Matrices doblemente estocásticas

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas

Oihane Gallo Fernández

Trabajo dirigido por
Ion Zaballa

Leioa, 2 de Septiembre de 2014

Índice general

Introducción

Este trabajo está orientado al estudio de matrices doblemente estocáticas, partiendo, para ello, de definiciones e ideas fundamentales. Con el fin de poder trabajar con ellas en diferentes aplicaciones presentamos un primer capítulo basado en las matrices no negativas, donde se hace un estudio de sus propiedades y resultados más conocidos incluyendo demostraciones y, en particular, el teorema más importante de este primer capítulo como es el *Teorema de Perron-Frobenious*. Este teorema sobre matrices no negativas, fue probado, para matrices estrictamente positivas, por Oskar Perron (1880-1975) en 1907 y fue extendido por Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917) a las matrices con entradas no negativas e irreducibles en 1912. El teorema garantiza la existencia de un valor propio positivo que acota en módulo al resto de valores propios de la matriz y que, además, dicho valor propio tiene asociado un vector propio no negativo. Este es un hecho que juega un papel importante como instrumento para conseguir condiciones de existencia, unicidad, positividad y estabilidad de las soluciones en modelos lineales. A parte de las pruebas mencionadas podemos encontrar otras diferentes. Entre ellas, la más conocida, en particular, por los economistas, es la de Wieldant (1950) que utiliza el teorema del punto fijo de Brouwer y que se popularizó por el trabajo de Debreu y Herstein en 1953. Otra alternativa para dar la demostración de dicho teorema es el uso de la Teoría de Juegos. Encontramos diferentes aplicaciones para este teorema en matrices no negativas, en particular, también se aplica en matrices estocásticas, resultado que se ve en el segundo capítulo, en las cadenas de Markov así como en operadores compactos o en la teoría algebraica de grafos. En un segundo capítulo, trabajaremos directamente con las matrices doblemente estocásticas. De nuevo, estudiaremos diferentes conceptos así como resultados importantes. Entre ellos cabe destacar el *Teorema de Hardy, Littlewood y Pólya*, expuesto en 1929. Este teorema supone una importante relación entre las matrices doblemente estocásticas y la mayorización para cuya demostración se requiere un resultado expuesto por Muirhead en 1903. Otro de los grandes teoremas de este capítulo es el *Teorema de Birkhoff*. Entre la diferentes pruebas que podemos encontrar para este teorema están las siguientes: Berge (1958, 1959, 1971), Dulmage y Halperin (1955), Hoffman y Wielandt (1953), von Neumann (1953), Mirsky (1958) o Dantzig (1951).

Este último da un algoritmo para solucionar el problema del transporte, solución que guía el teorema de Birkhoff. Muchas de las demostraciones anteriores tienen una orientación combinatoria o geométrica. Ambos capítulos nos permiten establecer una relación entre nuestra teoría a desarrollar y la teoría de grafos. De hecho, muchas de las demostraciones hechas a lo largo de todo el trabajo, se podrían hacer también mediante el uso de grafos y sus propiedades. Por último nos encontramos con un capítulo más práctico donde vemos diferentes aplicaciones de las matrices doblemente estocásticas y de la mayorización. Las áreas donde se pueden aplicar estas matrices son muy diversas. Podemos trabajar en diferentes ámbitos de las matemáticas como es el análisis combinatorio, donde incluimos la Teoría de Grafos, la geometría, la Teoría de Juegos o el análisis númerico. Además encontramos aplicaciones estocásticas en probabilidad y estadística. No podemos olvidar mencionar las aplicaciones a la economía y al mundo de la comunicación.

Capítulo 1

Matrices no negativas

1.1. Notación, algunas definiciones y resultados básicos

Nuestro objetivo en este primer capítulo es demostrar el teorema de Perron-Frobenious para el cual se requieren conceptos previos. Son estos mismos conceptos y propiedades de las matrices no negativas los que veremos en este primer apartado.

La terminología y la notación que se aplica a lo largo de toda la memoria es la que se expone a continuación.
$\mathbb{R}$ denota el conjunto de los números reales; $\mathbb{C}$ es el conjunto de los números complejos; $\mathbb{P}$ indica el conjunto de números no negativos. La letra $\mathbb{F}$ nos indica que trabajamos con $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Si nos encontramos con los términos $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{P}^n$, los conjuntos son los mismos salvo que trabajamos con vectores de n componentes, representados con letras minúsculas en negrita. Los vectores con los que trabajaremos serán vectores columna, salvo en la Sección (2.2), que se utilizarán vectores fila. Para un conjunto cualquiera S, denotamos $M_{m,n}(S)$ al conjunto de matrices no negativas $m \times n$ con entradas de S. Si $m = n$, escribimos $M_n(S)$.
Las matrices las representaremos con letras mayúsculas. Dado $A = (a_{ij})$ tenemos que A es la matriz cuya entrada (i, j) denotamos por a_{ij}.
La fila i-ésima y la columna j-ésima de una matriz A se denota A_i, A^j, respectivamente. Dada una potencia de la matriz A, por ejemplo, A^k, denotamos a la entrada (i, j) de dicha matriz como $a_{ij}^{(k)}$.
A la matriz identidad, aquella que tiene entradas 1 en su diagonal y cero en el resto, $n \times n$ se denota por I_n o, en ocasiones, simplemente por I.

Definición 1. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $m \times n$. Diremos que A es una *matriz no negativa* si $a_{ij} \geq 0$ para todo i, j. Escribiremos $A \geq 0$.

Así, sean dos matrices A y B, se dice que $A \geq B$ si $A - B \geq 0$.

Definición 2. Sea A una matriz con m filas y n columnas. La *matriz traspuesta* de A, que denotamos por A^T, se define como

$$(a^T)_{ij} = a_{ji}, \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m.$$

Esto es lo mismo que decir que, el elemento a_{ji} de la matriz original A se convertirá en el elemento a_{ij} de la matriz A^T.

Definición 3. Sea A una matriz $n \times n$. Entonces, A es *invertible* si existe otra matriz cuadrada de orden n, llamada *inversa* de A y que denotamos A^{-1}, y tal que se cumple que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Definición 4. Sea A una matriz $n \times n$. Entonces A es una *matriz ortogonal* si su matriz inversa coincide con su matriz traspuesta, es decir, si se cumple que:

$$A^{-1} = A^T,$$

o alguna de las siguientes,

$$AA^T = I_n, \quad A^T A = I_n.$$

Definición 5. Sea A una matriz compleja $n \times n$. Entonces A es una *matriz unitaria* si se satisface que:

$$A^*A = AA^* = I_n,$$

donde A^* denota el traspuesto conjugado de A. Así pues, A es unitaria si su matriz inversa coincide con su matriz traspuesta conjugada, es decir,

$$A^{-1} = A^*.$$

Definición 6. Una *matriz de permutación* P es una matriz que tiene las mismas filas de la matriz identidad, pero no necesariamente en el mismo orden.
Una matriz de permutación resulta del intercambio de filas de una matriz identidad.
La matriz P satisface que:

$$P^T P = PP^T = I.$$

Definición 7. Una *matriz de permutación generalizada* es una matriz con el mismo número de entradas nulas que una matriz de permutación, esto es, sólo tiene una entrada no nula en cada fila o columna. Estas entradas, a diferencia de una matriz de permutación, pueden ser distintas de 1 y necesariamente no nulas.

Definición 8. Si $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ es *valor propio* de A si $\exists \mathbf{v}_0 \in \mathbb{C}^n, \mathbf{v}_0 \neq 0$, tal que

$$A\mathbf{v}_0 = \lambda_0 \mathbf{v}_0 \Longleftrightarrow (\lambda_0 I_n - A)\mathbf{v}_0 = 0.$$

$\mathbf{v}_0$ es el *vector propio* de A asociado a λ_0.

Definición 9. El valor propio λ_0 tiene asociado un *subespacio propio* que definimos como:

$$S_{\lambda_0} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n : A\mathbf{x} = \lambda_0 \mathbf{x}\} = \mathrm{Ker}(\lambda_0 I_n - A).$$

Definición 10. Definimos la *multiplicidad geométrica de* λ_0 como:

$$mg(\lambda_0) = \dim \mathrm{Ker}(\lambda_0 I_n - A),$$

es decir, la dimensión del subespacio propio asociado a λ_0.

Definición 11. Definimos el polinomio característico de una matriz A como:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(\lambda I_n - A) \\ &= \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \cdots + p_{n-1}\lambda + p_n. \end{aligned}$$

Factorizándolo en $\mathbb{C}$ obtenemos,

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdot \cdots \cdot (\lambda - \lambda_s)^{m_s},\ \lambda_i \neq \lambda_j.$$

Definición 12. Se define la *multiplicidad algebraica de* λ_i como:

$$ma(\lambda_i) = m_i.$$

Teorema 1.1.1. *(Forma canónica de Jordan). Para* $A \in \mathbb{F}^{n\times n}(\mathbb{F} = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C})$, *existe* $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *invertible tal que*

$$T^{-1}AT = Diag(J_{n_1}(\lambda_1), J_{n_2}(\lambda_2), \ldots, J_{n_s}(\lambda_s)),$$

y

$$J_{n_i}(\lambda_i) = Diag(J_{n_{i1}}(\lambda_i), J_{n_{i2}}(\lambda_i), \ldots, J_{n_{ir_i}}(\lambda_i)),$$

con

$$J_{n_{ij}}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n_{ij}\times n_{ij}}.$$

J, conocida como matriz de Jordan *de A, es única salvo el orden de los bloques.*

A la secuencia $(n_{i1}, \ldots, n_{ir_i})$ la denominamos multiplicidades parciales de λ_i, y tienen las siguientes propiedades:

- $ma(\lambda_i) = n_i = n_{i1} + \cdots + n_{ir_i}$.
- $mg(\lambda_i) = r_i$.

Sea $\mathcal{S}_r = \mathrm{Ker}(A - \lambda I)^r$, donde r varía a lo largo del conjunto de números enteros no negativos. Se verifica que

$$0 = \mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_{p+1} = \ldots, \tag{1.1}$$

para algún entero positivo p.

Definición 13. Al subespacio $\mathcal{S}_r$ $(1 \leq r \leq p)$ que verifica (1.1), se le denomina *subespacio propio generalizado* de A de orden r asociado al valor propio λ. Además, sea $\mathbf{x}$ un elemento no nulo tal que $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_r$ pero $\mathbf{x} \notin \mathcal{S}_{r-1}$, decimos que $\mathbf{x}$ es un *vector propio generalizado* de A de orden r asociado al valor propio λ, esto es,

$$\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I)^r, \quad \text{pero} \quad \mathbf{x} \notin \mathrm{Ker}(A - \lambda I)^{r-1}.$$

Definición 14. Los *divisores elementales* son polinomios íntimamente relacionados con la matriz de Jordan de A y se definen como:

$$(\lambda - \lambda_1)^{n_{11}}, \ldots, (\lambda - \lambda_1)^{n_{1s_1}}, \ldots, (\lambda - \lambda_n)^{n_{n1}}, \ldots, (\lambda - \lambda_n)^{n_{ns_n}},$$

siendo los λ_i los diferentes valores propios de la ecuación característica.

Definición 15. Una matriz X se dice que es *cogrediente* (su palabra original es el término inglés *cogredient*) con otra matriz Y si existe una matriz de permutación P tal que $X = P^T Y P$.

1.2. Matrices irreducibles

Definición 16. Sea A una matriz no negativa $n \times n$, $n \geq 2$. Se dice que A es *reducible* si es cogrediente con una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

donde B y D son submatrices cuadradas.
En caso contrario, se dice que A es *irreducible*.

Observación 1. Las matrices 1×1 son irreducibles por definición.

Ejemplo 1. Vamos a ver que si $A = (a_{ij}) \geq 0$ es una matriz $n \times n$ irreducible y $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \geq 0$, entonces $A\mathbf{x} = 0$ implica que $\mathbf{x} = 0$. Lo probamos: Supongamos que $x_k > 0$ para algún k. Entonces,

$$0 = (A\mathbf{x})_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq a_{ik} x_k.$$

Como hemos supuesto $x_k > 0$, entonces tenemos que $a_{ik} = 0$ para todo i. Esto es lo mismo que decir que la matriz A tiene una columna de ceros y, por tanto, A es reducible, lo cual es absurdo. Por consiguiente, $\mathbf{x} = 0$.

Proposición 1.2.1. *Sea A una matriz no negativa irreducible. Su inversa es no negativa si y sólo si A es una matriz de permutación generalizada.*

Demostración. Sea $A = (a_{ij}) \in M_n(P)$ y supongamos que $A^{-1} = (b_{ij})$ es no negativa. Así,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{it} b_{tj} = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, ..., n.$$

Si la fila i-ésima de A tiene exactamente k entradas positivas en posiciones (i, j_s), con $s = 1, 2, ..., k$ y $j \neq i$, entonces b_{tj} debe ser cero para $t = j_1, \ldots, j_k$. O lo que es lo mismo, A^{-1} debe contener una submatriz nula de dimensión $k \times (n-1)$. Pero si k fuera mayor que 1, entonces claramente el determinante de A^{-1} sería 0. Por lo que k no puede ser mayor de 1. Como A tiene a lo sumo una entrada positiva en cada fila, y además es no singular, debe ser una matriz de permutación generalizada. $\square$

A continuación vamos a probar una importante propiedad de las matrices irreducibles.

Teorema 1.2.2. *Sea A es una matriz irreducible no negativa $n \times n$, $n \geq 2$, y sea $\mathbf{y}$ un vector de $\mathbb{R}^n$ no negativo con exactamente k componentes positivas, $1 \leq k \leq n-1$, entonces $(I_n + A)\mathbf{y}$ tiene más de k componentes positivas.*

Demostración. Supongamos que $\mathbf{y}$ tiene k componentes positivas y el resto todas 0.
Sea P una matriz de permutación tal que las primeras k componentes de $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ son positivas y el resto nulas. Como $A \geq 0$, el número de componentes nulas de $(I_n + A)\mathbf{y} = \mathbf{y} + A\mathbf{y}$ no puede ser mayor que $n - k$.
Supongamos que exactamente son $n - k$. Esto significaría que $(A\mathbf{y})_i = 0$ cuando $y_i = 0$, esto es, $(PA\mathbf{y})_i = 0$ cuando $(P\mathbf{y})_i = 0$. Pero $P\mathbf{y} = \mathbf{x}$, y entonces asegurar que $(I_n + A)\mathbf{y}$ tiene tantos 0's como $\mathbf{y}$ es equivalente a decir que, $(PAP^T\mathbf{x})_i = 0$ para $i = k+1, k+2, \ldots, n$.
Sea $B = (b_{ij}) = PAP^T$. Entonces, $(B\mathbf{x})_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{k} b_{ij} x_j = 0$ para $i = k+1, k+2, \ldots, n$. Pero $x_j > 0$ para $1 \leq j \leq k$ y por lo tanto, $b_{ij} = 0$ para $i = k+1, k+2, \ldots, n$ y $j = 1, 2, \ldots, k$. Por lo que si $(I_n + A)\mathbf{y}$

tiene el mismo número de componentes nulas que $\mathbf{y}$, por lo que la matriz A tendría que ser reducible, lo cual es una contradicción.

