# Exámenes resueltos de Matemáticas III LADE

## Exámenes propuestos en la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Mª Esther Gutiérrez
Juan Carlos Santos

EKONOMIA ETA ENPRESA
ZIENTZIEN FAKULTATEA
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
Y EMPRESARIALES

eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

ISBN: 978-84-9860-461-0

ISBN: 978-84-9860-461-0
Bilbao, noviembre 2010
www.argitalpenak.ehu.es

# Introducción

En la asignatura de Matemáticas III, en la Licenciatura en Administración y Dirección de Empresas, se complementan los estudios de Algebra Lineal introducidos en Matemáticas I y se estudian en profundidad los problemas de programación lineal, imprescindibles en estos estudios. En la primera parte de esta asignatura se aborda el problema de la diagonalización de matrices y el estudio de las formas cuadráticas. La segunda parte de la asignatura se dedica a la programación lineal, incidiendo especialmente en el análisis gráfico de este tipo de tipo de problemas y en el método simplex, que permite resolver estos problemas cuando el número de variables aumenta. Así mismo, se insiste en el correcto planteamiento de estos problemas y en el análisis de sensibilidad. Todos estos conceptos son necesarios en los estudios de Administración y Dirección de Empresas (LADE).

Esta publicación recoge la resolución de todos los exámenes propuestos en la asignatura de Matemáticas III, Licenciatura en Administración y Dirección de Empresas, en la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la UPV\EHU entre los cursos 2001-2002 y 2009-2010. Los exámenes están dispuestos en el orden en que se realizaron, esto es, los últimos que aparecen son los más recientes.

# Programa de Matemáticas III

## 2º curso de la Licenciatura en Administración y Dirección de Empresas

## I. Álgebra Lineal

Conceptos previos: Coordenadas de un vector respecto a una base. Matriz de paso. Bases de referencia ortonormales. Matrices ortogonales.

Diagonalización: Planteamiento del problema. Valores propios y vectores propios. Condiciones de diagonalizabilidad. Polinomio característico. Método operativo de diagonalización. Diagonalización de matrices simétricas.

Formas Cuadráticas: Definición, representación matricial y clasificación. Criterio de los menores principales.

## II. Programación Lineal

Introducción: Planteamiento general del problema.-Teoremas básicos. Análisis gráfico.

Método Simplex: Forma estándar. Soluciones básicas factibles. Base teórica del método simplex. Sistematización del análisis mediante tablas. Formulas de paso de una tabla a otra. Multiplicidad de óptimos. Solución básica factible inicial. Método de las penalizaciones. El problema de minimización. Análisis post óptimo.

## Referencia Bibliográfica Básica:

*Temas de Matemáticas para Economistas*. Autores: F. Valenciano y M. Aramendia, Editorial: Servicio Editorial de la UPV, 1991.

## Examen de Matemáticas III
## LADE enero de 2002

**1.**

a) Sea $A=\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & 0\\ b & 0 & 1\end{pmatrix}$.

i) ¿Para qué valores de *a* y *b* es $(2,1,0)$ un vector propio de la matriz *A*?

ii) ¿Para qué valores de *a* y *b* es 1 un valor propio de la matriz *A*?

iii) ¿Para qué valores de *a* y *b* es la matriz *A* diagonalizable?

b) Sea $M(Q)=\begin{pmatrix}a & 2 & 0\\ 2 & -1 & 3\\ 0 & 3 & a\end{pmatrix}$.

Clasificar la forma cuadrática *Q* para los distintos valores de *a*.

**a) i)** (2,1,0) es un vector propio de la matriz A si cumple: *AM*(2,1,0)=*λM*(2,1,0) para algún número real $\lambda$. Es decir, si

$$\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & 0\\ b & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2+a=2\lambda\\ 1=\lambda\\ 2b=0\end{cases}\Rightarrow a=b=0;\quad \lambda=1$$

**ii)** 1 es un valor propio de la matriz A si cumple: $|\mathrm{A}-1\cdot \mathrm{I}|=0$. Esto es, si

$$\begin{vmatrix}1-1 & a & 0\\ 0 & 1-1 & 0\\ b & 0 & 1-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & a & 0\\ 0 & 0 & 0\\ b & 0 & 0\end{vmatrix}=0.$$

Luego 1 es un valor propio de la matriz A para todo valor de *a* y *b*.

**iii)** El polinomio característico, |*A*-*λI*|, es:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & a & 0\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ b & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^3 \quad \text{y} \quad (1-\lambda)^3=0\Leftrightarrow \lambda=1\,(\textit{triple})$$

Entonces A es diagonalizable si y sólo si *dimS*(1)=3. Como *dim*S(1)=3 - *rg*(A-1·I), se tiene que A es diagonalizable si y sólo si *rg*(A-1·I) = 0.

$$A-1\cdot I=\begin{pmatrix}0 & a & 0\\ 0 & 0 & 0\\ b & 0 & 0\end{pmatrix}$$, luego A es diagonalizable si y sólo si **$a$=$b$=0.**

**b)** $M(Q)=\begin{pmatrix}a & 2 & 0\\ 2 & -1 & 3\\ 0 & 3 & a\end{pmatrix}$. Criterio de los menores principales:

de orden 1: $a$, -1, $a$

de orden 2 : $-a-4$, $a^2$, $-a-9$

de orden 3: $|M(Q)|=-a^2-13a=-a(a+13)$

Si $a > -9$ entonces tenemos un menor de orden dos negativo, $-a-9<0$, y por tanto es indefinida.

Si $-13 < a \leq -9$, los menores de orden uno son negativos, los de orden dos positivos, pero el de orden tres también es positivo, luego Q es una forma cuadrática indefinida.

Si $a = -13$, los menores de orden uno son negativos, los de orden dos positivos y el de orden tres se anula, luego Q es una forma cuadrática semidefinida negativa.

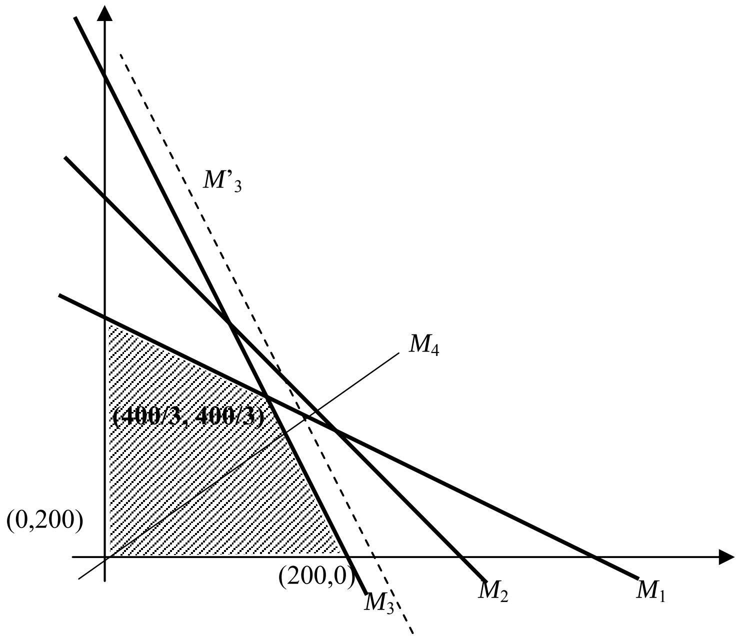
Si $a < -13$, los menores de orden uno son negativos, los de orden dos positivos y el de orden tres negativo, luego Q es una forma cuadrática definida negativa.

**2.** A partir de trigo, lúpulo y malta, una empresa fabrica dos tipos de cerveza: rubia y negra. Actualmente dispone de 40 kg de trigo, 30 kg de lúpulo y 40 kg de malta. Un litro de cerveza rubia se vende a 40 céntimos y requiere 0.1 kg de trigo, 0.1 kg de lúpulo y 0.2 kg de malta. Un litro de cerveza negra se vende a 50 céntimos, y se necesitan 0.2 kg de trigo, 0.1 kg de lúpulo y 0.1 kg de malta. La empresa puede vender toda la cerveza que produce.

a) Formula un programa de programación lineal para maximizar los ingresos de la empresa, y halla la solución óptima de dicho programa.
b) Encuentra el intervalo de los valores del precio de la cerveza rubia para que la solución óptima siga siendo la misma que en el apartado i).
c) En el caso de que dispusiera de 4 kg más de malta, ¿cuál sería la solución óptima? ¿Cuánto estaría dispuesta a pagar esta empresa por esos 4 kg de más?
d) Si un estudio de mercado recomendara que la cerveza negra no superara el 40% de la producción total, ¿cuál sería la solución óptima?

**a)** $x_1$ denota el número de litros de cerveza rubia y $x_2$ el número de litros de cerveza negra,

$$\max\ 0,4x_1+0,5x_2$$
$$\begin{cases} 0,1x_1+0,2x_2\le 40 \\ 0,1x_1+0,1x_2\le 30 \\ 0,2x_1+0,1x_2\le 40 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$




La restricción 2 no afecta al conjunto de soluciones factibles. Además:

$m_3$=-2 < $m_f$=-4/5 < $m_1$=-1/2 (ó $|m_1|$=1/2 < $|m_f|$=4/5 < $|m_3|$=2).

Luego la solución es el punto de corte de las restricciones 1 y 3, es decir, el punto **(400/3, 400/3).** En ese punto los ingresos son **120€**.

**b)** Para que la solución sea el mismo punto se necesita que la pendiente de la función objetivo esté entre las pendientes de las restricciones 1 y 3, es decir,

-2 < $m_f$=-$p_h$/0,5 < -1/2 (ó 1/2 < $|m_f|$=$p_h$/0,5 < 2)

donde $p_h$ es el precio de la cerveza rubia. Entonces, **0,25 < $p_h$ < 1**.

**c)** La nueva restricción $M'_3$ es: $0,2x_1+0,1x_2\le 44$ y la nueva solución es el punto de corte de $M_1$ con $M_3$ esto es: **(160, 120)** y el ingreso **124€**; como en el caso inicial los ingresos eran 120, la empresa estaría dispuesta a pagar **4€** por los 4 kg de malta.

**d)** Ahora tenemos una nueva restricción $M_4$: $x_2 \le 0,4(x_1+x_2)$ y la nueva solución es el punto de corte de $M_3$ y $M_4$, esto es: **(150,100)**.

**3.** Sea el problema

$$\max\ (4x_1+x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

a) Completar la siguiente tabla sabiendo que corresponde a una solución básica factible de este problema:

| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | ***b*** |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | -1 | | 4 |
| 1 | | 1 | | 4 |
| -3 | | -1 | | 4 |

b) La siguiente es una tabla óptima de este problema:

| | | 4 | 1 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | ***b*** |
| 4 | $A_1$ | 1 | 1/2 | 0 | 1/2 | 4 |
| 0 | $A_3$ | 0 | -1/2 | 1 | 1/2 | 0 |
| | | 0 | 1 | 0 | 2 | 16 |

i) ¿Cambia la solución óptima si el término independiente de la segunda restricción es 12?

ii) ¿Cuál tiene que ser el término independiente de la segunda restricción para que el óptimo sea el punto (8,0)?

iii) Si el coeficiente de $x_2$ en la función objetivo es 6 ¿varía la solución óptima? En caso afirmativo, calcula la nueva solución óptima.

iv) ¿Cuál tiene que ser el coeficiente de $x_1$ en la función objetivo, si se mantienen el resto de los datos del problema, para que el valor óptimo sea 24?

**a)** La matriz de coeficientes es: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. La base tiene que ser $A_2$ y $A_4$ ya que son las únicas columnas que pueden ser (1,0,0) y (0,1,0) respectivamente. Luego sólo falta por determinar un coeficiente de $A_1$ respecto de esta base. $(1,2)=a(1,1)+1(0,1)$, luego $a = 1$ y la tabla queda así:

| | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | **b** |
|---|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{A_2}$ | ***1*** | 1 | -1 | ***0*** | 4 |
| $\boldsymbol{A_4}$ | 1 | ***0*** | 1 | ***1*** | 4 |
| | -3 | ***0*** | -1 | ***0*** | 4 |

**b) i)** Para estudiar los cambios en el término independiente de la segunda restricción tenemos que considerar la columna $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ en la matriz de coeficientes, esta columna es $A_4$. Entonces, si el término independiente de la segunda restricción es 8+b la nueva columna **b** queda así:

| ***b*** |
|---|
| 4+ b/2 |
| b/2 |
| 16+2b |

Si el término independiente de la segunda restricción es 12 entonces b=4 y por tanto la tabla óptima es del punto (6,0,2,0) y la solución óptima es (6,0). Luego si cambia (en el problema inicial la solución optima es (4,0)).

**ii)** Para que la solución óptima sea el punto (8,0) se tiene que cumplir que (se deduce inmediatamente del apartado anterior) 4+ b/2 =8, luego b=8 y por tanto el término independiente de la segunda restricción tiene que ser 16. Como para b=8 la nueva columna **b** es

| **b** |
|---|
| 8 |
| 4 |
| 32 |

La tabla óptima es la asociada al punto (8,0,4,0) y el óptimo es el punto (8,0).

**iii)** La nueva tabla es:

| | | 4 | ***6*** | 0 | 0 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | **b** | θ | |
| 4 | $A_1$ | 1 | 1/2 | 0 | 1/2 | 4 | 8 | → |
| 0 | $A_3$ | 0 | -1/2 | 1 | 1/2 | 0 | | |
| | | 0 | ***-4*** | 0 | 2 | 16 | | |
| | | | ↑ | | | | | |

Como –4<0, no es una tabla óptima, así que la solución cambia. Para calcularla

| | | 4 | 6 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | **b** |
| 6 | $A_2$ | 2 | 1 | 0 | 1 | 8 |
| 0 | $A_3$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 4 |
| | | 8 | 0 | 0 | 6 | 48 |

Esta ya es una tabla óptima, luego la nueva solución es (0,8).

**iv)**

| | | ***n*** | 1 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | **b** |
| ***n*** | $A_1$ | 1 | 1/2 | 0 | 1/2 | 4 |
| 0 | $A_3$ | 0 | -1/2 | 1 | 1/2 | 0 |
| | | 0 | -1+n/2 | 0 | n/2 | ***4n*** |

Para que 4***n***=24, tiene que ser ***n***=6 y para este número la última fila no tiene números negativos, así que es una tabla óptima.

# Examen de Matemáticas III

## LADE junio de 2002

**1.** Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 3 & 8 \\ 3 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

a) ¿Para qué valores de *a* es diagonalizable la matriz *A*?

b) Sea la forma cuadrática *Q(x)*=${}^t$*M(x)AM(x)*. Halla *M(Q)* y clasifica dicha forma cuadrática para los diferentes valores de *a*.

**a)** El polinomio característico de *A* es:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & 3 & 8 \\ 3 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)\left[(a-\lambda)^2 - 9\right] = (a-\lambda)\left(\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 - 9\right).$$

Luego los valores propios son: $\lambda_1 = a,\ \lambda_2 = a+3,\ \lambda_3 = a-3$. Como son tres números reales y distintos para todo valor de *a*, se tiene que la matriz tiene tres valores propios simples y por tanto es diagonalizable para cualquier valor de *a*.

**b)** $M(Q) = \begin{pmatrix} a & 3 & 4 \\ 3 & a & 0 \\ 4 & 0 & a \end{pmatrix}$. Criterio de los menores principales:

- de orden 1: $\{a, a, a\}$

- de orden 2: $\{a^2 - 9, a^2 - 16, a^2\}$

- de orden 3: $|M(Q)| = a(a^2 - 25)$

*Q* <u>es definida positiva si todos los menores son positivos (</u>>0), esto es: $a>0$, $a^2-9>0$, $a^2-16>0$, $a^2>0$, $a(a^2-25)>0$. Solución: ***a* > 5**.

*Q* <u>es semidefinida positiva si</u>: $a\geq 0$, $a^2-9\geq 0$, $a^2-16\geq 0$, $a^2\geq 0$, $a(a^2-25)=0$. Solución: ***a* = 5**.

*Q* <u>es definida negativa si</u> : $a<0$, $a^2-9>0$, $a^2-16>0$, $a^2>0$, $a(a^2-25)<0$. Solución: ***a* < -5**.

*Q* <u>es semidefinida negativa si</u>: $a\leq 0$, $a^2-9\geq 0$, $a^2-16\geq 0$, $a^2\geq 0$, $a(a^2-25)=0$. Solución: ***a* = -5**.

Y *Q* <u>es indefinida</u> en los demás casos. Solución: **–5 < *a* < 5**.

**2.** Una empresa produce mesas y sillas de un tipo determinado, de las cuales obtiene un beneficio de 20 y 25 euros respectivamente. El proceso de fabricación requiere que cada mesa o silla pase por tres divisiones distintas de la empresa. Una mesa necesita 1, 3 y 1 horas en las divisiones *A*, *B* y *C* respectivamente, mientras que una silla requiere 2 h., 1 h. y 3 h. respectivamente. Las divisiones *A* y *B* trabajan un máximo de 16 y 18 horas diarias respectivamente mientras que la *C* trabaja como mínimo 9 horas diarias.

a) Encuentra la producción óptima diaria si la empresa se propone maximizar el beneficio.

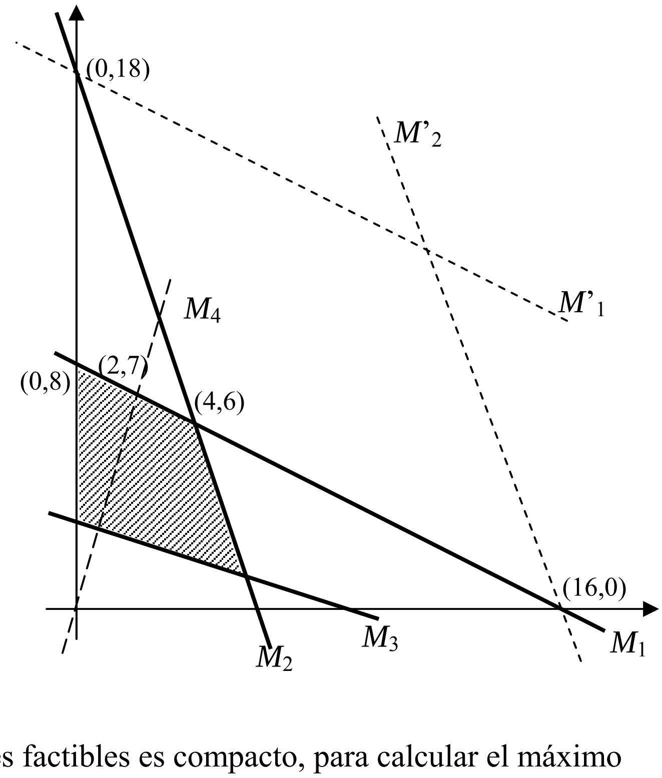
b) ¿Cómo debería ser el beneficio de cada mesa para que lo mejor para la empresa fuera producir el máximo número posible de sillas?

c) Bajo las condiciones iniciales, si la empresa pudiera aumentar una hora de trabajo diario en sólo una de las divisiones *A* y *B*, ¿cuál elegiría?

d) Tras un estudio de ventas la empresa decide fabricar por cada 2 mesas al menos 7 sillas, ¿cambiaría la solución óptima inicial?

$x_1$ número de mesas y $x_2$ número de sillas:

$$\max 20x_1 + 25x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ 3x_1 + x_2 \leq 18 \\ x_1 + 3x_2 \geq 9 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$




**a)** Como el conjunto de soluciones factibles es compacto, para calcular el máximo podemos evaluar en los vértices:

$f(0,8)$=200€ $f(0,3)$=75€ $f(45/8,9/8)$=140,625€ $f(4,6)$=230€

**Solución (4,6) y valor óptimo 230€**.

**b)** La pendiente de las curvas de nivel de la función objetivo tiene que coincidir con la pendiente de la primera restricción:

$$-\frac{a}{25} = -\frac{1}{2}\,;\ a = 25/2=12{,}5.$$

Si el beneficio en cada mesa es de 12,5 la solución óptima es el segmento $\overline{(0,8)(4,6)}$ y si el beneficio es menor que 12,5 la solución es el punto (0,8) y por tanto sólo producirá sillas.

**c)** Se calculan los precios sombra, y la solución es el mayor de ellos.

División A: $x_1+2x_2 \leq 16$

El óptimo: (4,6)→(0,18)

El término independiente: *16→36*

$$\lambda_1 = \frac{f(0,18) - f(4,6)}{20} = \mathbf{11€}$$

División B: $3x_1+x_2 \leq 18$

El óptimo (4,6)→(16,0)

El término independiente*: 18→48*

$$\lambda_2 = \frac{f(16,0) - f(4,6)}{30} = \mathbf{3€}$$

**Luego elegiría la división A.**

**d)** La nueva restricción es $\mathbf{7x_1 \leq 2x_2}$. El anterior óptimo, (4,6), ya no es solución factible, luego la solución óptima cambia y el nuevo óptimo es el punto **(2,7)**.

**3.** Sea el problema:

$$\max\ (3x_1+2x_2)$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 - 2x_2 \le 0 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

a) Completar la siguiente tabla sabiendo que corresponde a una solución básica factible de este problema:

| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | **b** |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | 1 | 0 | 5 |
| | 0 | 1 | -1 | | 4 |
| | 0 | | | | 10 |

b) Sabiendo que la siguiente tabla es una tabla óptima de este problema:

| | | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | **b** |
| 2 | $A_2$ | 0 | 1 | -1/2 | 3/2 | 0 | 3 |
| 3 | $A_1$ | 1 | 0 | 1/2 | -1/2 | 0 | 2 |
| 0 | $A_5$ | 0 | 0 | -3/2 | 7/2 | 1 | 4 |
| | | 0 | 0 | 1/2 | 3/2 | 0 | 12 |

i) Determinar el rango de variación del término independiente de la primera restricción para que la base óptima no varíe.

ii) ¿Cuál tiene que ser el término independiente de la segunda restricción para que el óptimo sea el punto (0,9)?

iii) Determinar el rango de variación del coeficiente de $x_1$ en la función objetivo para que la solución óptima no varíe.

iv) ¿Cuál tiene que ser el coeficiente de $x_2$ en la función objetivo para que el valor óptimo sea 9?

**a)** Matriz de coeficientes: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $\boldsymbol{b}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***2*** | $\boldsymbol{A_2}$ | 1 | ***1*** | ***0*** | 1 | 0 | 5 |
| ***0*** | $\boldsymbol{A_3}$ | ***2*** | 0 | 1 | -1 | ***0*** | 4 |
| ***0*** | $\boldsymbol{A_5}$ | ***3*** | 0 | ***0*** | ***2*** | ***1*** | 10 |
| | | ***-1*** | ***0*** | ***0*** | ***2*** | ***0*** | ***10*** |

**b)** **i)** $3x_1+x_2\leq 9+\alpha$. En la matriz de coeficientes el vector $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ es el $A_3$. Por tanto la nueva tabla se modifica así:

| $\boldsymbol{b}+A_3\alpha$ |
|---|
| $3-\alpha/2$ |
| $2+\alpha/2$ |
| $4-3\alpha/2$ |
| $12+\alpha/2$ |

Y para que se corresponda con una solución básica factible los números tienen que ser positivos, luego: $\alpha \in \left[\mathbf{-4}, \mathbf{\frac{8}{3}}\right]$.

**ii)** $x_1+x_2\leq 5+\beta$. En la matriz de coeficientes el vector $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ es el $A_4$, por tanto la nueva tabla se modifica así:

| $\boldsymbol{b}+A_4\beta$ |
|---|
| $3+3\beta/2$ |
| $2-\beta/2$ |
| $4+7\beta/2$ |
| $12+3\beta/2$ |

Y para que la tabla sea la correspondiente al punto (0,9) se tiene que cumplir: $2-\beta/2=0$ y $3+3\beta/2=9$, luego $\beta=\mathbf{4}$.

**iii)**

| | | $\lambda$ | 2 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $\boldsymbol{b}$ |
| 2 | $A_2$ | 0 | 1 | -1/2 | 3/2 | 0 | 3 |
| $\lambda$ | $A_1$ | 1 | 0 | 1/2 | -1/2 | 0 | 2 |
| 0 | $A_5$ | 0 | 0 | -3/2 | 7/2 | 1 | 4 |
| | | 0 | 0 | $\boldsymbol{-1+\lambda/2}$ | $\boldsymbol{3-\lambda/2}$ | 0 | $\boldsymbol{6+2\lambda}$ |

Para que la tabla sea óptima: $-1+\lambda/2\geq 0$ y $3-\lambda/2\geq 0$, luego $\lambda \in [\mathbf{2}, \mathbf{6}]$

**iv)**

| | | 3 | ***n*** | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | ***b*** |
| ***n*** | $A_2$ | 0 | 1 | -1/2 | 3/2 | 0 | 3 |
| 3 | $A_1$ | 1 | 0 | 1/2 | -1/2 | 0 | 2 |
| 0 | $A_5$ | 0 | 0 | -3/2 | 7/2 | 1 | 4 |
| | | 0 | 0 | ***3/2-n/2*** | ***3/2-3n/2*** | 0 | ***3n+6=9*** |

$3n+6=9$ para ***n*=1**. (para $n=1$ la tabla es óptima).

## Examen de Matemáticas III

## LADE febrero de 2003

**1.** Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 3 & b \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donde $a,b\in\mathbb{R}$.

a) ¿Para qué valores de $a$ y $b$ es diagonalizable la matriz A?

b) Para $b$=0 sea $Q$ la forma cuadrática tal que $M(Q)$=$A$. Clasifica esta forma cuadrática para los distintos valores de $a$.

**a)** El polinomio característico de la matriz A es:

$$p(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & a \\ 0 & 3-\lambda & b \\ a & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(3-\lambda)(1-\lambda)^2-a^2(3-\lambda)=(3-\lambda)\left[(1-\lambda)^2-a^2\right]$$

Así que los valores propios son: 3, 1+$a$, 1-$a$.

