



Geodésicas en Variedades de Riemann

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas

Álvaro Pámpano Llarena

Trabajo dirigido por
Jose J. Mencía González
Óscar J. Garay Bengoechea

Bilbao, 15 de Mayo de 2014

Índice general

Introducción	v
1. Conceptos Básicos	1
1.1. Métrica de Riemann	1
1.2. Conexión de Levi-Civita	3
1.3. Curvatura	8
2. Geodésicas	11
2.1. Geodésicas	11
2.2. Aplicación Exponencial	15
2.3. Entornos Normales	17
3. Variación de la Energía	21
3.1. Variación	21
3.2. Fórmulas de Variación de la Energía	24
3.3. Campos de Jacobi	29
4. Geodésicas Minimizadoras	31
4.1. Propiedades Minimizadoras de las Geodésicas	31
4.2. Forma Índice	38
4.3. Teorema del Índice de Morse	40
A. B-geodésicas	49
B. Geodésicas Cerradas	53
Bibliografía	57

Introducción

El tema de este trabajo fin de grado va a ser el estudio de curvas geodésicas en el contexto de las variedades de Riemann generalizando así el estudio de las geodésicas en superficies regulares realizado en la asignatura de Geometría Global de Curvas y Superficies de tercero del Grado de Matemáticas de la UPV/EHU.

La idea del trabajo consiste en presentar de forma auto-contenida, a partir de la base que nos proporciona la asignatura de "Variedades Diferenciables", las herramientas geométricas y topológicas necesarias para concluir con un capítulo final, en el que se demostraran algunos de los resultados principales sobre curvas geodésicas.

Para ello vamos a empezar generalizando los conceptos e ideas fundamentales de las superficies regulares a otros objetos matemáticos, las variedades. Estas variedades van a comenzar siendo objetos puramente topológicos sobre los cuales se define una estructura diferenciable que les otorgara una importancia vital en la geometría. Sin embargo, las variedades diferenciables no generalizan todavía todas las propiedades métricas que las superficies regulares poseen, por estar embebidas diferenciablemente en \mathbb{R}^3 .

Es por esto que necesitamos hablar de un concepto esencial en la geometría de Riemann, y no es otro que el de métrica. Este último objeto nos permite definir en nuestra variedad diferenciable, nociones métricas como longitud de curvas, ángulos, volúmenes,...

Como ya hemos anticipado, en el primer capítulo fijaremos los conceptos fundamentales de las variedades de Riemann, dando para este fin todas las definiciones necesarias a partir de las cuales desarrollaremos este trabajo.

En el segundo capítulo, nos centraremos en las curvas geodésicas sobre variedades de Riemann, donde seguiremos presentando nuevos conceptos y breves propiedades respecto a estas curvas. Así como algún objeto necesario para el buen desarrollo final del proyecto. Estos conceptos no serán distintos de los ya vistos en la asignatura de "Geometría Global de Curvas y Superficies" de tercero, pero esta vez, los generalizaremos sobre las ya conocidas variedades riemannianas.

En el penúltimo capítulo, introduciremos el concepto de variación de una curva. Es conveniente recordar que, en principio, este tema al igual que el

anterior estaban en el plan de estudios de tercero, sin embargo, por falta de tiempo, no pudimos estudiar este último, por lo cual he creído necesario incluir las demostraciones de este tema con todo lujo de detalles, para así tener una idea más precisa del contenido, y para estar seguro de que el conocimiento del mismo es el adecuado.

Dentro de este capítulo trataremos las fórmulas de variación, instrumento que tiene una importancia vital en el desarrollo del cálculo variacional. Y a su vez, haremos un ligero acercamiento a los campos de Jacobi, que nos permitieran abordar los resultados del tema principal, el de las Geodésicas Minimizadoras de la Longitud.

Finalmente, alcanzamos el tema principal del trabajo. En este último tema, enunciaremos y demostraremos varios resultados sobre las propiedades minimizadoras de las geodésicas. Mención aparte merece el ya conocido teorema de Hopf-Rinow, que relaciona la completitud métrica con la completitud geodésica. En este tema, el teorema del índice de Morse, es el resultado primordial, y el que lleva la mayor carga teórica para su demostración. No obstante, el trabajo en su demostración es recompensado con las conclusiones que de él pueden extraerse.

Más allá de una explicación de la organización del trabajo, me gustaría mencionar en esta breve introducción, la razón de esta teoría matemática. Es decir, alguna aplicación práctica a otras áreas del conocimiento, donde el estudio de la geometría de Riemann de un espacio a través de sus geodésicas sea fundamental.

Como veremos a lo largo del trabajo, una de las aplicaciones más relevantes es la Teoría de la Relatividad General, donde se modeliza el universo espacio-temporal como una variedad tetradimensional, en este caso, pseudo-riemanniana, dotada de una métrica de Einstein. Y donde la luz se considera que sigue trayectorias geodésicas.

Sin embargo, no es necesario irse a teorías matemáticas tan abstractas para poder observar una aplicación directa del estudio de las curvas geodésicas. En la navegación marítima, por ejemplo, es esencial el conocimiento de la geometría terrestre y de los campos de vectores que actúan sobre esta variedad, para hallar el camino más corto por el que moverse desde un punto inicial hasta el destino.

Por otra parte, a lo largo de este trabajo se intentara visualizar las geodésicas como puntos críticos de un funcional energía, esto nos otorga una iniciación a hallar soluciones variacionales de diferentes "energías", cuyos resultados serán curvas con diferentes propiedades, como por ejemplo, las curvas elásticas.

Por todo lo mencionado anteriormente, creo que este es un tema de gran interés y que a su vez es la base fundamental de muchos problemas físicos y matemáticos.

Capítulo 1

Conceptos Básicos

En este capítulo vamos a definir los conceptos básicos sobre los que se sostiene la geometría de Riemann.

A lo largo del capítulo, trataremos de enunciar resultados importantes que puedan hacernos falta en el futuro, pero omitiendo sus demostraciones, ya que no son nuestra finalidad.

1.1. Métrica de Riemann

Como ya habíamos anticipado, lo primero será definir el concepto de métrica, que nos permitira más adelante, heredar las propiedades de medir longitudes de curvas, ángulos,... de los espacios euclídeos.

Definición 1. Sea M una variedad diferenciable. Una *métrica de Riemann* es un campo tensorial de tipo $(0, 2)$, simétrico y definido positivo.

Observación 1. Una métrica de Riemann g , determina un producto interior en cada espacio tangente, T_pM . Lo denotaremos por,

$$\langle X_p, Y_p \rangle_p = g_p(X_p, Y_p), \forall X_p, Y_p \in T_pM.$$

Una vez que tenemos definida la métrica de Riemann, estamos en condiciones de definir la estructura de variedad riemanniana.

Definición 2. Una *variedad de Riemann* es un par (M, g) , donde M es una variedad diferenciable y g es una métrica de Riemann.

Como todo objeto matemático, las variedades de Riemann, también tienen asociadas su correspondiente morfismo, que nos proponemos definir a continuación.

Definición 3. Sean (M_1, g_1) y (M_2, g_2) dos variedades riemannianas, un difeomorfismo φ de M_1 en M_2 se dice que es una *isometría* si $\varphi^*g_2 = g_1$.

Observación 2. Equivalentemente, una isometría es un difeomorfismo $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ que verifica;

$$\langle X_p, Y_p \rangle_p = \langle \varphi_*(X_p), \varphi_*(Y_p) \rangle_{\varphi(p)}, \forall p \in M_1, X_p, Y_p \in T_p M.$$

Esto es, una isometría entre variedades de Riemann, es un difeomorfismo tal que su aplicación diferencial es una isometría lineal.

Definición 4. Diremos que dos variedades de Riemann son *isométricas* si existe una isometría entre ellas.

Observación 3. Sobre la clase de variedades de Riemann, ser isométricas es una relación de equivalencia.

Ejemplos 1. Vamos a analizar los dos ejemplos más útiles de métricas de Riemann.

1) Sea el espacio euclideo \mathbb{R}^n , tenemos la métrica euclidea \bar{g} ,

$$\bar{g} = \sum_{i=1}^n dx^i dx^i = \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j.$$

2) Sea \tilde{M} una subvariedad inmersa de M , la métrica inducida sobre \tilde{M} es $\tilde{g} = i^*g$.

Pasamos ahora a definir que entendemos por curva sobre una variedad de Riemann, esta definición será fundamental en el desarrollo de este proyecto, ya que trabajaremos constantemente con curvas en variedades de Riemann.

Definición 5. Una *curva C^∞ parametrizada* en una variedad de Riemann es una aplicación $\gamma: I \rightarrow M$ de clase C^∞ , donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto.

Observación 4. Diremos simplemente que una aplicación es diferenciable, para representar que es de clase C^∞ .

Definición 6. Una curva parametrizada se dice *diferenciable a trozos* si existe una partición Δ de I , tal que, $\gamma|_{(t_{i-1}, t_i)}$ es diferenciable. Representaremos, indistintamente la partición Δ como $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$.

Observación 5. Una curva parametrizada admite auto-intersecciones y "esquinas", como podemos observar en la siguiente figura.

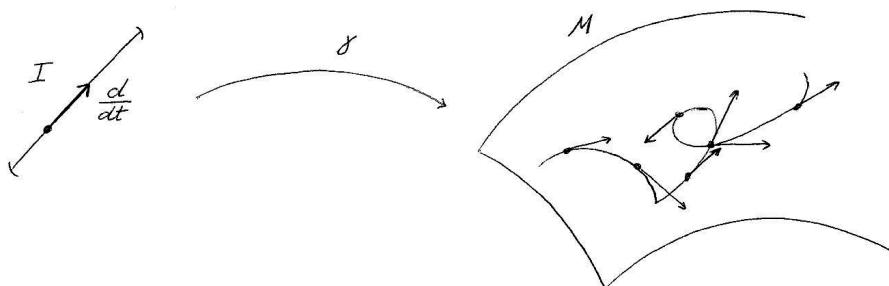


Figura 1.1: Curva Parametrizada.

Observación 6. A lo largo de este trabajo, utilizaremos aplicaciones $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ que serán la restricción al intervalo cerrado $[a, b]$ de curvas parametrizadas diferenciables a trozos. A estas aplicaciones las llamaremos simplemente curvas.

Tal y como se había mencionado previamente, vamos a dotar a las variedades de Riemann de una estructura de espacios métricos, concepto puramente topológico. Para ello necesitamos definir una función de distancia.

Definición 7. Sea (M, g) una variedad de Riemann conexa y $p, q \in M$. Se define la *distancia de Riemann* entre p y q como el ínfimo de las longitudes de los segmentos de curvas diferenciables a trozos que unen p con q . Esto es;

$$d_g(p, q) = \inf_{\gamma} L_g(\gamma) = \inf_{\gamma} \int_I \|\dot{\gamma}(t)\|_g dt,$$

donde γ es diferenciable a trozos y tal que $\gamma(a) = p, \gamma(b) = q$.

Observación 7. Por ser conexa nuestra variedad de Riemann, todo par de puntos pueden unirse mediante una curva diferenciable a trozos. Por tanto, la distancia de Riemann esta bien definida.

A continuación, enunciaremos un teorema que nos relacionara la topología de la variedad de Riemann como variedad diferenciable, con la topología que tiene como espacio métrico con la distancia que acabamos de definir.

Teorema 1.1.1. *Sea (M, g) una variedad de Riemann conexa. Con la función distancia de Riemann, M es un espacio métrico cuya topología es la misma que la que ya tenía como variedad.*

1.2. Conexión de Levi-Civita

Otro concepto básico que utilizaremos en este trabajo será la conexión, este objeto nos permitirá relacionar o "conectar" lo que sucede localmente entre

puntos distintos. En principio, se define sobre variedades diferenciables ya que actúa sobre campos de vectores sin utilizar propiedades de la métrica de Riemann, pero veremos que si trabajamos con una variedad de Riemann, hay una conexión que predomina, la de Levi-Civita.

Definición 8. Una *conexión afín* es una aplicación,

$$\nabla: \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

que a cada par (X, Y) le asocia $\nabla_X Y$ y que verifica;

1) $\nabla_X Y$ es lineal en X sobre $C^\infty(M)$, esto es;

$$\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z, \forall f, g \in C^\infty(M).$$

2) $\nabla_X Y$ es lineal en Y sobre \mathbb{R} , es decir;

$$\nabla_X(aY + bZ) = a\nabla_X Y + b\nabla_X Z, \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

3) ∇ satisface la siguiente regla del producto,

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y, \forall f \in C^\infty(M).$$

A $\nabla_X Y$ se le llama la *derivada covariante de Y en la dirección de X* .

Observación 8. El concepto de conexión afín en M , es local.

Definición 9. Sea $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ una referencia local del fibrado tangente TM en un abierto $U \subset M$. Entonces, para cualquier par de índices i, j , se tiene;

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k},$$

de esta forma obtenemos n^3 funciones Γ_{ij}^k , definidas en U y que las llamamos *símbolos de Christoffel* de la conexión respecto a la referencia $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$.

Observación 9. En coordenadas locales, tenemos la siguiente expresión para los símbolos de Christoffel,

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{mi} - \frac{\partial}{\partial x^m} g_{ij} \right] g^{mk}.$$

Lema 1.2.1. Sea ∇ una conexión afín, y $X, Y \in \chi(U)$, expresados respecto de la referencia local por $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, donde se utiliza el convenio de la suma de Einstein. Entonces,

$$\nabla_X Y = (XY^k + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Teorema 1.2.2. Toda variedad diferenciable admite una conexión afín.

Antes, hemos hablado de campos de vectores en una variedad, y ahora vamos a introducir la idea de campos de vectores sobre una curva.

Definición 10. Un campo de vectores a lo largo de una curva $\gamma: I \rightarrow M$ es una aplicación diferenciable $V: I \rightarrow TM$ tal que $V(t) \in T_{\gamma(t)}M$ para todo $t \in I$.

Definición 11. Un campo de vectores V a lo largo de γ se dice que es *extensible*, si existe un campo de vectores W en un entorno del codominio de γ tal que $\forall t \in I, V(t) = W_{\gamma(t)}$.

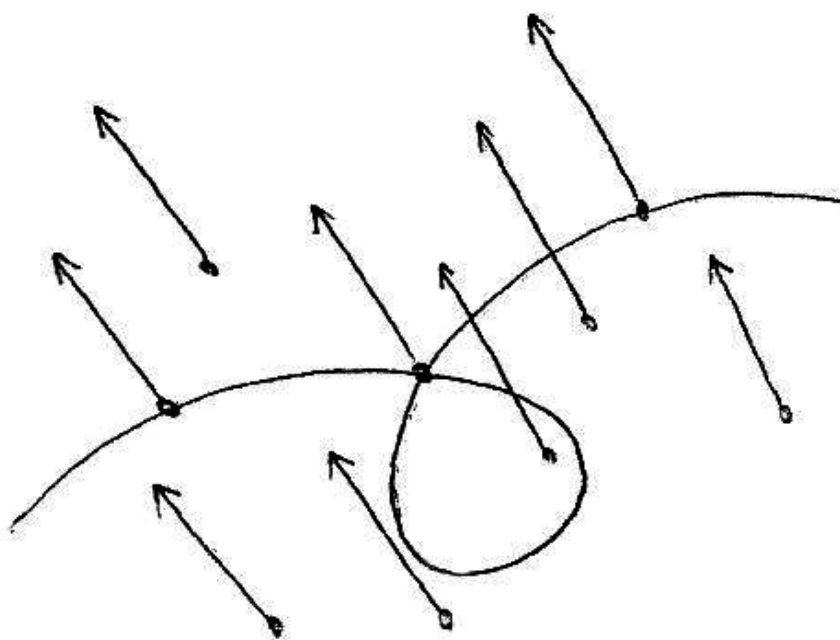


Figura 1.2: Campo Extensible.

Una generalización del operador derivada parcial en \mathbb{R}^n a variedades diferenciables es la derivada covariante que acabamos de definir. Veremos que toda conexión afín nos da lugar a una única derivada covariante de un campo de vectores a lo largo de una curva.

Teorema 1.2.3. Sea ∇ una conexión afín sobre M . Para cada curva $\gamma: I \rightarrow M$, ∇ determina un único operador,

$$D_t: \chi(\gamma) \rightarrow \chi(\gamma)$$

que cumple las siguientes propiedades;

1) Linealidad sobre \mathbb{R} ,

$$D_t(aV + bW) = aD_tV + bD_tW, \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

2) Regla del producto,

$$D_t(fV) = \dot{f}V + fD_tV, \forall f \in C^\infty(I).$$

3) Si V es extensible, entonces para cualquier extensión W de V ,

$$D_tV(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)}W.$$

Definición 12. A D_tV lo llamamos *derivada covariante del campo de vectores V a lo largo de γ* .

Definición 13. Sea M una variedad diferenciable con una conexión afín ∇ . Un campo de vectores V a lo largo de una curva γ se dice que es *paralelo a lo largo de γ con respecto a ∇* si, $D_tV = 0$.

Definición 14. Diremos que un campo de vectores V en M es *paralelo*, si es paralelo a través de cada curva.

Teorema 1.2.4. Dados una curva $\gamma: I \rightarrow M$, $t_0 \in I$, y un vector $V_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$, existe un único campo de vectores V en γ tal que $V(t_0) = V_0$.

Definición 15. A ese único campo de vectores cuya existencia acabamos de enunciar, lo llamaremos *trasladado paralelo* de V_0 a lo largo de γ .

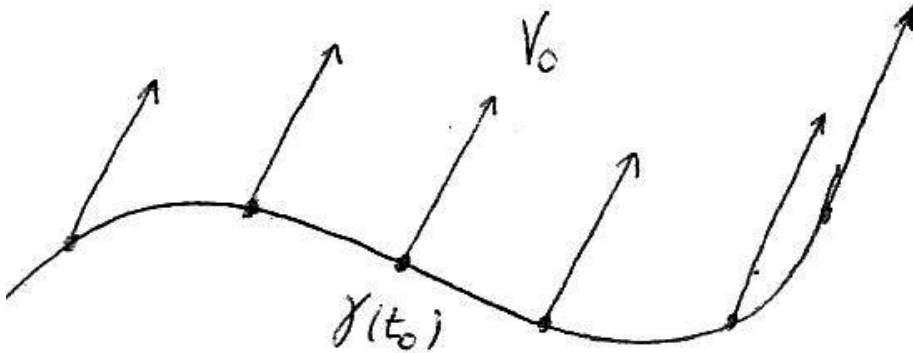


Figura 1.3: Traslado Paralelo.

