^2$-n diferentziagarriak dira polinomikoak direlako.

EB2: g^1 eta g^2 $\mathbb{R}^2$-n ganbilak; $g^1, g^2 \in C^2(\mathbb{R}^2)$: $H_{g^1}(x,y) = H_{g^2}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, hau da, g^1 eta g^2 ganbilak dira.

EB3: int$(X)\neq\emptyset$ (irudian ikusten den moduan).

EB4: $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$, beraz ganbiltasuna edo ahurtasuna aztertzeko matrize hessiarraren metodoa erabiliko dugu; $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ denez, $a\geq 0$ denean matrizea erdidefinitu positiboa da, hots, f ganbila izango da, eta $a\leq 0$ denean matrizea erdidefinitu negatiboa da, hots, f ahurra izango da.

Beraz, $a\geq 0$ denean minimoko KT baldintzak nahikoak dira eta ziurta dezakegu (0,–2) puntuan minimoa lortzen dela.

ii) Edozein a baliotarako (0,–2) puntuak minimoko KT baldintzak betetzen ditu eta EB1, EB2 eta EB3 betetzen direnez, KT baldintzak beharrezkoak dira, beraz (0,–2) zerbait izatekotan minimoa izango litzateke, inoiz ez maximoa.

iii)

$$\max y + 2x^2$$
$$\begin{cases} x^2 - y - 2 \le 0 \\ x^2 + y - 2 \le 0 \end{cases}$$

KT1: $(4x,1)+\lambda_1(2x,-1)+\lambda_2(2x,1)=(0,0)$.
KT2: $\lambda_1(x^2-y-2)=0$; $\lambda_2(x^2+y-2)=0$.
KT3: $x^2-y-2\le 0$; $x^2+y-2\le 0$.
KT4: $\lambda_1\le 0$, $\lambda_2\le 0$ (maximorako).

KT2tik lau aukera ditugu:

a) $\lambda_1=\lambda_2=0$.
KT1en: $(4x,1)=(0,0)$ eta hau ezinezkoa da.

b) $\lambda_1=g^2=0$.
KT1en: $\begin{cases} x(4+2\lambda_2)=0 \\ 1-\lambda_2=0 \end{cases} \Rightarrow (0,2),\ \lambda_2=-1$.
KT3 eta KT4(max) ere betetzen dira.

c) $\lambda_2=g^1=0$
KT1en: $\begin{cases} x(4+2\lambda_1)=0 \\ 1-\lambda_1=0 \end{cases} \Rightarrow (0,-2),\ \lambda_1=1$.
KT3 eta KT4(min) ere betetzen dira.

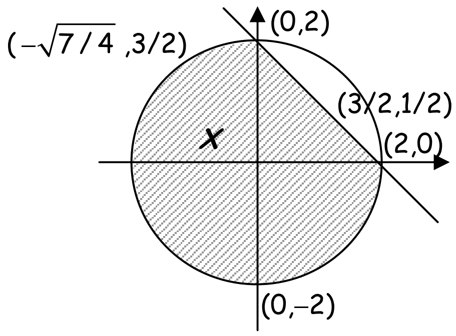
d) $g^1=g^2=0$. Hemendik bi puntu sortzen dira: $(\sqrt{2},0)$ eta $(-\sqrt{2},0)$.
$(\sqrt{2},0)$-rako KT1: $\begin{cases} 4\sqrt{2}+2\sqrt{2}\lambda_1+2\sqrt{2}\lambda_2=0 \\ 1-\lambda_1+\lambda_2=0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1=-1/2$ eta $\lambda_2=-3/2$.
eta $(-\sqrt{2},0)$-rako KT1: $\begin{cases} -4\sqrt{2}-2\sqrt{2}\lambda_1-2\sqrt{2}\lambda_2=0 \\ 1-\lambda_1+\lambda_2=0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1=-1/2$ eta $\lambda_2=-3/2$.
Biek maximoko KT baldintzak betetzen dituzte.

Eta lehen atera dugunez, EB1, EB2 eta EB3 betetzen direnez KT baldintzak beharrezkoak dira, orduan f-ren X-rekiko maximoa $(0,2)$, $(\sqrt{2},0)$ edo $(-\sqrt{2},0)$ puntuan egongo da (hala da f jarraia X trinkoan delako) Helburu funtzioan ordezkatu ondoren, maximoa $(\sqrt{2},0)$ eta $(-\sqrt{2},0)$ puntuetan egongo dela ikusten dugu.

2003ko ekaina. Demagun $f(x,y)=x^2+3y$ eta $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ /\ x^2+y^2\le 4;\ x+y\le 2\}$. Planteatu helburu funtzio honentzako eta soluzio egingarrien multzo honentzako programazio ez linealeko problema.
i) Aurkitu Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen dituzten puntu guztiak.
ii) Kuhn-Tucker-en teoremak erabiliz, aurkitu f-ren X-rekiko minimoa.
iii) Aurkitu f-ren X-rekiko maximoa.

Problema era estandarrean idatziko dugu:

$$\max/\min\ x^2 + 3y$$
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 \le 0 \\ x + y - 2 \le 0 \end{cases}$$



Eta gradienteak: $\nabla f(x,y)=(2x,3)$; $\nabla g^1(x,y)=(2x,2y)$; $\nabla g^2(x,y)=(1,1)$.

i) Kuhn-Tucker-en baldintzak:
KT1: $\nabla f(x,y)+\lambda_1\nabla g^1(x,y)+\lambda_2\nabla g^2(x,y)=(0,0)$.
KT2: $\lambda_1 g^1(x,y)=0$; $\lambda_2 g^2(x,y)=0$.
KT3: $g^1(x,y)\le 0$; $g^2(x,y)\le 0$.
KT4: $\lambda_1,\lambda_2\ge 0$ (min); $\lambda_1,\lambda_2\le 0$ (max).

KT2tik hasiko gara, lau kasuak aztertzen:
a) $\lambda_1=\lambda_2=0$.
KT1en: $\nabla f(x,y)=(0,0)=(2x,3)$ eta hau ezinezkoa da.

b) $\lambda_1=g^2(x,y)=0$.
KT1en: $\nabla f(x,y)+\lambda_2\nabla g^2(x,y)=(0,0)$.
$(2x,3)+\lambda_2(1,1)=(0,0)$.

$$\left.\begin{aligned} 2x+\lambda_2 &= 0 \\ 3+\lambda_2 &= 0 \\ x+y-2 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{(3/2,1/2) non } \lambda_2=-3,\ \lambda_1=0 \text{ diren.}$$

KT3 ere betetzen du ($g^1(3/2,1/2)=-3/2<0$).

c) $\lambda_2=g^1(x,y)=0$.
KT1en: $\nabla f(x,y)+\lambda_1\nabla g^1(x,y)=(0,0)$.
$(2x,3)+\lambda_1(2x,2y)=(0,0)$.

$$\left.\begin{aligned} 2x+2x\lambda_1 &= 0 \\ 3+2y\lambda_1 &= 0 \\ x^2+y^2-4 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} (0,2),\ \lambda_1=-3/4,\ \lambda_2=0 \\ (0,-2),\ \lambda_1=3/4,\ \lambda_2=0 \\ (\sqrt{7/4},3/2),\ \lambda_1=-1,\ \lambda_2=0 \\ (-\sqrt{7/4},3/2),\ \lambda_1=-1,\ \lambda_2=0 \end{cases}.$$

Eta puntu hauek guztiek, hirugarrena izan ezik, KT3 betetzen dute, beraz,
(0,2) non $\lambda_1=-3/4$, $\lambda_2=0$ diren.
(0,–2) non $\lambda_1=3/4$, $\lambda_2=0$ diren.
$(-\sqrt{7/4},3/2)$ non $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=0$ diren.

d) $g^1(x,y)=g^2(x,y)=0$.
Hemendik (0,2) eta (2,0) puntuak sortzen dira. (0,2) lehen irten da, beraz, (2,0) bakarrik aztertuko dugu kasu honetan:
KT1en $\nabla f(2,0)+\lambda_1\nabla g^1(2,0)+\lambda_2\nabla g^2(2,0)=(0,0)$.
$(4,3)+\lambda_1(4,0)+\lambda_2(1,1)=(0,0)$.

$$\left.\begin{aligned} 4+4\lambda_1+\lambda_2&=0\\ 3+\lambda_2&=0\end{aligned}\right\}\ \lambda_1=-1/4,\ \lambda_2=-3.$$

Eta azken puntua daukagu: (2,0) non $\lambda_1=-1/4$, $\lambda_2=-3$ diren.

ii) Orain erregulartasun baldintzak aztertuko ditugu:
EB1: f,g^1,g^2 $\mathbb{R}^2$ ireki eta ganbilean diferentziagarriak. Hiruak polinomikoak dira.
EB2: g^1,g^2 $\mathbb{R}^2$-n ganbilak. g^2 lineal afina da, beraz ganbila eta $g^1\in C^2(\mathbb{R}^2)$ da:
$H_{g^1}(x,y)=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$, definitu positiboa, hau da, g^1 (hertsiki) ganbila da.
EB3: int$(X)\neq\varnothing$ (irudian ikusten dugu).
EB4: $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$: $H_f(x,y)=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$, erdidefinitu positiboa, hau da, f ganbila da.

Orduan, EB1, EB2 eta EB3 betetzen direnez, Kuhn-Tucker-en baldintzak (bai maximokoak bai minimokoak) beharrezkoak dira soluzio hoberena izateko (puntu batek KT baldintzak betetzen baditu izan daiteke soluzio hoberena eta ez baditu betetzen ez da izango ezer).
EB1, EB2 eta EB4 (ganbila) betetzen direnez, minimoko Kuhn-Tucker-en baldintzak nahikoak dira puntuan minimoa lortzeko (puntu batek KT baldintzak betetzen baditu izango da soluzio hoberena eta ez baditu betetzen ez dakigu zer gertatzen den).
Beraz, (0,–2) puntuan minimoa lortzen da. (bera da puntu bakarra non minimoko Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen diren).

iii) f jarraia da eta X trinkoa, beraz, f-ren X-rekiko maximoa existitzen da; i) atalean atera ditugu maximoko Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen dituzten puntu guztiak eta ii) atalean baldintza hauek beharrezkoak direla, beraz, maximoa i) atalean lortutakoen artean dago; ordezkatuko ditugu helburu funtzioan eta balio handiena lortzen duena izango da maximoa:
$f(3/2,1/2)=15/4$.
$f(0,2)=6$.
$f(-\sqrt{7/4},3/2)=25/4$.
$f(2,0)=4$.
Beraz, maximoa 25/4 da eta $(-\sqrt{7/4},3/2)$ puntuan lortzen da.

2003ko iraila. Demagun $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \le 4,\ x + y \le 2,\ y \ge 0\}$ multzoa eta $f(x,y) = 4 - (x-y)^2$ funtzioa.

i) Funtzio ganbilen eta ahurren mutur propietateak erabiliz aurkitu puntua(k) non f-k X-rekiko maximoa lortzen duen eta haren balioa.

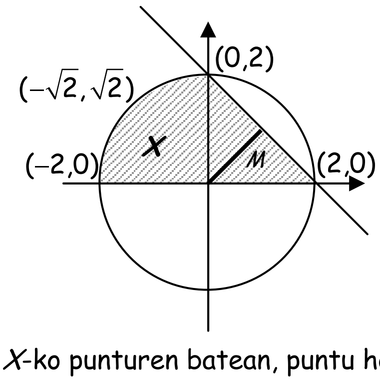
ii) f-ren gradientea $\{(x,y) \in X \,/\, y = 0, -2 \le x \le 2\}$ X-ko mugaren zatian erabiliz, azaldu muga zati honetan f-ren muturrak egon daitezkeen.

iii) Egiaztatu $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ puntuak Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen dituela. Baldin badakigu puntu hau dela, (2,0)-rekin batera, $\{(x,y) \in X \,/\, x^2 + y^2 = 4\}$ X-ko mugaren zatiaren bakarrak non minimoko Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen diren, funtzio ganbilen eta ahurren mutur propietateak eta Kuhn-Tucker-en teoremak erabiliz, aurkitu gutxienez puntu bat non f-k X-rekiko minimoa lortzen duen.

i) $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ (polinomikoa delako) beraz, matrize hessiarraren metodoa aplikatuko dugu:

$f_1(x,y) = -2x + 2y$.
$f_2(x,y) = 2x - 2y$.
$f_{11}(x,y) = -2$.
$f_{12}(x,y) = 2$.
$f_{22}(x,y) = -2$.

Eta $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ matrize erdidefinitu negatiboa denez, f ahurra da $\mathbb{R}^2$ osoan.

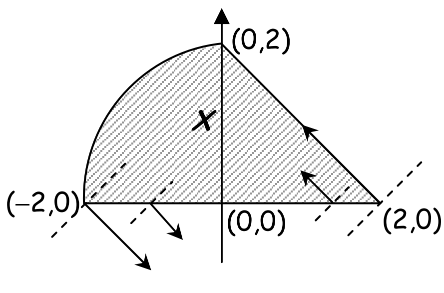


Orduan, $\nabla f(x,y) = (0,0)$ bada X-ko punturen batean, puntu horretan maximoa izango dugu:
$\nabla f(x,y) = (-2x+2y,\ 2x-2y) = (0,0) \Rightarrow x = y$.

$$M = \{(x,y) \in X \,/\, x = y\} = \overline{(0,0)(1,1)}.$$

Eta $\max_{x \in X} f(x) = 4$.

ii)



y=0 denean $\nabla f(x,y)=(-2x,\ 2x)$.
Irudian ikusten dugunez, (0,0) puntuan maximo bat dago (aurreko apartatuan lortu dugu) eta beste puntuetan (2,0) puntuan izan ezik, ez dago ezer, gradientearen perpendikularrak X multzoa zatitzen duelako; ordea, (2,0) puntuan minimo bat egon daiteke (ezin dugu ziurtatu).

iii) Helburu funtzioa eta murrizketa funtzioak: $f(x,y) = 4 - x^2 + 2xy - y^2$, $g^1(x,y) = x^2 + y^2 - 4$, $g^2(x,y) = x + y - 2$, $g^3(x,y) = -y$.
Ikus dezagun $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ puntuak Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen dituen:
$\nabla f(x,y)=(-2x+2y,2x-2y)$; $\nabla g^1(x,y)=(2x,2y)$; $\nabla g^2(x,y)=(1,1)$; $\nabla g^3(x,y)=(0,-1)$.

KT1: $(-2x+2y,2x-2y)+\lambda_1(2x,2y)+\lambda_2(1,1)+\lambda_3(0,-1)=(0,0)$.
$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ punturako: $(4\sqrt{2},-4\sqrt{2})+\lambda_1(-2\sqrt{2},2\sqrt{2})+\lambda_2(1,1)+\lambda_3(0,-1)=(0,0) \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} 4\sqrt{2} - \lambda_1 2\sqrt{2} + \lambda_2 &= 0 \\ -4\sqrt{2} + \lambda_1 2\sqrt{2} + \lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \lambda_1=2.$$

KT2: $g^1(-\sqrt{2},\sqrt{2})=0$; $g^2(-\sqrt{2},\sqrt{2})<0$; $g^3(-\sqrt{2},\sqrt{2})<0 \Rightarrow \lambda_2,\lambda_3=0$.
KT3: $g^1(-\sqrt{2},\sqrt{2})\leq 0$; $g^2(-\sqrt{2},\sqrt{2})\leq 0$; $g^3(-\sqrt{2},\sqrt{2})\leq 0$.
KT4: $\lambda_1=2$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=0$ (minimoko KT).

Beraz, bai, minimoko KT baldintzak betetzen ditu. Ondorioak ateratzeko erregulartasun baldintzak aztertuko ditugu:
EB1: f, g^1, g^2, g^3 $\mathbb{R}^2$-n diferentziagarriak dira polinomikoak direlako.
EB2: g^1, g^2 eta g^3 $\mathbb{R}^2$-n ganbilak; g^2, g^3 linealak dira eta beraz ganbilak eta $g^1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$:
$H_{g^1}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, hau da, g^1 ere ganbila da.
EB3: int(X)$\neq\emptyset$ (irudian ikusten den moduan).
EB4: f ahurra da (lehen atera dugu).

Beraz, KT baldintzak beharrezkoak dira maximorako zein minimorako eta nahikoak dira maximorako.
Bestalde, f X multzo trinkoan jarraia eta ahurra denez, ziur minimoa lortuko duela eta gutxienez erpin batean egongo da; X-ko erpinak (2,0) (egon daiteke minimoa, ii) atalean ikusi dugun bezalaxe), (–2,0) (ez dago ezer, ii) atalean ikusi dugun moduan) (0,2) (ez da ezer, KT baldintzak bertan betetzen ez direlako) eta azken bi puntu hauen arteko arku osoa, baina badakigu zati oso honetan $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ dela puntu bakarra non KT baldintzak betetzen diren, eta baldintza hauek beharrezkoak direnez, $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ puntua da arku osoaren hautagai bakarra; orduan,
$f(-\sqrt{2},\sqrt{2})=-4$.
$f(2,0)=0$.
Eta $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ puntuan, gutxienez, lortzen da –4 balioa, f-ren X-rekiko minimoa.

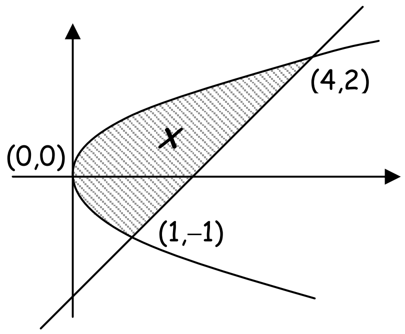
2004ko ekaina. Demagun problema hau:

$$\max/\min f(x,y)$$
$$\begin{cases} y^2 \leq x \\ y \geq x-2 \end{cases}$$

f funtzio lineala izanik.

i) Ba al du soluziorik problemak? Hala bada, esan muturrak barrualdean edo mugan lortzen diren.
ii) $\mathbf{x}$ puntua problemaren soluzioa bada, bete behar ditu Kuhn-Tucker-en baldintzak?
iii) $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ puntuek minimoko Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen badituzte, esan puntu hauetako batean edo bietan problemaren minimoa lortzen den eta zergatik.
iv) (0,0) puntuan problemaren maximoa lortzen bada, KT1 baldintza betearazten duten eskalarrak $\lambda_1=-1$ eta $\lambda_2=0$ izanik, aurkitu puntua(k) non funtzioak minimoa lortzen duen.

$f(x,y)=ax+by$.
$g^1(x,y)=y^2-x$.
$g^2(x,y)=x-y-2$.



i) *f* lineala denez, jarraia da eta *X*, soluzio egingarrien multzoa, trinkoa da, beraz, *f*-ren *X*-rekiko mutur globalak existituko dira. Muturrak barrualdean egoteko, baldintza beharrezkoa da *f*-ren gradientea berdin zero ($\nabla f(x,y)=(a,b)$) izatea (konturatu *f* diferentziagarria dela), baina *f* lineala denez, hau ezinezkoa da ez bada $f(x,y)=0$ funtzioa, hau da, maximo eta minimo globalak mugan egongo dira.

ii) Hau jakiteko, erregulartasun baldintzak aztertu behar ditugu:
EB1: f, g^1, g^2 diferentziagarriak dira $\mathbb{R}^2$ osoan (polinomikoak dira).

EB2: g^1, g^2 ganbilak $\mathbb{R}^2$-n. g^2 lineala denez, ganbila da eta $g^1\in C^2(\mathbb{R}^2)$: $H_{g^1}(x,y)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ eta matrize hessiarra erdidefinitu positiboa denez, g^1 ganbila da.
EB3: $\mathrm{int}(X)\neq\varnothing$, irudian ikusten den bezala.

Hiru erregulartasun baldintza hauek betetzen direnez, Kuhn-Tucker-en baldintzak beharrezkoak dira maximo edo minimoa izateko, hau da, $\mathbf{x}$ puntua problemaren soluzioa bada, Kuhn-Tucker-en baldintzak bete behar ditu.

iii) EB4: *f* lineala denez, ganbila eta ahurra da.
EB1, EB2 eta EB4 (*f* ganbila) betetzen direnez, $\mathbf{x}_1$ eta $\mathbf{x}_2$ puntuek minimoko Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen dituztenez, problemaren minimo globalak izango dira.

iv) KT1: $\nabla f(x,y)+\lambda_1\nabla g^1(x,y)+\lambda_2\nabla g^2(x,y)=(0,0)$.
$(a,b)+\lambda_1(-1,2y)+\lambda_2(1,-1)=(0,0)$.
KT2: $\lambda_1 g^1(x,y)=0$; $\lambda_2 g^2(x,y)=0$.
KT3: $g^1(x,y)\leq 0$; $g^2(x,y)\leq 0$.
KT4: $\lambda_1\leq 0$; $\lambda_2\leq 0$ (maximorako).
Eta (0,0) puntuan, ($\lambda_1=-1$ eta $\lambda_2=0$ izanik),
KT1: $(a,b)-(-1,0)=(0,0)$. Orduan, $a=-1$, $b=0$ eta $f(x,y)=-x$ izango da.

Minimoa aurkitzeko, KT2tik lau kasuak jorratuko ditugu:
a) $\lambda_1=\lambda_2=0$. KT1en, $(-1,0)=(0,0)$ eta hau ezinezkoa da.

b) $\lambda_1=0$; $g^2=0$. KT1en, $(-1,0)+\lambda_2(1,-1)=(0,0)$. Orduan $\lambda_2=0$ eta aurreko kasuan gaude.

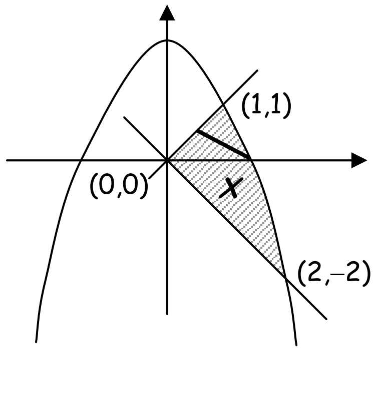
c) $\lambda_2=0$; $g^1=0$. KT1en, $(-1,0)+\lambda_1(-1,2y)=(0,0)$. $\lambda_1=-1$ eta $y=0$. $g^1=0$ ekuazioan ordezkatuz, $x=0$ eta (0,0) dugu, maximoko KT-ren baldintzak betetzen dituelarik.

d) $g^1=g^2=0$. (4,2) eta (1,–1) puntuak dira.
(4,2) punturako:
$(-1,0)+\lambda_1(-1,4)+\lambda_2(1,-1)=(0,0)$. $\lambda_1=1/3$ eta $\lambda_2=4/3$. Minimoko KT-ren baldintzak betetzen ditu.
(1,–1) punturako:
$(-1,0)+\lambda_1(-1,-2)+\lambda_2(1,-1)=(0,0)$. $\lambda_1=-1/3$ eta $\lambda_2=2/3$. Ez ditu betetzen KT-ren baldintzak.

