

EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA

GRADU AMAIERAKO LANA
FISIKAKO GRADUA

Kiribilen kosmologia kuantikorako sarrera

Egilea:
Mattin URBIETA GALARRAGA

Zuzendaria:
Dr. David BRIZUELA CIEZA

Leioan, 2014.eko ekainaren 24an

EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA

Laburpena

Gradu amaierako lana

Kiribilen kosmologia kuantikorako sarrera

MATTIN URBIETA GALARRAGA

Gradu amaierako lan hau kiribilen kosmologia kuantikorako sarrera bat da. Lan honek 4 kapitulu ditu. Lehenengoan, sarrera bezala grabitazio kuantikoak izan duen bilakaera historikoa jaso da, halako teoria bat garatzeko motibazioak eta zailtasunak, eta honen garapenean kosmologia kuantikoak duen papera azalduz. Lanean, oro har, grabitazio kuantikoaren teoria bat eraikitzeke formalismo “kanonikoa” jarraitu da, alegia, erlatibitate orokorraren formulazio hamiltondarra erabiliz teoria kuantikoa garatzea. Bigarren kapituluan grabitazioaren teoria klasikoaren formulazio hamiltondarra garatu da, lehenik Arnowitt-Deser-Misner formalismoaren (Einstein-en geometrodinamika bezala ere ezaguna denaren) bidez eta ondoren Ashtekar-en aldagaiak erabiliz. Bietan hamiltondar guztiz lotua lortzen da, hots, loturen konbinazio lineala den hamiltondarra. Loturen bidezko formulazio hauen kuantizazioaren eta kiribilen adierazpenaren oinarritzko aspektuak jaso dira bigarren kapituluan. Hirugarren kapituluan kosmologiaren teoria klasikoa Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker metrika laua erabiliz azaltzen da era laburrean lehenik, eta ondoren Wheeler-DeWitt teoria kuantikoa eta kiribilen kosmologia kuantikoa eta hauek erabiliz lorturiko zenbait emaitza aipatzen dira. Azkenik, ondorioen atalarekin amaitzen da lana.

Gaien Aurkibidea

Laburpena	ii
Gaien aurkibidea	iii
1 Sarrera	1
1.1 Motibazioak	2
1.2 Hiru norabide nagusi	3
1.3 Kosmologia	4
1.4 Arazoak eta zailtasunak	5
2 Erlatibitate orokorraren formulazio hamiltondarra	7
2.1 3+1 deskonposaketa	7
2.1.1 Lie-ren deribatua	9
2.1.2 Gauss-Codacci erlazioa	10
2.2 Einstein-en geometrodinamika	12
2.3 Konexioen adierazpidea	15
2.3.1 Triadak	15
2.3.2 Konexioak	17
2.3.3 Hamiltondarra eta loturak	18
2.3.4 Materiaren akoplamendua	20
3 Kuantizazioa	21
3.1 Wheeler-DeWitt ekuazioa	21
3.2 Konexioen adierazpidearen kuantizazioa	22
3.3 Kiribilen grabitazio kuantikoa	23
3.3.1 Holonomiak	23
3.3.2 Kiribilen adierazpidea	26
3.3.3 Espin-sareak	27
4 Kosmologia kuantikoa	29
4.1 Teoria klasikoa	30
4.2 Wheeler-DeWitt kuantizazio tradizionala	32
4.3 Kiribilen kosmologia kuantikoa	33
4.4 Eredu eraginkorrak	36
Ondorioak	37
Bibliografia	39

Kapitulua 1

Sarrera

Newton-en grabitazio unibertsalaren legeak Lurreko eta honez gaindiko fenomenoak, zeinak aurrez lege ezberdinei lotuak zeudela uste baitziren, elkartu zituen. Bere arrakastak denbora luzez iraun zuen (bat ez zetozen lehen behaketak izan arte zenbait mende igaro ziren), Einstein-ek 1915ean argitaratutako artikulu batean [1] erlatibitate orokorraren teoria ederra formulatu zuen arte. Aurretik 1905ean erlatibitate bereziaren teoria garatu zuen Einstein-ek [2, 3], Maxwell-ek 1861ean aurkeztutako argiaren teoriaren azterketa sakon baten ondoren [4]. Eterraren hipotesia baztertu eta espazio-denboraren kontzeptua sartu zuen.

Erlatibitate berezia eta Newton-en grabitazioaren bateraezintasunetik (azken honetan eremu grabitatorioaren hedapena argia baino azkarragoa da, bat-batekoa da, alegia) abiatuta garatu zuen Einstein-ek erlatibitate orokorra Honek Newton-en teoriarekin bat ez zetozen behaketak azaltzen zituen, merkurioren perihelioaren aurrerapena kasu [5], eta ondoren etorriko ziren esperimentu eta behaketek (lehenak 1919ko eklipse oso batean Eddington-ek zuzendutakoak [6]) ziurtatu zuten teoriaren arrakasta. Baina Newton-en legea baino orokorragoa eta garatuagoa izateaz harago, espazio-denborari zentzu dinamikoa eman zion, espazio-denbora “geruza” edo “gainazal” deformatu hartzen da; Wheeler-en hitzak gogora ekarriz, “Espazio-denborak materiari nola higitu esaten dio; materiak espazio-denborari, berriz, nola kurbatu” [7].

Garai beretsuan izan zuen sorrera mekanika kuantikoak, XX. Mendearen lehen erdian, teoria klasikoaren eskala atomikoko fenomenoak azaltzeko ezintasuna zela eta. Argitasun eta sormen handiko fisikariei esker lortu zen teoria hau sortu eta garatzea. Mekanika kuantikoaren zenbait berezitasun edota propietate garrantzitsuenak aipatu beharko bagenitu, ondorengoak horien artean izango lirake: energia kuantizaturik dago [8], uhin-partikula dualitatea dugu [9], sistem baten egoera uhin-funtzioak adierazten du [10–13], behagarri baten neurketak egitean honen autobalioak neur-tuko ditugu bakoitza probabilitate jakin batekin (alegia, neurketen interpretazio probabilistikoa egiten da) [14], eta Heisenberg-en ziurgabetasun printzipioa bete behar da [15].

1926an argi-kuantuak fotoi bezala definitu ziren. Ondoren, 1927an mekanika kuantikoak Solvay-ko Bosgarren Konferentzian onarpen zabala izan zuen.

1.1 Motibazioak

Einstein-ek erlatibitate orokorra aurkitu zuenetik eremu grabitatorioak kuantikoki jokatu beharke lukeela pentsatzera ez zen denbora asko igaro behar izan. Einstein-ek berak, 1916an zioen efektu kuantikoek erlatibitate orokorraren teoria moldatu beharke luketela[16]. 1927an Klein-ek iradoki zuen grabitazio kuantikoak denboraren eta espazioaren kontzeptuak aldatu beharke lituzkeela[17]. Rosenfeld-ek grabitazio kuantikoari buruzko lehen artikulua idatzi zituen 1930eko hamarkadan[18], eta espin biko “grabitoi” izendatutako eremu grabitatorioaren kuantuaren kontzeptua ezagun egin zen laster [19, 20]. Garai berean Bronstein fisikari errusiarrak, eremu grabitatorioaren ezaugarri bereziak direla eta, eremuen kuantizaziorako teknikak orokortu egin behar zirela konturatu zen, hondoko (*background*) geometriaren menpekotasunik ez izateko moduan [21].

Horrez gain, baldintza orokorretan ematen den singularitateen existentziak [22] adierazten digu erlatibitate orokorra ez dela teoria osoa; hasierako soluzioetan singularitateen agerpena inposatutako simetriak zirela eta sortzen zela uste zen arren, 1960ko hamarkadan hala ez zela frogatu zuten Hawking, Penrose eta beste zenbaitzuen ikerketek. Erlatibitate orokorrak bere balioa galtzen du singularitateetan; materiaren dentsitateak infinitura jotzen du, fisikoki onargarria ez dena.

Mekanika kuantikoan, bestalde, espazio-denboraren aurrez definituriko metrika dugu. Bi teoriak aski ezberdinak dira elkarrengandik. Motibazioa, beraz, guztiz kontzeptuala da, erlatibitate orokorra baztertzeraz garrantzitsu behaketarik ez baita egin orain arte, nahiz eta badauden jatorrizko teoriak bakarrik azal ezin ditzakeen zenbait efektu (horregatik suposatzen dugu materia eta energia iluna existitzen direla, besteak beste).

Grabitazio kuantikoaren teoria bat izateak, erlatibitate orokorraren singularitateak hobeto ulertzen lagunduko liguke, *Big Bang* deritzona eta zulo beltzak, adibidez. Baina hortik harago joanda, Planck-en eskalako espazioaren eta denboraren ulermenean sakontzea ahalbidetu beharke liguke. Dirac-ek Schrödinger-en ekuazioa erlatibitate berezia kontuan hartuz birformulatu zuenean antimateriaren existentzia aurrean zuen. Zentzuzkoa dirudi pentsatzeak erlatibitate orokorra eta mekanika kuantikoa teoria konsistente batean elkartuz gero, materia mota berria beharrez, espazio-denboraren efektu berriak agertu beharke lirakeela.

Bestalde, eginiko zenbait saiakerek badute gehigarri indartsu bat, zeina naturako oinarritzko lau elkarrekintzak bateratzen saiatzea den: indar grabitatoria (nahiz eta erlatibitate orokorraren arabera ez den elkarrekintza bat funtsean), elektromagnetismoa, elkarrekintza nuklear ahula eta elkarrekintza nuklear bortitza. Orain arte elkarrekintza elektromagnetikoa eta nuklear ahula elkartzea lortu da soilik, teoria elektroahularen bidez.

Azkenik, interesgarria litzateke aipatzea eremu kuantikoen teoria eta erlatibitate orokorra lotuz auresate garrantzitsu bat egin dela: Hawking-en erradiazioa [23]. Grabitazio kuantikoaren teoria batek azaldu beharke efektua litzateke, eta nolabait, zulo beltzen entropiari lotuta, zein bide jarraitu aukeratu behar den erakutsi dezakeen itasargia da.

1.2 Hiru norabide nagusi

Grabitazio kuantikoaren bilakaera historikora begiratuz, nabarmendu beharko genuke honen ikerkuntzak izan duen garapena nagusiki hiru ikerketa lerrotan bana daitekeela [24–26]. Hiru lerro hauen bilakaera eta garapena ezberdina izan da, zenbait unetan puntu komunak izan dituzten arren, eta badaude hiru taldeetako batean ere sar ezin ditzakegun ikerketak. Dena den, 80 urtetan zehar, kontuan hartzen badugu 1930eko hamarkadan hasi zirela, bakoitzak bere bidea egin du. Hiru lerroei askotan “kobariante”, “kanoniko” eta “historien batura” (*sum over histories*) deritze.

- Ikerketa lerro kobariantean hondoan finkatutako metrika baten fluktuazioen bidez grabitazioaren teoria kuantiko baten bilaketan oinarritzen da. Programa hau Rosenfeld, Fierz eta Pauli-k hasi zuten 1930eko hamarkadan [18–20]. 1949an DeWitt-ek Schwinger-en kuantizazio kobariantea aplikatu zion eremu grabitatorioari. 1952an Gupta-k eremu grabitatorioaren “espazio lau kuantizazioa” garatu zuen [27], Rosenfeld, Fierz eta Pauli-ren lanetik abiatuta. 1960ko hamarkada amaitzerako, teoriak bazuen bere oinarritzko egitura: erlatibitate orokorraren Feynman-en arauak aurkitu zituzten DeWitt eta Feynman-ek [28–31]. Mundu berri baten promesa zekarren berarekin. 1970eko hamarkadan lan nekezaren ondoren t’Hooft eta Veltman-ek [32, 33], Deser eta Van Nieuwenhuizen-ek [34, 35], eta beste batzuk, birnormalizazina izatearen zantzu sendoak topatu zituzten. Arazoak zeuden beraz. Ondoren erlatibitate orokorraren garapen birnormalizagarria edo perturbatiboki finitua zena lortzeko ikerketa hasi zen. Super-grabitazioaren bidez, 1980ko hamarkadaren bukaeran, arrakasta handiz soken teoria deritzona lortu zuten. Baina ordaindu beharreko prezioa zuen horrek, espazio-denboraren dimentsio okerrak adibidez, eta partikula super-simetrikoak sartu behar izatea, zeinak urtez urte egiten diren azeleragailu energetikoagoetan aurkitzea espero diren, oraindik hala izan ez den arren. Baina perturbazio finituen hedapen baten emaitza, horrenbeste bilatu ondoren, onegia zen baztertzeko munduak gure teoriengandik itxura ezberdina zuelako soilik.
- Ikerketa lerro kanonikoan metrika orokorrari dagozkion eragileen, edo metrikaren funtzio batzuen, adierazpena daraman Hilbert-en espazioa duen teoria kuantiko bat eraikitzean oinarritzen da, hondoan metrika finkorik gabe. Erlatibitate orokorraren formulazio hamiltondarra erabili ohi da, aurrerago egingo dugun bezala. 1950eko hamarkadan, Bergmann-en inguruan sorturiko taldeak [36, 37], eta Dirac-ek [38], loturadun sistemen teoria hamiltondar orokorra landu zuten (hasieran bi taldeak bereizita egin zuten lan). Lehen motako (*first class*) eta bigarren motako (*second class*) loturen sailkapena egin zuten, formulazio hamiltondarrerako ezinbestekoa dena. Erlatibitate orokorraren egitura kanonikoa askatzeak lan gogorra eskatu zuen. Bergmann eta bere taldeak [39]; Dirac-ek [40, 41]; Peres-ek [42]; Arnowitt, Deser eta Misner-ek [43] osatu zuten lana 1950eko hamarkadaren amaieran eta 1960ko hamarkadaren hasieran. Wheeler eta DeWitt-ek [44] teoria kuantikoaren ekuazio formalak idatzi zituzten 1960ko hamarkadaren erdialdean, baina ondoren ikusi zen bezala, ez zeuden ongi definituta. 1980ko hamarkada iritsi arte ez zen hauen bertsio egokirik aurkitu, kiribilen grabitazio kuantikoa (*loop quantum gravity*) aurkitu arte [45–48]. Teoria oso eta errealista bat izatetik urrun zegoen, baina zorrozki definitutako eremuen teoria kuantiko ez-perturbatibo, orokorri kobariante eta hondoarekiko independentea izateagatik, zeinean itxarotako balio fisikoak kalkula daitezkeen, zegoen itxaropena handia zen.

- Historien batura garatu duen ikerketa lerroak grabitazio kuantikoaren teoria Feynman-en integral funtzionalen kuantizazioaren bertsio baten bidez definitzea bilatzen du. Wheeler-DeWitt ekuazioa lortu nahian, 1970eko hamarkadan Hawking-ek historien baturaren bertsio bat garatu zuen geometria Euklidearren batura (*sum over Euclidean geometries*) bezala [49]. Unibertsoaren uhin-funtzioaren ideiak zirrara sortu zuen eta hurbilketak topologia aldaketak pentsatzeko eta konputatzeko bideak zituen. Baina eremuen teoriako kantitateentzat integral euklidearrak Wheeler-DeWitt ekuazioa bezain ahula zela ikusi zen ondoren. Euklidear integralak zailtasunak zituen arren, erreferentziazko ideia bezala iraun zuen, hainbat ikerketa lerroren garapena gidatuz, sare diskretuen hurbilketak (*discrete lattice-like approaches*), teoria topologikoen egoeren baturen formulazioraino. Azken honek espin-aparraren (*spin foam*) formulazioa motibatu zuen, kiribilen grabitazio kuantikoa Feynman-en historien baturaren formara itzulia dena [50].
- Badaude ikertu diren baina aurreko ikerketa lerroetan sartzen ez diren beste zenbait ideia, *twistor*-en teoria eta geometria ez-konmutatiboa, adibidez.

Bestalde, azpimarratu beharreko emaitza dugu 1974an Hawkingek zulo beltzaren erradiazioa aurkitu izana [23]. Izan ere, bi saiakera nagusiak, soken teoria eta kiribilen grabitazio kuantikoa, indar handiz hazi ziren hamarkada batez, 1990eko hamarkada erdialdean emaitza fisikoak ematen hasi ziren arte. Zulo beltz extremalen Bekenstein-Hawking entropiaren formula bi ildoetan lortu zen, ia batera [51–55]. Kiribilen grabitazio kuantikoak Planck-en eskalako lehen auresate fisikoak ekarri zituen: azalera eta bolumenaren autobalioen espektroa. Beraz, 1990eko hamarkadaren amaiera grabitazio kuantikorako garatutako bi hautagai nagusi zeudelarik iritsi zen: soken teoria eta kiribilen grabitazio kuantikoa.

1.3 Kosmologia

Orain arte grabitazioaren teoria kuantikoaz eta honen bilaketaz aritu gara, kosmologia ia aipatu gabe. Erlatibitate orokorraren ekuazioen soluzio orokorrik ez da ezagutzen gaurdaino, milaka soluzio partikular baizik. Horrez gain, unibertsoaren bilakaera ulertzeko simetriak sartu ohi dira, adierazpenak matematikoki errezagoak direlako eta ezaguna zaigun errealitatea ongi islatzen dutelako. Printzipio kosmologikoaren arabera unibertsoa eskala handian homogeneoa eta isotropoa da; ezaugarri hori betetzen duen metrika Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) metrika da, eta beraz hau da kosmologian gehien erabiltzen dena.

Baina grabitazio kuantikoarekin zein zerikusi du honek? Gravitazio kuantikoaren teoria osorik ez da lortu oraino. Hein handi batean arazo kontzeptual eta tekniko sakonak daudelako. Kosmologia kuantikoa matematikoki sinpleagoa izaki, espero da bertan arazo horiek gainditzea errazagoa izatea, eta bertatik ateratako ondorioek nolabait argitzea grabitazioaren teoria kuantiko osoaren garapena.