□

Corolario 1.2.3. *Sea A es una matriz irreducible $n \times n$, y sea $\mathbf{y}$ un vector no nulo y no negativo, entonces $(I_n + A)^{n-1}\mathbf{y} > 0$.*

Demostración. Supongamos que $\mathbf{y}$ tiene k componentes positivas. Por el Teorema 1.2.2, sabemos que $(I_n + A)\mathbf{y}$ tiene mayor número de componentes positivas, es decir, tiene al menos $k + 1$ componentes positivas. Sea ahora $\mathbf{y}' = (I_n + A)\mathbf{y}$ con al menos $k+1$ componentes positivas, volviendo a aplicar el Teorema 1.2.2, tenemos que $(I_n + A)\mathbf{y}' = (I_n + A)^2\mathbf{y}$ va a tener al menos $k + 2$ componentes positivas. Repitiendo este proceso $n - 1$ veces llegamos a que $(I_n + A)^{n-1}\mathbf{y}$ tiene al menos $k + n - 1$ componentes positivas.
Dado que $\mathbf{y} \geq 0, \mathbf{y} \neq 0$, entonces aseguramos que k va a ser al menos 1. Entonces, tenemos que $n + k - 1 \geq n$, dándose la igualdad para $k = 1$.
De esta forma, si $k = 1$, es en este último paso donde aseguramos que $(I_n + A)^{n-1}\mathbf{y} > 0$. Si $k > 1$ existirá un exponente $p < n-1$ tal que $(I_n+A)^p\mathbf{y} > 0$, pero, por la misma razón, también se verificará para $n - 1$.
Con todo ello queda probado que,

$$(I_n + A)^{n-1}\mathbf{y} > 0.$$

□

Proposición 1.2.4. *Sea A una matriz $n \times n$ no negativa. Entonces A es irreducible si y sólo si $(I_n + A)^{n-1} > 0$.*

Para probar esta proposición vamos a ver primero un par de propiedades de las matrices irreducibles:

Lema 1.2.5. *Si A^p es irreducible para algún $p > 1$, entonces A es irreducible.*

Demostración. Sea A^p irreducible para algún $p > 1$. Supongamos que A es reducible. Esto es, existe una matriz de permutación P tal que

$$PAP^T = \begin{pmatrix} B_1 & C_1 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix},$$

con B_1 y D_1 matrices cuadradas.
Además $PAP^TPAP^T = PA^2P^T$, y, entonces

$$PA^2P^T = \begin{pmatrix} B_2 & C_2 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix},$$

donde B_2 y D_2 son también matrices cuadradas. De forma más general, para alguna matriz C_t y matrices cuadradas B_t, D_t, se tiene que

$$PA^tP^T = \begin{pmatrix} B_t & C_t \\ 0 & D_t \end{pmatrix}.$$

Es decir, hemos visto que si A es reducible, A^p es reducible para todo p, lo cual contradice la hipótesis y, así, queda probado que A es irreducible. □

Lema 1.2.6. *Sea $(I_n + A)$ irreducible. Entonces A es irreducible.*

Demostración. Sea $(I_n + A)$ irreducible. Supongamos que A es reducible, es decir, existe una matriz de permutación P tal que

$$PAP^T = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

con B y D matrices cuadradas.
Entonces,

$$\begin{aligned} P(I_n + A)P^T &= PI_nP^T + PAP^T \\ &= I_n + PAP^T \\ &= I_n + \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B + I_{n_1} & C \\ 0 & D + I_{n_2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es decir $(I_n + A)$ sería reducible, lo cual es una contradicción.
Por lo tanto, queda probado que A es irreducible. □

Ya podemos demostrar la Proposición 1.2.4.

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $\mathbf{y} \geq 0$, $\mathbf{y} \neq 0$ un vector arbitrario de $\mathbb{R}^n$. Por el Corolario 1.2.3,

$$(I_n + A)^{n-1}\mathbf{e}_j > 0,$$

para $j = 1, 2, \ldots, n$. Esto es lo mismo que decir que todas las columnas de $(I_n + A)^{n-1}$ son positivas, es decir,

$$(I_n + A)^{n-1} > 0.$$

$\Leftarrow$) Sea ahora nuestra hipótesis que $(I_n + A)^{n-1} > 0$. Esto es lo mismo que decir que $(I_n + A)^{n-1}$ es irreducible. Por el Lema 1.2.5 tenemos que $(I_n + A)$ es irreducible. Y, ahora, por el Lema 1.2.6 tenemos que A es irreducible.
Por tanto quedan probadas las dos implicaciones de la Proposición. □

Teorema 1.2.7. *Todo vector propio no negativo de una matriz irreducible no negativa debe ser estrictamente positivo.*

Demostración. Supongamos que

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x},$$

donde $A \geq 0$ es irreducible y $\mathbf{x} \geq 0$, $\mathbf{x} \neq 0$. Vamos a ver que debe ser estrictamente mayor que 0. Como $A \geq 0$ y $\mathbf{x} \geq 0$, λ debe ser no negativo.
Entonces, tenemos

$$(I_n + A)\mathbf{x} = (1+\lambda)\mathbf{x}.$$

Si $\mathbf{x}$ tiene k componentes nulas, $1 \leq k < n$, entonces $(1+\lambda)\mathbf{x}$, también deberá tener k componentes nulas, aunque por el Teorema 1.2.2, $(I_n + A)\mathbf{x}$ hemos visto que tendrá menos de k componentes nulas, lo cual es contradictorio. Por lo tanto, concluimos que $\mathbf{x}$ debe ser positivo. □

Teorema 1.2.8. *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada no negativa. Entonces A es irreducible si y sólo si para cada (i, j) existe un entero k tal que $a_{ij}^{(k)} > 0$.*

Demostración. Tenemos que probar la doble implicación.
Por un lado, suponemos que A es irreducible. Aplicando la Proposición 1.2.4, sabemos que $(I_n + A)^{n-1} > 0$.
Definimos, ahora, $B = (b_{ij}) = (I_n + A)^{n-1}A$. Dado que $(I_n + A)^{n-1} > 0$ y A es irreducible, necesariamente $B > 0$. En caso contrario, A debería tener una columna nula, lo cual contradice la irreducibilidad de A.
Sea

$$B = A^n + c_{n-1}A^{n-1} + ... + c_2A^2 + c_1A.$$

Entonces,

$$b_{ij} = a_{ij}^{(n)} + c_{n-1}a_{ij}^{(n-1)} + ... + c_2a_{ij}^{(2)} + c_1a_{ij} > 0,$$

para todo (i, j). Por tanto, va a existir un entero k con $1 \leq k \leq n$ y tal que $a_{ij}^{(k)} > 0$.
Para demostrar el recíproco, vamos a probar que si A es reducible, entonces $a_{ij}^{(k)} = 0$ para algún (i, j), y para cualquier k entero.
Suponemos que A es una matriz reducible $n \times n$ y existe P matriz de permutación tal que

$$P^TAP = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

donde B es una submatriz $s \times s$. Pero, entonces para todo i, j que cumpla que $s \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq s$, la entrada (i, j) de P^TA^kP es nula para cualquier k entero. Podemos obtener P^TA^kP multiplicando k veces P^TAP, esto es,

$P^T APP^T AP \dots P^T AP$. En efecto, por ser P una matriz de permutación se tiene que $PP^T = I$, por lo que nos queda $P^T A^k P$ que será de la forma

$$\begin{pmatrix} B_k & C_k \\ 0 & D_k \end{pmatrix},$$

con B_k y D_k matrices cuadradas y donde la entrada (i, j) es nula.

$\square$

1.3. La función de Collatz-Wielandt

Para probar el teorema de Perron-Frobeniuos usaremos la función de Collatz-Wielandt, la cual vamos a estudiar a continuación.
Recordemos que $\mathbb{P}^n$ denota el conjunto de los vectores no negativos de n componentes. Sea, ahora, $\mathbb{E}^n$ un subconjunto de $\mathbb{P}^n$ definido por:

$$\mathbb{E}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{P}^n | \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

Definición 17. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $n \times n$ irreducible no negativa. Denotamos con f_A la función $f_A : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}$ definida por

$$f_A(\mathbf{x}) = \min_{x_i \neq 0} \frac{(A\mathbf{x})_i}{x_i},$$

para todo $\mathbf{x}$ no nulo, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{P}^n$.
A la función f_A la llamamos *función de Collatz-Wielandt* asociada con A.

Definición 18. Sea una función $f : V \longrightarrow W$, entre dos subconjuntos de espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{F}$. Entonces se dice que f es una *función homogénea de grado k* si se verifica:

$$f(\alpha\mathbf{x}) = \alpha^k \mathbf{x}, \quad \forall \alpha \neq 0 \in \mathbb{F}, \quad \forall \mathbf{x} \in V.$$

Teorema 1.3.1. *Sea A una matriz irreducible no negativa y sea f_A la función de Collatz-Wielandt asociada a A. Entonces se verifica:*

(i) *la función f_A es homogénea de grado 0;*

(ii) *si $\mathbf{x}$ es no negativo y no nulo, y ρ es el mayor número real para el cual se cumple que*
$$A\mathbf{x} - \rho\mathbf{x} \geq 0,$$
entonces tenemos que $\rho = f_A(\mathbf{x})$;

(iii) *sea $\mathbf{x} \in \mathbb{P}^n, \mathbf{x} \neq 0$ y sea $\mathbf{y} = (I_n + A)^{n-1}\mathbf{x}$, entonces $f_A(\mathbf{y}) \geq f_A(\mathbf{x})$.*

Demostración. (i) Para $t > 0$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{P}^n$, $\mathbf{x} \neq 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} f_A(t\mathbf{x}) &= \min_{(t\mathbf{x})_i \neq 0} \frac{(A(t\mathbf{x}))_i}{(t\mathbf{x})_i} \\ &= \min_{(t\mathbf{x})_i \neq 0} \frac{t(A\mathbf{x})_i}{tx_i} \\ &= \min_{x_i \neq 0} \frac{(A\mathbf{x})_i}{x_i} \\ &= f_A(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

(ii) Vamos a probar que la definición de f_A implica que

$$A\mathbf{x} - f_A(\mathbf{x})\mathbf{x} \geq 0,$$

y que existe un número entero k, $1 \leq k \leq n$, tal que $x_k \neq 0$ y la k-ésima componente de $A\mathbf{x} - f_A(\mathbf{x})\mathbf{x}$ es 0.
Sea $f_A(\mathbf{x}) = \min\limits_{x_i \neq 0} \dfrac{(A\mathbf{x})_i}{x_i}$, entonces $f_A(\mathbf{x}) \leq \frac{(A\mathbf{x})_i}{x_i}$, $\forall i$ tal que $x_i \neq 0$.
Diferenciamos dos casos:

- $x_i = 0$.
$$f_A(\mathbf{x})x_i = 0 \text{ y } (A\mathbf{x})_i - f_A(\mathbf{x})x_i \geq 0.$$
- $x_i > 0$.
$$f_A(\mathbf{x})x_i \leq (A\mathbf{x})_i.$$

Por tanto, obtenemos que

$$f_A(\mathbf{x})x_i \leq (A\mathbf{x})_i \quad \forall i,$$

y en definitiva,

$$A\mathbf{x} - f_A(\mathbf{x})\mathbf{x} \geq 0.$$

Por otro lado, dada la definción de f_A, si su valor se da cuando $i = k$, entonces podemos asegurar que $x_k \neq 0$, y además que $A\mathbf{x} - f_A(\mathbf{x})\mathbf{x} = 0$. Si se da que $c > f_A(\mathbf{x})$, entonces la k-ésima componente de $A\mathbf{x} - c\mathbf{x}$ es negativa. Por lo que queda probado que $f_A(\mathbf{x}) = \max\{\rho \in \mathbb{R} | A\mathbf{x} - \rho\mathbf{x} \geq 0\}$.

(iii) Podemos partir de que

$$A\mathbf{x} - f_A(\mathbf{x})\mathbf{x} \geq 0.$$

Multiplicando a ambos lados de la igualdad por $(I_n + A)^{n-1}$, obtenemos:

$$(I_n + A)^{n-1}A\mathbf{x} - (I_n + A)^{n-1}f_A(\mathbf{x})\mathbf{x} \geq 0.$$

Como A y $(I_n + A)^{n-1}$ conmutan, nos queda,

$$A(I_n + A)^{n-1}\mathbf{x} - f_A(\mathbf{x})(I_n + A)^{n-1}\mathbf{x} \geq 0.$$

Sea $\mathbf{y} = (I_n + A)^{n-1}\mathbf{x}$, nos queda que

$$A\mathbf{y} - f_A(\mathbf{x})\mathbf{y} \geq 0.$$

Por el apartado (ii), $f_A(\mathbf{y})$ es el mayor número que verifica

$$A\mathbf{y} - f_A(\mathbf{y})\mathbf{y} \geq 0.$$

Con todo ello concluimos que

$$f_A(\mathbf{y}) \geq f_A(\mathbf{x}).$$

□

Teorema 1.3.2. *Sea A una matriz $n \times n$ irreducible no negativa. Entonces la función f_A alcanza su máximo en $\mathbb{E}^n$.*

Recordemos el siguiente teorema:

Teorema 1.3.3. *(Teorema de Heine-Borel). Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, entonces son equivalentes:*

(i) *S es cerrado y acotado.*

(ii) *Todo cubrimiento abierto de S tiene un subrecubrimiento finito, es decir, S es compacto.*

Notemos que $\mathbb{E}^n$ es cerrado y acotado y, en consecuencia, es compacto. Podemos escribir el conjunto $\mathbb{E}^n$ como :

$$\mathbb{E}^n = [0,1]^n \cap |x_1| + \cdots + |x_n| = 1.$$

Tenemos, por un lado, $[0,1]^n$ que sabemos que es cerrado y acotado, y , por otro lado, $|x_1| + \cdots + |x_n| = 1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \sum_i |x_i| = 1\}$, que se corresponde con la esfera unidad trabajando en norma 1,

$$||\mathbf{x}||_1 = \sum_i |x_i|.$$

Este conjunto también es cerrado y acotado. Puesto que la intersección finita de cerrados es cerrada, tenemos que $\mathbb{E}^n$ es cerrado. Además la intersección de conjuntos acotados también está acotada, basta tomar el mínimo de ambas cotas. Con todo ello, queda probado que el conjunto $\mathbb{E}^n$ es compacto. Si la función f_A fuese continua en $\mathbb{E}^n$, el resultado sería inmediato por el siguiente resultado [15]:

Teorema 1.3.4. *Supongamos que $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, una función real continua en un espacio métrico compacto X, y*

$$M = \sup_{\mathbf{p}\in X} f(\mathbf{p}), \quad m = \inf_{\mathbf{p}\in X} f(\mathbf{p}).$$

Existen puntos $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in X$, tales que $f(\mathbf{p}) = M$ y $f(\mathbf{q}) = m$.

También puede enunciarse la conclusión como sigue: Existen puntos $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ en X tales que $f(\mathbf{p}) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{q})$ para todo $\mathbf{x} \in X$; esto es, f alcanza su máximo (en $\mathbf{p}$) y su mínimo (en $\mathbf{q}$).

La función f_A es continua en cualquier vector positivo de $\mathbb{E}^n$. Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{P}^n$ y sean las funciones continuas f y g definidas como:

$$f : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

de forma que $f(\mathbf{x}) = (\frac{(A\mathbf{x})_1}{x_1}, \ldots, \frac{(A\mathbf{x})_n}{x_n})$,

$$g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

que lleva el vector anterior al $\min_i \frac{(A\mathbf{x})_i}{x_i}$.
De esta forma tenemos que $f_A : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, se puede expresar como composición de las funciones continuas f y g, $f_A = g \circ f$. La composición de funciones continuas es continua, por tanto, concluimos que $f_A(\mathbf{x})$ es continua para cualquier vector positivo. Sin embargo, la función f_A puede no ser continua en la frontera de $\mathbb{E}^n$. Veamos un ejemplo. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

y sea $\mathbf{x}(\varepsilon) = (1, 0, \varepsilon)/(1 + \varepsilon)$, donde $\varepsilon > 0$, entonces

$$A\mathbf{x}(\varepsilon) = (2 + \varepsilon, 2 + \varepsilon, \varepsilon)/(1 + \varepsilon),$$

y

$$f_A(\mathbf{x}(\varepsilon))) = \min(\frac{2+\varepsilon}{1}, \frac{\varepsilon}{\varepsilon}) = 1.$$

Sin embargo,

$$f_A(\mathbf{x}(0)) = 2 \neq 1 = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} f_A(\mathbf{x}(\varepsilon)).$$

Ya estamos en condiciones de dar la siguiente demostración del Teorema 1.3.2.