***a*=0** valores propios: 3 y 1 (doble); dim$S$(1)=3-rg$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$=2 (para todo $b\in\mathbb{R}$) y $A$ es diagonalizable.

***a*=2** valores propios: 3 (doble) y -1;

$$\dim S(3)=3-\text{rg}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & b \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{cases} =2, & si \quad b=0, \text{ y entonces A es diagonalizable.} \\ =1, & si \quad b\neq 0, \text{ y entonces A no es diagonalizable.} \end{cases}$$

***a*=-2** valores propios: 3 (doble) y -1;

$$\dim S(3)=3-\text{rg}\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & b \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{cases} =2, & si \quad b=0, \text{ y entonces A es diagonalizable.} \\ =1, & si \quad b\neq 0, \text{ y entonces A no es diagonalizable.} \end{cases}$$

***a*≠0, *a*≠2, *a*≠-2** tres valores propios distintos, y por tanto, la matriz A si es diagonalizable (para todo $b\in\mathbb{R}$).

**b)** $M(Q)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$

menores principales de orden 1: 1, 3, 1

menores principales de orden 2: 3, $1-a^2$, 3

menores principales de orden 3: $|M(Q)|=3(1-a^2)$

***a*∈(-1,1).** Q es definida positiva, ya que todos los menores principales son mayores que cero.

***a*=-1 y *a*=1**. Q es semidefinida positiva, ya que todos los menores principales son mayores o iguales que cero y $|M(Q)|=0$.

***a*∉[-1,1]**. Q es indefinida ya que existen menores principales de orden 2 negativos.

**2.** Sea el siguiente problema donde $a\in\mathbb{R}$:

$$\max\left[2x_1 + x_2\right]$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 + ax_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

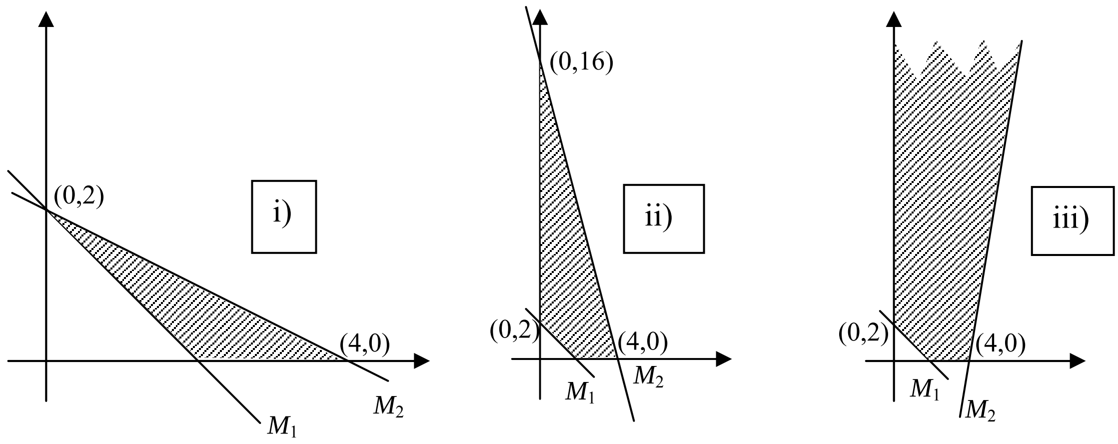
a) Resuelve el problema para $a$=2. ¿Para qué valores del parámetro $a$ la solución óptima del problema coincide con la hallada en este apartado?

b) Resuelve el problema para $a=\frac{1}{4}$.

c) Resuelve el problema para $a\leq 0$.

**a)** La solución es el punto **(4,0)** ya que la pendiente de la curva de nivel cero de la función objetivo es –2, y la pendiente de la segunda restricción es –1/2 (–2<-1/2).

La solución seguirá siendo el punto (4,0) mientras esta situación no se modifique, es decir, que la pendiente de la curva de nivel cero sea menor que la pendiente de la segunda restricción. Por tanto, se tiene que cumplir que $-2<-1/a$ . Luego ***a*>1/2**.




**b)** Para $a$=1/4 la solución es el punto (0,16).

**c)** Para valores de $a$ menores o iguales que cero, el conjunto de soluciones factibles no está acotado y es inmediato comprobar que el problema no tiene solución.

**3.** Una empresa textil produce dos modelos de bufanda (I y II). Para ello usa dos tipos de lana ($A$ y $B$) de las cuales se dispone de 400 y 600 kg respectivamente. Para producir una bufanda del modelo I se necesitan 0.2 kg de lana $A$ y el doble de lana $B$. Para una bufanda II se necesitan 0.25 kg de lana $A$ y 0.45 kg de lana $B$. El tiempo necesario para producir una bufanda del modelo I es la mitad del necesario para una bufanda II. Con el tiempo disponible para la producción de bufandas se pueden producir el equivalente a 1500 bufandas del modelo I. Un estudio de mercado indica que la demanda para este año del modelo I está limitada a 1000 bufandas y que por cada 100 bufandas modelo I conviene producir al menos 50 del modelo II. Por último el beneficio obtenido por la venta de una bufanda I es 2/3 del beneficio obtenido por una del modelo II.
Formula un problema de programación lineal para determinar el número de bufandas de cada modelo que debe producir la empresa para maximizar el beneficio (**sólo formular**).

$$\max \frac{2}{3}x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 0,2x_1 + 0,25x_2 \le 400 \\ 0,4x_1 + 0,45x_2 \le 600 \\ x_1 + 2x_2 \le 1.500 \\ x_1 \le 1000;\ 50x_1 \le 100x_2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

**4.** Sea el problema:

$$\max\ (2x_1+x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ 3x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

a) Completa la siguiente tabla sabiendo que corresponde a la solución básica factible (0,3,0,3,5):

| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1/2 | 1 | | | | |
| 1/2 | | -1/2 | 1 | | |
| | | -1/2 | | | |
| | | | | | |

b) Sabiendo que la siguiente tabla es una tabla óptima de este problema:

| | | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $b$ |
| 1 | $A_2$ | 0 | 1 | 3/5 | 0 | -1/5 | 2 |
| 0 | $A_4$ | 0 | 0 | -2/5 | 1 | -1/5 | 2 |
| 2 | $A_1$ | 1 | 0 | -1/5 | 0 | 2/5 | 2 |
| | | 0 | 0 | 1/5 | 0 | 3/5 | 6 |

i) Determina el valor máximo del término independiente de la primera restricción para que la base óptima no varíe.

ii) Si el término independiente de la tercera restricción fuera 13, ¿cuál sería el nuevo óptimo?

iii) Determina el valor máximo del coeficiente de $x_1$ en la función objetivo para que el punto (2,2) sea un óptimo del problema.

iv) Si el coeficiente de $x_2$ en la función objetivo fuera 6, ¿cuál sería el nuevo óptimo?

**a)** El problema en forma estándar es:

$$\max\ 2x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + x_2 + x_5 = 8 \\ x_i \ge 0\ \ (i = 1,\dots,5) \end{cases}$$

Y la matriz de coeficientes: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La base está formada por las columnas $A_2$, $A_4$ y $A_5$. Como $A_1 = \frac{1}{2}A_2 + \frac{1}{2}A_4 + \frac{5}{2}A_5$ y $A_3 = \frac{1}{2}A_2 - \frac{1}{2}A_4 - \frac{1}{2}A_5$, la tabla es:

| | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $\boldsymbol{b}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{A_2}$ | 1/2 | 1 | **1/2** | **0** | **0** | **3** |
| $\boldsymbol{A_4}$ | 1/2 | **0** | -1/2 | 1 | **0** | **3** |
| $\boldsymbol{A_5}$ | **5/2** | **0** | -1/2 | **0** | **1** | **5** |
| | **-3/2** | **0** | **1/2** | **0** | **0** | **3** |

**b) i)** $x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 + \alpha$ . En la matriz de coeficientes, el vector $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ es la columna $A_3$. Por tanto:

| | | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $\boldsymbol{b}+\alpha A_3$ |
| 1 | $A_2$ | 0 | 1 | 3/5 | 0 | -1/5 | $2+3\alpha/5$ |
| 0 | $A_4$ | 0 | 0 | -2/5 | 1 | -1/5 | $2-2\alpha/5$ |
| 2 | $A_1$ | 1 | 0 | -1/5 | 0 | 2/5 | $2-\alpha/5$ |
| | | 0 | 0 | 1/5 | 0 | 3/5 | $6+\alpha/5$ |

La base óptima no varía mientras la última columna no tome ningún valor negativo, y esto es cierto para $\alpha \in [-10/3, 5]$. Por tanto el valor máximo es $\alpha=5$ y el término independiente correspondiente es 11.

**ii)** $3x_1 + x_2 + x_5 = 8 + \gamma$ . En la matriz de coeficientes, el vector $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ es la columna $A_5$.

Por tanto:

| | | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $\boldsymbol{b}+\gamma A_3$ |
| 1 | $A_2$ | 0 | 1 | 3/5 | 0 | -1/5 | $2-\gamma/5$ |
| 0 | $A_4$ | 0 | 0 | -2/5 | 1 | -1/5 | $2-\gamma/5$ |
| 2 | $A_1$ | 1 | 0 | -1/5 | 0 | 2/5 | $2+2\gamma/5$ |
| | | 0 | 0 | 1/5 | 0 | 3/5 | $6+3\gamma/5$ |

El término independiente es 13 para $\gamma$=5, En este caso la última columna toma los valores 1,1,4, que se corresponde con la solución básica factible (4,1,0,1,0). Entonces, la solución optima es (4,1).

**iii)**

| | | $a$ | 1 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | ***b*** |
| 1 | $A_2$ | 0 | 1 | 3/5 | 0 | -1/5 | 2 |
| 0 | $A_4$ | 0 | 0 | -2/5 | 1 | -1/5 | 2 |
| $a$ | $A_1$ | 1 | 0 | -1/5 | 0 | 2/5 | 2 |
| | | 0 | 0 | 3/5- $a$ /5 | 0 | -1/5+2$a$ /5 | 6+2$a$ |

El valor máximo que puede tomar el parámetro $a$ para que la última fila tome valores positivos es 3.

**iv)**

| | | 2 | **6** | 0 | 0 | 0 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | ***b*** | $\theta$ | |
| **6** | $A_2$ | 0 | 1 | 3/5 | 0 | -1/5 | 2 | | |
| 0 | $A_4$ | 0 | 0 | -2/5 | 1 | -1/5 | 2 | | |
| 2 | $A_1$ | 1 | 0 | -1/5 | 0 | 2/5 | 2 | 5 | → |
| | | 0 | 0 | **16/5** | 0 | **-2/5** | **14** | | |
| | | | | | | ↑ | | | |

| | | 2 | 6 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | ***b*** |
| 6 | $A_2$ | 1/2 | 1 | 1/2 | 0 | 0 | 3 |
| 0 | $A_4$ | 1/2 | 0 | -1/2 | 1 | 0 | 3 |
| 0 | $A_5$ | 5/2 | 0 | -1/2 | 0 | 1 | 5 |
| | | 1 | 0 | 3 | 0 | 0 | 18 |

Solución óptima: (0,3).

## Examen de Matemáticas III
## LADE junio de 2003

**1.** Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & \alpha & 2 \end{pmatrix}$.

¿Para qué valores de $\alpha$ la matriz $A$ es diagonalizable? En los casos en que lo sea, halla una matriz diagonal semejante a $A$.

Polinomio característico:

$$p(\lambda)=\begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 1 & \alpha & 2-\lambda \end{pmatrix}=(4-\lambda)(2-\lambda)^2-2\alpha(4-\lambda)=(4-\lambda)\left[(2-\lambda)^2-2\alpha\right]$$

Raíces del polinomio: 4, $2+\sqrt{2\alpha}$ , $2-\sqrt{2\alpha}$ .

$\boldsymbol{\alpha<0}$**:** soluciones no reales, luego la matriz no es diagonalizable.

$\boldsymbol{\alpha=0}$: valores propios 4 y 2 (doble).

$$\dim S(2)=3-\text{rango}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=1.$$ Entonces A no es diagonalizable.

$\boldsymbol{\alpha=2}$: valores propios 4 (doble) y 0.

$$\dim S(4)=3-\text{rango}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}=1.$$ Entonces A no es diagonalizable.

**Resto de los casos**: la matriz tiene 3 valores propios simples y por tanto es diagonalizable. La matriz diagonal semejante a A es:

$$D=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{2\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{2\alpha} \end{pmatrix}$$

**2.** Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & \alpha & 2\end{pmatrix}$ y la forma cuadrática $Q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ tal que

para todo $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$: $Q(\boldsymbol{x})={}^tM(\boldsymbol{x})AM(\boldsymbol{x})$.

a) Halla $M(Q)$ y clasifica $Q$ según los valores del parámetro $\alpha$.

b) Di en qué casos se cumple que

i) existe $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ tal que $Q(\boldsymbol{x})<0$.

ii) existe $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3-\{\mathbf{0}\}$ tal que $Q(\boldsymbol{x})\leq 0$.

iii) para todo $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ se cumple $Q(\boldsymbol{x})\geq 0$.

**a)** $M(Q)=\begin{pmatrix}4 & 0 & 1\\ 0 & 2 & \alpha/2\\ 1 & \alpha/2 & 2\end{pmatrix}$

Menores principales de orden 1: $\{4, 2, 2\}$

Menores principales de orden 2: $\{8, 7, 4-\alpha^2/4\}$

$|M(Q)|=14-\alpha^2$

$Q$ nunca es definida negativa ni semidefinida negativa, ya que los menores de orden 1 son positivos (>0).

$Q$ es definida positiva si el determinante es >0: $14-\alpha^2>0 \Rightarrow -\sqrt{14}<\alpha<\sqrt{14}$ y además $4-\alpha^2/4>0 \Rightarrow -4<\alpha<4$. Esto es: $-\sqrt{14}<\alpha<\sqrt{14}$.

$Q$ es semidefinida positiva si $|M(Q)|=0$: $14-\alpha^2=0 \Rightarrow \alpha=\sqrt{14}$ y $\alpha=-\sqrt{14}$ y además $4-\alpha^2/4\geq 0$. Esto es: $\alpha=\sqrt{14}$ y $\alpha=-\sqrt{14}$

$Q$ es indefinida si $\alpha\notin\left[-\sqrt{14},\sqrt{14}\right]$.

**b)** **i)** Esto se cumple si $Q$ es definida negativa, semidefinida negativa (y distinta de la nula) o indefinida, esto es: $\alpha\notin\left[-\sqrt{14},\sqrt{14}\right]$.

**ii)** Esto se cumple si $Q$ es definida negativa, semidefinida negativa, semidefinida positiva o indefinida, esto es $\alpha\notin\left(-\sqrt{14},\sqrt{14}\right)$.

**iii)** Esto se cumple si $Q$ es definida positiva o semidefinida positiva, esto es: $\alpha\in\left[-\sqrt{14},\sqrt{14}\right]$.

**3.** Una empresa produce televisores y videos, por los cuales obtiene un beneficio de 40 y 20 euros respectivamente. El proceso de fabricación requiere que cada televisor o video pase por tres divisiones distintas de la empresa. Un televisor necesita 1/2, 1/2 y 3/2 horas de las divisiones *A*, *B* y *C* respectivamente, mientras que un video requiere 1, 1/2 y 1/2 respectivamente. Las divisiones *A* y *B* trabajan un máximo de 30 horas semanales cada una, mientras la *C* trabaja como máximo 40 horas semanales.

a) Encuentra la producción óptima semanal si la empresa se propone maximizar el beneficio.

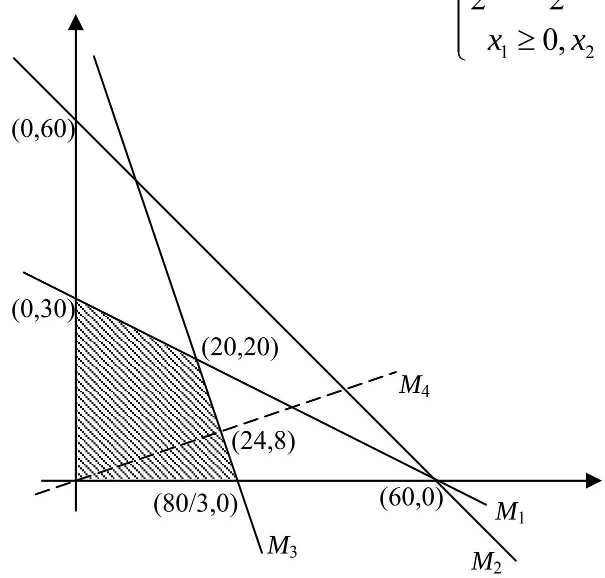
b) ¿Cuál debe ser el beneficio por video para que la empresa maximice el beneficio al producir únicamente videos?

c) En el caso de que la empresa dispusiera de 5 horas de trabajo semanales más en la división *C*, ¿en cuánto podría aumentar sus beneficios? ¿Cuánto estaría dispuesta a pagar la empresa por cada una de estas horas? Contesta a estas mismas preguntas si el número de horas se refiere a la división *B*.

d) Si un estudio de mercado recomendara que el número de videos no superara el 25% de la producción total, ¿cuál sería la solución óptima?

$x_1$: número de televisores y $x_2$ número de videos,

$$\max 40x_1 + 20x_2$$
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + x_2 \le 30 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \le 30 \\ \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \le 40 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



**a)** El conjunto de soluciones factibles es compacto, luego el óptimo es uno de sus vértices:

$f(0,0)=0$€ $f(0,30)=600$€ $\boldsymbol{f(20,20)=1200}$**€** $f(80/3,0)=1066,6$€

Solución: (20,20) y su valor 1200€.

Otra forma de hacerlo es mediante pendientes: ($m_1$ pendiente de $M_1$, $m_3$ pendiente de $M_3$ y $m_f$ pendiente de la función objetivo):

$$-\infty \xleftarrow[]{(80/3,0)}\!\!\!\!\rightarrow m_3 = -3 \xleftarrow[]{(20,20)}\!\!\!\!\rightarrow m_1 = -1/2 \xleftarrow[]{(0,30)}\!\!\!\!\rightarrow 0$$

Y $m_f$=-2 que está situado entre $m_1$ y $m_3$, luego la solución es el punto de corte entre $M_1$ y $M_3$, esto es, el punto (20,20).

**b)** Para que la solución sea el punto (0,30) la pendiente de la función objetivo tiene que cumplir lo siguiente: ($m_f$ =-40/$m_b$, donde $m_b$ es el beneficio por video):

$$m_1 = -0,5 \leq -\frac{40}{m_b} \Rightarrow m_b \geq \frac{40}{0,5} = 80$$

Esto es, el beneficio por video tiene que ser mayor o igual que **80€**.

**c)** La nueva solución sigue siendo el punto de corte de $M_1$ y $M_3$:

$$\left.\begin{array}{r} \frac{1}{2}x_1 + x_2 = 30 \\ \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 45 \end{array}\right\} (24,18)$$

Y el valor óptimo es 1320€. Por tanto, por esas 5 horas puede pagar hasta **120€,** es decir **24€** por hora.

(20,20)→ (24,18)

$c$=0 → $c$=5

1200€ → 1320€

$$\lambda_c = \frac{f(24,18) - f(20,20)}{\Delta c} = \frac{1320 - 1200}{5} = 24€$$

La segunda restricción no está saturada, así que la solución optima es la misma, el punto (20,20) y por tanto no está dispuesta a pagar nada por cada una de esas horas.

**d)** La nueva restricción es $x_2 \leq 0,25(x_1 + x_2) \rightarrow 0,25x_1 - 0,75x_2 \geq 0$ y el punto óptimo inicial, (20,20) ya no es una solución factible. La nueva solución es el punto de corte de $M_3$ con la nueva restricción, esto es: **(24,8)**. El nuevo valor óptimo es 1120€.

**4.** Considérese el problema de programación lineal:

$$\max 2x_1 + 2x_2 - x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Y la siguiente tabla asociada al problema anterior:

| | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 1 | 4 | 2 | 1 | | |
| $A_5$ | 0 | | 1 | 1 | | |
| | 0 | 6 | 5 | | | |

a) Completa la tabla y resuelve el problema.

b) Halla el intervalo de variación del término independiente de la primera restricción de forma que la base óptima no varíe.

c) Di si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones y por qué:

i) Si el término independiente de la primera restricción pasa de 10 a 6 la solución óptima no varía.

ii) No hay ningún término independiente de la primera restricción para el cual el valor óptimo sea 10.

d) Si el coeficiente de $x_2$ en la función objetivo es 10 en vez de 2 resuelve el problema resultante.

**a)** El problema en forma estándar es:

$$\max 2x_1 + 2x_2 - x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$ y la matriz de coeficientes es: $$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

| | | 2 | 2 | -1 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $\boldsymbol{b}$ |
| 2 | $A_1$ | 1 | 4 | 2 | 1 | **0** | **10** |
| 0 | $A_5$ | 0 | **5** | 1 | 1 | **1** | **14** |
| | | 0 | 6 | 5 | **2** | **0** | **20** |

$A_5$ está en la base, $A_2=4A_1+\mathbf{5}A_5$ y $\boldsymbol{b}=\mathbf{10}A_1+\mathbf{14}A_5$.

La tabla anterior es óptima, luego la solución es (10,0,0), y el valor óptimo es 20.

**b)** $x_1+4x_2+2x_3+x_4=10+\alpha$ .

Entonces:

| | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $\boldsymbol{b}+\alpha A_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 1 | 4 | 2 | 1 | 0 | $10+\alpha$ |
| $A_5$ | 0 | 5 | 1 | 1 | 1 | $14+\alpha$ |
| | 0 | 6 | 5 | 2 | 0 | $20+2\alpha$ |

Y los números son positivos cuando $\alpha\geq-10$. Por tanto, el término independiente de la primera restricción tiene que ser mayor o igual que 0.

**c)** **i)** Falso. Como en el apartado ii), para $\alpha=-4$, la nueva solución óptima es (6,0,0).

**ii)** Falso. Como en el apartado ii), el valor óptimo es 10 si $20+2\alpha=10$. Esto es, $\alpha=-5$.

**d)**

| | | 2 | **10** | -1 | 0 | 0 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $\boldsymbol{b}$ | $\theta$ | |
| 2 | $A_1$ | 1 | 4 | 2 | 1 | 0 | 10 | 5/2 | → |
| 0 | $A_5$ | 0 | 5 | 1 | 1 | 1 | 14 | 14/5 | |
| | | 0 | **-2** | 5 | 2 | 0 | 20 | | |
| | | | ↑ | | | | | | |

| | | 2 | 10 | -1 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $\boldsymbol{b}$ |
| 10 | $A_2$ | 1/4 | 1 | 1/2 | 1/4 | 0 | 5/2 |
| 0 | $A_5$ | -5/4 | 0 | -3/2 | -1/4 | 1 | 3/2 |
| | | 1/2 | 0 | 6 | 5/2 | 0 | 25 |

Nueva solución óptima: (0,5/2,0). Valor óptimo: 25.

# Examen de Matemáticas III

## LADE febrero de 2004

**1.** Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 4 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$, donde $a,b\in\mathbb{R}$.

a) Estudia la diagonalizabilidad de $A$ según los valores de $a$ y $b$.

b) Se considera la forma cuadrática $Q(\boldsymbol{x})={}^{t}M(\boldsymbol{x})AM(\boldsymbol{x})$. Determina para qué valores de $a$ y $b$ existen $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^3$ tales que $Q(\boldsymbol{x})<0$ y $Q(\boldsymbol{y})>0$.

**a)** $p_A(\lambda)=\begin{vmatrix} a-\lambda & 4 & 0 \\ 0 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & b-\lambda \end{vmatrix}=(a-\lambda)^2(b-\lambda)=0$.

- Si $a=b$, $\lambda=a$ es un valor propio triple. Y $\dim S(a)=3-\text{rango}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\neq 3$ y entonces, $A$ no es diagonalizable.
- Si $a\neq b$, $\lambda=a$ es un valor propio doble y $\lambda=b$ un valor propio simple.

  $\dim S(a)=3-\text{rango}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-a \end{pmatrix}=3-2=1$ y entonces, $A$ no es diagonalizable..

**b)** $M(Q)=\begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$. Menores principales:

Orden 1: $\{a,a,b\}$

Orden 2: $\{a^2-4,ab,ab\}$

$|M(Q)|=b(a^2-4)$

Y $Q$ es indefinida en los siguientes casos:

a) $a^2-4<0$, esto es, $-2<a<2$, y para todo $b$.

b) $a\geq 2$ y $b<0$.

c) $a\leq -2$ y $b>0$.

**2.** Con rubíes y zafiros Bitxi Joyeros produce dos tipos de anillos. Un anillo tipo 1 requiere 2 rubíes, 3 zafiros y 1 una hora de trabajo de un joyero. Un anillo tipo 2 requiere 3 rubíes, 2 zafiros y 2h de trabajo de un joyero. Actualmente se dispone de 100 rubíes, 120 zafiros y 60 horas de trabajo de un joyero. Cada anillo de tipo 1 se vende a 400 euros y cada anillo de tipo 2 a 500 euros. Se pueden vender todos los anillos producidos.

a) Formula un programa lineal para maximizar los ingresos de la empresa y resuélvelo.

b) ¿Entre qué precios podría oscilar el precio de venta del anillo tipo 2 de modo que se mantenga la misma solución óptima?