Ildo honetan Wheeler-DeWitt ekuazioa izan zen kosmologia kuantikoaren hastapena. Friedmann-en unibertsoari (FLRW) aplikatu zitzaion. Bertan ekuazio honek duen berezitasuna nabarian gelditu zen, alegia, ekuazioan ez dagoela kanpotik definitutako denborarik. Muga-baldintzen ezarpenak arazoak sortu zituen, ez baitzegoen argi nola interpretatu ekuazioa. Proposamenen artean

“muga-baldintzarik gabeko proposamena” (edo “Hartle-Hawking proposamena”) [56] eta “tunelatzeko proposamena” [57] leudeke; lehenengoan uhin-funtzio erreala izango genuke, eta beste kasuan uhin-funtzioa konplexua izan liteke. Horrek ezberdintasunak eragingo lituzke Unibertsoaren has-tapenean inflazio prozesu bat izateko probabilitatean, adibidez.

Bestalde, kiribilen grabitazio kuantikoan, aurrerago aipatuko dugun bezala (4. kapituluian), ziur-gabetasun printzipioa dela eta, maila kuantikoan ez da espero homogeneousak eta isotropoak diren egoerak izatea. Zoritxarrez teoria kuantiko osoaren zati dira egoera hauek, teoriaren konplexutasun osoarekin. Alegia, zailtasun ikaragarria izango lukeela teoria osoa kuantizatzeak (eta gero simetriak ezartzeak, posible balitz). Beste aukera bat litzateke grabitazioaren teori klasikoan simetriak aurrena ezartzea, eta ondoren kuantizatzea. Denbora luzez egin zen hori Arnawitt-Deser-Misner (ADM) formalismoa deritzon erabiltzen diren aldagaiekin [58], baina ez zen ikusi singularitate gaitzen zenik. Bojowald-ek irekitako bideak ekarri zuen kiribilen kosmologia kuantikoa (*loop quantum cosmology*) [59], kosmologia homogeneousetan kiribilen adierazpidean erabiltzen diren zenbait teknika aplikatuz. Kiribilen kosmologia kuantikoaren bidez posible izan da singularitatea gaitzen zena, baina ez pausoak diskretuak direlako (hau da, singularitatean gainetik “jauzi” egiten delako), baizik eta posible delako singularitatean zehar irauten duten ongi definitutako behagarriak eraikitzea eta hauen eboluzioa singularitatean zehar aztertzea.

1.4 Arazoak eta zailtasunak

Eginiko aurrerapenak garrantzitsuak eta itxaropentsuak diren arren, grabitazio kuantikoak izan duen, eta oraindik izaten jarraitzen duen arazo handienetakoa, datu esperimentalen falta da. Gaurdaino ezin izan da egin hipotesi bat balioztatzeko gai izan den behaketarik. Alde horretatik Hawkingen erradiazioa baliagarria litzateke zulo beltzak aztertzeko eta hipotesi ezberdinekin alderatzeko, baina hondoko mikrouhin-erradiazioa indartsuegia da oraindik hau detektatzeko.

Horrez gain, hasierako singularitatearen (*Big Bang*) behaketa zuzena posible ez den arren, hondoko mikrouhin erradiazioan efektu kuantikoak ager daitezkeela espero da [60], inflazioan gertatutako efektuen bidez. Gaur egungo ikerketa WMAP eta Planck sateliteen bidez lorturiko datuen azterketan oinarritzen da batez ere.

Gainera, uhin grabitazionalen detekzioa ikerketa esparru aktiboa da (GEO600, LIGO, Virgo eta TAMA behatokiak); misio espazialak (LISA, esaterako) edota lurrazpiko teleskopioak (Einstein Telescope) egiteko planak egin dira. Hala ere, oraindik ez da hauen neurketarik egitea lortu. Dena den, uhin grabitatorioak eremu grabitatorioen efektu klasikoak dira orokorrean, eta efektu kuantikoak baleude txikiegiak lirateke zuzenean neurtzeko. Soken teoriak auresaten duen supersimetriaren zantzurik ere ez da oraindik aurkitu.

Bestalde, zailtasun matematiko eta kontzeptualak nabariak dira. Berez, erlatibitate orokorraren eta mekanika kuantikoaren formulazioak aski zailak izateaz aparte, elkarrekiko oso ezberdinak dira. Teoria osorik ez da oraino lortu, saiakera asko daude, indargune eta ahulgune ezberdinekin. Oinarritzko printzipioetan ere elkarrengandik oso urrun daude. Hala ere, zentzuzkoa dirudi pentsatzeak azken teoriak soken teoriaren eta kiribilen grabitazio kuantikoaren ezaugarriak barnebilduko dituela.

Kapitulua 2

Erlatibitate orokorraren formulazio hamiltondarra

Eremu-teoria baten formulazio hamiltondarra garatzeko orduan ezinbestekoa da espazio-denbora jarraituaren banaketa egitea espazio eta denboran. Honi 3+1 deskonposaketa deritzogu. Erlatibitate orokorraren kasuan aplikatuko dugu deskonposaketa hau. Bertan, aurrerago zehaztasun gehiagoz azalduko dugun bezala, t denbora funtzioa eta t^a eremu bektorial bat hautatzen ditugu espazio-denbora batean zeinean t konstanteko hipergainazalak Σ_t Cauchy-ren gainazalak diren eta $t^a \nabla_a t = 1$ betetzen den. Horrela, “denboraren fluxu” bezala interpreta dezakegu t^a , Σ_t bakoitza hasierako Σ_0 hipergainazalarekin identifikatzen baita.

Erlatibitate orokorraren bi formulazio hamiltondar aztertuko ditugu ondoren: geometrodinamikoa edo ADM (Arnold, Deser eta Misner-en) formalismoa [43] deritzo lehenengoari; bigarrenari, berriz, konexioen adierazpidea deritzo, zeinean Ashtekar-en aldagaiak [45] erabiltzen diren.

2.1 3+1 deskonposaketa

Lehenik eta behin, atal hau eta hurrengoa garatzeko oro har Wald-en *General Relativity* [61] liburua jarraitu dela azpimarratu beharko genuke. Bereziki 10.2 atala eta E appendizea, hurrenez hurren.

Izan bitez M 4-dimentsioko barietatea eta g_{ab} barietate honen metrika. Izan bedi (M, g_{ab}) espazio-denbora globalki hiperbolikoa. Espazio-denbora hau, (M, g_{ab}) , Cauchy-ren gainazaletan, Σ_t , banatu dezakegu [(8.3.14) teorema [61]] (egitura kausala du eta, beraz, ez da gertaera baten “kopiari” izango gainazal espazial ezberdinetan), zeinak denbora global batek parametrizatzen dituen. Izan bedi $n^a \Sigma_t$ -ren eremu bektorial normal unitarioa. Espazio-denboraren metrikak g_{ab} , h_{ab} metrika espazial bat definitzen du (hiru dimentsioko metrika riemanndarra) Σ_t bakoitzean

$$h_{ab} = g_{ab} + n_a n_b. \quad (2.1)$$

Izan bedi M barietatean t^a eremu bektoriala zeinak $t^a \nabla_a t = 1$ betetzen duen. Σ_t -rekiko osagai normal eta tangenzialetan deskonposatuko dugu t^a : *tarte funtzioa (lapse function)* N , eta

desplazamendu bektorea (*shift vector*) N^a definituz:

$$N = -t^a n_a, \quad (2.2)$$

$$N_a = h_{ab} t^b. \quad (2.3)$$

2.1. irudian biak grafikoki adierazten dira. Gainera (2.1), (2.2) eta (2.3) definizioetatik abiatuz desplazamendu bektorea t^a eremu bektorialaren eta tartearren (tarte funtzioa) menpe dugu,

$$N_a = h_{ab} t^b = (g_{ab} + n_a n_b) t^b = t_a + n_b t^b n_a = t_a - N n_a,$$

eta metrikarekin kontrakzioa eginez,

$$N^a = g^{ab} N_b = t^a - N n^a. \quad (2.4)$$

Denbora funtzioaren gradientearekin biderkatuz,

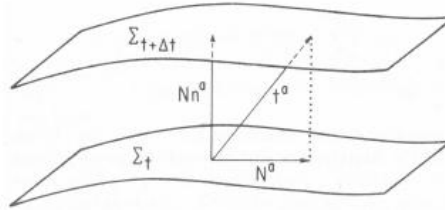
$$N^a \nabla_a t = t^a \nabla_a t - N n^a \nabla_a t,$$

ikusten dugu ekuazioaren ezkerreko zatia nulua dela, denbora funtzioaren gradientea Σ_t gainazalaren normalarekiko proportzionala delako, eta normala eta desplazamendu bektorea perpendikularrak direlako, eta horrez gain $t^a \nabla_a t = 1$ baldintza kontuan hartuz,

$$0 = 1 - N n^a \nabla_a t,$$

dugu. Bertatik,

$$N = (n^a \nabla_a t)^{-1}. \quad (2.5)$$



IRUDIA 2.1: Espazio-denboraren diagrama bat tarte funtzioa eta desplazamendu bektorearen definizioa irudikatuz [61].

Espazio-denboran zeharreko “denboraren fluxu” bezala interpreta dezakegu t^a eremu bektoriala. Beraz, “denboran aurrera higitu” ahala t parametroaren bidez $t = 0$ gainazaletik Σ_0 hasita, Σ_t gainazalera goaz. Σ_0 eta Σ_t hipergainazalak t^a -ren zeharreko kurba integralk dakarten difeomorfismoaren bidez identifikatuz gero, “denboran aurrera higitzea” hiru dimentsioko Σ barietate abstraktu batean $h_{ab}(0)$ -tik $h_{ab}(t)$ -rako metrika espazialaren aldaketa bezala ikus dezakegu. Alegia, globalki hiperbolikoa den espazio-denbora bat (M, g_{ab}) hiru dimentsioko barietate batean finkatutako Riemann-en metrika baten denborarekiko bilakaera bezala ikus dezakegu. Honek iradokitzen digu metrika espaziala hiru dimentsioko hipergainazal batean erlatibitate orokorraren aldagai dinamiko bezala har dezakegula. (Tarte funtzioa, N , eta desplazamendu bektorea, N^a , ez dira dinamiko bezala hartzen, “denboran aurrera nola higitu” soilik adierazten baitute).

Izan ere, N -k denbora propioaren (τ) fluxuaren arrazoia neurtzen du denbora koordenatuarekiko (t), Σ_t -rekiko norabide normalean mugitu ahala. Beste alde batetik, N^a -k t_a eremu bektorialaren Σ_t -rekiko tangenziala den desplazamendua (*shift*) neurtzen du. Horrez gain, (2.4) berrantolatuz hauxe dugu,

$$n^a = \frac{1}{N}(t^a - N^a), \quad (2.6)$$

beraz metrikaren alderantzizkoa honela idatz dezakegu,

$$g^{ab} = h^{ab} - n^a n^b = h^{ab} - N^{-2}(t^a - N^a)(t^b - N^b). \quad (2.7)$$

Bestalde, 4-dimentsioko metrika honela idatz dezakegu,

$$ds^2 = h_{ab}(dx^a + N^a dt)(dx^b + N^b dt) - N^2 dt^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.8)$$

Argi ikusten da bertatik,

$$\sqrt{-g} = \sqrt{-\det g_{\mu\nu}} = \sqrt{N^2 \det h_{ab}} = N\sqrt{h}. \quad (2.9)$$

2.1.1 Lie-ren deribatua

Formulazio kanonikoan erlatibitate orokorraren difeomorfismoekiko inbariantzia kontserbatu behar da, alegia, koordenatuekiko independentea izan behar da. Denbora koordenatu-sistema bakoitzean era ezberdinean definitzen da eta beraz ez da egokia gure aldagai dinamikoen bilakaera garatze-ko. Horretarako beharrezkoa da hipergainazal bakoitzeko puntu bakoitzeko denbora ‘lokala’-rekiko diferentziatzea, zeina perpendikularra den hipergainazalarekiko puntu horretan. Norabide perpendikular hori denbora deskribatzen duen eremuak ematen digu. Beraz, eremu tentsorialak deribatze-ko definituta dagoen deribatu bat erabiliko dugu: Lie-ren deribatua. Orokorrean baieztatu daiteke Σ_t gainazalaren espazio tangentean definituta dagoen $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$ eremu tensorialaren v^a eremu bektorial batekiko deribatua honela adierazten dela [(C.2) atala [61]]:

$$\mathcal{L}_v T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} = v^c \nabla_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} - \sum_{i=1}^k T^{a_1 \dots c \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \nabla_c v^{a_i} + \sum_{j=1}^l T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots c \dots b_l} \nabla_{b_j} v^c, \quad (2.10)$$

edozein deribatu kobariante izanik ∇_a . Beraz, ∇_a deribatu kobariantea g_{ab} -ri loturikoa izatea hautatzen denean ($\nabla_c g_{ab} = 0$ baldintza betetzen da) (2.10) ekuazioa honela gelditzen da,

$$\mathcal{L}_v g_{ab} = \nabla_a v_b + \nabla_b v_a. \quad (2.11)$$

Bestalde, “denborarekiko deribatua” kalkulatzeko orduan, kurbadura estrintsekoaren kontzeptua sartuko dugu. Honela definitzen da,

$$K_{ab} = h_a{}^c \nabla_c n_b = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n h_{ab}. \quad (2.12)$$

Bertan (2.10) ekuazioa aplikatuz,

$$K_{ab} = \frac{1}{2} (n^c \nabla_c h_{ab} + h_{ac} \nabla_b n^c + h_{cb} \nabla_a n^c), \quad (2.13)$$

dugu. Ekuazio hau honela idatz dezakegu parentesien artekoa N tarteaz biderkatuz eta kanpokoa N -z zatituz eta kontuan izanik, $h_{ac}n^c = 0$ denez eta Leibniz-en biderkaduraren erregela erabiliz, $h_{ac}\nabla_b(Nn^c) = Nh_{ac}\nabla_b n^c + h_{ac}n^c\nabla_b N = Nh_{ac}\nabla_b n^c$ betetzen dela,

$$K_{ab} = \frac{1}{2}N^{-1}[Nn^c\nabla_c h_{ab} + h_{ac}\nabla_b(Nn^c) + h_{cb}\nabla_a(Nn^c)]. \quad (2.14)$$

Kurbadura estrintseko honela adieraz dezakegu (2.6) eta (2.10) ekuazioak kontuan izanik,

$$K_{ab} = \frac{1}{2}N^{-1}[\mathcal{L}_t h_{ab} - \mathcal{L}_N h_{ab}]. \quad (2.15)$$

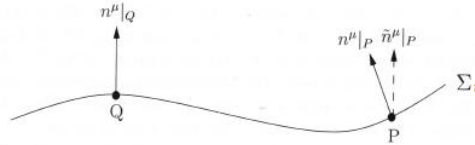
Metrika espazialaren “denborarekiko deribatua” $\dot{h}_{ab} \equiv \mathcal{L}_t h_{ab}$ bezala definituz eta D_a deribatu kobariantea metrika espazialari loturikoa bada,

$$K_{ab} = \frac{1}{2}N^{-1}[\dot{h}_{ab} - D_a N_b - D_b N_a], \quad (2.16)$$

dugu. Honela definitzen da D_a eragilea, ∇_a deribatu kobariantearen Σ_t gainazaleko proiektzio bezala, $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$ eremu tentsoriala Σ_t gainazalaren espazio tangentean definiturik egotea baldintza izanik,

$$D_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} = h^{a_1}_{d_1} \dots h_{b_l}^{e_l} h_c^f \nabla_f T^{d_1 \dots d_k}_{e_1 \dots e_l}. \quad (2.17)$$

Kurbatura estrintsekoaren interpretazio fisikoa nahiko sinplea da 2.2. irudian ikus daitekeen bezala. Bi puntu (Q eta P) lotzen dituen geodesiko baten zeharreko $n^\mu|_Q$ bektore normalaren garraio paraleloa adierazten du $\tilde{n}^\mu|_P$ gezi etenak. 2.2 irudiak $\tilde{n}^\mu|_P$ bektorearen eta $n^\mu|_P$ bektore normalaren arteko aldea intuitiboki adierazten du Σ_t -ren kurbadura barne hartzen duen espazio-denboran. n_b bektorearen aldaketaren proiektzioak, $K_{ab} = h_a^c \nabla_c n_b$, zuzenean neurtzen du bi bektoreak P-n bera izatearen eta P-tik gertu dagoen Q-n ez izatearen arteko aldea.



IRUDIA 2.2: Kurbadura estrintsekoaren adierazpen grafikoa [61].