Demostración. Sea

$$G = (I_n + A)^{n-1}\mathbb{E}^n = \{\mathbf{y} | \mathbf{y} = I_n + A)^{n-1}\mathbf{x}, \mathbf{x} \in E^n\}.$$

G es la imagen de un conjunto compacto, $\mathbb{E}^n$, por una aplicación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita y éstas son siempre continuas. Como la imagen de un compacto por una aplicación continua es compacto, G es compacto.
Además, por el Corolario 1.2.3, sabemos que todas los vectores de G son estrictamente positivos. Por ello, f_A es continua en G.
Como G es compacto y f_A es continua en G, entonces por el Teorema 1.3.4, la función f_A alcanza su máximo valor en G en algún $\mathbf{y}^0 = (y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0) \in G$. Sea $\mathbf{x}^0 = \frac{\mathbf{y}^0}{\sum_{i=1}^n y_i^0} \in \mathbb{E}^n$, y sea $\mathbf{x}$ un vector arbitrario de $\mathbb{E}^n$. Entonces si $\mathbf{y} = (I_n + A)^{n-1}\mathbf{x}$, tenemos:

$$\begin{aligned} f_A(\mathbf{x}) \leq f_A(\mathbf{y}), &\quad \text{por el Teorema 1.3.1(iii)}, \\ \leq f_A(\mathbf{y}^0), &\quad \text{por la maximilitud de } \mathbf{y}^0 \text{ en G}, \\ = f_A(\mathbf{x}^0), &\quad \text{por el Teorema 1.3.1(i)}. \end{aligned}$$

Como $\mathbf{x}$ es cualquier vector de $\mathbb{E}^n$, se sigue que f_A tiene un máximo absoluto en $\mathbb{E}^n$ en $\mathbf{x}^0$.

□

Ya hemos visto que f_A puede no ser continua en $\mathbb{P}^n$, sin embargo, si está acotada. Lo vemos en la siguiente proposición.

Proposición 1.3.5. *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $n \times n$ irreducible no negativa. Entonces, la función f_A está acotada.*

Demostración. Sea la matriz $A \geq 0$ y por la definición de f_A es claro que la cota inferior para la función es 0, esto es, $f_A(\mathbf{x}) \geq 0$, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{P}^n$.
Lo que queremos es conocer una cota superior. Ésta va a ser el valor más alto de las sumas de las columnas de A.
Sea c_j el valor de la suma de la columna j-ésima de A, esto es,

$$c_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Para probar lo que queremos y gracias al Teorema 1.3.1 (i), es suficiente probar que

$$f_A(\mathbf{x}) \leq \max_j c_j,$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$. Lo vemos.
Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{P}^n$ y sea $t = \sum_{i=1}^n x_i$, entonces $\mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x}}{t} \in \mathbb{E}^n$.

Si $f_A(\mathbf{x}^{'}) \leq c, \quad \forall \mathbf{x}^{'} \in \mathbb{E}^n$, entonces, por ser f_A una función homogénea, se tiene que

$$f_A(\mathbf{x}) = f_A(t\mathbf{x}^{'}) = f_A(\mathbf{x}^{'}) \leq c.$$

Además, sabemos que

$$(A\mathbf{x})_i \geq f_A(\mathbf{x})x_i, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n,$$

o, lo que es lo mismo,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq f_A(\mathbf{x})x_i, \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Si ahora, hacemos a ambos las sumas respecto de i nos queda,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j &\geq \sum_{i=1}^{n} f_A(\mathbf{x})x_i \\ &= f_A(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

dado que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Pero, además también tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j &= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j c_j \leq \sum_{j=1}^{n} x_j \max_j c_j \\ &= \max_j c_j. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta ambos resultado obtenemos que

$$f_A(\mathbf{x}) \leq \max_j c_j.$$

Así queda visto que

$$0 \leq f_A(\mathbf{x}) \leq \max_j c_j.$$

□

1.4. Valor propio máximo de una matriz no negativa

A lo largo de este apartado desarrollaremos el teorema de Perron-Frobenious. El primer teorema es quizás la parte más importante del teorema.

Teorema 1.4.1. *Toda matriz A irreducible no negativa tiene un valor propio real positivo tal que*

$$r \geq |\lambda_i|,$$

para cualquier valor propio λ_i de A. Además hay un vector propio positivo asociado a r.

El valor propio r se conoce como valor propio máximo de A, y cualquier vector propio positivo asociado a r se denomina vector propio máximo de A.

Demostración. Sea A una matriz $n \times n$ irreducible no negativa. Por el Teorema 1.3.2, sabemos que existe un vector $\mathbf{x}^0$ en $\mathbb{E}^n$ tal que

$$f_A(\mathbf{x}) \leq f_A(\mathbf{x}^0),$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$. Tomamos

$$r = f_A(\mathbf{x}^0),$$

esto es,

$$r = \max\{f_A(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n\}.$$

Primero vamos a probar que r es positivo.
Tomamos el vector $\mathbf{u} = \dfrac{(1, 1, ..., 1)}{n} \in \mathbb{E}^n$. Entonces, tenemos:

$$\begin{aligned} r &\geq f_A(\mathbf{u}) \\ &= \min_i \frac{(A\mathbf{u})_i}{u_i} \\ &= \min_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \\ &> 0, \end{aligned}$$

ya que A no puede tener una fila nula, por ser A irreducible.
Una vez visto esto, seguimos probando que r es un valor propio de A.
Por una parte, sabemos que

$$A\mathbf{x}^0 - r\mathbf{x}^0 \geq 0,$$

vamos a ver que, $A\mathbf{x}^0 - r\mathbf{x}^0 = 0$. Por el Corolario 1.2.3 , sabemos que

$$(I_n + A)^{n-1}(A\mathbf{x}^0 - r\mathbf{x}^0) > 0.$$

Si tomamos $\mathbf{y}^0 = (I_n + A)^{n-1}\mathbf{x}^0$, entonces, nos queda

$$A\mathbf{y}^0 - r\mathbf{y}^0 > 0.$$

Por ser una desigualdad estricta, va a existir un número positivo ε tal que:

$$A\mathbf{y}^0 - (r+\varepsilon)\mathbf{y}^0 \geq 0.$$

Entonces, ahora, por el Teorema 1.3.1 (ii),

$$r + \varepsilon \leq f_A(\mathbf{y}^0),$$

y entonces,

$$r < f_A(\mathbf{y}^0),$$

lo cual contradice la maximalidad de r. Por tanto, hemos llegado a un absurdo y podemos asegurar que $A\mathbf{x}^0 - r\mathbf{x}^0 = 0$, es decir, que r es un valor propio de A y $\mathbf{x}^0$ un vector propio asociado.
En realidad hemos probado que si $\mathbf{x}$ es un vector no negativo y no nulo y

$$A\mathbf{x} - r\mathbf{x} \geq 0,$$

entonces $\mathbf{x}$ es un vector propio de A asociado a r. Entonces, el Teorema 1.2.7 implica que $\mathbf{x} > 0$.

A continuación, sea λ_i un valor propio arbitrario de A. Entonces $A\mathbf{z} = \lambda_i\mathbf{z}$, donde $\mathbf{z} = (z_1, z_2, ..., z_n) \neq 0$. Entonces, tenemos

$$\lambda_i z_t = \sum_{j=1}^{n} a_{tj} z_j, \quad t = 1, 2, ..., n,$$

y tomando valores absolutos en ambos lados queda,

$$|\lambda_i||z_t| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{tj}|z_j|, \quad t = 1, 2, ..., n.$$

Pasando a notación vectorial,

$$|\lambda_i||\mathbf{z}| \leq A|\mathbf{z}|,$$

donde $|\mathbf{z}| = (|z_1, \ldots, |z_n|)$.
Finalmente, por el Teorema 1.3.1(ii) y por ser $r = \text{máx}\{f_A(\mathbf{x})|\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n\}$, entonces,

$$|\lambda_i| \leq f_A(|\mathbf{z}|) \leq r.$$

$\square$

De la misma forma que hemos definido y trabajado con f_A, podemos definir otra función

$$g_A(\mathbf{x}) = \max_{x_i \neq 0} \frac{(A\mathbf{x})_i}{x_i} \tag{1.2}$$

La demostración del teorema anterior sería análoga, solo que definiríamos el máximo valor propio de A como

$$s = \text{mín}\{g_A(\mathbf{x})|\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n\}.$$

Con esta función se verifica el siguiente teorema cuya demostación es análoga a la del Teorema 1.3.1.

Teorema 1.4.2. *Sea A una matriz irreducible y sea g_A la función anterior. Entonces,*

(i) *g_A es homogénea de grado 0.*

(ii) *Sea $\mathbf{x}$ un vector no negativo tal que $x_i > 0$ siempre que $(A\mathbf{x})_i > 0$ y sea σ el menor número para el cual se cumple*

$$\sigma\mathbf{x} - A\mathbf{x} \geq 0,$$

entonces, $\sigma = g_A(\mathbf{x})$.

(iii) *Sea $\mathbf{x}$ un vector no negativo y sea $\mathbf{y} = (I_n + A)^{n-1}\mathbf{x}$, entonces $g_A(\mathbf{y}) \leq g_A(\mathbf{x})$.*

(iv) *g_A alcanza su mínimo en $\mathbb{E}^n$ en un vector positivo.*

Ejemplo 2. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

y sea f_A la función de Collatz-Wielandt y g_A la funcion definida en (1.2). Sea $\mathbf{x}_1 = (1,1,1), \mathbf{x}_2 = (1,0,2), \mathbf{x}_3 = (2,1,3)$. Calcular $f_A(\mathbf{x})$ y $g_A(\mathbf{x})$ para cada $\mathbf{x}_i$. Deducir una cota superior e inferior para el valor propio máximo de A.

$$f_A(\mathbf{x}_1) = \text{mín}\{8, 4, 12\} = 4;$$

$$f_A(\mathbf{x}_2) = \text{mín}\{9, 13/2\} = 13/2;$$

$$f_A(\mathbf{x}_3) = \text{mín}\{\frac{17}{2}, 8, \frac{25}{3}\} = 8.$$

Como sabemos que f_A alcanza su máximo, y dado que $r \geq f_A(\mathbf{x})$, entonces $f_A(\mathbf{x})$ nos da valores menores, lo cual nos permite tomar como cota inferior el mayor de los $f_A(\mathbf{x}_i)$. En este caso, es 8.
Hacemos lo mismo para g_A.

$$g_A(\mathbf{x}_1) = \text{máx}\{8, 4, 12\} = 12;$$

$$g_A(\mathbf{x}_2) = \text{máx}\{9, 13/2\} = 9;$$

$$g_A(\mathbf{x}_3) = \text{máx}\{\frac{17}{2}, 8, \frac{25}{3}\} = \frac{17}{2}.$$

En este caso, sabemos que g_A alcanza su mínimo, y tenemos que $g_A(x) \geq r$. por lo que $g_A(x)$ nos da una cota superior, en este caso es, $\frac{17}{2}$. Por lo tanto, el valor propio máximo r va a verificar,

$$8 \leq r \leq 8,5.$$

Sea ahora otro vector $\mathbf{y} = (I_3 + A)^2\mathbf{x}$, donde $\mathbf{x} = (2, 1, 3)$. Vamos a calcular los valores de $f_A(\mathbf{y})$ y $g_A(\mathbf{y})$ correspondientes. Después de realizar las operaciones necesarias obtenemos $\mathbf{y} = (177, 84, 261)$. Calculamos ahora f_A:

$$f_A(\mathbf{y}) = \text{mín}\{\frac{1473}{177}, \frac{699}{84}, \frac{2172}{261}\}$$

$$= (8{,}3220\ldots, 8{,}3214\ldots, 8{,}3218\ldots) = 8{,}3214.$$

De la misma forma hallamos g_A :

$$g_A(\mathbf{y}) = \text{máx}\{\frac{1473}{177}, \frac{699}{84}, \frac{2172}{261}\}$$

$$= (8{,}3220\ldots, 8{,}3214\ldots, 8{,}3218\ldots) = 8{,}3220.$$

De esta forma, podemos reducir más el intervalo donde r alcanza su valor. Los dos nuevos valores obtenidos se corresponden, de hecho, con la cota inferior y superior de r, esto es:

$$8,3214 \leq r \leq 8,3220.$$

Si aplicáramos este mismo procedimiento a $\mathbf{y} = (I_3 + A)^3\mathbf{x}$, obtendríamos cotas para r con 5 dígitos de exactitud.

Del teorema de Perron-Frobenious se derivan otros como son los siguientes:

Teorema 1.4.3. *El valor propio máximo de una matriz irreducible no negativa es una raíz simple de su ecuación característica.*

Demostración. Vamos a suponer que $\mathbf{z}$ es un vector propio de A asociado a r. Es decir, $A\mathbf{z} = r\mathbf{z}$ con $\mathbf{z} \neq 0$, y sabemos por la demostración del Teorema 1.4.1 que,

$$r|\mathbf{z}| \leq A|\mathbf{z}|.$$

En la demostración del Teorema 1.4.1 se ha visto que si $\mathbf{x} \geq 0$ y $A\mathbf{x} - r\mathbf{x} \geq 0$, entonces $\mathbf{x}$ es un vector propio de A asociado a r. Así pues, $|\mathbf{z}|$, es vector propio de A. Por el Teorema 1.2.7 sabemos que $|\mathbf{z}| > 0$, es decir, $z_i \neq 0$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Vamos a ver que la dimensión del subespacio propio de r es 1. Sea

$$S_r = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{z} = r\mathbf{z}\}.$$

Supongamos que $\dim S_r > 1$. Por tanto, existen al menos dos vectores distintos $\mathbf{z}_1 \neq 0, \mathbf{z}_2 \neq 0 \in S_r$ linealmente independientes y $|\mathbf{z}_1| > 0, |\mathbf{z}_2| > 0$. Así existen también números α, β tales que

$$\alpha \mathbf{z}_1 + \beta \mathbf{z}_2 = \mathbf{y},$$

siendo $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ y tal que existe un i de forma que $y_i = 0$. Puesto que $\mathbf{y}$ es combinación lineal de dos vectores propios pertenecientes a S_r, entonces $\mathbf{y} \in S_r$. Por tanto, $|\mathbf{y}| > 0$,, es decir, $y_i \neq 0$, para todo i. Hemos llegado a una contradicción, por lo que concluimos que

$$\dim S_r = 1.$$

Esto es lo mismo que decir que la multiplicidad geométrica de r es 1.
Pero esto no es suficiente para probar el teorema. Necesitamos ver que su multiplicidad algebraica también es 1. Notemos que $A \geq 0$ si y sólo si $A^T \geq 0$, y A es irreducible si y sólo si A^T es irreducible. Además los valores propios de A y A^T coinciden porque son semejantes. Así, sean $\mathbf{x}_1 > 0, \mathbf{y} > 0$ vectores propios de A y de A^T, respectivamente, asociados al valor propio r. Esto es,

$$(rI - A)\mathbf{x}_1 = 0, \quad (rI - A^T)\mathbf{y} = 0.$$

Supongamos que existe un vector generalizado $\mathbf{x}_2 \neq 0$, es decir, que se cumple que

$$(rI - A)\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1.$$

Como tenemos que $\mathbf{y}^T(rI - A) = \mathbf{0}^T$, si multiplicamos a ambos lados de la igualdad por el vector generalizado $\mathbf{x}_2$ obtenemos,

$$\mathbf{y}^T(rI - A)\mathbf{x}_2 = 0,$$

y sustituyendo por su valor, nos queda que

$$\mathbf{y}^T\mathbf{x}_1 = 0.$$

Pero este hecho contradice la positividad de los vectores $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{y}$, lo cual nos permite asegurar que r debe tener multiplicidad algebraica 1.
De esta forma, queda visto que el valor propio r es raíz simple del polinomio característico de A. □

Corolario 1.4.4. *Si A es una matriz irreducible con valor propio máximo r, y $A\mathbf{x} = r\mathbf{x}$, entonces $\mathbf{x}$ es un múltiplo de un vector positivo.*

Demostración. Por el Teorema anterior sabemos que $\dim S_r = 1$, lo cual implica que todo vector propio debe ser múltiplo de un vector propio máximo que es positivo. □

Ya hemos probado que el valor propio máximo de una matriz irreducible es simple. Además, la matriz puede tener otros valores propios positivos. Podemos destacar que el vector propio máximo de una matriz irreducible es (a parte de múltiplos positivos) el único vector propio no negativo que la matriz puede tener.