Observación 10. Si $\gamma: I \rightarrow M$ es una curva y $t_0, t_1 \in I$, el transporte paralelo define un isomorfismo, $P_{t_0t_1}: T_{\gamma(t_0)}M \rightarrow T_{\gamma(t_1)}M$ dado por $P_{t_0t_1}(V_0) = V(t_1)$, donde V es el trasladado paralelo de V_0 a lo largo de γ .

En lo que sigue, intentaremos razonar, por que sobre variedades de Riemann, hay una conexión que predomina respecto al resto. Es aquí, donde nos será útil definir la compatibilidad y la simetría de una conexión.

Definición 16. Sea g una métrica de Riemann en una variedad M . Una conexión afín ∇ se dice que es *compatible* con g si satisface la siguiente regla del producto para cualquier campo $X, Y, Z \in \chi(M)$;

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle.$$

Teorema 1.2.5. Dada una conexión afín ∇ en una variedad de Riemann, las siguientes condiciones son equivalentes;

- 1) ∇ es compatible con g .
- 2) Si V, W son campos de vectores a lo largo de una curva γ ,

$$\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \langle D_t V, W \rangle + \langle V, D_t W \rangle.$$

3) Si V, W son campos de vectores paralelos a lo largo de γ , entonces, $\langle V, W \rangle$ es constante.

4) El transporte paralelo $P_{t_0 t_1}$, es una isometría para cada $t_0, t_1 \in I$.

Definición 17. Sea ∇ una conexión afín sobre M . La aplicación $\tau: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ definida por $\tau(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ se puede entender como un campo tensorial de tipo $(1, 2)$, llamado *torsión* de ∇ .

Definición 18. Una conexión afín ∇ se dice que es *simétrica* si la torsión es nula, es decir, si;

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

Observación 11. Si tomamos una carta local $(U, (x^i))$, el hecho de que el operador ∇ sea simétrico implica que para todos $i, j = 1, \dots, n$,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} = \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0.$$

Esto nos da la razón lógica por la que decimos que la conexión es simétrica.

El siguiente teorema, tal y como nos indicará su nombre, es un pilar básico en la Geometría de Riemann, que nos indica la existencia y unicidad de esa conexión privilegiada de la que tanto hemos hablado.

Teorema 1.2.6 (Teorema Fundamental de la Geometría de Riemann). *Sea (M, g) una variedad de Riemann. Entonces, existe una única conexión afín, ∇ sobre M que es compatible con g y simétrica.*

Definición 19. Esa única conexión diremos que es la *conexión de Levi-Civita* de g .

1.3. Curvatura

Al igual que en el caso de superficies regulares, en las variedades de Riemann, podemos hablar de una curvatura extrínseca, ya que toda variedad diferenciable n -dimensional puede ser embebida en \mathbb{R}^{2n} , como afirma el teorema de embebimiento de Whitney, y además puede ser isométricamente inmersa, tal y como enuncia el teorema de inmersión de Nash-Kuiper. Esta curvatura extrínseca nos mide cuanto varía la variedad de ser euclídea.

Pero, además, se puede hablar de una curvatura intrínseca, como intentaremos explicar a lo largo de la sección.

Trabajaremos con variedades de Riemann, durante el resto del trabajo, salvo que se indique lo contrario.

Definición 20. El homomorfismo de curvatura de Riemann, R , es una aplicación $R: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ que asocia a (X, Y, Z) , el campo de vectores $\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z$. Donde ∇ es la conexión de Levi-Civita.

Observación 12. El homomorfismo de curvatura de Riemann puede verse como un campo de tensores de tipo $(1, 3)$.

Observación 13. Algunos autores prefieren definir el homomorfismo de curvatura de Riemann con signos opuestos.

Observación 14. Si consideramos un sistema coordenado sobre $p \in M$, tenemos que,

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^k} = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\right) \frac{\partial}{\partial x^k},$$

esto es, la curvatura mide la no-conmutatividad de la derivada covariante.

Gracias a la métrica de Riemann, obtenemos una equivalencia entre los campos de tensores de tipo $(0, n)$ con los de tipo $(1, n - 1)$. Mediante esta relación podremos definir una curvatura equivalente al homomorfismo de curvatura, y hablaremos de ellas indistintamente.

Definición 21. Definimos la *curvatura de Riemann* Rm , como el campo de tensores de tipo $(0, 4)$ tal que,

$$Rm(X, Y, Z, T) = \langle R(X, Y)Z, T \rangle.$$

Teorema 1.3.1. El tensor de curvatura de Riemann verifica las siguientes simetrías;

- 1) $Rm(T, X, Y, Z) = -Rm(X, T, Y, Z)$.
- 2) $Rm(T, X, Y, Z) = -Rm(T, X, Z, Y)$.
- 3) $Rm(T, X, Y, Z) = Rm(Y, Z, T, X)$.

Una propiedad que verifica este tensor de curvatura de Riemann, es la identidad algebraica de Bianchi, que enunciamos a continuación.

Teorema 1.3.2 (Identidad de Bianchi). *La identidad algebraica de Bianchi es,*

$$Rm(T, X, Y, Z) + Rm(X, Y, T, Z) + Rm(Y, T, X, Z) = 0.$$

A partir de estas definiciones de curvatura de Riemann, se pueden introducir otros tipos de curvatura, como vamos a analizar en las siguientes líneas.

Definición 22. El *tensor de Ricci*, Rc , es el campo de tensores de tipo $(0, 2)$ que se define como la traza del tensor de curvatura de Riemann en el segundo y último índice.

Observación 15. El tensor de Ricci es un campo de tensores simétrico.

Definición 23. Dado $X_p \in T_pM$ unitario, cogemos una base ortonormal $\{Y_1, \dots, Y_{n-1}\}$ del hiperplano ortogonal a X_p en T_pM , y entonces, definimos la *curvatura de Ricci* como,

$$Rc_p(X_p) = \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(X_p, Y_i)X_p, Y_i \rangle.$$

Proposición 1.3.3. *Sea $\pi \subset T_pM$ un subespacio bi-dimensional, y $X_p, Y_p \in \pi$, dos vectores linealmente independientes. Entonces,*

$$K(X_p, Y_p) = \frac{Rm(X_p, Y_p, X_p, Y_p)}{\|X_p \wedge Y_p\|^2}.$$

Observación 16. En un espacio vectorial \mathbb{V} , la norma del producto vectorial se puede expresar como,

$$\|X \wedge Y\| = \sqrt{\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2}, \quad \forall X, Y \in \mathbb{V}.$$

Definición 24. Dado un punto $p \in M$ y un subespacio bi-dimensional $\pi \subset T_pM$, el número real $K(X_p, Y_p) = K(\pi)$, donde $\{X_p, Y_p\}$ es cualquier base de π , se llama *curvatura seccional* de π en p .

Observación 17. El conocimiento de $K(\pi)$, para todo π , determina completamente la curvatura Rm , calculando primero $Rm(X + Z, Y, X + Z, Y)$, y posteriormente, $Rm(X + Z, Y + T, X + Z, Y + T)$.

Teorema 1.3.4. *La curvatura seccional de una superficie regular es la curvatura de Gauss.*

Observación 18. Nuestro convenio de signos en el homomorfismo de curvatura de Riemann hace que la curvatura seccional de la esfera \mathbb{S}^2 , sea 1. En efecto, si consideramos la parametrización

$$\phi: (0, 2\pi) \times (0, \pi) \longrightarrow \mathbb{S}^2 - \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 | y = 0, x \geq 0\}$$

dada por $\phi(\sigma, \theta) = (\cos \sigma \sin \theta, \sin \sigma \sin \theta, \cos \theta)$. Obtenemos que la métrica inducida viene dada por la matriz,

$$g = \begin{pmatrix} \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De esta forma, obtenemos,

$$R\left(\frac{\partial}{\partial \sigma}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right)\frac{\partial}{\partial \sigma} = \sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Finalmente, tomando el subespacio $\pi = T_p \mathbb{S}^2$,

$$Rm\left(\frac{\partial}{\partial \sigma|_p}, \frac{\partial}{\partial \theta|_p}, \frac{\partial}{\partial \sigma|_p}, \frac{\partial}{\partial \theta|_p}\right) = \sin^2 \theta.$$

Luego, $K(\pi) = 1$.

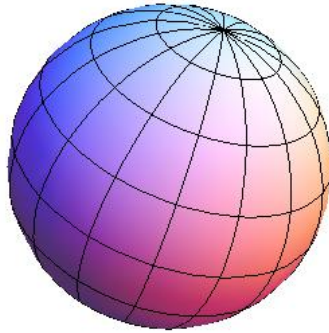


Figura 1.4: Esfera Unidad.

Definición 25. La *curvatura escalar* es la función S definida como la traza del tensor de Ricci.

Observación 19. Al igual que con la curvatura de Riemann, en algunas obras se multiplica a la curvatura escalar por una constante.

Definición 26. Una métrica de Riemann se dice que es una *métrica de Einstein* si en cada punto el tensor de Ricci es un múltiplo escalar de la métrica. Esto es, $Rc = fg$ para alguna función f .

Teorema 1.3.5. Si g es una métrica de Einstein en una variedad conexa de dimensión mayor o igual que tres, su curvatura escalar es constante.

Capítulo 2

Geodésicas

En este capítulo, como ya hemos mencionado al presentar el trabajo, vamos a introducir la definición formal de las curvas geodésicas, así como dos objetos matemáticos que nos serán de gran utilidad más adelante, cuando intentemos hallar propiedades de estas curvas. En este tema, incluiremos las demostraciones principales, ya que, se convertirán en la base de la última parte del proyecto, sin embargo, omitiremos otras que no tengan una gran utilidad en el futuro, para intentar reducir las dimensiones del trabajo.

2.1. Geodésicas

En esta sección lo fundamental es dar una definición rigurosa de curva geodésica en una variedad de Riemann, pero antes, necesitamos comprender la aceleración.

Definición 27. Sea M una variedad con una conexión ∇ , y sea γ una curva en M . La *aceleración* de γ es el campo de vectores $D_t\dot{\gamma}$ a lo largo de γ .

Definición 28. Diremos que una curva γ es una *geodésica* con respecto a ∇ , si su aceleración es cero. Es decir, si $D_t\dot{\gamma} = 0$.

Observación 20. Una geodésica es una curva cuyo campo de vectores velocidad es paralelo a lo largo de la curva.

Nuestro objetivo ahora, es introducir un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que determinen las geodésicas en las variedades de Riemann. Para ello debemos apoyarnos en los símbolos de Christoffel de la conexión de Levi-Civita.

Teorema 2.1.1 (Ecuaciones Locales de las Geodésicas). *Sea $(U, (x^i))$ una carta local y $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ una curva diferenciable tal que $\gamma([a, b]) \subset U$. Entonces, γ es una geodésica si y solo si, sus funciones coordenadas $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ satisfacen,*

$$\ddot{x}^k(t) + \dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)\Gamma_{ij}^k(x(t)) = 0.$$

Demostración. Observemos que γ es una geodésica si y solo si $D_t\dot{\gamma} = 0$. Si consideramos la carta local $(U, (x^i))$, sea $V \in \chi(U)$ tal que $V_{\gamma(t)} = \dot{\gamma}(t)$. Entonces tenemos que, $D_t\dot{\gamma} = \nabla_{\dot{\gamma}}V$. Y por el Lema 1.2.1 y la regla de la cadena, obtenemos,

$$\ddot{x}^k(t) + \dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)\Gamma_{ij}^k(x(t)) = 0.$$

Que es, justamente, lo que queríamos demostrar. \square

Ejemplo 1. Consideremos el plano \mathbb{R}^2 con la conexión definida por los siguientes símbolos de Christoffel, $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 1$ y todos los demás nulos. Vamos a hallar la geodésica que parte de $p = (2, 1)$ y con el campo de velocidades $V = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$.

Por la Ecuación Local de las Geodésicas que acabamos de demostrar, tenemos que,

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\dot{x}\dot{y} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ x(0) = 2, \dot{x}(0) = 1 \\ y(0) = 1, \dot{y}(0) = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto, obtenemos la curva geodésica $\gamma(t) = (\frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}, 1 + t)$.

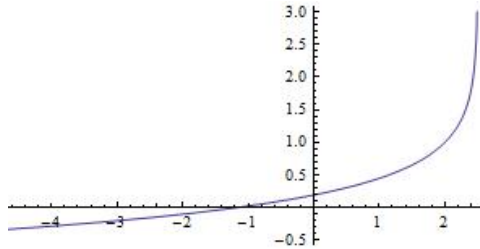


Figura 2.1: Geodésica.

Gracias al sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que acabamos de conseguir, podemos enunciar el siguiente teorema sobre existencia y unicidad de curvas geodésicas en cada punto y para cada dirección, apoyándonos en la existencia y unicidad de solución de estos sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Teorema 2.1.2 (Existencia y Unicidad de las Geodésicas). *Sea M una variedad con una conexión afín. Para cada $p \in M$, $V \in T_pM$, $t_0 \in \mathbb{R}$, existe un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$ que contiene a t_0 y una única geodésica $\gamma: I \rightarrow M$ que satisface, $\gamma(t_0) = p$, $\dot{\gamma}(t_0) = V$.*

Demostración. Consideremos las coordenadas (x^i) en un entorno de U , con $p \in U$. Una curva $\gamma: I \rightarrow M$ es una geodésica si y solo si sus funciones componentes $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ satisfacen la ecuación de las geodésicas,

$$\ddot{x}^k(t) + \dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)\Gamma_{ij}^k(x(t)) = 0.$$

Llamamos $v^i = \dot{x}^i$, y conseguimos el sistema,

$$\begin{cases} \dot{x}^k(t) = v^k(t) \\ \dot{v}^k(t) = -v^i(t)v^j(t)\Gamma_{ij}^k(x(t)). \end{cases}$$

Finalmente, por el teorema de existencia y unicidad de los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden, concluimos la existencia y unicidad de la geodésica que verifica las condiciones del teorema. \square

Ejemplo 2. Veamos que los meridianos de las superficies de revolución son todos geodésicas. Consideramos la curva $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\gamma(t) = (0, f(t), g(t))$ donde $f, g \in C^2$ y $f \neq 0$, que suponemos parametrizada por la longitud de arco. Si hacemos girar γ respecto del eje OZ obtenemos la superficie de revolución, que admite como parametrización a,

$$\phi(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)).$$

Es fácil ver que la métrica inducida es,

$$g = \begin{pmatrix} f^2 & 0 \\ 0 & \dot{f}^2 + \dot{g}^2 \end{pmatrix}.$$

Y entonces, tenemos los siguientes símbolos de Christoffel,

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = 0 \\ \Gamma_{11}^2 = \frac{-f\dot{f}}{\dot{f}^2 + \dot{g}^2} \\ \Gamma_{12}^1 = \frac{\dot{f}}{f} \\ \Gamma_{12}^2 = 0 \\ \Gamma_{22}^1 = 0 \\ \Gamma_{22}^2 = \frac{\dot{f}\ddot{f} + \dot{g}\ddot{g}}{\dot{f}^2 + \dot{g}^2} \end{cases}.$$

Por lo que tenemos la ecuación local de las geodésicas en una superficie de revolución,

$$\begin{cases} \ddot{u} + 2\dot{u}\dot{v}\frac{\dot{f}}{f} = 0 \\ \ddot{v} + \dot{u}^2 \frac{-f\dot{f}}{\dot{f}^2 + \dot{g}^2} + \dot{v}^2 \frac{\dot{f}\ddot{f} + \dot{g}\ddot{g}}{\dot{f}^2 + \dot{g}^2} = 0 \end{cases}.$$

Finalmente, si consideramos los meridianos $u = c$, $c \in \mathbb{R}$, y derivando la condición de que la curva generatriz este parametrizada por la longitud de arco, observamos que las dos ecuaciones se verifican trivialmente.

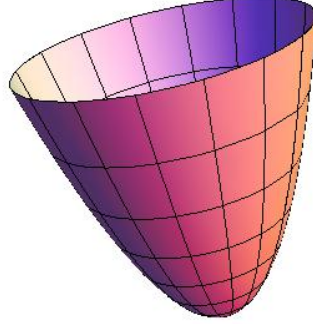


Figura 2.2: Paraboloide de Revolución.

Lema 2.1.3. *Todas las geodésicas de Riemann son curvas de velocidad constante.*

Demostración. Sea γ una geodésica riemanniana. Como $\dot{\gamma}$ es paralelo a lo largo de γ , su longitud $\|\dot{\gamma}\| = \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle^{1/2}$ es constante por el Teorema 1.2.4, apartado 3. \square

Ejemplo 3. Sea (M, g) una variedad de Riemann, y $f \in C^\infty(M)$ tal que $\|\text{grad}f\|_g = 1$ en todo punto. Veamos que en estas condiciones, las curvas integrales de $\text{grad}f$ son curvas geodésicas.

Sea $X = \text{grad}f$, basta ver que $\langle \nabla_X X, Y \rangle = 0$, para todo $Y \in \chi(M)$. Entonces, por la compatibilidad de la conexión tenemos,

$$\langle \nabla_X X, Y \rangle = X\langle X, Y \rangle - \langle X, \nabla_X Y \rangle.$$

Además por ser $X = \text{grad}f$, $\langle X, Y \rangle = df(Y)$, es decir,

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X X, Y \rangle &= Xdf(Y) - \langle X, \nabla_X Y \rangle = XYf - \langle X, \nabla_X Y \rangle = \\ &= YXf + [X, Y]f - \langle X, \nabla_X Y \rangle. \end{aligned}$$

Por otra parte, por ser $\langle X, X \rangle = 1$, $YXf = Y\langle X, X \rangle = Y1 = 0$, luego,

$$\langle \nabla_X X, Y \rangle = [X, Y]f - \langle X, \nabla_X Y \rangle = \langle X, [X, Y] - \nabla_X Y \rangle.$$

Finalmente, por la simetría de la conexión, obtenemos que,

$$\langle \nabla_X X, Y \rangle = \langle X, \nabla_Y X \rangle = 0.$$

Ya que, $\langle X, X \rangle = 1$, implica que $Y\langle X, X \rangle = 2\langle X, \nabla_Y X \rangle = 0$.

Observación 21. El carácter geodésico de una curva es intrínseco de la variedad, esto es, las curvas geodésicas son invariantes por isometrías locales.

El siguiente concepto nos permitirá, en lo que sigue, acortar los enunciados, haciendo la lectura más amena.

Definición 29. Una *curva parametrizada regular* es una curva diferenciable $\gamma: I \rightarrow M$ tal que $\dot{\gamma}(t) \neq 0, \forall t \in I$.

Observación 22. Como las geodésicas tienen velocidad constante, son curvas regulares, o bien constantes.