2.1.2 Gauss-Codacci erlazioa

4-dimentsioko espazio-denboran dagoeneko definiturik dauden zenbait gai birdefinitu behar dira 3-dimentsioko metrika espaziala sartzean. Alegia, 3+1 deskonposaketa dela eta zenbait gairen adierazpenetan esplizituki agertuko dira aurreko atalean definituriko metrika espaziala eta kurbadura estrintsekoa. (2.17) ekuazioa erabiliz Σ_t -ren Riemann-en kurbadura tentsorearen ${}^{(3)}R_{abc}{}^d$ eta espazio-denboraren lau dimentsioko Riemann-en kurbadura tentsorearen $R_{abc}{}^d$ arteko erlazioak lor daitezke. Aurreko lerroan bezala, ${}^{(3)}$ batez adieraziko ditugu 3-dimentsioko objektuak (zehazki ${}^{(3)}R_{abc}{}^d$ eta ${}^{(3)}\omega_c$). 4-dimentsioko (3-dimentsioko) kurbadura tentsorea definizioz deribatu kobarianteen konmutatzailea da, eta 4-dimentsioko (3-dimentsioko) edozein ω_c (${}^{(3)}\omega_c$) eremu bektorial

dualentzat,

$$R_{abc}{}^d \omega_d = \nabla_a \nabla_b \omega_c - \nabla_b \nabla_a \omega_c, \quad (2.18)$$

$${}^{(3)}R_{abc}{}^d {}^{(3)}\omega_d = D_a D_b {}^{(3)}\omega_c - D_b D_a {}^{(3)}\omega_c. \quad (2.19)$$

Bi kurbadura tentsoreen arteko erlazioa aurkituko dugu. 3-dimentsioko kurbadura tentsorearen definizioan ageri diren bi D_a deribatu kobarianteetan (2.17) erlazioa erabiliz honakoa dugu,

$$D_a D_b {}^{(3)}\omega_c = D_a (h_b{}^d h_c{}^e \nabla_d {}^{(3)}\omega_e) = h_a{}^f h_b{}^g h_c{}^k \nabla_f (h_g{}^d h_k{}^e \nabla_d {}^{(3)}\omega_e).$$

Eta Leibniz-en biderkaduraren erregela erabiliz,

$$\begin{aligned} D_a D_b {}^{(3)}\omega_c &= h_a{}^f h_b{}^d h_c{}^e \nabla_f \nabla_d {}^{(3)}\omega_e + h_a{}^f h_b{}^g h_c{}^e (\nabla_f h_g{}^d) (\nabla_d {}^{(3)}\omega_e) \\ &\quad + h_a{}^f h_b{}^d h_c{}^k (\nabla_f h_k{}^e) (\nabla_d {}^{(3)}\omega_e), \end{aligned} \quad (2.20)$$

dugu. Bestalde, definizioz baldintza hauek ditugenez, $\nabla_c g_{ab} = 0$, $h_{ab} n^b = 0$ eta $K_{ab} = h_a{}^c \nabla_c n_b$, hurrengo erlazioa betetzen da,

$$h_a{}^b h_c{}^d \nabla_b h_d{}^e = h_a{}^b h_c{}^d \nabla_b (g_d{}^e + n_d n^e) = K_{ac} n^e. \quad (2.21)$$

Beraz, azken erlazio hau (2.20) ekuazioan sartuz ondorengo adierazpenera iritsiko gara,

$$D_a D_b {}^{(3)}\omega_c = h_a{}^f h_b{}^d h_c{}^e \nabla_f \nabla_d {}^{(3)}\omega_e + h_c{}^e K_{ab} n^d \nabla_d {}^{(3)}\omega_e + h_b{}^d K_{ac} n^e \nabla_d {}^{(3)}\omega_e. \quad (2.22)$$

Gainera (2.22) ekuazioko erdiko gaia deuseztatu egiten da a eta b -rekiko antisimetrizatzean, K_{ab} simetrikoa baita. Horrez gain, azken gaiari dagokionez (2.23) adierazpena zuzenean ondorioztatzen da Leibniz-en erregela, (2.12) definizioa eta ${}^{(3)}\omega_a n^a = 0$ erabiliz (${}^{(3)}\omega_a$ bektorea Σ_t gainazalean definiturik dago eta n^a gainazal honekiko normala da, beraz bien biderkadura eskalarra nulua da),

$$\begin{aligned} h_b{}^d \nabla_d (n^e {}^{(3)}\omega_e) &= h_b{}^d n^e \nabla_d {}^{(3)}\omega_e + h_b{}^d {}^{(3)}\omega_e \nabla_d n^e = 0 \\ \Rightarrow h_b{}^d n^e \nabla_d {}^{(3)}\omega_e &= -h_b{}^d {}^{(3)}\omega_e \nabla_d n^e = -K_b{}^e {}^{(3)}\omega_e. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Beraz, (2.19) ekuazioan (2.22) eta (2.23) adierazpenak ordezkatzuz,

$$\begin{aligned} {}^{(3)}R_{abc}{}^d {}^{(3)}\omega_d &= h_a{}^f h_b{}^d h_c{}^e \nabla_f \nabla_d {}^{(3)}\omega_e - K_{ac} K_b{}^e {}^{(3)}\omega_e - h_b{}^f h_a{}^d h_c{}^e \nabla_f \nabla_d {}^{(3)}\omega_e + K_{bc} K_a{}^e {}^{(3)}\omega_e \\ &= h_a{}^f h_b{}^d h_c{}^e (\nabla_f \nabla_d - \nabla_d \nabla_f) {}^{(3)}\omega_e - K_{ac} K_b{}^e {}^{(3)}\omega_e + K_{bc} K_a{}^e {}^{(3)}\omega_e, \end{aligned}$$

lortzen dugu. Riemann-en kurbadura tentsorearen definizioa (2.19) dugu azken lerroko lehenengo gailan, beraz,

$${}^{(3)}R_{abc}{}^d {}^{(3)}\omega_d = h_a{}^f h_b{}^g h_c{}^k h^d{}_j R_{fgk}{}^j {}^{(3)}\omega_d - K_{ac} K_b{}^d {}^{(3)}\omega_d + K_{bc} K_a{}^d {}^{(3)}\omega_d.$$

Zuzenean ikusten da, aurrekoa edozein ${}^{(3)}\omega_d$ bektore dualentzat betetzen denez,

$${}^{(3)}R_{abc}{}^d = h_a{}^f h_b{}^g h_c{}^k h^d{}_j R_{fgk}{}^j - K_{ac} K_b{}^d + K_{bc} K_a{}^d, \quad (2.24)$$

betete behar dela. Zeina *Gauss-Codacci erlazioa* bezala den ezaguna.

2.2 Einstein-en geometrodinamika

Lehenik eta behin komenigarria litzateke aipatzea M barietatean integralak egiteko orduan espazio-denboraren metrikari loturiko ϵ_{abcd} bolumen elementua erabiltzea izango litzatekeela naturalena. Era berean, Σ_t -n integralak egitean, ${}^{(3)}\epsilon_{abc} = \epsilon_{dabc}n^d$ bolumen elementua erabiltzea izango litzateke naturalena. Hala ere, bolumen elementu hauek, orokorrean, “denborarekiko dependenteak” izango dira, $\mathcal{L}_t\epsilon_{abcd} \neq 0$ eta $\mathcal{L}_t{}^{(3)}\epsilon_{abc} \neq 0$ diren neurrian. Σ_0 -rekin identifikatu nahi badugu Σ_t , eboluzio dinamikoa Σ_0 finko batean eremuen aldaketa bezala ikusteko, denboraren menpekoa den Σ_t -ren bolumen elementu bat erabiltzea ez da komenigarria. Beraz, finkatutako e_{abcd} bolumen elementua sartuko dugu zeinak $\mathcal{L}_te_{abcd} = 0$ beteko duen, eta Σ_t bakoitzean, berriz, ${}^{(3)}e_{abc} = e_{dabc}t^d$ definituko dugu.

Hilberten ekintzatik abiatuko gara eta hemendik aurrerako kalkuluetan agertzen diren muga-gaiak arbuiatuko ditugu. *Hilberten ekintza* honakoa dugu [62],

$$S[g^{ab}] = \frac{1}{8\pi G} \int \mathcal{L}_G \mathbf{e}, \quad (2.25)$$

hutsaren Einstein-en ekuazioen dentsitatea lagrangearra izanik \mathcal{L}_G - muga-gaiak izan ezik - non

$$\mathcal{L}_G = \sqrt{-g}R, \quad (2.26)$$

oinarri jakin batean metrikaren matrizearen gaien, $g_{\mu\nu}$, determinantea izanik g , eta G Newton-en konstantea. Dentsitate lagrangearra 3-dimentsioko objektuen menpe adieraziko dugu. Beharrezkoa dugu horretarako R kurbadura eskalarraren 3-dimentsioko objektuen menpeko adierazpena. Kontsidera dezagun 4-dimentsioko Riemann-en tentsorearen eta metrika espazialaren ondoko kontrakzioa:

$$\begin{aligned} R_{abcd}h^{ac}h^{bd} &= R_{abcd}(g^{ac} + n^an^c)(g^{bd} + n^bn^d) \\ &= R + R_{bd}n^bn^d + R_{ac}n^an^c + R_{abcd}n^an^bn^cn^d. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Riemann-en kurbadura tentsoreak $R_{abcd} = -R_{bacd}$ propietatea betetzen duenez (2.27) ekuazioko azken gaia anulatzen da,

$$R_{abcd}n^an^bn^cn^d = \frac{1}{2}(R_{abcd} + R_{bacd})n^an^bn^cn^d = \frac{1}{2}(R_{abcd} - R_{abcd})n^an^bn^cn^d = 0.$$

Honekin guztiarekin ondorengo ekuaziora iristen gara,

$$R_{abcd}h^{ac}h^{bd} = R + 2R_{ac}n^an^c. \quad (2.28)$$

Bestalde, Einstein-en tentsorea honela definitzen da,

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R. \quad (2.29)$$

Definizio horietaz baliatuz, ondorengoa egin dezakegu (2.1) ekuazioa erabiliz, R kurbadura eskalarra lortzeko,

$$G_{ab}n^an^b = R_{ab}n^an^b - \frac{1}{2}(h_{ab} - n_an_b)n^an^bR.$$

Kontuan izanik $n_a n^a = -1$ eta $n_a h^{ab} = 0$ betetzen direla, eta R -rako ebatziz,

$$R = 2(G_{ab}n^a n^b - R_{ab}n^a n^b). \quad (2.30)$$

Beraz (2.28) eta (2.30) ekuazioetatik (azken honetan $G_{ab}n^a n^b$ bakanduz),

$$G_{ab}n^a n^b = \frac{1}{2}R_{abcd}h^{ac}h^{bd} = \frac{1}{2}g_{dm}R_{abc}{}^m h^{ac}h^{bd}, \quad (2.31)$$

ekuaziora irits gaitezke. Ekuazio hau honela gara dezakegu, (2.1) definizioa eta Gauss-Codacci erlazioa [(2.24) ekuazioa], erabiliz,

$$G_{ab}n^a n^b = \frac{1}{2}(h_{dm} - n_d n_m)h_a{}^f h_b{}^g h_c{}^k h^m{}_j ({}^{(3)}R_{f g k}{}^j + K_{f k}K_g^j - K_{g k}K_f^j)h^{ac}h^{bd}.$$

Metrika espazialen arteko kontrakzioak eginez eta, aurretik esan bezala, $n_a h^{ab} = 0$ dela kontuan izanik, ondorengo dugu,

$$G_{ab}n^a n^b = \frac{1}{2}h^{k f} \delta_j^g ({}^{(3)}R_{f g k}{}^j + K_{f k}K_g^j - K_{g k}K_f^j),$$

hots,

$$G_{ab}n^a n^b = \frac{1}{2}({}^{(3)}R - K_{g k}K^{g k} + K^g{}_g K^k{}_k) = \frac{1}{2}[{}^{(3)}R - K_{ab}K^{ab} + K^2]. \quad (2.32)$$

Beste alde batetik, (2.18) Riemann-en tentsorearen definiziotik,

$$R_{ab}n^a n^b = R_{acb}{}^c n^a n^b = -n^a (\nabla_a \nabla_c - \nabla_c \nabla_a) n^c = -n^a \nabla_a \nabla_c n^c + n^a \nabla_c \nabla_a n^c,$$

dugu. n^a deribatuaren barnean sartuz eta dagozkion gaiak kenduz,

$$R_{ab}n^a n^b = (\nabla_a n^a)(\nabla_c n^c) - \nabla_a (n^a \nabla_c n^c) + \nabla_c (n^a \nabla_a n^c) - (\nabla_c n^a)(\nabla_a n^c),$$

dugu, eta (2.12) ekuazioa erabiliz honakoa dugu,

$$R_{ab}n^a n^b = K^2 - K_{ac}K^{ac} - \nabla_a (n^a \nabla_c n^c) + \nabla_c (n^a \nabla_a n^c). \quad (2.33)$$

Azken bi gaiak muga-gaiak direnez integratzeko orduan ez ditugu kontuan hartuko (aurrez adierazi bezala). Beraz, (2.9) eta (2.26) - (2.33) ekuazioetatik ondorengo lortzen dugu,

$$\mathcal{L}_G = \sqrt{h}N[{}^{(3)}R + K_{ab}K^{ab} - K^2]. \quad (2.34)$$

Beraz (2.15) ekuazioa (2.34) ekuazioan ordezkaturaz, nahi dugun forman lortzen dugu ekintza grabitazionala, Arnowitt, Deser eta Misner-ek 1962an eman bezala [43]:

$$\mathcal{L}_G = \sqrt{h}N[{}^{(3)}R + \frac{1}{4}N^{-2}(\mathcal{L}_t h_{ab} - \mathcal{L}_N h_{ab})(\mathcal{L}_t h^{ab} - \mathcal{L}_N h^{ab}) - K^2]. \quad (2.35)$$

Bertatik, partikulen mekanikan egiten den modu analogoan, h_{ab} -ren momentu kanoniko konjokatua honela definituko dugu,

$$\pi^{ab} = \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \mathcal{L}_t h_{ab}} = \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \dot{h}_{ab}} = \sqrt{h}N \left[\frac{1}{2}N^{-2}(\mathcal{L}_t h^{ab} - \mathcal{L}_N h^{ab}) - \frac{\partial(K^2)}{\partial \mathcal{L}_t h_{ab}} \right] = \sqrt{h}(K^{ab} - K h^{ab}). \quad (2.36)$$

Azken lerroa iristeko (2.15) eta ondorengoa,

$$\frac{\partial(K^2)}{\partial \mathcal{L}_t h_{ab}} = 2K \frac{\partial(K)}{\partial \mathcal{L}_t h_{ab}} = KN^{-1} \frac{\partial(\mathcal{L}_t h_{ab} h^{ab} - \mathcal{L}_N h_{ab} h^{ab})}{\partial \mathcal{L}_t h_{ab}} = N^{-1} K h^{ab},$$

erabili dira. h_{ab} aldagai dinamikoaren eta π^{ab} momentu kanonikoaren arteko Poisson-en makoek ondorengo erlazioa betetzen dute,

$$\{h_{ab}(x), \pi^{cd}(y)\} = \frac{1}{2}(\delta_a^c \delta_b^d + \delta_b^c \delta_a^d) \delta^3(x - y). \quad (2.37)$$

Bestalde, \mathcal{L}_G -k ez du N edota N_a -ren denborarekiko deribaturik

$$\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \dot{N}} = 0 \quad \text{eta} \quad \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \dot{N}_a} = 0,$$

beraz beraien momentu konjokatuak nuluak dira. Bertatik interpreta dezakegu N eta N_a ez lirartekeela kontsideratu behariko aldagai dinamiko gisa; Lagrange-ren biderkatzaileak dira hain zuzen ere. Partikulen mekanikan egiten den modu analogoan, gure Hamiltondar dentsitatea Legendreren transformatuaren bidez definituko dugu,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_G &= \pi^{ab} \dot{h}_{ab} - \mathcal{L}_G \\ &= \pi^{ab} (2K_{ab} N + D_a N_b + D_b N_a) - \sqrt{h} N ({}^{(3)}R + K_{ab} K^{ab} - K^2) \\ &= -h^{1/2} N ({}^{(3)}R + N h^{-1/2} [\pi^{ab} \pi_{ab} - \frac{1}{2} \pi^2]) + 2\pi^{ab} D_a N_b \\ &= -h^{1/2} \left\{ N \left[({}^{(3)}R + h^{-1} \pi^{ab} \pi_{ab} - \frac{1}{2} h^{-1} \pi^2) \right] - 2N_b [D_a (h^{-1/2} \pi^{ab})] \right. \\ &\quad \left. + 2D_a (h^{-1/2} N_b \pi^{ab}) \right\}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

non $\pi = \pi^a_a$ den. Horrez gain, hirugarren lerroa iristeko kurbadura estrintsekoaren eta momentu kanoniko konjokatuaren arteko erlazioa erabili dugu, (2.36)-tik abiatuta,

$$K = -\frac{1}{2} h^{-1/2} \pi, \quad (2.39)$$

$$K^{ab} = h^{-1/2} [\pi^{ab} - \frac{1}{2} \pi h^{ab}], \quad (2.40)$$

eta baita π^{ab} -ren a eta b indizeekiko simetria, azken gaia lortzeko (deribatuari dagokiona). Bestalde, (2.38) ekuazioko azken lerroa momentu kanonikoa deribatu barruan sartuz eta dagozkion gaiak kenduz zuzenean iristen da, eta berriz ere azken gaiak muga-gai baten ekarpena soilik egiten dio $H_G = \int \mathcal{H}_G ({}^{(3)}\mathbf{e})$ -ri, eta beraz arbuia egingo da. Ekintzaren N eta N_a -rekiko bariazioak eginez honako ekuazioak lortzen ditugu,

$$\frac{\delta H_G}{\delta N} = -({}^{(3)}R + h^{-1} \pi^{ab} \pi_{ab} - \frac{1}{2} h^{-1} \pi^2) = 0, \quad (2.41)$$

$$\frac{\delta H_G}{\delta N_a} = D_a (h^{-1/2} \pi^{ab}) = 0, \quad (2.42)$$

δ deribatu funtzionala izanik. Lehenari *lotura hamiltondarra* deitzen zaio, eta besteari *difeomorfismoetako lotura*. Bestalde ekuazio dinamikoak hauek dira [43], H_G -tik lortuak,

$$\dot{h}_{ab} = \frac{\delta H_G}{\delta \pi^{ab}} = 2h^{-1/2}N \left(\pi_{ab} - \frac{1}{2}h_{ab}\pi \right) + 2D_{(a}N_{b)}, \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} \dot{\pi}^{ab} = -\frac{\delta H_G}{\delta h_{ab}} &= -Nh^{1/2} \left({}^{(3)}R^{ab} - \frac{1}{2}{}^{(3)}Rh^{ab} \right) + \frac{1}{2}Nh^{-1/2}h^{ab} \left(\pi_{cd}\pi^{cd} - \frac{1}{2}\pi^2 \right) \\ &\quad - 2Nh^{-1/2} \left(\pi^{ac}\pi_c{}^b - \frac{1}{2}\pi\pi^{ab} \right) + h^{1/2}(D^a D^b N - h^{ab}D^c D_c N) \\ &\quad + h^{1/2}D_c(h^{-1/2}N^c\pi^{ab}) - \pi^{ca}D_c N^b - \pi^{cb}D_c N^a, \end{aligned} \quad (2.44)$$

non berriz ere muga-gaiak arbuiatu diren eta (2.42) ekuazioa erabili den. (2.42)-(2.44) ekuazioak hutsaren Einstein-en ekuazioaren, $R_{ab} = 0$, baliokideak dira (adierazpen orokorra $G_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ab}$ dugu, G_{ab} Einstein-en tentsorea eta T_{ab} energia-momentuaren tentsorea izanik). Beraz, Einstein-en ekuazioaren loturadun formulazio hamiltondarra lortu dugu.