Beraz, EB1, EB2 eta EB4 (f ganbila) betetzen direnez, minimoko KT-ren baldintzak nahikoak dira, hau da, (4,2) puntuan problemaren minimo globala lortzen da.

2004ko iraila. Demagun $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 /\ y\leq 2-x^2;\ y\leq x;\ y\geq -x\}$ eta $f(x,y)=x^2+9y^2+6xy-4x-12y+4$.

i) Funtzio ganbilen eta ahurren mutur propietateak erabiliz, aurkitu f-ren X-rekiko minimoa.
ii) f-ren gradientea erabiliz, zer esan dezakegu (0,0) eta (1,1) puntuez?
iii) Betetzen al ditu (1,1) puntuak Kuhn-Tucker-en baldintzak? Kuhn-Tucker-en teoremak erabiliz, zer esan dezakegu puntu honi buruz?
iv) Betetzen al ditu (1/2,1/2) puntuak Kuhn-Tucker-en baldintzak? Ziurta dezakegu f-ren X-rekiko mutur globala dela?

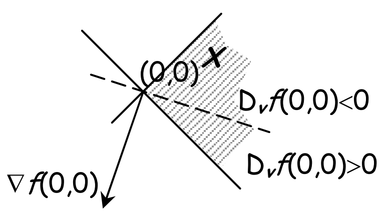


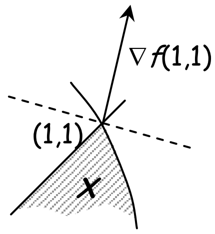
i) $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, beraz, $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 18 \end{pmatrix}$ erdidefinitu positiboa denez, f ganbila da.

Orduan, $\nabla f(x,y)=(0,0)$ bada X-ko punturen batean, f-ren X-rekiko minimo globala izango da: $\nabla f(x,y)=(2x+6y-4,6x+18y-12)=(0,0) \Rightarrow x+3y=2$.

Beraz, $\{(x,y)\in X/\ x+3y=2\}=\overline{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{3},\frac{2}{9}\right)}$ multzoko puntu guztietan f-ren X-rekiko minimo globala dago.

ii) $\nabla f(0,0)=(-4,-12)$.
$\nabla f(1,1)=(4,12)$.





(0,0) puntuan ez dago muturrik, X-ko alboko puntu batzuk deribatu direkzionala positiboa egiten den norabideetan eta beste batzuk negatiboa egiten den norabideetan daudelako.
(1,1) puntuan, ordea, maximoa egon daiteke, baina ezin dugu ziurtatu.

iii) $g^1(x,y)=x^2+y-2$; $g^2(x,y)=y-x$; $g^3(x,y)=-x-y$.

KT1: $\nabla f(x,y)+\lambda_1\nabla g^1(x,y)+\lambda_2\nabla g^2(x,y)+\lambda_3\nabla g^3(x,y)=(0,0)$.

$$\begin{cases} 2x+6y-4+2\lambda_1 x-\lambda_2-\lambda_3=0 \\ 6x+18y-12+\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=0 \end{cases}.$$

KT2: $\lambda_1 g^1(x,y)=0$; $\lambda_2 g^2(x,y)=0$; $\lambda_3 g^3(x,y)=0$.

KT3: $g^1(x,y)\le 0$; $g^2(x,y)\le 0$; $g^3(x,y)\le 0$.

KT4: $\lambda_1\le 0$; $\lambda_2\le 0$; $\lambda_3\le 0$ (maximorako).
$\lambda_1\ge 0$; $\lambda_2\ge 0$; $\lambda_3\ge 0$ (minimorako).

(1,1) puntua:

KT1: $$\begin{cases} 4+2\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3=0 \\ 12+\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=0 \end{cases}.$$

KT2: $g^3(1,1)=-2$, orduan, $\lambda_3=0$.

KT3: $(1,1)\in X$.

KT4: $\lambda_1=-16/3$; $\lambda_2=-20/3$; $\lambda_3=0$.

Beraz, (1,1) puntuak maximoko KT baldintzak betetzen ditu.

Zerbait ziurtatzeko, erregulartasun baldintzak aztertu behar ditugu:

EB1: f, g^1, g^2, g^3 diferentziagarriak dira $\mathbb{R}^2$ osoan (polinomikoak dira).

EB2: g^1, g^2, g^3 ganbilak $\mathbb{R}^2$-n. g^2 eta g^3 linealak direnez, ganbilak dira eta $g^1\in C^2(\mathbb{R}^2)$:

$H_{g^1}(x,y)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ eta matrize hessiarra erdidefinitu positiboa denez, g^1 ganbila da.

EB3: $\mathrm{int}(X)\neq\emptyset$, irudian ikusten den bezala.

Eta hiru erregulartasun baldintza hauek betetzen direnez, Kuhn-Tucker-en baldintzak beharrezkoak dira maximo edo minimoa izateko, hau da, (1,1) izan daiteke maximoa.
EB4: *f* ganbila da.
Maximorako KT ez dira nahikoak, beraz, ezin dugu ezer gehiago ondorioztatu (1,1) puntuaz.

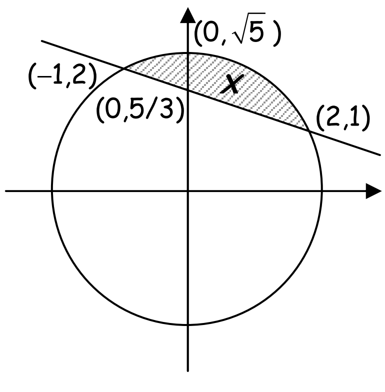
iv) (1/2,1/2) puntua:

KT1: $\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$.

KT2: $\lambda_1=\lambda_3=0$.
KT3: $(1/2,1/2)\in X$.
KT4: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.
Beraz, maximo eta minimorako KT baldintzak betetzen ditu.
EB1, EB2 eta EB4 (*f* ganbila) betetzen direnez, (1/2,1/2) puntuak minimoko Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen dituenez, problemaren minimo globala da.

2005eko ekaina. Demagun $f(x,y) = -\dfrac{x^2}{y+1}$ funtzioa eta $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x^2+y^2 \le 5 \le x+3y\}$ multzoa.

i) Aztertu *f*-ren ganbiltasuna edo ahurtasuna *X* multzoan.
ii) Funtzio ganbilen eta ahurren mutur propietateak erabiliz, aurkitu $\max\limits_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x})$ eta lortzen den puntu guztiak.
iii) Frogatu (2,1) eta (–1,2) puntuek minimoko Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen dituztela.
iv) Baldin badakigu (2,1), (–1,2), $(0,\sqrt{5})$ eta (0,5/3) puntuak *X*-ko mugako puntu bakarrak direla non minimoko Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen diren, aurkitu $\min\limits_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x})$ eta lortzen den puntu guztiak.



i) Har dezagun $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y>-1\}$ ireki eta ganbila non $X\subset U$ den. $f\in C^2(U)$, beraz matrize hessiarraren metodoa erabiliko dugu:

$$f_1(x,y) = -\frac{2x}{y+1};\ \ f_2(x,y) = \frac{x^2}{(y+1)^2} \ \ \text{eta}\ \ H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{y+1} & \dfrac{2x}{(y+1)^2} \\ \dfrac{2x}{(y+1)^2} & -\dfrac{2x^2}{(y+1)^3} \end{pmatrix}.$$

Lehen ordenako azpideterminante nagusiak: $-\dfrac{2}{y+1}$, $-\dfrac{2x^2}{(y+1)^3}$. Biak $\leq$ dira.

Bigarren ordenako azpideterminante nagusia: $|H_f(x,y)|=0$.

Beraz, X multzoan f ahurra da.

ii) f X multzoan ahurra denez, X-ko punturen batean gradientea zero egiten bada, bertan maximoa izango dugu: $\nabla f(x,y) = \left(-\dfrac{2x}{y+1}, \dfrac{x^2}{(y+1)^2}\right)=(0,0) \Rightarrow x=0$.

Orduan, $\{(x,y)\in X/\ x=0\}=\overline{(0,\sqrt{5})(0,5/3)}$ puntu guztietan $\max\limits_{x\in X} f(x)=0$ lortzen da.

iii) Problema era estandarrean idatziko dugu:

$$\max/\min -\frac{x^2}{y+1}$$
$$\begin{cases} x^2+y^2-5\leq 0 \\ 5-x-3y\leq 0 \end{cases}$$

Eta gradienteak: $\nabla f(x,y) = \left(-\dfrac{2x}{y+1}, \dfrac{x^2}{(y+1)^2}\right)$; $\nabla g^1(x,y)=(2x,2y)$; $\nabla g^2(x,y)=(-1,-3)$.

Kuhn-Tucker-en baldintzak:

KT1: $\nabla f(x,y)+\lambda_1\nabla g^1(x,y)+\lambda_2\nabla g^2(x,y)=(0,0)$.

KT2: $\lambda_1 g^1(x,y)=0$; $\lambda_2 g^2(x,y)=0$.

KT3: $g^1(x,y)\leq 0$; $g^2(x,y)\leq 0$.

KT4: $\lambda_1,\lambda_2\geq 0$ (min).

(2,1) puntua:

KT1: $(-2,1)+\lambda_1(4,2)+\lambda_2(-1,-3)=(0,0) \Rightarrow \lambda_1=7/10$ eta $\lambda_2=4/5$.

KT2: $g^1(2,1)=g^2(2,1)=0$.

KT3: $(2,1)\in X$.

KT4: $\lambda_1=7/10$ eta $\lambda_2=4/5$ (minimoko baldintzak).

Beraz, (2,1) puntuak minimoko KT baldintzak betetzen ditu.

(–1,2) puntua:

KT1: $(2/3,1/9)+\lambda_1(-2,4)+\lambda_2(-1,-3)=(0,0) \Rightarrow \lambda_1=17/90$ eta $\lambda_2=13/45$.

KT2: $g^1(-1,2)=g^2(-1,2)=0$.

KT3: $(-1,2)\in X$.

KT4: $\lambda_1=17/90$ eta $\lambda_2=13/45$ (minimoko baldintzak).

Beraz, (–1,2) puntuak minimoko KT baldintzak betetzen ditu.

iv) Erregulartasun baldintzak aztertuko ditugu:

EB1: f, g^1, g^2 $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y > -1\}$ multzoan diferentziagarriak.

EB2: g^1, g^2 U-n ganbilak. g^2 lineal afina da, beraz ganbila da eta $g^1 \in C^2(U)$ denez, matrize hessiarraren metodoa aplikatuko dugu: $H_{g^1}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ definitu positiboa da, hau da, g^1 (hertsiki) ganbila da.

EB3: int(X)$\neq\emptyset$ (irudian ikusten dugu).

f jarraia X trinkoan denez, minimoa existituko da. Bestalde, f ahurra denez minimoa mugan egongo da. Orduan, EB1, EB2 eta EB3 betetzen direnez, minimoko Kuhn-Tucker-en baldintzak beharrezkoak dira soluzio hoberena izateko (puntu batek KT baldintzak betetzen baditu izan daiteke soluzio hoberena eta ez baditu betetzen ez da izango ezer). Beraz, emandako puntuak dira minimoa izateko hautagai bakarrak eta $f(2,1)=-2$, $f(-1,2)=-1/3$, $f(0,\sqrt{5})=f(0,5/3)=0$ (azken bi hauetan maximoa lortzen da!) direnez, minimoa (2,1) puntuan lortzen da eta $\min_{x \in X} f(x) = -2$.

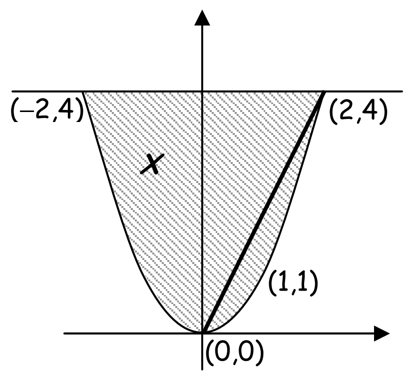
2005eko iraila. Demagun $f(x,y) = 5 - 4x^2 + 4xy - y^2$ eta $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 \le y \le 4\}$.

i) Funtzio ganbilen eta ahurren mutur propietateak erabiliz, aurkitu $\max_{x \in X} f(x)$ eta lortzen den X-ko puntu guztiak.

ii) Aurkitu Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen dituzten puntu guztiak.

iii) Kuhn-Tucker-en baldintzak beharrezkoak al dira f-k X-rekiko minimoa lortzeko puntu batean?; eta nahikoak?

iv) Aurkitu $\min_{x \in X} f(x)$, erantzuna ondo azalduz.



i) $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$: $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ erdidefinitu negatiboa da, hau da, f ahurra da eta ondorioz, $\nabla f(x,y)=(0,0)$ bada X-ko punturen batean, bertan maximoa izango dugu:

$\nabla f(x,y)=(-8x+4y, 4x-2y)=(0,0) \;\Rightarrow\; 2x=y.$

Orduan, $\{(x,y) \in X \,/\, 2x = y\} = \overline{(0,0)(2,4)}$ multzoan $\max_{x \in X} f(x) = 5$ lortuko da.

ii)

$$\max/\min\ 5-4x^2+4xy-y^2$$
$$\begin{cases} g^1(x,y)=x^2-y\le 0 \\ g^2(x,y)=y-4\le 0 \end{cases}$$

KT1: $(-8x+4y,4x-2y)+\lambda_1(2x,-1)+\lambda_2(0,1)=(0,0)$.
$$\left.\begin{aligned} -8x+4y+2\lambda_1 x&=0 \\ 4x-2y-\lambda_1+\lambda_2&=0 \end{aligned}\right\}.$$
KT2: $\lambda_1(x^2-y)=0$, $\lambda_2(y-4)=0$.
KT3: $x^2-y\le 0$, $y-4\le 0$.
KT4: $\lambda_1\le 0$, $\lambda_2\le 0$ (maximorako) edo $\lambda_1\ge 0$, $\lambda_2\ge 0$ (minimorako).

Aurki ditzagun KT baldintzak betetzen dituzten puntu guztiak:
a) $\lambda_1=\lambda_2=0$. Sortzen diren puntuak: $\overline{(0,0)(2,4)}$.

b) $\lambda_1=g^2=0$.
$$\left.\begin{aligned} -8x+4y&=0 \\ 4x-2y+\lambda_2&=0 \\ y-4&=0 \end{aligned}\right\}$$ Sortzen den puntua (2,4) da eta lehen irten den puntua da.

c) $\lambda_2=g^1=0$.
$$\left.\begin{aligned} -8x+4y-2\lambda_1 x&=0 \\ 4x-2y-\lambda_1&=0 \\ x^2-y&=0 \end{aligned}\right\}$$ Sortzen diren puntuak: (0,0) eta (2,4) (lehen irten direnak) eta (1,1)$\in X$, $\lambda_1=2$ izanik.

d) $g^1=g^2=0$. Sortzen diren puntuak (2,4) (lehen irten dena) eta (–2,4) dira:
(–2,4) punturako: $\left.\begin{aligned} 32-4\lambda_1&=0 \\ -16-\lambda_1+\lambda_2&=0 \end{aligned}\right\}$ $\lambda_1=8$ eta $\lambda_2=24$.

Beraz, $\overline{(0,0)(2,4)}$ puntuetan maximoko eta minimoko KT baldintzak betetzen dira eta (1,1) eta (–2,4) puntuetan minimoko KT.

iii) EB1: f, g^1, g^2 $\mathbb{R}^2$-n diferentziagarriak dira.
EB2: g^2 ganbila da lineal afina delako eta $g^1\in C^2(\mathbb{R}^2)$ eta $H_{g^1}(x,y)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ erdidefinitu positiboa da, hau da, g^1 ganbila da.
EB3: int$(X)\neq\varnothing$ (irudian ikusten da).
EB4: f ahurra da.

EB1, EB2 eta EB3 betetzen direnez, maximoko zein minimoko Kuhn-Tucker-en baldintzak beharrezkoak dira eta EB1, EB2 eta EB4[ahurra] betetzen direnez, maximoko Kuhn-Tucker-en baldintzak nahikoak dira. Hau da, minimorako beharrezkoak baina ez nahikoak dira.

iv) f jarraia X trinkoan denez, ziur minimoa egongo dela. Bestalde, minimoko KT baldintzak beharrezkoak direnez, lortutako puntuen artean, halabeharrez, minimoa egongo da (KT baldintzak betetzen dituzten puntu guztiak atera ditugulako): $\overline{(0,0)(2,4)}$ puntuetan maximoa dugu eta orduan $f(1,1)=4$ eta $f(-2,4)=-59$ direnez, minimoa $(-2,4)$ puntuan dago eta $\min_{x\in X} f(x) = -59$.

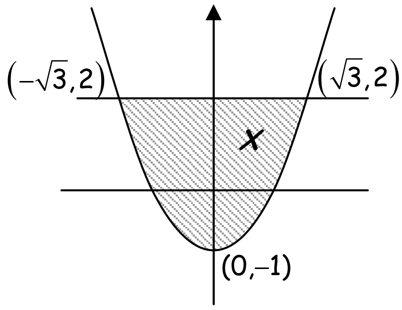
2006ko ekaina. Demagun $f(x,y) = \alpha x^2 - y$, $\alpha\in\mathbb{R}$, eta $X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq x^2 - 1,\ y \leq 2\right\}$.

i) α-ren balio desberdinetarako aztertu f-ren ganbiltasuna edo ahurtasuna X multzoan.

ii) α-ren zein baliotarako beteko dira Kuhn-Tucker-en baldintzak $(0,-1)$ puntuan?

iii) Kuhn-Tucker-en teoremak erabiliz, α-ren zein baliotarako ziurta dezakegu $(0,-1)$ puntua f-ren X-rekiko maximoa dela?

iv) Kuhn-Tucker-en teoremak erabiliz, α-ren zein baliotarako ziurta dezakegu $(0,-1)$ puntua f-ren X-rekiko minimoa ez dela?



i) $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$ da eta matrize hessiarraren metodoa erabiliko dugu:

$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, beraz, $\alpha\geq 0$ denean, f ganbila izango $\mathbb{R}^2$ osoan eta $\alpha\leq 0$ denean, ahurra.

ii) Problema era estandarrean idatziko dugu:

$$\max/\min(\alpha x^2 - y)$$
$$\begin{cases} x^2 - y - 1 \leq 0 \\ y - 2 \leq 0 \end{cases}$$

Eta gradienteak: $\nabla f(x,y) = (2\alpha x, -1)$; $\nabla g^1(x,y)=(2x,-1)$; $\nabla g^2(x,y)=(0,1)$.

Kuhn-Tucker-en baldintzak:

KT1: $\nabla f(x,y)+\lambda_1\nabla g^1(x,y)+\lambda_2\nabla g^2(x,y)=(0,0)$.

KT2: $\lambda_1 g^1(x,y)=0$; $\lambda_2 g^2(x,y)=0$.

KT3: $g^1(x,y)\leq 0$; $g^2(x,y)\leq 0$.

KT4: $\lambda_1,\lambda_2\geq 0$ (min).

$\lambda_1,\lambda_2\leq 0$ (max).

(0,–1) puntuan:

KT1: $\nabla f(0,-1)+\lambda_1\nabla g^1(0,-1)+\lambda_2\nabla g^2(0,-1)=(0,0)$.

$(0,-1)+\lambda_1(0,-1)+\lambda_2(0,1)=(0,0) \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2-1$.

KT2: $\lambda_1 g^1(0,-1)=0$; $\lambda_2 g^2(0,-1)=0 \Rightarrow \lambda_2=0$.

KT3: $g^1(0,-1)=0$; $g^2(0,-1)=-3<0$.

KT4: $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=0$ (max).

Beraz, α-ren edozein baliotarako (0,–1) puntuan maximoko Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen dira .

iii) Erregulartasun baldintzak aztertuko ditugu:

EB1: f, g^1, g^2 $\mathbb{R}^2$-n diferentziagarriak polinomikoak direlako.

EB2: g^1, g^2 $\mathbb{R}^2$-n ganbilak. g^2 lineal afina da, beraz ganbila eta $g^1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$ denez matrize hessiarraren metodoa aplikatuko dugu: $H_{g^1}(x,y)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, hau da, g^1 ganbila da.

EB3: $\mathrm{int}(X)\neq\emptyset$ (irudian ikusten dugu).

EB4: f $\alpha\geq 0$ denean ganbila eta $\alpha\leq 0$ denean ahurra.

Orduan, $\alpha\leq 0$ denean maximoko Kuhn-Tucker-en baldintzak nahikoak dira eta ziurta dezakegu (0,–1) puntuan f-ren X-rekiko maximo globala lortzen dela.

iv) EB1, EB2 eta EB3 betetzen direnez, maximoko zein minimoko Kuhn-Tucker-en baldintzak beharrezkoak dira, eta (0,–1) puntuak maximoko Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen dituenez, inoiz ez da minimoa izango, hau da, α-ren balio guztietarako ez da minimoa izango.

2006ko iraila. Demagun $f(x,y)=x^2+10x+y^2$ eta $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y^2-4\leq x\leq 5\}$.

i) Egiaztatu (–4,0) eta (5,0) puntuek X multzoan f-ren Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen dituztela.

ii) Kuhn-Tucker-en teoremak erabiliz, zer aipa dezakegu aurreko atalean aipatutako puntuez?

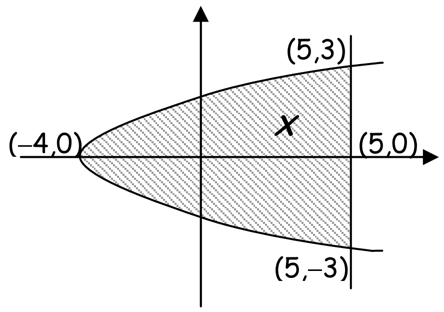
iii) Baldin badakigu Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen dituzten puntu bakarrak, aurreko ataletan aipatutakoez gain, (5,3) eta (5,–3) direla, aurkitu X-rekiko f-ren maximoa (erantzuna ongi azaldu behar da).

Idatz dezagun problema era estandarrean:

$$\max/\min(x^2+10x+y^2)$$
$$\begin{cases} y^2-x-4\leq 0\\ x-5\leq 0\end{cases}$$

$f(x,y)=x^2+10x+y^2$ helburu funtzioa eta $g^1(x,y)=y^2-x-4$, $g^2(x,y)=x-5$ murrizketak izanik.

Gradienteak: $\nabla f(x,y)=(2x+10,2y)$; $\nabla g^1(x,y)=(-1,2y)$; $\nabla g^2(x,y)=(1,0)$.



i) Kuhn-Tucker-en baldintzak:

KT1: $\nabla f(x,y)+\lambda_1\nabla g^1(x,y)+\lambda_2\nabla g^2(x,y)=(2x+10,2y)+\lambda_1(-1,2y)+\lambda_2(1,0)=(0,0)$.

KT2: $\lambda_1 g^1(x,y)=0$; $\lambda_2 g^2(x,y)=0$.

KT3: $g^1(x,y)\leq 0$; $g^2(x,y)\leq 0$.

KT4: $\lambda_1,\lambda_2\geq 0$ (min) edo $\lambda_1,\lambda_2\leq 0$ (max).