Definición 30. Para cada $p \in M$ y $V \in T_pM$, llamamos *geodésica maximal* a aquella geodésica que no se puede extender a ningún intervalo mayor, en el sentido de la inclusión. La denotaremos como γ_V , y nos referiremos a ella como la geodésica con punto inicial p y velocidad inicial V .

2.2. Aplicación Exponencial

Un objeto matemático íntimamente relacionado con las geodésicas es la aplicación exponencial, que definiremos a continuación, y que nos permitirá demostrar el Lema de Reescalamiento para curvas geodésicas.

Definición 31. Sea $\varepsilon \subseteq TM$, el dominio de la aplicación exponencial definido por,

$$\varepsilon = \{V \in TM \mid \gamma_V \text{ está definida en un intervalo que contiene al } [0, 1]\},$$

Definimos la *aplicación exponencial*, $exp: \varepsilon \rightarrow M$ como $exp(V) = \gamma_V(1)$.

Observación 23. Para cada $p \in M$, la aplicación exponencial restringida, exp_p , es la restricción de exp al subconjunto $\varepsilon_p = \varepsilon \cap T_pM$.

Proposición 2.2.1. *Propiedades de la aplicación exponencial;*

- 1) ε es abierto en TM y contiene a la sección cero. Además, cada ε_p es estrellado respecto al origen.
- 2) Para cada $V \in TM$, la geodésica γ_V viene dada por,

$$\gamma_V(t) = exp(tV),$$

para todo t , donde ambos lados esten definidos.

- 3) La aplicación exponencial es diferenciable.

Lema 2.2.2 (Lema de Reescalamiento). Para cada $V \in TM$ y $c, t \in \mathbb{R}$, $\gamma_{cV}(t) = \gamma_V(ct)$, siempre que ambos lados esten definidos.

Demostración. Supongamos que sea el intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$ el dominio de γ_V . Definimos una nueva curva α mediante, $\alpha(t) = \gamma_V(ct)$. Veamos que α es la geodésica con punto inicial p y velocidad cV . De la definición de α tenemos que,

$$\alpha(0) = \gamma_V(0) = p.$$

Además, considerando la expresión en coordenadas locales,

$$\gamma(t) = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t)).$$

Por la regla de la cadena,

$$\dot{\alpha}^i(t) = \frac{d}{dt}(\gamma_V^i(ct)) = c\dot{\gamma}_V^i(ct).$$

Luego, $\dot{\alpha}(0) = c\dot{\gamma}_V(0) = cV$. Finalmente, vamos a comprobar que cumple la ecuación de las geodésicas, para ello denotamos, D_{t_γ} y D_{t_α} a los operadores derivada covariante de γ y α , respectivamente.

$$\begin{aligned} D_{t_\alpha}\dot{\alpha}(t) &= \left(\frac{d}{dt}\dot{\alpha}^k(t) + \Gamma_{ij}^k(\alpha(t))\dot{\alpha}^i(t)\dot{\alpha}^j(t)\right)\partial_k = \\ &= c^2(\ddot{\gamma}_V^k(ct) + \Gamma_{ij}^k(\gamma_V(ct))\dot{\gamma}_V^i(ct)\dot{\gamma}_V^j(ct))\partial_k = c^2 D_{t_\gamma}\dot{\gamma}(ct) = 0. \end{aligned}$$

Es decir, α es la única geodésica con esas condiciones iniciales, luego se verifica la igualdad buscada. \square

Proposición 2.2.3 (Naturalidad de la Aplicación Exponencial). *Sea φ una isometría. Entonces, para cada $p \in M$ se tiene que,*

$$\varphi \circ \exp_p = \exp_{\varphi(p)} \circ \varphi_*.$$

Una vez conocidos estos conceptos, podemos dar una interpretación de la curvatura seccional.

Definición 32. Sea M una variedad de Riemann de dimensión n y $p \in M$. Si π es un subespacio bi-dimensional cualquiera de T_pM , y $V \subset T_pM$ es un entorno del cero en el que \exp_p es un difeomorfismo, entonces $S_\pi = \exp_p(\pi \cap V)$ es una subvariedad bi-dimensional de M que contiene a p , llamada la *sección plana* determinada por π .

Observación 24. La curvatura seccional de una variedad de Riemann M es la curvatura de Gauss de la sección plana.

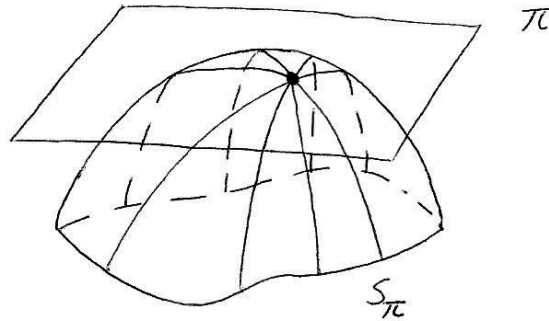


Figura 2.3: Sección Plana.

Observación 25. S_π es el conjunto delimitado por las geodésicas con velocidad inicial en el subespacio π .

2.3. Entornos Normales

Introduciremos en las siguientes líneas el concepto de entorno normal, que mediante la aplicación exponencial restringida, nos permite trasladar algunas propiedades de los entornos en espacios euclídeos a entornos de nuestra variedad. En este caso, nuestro espacio euclídeo será el espacio tangente.

Definición 33. Llamamos *entorno normal* a cada entorno abierto U de $p \in M$, que es la imagen difeomorfa de un entorno abierto estrellado del $0 \in T_pM$ a través de \exp_p .

Teorema 2.3.1 (Teorema de Entornos Normales). *Para cada $p \in M$, hay un entorno V del origen de T_pM y un entorno U de p en M tal que $\exp_p: V \rightarrow U$ es un difeomorfismo.*

Demostración. Una vez que veamos que la diferencial de la aplicación exponencial restringida a p sea invertible en el 0, por el teorema de la función inversa, quedará demostrado el teorema. Veamos, por lo tanto, que es $(\exp_p)_*$. Sea $V \in T_pM$ arbitrario, tomamos $\tau(t) = tV$ y entonces,

$$(\exp_p)_*V = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\exp_p \circ \tau)(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp_p(tV) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_V(t) = V.$$

Es decir, la diferencial de la aplicación exponencial restringida es la identidad, y queda demostrado el teorema. \square

Definición 34. Sea $\epsilon > 0$ tal que \exp_p es un difeomorfismo en la bola $B_\epsilon(0) \subset T_pM$, entonces el conjunto imagen, $\exp_p(B_\epsilon(0))$, diremos que es una *bola geodésica abierta* en M .

Observación 26. El radio de esa bola se mide con respecto a la norma inducida por la métrica g .

Definición 35. En las condiciones de la definición anterior, se llama *bola geodésica cerrada* a, $\exp_p(\bar{B}_\epsilon(0))$.

Definición 36. De la misma forma, $\exp_p(\partial\bar{B}_\epsilon(0))$, diremos que es la *esfera geodésica*.

Como ya sabemos, una de las condiciones esenciales de una variedad diferenciable, es la existencia de un atlas formado por cartas locales. Vamos a ver un tipo de cartas locales especiales, que podemos definir utilizando para ello entornos normales y la aplicación exponencial.

Definición 37. Dada una base ortonormal $\{\frac{\partial}{\partial x^i}|_p\}$ de T_pM , mediante esta, se define un isomorfismo $E: \mathbb{R}^n \rightarrow T_pM$ que a cada n-tupla (x^1, \dots, x^n) le asocia $x^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$. Si consideramos un entorno normal de p , U , podemos conseguir una carta coordenada mediante, $\varphi = E^{-1} \circ \exp_p^{-1}$. A ese tipo de cartas coordenadas se las conoce como *coordenadas normales de Riemann* centradas en p .

Una vez introducidas las coordenadas normales de Riemann, estas nos inducen una función distancia y un campo de vectores radiales dentro de su entorno.

Definición 38. En una carta coordenada normal centrada en p , definimos la función *distancia radial* por,

$$r(x) = \left(\sum_{i=1}^n (x^i)^2 \right)^{1/2},$$

y el *campo de vectores radiales unitarios* por,

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{x^i}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Definición 39. Llamamos *geodésicas radiales* a las geodésicas que empiezan en p y se mantienen en un entorno normal de p .

A pesar de las magníficas propiedades que heredan los entornos normales, nos vemos con la necesidad de ser más estrictos en las condiciones, como se comprenderá en el cuarto capítulo, y de definir unos entornos más adecuados.

Definición 40. Un subconjunto abierto $W \subseteq M$ se dice que es *totalmente normal*, si existe un $\delta > 0$ tal que W está contenido en la bola geodésica de radio δ alrededor de cada uno de sus puntos.

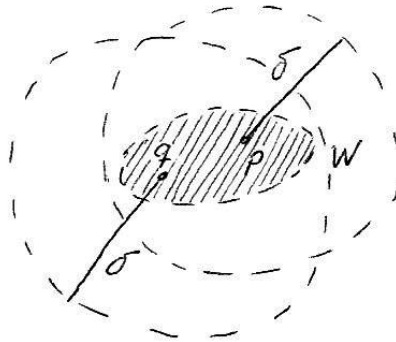


Figura 2.4: Entorno Totalmente Normal.

Teorema 2.3.2 (Teorema de los Entornos Totalmente Normales). *Dado $p \in M$ y un entorno U de p , existe un entorno totalmente normal W de p contenido en U .*

Demostración. Definimos la función $F: \varepsilon \rightarrow M \times M$ por $F(q, V) = (q, \exp_q V)$. Tomamos la carta de coordenadas normales (x^i) para M centradas en p , y consideramos (x^i, v^i) las coordenadas en TM . En estas coordenadas, la matriz jacobiana de F en $(p, 0)$ se escribe,

$$F_* = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^i}{\partial x^j} & \frac{\partial x^i}{\partial v^j} \\ \frac{\partial \exp^i}{\partial x^j} & \frac{\partial \exp^i}{\partial v^j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ * & Id \end{pmatrix},$$

y es invertible. Por lo tanto, por el teorema de la función inversa, F es un difeomorfismo entre un entorno \mathcal{O} de $(p, 0)$ en TM en su imagen.

Para cualquier abierto $\mathcal{Y} \subset M$ y cualquier $\delta > 0$, sea \mathcal{Y}_δ el subconjunto de TM dado por,

$$\mathcal{Y}_\delta = \{(p, v) \in TM \mid p \in \mathcal{Y}, \|v\| < \delta\},$$

donde $\|\cdot\|$ denota la norma inducida por g . Si escribimos la desigualdad, $\|v\| < \delta$ en coordenadas locales, es fácil ver que \mathcal{Y}_δ es un abierto en la topología de TM . Vamos a demostrar, que existe algún conjunto de la forma \mathcal{Y}_δ tal que $(p, 0) \in \mathcal{Y}_\delta \subset \mathcal{O}$. Como la topología de TM esta generada por abiertos en el producto de la trivialización local, existe $\varepsilon > 0$ tal que el conjunto $\mathcal{X} = \{(x, v) \mid r(x) < 2\varepsilon, \|v\|_{\bar{g}} < 2\varepsilon\}$ este contenido en \mathcal{O} . En el compacto $K = \{(x, v) \mid r(x) \leq 2\varepsilon, \|v\|_{\bar{g}} = \varepsilon\}$, la g -norma es continua y no se anula, por tanto esta acotada por arriba y por abajo por constantes positivas. Se sigue que,

$$c\|v\|_{\bar{g}} \leq \|v\|_g \leq C\|v\|_{\bar{g}}$$

siempre que $v \in T_x M, r(x) \leq \varepsilon$.

Sea ahora \mathcal{Y} la bola geodésica $\mathcal{Y} = \{x \mid r(x) < \varepsilon\} \subset M$, y sea $\delta = c\varepsilon$. Por esta elección, siempre que $(x, v) \in \mathcal{Y}_\delta, \|v\|_{\bar{g}} \leq \frac{1}{c}\|v\|_g < \varepsilon$, así que, $\mathcal{Y}_\delta \subset \mathcal{X} \subset \mathcal{O}$. Como F es un difeomorfismo en \mathcal{Y}_δ y lleva $(p, 0)$ en (p, p) , existe un abierto $W \times W \subset M \times M$ tal que $(p, p) \in W \times W \subset F(\mathcal{Y}_\delta)$. Podemos suponer que $W \subset \mathcal{Y}$. Entonces, afirmamos que, para todo $q \in W, \exp_p$ es un difeomorfismo en $B_\delta(0) \subset T_q M$ y $W \subset \exp_q(B_\delta(0))$. De estas afirmaciones se concluye que W es el entorno totalmente normal de p buscado.

Para probar la primera afirmación, observamos primero que para todo $q \in W, \exp_q$ está al menos definida en $B_\delta(0) \subset T_q M$; F esta definida en el conjunto \mathcal{Y}_δ , y entonces $F(q, V) = (q, \exp_q V)$ esta definida cuando $\|V\|_g < \delta$. Como F es de la forma, $F(q, V) = (q, \exp_q V)$, su inversa será de la forma $F^{-1}(q, y) = (q, \phi(q, y))$ para alguna función diferenciable ϕ . Usaremos la notación, $\phi_q(y) = \phi(q, y)$. Entonces, como $F^{-1} \circ F$ es la identidad en \mathcal{Y}_δ , se sigue que $\phi_q \circ \exp_q$ es la identidad en $B_\delta(0) \subset T_q M$ para cada $q \in W \subset \mathcal{Y}$. De forma similar, utilizando $F \circ F^{-1}$, vemos que $\exp_q \circ \phi_q$ es la identidad

en $\exp_q(B_\delta(0))$, por lo que la primera afirmación queda demostrada. Finalmente, para la segunda, sea $(q, y) \in W \times W$ arbitrario. Como $W \times W \subset F(\mathcal{Y}_\delta)$, existe algún $V \in B_\delta(0) \subset T_q M$ tal que $(q, y) = F(q, V) = (q, \exp_q V)$. Esto indica precisamente, que $y = \exp_q V$, que era lo que queríamos probar. \square

Capítulo 3

Variación de la Energía

A lo largo de este tema, vamos a tratar de enunciar y demostrar las propiedades fundamentales del cálculo variacional. Empezando por definir la variación de curvas, y siguiendo con las fórmulas de variación de un funcional adecuado para nuestro propósito.

Además, tocaremos ligeramente los campos de Jacobi, que darán lugar a la noción de puntos conjugados, ya que estos últimos serán necesarios para entender el significado de algunos teoremas de gran contenido geométrico del capítulo final.

3.1. Variación

Como acabamos de decir, empezaremos definiendo la variación de curvas. Durante esta sección, sería conveniente tener en la cabeza la idea de coger una cuerda, y hacerla vibrar. Esto, nos permitirá visualizar lo que llamaremos curvas principales de una variación.

Definición 41. Una *familia de curvas regulares a trozos* es una aplicación diferenciable $\Gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M$ tal que $\Gamma_s(t)$ es una curva regular para cada $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Observación 27. Cualquier familia de curvas regulares a trozos Γ define dos clases de curvas, las curvas principales $\Gamma_s(t) = \Gamma(s, t)$ cuando s es constante y las curvas transversales $\Gamma^{(t)}(s) = \Gamma(s, t)$ cuando t es constante.

Definición 42. Si Γ es una familia de curvas regulares a trozos, un *campo de vectores a lo largo de Γ* es una aplicación diferenciable a trozos $V: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow TM$ tal que $V(s, t) \in T_{\Gamma(s,t)}M$ para cada (s, t) .

Definición 43. Si $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ es una curva regular a trozos, una *variación* de γ es una familia de curvas Γ tal que $\Gamma_0(t) = \gamma(t)$ para todo $t \in [a, b]$.

Observación 28. La restricción de la variación Γ de la curva γ a cada $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [t_{i-1}, t_i]$, puede ser interpretada como una superficie parametrizada en la variedad M .

Siguiendo con la idea anterior, si sujetamos dicha cuerda por los extremos permitiendo que se mueva en su totalidad, salvo por estos puntos, conseguiremos entender la siguiente definición.

Definición 44. Una variación de γ diremos que es *propia* si deja fijos los extremos, es decir, si $\Gamma_s(a) = \gamma(a)$ y $\Gamma_s(b) = \gamma(b)$ para todo s .

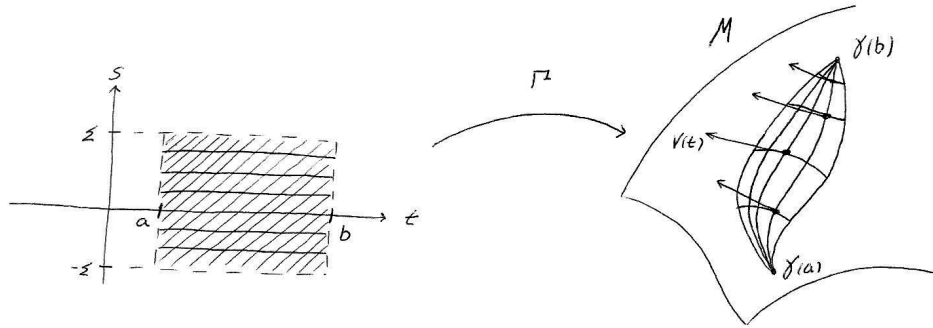


Figura 3.1: Variación Propia.

Debido a las condiciones que hemos fijado, es posible que las curvas principales no sean diferenciables en todo el intervalo de definición, y además en los puntos t_i habría dos opciones para el campo de velocidad, sin embargo, esta ambigüedad desaparece con las curvas transversales. Además, la definición de campo variacional como campo de vectores tangente a las curvas transversales, nos permite observar el recorrido de la vibración.

Definición 45. Si Γ es una variación de γ , el *campo variacional* de Γ es el campo de vectores $V(t) = \partial_s \Gamma(0, t)$ a lo largo de γ .

Definición 46. Análogamente, diremos que es *propio* si $V(a) = V(b) = 0$.

Presentamos ahora, el Lema de Simetría, que nos posibilitara a la hora de conmutar los índices al aplicar la derivada covariante.

Lema 3.1.1 (Lema de Simetría). *Sea $\Gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M$ una familia de curvas regulares a trozos en una variedad de Riemann. Entonces, en cualquier rectángulo $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [a_{i-1}, a_i]$ donde Γ sea diferenciable,*

$$D_s \partial_t \Gamma = D_t \partial_s \Gamma,$$

donde, $\partial_t \Gamma(s, t) = \frac{d}{dt} \Gamma_s(t)$ y $\partial_s \Gamma(s, t) = \frac{d}{ds} \Gamma^{(t)}(s)$.