2.3 Konexioen adierazpidea

Atal hau eta hurrengo bi kapituluak garatzeko, besteak beste, Gambini eta Pullin-en *Un Primer Curso en Gravedad Cuántica de Lazos* [63] liburuko ia kapitulu guztiak erabili dira maila ezberdinetan. Atal hau garatzeko bereziki 3., 5. eta 7. kapituluak jarraitu dira; laneko 4. kapituluak garatzeko, liburuko 7.4 atala eta 8. kapituluak jarraitu dira; laneko 4. kapituluak garatzeko lagungarria izan da liburuko 9. kapituluak.

Konexioen adierazpideak Ashtekar-en aldagaiak [45] (maiz *Ashtekar-en aldagai berriak* deituak) erabiltzen ditu erlatibitate orokorraren formulazio kanoniko baterako. Konfigurazio aldagaiek Yang-Mills $SU(2)$ teoria baten A_a^i konexioen moduko portaera dute, eta hauen momentu kanoniko konjokatuak, berriz, \tilde{E}_i^a dentsitaturiko triadak dira. Hauen Poisson-en makoek ondorengoa betetzen dute,

$$\left\{ A_a^i(x), \tilde{E}_j^b(y) \right\} = 8\pi G\beta\delta_b^a\delta_j^i\delta^3(x-y), \quad (2.45)$$

G Newton-en konstantea izanik. β Barbero-Immirzi parametroa bezala ezagutzen da. Bere balioa nulua izan ezik edozein izan daiteke hasiera batean (baita konplexua ere). Honek adierazten du Ashtekar-en aldagaien familia monoparametrikoko oso bat existitzen dela. Horiatariko edozein aldagaiekin eraikitako teoria klasikoak baliokideak dira, eta transformazio kanonikoen bidez daude erlazionatuta.

2.3.1 Triadak

Esan bezala, triadak gure aldagai dinamikoen momentu konjokatuak izango dira. Triadak Σ_t gainazalaren espazio tangentean oinarri bat osatzen duten hiru eremu bektorial ortonormal dira eta espazioko puntu bakoitzean 3-dimentsioko espazio bektorial tangentea zehazten dute. Espazio-denbora osoa hartuko bagenu kontuan, eta ez soilik espaziala (gogoratu 3+1 deskonposaketaren

ondorioz Σ_t gainazaletan metrika espazial bat induzitzen dela), espazio-denborako puntu bakoitzaren 4-dimentsioko espazio bektorial tangentea tetradek osaturiko oinarriak zehaztuko luke. Matematikoki adierazita, hau da aurreko bien kasuan betetzen dena; triaden kasuan,

$$h_{ab} = E_a^i E_b^j \delta_{ij}, \quad (2.46)$$

eta tetraden kasuan,

$$g_{ab} = E_a^\alpha E_b^\beta \eta_{\alpha\beta}. \quad (2.47)$$

Hau da, triadek (tetradek) espazio (espazio-denbora) kurbatua eta espazio (espazio-denbora) laua erlazionatzen dituzte espazioko (espazio-denborako) puntu bakoitzean. Beraz, triaden bidez metrika espaziala berreraiki dezakegu. Ikusten den bezala, bi indize ditugu; alfabetoko ahsierako hizkiak a, b, c espazioko indizeak espazio kurbatuko indize bektorial erregularrak bezala portatzen dira, eta alfabetoaren erdialdeko hizkiak i, j, k barne-indizeak ditugu. Biak 1etik 3ra doaz, baina barne-indizeak igo edo jaisteko δ_{ij} metrika laua erabili behar da.

Barne-indizeak dituzten objektuekin lan egiteko beharrezkoa da deribatu egoki bat definitzea. Deribatu kobarianteetan erabiltzen den prozedura bera erabiltzen da. Honela idatz daiteke eremu tentsorial batengan g_{ab} metrika jakin bati lotutako ∇_a deribatu kobariantea aplikatzea, ∂_a deribatu arruntaren (η_{ab} Minkowski-ren metrikari erabiltzen dena) eta Γ^c_{ab} Christoffel-en ikurren menpe,

$$\nabla_a T^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} = \partial_a T^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} + \sum_i \Gamma^b_i{}_{ad} T^{b_1 \dots d \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} - \sum_j \Gamma^d_{ac_j} T^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots d \dots c_l}, \quad (2.48)$$

Christoffel-en ikurrak (konexio ere deituak, nahiz eta ez den nahastu behar aipatu dugun Yang-Mills teoretan agertzen diren A_a^i konexioekin) hauek izanik,

$$\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd} \{ \partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_g g_{ab} \}, \quad (2.49)$$

Barne-indizeekin lan egiteko deribatua definitzeko deribatu arrunta eta $\Gamma_a^i{}_j$ espin-konexioa deritzona (Christoffel-en ikurra bezala kanpotik zehaztu behar dena) erabiltzen dira. Barne-indizeak bakarrik dituen eremu tentsorial batentzat,

$$D_a T^{i_1 \dots i_l}_{j_1 \dots j_m} = \partial_a T^{i_1 \dots i_l}_{j_1 \dots j_m} + \sum_p \Gamma_a^i{}_p T^{i_1 \dots p \dots i_l}_{j_1 \dots j_m} - \sum_q \Gamma_a^k{}_q T^{i_1 \dots i_l}_{j_1 \dots k \dots j_m}, \quad (2.50)$$

izango litzateke. Eremu-tentsorialak bi indize motak balitu, adierazpena zertxobait konplexuagoa da, bi “konexioak” (Christoffel-en ikurrak eta espin-konexioa) erabili beharko baikenituzke. Dena den, E_i^b triaden kasurako honakoa izango genuke

$$D_a E_i^b = \partial_a E_i^b - \Gamma_a^j{}_i E_j^b + \Gamma^b{}_{ac} E_i^c. \quad (2.51)$$

Deribatuak triadak deuseztatzea ezartzen badugu baldintzat $D_a E_i^b = 0$, deribatu kobariantearekin ezarritako “konexioek” (Christoffel-en ikurrek) guztiz zehazten dute espin-konexioa.

Horrez gain, triadak dentsitizatu egiten dira bolumen batean integratu beharko baititugu. Horretarako metrikaren determinantearen erro karratua (pisu dentsitatea) biderkatzen zaio integratu behar dugun funtzio eskalarrari. Dentsitateak diren objektu indizedunak ere izan ditzakegu, dentsitate

tentsorialak, adibidez. Baina hauek integratzeko orduan, kontrakzioa egin behar da bektoreen bidez, dentsitate eskalarra bihurtzeko eta ondoren integratzeko. Beraz, f funtzio eskalar bat badugu,

$$\tilde{f} = \sqrt{\det(h)} f, \quad (2.52)$$

kasu honetan $+1$ pisuko funtzioa dugula esaten da. Triaden kasuan,

$$\tilde{E}_i^a = \sqrt{\det(h)} E_i^a. \quad (2.53)$$

Bestalde, dentsitizatutako objektu baten pisua -1 izango da $\sqrt{\det(h)}$ zatitzen dagoen kasuan,

$$\underline{f} = \frac{f}{\sqrt{\det h}} \quad (2.54)$$

Triada dentsitizatuak dentsitizatutako metrika espaziala berreraikitzeke erabil daitezke ($+2$ pisua izango luke objektu honek),

$$\tilde{h}^{ab} = \det(h) h^{ab} = \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b \delta^{ij}. \quad (2.55)$$

2.3.2 Konexioak

Bestalde, gure aldagai dinamikoak izango direnak Yang-Mills $SU(2)$ teoria baten konexio bat bezala portatzen direla aipatu dugu. Yang-Mills teoriak Maxwell-en elektromagnetismoaren teoriaren orokorpen bezala uler daitezke. Bertan potentzial bektore bat dugu, zeina lau matrizez osatuta dagoen (lau zenbakiz izan beharrean). Matrizeok aljebra baten gaiak dira. Aljebra baten adibidea Pauli-ren matrizeak oinarri dituen litzateke. Aljebra honi $su(2)$ deritzo, matrizeen esponentziala garatuz gero $SU(2)$ taldea lortzen baita. “ U ” matrize unitarioak izatetik dator, “ S ” bereziak (*special* ingelesez) izatetik (beraien determinantea bat izatea esan nahi du), eta 2 zenbakiak matrizearen dimentsioak adierazten ditu. Elkarrekintza elektromagnetikoa $U(1)$ taldean oinarrituta legoke, elkarrekintza nuklear ahula $SU(2)$ taldean, eta elkarrekintza nuklear bortitza $SU(3)$ taldean.

Potentzial bektoreak (\mathbf{A}_a) aljebra baliok hartzen ditu eta aljebra baten oinarria osatzen duten elementuen konbinazio lineal bezala adieraz dezakegu,

$$\mathbf{A}_a = \sum_{i=1}^3 A_a^i \sigma_i, \quad (2.56)$$

A_a^i kantitateak potentzial bektorearen osagaiak izanik emandako oinarrian. Hau da Yang-Mills teorian konexio deitzen dena eta gure aldagai dinamikoa dena. Potentzial bektorea erabiliz deribatu kobariante bat eraiki daiteke,

$$D_a = \partial_a - ig\sigma_i A_a^i. \quad (2.57)$$

Kasu honetan kobariantzia ez da koordinatuen transformazioekiko, taldearen barneko transformazioekiko baizik. “Akoplamendu konstante” deritzo g konstanteari. Aljebra guztietan oinarria

osetzen duten matrizeek konmutazio erlazioak betetzen dituzte. Aljebra baten oinarriko elementuak T_i deitzen badira, konmutazio erlazioak ondorengoak dira,

$$[T_i, T_k] = i \sum_l f^{jkl} T_l, \quad (2.58)$$

non batura oinarriko gain guztiekiko den eta f^{jkl} aljebraaren egitura konstante bezala ezagutzen diren. Azken hauek guztiz zehazten dute aljebra, beraz egitura konstanteak ezagutzeak aljebra osoaren adierazpena ezagutzera garamatza. $su(2)$ -ren kasuan Pauli-ren matrizeek

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon^{ijk} \sigma_k, \quad (2.59)$$

betetzen dute. Beraz, $su(2)$ aljebraaren kasuan Levi-Civita hiru dimentsioko ikurrak dira egitura konstanteak $f^{ijk} = 2\epsilon^{ijk}$.

Yang-Mills teoriako bi deribaturen konmutatzailea kalkula dezakegu,

$$[D_a, D_b] = -igF_{ab}^i \sigma_i, \quad (2.60)$$

eta konmutatzailea esplizituki kalkulatu $F_{\mu\nu}^i$ eremu tentsorea ondorengoa dela lortzen da,

$$F_{ab}^i = \partial_a A_b^i - \partial_b A_a^i + g\epsilon_{ijk} A_a^j A_b^k. \quad (2.61)$$

Horrez gain, kurbadura estrintsekoa (zeina aurreko atalean ikusi dugun bezala metrika espazialaren denborarekiko eboluzioarekin erlazionatuta dagoen (2.15) ekuazioaren bidez) konexioa eraikitzeko erabil daiteke ondorengo erlazioaren bidez,

$$A_a^i = \Gamma_a^i + \beta K_a^i, \quad (2.62)$$

non $\Gamma_a^i = \Gamma_{ajk}\epsilon^{jki}$ den eta $K_a^i = K_{ab}\tilde{E}_i^b/\sqrt{\det(h)}$. Metrika estrintsekoaren eta triaden arteko Poisson-en makoak nuluak direnez, aurretik aipatu bezala, eraikitako teoria klasikoak baliokideak dira. Teoria kuantikoetan ez da hala izango.

2.3.3 Hamiltondarra eta loturak

Ashtekar-en aldagaien menpe erlatibitate orokorraren lagrangearra 2.2 atalean erabilitako prozedura bera erabiliz lor daiteke, gure dentsitate hamiltondarra $\mathcal{H}_G = \underline{N}\epsilon_{ijk}\tilde{E}_i^a\tilde{E}_j^bF_{ab}^k + N^a\tilde{E}_i^bF_{ab}^i + \lambda^i(D_a\tilde{E}^a)^i$ izanik. Lagrangearra honela adierazten da [63],

$$L = \frac{1}{8\pi G\beta} \int d^3x \left(\tilde{E}_i^a \dot{A}_a^i + \underline{N}\epsilon_{ijk}\tilde{E}_i^a\tilde{E}_j^bF_{ab}^k + N^a\tilde{E}_i^bF_{ab}^i + \lambda^i(D_a\tilde{E}^a)^i \right). \quad (2.63)$$

Bertan agertzen den tarte funtzio dentsitatuaren pisua -1 izanik, hots, $\underline{N} = \frac{N}{\sqrt{\det h}}$, eta $\beta = i$.

Forma honetan argi ikusten da \tilde{E}_i^a eta A_a^i kanonikoki konjokatuak direla eta \underline{N} tarte, N^a desplazamendua eta λ^i gauge parametroa Lagrange-ren biderkatzaileak direla. Biderkatzaile hauekin zazpi lotura ditugu. Bederatzi konfigurazio aldagai eta zazpi lotura izanik, bi askatasun-gradu ditu erlatibitate orokorrak.

Loturen lehen multzoa Gauss-en lege bat da (aldagai berriak sartzearen eraginez agertzen zai-
gu loturen multzo berri hau, ADM formalismoan agertzen ez zitzaiguna; zehazki, triadek barne-
espazioko errotazioekiko askatasuna dutelako agertzen da),

$$\mathcal{G}_i = D_a \tilde{E}_i^a = 0, \quad (2.64)$$

bigarrenari momentuaren lotura edo lotura bektoriala deritzo

$$V_b = \tilde{E}_i^a F_{ab}^i = 0, \quad (2.65)$$

eta azkenik lotura hamiltondarra dugu,

$$C = \epsilon_{ijk} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b F_{ab}^k = 0. \quad (2.66)$$

Teoriaren hamiltondar osoa lotura hauen konbinazio lineala da (2.63) ekuazioan ikus daitekeen mo-
duan. Lotura hauen orbitak azter daitezke. Gauss-en loturak $su(2)$ gauge transformazioak eragiten
ditu aldagaien barne-espazioan. Momentuen lotura difeomorfismo espazialekin “erlazionatuta” da-
go (ez dira soilik difeomorfismo espazialak, barne-espazioko gauge transformazioak ere eragiten
baititu). Difeomorfismo espazial hutsak nahi badira aipatutako bi loturen konbinazio lineal bidez
izan behar da, difeomorfismoetako lotura deritzona definituz,

$$C_a = V_a - A_a^i (D_b \tilde{E}_i^b). \quad (2.67)$$

Lotura honen eta aldagai kanonikoen $f(\tilde{E}, A)$ funtzioaren Poisson-en makoa kalkulatu gero fa-
seen espazioan sortzen den orbita f funtzioaren N^a bektorearen zeharreko Lie-ren deribatuarekiko
(gogoratu 2.1.1 atala) proportzionala dela ikusten da, hau da, difeomorfismo espazial bat.

Bestetik, lotura hamiltondarrak “denborarekiko bilakaera” sortzen du x^a koordenatuaren zero gaia-
ren menpe. Ekintza aldagai horren birparametrizazioekiko inbariantea denez (gainerako guztiekiko
bezala), “denborarekiko bilakaera” hori ez da erreala. Berriz ere erlatibitate orokorra teoria guz-
tiz lotu bat dela dugu, eta bere hamiltondar osoa lotura horien eta Lagrange-ren biderkatzaileen
arteko biderkaduren konbinazio lineala da,

$$H_G = \int d^3x \left\{ N \epsilon_{ijk} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b F_{ab}^k + N^a \tilde{E}_i^b F_{ab}^i + \lambda^i (D_a \tilde{E}^a)^i \right\}. \quad (2.68)$$

Bertatik Hamiltonen ekuazioak idatziz gero Einstein-en ohiko ekuazioak lortzen dira. Teoriaren O
behagarriak hamiltondarrarekin Poisson-en makoak kalkulatu gero nulua ematen duten objektua dira
 $\{O, H_G\} = 0$. Hauek eraikitzea oso nekeza da, lotura hamiltondarrak arazoak sortzen baititu.

Esan bezala goiko hamiltondarraren adierazpena $\beta = i$ aukeratzetik dator. Hauxe da Ashtekar-ek
1986an eginiko hautua, eta adierazpenak sinplifikatzen ditu. Baina aldagaiak konplexu bihurtzen
dira, eta horrek kuantizatzeko orduan arazoak sor ditzake, benetako erlatibitate orokorra berres-
kuratu behar baita bertatik, eta ez teoriaren aldaera konplexu bat. Parametro erreala hartzeak
dakartzan zailtasunak gaindi ditzakete analisi modernoagoek, eta guztia berdin gelditzen da lotura
hamiltondarra izan ezik, zeinak ondorengo itxura hartzen duen [64],

$$H = \epsilon_{ijk} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b F_{ab}^k + 2 \frac{(\beta^2 + 1)}{\beta^2} \left(\tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b - \tilde{E}_j^a \tilde{E}_i^b \right) (A_a^i - \Gamma_a^i) (A_b^j - \Gamma_b^j). \quad (2.69)$$

Lehen begiratuan bigarren zatiak ($\beta = i$ denean anulatzen dena) nahiko beldurgarria dirudi: Γ_a^i aldagaiak azaltzen dira zeintzuek erlazio ez-polinomiko konplikatua duten triada dentsitizatuekin eta asko zail lezakete kuantizazioa. Dena den, teknika modernoak sortu dira gai hauekin era sinpleago batean lan egiteko.

Adierazgarria den beste gauza bat loturen aljebra da. Loturak denboran kontserbatu behar dira, eta beraz beraien Poisson-en makoak hamiltondar osoarekin nulua izan behar da. Baina erlatibitate orokorraren kasuan hamiltondar osoa loturen konbinazio lineala da. Hau da, loturen arteko Poisson-en makoak anulatu egin behar dira (edo gutxienez loturen proportzionala izan). Honek esan nahi du loturak Dirac-en lehen motako loturak izan behar direla: loturen Poisson-en makoak kalkulatzeko direnean loturen konbinazio linealak lortzen dira emaitza bezala. Hau aurreko atalean garatu dugun ADM formalismoan ere betetzen da.