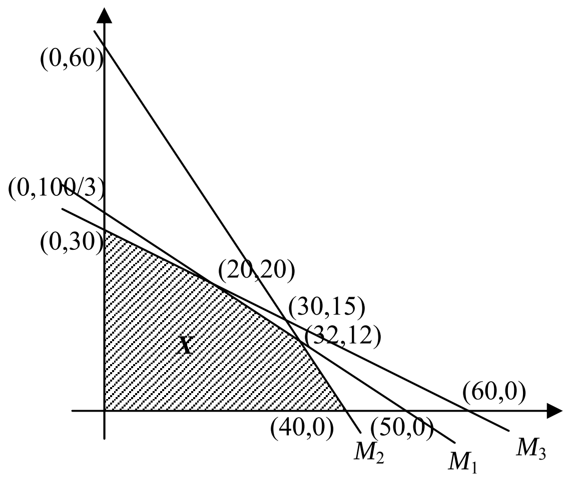
c) Se pueden comprar más rubíes a un costo de 100 euros el rubí. ¿Cuántos compraría? ¿Cuál sería ahora la solución óptima?

d) El joyero adquiere nueva maquinaria de manera que ahora producir un anillo de tipo 1 requiere el doble de tiempo de trabajo que producir un anillo de tipo 2. Además si todos los anillos producidos fueran del tipo 1, entonces podría producir un total de 70 anillos. ¿Cambiaría la solución óptima?

e) Si se tuviera que producir al menos 22 anillos de tipo 2, ¿cuál sería el beneficio óptimo?

$x_1$ es el número de anillos de tipo 1 y $x_2$ el número de anillos de tipo 2,

$$\max\left(400x_1 + 500x_2\right)$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 100 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 120 \\ x_1 + 2x_2 \le 60 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$




**a)** El conjunto de soluciones factibles es compacto, luego tiene solución óptima. La calculamos por pendientes.

Pendiente de la función objetivo: $|m_f|=4/5$.

Pendiente de la primera restricción: $|m_1|=2/3$.

Pendiente de la segunda restricción: $|m_2|=3/2$.

Pendiente de la tercera restricción: $|m_3|=1/2$.

Luego la solución óptima es el punto de corte de la primera y segunda restricción, esto es: (32,12). Y el valor óptimo: 18800€.

**b)** La pendiente de la función objetivo debe estar comprendida entre la de la primera y segunda restricción. Formalmente, si $p_2$ es el precio de los anillos de tipo 2:

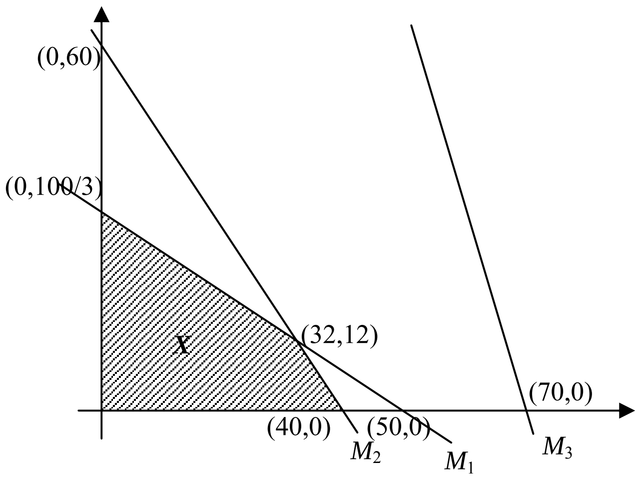
$$\frac{3}{2} \le \frac{400}{p_2} \le \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad 600 \ge p_2 \ge \frac{800}{3}.$$

**c)** La primera restricción (rubíes) se puede trasladar hasta que pase por el punto de corte de la segunda y tercera restricción, que es el punto (30,15). Para elaborar esas cantidades se necesitan 2·30+3·15=105 rubíes, esto es, 5 rubíes más. El valor óptimo sería 400·30+500·15=19500€. Y el precio sombra de cada rubí es:

$$\lambda = \frac{19500-18800}{105-100} = 140€$$

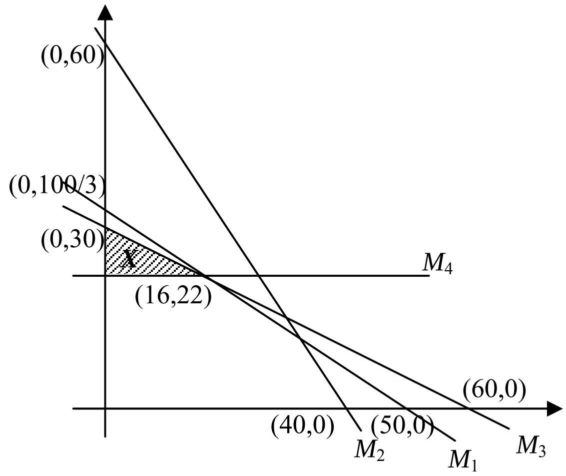
Luego se compraría 5 rubíes, y la nueva solución óptima sería (30,15).

**d)** La tercera restricción pasa a ser $2x_1+x_2\le 140$:




Y la solución óptima no varía, esto es (32,12).

**e)** El nuevo gráfico es:




ya que al problema original hay que añadirle una nueva restricción: $x_2 \geq 22$. La nueva solución óptima es el punto de corte de la nueva restricción con la tercera, esto es, (16,22). El valor óptimo es 17400€.

**3.** Considérese el problema

$$\max 4x_1 + 6x_2 + 5x_3$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 65 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 20 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 30 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Donde las primeras restricciones indican la cantidad máxima de tres recursos disponibles en una empresa que pretende maximizar beneficios.

a) Completar la siguiente tabla sabiendo que corresponde al problema anterior y a partir de ella halla la solución óptima del problema.

| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | ***b*** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | -2 | -1 | 1 | -3 | 0 | 5 |
| | 1 | | 0 | 1 | 0 | 20 |
| | 1 | | | -1 | | 10 |
| | | | | | | |

b) ¿Qué recursos son abundantes y cuáles son escasos?

c) ¿Cuál es el rango de variación del término independiente de la tercera restricción de modo que la base óptima no varíe? Si se pueden comprar 5 unidades adicionales de dicho recurso por un precio unitario de 1, ¿convendría comprarlo para incorporarlo a la producción?

d) ¿Cuál es el rango de variación del coeficiente de $x_1$ en la función objetivo de modo que la solución óptima no varíe?

**a)**

| | | 4 | 6 | 5 | 0 | 0 | 0 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | ***b*** | $\theta$ | |
| 0 | $A_4$ | 0 | -2 | -1 | 1 | -3 | 0 | 5 | - | |
| 4 | $A_1$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 20 | 20 | |
| 0 | $A_6$ | 0 | 1 | 2 | 0 | -1 | 1 | 10 | 10 | → |
| | | 0 | -2 | -1 | 0 | 4 | 0 | 80 | | |
| | | | ↑ | | | | | | | |

| | | 4 | 6 | 5 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | ***b*** |
| 0 | $A_4$ | 0 | 0 | -3 | 1 | -5 | 2 | 25 |
| 4 | $A_1$ | 1 | 0 | -1 | 0 | 2 | -1 | 10 |
| 6 | $A_2$ | 0 | 1 | 2 | 0 | -1 | 1 | 10 |
| | | 0 | 0 | 3 | 0 | 2 | 2 | 100 |

Solución óptima: (10,10,0), y valor óptimo: 100.

**b)** Sustituyendo la solución óptima (10,10,0) en las restricciones se comprueba que::

$$3(10)+1(10)+2(0)=40<65$$

$$1(10)+1(10)+1(0)=20$$

$$1(10)+2(10)+3(0)=30.$$

El recurso 1 es abundante y los recursos 2 y 3 son escasos.

**c)**

| | | 4 | 6 | 5 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | $\boldsymbol{b}+\varepsilon A_6$ |
| 0 | $A_4$ | 0 | 0 | -3 | 1 | -5 | 2 | $25+2\varepsilon$ |
| 4 | $A_1$ | 1 | 0 | -1 | 0 | 2 | -1 | $10-\varepsilon$ |
| 6 | $A_2$ | 0 | 1 | 2 | 0 | -1 | 1 | $10+\varepsilon$ |
| | | 0 | 0 | 3 | 0 | 2 | 2 | $100+2\varepsilon$ |

Rango de variación: $25+2\varepsilon\geq 0$, $10-\varepsilon\geq 0$ y $10+\varepsilon\geq 0$ . Por tanto $-10\leq\varepsilon\leq 10$

Dado que 5 pertenece al rango de variación y el precio sombra es 2>1 se puede afirmar que le conviene comprar 5 unidades adicionales a un precio unitario de 1. La nueva solución óptima será (5,15,0) y el nuevo beneficio sería 100+5(2)=110.

**d)**

| | | $4+\lambda$ | 6 | 5 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | $\boldsymbol{b}$ |
| 0 | $A_4$ | 0 | 0 | -3 | 1 | -5 | 2 | 25 |
| $4+\lambda$ | $A_1$ | 1 | 0 | -1 | 0 | 2 | -1 | 10 |
| 6 | $A_2$ | 0 | 1 | 2 | 0 | -1 | 1 | 10 |
| | | 0 | 0 | $3-\lambda$ | 0 | $2(1+\lambda)$ | $2-\lambda$ | $100+10\lambda$ |

Rango de variación: $3-\lambda \geq 0$, $2(1-\lambda) \geq 0$ y $2-\lambda \geq 0$. Por tanto $-1 \leq \lambda \leq 2$. Entonces el coeficiente de $x_1$ debe estar entre 3 y 6 para que la solución no varíe.

# Examen de Matemáticas III

# LADE junio de 2004

**1.** Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a & c \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$, donde $a,b,c\in\mathbb{R}$.

a) Estudiar la diagonalizabilidad de A en el caso en que $b=1$.

b) Sea la forma cuadrática $Q(\boldsymbol{x})={}^{t}M(\boldsymbol{x})AM(\boldsymbol{x})$.

i) Si $b=c=0$ y $a\neq 0$, ¿existe algún $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ tal que $Q(\boldsymbol{x})<0$?

ii) Si $b=0$ y $c=2$, ¿existe algún $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ tal $Q(\boldsymbol{x})<0$?

**a)** $A=\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a & c \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ y el polinomio característico es:

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} a-\lambda & a & 0 \\ a & a-\lambda & c \\ 0 & 1 & a-\lambda \end{vmatrix}=(a-\lambda)\left(\lambda^2-2a\lambda-c\right).$$

Raíces: $\lambda=a$, $\lambda=a\pm\sqrt{a^2+c}$. Entonces,

- $a^2+c<0$, existen raíces complejas del polinomio característico y entonces A no es diagonalizable.
- $a^2+c>0$, existen 3 raíces reales simples y entonces A es diagonalizable.
- $a^2+c=0$, entonces $a$ es un valor propio triple y

$\dim S(a)=3\text{-}(A\text{-}aI)=3\text{-}\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\neq 3$, y entonces A no es diagonalizable.

**b) i)** $A=\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}=M(Q)$. Menores principales:

orden 1: $\{a,a,a\}$

orden 2: $\{0,a^2,a^2\}$

$|M(Q)|=0$

Si $a>0$, $Q$ es semidefinida positiva, luego no existe $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ tal que $Q(\boldsymbol{x})<0$.

Si $a<0$, $Q$ es semidefinida negativa, luego si existe $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ tal que $Q(\boldsymbol{x})<0$.

**ii)** $A=\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ y $M(Q)=\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$. Menores principales:

orden 1: $\{a,a,a\}$

orden 2: $\{0,a^2,a^2-1\}$

$|M(Q)|=-a$

Si $a\neq 0$, los menores principales de orden 1 y 3 son de signo contrario y entonces $Q$ es indefinida. Por tanto, si existe algún $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ tal $Q(\boldsymbol{x})<0$.

Si $a=0$, hay un menor principal de orden 2 negativo y entonces $Q$ es indefinida. Por tanto, si existe algún $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ tal $Q(\boldsymbol{x})<0$.

Luego la respuesta es afirmativa para todo $a\in\mathbb{R}$.

**2.** Una empresa artesanal de elaborados de pato oferta 2 productos, uno fresco y otro en conserva. La siguiente tabla muestra el tiempo (en horas) necesario para la elaboración y puesta en el mercado de cada Kg. de los productos ofertados:

| | Fresco (horas/kg) | Conserva (horas/kg) | Horas disponibles |
|---|---|---|---|
| Matadero | 0,5 | 0,8 | 1600 |
| Elaboración | 1,25 | 2,5 | 5000 |
| Envasado | 0,125 | 0,16 | 400 |

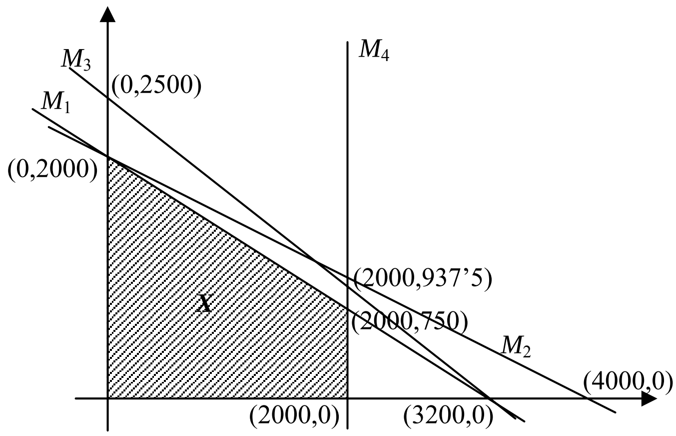
El almacén puede almacenar como máximo 2000 kg de productos frescos. Por otro lado, dado el éxito de sus productos, la empresa puede vender toda la cantidad que desee de ambos productos. El precio de cada Kg de producto fresco es 18 euros y el precio de cada Kg de producto en conserva es 9 euros.

a) Hallar las cantidades que la empresa debe producir de cada producto para que el ingreso sea máximo. Calcular la cantidad de horas que se utiliza en cada sección para producir esas cantidades óptimas.
b) Dada la respuesta del apartado anterior, di en que sección le convendría a la empresa pedir a los trabajadores que hagan horas extras para aumentar el ingreso. ¿A qué precio estaría la empresa dispuesta a pagar cada hora extra en las diferentes secciones?
c) Una gran superficie se compromete a adquirir toda la producción en exclusiva, a los precios 24 y 12 euros, si la empresa se compromete a fabricar una cantidad de productos en conserva superior o igual a la cantidad de productos frescos. ¿Le conviene a la empresa vender toda su producción a esta gran superficie?

$x_1$: Kg. de productos frescos

$x_2$: Kg. de productos en conserva

$$\max(18x_1 + 9x_2)$$
$$\begin{cases} 0,5x_1 + 0,8x_2 \le 1600 \\ 1,25x_1 + 2,5x_2 \le 5000 \\ 0,125x_1 + 0,16x_2 \le 400 \\ x_1 \le 2000 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$




**a)** El conjunto de soluciones factibles es compacto, luego el problema tiene solución y esta se alcanza en alguno de sus vértices:

*f*(0,0)=0

*f*(0,2000)=18000

***f*(2000,750)=42750**

*f*(2000,0)=36000

Se producirán 2000 kg de productos frescos y e 750 kg en conserva. El valor óptimo será 42750 euros.

Horas por sección:

Matadero: $0,5(2000) + 0,8(750) = 1600$

Elaboración: $1,25(2000) + 2,5(750) = 4375$

Envasado: $0{,}125(2000)+0{,}16(750)=370$

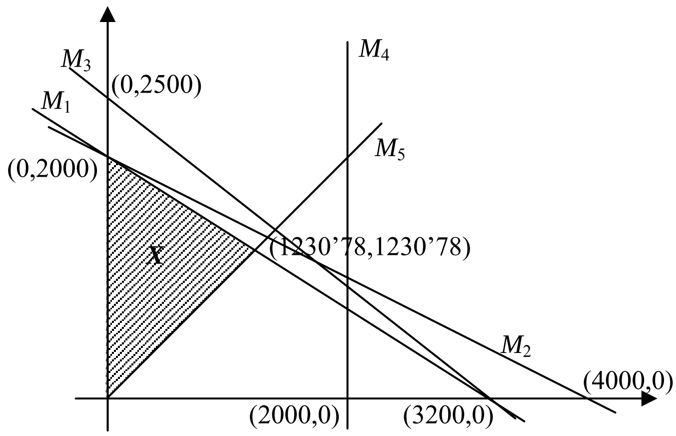
**b)** Le conviene aumentar el número de horas disponible en la sección de Matadero que corresponde a la primera restricción. Esta restricción se puede trasladar hasta que pase por el punto de corte de la tercera y cuarta restricción, esto es, el punto (2000,937’5). El precio sombra es:

$$\lambda_1 = \frac{44437{,}5-42750}{1750-1600} = 11{,}25$$

En las otras secciones el precio sombra es cero, ya que no están saturadas.

**c)**

$$\max(24x_1+12x_2)$$
$$\begin{cases} 0{,}5x_1+0{,}8x_2 \le 1600 \\ 1{,}25x_1+2{,}5x_2 \le 5000 \\ 0{,}125x_1+0{,}16x_2 \le 400 \\ x_1 \le 2000 \\ x_2 \ge x_1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$




Solución óptima: (1230’78,1230’78).

Productos frescos: 1230’78 kg

Productos en conserva: 1230’78 kg.

Valor óptimo: 44307’69 euros.

El nuevo valor óptimo es mayor que el inicial, luego si sería conveniente.

**3.** Sea el siguiente problema de programación lineal:

$$\max 5x_1 + 6x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 \leq 2 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

a) Halla gráficamente la solución.

b) Completa la siguiente tabla sabiendo que corresponde al problema anterior.

| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $\boldsymbol{b}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | 0 | |
| | | | 0 | 1 | 4 |
| | | | | 1 | 2 |
| 0 | 0 | 0 | 5 | | 34 |

c) ¿Cuál es el rango de variación del coeficiente de $x_1$ en la función objetivo de forma que la solución óptima no cambie?

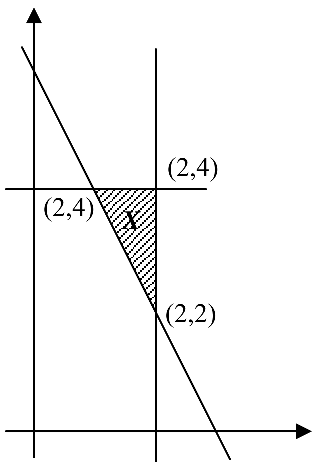
d) Determinar el rango de variación del término independiente de las restricciones segunda y tercera para que la base óptima no varíe, y determinar sus precios sombra.

e) Con la ayuda del gráfico del apartado i), di qué ocurriría con la solución óptima del nuevo problema si la variación del término independiente de la segunda restricción no estuviera dentro del rango hallado en el apartado anterior.

**a)**

$$\max(5x_1 + 6x_2)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 \leq 2 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$




Solución óptima: (2,4) y valor óptimo: 34.

**b)** La tabla es:

| | | 5 | 6 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | ***b*** |
| 5 | $A_1$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| 6 | $A_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 4 |
| 0 | $A_3$ | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| | | 0 | 0 | 0 | 5 | 6 | 34 |

**c)**

| | | $5+\pi$ | 6 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | ***b*** |
| $5+\pi$ | $A_1$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| 6 | $A_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 4 |
| 0 | $A_3$ | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| | | 0 | 0 | 0 | $5+\pi$ | 6 | $34+2\pi$ |

La solución es (2,4) si $5+\pi\geq 0$, esto es, $\pi\geq -5$. Luego el coeficiente de $x_1$ tiene que ser mayor o igual que cero.

**d)** Segunda restricción:

| | | 5 | 6 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | ***b*** |
| 5 | $A_1$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | $2+a$ |
| 6 | $A_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 4 |
| 0 | $A_3$ | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | $2+2a$ |
| | | 0 | 0 | 0 | 5 | 6 | $34+5a$ |

$2+a\geq 0$ y $2+2a\geq 0$, esto es, $a\geq -1$. El precio sombra es $\lambda_2=5$.

Tercera restricción:

| | | 5 | 6 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | ***b*** |
| 5 | $A_1$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| 6 | $A_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | $4+b$ |
| 0 | $A_3$ | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | $2+b$ |
| | | 0 | 0 | 0 | 5 | 6 | $34+6b$ |

$4+b\geq 0$ y $2+b\geq 0$, esto es, $b\geq -2$. El precio sombra es $\lambda_3=6$.

**e)** Para $a<-1$ el conjunto de soluciones factibles es vacío y por tanto el problema no tiene solución.

# Examen de Matemáticas III

# LADE febrero de 2005

**1.** Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 3 \end{pmatrix}, \text{ donde } \alpha \in \mathbb{R}.$$

¿Para qué valores de $\alpha$ es la matriz *A* diagonalizable?

Calculamos el polinomio característico:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & \alpha & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)(3-\lambda)-\alpha\right] = 0$$

Raíces: 1, $2+\sqrt{1+\alpha}$ , $2-\sqrt{1+\alpha}$ .

Casos:

**$\alpha$<-1**: Dos de las raíces del polinomio son complejas, luego *A* no es diagonalizable.

**$\alpha$=-1**: Raíces: 1 (simple) y 2 (doble).

Por ser raíz simple, dim*S*(1)=1. Calculamos ahora dim*S*(2).

$$\dim S(2) = 3 - \text{rango}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Luego, dim*S*(1)+dim*S*(2)=2<3, por tanto, *A* no es diagonalizable.

**$\alpha$=0**: Raíces: 1 (doble) y 3 (simple).

Por ser raíz simple, dim*S*(3)=1. Calculamos ahora dim*S*(1).

$$\dim S(1) = 3 - \text{rango}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 1.$$

Luego, dim*S*(1)+dim*S*(3)=2<3, por tanto, *A* no es diagonalizable.

**$\alpha$>-1 y $\alpha \neq$0**: Las tres raíces del polinomio son reales y distintas, luego *A* es diagonalizable.

**2.** Sea la forma cuadrática $Q(\boldsymbol{x})$ definida por:

$$Q(\boldsymbol{x})={}^{t}M(\boldsymbol{x})\cdot B\cdot M(\boldsymbol{x}),\ \forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3,$$

donde $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & b \\ 0 & b & 3 \end{pmatrix}$, $b\in\mathbb{R}$.

Hallar la matriz de representación de $Q(\boldsymbol{x})$ y decir para qué valores de $b$ se da cada uno de los siguientes casos, explicando el porqué:

a) $\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$-$\{\boldsymbol{0}\}$ se cumple $Q(\boldsymbol{x})<0$.

b) $\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$-$\{\boldsymbol{0}\}$ se cumple $Q(\boldsymbol{x})>0$.

c) $\exists \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\in\mathbb{R}^3$ tales que $Q(\boldsymbol{x}_1)<0$ y $Q(\boldsymbol{x}_2)>0$.

d) $\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ se cumple $Q(\boldsymbol{x})\geq 0$.

La matriz de representación de esta forma cuadrática es:

$$M(Q)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & b \\ 0 & b & 3 \end{pmatrix}.$$

Menores principales de primer orden: $\{1, 1, 3\}$.

Menores principales de segundo orden: $\{0, 3, 3\text{-}b^2\}$.

$|M(Q)|=-b^2$.

Esta forma cuadrática es semidefinida positiva si $b=0$ y es indefinida para $b\neq 0$.

Entonces:

**a)** Para ningún valor de $b$ es definida negativa, porque los menores principales de primer orden son positivos y hay un menor principal de segundo orden igual a cero.

**b)** Para ningún valor de $b$ es definida positiva, porque hay un menor principal de segundo orden igual a cero.

**c)** $Q$ es indefinida para $b\neq 0$, porque el menor principal de orden tres es negativo y los de orden uno son positivos.

**d)** $Q$ es semidefinida positiva para $b=0$, porque $|M(Q)|=0$ y los demás menores principales son mayores o iguales que cero.

**3.** Una empresa produce guitarras y mandolinas utilizando madera, metal y mano de obra. Las cantidades precisas de esos inputs para realizar una unidad de cada instrumento se muestran en la siguiente tabla:

| | Guitarra | Mandolina |
|---|---|---|
| Madera | 2 | 1 |
| Metal | 1 | 1 |
| Mano de obra | 1 | 2 |

La empresa dispone de 50 unidades de madera, 34 unidades de metal y 60 unidades de mano de obra, y vende cada guitarra a 200€ y cada mandolina a 125€. Se pide:

a) Encontrar la producción que maximiza el ingreso.

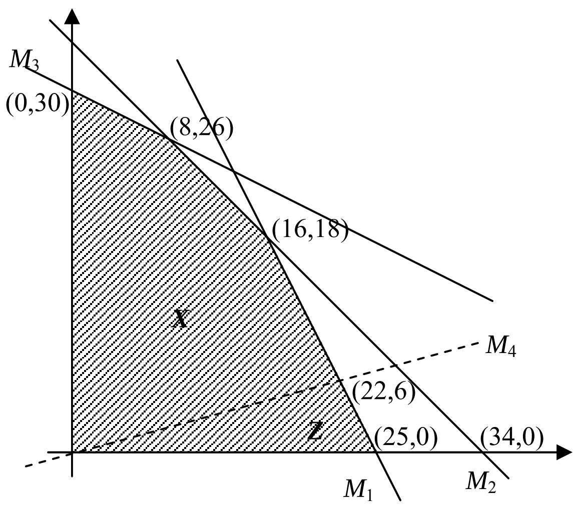
b) ¿Qué cantidad estaría dispuesta a pagar la empresa por una unidad adicional de madera? ¿Y de trabajo?

c) Si la empresa para garantizar sus ventas decide que por cada 11 guitarras debe producir como máximo 3 mandolinas, ¿cuál es la producción que maximiza el ingreso?

d) ¿Cuál es la producción que minimiza el número de unidades de mano de obra si la empresa quiere garantizar al menos unos ingresos de 4000 euros?

Sean $x_1$ nº de guitarras y $x_2$ nº de mandolinas,

$$\max 200x_1 + 125x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 50 \\ x_1 + x_2 \le 34 \\ x_1 + 2x_2 \le 60 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$




**a)** Puede resolverse de dos formas:

1) Dado que el conjunto $X$ es compacto, el problema tiene solución óptima y alguna es vértice de este conjunto. Luego:

$f(0,0)=0$ $f(0,30)=3750€$ $f(8,26)=4850€$ **$f(16,18)=5450€$**

$f(25,0)=5000€$

Solución óptima (16,18) y valor óptimo 5450€.