Demostración. Consideramos las coordenadas (x^i) alrededor del punto $\Gamma(s_0, t_0)$. Tenemos $\Gamma(s, t) = (x^1(s, t), \dots, x^n(s, t))$, y,

$$\partial_t \Gamma = \frac{\partial x^k}{\partial t} \partial_k; \quad \partial_s \Gamma = \frac{\partial x^k}{\partial s} \partial_k.$$

Así pues, obtenemos,

$$\begin{cases} D_s \partial_t \Gamma = \left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial s \partial t} + \frac{\partial x^i}{\partial t} \frac{\partial x^j}{\partial s} \Gamma_{ji}^k \right) \partial_k \\ D_t \partial_s \Gamma = \left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial t \partial s} + \frac{\partial x^i}{\partial s} \frac{\partial x^j}{\partial t} \Gamma_{ji}^k \right) \partial_k \end{cases}.$$

Por la condición de simetría $\Gamma_{ji}^k = \Gamma_{ij}^k$, observamos la igualdad. \square

Veamos una especie de recíproco a nuestra definición de campo variacional, que nos dice que para cualquier campo de vectores existe una variación cuyo campo variacional es el campo de vectores dado de antemano.

Lema 3.1.2. *Sea γ una curva regular diferenciable a trozos y V un campo de vectores sobre γ , entonces V es un campo variacional de alguna variación de γ .*

Demostración. Definimos $\Gamma(s, t) = \exp(sV(t))$. Por la compacidad de $[a, b]$, existe un $\varepsilon > 0$ tal que Γ está definida en $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b]$. Evidentemente, para la misma subdivisión en la que V es diferenciable, Γ también. Además, es continua en todo su dominio. Entonces, por las propiedades de la aplicación exponencial, el campo variacional de Γ es V . \square

Observación 29. En el lema anterior, si V es propio, se puede escoger una variación propia también.

Para tratar con los campos de Jacobi, necesitamos hablar de un tipo de variación especial, y que no es otra que la de variación por geodésicas.

Definición 47. Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ un segmento de geodésica y $\Gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M$ una variación de γ . Decimos que Γ es una *variación a través de geodésicas* si cada curva principal $\Gamma_s(t) = \Gamma(s, t)$ es también un segmento de geodésica.

Lema 3.1.3. *Si Γ es una familia de curvas regulares diferenciable, y V es un campo de vectores diferenciable sobre Γ , entonces,*

$$D_s D_t V - D_t D_s V = R(S, T)V.$$

Demostración. Consideramos las coordenadas locales (x^i) . Entonces, como $V(s, t) = V^i(s, t) \partial_i$, tenemos,

$$D_t V = \frac{\partial V^i}{\partial t} \partial_i + V^i D_t \partial_i.$$

Entonces,

$$D_s D_t V = \frac{\partial^2 V^i}{\partial s \partial t} \partial_i + \frac{\partial V^i}{\partial t} D_s \partial_i + \frac{\partial V^i}{\partial s} D_t \partial_i + V^i D_s D_t \partial_i.$$

De esta forma, vemos que;

$$D_s D_t V - D_t D_s V = V^i (D_s D_t \partial_i - D_t D_s \partial_i).$$

Consideramos ahora las funciones coordenadas de Γ , llamamos, entonces,

$$S = \frac{\partial x^k}{\partial s} \partial_k \text{ y } T = \frac{\partial x^j}{\partial t} \partial_j.$$

Y como ∂_i es extensible,

$$D_t \partial_i = \nabla_T \partial_i = \frac{\partial x^j}{\partial t} \nabla_{\partial_j} \partial_i,$$

y por tanto, como $\nabla_{\partial_j} \partial_i$ también es extensible,

$$\begin{aligned} D_s D_t \partial_i &= D_s \left(\frac{\partial x^j}{\partial t} \nabla_{\partial_j} \partial_i \right) = \frac{\partial^2 x^i}{\partial s \partial t} \nabla_{\partial_j} \partial_i + \frac{\partial x^j}{\partial t} \nabla_S (\nabla_{\partial_j} \partial_i) = \\ &= \frac{\partial^2 x^j}{\partial s \partial t} \nabla_{\partial_j} \partial_i + \frac{\partial x^j}{\partial t} \frac{\partial x^k}{\partial s} \nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_j} \partial_i. \end{aligned}$$

Finalmente, observamos que,

$$\begin{aligned} D_s D_t \partial_i - D_t D_s \partial_i &= \frac{\partial x^j}{\partial t} \frac{\partial x^k}{\partial s} (\nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_j} \partial_i - \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_k} \partial_i) = \\ &= \frac{\partial x^j}{\partial t} \frac{\partial x^k}{\partial s} R(\partial_k, \partial_j) \partial_i = R(S, T) \partial_i. \end{aligned}$$

Y con esto, damos por concluido el lema. \square

3.2. Fórmulas de Variación de la Energía

Nos toca ahora, hablar de las fórmulas de variación, para ello debemos introducir un funcional adecuado, que actúa sobre la variación. Podemos pensar, intuitivamente que la primera fórmula de variación hará las veces de primera derivada en las variedades de Riemann, mientras que la segunda fórmula de variación será una generalización de la segunda derivada, como veremos en un futuro.

Definición 48. Dada una curva rectificable $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ definimos la *función longitud* como,

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Ejemplo 4. Sea (\mathbb{R}^2, g) una variedad de Riemann donde $g = \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \otimes dx + dy \otimes dy$. Consideremos la curva $\gamma: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (t, 1)$, entonces su primera derivada es $\dot{\gamma}(t) = \frac{\partial}{\partial x}$. Vamos a hallar su longitud y a la vez observar que puede tener longitud finita, a pesar de que su dominio de definición sea infinito.

Para este fin, tenemos que,

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = g^{\frac{1}{2}}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = \frac{\sin t}{t}.$$

Por lo tanto, aplicando la definición,

$$L(\gamma) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Donde, para calcular esta integral hemos utilizado un cambio a variable compleja y hemos aplicado el método de los residuos.

Observación 30. Esta definición es solo un recordatorio para tener presente. Es por esto, que ya la habíamos utilizado previamente.

Definición 49. Dada una curva rectificable $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ definimos la *función energía* como,

$$E(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt.$$

Ejemplo 5. Consideremos ahora el semiplano superior \mathbb{H}^2 con la métrica definida por $g_{11} = 1, g_{22} = e^{-y^2}$ y el resto de coeficientes nulos. Sea $\gamma: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{H}^2$ definida por $\gamma(t) = (1, t)$. Vamos a hallar la energía de γ . Entonces, tenemos que,

$$E(\gamma) = \int_0^\infty \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt = \int_0^\infty e^{-t^2} dt.$$

Con el cambio de variable $u = t^2$ y teniendo en cuenta la definición de la función gamma,

$$E(\gamma) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Donde, al igual que antes, a pesar de que el intervalo de definición de γ es infinito, su energía no lo es.

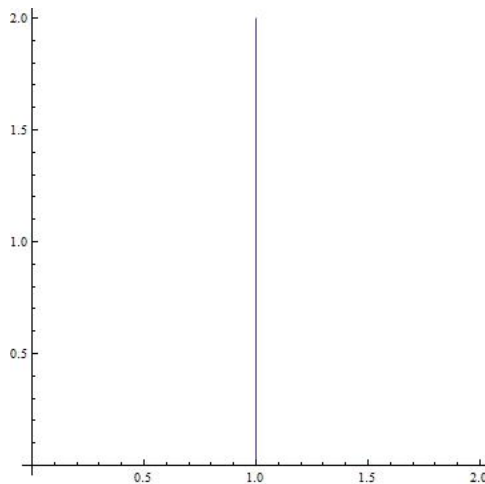


Figura 3.2: Curva γ .

Proposición 3.2.1. Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ una curva, entonces se verifica que $L^2(\gamma) \leq (b - a)E(\gamma)$.

Demostración. Consideremos $f = 1$ y $g = \|\frac{d\gamma}{dt}\|$, entonces por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\int_a^b fg dt\right)^2 \leq \int_a^b f^2 dt \int_a^b g^2 dt = (b - a)E(\gamma).$$

Precisamente, lo que queríamos demostrar. \square

Es importante observar, que las definiciones anteriores se aplican sobre curvas, mientras que las siguientes se aplicarán sobre variaciones de curvas. Evidentemente, ambas cosas estarán relacionadas, pero es conveniente tener claras las diferencias.

Definición 50. Definimos la *función longitud de una variación* como la aplicación $L: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que,

$$L(s) = \int_a^b \left\| \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s, t) \right\| dt,$$

esto es, $L(s)$ es la longitud de la curva $\Gamma_s(t)$.

Definición 51. Definimos la *función energía de una variación* como,

$$E(s) = \int_a^b \left\| \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s, t) \right\|^2 dt,$$

con $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Finalmente, estamos en condiciones de demostrar las dos fórmulas de variación, tal y como habíamos adelantado.

Teorema 3.2.2 (Primera Fórmula de Variación). Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ una curva diferenciable a trozos y sea $\Gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M$ una variación de γ , cuyo campo de variación es $V(t)$. Entonces,

$$\frac{1}{2}E'(0) = - \int_a^b \langle V(t), D_t \dot{\gamma} \rangle dt - \sum_{i=1}^k \langle V(t_i), \dot{\gamma}(t_i^+) - \dot{\gamma}(t_i^-) \rangle - \langle V(a), \dot{\gamma}(a) \rangle + \langle V(b), \dot{\gamma}(b) \rangle,$$

donde $\dot{\gamma}(t_i^+) = \lim_{t \rightarrow t_i^+} \dot{\gamma}$, $\dot{\gamma}(t_i^-) = \lim_{t \rightarrow t_i^-} \dot{\gamma}$.

Demostración. Por definición,

$$E(s) = \int_a^b \left\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial t}, \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right\rangle dt = \sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial t}, \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right\rangle dt.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial t}, \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right\rangle dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} 2 \left\langle D_s \frac{\partial \Gamma}{\partial t}, \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right\rangle dt = 2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle D_t \frac{\partial \Gamma}{\partial s}, \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right\rangle dt = \\ &= 2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial s}, \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right\rangle dt - 2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial s}, D_t \frac{\partial \Gamma}{\partial s} \right\rangle dt = \\ &= 2 \left\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial s}, \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} - 2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial s}, D_t \frac{\partial \Gamma}{\partial s} \right\rangle dt. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\frac{1}{2} \frac{dE}{ds} = \sum_{i=0}^k \langle \frac{\partial \Gamma}{\partial s}, \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \rangle |_{t_i}^{t_{i+1}} - \int_a^b \langle \frac{\partial \Gamma}{\partial s}, D_t \frac{\partial \Gamma}{\partial s} \rangle dt.$$

Finalmente, haciendo $s = 0$, concluimos la demostración. \square

Teorema 3.2.3 (Primera Fórmula de Variación de la Longitud). *Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ una curva diferenciable a trozos de velocidad unitaria, Γ una variación propia de γ y V su campo de variación. Entonces,*

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L(\Gamma_s) = - \int_a^b \langle V, D_t \dot{\gamma} \rangle dt - \sum_{i=1}^{k-1} \langle V(a_i), \dot{\gamma}(a_i^+) - \dot{\gamma}(a_i^-) \rangle.$$

El siguiente teorema, como habíamos mencionado en la introducción nos permite visualizar las geodésicas como puntos críticos del funcional energía.

Teorema 3.2.4. *Una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ diferenciable a trozos es una geodésica si y solo si, para toda variación propia Γ de γ , tenemos que $\frac{dE}{ds}(0) = 0$.*

Demostración. Si γ es una geodésica, $D_t \dot{\gamma} = 0$ y γ es regular. Por lo tanto, si Γ es propia, $V(a) = V(b) = 0$, y en la primera fórmula de variación todos los términos dan cero.

Recíprocamente, supongamos $\frac{dE}{ds}(0) = 0$, para toda variación propia Γ de γ . Sea $V(t) = g(t)D_t \dot{\gamma}$, donde $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable a trozos con $g(t) > 0$ si $t \neq t_i$ y $g(t_i) = 0, i = 0, 1, \dots, k + 1$. Construimos una variación de γ tal que $V(t)$ sea su campo variacional. Entonces,

$$\frac{1}{2} \frac{dE}{ds}(0) = - \int_a^b g(t) \langle D_t \dot{\gamma}, D_t \dot{\gamma} \rangle dt = 0,$$

y tenemos que $D_t \dot{\gamma} = 0$ en cada intervalo (t_i, t_{i+1}) , esto es, γ es una geodésica en cada $(t_i, t_{i+1}), i = 0, 1, \dots, k$.

Para ver que pasa en los puntos t_i , consideramos otro campo variacional $W(t)$ tal que $W(a) = W(b) = 0$ y si $t \neq a$ o $t \neq b$, $W(t) = \dot{\gamma}(t_i^+) - \dot{\gamma}(t_i^-)$. Entonces, usando el hecho de que γ es una geodésica en (t_i, t_{i+1}) , obtenemos que,

$$0 = \frac{1}{2} \frac{dE}{ds}(0) = - \sum_{i=1}^k \langle \dot{\gamma}(t_i^+) - \dot{\gamma}(t_i^-), \dot{\gamma}(t_i^+) - \dot{\gamma}(t_i^-) \rangle = - \sum_{i=1}^k \|\dot{\gamma}(t_i^+) - \dot{\gamma}(t_i^-)\|^2,$$

es decir, γ es de clase C^1 en cada t_i . Además, como $D_t \dot{\gamma} = 0$, en t_i , γ satisface la ecuación de las geodésicas en (a, b) . Y por unicidad de solución de las ecuaciones diferenciales, $\gamma \in C^\infty$ y por tanto, es una geodésica. \square

Corolario 3.2.5. *Una curva diferenciable a trozos de velocidad constante es una geodésica si y solo si es un punto crítico de la longitud.*

Teorema 3.2.6 (Segunda Fórmula de Variación). *Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ una geodésica y sea $\Gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M$ una variación propia de γ . Entonces,*

$$\frac{1}{2}E''(0) = - \int_a^b \langle V(t), D_t^2 + R(\dot{\gamma}, V)\dot{\gamma} \rangle dt - \sum_{i=1}^k \langle V(t_i), D_t V(t_i^+) - D_t V(t_i^-) \rangle.$$

donde $V(t)$ es el campo variacional de Γ , y Rm es la curvatura de Riemann de M .

Demostración. Como ya habíamos visto en la primera fórmula de variación,

$$\frac{1}{2} \frac{dE}{ds} = \sum_{i=0}^k \left\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial s}, \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} - \int_a^b \left\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial s}, D_t \frac{\partial \Gamma}{\partial s} \right\rangle dt.$$

Por tanto, volviendo a derivar,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2 E}{ds^2} &= \sum_{i=0}^k \left\langle D_s \frac{\partial \Gamma}{\partial s}, \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} + \sum_{i=0}^k \left\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial s}, D_s \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} - \\ &\quad \int_a^b \left\langle D_s \frac{\partial \Gamma}{\partial s}, D_t \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right\rangle dt - \int_a^b \left\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial s}, D_s D_t \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right\rangle dt. \end{aligned}$$

Haciendo $s = 0$ en la expresión de arriba, tenemos que el primer y tercer términos son cero, porque Γ es propia y γ es una geodésica. Además, por el Lema 3.1.3, tenemos que,

$$D_s D_t \frac{\partial \Gamma}{\partial t} = D_t^2 V + R(\dot{\gamma}, V)\dot{\gamma}.$$

Y usando el hecho de que la variación es propia, conseguimos,

$$\sum_{i=0}^k \left\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial s}, D_s \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} = - \sum_{i=0}^k \langle V(t_i), D_t V(t_i^+) - D_t V(t_i^-) \rangle.$$

Finalmente, juntando todo, obtenemos lo que queríamos demostrar. \square

Teorema 3.2.7 (Segunda Fórmula de Variación de la Longitud). *Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ una geodésica unitaria, Γ una variación propia de γ , y V su campo variacional. Entonces,*

$$\frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} L(\Gamma_s) = - \int_a^b (\|D_t V^\perp\|^2 - Rm(\dot{\gamma}, V^\perp, \dot{\gamma}, V^\perp)) dt,$$

donde V^\perp es la componente normal de V .

3.3. Campos de Jacobi

En esta sección introduciremos los campos de Jacobi, para esto, debemos mencionar, previamente, la ecuación de Jacobi.

Teorema 3.3.1 (Ecuación de Jacobi). *Sea γ una geodésica y V un campo de vectores a lo largo de γ . Si V es el campo variacional de una variación sobre geodésicas, entonces V satisface,*

$$D_t^2 V + R(V, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0.$$

Demostración. Sean $S = \frac{\partial x^k}{\partial s} \partial_k$, y $T = \frac{\partial x^j}{\partial t} \partial_j$, por el Lema 3.1.3,

$$0 = D_s D_t T = D_t D_s T + R(S, T)T = D_t D_t S + R(S, T)T.$$

Y evaluando en $s = 0$, $S(0, t) = V(t)$ y $T(0, t) = \dot{\gamma}(t)$. \square

Definición 52. Cualquier campo de vectores a lo largo de una geodésica que verifique la ecuación de Jacobi se llama *campo de Jacobi*.

Observación 31. Todo campo de Jacobi a través de una geodésica γ es el campo de variación de alguna variación de γ por geodésicas.

Análogamente a lo que sucedía con las geodésicas, debido a su expresión local, para los campos de Jacobi, podemos enunciar un teorema de existencia y unicidad similar, apoyandonos de nuevo en los sistemas de ecuaciones diferenciales.

Teorema 3.3.2 (Existencia y Unicidad de los Campos de Jacobi). *Sea $\gamma: I \rightarrow M$ una geodésica, $a \in I$, y $p = \gamma(a)$. Para cada par de vectores $X_p, Y_p \in T_p M$, existe un único campo de Jacobi, J , a lo largo de γ que satisface las condiciones iniciales,*

$$J(a) = X \text{ y } D_t J(a) = Y.$$

Demostración. Fijada una base ortonormal $\{\frac{\partial}{\partial x^i}|_p\}$ de $T_p M$, la extendemos a una referencia ortonormal paralela a lo largo de todo γ . Escribiendo $J(t) = J^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$, podemos expresar la ecuación de Jacobi como,

$$\ddot{J}^i + R_{jkl}^i J^j \dot{\gamma}^k \dot{\gamma}^l = 0$$

Este es un sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden para n funciones J^i . \square

Por último en este capítulo, vamos a hablar de los puntos conjugados y de su multiplicidad. Estos puntos especiales tendrán una importancia fundamental en las conclusiones finales del trabajo, como ya se podrán prever en el teorema que enunciaremos en esta sección.

Definición 53. Sea γ un segmento de geodésica uniendo $p, q \in M$, q diremos que es un *punto conjugado* con p sobre γ si existe un campo de Jacobi a lo largo de γ que se anule en p y en q pero no idénticamente cero.