2.3.4 Materiaren akoplamendua

Kosmologia aztertzean teoriari materia akoplatzea beharko dugu, zehazki eremu eskalar bat. Eremu eskalar baten lagrangearra $L = - \int d^3x (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + V(\phi))$ da espazio-denbora lauan. Espazio-denbora kurbatua metrikarekiko menpekotasuna esplizituki adierazi behar dugu eta bere determinantea bolumen elementuan, beraz ekintza honela gelditzen da,

$$S = \int d^4x (-g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi)) \sqrt{-\det(g)}. \quad (2.70)$$

Eremu eskalarraren momentu kanoniko konjokatua ondorengo $p_\phi = \delta L / \delta \dot{\phi}$ izanik, lagrangearra honela idatz daiteke,

$$L = \int d^3x N \left(\frac{p_\phi^2}{\sqrt{\det h}} + \sqrt{\det h} (h^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi + V(\phi)) \right) + N^a p_\phi \partial_a \phi, \quad (2.71)$$

N tarte eta N^a desplazamendua izanik. Ashtekar-en aldagaien menpe idatz dezakegu lagrangearra,

$$L = \int d^3x \frac{N}{\sqrt{\det h}} (p_\phi^2 + \tilde{E}_i^a \tilde{E}^{bi} \partial_a \phi \partial_b \phi + \det h V(\phi)) + N^a p_\phi \partial_a \phi. \quad (2.72)$$

Bertan eremu eskalarrak difeomorfismoetako loturari,

$$C(\vec{N})_\phi = \int d^3x N^a p_\phi \partial_a \phi, \quad (2.73)$$

eta lotura hamiltondarrari,

$$H(M)_\phi = \int d^3x \frac{N}{\sqrt{\det h}} (p_\phi^2 + \tilde{E}_i^a \tilde{E}^{bi} \partial_a \phi \partial_b \phi + \det h V(\phi)), \quad (2.74)$$

egiten dizkieten ekarpenak ikus ditzakegu. Hauek eremu grabitatorioaren difeomorfismoetako loturari eta lotura hamiltondarrari batu behar zaizkie ($8\pi G\beta$ -rekin biderkatu ondoren). Honek eremu eskalarra grabitatearekin akoplatuko du.

Kapitulua 3

Kuantizazioa

Aurreko kapituluan erlatibitate orokorraren formulazio hamiltondarra lortu dugu. Bi bide jarraitu ditugu. Lehenengoan gure aldagai dinamikoa metrika espaziala izan da eta bere momentu kanoniko konjokatua kurbadura estrintsekoarekin erlazionatuta dago. Bestean gure aldagai dinamikoa konexioak izan dira eta beraien momentu kanoniko konjokatuak triadak. Kuantizaziorako Dirac-en kuantizazio metodoa [65] erabiliko dugu bi kasuetan.

Metrika espaziala oinarritzko aldagai bezala erabiliz Wheeler-DeWitt ekuazioa [44] bezala ezaguna den adierazpenera iritsiko gara. Bertan metrika espazialaren menpeko $\Psi(h_{ab})$ uhin-funtzioak ditugula kontsideratzea da naturalena. Geometria jakin bat izateko probabilitatearekin erlazionatuta dagoela pentsa liteke. Beste aldagaiak erabiliz, berriz, konexioen menpeko $\Psi(A_a^i)$ uhin-funtzioak ditugula kontsideratzen da. Honi konexioen adierazpidea deritzo. Aurrekoan hartzen den irudi konjokatua dugu hemen, triadak metrika espazialarekin baitaude erlazionatuta eta uhin-funtzioek hauen aldagai konjokatuen funtzioak baitira.

3.1 Wheeler-DeWitt ekuazioa

Ditugun h_{ab} aldagaiak, mekanika kuantikoan bezala, eragile bihurtzen dira. Metrika espazialaren espazioan lan eginez,

$$\hat{h}_{ab}\Psi(h_{ab}) = h_{ab}\Psi(h_{ab}), \quad (3.1)$$

eta bere momentu konjokatua berriz, deribatu funtzional bilakatzen da ($\hbar = 1$ hartuko dugu aurrerantzean esplizituki agertzen ez bada),

$$\hat{\pi}^{ab}\Psi(h_{ab}) = -i\frac{\delta\Psi(h_{ab})}{\delta h_{ab}}. \quad (3.2)$$

Loturen ekuazioek adierazten digute $\mathcal{H}_G = 0$ dela denboraren balio guztioentzat, beraz Schrödinger-en ekuazioa honela gelditzen da: $\hat{\mathcal{H}}_G\Psi(h_{ab}) = 0$. Difeomorfismoetako lotura, (2.42) ekuazioa, C_{dif} bezala adieraziko dugu eta lotura hamiltondarra, (2.42) ekuazioa, C_{ham} bezala. Biak eragile kuantiko bihurtuz, honela idatz dezakegu formalki Wheeler-DeWitt ekuazioa,

$$\hat{\mathcal{H}}_G\Psi(h_{ab}) = h^{1/2}N\hat{C}_{ham}\Psi(h_{ab}) - 2h^{1/2}N_a\hat{C}_{dif}\Psi(h_{ab}) = 0, \quad (3.3)$$

hau da,

$$\hat{C}_{ham}\Psi(h_{ab}) = 0, \quad (3.4)$$

$$\hat{C}_{dif}\Psi(h_{ab}) = 0. \quad (3.5)$$

Ekuazio hau Wheeler-DeWitt ekuazioa [44] bezala ezagutzen dira. Lehena, kuantizatutako lotura hamiltondarra, oso ekuazio diferentzial singularra, zainari oraindik ez zaion soluzio fisikorik aurkitu kontestu sinpleetatik harago.

3.2 Konexioen adierazpidearen kuantizazioa

Aurreko ataleko prozedura bera jarraituko dugu hemen. (2.45) ekuazioan azaldu bezala, ($8\pi G = \beta =$ aukeratuz soilik atal honetan) teoria klasikoa aldagaien Poissonen makoak,

$$\left\{ A_a^i(x), \tilde{E}_j^b(y) \right\} = \delta_b^a \delta_j^i \delta^3(x-y),$$

ditugu. Aldagaiak eragile bihurtzen dira. Konexioa espazioan lan eginez,

$$\hat{A}_a^i \Psi(A) = A_a^i \Psi(A), \quad (3.6)$$

eta bere momentu konjokatua berriz, deribatu funtzional bilakatzen da,

$$\hat{E}_i^a \Psi(A) = -i \frac{\delta \Psi(A)}{\delta A_a^i}. \quad (3.7)$$

Eta ondorengo da beraien konmutatzailea

$$\left[\hat{A}_b^j(y), \hat{E}_i^a(x) \right] = i \delta_b^a \delta_j^i \delta^3(x-y). \quad (3.8)$$

Loturak eragileen bidez adierazitako ekuazio bihurtuko ditugu orain. Nahiko konplexua da zati hau, eta izatez osatu gabe dago teoria. Gauss-en legearekin, (2.64) ekuazioa, hasiz,

$$\hat{G}_i \Psi(A) = -i D_a \frac{\delta \Psi(A)}{\delta A_a^i}, \quad (3.9)$$

dugu. Gauss-en legea egoera batengan aplikatuz gero Ψ egoera horren argumentua gauge transformazio infinitesimal (λ txikia den heinean) baten bidez desplazatzearen parekoa dela, alegia $\Psi(A + D\lambda)$, baina loturak egoerak deuseztatu behar dituzenez $\Psi(A + D\lambda) = \Psi(A)$ bete behar da. Alegia, lotura honek, eragile kuantiko gisa, egoerengan lotura klasikoak inposatutako simetria bera inposatzen digu. Konexioarekiko gauge inbariantek izan behar dira.

Lotura bektoriala, (2.65) ekuazioa, berriz, honela idazten da,

$$\hat{V}_a \Psi = -i \hat{F}_{ab}^i \frac{\delta \Psi(A)}{\delta A_b^i}. \quad (3.10)$$

Lotura honek egoera batengan duen eragina Ψ -ren argumentua difeomorfismo infinitesimal (\vec{N} txikia den heinean) baten bidez desplazatzea da, $\Psi(A + \mathcal{L}_{\vec{N}} A)$. Beraz, loturak, eragile kuantiko

bihurtzean, forma klasikoak sortzen zituen simetria berak eragiten ditu. Alegia, egoerak difeomorfismoekiko inbariantek diren A -ren funtzioak izan behar direla inposatzen du.

Zer gertatzen da lotura hamiltondarrarekin? Hemen zenbait arazo sortzen dira. Labur azalduta, ez dago argi nola interpretatu behar den fisikoki lotura honek egoeretan eragitean lortzen dena. Bestalde, hondoko geometria finkatuta ez duen teoria bat lortu nahi izateak zailtasunak areagotzen ditu arazoei aurre egiteko orduan bolumenean integratzeko kanpoko egiturarik sartu gabe. Gainera barne biderketa baten beharra du teoria kuantiko batek. Gauge eta difeomorfismo transformazioekiko inbariante den barne biderketarik ez zen ezagutu 1990. hamarkadaren erdialdea arte. Kiribileen grabitazio kuantikoko teknikak ezartzeak ahalbidetu zuen hau definitzea, eta adierazpen sinpleena kiribilen menpe adieraztean du.

3.3 Kiribilen grabitazio kuantikoa

Kiribilen grabitazio kuantikoan kiribilen adierazpidea erabiltzen da. Aurreko atalean ikusi dugunez, uhin-funtzioak konexioaren funtzioak dira. Atal honetan ikusiko dugun bezala, holonomia deritzen objektuen (3.3.1 atalean definituko ditugu) bidez posible da potentzialean dagoen informazio gauge inbariante guztia berreraikitzea eta kiribilen adierazpidea eraikitzea. Hau da, konexioaren funtzioa soilik diren behagarri guztientzako oinarria da holonomia.

3.3.1 Holonomiak

Kiribilen grabitazio kuantikoa azaltzeko beharrezko kontzeptua da holonomia. Hau azaltzeko Maxwell-en elektromagnetismoaren teoriara joko dugu. γ kurba baten zeharreko potentzial bektorearen zirkulazioa kalkulatzeko badugu, kurba itxia izanik, Stokes teorema dela eta ondorengoa dugu

$$\int_{\gamma} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot \vec{n} d^2x, \quad (3.11)$$

γ kurbak mugatzen duen gainazala izanik S eta \vec{n} integrazio puntu bakoitzean gainazalarekiko normala den bektore unitarioa izanik. Intuitiboki ikusten da zirkulazioa kurba posible guztientzat zehaztea \vec{A} potentzial bektorearen errotazionala zehaztearen baliokidea dela (puntu batean duen balioa zehaztu nahi bada nahikoa da γ kurba infinitesimala kontsideratzea). Hau garrantzitsua da potentzialaren errotazionala eremu tentsorearen proportzionala delako, izan ere, $\epsilon^{abc}F_{bc} = (\vec{\nabla} \times \vec{A})^a$ dugu, eskuineko zatiak errotazionalaren gaia zehazten duelarik. Beraz, potentzialaren zirkulazioa zehaztuz kurba guztientzat, eremua zehazten ari gara. Zirkulazioa gauge transformazioekiko inbariantea da, potentziala funtzio baten gradiente baten bidez aldatzen baita $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda$ eta gradientearen integrala kurba itxi batean nulua da.

Yang-Mills teorien kasuan eremu tentsorea konplexuagoa da (ez da soilik potentzial bektorearen errotazionala), potentzial bektorearen osagaien arteko interakzioak baitaude. Gainera, Maxwell-en teorian ez bezala, zirkulazioa ez da gauge transformazioekiko inbariantea izango, gauge aldaketak ere konplexuagoak baitira. Holonomiek betetzen dute Yang-Mills teoretan zirkulazioak Maxwell-en teorian betetzen duen papera.

Holonomiak zer diren azaltzeko garraio paraleloaren kontzeptura joko dugu. Suposa dezagun E_i^a kantitatea $\gamma^a(t)$ kurba espazial batean “bere buruarekiko ahalik era paraleloenean” garraiatu nahi dugula, kurbadura estrintsekoaren kontzeptua azaltzeko orduan egin genuen bezala 2.1.1 atalean. Honek esan nahi du bere deribatu kobariante norabidetua nulua izango dela kurban zehar (Yang-Mills teoriako deribatu kobariantea erabili behar dugu hemen, 2.3.2 atalean definitu duguna),

$$\dot{\gamma}^a(t)D_a\mathbf{E}^b = 0, \quad (3.12)$$

non $\dot{\gamma}^a(t) = d\gamma^a(t)/dt$ kurbarekiko tangentea den bektorea den. Deribatu kobariantearen definizioa erailiz, erlazio hori honela idatz daiteke,

$$\dot{\gamma}^a(t)\partial_a\mathbf{E}^b(t) = -ig\dot{\gamma}^a(t)\mathbf{A}_a(t)\mathbf{E}^b(t), \quad (3.13)$$

\mathbf{A}_a eta \mathbf{E}^b $\gamma^a(t)$ kurbari dagokion puntuan definituta egonik. Adierazpen hau formalki integra dezakegu ondorengo lortzeko,

$$\mathbf{E}^b(t) = \mathbf{E}^b(0) - ig \int_0^t ds \dot{\gamma}^a(s)\mathbf{A}_a(s)\mathbf{E}^b(s), \quad (3.14)$$

eta “formalki” diogunean esan nahi dugu ez dela soluzio bat, askatu nahi dugun aldagaia ekuazioaren bi aldeetan agertzen baita. Hala ere, iterazio bidez jardun dezakegu, ezkerreko gaian eskuinekoan jarritz. Behin eginez, adibidez,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^b(t) &= \mathbf{E}^b(0) - ig \int_0^t ds \dot{\gamma}^a(s)\mathbf{A}_a(s)\mathbf{E}^b(0) \\ &\quad - g^2 \int_0^t ds \dot{\gamma}^a(s)\mathbf{A}_a(s) \int_0^s dw \dot{\gamma}^a(w)\mathbf{A}_a(w)\mathbf{E}^b(w), \end{aligned} \quad (3.15)$$

lortzen dugu, eta bi aldiz eginez,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^b(t) &= \mathbf{E}^b(0) - ig \int_0^t ds \dot{\gamma}^a(s)\mathbf{A}_a(s)\mathbf{E}^b(0) \\ &\quad - g^2 \int_0^t ds \dot{\gamma}^a(s)\mathbf{A}_a(s) \int_0^s dw \dot{\gamma}^a(w)\mathbf{A}_a(w)\mathbf{E}^b(0) \\ &\quad + ig^3 \int_0^t ds \dot{\gamma}^a(s)\mathbf{A}_a(s) \int_0^s dw \dot{\gamma}^a(w)\mathbf{A}_a(w) \times \int_0^w du \dot{\gamma}^a(u)\mathbf{A}_a(u)\mathbf{E}^b(u). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ez dirudi honek askorik laguntzen duenik, baina behin eta berriz eginez,

$$\mathbf{E}^b(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-ig)^n \int_{t_1 \geq \dots \geq t_n \geq 0} \dot{\gamma}^{a_1}(t_1)\mathbf{A}_{a_1}(t_1) \cdots \dot{\gamma}^{a_n}(t_n)\mathbf{A}_{a_n}(t_n) dt_1 \cdots dt_n \right) \mathbf{E}^b(0), \quad (3.17)$$

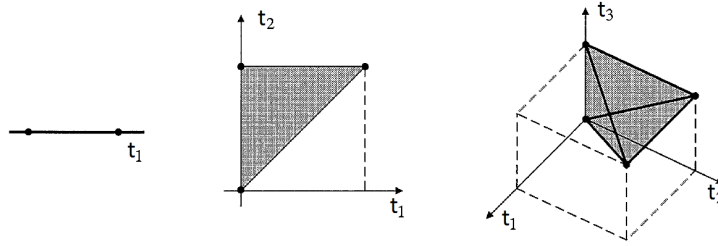
adierazpena iristen gara. Adierazpen hau konbergentea da potentzial bektore leun eta finituentzat. Parentesien arteko kantitateari, batukaria barne hartuz, hedatzaile paraleloa deritzo, 0-tik t -ra baikaramatza γ kurbarekiko “ahalik eta paraleloen”. Konexio bat eta kurba bat emanik, hedatzailearen bidez emaitza bakarra dugu (3.12) ekuazioarentzat. $\gamma^a(t)$ eta $\gamma^a(0)$ berdinak badira kurba itxi batean, *kiribil* (*loop*) deitzen zaiona, hedatzen ari gara, eta hedatzaile horri *holonomia* deitzen zaio. Kontuan izan behar da hedatzaile paraleloa matrize bat dela. Matrize horren aztarna eskalar bat da, eta hau inbariantea da gauge transformazioekiko kurba itxia baldin bada. Hautagai

ona da beraz Yang-Mills teoretan behagarri bat izateko. Izatez hori baino zerbait gehiago dela ikusiko dugu.

Aurreko serieko n . gaia n -dimentsioko triangelu zuzen (edo n -simplex) baten gaineko integrala da:

$$\begin{aligned} n = 1 &\Rightarrow \int_0^t \dot{\gamma}^{a_1}(t_1) \mathbf{A}_{a_1}(t_1) dt_1 \\ n = 2 &\Rightarrow \int_0^t \int_0^{t_1} \dot{\gamma}^{a_1}(t_1) \mathbf{A}_{a_1}(t_1) \dot{\gamma}^{a_2}(t_2) \mathbf{A}_{a_2}(t_2) dt_1 dt_2 \\ n = 3 &\Rightarrow \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \dot{\gamma}^{a_1}(t_1) \mathbf{A}_{a_1}(t_1) \dot{\gamma}^{a_2}(t_2) \mathbf{A}_{a_2}(t_2) \dot{\gamma}^{a_3}(t_3) \mathbf{A}_{a_3}(t_3) dt_1 dt_2 dt_3. \end{aligned}$$

Integrala erraztuko luke n -simplex batean kontsideratu beharrean n -kubo batean kontsideratuko bagenu. Hau egitea posible da. $n!$ simplex daude halako kubo batean, beraz $1/n!$ biderkatuko dugu gehiegizko bolumen hori konpentsatzeko.



IRUDIA 3.1: n -simplex (n dimentsioko triangelu zuzenak) $n = 1, 2, 3$ -rentzat [66].