2) Dado que $|p_3|<|p_2|<|p_f|<|p_1|$ donde $|p_3|$=1/2, $|p_2|$=1, $|p_f|$=200/125=1,6 y $|p_1|$=2, la solución óptima es el punto de corte entre la primera y la segunda restricción. Es decir, el punto (16,18) y el valor óptimo es 5450€.

**b)** Para calcular el precio sombra de una unidad de madera:

$2x_1+x_2=50+a$

$(16,18) \rightarrow (34,0)$

$a=0 \rightarrow a=18$

$5450€ \rightarrow 6800€$

$$\lambda_1 = \frac{6800-5450}{18} = 75€$$

Luego, a la empresa le interesaría adquirir como máximo 18 unidades de madera a un precio por unidad en ningún caso superior a 75€.

La mano de obra es abundante, luego a la empresa no le interesa contratar más unidades.

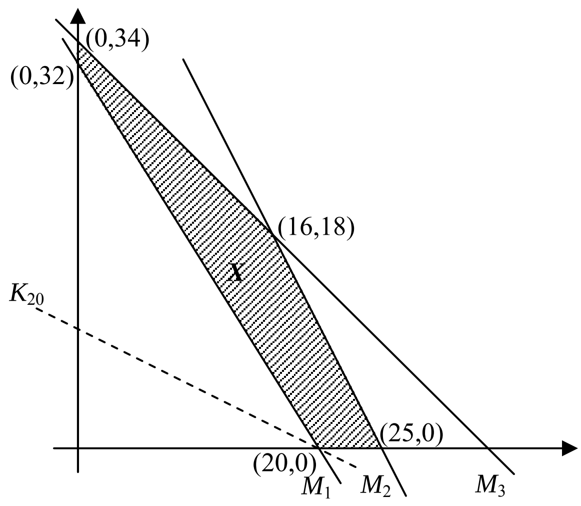
**c)** Se introduce una nueva restricción $M_4$ en el modelo:

$$3x_1 \geq 11x_2$$

El conjunto de soluciones factibles pasa a ser $Z$ y la solución óptima es ahora (22,6) porque $|p_f|<|p_1|$.

**d)** Tenemos un nuevo problema:

$$\min x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} 200x_1 + 125x_2 \geq 4000 \\ 2x_1 + x_2 \leq 50 \\ x_1 + x_2 \leq 34 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



$|p_f|$=1/2 y $|p_1|$=200/125=1,6. Luego $|p_f| < |p_1|$; entonces la solución óptima es (20,0) y el valor óptimo es 20 unidades de mano de obra.

**4.** Considérese el siguiente problema de programación lineal:

$$\max\left(2x_1 - x_2 + 5x_3\right)$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 10 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \le 1 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 \le 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

a) Sabiendo que la tabla siguiente es una tabla correspondiente al problema anterior, hallar la tabla que le sigue aplicando el método simplex (hallar sólo una tabla).

| | | 2 | -1 | 5 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | ***b*** |
| 0 | $A_4$ | 1 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 10 |
| 0 | $A_5$ | 1 | 3 | -1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | $A_6$ | -1 | 3 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| | | -2 | 1 | -5 | 0 | 0 | 0 | 0 |

b) Rellenar los huecos de la tabla siguiente correspondiente al problema anterior sin usar las tablas anteriores y explicando cómo se hallan los números correspondientes.

| | | 2 | -1 | 5 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | ***b*** |
| 2 | $A_1$ | 1 | -1 | 0 | 1/3 | 0 | -2/3 | |
| 0 | $A_5$ | 0 | 6 | 0 | 0 | 1 | 1 | 3 |
| 5 | $A_3$ | 0 | 2 | 1 | | 0 | 1/3 | 4 |
| | | 0 | | 0 | 7/3 | 0 | 1/3 | 24 |

c) ¿Cuál es el rango de variación del término independiente de la tercera restricción para que la base óptima no varíe? Hallar el precio sombra de la tercera restricción.

d) ¿Cuál es el rango de variación del coeficiente de $x_2$ en la función objetivo para que no varíe la solución óptima?

e) Si el término independiente de la tercera restricción pasa de 2 a 3, ¿cambia la solución óptima?, ¿por qué?.

**a)**

$$\max\left(2x_1 - x_2 + 5x_3\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_5 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 + x_6 = 2 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

la matriz de coeficientes es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

| | | 2 | -1 | 5 | 0 | 0 | 0 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | **b** | $\theta$ | |
| 0 | $A_4$ | 1 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 10 | 5 | |
| 0 | $A_5$ | 1 | 3 | -1 | 0 | 1 | 0 | 1 | | |
| 0 | $A_6$ | -1 | 3 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | → |
| | | -2 | 1 | -5 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| | | | | ↑ | | | | | | |

| | | 2 | -1 | 5 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | **b** |
| 0 | $A_4$ | 3 | -3 | 0 | 1 | 0 | -2 | 6 |
| 0 | $A_5$ | 0 | 6 | 0 | 0 | 1 | 1 | 3 |
| 5 | $A_3$ | -1 | 3 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| | | -7 | 16 | 0 | 0 | 0 | 5 | 10 |

**b)**

| | | 2 | -1 | 5 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | **b** |
| 2 | $A_1$ | 1 | -1 | 0 | 1/3 | 0 | -2/3 | **2** |
| 0 | $A_5$ | 0 | 6 | 0 | 0 | 1 | 1 | 3 |
| 5 | $A_3$ | 0 | 2 | 1 | **1/3** | 0 | 1/3 | 4 |
| | | 0 | **9** | 0 | 7/3 | 0 | 1/3 | 24 |

2×(-1)+0×6+5×2-(-1)=9.

$A_4$=1/3$A_1$+0$A_5$+$aA_3$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a \\ -a \\ a \end{pmatrix}$; luego, $a$=1/3.

$\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$=$bA_1$+3$A_5$+4$A_3$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b \\ -b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$; luego, $b$=2.

Esta última tabla es óptima, luego la solución óptima del problema es (2,0,4) y el valor óptimo es 24.

**c)**

| $\boldsymbol{b}+\alpha A_6$ |
|---|
| 2-2$\alpha$/3 |
| 3+$\alpha$ |
| 4+$\alpha$/3 |
| 24+$\alpha$/3 |

$$\begin{cases} 2-2\alpha/3 \geq 0; \quad \alpha \leq 3 \\ 3+\alpha \geq 0, \quad \alpha \geq -3 \\ 4+\alpha/3 \geq 0; \quad \alpha \geq -12 \end{cases}$$

Se cumplen las tres condiciones para: -3≤$\alpha$≤3.

Precio sombra: $\lambda_3 = \dfrac{24+\alpha/3-24}{\alpha} = \dfrac{1}{3}$.

**d)** Función objetivo: $2x_1 + cx_2 + 5x_3$

| | | 2 | ***c*** | 5 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | $\boldsymbol{b}$ |
| 2 | $A_1$ | 1 | -1 | 0 | 1/3 | 0 | -2/3 | 2 |
| 0 | $A_5$ | 0 | 6 | 0 | 0 | 1 | 1 | 3 |
| 5 | $A_3$ | 0 | 2 | 1 | 1/3 | 0 | 1/3 | 4 |
| | | 0 | 8-***c*** | 0 | 7/3 | 0 | 1/3 | 24 |

Para que la solución óptima no varíe, $8-c \geq 0$, luego $c$≤8.

**e)** Si el término independiente de la tercera restricción pasa de 2 a 3, tenemos que $\alpha$=1, que pertenece al rango de variación obtenido en el apartado iii) para que la base óptima no varíe, luego sustituyendo $\alpha$=1 obtenemos que la nueva solución óptima es (4/3,0,13/3) y el nuevo valor óptimo es 73/3.

# Examen de Matemáticas III

## LADE junio de 2005

**1.** Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & b & a \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde $a,b,c\in\mathbb{R}$.

a) Para $b$=2, estudiar la diagonalizabilidad de $A$ según los valores de $a$ y $c$.

b) Sean $b=a$, $c$=1 y $Q(\boldsymbol{x})={}^{t}M(\boldsymbol{x})AM(\boldsymbol{x})$, $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$. Hallar la matriz de representación y clasificar la forma cuadrática según los valores de $a$.

**a)** $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 2 & a \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Para calcular los valores propios:

$$p(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ a & 2-\lambda & a \\ c & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)\left[(1-\lambda)^2-c\right]\Rightarrow\begin{cases}\lambda=2\\ \lambda=1+\sqrt{c}\\ \lambda=1-\sqrt{c}\end{cases}$$

Casos:

• ***c*<0**, el polinomio tiene soluciones no reales, y entonces $A$ no es diagonalizable.

• ***c*=0**, valores propios: 2 y 1 (doble).

dim$S$(1)=3-rango$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$=1, esto es, dim$S$(1)=1 y entonces $A$ no es diagonalizable.

• ***c*=1**, valores propios: 2 (doble) y 0.

$$\dim S(2)=3-\text{rango}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ a & 0 & a \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{cases} a=0,\ \dim S(2)=2 \\ a\neq 0,\ \dim S(2)=1\end{cases}$$

Entonces, para $c$=1 y $a$=0 $A$ es diagonalizable. Y para $c$=1 y $a\neq$0 $A$ no es diagonalizable.

• ***c*>0 y *c*≠1,** 3 valores propios simples y entonces $A$ es diagonalizable.

**b)** $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ a & a & a\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ entonces:

$$M(Q)=\begin{pmatrix}1 & a/2 & 1\\ a/2 & a & a/2\\ 1 & a/2 & 1\end{pmatrix}.$$

Menores principales de primer orden: $\{1, a, 1\}$.

Menores principales de segundo orden: $\{a\text{-}a^2/4, 0, a\text{-}a^2/4\}$.

$|M(Q)|=0$.

Luego, como $|M(Q)|=0$ esta forma cuadrática no es definida positiva ni definida negativa. Y dado que dos menores principales de primer orden son mayores que 0, tampoco es semidefinida negativa.

Es semidefinida positiva si $a\geq 0$ y $a\text{-}a^2/4\geq 0$, esto es, $0\leq a\leq 4$.

Por tanto, si $a<0$ ó $a>4$ $Q$ es indefinida.

**2.** Una pequeña empresa textil realiza dos tipos de alfombras: de calidad excelente y de primera calidad. Para confeccionarlas utilizan lana y algodón, de los que disponen de 480 kilos y 450 kilos respectivamente. Para realizar una alfombra de calidad excelente necesitan 6 kilos de lana y 5 de algodón mientras que para terminar una alfombra de primera calidad necesitan 4 kilos de lana y 5 de algodón. Además, como consecuencia de estudios realizados sobre las ventas de las alfombras, han decidido que la producción de alfombras de primera calidad sea igual o inferior a 60 alfombras. Cada alfombra de calidad excelente se vende a 800€ y cada una de primera calidad a 600€; además venden sin problemas todo lo que producen.

a) Encontrar la producción óptima de alfombras de tal modo que la empresa maximice sus ingresos.

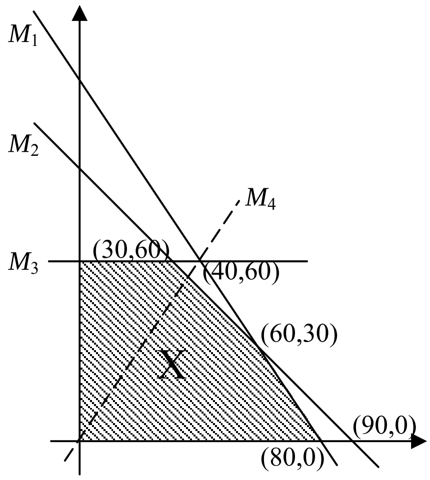
b) Si pudieran incrementar la cantidad de algodón de que disponen, ¿cuánta les interesaría?, ¿a qué precio?

c) Si se mantiene el precio de las alfombras de calidad excelente, ¿a cuánto deberían vender las alfombras de primera calidad para que en el óptimo el número de alfombras de calidad excelente sea superior al obtenido en el apartado i)?

d) Si deciden que por cada 2 alfombras de calidad excelente fabrican como máximo 3 de primera calidad, ¿cambiaría la solución óptima obtenida en el primer apartado?

$x_1$ es el nº de alfombras de calidad excelente y $x_2$ el nº de alfombras de primera calidad,

$$\max 800x_1 + 600x_2$$
$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \leq 480 \\ 5x_1 + 5x_2 \leq 450 \\ x_2 \leq 60 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$




**a)** El conjunto de soluciones factibles, *X,* es compacto, luego el problema tiene solución. La calculamos por pendientes.

$$-\infty \xleftrightarrow{(80,0)} m_1 = -3/2 \xleftrightarrow{(60,30)} m_2 = -1 \xleftrightarrow{(30,60)} m_3 = 0$$

Y la pendiente de la función objetivo es $m_f$=-4/3. Por tanto, la solución es el punto de corte entre la primera y segunda restricción, esto es: (60,30). Y el valor óptimo es 66.000€.

**b)** Para calcular el precio sombra de una unidad de algodón:

$M_2$: $5x_1 + 5x_2 = 450 + b$

(60,30)→(40,60)

$b$=0→$b$=50

66.000€→68.000€

$$\lambda_b = \frac{f(40,60) - f(60,30)}{\Delta b} = \frac{68.000 - 66.000}{50} = 40€$$

Luego la empresa podría adquirir como máximo 50 kilos de algodón, a un precio no superior a 40€ el kilo.

**c)** La solución (80,0) es óptima si $m_f \leq m_1$; luego, si $p_2$ es el precio de la alfombra de primera calidad:

$$m_f = -\frac{800}{p_2} \le m_1 = -\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad p_2 \le \frac{1600}{3} €$$

**d)** La nueva restricción $M_4$ es $3x_1 \ge 2x_2$. Como la solución óptima obtenida en el apartado i) la verifica, esta solución, (60,30), es óptima.

**3.** Considérese el siguiente problema de programación lineal:

$$\max\left(2x_1 + x_2 + x_3\right)$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 4 \\ x_2 + x_3 \le 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

a) Completar la tabla siguiente sabiendo que corresponde al problema anterior y, a partir de ella, hallar la solución óptima del problema si ésta existe.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | | 3 |
| 0 | 1 | 1 | -1 | | | 1 |
| | 0 | | 1 | 1 | 1 | |
| | 2 | | | -1 | | |

b) Determinar el rango de variación del término independiente de la primera restricción para que la base óptima no varíe y determinar su precio sombra.

c) Si el coeficiente de $x_2$ en la función objetivo se cambia de 1 a 4, ¿la solución hallada sigue siendo óptima?, ¿por qué?

d) Si el término independiente de la primera restricción se cambia de 3 a 4, ¿la solución hallada sigue siendo óptima?, ¿por qué?

**a)** El problema en forma estándar es:

$$\max\left(2x_1 + x_2 + x_3\right)$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 = 4 \\ x_2 + x_3 + x_6 = 2 \\ x_i \ge 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La base asociada a la tabla dada es $A_1$, $A_3$ y $A_6$, luego,

$$A_5 = 0A_1 + aA_3 + A_6, \text{ esto es, } \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = -1.$$

El último elemento de la columna $A_4$ es: 2×1+1×(-1)+0×1=1

Y la solución básica factible es: $\boldsymbol{b}=3A_1+A_3+bA_6$, esto es,

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow b = 1.$$

Por tanto, el valor de la función es: 3×2+1×1+1×0=7.

| | | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | $\boldsymbol{b}$ | $\theta$ | |
| 2 | $A_1$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | **0** | 3 | | |
| 1 | $A_3$ | 0 | 1 | 1 | -1 | **-1** | **0** | 1 | | |
| 0 | $A_6$ | **0** | 0 | **0** | 1 | 1 | 1 | **1** | 1 | → |
| | | **0** | 2 | **0** | **1** | -1 | **0** | **7** | | |
| | | | | | | ↑ | | | | |

| | | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | $\boldsymbol{b}$ |
| 2 | $A_1$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3 |
| 1 | $A_3$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| 0 | $A_5$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 | 1 | 8 |

Como todos los elementos de la última fila son no negativos, esta tabla es óptima y la solución óptima es (3,0,2).

**b)**

| $\boldsymbol{b}+\alpha A_4$ |
|---|
| $3+\alpha$ |
| 2 |
| $1+\alpha$ |
| $8+2\alpha$ |

Para que sea factible: $3+\alpha\geq 0$, $1+\alpha\geq 0$, luego $\alpha\geq -1$.

El precio sombra: $\lambda = \dfrac{8+2\alpha-8}{\alpha} = 2$.

**c)**

| | | 2 | **4** | 1 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | $\boldsymbol{b}$ |
| 2 | $A_1$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3 |
| 1 | $A_3$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| 0 | $A_5$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | | 0 | **-1** | 0 | 2 | 0 | 1 | 8 |

La solución hallada ya no es óptima porque en la última fila aparece un número negativo.

**d)** El incremento en el término independiente es $\alpha$=1, entonces aplicando el apartado ii), la solución óptima pasa a ser (4,0,2) y el valor óptimo 10, luego la solución hallada ya no óptima.

# Examen de Matemáticas III

## LADE febrero de 2006

**1.** Sea la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

¿Para qué valores de *a* y *b* la matriz *A* es diagonalizable?

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & a & b \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - b) = 0$$

Raíces: $1, \sqrt{b}, -\sqrt{b}$.

Casos:

- ***b*<0:** Dos de las raíces del polinomio son complejas, luego *A* no es diagonalizable.
- ***b*=0:** Raíces: 0(doble) y 1(simple).

Por ser raíz simple, dim$S$(1)=1. Por tanto, *A* será diagonalizable si dim$S$(0)=2.

dim$S$(0)$= 3 - \text{rango} \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3-2=1.$ Luego, *A* no es diagonalizable.

- ***b*=1:** Raíces: -1(simple) y 1(doble).

Por ser raíz simple, dim$S$(-1)=1. Por tanto, *A* será diagonalizable si dim$S$(1)=2.

dim$S$(1)$= 3 - rango \begin{vmatrix} -1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} -1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1-a$

$$\begin{cases} \text{Si } a=-1 \Rightarrow \text{rango}(A\text{-}I)=1 \Rightarrow \dim S(1)=2. \text{ Luego, } A \text{ es diagonalizable.} \\ \text{Si } a \neq -1 \Rightarrow \text{rango}(A\text{-}I)=2 \Rightarrow \dim S(1)=1. \text{ Luego, } A \text{ no es diagonalizable.} \end{cases}$$

- ***b*>0** y ***b*≠1**: Las tres raíces del polinomio son reales y distintas, luego *A* es diagonalizable.

**2.** Sea $Q(\boldsymbol{x})$ la forma cuadrática:

$$Q(\boldsymbol{x})={}^{t}M(\boldsymbol{x})BM(\boldsymbol{x}),\ \forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$$

donde $B=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & a & 0 \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$.

Hallar la matriz de representación de $Q(\boldsymbol{x})$ y clasificar la forma cuadrática según los valores de $a\in\mathbb{R}$.

La matriz de representación es:

$$M(Q)=\begin{pmatrix} a & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Los menores principales son:

de orden 1: $\{a, a, a\}$

de orden 2: $\{a^2, a^2\text{-}4, a^2\}$

de orden 3: $|M(Q)|=a(a^2\text{-}4)$

<u>Casos:</u>

• Si $\boldsymbol{a^2-4<0}$, esto es, $\boldsymbol{-2<a<2}$**:** hay un menor principal de orden 2 negativo, luego $Q$ es <u>indefinida</u>.

• Si $\boldsymbol{a=2}$**:** $|M(Q)|=0$ y los demás menores principales son mayores o iguales que cero, luego $Q$ es <u>semidefinida positiva</u>.

• Si $\boldsymbol{a=-2}$**:** $|M(Q)|=0$, los menores principales de orden 1 son negativos y los de orden 2 son mayores o iguales que cero, luego $Q$ es <u>semidefinida negativa</u>.

• Si $\boldsymbol{a>2}$**:** todos los menores principales son positivos, luego $Q$ es <u>definida positiva</u>.

• $\boldsymbol{a<-2}$**:** los menores principales de orden impar son negativos y los de orden 2 son positivos, luego $Q$ es <u>definida negativa</u>.

**3.** Una compañía produce lavadoras y lavavajillas en tres talleres. En el taller 1 se fabrican los motores y tiene asignados 1200 trabajadores; en el taller 2 se producen los demás elementos, y ocupa a 1850 trabajadores; finalmente, el taller 3 se dedica al montaje final de ambos productos, y emplea a 900 trabajadores. Cada operario trabaja 40 horas semanales. En la tabla se resumen el número de horas requeridas en cada taller para elaborar una unidad de cada producto.

| | Lavadoras | Lavavajillas |
|---|---|---|
| Taller 1 | 1 | 3 |
| Taller 2 | 3 | 4 |
| Taller 3 | 2 | 1 |

El beneficio obtenido por cada lavadora asciende a 50 euros y el de cada lavavajillas es de 80. Por otra parte, la compañía conoce que puede vender la cantidad que desee de ambos productos con la capacidad disponible en los tres talleres.

a) Calcular la producción óptima de la compañía mediante un problema de programación lineal.

b) Si se mantiene fijo el beneficio de cada lavavajillas, ¿en qué intervalo debe estar el beneficio de cada lavadora para que la producción óptima sea la misma que en el apartado anterior?

c) Calcular los precios sombra de las horas de trabajo de los talleres 1 y 3.

d) A la vista de los resultados obtenidos en el apartado a), el gerente de la compañía observa que en el taller 3 emplea más trabajadores de los necesarios, y decide pasar 125 trabajadores del taller 3 al taller 2, ¿qué ocurre con el beneficio óptimo?

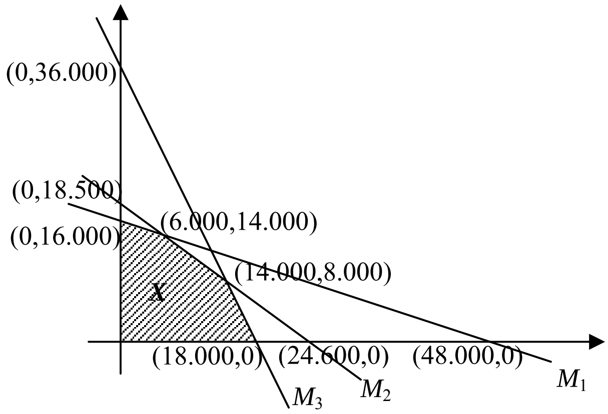
e) Si por exigencias de la demanda de estos productos, la empresa decidiera fabricar como mínimo 7 lavadoras por cada 2 lavavajillas, ¿cuál sería la producción óptima?

**a)** $x_{1}=$ número de lavadoras

$x_{2}=$ número de lavavajillas

El problema es el siguiente:

$$\max(50x_1 + 80x_2)$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 48.000 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 74.000 \\ 2x_1 + x_2 \leq 36.000 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$




Las pendientes son:

$$\begin{cases} p_1 = -1/3 \\ p_2 = -3/4 \\ p_3 = -2 \\ p_f = -5/8 \end{cases} \Rightarrow \quad |p_1| < |p_f| < |p_2| < |p_3|$$

Por tanto, la solución óptima es el punto de corte entre la primera y la segunda restricción, es decir, el punto **(6.000,14.000)** y el valor óptimo es **1.420.000** euros.

**b)** Ahora la función objetivo es ($ax_1$+$80x_2$) y su pendiente es $p_f = -\frac{a}{80}$. Por tanto, para que la solución sea la misma, tiene que cumplirse:

$$|p_1| < |p_f| < |p_2| \Rightarrow \quad \frac{1}{3} \leq \frac{a}{80} \leq \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{80}{3} \leq a \leq 60$$

**c)** La primera restricción se puede desplazar hasta que el nuevo óptimo sea el punto (0,18.500).

$M_1$: $x_1$+$3x_2$=48.000+$a$

(6.000,14.000) $\rightarrow$ (0,18.500)

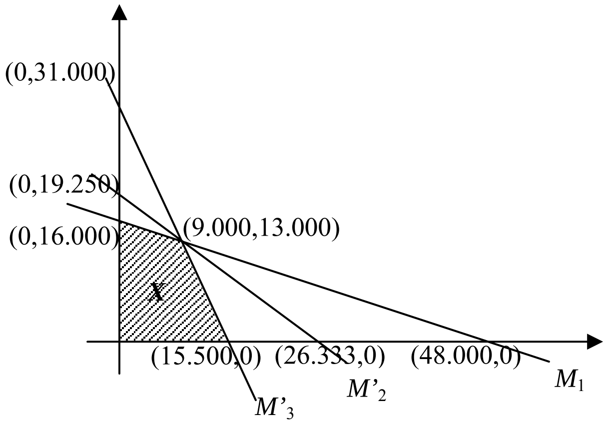
$a$=0 $\rightarrow$ $a$=7.500

$$\lambda_1 = \frac{f(0,18.500) - f(6.000,14.000)}{55.500 - 48.000} = \frac{1.480.000 - 1.420.000}{7.500} = 8€$$

La tercera restricción es no saturada, luego su precio sombra es 0.