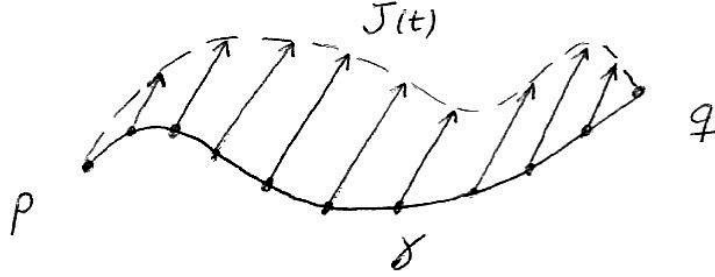


Figura 3.3: Campo de Jacobi.

Definición 54. El *orden* o *multiplicidad* de la conjugación es la dimensión del espacio de campos de Jacobi anulándose en p y en q .

Teorema 3.3.3. Sea $p \in M$, $V \in T_p M$ y $q = \exp_p V$. Entonces, la \exp_p es un difeomorfismo local en un entorno de V si y solo si q no es conjugado con p a lo largo de la geodésica $\gamma(t) = \exp_p tV, t \in [0, 1]$.

Demostración. Por el teorema de la función inversa, \exp_p es un difeomorfismo local cerca de V si y solo si $(\exp_p)_*$ es un isomorfismo en V , y observando la dimensión esto sucede si y solo si $(\exp_p)_*$ es inyectiva en V .

Si identificamos $T_V(T_p M)$ con $T_p M$, podemos calcular,

$$(\exp_p)_* W = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \exp_p(V + sW).$$

Para ello, definimos una variación de γ por geodésicas como,

$$\Gamma_W(s, t) = \exp_p t(V + sW).$$

Entonces, el campo de variación $J_W(t) = \partial_s \Gamma_W(0, t)$ es un campo de Jacobi a lo largo de γ , y

$$J_W(1) = (\exp_p)_* W.$$

Como $W \in T_p M$ es arbitrario, hay un espacio n -dimensional de campos de Jacobi, y estos son todos los campos de Jacobi sobre γ que se anulan en p . Por tanto, $(\exp_p)_*$ deja de ser un isomorfismo en V cuando existe un vector W tal que $(\exp_p)_* W = 0$, que ocurre precisamente cuando existe un campo de Jacobi J_W a lo largo de γ con $J_W(0) = J_W(q) = 0$. \square

Observación 32. Los puntos conjugados son precisamente las imágenes de las singularidades de la aplicación exponencial.

Capítulo 4

Geodésicas Minimizadoras

Una vez introducidas las herramientas necesarias en los capítulos anteriores, estamos en condiciones, de enunciar y demostrar con todo detalle varios teoremas sobre las propiedades minimizadoras que tienen las curvas geodésicas.

4.1. Propiedades Minimizadoras de las Geodésicas

Empezaremos definiendo que es una curva minimizadora, para después poder enunciar una sucesión de enunciados sobre las geodésicas con sus correspondientes demostraciones.

Definición 55. Una curva regular a trozos γ en una variedad de Riemann diremos que es *minimizadora* si $L(\gamma) \leq L(\tilde{\gamma})$ para cualquier otra curva $\tilde{\gamma}$ con los mismos extremos.

Definición 56. Diremos que una curva γ es *localmente minimizadora* si todo $t_0 \in I$ tiene un entorno $U \subseteq I$ tal que $\gamma|_U$ es minimizadora entre cada par de puntos.

Observación 33. Toda curva minimizadora es de forma trivial, localmente minimizadora.

A continuación, vamos a presentar varias conclusiones sobre el estudio local de las curvas geodésicas.

Lema 4.1.1 (Lema de Gauss). *Sea U una bola geodésica centrada en $p \in M$. El campo de vectores radiales unitarios $\frac{\partial}{\partial r}$ es g -ortogonal a la esfera geodésica U .*

Demostración. Sea $q \in U$ y sea $X \in T_p M$ un vector tangente a la esfera geodésica a través de q . Como la \exp_p es un difeomorfismo en U , existe un vector $V \in T_p M$ tal que $q = \exp_p V$, y existe un vector $W \in T_V(T_p M) = T_p M$ tal que $X = (\exp_p)_* W$. Entonces $V \in \partial B_R(0)$ y $W \in T_V \partial B_R(0)$, donde $R = d(p, q)$. La geodésica radial de p a q es $\gamma(t) = \exp_p(tV)$, con el

vector tangente $\dot{\gamma}(t) = R \frac{\partial}{\partial r}$. Entonces necesitamos probar que $X \perp \dot{\gamma}(1)$ con respecto a g .

Elegimos una curva $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow T_p M$ dentro de $\partial B_R(0)$ tal que $\sigma(0) = V$ y $\dot{\sigma}(0) = W$, y consideramos la variación Γ de γ dada por,

$$\Gamma(s, t) = \exp_p(t\sigma(s)).$$

Para cada $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\sigma(s)$ es un vector de longitud R , así que, Γ_s es una geodésica con velocidad constante R . Sea $S = \partial_s \Gamma$ y $T = \partial_t \Gamma$. De las definiciones, tenemos que,

$$\begin{cases} S(0, 0) = \frac{d}{ds}|_{s=0} \exp_p(0) = 0 \\ T(0, 0) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \exp_p(tV) = V \\ S(0, 1) = \frac{d}{ds}|_{s=0} \exp_p(\sigma(s)) = (\exp_p)_* \dot{\sigma}(0) = X \\ T(0, 1) = \frac{d}{dt}|_{t=1} \exp_p(tV) = \dot{\gamma}(1) \end{cases}$$

entonces, $\langle S, T \rangle$ es cero cuando $(s, t) = (0, 0)$ y es igual a $\langle X, \dot{\gamma}(1) \rangle$ cuando $(s, t) = (0, 1)$, así que para probar el teorema es suficiente demostrar que $\langle S, T \rangle$ es independiente de t .

Calculamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle S, T \rangle &= \langle D_t S, T \rangle + \langle S, D_t T \rangle = \langle D_s T, T \rangle + 0 = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \|T\|^2 = 0. \end{aligned}$$

donde hemos usado el lema de simetría para $D_t S = D_s T$, el hecho de que $D_t T = 0$ ya que Γ_s es una geodésica, y $\|T\| = \|\dot{\Gamma}_s\| = R$ para todo (s, t) . \square

Corolario 4.1.2. Sean (x^i) las coordenadas normales de Riemann en una bola geodésica U centrada en $p \in M$, y sea r la función de distancia radial. Entonces, $\text{grad} r = \frac{\partial}{\partial r}$ en $U - \{p\}$.

Teorema 4.1.3. Sea $p \in M$ y q contenido en una bola geodésica alrededor de p . Entonces, salvo reparametrizaciones, la geodésica radial de p a q es la única curva minimizadora que une p con q .

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\exp_p(B_\varepsilon(0))$ sea una bola geodésica que contenga a q . Sea $\gamma: [0, R] \rightarrow M$ la geodésica radial que une p con q parametrizada por la longitud de arco, y $\gamma(t) = \exp_p(tV)$ para algún vector unitario $V \in T_p M$. Entonces, $L(\gamma) = R$ ya que γ tiene velocidad unitaria. Por tanto, necesitamos demostrar que cualquier otra curva regular diferenciable a trozos que una p con q tenga longitud estrictamente mayor que R . Sea $S_R = \exp_p(\partial B_R(0))$ la esfera geodésica de radio R .

Sea $\sigma: [a, b] \rightarrow M$ una cualquiera de esas curvas, que podemos suponer parametrizada por la longitud de arco. Empezaremos viendo que $L(\sigma) \geq L(\gamma)$. Sea $a_0 \in [a, b]$ el último momento en el que $\sigma(t) = p$ y $b_0 \in [a, b]$ el primer momento posterior a a_0 en el que $\sigma(t) \in S_R$. Para cualquier $t \in (a_0, b_0]$ podemos descomponer $\dot{\sigma}(t)$ como,

$$\dot{\sigma}(t) = \alpha(t) \frac{\partial}{\partial r} + X(t),$$

donde $X(t)$ es tangente a la esfera geodésica a través de $\sigma(t)$. Por el Lema de Gauss, esta es una descomposición ortogonal, así que,

$$\|\dot{\sigma}(t)\|^2 = \alpha(t)^2 + \|X(t)\|^2 \geq \alpha(t)^2.$$

Además, por el Corolario anterior, $\alpha(t) = \langle \frac{\partial}{\partial r}, \dot{\sigma}(t) \rangle = dr(\dot{\sigma}(t))$. Entonces,

$$\begin{aligned} L(\sigma) &\geq L(\sigma|_{[a_0, b_0]}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{a_0+\delta}^{b_0} \|\dot{\sigma}(t)\| dt \geq \\ &\geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{a_0+\delta}^{b_0} \alpha(t) dt = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{a_0+\delta}^{b_0} dr(\dot{\sigma}(t)) dt = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{a_0+\delta}^{b_0} \frac{d}{dt} r(\sigma(t)) dt = \\ &= r(\sigma(b_0)) - r(\sigma(a_0)) = R = L(\gamma). \end{aligned}$$

Es decir, γ es minimizadora.

Supongamos ahora que $L(\sigma) = R$. Entonces, las desigualdades anteriores son igualdades. Como hemos supuesto que σ es de velocidad unitaria, la primera igualdad nos indica que $a_0 = 0$ y $b_0 = b = R$. La segunda igualdad implica que, $X(t) = 0$ y $\alpha(t) > 0$, por lo que $\dot{\sigma}(t)$ es un múltiplo positivo de $\frac{\partial}{\partial r}$. Además, por tener velocidad unitaria, $\dot{\sigma}(t) = \frac{\partial}{\partial r}$ y entonces σ y α son las dos curvas integrales de $\frac{\partial}{\partial r}$ pasando por q en tiempo $t = R$. Luego $\sigma = \gamma$. \square

Corolario 4.1.4. *En cualquier bola geodésica alrededor de $p \in M$, la función distancia radial $r(x)$ es igual que la distancia de Riemann de p a x .*

Observación 34. Gracias a este corolario, podremos simplificar la notación y escribir simplemente $B_R(p)$ en vez de $\exp_p(B_R(p))$. Análogamente, para bolas geodésicas cerradas y para esferas geodésicas.

Teorema 4.1.5. *Toda geodésica en una variedad de Riemann es localmente minimizadora.*

Demostración. Sea $\gamma: I \rightarrow M$ una geodésica que podemos suponer que esta definida en un intervalo abierto, y sea $t_0 \in I$. Consideramos un entorno totalmente normal W de $\gamma(t_0)$, y sea $U \subset I$ la componente conexa de $\gamma^{-1}(W)$, que contiene a t_0 . Si $t_1, t_2 \in U$ y $q_i = \gamma(t_i)$, $i = 1, 2$, por la definición de entorno completamente normal, tenemos que q_2 está contenido en una bola geodésica alrededor de q_1 .

Entonces, la geodésica radial entre q_1 y q_2 es la única curva minimizadora que une ambos puntos.

Por tanto, como la restricción de γ es una geodésica entre q_1 y q_2 contenida en la misma bola geodésica, γ es esa única geodésica minimizadora. \square

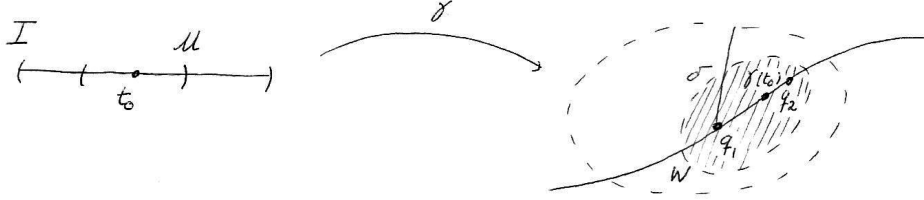


Figura 4.1: Demostración del Teorema.

Vamos a introducir en lo que sigue, la noción de variedad geodésicamente completa, y mediante el teorema de Hopf-Rinow, demostraremos que equivale a la completitud topológica.

Definición 57. Una variedad de Riemann se dice que es geodésicamente completa si toda geodésica maximal está definida en todo \mathbb{R} .

Teorema 4.1.6 (Hopf-Rinow). *Una variedad de Riemann conexa es geodésicamente completa si y solo si es completa como espacio métrico.*

Demostración. Supongamos primero que M es completa como espacio métrico, pero que no es geodésicamente completa. Entonces, existirá una geodésica unitaria, $\gamma: [0, b) \rightarrow M$ que no puede extenderse a un intervalo del tipo $[0, b + \epsilon)$ para ningún $\epsilon > 0$. Consideramos una sucesión creciente $\{t_i\}$ que tiende a b , y definimos $q_i = \gamma(t_i)$. Por estar γ parametrizada por la longitud de arco, la longitud de $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ es exactamente $|t_i - t_{i-1}|$. Es decir, $d(q_i, q_j) \leq |t_j - t_i|$ y $\{q_i\}$ es una sucesión de Cauchy en M . Por tanto, por la completitud, $\{q_i\}$ converge a $q \in M$.

Sea W un entorno totalmente normal de q , y $\delta > 0$ tal que W este contenido en una bola geodésica de radio δ para cada uno de sus puntos. $\forall j, q_j \in W$ y si consideramos j suficientemente grande, podemos suponer que $t_j > b - \delta$. El hecho de que $B_d(q_j)$ sea una bola geodésica significa que para toda geodésica que empiece en q_j está definida para al menos un tiempo δ . En particular, esto es cierto para la geodésica σ con $\sigma(0) = q_j$ y $\dot{\sigma}(0) = \dot{\gamma}(t_j)$. Además, por la unicidad de las geodésicas, σ tiene que ser una reparametrización de γ . Por tanto, $\tilde{\gamma}(t) = \sigma(t + t_j)$ es una extensión de γ que supera b , lo cual es una contradicción, y hemos conseguido probar que completa implica geodésicamente completa.

Para demostrar el recíproco, probaremos algo más fuerte, si existe un punto $p \in M$ tal que la aplicación exponencial \exp_p se puede extender a todo el espacio tangente $T_p M$, entonces M es completa como espacio métrico.

Supongamos que ese punto sea p . Primero, demostraremos que dado otro punto $q \in M$, existe un segmento de geodésica minimizadora que los une. Si $\gamma: [0, b] \rightarrow M$ es un segmento de geodésica, diremos que apunta a q si γ es

minimizadora y cumple que $d(\gamma(0), q) = d(\gamma(0), \gamma(b)) + d(\gamma(b), q)$.
 Sera suficiente demostrar que existe un segmento de geodésica γ que empiece en p , apunta hacia q y tenga longitud $d(p, q)$. De esto último,

$$d(p, q) = d(p, q) + d(\gamma(b), q)$$

luego, $q = \gamma(b)$, y como hemos supuesto que γ era minimizadora, está es la geodésica buscada.

Sea $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(p)$ sea una bola geodésica cerrada alrededor de p . Si $q \in B_\epsilon(p)$ por el Teorema 4.1.3, existe una geodésica minimizadora de p a q . Si $q \notin B_\epsilon(p)$, por ser la función distancia continua en un espacio métrico, existe un punto $x \in S_\epsilon(p)$ donde $d(x, q)$ alcanza su mínimo en el compacto $S_\epsilon(p)$. Sea γ la geodésica radial unitaria entre p y x , por hipótesis, γ está definida para todo tiempo.

Empezaremos demostrando que $\gamma|_{[0, \epsilon]}$ apunta a q . Por ser minimizadora, por el Teorema 4.1.3, solo necesitamos probar que $d(\gamma(0), q) = d(\gamma(0), \gamma(b)) + d(\gamma(b), q)$ se verifica para $b = \epsilon$, o $d(p, q) = d(p, x) + d(x, q)$. Por la desigualdad triangular, la única opción para que esto no sea cierto es que $d(p, q) < d(p, x) + d(x, q)$. Entonces existe una curva σ unitaria regular diferenciable a trozos entre p y q cuya longitud es estrictamente menor que $d(p, x) + d(x, q)$. Denotemos el trozo de σ dentro de $B_\epsilon(p)$ por σ_1 , y por σ_2 el resto. Entonces, como $L(\sigma_1) \geq \epsilon$,

$$d(p, x) + d(x, q) > L(\sigma) \geq \epsilon + L(\sigma_2) = d(p, x) + L(\sigma_2).$$

Esto quiere decir que $L(\sigma_2) < d(x, q)$, lo que contradice nuestra elección de x .

Sea $T = d(p, q)$ y

$$\mathcal{S} = \{b \in [0, T] \mid \gamma|_{[0, b]} \text{ apunte hacia } q\}.$$

Acabamos de demostrar que $\epsilon \in \mathcal{S}$. Sea $A = \sup \mathcal{S} > 0$. Por continuidad de la función distancia, es fácil ver que \mathcal{S} es cerrado, y entonces $A \in \mathcal{S}$. Si $A = T$, tenemos que $\gamma|_{[0, T]}$ es una geodésica de longitud $T = d(p, q)$ que apunta hacia q , y por tanto, tenemos demostrado el teorema. Así que, por reducción al absurdo, supongamos $A < T$.

Sea $y = \gamma(A)$, y escojamos $\delta > 0$ tal que $B_\delta(y)$ sea una bola geodésica cerrada. El hecho de que $A \in \mathcal{S}$ significa que,

$$d(y, q) = d(p, q) - d(p, y) = T - A.$$

Sea $z \in S_\delta(y)$ un punto donde $d(z, q)$ alcanza su mínimo, y sea $\tau: [0, \delta] \rightarrow M$ la geodésica radial entre y y z . Por el mismo argumento que antes, τ apunta hacia q , y tenemos,

$$d(z, q) = d(y, q) - d(y, z) = (T - A) - \delta.$$

Por la desigualdad triangular,

$$d(p, z) \geq d(p, q) - d(z, q) = T - (T - A - \delta) = A + \delta.$$

Entonces, la curva regular diferenciable a trozos que consiste en $\gamma|_{[0,A]}$ seguida de τ , de longitud A y δ , respectivamente, es una curva minimizadora entre p y z . Esto es, no tiene "esquinas", así que z tiene que estar en γ , y de hecho, $z = \gamma(A + \delta)$. Pero, entonces,

$$d(p, q) = T = (A + \delta) + d(z, q) = d(p, z) + d(z, q),$$

así que, $\gamma|_{[0,A+\delta]}$ apunta hacia q y $A + \delta \in \mathcal{S}$, lo que nos lleva a una contradicción. Esto completa la prueba de que existe una geodésica minimizadora entre p y q .