(-4,0) puntuan:

KT2: $g^1(-4,0)=0$ eta $g^2(-4,0)=-9<0$, beraz, $\lambda_2=0$.

KT1: $(2,0)+\lambda_1(-1,0)+\lambda_2(1,0)=(0,0) \Rightarrow 2-\lambda_1=0 \Rightarrow \lambda_1=2$.

KT3: $(-4,0)\in X$.

KT4: $\lambda_1=2$ eta $\lambda_2=0$ (minimoko baldintzak).

(5,0) puntuan:

KT2: $g^1(5,0)=-9<0$ eta $g^2(5,0)=0$, beraz, $\lambda_1=0$.

KT1: $(20,0)+\lambda_1(-1,0)+\lambda_2(1,0)=(0,0) \Rightarrow 20+\lambda_2=0 \Rightarrow \lambda_2=-20$.

KT3: $(5,0)\in X$.

KT4: $\lambda_1=0$ eta $\lambda_2=-20$ (maximoko baldintzak).

ii) Horretarako erregulartasun baldintzak aztertuko ditugu:

EB1: f, g^1, g^2 $\mathbb{R}^2$-n diferentziagarriak.

EB2: g^1, g^2 $\mathbb{R}^2$-n ganbilak. g^2 lineal afina da, beraz ganbila da eta $g^1\in C^2(\mathbb{R}^2)$ denez: $H_{g^1}(x,y)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ erdidefinitu positiboa da, hau da, g^1 ganbila da.

EB3: $\text{int}(X)\neq\emptyset$ (irudian ikusten dugu).

EB4: $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$ da eta $H_f(x,y)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ definitu positiboa, hau da, f $\mathbb{R}^2$-n (hertsiki) ganbila da.

Orduan, EB1, EB2 eta EB4(ganbila) betetzen direnez, minimoko Kuhn-Tucker-en baldintzak nahikoak dira eta ondorioz, $(-4,0)$ X-rekiko f-ren minimo globala da. Eta EB1, EB2 eta EB3 betetzen direnez, maximoko Kuhn-Tucker-en baldintzak beharrezkoak dira eta ondorioz, (5,0) maximoa izan daiteke.

iii) Aurreko ataleko ondorioa Kuhn-Tucker-en baldintzak beharrezkoak direla da, beraz, maximoa (existitzen bada eta horrela da f jarraia X trinkoan delako) Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen dituzten puntuen artean egongo da, hots, (5,0), (5,3) eta (5,–3) puntuen artean ((–4,0) minimoa da!): $f(5,0)=75$, $f(5,3)=84$, $f(5,-3)=84$. Orduan, X-rekiko f-ren maximo globala 84 da eta (5,3) eta (5,–3) puntuetan lortzen da.

2007ko ekaina. Demagun $f(x,y)=x^2+y^2-2xy+2x-2y$ funtzioa multzo honetan definitua:

$$X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2\le 25;\ x\ge 0\}.$$

i) Aurkitu funtzioaren gradienteak (0,–5) eta (0,5) puntuetan. Adierazi grafikoki. Egon daiteke muturren bat puntu hauetan?

ii) Funtzio ganbilen eta ahurren mutur propietateak erabiliz, aurkitu f-ren X-rekiko minimo globala eta minimoa lortzen den puntua(k), minimo hori existitzen bada.

iii) Egiaztatu (0,–5) eta (0,5) puntuek Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen dituzten ala ez.

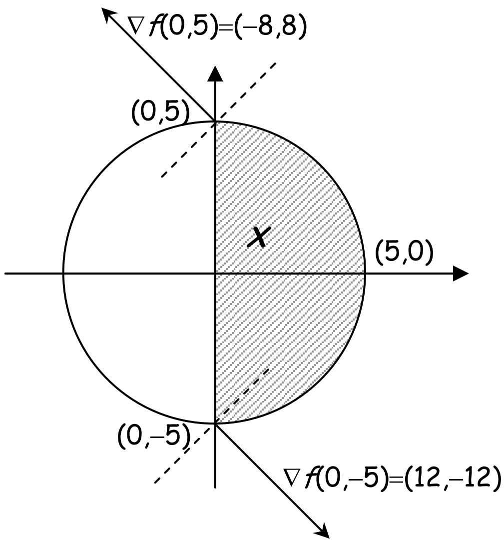
iv) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2=25;\ x>0\}$ mugaren zatiko zein puntutan betetzen dira Kuhn-Tucker-en baldintzak?

v) Baldin badakigu Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen dituen $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x=0;\ -5<y<5\}$ mugaren zatiko puntu bakarra (0,1) dela, zer esan dezakegu f-ren X-rekiko maximoari buruz? Existitzen bada, zein da eta non lortzen da?

i) $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x,y)&=2x-2y+2\\ f_2(x,y)&=2y-2x-2\end{aligned}\right\}\Rightarrow \nabla f(x,y)=(2x-2y+2,2y-2x-2).$$

Beraz, $\nabla f(0,-5)=(12,-12)$ eta $\nabla f(0,5)=(-8,8)$.



Eta irudian ikusten dugun moduan, (0,5) puntuan maximoa egon daiteke baina (0,–5) puntuan ezin da ezer egon, gradientearen perpendikularrak multzoa zatitzen duelako (eta ondorioz handitze eta gutxitze norabideak multzoan sartzen dira).

ii) X trinkoa eta ganbila da eta X multzoaren erpin kopurua infinitu da:

$$\{(0,5),(0,-5)\} \cup \{(x,y) \in X \,/\, x^2 + y^2 = 25, x > 0\}.$$

Bestalde, f jarraia ($f \in C^2(\mathbb{R}^2)$) da X trinkoan, beraz, f-ren X-rekiko mutur globalak existitzen dira.

Azter dezagun f-ren matrize hessiarra:

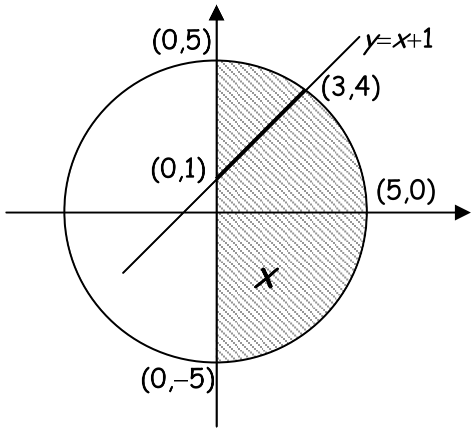
$$\left.\begin{array}{l} f_1(x,y) = 2x - 2y + 2 \\ \\ f_2(x,y) = 2y - 2x - 2 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} f_{11}(x,y) = 2 \\ f_{12}(x,y) = f_{21}(x,y) = -2 \\ f_{22}(x,y) = 2 \end{array}\right. \Rightarrow H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Beraz, matrize hessiarra erdidefinitu positiboa da eta ondorioz, f X multzoan ganbila da.

Orain, f-ren gradientea aztertuko dugu:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x,y) = 2x - 2y + 2 = 0 \\ f_2(x,y) = 2y - 2x - 2 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow y = x + 1.$$

Beraz, zuzen honetan eta X multzoan dauden puntuetan f-ren gradientea zero egiten da eta f-ren ganbiltasunarekin batera, $\overline{(0,1)(3,4)}$ segmentuan f-k minimo globala ($\min_{x \in X} f(\boldsymbol{x}) = -1$) lortzen duela ondorioztatzen dugu.



iii) Problema era estandarrean idatziko dugu:

$$\max/\min\left[x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y\right]$$

$$\left\{\begin{array}{l} g^1(x,y) = x^2 + y^2 - 25 \le 0 \\ g^2(x,y) = -x \le 0 \end{array}\right.$$

Eta KT baldintzak hauek dira:

KT1: $\nabla f(x,y) + \lambda_1 \nabla g^1(x,y) + \lambda_2 \nabla g^2(x,y) = (0,0)$.

$$\begin{pmatrix} 2x - 2y + 2 \\ 2y - 2x - 2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

KT2: $\lambda_1 g^1(x,y) = \lambda_1(x^2 + y^2 - 25) = 0$.

$\lambda_2 g^2(x,y) = \lambda_2(-x) = 0$.

KT3: $g^1(x,y) = x^2 + y^2 - 25 \le 0$.

$g^2(x,y) = -x \le 0$.

KT4: minimoa : $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$.

maximoa : $\lambda_1 \leq 0, \lambda_2 \leq 0$.

(0,–5) puntuan:

KT3: $g^1(0,-5) = 0 + 25 - 25 = 0$.

$g^2(0,-5) = 0 = 0$.

KT2: $\lambda_1 g^1(0,-5) = \lambda_1(0 + 25 - 25) = 0$.

$\lambda_2 g^2(0,-5) = \lambda_2(0) = 0$.

KT1: $\nabla f(0,-5) + \lambda_1 \nabla g^1(0,-5) + \lambda_2 \nabla g^2(0,-5) = (0,0)$.

$$\begin{pmatrix} 12 \\ -12 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} 12 - \lambda_2 = 0 \\ -12 - \lambda_1 10 = 0 \end{cases}.$$

KT4: $\lambda_1 = -1{,}2 < 0, \lambda_2 = 12 > 0$.

Beraz, (0,–5) puntuan ez dira betetzen Kuhn-Tucker-en baldintzak.

(0,5) puntuan:

KT3: $g^1(0,5) = 25 + 0 - 25 = 0$.

$g^2(0,5) = 0 = 0$.

KT2: $\lambda_1 g^1(0,5) = \lambda_1(25 + 0 - 25) = 0$.

$\lambda_2 g^2(0,5) = \lambda_2(0) = 0$.

KT1: $\nabla f(0,5) + \lambda_1 \nabla g^1(0,5) + \lambda_2 \nabla g^2(0,5) = (0,0)$.

$$\begin{pmatrix} -8 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} -8 - \lambda_2 = 0 \\ 8 + \lambda_1 10 = 0 \end{cases}.$$

KT4: $\lambda_1 = -0{,}8 < 0, \lambda_2 = -8 < 0$.

Beraz, (0,5) puntuan maximoko Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen dira.

iv) KT2: $\lambda_1 g^1(x,y) = \lambda_1(x^2 + y^2 - 25 = 0) = 0$.

$\lambda_2 g^2(x,y) = \lambda_2(-x < 0) = 0 \to \lambda_2 = 0$.

KT1: $\nabla f(x,y) + \lambda_1 \nabla g^1(x,y) = (0,0)$.

$$\begin{pmatrix} 2x - 2y + 2 \\ 2y - 2x - 2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to 2\lambda_1(x + y) = 0 \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}.$$

• $\lambda_1=0$ bada, $(3,4)\in X$ eta $(-4,-3)\notin X$ puntuak sortzen dira.

• $x+y=0$ bada, $x^2 + y^2 - 25 = 0$ batera, $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{-5}{\sqrt{2}}\right) \in X$ ($\lambda_1 = -2 - \frac{2\sqrt{2}}{5} < 0$) eta $\left(\frac{-5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}\right) \notin X$ puntuak sortzen dira.

KT3: $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{-5}{\sqrt{2}}\right) \in X$, $(3,4)\in X$, $\left(\frac{-5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}\right) \notin X$ eta $(-4,-3)\notin X$.

KT4: $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{-5}{\sqrt{2}}\right)$ punturako $\lambda_1 = -2 - \frac{2\sqrt{2}}{5} < 0$ eta $\lambda_2=0$. Maximoko KT baldintzak.

(3,4) punturako $\lambda_1=\lambda_2=0$. Maximoko eta minimoko KT baldintzak.

v) Horretarako erregulartasun baldintzak aztertuko ditugu:
EB1: f, g^1, g^2 diferentziagarriak dira $\mathbb{R}^2$ osoan polinomikoak direlako.
EB2: g^1, g^2 ganbilak izan behar dira $\mathbb{R}^2$-n. g^2 lineala da, eta ondorioz ganbila da eta $g^1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$ denez: $H_{g^1}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, definitu positiboa den matrizea, hots, g^1 ere ganbila da.
EB3: int(X)≠∅ (irudian ikusten dugu).
EB4: f funtzioa ganbila da (lehen atera dugu).

Beraz, minimoko KT-ren baldintzak beharrezkoak eta nahikoak dira eta maximoko KT-ren baldintzak beharrezkoak soilik. f jarraia da X trinkoan ($\exists \max\limits_{x \in X} f(\boldsymbol{x})$) eta maximoko KT-ren baldintzak betetzen dituzte puntu guztiak ditugunez ((0,5) eta $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{-5}{\sqrt{2}}\right)$), hauen artean maximo globalak egon behar du; helburu funtzioan ordezkatzen ditugu:

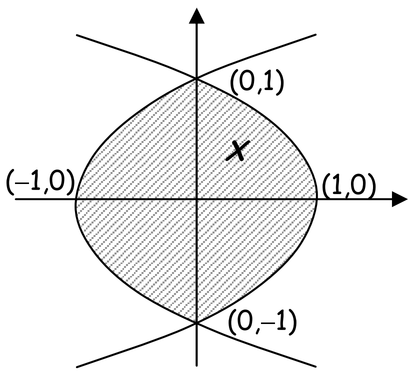
$$f(0,5)=15.$$

$$f\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{-5}{\sqrt{2}}\right) = \frac{25+10\sqrt{2}}{2}\ .$$

Maximoa $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{-5}{\sqrt{2}}\right)$ puntuan dago eta $\max\limits_{x \in X} f(\boldsymbol{x}) = \frac{25+10\sqrt{2}}{2}$ da.

2007ko iraila. Demagun $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y^2 - x \le 1; y^2 + x \le 1\}$ eta $f(x,y) = (x-2)^2 + y^2$ funtzioa.

i) Ziurra da f funtzioak X-rekiko maximo eta minimo globalak lortzen dituela? Hala bada, horietako baten bat X-ko barrualdean egon daiteke?
ii) Aurkitu Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen dituzten puntu guztiak.
iii) Aurkitu $\max\limits_{x \in X} f(\boldsymbol{x})$ eta $\min\limits_{x \in X} f(\boldsymbol{x})$ eta lortzen diren puntu guztiak. Erantzuna argi eta garbi azaldu behar duzu.



i) Bai, f jarraia (polinomikoa da) X trinkoan (irudia) delako. Barrualdean zerbait aurkitzeko gradientea zero izatea beharrezkoa da:

$$\nabla f(x,y)=(2x-4,2y)=(0,0) \Rightarrow (x,y)=(2,0)\notin \text{int}(X).$$

Beraz, barrualdean mutur bat egotea ezinezkoa da.

ii) Lehenengoz, problema era estandarrean idatziko dugu:

$$\max/\min\ (x-2)^2+y^2$$

$$\begin{cases} g^1(x,y)=y^2-x-1\le 0 \\ g^2(x,y)=y^2+x-1\le 0 \end{cases}$$

Kuhn-Tucker-en baldintzak:

KT1: $\nabla f(x,y)+\lambda_1\nabla g^1(x,y)+\lambda_2\nabla g^2(x,y)=(0,0)$.

$(2x-4,2y)+\lambda_1(-1,2y)+\lambda_2(1,2y)=(0,0)$.

KT2: $\lambda_1 g^1(x,y)=0$; $\lambda_2 g^2(x,y)=0$.

KT3: $g^1(x,y)\le 0$; $g^2(x,y)\le 0$.

KT4: $\lambda_1,\lambda_2\ge 0$ (min).

$\lambda_1,\lambda_2\le 0$ (max).

KT2tik hasiko gara, lau kasuak aztertzen:

a) $\lambda_1=\lambda_2=0$.

KT1en: $\nabla f(x,y)=(0,0)$ eta hau $(2,0)\notin X$ puntuan betetzen da.

b) $\lambda_1=g^2(x,y)=0$.

KT1en: $\nabla f(x,y)+\lambda_2\nabla g^2(x,y)=(0,0)$.

$(2x-4,2y)+\lambda_2(1,2y)=(0,0)$ eta $g^2(x,y)=0$:

$$\left.\begin{aligned} 2x-4+\lambda_2&=0 \\ 2y(1+\lambda_2)&=0 \\ y^2+x-1&=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (1,0)\in X,\ \lambda_2=2.$$

c) $\lambda_2=g^1(x,y)=0$.

KT1en: $\nabla f(x,y)+\lambda_1\nabla g^1(x,y)=(0,0)$.

$(2x-4,2y)+\lambda_1(-1,2y)=(0,0)$ eta $g^1(x,y)=0$:

$$\left.\begin{aligned} 2x-4-\lambda_1&=0 \\ 2y(1+\lambda_1)&=0 \\ y^2-x-1&=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} (-1,0)\in X,\ \lambda_1=-6. \\ (3/2,\sqrt{5/2})\notin X,\ \lambda_1=-1. \\ (3/2,-\sqrt{5/2})\notin X,\ \lambda_1=-1. \end{cases}$$

d) $g^1(x,y)=g^2(x,y)=0$.

Hemendik $(0,1)$ eta $(0,-1)$ puntuak sortzen dira:

$(0,1)$ puntua: KT1en $\nabla f(0,1)+\lambda_1\nabla g^1(0,1)+\lambda_2\nabla g^2(0,1)=(0,0)$.

$(-4,2)+\lambda_1(-1,2)+\lambda_2(1,2)=(0,0)$.

$$\left.\begin{aligned} -4-\lambda_1+\lambda_2&=0 \\ 2+2\lambda_1+2\lambda_2&=0 \end{aligned}\right\} \lambda_1=-5/2,\ \lambda_2=3/2 \text{ (ez du KT4 betetzen).}$$

(0,–1) puntua: KT1en $\nabla f(0,-1)+\lambda_1\nabla g^1(0,-1)+\lambda_2\nabla g^2(0,-1)=(0,0)$.
$(-4,-2)+\lambda_1(-1,-2)+\lambda_2(1,-2)=(0,0)$.

$$\left.\begin{aligned} -4-\lambda_1+\lambda_2 &= 0 \\ -2-2\lambda_1-2\lambda_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \lambda_1=-5/2,\ \lambda_2=3/2 \text{ (ez du KT4 betetzen).}$$

Beraz, (1,0) puntuak minimoko KT baldintzak betetzen ditu ($\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$) eta (–1,0) puntuak maximoko KT baldintzak betetzen ditu ($\lambda_1=-6$, $\lambda_2=0$).

iii) Azter ditzagun erregulartasun baldintzak:
EB1: f, g^1, g^2 $\mathbb{R}^2$ espazioan diferentziagarriak dira polinomikoak direlako.
EB2: g^1, g^2 ganbilak; $g^1, g^2 \in C^2(\mathbb{R}^2)$ eta: $H_{g^1}(x,y)=H_{g^2}(x,y)=\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}$ erdidefinitu positiboa, hots, g^1 eta g^2 $\mathbb{R}^2$ osoan ganbilak dira.
EB3: $\mathrm{int}(X)\neq\varnothing$ eta horrela da irudian ikusten dugun bezala.
EB4: $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$ eta $H_f(x,y)=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$ definitu positiboa, hau da, f hertsiki ganbila da.

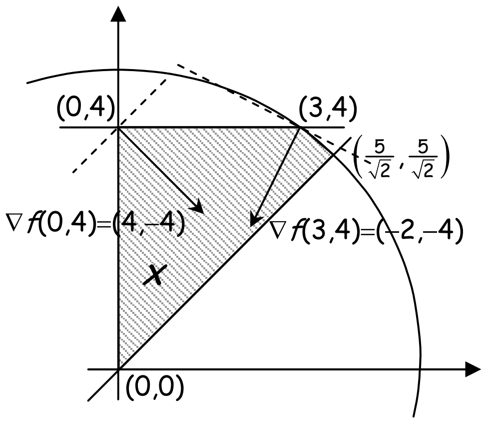
EB1, EB2 eta EB4 betetzen direnez, minimoko KT baldintzak nahikoak dira eta ondorioz, (1,0) problemaren minimo globala da ($\min\limits_{\mathbf{x}\in X} f(\mathbf{x}) = f(1,0)=1$).
Bestalde, EB1, EB2 eta EB3 betetzen direnez, maximoko KT baldintzak beharrezkoak dira, eta f-k X multzoan maximoa duenez [i) atala], maximoko KT baldintzak betetzen dituen puntu bakarrean maximo globala egongo da, (–1,0) puntuan hain zuzen ere ($\max\limits_{\mathbf{x}\in X} f(\mathbf{x}) = f(-1,0)=9$).

2008ko ekaina. Demagun $f(x,y)=4x+4y-x^2-y^2$ funtzioa eta multzo hau:

$$X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2\le 25;\ 0\le x\le y\le 4\}.$$

i) Aurkitu funtzioaren gradienteak (0,4) eta (3,4) puntuetan. Irudikatu X multzoan. X-rekiko muturren bat egon daiteke emandako puntuetan?
ii) Funtzio ganbilen eta ahurren mutur propietateak erabiliz, aurkitu X-rekiko f-ren balio handiena eta balio hau lortzen du(t)en puntua(k).
iii) Idatzi problema programazio ez linealeko era estandarrean, helburu funtzioa eta murrizketak adieraziz.
iv) Betetzen al ditu (0,0) puntuak Kuhn-Tucker-en baldintzak?
v) Baldin badakigu $\{(x,y)\in X \,/\, x^2+y^2=25\}$ muga zatian $(3,4)$ eta $\left(\frac{5}{\sqrt{2}},\frac{5}{\sqrt{2}}\right)$ puntuek soilik betetzen dituzte Kuhn-Tucker-en baldintzak, zer esan dezakegu X-rekiko f-ren minimoari buruz? Existitzen bada, zenbat balio du eta non lortzen da?

i) $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ denez, $\nabla f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)) = (4-2x, 4-2y)$. Eta $\nabla f(0,4) = (f_1(0,4), f_2(0,4)) = (4,-4)$ eta $\nabla f(3,4) = (f_1(3,4), f_2(3,4)) = (-2,-4)$.