Baina itegraleko gaiak ongi ordenatuta egotea nahi dugu. Horretarako ohikoa den notazioa bat sartuko dugu. Bidean ordenaturiko biderkaduraren kontzeptua da hau,

$$P(\mathbf{A}_{a_1}(t_1) \cdots \mathbf{A}_{a_n}(t_n)), \quad (3.18)$$

zeina barneko faktoreen biderkadura hutsa den baina permutatuta, t_i handienak aurrena ager daitezten. Hori garrantzitsua da \mathbf{A}_a matrizeek ez baitute konmutatzen. Adibidez, $t_1 > t_2 > \cdots > t_n$ bada,

$$P(\mathbf{A}_{a_1}(t_1) \cdots \mathbf{A}_{a_n}(t_n)) = \mathbf{A}_{a_1}(t_1) \cdots \mathbf{A}_{a_n}(t_n), \quad (3.19)$$

dugu, baina $t_2 > t_1 > t_3 > \cdots > t_n$ bada,

$$P(\mathbf{A}_{a_1}(t_1) \cdots \mathbf{A}_{a_n}(t_n)) = \mathbf{A}_{a_2}(t_2) \mathbf{A}_{a_1}(t_1) \cdots \mathbf{A}_{a_n}(t_n), \quad (3.20)$$

izango dugu. Notazio honekin, aurretik genuen integrala honela idatz dezakegu,

$$\begin{aligned} &\int_{t_1 \geq \cdots \geq t_n \geq 0} \dot{\gamma}^{a_1}(t_1) \mathbf{A}_{a_1}(t_1) \cdots \dot{\gamma}^{a_n}(t_n) \mathbf{A}_{a_n}(t_n) dt_1 \cdots dt_n = \\ &= \frac{1}{n!} \int_0^t \cdots \int_0^t P\left(\dot{\gamma}^{a_1}(t_1) \mathbf{A}_{a_1}(t_1) \cdots \dot{\gamma}^{a_n}(t_n) \mathbf{A}_{a_n}(t_n)\right) dt_1 \cdots dt_n \\ &= \frac{1}{n!} P\left(\int_0^t \dot{\gamma}^a(t) \mathbf{A}_a(t)\right)^n. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Azkenengo identitatearekin, bidean ordenatutako esponentziala defini dezakegu (3.17) ekuazioa berridazteko,

$$P \left[\exp \left(-ig \int_0^t \dot{\gamma}^a(s) \mathbf{A}_a(s) ds \right) \right] := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ig)^n}{n!} P \left(\int_0^t \dot{\gamma}^a(t) \mathbf{A}(t) \right)^n. \quad (3.22)$$

Potentzial bektoreek konmutatzen duten kasuan, Maxwell-en teorian gertatzen den bezala, bidean ordenatzeak ez du eraginik eta esponentziala ohiko esponentzial bilakatzen da. Beraz, kantitate hau zirkulazioaren esponentzial bihurtzen da kasu abeldarrean. Zirkulazioaren kontzeptu orokortua lortu dugu Yang-Mills teorien kasurako. Kasu honetan ere bidean ordenatutako esponentziala eta kurbak inguratzen duen gainazalaren integrala erlaziona daitezke Stokes-en teorema ez-abeldarra deritzonaren bidez. Laburtuz, potentzial bektore baten kiribil batean zeharreko bidean ordenatutako esponentziala holonomia deitzen da eta orokorrean matrize bat da.

Horrez gain, Giles-en teorema [67] dugu. Honek dio potentzial bektore batentzat bariedade bateko kiribil posible guztien zeharreko holonomien aztarna ezagutzen badugu, balio horietatik abiatuz posible dela potentzialean dagoen informazio gauge inbariante guztia berreraikitzea. Hau da, holonomia behagarri posible bat izateaz harago, konexioaren funtzioa soilik diren behagarri guztientzako oinarria da! Hau funtsezkoa da kiribilen adierazpidea gauge eta grabitazio teorian erabiltzeko.

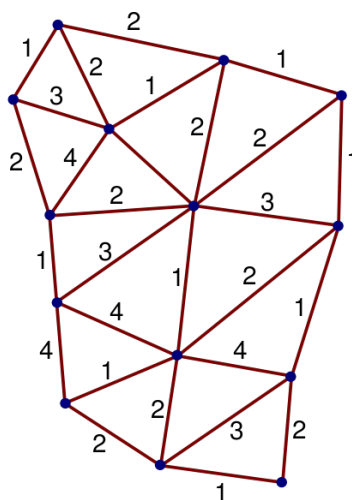
3.3.2 Kiribilen adierazpidea

Ashtekar-en aldagaien inguruan idatzitako 3.2 atalean azaldu bezala, Gauss-en loturak inposatzen du uhin-funtzioak konexioen gauge aldaketekiko inbarianteak izan behar direla. Beraz, holonomien aztarnek Gauss-en legearen soluzioen oinarria osatzen dute, iradokiz oinarri hori erabiliz adieraz dezakegula egoera bat

$$\Psi(A) = \sum_{\gamma} \Psi(\gamma) W_{\gamma}(A), \quad (3.23)$$

non batukaria posibleak diren kiribil itxi guztietan den eta koefizienteak $\Psi(\gamma)$ kiribil baten menpeko funtzioak diren, eta $W_{\gamma}(A)$ holonomien aztarnak dren. $\Psi(A)$ funtzioekin lan egiten den bezala, posiblea izan beharko litzateke funtzio horiek beste oinarri batean duten adierazpenaren koefizienteekin lan egitea, hau da, $\Psi(\gamma)$ funtzioekin, mekanika kuantikoan egiten den modu berean (posizio eta momentuen espazioenekin egiten den gisan). Difeomorfismoetako lotura oso modu errazean askatzea ahalbidetzen du, kiribilen deformazio leunekiko inbarianteak diren kiribilen menpeko funtzioak kontsideratuz.

Hala ere, badago arazo bat adierazpide honekin, gain-osatua baitago. Eta espazioa ez-lineala da. Bariedade bateko holonomien aztarnak ez dira independenteak eta euren arteko erlazioak ez-linealak dira. Beraz kontsidera daitezkeen $\Psi(\gamma)$ kiribilen funtzio motak murriztuta daude.



IRUDIA 3.2: Espin-sare bat adibide gisa. Lerroetako zenbakiak lerroan zeharreko garraio paraleloaren matrizearen dimentsioa ezaugarritzen du. N koloreko lerro bat $N + 1$ dimentsioko matrize bati dagokio [68].

3.3.3 Espin-sareak

Kiribilen oinarria gain-osatua izatearen arazoa gainditzeko espin-sareak erabiltzen dira. Erlatibitate orokorra adierazteko erabiltzen den konexioa $su(2)$ konexioa da, aipatu dugun bezala. Aljebra honen oinarri murrizteza Pauli-ren matrizeek osatzen dute, baina aljebra honentzat oinarria osatzen duten infinitu matrize existitzen dira, soilik ez direla 2×2 tamainako matrizeak, $(N+1) \times (N+1)$ tamainakoak baizik, N edozein zenbaki osoa izanik. Hauek aljibraren “adierazpide ezberdinak” izango liriateke.

Espin-sareek (3.2. irudian ikus daiteke adibide bat) konexio berdina eraikitzeke erabil daitezkeen adierazpide ezberdin hauen arteko erlazioa irudikatzen dute. Konexioaren bidez kurben gaineko garraio paraleloa dugu, zeinaren eragilea matrize bat den. Matrize horien indizeak “lotzen” dira ebakiduretan “elkartzaile” (*interwiner* ingelesez) deritzen objektu batzurekin matrizeen indizeetan kontrakzioa aplikatuz. Honen parekoa liriateke Clebsch-Gordan koefizienteek momentu angularraren adierazpide ezberdinak elkartzeko orduan jokatzen duten papera. Lerroak holonomien matrizeen dimentsioei uztartutako N zenbaki batez “koloreztatuta” daude. Espin-sareek gauge transformazioekiko inbarianteak diren funtzio guztientzako oinarria osatzen dute, oinarriaren gain-osotasuna minimizatuz (espin-sare bateko ebakidurak soilik hiru lerrorenak badira guztiz desagerrarazten du gain-osotasuna, ebakidurak hiru baino lerro gehiagoak badira minimizatu egiten du soilik), eta beraz grabitazio kuantikoan egoera bat adierazteko oinarri egokia da.

Kapitulua 4

Kosmologia kuantikoa

Erlatibitate orokorra unibertsoaren osotasunari aplikatzean espazio-denboraren geometria (eskala handian) homogenea eta isotropoa dela suposatuta ohi da. Einstein-en ekuazioen soluzio klasikoa den Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) metrika da baldintza hau betetzen duena. Bertan hiru unibertso mota ditugu kurbaduraren arabera, $k = 0$ unibertso laua, $k = 1$ unibertso itxia, eta $k = -1$ unibertso irekia.. Lan fenomenologiko gehiena $k = 0$ (kurbadura nulua) duen kasuan egiten da, gaur egungo behaketen arabera k -ren balioa horretara hurbiltzen baita. Kosmologia kuantikoan ere lan gehien alor honetan egin da, eta kiribilen grabitazioa kuantikoa kosmologiari nola aplikatzen zaion azalduko dugu bertan. Bestalde, $k = 0$ kasuaz gain, $k = 1$ (unibertso itxia) kasua kontsideratuko dugu, bertan kolapsoa teoria klasikoan ere gertatzen baita.

Era honetako eredu kosmologiko klasikoak denboran atzera garatuz gero argi ikusten da sahieste-zina dela singularitate bat aurkitzea: leherketa handia (*Big Bang*). Grabitazio kuantikoak hauek gaituzte dituela espero da, beste zenbait gauzen artean. Orokorrean, hamiltondarrak deuseztatu lituzkeen egoera kuantikoak topatu beharko lirateke, baina hauek homogeenak eta isotropoak izan beharko lirateke. Maila kuantikoan ez da espero zehazki homogeenak eta isotropoak diren egoerak topatzea, ziurgabetasun printzipioa kontraesango luke delako. Zoritxarrez, teoria osoaren parte lirateke egoera hauek, honen konplexutasun guztiarekin. Beraz isotropia eta homogeneotasuna sartzea oso konplexua litzateke.

Beste aukera bat homogeneotasuna eta isotropia teoria klasikoan inposatzea litzateke, eta ondoren kuantizatzea. Kasu horretan sistema mekaniko bat izango genuke, askatasun-graduen kopuru finitu batekin. Honi *mini-superespazio* deritzo. Horrelako hurbilketa batetik eratorritako ondorioak baliagarriak direla ziurtatzeko hurbilketatik kanpo mantentzen direla baieztatu beharko litzateke. Dena den, abiapuntu bat da. Itxaropena dago kosmologia kuantikoak grabitazioa kuantikoaren ezagutzan sakontzen lagunduko duela, bertako zenbait efektu azalduz.

Askatasun-graduen kantitate finitua dugunez, ezin da espero kiribilen grabitazio kuantikoen teknikak osorik erabiltzea. Areago, Stone-Von Neumann bezala ezagutzen den teorema bat existitzen da, zeinak dioskun askatasun-graduen kopuru finitua duten sistementzat, adierazpen kuantiko guztiak baliokideak direla. Kiribilen adierazpidean, ordea, teorema honen hipotesietako bat ez da betetzen, eta beraz, kosmologia homogeenen kontestuan kiribilen grabitazio kuantikoko zenbait portaera imitatuko luketen teknikak erabil litezke. Bojowald-ek egin zuen lehen ekarpena alor honetan [59], eta iragarpen garrantzitsuena hasierako singularitatea gaituzte dela litzateke.

4.1 Teoria klasikoa

Isotropia eta homogeneousuna aplikatzean, metrikak oso forma sinplea hartzen du,

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right], \quad (4.1)$$

non, aurretik aipatu bezala, $k = -1, 0, 1$ izan daitekeen. $k = 0$ kasuan honela idatz daiteke,

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (4.2)$$

$a(t)$ eskala faktorea izanik. Metrika honetara iris gaitzke diagonalak diren Ashtekar-en aldagaie-tatik abiatuta,

$$A_a^i = c(t)\delta_a^i, \quad (4.3)$$

$$\tilde{E}_i^a = p(t)\delta_i^a, \quad (4.4)$$

$a(t)$ eta bere denborarekiko deribatuarekin erlazionaturik dauden denboraren menpeko funtzioak izanik c eta p ; zehazki $a^2 = |p|$ da eta c , berriz, $\dot{a}(t)$ -rekiko proportzionala teoria klasikoaren soluzioetan. c eta p aldagaiak kanonikoki konjokatuak dira, A_a^i eta \tilde{E}_i^a -ren Poisson-en makoetatik (gogoratu (2.45) ekuazioa),

$$\{c, p\} = \frac{8}{3}\pi G\beta, \quad (4.5)$$

dugu, β Barbero-Immirzi parametroa izanik eta G Newton-en konstantea. Homogeneousuna eta isotropia direla eta, Gauss-en lotura eta difeomorfismoetako lotura automatikoki betetetzen dira. Horrez gain, A_a^i konexioa jakinik kurbadura kalkula dezakegu,

$$F_{ab}^k = c^2 \epsilon_{ab}^k. \quad (4.6)$$

Horrela, lotura hamiltondarra idatz dezakegu, (2.68) ekuazioa zati $\sqrt{\det h}$ (eta $H_G = \int d^3x \mathcal{H}$ kontuan izanik),

$$H_G = -\frac{6}{\beta^2} c^2 \sqrt{|p|}. \quad (4.7)$$

Teoria honek hutsean espazio laua (Minkowski-ren espazioa) du soluzio bakar bezala. Errealistagoa den zerbaitekin lan egiteko materia akoplatu behar zaio. Erabiliko dugun materia eremu eskalar bat izango da (2.3.4 atalean aztertu dugu nola akoplatzen zaion), baina kasu honetan homogeneousua izango da. Potentzialik gabeko eremu batek lotura hamiltondarrari egiten dion ekarpena oso sinplea da, $H_\phi = 8\pi G p_\phi^2 / |p|^{3/2}$. Kontestu honetan ez gara ari dentsitateen tildeak kontuan hartzen aldagaiak soilik denboraren menpekoak diren funtzio bezala hartu baititugu. Gure lotura hamiltondar osoa $H = (H_G + H_\phi) / (16\pi G)$ dugu, zeinean zatitzaile global bat gehitu den literaturan agertu ohi denarekin bat egin dezan, zeina tartea berreskalatzearen parekoa den.

Kosmologia honen dinamika klasikoa aztertuko dugu. Hemendik aurrera tartea unitarioa izatea

inposatuko dugu $N = 1$. Horrez gain, ϕ eta p_ϕ -ren higidura ekuazioak kalkulatu ditugu (hamiltondarrean ϕ agertzen ez denez eta $\{\phi, p_\phi\} = 1$ dugunez, p_ϕ higidura konstantea dugu),

$$\dot{\phi} = \{\phi, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{1}{16\pi G} \frac{\partial H_\phi}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{p^{3/2}}, \quad (4.8)$$

$$\dot{p}_\phi = \{p_\phi, H\} = 0 \quad (4.9)$$

c eta p -ren higidura ekuazioak, berriz,

$$\dot{c} = \{c, H\} = \frac{8\pi\beta G}{3} \frac{\partial H}{\partial p} = -\frac{c^2}{2\beta|p|^{1/2}} - \frac{2\beta\pi G p_\phi^2}{|p|^{5/2}}, \quad (4.10)$$

$$\dot{p} = \{p, H\} = -\frac{8\pi\beta G}{3} \frac{\partial H}{\partial c} = \frac{2\sqrt{|p|}c}{\beta}, \quad (4.11)$$

ditugu. $H = 0$ denez p_ϕ momentua p eta c -ren menpe idatz dezakegu,

$$H_G = -H_\phi \Rightarrow \frac{6}{\beta^2} c^2 \sqrt{|p|} = 8\pi G p_\phi^2 / |p|^{3/2} \Rightarrow p_\phi \frac{3cp}{2\sqrt{3\pi G}\beta} = H_{Fis.} \quad (4.12)$$

Gure hamiltondar fisikoa izango da p_ϕ (gogoratu \dot{p}_ϕ dugula), eta ϕ hamiltondar honi dagokion denbora, aurrerago erabiliko duguna. Hamiltondar honekiko higidura-ekuazioak kalkulatu ditugu c eta p -rentzat,

$$\frac{dc}{d\phi} = \{c, \phi\} = -\sqrt{\frac{16\pi G}{3}} p, \quad (4.13)$$

$$\frac{dp}{d\phi} = \{p, \phi\} = \sqrt{\frac{16\pi G}{3}} c. \quad (4.14)$$

Bestalde, (4.12) ekuaziotik c askatuz haxe dugu,

$$c = \frac{2\sqrt{3\pi G}\beta}{3} \frac{p_\phi}{p}, \quad (4.15)$$

eta beraz (4.11) ekuazioaren bidez,

$$\dot{p} = \frac{4\sqrt{3\pi G}}{3} \frac{p_\phi}{\sqrt{|p|}}, \quad (4.16)$$

dugu. Hau integratuz, eta integrazio konstantea kalkulatzeko kontuan izanik $p = 0$ denean $p_\phi = 0$ dela,

$$p^{3/2} = \frac{8\sqrt{3\pi G}}{3} p_\phi t, \quad (4.17)$$

p -ren t denborarekiko eboluzioaren adierazpena lortzen dugu. Ekuazio honek adierazten digu unibertsoaren bolumena zerora doala $t = 0$ denean, *Big Bang* deritzon singularitatea emanaz. Normalean kosmologian (4.16) ekuazioa $\mathcal{H} = \dot{p}/(2p) = \dot{a}(t)/a(t)$ Hubble-ren parametroaren, eta $\rho = p_\phi^2/(2|p|^3)$ eremu eskalarraren materia dentsitatearen menpe idazten da,

$$\mathcal{H}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho, \quad (4.18)$$

zeina Friedmann-en ekuazioa bezala ezagutzen den. Ikusiko dugunez, kiribilen kosmologia kuantikoan ekuazio hau aldatu egiten da (eredu eraginkorretan argi ikusiko da hori).