Teorema 1.4.5. *Una matriz irreducible tiene exactamente un vector propio en* $\mathbb{E}^n$*.*

Demostración. Sea A una matriz irreducible con valor propio máximo r, y sea $\mathbf{y} \in \mathbb{E}^n$ un vector propio máximo de A^T. Entonces $\mathbf{y} > 0$. Además, dado $\mathbf{z} \in E^n$ cualquier vector propio de A,

$$A\mathbf{z} = \xi\mathbf{z}.$$

Si $(,)$ denota el producto interno estándar, entonces

$$\xi(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = (A\mathbf{z}, \mathbf{y}) = (\mathbf{z}, A^T\mathbf{y}) = r(\mathbf{z}, \mathbf{y}).$$

Ahora, como $\mathbf{z} \in E^n$ e $\mathbf{y} > 0$, entonces $(\mathbf{z}, \mathbf{y}) > 0$. Y, además, $\xi = r$. Esto es, el único valor propio de A con vector propio no negativo es r. □

Con las funciones $f_A(\mathbf{x})$ y $g_A(\mathbf{x})$ y conocido este último teorema podemos probar lo siguiente:

Teorema 1.4.6. *Sea A una matriz $n \times n$ irreducible no negativa con valor propio máximo r. Si*

$$s = \text{mín}\{g_A(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n\},$$

entonces $s = r$.

Demostración. Sea $\mathbf{x}^0$ un vector positivo en $\mathbb{E}^n$ de forma que se verifica que

$$g_A(\mathbf{x}^0) \leq g_A(\mathbf{x}),$$

para todo vector $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$.
Vamos a probar que es es un valor propio y $\mathbf{x}^0$ su vector propio asociado de A.
Puesto que ya sabemos que

$$s\mathbf{x}^0 - A\mathbf{x}^0 \geq 0,$$

es suficiente probar que necesariamente tiene que ser 0.
Supongamos por reducción al absurdo que dicha resta es distinta de 0. Entonces, por el Corolario 1.2.3,

$$(I_n + A)^{n-1}(s\mathbf{x}^0 - A\mathbf{x}^0) > 0.$$

Sea $\mathbf{y}^0 = (I_n + A)^{n-1}\mathbf{x}^0$, nos queda que

$$s\mathbf{y}^0 - A\mathbf{y}_0 > 0.$$

Así, para un ε suficientemente pequeño se verifica que

$$(s-\varepsilon)\mathbf{y}^0 - A\mathbf{y}^0 \geq 0,$$

y, además, por el Teorema 1.4.2 (ii),

$$g_A(\mathbf{y}^0) \leq s - \varepsilon.$$

Por lo tanto, se debería verificar que

$$g_A(\mathbf{y}^0) < s,$$

lo cual es absurdo ya que contradice la minimalidad de s.
Así queda probado que $s\mathbf{x}^0 - A\mathbf{x}^0 = 0$, esto es,

$$A\mathbf{x}^0 = s\mathbf{x}^0,$$

de donde, por la definición de valor propio, concluimos que s es valor propio de A y $\mathbf{x}^0$ un vector propio asociado.
Finalmente, por el Teorema 1.4.5, tenemos que $r = s$. □

1.5. Matrices primitivas y no primitivas

Definición 19. Sea A una matriz $n \times n$ irreducible con valor propio máximo r, y supongamos que A tiene exactamente h valores propios de módulo r. El número h se denomina *índice de imprimitividad*(proviene del término inglés *index of imprimitivity*) de A, o simplemente, índice de A. Si $h = 1$, entonces la matriz A se denomina *primitiva*. En caso contrario, A se dice *no primitiva*.

Necesitaremos el siguiente Teorema fundamental debido a Frobenious cuya demostración alargaría en exceso la extensión de esta memoria. Una demostración puede encontrarse en [1].

Teorema 1.5.1. *Sea A una matriz irreducible con índice $h \geq 2$. Entonces, A es cogrediente con una matriz de la forma*

$$\begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \dots & 0 & A_{h-1,h} \\ A_{h1} & 0 & & \dots & & 0 \end{pmatrix},$$

donde los bloques nulos de la diagonal son cuadrados.

Capítulo 2

Matrices doblemente estocásticas

En este capítulo vamos a hacer un estudio de las matrices doblemente estocásticas. Estas matrices son matrices no negativas con importantes aplicaciones en diversos ámbitos tanto de las matemáticas como de otras áreas científicas.
En matemáticas, una *matriz estocástica* (también denominada matriz de probabilidad, matriz de transición, matriz de sustitución o matriz de Markov) es una matriz utilizada para describir las transiciones en una cadena de Markov, un tipo especial de proceso estocástico discreto en el que la probabilidad de que ocurra un evento no depende del evento inmediatamente anterior.
Ha encontrado uso en la teoría de la probabilidad, en estadística y en álgebra lineal, así como en informática. Existen varias definiciones y tipos de matriz estocástica:

- Una matriz estocástica derecha es una matriz cuadrada donde cada una de sus filas está formada por números reales no negativos, sumando cada fila 1.
- Una matriz estocástica izquierda es una matriz cuadrada donde cada una de sus columnas está formada por números reales no negativos, sumando cada columna 1.
- Una matriz doblemente estocástica es una matriz cuadrada donde todos los valores son no negativos y todas las filas y columnas suman 1.

2.1. Definiciones y primeros resultados

A lo largo del capítulo nos centraremos en las matrices doblemente estocásticas, cuya definición formal se puede escribir como:

Definición 20. Una matriz real A se dice *quasi-estocástica* si cada una de sus filas y columnas suman 1.
Una matriz $A = (a_{ij})$ cuadrada $n \times n$ es *doblemente estocástica* si

$$a_{ij} \geq 0 \quad \text{para} \;\; i, j = 1, \ldots, n,$$

y

$$\sum_i a_{ij} = 1, \;\; j = 1, \ldots, n; \;\; \sum_j a_{ij} = 1, \; \imath = 1, \ldots, n.$$

Al conjunto de matrices doblemente estocásticas $n \times n$ se le denota como Ω_n. Debe observarse que una matriz doblemente estocástica es necesariamente cuadrada, puesto que al sumar todas las filas obtenemos n, de forma que el número de columnas también debe ser n.

Sea el vector $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, la segunda condición se puede ver como:

$$\mathbf{e}^T P = \mathbf{e}^T; \;\; P\mathbf{e} = \mathbf{e}.$$

Esto significa que una matriz $n \times n$ A es doblemente estocástica si y sólo si 1 es valor propio de A y $(1, \ldots, 1)$ es un vector propio asociado a dicho valor propio para A y A^T. Así una matriz $n \times n$ no negativa es doblemente estocástica si y sólo si

$$AJ_n = J_n A = J_n,$$

siendo J_n una matriz $n \times n$ con todas sus entradas $1/n$.

Recordemos que una combinación convexa es una combinación lineal tal que sea $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ un vector, entonces $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$ verifica que:

$$0 \leq \alpha_i \leq 1, \;\; \text{y} \;\; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

Además aplicando el Teorema de Perron a las matrices (doblemente) estocásticas obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.1.1. *El valor propio máximo de una matriz $n \times n$ no negativa doblemente estocástica es 1.*

Demostración. Como hemos dicho antes, sea A una matriz estocástica, entonces $A\mathbf{e} = \mathbf{e}$.

$$A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{n} a_{1i}\\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i}\\ \vdots\\ \sum_{i=1}^{n} a_{ni}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}.$$

De esta forma queda probado que el 1 es valor propio de $A = (a_{ij})$. Ahora, veamos que de todos los valores propio de A, 1 es el mayor de ellos. Supongamos por reducción al absurdo que existe un valor propio $\lambda > 1$ y tal que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, donde $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$. Sea x_i la mayor componente de $\mathbf{x}$. Por ser A estocástica, sus filas son no negativas y suman 1. Por tanto, cada entrada en $A\mathbf{x}$ implica que $\lambda\mathbf{x}$ es combinación convexa de los elementos de $\mathbf{x}$.
Así ninguna entrada en $\lambda\mathbf{x}$ puede ser mayor que x_i, esto es,

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\max(x_1,\ldots,x_n) = \max(x_1,\ldots,x_n)\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \max(x_1,\ldots,x_n) = x_i.$$

Entonces, como $\lambda > 1$, multiplicando a ambos lados de la desigualdad por x_i nos queda

$$\lambda x_i > x_i.$$

De esta forma, llegamos a una contradicción de forma que podemos concluir que 1 es el mayor valor propio de A, con A matriz estocástica. □

Podemos dar otra demostración gracias a lo probado en la Proposición 1.3.5 del Capítulo anterior.

Demostración. sea A una matriz estocástica, entonces $A\mathbf{e} = \mathbf{e}$, esto, es tenemos que 1 es valor propio de A.
Además dado que A una matriz doblemente estocástica, sabemos que la suma de las colmunas es la misma, independientemente de la columna y, por tanto, que el máximo de dichas sumas va a ser 1. Por la Proposición 1.3.5 vista en el Capítulo 1, tenemos que,

$$0 \leq f_A(\mathbf{x}) \leq 1.$$

Por otro lado, tenemos definido r como

$$r = \max\{f_A(\mathbf{x})|\mathbf{x} \in E^n\}.$$

Por tanto, necesariamente $r = 1$, es decir, 1 es el mayor valor propio de A. □

Definición 21. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $n \times n$. Se dice que A es *ortoestocástica* si existe una matriz ortogonal real $T = (t_{ij})$ tal que $a_{ij} = t_{ij}^2,\ i, j = 1, \ldots, n$.

Definición 22. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $n \times n$. Se dice que A es *Schur-estocástica* o *unitario-estocástica* si existe una matriz unitaria $U = (u_{ij})$ tal que $a_{ij} = |u_{ij}|^2,\ i, j = 1, \ldots, n$.

Es claro, que toda matriz ortoestocástica es matriz Schur-estocástica y ésta a su vez es matriz doblemente estocástica. En cambio, el recíproco no es cierto siempre.

Ejemplo 3. Dadas las siguientes matrices:

$$A = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 8 & 7 & 1 \\ 7 & 2 & 7 \\ 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Veamos cuáles son ortoestocásticas y cuáles Schur-estocásticas.

Podemos ver que tanto B como C son ortoestocásticas, y, por tanto, también son Schur-estocásticas. La matrices ortogonales que verifican la condición para B y C, respectivamente, son:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/2 & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, B y C son tanto ortoestocásticas como Schur-estocásticas.

En cambio, A no va a cumplir las dos condiciones. Veamos que no es ortoestocástica.

Sea $T = (t_{ij})$ una matriz 3×3 tal que $a_{ij} = t_{ij}^2,\ i, j = 1, 2, 3$. Tenemos que $t_{11}t_{21} + t_{12}t_{22} + t_{13}t_{23} = \frac{\sqrt{56}+\sqrt{14}+\sqrt{7}}{4} \neq 0$, por lo que T no es ortoestocástica. Sin embargo, si es Schur-estocástica. Lo vemos. Sea la matriz U de la forma:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{8}}{4}e^{i\theta_{11}} & \frac{\sqrt{7}}{4}e^{i\theta_{12}} & \frac{1}{4}e^{i\theta_{13}} \\ \frac{\sqrt{7}}{4}e^{i\theta_{21}} & \frac{\sqrt{2}}{4}e^{i\theta_{22}} & \frac{\sqrt{7}}{4}e^{i\theta_{23}} \\ \frac{1}{4}e^{i\theta_{31}} & \frac{\sqrt{7}}{4}e^{i\theta_{32}} & \frac{\sqrt{8}}{4}e^{i\theta_{33}} \end{pmatrix}.$$

Se debe verificar que $UU^* = I$, para lo cual plantearemos un sistema de 9 ecuaciones que se puede ver que tienen solución, esto es, podemos encontrar valores para θ_{ij} con $i, j = 1, 2, 3$, que verifiquen las diferentes ecuaciones. Por lo tanto, A si es Schur-estocástica.

Lema 2.1.2. *El producto de matrices doblemente estocásticas es una matriz doblemente estocástica.*

Demostración. Haremos la demostración para dos matrices. Sean A y B matrices doblemente estocásticas $n \times n$, sabemos que se verifica:

$$AJ_n = J_nA = J_n = BJ_n = J_nB.$$

Sea entonces AB su producto, tenemos que :

$$(AB)J_n = A(BJ_n) = AJ_n = J_n,$$

y

$$J_n(AB) = (J_nA)B = J_nB = J_n.$$

Así queda visto que AB también es doblemente estocástica. □

De la misma forma se podría probar para un número cualquiera de matrices doblemente estocásticas.

Lema 2.1.3. *La inversa de una matriz doblemente quasi-estocástica no singular es doblemente quasi-estocática.*

En particular, la inversa de una matriz doblemente estocástica es doblemente quasi-estocástica.

Demostración. Sea A una matriz doblemente estocástica no singular $n \times n$. Entonces tenemos que:

$$J_n = J_nI_n = J_nAA^{-1} = J_nA^{-1},$$

por ser A doblemente estocástica. Y de igual forma, se tiene que

$$J_n = I_nJ_n = A^{-1}AJ_n = A^{-1}J_n.$$

Por tanto, queda probado que A^{-1} es doblemente quasi-estocástica. □

Sin embargo, no podemos asegurar que A^{-1} sea doblemente estocástica, ya que por la Proposición 1.2.1, A^{-1} no tiene porque ser no negativa.

La permanente de una matriz es un concepto del álgebra lineal parecido al determinante. La diferencia entre ambos conceptos se debe a que la permanente no tiene en cuenta la signatura mientras que el determinante si lo hace.