Eta irudian ikusten dugun bezala, biak izan daitezke minimoak, bi gradienteen perpendikularrak ez baitira multzoan sartzen.

ii) Lehenengoz, aztertuko dugu f-ren ganbiltasuna edo ahurtasuna:
$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ eta $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ definitu negatiboa denez, f $\mathbb{R}^2$ osoan hertsiki ahurra da.
Beraz, gradientea multzoko punturen batean baliogabetzen bada, bertan izango dugu maximoa:

$$\nabla f(x,y) = (4-2x, 4-2y) = (0,0) \Rightarrow (x,y) = (2,2).$$

Orduan, $\max_{x \in X} f(\boldsymbol{x}) = f(2,2) = 8$.

iii) $\max/\min\ (4x + 4y - x^2 - y^2)$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 25 \le 0 \\ -x \le 0 \\ x - y \le 0 \\ y - 4 \le 0 \end{cases}$$

$g^1(x,y) = x^2 + y^2 - 25$, $g^2(x,y) = -x$, $g^3(x,y) = x - y$, $g^4(x,y) = y - 4$ izanik.

iv) Problema honetarako Kuhn-Tucker-en baldintzak idatziko ditugu:
KT1: $\nabla f(x,y) + \lambda_1 \nabla g^1(x,y) + \lambda_2 \nabla g^2(x,y) + \lambda_3 \nabla g^3(x,y) + \lambda_4 \nabla g^4(x,y) = (0,0)$.

$$\begin{pmatrix} 4-2x \\ 4-2y \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{KT2: } \begin{cases} \lambda_1 g^1(x,y) = \lambda_1(x^2+y^2-25) = 0. \\ \lambda_2 g^2(x,y) = \lambda_2(-x) = 0. \\ \lambda_3 g^3(x,y) = \lambda_3(x-y) = 0. \\ \lambda_4 g^4(x,y) = \lambda_4(y-4) = 0. \end{cases}$$

$$\text{KT3: } \begin{cases} g^1(x,y) = x^2+y^2-25 \le 0. \\ g^2(x,y) = -x \le 0. \\ g^3(x,y) = x-y \le 0. \\ g^4(x,y) = y-4 \le 0. \end{cases}$$

$$\text{KT4: } \begin{cases} \lambda_1 \ge 0, \lambda_2 \ge 0, \lambda_3 \ge 0, \lambda_4 \ge 0 \text{ (minimorako).} \\ \lambda_1 \le 0, \lambda_2 \le 0, \lambda_3 \le 0, \lambda_4 \le 0 \text{ (maximorako).} \end{cases}$$

Eta (0,0) puntua ordezkatuz KT2n,

$\lambda_1 g^1(0,0) = \lambda_1(-25) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0.$

$\lambda_2 g^2(0,0) = \lambda_2(0) = 0.$

$\lambda_3 g^3(0,0) = \lambda_3(0) = 0.$

$\lambda_4 g^4(0,0) = \lambda_4(-4) = 0 \Rightarrow \lambda_4 = 0.$

Eta orain KT1en,

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_2 = 8 \text{ eta } \lambda_3 = 4.$$

KT3 betetzen da, (0,0)$\in X$ delako.

KT4: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 8 \ge 0$, $\lambda_3 = 4 \ge 0$ eta $\lambda_4 = 0$.

Beraz, (0,0) puntuak minimoko Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen ditu.

v) Zer dira KT baldintzak?

EB1: f, g^1, g^2, g^3, g^4 diferentziagarriak dira polinomikoak direlako.

EB2: g^2, g^3, g^4 linealak dira, beraz, ganbilak; eta $g^1 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Funtzioaren matrize hessiarra $H_{g^1}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ definitu positiboa denez, g^1 ere (hertsiki) ganbila dela ondorioztatzen dugu.

EB3: int(X)$\neq\emptyset$ (irudian ikusten den bezala).

EB4: f funtzioa (hertsiki) ahurra da.

Beraz, minimoko KT-ren baldintzak beharrezkoak direnez, baldintza hauek betetzen ez dituen puntua ezin da minimoa izan.

Bestalde, f jarraia da X multzo trinkoan, beraz, $\min_{x \in X} f(x)$ existitzen da. f hertsiki ahurra da eta mutur propietateen arabera, minimoa nahitaez erpin batean egongo da. Multzoko erpinak (0,0), (0,4), (3,4), $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}\right)$ eta bi azken puntuen arteko arkua. KT-ren arabera,

$(3,4)$ eta $\left(\frac{5}{\sqrt{2}},\frac{5}{\sqrt{2}}\right)$ puntuen arteko arkuan ezin da egon minimoa eta ondorioz, $f(0,0)=0$, $f(0,4)=0$, $f(3,4)=3$, $f\left(\frac{5}{\sqrt{2}},\frac{5}{\sqrt{2}}\right)\cong 3{,}1$ direnez, minimoa (0,0) eta (0,4) puntuetan lortzen da eta

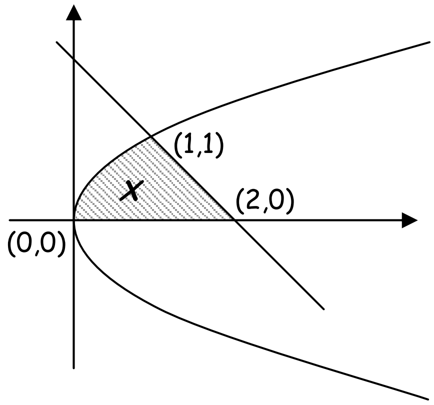
$$\min_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x}) = f(0,0) = f(0,4) = 0\,.$$

2008ko iraila. Demagun $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y^2\le x,\ x\le 2-y,\ y\ge 0\}$ multzoa eta $f(x,y)=x+y^2-2$ funtzioa.

i) Ziurra da f funtzioak X-rekiko maximo eta minimo globalak lortzen dituela? Hala bada, horietako baten bat X-ko barrualdean egon daiteke?

ii) Aurkitu $\{(x,y)\in X / y^2=x\}$ mugaren zatian soilik Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen dituen puntua. Zer ondorioa atera dezakegu puntu honetaz?

iii) Funtzio ganbilen eta ahurren mutur propietateak erabiliz aurkitu $\max_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x})$



i) f funtzioa polinomikoa denez jarraia da eta X multzoa, irudian ikusten den bezala, trinkoa da, beraz, f funtzioak X multzoan maximo eta minimo globalak lortzen ditu. Horietako bat barrualdean egoteko, $\nabla f(x,y)=(0,0)$ baldintza beharrezkoa da eta $\nabla f(x,y)=(1,2y)\neq(0,0)$ denez, maximoa eta minimoa mugan egongo dira.

ii) Kuhn-Tucker-en baldintzak aplikatzeko, problema era estandarrean idatziko dugu:

$$\max/\min\ (x+y^2-2)$$

$$\begin{cases} y^2-x\le 0\\ x+y-2\le 0\\ -y\le 0\end{cases}$$

$f(x,y)=x+y^2-2$, $g^1(x,y)=y^2-x$, $g^2(x,y)=x+y-2$ eta $g^3(x,y)=-y$ izanik.

Eta Kuhn-Tucker-en baldintzak:

KT1: $\nabla f(x,y)+\lambda_1\nabla g^1(x,y)+\lambda_2\nabla g^2(x,y)+\lambda_3\nabla g^3(x,y)=(0,0)$.

$(1,2y)+\lambda_1(-1,2y)+\lambda_2(1,1)+\lambda_3(0,-1)=(0,0)$.

KT2: $\lambda_1 g^1(x,y)=0$; $\lambda_2 g^2(x,y)=0$; $\lambda_3 g^3(x,y)=0$.
KT3: $g^1(x,y)\le 0$; $g^2(x,y)\le 0$; $g^3(x,y)\le 0$.
KT4: $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \ge 0$ (min).
$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \le 0$ (max).

$\{(x,y)\in X\,/\,y^2 = x\}$ muga zatia soilik aztertu nahi dugu, hau da, $g^1(x,y)=0$; $g^2(x,y)<0$; $g^3(x,y)<0$, eta orduan, $\lambda_2=\lambda_3=0$ izango dira (KT2gatik). Eta KT1en:
$(1,2y)+\lambda_1(-1,2y)=(0,0) \Rightarrow 1-\lambda_1=0$ eta $2y+2\lambda_1 y=0 \Rightarrow \lambda_1=1$ eta $y=0$.
Muga zati honetan $y=0$ bada $x=0$ da eta orduan, $(0,0)\in X$ puntuak minimoko Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen ditu (KT baldintzak betetzen dituen puntu bakarra). Jakiteko zerbait den, erregulartasun baldintzak aztertuko ditugu:

EB1: $f,\ g^1,\ g^2,\ g^3$ $\mathbb{R}^2$-n diferentziagarriak dira polinomikoak direlako.

EB2: $g^1,\ g^2,\ g^3$ $\mathbb{R}^2$-n ganbilak. g^2 eta g^3 linealak dira, beraz ganbilak eta $g^1\in C^2(\mathbb{R}^2)$ denez matrize hessiarraren metodoa aplikatuko dugu: $H_{g^1}(x,y)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, hau da, g^1 ganbila da.

EB3: $\mathrm{int}(X)\neq\varnothing$ (irudian ikusten dugu).

EB4: $H_f(x,y)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ denez, f $\mathbb{R}^2$-n ganbila da.

Beraz, minimoko Kuhn-Tucker-en baldintzak beharrezko eta nahikoak dira minimorako eta ondorioz (0,0) puntua minimo globala da.

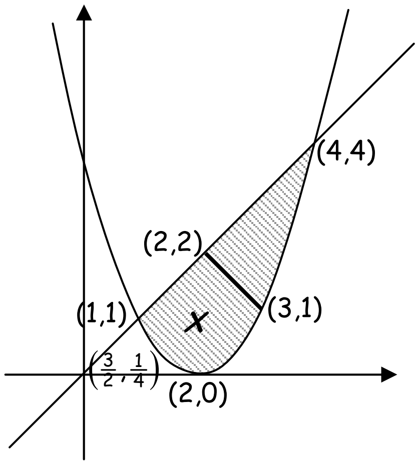
iii) Lehen atalean esan dugun bezala, $\max\limits_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x})$ existitzen da. Bestalde, f ganbila denez, maximoa gutxienez erpin batean egongo da, eta lehen ondorioztatu dugun bezala, $\{(x,y)\in X\,/\,y^2 = x\}$ muga zatian, guztiak erpinak, ezin da ezer egon; beraz, maximoa (0,0), (1,1) edo (2,0) puntuetan aurkituko dugu: $f(0,0)=-2$ (minimo globala), $f(1,1)=0$ eta $f(2,0)=0$ direnez, maximoa (1,1) eta (2,0) puntuetan lortzen da eta 0 da.

2009ko ekaina. Demagun $f(x,y)=x^2+y^2+2xy-8x-8y$ funtzioa eta multzo hau:

$$X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,(x-2)^2\le y\le x\},$$

i) Baiezta dezakezu (f eta X aztertzen) f-k X-rekiko maximoa eta minimoa lortzen dituen?
ii) Aurkitu f-ren X-rekiko maximoa eta minimoa Kuhn-Tucker-en teoremak erabiliz.

i) f funtzioa jarraia da polinomikoa delako eta X multzoa, irudian ikusten dugun moduan, trinkoa da eta ondorioz, f-k X-rekiko maximoa eta minimoa lortzen ditu.



ii) $g^1(x,y)=(x-2)^2-y$ eta $g^2(x,y)=y-x$ murrizketak izanik, problema era estandarrean hauxe da:

$$\max/\min(x^2+y^2+2xy-8x-8y)$$
$$\begin{cases}(x-2)^2-y\le 0\\ y-x\le 0\end{cases}$$

Kuhn-Tucker-en baldintzak idatziko ditugu:

KT1: $(2x+2y-8,\,2y+2x-8)+\lambda_1(2x-4,\,-1)+\lambda_2(-1,1)=(0,0)$.

$$\begin{cases}2x+2y-8+\lambda_1(2x-4)-\lambda_2=0.\\ 2y+2x-8-\lambda_1+\lambda_2=0.\end{cases}$$

KT2: $\lambda_1 g^1(x,y)=\lambda_2 g^2(x,y)=0$.

KT3: $g^1(x,y)\le 0,\ g^2(x,y)\le 0$.

KT4: $\lambda_1,\lambda_2\ge 0$ minimorako baldintzak.

$\lambda_1,\lambda_2\le 0$ maximorako baldintzak.

Eta Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen dituzten puntu guztiak lortzeko, KT2 erabiliko dugu:

a) $\lambda_1=\lambda_2=0$.

b) $\lambda_1=g^2(x,y)=0$.

c) $\lambda_2=g^1(x,y)=0$.

d) $g^1(x,y)=g^2(x,y)=0$.

a) $\lambda_1=\lambda_2=0$.

KT1en: $\left.\begin{array}{r}2x+2y-8=0\\ 2y+2x-8=0\end{array}\right\}\Rightarrow\{(x,y)\in X\,/\,x+y=4\}=\overline{(2,2)(3,1)}$.

Puntu hauetan guztietan maximoko eta minimoko KT baldintzak betetzen dira.

b) $\lambda_1 = g^2(x,y) = 0$.

$$\text{KT1en: } \left.\begin{array}{r} 2x + 2y - 8 - \lambda_2 = 0 \\ 2y + 2x - 8 + \lambda_2 = 0 \\ y - x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (2,2) \in X,\ \lambda_2 = 0.$$

Eta puntu hau lehen ere irten da.

c) $\lambda_2 = g^1(x,y) = 0$.

$$\text{KT1en: } \left.\begin{array}{r} 2x + 2y - 8 + \lambda_1(2x - 4) = 0 \\ 2y + 2x - 8 - \lambda_1 = 0 \\ (x-2)^2 - y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (3,1) \in X,\ \lambda_1 = 0. \\ \left(\frac{3}{2},\frac{1}{4}\right) \in X,\ \lambda_1 = -\frac{9}{2}. \end{array}\right.$$

$\left(\frac{3}{2},\frac{1}{4}\right)$ puntuak maximoko KT baldintzak betetzen ditu.

d) $g^1(x,y) = g^2(x,y) = 0 \Rightarrow (1,1)$ eta $(4,4)$.

(1,1) puntua:

$$\left.\begin{array}{r} -4 - 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ -4 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{8}{3},\ \lambda_2 = \frac{4}{3}.$$

Beraz, (1,1) puntuak ez ditu KT baldintzak betetzen.

(4,4) puntua:

$$\left.\begin{array}{r} 8 + 4\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 8 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{16}{3},\ \lambda_2 = -\frac{40}{3}.$$

maximoko KT baldintzak betetzen ditu.

Beraz, puntu hauetan betetzen dira KT baldintzak:

minimoko Kuhn-Tucker-en baldintzak: $\overline{(2,2)(3,1)}$.

maximoko Kuhn-Tucker-en baldintzak: $\overline{(2,2)(3,1)}$, $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{4}\right)$ eta (4,4).

Azter ditzagun erregulartasun baldintzak:

EB1: f, g^1 eta g^2 $\mathbb{R}^2$-n diferentziagarriak (polinomioak dira).

EB2: g^1 eta g^2 $\mathbb{R}^2$-n ganbilak, g^2 lineala delako eta $g^1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$ denez, $H_{g^1}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ erdidefinitu positiboa da, hau da, g^1 ganbila da.

EB3: $\mathrm{int}(X) \neq \varnothing$ (irudian ikusten dugu).

EB4: $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ eta $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ denez, f $\mathbb{R}^2$ osoan ganbila da.

Orduan, minimoko Kuhn-Tucker-en baldintzak nahikoak dira eta $\overline{(2,2)(3,1)}$ puntu guztietan f-k X-rekiko minimoa lortzen du eta $\min_{x \in X} f(\mathbf{x}) = -16$.

Maximoko Kuhn-Tucker-en baldintzak beharrezkoak dira, eta X multzoko puntu guztiak lortu ditugunez, haien artean egongo da maximoa (lehen frogatu dugu maximo hau existitzen dela), hau da, $f\left(\frac{3}{2},\frac{1}{4}\right)=-\frac{175}{16}$ eta $f(4,4)=0$ artean, (4,4) puntuan maximoa lortzen da eta $\max_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x})=0$.

2009ko iraila. (10 puntu) Demagun $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\le 2,\ x\le y,\ x\ge -y\}$ multzoa eta $f(x,y)=(x-1)^2+y^2$ funtzioa.

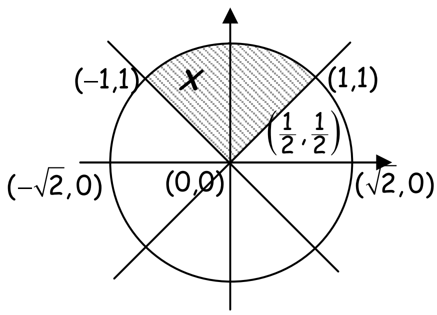
i) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ eta (1,1) puntuek Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen al dituzte? Kuhn-Tucker-en teoremak erabiliz, zer ondoriozta dezakegu puntu hauetaz?

ii) Funtzio ganbilen eta ahurren mutur propietateak erabiliz, aurkitu $\max_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x})$ eta lortzen den puntu guztiak.

i) Problema era estandarrean idatziko dugu:

$\max/\min\ (x-1)^2+y^2$

$$\begin{cases} g^1(x,y)=x^2+y^2-2\le 0 \\ g^2(x,y)=x-y\le 0 \\ g^3(x,y)=-x-y\le 0 \end{cases}$$



Eta Kuhn-Tucker-en baldintzak hauek dira:

KT1: $(2x-2,2y)+\lambda_1(2x,2y)+\lambda_2(1,-1)+\lambda_3(-1,-1)=(0,0)$.

$$\begin{cases} 2x-2+2\lambda_1 x+\lambda_2-\lambda_3=0. \\ 2y+2\lambda_1 y-\lambda_2-\lambda_3=0. \end{cases}$$

KT2: $\lambda_1 g^1(x,y)=0$, $\lambda_2 g^2(x,y)=0$, $\lambda_3 g^3(x,y)=0$.

KT3: $g^1(x,y)\le 0$, $g^2(x,y)\le 0$, $g^3(x,y)\le 0$.

KT4: $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\ge 0$ minimorako eta $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\le 0$ maximorako.

Egiaztatuko dugu $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ puntuak KT baldintzak betetzen dituen:

KT1: $\begin{cases} -1+\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=0 \\ 1+\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3=0 \end{cases}$.

KT2: $\lambda_1 g^1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\lambda_1\left(-\frac{3}{2}\right)=0\Rightarrow\lambda_1=0$.

$\lambda_2 g^2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\lambda_2 0=0$.

$\lambda_3 g^3\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\lambda_3(-1)=0\Rightarrow\lambda_3=0$.

Datu hauekin, berriro KT1en:

$$\left.\begin{array}{r}-1+\lambda_2=0\\ 1-\lambda_2=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lambda_2=1.$$

KT3: $g^1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}\le 0$, $g^2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=0$, $g^3\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=-1\le 0$.

KT4: $\lambda_1=0,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=0$, beraz, minimorako KT baldintzak betetzen ditu.

Eta orain (1,1) puntua:

KT1: $\begin{cases}2\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=0\\ 2+2\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3=0\end{cases}$.

KT2: $\lambda_1 g^1(1,1)=\lambda_1 0=0$.

$\lambda_2 g^2(1,1)=\lambda_2 0=0$.

$\lambda_3 g^3(1,1)=\lambda_3(-2)=0\Rightarrow \lambda_3=0$.

Datu hauekin, berriro KT1en:

$$\left.\begin{array}{r}2\lambda_1+\lambda_2=0\\ 2+2\lambda_1-\lambda_2=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lambda_1=-\frac{1}{2},\ \lambda_2=1.$$

KT3: $g^1(1,1)=0$, $g^2(1,1)=0$, $g^3(1,1)=-2\le 0$.

KT4: $\lambda_1=-\frac{1}{2},\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=0$, beraz ez ditu KT baldintzak betetzen.

KT baldintzak zer diren jakiteko, erregulartasun baldintzak aztertuko ditugu:

EB1: f, g^1, g^2, g^3 $\mathbb{R}^2$-n diferentziagarriak dira polinomikoak direlako.

EB2: g^1, g^2, g^3 $\mathbb{R}^2$-n ganbilak. g^2 eta g^3 linealak dira, beraz ganbilak eta $g^1\in C^2(\mathbb{R}^2)$ denez matrize hessiarraren metodoa aplikatuko dugu: $H_{g^1}(x,y)=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$, hau da, g^1 (hertsiki) ganbila da.

EB3: $\text{int}(X)\ne\varnothing$ (irudian ikusten dugu).

EB4: $H_f(x,y)=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$ denez, f funtzioa $\mathbb{R}^2$-n hertsiki ganbila da.

Beraz, KT baldintzak beharrezkoak dira maximo zein minimorako EB1, EB2 eta EB3 betetzen direlako: (1,1) puntuak ez ditu KT baldintzak betetzen, beraz, ezin da muturra izan. Bestalde, minimorako KT baldintzak nahikoak dira EB1, EB2 eta EB4(ganbila) betetzen direlako: $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ puntuak minimorako KT baldintzak betetzen ditu, beraz, minimoa da eta $\min\limits_{x\in X} f(\boldsymbol{x})=f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

ii) f jarraia X trinkoan denez, ziur $\max\limits_{x\in X} f(\boldsymbol{x})$ existitzen dela. Bestalde, funtzioa hertsiki ganbila da, eta funtzio ganbilen eta ahurren mutur propietateak erabiliz, badakigu maximoa nahitaez erpin batean dagoela. Zeintzuk dira X multzoko erpinak? $x^2+y^2=2$ muga zatian daudenak eta $(-1,1)$ eta $(0,0)$ ebaki puntuak (badakigu $(1,1)$ ebaki puntua ez dela ezer). $x^2+y^2=2$ zatitik hautagaiak lortzeko, teoria klasikoa erabiliko dugu: $\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=\mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=\mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)=0$ baldintza beharrezkoa betetzen duten puntuak izan daitezke maximoak multzo osoarekiko, betetzen ez dutenak inolaz ere.

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=(x-1)^2+y^2+\lambda(x^2+y^2-2)$$
$$\left.\begin{array}{r}\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=2x-2+2\lambda x=0\\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=2y+2\lambda y=0\\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)=x^2+y^2-2=0\end{array}\right\}\Rightarrow 2y(1+\lambda)=0\Rightarrow\begin{cases}y=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}.\\ \lambda=-1\not\Rightarrow\end{cases}$$

Eta $(\sqrt{2},0)\notin X$, $(-\sqrt{2},0)\notin X$ direnez, maximoa edo $(0,0)$ edo $(-1,1)$ puntuetan dago: $f(0,0)=1$ eta $f(-1,1)=5$ dira, orduan, f-ren X-rekiko maximo globala $(-1,1)$ puntuan lortzen da eta $\max_{x\in X} f(\boldsymbol{x})=f(-1,1)=5$.

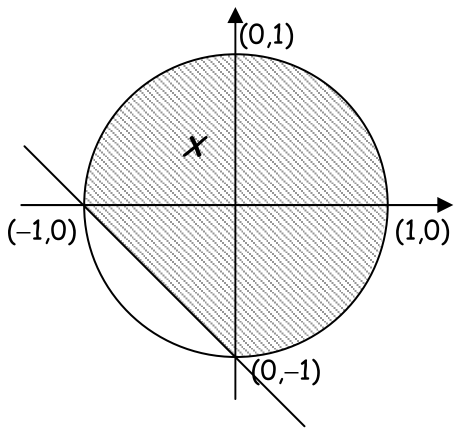
2010eko ekaina. Demagun $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\le 1,\ x+y\ge -1\}$ eta $f(x,y)=x^2-2y$.

i) Existitzen al da f-ren muturrik X multzoko barrualdean?

ii) Aurkitu $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2=1,\ x+y>-1\}$ muga zatiko puntu guztiak non Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen diren.

iii) Kuhn-Tucker-en teoremak erabiliz, aurkitu f-ren X-rekiko minimoa.

iv) Aurreko emaitzak eta funtzio ganbilen eta ahurren mutur propietateak erabiliz, aurkitu f-ren X-rekiko maximoa.



i) $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$ denez, X multzoko barrualdean muturren bat lortzeko, ezinbestekoa da $\nabla f(x,y)=(2x,-2)=(0,0)$ izatea eta betetzen ez denez, ez dago ezer barrualdean.

ii) Problema era estandarrean idatziko dugu:

$$\max/\min x^2-2y$$
$$\begin{cases}x^2+y^2-1\le 0\\ -1-x-y\le 0\end{cases}$$

$f(x,y) = x^2 - 2y$, $g^1 = x^2 + y^2 - 1$ eta $g^2 = -1 - x - y$ izanik.