**d)** El nuevo problema es:

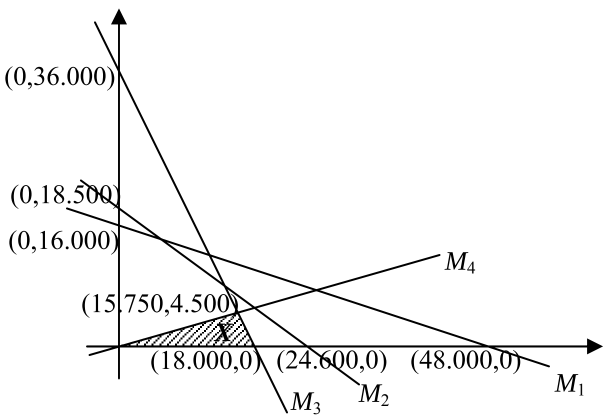
$$\max(50x_1 + 80x_2)$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 48.000 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 79.000 \\ 2x_1 + x_2 \le 31.000 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$




La nueva solución óptima está en el punto de corte de las tres restricciones, es decir, el punto (9.000,13.000) y el nuevo valor óptimo es 1.490.000€.

**e)** Al problema del apartado a) hay que añadirle una nueva restricción ($M_4$):

$$\max(50x_1 + 80x_2)$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 48.000 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 74.000 \\ 2x_1 + x_2 \le 36.000 \\ 2x_1 \ge 7x_2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$




La nueva solución óptima es el punto de corte entre la nueva restricción y la tercera, es decir, (15.750,4.500) y el nuevo valor óptimo es 1.147.500€.

**4.** Considérese el siguiente problema de programación lineal:

$$\max\left(3x_1+2x_2\right)$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2\le 4 \\ x_1+x_2\le 3 \\ x_1\ge 1 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$

Completar la siguiente tabla sabiendo que corresponde a una solución básica factible del problema anterior, y resolverlo.

| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $\boldsymbol{b}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | -1 | 2 | 0 | 2 |
| | | 1 | -1 | 0 | 1 |
| | | -1 | | 1 | |
| 0 | | | 4 | 0 | |

| | | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $\boldsymbol{b}$ |
| 3 | $A_1$ | 1 | | -1 | 2 | 0 | 2 |
| 2 | $A_2$ | | | 1 | -1 | 0 | 1 |
| 0 | $A_5$ | | | -1 | $c$ | 1 | $x_5$ |
| | | 0 | | $d$ | 4 | 0 | |

El problema en forma estándar es:

$$\max\left(3x_1+2x_2\right)$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=4 \\ x_1+x_2+x_4=3 \\ x_1-x_5=1 \\ x_i\ge 0, i=1,\ldots,5. \end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La base es [$A_1$ $A_2$ $A_5$]. La solución básica factible asociada a esta base es $(2,1,0,0,x_5)$.

Para calcular $x_5$:

$$\begin{cases} 2+2=4 \\ 2+1=3 \\ 2-x_5=1 \end{cases} \Rightarrow \quad x_5=1$$

Para calcular *c:*

$$A_4 = 2A_1 - 1A_2 + cA_5 \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; c=2$$

Para calcular $d$: $d=3\cdot(-1)+2\cdot 1+0\cdot(-1)-0=-1$.

La tabla completa es:

| | | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $\boldsymbol{b}$ | $\theta$ |
| 3 | $A_1$ | 1 | 0 | -1 | 2 | 0 | 2 | |
| 2 | $A_2$ | 0 | 1 | 1 | -1 | 0 | 1 | 1 → |
| 0 | $A_5$ | 0 | 0 | -1 | 2 | 1 | 1 | |
| | | 0 | 0 | -1 | 4 | 0 | 8 | |
| | | | | ↑ | | | | |

Sale $A_2$ de la base y entra $A_3$ y se obtiene:

| | | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $\boldsymbol{b}$ |
| 3 | $A_1$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 3 |
| 0 | $A_3$ | 0 | 1 | 1 | -1 | 0 | 1 |
| 0 | $A_5$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| | | 0 | 1 | 0 | 3 | 0 | 9 |

Esta tabla es óptima. La solución es (3,0) y el valor óptimo 9.

**5.** Considérese el siguiente problema de programación lineal:

$$\max\left(x_1 + 2x_2 + 3x_3\right)$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 \le 12 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 8 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Si la siguiente es una tabla óptima de este problema, contestar a las siguientes cuestiones:

| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | ***b*** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| -10/3 | 0 | 0 | 1 | 1/3 | -7/3 | 3 |
| -1/3 | 1 | 0 | 0 | 1/3 | -1/3 | 1 |
| 7/6 | 0 | 1 | 0 | -1/6 | 2/3 | 2 |
| 11/6 | 0 | 0 | 0 | 1/6 | 4/3 | 8 |

a) ¿Cuál es el rango de variación del término independiente de la segunda restricción para que la base óptima no varíe? Hallar el precio sombra de la segunda restricción.

b) ¿Cuál es el rango de variación del coeficiente de $x_2$ en la función objetivo para que no varíe la solución óptima?

c) ¿Qué ocurre con la solución óptima si el término independiente de la tercera restricción pasa de 5 a 6?

**a)** Si el término independiente de la segunda restricción cambia de 8 a 8+$\varepsilon$:

| ***b***+$\varepsilon A_5$ |
|---|
| $3+\frac{1}{3}\varepsilon$ |
| $1+\frac{1}{3}\varepsilon$ |
| $2-\frac{1}{6}\varepsilon$ |
| $8+\frac{1}{6}\varepsilon$ |

$$\begin{cases} 3+\dfrac{1}{3}\varepsilon \ge 0 \Leftrightarrow \quad \varepsilon \ge -9 \\ 1+\dfrac{1}{3}\varepsilon \ge 0 \Leftrightarrow \quad \varepsilon \ge -3 \\ 2-\dfrac{1}{6}\varepsilon \ge 0 \Leftrightarrow \quad \varepsilon \le 12 \end{cases}$$

Se cumplen las tres condiciones para $-3 \le \varepsilon \le 12$. Luego el rango de variación del término independiente de la segunda restricción para que la base óptima no varíe es $[5,20]$ y el precio sombra es 1/6 (último elemento de la columna $A_5$ en la tabla óptima).

**b)** Función objetivo: $x_1 + cx_2 + 3x_3$

| | | 1 | $c$ | 3 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | **b** |
| 0 | $A_4$ | -10/3 | 0 | 0 | 1 | 1/3 | -7/3 | 3 |
| $c$ | $A_2$ | -1/3 | 1 | 0 | 0 | 1/3 | -1/3 | 1 |
| 3 | $A_3$ | 7/6 | 0 | 1 | 0 | -1/6 | 2/3 | 2 |
| | | 5/2-$c$/3 | 0 | 0 | 0 | $c$/3-1/2 | 2-$c$/3 | 6+$c$ |

Para que la solución óptima no varíe:

$$\begin{cases} \frac{5}{2} - \frac{1}{3}c \geq 0 \Leftrightarrow \quad c \leq 15/2 \\ \frac{1}{3}c - \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \quad c \geq 3/2 \\ 2 - \frac{1}{3}c \geq 0 \Leftrightarrow \quad c \leq 6 \end{cases}$$

Se cumplen las tres condiciones para $3/2 \leq c \leq 6$.

**c)** Si el término independiente de la tercera restricción pasa de 5 a 6, tenemos que $\varepsilon$=1, entonces:

| **b**+$\varepsilon A_6$ |
|---|
| $3 - 7/3 = 2/3$ |
| $1 - 1/3 = 2/3$ |
| $2 + 2/3 = 8/3$ |
| $8 + 4/3 = 28/3$ |

Luego, cambia la solución óptima y ahora es $\left(0, \frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$ y el valor óptimo 28/3.

# Examen de Matemáticas III

# LADE junio de 2006

**1.** Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\a&2&a\\b&0&0\end{pmatrix}$, donde $a,b\in\mathbb{R}$.

a) Estudiar la diagonalizabilidad de $A$ según los valores de $a,b\in\mathbb{R}$.

b) Si $b$=-1, considérese la forma cuadrática

$$Q(\boldsymbol{x})={}^{t}M(\boldsymbol{x})AM(\boldsymbol{x}),\ \forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3.$$

Hallar $M(Q)$ y clasificar la forma cuadrática $Q$ según los valores $a\in\mathbb{R}$.

**a)** Calculamos los valores propios:

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&1\\a&2-\lambda&a\\b&0&-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(2-\lambda)^2-b(2-\lambda)=0\Rightarrow\begin{cases}\lambda=2\\\lambda=1+\sqrt{1+b}\\\lambda=1-\sqrt{1+b}\end{cases}$$

<u>Casos:</u>

- Si ***b*<-1:** Dos de las raíces del polinomio son complejas, luego $A$ no es diagonalizable.
- Si ***b*=-1:** Raíces: 2 (simple) y 1 (doble).

$A$ será diagonalizable si dim$S$(1)=2.

dim$S$(1)=3-rango$\begin{pmatrix}1&0&1\\a&1&a\\-1&0&-1\end{pmatrix}$=3-2=1, luego, $A$ no es diagonalizable.

- Si ***b*=0:** Raíces: 2 (doble) y 0 (simple).

dim$S$(2)=3-rango$\begin{pmatrix}0&0&1\\a&0&a\\0&0&-2\end{pmatrix}$

Hay dos subcasos:

$$\begin{cases}\text{Si } a=0\ \Rightarrow rg(A-2I)=1\Rightarrow \dim S(2)=2\Rightarrow A \text{ es diagonalizable}\\\text{Si } a\neq 0\ \Rightarrow rg(A-2I)=2\Rightarrow \dim S(2)=1\Rightarrow A \text{ no es diagonalizable}\end{cases}$$

• Si ***b*>-1** y ***b*≠0:** Las tres raíces del polinomio son reales y distintas, luego $A$ es diagonalizable.

**b)** $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ a & 2 & a \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

La matriz de representación es: $M(Q)=\begin{pmatrix} 2 & a/2 & 0 \\ a/2 & 2 & a/2 \\ 0 & a/2 & 0 \end{pmatrix}$

Los menores principales son:

-de orden 1: 2,2,0

-de orden 2: $4-\frac{a^2}{4},-\frac{a^2}{4},0$

-de orden 3: $|M(Q)|=-2\frac{a^2}{4}=-\frac{a^2}{2}$

Casos:

• Si **a=0:** $|M(Q)|=0$ y los demás menores principales son mayores o iguales que cero, luego Q es <u>semidefinida positiva</u>.

•Si ***a ≠ 0*:** Hay un menor principal de orden 2 $\left(-a^2/4\right)$ negativo, luego Q es <u>indefinida</u>.

**2.** Una empresa produce dos tipos de hilo, *A* y *B*, mezclando hilo de seda y de algodón en las siguientes proporciones. Para obtener hilo de tipo *A* la proporción es: 60% de hilo de seda y 40% de hilo de algodón. Para obtener hilo de tipo *B* la proporción es: 40% de hilo de seda y 60% de hilo de algodón. Un metro de seda cuesta 3 u.m. y un metro de algodón 0,5 u.m. El coste del proceso productivo, excluido el de las materias primas, es de 2,5 u.m. por un metro de hilo de tipo *A* y de 1 u.m. por 1 metro de hilo de tipo *B*. Semanalmente se dispone de un máximo de 1.800 metros de hilo de seda y 2.400 de algodón. Además, el coste del proceso productivo (excluido el de las materias primas) no puede superar las 6.000 u.m. El precio de venta es de 8,5 u.m. y 4,5 u.m., respectivamente, por 1 metro de hilo de tipo *A* y tipo *B*.

a) Determina la producción semanal que maximice los beneficios totales de la empresa.
b) ¿Le interesaría a la empresa aumentar el coste del proceso productivo por encima de las 6.000 u.m.? ¿Hasta qué cantidad?
   ¿Le interesaría comprar más seda? ¿A cuánto estaría dispuesto a comprarla?
c) Manteniendo el precio de 1 metro de hilo de tipo *A* en 8,5 u.m., ¿para qué precios del hilo de tipo *B* decidirá producir únicamente hilo de tipo *B*? Para estos nuevos precios qué le interesaría a la empresa: ¿comprar más seda o más algodón?

**a)** VARIABLES:

$x_1$=metros de hilo *A*

$x_2$=metros de hilo *B*

FUNCIÓN OBJETIVO:

Ingresos (I): $8,5x_1 + 4,5x_2$

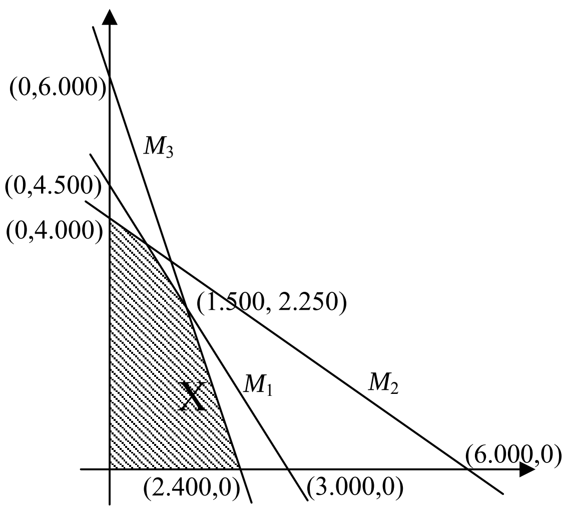
Coste proceso productivo (CPP): $2,5x_1 + x_2$

Coste materias primas (CMP): $3\left(0,6x_1 + 0,4x_2\right) + 0,5\left(0,4x_1 + 0,6x_2\right)$

I-CPP-CMP= $4x_1 + 2x_2$

El problema es el siguiente:

$$\max 4x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} 0,6x_1 + 0,4x_2 \leq 1.800 \\ 0,4x_1 + 0,6x_2 \leq 2.400 \\ 2,5x_1 + x_2 \leq 6.000 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$




$$\left.\begin{array}{l} p_f = -2 \\ p_1 = -1,5 \\ p_2 = -0,6 \\ p_3 = -2,5 \end{array}\right\} \Rightarrow p_3 < p_f < p_1 < p_2$$

El óptimo se alcanza en la intersección de la 1ª y de la 3ª restricciones, es decir, el punto (1.500,2.250) y el valor óptimo es 10.500 u.m.

**b)** La tercera restricción (coste productivo) representa un recurso escaso. Se puede desplazar hasta que el nuevo óptimo sea el punto (3.000,0), en el que el coste productivo es 7.500.

La primera restricción (seda) representa un recurso escaso. Se puede desplazar hasta que el nuevo óptimo sea el punto (12.000/11,36.000/11).

$M_1$: $0,6x_1 + 0,4x_2 = 1.800 + a$

$$(1.500{,}2.250) \to \left(\frac{12.000}{11}, \frac{36.000}{11}\right)$$

$$a{=}0 \to a{=}\frac{1.800}{11}$$

$$f(1.500{,}2.250){=}10.500 \text{ u.m.} \to f\left(\frac{12.000}{11}, \frac{36.000}{11}\right) = \frac{120.000}{11} \text{ u.m.}$$

$$\lambda_1 = \frac{f\left(\frac{12.000}{11}, \frac{36.000}{11}\right) - f(1.500, 2.250)}{\frac{1.800}{11}} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ u.m.}$$

**c)** Para que sea conveniente producir únicamente hilo tipo *B*, la solución óptima deberá alcanzarse en el punto (0,4.000). Para ello, la pendiente de la función objetivo ha de ser mayor que la de la segunda restricción.
Si se denota por *p* al nuevo precio del hilo *B*, la nueva función objetivo sería: $4x_1 + (p - 2,5)x_2$. Luego, deberá ocurrir

$$-\frac{4}{p-2,5} \geq -\frac{0,4}{0,6} \Rightarrow p \geq 8,5 .$$

**3.** Sea el siguiente problema de programación lineal:

$$\max\left(ax_1 + bx_2 - x_3\right)$$
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + x_3 \le 6 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 \le 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

donde $a$, $b \in \mathbb{R}$.

a) Cuando $a$=2 y $b$=-1, resolver el problema.

b) Cuando $a$=0 y $b$=3, considérese la siguiente tabla asociada al problema resultante.

| | | 0 | 3 | -1 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | ***b*** |
| 3 | $A_2$ | 1/4 | 1 | 1/2 | 1/2 | 0 | 3 |
| 0 | $A_5$ | -5/4 | 0 | -7/2 | -1/2 | 1 | 0 |
| | | 3/4 | 0 | 5/2 | 3/2 | 0 | 9 |

i) Hallar los precios sombra de las dos restricciones del problema y el intervalo de variación del término independiente de cada restricción para que la base óptima no varíe.

ii) Si el término independiente de la primera restricción se reduce de 6 a 2, ¿la solución óptima varía? En caso afirmativo, dar la nueva solución óptima.

iii) Hallar el rango de variación del coeficiente de $x_1$ en la función objetivo de forma que la solución óptima no varíe.

**a)** El problema en forma estándar es:

$$\max\left(2x_1 - x_2 - x_3\right)$$
$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = 3 \\ x_i \ge 0, \forall i \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1/2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

| | | 2 | -1 | -1 | 0 | 0 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | ***b*** | |
| 0 | $A_4$ | 1/2 | 2 | 1 | 1 | 0 | 6 | $\rightarrow$ s |
| 0 | $A_5$ | -1 | 1 | -3 | 0 | 1 | 3 | |
| | | -2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| | | $\uparrow$ | | | | | | |

| | | 2 | -1 | -1 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $\boldsymbol{b}$ |
| 2 | $A_1$ | 1 | 4 | 2 | 2 | 0 | 12 |
| 0 | $A_5$ | 0 | 5 | -1 | 2 | 1 | 15 |
| | | 0 | 9 | 5 | 4 | 0 | 24 |

Esta tabla es óptima, luego la solución óptima del problema es (12,0,0) y el valor óptimo es 24.

**b) i)**

**<u>1ª restricción:</u>**

| $\boldsymbol{b}+\varepsilon A_4$ |
|---|
| $3+\frac{1}{2}\varepsilon$ |
| $-\frac{1}{2}\varepsilon$ |
| $9+\frac{3}{2}\varepsilon$ |

$$\begin{cases} 3+\frac{1}{2}\varepsilon \geq 0 \Leftrightarrow \quad \varepsilon \geq -6 \\ -\frac{1}{2}\varepsilon \geq 0 \Leftrightarrow \quad \varepsilon \leq 0 \end{cases}$$

Se cumplen las dos condiciones para $-6 \leq \varepsilon \leq 0$. Luego el rango de variación del término independiente de la primera restricción para que la base óptima no varíe es $[0,6]$ y el precio sombra es:

$$p_1 = \frac{9+\frac{3}{2}\varepsilon - 9}{\varepsilon} = \frac{3}{2}.$$

**<u>2ª restricción:</u>**

| $\boldsymbol{b}+\varepsilon\ A_5$ |
|---|
| 3 |
| $\varepsilon$ |
| 9 |

Para que la base óptima no varíe $\varepsilon \geq 0$, luego el rango de variación del término independiente de la segunda restricción para que la base óptima no varíe es $[3,+\infty)$ y el precio sombra es 0.

**ii)** Si el término independiente de la primera restricción se reduce de 6 a 2, entonces $\varepsilon = -4$, que está en el rango de variación hallado en el apartado 1), luego la base óptima no varía y tenemos:

| $\boldsymbol{b}+(-4)\,A_4$ |
|---|
| $3+\frac{1}{2}(-4)=1$ |
| $-\frac{1}{2}(-4)=2$ |
| $9+\frac{3}{2}(-4)=3$ |

es decir, la solución óptima sí varía y será (0,1,0) y el nuevo valor óptimo será 3.

**iii)** Función objetivo: $\lambda x_1 + 3x_2 - x_3$

| | | $\lambda$ | 3 | -1 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $\boldsymbol{b}$ |
| 3 | $A_2$ | 1/4 | 1 | 1/2 | 1/2 | 0 | 3 |
| 0 | $A_5$ | -5/4 | 0 | -7/2 | -1/2 | 1 | 0 |
| | | ¾- $\lambda$ | 0 | 5/2 | 3/2 | 0 | 9 |

Para que la solución óptima no varíe:

$$\frac{3}{4} - \lambda \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq 3/4\,.$$

# Examen de Matemáticas III

# LADE febrero de 2007

**1.** Considérese la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

donde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

a) Para $\beta = 0$ y $\gamma = 1$, hallar, si existe, una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de *A* y una matriz diagonal semejante a *A*.

b) Si $\beta = -1$ y $\gamma = 5$, clasifica la forma cuadrática $Q(\boldsymbol{x}) = {}^tM(\boldsymbol{x})AM(\boldsymbol{x})$ según los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$.

**a)** $$p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} \alpha-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & \alpha-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & \alpha-\lambda \end{vmatrix} = (\alpha-\lambda)[(\alpha-\lambda)^2 - 1] = 0.$$

Los valores propios son $\lambda = \alpha$, $\lambda = \alpha + 1$ y $\lambda = \alpha - 1$. Como son reales y distintos, *A* es diagonalizable $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ y una matriz diagonal semejante a *A* es:

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 \end{pmatrix}$$

$$S(\alpha) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 / (A - \alpha I)M(x) = 0 \right\} = \left\{ x_1(1,0,0) / x_1 \in \mathbb{R} \right\} = L\left\langle (1,0,0) \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = x_3 = 0$$

$$S(\alpha+1) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 / (A - (\alpha+1)I)M(x) = 0 \right\} = \left\{ x_1(1,1,1) / x_1 \in \mathbb{R} \right\} = L\left\langle (1,1,1) \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3$$

$$S(\alpha-1) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 / (A - (\alpha-1)I)M(x) = 0 \right\} = \left\{ (x_1, x_1, -x_1) / x_1 \in \mathbb{R} \right\} = L\left\langle (1,1,-1) \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -x_1 \\ x_2 = x_1 \end{cases}$$

Luego, una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de $A$ es

$$B = \langle (1,0,0), (1,1,1), (1,1,-1) \rangle .$$

**b)** $M(Q) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 3 \\ 0 & 3 & \alpha \end{pmatrix}$

Los menores principales de M(Q) son:

de orden 1: $\alpha, \alpha, \alpha$ .

de orden 2: $\alpha^2, \alpha^2, \alpha^2 - 9$

de orden 3: $|M(Q)| = \alpha^3 - 9\alpha = \alpha\left(\alpha^2 - 9\right)$

<u>Casos:</u>

- $\alpha = 3$ : $Q$ es semidefinida positiva.
- $\alpha = -3$ : $Q$ es semidefinida negativa.
- $\alpha > 3$ : $Q$ es definida positiva.
- $\alpha < -3$ : $Q$ es definida negativa.
- $-3 < \alpha < 3$ : $Q$ es indefinida.

**2.** Una empresa produce dos productos $P_1$ y $P_2$ a partir de dos materias primas $A$ y $B$. En la siguiente tabla se recogen las cantidades necesarias de cada materia prima para obtener una tonelada de cada producto, así como la disponibilidad semanal de las materias primas, todas ellas en toneladas.

| | Producto $P_1$ | Producto $P_2$ | Disponibilidad |
|---|---|---|---|
| Materia prima $A$ | 1 | 2 | 300 |
| Materia prima $B$ | 4 | 3 | 720 |

Debido a restricciones tecnológicas, la producción de $P_2$ no puede superar el doble de la producción de $P_1$. El beneficio por tonelada del producto $P_1$ es de 15 euros, mientras que el del producto $P_2$ es de 20 euros.

a) ¿Cuál es la producción semanal que maximiza los beneficios de la empresa? ¿Será conveniente adquirir materia prima *B* por encima de las 720 toneladas? ¿Cuánto y a qué precio?

b) ¿Cuál debe ser el precio mínimo del producto $P_2$, si se mantiene el de $P_1$, para que se decida producir únicamente del producto $P_1$?

c) Si se establece por ley que los beneficios no deben superar los 3.000 euros, ¿cuál es la solución óptima?

d) Formula, sin resolverlo, el problema que resulta al añadir la siguiente información al problema anterior:

-Por cada 3 toneladas de $P_1$ se han de producir por lo menos 4 de $P_2$.

-Se ha establecido un nuevo impuesto sobre las materias primas que reduce el beneficio total, de forma que cada tonelada de *A* está gravada con 0,5 euros cada tonelada de *B* con 0,6 euros.

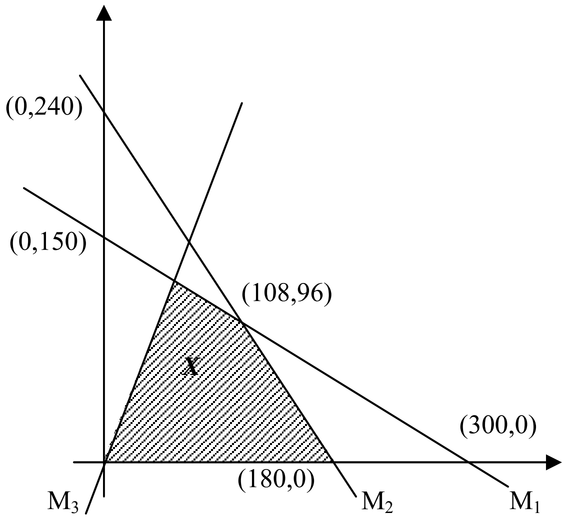
**a)** Las variables son:

$x_1$= número de toneladas del producto $P_1$

$x_2$= número de toneladas del producto $P_2$

El problema es el siguiente:

$$\max(15x_1 + 20x_2)$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 300 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 720 \\ x_2 \le 2x_1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$




Las pendientes son:

$$\left.\begin{array}{r} p_f = -\dfrac{15}{20} \\ p_1 = -\dfrac{1}{2} \\ p_2 = -\dfrac{4}{3} \\ p_3 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow p_2 < p_f < p_1 < p_3 .$$

Por tanto, la solución óptima se alcanza en el punto de corte de las restricciones 1 y 2, o sea en (108,96), y el valor óptimo 3.540 euros.