Definición 23. La *permanente* de una matriz $A = (a_{ij})$ cuadrada $n \times n$ se define como

$$\mathrm{per}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=0}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

Ejemplo 4. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces calculamos su permanente como:

$$\mathrm{per}(A) = ad + bc.$$

Definimos ahora el conjunto $Q_{r,n} = \{(i_1, \ldots, i_r) | 1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n\}$. Sea A una matriz $n \times n$ y $\alpha \in Q_{r,n}$, entonces $\alpha = (i_1, \ldots, i_r), \quad 1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n$, son algunas filas o columnas de A.
Además tenemos que saber que $A[\alpha|\beta] = A \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ j_1 & \ldots & j_r \end{pmatrix} = (a_{i_s j_t})$, y $A(\alpha|\beta)$ es la matriz de resulta al quitarle a A las filas de α y las columnas de β.
Conocidos estos términos podemos dar el siguiente teorema:

Teorema 2.1.4. *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $n \times n$, y sea α una secuencia en $Q_{r,n}$. Para algún i, $1 \leq i \leq n$, se verifica que*

$$\mathrm{per}(A) = \sum_{\beta \in Q_{r,n}} \mathrm{per}(A[\alpha|\beta])\,\mathrm{per}(A(\alpha|\beta)) \tag{2.1}$$

En particular, para cualquier i, $\quad 1 \leq i \leq n$,

$$\mathrm{per}(A) = \sum_{t=1}^{n} a_{it}\,\mathrm{per}(A(i|t).$$

Demostración. Consideremos las entradas de A indeterminadas. Para $\beta \in Q_{r,n}$, la permanente de $A[\alpha|\beta]$ es una suma de $r!$ productos diagonales y la de $A(\alpha|\beta)$ es una suma de $\binom{n-r}{n-r}(n-r)! = (n-r)!$ productos diagonales. El producto de un producto diagonal de $A[\alpha|\beta]$ por un producto diagonal de $A(\alpha|\beta)$, es un producto diagonal de A. Así, para un β fijo, se tiene que $\mathrm{per}(A[\alpha|\beta])\,\mathrm{per}(A(\alpha|\beta))$ es suma de $r!(n-r)!$ productos diagonales de A. Además, para diferentes secuencias β, se obtienen diferentes productos diagonales. Como hay $\binom{n}{r}$ secuencias en $Q_{r,n}$ y además el lado derecho de (2.1) es la suma de

$$\binom{n}{r} r!(n-r)! = \binom{n}{n} n! = n!$$

productos diagonales, esto es, tenemos la suma de todos los productos diagonales de A, que es igual a la permanente de A. $\square$

Teorema 2.1.5. *(Teorema de Frobenious-Köning). La permanente de una matriz no negativa $n \times n$ es 0 si y sólo si la matriz contiene una submatriz nula $s \times t$ con $s + t = n + 1$.*

Demostración. $\Longleftarrow$) Sea A una matriz no negativa $n \times n$ y supongamos que $A[\alpha|\beta] = 0$, donde $\alpha \in Q_{s,n}$, $\beta \in Q_{t,n}$ y $s + t = n + 1$. Entonces, la submatriz $A[\alpha|1, 2, \ldots, n]$ contiene al menos $t = n - s + 1$ columnas nulas, y, por lo tanto, toda submatriz $s \times s$, $A[\alpha|\omega]$, con $\omega \in Q_{s,n}$, tiene una columna nula. O lo que es lo mismo, $\text{per}(A[\alpha|\omega]) = 0, \quad \forall \omega \in Q_{s,n}$. Si $s = n$, entonces el teorema estaría probado. En cambio, si $s < n$, por el Teorema 2.1.4, tenemos:

$$\text{per}(A) = \sum_{\omega \in Q_{s,n}} \text{per}(A[\alpha|\omega]) \, \text{per}(A(\alpha|\omega)) = 0.$$

$\Longrightarrow$) Supongamos ahora que $A = (a_{ij})$ es una matriz $n \times n$ y que $\text{per}(A) = 0$. Vamos a usar inducción sobre n. Si $n = 1$, entonces A debe ser la matriz nula. Supongamos ahora que $n > 1$ y que el teorema se verifica para n. Vamos a ver que también lo hace para $n + 1$.
Si $A = 0$ no hay nada que probar. En otro caso, A contiene una entrada no nula a_{hk}. Puesto que

$$0 = \text{per}(A) \geq a_{hk} \, \text{per}(A(h|k)),$$

entonces tenemos que $\text{per}(A(h|k)) = 0$. Por hipótesis de inducción, la submatriz $A(h|k)$ contiene una submatriz nula $p \times q$ con $p + q = n$. Sean P y Q matrices de permutación tales que

$$PAQ = \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix},$$

donde X es $(n - p) \times q$ y Z es $p \times p$. Claramente, $(n - p) \leq q$ y además

$$0 = \text{per}(A) = \text{per}(PAQ) \geq \text{per}(X) \, \text{per}(Z).$$

Por tanto, se debe cumplir que $\text{per}(X) = 0$ o $\text{per}(Z) = 0$. Vamos a probar para el primer caso, siendo la demostración análoga para el segundo.
Supongamos $\text{per}(X) = 0$. Aplicando de nuevo la hipótesis de inducción, tenemos que X contiene una submatriz nula $u \times v$, $X[i_1, i_2, \ldots, i_u | j_1, j_2, \ldots, j_v]$ con $u + v = q + 1$. Por lo tanto, PAQ, y, en consecuencia A, contiene una submatriz nula $(u + p) \times v$, $(PAQ)[i_1, \ldots, i_u, n - p + 1, n - p + 2, \ldots, n | j_1, \ldots, j_v]$ con

$$\begin{aligned} q + p &= (u + p) + v = p + (u + v) \\ &= p + q + 1 \\ &= n + 1. \end{aligned}$$

□

Un resultado importante es el siguiente, el cual fue expuesto por Köning [8].

Teorema 2.1.6. *(Köning). Toda matriz doblemente estocástica tiene una diagonal positiva.*

Demostración. Sea A una matriz doblemente estocástica. Supongamos por reducción al absurdo que no tiene diagonal positiva. Entonces, la permanente de A deberá ser nula y, por el Teorema de Frobenious-Köning, existen matrices de permutación P y Q de forma que

$$PAQ = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

donde el bloque nulo es de dimensión $p \times q$, siendo $p + q = n + 1$.
Denotemos ahora $\sigma(X)$ a la suma de las entradas de la matriz X.
Entonces,

$$\begin{aligned} n &= \sigma(PAQ) \\ &\geq \sigma(B) + \sigma(D) \\ &= q + p \\ &= n + 1. \end{aligned}$$

Puesto que hemos obtenido una contradicción, queda probado el teorema. □

Por otro lado, tenemos que tener en cuenta que las matrices doblemente estocásticas reducibles e no primitivas irreducibles tienen propiedades estructurales especiales.
A continuación veremos algunas de ellas.
Vamos a definir la suma directa de matrices, que denotaremos con $\oplus$, como sigue:

$$B \oplus D = diag(B, D) = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Teorema 2.1.7. *Una matriz doblemente estocástica reducible es cogrediente a una suma directa de matrices doblemente estocásticas.*

Demostración. Sea A una matriz reducible $n \times n$ doblemente estocástica. Por ser A reducible, tenemos que A es cogrediente a una matriz de la forma

$$X = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

esto es,

$$A = P^T X P.$$

La matriz B es una submatriz cuadrada de dimensión $k \times k$, y D tiene dimensión $(n-k) \times (n-k)$. Es claro que X es doblemente estocástica.
La suma de las primeras k columnas de X es k, es decir,

$$\sigma(B) = k.$$

De la misma forma, ocurre que

$$\sigma(D) = n - k.$$

Pero, por otro lado tenemos,

$$\begin{aligned} n &= \sigma(X) \\ &= \sigma(B) + \sigma(C) + \sigma(D) \\ &= k + \sigma(C) + n - k \\ &= n + \sigma(C), \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\sigma(C) = 0.$$

Y, en consecuencia,

$$C = 0.$$

De esta forma, nos queda que

$$X = B \oplus D,$$

donde B y D son matrices doblemente estocásticas.
Queda así probado que A es cogrediente a $X = B \oplus D$, suma directa de matrices doblemente estocásticas. □

Además también se cumplen los siguientes resultados:

Corolario 2.1.8. *Una matriz doblemente estocástica reducible es cogrediente a una suma directa de matrices irreducibles doblemente estocásticas.*

Demostración. Por el Teorema 2.1.7, sabemos que una matriz doblemente estocástica reducible es cogrediente a una suma directa de matrices doblemente estocásticas. Esto es, $X = B \oplus D$.
Si B y D son irreducibles ambas dos ya estaría probado. En caso contrario, puede ocurrir que una de las dos sea reducible o las dos. Supongamos que B es reducible. Por tanto, podemos volver a aplicar el Teorema 2.1.7 y, entonces,

$$B = B^{'} \oplus D^{'},$$

siendo $B^{'}$ y $D^{'}$ matrices doblemente estocásticas cuadradas de menor dimensión. Así, quedaría $X = B^{'} \oplus D^{'} \oplus D$. De nuevo, si $B^{'}$ y $D^{'}$ son irreducibles ya estaría probado. En otro caso, se repetiría el mismo proceso. Este proceso es finito, puesto que como mucho vamos a obtener matrices 1×1, que sabemos que son irreducibles por definición. Esto es, vamos a realizar como mucho un número finito de pasos, en concreto, n pasos. □

Corolario 2.1.9. *Los divisores elementales correspondientes a 1, autovalor máximo de una matriz doblemente estocástica, son lineales.*

Demostración. Dado que 1 es valor propio de una matriz doblemente estocástica y por el Teorema 1.4.3 para $\lambda_i = 1$, cada $n_{is_i} = 1$, y, por tanto, queda visto que los divisores elementales asociados a 1 son lineales. □

El siguiente teorema, el cual se le debe a Marcus, Minc y Moyls, describe la estructura de matrices doblemente estocásticas imprimitivas irreducibles.

Teorema 2.1.10. *Sea A una matriz $n \times n$ doblemente estocástica irreducible con índice de imprimitividad h. Entonces, h divide a n, y la matriz A es cogrediente a una matriz de la forma*

$$\begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \dots & 0 & A_{h-1,h} \\ A_{h1} & 0 & & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

donde todos los bloques son (n/h)-cuadrados.

Demostración. Por el Teorema 1.5.1 del Capítulo 1, A es cogrediente a una matriz de la forma (2.2), donde los bloques nulos de la diagonal principal son cuadrados. Cada uno de los bloques $A_{12}, A_{23}, \dots, A_{h-1,h}, A_{h1}$, debe ser doblemente estocástico y, por lo tanto, cuadrado (por ser toda matriz doblemente estocástica cuadrada). Esto implica que los bloques nulos a lo largo de la diagonal principal tengan el mismo orden. De ahí obtenemos el resultado. □

2.2. Mayorización y caracterizaciones

Recordemos que a lo largo de esta sección trabajaremos con vectores fila por conveniencia notacional.

Para $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x_{[1]} \geq \cdots \geq x_{[n]}$ son las componentes de $\mathbf{x}$ en orden decreciente (o, mejor, no creciente). De forma similar se verifica para $\mathbf{y}$.

Definición 24. Dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, se dice que $\mathbf{x}$ *está mayorizado por* $\mathbf{y}$, $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$, si se cumple que:

(i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} y_i, \quad k = 1, \dots, n-1;$

(ii) $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$.

Ejemplo 5. (i) El ejemplo más sencillo se puede dar para $n = 2$:

$$(2, 1) \prec (3, 0).$$

(ii) Si tomamos $n = 3$:

$$(3, 2, 1) \prec (3, 3, 0) \prec (6, 0, 0).$$

(iii) Para n mayor, un ejemplo conocido es:

$$(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}) \prec (\frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{1}{n-1}, 0) \prec \cdots \prec (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \ldots, 0) \prec (1, 0, \ldots, 0).$$

Una vez conocido este concepto podemos caracterizar a las matrices doblemente estocásticas de la siguientes forma:

Teorema 2.2.1. *$P = (p_{ij})$ es una matriz $n \times n$ doblemente estocástica si y sólo si $\mathbf{y}P \prec \mathbf{y}$ para todo $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.*

Demostración. $\Longleftarrow$) Supongamos primero que $\mathbf{y}P \prec \mathbf{y}$ para todo $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. En particular, $\mathbf{e}P \prec \mathbf{e}$ siendo $\mathbf{e} = (1, \ldots, 1)$. De esta forma si para algún vector $\mathbf{z}$, tenemos $\mathbf{z} \prec \mathbf{e}$, necesariamente $\mathbf{z} = \mathbf{e}$, y, por tanto, $\mathbf{e}P = \mathbf{e}$.
Tomando ahora $\mathbf{y} = \mathbf{e}_i$, esto es, $y_i = 1, y_j = 0$ si $j \neq i$, obtenemos $\mathbf{e}_iP = (p_{i1}, p_{i2}, \ldots, p_{in}) \prec \mathbf{e}_i$, lo cual significa que $\sum_j p_{ij} = 1$, o lo que es lo mismo, $P\mathbf{e}^T = \mathbf{e}^T$. Como también tenemos que $p_{ij} \geq 0$, podemos asegurar que P es una matriz doblemente estocástica.

$\Longrightarrow$) Supongamos ahora que P es una matriz doblemente estocástica. Sea $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{x} = \mathbf{y}P$. Vamos a suponer, por sencillez notacional, que $x_1 \geq \cdots \geq x_n$, $y_1 \geq \cdots \geq y_n$. En caso contrario aplicaríamos el mismo procedimiento a los vectores **x'** $= (x_{[1]}, \ldots, x_{[n]})$, **y'** $= (y_{[1]}, \ldots, y_{[n]})$. Entonces tenemos,

$$\sum_{j=1}^{k} x_j = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} y_i p_{ij} = \sum_{i=1}^{n} y_i t_i,$$

donde tenemos que

$$0 \leq t_i = \sum_{j=1}^{k} p_{ij} \leq 1$$

ya que por ser P matriz doblemente estocástica, sabemos que $\sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1$ y, tenemos que, $k < n$. También se verifica que

$$\sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} p_{ij} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = k.$$

De esta forma tenemos,

$$\sum_{j=1}^{k} x_j - \sum_{j=1}^{k} y_j = \sum_{i=1}^{n} y_i t_i - \sum_{i=1}^{k} y_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i t_i - \sum_{i=1}^{k} y_i + y_k(k - \sum_{i=1}^{n} t_i) = \sum_{i=1}^{k}(y_i - y_k)(t_i - 1) + \sum_{i=k+1}^{n} t_i(y_i - y_k) \leq 0,$$

puesto que ambos sumandos son negativos. En el primer sumando tenemos que $(y_i - y_k) \geq 0$ y $(t_i - 1) \leq 0$ y, en el segundo, $(y_i - y_k) < 0$ y $t_i > 0$, para los respestivos valores de i.
Por tanto, $\sum_{i=1}^{n} x_i = \mathbf{y}P\mathbf{e}^T = \mathbf{y}\mathbf{e}^T = \sum_{i=1}^{n} y_i$. Y dado que se cumplen las condiciones de mayorización aseguramos que $\mathbf{y}P \prec \mathbf{y}$. □

En esta demostración hemos visto que los vectores de la forma $\mathbf{x} = \mathbf{y}P$, están mayorizados por $\mathbf{y}$. Con el siguiente resultado, veremos que los vectores mayorizados por $\mathbf{y}$ son de la forma $\mathbf{x} = \mathbf{y}P$. El resultado es conocido como teorema de Hardy, Littlewood y Pólya.

Teorema 2.2.2. *(Hardy, Littlewood and Pólya, 1929). Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Entonces, $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$ si y sólo si $\mathbf{x} = \mathbf{y}P$ para alguna matriz P doblemente estocástica.*

Para poder dar una demostración de este teorema necesitamos definir la siguiente matriz conocida como T-transformación y que tiene la siguiente forma:

$$T = \lambda I + (1 - \lambda)Q$$

donde $0 \leq \lambda \leq 1$ y Q es una matriz de permutación que intercambia unicamente dos componentes. Así $\mathbf{x}T$ tiene la forma

$$xT = (x_1, \ldots, x_{j-1}, \lambda x_j + (1-\lambda)x_k, x_{j+1}, \ldots, x_{k-1}, \lambda x_k + (1-\lambda)x_j, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Observación 2. La matriz T es doblemente estocástica.

Lema 2.2.3. *(Muirhead,1903; Hardy, Littlewood and Pólya, 1934, 1952) Si $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$, entonces $\mathbf{x}$ se puede derivar de $\mathbf{y}$ por sucesivas aplicaciones de un número finito de T-transformaciones.*

Demostración. Como las matrices de permutación Q que sólo intercambian dos componentes son T-tranformaciones, y dado que cualquier matriz de permutación es producto de matrices de permutación simples, supongamos que $\mathbf{x}$ no se puede obtener de $\mathbf{y}$ mediante permutaciones en sus argumentos. Además, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x_1 \geq \cdots \geq x_n$, $y_1 \geq \cdots \geq y_n$.