KT1: $\nabla f(x,y) + \lambda_1 \nabla g^1(x,y) + \lambda_2 \nabla g^2(x,y) = (0,0)$.

$(2x,-2) + \lambda_1(2x,2y) + \lambda_2(-1,-1) = 0$.

$$\begin{cases} 2x + 2\lambda_1 x - \lambda_2 = 0 \\ -2 + 2\lambda_1 y - \lambda_2 = 0 \end{cases}.$$

KT2: $\lambda_1 g^1(x,y) = \lambda_2 g^2(x,y) = 0$.

KT3: $\nabla g^1(x,y) \leq 0,\ g^2(x,y) \leq 0$.

KT4: $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ (minimorako) edo $\lambda_1, \lambda_2 \leq 0$ (maximorako).

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1,\ x + y > -1\}$ muga zatiko puntuek $g^1 = 0$ eta $g^2 < 0$ betetzen dituztenez, KT2tik $\lambda_2 = 0$ dela ondorioztatzen dugu eta KT1ean ($g^1 = 0$ batera):

$$\begin{cases} 2x + 2\lambda_1 x = 0 \Rightarrow 2x(1+\lambda_1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ edo } \lambda_1 = -1 \\ -2 + 2\lambda_1 y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

x=0 denean, $y = \pm 1$ eta $\lambda_1 = \pm 1$.

(0,1)$\in X$, non $\lambda_1 = 1$ eta $\lambda_2 = 0$ (minimoko KT).

(0,–1)$\in X$, non $\lambda_1 = -1$ eta $\lambda_2 = 0$ (maximoko KT).

$\lambda_1 = -1$ denean, y=–1 eta x=0 (errepikatzen da).

iii) Azter ditzagun erregulartasun baldintzak:

EB1: f, g^1, g^2 $\mathbb{R}^2$ osoan diferentziagarriak.

EB2: g^1, g^2 ganbilak: g^2 lineala. $g^1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$: $H_{g^1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ D+ $\Rightarrow g^1$ (hertsiki) ganbila.

EB3: int(X)$\neq\varnothing$.

EB4: $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$: $H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ erdidefinitu positiboa $\Rightarrow f$ ganbila.

Beraz, minimoko Kuhn-Tucker-en baldintzak nahikoak dira, hots, (0,1)-en minimoa dugu.

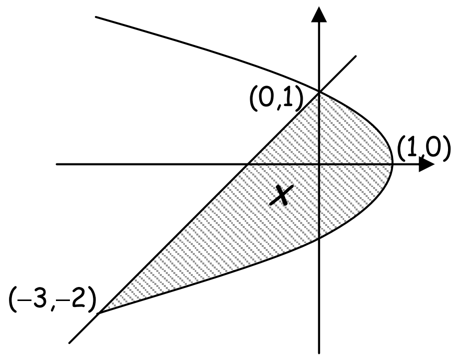
iv) f jarraia da X multzo trinkoan, beraz maximoa existitzen da; bestalde, f ganbila denez, X-ko erpin batean (zirkunferentzian dauden puntuak gehi ebaki puntuak), gutxienez, lortuko da maximoa.

Zirkunferentzian dauden puntuetan, EB1, EB2 eta EB3 betetzen direnez, Kuhn-Tucker-en baldintzak beharrezkoak dira maximorako, hau da, hautagai bakarra (0,–1) da. ((0,1) minimoa da!).

Geratzen den ebaki puntua (–1,0) da, beraz, $f(0,-1) = 2$ eta $f(-1,0) = 1$ direnez, $\max_{x \in X} f(\boldsymbol{x}) = f(0,-1) = 2$.

2010eko iraila. (10 puntu) Kuhn-Tucker-en teoremak erabiliz ebatzi programazio ez linealeko problema hau:

$$\text{hob}(3x^2 + 3y^2 - 6xy)$$
$$\begin{cases} y \le x + 1 \\ x + y^2 \le 1 \end{cases}$$



Helburu funtzioa $f(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 6xy$, eta murrizketak $g^1(x,y) = y - x - 1$ eta $g^2(x,y) = x + y^2 - 1$ badira, Kuhn-Tucker-en baldintzak idatziko ditugu:

KT1: $\nabla f(x,y) + \lambda_1 \nabla g^1(x,y) + \lambda_2 \nabla g^2(x,y) = (0,0)$.

$(6x - 6y, 6y - 6x) + \lambda_1(-1,1) + \lambda_2(1,2y) = 0$.

$$\begin{cases} 6x - 6y - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 6y - 6x + \lambda_1 + 2\lambda_2 y = 0 \end{cases}.$$

KT2: $\lambda_1 g^1(x,y) = \lambda_2 g^2(x,y) = 0$.

KT3: $\nabla g^1(x,y) \le 0,\ g^2(x,y) \le 0$.

KT4: $\lambda_1, \lambda_2 \ge 0$ (minimorako) edo $\lambda_1, \lambda_2 \le 0$ (maximorako).

Atera ditzagun Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen dituzten puntu guztiak; horretarako KT2tik lau aukera dugu: $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_1=g^2=0$, $\lambda_2=g^1=0$ eta $g^1=g^2=0$.

• $\lambda_1=\lambda_2=0$.

KT1ean: $\begin{cases} 6x - 6y = 0 \\ 6y - 6x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y$. Eta KT3tik, puntu hauek X multzoan egon behar dute, hau da, $\overline{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)}$ segmentu osoan maximo eta minimoko KT baldintzak betetzen dira.

• $\lambda_1=0$ eta $g^2=0$.

KT1ean: $\begin{cases} 6x - 6y + \lambda_2 = 0 \Rightarrow -6x + 6y = \lambda_2 \\ 6y - 6x + 2\lambda_2 y = 0 \\ x + y^2 = 1 \end{cases}$ $\lambda_2 + 2\lambda_2 y = \lambda_2(1 + 2y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ y = -1/2 \end{cases}$

Eta $\lambda_2 = 0$ bada, x=y puntuak sortzen dira, eta parabolan daudenak:

$$\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \text{ eta } \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

Puntu hauek aurreko atalean lortu ditugu.

$y = -\frac{1}{2}$ denean, $x = \frac{3}{4}$ eta $\lambda_2 = -\frac{15}{2}$ dira eta $\left(\frac{3}{4},-\frac{1}{2}\right) \in X$ puntuak maximoko Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen ditu.

• λ_2=0 eta g^1=0.

KT1ean: $\begin{cases} 6x - 6y - \lambda_1 = 0 \\ 6y - 6x + \lambda_1 = 0 \\ y - x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 6y = \lambda_1 \\ y - x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = y \\ \lambda_1 = -6 \end{cases}.$

Eta X multzoan dauden puntuak $\overline{(0,1)(-3,-2)}$ segmentu osoa da. Puntu hauek guztiak maximoko KT baldintzak betetzen dituzte.

• g^1=0 eta g^2=0 (ebaki puntuak: (0,1) eta (–3,–2)); KT1en ordezkatuko ditugu:

(0,1) puntua:

$$\left.\begin{array}{l} -6 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 6 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = -6,\ \lambda_2 = 0.$$

Beraz, maximoko Kunh-Tucker-en baldintzak betetzen ditu.

(–3,–2) puntua:

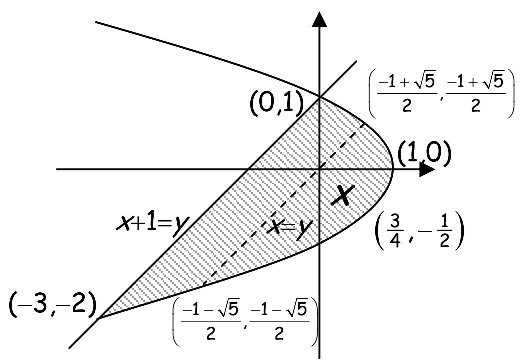
$$\left.\begin{array}{l} -18 + 12 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -12 + 18 + \lambda_1 - 4\lambda_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = -6,\ \lambda_2 = 0.$$

Beraz, maximoko Kunh-Tucker-en baldintzak betetzen ditu.

Puntu hauek dira Kuhn-Tucker-en baldintzak betetzen dituzten X multzoko puntu bakarrak:

$\overline{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)}$ maximoko eta minimoko baldintzak.

$\left(\frac{3}{4},-\frac{1}{2}\right)$, $\overline{(0,1)(-3,-2)}$ maximoko baldintzak.



Azter ditzagun erregulartasun baldintzak:

EB1: f, g^1 eta g^2 $\mathbb{R}^2$-n diferentziagarriak (polinomioak dira).

EB2: g^1 eta g^2 $\mathbb{R}^2$-n ganbilak, g^1 lineala delako eta $g^2 \in C^1(\mathbb{R}^2)$ denez, $H_{g^2}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ erdidefinitu positiboa, hau da, g^2 ganbila.

EB3: $\text{int}(X) \neq \varnothing$ (irudian ikusten dugu).

EB4: $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ eta $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$ denez, erdidefinitu positiboa, f $\mathbb{R}^2$ osoan ganbila da.

Beraz, minimorako Kuhn-Tucker-en baldintzak beharrezko eta nahikoak dira baina maximorako beharrezkoak soilik.

Orduan, $\overline{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)}$ puntu guztietan minimoa lortzen da eta $\left(\frac{3}{4},-\frac{1}{2}\right)$, eta $\overline{(0,1)(-3,-2)}$ dira hautagaiak maximorako.

f jarraia eta X trinkoa da, orduan, f-ren X-rekiko maximoa existitzen da.

Bestalde, Kuhn-Tucker-en baldintzak maximorako beharrezkoak dira, beraz, maximoa $\left(\frac{3}{4},-\frac{1}{2}\right)$ edo $\overline{(0,1)(-3,-2)}$ puntuetan dago: $f\left(\frac{3}{4},-\frac{1}{2}\right) = \frac{75}{16}$ eta $f(0,1) = 3$; beraz, $\left(\frac{3}{4},-\frac{1}{2}\right)$ puntuan maximoa lortzen da.

PROGRAMAZIO LINEALAREN ARIKETAK

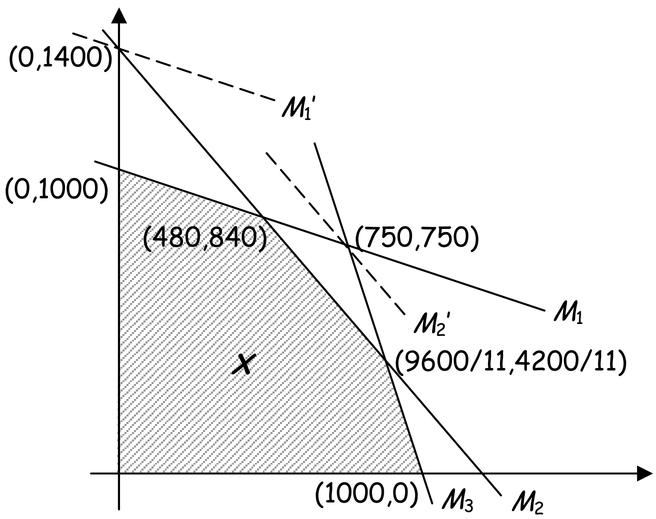
2000ko ekaina. Oihal enpresa batek dena erosten duen denda bat alkandorez eta blusez hornitzen du. Jantzien produkzio prozesua hiru sailetan banatuta dago: ebaketa, jostura eta paketatzea. Ebaketaren sailean 25 langilek lan egiten dute, josturarenean 35 langilek eta paketatzearenean 5 langilek, langile bakoitzaren lanaldia 40 ordu astero izanik. Taula honek bi jantziak fabrikatzeko beharrezko den denbora minututan eta sarrerak eurotan unitateko ematen ditu:

	minutuak unitateko			
	ebaketa	jostura	paketatzea	Sarrera(€)
alkandorak	20	70	12	20
blusak	60	60	4	30

i) Eman enpresaren asteko produkzio programa haren sarrera maximizatu nahi badu.
ii) Nahi izango balu langile gehiago kontratatzea sail bakoitzean, zenbat kontratatuko luke eta zein orduko soldatarekin?

x_1 alkandora kopurua eta
x_2 blusa kopurua badira,

$$\max 20x_1 + 30x_2$$
$$\begin{cases} 20x_1 + 60x_2 \leq 60.000 \\ 70x_1 + 60x_2 \leq 84.000 \\ 12x_1 + 4x_2 \leq 12.000 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



i) Eskema honetan, murrizketen maldak agertzen dira (m_1, m_2 eta m_3 lehen, bigarren eta hirugarren murrizketenak) eta m_f-ren, helburu funtzioaren maila kurben malda, arabera jakingo dugu zein den soluzio hoberena:

$$-\infty \xleftrightarrow{(1.000,0)} m_3 = -3 \xleftrightarrow{\left(\frac{9.600}{11},\frac{4.200}{11}\right)} m_2 = -\frac{7}{6} \xleftrightarrow{(480,840)} m_1 = -\frac{1}{3} \xleftrightarrow{(0,1.000)} 0 .$$

Eta helburu funtzioaren maila kurben malda $m_f=-2/3$ denez, soluzio hoberena (480,840) izango da (480 alkandora eta 840 blusa) eta balio hoberena 34.800 euro.

ii) Ebaketaren saileko langile gehiago kontratatu nahi izango balu:
M_1': $20x_1+60x_2=60.000+a$.
(480,840)$\to$(0,1.400).
$a=0\to a=24.000$ min.
34.800€$\to$42.000€.

$$\lambda_1 = \frac{42.000 - 34.800}{24.000} = 0{,}3 \text{ €/min.} = 18 \text{ €/ordu.}$$

Beraz, gehienez, 18 €/ordu ordainduko luke eta 24.000 min = 400 ordu = 10 langile, gehienez, kontratatuko du.

Josturaren saileko langile gehiago kontratatu nahi izango balu:
M_2': $70x_1+60x_2=84.000+b$.
$(480,840)\rightarrow(750,750)$.
$b=0\rightarrow b=13.500$ min.
34.800 €→37.500 €.

$$\lambda_2 = \frac{37.500 - 34.800}{13.500} = 0{,}2 \text{ €/min.} = 12 \text{ €/ordu.}$$

Beraz, gehienez, 12 €/ordu ordainduko luke eta 13.500 min = 225 ordu = 5 langile lanaldi osoan eta beste bat 25 orduko kontratuarekin gehienez kontratatuko du.

Hirugarren murrizketa ez asea denez (soluzio hoberenean ez ditu ordu guztiak erabiltzen), ez zaio interesatuko ordu gehiago sartzea paketatzea sailean.

2000ko iraila. Birfindegi batek P_1, P_2 eta P_3 hiru motako petrolio gordina du. Petrolio gordinaren upela bakoitza birfindu ondoren gasolina eta gasolioa lortzen da. Taula honek gasolinaren upela bat edo gasolioaren upela bat lortzeko behar diren petrolio gordinen upela kopuruak ematen ditu:

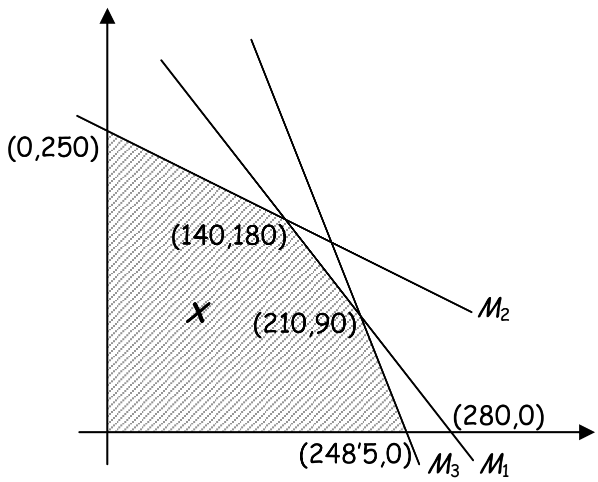
	P_1	P_2	P_3
gasolina	4,5	1,8	3,5
gasolioa	3,5	3,6	1,5

Birfindegiak 1.260 upela P_1, 900 upela P_2 eta 870 upela P_3 du. Gasolinaren upela bakoitza 30 eurotan eta gasolioarena 22 eurotan saltzen badu:

i) Eman enpresaren produkzio programa sarrerak maximizatu nahi badu.
ii) Posible izango balitz P_2 eta P_3 motatako petrolio upela gehiago lortzea, interesatuko litzaioke? zenbat upela?, zein preziotan?
iii) Lehen apartatuan saltzen duen gasolioaren upelak baino gehiago saldu nahi izango balu, gasolinaren prezioa mantenduz, zer preziotan saldu behar izango luke gasolioa?

x_1 gasolina (upelatan) eta x_2 gasolioa (upelatan) badira,

$$\max 30x_1 + 22x_2$$
$$\begin{cases} 4,5x_1 + 0,35x_2 \le 1.260 \\ 1,8x_1 + 3,6x_2 \le 900 \\ 3,5x_1 + 1,5x_2 \le 870 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



i) m_1 M_1 murrizketaren malda, m_2 M_2 murrizketaren malda eta m_3 M_3 murrizketaren malda badira,

$$-\infty \xleftrightarrow{(248'5,0)} m_3 = -\frac{7}{3} \xleftrightarrow{(210,90)} m_1 = -\frac{9}{7} \xleftrightarrow{(140,180)} m_2 = -\frac{1}{2} \xleftrightarrow{(0,250)} 0 .$$

Eta m_f=–30/22 denez (m_3<m_f<m_1) soluzio hoberena (210,90) izango da eta balio hoberena 8.280€ izango da (birfindegiak 210 upela gasolina eta 90 upela gasolioa ekoiztuko du 8.280€ irabaziz).

ii) Bigarren murrizketa ez asea da, hau da, P_2 petrolio gordinaren upela gehiago eskuratzea ez zaio interesatzen. Azter dezagun P_3 petrolio upelekin zer gertatzen den:
M_3': $3,5x_1+1,5x_2=870+c$.
(210,90)→(280,0).
c=0→c=110 upela.
8.280€→8.400€.

$$\lambda_3 = \frac{8.400 - 8.280}{110} = 1,09€ / \text{upela} .$$

Beraz, P_3 petrolio gordinaren gehienez 110 upela eskuratuko lituzke eta 1,09€ upelako gehienez ordainduko luke.

iii) Helburu funtzioaren maila kurben malda m_1 baino handiagoa bada, (140,180) puntura pasatuko ginateke eta gasolioaren produkzioa handiago izango litzateke: (p_2 gasolioaren prezioa da):

$$m_1 = -\frac{9}{7} < m_f = -\frac{30}{p_2} \quad \Rightarrow \quad p_2 > 23,43€ .$$

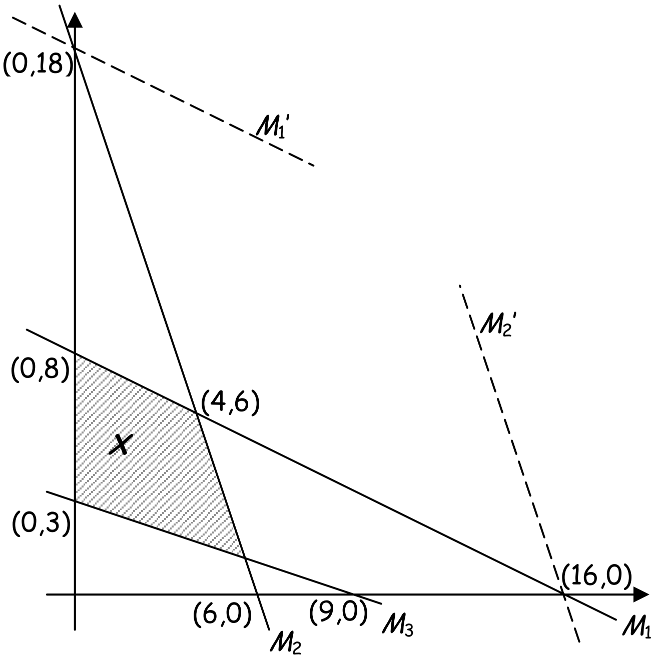
Beraz, gasolioaren produkzioa handiago izango da haren prezioa upelako 23,43€ko baino handiago bada.

2001eko ekaina. Enpresa batek 14 eta 25 hazbeteko telebistak egiten ditu, 400 eta 500 euroko mozkina, hurrenez hurren, lortuz. Produkzio prozesuak hala eskatzen duenez, telebistek enpresaren hiru lantegi ezberdinetatik pasatu behar dute. 14 hazbeteko telebistek 1, 3 eta 1 ordu behar dituzte lehen, bigarren eta hirugarren lantegietan hurrenez hurren, eta 25eko telebistek 2, 1 eta 3. Lehen eta bigarren lantegietan, gehienez, 16 eta 18 ordu eguneko, hurrenez hurren, lan egiten da eta hirugarrenean gutxienez 9 ordu eguneko.

i) Aurkitu eguneko produkzio hoberena enpresak haren mozkina maximizatu nahi badu.
ii) Enpresak nahi izango balu 25 hazbeteko telebistak soilik egitea, zein izan beharko litzateke 14 hazbeteko telebistaren mozkina?
iii) Hasierako baldintzapeetan, enpresak ahal izango balu lantegi batean ordutegia ordu batean handitzea, zein aukeratuko luke?

x_1: 14 hazbeteko telebista kopurua.
x_2: 25 hazbeteko telebista kopurua.

$$\max\ 400x_1 + 500x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 16 \\ 3x_1 + x_2 \le 18 \\ x_1 + 3x_2 \ge 9 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



i) Soluzio egingarrien multzoa trinkoa denez (irudian ikusten dugu) soluzio hoberena erpin batean egongo da, beraz:
$f(0,8)$=4.000€.
$f(0,3)$=1.500€.
$f(45/8,9/8)$=2.812,5€.
$f(4,6)$=4.600€
Soluzio hoberena (4,6) da eta balio hoberena 4.600 euro (enpresak egunero lau 14 hazbeteko telebista eta sei 25 hazbeteko telebista egingo du, mozkin handiena 4.600 euroko izanik).

ii) Helburu funtzioaren maila kurben malda $-\frac{p_{14}}{p_{25}}$ (p_{14} eta p_{25} 14 hazbeteko eta 25eko telebisten mozkinak hurrenez hurren izanik) 25 hazbetekoak soilik produzitu nahi badu:

$-\dfrac{p_{14}}{500}=-m_1=-\dfrac{1}{2}$; p_{14}=250. Horrela soluzio hoberena $\overline{(0,8)(4,6)}$ segmentu osoa izango litzateke, eta p_{14}<250 bada soluzio hoberena (0,8) izango litzateke, hau da, 25 hazbeteko telebistak soilik egingo ditu.

iii) Lehen lantegian ordu kopurua handitu nahi izango balu:
ΔM_1: $x_1+2x_2\le 16+a$.
(4,6)→(0,18).
a=0→a=20 ordu.

$$\lambda_1=\frac{f(0,18)-f(4,6)}{20}=220 \text{ euro/ordu.}$$

Bigarren lantegian ordu kopurua handitu nahi izango balu:
ΔM_2: $3x_1+x_2\le 18+b$.
(4,6)→(16,0).
b=0→b=30 ordu.

$$\lambda_2=\frac{f(16,0)-f(4,6)}{30}=60 \text{ euro/ordu.}$$

Hirugarren murrizketa adierazten duen lantegian ordu gehiago sartzen badugu soluzio hoberena ez da aldatzen, beraz ordu bat gehiago sartzerakoan lehen lantegian sartuko luke, mozkin handiagoa lortzen baitu (ordu horren kostua ez du kontuan hartzen).