Sí es conveniente adquirir materia prima *B* porque es un recurso escaso. La cantidad conveniente es la que permita producir (300,0), es decir 1200 toneladas, o sea 480 toneladas más de materia prima *B*. En este caso, el óptimo se alcanzaría en (300,0) y el valor óptimo sería 4500 euros. Por tanto, el precio sombra de la materia prima *B* es:

$$\lambda_B = \frac{f(300,0) - f(108,96)}{1200-720} = \frac{4500-3540}{480} = 2 \text{ €/tonelada}$$

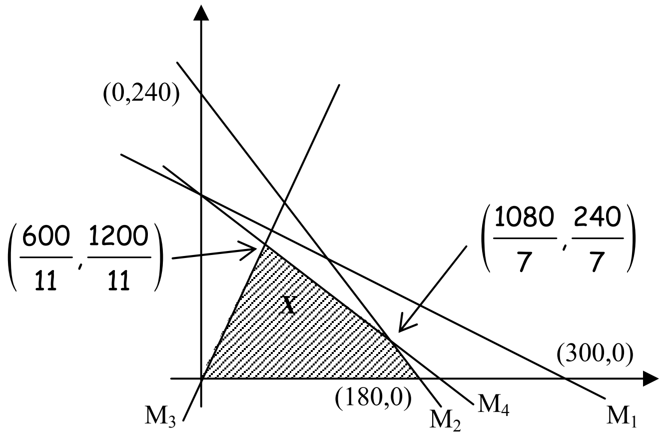
**b)** Hay que calcular el coeficiente de $x_2$ en la función objetivo de modo que el óptimo se alcance en (180,0). Es decir, que la pendiente de la función objetivo sea menor que la de la restricción 2. Si se denota por *b* a dicho coeficiente deberá cumplirse,

$$-\frac{15}{b} < -\frac{4}{3} \Leftrightarrow b < \frac{45}{4}.$$

Por tanto, el precio mínimo será 0.

**c)** En este caso aparece una nueva restricción:

$$\max(15x_1 + 20x_2)$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 300 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 720 \\ x_2 \le 2x_1 \\ 15x_1 + 20x_2 \le 3.000 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



Como $p_2 < p_f = p_4 < p_1 < p_3$, entonces el óptimo se alcanza en los puntos del segmento $\overline{\left(\frac{600}{11},\frac{1200}{11}\right)\left(\frac{1080}{7},\frac{240}{7}\right)}$ y el valor óptimo es 3000.

**d)** Hay que añadir la siguiente restricción al problema original: $3x_2 \geq 4x_1$.

Además, la función objetivo será:

$15x_1 + 20x_2 - 0,5(x_1 + 2x_2) - 0,6(4x_1 + 3x_2) = 12.1x_1 + 17.2x_2$.

Por tanto, el nuevo problema sería:

$$\max(12.1x_1 + 17.2x_2)$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 300 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 720 \\ x_2 \leq 2x_1 \\ 15x_1 + 20x_2 \leq 3.000 \\ 3x_2 \geq 4x_1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

**3.** Considérese el siguiente problema de programación lineal:

$$\max\left(50x_1 + 80x_2\right)$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 48 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 74 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 36 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

a) Utiliza el método de las penalizaciones para encontrar una solución básica factible inicial.

b) Si la siguiente tabla corresponde al problema anterior, encuentra la solución óptima.

| | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | ***b*** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 1 | 0 | -4/5 | 3/5 | 0 | 6 |
| $A_2$ | 0 | 1 | 3/5 | -1/5 | 0 | 14 |
| $A_5$ | 0 | 0 | 4/5 | 2/5 | 1 | 32 |
| | 0 | 0 | 8 | 14 | 0 | 1420 |

c) ¿Cuál es el precio sombra de las dos primeras restricciones?

d) Calcula la nueva solución óptima si el término independiente de la primera restricción aumenta en 5 unidades.

e) Si se sustituye la tercera restricción por $2x_1 + x_2 \leq 36$, la salida del programa QSB para el nuevo problema es la siguiente:

Solution Summary for Problema

01-18-2007 17:03:13 Page: 1 of 1

| Variable Number | Variable Name | Solution | Opportunity Cost | Minimum Obj. Coef. | Current Obj. Coef. | Maximum Obj. Coef. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | X1 | 6 | 0 | 26.66667 | 50 | 60 |
| 2 | X2 | 14 | 0 | 66.66666 | 80 | 150 |

Maximized OBJ = 1420 Iteration = 2 Elapsed CPU seconds = 0

Constraint Summary for Problema

01-18-2007 17:03:13 Page: 1 of 1

| Constraint Number | Constraint Status | Shadow Price | Surplus | Minimum R. H. S. | Current R. H. S. | Maximum R. H. S. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Tight (<) | 8 | 0 | 38 | 48 | 55.5 |
| 2 | Tight (<) | 14 | 0 | 64 | 74 | 84 |
| 3 | Loose (<) | 0 | 10 | 26 | 36 | M |

Maximized OBJ = 1420 Iteration = 2 Elapsed CPU seconds = 0

i) ¿Cuál es la solución óptima del nuevo problema?

ii) ¿Qué restricciones representan recursos abundantes? ¿Por qué?

iii) En el caso de que el coeficiente de $x_1$ en la función objetivo aumentara a 55, ¿cambiaría la solución óptima? ¿Por qué?

**a)**

$$\max\left(50x_1 + 80x_2\right) \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 48 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 74 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 36 \\ x_i \geq 0 \; (i = 1,2) \end{cases}$$

$$\max\left(50x_1 + 80x_2\right) \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 48 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_4 = 74 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_5 = 36 \\ x_i \geq 0 \; (i = 1,\dots,5) \end{cases}$$

problema artificial

$$\max\left(50x_1 + 80x_2 - Mx_6\right) \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 48 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_4 = 74 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_5 + x_6 = 36 \\ x_i \geq 0 \; (i = 1,\dots,6) \end{cases}$$

La matriz de coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La base canónica es $B = \left\langle A_3, A_4, A_6 \right\rangle$. La tabla asociada es:

| | | $A_1$ (50) | $A_2$ (80) | $A_3$ (0) | $A_4$ (0) | $A_5$ (0) | $A_6$ (-$M$) | $b$ | $\theta$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $A_3$ | 1 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 48 | 16 | |
| 0 | $A_4$ | 3 | 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 74 | 74/4 | |
| -$M$ | $A_6$ | 2 | 4 | 0 | 0 | -1 | 1 | 36 | 9 | → |
| | | -2$M$-50 | -4$M$-80 | 0 | 0 | M | 0 | -36$M$ | | |
| | | | ↑ | | | | | | | |

En la siguiente tabla, entra $A_2$ y sale $A_6$ de la base, que es la columna correspondiente a la variable artificial:

| | | $A_1$ (50) | $A_2$ (80) | $A_3$ (0) | $A_4$ (0) | $A_5$ (0) | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $A_3$ | -1/2 | 0 | 1 | 0 | 3/4 | 21 |
| 0 | $A_4$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 38 |
| 80 | $A_2$ | 1/2 | 1 | 0 | 0 | -1/4 | 9 |
| | | -10 | 0 | 0 | 0 | -20 | 720 |

Luego, la solución básica factible inicial es (0,9,21,38,0).

**b)** La solución óptima es (6,14) y el valor óptimo es 1420.

**c)** El precio sombra de la primera restricción es 8 y el de la segunda es 14, es decir, los últimos elementos de las columnas $A_3$ y $A_4$, respectivamente, en la tabla óptima.

**d)** Si el término independiente de la primera restricción aumenta en 5 unidades, la nueva columna **b** es:

$$b+5\,A_3$$

$$\begin{array}{|c|}\hline 6-\frac{4}{5}(5) \\ 14+\frac{3}{5}(5) \\ 32+\frac{4}{5}(5) \\ \hline 1420+8(5) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ 17 \\ 36 \\ \hline 1460 \\ \hline \end{array}$$

Luego, la nueva solución óptima es (2,17) y el nuevo valor óptimo 1460.

**e)** **i)** La solución óptima es (6,14)

**ii)** Solamente la tercera restricción representa recursos abundantes, porque es no saturada. Exactamente sobran 10 unidades del tercer recurso.

**iii)** No cambiaría, porque 55 está dentro del rango de variación del coeficiente de $x_1$ en la función objetivo para que la solución óptima no varíe, que es [26’6667,60].

## Examen de Matemáticas III

## LADE junio de 2007

**1.** Sea la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} b & 4 & 4 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}, \quad a,b\in\mathbb{R}.$$

Estudiar la diagonalizabilidad de $A$ para los distintos valores de $a$ y $b$.

$$p_A(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} b-\lambda & 4 & 4 \\ 0 & a-\lambda & b \\ 0 & b & a-\lambda \end{vmatrix}=(a-\lambda)^2(b-\lambda)-b^2(b-\lambda)=0$$

Los valores propios son: $\lambda=b, \lambda=a+b, \lambda=a-b$.

Caso 1. ***a*=*b*=0**. Valores propios: 0 (triple)

dimS(0)=3-rango($A$-0$I$)=$3-rango\begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$=3-1=2<3 $\Rightarrow$ $A$ no es diagonalizable.

Caso 2. ***a*≠0, *b*=0**. Valores propios: 0 (simple), $a$ (doble)

dimS($a$)=3-rango($A$-$aI$)=$3-rango\begin{pmatrix} -a & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$=3-1=2 $\Rightarrow$ $A$ es diagonalizable.

Caso 3. ***a*=0, *b*≠0**. Valores propios: -$b$ (simple), $b$ (doble)

dimS($b$)=3-rango($A$-$bI$)=$3-rango\begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 0 & -b & b \\ 0 & b & -b \end{pmatrix}$=3-2=1<2 $\Rightarrow$ $A$ no es diagonalizable.

Caso 4. ***a*,*b*≠0, *a*=2*b***. Valores propios: 3$b$ (simple), $b$ (doble)

dimS($b$)=3-rango($A$-$bI$)=$3-rango\begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 0 & b & b \\ 0 & b & b \end{pmatrix}$=3-1=2 $\Rightarrow$ $A$ es diagonalizable.

Caso 5. ***a*,*b*≠0, *a*≠2*b***. Los valores propios son todos distintos, luego $A$ es diagonalizable.

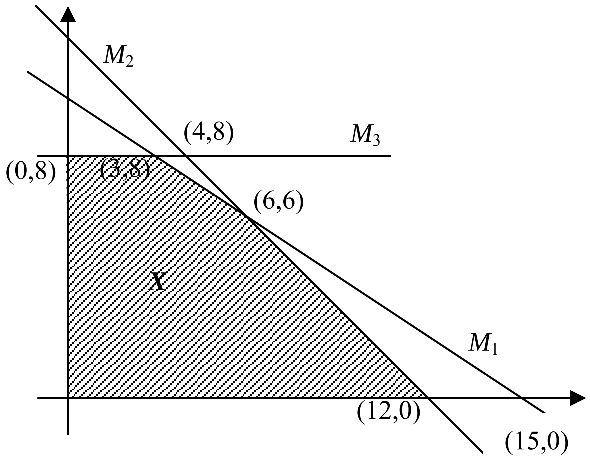
**2.** Considérese el siguiente problema de programación lineal

$$\max[3x_1 + 4x_2]$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 30 \\ x_1 + x_2 \le 12 \\ x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

a) Calcula gráficamente su solución óptima.

b) Calcula el precio sombra de las tres restricciones.

c) Si se añade en el problema inicial la restricción $2x_1 - ax_2 \ge 0$, ¿cuál ha de ser el valor de *a* para que no varíe la solución óptima?




**a)** Las pendientes son:

$$\left.\begin{aligned} p_f &= -\frac{3}{4} \\ p_1 &= -\frac{2}{3} \\ p_2 &= -1 \\ p_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow |p_3| = 0 < |p_1| < |p_f| < |p_2|$$

Por tanto, la solución óptima se alcanza en el punto de corte de las restricciones 1 y 2, o sea en (6,6), y el valor óptimo es 42.

**b)** Precios sombra.

Restricción 1. La cantidad conveniente de recurso 1 debe permitir que se alcance el punto (4,8), es decir 32 unidades.

$$\lambda_1 = \frac{f(4,8) - f(6,6)}{32-30} = \frac{44-42}{2} = 1.$$

Restricción 2. La cantidad conveniente de recurso 2 debe permitir que se alcance el punto (15,0), es decir 15 unidades.

$$\lambda_2 = \frac{f(15,0) - f(6,6)}{15-12} = \frac{45-42}{3} = 1.$$

Restricción 3. Este recurso es abundante, su precio sombra es 0.

**c)** Para que el punto (6,6) siga siendo óptimo debe cumplir la restricción $2x_1 - ax_2 \geq 0$.

$$2 \cdot 6 - a \cdot 6 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a \leq 2$$

**3.** Una compañía fabrica dos productos *A* y *B* a partir de una materia prima. Para producir 1 kg de *A* se necesitan 6 kg y para 1 kg de *B* se utilizan 2 kg de dicha materia prima. La empresa que suministra la materia prima dispone diariamente de un máximo 8000 kg a un precio de 2 euros por kg. Para elaborar estos productos la empresa puede asignar a 50 operarios como máximo, cada uno de los cuales trabaja 8 horas diarias. Producir 1 kg de *A* requiere 0.4 horas y 0.3 horas 1 kg de *B*. El coste de una hora de trabajo es de 10 euros. En el acabado de los productos se utiliza una maquinaria especial, y si la empresa fabricara únicamente el producto *A*, podría utilizar la máquina para 6000 kg diarios como máximo, pero si sólo fabricara el producto *B*, podría alcanzar los 5000 kg diarios. Además, según un estudio de mercado las ventas del producto *A* son al menos el 60% de las ventas totales de ambos productos. Los precios unitarios de venta por kg para los productos *A* y *B* son de 20 y 40 euros respectivamente.
Formula **sin resolverlo** un programa lineal para determinar la cantidad que se debe producir de cada producto para maximizar los beneficios.

Las variables son:

$x_1 = kg$ de A producidos diariamente

$x_2 = kg$ de B producidos diariamente

Ingresos= $20x_1 + 40x_2$

Coste materias primas= $2\left(6x_1 + 2x_2\right) = 12x_1 + 4x_2$

Coste mano de obra=$10(0.4x_1+0.3x_2)=4x_1+3x_2$

Beneficios=$4x_1+33x_2$

Ecuación de la recta que pasa por los puntos (6000,0) y (0,5000):

$$5x_1+6x_2=30000$$

Por tanto, el planteamiento del problema es:

$$\max(4x_1+33x_2)$$

$$\begin{cases} 6x_1+2x_2\le 8000 \\ 0.4x_1+0.3x_2\le 400 \\ 5x_1+6x_2\le 30000 \\ x_1\ge 0.6(x_1+x_2) \\ x_i\ge 0 \quad (i=1,2) \end{cases}$$

**4.** Sea el siguiente problema de programación lineal

$$\max[2x_1+4x_2+x_3]$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3\le 5 \\ 2x_1-x_2+2x_3\le 2 \\ -x_1+2x_2+2x_3\le 1 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0 \end{cases}$$

a) Completar la siguiente tabla que corresponde a este problema y resolverlo.

| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | ***b*** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | -7 | | -4/3 | -5/3 | 2/3 |
| 1 | 0 | | | 2/3 | 1/3 | |
| 0 | 1 | 2 | | 1/3 | 2/3 | 4/3 |
| 0 | 0 | | | 8/3 | 10/3 | 26/3 |

b) Si el coeficiente de $x_1$ en la función objetivo cambiara a 5, ¿variaría la solución óptima?

c) Si el término independiente de la segunda restricción disminuyera en 1 unidad, ¿cuál sería la solución óptima del nuevo problema?

d) ¿Sería conveniente aumentar el término independiente de la primera restricción para obtener un aumento en el valor óptimo?

**a)** La tabla completa es:

| | | 2 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | ***b*** |
| 0 | $A_4$ | 0 | 0 | -7 | 1 | -4/3 | -5/3 | 2/3 |
| 2 | $A_1$ | 1 | 0 | a=2 | 0 | 2/3 | 1/3 | c=5/3 |
| 4 | $A_2$ | 0 | 1 | 2 | 0 | 1/3 | 2/3 | 4/3 |
| | | 0 | 0 | b=11 | 0 | 8/3 | 10/3 | 26/3 |

$A_3 = -7A_4 + aA_1 + 2A_2$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = -7\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad a = 2$$

$b = 2\times2 + 4\times2 - 1 = 11$

$2c + 4\times4/3 = 26/3 \Rightarrow c = 5/3$

Como todos los elementos de la última fila son no negativos, esta tabla es óptima y por tanto, la solución óptima del problema es $(5/3, 4/3, 0)$ y el valor óptimo es 26/3.

**b)** La nueva última fila es:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 17 | 0 | 14/3 | 13/3 | 41/3 |

Con lo cual la tabla sigue siendo óptima y la solución óptima no varía.

**c)** Si el término independiente de la segunda restricción disminuye en 1 unidad, la nueva columna **b** es:

| ***b***+(-1) $A_5$ |
|---|
| 2/3+(-1)(-4/3)=2 |
| 5/3+(-1)2/3=1 |
| 4/3+(-1)1/3=1 |
| 26/3+(-1)8/3=6 |

Luego la solución del nuevo problema es (1,1,0) y el nuevo valor óptimo es 6.

**d)** No, porque el precio sombra de esa restricción es 0 (último elemento de la columna $A_4$ en la tabla óptima) y, por tanto, aunque aumentemos el término independiente de la primera restricción el valor óptimo no aumenta.

**5.** Una empresa produce hornos y vitrocerámicas, por los cuales obtiene un beneficio unitario de 40 y 20 euros respectivamente. El proceso de fabricación requiere que cada horno o placa vitrocerámica pase por tres talleres distintos de la empresa. Un horno necesita 1/2, 1/2 y 3/2 horas de los talleres A, B y C respectivamente, mientras que una placa requiere 1, 1/2 y 1/2 respectivamente. Los talleres A y B trabajan un máximo de 30 horas semanales cada uno, mientras que C trabaja como máximo 40 horas semanales. Si $x_1$, $x_2$ representan la cantidad de hornos y placas respectivamente, el problema consiste en resolver el siguiente programa:

$$\max[40x_1 + 20x_2]$$
$$\begin{cases} (1/2)x_1 + x_2 \le 30 & \text{(taller A)} \\ (1/2)x_1 + (1/2)x_2 \le 30 & \text{(taller B)} \\ (3/2)x_1 + (1/2)x_2 \le 40 & \text{(taller C)} \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 & \end{cases}$$

La salida QSB para este problema es:

Solution Summary for Problema

01-23-2007 17:49:07 — Page: 1 of 1

| Variable Number | Variable Name | Solution | Opportunity Cost | Minimum Obj. Coef. | Current Obj. Coef. | Maximum Obj. Coef. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | X1 | 20 | 0 | 10 | 40 | 60 |
| 2 | X2 | 20 | 0 | 13.33333 | 20 | 80 |

Maximized OBJ = 1200  Iteration = 2  Elapsed CPU seconds = 0

< PageDown >  < PageUp >  < Hardcopy >  < Cancel >

Constraint Summary for Problema

01-23-2007 17:48:34 — Page: 1 of 1

| Constraint Number | Constraint Status | Shadow Price | Surplus | Minimum R. H. S. | Current R. H. S. | Maximum R. H. S. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Tight (<) | 8 | 0 | 13.33333 | 30 | 55 |
| 2 | Loose (<) | 0 | 10 | 20 | 30 | M |
| 3 | Tight (<) | 24 | 0 | 15 | 40 | 90 |

Maximized OBJ = 1200  Iteration = 2  Elapsed CPU seconds = 0

< PageDown >  < PageUp >  < Hardcopy >  < Cancel >

a) ¿Cuál es la solución óptima que maximiza los beneficios de la empresa?

b) Si el beneficio por horno disminuye en 10 unidades, ¿cambia la solución óptima?

c) Si se pudiese aumentar en 10 las horas disponibles en algún taller, ¿cuál se elegiría?, ¿cómo afectaría al beneficio óptimo?

**a)** La solución óptima es (20,20) y el beneficio óptimo es de 1200 euros.

**b)** La solución óptima no cambia porque si el beneficio por horno disminuye en 10 unidades, entonces éste será de 30 unidades, el cual pertenece al rango de variación para que la solución óptima no varíe, que es $[10, 60]$.

**c)** Se elegiría el taller que tenga el precio sombra mayor, en este caso, el taller C. Como su precio sombra es 24, esto quiere decir que por cada hora adicional en ese taller, el valor óptimo (beneficio) aumenta en 24 unidades, por tanto, si aumentamos en 10 las horas disponibles en ese taller, el beneficio óptimo aumentará en 240 unidades.

# Examen de Matemáticas III

# LADE febrero de 2008

**1.** Sea la forma cuadrática $Q(\boldsymbol{x})$ definida por:

$$Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + (\lambda+1)x_3^2 + 2\lambda x_2 x_3 + 2x_1 x_3 \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

a) ¿Para qué valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ se cumple que $Q(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$, $x \neq 0$?

b) ¿Para qué valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ se cumple que siempre existen $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3$ tales que $Q(x_1) > 0,\ Q(x_2) = 0$ y $Q(x_3) < 0$?

c) Si $\lambda = 0$, ¿existe un $x \in \mathbb{R}^3$, $x \neq 0$ tal que $Q(x) = 0$? Determina el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^3 / Q(x) = 0\}$

La matriz de representación de la forma cuadrática $Q(\boldsymbol{x})$ es:

$$M(Q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda+1 \end{pmatrix}$$

dónde se tiene que:

Menores principales de orden 1: $\{1, 1, \lambda+1\}$

Menores principales de orden 2: $\{1, \lambda, \lambda+1-\lambda^2\}$

Menores principales de orden 3: $\lambda-\lambda^2=\lambda(1-\lambda)$

Está claro que la forma cuadrática no puede ser definida negativa o semidefinida negativa. La forma cuadrática será definida positiva si y solo si se verifica:

$$\begin{cases} \lambda+1>0 \\ \lambda>0 \\ \lambda+1-\lambda^2>0 \\ \lambda-\lambda^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda>-1 \\ \lambda>0 \\ (1-\sqrt{5})/2<\lambda<(1+\sqrt{5})/2 \\ 0<\lambda<1 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda \in (0,1)$$

Y semidefinida positiva si y sólo si:

$$\begin{cases} \lambda+1\geq 0 \\ \lambda\geq 0 \\ \lambda+1-\lambda^2\geq 0 \\ \lambda-\lambda^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda\geq -1 \\ \lambda\geq 0 \\ (1-\sqrt{5})/2\leq\lambda\leq(1+\sqrt{5})/2 \\ \lambda=0 \text{ o } 1 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda=0 \text{ o } 1$$

Como las clases de las formas cuadráticas son mutuamente excluyentes, podemos asegurar que para los valores de $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ la forma cuadrática es indefinida.

**a)** Nos preguntan por los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para los cuales la forma cuadrática es definida positiva. Por los cálculos anteriores, éstos son los $\lambda \in (0,1)$.

**b)** Nos preguntan por los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para los cuales la forma cuadrática es indefinida. Por lo tanto, $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.

**c)** Si $\lambda = 0$, la forma cuadrática es semidefinida positiva, y, por definición, esto nos permite afirmar que existe un $x \in \mathbb{R}^3$, $x \neq 0$ con $Q(x) = 0$.

Si $\lambda = 0$ notar que $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 = \left(x_1 + x_3\right)^2 + x_2^2$, con lo cual

$$\left\{x \in \mathbb{R}^3 / Q(x) = 0\right\} = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / \left(x_1 + x_3\right)^2 + x_2^2 = 0\right\} = \left\{(x_1, 0, \text{-}x_1) / x_1 \in \mathbb{R}\right\}$$

**2.** Una empresa produce 4 tipos (1,2, 3 y 4) de aceite empleando en distintas cantidades dos variedades de aceitunas (A y B). En la siguiente tabla se recoge la cantidad requerida de kilos de aceituna de cada variedad para obtener un litro de cada tipo de aceite:

| | **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|
| **A** | 2 | 1 | 3 | 3 |
| **B** | 3 | 4 | 2 | 1 |

Se han de considerar las siguientes restricciones:

- Se dispone de 100 toneladas semanales de aceituna A y 150 toneladas de B.
- La cantidad de aceite de tipo 1 y 2 en total no ha de ser menor que la suma de 3 y 4.
- Por cada 3 litros de tipo 1 se han de producir por lo menos 4 litros entre 2 y 3.
- La producción del tipo 1 no puede ser superior al 75% de la de tipo 4.

Plantea (sin resolver) un problema de programación lineal si se desea maximizar la producción total de aceite.