Sea j el mayor subíndice tal que $x_j < y_j$ y sea k el menor subíndice, mayor que j, tal que $x_k > y_k$. Por la elección tenemos que

$$y_j > x_j \geq x_k > y_k.$$

Sea $\delta = min(y_j - x_j, x_k - y_k)$, y definamos $1 - \lambda = \delta/(y_j - y_k)$. Dado

$$y^{'} = (y_1, \ldots, y_{j-1}, y_j - \delta, y_{j+1}, \ldots, y_{k-1}, y_k + \delta, y_{k+1}, \ldots, y_n).$$

Sabemos que $0 \leq \lambda \leq 1$ y además por la elección de $1 - \lambda$ nos queda:

$$\mathbf{y}^{'} = \lambda \mathbf{y} + (1 - \lambda)(y_1, \ldots, y_{j-1}, y_k, y_{j+1}, \ldots, y_{k-1}, y_j, y_{k+1}, \ldots, y_n).$$

Por lo que $\mathbf{y}^{'} = \mathbf{y}T$, siendo en este caso Q la matriz que intercambia exactamente las componentes j-ésima y k-ésima. Vamos a ver que, $\mathbf{y}^{'} \prec \mathbf{y}$. Veremos primero que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i^{'} = \sum_{i=1}^{n} y_i$.

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^{'} = y_1 + \cdots + y_{j-1} + \lambda y_j + (1-\lambda) y_k + y_j + \cdots + y_{k-1} + \lambda y_k + (1-\lambda) y_j + y_{k+1} +$$

$$\cdots + y_n = y_1 + \cdots + y_{j-1} + y_j + y_{j+1} + \cdots + y_{k-1} + y_k + y_{k+1} + \cdots + y_n = \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Ahora nos falta ver que, $\displaystyle\sum_{i=1}^{t} y_i^{'} \leq \sum_{i=1}^{t} y$ para cualquier $t < n$. Para ello diferenciamos tres casos:

- CASO 1: $t < j$

$$\sum_{i=1}^{t} y_i^{'} = y_1 + \cdots + y_t = \sum_{i=1}^{t} y_i$$

- CASO 2: $j \leq t < k$

$$\sum_{i=1}^{t} y_i^{*} = y_1 + \cdots + \lambda y_j + (1-\lambda) y_k + \cdots + y_t = y_1 + \lambda(y_j - y_k) + y_k + \cdots + y_t$$

Como $\lambda \leq 1$ y $y_j - y_k \geq 0$, tenemos que

$$\lambda(y_j - y_k) + y_k \leq y_j - y_k + y_k = y_j$$

Y, en consecuencia

$$\sum_{i=1}^{t} y_i^{'} = y_1 + \cdots + \lambda y_j + (1-\lambda) y_k + \cdots + y_t \leq y_1 + \cdots + y_j + \cdots + y_t = \sum_{i=1}^{t} y_i$$

- CASO 3: $t \geq k$
$$\sum_{i=1}^{t} y_i^{'} = y_1 + \cdots + \lambda y_j + (1-\lambda)y_k + \cdots + \lambda y_k + (1-\lambda)y_j + \cdots + y_t$$

$$\leq y_1 + \cdots + y_j + \cdots + y_k + \cdots + y_t = \sum_{i=1}^{t} y_i$$

Queda así probado que $\mathbf{y}^{'} \prec \mathbf{y}$.

Ahora queremos ver que también se verifica que $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}^{'}$. Veamóslo:

$$\sum_{i=1}^{j-1} y_i^{'} = \sum_{i=1}^{j-1} y_i \geq \sum_{i=1}^{j-1} x_i$$

$$y_j^{'} \geq x_j, \text{ porque } y_i^{'} = y_i, \quad i = j+1, \ldots, k-1,$$

$$\sum_{i=k+1}^{n} y_i^{'} = \sum_{i=k+1}^{n} y_i \geq \sum_{i=k+1}^{n} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^{'} = \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Para cualquier par de vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, su distancia $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ se define como el número de diferencias no nulas $u_i - v_i$.
Como $y_j^{'} = x_j$ si $\delta = y_j - x_j$ e $y_k^{'} = x_k$ si $\delta = x_k - y_k$, se tiene que $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - 1$. Y, por consiguiente, $\mathbf{y}$ se puede derivar de $\mathbf{x}$ mediante un número finito de T-transformaciones.

□

Ya estamos en condiciones de probar el Teorema 2.1.7.

Demostración. Vamos a probar el doble contenido:

$\Longleftarrow$) Supongamos primero que existe una matriz P doblemente estocástica tal que $\mathbf{x} = \mathbf{y}P$. Entonces, por el Teorema 2.1.6, tenemos que $\mathbf{x} = \mathbf{y}P \prec \mathbf{y}$, es decir, $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$.

$\Longrightarrow$) Supongamos ahora que $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$. Como las T-transformaciones son matrices doblemente estocásticas y, por el Lema 2.1.2, el producto también es doblemente estocástico, podemos asegurar la existencia de una mariz P doblemente estocástica tal que $\mathbf{x} = \mathbf{y}P$.

□

Ejemplo 6. Sea $\mathbf{x} = (9, 7, 5, 4, 4)$ e $\mathbf{y} = (10, 10, 5, 3, 1)$. Encontrar una matriz P doblemente estocástica tal que $\mathbf{x} = \mathbf{y}P$.

En este caso, tomamos $j = 2$ y $k = 4$ y podemos ver que se verifica que $y_2 > x_2 \geq x_4 > y_4$ ya que $10 > 7 > 4 > 3$.
Para seguir tomamos ahora

$$\begin{aligned} \delta &= \text{mín}\{y_2 - x_2, x_4 - y_4\} \\ &= \text{mín}\{3, 1\} = 1. \end{aligned}$$

Y además

$$1 - \lambda = \frac{1}{y_2 - y_4} = \frac{1}{7},$$

por lo que

$$\lambda = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}.$$

Así podemos obtener

$$\mathbf{y}' = (10, 10 - 1, 5, 3 + 1, 1) = (10, 9, 5, 4, 1).$$

Pero, a su vez, $\mathbf{y}' = \mathbf{y}T$ con $T = \lambda I + (1 - \lambda)Q$, esto es,

$$\begin{aligned} \mathbf{y}' &= \lambda\mathbf{y} + (1 - \lambda)(y_1, y_4, y_3, y_2, y_5) \\ &= \frac{6}{7}(10, 10, 5, 3, 1) + \frac{1}{7}(10, 3, 5, 10, 1) \\ &= (10, 9, 5, 4, 1). \end{aligned}$$

Se cumple tanto que $\mathbf{y}' \prec \mathbf{y}$ como que $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}'$.
Repetimos el mismo proceso para $\mathbf{x} = (9, 7, 5, 4, 4)$ e $\mathbf{y}' = (10, 9, 5, 4, 1)$.
Tomamos ahora, $j = 2$ y $k = 5$ y se sigue verificando que $9 > 7 > 4 > 1$.
En este caso,

$$\begin{aligned} \delta &= \text{mín}\{y_2' - x_2, x_5 - y_5'\} \\ &= \text{mín}\{2, 3\} = 2. \end{aligned}$$

Y además

$$1 - \lambda = \frac{2}{y_2' - y_5'} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4},$$

por lo que

$$\lambda = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

De esta forma, obtenemos

$$\mathbf{y}'' = (10, 9 - 2, 5, 4, 1 + 2) = (10, 7, 5, 4, 3).$$

Pero, a su vez, $\mathbf{y}^{''} = \mathbf{y}^{'}T_1$ con $T_1 = \lambda I + (1-\lambda)Q_1$, esto es,

$$\begin{aligned}\mathbf{y}^{''} &= \lambda\mathbf{y}^{'} + (1-\lambda)(y_1^{'}, y_5^{'}, y_3^{'}, y_4^{'}, y_2^{'})\\ &= \frac{3}{4}(10,9,5,4,1) + \frac{1}{4}(10,1,5,4,9)\\ &= (10,7,5,4,3).\end{aligned}$$

Se cumple tanto que $\mathbf{y}^{''} \prec \mathbf{y}^{'}$ como que $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}^{''}$.
Como aún no hemos obtenido $\mathbf{x}$ tenemos que seguir repitiendo el proceso.
Partiendo ahora de $\mathbf{x} = (9,7,5,4,4)$ e $\mathbf{y}^{''} = (10,7,5,4,3)$. Solo podemos tomar $j = 1$ y $k = 5$. Así,

$$\begin{aligned}\delta &= \text{mín}\{y_1^{''} - x_1, x_5 - y_5^{''}\}\\ &= \text{mín}\{1,1\} = 1.\end{aligned}$$

Y además

$$1 - \lambda = \frac{1}{y_1^{''} - y_5^{''}} = \frac{1}{7},$$

y entonces, $\lambda = \frac{6}{7}$. De esta forma, obtenemos

$$\mathbf{y}^{'''} = (10-1,7,5,4,3+1) = (9,7,5,4,4) = \mathbf{x}.$$

Pero, a su vez, $\mathbf{y}^{'''} = \mathbf{y}^{''}T_2$ con $T_2 = \lambda I + (1-\lambda)Q_2$, esto es,

$$\begin{aligned}\mathbf{y}^{'''} &= \lambda\mathbf{y}^{''} + (1-\lambda)(y_5^{''}, y_2^{''}, y_3^{''}, y_4^{''}, y_1^{''})\\ &= \frac{6}{7}(10,7,5,4,3) + \frac{1}{7}(3,7,5,4,10)\\ &= (9,7,5,4,4) = \mathbf{x}.\end{aligned}$$

De esta forma, partiendo de $\mathbf{y}$ hemos obtenido $\mathbf{x}$ que es lo que queríamos.
Ahora, solo nos falta calcular P.
Sabemos que T, T_1, T_2 son matrices doblemente estocásticas y su producto nos da una nueva matriz también doblemente estocástica. Por tanto,

$$P = TT_1T_2.$$

Vamos a calcular explícitamente cada una de ellas:

$$T = \lambda I + (1-\lambda)Q,$$

esto es,

$$T = \frac{6}{7}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix} + \frac{1}{7}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{7} & 0 & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & 0 & \frac{6}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De forma análoga calculamos T_1 y T_2.

$$T_1 = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

y, por último,

$$T_2 = \frac{6}{7} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{7} \end{pmatrix}$$

Y, por tanto,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{7} & 0 & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & 0 & \frac{6}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{7} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{98} & \frac{9}{14} & 0 & \frac{1}{7} & \frac{3}{14} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{196} & \frac{3}{28} & 0 & \frac{6}{7} & \frac{3}{98} \\ \frac{3}{28} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{9}{14} \end{pmatrix}$$

2.3. Teorema de Birkhoff

En esta sección veremos que la clase de matrices doblemente estocásticas es un politopo convexo, envolvente convexa de un conjunto finito de puntos, conocido como el politopo Birkhoff.

El teorema de Birkhoff-von Neumann indica que este politopo es la envolvente convexa del conjunto de matrices de permutación.

Observación 3. Toda combinación convexa de matrices de permutación es doblemente estocástica.

Sea $A = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i P_i$, donde por ser combinación convexa se verifica que

$$\sum_{i=1}^{s} \alpha_i = 1, \quad 0 \leq \alpha_i \leq 1.$$

Así, si tomamos la j-ésima columna $A_j = \alpha_1 P_{1j} + \ldots \alpha_s P_{sj}$, nos queda que

$$\sum_{k=1}^{s} a_{jk} = \alpha_1 + \cdots + \alpha_s = 1.$$

El teorema se puede enunciar de la siguiente forma:

Teorema 2.3.1. *El conjunto de matrices doblemente estocásticas $n \times n$ forma un poliedro convexo cuyos vértices son matrices de permutación.*

Esto es lo mismo que decir que, dada A una matriz doblemente estocástica $n \times n$, entonces

$$A = \sum_{j=1}^{s} \theta_j P_j,$$

donde P_i son matrices de permutación con $i = 1, \ldots, s$, y θ_j son números positivos que verifican que $\sum_{j=1}^{s} \theta_j = 1$.

Demostración. Vamos a probarlo por inducción sobre $\pi(A)$ siendo éste el número de entradas positivas de la matriz A.
Si $\pi(A) = n$, entonces, A es una matriz de permutación, y el teorema se verifica para $s = 1$.
Supongamos que $\pi(A) > n$ y que el teorema se cumple para toda matriz doblemente estocástica $n \times n$ con un número de entradas positivas menor que $\pi(A)$.
Por el Teorema 2.1.6 sabemos que toda matriz doblemente estocástica tiene

una diagonal positiva, por tanto, la matriz A va a tener una diagonal positiva, $(a_{\sigma(1),1}, a_{\sigma(2),2}, \ldots, a_{\sigma(n),n})$, donde $\sigma \in S^n$, siendo éste el grupo simétrico de orden n.
Dada $P = (p_{ij})$ una matriz de permutación con 1 en posiciones $(\sigma(i), i)$, con $i = 1, \ldots, n$, la cual se denomina matriz incidente de la permutación σ, y sea $a_{\sigma(t),t} = \text{mín}_i(a_{\sigma(i),i}) = a$. Es claro que $0 < a < 1$. Si $a = 1$, esto significa que la matriz A tiene en todas las posiciones $a_{\sigma(i),i}$ con $i = 1, \ldots, n$ 1's y , en consecuencia, A sería matriz de permutación. También tenemos que $A - aP$ es una matriz no negativa gracias a la minimalidad de a.
Podemos asegurar que la matriz

$$B = (b_{ij}) = \frac{1}{1-a}(A - aP)$$

es doblemente estocástica. En efecto,

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - ap_{ij})/(1-a)$$

$$= ((\sum_{j=1}^{n} a_{ij}) - a(\sum_{j=1}^{n} p_{ij})/(1-a)$$

$$= (1-a)/(1-a)$$

$$= 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

De forma análoga se prueba que

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ij} = 1, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Ahora, $\pi(B) \leq \pi(A) - 1$, ya que B tiene entradas nulas en todas las posiciones donde A tiene ceros y, además $b_{\sigma(t),t} = 0$. Por lo tanto, haciendo uso de la hipótesis de inducción, tenemos que

$$B = \sum_{j=1}^{s-1} \gamma_j P_j,$$

donde las P_j son matrices de permutación, $\gamma_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, s-1$ y $\sum_{j=1}^{s-1} \gamma_j = 1$. Pero entonces, por lo que ya sabemos

$$A = (1-a)B + aP$$

$$= (\sum_{j=1}^{s-1} (1-a)\gamma_j P_j + aP)$$

$$= \sum_{j=1}^{s} \theta_j P_j,$$

donde $\theta_j = (1-a)\gamma_j$ para $j = 1, 2, \ldots, s-1$ y además $\theta_s = a$ y $P_s = P$. Es claro que los θ_j son no negativos y nos falta ver que su suma total es 1:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{s} \theta_j &= (\sum_{j=1}^{s-1}(1-a)\gamma_j) + a \\ &= (1-a)(\sum_{j=1}^{s-1}\gamma_j) + a \\ &= (1-a) + a \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

Una vez enunciado el teorema de Birkhoff surge una cuestión interesante:

- Cuál es el menor número, al que denotaremos $\beta(A)$, de matrices de permutación cuya combinación convexa es igual a A?

Esta es una cuestión propuesta por Farahat y Mirsky [13], la cual ha obtenido como respuesta diferentes cotas superiores que veremos a continuación.
La primera cota fue dada por Marcus y Newman [10]. Esa cota fue deducida del proceso usado en la demostración del Teorema 2.3.1. Es un proceso que consiste es "desmontar" múltiples matrices de permutación, una a una, a partir de una matriz doblemente estocástica A, de tal forma que en cada paso al menos se obtuviese una entrada adicional nula. Así, despúes de no más de $n(n-1)$ pasos, se obtiene una matriz doblemente estocástica con exactamente n entradas no nulas. Y por lo tanto, esta matriz obtenida es una matriz de permutación. Por tanto, A es una combinación convexa de a lo sumo $n(n-1)+1$ matrices de permutación. Es decir,

$$\beta(A) \leq n^2 - n + 1,$$

para toda matriz A doblemente estocástica.
Sin embargo, la igualdad no se va a alcanzar.

Posteriormente, se obtuvo otra cota que mejoraba la anterior.