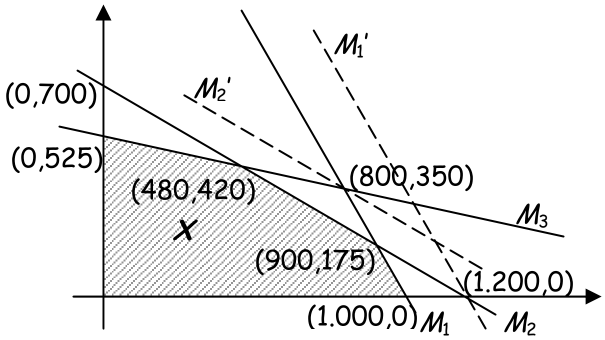
2001eko iraila. Enpresa batek torloju eta azkoin bereziak egiten ditu eta horretarako M_1, M_2 eta M_3 makina desberdinak, bata bestearen atzetik, erabili behar ditu. Torloju bat edo azkoin bat ekoizteko beharrezko denbora makina bakoitzean, makina bakoitzaren astean erabilgarria den denbora eta ekoiztutako unitate bakoitzetik ateratako mozkina taula honetan aurkituko ditugu:

	M_1	M_2	M_3	mozkina
torlojuak	7 min.	7 min.	3,5 min.	0,9€
azkoinak	4 min.	12 min.	16 min.	1€
denbora osoa	7.000 min.	8.400 min.	8.400 min.	

i) Enpresak mozkin handiena lortu nahi badu, aurkitu torloju eta azkoinen asteko produkzio hoberena.
ii) Enpresak nahi izango balu ekoiztutako azkoin kopurua gutxitu, torlojuengatik lortutako mozkina handituz, zenbatetan jarriko luke mozkin hau?
iii) Hasierako baldintzapetan, interesatuko litzaioke enpresari 2. makinaren denbora osoa handitzea? Hala bada, zenbat minututan? Zein preziotan?
iv) Hasierako baldintzapetan, interesatuko litzaioke enpresari 1. makinaren denbora osoa handitzea? Hala bada, zenbat minututan? Zein preziotan?

x_1: torloju kopurua.
x_2: azkoin kopurua.

$$\max\ 0{,}9x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 \le 7.000 \\ 7x_1 + 12x_2 \le 8.400 \\ 3{,}5x_1 + 16x_2 \le 8.400 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$



i) Murrizketen malden bitartez aurkituko dugu maximoa (soluzio egingarrien multzoa bornatua da):
$m_1=-7/4<m_2=-7/12<m_3=-7/32$; eta m_f (helburu funtzioaren malda) –0,9 da, m_1 eta m_2-ren artean dago, hau da, soluzio hoberena M_1 eta M_2 murrizketak ebakitzen diren puntuan dago, hots, (900,175) puntuan (enpresak 900 torloju eta 175 azkoin egingo ditu), eta mozkina handiena $f(900,175)=985$€ da.

ii) Helburu funtzioaren malda $-\dfrac{m_t}{m_a}$, non m_t torlojuen mozkina eta m_a azkoinena diren. Handitzen badugu m_t, helburu funtzioaren malda txikiagoa izanen da... noiz arte? M_1-ena berdindu arte $-\dfrac{m_t}{m_a}=-\dfrac{m_t}{1}=-\dfrac{7}{4}$ beraz, $m_t=1{,}75$ eta horrela soluzio hoberena $\overline{(900,175)(1.000,0)}$ segmentuko edozein puntu izango litzateke; beraz, produkzioa (1.000,0) soilik nahi badugu (eta horrela azkoin bat ere ez genuke ekoiztuko) $m_t>1{,}75$€.

iii) 2. makinaren denbora osoa handitu nahi izango balu:
ΔM_2: $7x_1+12x_2\le 8.400+b$.
(900,175) $\rightarrow$ (800,350).
$b=0 \rightarrow b=1.400$ min.
985€ $\rightarrow$ 1.070€.

$$\lambda_2=\frac{f(800,350)\text{ - }f(900,175)}{1.400}=0{,}85/14=0{,}0607\text{€}.$$

Beraz, interesatuko litzaioke 1.400 minutu gehiago sartzea eta gehienez 0,0607€/min ordainduko luke (3,642€/ordu).

iv) 1. makinaren denbora osoa handitu nahi izango balu:
ΔM_1: $7x_1+4x_2\le 7.000+a$.
(900,175) $\rightarrow$ (1.200,0).
$a=0 \rightarrow a=1.400$ min.
985 $\rightarrow$ 1.080.

$$\lambda_1=\frac{f(1.200,0)-f(900,175)}{1.400}=0{,}95/14=0{,}0678\text{€}.$$

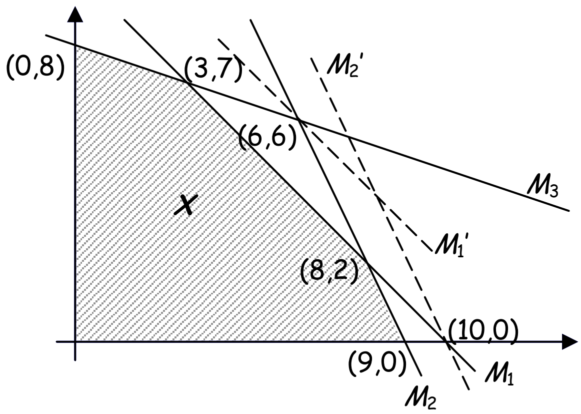
Beraz, interesatuko litzaioke 1.400 minutu gehiago sartzea eta gehienez 0,0678€/min ordainduko luke (4,068€/ordu)

2002ko ekaina. Artisau gozodenda batek bizkotxoak eta magdalenak espezialitate moduan egiten ditu. Egunero 10 dozena baserriko arrautza, 18 kilo irin ekologiko eta 24 kilo azukre beltz ditu haren espezialitateak egiteko; bizkotxo labekada bat egiteko 1 dozena arrautza, 2 kilo irin eta 1 kilo azukre behar ditu, eta magdalenena egiteko ordea, 1 dozena arrautza, 1 kilo irin eta 3 kilo azukre. Bizkotxo labekada bakoitzetik 8€ko sarrera lortzen du eta magdalenenagatik 6€koa.

i) Kalkulatu eguneko espezialitate bakoitzaren labekada kopurua gozogileak sarrera maximoa lortzeko.
ii) Gozogileak bizkotxoen produkzioa txikitu nahi badu, zein izan behar du magdalenen sarrerak non prezio hortik aurretik haren oraingo helburua lortzen duen?
iii) Posible izango balitz eguneroko arrautzen dozena kopurua eta irinaren kiloak handitzea, zenbatetan egingo luke? zenbat egongo litzateke prest ordaintzeko horiengatik?

x_1 bizkotxo labekada kopurua eta x_2 magdalena labekada kopurua bada,

$$\max 8x_1 + 6x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 10 \\ 2x_1 + x_2 \le 18 \\ x_1 + 3x_2 \le 24 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$



i) Murrizketen (m_1, m_2 eta m_3) eta helburu funtzioaren maila kurben (m_f) maldak erabiliko ditugu soluzio hoberena lortzeko:

$$m_2=-2 < m_f=-4/3 < m_1=-1 < m_3=-1/3.$$

Beraz, soluzio hoberena M_1 eta M_2 ebakitzen diren puntuan egongo da, hots, (8,2) puntuan (8 bizkotxo labekada eta 2 magdalena labekada) eta balio hoberena 76€ da.

ii) x_1 txikiagoa izango da $-1<m_f$ denean (horrela soluzio hoberen berria M_1 eta M_3 ebakitzen diren puntuan egongo da, (3,7) puntuan hain zuzen ere).

p_m magdalenen labekadaren prezioa bada, $-1<-\dfrac{8}{p_m} \Rightarrow p_m>8$.

iii) Arrautzen dozena kopurua handitu nahi badu:
ΔM_1: $x_1+x_2\le 10+a$.
$(8,2) \rightarrow (6,6)$.
$a=0 \rightarrow a=2$ dozena.
76€ → 84€.

$$\lambda_1=\frac{f(6,6)-f(8,2)}{2}=4 \text{ euro/dozena.}$$

Irinaren kiloak handitu nahi izango balu:
ΔM_2: $2x_1+x_2\leq 18+b$.
$(8,2) \rightarrow (10,0)$.
$b=0 \rightarrow b=2$ kg.
76€ → 80€.

$$\lambda_2=\frac{f(10,0)-f(8,2)}{2}=2 \text{ euro/kg.}$$

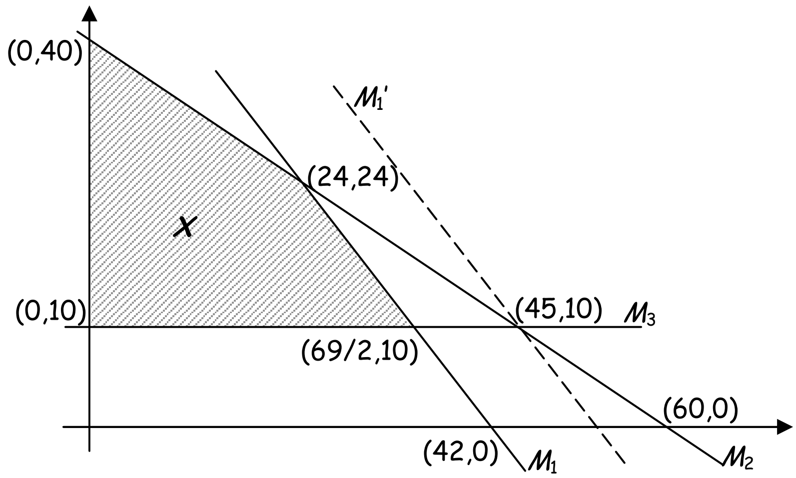
Beraz, 2 dozena arrautza gehiago eskuratuko luke, bakoitza gehienez 4€ dozenako ordainduta eta 2 kilo irin gehiago gehienez 2€ kiloko ordainduta.

2002ko iraila. Lantegi batean zapatak eta botak egiten dira. Lantegian 6 langilek, eguneko 7 ordutan eta asteko 4 egunetan lan egiten dute eta asteko 120 larru-zatiak eskuratzen ditu. Zapata pare bat egiteko 4 lanordu eta 2 larru-zati behar ditu eta bota pare bat egiteko 3 lanordu eta 3 larru-zati. Produzitzen duten guztia saltzen dute eta gainera bezero finkoekin hitzartua dute asteko 10 pare bota.

i) Zapata pare baten prezioa 80€koa eta bota pare batena 75€koa badira, aurkitu sarrera maximizatzen duen asteko produkzioa.
ii) Zein prezio maximo eta minimoren artean egon daiteke zapaten prezioa aurreko apartatuan lortutako soluzioa alda ez dadin?
iii) Interesatuko litzaioke enpresariari eguneko 4 ordu, asteko 4 egunetan eta 10€/ordu soldatarekin lan egingo zuen laguntzaile bat kontratatzea?

x_1: zapata pare kopurua.
x_2: bota pare kopurua.

$$\max 80x_1+75x_2$$
$$\begin{cases} 4x_1+3x_2\leq 168 \\ 2x_1+3x_2\leq 120 \\ x_2\geq 10 \\ x_1\geq 0, x_2\geq 0 \end{cases}$$



i) Soluzio egingarrien multzoa trinkoa denez soluzio hoberena existituko da eta murrizketen eta helburu funtzioaren maila kurben maldak erabiliko ditugu:

$m_1=-\frac{4}{3} < m_f=-\frac{80}{75} < m_2=-\frac{2}{3} < m_3=0$. Beraz, soluzio hoberena M_1 eta M_2 ebakitzen diren puntuan dago, hau da, (24,24) puntuan (lantegiak 24 zapata pare eta 24 bota pare egingo du) eta balio hoberena 3.720€ da.

ii) Horretarako helburu funtzioaren maila kurben malda, lehen eta bigarren murrizketen malden artean kokatu behar da, hots,

$$m_1=-\frac{4}{3} < m_f=-\frac{p_z}{75} < m_2=-\frac{2}{3},$$

non p_z zapaten prezioa baita. Beraz, 50€<p_z<100€ izan behar du.

iii) Laguntzaileak 16 ordu astean lan egingo zuen; ikus dezagun enpresariari interesatzen zaion:
ΔM_1: $4x_1+3x_2\leq 168+a$.
(24,24) $\rightarrow$ (45,10).
a=0 $\rightarrow$ a=42 ordu.
3.720€ $\rightarrow$ 4.350€.

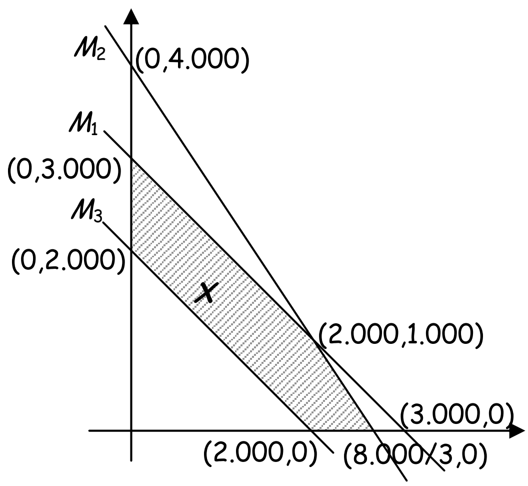
$$\lambda_1=\frac{f(45,10)-f(24,24)}{42}=15 \text{ euro/ordu.}$$

Orduan, enpresariari interesatuko litzaioke 42 ordu gehiago kontratatzea 15 euro/ordu gehienezko prezioan, hots, laguntzaile hori kontratatuko du.

2003ko ekaina. Industria kimiko batek garbiplus eta garbinet garbiketarako bi produktu saltzen ditu. Produktu hauek egiteko bi motako disolbatzaileak urarekin modu egokian nahasiz erabiltzen ditu: litro bat garbiplus ekoizteko 0,005 litro I motako disolbatzaile eta 0,006 litro II motako disolbatzaile behar ditu eta litro bat garbinet ekoizteko 0,005 litro I motako disolbatzaile eta 0,004 litro II motako disolbatzaile. Industriaren disolbatzaileen erabilgarritasunak hauek dira: I motako disolbatzailearena 15 litro eguneko eta II motako disolbatzailearena 16 litro eguneko; gainera, biltegiratze arazoak direla eta, egunero I motako disolbatzailearen 10 litro gutxienez erabili behar ditu. Garbiplus litro bakoitzetik 8€ko mozkina lortzen badu eta garbinet litro bakoitzetik 6€koa:
i) Kalkulatu eguneko garbiketarako produktuen banaketa mozkinak maximotzeko.
ii) Industriak garbinet soilik egin nahi izango balu, zein izan beharko luke garbiplusaren mozkinak litroko?
iii) Disolbatzaileen erabilgarritasunak handitu ahal izango balitu, disolbatzaile bakoitzaren zenbat litro gehiago egongo litzateke prest eskuratzeko? zein preziotan?

x_1: garbiplus litrotan.
x_2: garbinet litrotan.

$$\max 8x_1+6x_2$$
$$\begin{cases} 0,005x_1+0,005x_2\leq 15 \\ 0,006x_1+0,004x_2\leq 16 \\ 0,005x_1+0,005x_2\geq 10 \\ x_1\geq 0, x_2\geq 0 \end{cases}$$



i) X soluzio egingarrien multzoa trinkoa eta f helburu funtzioa jarraia direnez, maximoa existitzen da eta erpin batean gutxienez egongo da:
f(0,2.000)=12.000€.
f(2.000,0)=16.000€.
f(8.000/3,0)=21.333,33€.
f(2.000,1.000)=22.000€.
f(0,3.000)=18.000€.
Beraz, mozkin handiena, 22.000€koa, lortzen du 2.000 litro garbiplus eta 1.000 litro garbinet produzitzen.
Edo beste modu batean, hots, maldak erabiliz (m_1 M_1en malda, m_2 M_2ren malda eta m_f helburu funtzioaren maila kurben malda izanik):

$$-\infty \xleftrightarrow{(8.000/3,0)} m_2 = -3/2 \xleftrightarrow{(2.000,1.000)} m_1 = -1 \xleftrightarrow{(0,3.000)} 0 .$$

Eta m_f=−4/3 m_1 eta m_2 malden artean dagoenez, soluzio hoberena M_1 eta M_2 murrizketak ebakitzen diren puntuan egongo da.

ii) p_{gp} garbiplusaren mozkina bada, helburu funtzioaren maila kurben malda $m_f = -\frac{p_{gp}}{6}$ da.
$m_1 < m_f$ egiten badu, soluzio hoberena (0,3.000) puntuan egongo litzateke, garbinet soilik ekoizten:

$$-1 < m_f \Rightarrow -1 < -\frac{p_{gp}}{6} \Rightarrow 1 > \frac{p_{gp}}{6} \Rightarrow 6€ > p_{gp} .$$

iii) I motako disolbatzailearen erabilgarritasuna handitu ahal izango balu:
ΔM_1: $0{,}005x_1+0{,}005x_2 \leq 15+a$.
(2.000,1.000)→(0,4.000).
a=0→a=5 litro.
22.000€→24.000€.

$$\lambda_1 = \frac{f(0,4.000) - f(2.000,1.000)}{5} = \frac{24.000 - 22.000}{5} = 400 \text{ euro.}$$

II motako disolbatzailearen erabilgarritasuna handitu ahal izango balu:
ΔM_2: $0{,}006x_1+0{,}004x_2 \leq 16+b$.
(2.000,1.000)→(3.000,0).
b=0→b=2 litro.
22.000€→24.000€.

$$\lambda_2 = \frac{f(3.000,0) - f(2.000,1.000)}{2} = \frac{24.000 - 22.000}{2} = 1.000 \text{ euro.}$$

Beraz, I motako disolbatzailearen 5 litro gehiago eskuratuko luke, bakoitza gehienez 400€ litroko ordainduta eta II motako disolbatzailearen 2 litro gehiago gehienez 1.000€ litroko ordainduta.

2003ko iraila. Artisau batek 36 g. kobre, 150 g. eztainu eta 30 g. urre dauka belarritakoak eta eraztunak egiteko. Belarritako pare bat burutzeko 2 g. kobre, 5 g. eztainu eta 1 g. urre behar du eta eraztun bat egiteko 1 g. kobre, 5 g. eztainu eta 2,5 g. urre. Artisauak belarritako pare bat 20€tan saltzen badu eta eraztun bat 30€tan:

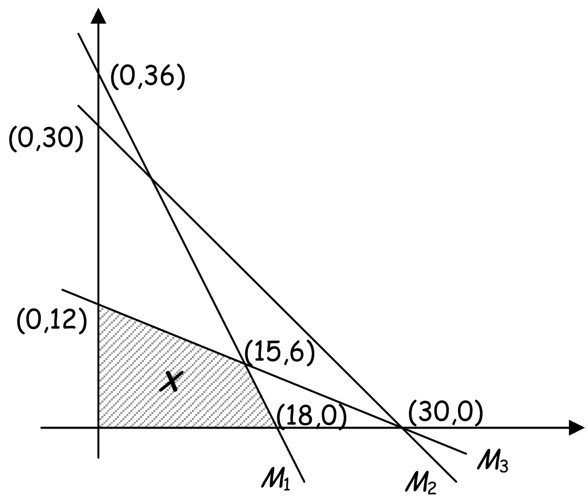
i) Zenbat belarritako pare eta eraztun egingo ditu artisauak haren sarrerak maximizatu nahi baditu?

ii) Kobre gehiago erosi ahal izango balu, zenbat gramo eta zein preziotan erosiko luke?

i) x_1 belarritako pare kopurua eta x_2 eraztun kopurua bada:

$$\max 20x_1 + 30x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 36 \\ 5x_1 + 5x_2 \le 150 \\ x_1 + 2{,}5x_2 \le 30 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



X soluzio egingarrien multzoa trinkoa denez, ziur maximoa lortuko duela eta gutxienez erpin batean:

$f(0,0)=0€$.

$f(0,12)=360€$.

$f(15,6)=480€$.

$f(18,0)=360€$.

Beraz, sarrera maximizatu nahi badu, 15 pare belarritako eta 6 eraztun egingo zituen, 480€ irabaziz.

Malden bitartez egin nahi badugu: (m_1 M_1en malda, m_3 M_3ren malda eta m_f helburu funtzioaren maila kurben malda dira):

$$-\infty \xleftrightarrow{(18,0)} m_1 = -2 \xleftrightarrow{(15,6)} m_3 = -2/5 \xleftrightarrow{(0,12)} 0 .$$

Eta m_f=-2/3 m_1 eta m_3 malden artean dagoenez, soluzio hoberena M_1 eta M_3 murrizketak ebakitzen diren puntuan egongo da, hots, (15,6) puntuan.

ii) Kobre gehiago erosi nahi izango balu:

ΔM_1: $2x_1+x_2\le 36+a$.

(15,6)	(30,0).
a=0	a=24 g.
480€	600€.

$$\lambda_1 = \frac{f(30,0)-f(15,6)}{24} = \frac{600-480}{24} = 5 \text{ euro.}$$

Beraz, 24 g. kobre gehiago eskuratuko luke, gehienez 5€ gramoko ordainduta.