Finalmente, necesitamos ver que las sucesiones de Cauchy convergen. Sea $\{q_i\}$ una sucesión de Cauchy en M . Para cada i , sea $\gamma_i(t) = \exp_p(tV_i)$ una geodésica minimizadora unitaria que une p con q_i , y sea $d_i = d(p, q_i)$, entonces $q_i = \exp_p(d_i V_i)$. La sucesión $\{q_i\}$ está acotada en \mathbb{R} por estarlo todas las sucesiones de Cauchy en espacios métricos. Además, la sucesión $\{V_i\}$ está formada por vectores unitarios en $T_p M$, así que la sucesión $\{d_i V_i\} \subset T_p M$ está acotada. Así pues, la subsucesión $\{d_{i_k} V_{i_k}\}$ converge a $V \in T_p M$. Por continuidad de la aplicación exponencial, $q_{i_k} = \exp_p(d_{i_k} V_{i_k})$ tiende a $\exp_p V$. Y como la sucesión original $\{q_i\}$ era de Cauchy, esta converge al mismo límite. Esto completa la demostración del teorema de Hopf-Rinow. \square

Observación 35. Una variedad de Riemann conexa se dirá, simplemente, que es completa si es completa en cualquiera de los dos sentidos equivalentes.

Corolario 4.1.7. Sea M una variedad de Riemann conexa. Si existe un punto $p \in M$ tal que la aplicación exponencial restringida \exp_p está definida en todo el espacio tangente $T_p M$, entonces M es completa.

Corolario 4.1.8. Si M es compacta, entonces toda geodésica se puede definir para todo tiempo.

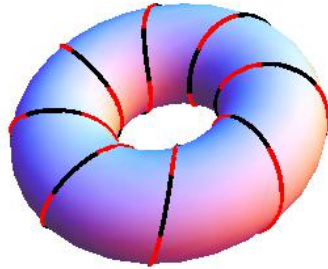


Figura 4.2: Toro de Revolución.

Corolario 4.1.9. *M es completa si y solo si dos puntos cualesquiera de M se pueden unir con un segmento de geodésica minimizadora.*

El siguiente Lema nos explica la razón de la elección del funcional energía para las fórmulas de variación.

Lema 4.1.10. *Sean $p, q \in M$ y sea $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ una geodésica minimizadora que une p con q . Entonces, para cualquier otra curva $\tilde{\gamma}$ que una p con q , $E(\gamma) \leq E(\tilde{\gamma})$ donde se alcanza la igualdad si y solo si $\tilde{\gamma}$ es una geodésica minimizadora.*

Demostración. Por la relación entre energía y longitud, tenemos,

$$(b - a)E(\gamma) = L(\gamma)^2 \leq L(\tilde{\gamma})^2 \leq (b - a)E(\tilde{\gamma}),$$

esto prueba la primera parte. Veamos ahora cuando se alcanza la igualdad. Si se alcanza la igualdad, tenemos, $L(\tilde{\gamma})^2 = (b - a)E(\tilde{\gamma})$, lo que implica que el parámetro de $\tilde{\gamma}$ es proporcional a la longitud de arco, y $L(\gamma) = L(\tilde{\gamma})$, es decir $\tilde{\gamma}$ es una geodésica minimizadora. El recíproco es cierto, trivialmente. \square

Observación 36. Las curvas que minimizan la energía están parametrizadas automáticamente por un parámetro proporcional a la longitud de arco.

Ejemplo 6. En uno de los ejemplos anteriores habíamos visto que las curvas integrales de un gradiente de norma 1 son curvas geodésicas. Ahora, tenemos la posibilidad de mejorar este resultado, concluyendo además que dichas geodésicas son minimizadoras.

Dados dos puntos p y q , para cualquier curva $\alpha: [a, b] \rightarrow M$ que una p con q , tenemos que,

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\| dt.$$

Además, como $\|\text{grad} f\| = 1$, podemos afirmar que,

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\text{grad} f\| \|\dot{\alpha}\| dt = \int_a^b \langle \text{grad} f, \text{grad} f \rangle^{\frac{1}{2}} \langle \dot{\alpha}, \dot{\alpha} \rangle^{\frac{1}{2}} dt.$$

Por otra parte, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$|\langle \text{grad} f, \dot{\alpha} \rangle| \leq \|\text{grad} f\| \|\dot{\alpha}\|$. Es decir,

$$\begin{aligned} L(\alpha) &\geq \int_a^b |\langle \text{grad} f, \dot{\alpha} \rangle| dt = \int_a^b |\dot{\alpha}(f)| = \int_a^b |df(\dot{\alpha})| dt = \int_a^b |d(f \circ \alpha)| dt = \\ &= |f(\alpha(b)) - f(\alpha(a))| = |f(q) - f(p)|. \end{aligned}$$

Finalmente, si tomamos γ como la curva integral de $\text{grad} f$, se obtiene la igualdad en la desigualdad de Cauchy-Schwarz, y por tanto, $L(\gamma) \leq L(\alpha)$, para cualquier α , luego necesariamente γ es una geodésica minimizadora, por ser un punto crítico de la primera fórmula de variación y alcanzar la longitud mínima.

4.2. Forma Índice

Nos proponemos introducir en este apartado un concepto que hará las funciones del Hessiano de \mathbb{R}^n , y que según sea definido positivo o no, nos otorgará condiciones para precisar si una curva geodésica es o no es minimizadora. Antes de definir este objeto, necesitamos presentar una notación.

Observación 37. Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ una geodésica. Denotamos por \mathbb{V} el espacio vectorial formado por los campos de vectores V a lo largo de γ que son diferenciables a trozos y que se anulan en los extremos de γ .

Definición 58. La *forma índice* de γ es la forma cuadrática asociada a la forma bilineal simétrica I_γ definida en \mathbb{V} por,

$$I_\gamma(V, W) = \int_a^b [\langle D_t V, D_t W \rangle - \langle R(\dot{\gamma}, V)\dot{\gamma}, W \rangle] dt$$

donde $V, W \in \mathbb{V}$.

Las siguientes definiciones, son un recordatorio, que nos ayudarán a reducir las longitudes de los teoremas.

Definición 59. Sea B una forma bilineal simétrica sobre un espacio vectorial \mathbb{V} . Definimos el *índice* de B como la máxima dimensión de los subespacios de \mathbb{V} en los que la forma cuadrática asociada a B es definida negativa.

Definición 60. La *nulidad* de B se define como la dimensión del subespacio de \mathbb{V} formado por los elementos $V \in \mathbb{V}$ tales que $B(V, W) = 0, \forall W \in \mathbb{V}$. A dicho subespacio se le llama *radical*.

Definición 61. Diremos que B es *degenerado* si su nulidad es estrictamente positiva.

En la sección anterior, hemos visto la equivalencia entre completitud topológica y completitud geodésica. Por lo tanto, es fácil deducir, que toda variedad compacta es completa, ya que cualquier sucesión de Cauchy es convergente. Pero, el recíproco no es cierto en general, basta considerar \mathbb{R} con la métrica usual. Ahora bien, podemos dar una condición suficiente sobre la curvatura de Ricci de la variedad de Riemann, para que la completitud implique compacidad.

Teorema 4.2.1 (Teorema de Myers). *Sea M una variedad de Riemann, $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ una geodésica parametrizada por la longitud de arco y $R > 0$. Si la curvatura de Ricci de M cumple que $Rc(\dot{\gamma}(t)) \geq \frac{n-1}{R^2}$ para todo $t \in [a, b]$ y $b - a > \pi R$, entonces γ no es un mínimo local de la energía, ni de la longitud.*

Demostración. Sea I_γ la forma índice de γ . Supongamos que existe un $V \in \mathbb{V}$ tal que $I_\gamma(V, V) < 0$ y veamos que, entonces, γ no puede ser un mínimo local de la energía, ni de la longitud. Sabemos, que existe Γ variación propia y diferenciable de γ cuyo campo variacional es V . Sea $E = E(s) = E(\Gamma_s)$ su función energía asociada. Entonces, $E'(0) = 0$ por ser γ una geodésica y $E''(0) = 2I_\gamma(V, V) < 0$, luego $E(s)$ tiene un máximo local en $s = 0$ y $E(\Gamma_s) < E(\gamma)$, para todo $s \neq 0$ suficientemente pequeño. En particular, γ no minimiza localmente la energía. Además,

$$L(\Gamma_s)^2 \leq (b-a)E(\Gamma_s) < (b-a)E(\gamma) \leq L(\gamma)^2,$$

y por tanto γ tampoco minimiza localmente la longitud.

Solo nos falta probar que existe tal $V \in \mathbb{V}$. Como γ está parametrizada por la longitud de arco, podemos tomar una base ortonormal de campos paralelos a lo largo de γ del tipo $\{\dot{\gamma}, P_2, \dots, P_n\}$.

Para poder usar nuestra hipótesis sobre la curvatura de Ricci necesitaremos sumar curvaturas seccionales del tipo $Rm(\dot{\gamma}, P_i, \dot{\gamma}, P_i)$ sobre una base ortonormal como la que tenemos. Pero P_i no se anula en los extremos a, b de γ , luego, no podemos evaluar en P_i la forma índice. Por este motivo, truncaremos P_i mediante una función que se anule en $t = a$ y en $t = b$.

Definimos,

$$V_i(t) = \sin\left(\frac{\pi(t-a)}{b-a}\right)P_i(t), \quad i = 2, \dots, n.$$

Como $V_i(a) = V_i(b) = 0$, se tiene que $V_i \in \mathbb{V}$ y podemos evaluar,

$$\begin{aligned} I_\gamma(V_i, V_i) &= \int_a^b [\|D_t V_i\|^2 - Rm(\dot{\gamma}, V_i, \dot{\gamma}, V_i)] dt = \\ &= - \int_a^b [\langle D_t^2 V_i, V_i \rangle + Rm(\dot{\gamma}, V_i, \dot{\gamma}, V_i)] dt = \\ &= - \int_a^b \left[-\frac{\pi^2}{(b-a)^2} \sin^2\left(\frac{\pi(t-a)}{b-a}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi(t-a)}{b-a}\right) Rm(\dot{\gamma}, P_i, \dot{\gamma}, P_i) \right] dt, \end{aligned}$$

y sumando en $i = 2, \dots, n$,

$$\sum_{i=2}^n I_\gamma(V_i, V_i) = - \int_a^b \left[-\frac{\pi^2}{(b-a)^2} (n-1) + \sum_{i=2}^n Rm(\dot{\gamma}, P_i, \dot{\gamma}, P_i) \right] \sin^2\left(\frac{\pi(t-a)}{b-a}\right) dt.$$

La suma de las curvaturas anteriores es igual a $Rc(\dot{\gamma})$, que tiene que ser mayor o igual que $\frac{n-1}{R^2}$, luego,

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^n I_\gamma(V_i, V_i) &\leq - \int_a^b \left[-\frac{\pi^2}{(b-a)^2} (n-1) + \frac{n-1}{R^2} \right] \sin^2\left(\frac{\pi(t-a)}{b-a}\right) dt = \\ &= (n-1) \left(\frac{\pi^2}{(b-a)^2} - \frac{1}{R^2} \right) \int_a^b \sin^2\left(\frac{\pi(t-a)}{b-a}\right) dt. \end{aligned}$$

Como $b-a > \pi R$, el segundo término de la expresión anterior es negativo, de donde se deduce que,

$$\sum_{i=2}^n I_\gamma(V_i, V_i) < 0,$$

y por tanto existe $i \in \{2, \dots, n\}$ tal que $I_\gamma(v_i, V_i) < 0$. \square

Teorema 4.2.2 (Teorema de Bonnet-Myers). *Sea M una variedad de Riemann conexa, completa y con curvatura de Ricci $Rc(\dot{\gamma}(t)) \geq \frac{n-1}{R^2}$ para algún $R > 0$. Entonces, M es compacta y su diámetro es menor o igual que πR .*

Demostración. Dados $p, q \in M$, la completitud de la variedad de Riemann, y el Teorema de Hopf-Rinow, aseguran que existe una geodésica parametrizada por la longitud de arco $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ con $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$ y que minimiza la longitud entre sus extremos. Como $Rc(M) \geq \frac{n-1}{R^2}$, el Teorema de Myers implica que $b - a \leq \pi R$. Como p, q son arbitrarios en M , deducimos que $\text{diam}M \leq \pi R$. Así, M es acotada y por ser completa, ha de ser compacta, aplicando otra vez el Teorema de Hopf-Rinow. \square

Con este resultado de Bonnet-Myers se hace evidente la influencia de la curvatura de Ricci en la topología de la variedad. Es decir, volvemos de nuevo a relacionar el aspecto topológico de la variedad de Riemann, con un concepto, en principio, independiente.

Corolario 4.2.3. *Sea M una variedad de Riemann completa con $Rc(M) \geq \delta > 0$. Entonces, el grupo fundamental $\pi_1(M)$ es finito.*

Ejemplo 7. Si consideramos la esfera, \mathbb{S}^2 , con la topología de subespacio de \mathbb{R}^3 , vemos que es compacta, por ser cerrada y acotada. Entonces, debido al Corolario 4.1.8, \mathbb{S}^2 es completa y verifica la condición $Rc(M) \geq \delta > 0$. Luego, por el Corolario 4.2.3, $\pi_1(\mathbb{S}^2)$ es finito. De hecho, utilizando el teorema de Seifert Van-Kampen, sabemos que $\pi_1(\mathbb{S}^2) \cong 1$. Por otra parte, también podemos aplicar el teorema de Synge, ya que \mathbb{S}^2 es orientable, compacta, de dimensión par, 2, y su curvatura seccional es positiva, 1, por lo que \mathbb{S}^2 es simplemente conexa.

4.3. Teorema del Índice de Morse

Finalmente, vamos a enunciar y demostrar uno de los teoremas fundamentales de esta memoria. La demostración del resultado de Morse, no es sencilla, por lo que es conveniente adelantar trabajo, mediante una serie de proposiciones, y mediante el famoso Lema del Índice.

Proposición 4.3.1. *Un elemento $V \in \mathbb{V}$ pertenece al radical de I_γ si y solo si V es un campo de Jacobi a lo largo de γ .*

Demostración. Primero, observamos que tenemos la siguiente expresión para I_γ ,

$$I_\gamma(V, W) = - \int_a^b \langle D_t^2 V + R(\dot{\gamma}, V)\dot{\gamma}, W \rangle dt - \sum_{j=1}^{k-1} \langle D_t V(t_j^+) - D_t V(t_j^-), W(t_j) \rangle.$$

Si V es un campo de Jacobi, entonces V esta en el radical de I_γ .

Para el recíproco, supongamos que $I_\gamma(V, W) = 0$ para todo $W \in \mathbb{V}$. Sea $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ una subdivisión de $[a, b]$ tal que la restricción $V|_{[t_{j-1}, t_j]}$ es diferenciable, $j = 1, \dots, k$. Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable con $f(t) > 0$, cuando $t \neq t_j$ y $f(t_j) = 0$, $j = 0, \dots, k$. Definimos W por,

$$W(t) = f(t)(D_t^2 V + R(\dot{\gamma}, V)\dot{\gamma}).$$

Entonces,

$$0 = I_\gamma(V, W) = - \int_a^b f(t) \|D_t^2 V + R(\dot{\gamma}, V)\dot{\gamma}\|^2 dt.$$

Concluimos de aquí que el integrando es cero, y por tanto, la restricción $V|_{(t_{j-1}, t_j)}$ es un campo de Jacobi. Para ver que pasa en cada t_j , elegimos $T \in \mathbb{V}$ de forma que,

$$T(t_j) = D_t V(t_j^+) - D_t V(t_j^-), j = 1, \dots, k - 1.$$

Y como,

$$0 = I_\gamma(V, T) = - \sum_{j=1}^{k-1} \|D_t V(t_j^+) - D_t V(t_j^-)\|^2,$$

concluimos que V es de clase C^1 para cada t_j . Y por la unicidad de solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias, V es de clase C^∞ . Por tanto, V es un campo de Jacobi. \square

Corolario 4.3.2. I_γ es degenerado si y solo si los puntos $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$ son conjugados a lo largo de γ . En este caso, la nulidad de I_α es igual a la multiplicidad de $\gamma(b)$ como punto conjugado.

Observación 38. Como cada punto de M esta contenido en un entorno totalmente normal y $\gamma([a, b])$ es compacto, podemos elegir una subdivisión $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ de $[a, b]$ tal que $\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}$, $j = 1, \dots, k$ esta contenido en un entorno totalmente normal. Por tanto, $\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}$ es una geodésica minimizadora y no contiene puntos conjugados.

Definición 62. A esta subdivisión la llamaremos *subdivisión normal*.

Observación 39. Sea \mathbb{V}^- el subespacio vectorial de \mathbb{V} formado por los campos V tales que $V|_{(t_{i-1}, t_i)}$, $i = 1, \dots, k$ es un campo de Jacobi.

Observación 40. Sea \mathbb{V}^+ el subespacio de \mathbb{V} consistente en los campos de vectores W tales que $W(t_1) = \dots = W(t_{k-1}) = 0$.

Proposición 4.3.3. \mathbb{V} es la suma directa $\mathbb{V} = \mathbb{V}^+ \oplus \mathbb{V}^-$, y los subespacios \mathbb{V}^+ y \mathbb{V}^- son ortogonales respecto a I_γ . De hecho, I_γ restringida a \mathbb{V}^+ es definida positiva.

Demostración. Dado $V \in \mathbb{V}$, sea W un campo de vectores en \mathbb{V}^- que viene dado por $W(t_j) = V(t_j)$; como $\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}$ no tiene puntos conjugados, ese W existe y es único. Luego $V - W \in \mathbb{V}^+$ y, entonces, $\mathbb{V} = \mathbb{V}^+ \oplus \mathbb{V}^-$. Además, si $X \in \mathbb{V}^-$ y $Y \in \mathbb{V}^+$, tenemos,

$$I_\gamma(X, Y) = - \sum_{j=1}^{k-1} \langle 0, D_t X(t_j^+) - D_t X(t_j^-) \rangle = 0,$$

esto es, \mathbb{V}^+ y \mathbb{V}^- son ortogonales relativamente a I_α .

Como $\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}$, $j = 1, \dots, k$ son geodésicas minimizadoras, tienen menor energía que cualquier otro camino con los mismos extremos. Por tanto, si $V \in \mathbb{V}^+$, entonces $I_\alpha(V, V) \geq 0$.