Teorema 2.3.2. *Sea A una matriz doblemente estocástica, entonces*

$$\beta(A) \leq (n-1)^2 + 1.$$

Demostración. La dimensión del espacio lineal de matrices $n \times n$ es n^2. Hay, además, $2n$ condiciones lineales tanto en la suma de columnas como de filas de matrices doblemente estocásticas $n \times n$. De todas ellas, solo $2n-1$ son independientes, ya que la suma de todas las sumas de filas en una matriz es necesariamente igual a la suma de todas las sumas de columnas. Por tanto, Ω_n es un subconjunto de $\mathbb{R}^{n^2-(2n-1)}$, esto es, de $\mathbb{R}^{(n-1)^2}$. Se sigue, por el teorema de Caratheodory *, que toda matriz A de Ω_n, está en una envolvente convexa de $(n-1)^2+1$ matrices de permutación. En consecuencia,

$$\beta(A) \leq (n-1)^2 + 1.$$

□

Considerando ahora las matrices doblemente estocásticas irreducibles, podemos mejorar la cota anterior usando el índice que imprimitividad. Para ello, es necesario el siguiente resultado:

Teorema 2.3.3. *Sea* $S = \sum_{i=1}^{m} S_i$*, donde* $S_i \in \Omega_{n_i}$*, para* $i = 1, 2, \ldots, m$*. Entonces,*

$$\beta(S) \leq \sum_{i=1}^{m} S_i - m + 1.$$

Demostración. Vamos a probar el teorema anterior por inducción sobre m. Sea $m = 2$, queremos ver que se verifica que

$$\beta(S_1 \oplus S_2) \leq \beta(S_1) + \beta(S_2)) - 1.$$

Sean $S_1 = \sum_{i=1}^{r} \theta_i P_i$ y $S_2 = \sum_{j=1}^{s} \varphi_j Q_j$, donde P_i y Q_j son matrices de permutación $n_1 \times n_1$ y $n_2 \times n_2$, respectivamente. Además los coeficientes θ_i y φ_j, verifican que $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \cdots \leq \theta_r$, $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \cdots \leq \varphi_s$; $\sum_{i=1}^{r} \theta_i = \sum_{j=1}^{s} \varphi_j = 1$; y tenemos que $r = \beta(S_1)$ y $s = \beta_{S_2}$.
Vamos a usar ahora inducción sobre $r+s$. Si $r+s = 2$, entonces tenemos que $S_1 = P_1$ y $S_2 = Q_1$, y, por tanto, $S_1 \oplus S_2 = P_1 \oplus Q_1$, que es una matriz de permutación, y se verifica que

$$\beta(P_1 \oplus Q_1) \leq \beta(P_1) + \beta(Q_1) - 1 = 1,$$

esto es,

$$\beta(P_1 \oplus Q_1) = 1.$$

* *Teorema de Caratheodory.* Si un punto $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^d$ está en la envolvente convexa de un conjunto P, existe un subconjunto P' de P que consta de a lo sumo $d+1$ puntos tal que $\mathbf{x}$ está en la envolvente convexa de P'.

Ahora, supongamos que $r+s>2$. Podemos asegurar, sin pérdida de generalidad, que $\theta_1 \leq \varphi_1$. Entonces, lo que queremos es expresar

$$S_1 \oplus S_2 = \theta_1(P_1 \oplus Q_1) + (1-\theta_1)R,$$

siendo R suma directa de dos matrices doblemente estocásticas. Teniendo en cuenta que se debe verificar que $S_1 = \sum_{i=1}^{r} \theta_i P_i$ y $S_2 = \sum_{j=1}^{s} \varphi_j Q_j$, entonces nos queda:

$$S_1 \oplus S_2 = \theta_1(P_1 \oplus Q_1)$$
$$+(1-\theta_1)((\sum_{i=2}^{r} \frac{\theta_i}{1-\theta_1} P_i) \oplus (\frac{\varphi_1 - \theta_1}{1-\theta_1} Q_1 + \sum_{j=2}^{s} \frac{\varphi_j}{1-\theta_1} Q_j).$$

Por la Observación 3, tenemos que

$$\sum_{i=2}^{r} \frac{\theta_i}{1-\theta_1} P_i \in \Omega_{n_1}, \ \mathbf{y} \ \frac{\varphi_1 - \theta_1}{1-\theta_1} Q_1 + \sum_{j=2}^{s} \frac{\varphi_j}{1-\theta_1} Q_j \in \Omega_{n_2}.$$

Vemos que se verifica que $0 \leq \frac{\theta_i}{1-\theta_1} \leq 1$ y además, dado que sabemos que, $\sum_{i=1}^{r} \theta_i = \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_r = 1$, entonces se verifica que $\sum_{i=2}^{r} \frac{\theta_i}{1-\theta_1} = 1$.
Con ambas condiciones tenemos una combinación convexa de matrices de permutación P_i y, por tanto, una matriz doblemente estocástica. De la misma manera, tenemos que $0 \leq \frac{\varphi_1-\theta_1}{1-\theta_1} \leq 1$ y $0 \leq \frac{\varphi_j}{1-\theta_1} \leq 1$ y, además, puesto que $\sum_{j=1}^{s} \varphi_j = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_s = 1$, entonces $\frac{\varphi_1-\theta_1}{1-\theta_1} + \sum_{i=2}^{r} \frac{\theta_i}{1-\theta_1} = 1$, y de nuevo tenemos una matriz doblemente estocástica por se combinación convexa de matrices de permutación Q_j.
Es decir,

$$S_1 \oplus S_2 = \theta_1(P_1 \oplus Q_1) + (1-\theta_1)R,$$

siendo R suma directa de dos matrices doblemente estocásticas, donde la primera de ellas una combinación convexa de $r-1$ matrices de permutación, y la segunda, combinación convexa de s matrices. Por tanto, aplicando nuestra hipótesis de inducción a R, $\beta(R) \leq r+s-2$, y, en consecuencia,

$$\beta(S_1 \oplus S_2) \leq r+s-1.$$

Con todo ello, queda probado el teorema para $m=2$.
Suponemos cierto el teorema para $m-1$. Veamos que se cumple para m.

$$\beta(S) = \beta(\bigoplus_{i=1}^{m} S_i)$$

$$\leq \beta(\bigoplus_{i=1}^{m-1} S_i) + \beta(S_m) - 1$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m-1} \beta(S_i) - (m-1) + 1 + \beta(S_m) - 1$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \beta(S_i) - m + 1.$$

□

Ya podemos enunciar el siguiente resultado.

Teorema 2.3.4. *Si A es una matriz doblemente estocástica irreducible $n \times n$ con índice de imprimitividad h, entonces*

$$\beta(A) \leq h(\frac{n}{h} - 1)^2 + 1.$$

Demostración. Sabemos por el Teorema 2.1.10, que el índice h divide a n. Por tanto, va a existir un elemento q tal que $n = qh$. Y sea R la matriz de permutación con 1's en posiciones (i, j) para i, j satisfaciendo que $i - j \equiv q(mod\ n)$. Sea P otra matriz de permutación tal que PAP^T está en la forma Frobenious (ver Teorema 2.1.10) con bloques cuadrados $A_{12}, A_{23}, \ldots, A_{h-1,h}, A_{h1}$, todos ellos de orden n, en la superdiagonal. Entonces,

$$PAP^TR = A_{12} \oplus A_{23} \oplus \cdots \oplus A_{h-1,h} \oplus A_{h1},$$

y por el Teorema 2.3.3,

$$\beta(A) = \beta(PAP^TR)$$

$$\leq \beta(A_{12}) + \beta(A_{23}) + \cdots + \beta(A_{h-1,h}) + \beta(A_{h1}) - h + 1.$$

Pero, además, por el Teorema 2.3.2, tenemos que

$$\beta(A_{i,i+1}) \leq (q-1)^2 + 1, \quad i = 1, 2, \ldots, h-1,$$

y

$$\beta(A_{h1}) \leq (q-1)^2 + 1.$$

Por lo que, finalmente nos queda,

$$\beta(A) \leq h((q-1)^2 + 1) - h + 1$$

$$= h(\frac{n}{h} - 1)^2 + 1.$$

□

Ejemplo 7. Sea
$$A = \begin{pmatrix} 0 & C \\ I_4 & 0 \end{pmatrix} \in \Omega_8,$$
donde
$$C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Estimar el valor para $\beta(A)$.

Sea nuestra matriz
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por el Teorema 2.3.2, tenemos que
$$\beta(A) \leq (8-1)^2 + 1 = 50.$$
Queremos estudiar ahora la irreducibilidad de nuestra matriz A. Sabemos que A es irreducible si y sólo si $\forall Q$ matriz de permutación, se verifica que $Q^T AQ$ es irreducible. Vamos, por tanto, a modificar nuestra matriz aplicando una matriz de permutación P.
$$\begin{pmatrix} P^T & 0 \\ 0 & P^T \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & P^T CP \\ P^T IP & 0 \end{pmatrix}$$
Tomamos P matriz de permutación que intercambia las filas dos y tres y la matriz que obtenemos es:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esto es,

$$P^T C P = \begin{pmatrix} 0 & J_2 \\ J_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, trabajamos ahora con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & J_2 \\ 0 & 0 & J_2 & 0 \\ I_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vamos a aplicar la Proposición 1.2.4 para estudiar la irreducibilidad de A. Es decir, vamos a probar que $(I_8 + A)^7 = I_8 + A + A^2 + \cdots + A^7 > 0$. Sea A la matriz que ya conocemos, calculamos las sucesivas potencias hasta ver que todas las entradas son positivas.

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & J_2 \\ 0 & 0 & J_2 & 0 \\ I_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & J_2 \\ 0 & 0 & J_2 & 0 \\ I_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & J_2 & 0 & 0 \\ J_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_2 \\ 0 & 0 & J_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

De forma análoga calculamos las demás.

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_2 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 \\ J_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} J_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_2 \end{pmatrix}.$$

$$A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & J_2 \\ 0 & 0 & J_2 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 \\ J_2 & 0 & 0 & J_2 \end{pmatrix}.$$

Con estas 5 primeras potencias ya hemos conseguido obtener todas las entradas positivas, es decir, $I_8 + A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 > 0$. Por lo tanto, y dado que A^6 y A^7 tienen entradas positivas y nulas, entonces, es claro que

$$(I_8 + A)^7 > 0.$$

Queda así probado que A es irreducible.
Necesitamos calcular ahora su índice de primitividad. Si calulamos los valores propios de nuestra matriz A obtenemos: $\{1, -1, i, -i, 0, 0, 0, 0\}$. Como 1 es el mayor de ellos, y hay 4 con módulo 1, entonces deducimos que $h = 4$.
Hay otra forma de obtener el valor de h utilizando el siguiente resultado:

Teorema 2.3.5. *(Minc). Sea A una matriz no negativa dada en la forma*

$$\begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \dots & 0 & A_{h-1,h} \\ A_{h1} & 0 & & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

sin columnas ni filas nulas. Entonces A es irreducible con índice de primitividad h si y sólo si $A_{12}A_{23}\dots A_{k1}$ es irreducible con índice de primitividad h/k.

Vemos que en nuestro caso tenemos I_4C, entonces $k = 2$. Pero además si calculamos los valores propios y hallamos el índice de primitividad tenemos que $h/k = 2$, por lo que $h/2 = 2$, y en definitiva, $h = 4$, que es lo mismo que hemos obtenido.
Una vez conocido h podemos aplicar el Teorema 2.3.4, y nos queda:

$$\beta(A) \leq 4(\frac{8}{4} - 1)^2 + 1 = 4 + 1 = 5.$$

De esta forma, hemos reducido de manera muy amplia la cota para $\beta(A)$.
Si aplicasemos el Teorema 2.3.3 obtendríamos una cota de 6,

$$\beta(A) \leq \beta(I_4) + \beta(J_2) + \beta(J_2) - 3 + 1 = 6,$$

que es superior a la hallada anteriormente. Por tanto, nos quedamos con la menor cota obtenida, y podemos estimar el número mínimo de matrices de permutación cuya combinación convexa es igual a A como:

$$\beta(A) \leq 5.$$

2.4. La conjetura de van der Waerden

En 1926 van der Waerden[17] planteó el problema de determinar el mínimo de la permanente de las matrices de Ω_n, el poliedro de matrices doblemente estocásticas $n \times n$.
Por una parte, tenemos:

Teorema 2.4.1. *La permanente de una matriz doblemente estocástica es positiva.*

Demostración. Sea A una matriz doblemente estocástica, entonces $A = (a_{ij}) \geq 0$. Por esto y la definición de permanente de una matriz, tenemos que

$$per(A) \geq 0.$$

Lo que queremos ver es que, $per(A) > 0$. Para ello es suficiente ver que, uno de los sumandos es distinto de 0, es decir, que la matriz A tiene, al menos, una diagonal positiva.
Por el Teorema 2.1.6, tenemos que toda matriz doblemente estocástica tiene una diagonal positiva, por tanto, A tiene una diagonal positiva, y queda probado que

$$per(A) > 0.$$

$\square$

Van der-Waerden conjeturó que:

$$per(A) \geq n!/n^n,$$

para toda matriz $A \in \Omega_n$. La igualdad se da únicamente si $A = J_n$.

Las pruebas de esta conjetura fueron publicadas en 1980 por B. Gyires [7] y en 1981 por G.P. Egorychev [4] y D.I. Falikman [5]. Además por este trabajo, Egorychev y Falikman ganaron el Premio Fulkerson en 1982 [14].

Capítulo 3

Aplicaciones

Podemos encontrar diferentes aplicaciones de las matrices doblemente estocásticas así como de la mayorización.
De todas ellas nos centraremos en dos que estudiaremos más en profundidad.

3.1. El problema de Asignación

La primera que vamos a ver es el problema de asignación.
Se trata de un caso particular del problema de transporte donde los asignados son recursos destinados a la realización de tareas, los asignados pueden ser personas, máquinas, vehículos, plantas o períodos de tiempo. En estos problemas la oferta en cada origen es de valor 1 y la demanda en cada destino es también de valor 1. El problema a resolver es el siguiente:

$$\min \sum_i \sum_j c_{ij} X_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1, \text{ para } i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = 1, \text{ para } j = 1, 2, \ldots, n$$

$$X_{ij} \geq 0 \text{ para } i = 1, \ldots, m \text{ y } j = 1, \ldots, n.$$

Vemos que las condiciones que debe verificar son las de una matriz doblemente estocástica. De hecho, el problema de asignación se trata de un algoritmo cuya solución es una matriz doblemente estocástica.
Para su resolución se desarrolló un algoritmo particular muy eficiente, conocido como el método Húngaro. Los valores de m y n pueden ser iguales o distintos. En este último caso es necesario añadir nudos ficticios para igualar

el número de filas y columnas, lo cual se conoce como balancear la matriz. Es un problema que se puede entender como la asigancián de máquinas a tareas para minimizar un costo total.
Veamos en que consiste el método Húngaro.

3.1.1. Método Húngaro

Este método fue desarrollado por Harold Kuhn en 1955. En este método partimos de una solución infactible primal, X_{ij}, y llegamos a obtener una solución factible dual, u_i, v_j, mediante transformaciones de filas y columnas reducidas en una matriz de coste C.

Vamos a ver que pasos sigue este método aplicándolo al siguiente ejemplo.

Ejemplo 8. Tenemos 5 máquinas y 5 tareas a realizar, con una matriz de coste $C = (c_{ij})$:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 2 & 7 & 1 \\ 7 & 9 & 8 & 7 & 2 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & 9 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 9 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

donde c_{ij} es el coste de la i-ésima máquina para realizar la j-ésima tarea.

- PASO 1. Balanceamos la matriz, aunque es este caso ya lo está pues $n = 5 = m$. Restamos a cada fila el mínimo de dicha fila. Creamos para ello un vector u de elementos mínimos y obtenemos C'.