2004ko ekaina. Lore saltzaile batek *A* motako eta *B* motako lore-sortak egiten ditu, liliak eta krabelinak erabiliz. Horretarako 1.800 lili eta 2.400 krabelin ditu. *A* motako lore-sorta bat egiteko 10 lili eta 20 krabelin erabiltzen ditu eta *B* motakoa egiteko 20 lili eta 10 krabelin. Bestalde, saltzaileak badaki ezin duela *B* motako 60 lore-sorta baino gehiago saldu. *A* motako lore-sorta bakoitza 20 eurotan eta *B* motakoa 30 eurotan saltzen baditu,

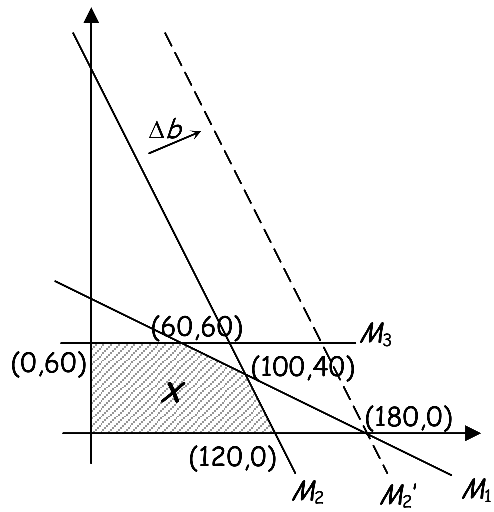
i) Kalkulatu mota bakoitzeko zenbat lore-sorta egin behar ditu haren sarrera maximizatu nahi badu.

ii) Zenbatetan saldu beharko luke *A* motako lore-sorta bakoitza nahi izango balu *B* motako lore-sorta gehiago saldu?

iii) Krabelin gehiago eskuratzea ahal izango balu, zenbat lortuko lituzke? Zer preziotan?

x_1 *A* motako lore-sortak eta x_2 *B* motako lore-sortak badira,

$$\max 20x_1 + 30x_2$$
$$\begin{cases} 10x_1 + 20x_2 \le 1.800 \\ 20x_1 + 10x_2 \le 2.400 \\ x_2 \le 60 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



i) Soluzio egingarrien multzoa trinkoa denez, soluzio hoberena, gutxienez, erpin batean egongo da:
$f(0,0)=0$€.
$f(0,60)=1.800$€.
$f(60,60)=3.000$€.
$f(100,40)=3.200$€.
$f(120,0)=2.400$€.
Beraz, sarrera handiena 100 *A* motako lore-sorta eta 40 *B* motako lore-sorta egiten dituenean lortzen du, hau da, 3.200€.

ii) Helburu funtzioaren maila kurben malda $m_f = -\frac{p_A}{p_B} = -\frac{20}{30}$ denez, p_A *A* motako lore-sorten prezioa eta p_B *B* motakoarena izanik, $m_f > m_1$ bada, soluzio hoberena (60,60) izango da eta beraz, *B* motako lore-sorta gehiago salduko luke, hau da,

$$m_f = -\frac{p_A}{30} > -\frac{1}{2} = m_1 \Rightarrow \frac{p_A}{30} < \frac{1}{2} \Rightarrow p_A < 15 .$$

$$-\infty \xleftrightarrow{(120,0)} m_2 = -2 \xleftrightarrow{(100,40)} m_1 = -\frac{1}{2} \xleftrightarrow{(60,60)} m_3 = 0 .$$

A motako lore-sortak 15€ baino prezio txikiagotan saltzen baditu, haren helburua lortzen du.

iii) Krabelin gehiago eskuratu nahi badu:
ΔM_2: $20x_1+10x_2 \leq 2400+b$.
(100,40)→(180,0).
b=0→b=1.200 krabelin.
3.200€→3.600€.

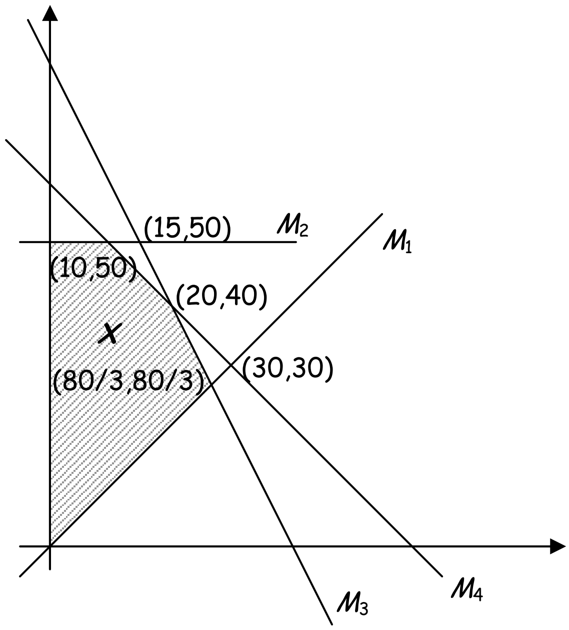
$$\lambda_2 = \frac{f(100,40) - f(180,0)}{1.200} = \frac{3.600 - 3.200}{1.200} = 0,33 \text{ euro.}$$

Beraz, 1.200 krabelin, gehienez, eskuratuko zituen eta bakoitzetik 0,33 euro, gehienez, ordainduko zuen.

2004ko iraila. Ospitale batek giltzurrun eta besikula ebakuntzen itxaron zerrendak gutxitu nahi ditu. Ebakuntza kopuru dela eta, besikula ebakuntzak giltzurrunenak baino gehiago egin nahi ditu. Bestalde, egunero ezin du 50 besikula ebakuntza baino gehiago egin. Giltzurrun ebakuntza bakoitza bi medikurekin eta ordu batean egiten da; besikula ebakuntza bakoitza, ordea, mediku batekin eta ordu batean egiten da. Honelako ebakuntzetarako ospitaleak 5 ordu egunean lan egiten duten 16 mediku ditu eta 5 ordu egunean irekita dauden 12 ebakuntza-gela eskaintzen ditu.
i) Maximizatu egunero egin behar diren ebakuntzak.
ii) Interesatuko litzaioke ospitaleari ebakuntza-gela gehiago eskaintzea? Hala bada, zenbat?
iii) Interesatuko litzaioke ospitaleari mediku gehiago kontratatzea? Hala bada, zenbat kontratatuko zuen?

x_1 giltzurrun ebakuntza eta
x_2 besikula ebakuntzak badira,

$$\max x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} x_2 \geq x_1 \\ x_2 \leq 50 \\ 2x_1 + x_2 \leq 80 \\ x_1 + x_2 \leq 60 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



i) Soluzio egingarrien multzoa trinkoa denez, soluzio hoberena erpin batean, gutxienez, egongo da, beraz,
f(0,0)=0.
f(80/3,80/3)=160/3.

$f(20,40)=60$.
$f(10,50)=60$.
$f(0,50)=50$.
Orduan, ospitaleak ebakuntza kopurua maximizatzen du $\overline{(10,50)(20,40)}$ segmentu osoan.

ii) Ebakuntza-gela gehiago eskaini nahi izango balu:
ΔM_4: $x_1+x_2\leq 60+d$.
$\overline{(10,50)(20,40)}\rightarrow(15,50)$.
$d=0\rightarrow d=5$.
60 ebakuntza$\rightarrow$65 ebakuntza.
Beraz, ebakuntza-gela bat gehiago jarriko luke, egunero 5 ebakuntza gehiago egiteko.

iii) Eta mediku gehiago kontratatuko luke?
ΔM_3: $2x_1+x_2\leq 80+c$.
$\overline{(10,50)(20,40)}\rightarrow(30,30)$.
$c=0\rightarrow c=10$.
60 ebakuntza$\rightarrow$60 ebakuntza.
Ebakuntza kopurua ez da aldatzen, beraz, ez du kontratatuko mediku gehiago.

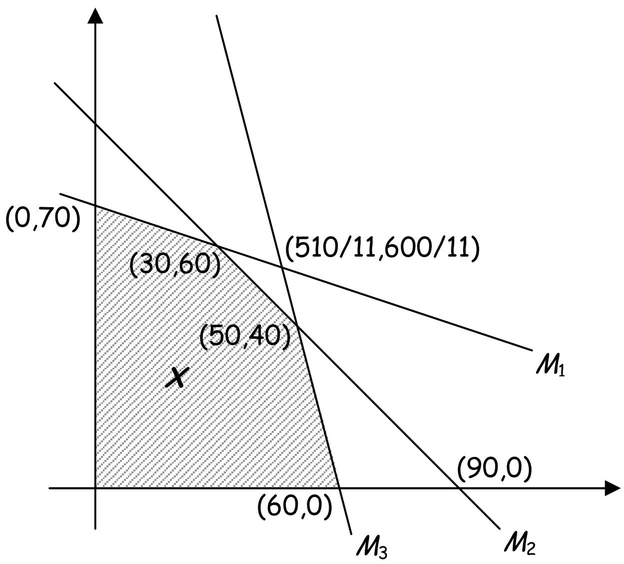
2005eko ekaina. Enpresa batek mahaiak eta aulkiak ekoizten ditu. Horretarako hiru lantegi ditu; lehen lantegian egurrezko piezak prestatzen dira, bigarrenean muntatzen dira eta hirugarrenean bukaera ematen zaie. Taula honetan produktu bakoitza ekoizteko astean beharrezkoak diren orduak ematen dira, hala nola ekoiztutako unitate bakoitzetik lortzen den mozkina. Enpresak badaki hiru lantegien ahalmen erabilgarriarekin produzitzen duen guztia sal dezakeela.

	Mahaiak	Aulkiak	Ahalmen erabilgarria
1. lantegia	1	3	210
2. lantegia	3	3	270
3. lantegia	4	1	240
Mozkina (€)	60	30	

i) Enpresaren helburua mozkina maximizatzea bada, eman programazio linealeko problema eta aurkitu haren soluzio hoberena.
ii) Zein balioren artean egon beharko du mahai bakoitzaren mozkinak soluzio hoberena lehen apartatuan lortutakoa izaten jarraitzeko?
iii) Zein lantegitan izango litzateke interesgarria asteko ordu ahalmen erabilgarria handitzea? Zenbat ordainduko luke enpresak lantegi horien ahalmenari gehitzen zaien orduengatik?

x_1 mahai kopurua eta x_2 aulki kopurua badira,

$$\max 60x_1 + 30x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 210 \\ 3x_1 + 3x_2 \le 270 \\ 4x_1 + x_2 \le 240 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



i) $-\infty \xleftrightarrow{(60,0)} m_3 = -4 \xleftrightarrow{(50,40)} m_2 = -1 \xleftrightarrow{(30,60)} m_1 = -\frac{1}{3} \xleftrightarrow{(0,70)} 0.$

Eta $m_f = -\frac{60}{30} = -2$ denez, soluzio hoberena (50,40) da (50 mahai eta 40 aulki) eta balio (mozkin) hoberena 4.200€.

ii) Horretarako $m_f = -\frac{mz_1}{30}$ adierazpenak (non mz_1 mahaien mozkina den) m_3 eta $m_2$ren artean egon beharko du, hau da:

$$-4 < -\frac{mz_1}{30} < -1 \quad \Rightarrow \quad 1 < \frac{mz_1}{30} < 4 \quad \Rightarrow \quad 30€ < mz_1 < 120€ .$$

iii) Lehen lantegiko ordu guztiak ez dira erabiltzen, beraz, enpresari ez zaio interesatzen ordu gehiago sartzea.

2. lantegian, ordea:
M_2: $3x_1+3x_2=270+b$.
soluzio hoberena: (50,40)$\rightarrow$(510/11,600/11).
b=0$\rightarrow$$b$=360/11=32,7 ordu.
balio hoberena: 4.200€$\rightarrow \frac{48.600}{11}$ €.

$$\lambda_2 = \frac{\frac{48.600}{11} - 4.200}{\frac{360}{11}} = 6,6 \text{ €/ordu}.$$

Gehienez 360/11=32,7 ordu sartuko luke eta gehienez 6,6€ ordainduko luke ordu bakoitzeko.

Eta 3. lantegian:
M_3: $4x_1+x_2=240+c$.
(50,40)→(90,0).
$c=0\rightarrow c=120$ ordu.
balio hoberena: 4.200€→5.400€.

$$\lambda_3=\frac{5.400-4.200}{120}=10\ \text{€/ordu}.$$

Gehienez 120 ordu sartuko luke eta gehienez 10€ ordainduko luke ordu bakoitzeko.

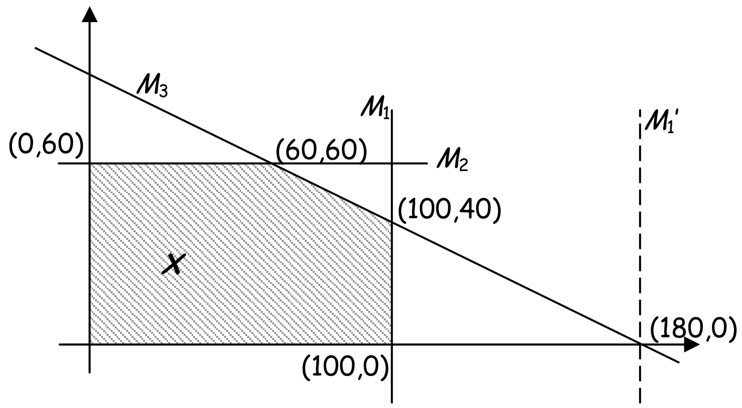
Orduan enpresari ordu gehiago sartzerakoan hirugarren lantegian egingo luke, orduko gehiago irabazten duelako.

2006ko ekaina eta iraila. Bi mediku-zerbitzutan 10 mediku eta 6 mediku daude. Mediku bakoitzak egunean gehienez 10 gaixo hartzen du eta gaixo bakoitzaren kostua lehen zerbitzuan 10€/egun da, bigarrenean 20€/egun den bitartean. Bi zerbitzuen eguneko aurrekontu bateratua 1800€koa bada,

i) Aurkitu zerbitzu bakoitzean eguneko gaixoen esleipena, hartutako gaixoen kopurua maximizatu nahi badute.
ii) Lehen zerbitzuak hartutako gaixo kopurua handitu nahi izango balu, zenbat mediku kontratatuko luke ahalik eta gaixo gehiago hartzeko?

x_1 lehen zerbitzuan hartzen diren gaixoak eta x_2 bigarrenean badira,

$$\max(x_1+x_2)$$
$$\begin{cases} x_1\le 100 \\ x_2\le 60 \\ 10x_1+20x_2\le 1.800 \\ x_1\ge 0;\, x_2\ge 0 \end{cases}$$



i) Soluzio egingarrien multzoa trinkoa denez, soluzio hoberena erpin batean egongo da:
$f(0,0)=0$.
$f(0,60)=60$.
$f(60,60)=120$.
$f(100,40)=140$.
$f(100,0)=100$.
Beraz, lehen zerbitzuak 100 gaixo eta bigarrenak 40 gaixo hartuko dituzte.

ii) Lehen murrizketa (180,0) punturaino eramango dugu eta honela soluzio hoberen berria puntu hau izango da, lehen zerbitzuan 180 gaixo hartzen dutelarik, lehen baino 80 gehiago, beraz, 80/10=8 mediku gehiago kontratatuko lituzkete zerbitzu honetan.

2007ko ekaina. Finantza-erakunde batek Iberdrola eta Telefonica akzioak erosteko 12 milioi euro du. Iberdrolaren akzioen dibidendua %12koa da eta Telefonicarenena, aldiz, %8koa. Egoera honetan, erakundeak inbertitu nahi du Iberdrolaren akzioetan Telefonicaren akzioetan bezainbeste diru gutxienez. Bestalde, gutxienez 3 milioi euro sartu nahi du Telefonicaren akzioetan eta gehienez 8 milioi euro Iberdrolaren akzioetan.

i) Aurkitu bi enpresen akzioetan kapitalaren banaketa mozkin maximoa lortzeko.

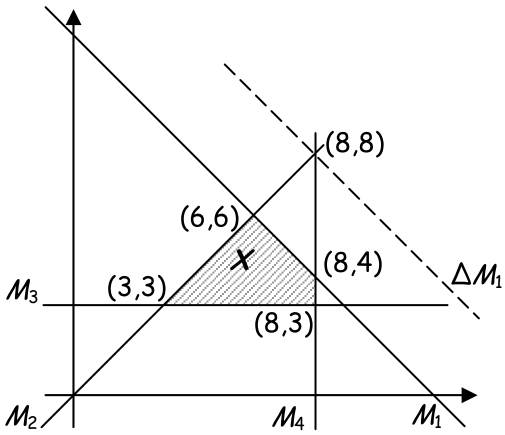
ii) Zein balioren artean egon beharko luke Iberdrolaren akzioen dibidenduak aurreko atalean lortutako soluzioa hoberena alda ez dadin?

iii) Inbertitu nahi izango balu 12 milioi euro baino gehiago eta mailegu bat eskatu behar izango balu, zenbat eskatuko luke? zein interes tasatan?

x_1: Iberdrolako akzioetan kapitala (milioitan).
x_2: Telefonicako akzioetan kapitala (milioitan).

$$\max(0{,}12x_1 + 0{,}08x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 12 \\ x_1 \ge x_2 \\ x_2 \ge 3 \\ x_1 \le 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



i) Soluzio egingarrien multzoa trinkoa denez, maximoa erpin batean aurkituko dugu:

$$f(3,3) = 0{,}6\ ;\ f(6,6) = 1{,}2\ ;\ f(8,4) = 1{,}28\ ;\ f(8,3) = 1{,}2\,.$$

Orduan, Iberdrolako akzioetan 8 milioi euro eta Telefonicako akzioetan 4 milioi euro sartzen baditu, mozkin handiena lortuko du, hots, 1,28 milioi euro.

ii) Horretarako m_f, helburu funtzioaren maila kurben maldaren arabera ($m_f = -\dfrac{d_{ib}}{d_{tlf}} = -\dfrac{d_{ib}}{0{,}08}$, d_{ib} Iberdrolaren dibidendua eta d_{tlf} Telefonicarena izanik) soluzio hoberena sailkatuko dugu:

$$-\infty \xleftrightarrow{(8,4)} m_1 = -1 \xleftrightarrow{(6,6)} 0\,.$$

Helburu funtzioaren maila kurben malda zero baino txikiagoa eta –1 baino handiagoa bada, soluzio hoberena (6,6) izango da eta –1 baino txikiagoa bada, aldiz, (8,4).
Beraz, soluzio hoberena ez aldatzeko

$$-\infty < m_f = -\frac{d_{ib}}{0{,}08} < m_1 = -1$$

izan behar da, hau da, $d_{ib} \ge 0{,}08$. Iberdrolako akzioen dibidendua %8 edo handiagoa bada (Telefonicakoena %12an mantenduz) soluzio hoberena (8,4) izango da.

iii) Duen aurrekontua handitu nahi izango balu:
ΔM_1: $x_1+x_2\leq 12+a$.
$(8,4)\rightarrow(8,8)$.
$a=0\rightarrow a=4$M€.
1,28M€$\rightarrow$1,6M€.

$$\lambda_1=\frac{f(8,8)-f(8,4)}{\Delta a}=\frac{1,6-1,28}{4}=0,08.$$

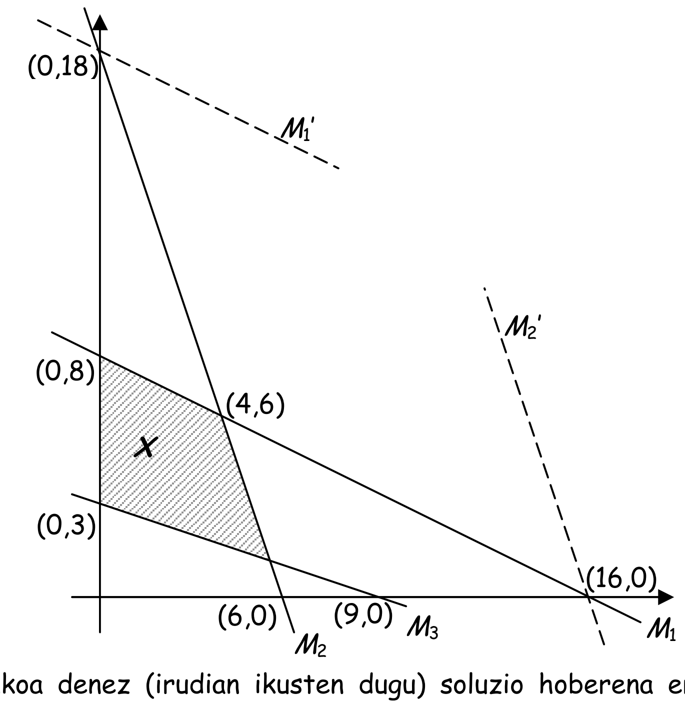
Beraz, gehienez 4 milioi euro eskatuko luke eta gehienez %8 ordainduko du mailegu horrengatik.

2007ko iraila. Ibilgailuen enpresa batek autoak eta furgonetak egiten ditu, 4.000 eta 5.000 euroko mozkina, hurrenez hurren, lortuz. Produkzio prozesuak hala eskatzen duenez, ibilgailuek enpresaren hiru lantegi ezberdinetatik pasatu behar dute. Auto bakoitzak 1, 3 eta 1 ordu behar dituzte *A*, *B* eta *C* lantegietan hurrenez hurren, eta furgoneta bakoitzak 2, 1 eta 3. *A* eta *B* lantegietan, gehienez, 16 eta 18 ordu eguneko, hurrenez hurren, lan egiten da eta hirugarrenean gutxienez 9 ordu eguneko.

i) Aurkitu eguneko produkzio hoberena enpresak haren mozkina maximizatu nahi badu.
ii) Enpresak nahi izango balu furgonetak soilik egitea, zein izan beharko litzateke auto baten mozkina?
iii) Hasierako baldintzapeetan, enpresak ahal izango balu lantegi batean ordutegia ordu batean handitzea, zein aukeratuko luke?

x_1 auto kopurua eta x_2 furgoneta kopurua badira,

$$\max\ 4.000x_1+5.000x_2$$
$$\begin{cases} x_1+2x_2\leq 16\\ 3x_1+x_2\leq 18\\ x_1+3x_2\geq 9\\ x_1\geq 0, x_2\geq 0\end{cases}$$



i) Soluzio egingarrien multzoa trinkoa denez (irudian ikusten dugu) soluzio hoberena erpin batean egongo da, beraz:
$f(0,8)=40.000$€.
$f(0,3)=15.000$€.
$f(45/8,9/8)=28.125$€.