Definiendo las variables:

$x_1$ = litros de aceite del tipo 1

$x_2$ = litros de aceite del tipo 2

$x_3$= litros de aceite del tipo 3

$x_4$= litros de aceite del tipo 4

El problema de PL a resolver es:

$$\max(x_1+x_2+x_3+x_4)$$
$$\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3+3x_2 \le 100000 \\ 3x_1+4x_2+2x_3+1x_2 \le 150000 \\ x_1+x_2 \ge x_3+x_4 \\ x_2+x_3 \ge \dfrac{4}{3}x_1 \\ x_1 \le 0.75x_4 \\ x_i \ge 0, i=1,...,4 \end{cases}$$

**3.** Dado el siguiente problema:

$$\max(6x_1+2x_2)$$
$$\begin{cases} 22x_1+15x_2 \le 630 & (1) \\ 4x_1+x_2 \le 80 & (2) \\ 12x_1+5x_2 \le 264 & (3) \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

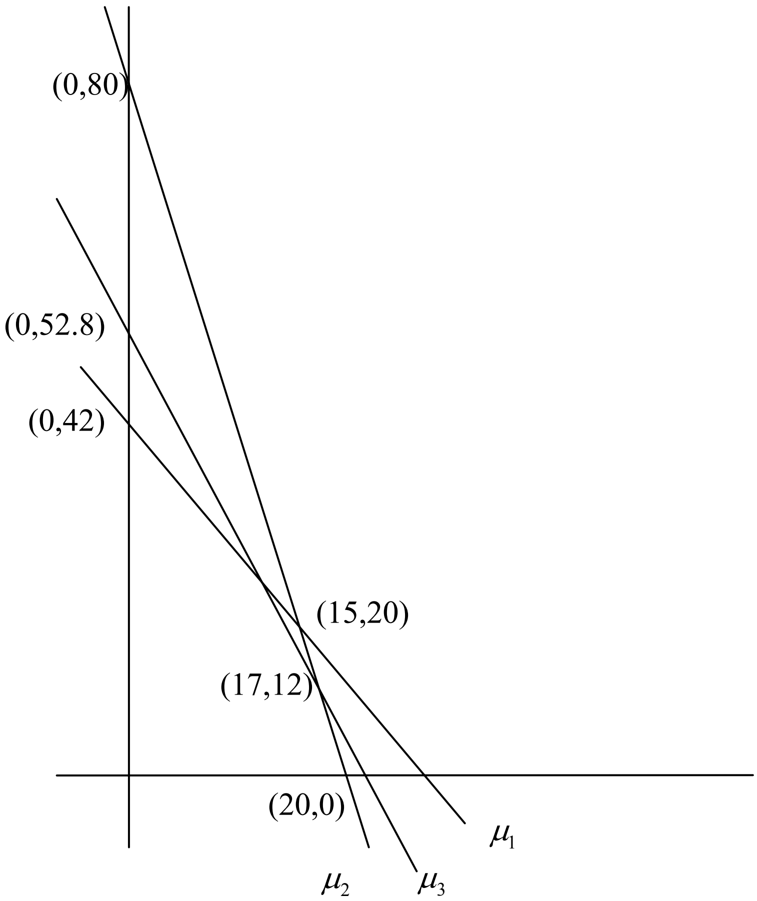
a) Dibuja el conjunto de soluciones factibles de problema y determina la solución óptima y el valor óptimo del problema.

b) Calcula el precio sombra de las restricciones (1) y (3).

c) ¿Cuál ha de ser el coeficiente de $x_1$ en la función objetivo para que en la solución óptima se cumpla $x_2$ =0?

**a)**

$$\begin{cases} p_1=-22/15 \\ p_2=-4 \\ p_3=-2.4 \\ p_f=-3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad |p_1|<|p_3|<|p_f|<|p_2|$$




Por tanto, la solución óptima es el punto de corte entre $\mu_2$ y $\mu_3$, es decir, el punto (17,12) y el valor óptimo es 126.

**b)** La restricción 1 es no saturada, luego su precio sombra es 0.

La restricción 3 es saturada y la movemos hasta que pase por el punto (15,20), que es el punto de corte entre $\mu_1$ y $\mu_2$.

$$12x_1+5x_2=264+a$$

$$(17,12) \to (15,20)$$

$$a=0 \to a=16$$

$$126 \to 130$$

$$\lambda_3 = \frac{130-126}{16} = 0.25$$

**c)** Función objetivo: $Ax_1 + 2x_2$

Que en la solución óptima se cumpla $x_2$ =0, quiere decir que la solución óptima sea el punto (20,0) y, para ello, la pendiente de la función objetivo, en valor absoluto, debe ser mayor que la pendiente de la segunda restricción, esto es:

$$\left|p_f\right| > \left|p_2\right| \Leftrightarrow \frac{A}{2} > 4 \Leftrightarrow A > 8$$

**4.** Considérese el siguiente problema:

$$\max\left(x_1 + 3x_2\right)$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

a) Resolverlo mediante el método simplex.
b) Determinar el rango de variación del término independiente de la primera restricción para que la base óptima no varíe.
c) Si el término independiente de la primera restricción disminuye en 4 unidades, ¿cambia la solución óptima del problema?, ¿por qué?
d) ¿Cuáles son los precios sombra de las tres restricciones?
e) Si el coeficiente de $x_2$ en la función objetivo es un número $a \geq 0$, ¿cómo tiene que ser *a* para que la solución óptima varíe?

$$\begin{matrix} \max\left(x_1 + 3x_2\right) \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} \max\left(x_1 + 3x_2\right) \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 9 \\ x_i \geq 0, \forall i \end{cases} \end{matrix}$$

**a)** La matriz de coeficientes es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

| | | 1 | 3 | 0 | 0 | 0 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | ***b*** | |
| 0 | $A_3$ | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 10 | 5 |
| 0 | $A_4$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 6 | 6 → |
| 0 | $A_5$ | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 9 | 9 |
| | | -1 | -3 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | | | ↑<br>e | | | | | |

| | | 1 | 3 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | ***b*** |
| 3 | $A_2$ | 1/2 | 1 | 1/2 | 0 | 0 | 5 |
| 0 | $A_4$ | 1/2 | 0 | -1/2 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | $A_5$ | 3/2 | 0 | -1/2 | 0 | 1 | 4 |
| | | 1/2 | 0 | 3/2 | 0 | 0 | 15 |

Esta tabla es óptima, luego la solución óptima del problema es (0,5) y el valor óptimo 15.

**b)** **<u>1ª restricción:</u>**

| $\boldsymbol{b}+\varepsilon A_3$ |
|---|
| $5+\frac{1}{2}\varepsilon$ |
| $1-\frac{1}{2}\varepsilon$ |
| $4-\frac{1}{2}\varepsilon$ |
| $15+\frac{3}{2}\varepsilon$ |

$$\begin{cases} 5+\frac{1}{2}\varepsilon \geq 0 \Leftrightarrow \quad \varepsilon \geq -10 \\ 1-\frac{1}{2}\varepsilon \geq 0 \Leftrightarrow \quad \varepsilon \leq 2 \\ 4-\frac{1}{2}\varepsilon \geq 0 \Leftrightarrow \quad \varepsilon \leq 8 \end{cases}$$

Se cumplen las tres condiciones para $-10 \leq \varepsilon \leq 2$. Luego el rango de variación del término independiente de la primera restricción para que la base óptima no varíe es $[0,12]$ .

**c)** Si el término independiente de la primera restricción disminuye en 4 unidades, entonces $\varepsilon = -4$ que está en el rango de variación hallado en el apartado ii), luego la <u>base</u> óptima <u>no varía</u> y tenemos:

| $b$+(-4) $A_3$ |
|---|
| $5+\frac{1}{2}(-4)=3$ |
| $1-\frac{1}{2}(-4)=3$ |
| $4-\frac{1}{2}(-4)=6$ |
| $15+\frac{3}{2}(-4)=9$ |

es decir, la <u>solución óptima</u> <u>sí varía</u> y ahora será (0,3) y el nuevo valor óptimo será 9.

**d)** Según la tabla óptima, los precios sombra de las tres restricciones son, en orden: 3/2, 0 y 0, es decir, los últimos elementos de las columnas $A_3, A_4$ y $A_5$.

**e)** Función objetivo: $x_1 + ax_2$

| | | 1 | **a** | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $b$ |
| **a** | $A_2$ | 1/2 | 1 | 1/2 | 0 | 0 | 5 |
| 0 | $A_4$ | 1/2 | 0 | -1/2 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | $A_5$ | 3/2 | 0 | -1/2 | 0 | 1 | 4 |
| | | a/2-1 | 0 | a/2 | 0 | 0 | 5a |

Como $a \geq 0$, para que la solución óptima varíe se tiene que cumplir que:

$$\frac{1}{2}a - 1 < 0 \Leftrightarrow a < 2.$$

**5.** Considérese el siguiente problema de maximización de beneficios:

$$\max\left(10x_1+15x_2+10x_3\right)$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3\le 60 & \text{(A)} \\ x_1+x_2+x_3\le 50 & \text{(B)} \\ 2x_1+x_2+x_3\le 40 & \text{(horas trabajo)} \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0 \end{cases}$$

donde $x_i$ ($i$=1,2,3) son los kilos que se producen semanalmente de un producto $P_i$ a partir de 2 materias primas A y B, de las cuales se tiene una disponibilidad de 60 y 50 kilos respectivamente, y para ello se trabaja 40 horas a la semana.

La salida de WinQSB es:

**Combined Report for LP Sample Problem**

| | 10:42:40 | | Tuesday | January | 29 | 2008 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Decision Variable | Solution Value | Unit Cost or Profit c(j) | Total Contribution | Reduced Cost | Basis Status | Allowable Min. c(j) | Allowable Max. c(j) |
| 1 | X1 | 0 | 10,0000 | 0 | -5,0000 | at bound | -M | 15,0000 |
| 2 | X2 | 20,0000 | 15,0000 | 300,0000 | 0 | basic | 10,0000 | 20,0000 |
| 3 | X3 | 20,0000 | 10,0000 | 200,0000 | 0 | basic | 8,3333 | 15,0000 |
| | Objective | Function | (Max.) = | 500,0000 | | | | |
| | | | | | | | | |
| | Constraint | Left Hand Side | Direction | Right Hand Side | Slack or Surplus | Shadow Price | Allowable Min. RHS | Allowable Max. RHS |
| 1 | C1 | 60,0000 | <= | 60,0000 | 0 | 5,0000 | 40,0000 | 80,0000 |
| 2 | C2 | 40,0000 | <= | 50,0000 | 10,0000 | 0 | 40,0000 | M |
| 3 | C3 | 40,0000 | <= | 40,0000 | 0 | 5,0000 | 30,0000 | 50,0000 |

a) Si el beneficio unitario de $P_1$ aumentara a 15, ¿le interesaría aumentar la producción de este producto?

b) Si pudiera aumentar la disponibilidad de alguna de las materias primas, ¿cuál elegiría? ¿Cómo afectaría al beneficio óptimo?

c) ¿Le interesaría contratar horas extras en el taller? ¿Cuánto estaría dispuesto a pagar por ellas?

**a)** Si el beneficio unitario de $P_1$ aumentara a 15, la solución óptima del problema no varía (el rango para que la solución no varíe es (-M,15]), luego no le interesa aumentar la producción de este producto.

**b)** Si pudiera aumentar la disponibilidad de alguna de las materias primas, elegiría la materia prima A ya que es un recurso escaso (Surplus=0), mientras que la materia prima B es un recurso abundante (Surplus=10). Por cada kilo adicional de materia prima A el beneficio óptimo aumenta en 5 unidades, ya que el precio sombra de la primera restricción es 5.

**c)** Como la tercera restricción es saturada (surplus=0), sí le interesaría contratar horas extras en el taller, hasta llegar a un total de 50 horas, es decir, un incremento máximo de 10 horas. Estaría dispuesto a pagar 5 u.m. por cada hora de trabajo extra, ya que el precio sombra de la tercera restricción es 5.

## Examen de Matemáticas III

## LADE junio de 2008

**1.** Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{pmatrix} \qquad a,b,c \in \mathbb{R}$$

Se pide:

a) ¿Qué relaciones deben verificarse entre los parámetros *a,b* y *c* para que *A* tenga un valor propio triple?

b) Para $a=1$, calcular los valores de los parámetros *b* y *c* para que $\lambda = -1$ sea un valor propio de *A* que tiene como vector propio asociado el vector $x = (1,-2,2)$.

c) Para $a=1$, $b=1$ y $c=2$, hallar los valores propios, los vectores propios y los subespacios espectrales de la matriz *A*. ¿Es *A* diagonalizable? En caso afirmativo, calcular una matriz diagonal semejante a *A*.

**a)** Calculamos los valores propios:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b & 0 \\ c & a-\lambda & b \\ 0 & c & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)^3 - 2bc(a-\lambda) = 0$$

La matriz tendrá un valor propio $\lambda = a$ que será triple para $bc=0$ ($\forall a \in \mathbb{R}$).

**b)** Para $a=1$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ c & 1 & b \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}$$

Para que $\lambda = -1$ sea un valor propio de *A* que tenga como vector propio asociado el vector $x = (1,-2,2)$ se tiene que cumplir:

$$\begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ c & 1 & b \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1-2b=-1 \\ c-2+2b=2 \\ -2c+2=-2 \end{cases}$$ , esto es, b=1 y c=2.

**c)** Para $a$=1, $b$=1 y $c$=2,

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&1\\0&2&1\end{pmatrix}$$

$$p(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&0\\2&1-\lambda&1\\0&2&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^3-4(1-\lambda)=(1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2-4\right]=0$$

Los valores propios son: $\lambda$=1, $\lambda$=-1 y $\lambda$=3.

Los subespacios espectrales son:

$$S(1)=\left\{x\in\mathbb{R}^3/(A\text{-}I)M(x)=0\right\}$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\2&0&1\\0&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\quad \left.\begin{array}{l}x_2=0\\2x_1+x_3=0\\2x_2=0\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}x_2=0\\x_3=-2x_1\end{array}$$

$$S(1)=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3/\,x_2=0,\ x_3=-2x_1\right\}=\left\{(x_1,0,-2x_1)/\,x_1\in\mathbb{R}\right\}=L<(1,0,-2)>$$

$$S(-1)=\left\{x\in\mathbb{R}^3/(A+I)M(x)=0\right\}$$

$$\begin{pmatrix}2&1&0\\2&2&1\\0&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\quad \left.\begin{array}{l}2x_1+x_2=0\\2x_1+2x_2+x_3=0\\2x_2+2x_3=0\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}x_2=-2x_1\\x_3=2x_1\end{array}$$

$$S(\text{-}1)=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3/\,x_2=-2x_1,\ x_3=2x_1\right\}=\left\{(x_1,-2x_1,2x_1)/\,x_1\in\mathbb{R}\right\}=L<(1,-2,2)>$$

$$S(3)=\left\{x\in\mathbb{R}^3/(A\text{-}3I)M(x)=0\right\}$$

$$\begin{pmatrix}-2&1&0\\2&-2&1\\0&2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\quad \left.\begin{array}{l}-2x_1+x_2=0\\2x_1-2x_2+x_3=0\\2x_2-2x_3=0\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}x_2=2x_1\\x_3=2x_1\end{array}$$

$$S(3)=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3/\,x_2=2x_1,\ x_3=2x_1\right\}=\left\{(x_1,2x_1,2x_1)/\,x_1\in\mathbb{R}\right\}=L<(1,2,2)>$$

La matriz $A$ sí es diagonalizable porque los tres valores propios son reales y distintos.

Una matriz diagonal semejante a $A$ es $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

**2.** Dado el siguiente problema:

$$\max(4x_1 + 3x_2)$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 11x_2 \leq 270 & (1) \\ x_1 \leq 35 & (2) \\ x_2 \leq 20 & (3) \\ x_1 - 2x_2 \leq 22 & (4) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & \end{cases}$$

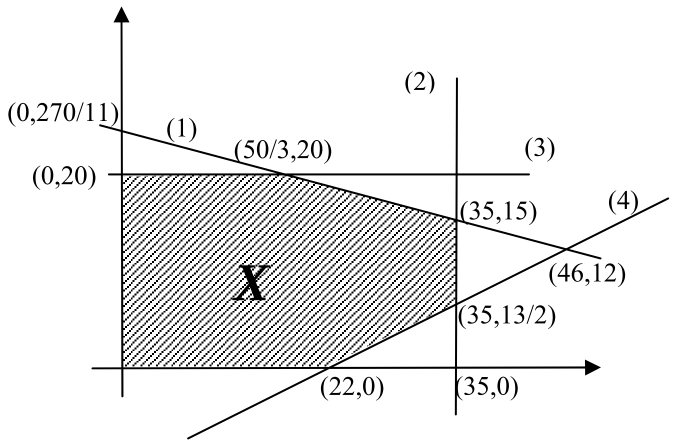
a) Dibuja el conjunto de soluciones factibles de problema y determina la solución óptima y el valor óptimo del problema.

b) Calcula el precio sombra de las restricciones (2) y (3).

c) ¿Cuál ha de ser el coeficiente de $x_1$ en la función objetivo para que en la solución óptima se cumpla $x_2$=20?

**a)**

$$\max(4x_1 + 3x_2)$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 11x_2 \leq 270 & (1) \\ x_1 \leq 35 & (2) \\ x_2 \leq 20 & (3) \\ x_1 - 2x_2 \leq 22 & (4) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & \end{cases}$$




$$\left.\begin{aligned} p_f &= -\frac{4}{3} \\ p_1 &= -\frac{3}{11} \\ p_2 &= -\infty \\ p_3 &= 0 \\ p_4 &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\}$$

Ordenando, $p_2 < p_f < p_1 < p_3 < p_4$

Por tanto, la solución óptima es el punto de corte de las restricciones (1) y (2), esto es, el punto (35,15) y el valor óptimo es 185.

**b)** La restricción (2) es saturada y la movemos hasta que pase por el punto (46,12), por tanto, su precio sombra es:

$$\lambda_2 = \frac{f(46,12) - f(35,15)}{46-35} = \frac{220-185}{11} = \frac{35}{11}$$

La restricción (3) es no saturada, por tanto, su precio sombra es 0.

**c)** Si llamamos *a* al coeficiente de $x_1$ en la función objetivo, para que en la solución óptima se cumpla $x_2$=20 se tiene que cumplir que:

$$|p_f| \le |p_1|, \text{ esto es, } \frac{a}{3} \le \frac{3}{11} \Rightarrow a \le \frac{9}{11}$$

**3.** Considérese el siguiente problema de programación lineal:

$$\max\left(x_1 + x_2 + 2x_3\right)$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 \ge 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

a) Sabiendo que la tabla siguiente es una tabla correspondiente al problema anterior, rellenar los huecos (sin usar las tablas anteriores) y hallar la tabla que le sigue aplicando el método simplex (hallar sólo una tabla).

| | | 1 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | **b** |
| 0 | $A_4$ | 0 | 3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 4 |
| 0 | $A_5$ | 0 | | 0 | 0 | 1 | 1 | |
| 2 | $A_3$ | 1 | -1 | 1 | 0 | 0 | -1 | 4 |
| | | 1 | -3 | 0 | 0 | 0 | | |

b) Sabiendo que la siguiente tabla corresponde al problema anterior:

| | | 1 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | **b** |
| 0 | $A_4$ | 0 | 1 | 0 | 1 | -1 | 0 | 2 |
| 0 | $A_6$ | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | $A_3$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 6 |
| | | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 12 |

i) ¿Cuál es el rango de variación del término independiente de la segunda restricción para que la base óptima no varíe? Hallar el precio sombra de la segunda restricción.

ii) Si el término independiente de la segunda restricción pasa de 6 a 7, ¿cambia la solución óptima?, ¿por qué?

iii) ¿Cuál es el rango de variación del coeficiente de $x_3$ en la función objetivo para que no varíe la solución óptima?

**a)** El problema en forma estándar es:

$$\max\left(x_1+x_2+2x_3\right)$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4=8 \\ x_1+x_2+x_3+x_5=6 \\ x_1-x_2+x_3-x_6=4 \\ x_i\geq 0,\, i=1,\dots,6 \end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

| | | 1 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | **b** |
| 0 | $A_4$ | 0 | 3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 4 |
| 0 | $A_5$ | 0 | *a* | 0 | 0 | 1 | 1 | *b* |
| 2 | $A_3$ | 1 | -1 | 1 | 0 | 0 | -1 | 4 |
| | | 1 | -3 | 0 | 0 | 0 | c | *d* |

Para hallar *a*: $A_2=3A_4+aA_5-A_3$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+a\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}-1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow\ 1=a-1\Rightarrow a=2$$

Para hallar b: $\mathbf{b}=4A_4+bA_5+4A_3$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}=4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow\ 6=b+4\Rightarrow b=2$$

Para hallar *c*: c=1(0)+1(0)-1(2)-0=-2

Y, por último, para hallar $d$: d=4(0)+2(0)+4(2)=8

Calculemos ahora la tabla siguiente:

| | | 1 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | **b** | $\theta$ | |
| 0 | $A_4$ | 0 | 3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 4 | 4/3 | |
| 0 | $A_5$ | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 1 | → |
| 2 | $A_3$ | 1 | -1 | 1 | 0 | 0 | -1 | 4 | - | |
| | | 1 | -3 | 0 | 0 | 0 | -2 | 8 | | |
| | | | ↑ | | | | | | | |

Entra $A_2$ y sale $A_5$

| | | 1 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | **b** |
| 0 | $A_4$ | 0 | 0 | 0 | 1 | -3/2 | -1/2 | 1 |
| 1 | $A_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1/2 | 1/2 | 1 |
| 2 | $A_3$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1/2 | -1/2 | 5 |
| | | 1 | 0 | 0 | 0 | 3/2 | -1/2 | 11 |

**b) i)**

$\boldsymbol{b}+\varepsilon A_5$

| |
|---|
| 2-$\varepsilon$ |
| 2+$\varepsilon$ |
| 6+$\varepsilon$ |
| 12+2$\varepsilon$ |

$$\begin{cases} 2-\varepsilon \geq 0 \Leftrightarrow \quad \varepsilon \leq 2 \\ 2+\varepsilon \geq 0 \Leftrightarrow \quad \varepsilon \geq -2 \\ 6+\varepsilon \geq 0 \Leftrightarrow \quad \varepsilon \geq -6 \end{cases}$$

Se cumplen las tres condiciones para $-2\leq\varepsilon\leq 2$. Luego el rango de variación del término independiente de la segunda restricción para que la base óptima no varíe es $[4,8]$.

El precio sombra de la segunda restricción es el último elemento de la columna $A_5$ en la tabla óptima, es decir, 2.

**ii)** Como el rango de variación del término independiente de la segunda restricción para que la base óptima no varíe es [4,8] y 7 pertenece a dicho rango ($\varepsilon$=1), la solución óptima sí varía y ahora será (0,0,7).

**iii)** Si llamamos $\lambda$ al coeficiente de $x_3$ en la función objetivo, la última fila de la tabla óptima anterior será ahora:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda$ -1 | $\lambda$ -1 | 0 | 0 | $\lambda$ | 0 |

Y para que siga siendo óptima, deben ser no negativos y esto es para $\lambda \geq 1$. Por tanto, el rango de variación del coeficiente de $x_3$ para que no varíe la solución óptima es $[1,\infty)$.

**4.** Considérese el siguiente problema de maximización de ingresos:

$$\max\left(4x_1 + 6x_2 + 5x_3\right)$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 65 & (A) \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 20 & (B) \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 30 & (C) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 & \end{cases}$$

donde $x_i$ (i=1,2,3) son los kilos que se producen diariamente de un producto $P_i$ a partir de 3 materias primas A, B y C, de las cuales se tiene una disponibilidad de 65, 20 y 30 kilos respectivamente.

La salida de WinQSB es:

**Combined Report for LP Sample Problem**

| | 16:05:38 | | Monday | January | 28 | 2008 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Decision Variable | Solution Value | Unit Cost or Profit c(j) | Total Contribution | Reduced Cost | Basis Status | Allowable Min. c(j) | Allowable Max. c(j) |
| 1 | X1 | 10,0000 | 4,0000 | 40,0000 | 0 | basic | 3,0000 | 6,0000 |
| 2 | X2 | 10,0000 | 6,0000 | 60,0000 | 0 | basic | 4,5000 | 8,0000 |
| 3 | X3 | 0 | 5,0000 | 0 | -3,0000 | at bound | -M | 8,0000 |
| | Objective | Function | (Max.) = | 100,0000 | | | | |
| | | | | | | | | |
| | Constraint | Left Hand Side | Direction | Right Hand Side | Slack or Surplus | Shadow Price | Allowable Min. RHS | Allowable Max. RHS |
| 1 | C1 | 40,0000 | <= | 65,0000 | 25,0000 | 0 | 40,0000 | M |
| 2 | C2 | 20,0000 | <= | 20,0000 | 0 | 2,0000 | 15,0000 | 25,0000 |
| 3 | C3 | 30,0000 | <= | 30,0000 | 0 | 2,0000 | 20,0000 | 40,0000 |

a) ¿Le interesa a la empresa adquirir más kilos de A? ¿Por qué?

b) Si la empresa adquiriese 5 kilos adicionales de C, ¿en cuánto aumentarían los ingresos de la empresa?

c) Si el precio unitario de $P_2$ disminuyera a 5, ¿sería conveniente para la empresa disminuir la producción de este producto?

**a)** No le interesa a la empresa adquirir más kilos de A porque es un recurso abundante, sobran 25 kg de A y su precio sombra es 0.

**b)** Si la empresa adquiriese 5 kilos adicionales de C (en total 35) seguimos dentro del rango de variación que es [20,40]. Entonces, según el precio sombra, por cada Kg adicional de C los ingresos aumentan en 2 unidades, luego en total, los ingresos aumentarán en 5(2)=10 unidades.

**c)** No, si el precio unitario de $P_2$ disminuyera a 5, la solución óptima no cambia, ya que el rango de variación de este coeficiente para que la solución no varíe es [4.5,8]. Por tanto, si la solución óptima no varía, no sería conveniente para la empresa modificar la producción de este producto.

## Examen de Matemáticas III

## LADE enero de 2009

**1.** Una empresa produce dos tipos de levadura: una para pastelería y otra para pan. La producción semanal de levadura para pastelería ha de ser al menos de 1000 kg y la de pan de 2500 kg. Además por cada 3 kg de levadura para pastelería se han de producir al menos 5 kg de levadura para pan. Por último la producción semanal de levadura para pan ha de superar al menos en 2000 kg a la de pastelería.

a) En la actualidad se dispone de una única planta A de producción. Los beneficios en esta planta son de 15 € por kg de levadura para pastelería y de 8 € por kg para la de pan. Formular el problema con el objetivo de maximizar los beneficios.

b) La empresa ha comprado una nueva planta B en la que también va a producir los dos tipos de levadura. Los beneficios en esta planta B son de 13 € por kg de levadura para pastelería y de 10 € por kg para la de pan. Formular el problema para determinar las cantidades de levadura que se producirán semanalmente en cada planta con objeto de maximizar los beneficios, si se tiene en cuenta que en cada planta se han de producir por lo menos 500 kg semanales de cada tipo de levadura.