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \implies C' = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 & 6 & 0 \\ 5 & 7 & 6 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

  De la misma forma, creamos un vector v con los mínimos de cada columna. Restamos a cada columna su mínimo.

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \implies C'' = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 5 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- PASO 2. Determinar un conjunto independiente maximal.

  (i) Empezando por filas y luego columnas, se selecciona aquella que tenga un único cero. Si no existe pues con 2 ceros, 3 ceros,...

(ii) Si en la fila o columna hay r ceros se marca el 0 asociado a la casilla con menor suma de índices. Se elimina la fila y columna del cero marcado.

(iii) Si en la submatriz que queda hay algún cero repetimos este paso hasta que la submatriz no contenga ningún cero.

Si se tiene un conjunto independiente maximal con m ceros marcados siendo $m < n$ ir al paso 3.
En otro caso se ha encontrado la solución óptima.

En nuestro ejemplo vemos que en la segunda fila hay un único cero, por tanto lo marcamos y eliminamos dicha fila y columna:

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 & 4 & \\ & & & & 0^* \\ 2 & 4 & 3 & 0 & \\ 2 & 0 & 5 & 0 & \\ 3 & 1 & 7 & 2 & \end{pmatrix}$$

En la submatriz obtenida vemos que vuelve a haber una fila con un único cero. Repetimos el proceso:

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 & & \\ & & & & 0^* \\ & & & 0^* & \\ 2 & 0 & 5 & & \\ 3 & 1 & 7 & & \end{pmatrix}$$

Y se vuelve a repetir una tercera vez:

$$\begin{pmatrix} 0 & & 0 & & \\ & & & & 0^* \\ & & & 0^* & \\ & 0^* & & & \\ 3 & & 7 & & \end{pmatrix}$$

Como aún queda una fila con ceros, debemos volver a repetir el proceso:

$$\begin{pmatrix} 0^* & & & & \\ & & & & 0^* \\ & & & 0^* & \\ & 0^* & & & \\ & & 7 & & \end{pmatrix}$$

La submatriz (7) no tiene ceros. Hay 4 ceros marcados y $m = 4 < 5$. Vamos al paso 3.

- PASO 3. Cubrir todos los ceros de la matriz. Para ello debemos seguir las siguientes pautas.

  (i) Determinar m líneas horizontales que cubren todos los ceros marcados.

  (ii) Buscamos el cero no cubierto más a la izquierda, de forma que tachamos la fila corresponiente con una línea vertical eliminando la horizontal correspondiente al cero marcado por el que pasa. Se repite el proceso hasta que todos los ceros estén cubiertos.

$$\begin{pmatrix} 0^* & 7 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 5 & 3 & 0^* \\ 2 & 4 & 3 & 0^* & 0 \\ 2 & 0^* & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Hay tres tipos de elementos:

(i) No cubiertos por ninguna línea.

(ii) Cubiertos por una horizontal o vertical.

(iii) Cubiertos por 2 en forma de cruz.

Se calcula el mínimo de los elementos de tipo (i) y se suma a los de tipo (iii). Volvemos al paso 2.
$\text{mín}\{4,6,5,3,3,1,7,2\} = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

PASO 2.

$$\begin{pmatrix} 0^* & 7 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 0^* \\ 2 & 4 & 3 & 0^* & 1 \\ 2 & 0^* & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La submatriz (6) no tiene ceros. Hay 4 ceros marcados y $m = 4 < 5$.

Vamos al paso 3.

$$\begin{pmatrix} 0^* & 7 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 0^* \\ 2 & 4 & 3 & 0^* & 1 \\ 2 & 0^* & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Buscamos de nuevo el mínimo.

$\text{mín}\{3, 2, 2, 2, 4, 3, 5, 6, \} = 2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

PASO 2.

$$\begin{pmatrix} 0 & 9 & 0^* & 6 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 2 & 0^* \\ 0^* & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0^* & 1 \\ 0 & 0^* & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hay 5 ceros marcados y $m = 5$. Paramos, puesto que ya hemos alcanzado la solución óptima.

La asignación óptima es,

$$X = (X_{ij}) = \begin{pmatrix} & & 1 & & \\ & & & & 1 \\ 1 & & & & \\ & & & 1 & \\ & 1 & & & \end{pmatrix}$$

Esta solución no es única.
Además vemos que como ya hemos comentado, la matriz final es una matriz cuyas filas y columnas suman 1, es decir, es una matriz doblemente estocástica. En particular, es una matriz de permutación.

Encontramos como caso particular del problema de asignación pero, a su vez, una aplicación de las matrices doblemente estocásticas, la teoría de la comunicación referente a los *satellite -switched* y a los *time-division multiple-access systems*(SS/TDMA systems). Consideramos un satélite de la tierra equipado con k *transponders*. El satélite se emplea para proporcionar información de m estaciones de origen, $x_1, \ldots, x_m$, a n estaciones de destino, $y_1, \ldots, y_n$.

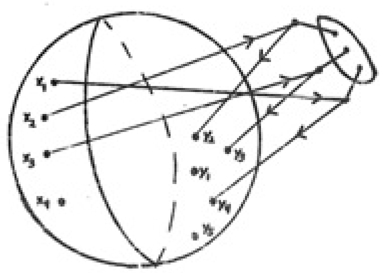

Figura 3.1: Esquema visual del problema a resolver.

3.2. Análisis combinatorio. Grafos

Esta aplicación está directamente relacionada con la mayorización, pero en el Capítulo 2 ya hemos estudiado que la mayorización está relacionada, a su vez, con las matrices doblemente estocásticas.

La mayorización se aplica en diferentes temas relacionados con el análisis combinatorio, como por ejemplo, en la teoría de grafos, en la teoría de flujos de red o en el estudio de matrices de incidencia.
Vamos a empezar viendo algunos conceptos de las tres ramas.

3.2.1. Algunos conceptos sobre grafos, redes y matrices de incidencia

Definición 25. Un *grafo dirigido* consiste de un conjunto X de puntos no vacío llamados *vértices o nodos*, y un conjunto U de pares (x, y) ordenados donde $x, y \in X$. Los pares (x, y) se llaman arcos o bordes del grafo.

Trabajaremos únicamente con grafos finitos, es decir, grafos con un número finito de vértices, y nos referiremos a G como "grafo" en lugar de "grafo dirigido".

Asociada a cada grafo finito $G = (X, U)$ hay siempre una matriz de incidencia asociada.

Definición 26. Una *matriz de incidencia* es una matriz en cuyas entradas hay solo 0's o 1's.

Para un orden dado $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de puntos en X, la matriz $A = (a_{ij})$ con

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } (x_i, x_j) \in U \\ 0, & \text{si } (x_i, x_j) \notin U \end{cases}$$

se llama matriz de incidencia asociada. Por ejemplo, sea $n = 5$ y $U = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_1), (x_1, x_5), (x_5, x_4)\}$, entonces la matriz A asociada es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En la teoría de redes, se tiene una grafo dirigido finito $G = (X, U)$ sin bucles, es decir, no existen arcos de la forma (x, x). Asociado a cada arco (x, y) hay un número no negativo $c(x, y)$ llamado *capacidad* del arco. De esta forma, el grafo se denomina *red*.

Conocidas ya ciertas nociones vamos a centrarnos en un problema particular de grafos, como es la coloración de grafos.

3.2.2. Coloración de grafos

Aunque los problemas de coloración de bordes para grafos finitos es, en general, bastante difícil, se conocen algunos resultados obtenidos por Folkman y Fulkerson (1969) para grafos bipartitos, grafos cuyos vértices se pueden separar en dos conjuntos disjuntos U y V. También obtuvieron un resultado para grafos generales incluyendo la mayorización.

La coloración de bordes de un grafo G consiste en la asignación de colores a los bordes de G de forma que cualesquiera dos bordes que compartan vértice tengan diferentes colores.
Una secuencia $p_1, \ldots, p_n$ de enteros positivos se dice *color-factible*(del término inglés original *color-feasible*) en el grafo G si existe una coloración de los bordes de G en la cual exactamente p_i bordes tengan color i para $i = 1, \ldots, l$.

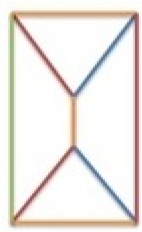

Figura 3.2: Posible coloración de los bordes de un grafo.

En este grafo vemos que los colores naranja y rojo se emplean en 3 bordes, el azul en 2, y el verde sólo en 1. Por tanto, los enteros $(3, 3, 2, 1)$ son color-factibles para el grafo G.

Además las nociones de circuito y cadena son útiles y necesarias para demostrar un teorema posterior.
Un *circuito* es una secuencia de bordes $(x_{i_1}, x_{i_2}), (x_{i_2}, x_{i_3}), \dots, (x_{i_n}, x_{i_1})$ con $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$ vértices diferentes todos ellos. Una *cadena* es una secuencia de bordes $(x_{i_1}, x_{i_2}), \dots, (x_{i_{n-1}}, x_{i_n})$ de nuevo con $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$ vértices diferentes.

Teorema 3.2.1. *(Folkman y Fulkenson 1969). Sea $G = (X, U)$ un grafo arbitrario y suponemos que $P = (p_1, \dots, p_n)$ es color-factible en G. Si*

$$P \succ Q = (q_1, \dots, q_n),$$

entonces Q también es color-factible en G.

El grafo de la Figura 3.2 se correponde con los enteros $(3, 3, 2, 1)$. Como $(3, 3, 2, 1) \succ (3, 2, 2, 2)$, entonces por el Teorema 3.2.1 se sigue que los enteros $(3, 2, 2, 2)$ también son color-factibles para G. Lo vemos en la siguiente figura:

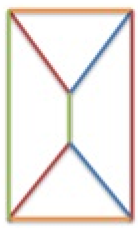

Figura 3.3: Otra posible coloración para el mismo grafo.

Antes de demostrarlo, veamos lo siguiente.

Definición 27. Si $b_1 \geq \dots \geq b_n$ son enteros y $b_i > b_j$, entonces la transformación

$$b_i^{'} = b_i - 1,$$

$$b_j^{'} = b_j + 1,$$

$$b_k^{'} = b_k, \quad k \neq i, j,$$

se llama *transferencia*,(viene de la palabra inglesa *transfer*) de i a j.

Lema 3.2.2. *(Muirhead,1903). Si $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ son enteros y $a \prec b$, entonces a se puede obtener de b mediante sucesivas aplicaciones de un número finito de transferencias.*

Demostración. Supongamos que $a_1 \geq \cdots \geq a_n$ y $b_1 \geq \cdots \geq b_n$, y que $a \neq b$. Sea l el entero mas grande tal que

$$\sum_{i=1}^{l} a_i < \sum_{i=1}^{l} b_i.$$

Entonces, $a_{l+1} > b_{l+1}$, y hay un entero $k < l$ para el cual $a_k < b_k$. Por lo tanto, tenemos

$$b_k > a_k > a_{l+1} > b_{l+1}.$$

Sea $b^{'}$ obtenida a partir de b mediante un transferenia de k a $l+1$. Entonces $a \prec b^{'} \prec b$, y repitiendo el mismo proceso un número finito de veces acabaremos obteniendo el vector a. □

Vemos que este lema es un caso particular del Lema 2.2.3, pero, en este caso, para números enteros.

Ahora ya podemos demostrar el Teorema 3.2.1.

Demostración. Por el Lema anterior, basta probar que si $P^{'}$ se puede obtener de P mediante un número finito de transformaciones de i a j, entonces $P^{'}$ es color-factible.
Sea $U = U_1 \cup \cdots \cup U_n$, donde U_k consta de los bordes p_k con color k, $k = 1, \ldots, n$. Entonces, $G_k = (X, U_k)$ consta de bordes desconectados, puesto que no hay ningún vértice donde coincida un mismo color. Supongamos que $p_i > p_j$ y consideramos $G_i + G_j = (X, U_i \cup U_j)$. Cada componente conectada de este subgrafo debe estar en algún circuito o en una cadena con los bordes alternando en U_i y U_j, puesto que no se puede pasar dos veces por un mismo vértice. Como $p_i > p_j$, debe existir al menos una cadena que tenga el primer y el último borde en U_i, puesto que de no ser así se verificaría que $p(i) \leq p(j)$, lo cual es una contradicción. Sean $U_i^{'}$ y $U_j^{'}$ obtenidas, respectivamente, de U_i y U_j intercambiando los bordes en esta cadena. Esto produce una coloración de G en la cual se cumple que $p_i^{'} = p_i - 1$ bordes tienen color i y $p_j^{'} = p_j + 1$ bordes tienen color j. □

Apéndice A

Acerca de la bibliografía utilizada

La gran mayoría de la información de la memoria ha sido extraída del libro *Nonnegative Matrices* de Mink, salvo la Sección (2.2) que ha sido trabajada de acuerdo al libro de Marshall y Olkin, *Theory of Majorization and Its Applications*, al igual que la aplicación de grafos dada en el Capítulo 3. Cabe mencionar que la aplicación del algortimo de asignación está sacada de lo estudiado en la asignatura de Programación Matemática impartida en 4 curso de la titulación. Por último, comentar que a lo largo de la memoria se pueden encontrar diferentes ejemplos y ejercicios resueltos, todos ellos trabajados y obtenidos a partir del libro de Mink nuevamente.
Junto a los dos libros ya mencionados también se ha trabajado con el libro *The Theory of Matrices* de Lancaster y Tismenetsky para dar algunas definiciones y, en particular, la demostración del Teorema 1.4.3.
En la bibliografía se pueden encontrar más citas conocidas a partir de estos libros y algún enlace de Internet.

Bibliografía

[1] R.B. Bapat y T.E.S. Raghavan, *Nonnegative Matrices and Applications*. Ed. Board. Estados Unidos, 1997.

[2] G. Birkhoff, Three observations on linear algebra, Universidad Nacional de Tacumán, Rev. Ser. A 5 (1946), 147-151.

[3] Richard A. Brualdi, Some applications of doubly stochastic matrices, Nueva York, 77-100, 1988.

[4] G. P. Egorycev, A solution of van der Waerden's permanent problem, Dokl. Akad. Nauk SSSR Sibirsk 258 (1981), 1041-1044 (in Russian). Translated in Soviet Math. Dokl. 23 (1981), 619-622.

[5] D. I. Falikman, A Proof of the van der Waerden conjecture on the permanent of a doubly stochastic matrix, Akademiya Nauk Soyuza SSR (in Russian) 29 (6): 931938, 957.

[6] H.K. Farahat y L. Mirsky, *Permutation endomorphisms and refinement of a theorem of Birkhoff*, Proc. Cambridge Philos. Soc 56 (1960), 322-328.

[7] B. Gyires, The common source of several inequalities concerning doubly stochastic matrices, Publicationes Mathematicae Institutum Mathematicum Universitatis Debreceniensis 27 (1980) (3-4): 291304.

[8] D. Köning, ber Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre, Math. Ann. 77 (1916), 453-465.

[9] Peter Lancaster y Miron Tismenetsky, *The Theory of Matrices*. Academic Pres. Reino Unido, 1985.

[10] M. Marcus y M. Newman, On the minimun of the permanent of a doubly stochastic matrix, Duke Math. J. 26 (1959), 61-72.

[11] Albert W. Marshall e Ingram Olkin, *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*. Estados Unidos, 1979.

[12] Henry Minc, *Nonnegative Matrices*. Canadá, 1988.

[13] L. Mirsky, *Results and Problems in the Theory of Doubly-Stochastic Matrices*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 1 (1963), 319-334.

[14] Fulkerson Prize, Mathematical Optimization Society, retrieved 2012-08-19.

[15] Walter Rudin, *Principios de Análisis Matemático.* McGraw-Hill, México,1980.

[16] María Sivesind Melhum, Doubly Stochastic Matrices and the Assignment Problem, University of Oslo, 2012.

[17] B.L. van der Waerden, Aufgabe 45, Jber. Deutsch. Math-Verein. 35(1926), 117.