Falta demostrar que $I_\gamma(V, V) > 0$ si $V \in \mathbb{V}^+ - 0$. Supongamos, por reducción al absurdo que $I_\gamma(V, V) = 0$ con $V \in \mathbb{V}^+$, $V \neq 0$. Vamos a demostrar que eso implica que V pertenece al radical de I_γ . Por lo que si $W \in \mathbb{V}^-$, entonces $I_\gamma(V, W) = 0$ por la ortogonalidad que acabamos de demostrar. Si $W \in \mathbb{V}^+$, consideramos la desigualdad,

$$0 \leq I_\gamma(V + cW, V + cW) = 2cI_\gamma(V, W) + c^2I_\gamma(W, W),$$

válido para todo número real c . Esto nos dice que existen números reales $A \geq 0$ y B tales que $Ac^2 + Bc \geq 0$ para todo $c \in \mathbb{R}$, y solo es posible si $B = 0$, es decir, $I_\gamma(V, W) = 0$. Entonces, V pertenecería al radical de I_γ . Pero como el radical se compone de campos de Jacobi y V se anula en los t_j , concluimos que $V = 0$, en contradicción con lo que habíamos supuesto. \square

Corolario 4.3.4. *El índice de I_γ es igual al índice de I_γ restringido a \mathbb{V}^- . En particular, el índice de I_γ es finito. Lo mismo es cierto para su nulidad.*

Lema 4.3.5. *Sea $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable con $h(a) = 0$. Entonces, existe una función diferenciable $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con $\phi(a) = \frac{dh}{dt}(a)$, $h(t) = (t - a)\phi(t)$, $t \in [a, b]$.*

Lema 4.3.6 (Lema del Índice). *Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ una geodésica sin puntos conjugados a $\gamma(a)$ en el intervalo $(a, b]$. Sea J un campo de Jacobi a lo largo de γ con $\langle J, \dot{\gamma} \rangle = 0$, y sea V un campo de vectores sobre γ diferenciable a trozos, con $\langle V, \dot{\gamma} \rangle = 0$. Supongamos que $J(a) = V(a) = 0$ y que $J(t_0) = V(t_0)$, $t_0 \in (a, b]$. Entonces, $I_{t_0}(J, J) \leq I_{t_0}(V, V)$ y la igualdad se da si y solo si $V = J$ en $[a, t_0]$.*

Demostración. El espacio vectorial \mathcal{J} de los campos de Jacobi, J , a través de γ con $J(a) = 0$ y $\langle J, \dot{\gamma} \rangle = 0$ tiene dimensión $n - 1$, donde $\dim M = n$. Sea $\{J_1, \dots, J_{n-1}\}$ una base de este espacio. Entonces $J = a^i J_i$, $i = 1, \dots, n - 1$, donde a^i son constantes. Por el hecho de no haber puntos conjugados en el intervalo $(a, b]$, para todo $t \neq a$, los vectores $J_1(t), \dots, J_{n-1}(t)$ forman una base del complemento ortogonal a $\dot{\gamma}$ en $T_{\gamma(t)}M$. Por tanto, para $t \neq a$, podemos escribir,

$$V(t) = f^i(t)J_i(t),$$

donde f^i son funciones diferenciables a trozos en $(a, b]$. Vamos a demostrar que se pueden extender diferenciablemente a $t = a$.

Para esto, usaremos el lema anterior para escribir $J_i(t) = (t - a)A_i(t)$. Entonces, $A_i(a) = \dot{J}_i(a)$, es decir, $A_i(a)$ son linealmente independientes. Y más en general, las $A_i(t)$ son libres para todo $t \in [a, b]$, y podemos escribir,

$$V(t) = g^i(t)A_i(t),$$

donde las g^i son funciones diferenciables a trozos en $[a, b]$ y $g^i(a) = 0$. Otra vez, por el lema anterior, tenemos que $g^i(t) = (t - a)h^i(t)$, donde $h^i(t)$ son diferenciables a trozos en $[a, b]$. Y como tenemos $f^i(t) = h^i(t)$ para $t \neq a$, queda demostrado lo anterior.

Vamos a demostrar ahora que, en el interior de cada subintervalo donde f^i es diferenciable,

$$\langle D_t V, D_t V \rangle - \langle R(\dot{\gamma}, V)\dot{\gamma}, V \rangle = \langle \dot{f}^i J_i, \dot{f}^i J_i \rangle + \frac{d}{dt} \langle f^i J_i, f^j \dot{J}_j \rangle.$$

Para ello, como,

$$R(\dot{\gamma}, V)\dot{\gamma} = R(\dot{\gamma}, f^i J_i)\dot{\gamma} = f^i R(\dot{\gamma}, J_i)\dot{\gamma} = -f^i \ddot{J}_i,$$

tenemos,

$$\begin{aligned} \langle D_t V, D_t V \rangle - \langle R(\dot{\gamma}, V)\dot{\gamma}, V \rangle &= \langle \dot{f}^i J_i + f^i \dot{J}_i, \dot{f}^j J_j + f^j \dot{J}_j \rangle - \langle R(\dot{\gamma}, V)\dot{\gamma}, V \rangle = \\ &= \langle \dot{f}^i J_i, \dot{f}^j J_j \rangle + \langle \dot{f}^i J_i, f^j \dot{J}_j \rangle + \langle f^i \dot{J}_i, \dot{f}^j J_j \rangle + \langle f^i \dot{J}_i, f^j \dot{J}_j \rangle + \langle f^i \ddot{J}_i, f^j \dot{J}_j \rangle. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle f^i J_i, f^j \dot{J}_j \rangle &= \langle \dot{f}^i J_i + f^i \dot{J}_i, f^j \dot{J}_j \rangle + \langle f^i J_i, \dot{f}^j \dot{J}_j + f^j \ddot{J}_j \rangle = \\ &= \langle \dot{f}^i J_i, f^j \dot{J}_j \rangle + \langle f^i \dot{J}_i, f^j \dot{J}_j \rangle + \langle f^i J_i, f^j \ddot{J}_j \rangle + \langle f^i J_i, \dot{f}^j \dot{J}_j \rangle. \end{aligned}$$

Por tanto, solo nos hace falta probar que,

$$\langle f^i \dot{J}_i, \dot{f}^j J_j \rangle = \langle f^i J_i, \dot{f}^j \dot{J}_j \rangle.$$

Para probar esto último, escribimos,

$$h(t) = \langle \dot{J}_i, J_j \rangle - \langle J_i, \dot{J}_j \rangle.$$

Como $h(a) = 0$ y,

$$\begin{aligned} \dot{h}(t) &= \langle \ddot{J}_i, J_j \rangle + \langle \dot{J}_i, \dot{J}_j \rangle - \langle \dot{J}_i, \dot{J}_j \rangle - \langle J_i, \ddot{J}_j \rangle = \\ &= -\langle R(\dot{\gamma}, J_i)\dot{\gamma}, J_j \rangle + \langle J_i, R(\dot{\gamma}, J_j)\dot{\gamma} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Concluimos que necesariamente, $h(t) = 0$. Y por la distributividad obtenemos la demostración que queríamos.

Aplicando la fórmula que hemos demostrado a V y a J , obtenemos,

$$I_{t_0}(V, V) = \langle f^i J_i, f^j \dot{J}_j \rangle(t_0) + \int_a^{t_0} \langle \dot{f}^i J_i, \dot{f}^j J_j \rangle dt,$$

y, también,

$$I_{t_0}(J, J) = \langle a^i J_i, a^j \dot{J}_j \rangle(t_0).$$

Como $J(t_0) = V(t_0)$, tenemos que $a^i = f^i(t_0)$, y por lo tanto,

$$I_{t_0}(V, V) = I_{t_0}(J, J) + \int_a^{t_0} \|f^i J_i\|^2 dt.$$

De aquí concluimos que $I_{t_0}(V, V) \geq I_{t_0}(J, J)$, lo que prueba la primera parte del lema.

Además, si $I_{t_0}(V, V) = I_{t_0}(J, J)$, entonces, $f^i J_i = 0$. Y como los J_i son libres para $t \neq a$, se concluye, por continuidad, que $f^i = 0$, para todo i y para todo $t \in [a, t_0]$. Así pues, f^i es constante, y al ser $f^i(t_0) = a^i$, necesariamente, $f^i(t) = a^i$, esto es, $V = J$. \square

Ahora si, estamos en condiciones de demostrar el siguiente resultado, que nos relaciona los puntos conjugados con el índice de la forma índice, es decir, los campos de Jacobi, son en último término los que nos dan condiciones sobre si una geodésica es minimizadora o no.

Teorema 4.3.7 (Teorema del Índice de Morse). *El índice de la forma I_γ es finito e igual al número de puntos $\gamma(t)$, $a < t < b$ conjugados con $\gamma(a)$, contados con su multiplicidad.*

Demostración. Para facilitar la demostración es conveniente introducir la siguiente notación. Si $t \in [a, b]$, denotamos γ_t a la restricción de γ al intervalo $[a, t]$, a su correspondiente forma índice por I_t , y al índice de I_t por $i(t)$. De esta forma, definimos una función $i: [a, b] \rightarrow \mathbb{N}$ cuyo comportamiento queremos estudiar.

Cogemos una subdivisión de $[a, b]$ dada por los puntos $t_j, j = 0, \dots, k$, tal que $\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}$ es una geodésica minimizante, así pues, vemos que $i(t)$ es cero en un entorno de 0. Además, $i(t)$ no decrece, esto es, si $\tilde{t} > t$, entonces $i(\tilde{t}) \geq i(t)$. De hecho, por la definición de $i(t)$, existe un subespacio $\mathcal{U} \subset \mathbb{V}(a, t)$ tal que I_t es definida negativa en \mathcal{U} y $\dim \mathcal{U} = i(t)$. Todo elemento $V \in \mathcal{U}$ se puede extender a un elemento $\tilde{V} \in \mathbb{V}(a, \tilde{t})$ definiendo $\tilde{V} = 0$ en $[t, \tilde{t}]$. Es evidente que, $I_t(V, V) = I_{\tilde{t}}(\tilde{V}, \tilde{V})$. Y por la definición de índice, $i(\tilde{t}) \geq i(t)$, como habíamos previsto.

Para hallar nuevas propiedades sobre $i(t)$, empecemos por observar que, de la definición de $i(t)$, está no depende de la elección de la subdivisión normal de $[a, b]$, podemos, por lo tanto, escoger esa subdivisión de modo que $t \in (t_{j-1}, t_j)$. Lo siguiente, es observar que el índice de I_t es el índice de la restricción de $i(t)$ al subespacio $\mathbb{V}^-(a, t)$. Esa restricción la denotaremos, por comodidad, I_t . Entonces, como cualquier elemento de $\mathbb{V}^-(a, t)$ está determinado por su valor en los puntos $\gamma(t_1), \dots, \gamma(t_{j-1})$, tenemos que $\mathbb{V}^-(a, t)$ es isomorfo a la suma directa,

$$\mathbb{V}^-(a, t) = T_{\gamma(t_1)}M \oplus \dots \oplus T_{\gamma(t_{j-1})}M = S_j.$$

Dejando variar t en (t_{j-1}, t_j) , se sigue que los subespacios $\mathbb{V}^-(a, t)$ son isomorfos entre ellos y a S_j . Podemos, en este caso, considerar las formas cuadráticas I_t como una familia de formas cuadráticas en un espacio fijo S_j . Además, como los elementos de $\mathbb{V}^-(a, t)$ son campos de Jacobi rotos, I_t

depende continuamente de $t \in (t_{j-1}, t_j)$.

Veamos ahora que si $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño, $i(t - \varepsilon) = i(t)$.

Como $i(t)$ no decrece, $i(t) \geq i(t - \varepsilon)$, para todo ε . Por otra parte, si I_t es definida negativa en el subespacio $\tilde{S} \subset S_j$, con $\dim(\tilde{S}) = i(t)$, entonces, por continuidad de I_t , existe $\varepsilon > 0$ tal que $I_{t-\varepsilon}$ sigue siendo definida negativa en \tilde{S} , es decir, $i(t - \varepsilon) \geq i(t)$. De esta forma, alcanzamos la igualdad.

Denotemos por d la nulidad de I_t , observamos que $d = 0$ si $\gamma(t)$ no es conjugado con $\gamma(a)$. Veamos, ahora, que si $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño, $i(t + \varepsilon) = i(t) + d$.

Veamos primero que $i(t + \varepsilon) \leq i(t) + d$. Como, $\dim(S_j) = n(j - 1)$, I_t es definida positiva en un subespacio de dimensión $n(j - 1) - i(t) - d$. Por continuidad, $I_{t+\varepsilon}$ sigue siendo definida positiva en ese subespacio, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. Por lo tanto,

$$i(t + \varepsilon) \leq n(j - 1) - [n(j - 1) - i(t) - d] = i(t) + d.$$

Para la desigualdad en el otro sentido, necesitamos utilizar el Lema del Índice. Sea $V \in S_j$, con $V(t_{j-1}) \neq 0$, y denotemos por V_{t_0} el campo de Jacobi roto que coincide con $V(t_i)$ en $t_i, i = 1, \dots, j - 1$, y que se anula en el punto $t_0 \in (t_{j-1}, t_j)$. Afirmamos que,

$$I_{t_0}(V_{t_0}, V_{t_0}) > I_{t_0+\varepsilon}(V_{t_0+\varepsilon}, V_{t_0+\varepsilon}).$$

De hecho, si denotamos por W_{t_0} el campo de vectores a través de $\gamma([a, t_0 + \varepsilon])$ por,

$$\begin{cases} W_{t_0}(t) = V_{t_0}(t), & t \in [a, t_0] \\ W_{t_0}(t) = 0, & t \in [t_0, t_0 + \varepsilon] \end{cases}$$

tenemos, por el Lema del Índice,

$$I_{t_0}(V_{t_0}, V_{t_0}) = I_{t_0+\varepsilon}(W_{t_0}, W_{t_0}) > I_{t_0+\varepsilon}(V_{t_0+\varepsilon}, V_{t_0+\varepsilon}),$$

donde la última desigualdad es estricta, ya que W_{t_0} no es un campo de Jacobi.

Por lo tanto, si $V \in S_j$ y $I_t(V, V) \leq 0$, entonces $I_{t+\varepsilon}(V, V) < 0$. Por lo que, si I_t es definida negativa en un subespacio $\tilde{S} \subset S_j$, $I_{t+\varepsilon}$ seguirá siendo definida negativa en la suma directa de \tilde{S} con el radical de I_t . Entonces,

$$i(t + \varepsilon) \geq i(t) + d,$$

con lo que, tenemos la igualdad.

La información que hemos obtenido sobre $i(t)$ nos permite describir $i(t)$ como la función que es cero en un entorno del origen, es continua a izquierdas y tiene discontinuidades en los puntos conjugados con $\gamma(a)$, donde cada salto es exactamente la multiplicidad del punto conjugado. Es decir, hemos demostrado el teorema. \square

Corolario 4.3.8 (Primer Teorema de Jacobi). *Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ un segmento de geodésica en M tal que $\gamma(b)$ no sea conjugado con $\gamma(a)$. Entonces γ no tiene puntos conjugados en (a, b) si y solo si para toda variación propia de γ existe $\delta > 0$ tal que $E(0) < E(s)$ para $0 < |s| < \delta$. En particular, si γ es minimizadora, γ no tiene puntos conjugados en (a, b) .*

Observación 41. Merece la pena destacar la relación entre la forma índice y los puntos conjugados de una manera más explícita. Esto es, el hecho de que I_γ sea definida positiva es equivalente a que no existan puntos conjugados a $\gamma(a)$ en el intervalo $(a, b]$. Análogamente, I_γ es semidefinida positiva si y solo si garantizamos la ausencia de puntos conjugados a $\gamma(a)$ en el intervalo abierto (a, b) .

Corolario 4.3.9. *El conjunto de puntos conjugados sobre una geodésica es un conjunto discreto.*

En lo que sigue, vamos a aclarar los resultados anteriores, y adjuntaremos algún otro para completar este resultado.

Observación 42. Otra forma equivalente del resultado de Jacobi es que, en el intervalo $(a, b]$ no existen puntos conjugados si y solo si nuestra geodésica es un mínimo local estricto de la energía. Por la relación entre energía y longitud, equivalentemente, si y solo si la geodésica es un mínimo local estricto de la longitud. Donde nos referimos a local en el sentido de variación propia de la curva γ .

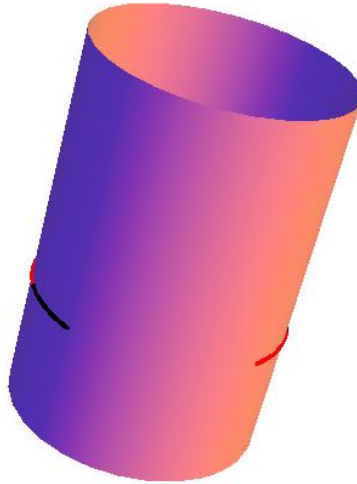


Figura 4.3: Cilindro.

Ejemplo 8. Es importante destacar que se trata de una curva γ que tiene longitud y energía estrictamente mínima con respecto al resto de curvas

principales de la variación suficientemente próximas. Pero no se trata de un mínimo global. Veamos, por ejemplo, el caso del cilindro de radio 1 de la figura anterior. Sean $p = (1, 0, 0)$ y $q = (0, 1, 0)$, como en el cilindro los paralelos si son geodésicas, sabemos que la circunferencia $\gamma: [\frac{\pi}{2}, 2\pi] \rightarrow C$ dada por, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ es una geodésica que une p con q . Además como en las superficies regulares con curvatura de Gauss menor o igual que cero no hay puntos conjugados, por el Primer Teorema de Jacobi, γ es un mínimo local de la longitud. Sin embargo es evidente que la geodésica $\tilde{\gamma}: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow C$ definida por $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$ tiene longitud menor que γ .

Observación 43. El hecho de que $\gamma(b)$ no sea conjugado con $\gamma(a)$ es lo que nos permite hablar de mínimo estricto. En caso contrario, consideremos la esfera \mathbb{S}^2 , entonces el polo sur es un punto conjugado con el polo norte. Si tomamos una geodésica γ , es decir una circunferencia máxima, que una dichos puntos, tenemos que para cualquier variación a través de geodésicas existen curvas $\tilde{\gamma}$ tales que tanto la energía, como la longitud son iguales que la de γ . Luego, γ no tiene energía, ni longitud menor estricta.

Para acabar, vamos a analizar un ejemplo de la utilidad del Teorema del Índice de Morse en otras áreas. En este caso, en Análisis Funcional, ya que vamos a poder acotar ciertas funciones, lo que puede ser útil para el estudio de la convergencia. En el siguiente ejemplo, vamos a demostrar la desigualdad de Wirtinger basandonos como ya hemos dicho en el Teorema del Índice de Morse. Es conveniente recordar que esta desigualdad puede ser demostrada a partir de series de Fourier, sin embargo esta demostración es más visual.