$f(4,6)=46.000$€.
Soluzio hoberena (4,6) da (4 auto eta 6 furgoneta egingo ditu) eta mozkin handiena 46.000 euro.

ii) Helburu funtzioaren maila kurben malda $-\frac{p_a}{p_f}$ (p_a eta p_f autoen eta furgoneten mozkinak hurrenez hurren izanik) bada eta furgonetak soilik produzitu nahi baditu:
$-\frac{p_a}{5000}=-m_1=-\frac{1}{2}$; $p_a=2500$. Horrela soluzio hoberena $\overline{(0,8)(4,6)}$ segmentu osoa izango litzateke, eta $p_a<2500$€ bada soluzio hoberena (0,8) izango litzateke, hau da, furgonetak soilik egingo ditu.

iii) *A* lantegian ordu kopurua handitu nahi badu:
ΔM_1: $x_1+2x_2\le 16+a$.
$(4,6)\to(0,18)$.
$a=0\to a=20$.

$$\lambda_A=\frac{f(0,18)-f(4,6)}{20}=\frac{90.000-46.000}{20}=2.200 \text{ euro/ordu.}$$

Hots, *A* lantegian ordu bat gehiago sartzen badute, 2.200€ irabaziko dute.
B lantegian ordu kopurua handitu nahi badu:
ΔM_2: $3x_1+x_2\le 18+b$.
$(4,6)\to(16,0)$.
$b=0\to b=30$.

$$\lambda_B=\frac{f(16,0)-f(4,6)}{30}=\frac{64.000-46.000}{30}=600 \text{ euro/ordu.}$$

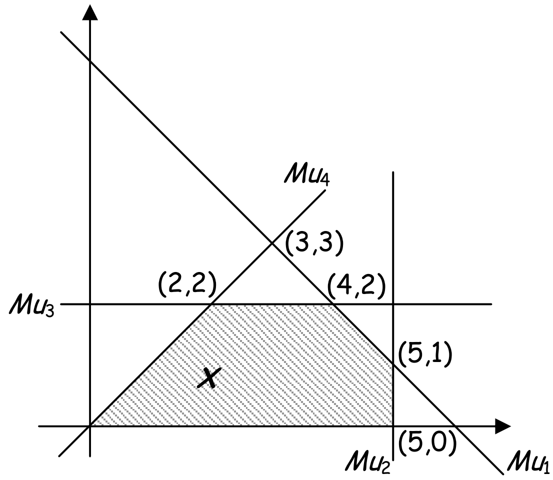
Hots, *B* lantegian ordu bat gehiago sartzen badute, 600€ irabaziko dute.

Hirugarren murrizketa adierazten duen lantegian ordu gehiago sartzen badugu soluzio hoberena ez da aldatzen.
Beraz ordu bat gehiago sartzerakoan *A* lantegian sartuko luke, mozkin handiagoa lortzen baitu.

2008ko ekaina. Eskoziako enpresa batek kalitate desberdineko bi whiski mota (arrunta eta berezia) ekoizten du, M_1, M_2 eta M_3 hiru malta mota erabiliz. M_1 malta motako 36 unitate ditu, M_2 motako 25 unitate eta M_3 motako 8 unitate. Whiski arrunteko unitate bat ekoizteko M_1 malta motako 6 unitate eta M_2 motako 5 unitate behar ditu eta whiski bereziko unitate bat ekoizteko M_1 malta motako 6 unitate eta M_3 motako 4 unitate behar ditu. Eskaria dela eta, whiski arruntaren produkzioa gutxienez whiski bereziaren bezainbestekoa izan behar da. Whiski arruntaren merkatuko prezioa unitateko 20€ da eta bereziarena 30€.
i) Sarrera maximizatzen duen whiski desberdinen produkzioak.
ii) Zein balioren artean egon daiteke whiski arruntaren prezioa lortutako soluzioa alda ez dadin?
iii) Badakigu M_3 malta motako merkatuko prezioa 3€/unitate-koa dela, interesatuko litzaioke produkzioa handitzeko malta mota hau gehiago eskuratzea?

i) x whiski arruntaren unitateak eta y whiski bereziarenak badira,

$$\max 20x + 30y$$
$$\begin{cases} 6x + 6y \le 36 \\ 5x \le 25 \\ 4y \le 8 \\ x \ge y \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$



Eta X, soluzio egingarrien multzoa, trinkoa denez, erpin batean egongo da soluzio hoberena: $f(0,0)=0$, $f(2,2)=100€$, $f(4,2)=140€$, $f(5,1)=130€$ eta $f(5,0)=100€$ direnez, enpresak maximoa whiski arruntaren 4 unitate eta whiski bereziaren 2 unitate produzitzen lortzen du eta 140€ da sarrera handiena.

ii) Murrizketen malden arabera soluzio hoberen hauen banaketa dugu (m_1 Mu_1 lehen murrizketaren malda eta m_3 Mu_3 hirugarren murrizketak maldak izanik):

$$-\infty \xleftrightarrow{(5,1)} -1 = m_1 \xleftrightarrow{(4,2)} 0 = m_3 .$$

Eta helburu funtzioaren maila kurben malda: $m_f = -\frac{20}{30}$. (4,2) soluzio hoberena izango da $m_1 \le m_f \le m_3$ bada, hau da, (wap whiski arruntaren prezioa izanik)

$$-1 \le m_f = -\frac{wap}{30} \le 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \le wap \le 30€ .$$

iii) Hirugarren murrizketaren itzal prezioa kalkulatuko dugu:
Mu_3: $4y \le 8 + a$.
soluzio hoberena: $(4,2) \to (3,3)$.
$a=0 \to a=4$ unitate.
balio hoberena: $140€ \to 150€$.
Orduan, $\lambda_3 = \frac{150 - 140}{4} = 2{,}5€/\text{unitate}$. Beraz, kostua itzal prezioa baina handiagoa denez ez zaio interesatzen.

2008ko iraila. Enpresa batek L_1, L_2 eta L_3 lehengaiak erabiliz P_1 eta P_2 bi produktu egiten ditu. Tona bat P_1 produzitzeko 2 tona L_1, 3 tona L_2 eta tona bat L_3 behar ditu, eta tona bat P_2 egiteko 3 tona L_1, 2 tona L_2 eta 2 tona L_3. Enpresak gaur egun 100 tona L_1, 120 tona L_2 eta 60 tona L_3 ditu. Tona bat P_1 400 eurotan saltzen du eta tona bat P_2, aldiz, 500 eurotan.

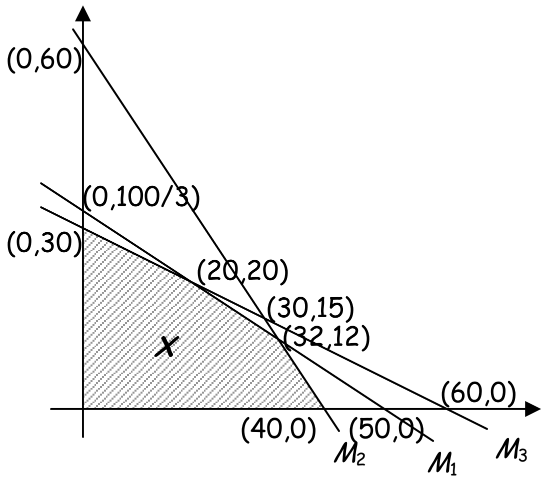
i) Plantea eta ebatzi enpresaren sarrerak maximotzeko programazio linealeko problema.

ii) P_2-ren salmenta prezioa, zer prezioren artean egon daiteke soluzio hoberena aurrekoa izaten jarraituz?

iii) L_1 lehengaiaren tona gehiago erosiko luke enpresak L_1-en kostea 100 €/tona bada? Zenbat erosiko lituzke? Zein izango litzateke orain soluzio hoberena?

x_1 P_1 produktua (tonatan) eta
x_2 P_2 produktua (tonatan) badira,

$$\max(400x_1 + 500x_2)$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 100 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 120 \\ x_1 + 2x_2 \le 60 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



i) Soluzio egingarrien multzoa trinkoa denez, soluzio hoberena gutxienez erpin batean egongo da.

$$-\infty \xleftrightarrow{(40,0)} m_2 = -3/2 \xleftrightarrow{(32,12)} m_1 = -2/3 \xleftrightarrow{(20,20)} m_3 = -1/2 \xleftrightarrow{(0,30)} 0\,.$$

(m_i M_i murrizketaren malda izanik). Eta helburu funtzioaren maila kurben malda: m_f=–4/5, hots, m_2 eta m_1-en artean, soluzio hoberena lehen eta bigarren murrizketen ebaki puntuan lortzen da: soluzio hoberena (32,12) da, hots, 32 tona P_1 eta 12 tona P_2, eta balio hoberena 18.800€koa da.

ii) Helburu funtzioaren malda lehen eta bigarren murrizketen malden artean egon behar du. s_2 P_2 produktuaren salneurria tonako bada:

$$-\frac{3}{2} \le -\frac{400}{s_2} \le -\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{800}{3} \le s_2 \le 600\,.$$

Hau da, P_2-ren salmenta prezioak $\frac{800}{3}$ eta 600 euroen artean egon behar du.

iii) Lehen murrizketa (L_1 lehengaiarena) mugi daiteke bigarren eta hirugarren murrizketen ebaki punturaino, hots, (30,15) punturaino. Kantitate hauek egiteko 2·30+3·15=105 tona L_1 behar dira, hau da, 5 tona gehiago. Balio hoberena 400·30+500·15=19.500€ izango litzateke. Eta L_1-en itzal prezioa:

$$\lambda == \frac{f(30,15) - f(32,12)}{105 - 100} = \frac{19.500 - 18.800}{5} = 140€\,/\,\text{tona}\,.$$

Itzal prezioa benetakoa baino handiagoa denez, 5 tona L_1 gehiago eskuratuko ditu eta soluzio hoberen berria (30,15) izango da.

2009ko ekaina. Pertsona batek 9.000€ ditu A eta B motako bonoetan inbertitzeko. A motako bonoen interes tasa %2koa da eta B motakoena %3,5ekoa. Inbertitu nahi badu A motako bonoetan B motako bonoetan inbertitutakoaren bezainbeste edo gehiago eta 4.000€ gutxienez,

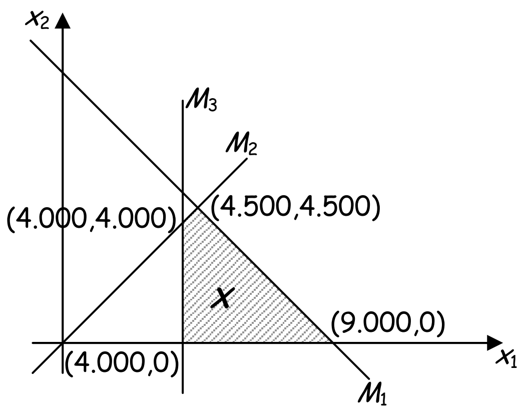
i) Lortu bono mota bakoitzean inbertitu behar duena mozkina maximizatu nahi badu.

ii) Zein balioren artean egon daiteke B motako bonoen interes tasa, aurreko soluzio alda ez dadin?

x_1 A motako bonoetan inbertituko dirua eta x_2 B motako bonoetan inbertitukoa badira,

$$\max 0,02x_1 + 0,035x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 9.000 \\ x_1 \ge x_2 \\ x_1 \ge 4.000 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$



i) Murrizketen malden bitartez ebatziko dugu:

$$-\infty \xleftrightarrow{(9.000,0)} m_1 = -1 \xleftrightarrow{(4.500,4.500)} 0\,.$$

Eta helburu funtzioaren maila kurben malda $m_f = -\frac{20}{35} > -1$ denez, 4.500€ sartuko du bai A baita ere B motako bonoetan, eta 247,5€ irabaziko du.

ii) Horretarako $m_f = -\frac{0,02}{b}$ dugu, non b B motako bonoen interes tasa den, eta hau beteko du:

$$-1 \le m_f = -\frac{0,02}{b} \le 0 \Rightarrow b \ge 0,02\,.$$

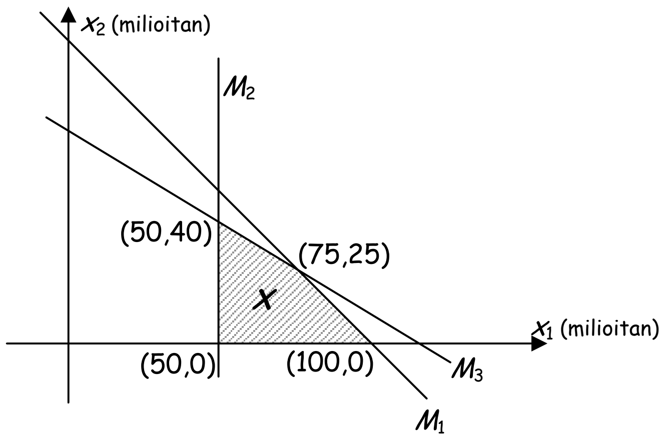
B motako interes tasak %2 baino handiagoa edo berdin izan behar du.

2009ko iraila. Neguko kanpainarako banku batek 100 milioi euro ditu norbanakoentzako eta enpresentzako maileguak eskaintzeko baldintza hauekin: gutxienez diruaren erdia norbanakoentzako maileguetan egon beharko da eta enpresentzako diruaren %50 gehi norbanakoentzakoaren %30 35 milioi euro baino gutxiago izan behar da. Norbanakoentzako maileguen interes tasa %2koa eta enpresentzakoena %4 badira,

i) Aurkitu maileguen banaketa hoberena bankuak mozkina maximizatu nahi badu.
ii) Bankuak enpresentzako maileguetan diru kopurua jaitsi nahi izango balu, haren interes tasa mantenduz, non kokatu beharko zuen norbanakoentzako maileguen interes tasa?
iii) Interesatuko litzaioke bankuari norbanakoentzako maileguen nahitanahiezko kopurua %50etik %30era jaistea?

x_1 norbanakoentzako maileguetan diru kopurua eta x_2 enpresentzako maileguetan diru kopurua badira,

$$\max(0{,}02x_1 + 0{,}04x_2)$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 100.000.000 \\ x_1 \geq 50.000.000 \\ 0{,}3x_1 + 0{,}5x_2 \leq 35.000.000 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$



i) Soluzio hoberena lortzeko, helburu funtzioaren maila kurben malda (m_f) eta murrizketen maldak (m_1 eta m_3) erabiliko ditugu (konturatu 2. murrizketak ez du inolako eraginik soluzio hoberena lortzerakoan):

$$-\infty \xleftrightarrow{(100,0)} m_1 = -1 \xleftrightarrow{(75,25)} m_3 = -\frac{3}{5} \xleftrightarrow{(50,40)} 0\,.$$

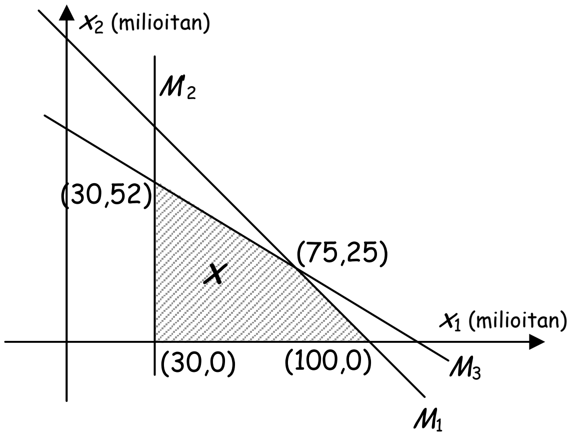
Eta $m_3 < m_f = -\frac{1}{2}$ denez, bankuak 50 milioi euro norbanakoentzako maileguetan eta 40 milioi enpresentzako mailuetan sartuko du, 2.600.000€ irabaziz.

ii) Bankuak 40 milioi euro ditu enpresentzako eta kopuru hau jaitsi nahi du… noraino? Irudian ikusten dugun moduan, 25 milioira (soluzio hoberena (75,25) kokaturik) edo 0ra (soluzioa (100,0)). Hori lortzeko, norbanakoentzako maileguen interes tasa (*nit*) mugitu behar du:

$$m_f = -\frac{nit}{0{,}04} < m_3 = -\frac{3}{5} \Rightarrow nit > 0{,}024\,.$$

Orduan, norbanakoentzako maileguen interes tasa %2,4 baino handiagoa bada, enpresentzako dirua txikituko du bankuak.

iii) Kasu honetan, soluzio hoberena (30,52) puntuan egongo litzateke eta balio hoberena 2,68 milioi euro, hau da, lehen baino gehiago, beraz, interesatuko zaio.



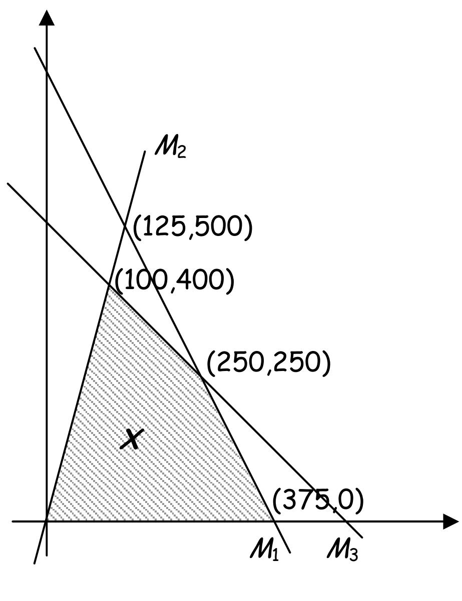
2010eko ekaina. Enpresa batek A eta B bi produktuak merkaturatu nahi ditu. Horretarako 6.000 euroko aurrekontua du; A produktuaren unitate bakoitzaren ekoizpenak 16 euroko kostua du eta B produktuaren unitate bakoitzarenak 8 eurokoa. Ekoiztutako A produktuaren kopuruak, gutxienez, ekoiztutako guztiaren %20 izan behar du, eta produktuen banaketa egin baino lehen 500 unitateko ahalmena duen biltegi batean gordetzen du. A produktuaren unitate bakoitzak 21 eurotan eta B produktuarenak 14 eurotan saltzen badu,

i) Produktu bakoitzaren zenbat unitate ekoiztu behar du sarrera maximizatu nahi badu?
ii) Produktu bakoitzaren zenbat unitate ekoiztu behar du mozkina maximizatu nahi badu?
iii) Mozkina maximizatu nahi badu, interesatuko litzaioke enpresari biltegiko ahalmena handitzea? Hala bada, zenbat unitate gehiago eta zenbat ordainduko zuen honengatik?

x_1 A produktuaren unitateak eta x_2 B produktuaren unitateak dira.

i) Sarrera maximizatu nahi badu:

$$\max(21x_1 + 14x_2)$$
$$\begin{cases} 16x_1 + 8x_2 \le 6.000 \\ x_1 \ge \dfrac{20(x_1 + x_2)}{100} \Rightarrow 4x_1 \ge x_2 \\ x_1 + x_2 \le 500 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$



Soluzio egingarrien multzoa trinkoa denez, maximoa erpin batean egongo da:
$f(0,0) = 0€$.
$f(100,400) = 7.700€$.
$\mathbf{f(250,250) = 8.750€}$.
$f(375,0) = 7.875€$.
Beraz, A eta B produktuen 250 unitate ekoiztuko du, 8.750€ko sarrera izanik.

ii) Mozkina maximizatu nahi badugu:

$$\max(5x_1 + 6x_2)$$
$$\begin{cases} 16x_1 + 8x_2 \leq 6.000 \\ 4x_1 \geq x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 500 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Soluzio egingarrien multzoa trinkoa denez, maximoa erpin batean egongo da:
$f(0,0) = 0€$.
$\mathbf{f(100,400) = 2.900€}$.
$f(250,250) = 2.750€$.
$f(375,0) = 1.875€$.
Beraz, A produktuaren 100 unitate eta B produktuaren 400 unitate ekoiztuko du, 2.900€ko mozkina izanik.

iii) Biltegiaren ahalmena adierazten duen murrizketa $x_1 + x_2 \leq 500$ da, eta helburu funtzioa mozkinarena da, beraz,
$x_1 + x_2 \leq 500 + a$.
ahalmena: a=0 $\rightarrow$ a=125.
soluzio hoberena: (100,400) $\rightarrow$ (125,500).
balio hoberena: 2.900€ $\rightarrow$ 3.625€.

$$\lambda = \frac{3.625 - 2.900}{125} = 5,8€/\text{unitate}.$$

Orduan, interesatuko litzaioke biltegiaren ahalmena 125 unitateetan handitzea eta gehienez 5,8€ ordainduko luke unitateko.

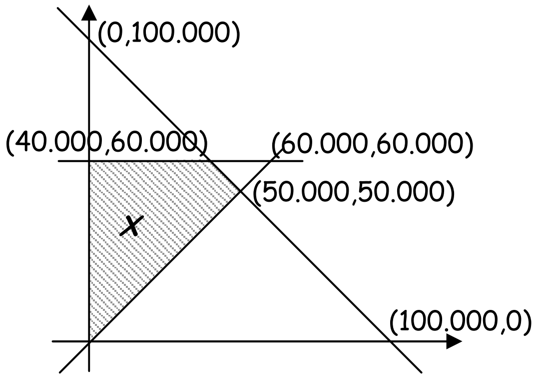
2010eko iraila. Inbertitzaile batek 100.000€ du inbertsio fondo batean edo zor publikoaren bonoetan sartzeko. Fondoaren ezegonkortasunagatik, honetan bonoetan bezain beste edo gutxiago inbertitzea erabaki du, eta aldi berean, zor publikoaren gaineko nazioarteko presioagatik bonoetan 60.000€ edo gutxiago inbertitzea erabaki du. Fondoan duen diruagatik lortzen duen batez besteko korritu tasa %2koa da, zor publikoaren bonoengatik lortutakoa %1,8 den bitartean.

i) Errentagarritasun handiena lortu nahi badu, zenbat sartuko du aktibo bakoitzean?
ii) Fondoaren batez besteko korritu tasa %1,6ra jaisten bada, interesatuko litzaioke inbertsioaren banaketa aldatzea?
iii) Interesatuko litzaioke diru gehiago eskuratzea aktibo hauetan sartzeko? Hala bada, zenbat?, zein izango litzateke diru honen errentagarritasuna?

x_1 inbertsio fondoan sartutako dirua bada eta x_2 zor publikoko bonoetan sartua bada,

$$\max 0,02x_1 + 0,018x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 100.000 \\ x_2 \ge x_1 \\ x_2 \le 60.000 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



i) Soluzio egingarrien multzoa trinkoa da, beraz, soluzio hoberena erpin batean egongo da:
$f(0,0)$=0€.
$f(0,60.000)$=1.080€.
$f(40.000,60.000)$=1.880€.
$f(50.000,50.000)$=1.900€.
Beraz, errentagarritasun handiena (1.900€) lortuko du erdia fondoan eta beste erdia bonoetan sartzen badu.

ii) Kasu honetan helburu funtzioa aldatzen da ($\max 0,016x_1 + 0,018x_2$) eta erpinetan hartzen dituen balioak:
$f(0,0)$=0€.
$f(0,60.000)$=1.080€.
$f(40.000,60.000)$=1.720€.
$f(50.000,50.000)$=1.700€.
Orduan, banaketa aldatuko du, bonoetan 60.000€ eta fondoan 40.000€ sartuz, eta noski, errentagarritasuna handiena lehen baino txikiagoa da (1.720€).

iii) 100.000€ euro baino gehiago izango balu eta inbertituko balu, zer gertatuko litzateke?
ΔM_1: $x_1 + x_2 \le 100.000 + a$.
a=0 $\rightarrow$ a=20.000€.
soluzio hoberena: (50.000,50.000) $\rightarrow$ (60.000,60.000).
balio hoberena: 1.900€ $\rightarrow$ 2.280€.

$$\lambda = \frac{2.280 - 1900}{20.000} = 0,019 .$$

Beraz, 20.000€ gehiago eskuratuko balu, 10.000€ inbertituko luke aktibo bakoitzean %1,9ko errentagarritasuna lortuz.