4.2 Wheeler-DeWitt kuantizazio tradizionala

Orain arte egin duguna askatasun-graduaren kopuru finitua duen sistema batean aldagai aldaketa soila izan da, beraz ez da ezer aldatzen. Kuantizatzeko orduan agertzen dira gauza berriak. Eredu honetan, askatasun-graduaren kopuru finitua dugunez, (c, p, ϕ, p_ϕ) fase-espazioko aldagaieko aurreko sistema ohiko moduan kuantizatuz gero, kosmologia kuantiko tradizionala izango genuke. p eta ϕ aldagaien errepresentazioa hautatuz \hat{p} eta $\hat{\phi}$ eragileek biderkadura eragile bezala eragiten dute egoerengan, alegia,

$$\hat{p}\Psi = p\Psi \quad \text{eta} \quad \hat{\phi}\Psi = \phi\Psi. \quad (4.19)$$

Beste alde batetik beraien momentu konjokatuak eragile bihurtuz,

$$\hat{c}\Psi = i\hbar \frac{8\pi\beta G}{3} \frac{\partial\Psi}{\partial p} \quad \text{eta} \quad \hat{p}_\phi\Psi = -i\hbar \frac{\partial\Psi}{\partial\phi}, \quad (4.20)$$

izango dugu. Dena den, azpimarragarria da $k = 0$ kasuan, adibidez, espazioa infinitua denez, ekintza, hamiltondarra etab. dibergenteak izango direla, espazio osoko integral bezala adierazten baitira. Beraz, 2.2 atalean egin bezala, gelaxka arbitrario bat hautatu behar dugu eta integralak bertara mugatu. Kalkulu errealean, horrez gain, komenigarria da ${}^0h_{ab}$ metrika espazial arbitrario bat ezartzea eta gure h_{ab} metrika fisikoa (benetan esanahi fisikoa duena) a eskala faktorearen bidez adieraztea, $h_{ab} = a^2 {}^0h_{ab}$. Hortaz, aldagai dinamiko bezala a bera har dezakegu edo gelaxkaren v bolumena ($|v| \sim a^3$ erlazioa betetzen da). Hori bai, ezinbestekoa da kontuan izatea emaitza fisikoak ezin direla izan aukeratutako gelaxkaren edota metrika espazial arbitrarioaren menpekoak.

Lotura hamiltondarraren bertsio kuantikoa erraz idatz daiteke eta Wheeler-DeWitt ekuazioa bezala da ezaguna. Homogeneotasuna eta isotropia inposatu ditugunez, lotura hamiltondarra soilik gelditzen zaigu; gainerakoak automatikoki betetzen dira. Lotura hamiltondarrak egoera fisikoek bete beharreko ekuazio diferentzial baten itxura hartzen dute; $k = 0$ kasurako [69],

$$\partial_\phi^2\Psi(v, \phi) = \Theta\Psi(v, \phi) := -12\pi G(v\partial_v)^2\Psi(v, \phi), \quad (4.21)$$

dugu, eta $k = 1$ kasuan, berriz,

$$\partial_\phi^2\Psi(v, \phi) := -\Theta\Psi(v, \phi) - GC|v|^{\frac{4}{3}}\Psi(v, \phi), \quad (4.22)$$

C konstante numeriko bat izanik. Lotura hamiltondarraren itxura 2-dimentsioko Klein-Gordon ekuazio batena da, ϕ aldagaiak denbora aldagaiaren papera izanik eta v aldagai espazialarenak. Beraz denbora dela pentsa dezakegu ϕ eta Wheeler-DeWitt ekuazioa v "benetako" askatasun graduaren denborarekiko eboluzioaren ekuazio bezala ikus dezakegu hortaz. Era honetan p_ϕ Dirac-en behargarria da. ϕ denbora jakin batean unibertsoak duen V_ϕ bolumena da beste behagarri bat. Eredu honentzat Dirac-en behagarrien multzo oso bat da.

Bi hauen bidez \hat{p} materia dentsitatea (edo espazio-denboraren kurbadura \hat{R} eraiki daitezke). Teoria klasikoan hauek dibergenteak dira singularitatean, beraz singularitateetik "urrun" dagoen (v_0, ϕ_0) puntu batetik abiatu gaitzke, zeinean kurbadura oso txikia den Planck eskalarekin alderatuta, eta $\phi = \phi_0$ denean v_0 -n oso era zorrotzean definituta dagoen egoera semi-klasiko bat eraiki dezakegu. Egoera honen bilakaera denboran *atzera* eginez aztertzen badugu, ibilbide klasikoa jarraitu beharko luke materia dentsitatea eta kurbadura oso handiak izan arte. Halaxe gertatzen da. Baina

singularitatearen inguruan ere ibilbide klasikoa jarraitzen du, eta ez du hau gainditzen, materia dentsitatearen eta kurbaduraren itzarotako balioak dibergenteak izaten jarraitzen baitute.

4.3 Kiribilen kosmologia kuantikoa

Kiribilen kuantizazioan oinarritzko eragileak holonomiari eta triaden fluxuari dagozkien eragileen bidez emanik datoz. Espazioa homogeneoa denez espazioan askotan errepikatzen den “oinarritzko gelaxka” bat kontsidera dezakegu eta gelaxka honen dinamika azter dezakegu kasu honetan ere. Gelaxka inguratzen duen kiribil batengan eraiki dezagun holonomia $A_a^i = c\delta_a^i$ konexioarentzat. Holonomia abeldarra dugu hau identitate matrizearekiko proportzionala baita eta beraz, besterik gabe, lerroan zeharreko c -ren integral arrunta kontsidera dezakegu. Homogeneotasuna dela eta, c eta oinarritzko gelaxkaren (l deituko dugu) luzeraren arteko biderkadura da integrala. Beraz holonomia $h_l = \exp(ilc)$ dugu. Bestalde, c aldagaia (konexioa) ez da existitzen eragile kuantiko gisa kiribilen adierazpidean. p kantitatea (triada), aldiz, existitzen da eragile kuantiko bezala (homogeneotasuna dela eta ez da oso adierazgarria triadaren eta bere fluxuaren arteko ezberdintasuna). Hau harrigarria izan liteke. Akaso ezin genezake \hat{c} eragilea definitu \hat{h}_l -ren l -rekiko deribatua kontsideratuz? Erantzuna baiezkoa litzateke \hat{h}_l -ren adierazpena jarraitua balitz l -rekiko. Baina aukeratu duguna, kiribilen grabitazio kuantikoan gertatzen den bezala, ez da jarraitua izango. Hau garrantzitsua da, Stone-Von Neumann teoreman betetzen ez den hipotesia baita hori; eta honek tri-biala ez den zerbait gertatzea dakar. Sistema mekaniko kuantiko simple honetan adierazpen berriak ahalbidetzen ditu, kiribilen grabitazio kuantikoan gertatzen denaren esentzia gordetzen dutenak.

Ohiko mekanika kuantikoan adierazpen hau ez da oso naturala \hat{x} erabiltzen baitugu normalean eta ez bere esponentziala. Kiribilen grabitazioa kuantikoan, esan bezala, hau da dagoen adierazpen posible bakarra. Bi kontestuak oso ezberdinak dira, batez ere difeomorfismoekiko inbariantzia dela eta, beraz ez da harritzekoa adierazpen ezberdinak agertzea. Kosmologian, aldagai dinamikoen kopuru finitua izanik baliokideak diren adierazpideak ditugunez, aurreko ataleko teknika bera erabil dezakegu. Baina horrek kiribilen grabitazio kuantiko osoan agertzen diren portaerak imitatzeke aukera gutxi izango lituzke. Eredu kosmologikoentzat, beraz, ondorengo adierazpidea erabiliko dugu.

Adierazpidea eraikitzeke mekanika kuantikoan bezala Hilbert-en espazio zinematiko bat ezartzen da eragileak aztertzeke. Espazio horretan \hat{p} , biderkadura eragile bezala definitua, automatikoki autoadjuntua da. Hilbert-en espazio zinematikokoaren zati grabitazionala \hat{p} -ren autoegoerek osatzen duten oinarriaren bidez idatz dezakegu. Hots, $|\Psi\rangle$ egoera orokor batek,

$$|\Psi\rangle = \sum_i \Psi_i |p_i\rangle, \quad (4.23)$$

forma hartzen du, eta $|p_i\rangle$ oinarri ortonormal bat da,

$$\langle p_i | p_j \rangle = \delta_{ij}. \quad (4.24)$$

Orain artekoa mekanika kuantikoan gertatzen denaren modukoa da. Baina ezberdintasun garrantzitsu batekin: autoegoeren batura bat da egoera eta ez integral bat, eta beraien biderketa

Kronecker-en delta bat da eta ez Dirac-en delta bat. Beraz espazio honek ez du ohiko barne biderketa integragarriak diren funtzioen karratuentzat. Kiribiletan ohikoa den barne biderkaduraren antza gehiago du. Oinarrizko eragileek honela eragiten dute,

$$\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle \quad \text{eta} \quad \hat{h}_l|p\rangle = |p+l\rangle, \quad (4.25)$$

oinarrizko mekanika kuantikoan bezala. Hala ere, ez da jarraitua l -n $|p+l\rangle$ eta $|p+l'\rangle$ autoegoerek (4.24) ekuazioa bete behar baitute, hau da ortogonalak baitira $l \neq l'$ guztientzat, eta ez da posible era jarraituan joatea egoera batetik bestera (Kronecker-en delta dugu, ez Dirac-ena!). Beraz ezin dezakegu hartu \hat{h}_l -ren l -rekiko deribatua (honek \hat{c} eragilea definituko luke). Esan bezala, jarraitasun falta hau da Stone-Von Neumann teoreman betetzen ez den hipotesia, baita kosmologia bezalako kontestu simple batean ere.

Bestalde, lotura hamiltondarrak Wheeler-DeWitt teoriako itxura bera du, baina kasu honetan Θ eragile diferentziala ordezkatu egiten da v -ren bigarren ordeneko Θ *diferentzien* eragileagatik. Materiari dagokion zatia, berriz ez da aldatzen. Ondorengoa dugu lotura hamiltondarraren adierazpena kiribilen kosmologia kuantikoan (betiere $k = 0$ kasuarentzat),

$$\partial_\phi^2 \Psi = -\hat{\Theta} \Psi, \quad (4.26)$$

diferentzien eragilea hau izanik,

$$\hat{\Theta} \Psi(v, \phi) = -F(v) (C^+(v) \Psi(v+4, \phi) + C^0(v) \Psi(v, \phi) + C^-(v) \Psi(v-4, \phi)). \quad (4.27)$$

Bertan, $F(v)$, $C^\pm(v)$ eta $C^0(v)$ v -ren funtzioak dira:

$$F(v) \equiv K|v| \quad (4.28)$$

$$C^+(v) = \frac{3\pi KG}{8} |v+2| |v+1| - |v+3|, \quad (4.29)$$

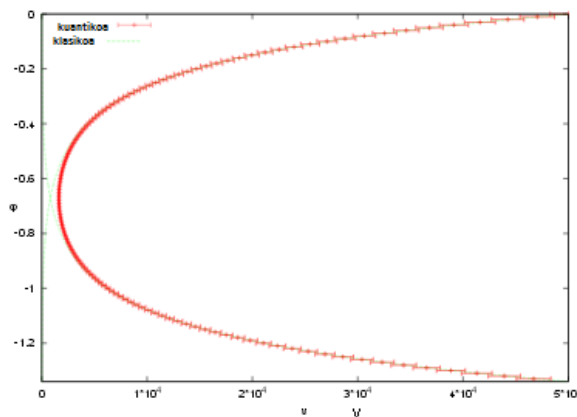
$$C^-(v) = C^+(v-4) \quad \text{eta} \quad C^0(v) = -C^+(v) - C^-(v). \quad (4.30)$$

Espero daitekeen bezala, Θ diferentzien eragilearen pausoa $\Delta l_{Pl}^2 = 4\sqrt{3}\pi\beta l_{Pl}^4$ tartek ematen digu ($l_{Pl} = \sqrt{G\hbar/c^3} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 10^{-35}m$ Planck-en luzera dugu). $\Delta = 4\sqrt{3}\pi\beta l_{Pl}^2$ azalera kuantua dugu, kiribilen grabitazio kuantikoaren arabera izan daitekeen azalera kantitate txikiena da hau (mekanika kuantikoan momentu angeluarrarekin gertatzen den antzera). Horrela, Δ zerorantz doanean, alegia, Planck-en eskalan diskretua izatea arbuiatzen denean, kiribilen kosmologia kuantikoaren limite bezala ageri zaigu Wheeler-DeWitt ekuazioa. Beraz, singularitatetik urrun kiribilen kosmologia kuantikoaren dinamikan diskretutasuna arbuigarria da guztiz. Baina eragina du Planck-en eskalan singularitatetik gertu.

Hasieran aipatutako kasuak kontsideratuko ditugu azkenik, hauen azterketek erakutsitako emaitza fisikoak laburbilduz [70, 71]:

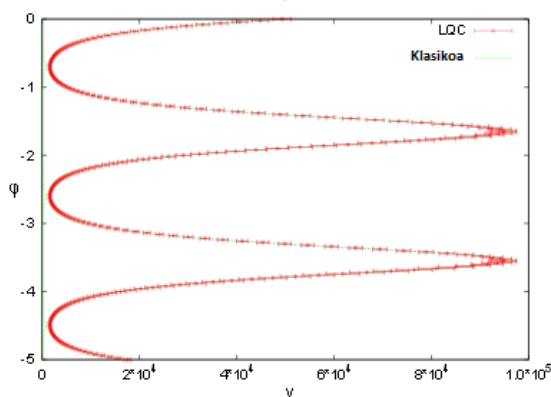
- $k = 0$ kasuan, singularitatea gainditzen da. "Errebote handia" (*Big Bounce*) deritzona gertatzen da materia dentsitate kritiko batera ($\rho_{krit} \sim 0.41\rho_{Pl}$) iristean ($\rho_{Pl} = \frac{c^5}{\hbar G} \approx 10^{96} \frac{kg}{m^3}$),

4.1 irudian ikusten den bezala. Singularitatera hurbildu ahala, teoria klasikoan eta Wheeler-DeWitt teorian ez bezala, efektu kuantikoek garrantzia hartzen dute eta aldaratze indar bat sortzen da, kolapsoa sahiesten duena. Singularitatea, ordea, ez da gainditzen pausu diskretuak direlako, behagarriak singularitate klasikoaren puntuan ongi definituta daudelako eta singularitatearen ondoren (aurretik) duten eboluzioa azter daitekeelako baizik.



IRUDIA 4.1: $k = 0$ kasua. ϕ denborarekiko V unibertsoaren bolumenaren eboluzioa irduikatzen du. Atzeranzko eboluzioan, eboluzio kuantikoak Big Bang adar klasikoa jarraitzen du dentsitate eta kurbadura baxua denean baina errebote kuantikoa du materia dentsitatea $\rho \sim 0.41\rho_{Pl}$ dentsitatean eta ibilbide klasikoa jarraitzen du, etorkizunerantz uzkuratzen dena [70].

- $k = 1$ kasua interesgarria da, teoria klasikoan berezko kolapso bat dagoelako V_{max} bolumen maximo batera (eta materia dentsitatearen balio minimo batera) iristean, 4.2 irudian ikusten den bezala. Bertan, *Big Bang* eta *Big Crunch* singularitateak gainditzen dira eta *Big Bounce* deritzonarengatik ordezkutzen dira, infinitua den ziklo klasiko bihurtuz. Kasu honetan ere dentsitate kritiko batera iristean gertatzen da *Big Bounce* deritzona, kasu honetan ere $\rho_{krit} \sim 0.41\rho_{Pl}$ balioa hartzen du.



IRUDIA 4.2: $k = 1$ kasua. ϕ denborarekiko V unibertsoaren bolumenaren eboluzioa irduikatzen du. Errebote kuantikoa berriz ere $\rho_{krit} \sim 0.41\rho_{Pl}$ dentsitatean gertatzen da. V_{max} bolumenera iristean, aldiz, kolapso klasiko bat gertatzen da. Big Bang eta Big Crunch singularitate klasikoak gainditzen direnez eboluzioa ziklikoa da. [70].

4.4 Eredu eraginkorrak

Geometriaren mekanika kuantikoko ideiak erabiliz, zuzenketa kuantiko nagusiak barneratzen dituzten ekuazio klasiko eraginkorrak lor daitezke. Espero daitekeen bezala, geometriari dagozkion efektu kuantikoek Einstein-en ekuazioaren (gogoratu adierazpen orokorra $G_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab}$ dugula) ezkerreko zatia aldatzea espero dugu, hau baita espazio-denboraren geometriari dagokiona. Hala ere, hemen kontsideratu ditugun kasu sinpleenetan, posible da zuzenketa kuantikoak dituen ekuazioa moldatzea zuzenketa horiek ekuazioaren eskuin aldera pasaz eta materiaren menpe idatziz. Berridazketa hau komenigarria da ekuazio eraginkorrak klasikoekin alderatzeko.

Argigarria da hori ikusteko unibertso lauaren ($k = 0$) kasua kontsideratzea. Klasikoki bi soluzio posible daude: bata *Big Bang*-ean hasi eta infinituraino zabaltzen dena eta bestea bolumen handiarekin hasi eta *Big Crunch* singularitatera iritsi arte uzkuertzen dena. Kasu honetan, ondorengo ekuazio eraginkorrak (4.18) ekuazio klasikoa ordezkatzeko du,

$$\mathcal{H}^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{krit}}\right). \quad (4.31)$$

ρ_{krit} aurreko atalean zehaztutakoa izanik. Ekuazio klasikoan, eskuineko zatia, $8\pi G\rho/3$, positiboa da, eta beraz \dot{a} ezin da nulua izan; unibertsoa betiko zabaltzen da *Big Bang*-etik hasita edo *Big Crunch*-era iritsi arte uzkuertzen da. Kiribilen kosmologia kuantikoko ekuazio eraginkorrean, bestalde, \dot{a} anulatu egiten da $\rho = \rho_{krit}$ denean, zeinean errebote kuantikoa gertatzen den. Gertaera honen iraganean unibertsoa uzkuertu egiten da eta etorkizunean zabaldu. Hau posible da kiribilen kosmologia kuantikoaren zuzenketa ρ/ρ_{krit} era naturalean baitator zeinu negatiboarekin. Hau ez da tribiala. Adibidez, brana-munduen eszenario estandarrean (*standard brane world scenario*) ere, Friedmann-en ekuazioak ρ/ρ_{krit} zuzenketa jasotzen du baina zeinu positiboarekin dator (ez bada norberak branen arteko tentsioa negatiboa izatera behartzen duela) eta beraz singularitatea ez da gainditzen [72, 73].