Ejemplo 9 (Desigualdad de Wirtinger). Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de clase C^2 tal que $f(a) = f(b) = 0$. Entonces,

$$\int_a^b f^2 dt \leq \int_a^b \dot{f}^2 dt.$$

Para ver esto, consideremos la esfera unidad \mathbb{S}^2 , y una geodésica $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^2$ tal que $\gamma(a) = p$ y $\gamma(b) = -p$. Tomamos un campo de vectores unitario paralelo a lo largo de γ de tal forma que sea ortogonal con $\dot{\gamma}$. Aplicando la forma índice de la variación propia generado por el campo variacional $\tilde{V} = fV$, tenemos que,

$$\begin{aligned} I_\gamma(\tilde{V}, \tilde{V}) &= \int_a^b [\langle D_t \tilde{V}, D_t \tilde{V} \rangle - \langle R(\dot{\gamma}, \tilde{V})\dot{\gamma}, \tilde{V} \rangle] dt = \\ &= \int_a^b [\langle \dot{f}V, \dot{f}V \rangle - \langle fR(\dot{\gamma}, V)\dot{\gamma}, fV \rangle] dt = \int_a^b (\dot{f}^2 - f^2) dt. \end{aligned}$$

Por tanto, como $\gamma(b)$ es el primer punto conjugado con $\gamma(a)$, aplicando el Teorema del Índice de Morse, $I_\gamma(\tilde{V}, \tilde{V}) \geq 0$, tal y como indica la desigualdad.

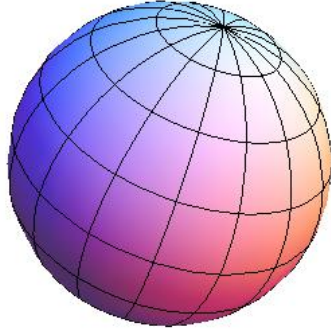


Figura 4.4: Esfera Unidad.

Apéndice A

B-geodésicas

En este apéndice, vamos a tratar un tipo de geodésicas en una variedad a las cuales les fijaremos unas condiciones de contorno. Estas condiciones de contorno van a ser subvariedades cerradas de la variedad M .

La idea del apéndice es repetir con estas condiciones lo que hemos estudiado para geodésicas libres en el capítulo tres, enunciando de nuevo, las fórmulas de variación.

Observación 44. Sea M una variedad de Riemann completa y B una subvariedad cerrada de $M \times M$. Denotamos,

$$C_B([a, b]) = \{\gamma: [a, b] \longrightarrow M \mid \gamma \text{ es una curva diferenciable a trozos con } (\gamma(a), \gamma(b)) \in B\}$$

donde B da una condición de frontera.

Observación 45. Denotamos $T_\gamma C_B([a, b]) = \{V: [a, b] \longrightarrow M \mid V \text{ es un campo de vectores diferenciable a lo largo de } \gamma \text{ que satisface } (V(a), V(b)) \in T_{(\gamma(a), \gamma(b))} B\}$ que es un espacio vectorial de dimensión infinita.

Es importante destacar, que la notación utilizada, viene de dotar al conjunto $C_B([a, b])$ de estructura de variedad diferenciable de dimensión infinita, lo que se conoce como Variedad de Hilbert. Podemos precisar, que utilizando esta estructura, no sería necesario calcular las fórmulas de variación, ya que ellas serían la primera y segunda derivada en esa estructura diferenciable. Sin embargo, esto requiere de una herramienta de Análisis Fúncional que no hemos visto en este grado, por lo que, omitiremos esta parte.

Definición 63. Llamaremos a un elemento $V \in T_\gamma C_B([a, b])$ un *campo de variación* de γ .

Lema A.0.10. Para cada $V \in T_\gamma C_B([a, b])$ existe una variación $\Gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \longrightarrow M$ de γ satisfaciendo las siguientes condiciones;
1) Γ es diferenciable a trozos.

2) Para cada $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\Gamma_s \in C_B([a, b])$.

3) $\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(t, 0) = V(t)$.

La llamaremos *variación de γ tangente a V* .

Demostración. Definimos $\Gamma_{|[t_{i-1}, t_i] \times (-\varepsilon, \varepsilon)}$ como $\Gamma(t, s) = \exp_{\gamma(t)} sV(t)$ que verifica (1) y (3).

Tomamos una curva diferenciable $\sigma(s) = (\sigma_1(s), \sigma_2(s))$ en B tangente a $(V(a), V(b)) \in T_{(\gamma(a), \gamma(b))}B$ en $s = 0$.

Extendemos el campo de vectores $V_{|[t_0, t_1] \times \{0\}}$ a un campo de vectores Y en $[t_0, t_1] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ de tal forma que $Y(t_0, s) = \dot{\sigma}_1(s)$ y $Y(t_1, s) = \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(t_1, s)$.

Considerando curvas integrales de Y que parten de $\gamma(t) = \Gamma(t, 0)$ obtenemos

$\Gamma_{|[t_0, t_1] \times (-\varepsilon, \varepsilon)}$.

Por el mismo argumento obtenemos, $\Gamma_{|[t_{k-1}, t_k] \times (-\varepsilon, \varepsilon)}$. \square

Teorema A.0.11 (Primera Fórmula de Variación). *Sea $V \in T_\gamma C_B([a, b])$, y Γ una variación de γ tangente a V . Tomamos una subdivisión Δ de $[a, b]$ tal que $\Gamma_{|(-\varepsilon, \varepsilon) \times [t_{i-1}, t_i]}$ sea diferenciable. Sean γ_s las curvas de la variación definidas por $\gamma_s(t) = \Gamma(t, s)$ con $\gamma_0 = \gamma$. Entonces tenemos,*

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} E(\gamma_s) &= - \int_a^b \langle D_t \dot{\gamma}(t), V(t) \rangle dt + \sum_{i=1}^{k-1} \langle V(t_i), \dot{\gamma}(t_i^-) - \dot{\gamma}(t_i^+) \rangle + \\ &\quad + \langle V(b), \dot{\gamma}(b) \rangle - \langle V(a), \dot{\gamma}(a) \rangle. \end{aligned}$$

Demostración. Desarrollando, obtenemos,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} E(\gamma_s) &= \frac{1}{2} \int_a^b \frac{d}{ds} \langle \frac{\partial \Gamma}{\partial t}, \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \rangle dt = \int_a^b \langle D_t \frac{\partial \Gamma}{\partial s}, \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \rangle dt = \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} \langle \frac{\partial \Gamma}{\partial s}, \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \rangle - \langle \frac{\partial \Gamma}{\partial t}, D_t \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \rangle dt. \end{aligned}$$

Entonces, como $\frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t, 0) = \dot{\gamma}(t)$, $\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(t, 0) = V(t)$, demostramos el teorema. \square

Corolario A.0.12. *Sea $\gamma \in C_B([a, b])$ una curva regular diferenciable a trozos. Entonces para el funcional longitud L tenemos que,*

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L(\gamma_s) &= - \int_a^b \langle D_t \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}, V(t) \rangle dt + \sum_{i=1}^{k-1} \langle V(t_i), \frac{\dot{\gamma}(t_i^-)}{\|\dot{\gamma}(t_i^-)\|} - \frac{\dot{\gamma}(t_i^+)}{\|\dot{\gamma}(t_i^+)\|} \rangle + \\ &\quad + \langle V(b), \frac{\dot{\gamma}(b)}{\|\dot{\gamma}(b)\|} \rangle - \langle V(a), \frac{\dot{\gamma}(a)}{\|\dot{\gamma}(a)\|} \rangle. \end{aligned}$$

En la siguiente definición usaremos la notación $DE(\gamma)(V)$ para referirnos a la parte derecha de la igualdad en la primera fórmula de variación, como ya hemos comentado, para mantener la notación de las variedades de Hilbert.

Definición 64. Una curva $\gamma \in C_B([a, b])$ se dice que es una *curva estacionaria* de E en $C_B([a, b])$ si $DE(\gamma)(V) = 0$ se verifica para todo $V \in T_\gamma C_B([a, b])$.

Proposición A.0.13. $\gamma \in C_B([a, b])$ es una curva estacionaria de E si y solo si $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ es una geodésica y $(\dot{\gamma}(a), -\dot{\gamma}(b)) \in (T_{(\gamma(a), \gamma(b))}B)^\perp$.

Demostración. Para cada $(x, y) \in T_{(\gamma(a), \gamma(b))}B$ cogemos $V \in T_\gamma C_B([a, b])$ con $V(a) = x$ y $V(b) = y$. Entonces, tenemos,

$$0 = DE(\gamma)(V) = \langle V(b), \dot{y}(b) \rangle - \langle V(a), \dot{y}(a) \rangle = -\langle (x, y), (\dot{y}(a) - \dot{y}(b)) \rangle.$$

Y así obtenemos, el enunciado de la proposición. \square

Introducimos finalmente, las B-geodésicas, que son la base principal de este apéndice.

Definición 65. A una geodésica γ que verifique las condiciones anteriores de frontera la llamaremos *B-geodésica*.

Teorema A.0.14 (Segunda Fórmula de Variación). *Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ una B-geodésica. Dado $V \in T_\gamma C_B([a, b])$ tomamos una variación $\{\gamma_s\}$ de γ tangente a V . Entonces,*

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2}|_{s=0} E(\gamma_s) &= \int_a^b [\langle D_t V(t), D_t V(t) \rangle - \langle R(V(t), \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t), V(t) \rangle] dt + \\ &\quad + \langle A_{(\dot{\gamma}(a), -\dot{\gamma}(b))}(V(a), V(b)), (V(a), V(b)) \rangle \end{aligned}$$

donde A denota el endomorfismo de Weingarten de una subvariedad $B \subset M \times M$ con respecto al vector normal $(\dot{\gamma}(a), -\dot{\gamma}(b))$.

Demostración. Primero, observamos que,

$$\frac{d^2}{ds^2} E(s) = \int_a^b \frac{d}{ds} \langle D_t \frac{\partial \Gamma}{\partial s}, \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \rangle dt.$$

Entonces, tenemos,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \langle D_t \frac{\partial \Gamma}{\partial s}, \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \rangle &= \langle D_s D_t \frac{\partial \Gamma}{\partial s}, \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \rangle + \langle D_t \frac{\partial \Gamma}{\partial s}, D_s \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \rangle = \\ &= \langle D_s D_t \frac{\partial \Gamma}{\partial s}, \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \rangle + \langle R(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}, \frac{\partial \Gamma}{\partial t}) \frac{\partial \Gamma}{\partial s}, \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \rangle + \langle D_t \frac{\partial \Gamma}{\partial s}, D_t \frac{\partial \Gamma}{\partial s} \rangle = \\ &= \frac{d}{dt} \langle D_s \frac{\partial \Gamma}{\partial s}, \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \rangle - \langle D_s \frac{\partial \Gamma}{\partial s}, D_t \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \rangle - \langle R(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}, \frac{\partial \Gamma}{\partial t}) \frac{\partial \Gamma}{\partial t}, \frac{\partial \Gamma}{\partial s} \rangle + \\ &\quad + \langle D_t \frac{\partial \Gamma}{\partial s}, D_t \frac{\partial \Gamma}{\partial s} \rangle. \end{aligned}$$

Y haciendo $s = 0$, obtenemos, $D_t \frac{\partial \Gamma}{\partial t} = 0$ ya que γ es una geodésica. Además, $\frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t, o) = \dot{\gamma}(t)$ es diferenciable, y tenemos,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2}|_{s=0} E(\gamma_s) &= \int_a^b [\langle D_t V(t), D_t V(t) \rangle - \langle R(V(t), \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t), V(t) \rangle] dt + \\ &\quad + \langle D_s \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(b, 0), \dot{\gamma}(b) \rangle - \langle D_s \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(a, 0), \dot{\gamma}(a) \rangle - \\ &\quad \langle D_s(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(a, 0), \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(b, 0)), (\dot{\gamma}(a), -\dot{\gamma}(b)) \rangle. \end{aligned}$$

Que es lo que tratábamos de demostrar. \square

Como acabamos de ver, es posible desarrollar la misma teoría para las B-geodésicas, cosa que no haremos en este trabajo, ya que solo pretendíamos presentar las geodésicas con condiciones de frontera. Para más información puede consultarse el libro [6].

Apéndice B

Geodésicas Cerradas

En este apéndice vamos a tratar la existencia de geodésicas cerradas en variedades de Riemann. Y vamos a ver un teorema de Cartan. Este teorema nos indicará la existencia de al menos una geodésica cerrada en una clase de equivalencia si la variedad es compacta, sin embargo hay otro teorema que demuestra la existencia de al menos tres. De hecho, tres es una cantidad no mejorable como veremos con el ejemplo del elipsoide de ejes de tamaño distinto.

Definición 66. Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ una geodésica, diremos que es *cerrada* si verifica que $\gamma(a) = \gamma(b)$ y además $\dot{\gamma}(a) = \dot{\gamma}(b)$.

Definición 67. Un conjunto \mathbb{L} de caminos cerrados en M se llama *clase de homotopía libre* si dado $f \in \mathbb{L}$ y $g: I \rightarrow M$ tal que exista una homotopía $F: I \times I \rightarrow M$ que verifique;

- 1) $F(0, t) = f(t)$,
- 2) $F(1, t) = g(t)$,
- 3) $F(s, 0) = F(s, 1)$.

Entonces, $g \in \mathbb{L}$. Denotaremos el conjunto de estas clases por $C_1(M)$.

Observación 46. La diferencia con el grupo fundamental es que en la clase de homotopía libre permitimos que los orígenes del camino varíen en M .

Teorema B.0.15 (Cartan). *Si M es compacta y $\mathbb{L} \in C_1(M)$ no es la clase constante, entonces existe una geodésica cerrada de M en la clase \mathbb{L} .*

Demostración. Sea d el ínfimo de las longitudes de las curvas en diferenciables a trozos pertenecientes a \mathbb{L} . Como \mathbb{L} es no trivial, $d > 0$. Sea γ_j una sucesión de curvas diferenciables a trozos que están en \mathbb{L} tales que $L(\gamma_j)$ tiende a d . Podemos suponer que γ_j es una geodésica rota definida en el intervalo $[0, 1]$ parametrizada proporcionalmente al arco. Sea $L = \sup L(\gamma_j)$. Entonces,

$$d(\gamma_j(t_1), \gamma_j(t_2)) \leq \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{\gamma}_j(t)\| dt \leq L(t_2 - t_1),$$

para todo $t_1 \leq t_2 \in [0, 1]$. Entonces, el conjunto $\{\gamma_j\}$ es equicontinuo.

Como M es compacto, existe una subsucesión de γ_j , que por comodidad denotaremos de nuevo γ_j , que converge uniformemente a una curva continua cerrada $\gamma_0: [0, 1] \rightarrow M$.

Sea $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ una partición del intervalo $[0, 1]$ tal que $\gamma_0|_{[t_{i-1}, t_i]}$, $i = 1, \dots, k$, este contenida en un entorno totalmente normal. Sea $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ una curva diferenciable a trozos que una los puntos $\gamma_0(t_{i-1})$ y $\gamma_0(t_i)$. Es evidente que $\gamma \in \mathbb{L}$, por lo que $L(\gamma) \geq d$. Vamos a demostrar que es igual.

Por reducción al absurdo, supongamos que $L(\gamma) > d$ y sea $\varepsilon = \frac{L(\gamma) - d}{2k+1}$. Existe un entero j tal que,

$$L(\gamma_j) - d < \varepsilon \text{ y } d(\gamma_j(t), \gamma_0(t)) < \varepsilon \text{ para todo } t \in [0, 1].$$

Si denotamos $\gamma_j^i = \gamma_j|_{[t_{i-1}, t_i]}$, tenemos,

$$\sum_{i=1}^k (L(\gamma_j^i) + 2\varepsilon) = L(\gamma_j) + 2k\varepsilon < d + (2k+1)\varepsilon = L(\gamma) = \sum_{i=1}^k L(\gamma^i).$$

Por lo tanto, existe un entero i , $1 \leq i \leq k$, tal que,

$$L(\gamma_j^i) + 2\varepsilon < L(\gamma^i),$$

lo que contradice el hecho de que γ^i sea minimizante y prueba que $L(\gamma) = d$. Parametrizamos γ por la longitud de arco. Entonces, $\gamma: [0, d] \rightarrow M$ es una geodésica rota que tiene longitud mínima en la clase \mathbb{L} . Veamos que además, γ es regular en los puntos $p_i = \gamma(t_i)$, para todo $i = 0, \dots, k$.

Otra vez, por reducción al absurdo supongamos lo contrario, sea B una bola convexa centrada en p_i . Elegimos los puntos q_1 y q_2 en $\gamma \cap B$ de forma que el triángulo geodésico $p_i q_1 q_2$ sea homótopo a un punto. Entonces, la curva cerrada formada por la geodésica minimizante $q_1 q_2$ y por el arco de γ entre q_1 y q_2 que no contiene a p_i esta en la clase de \mathbb{L} y tiene longitud menor que γ , lo que lleva a contradicción. \square

Como ya hemos adelantado se puede probar que existen tres geodésicas cerradas en la clase \mathbb{L} . Y que esa cota inferior no puede mejorarse como así lo demuestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10. Elipsoide en el cual los tres ejes son de tamaño distinto.

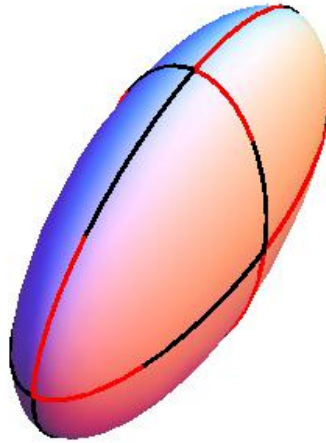


Figura B.1: Elipsoide Tri-axial.

El tema de las geodésicas cerradas es un punto sobre el cual podríamos extendernos y analizar que tipos de variedades tienen un número determinado de geodésicas cerradas para una cierta longitud. Como por ejemplo, podríamos estudiar si existe alguna variedad con infinitas geodésicas cerradas, cuya respuesta es afirmativa, y sorprendentemente la esfera no es la única, como así demuestran las variedades de Zoff. Para profundizar en este tema puede verse [1].

Bibliografía

- [1] Arthur L. Besse, Manifolds All Whose Geodesics Are Closed, Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society 11, 1984.
- [2] Manfredo P. do Carmo, Riemannian Geometry, Mathematics: Theory and Applications, Birkhauser, Boston, 1992.
- [3] Sosichi Kobayashi y Katsumi Nomizu, Foundations of Differential Geometry, Interscience Publishers, London, 1963.
- [4] John M. Lee, Riemannian Manifolds, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [5] Joaquín Pérez Muñoz, Geometría Riemanniana, Granada, 2004.
- [6] Takashi Sakai, Riemannian Geometry, Mathematical Monographs, Board, Tokio, 1992.