Inflazioaren garaian jada ρ/ρ_{krit} zuzenketa kuantikoa 10^{-11} -ren ordenekoa da, eta beraz guztiz arbuigarria da. Beraz justifikatuta dago inflazioan zehar erlatibitate orokor klasikoa erabiltzea.

Unibertso itxiaren kasuan ($k = 1$), berriz, ekuazio klasikoak $(\dot{a}/a)^2 = (8\pi G/3)(\rho - 3/8\pi G a^2)$ betetzen du. Prozedura bera erabiliz, ondorengo ekuazio eraginkorrak ordezkatzeko du ekuazio klasikoa,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \left(\frac{8\pi G}{3}(\rho - \rho_1(v))\right) \left[f(v) - \frac{\rho}{\rho_{krit}}\right] \quad (4.32)$$

$\rho_1(v)$ eta $f(v)$ bolumenaren funtzio espezifikoak izanik, eta a handietarako $\rho_1 \sim 3/8\pi G a^2$ izanik. Planck-en eskalatik kanpo, $f \approx 1$ eta $\rho/\rho_{krit} \approx 0$ dugu. Erreboteak \dot{a} anulatu denean gertatzen dira, hau da, $\rho(v)$ materiaren dentsitateak $\rho_1(v)$ edo $\rho_{krit}f(v)$ berdintzen duen v balioan. Dugun $\rho(v) = \rho_1(v)$ lehen erroa errebote klasikoari dagokiona da, eta $\rho(v) = \rho_{krit}f(v)$ bigarren erroa, errebote kuantikoari.

Ondorioak

Lan honetan grabitazio kuantikoaren teoria bat lortzeko egin diren saiakerak aipatu ditugu sarre-ran, garrantzitsuenak izan diren hiru bideek (“kobariantea”, “kanonikoa” eta “historien batura”) izan duten garapen historikoa. Horretarako motibazio gisa balio izan zuten ideiak aipatu ditugu, horien artean, mekanika kuantikoaren eta erlatibitate orokorraren arteko aldea bai kontzeptualki eta baita teknikoki, eta beste alde batetik erlatibitate orokorrean singularitateen existentzia bal-dintza orokorretan. Lanean zehar bide kanonikoa jarraitu da. Horretarako ezinbestekoa izan da espazio-denboraren $3+1$ deskonposaketa egitea.

Hamiltondar guztiz lotua lortu dugu erlatibitate orokor klasikoaren formulazio hamiltondarra ga-ratzean; bai aldagai dinamiko bezala metrika espaziala erabili dugun kasuan (ADM formalismoa), eta baita Ashtekar-en aldagaiak erabili ditugun kasuan (konexioen adierazpidea). Lehenengoan lau lotura agertu zaizkigu, difeomorfismoetako hiru loturak egoera fisikoak difeomorfismoekiko inba-rianteak izan behar direla adierazten digute, eta lotura hamiltondarrak egoera hauen eboluzioa. Bigarren kasuan, bi hauez gain, sarturiko aldagaiak barne-espazioko errotazioekiko askatasuna du-tenez, Gauss-en loturak ditugu, egoerak barne-espazioko errotazioekiko gauge inbarianteak izan behar direla adieraziz.

Kuantizazioa Dirac-en metodoaren bidez egin da bi kasuetan. Alde batetik ADM formalismotik abiatuta Wheeler-DeWitt ekuaziora iritsi gara. Bertan lotura hamiltondarra oso ekuazio diferen-tzial singularra da, zeinari oraindik ez zaion soluzio fisikorik aurkitu kontestu sinpleetatik harago. Hau da, Wheeler-DeWitt ekuazioa ez dago ongi definituta.

Bestetik, kiribilen kuantizazioan holonomiek funtsezko objektu matematikoak direla ikusi dugu. Holonomiak soilik konexioen funtzioak diren behagarrientzako oinarria dira. Izan ere, potentzial bektore batentzat barietate bateko kiribil posible guztien zeharreko holonomien aztarna ezagutzen badugu, balio horietatik abiatuz posible dela potentzialean dagoen informazio gauge inbariante guz-tia berreraikitzea. Hauen bidez grabitazioaren teoria kuantiko bateko behagarrientzako oinarria dugu. Kiribilen adierazpidean, uhin-funtzioen oinarria diskretua da, eta honek ondorio garrantzi-tsuak ditu. Hala ere, gain-osatua izatearen arazoa du oinarri honek. Hau gainditzeko espin-sareak erabiltzen dira, konexio bera eraikitzeke erabil daitezkeen adierazpide ezberdinak lotzen dituenak. Honek automatikoki ebazten ditu difeomorfismoetako eta Gauss-en loturak. Hala ere, lotura hamil-tondarrari dagokionez ez dago argi eragile kuantiko bezala nola eraiki behar den, eta are gutxiago honen interpretazio fisikoa zein den.

Bestalde, kosmologia klasikoan simetriak inposatzen zaizkio erlatibitate orokorrari, eredu kosmo-logikoak azaltzeko. FLRW metrika da gehien erabiliena, printzipio kosmologikoarekin bat baitator (unibertsoa eskala handian homogenea eta isotropoa dela). Kosmologia kuantikoan ere lan gehien

metrika honekin egin ohi da, alegia, maila klasikoan inposatzen dira simetriak, eta ondoren kuantizatzen da teoria.

Ikusi dugunez, Wheeler-DeWitt eredu kosmologikoak ez du teoria klasikoan agertzen den hasierako singularitatea gainditzen. Kiribilen grabitazio kuantikoan erabiltzen diren teknikak kosmologian aplikatuz, kiribilen kosmologia kuantikoa lortzen da. Honetan aurreko ereduarekiko fisika ezberdina agertzen da, aldagaien dimentsioa finitua izan arren, oinarria diskretua denez Stone-Von Neumann teoremako hipotesietako bat ez baitu betetzen. Kiribilen kosmologia kuantikon agertzen zaigun *diferentzien ekuazioa*-ren bidez, singularitate klasikoa gainditzen da efektu kuantikoak direla eta. Areago, ρ materia dentsitatea eta kurbadura ongi definiturik daude singularitatean eta behagarri hauen eboluzioa jarrai daiteke singularitatean zehar. Unibertso lauan ($k = 0$) singularitate klasikoa (*Big Bang*) gainditzen dela ikusi da. Unibertso itxian ($k = 1$) berriz, errebote klasikoa dugu, eta bi singularitate klasikoak (*Big Bang* eta *Big Crunch*) gainditzen dira; beraz ziklo klasiko bat dugu infinituan hedatzen dena. Eredu eraginkorrak eraikitzean ere singularitateak gainditzen dira.

Oraindik ez dago argi kiribilen kosmologia kuantikoan lorturiko emaitzen eta kiribilen grabitazio kuantikoaren artean dagoen lotura zein den, eta ea kiribilen kosmologia kuantikoak teoria grabitazional kuantikoaren aspektuak barneratzen dituen guztiz. Eredu kosmologiko sinpleenak kontsideratu dira orain arte, eta kiribilen kosmologia kuantikoaren gaztetasuna dela eta, oraindik asko dago ikertzeko eta ikasteko. Hala ere, egoera zailean zegoen kiribilen grabitazio kuantikoari hauspoa emateko balio izan du, emaitza garrantzitsuak baitira lortutakoak.

Ia aurreko mendearekin batera hasi zen grabitazio kuantikoaren teoria baten bilaketa. Oztopoak oztopo, zailtasunak zailtasun, aurrera darrai bilaketak; bidean emaitza batzuk utziz.

Bibliografia

- [1] A. Einstein. Die Feldgleichungen der Gravitation. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*.
- [2] A. Einstein. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik*, 322:891–921, 1905.
- [3] A. Einstein. Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig? *Annalen der Physik*, 323:639–641, 1905.
- [4] J.C. Maxwell. *On Physical Lines of Force*, volume 21. 1861.
- [5] U.J.L. Verrier. *Détermination nouvelle de l'orbite de Mercure et de ses perturbations*. 1843.
- [6] F.W. Dyson, A.S. Eddington eta C. Davidson. A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations Made at the Total Eclipse of May 29, 1919. *Royal Society of London Philosophical Transactions Series A*, 220:291–333, 1920.
- [7] J.A. Wheeler. *A Journey Into Gravity and Spacetime*. Henry Holt and Company, 1999.
- [8] M. Planck. Ueber das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum. *Annalen der Physik*, 309:553–563, 1901.
- [9] L. de Broglie. Recherches sur la théorie des quanta. *Annales de Physique*, 10, 1924.
- [10] E. Schrödinger. Quantisierung als Eigenwertproblem (Dritte Mitteilung: Störungstheorie, mit Anwendung auf den Starkeffekt der Balmerlinien). *Annalen der Physik*, 385:437–490, 1926.
- [11] E. Schrödinger. Quantisierung als Eigenwertproblem (Erste Mitteilung). *Annalen der Physik*, 384:361–376, 1926.
- [12] E. Schrödinger. Quantisierung als Eigenwertproblem (Vierte Mitteilung). *Annalen der Physik*, 386:109–139, 1926.
- [13] E. Schrödinger. Quantisierung als Eigenwertproblem (Zweite Mitteilung). *Annalen der Physik (1900)*, 384:489–527, 1926.
- [14] M. Born. Über quantenmechanik. *Zeitschrift für Physik*, 26:379–395, 1924.
- [15] W. Heisenberg. Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik. *Zeitschrift für Physik*, 43:172–198, 1927.
- [16] A. Einstein. *Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation*. Verlag d. Königl. Akad. d. Wiss., 1916.

-
- [17] O. Klein. Zur fünfdimensionalen darstellung der relativitätstheorie. *Zeitschrift für Physik*, 46: 188–208, 1928.
- [18] L. Rosenfeld. Zur quantelung der wellenfelder. *Ann. Phys. (Leipzig)*, 5:113–152, 1930.
- [19] M. Fierz.
- [20] M. Fierz eta W. Pauli. Über relativistische Feldgleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetischen Feld. *Helvetica Physica Acta*, 12:297–300, 1939.
- [21] M. Bronstein. Quantentheorie schwacher gravitationsfelder. *Phys. Z. Sowjetunion*, 9:140–157, 1936.
- [22] S.W. Hawking eta G.F.R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge University Press, Cambridge, 1973.
- [23] S.W. Hawking. Black hole explosions. *Nature*, 248:30–31, 1974.
- [24] C. Rovelli. Notes for a brief history of quantum gravity. *The Ninth Marcel Grossmann Meeting*, 1:742–768, 2000.
- [25] L. Smolin. *Three Roads to Quantum Gravity*. Basic Books, New York, 2002.
- [26] M. Bojowald. *Once Before Time: A Whole Story of the Universe*. Knopf Doubleday Publishing Group, New York, 2010.
- [27] S.N. Gupta. Quantization of Einstein’s gravitational field: general treatment. *Proc.Phys.Soc.*, A65:608–619, 1952.
- [28] R. Feynman. Quantum theory of gravitation. *Acta Physical Polonica*, 24:697, 1963.
- [29] L.D. Faddeev eta V.N. Popov. Feynman diagrams for the yang-mills field. *Physics Letters B*, 25:29 – 30, 1967.
- [30] B.S. DeWitt. Quantum theory of gravity. ii. the manifestly covariant theory. *Phys. Rev.*, 162: 1195–1239, 1967.
- [31] B.S. DeWitt. Quantum theory of gravity. iii. applications of the covariant theory. *Phys. Rev.*, 162:1239–1256, 1967.
- [32] G. t’Hooft. Renormalizable lagrangians for massive yang-mills fields. *Nuclear Physics B*, 35: 167–188, 1971.
- [33] G. t’Hooft eta M. Veltman. Regularization and renormalization of gauge fields. *Nuclear Physics B*, 44:189–213, 1972.
- [34] S. Deser eta P. van Nieuwenhuizen. One-loop divergences of quantized einstein-maxwell fields. *Phys. Rev. D*, 10:401–410, 1974.
- [35] S. Deser eta P. van Nieuwenhuizen. Nonrenormalizability of the quantized dirac-einstein system. *Phys. Rev. D*, 10:411–420, 1974.
- [36] P.G. Bergmann. Non-linear field theories. *Phys. Rev.*, 75:680–685, 1949.

- [37] P.G. Bergmann eta J.H.M. Brunings. Non-linear field theories ii. canonical equations and quantization. *Rev. Mod. Phys.*, 21:480–487, 1949.
- [38] P.A.M. Dirac. Generalized Hamiltonian dynamics. *Can.J.Math.*, 2:129–148, 1950.
- [39] P.G. Bergmann. Introduction of « true observables » into the quantum field equations. *Il Nuovo Cimento*, 3:1177–1185, 1956.
- [40] P.A.M. Dirac. Generalized Hamiltonian Dynamics. *Royal Society of London Proceedings Series A*, 246:326–332, 1958.
- [41] P.A.M. Dirac. Fixation of coordinates in the hamiltonian theory of gravitation. *Phys. Rev.*, 114:924–930, 1959.
- [42] A. Peres. On cauchy’s problem in general relativity - ii. *Il Nuovo Cimento Series 10*, 26:53–62, 1962.
- [43] R. Arnowitt, S. Deser eta C.W. Misner. Dynamical structure and definition of energy in general relativity. *Phys. Rev.*, 116:1322–1330, 1959.
- [44] B.S. DeWitt. Quantum theory of gravity. i. the canonical theory. *Phys. Rev.*, 160:1113–1148, Aug 1967.
- [45] A. Ashtekar. New variables for classical and quantum gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 57:2244–2247, Nov 1986.
- [46] T. Jacobson eta L. Smolin. Nonperturbative quantum geometries. *Nuclear Physics B*, 299: 295 – 345, 1988.
- [47] C. Rovelli eta L. Smolin. Knot theory and quantum gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 61:1155–1158, Sep 1988.
- [48] C. Rovelli eta L. Smolin. Loop space representation of quantum general relativity. *Nuclear Physics B*, 331:80 – 152, 1990.
- [49] S.W. Hawking. *General Relativity, An Einstein Centenary Survey*. 1979.
- [50] M.P. Reisenberger eta C. Rovelli. “sum over surfaces” form of loop quantum gravity. *Phys. Rev. D*, 56:3490–3508, 1997.
- [51] C. Rovelli. Black hole entropy from loop quantum gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 77:3288–3291, 1996.
- [52] K.V. Krasnov. Geometrical entropy from loop quantum gravity. *Phys. Rev. D*, 55:3505–3513, 1997.
- [53] A. Ashtekar, J. Baez, A. Corichi eta K.V. Krasnov. Quantum geometry and black hole entropy. *Phys. Rev. Lett.*, 80:904–907, 1998.
- [54] A. Strominger eta C. Vafa. Microscopic origin of the Bekenstein-Hawking entropy. *Phys.Lett.*, B379:99–104, 1996.

- [55] J. Maldacena eta A. Strominger. Black hole greybody factors and d-brane spectroscopy. *Phys. Rev. D*, 55:861–870, 1997.
- [56] J.B. Hartle and S.W. Hawking. Wave function of the universe. *Phys. Rev. D*, 28:2960–2975, Dec 1983.
- [57] A.O. Barvinsky, A.Y. Kamenshchik, C. Kiefer eta C.F. Steinwachs. Tunneling cosmological state revisited: Origin of inflation with a nonminimally coupled standard model higgs inflaton. *Phys. Rev. D*, 81:043530, 2010.
- [58] C. Kiefer. Wave packets in minisuperspace. *Phys. Rev. D*, 38:1761–1772, Sep 1988.
- [59] M. Bojowald. Loop quantum cosmology. I. Kinematics. *Class.Quant.Grav.*, 17:1489–1508, 2000.
- [60] S. Tsujikawa, P. Singh eta R. Maartens. Loop quantum gravity effects on inflation and the cmb. *Classical and Quantum Gravity*, 21:5767, 2004.
- [61] R.M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984.
- [62] D. Hilbert. Die grundlagen der physik. *Konigl. Gesell. d. Wiss. Göttingen, Nachr. Math.-Phys. Kl.*, pages 395–407, 1915.
- [63] R. Gambini eta J. Pullin. *Un Primer Curso en Gravedad Cuántica de Lazos*. Reverté Ediciones, 2012.
- [64] G. Barbero eta J. Fernando. Real ashtekar variables for lorentzian signature space-times. *Phys. Rev. D*, 51:5507–5510, May 1995.
- [65] P.A.M. Dirac. *Lectures on Quantum Mechanics*. Dover Publications, 2001.
- [66] S.M. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison-Wesley Longman, Incorporated, 2004.
- [67] R. Giles. Reconstruction of gauge potentials from wilson loops. *Phys. Rev. D*, 24:2160–2168, Oct 1981.
- [68] URL http://en.wikipedia.org/wiki/Spin_network.
- [69] A. Ashtekar, T. Pawłowski eta P. Singh. Quantum Nature of the Big Bang: Improved dynamics. *Phys.Rev.*, D74:084003, 2006.
- [70] A. Ashtekar. Loop Quantum Cosmology: An Overview. *Gen.Rel.Grav.*, 41:707–741, 2009.
- [71] D. Brizuela, D. Cartin eta G. Khanna. Numerical techniques in loop quantum cosmology. *SIGMA*, 8:001, 2012.
- [72] J. Khoury, B.A. Ovrut, P.J. Steinhardt eta N. Turok. Ekpyrotic universe: Colliding branes and the origin of the hot big bang. *Phys. Rev. D*, 64:123522, 2001.
- [73] J. Khoury, B.A. Ovrut, N. Seiberg, P.J. Steinhardt eta N. Turok. From big crunch to big bang. *Phys. Rev. D*, 65:086007, Apr 2002.