**a)** Definimos las siguientes variables:

$x_1$= kg de levadura para pastelería

$x_2$= kg de levadura para pan

El modelo es el siguiente:

$$Max\ (15x_1 + 8x_2)$$
$$\begin{cases} x_1 \geq 1000 \\ x_2 \geq 2500 \\ x_2 \geq \dfrac{5}{3}x_1 \\ x_2 \geq x_1 + 2000 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

**b)** Definimos las siguientes variables:

$x_{1A}$= kg de levadura para pastelería en la planta A

$x_{2A}$= kg de levadura para pan en la planta A

$x_{1B}$= kg de levadura para pastelería en la planta B

$x_{2B}$= kg de levadura para pan en la planta B

El modelo es el siguiente:

$$Max(15x_{1A}+8x_{2A}+13x_{1B}+10x_{2B})$$

$$\begin{cases} x_{1A}+x_{1B}\geq 1000 \\ x_{2A}+x_{2B}\geq 2500 \\ x_{2A}+x_{2B}\geq \dfrac{5}{3}(x_{1A}+x_{1B}) \\ x_{2A}+x_{2B}\geq x_{1A}+x_{1B}+2000 \\ x_{1A}\geq 500 \\ x_{2A}\geq 500 \\ x_{1B}\geq 500 \\ x_{2B}\geq 500 \\ x_{1A}\geq 0, x_{2A}\geq 0, x_{1B}\geq 0, x_{2B}\geq 0 \end{cases}$$

**2.** Sea el siguiente problema de programación lineal:

$$Max\ (10x_1+7x_2)$$

$$\begin{cases} x_1+x_2\leq 40 \\ 2x_1+x_2\leq 60 \\ 4x_1+3x_2\geq 60 \\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0 \end{cases}$$

a) Resolver el problema gráficamente.

b) Calcular los precios sombra de las restricciones.

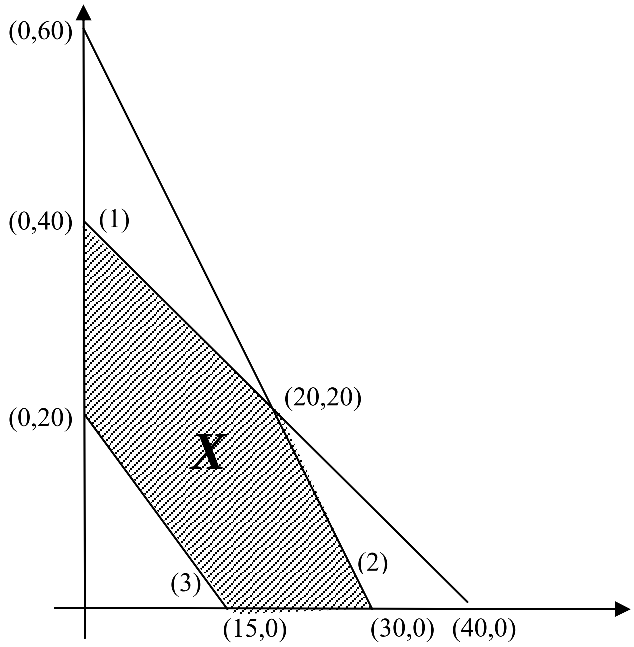
c) Si se sustituye el coeficiente de $x_2$ en la función objetivo por 3, ¿varía la solución óptima del problema?

d) Si se añade la restricción $ax_1-x_2\leq 0$ ¿cuál ha de ser el valor de $a$ para que la solución óptima sea la obtenida en el apartado a)?

**a)**

$$Max\ (10x_1+7x_2)$$

$$\begin{cases} x_1+x_2\leq 40 \\ 2x_1+x_2\leq 60 \\ 4x_1+3x_2\geq 60 \\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0 \end{cases}$$




Calculamos las pendientes:

$$\left.\begin{aligned} p_f &= -\frac{10}{7} \\ p_1 &= -1 \\ p_2 &= -2 \\ p_3 &= -\frac{4}{3} \end{aligned}\right\} \text{ Ordenando: } |p_1| < |p_f| < |p_2|$$

Como estamos maximizando, la pendiente de la restricción 3 no interviene en la elección del óptimo, luego la solución óptima es el punto de corte entre las restricciones 1 y 2, esto es, el punto (20,20) y el valor óptimo es 340.

**b)** La restricción 1 es saturada y para calcular su precio sombra la movemos hasta el punto (0,60):

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 40 + a \\ a &= 0 : (20,20) \\ a &= 20 : (0,60) \end{aligned} \qquad \lambda_1 = \frac{f(0,60) - f(20,20)}{60-40} = \frac{420-340}{20} = 4$$

La restricción 2 también es saturada y para calcular su precio sombra la movemos hasta el punto (40,0):

$$2x_1 + x_2 = 60 + a$$
$$a = 0 : (20,20) \qquad \lambda_2 = \frac{f(40,0) - f(20,20)}{80-60} = \frac{400-340}{20} = 3$$
$$a = 20 : (40,0)$$

La restricción 3 es no saturada, luego su precio sombra es 0 ( $\lambda_3$ = 0).

**c)** En este caso, las pendientes quedan:

$$\left.\begin{array}{r} p_f = -\dfrac{10}{3} \\ p_1 = -1 \\ p_2 = -2 \end{array}\right\} \text{ Ordenando, } |p_1| < |p_2| < |p_f|$$

Por tanto, ahora la solución óptima es el punto (30,0) y el valor óptimo es 300.

**d)** Cuando se introduce una nueva restricción al problema, la condición para que la solución óptima anterior siga siendo óptima es que dicho punto cumpla la nueva restricción. En nuestro caso, el punto (20,20) debe cumplir $ax_1 - x_2 \le 0$ , esto es, $a20 - 20 \le 0 \Rightarrow a \le 1$.

**3.** Considérese el siguiente problema de programación lineal:

$$Max\ (3x_1 + 2x_2 + 4x_3)$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \le 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 \le 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

a) Completar la tabla siguiente si corresponde al problema anterior.

| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | **B** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | -1 | | 1 | 0 | -2 | |
| 0 | 2 | | 0 | 1 | 1 | 6 |
| -1 | 1 | | 0 | 0 | 1 | 4 |
| -7 | | | 0 | | 4 | |

b) Si la siguiente tabla también corresponde al problema anterior, contestar a las siguientes preguntas:

| | | 3 | 2 | 4 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | ***b*** |
| 3 | $A_1$ | 1 | 1 | 0 | 1/3 | 2/3 | 0 | 13/3 |
| 0 | $A_6$ | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 6 |
| 4 | $A_3$ | 0 | 0 | 1 | 1/3 | -1/3 | 0 | 7/3 |
| | | 0 | 1 | 0 | 7/3 | 2/3 | 0 | 67/3 |

i) ¿Cuál es la solución óptima si el término independiente de la segunda restricción disminuye en 3 unidades?

ii) ¿Cuál es el rango de variación del coeficiente de $x_3$ en la función objetivo para que no varíe la solución óptima?

iii) Si tuviésemos que escoger entre incrementar el término independiente de la primera o de la tercera restricción, ¿cuál escogeríamos? ¿por qué? ¿Cuál es el efecto de este incremento sobre el valor óptimo?

**a)** El problema en forma estándar es:

$$Max\ (3x_1 + 2x_2 + 4x_3)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 4 \\ x_i \geq 0, \forall i \end{cases} \quad \text{y la matriz de coeficientes es } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

| | | 3 | 2 | 4 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | ***b*** |
| 0 | $A_4$ | *a* | -1 | 0 | 1 | 0 | -2 | *b* |
| 0 | $A_5$ | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 6 |
| 4 | $A_3$ | -1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 4 |
| | | -7 | c | 0 | 0 | 0 | 4 | *d* |

La base es $<A_4, A_5, A_3>$.

Para calcular *a*: $A_1 = aA_4 + 0A_5 - A_3$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 1 = a - 2 \Rightarrow a = 3$$

Para calcular *b*: $\boldsymbol{b} = bA_4 + 6A_5 + 4A_3$

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 9 = b + 8 \Rightarrow b = 1$$

Para calcular $c$: $c$=-1(0)+2(0)+1(4)-2=2

Por último, $d$=1(0)+6(0)+4(4)=16.

**b) i)**

| $b$-3$A_5$ |
|---|
| $\frac{13}{3}+\frac{2}{3}(-3)$ |
| $6+1(-3)$ |
| $\frac{7}{3}-\frac{1}{3}(-3)$ |

| $b$-3$A_5$ |
|---|
| $\frac{7}{3}$ |
| 3 |
| $\frac{10}{3}$ |

Por tanto, la solución óptima será $\left(\frac{7}{3},0,\frac{10}{3}\right)$ .

**ii)**

| | | 3 | 2 | $a$ | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ |
| 3 | $A_1$ | 1 | 1 | 0 | 1/3 | 2/3 | 0 |
| 0 | $A_6$ | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $a$ | $A_3$ | 0 | 0 | 1 | 1/3 | -1/3 | 0 |
| | | 0 | 1 | 0 | 1+(a/3) | 2-(a/3) | 0 |

Para que la solución óptima no varíe la última fila debe ser no negativa, de ahí se deduce que -3≤ $a$ ≤ 6. Luego, el rango de variación del coeficiente de $x_3$ en la función objetivo para que no varíe la solución óptima es [-3,6] .

**iii)** La primera restricción es saturada (su precio sombra es $\lambda_1$=7/3) y la tercera no lo es ($\lambda_3$=0), por tanto, escogeríamos incrementar el término independiente de la primera restricción, porque si incrementásemos el de la tercera, el valor óptimo no aumentaría nada. Como el precio sombra de la primera restricción es 7/3, el efecto de este incremento es que por cada unidad que aumentemos dicho término, el valor óptimo aumenta en 7/3.

**4.** Sea $A=\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

a) Estudiar para qué valores de $a$ y $b$ la matriz $A$ es diagonalizable.

b) Si $a$=1 y $b$=0 hallar una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de $A$.

c) Si $b=2\sqrt{a}$ ($a \geq 0$), sea $Q$ la forma cuadrática definida por $Q(\mathbf{x}) = {}^tM(\mathbf{x})AM(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Hallar $M(Q)$ y clasificar $Q$ según los valores de $a$.

**a)** Se calculan los valores propios:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)^2(2-\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \lambda = a \text{ (doble)} \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

Caso 1. Si $a=2$. Valores propios: 2 (triple).

$$\dim S(2) = 3\text{-rango}(A\text{-}2I) = 3\text{-rango}\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 3$$

luego la matriz $A$ no es diagonalizable.

Caso 2. Si $a \neq 2$. Valores propios: $a$ (doble) y 2.

$$\dim S(a) = 3\text{-rango}\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 2-a & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 3-1=2, & \text{si } b=0 \Rightarrow A \text{ es diagonalizable} \\ 3-2=1, & \text{si b} \neq 0 \Rightarrow A \text{ no es diagonalizable} \end{cases}$$

**b)** Si $a$=1 y $b$=0 los valores propios de la matriz $A$ son 2 y 1 (doble).

$S(2)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / (A-2I)M(x)=0\right\} = \left\{(0,y,0)/ y\in\mathbb{R}\right\}=L<(0,1,0)>$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x=0, z=0$$

$S(1)= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / (A-I)M(x)=0\right\} = \left\{(x,-2z,z)/ x,z\in\mathbb{R}\right\}=L<(1,0,0), (0,-2,1)>$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y+2z=0 \Rightarrow y=-2z$$

Por tanto, una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de A es:

$B$=<(0,1,0),(1,0,0),(0,-2,1)>.

**c)** $$M(Q)=\begin{pmatrix} a & \sqrt{a} & 0 \\ \sqrt{a} & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Menores principales de orden 1: $\{a, 2, a\}$

Menores principales de orden 2: $\{a, 2a\text{-}1,\ a^2\}$

Menor principal de orden 3: $|M(Q)|= a\left(a-1\right)$

$Q$ no puede ser definida negativa ni semidefinida negativa porque hay un menor de orden 1 positivo. Por tanto:

- Si $a>1$: $Q$ es definida positiva (todos los menores principales son positivos).
- Si $a=1$: $Q$ es semidefinida positiva ($|M(Q)|=0$ y todos los demás menores principales son no negativos).
- Si $a<1$: Q es indefinida (si $a \leq 0$ hay menores de orden 2 negativos; y si $0<a<1$ el menor de orden 3 es negativo).

# Examen de Matemáticas III

# LADE junio de 2009

**1.** Una empresa fabrica 3 productos $P_1$, $P_2$ y $P_3$ mezclando únicamente dos materias primas $M_1$ y $M_2$ en diferentes proporciones: para producir $P_2$ se mezclan $M_1$ y $M_2$ a partes iguales. Cada kg de $P_1$ contiene un 20% de $M_1$ y un 80% de $M_2$, y cada kg de $P_3$ contiene un 60% de $M_1$ y un 40% de $M_2$. La disponibilidad semanal es de 1000 Kg. de $M_1$ y 2000 Kg. de $M_2$, cuyos precios son 3 y 2 u.m. por kilo de $M_1$ y de $M_2$ respectivamente. Cada kilo producido genera un coste de producción (exceptuando el coste de materias primas) de 2 u.m.
En razón de la demanda existente, por cada 3 kilos de $P_1$ se deben producir al menos 2 kilos de $P_2$ y la producción de $P_2$ debe ser a lo sumo el doble de la de $P_3$.
Si los precios de venta de los productos son 10, 15 y 20 u.m. por cada kilo de $P_1$, $P_2$ y $P_3$ respectivamente, plantea (sin resolver) un problema de P. L. si se desea maximizar los beneficios.

Definimos las variables:

$x_i$= kg. producidos de $P_i$ cada semana, i=1,2,3.

Ingresos: $10x_1 + 15x_2 + 20x_3$
Costes materia prima $M_1$: $3(0.2x_1 + 0.5x_2 + 0.6x_3)$
Costes materia prima $M_2$: $2(0.8x_1 + 0.5x_2 + 0.4x_3)$
Costes produccion: $2x_1 + 2x_2 + 2x_3$
Beneficios: $5.8x_1 + 10.5x_2 + 15.4x_3$

El problema es el siguiente:

$$Max\ (5.8x_1 + 10.5x_2 + 15.4x_3)$$
$$\begin{cases} 0.2x_1 + 0.5x_2 + 0.6x_3 \leq 1000 \\ 0.8x_1 + 0.5x_2 + 0.4x_3 \leq 2000 \\ x_2 \geq \dfrac{2}{3}x_1 \\ x_2 \leq 2x_3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

**2.** Sea $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Si $a=0$ y el vector $(1,0,-2)$ es un vector propio de la matriz $A$ asociado al valor propio 0, ¿Cuál es el valor de $b$? Para estos valores de $a$ y $b$, hallar una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de $A$.

b) Para $b$=1, sea $Q$ la forma cuadrática definida por $Q(\mathbf{x}) = {}^tM(\mathbf{x})AM(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Hallar $M(Q)$ y clasificar $Q$ según los valores de $a$.

**a)** Si el vector (1,0,-2) es un vector propio de la matriz $A$ asociado al valor propio 0, entonces se cumple $AM(x)=\lambda M(x)$ para $\lambda=0$ y $x=(1,0,-2)$, es decir,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b-2=0 \Rightarrow b=2$$

Entonces:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(3-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

Los valores propios son: $\lambda=0$, $\lambda=3$ y $\lambda=1$.

$$S(0) = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,/\, AM(x) = 0\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l} x_2 = 0 \\ 3x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_3 = -2x_1 \end{array}$$

$$S(0) = \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_2 = 0,\ x_3 = -2x_1\right\} = \left\{(x_1,0,-2x_1) \,/\, x_1 \in \mathbb{R}\right\} = L < (1,0,-2) >$$

$$S(1) = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,/ (A-I)M(x) = 0\right\}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l} -x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_2 = 0 \\ 2x_1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array}$$

$$S(1) = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 = x_2 = 0\right\} = \left\{(0,0,x_3) / x_3 \in \mathbb{R}\right\} = L < (0,0,1) >$$

$$S(3) = \left\{x \in \mathbb{R}^3 /(A\text{-}3I)M(x) = 0\right\}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l} -3x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = 3x_1 \\ x_3 = x_1 \end{array}$$

$$S(3) = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_2 = 3x_1; x_3 = x_1\right\} = \left\{(x_1, 3x_1, x_1) / x_1 \in \mathbb{R}\right\} = L < (1,3,1) >$$

Por tanto, una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de $A$ es:

$B$=<(1,0,-2),(0,0,1),(1,3,1)>

**b)** $M(Q) = \begin{pmatrix} a & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Menores principales de orden 1: {$a$,3,1}

Menores principales de orden 2: $\{3a - \frac{1}{4}, a - \frac{1}{4}, 3\}$

Menor principal de orden 3: $|M(Q)| = 3a - 1$

Casos:

$Q$ no puede ser definida negativa, ni semidefinida negativa, porque hay menores principales de orden 1 positivos. Entonces,

- Si $a = \frac{1}{3}$, entonces $Q$ es semidefinida positiva.
- Si $a > \frac{1}{3}$, entonces $Q$ es definida positiva.
- Si $a < \frac{1}{3}$, entonces $Q$ es indefinida.

**3.** Se considera el problema

$$\max\left(x_1+2x_2\right)$$

$$\begin{cases} x_1+x_2\le 8 \\ 2x_1+x_2\le 10 \\ x_1+3x_2\le 15 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$

a) Representar gráficamente el conjunto de soluciones factibles y calcular la solución óptima.

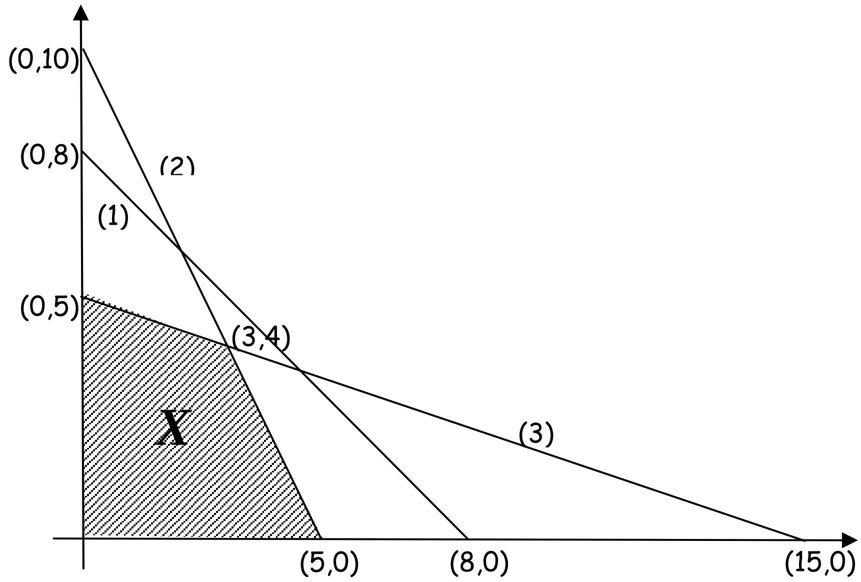
b) ¿Cuál es el rango de variación del coeficiente de la variable $x_1$ en la función objetivo en el que la solución óptima sea la del apartado anterior?

c) Hallar el precio sombra de la segunda restricción.

**a)**

$$\max\left(x_1+2x_2\right)$$

$$\begin{cases} x_1+x_2\le 8 \\ 2x_1+x_2\le 10 \\ x_1+3x_2\le 15 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$




Calculamos las pendientes:

$$\left.\begin{array}{r} p_f=-\dfrac{1}{2} \\ p_1=-1 \\ p_2=-2 \\ p_3=-\dfrac{1}{3} \end{array}\right\} \text{ Ordenando, } \left|p_3\right|<\left|p_f\right|<\left|p_2\right|.$$

Por tanto, la solución óptima es el punto de corte entre las restricciones 2 y 3, es decir, el punto (3,4) y el valor óptimo es 11.

**b)** Ahora la función objetivo es $ax_1 + 2x_2$, y la solución óptima seguirá siendo el punto (3,4) siempre y cuando se cumpla que $|p_3| \le |p_f| \le |p_2|$, es decir,

$$\frac{1}{3} \le \frac{a}{2} \le 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3} \le a \le 4$$

**c)** La segunda restricción es saturada. Para calcular su precio sombra, la trasladamos hasta el punto de corte entre las restricciones 1 y 3, es decir, hasta el punto (4.5,3.5):

$$\begin{aligned} &2x_1 + x_2 = 10 + a \\ &a = 0 : (3,4) \\ &a = 2.5 : (4.5, 3.5) \end{aligned}$$

Por tanto, su precio sombra es:

$$\lambda_2 = \frac{f(4.5,3.5) - f(3,4)}{12.5 - 10} = \frac{11.5 - 11}{2.5} = 0.2$$

**4.** Se considera el problema:

$$\max\left(5x_1 + 3x_2 + 4x_3\right)$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 80 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 50 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

a) Calcula la solución óptima mediante el método simplex.

b) Determinar el rango de variación del término independiente de la tercera restricción para que la base óptima no varíe y determinar el precio sombra.

c) Denotando por λ el coeficiente de $x_3$ en la función objetivo, calcular las soluciones óptimas correspondientes cuando λ toma valores mayores o iguales que cero.

**a)** El problema en forma estándar es:

$$\max\left(5x_1 + 3x_2 + 4x_3\right)$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 80 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 50 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_6 = 10 \\ x_i \ge 0 \quad (i = 1, ..., 6) \end{cases} \text{ y la matriz de coeficientes } A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La base canónica es: B=<$A_4$, $A_5$, $A_6$>

| | | 5 | 3 | 4 | 0 | 0 | 0 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | $b$ | $\theta$ |
| 0 | $A_4$ | 4 | 2 | 4 | 1 | 0 | 0 | 80 | 20 |
| 0 | $A_5$ | 2 | 2 | 3 | 0 | 1 | 0 | 50 | 25 |
| 0 | $A_6$ | **1** | 3 | 2 | 0 | 0 | 1 | 10 | 10 → |
| | $z_j$-$c_j$ | -5 | -3 | -4 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | | ↑ | | | | | | | |

La nueva base: B=<$A_4$, $A_5$, $A_1$>

| | | 5 | 3 | 4 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | $b$ |
| 0 | $A_4$ | 0 | -10 | -4 | 1 | 0 | -4 | 40 |
| 0 | $A_5$ | 0 | -4 | -1 | 0 | 1 | -2 | 30 |
| 5 | $A_1$ | 1 | 3 | 2 | 0 | 0 | 1 | 10 |
| | $z_j$-$c_j$ | 0 | 12 | 6 | 0 | 0 | 5 | 50 |

La solución óptima es (10,0,0) y el valor óptimo es 50.

**b)** La tercera restricción está asociada a la columna $A_6$:

| $b+\varepsilon A_6$ |
|---|
| $40-4\varepsilon$ |
| $30-2\varepsilon$ |
| $10+\varepsilon$ |

$$\begin{cases} 40-4\varepsilon \geq 0 \\ 30-2\varepsilon \geq 0 \\ 10+\varepsilon \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon \leq 10 \\ \varepsilon \leq 15 \\ \varepsilon \geq -10 \end{cases} \Rightarrow -10 \leq \varepsilon \leq 10$$

Por tanto, el rango de variación del término independiente de la tercera restricción para que la base óptima no varíe es [0,20] y su precio sombra es 5 (el último elemento de la columna $A_6$ en la tabla óptima).

**c)** Ahora la función objetivo es $\max\left(5x_1+3x_2+\lambda x_3\right)$

| | | 5 | 3 | $\lambda$ | 0 | 0 | 0 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | $b$ | $\theta$ |
| 0 | $A_4$ | 0 | -10 | -4 | 1 | 0 | -4 | 40 | - |
| 0 | $A_5$ | 0 | -4 | -1 | 0 | 1 | -2 | 30 | - |
| 5 | $A_1$ | 1 | 3 | 2 | 0 | 0 | 1 | 10 | 5 → |
| | $z_j$-$c_j$ | 0 | 12 | $10-\lambda$ | 0 | 0 | 5 | 50 | |
| | | | | ↑ | | | | | |

Para $0\leq \lambda \leq 10$ la solución óptima no varía y el valor óptimo tampoco, porque todos los elementos de la última fila siguen siendo no negativos.

Para $\lambda = 10$ existe otra solución óptima, que se obtiene metiendo $A_3$ en la base y sacando $A_1$.

Para $\lambda \geq 10$, la nueva base es B=<$A_4$, $A_5$, $A_3$> y el pivote es 2:

| | | 5 | 3 | 4 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | $b$ |
| 0 | $A_4$ | 2 | -4 | 0 | 1 | 0 | -2 | 60 |
| 0 | $A_5$ | 1/2 | -5/2 | 0 | 0 | 1 | -3/2 | 35 |
| $\lambda$ | $A_3$ | 1/2 | 3/2 | 1 | 0 | 0 | 1/2 | 5 |
| | $z_j$-$c_j$ | $(\lambda/2)-5$ | $(3\lambda/2)-3$ | 0 | 0 | 0 | $\lambda/2$ | $5\lambda$ |

Si $\lambda \geq 10$, la última fila es no negativa, luego la solución óptima es (0,0,5) y el valor óptimo es $5\lambda$.

Resumiendo:

- $0\leq \lambda < 10$, la solución óptima es (10,0,0) y el valor óptimo es 50.
- $\lambda = 10$, la solución óptima es $\overline{(10,0,0)(0,0,5)}$ y el valor óptimo es 50.
- $\lambda > 10$, la solución óptima es (0,0,5) y el valor óptimo es $5\lambda$.

## Examen de Matemáticas III

## LADE febrero de 2010

**1.** Un cierto producto se elabora en dos fábricas F1 y F2. Estas fábricas tienen una capacidad de producción máxima de 150 toneladas de producto cada una de ellas. Parte de su producción es enviada para su distribución a 3 ciudades C1, C2 y C3. La demanda de dicho producto en las ciudades es de 35, 65 y 50 toneladas respectivamente.
En la tabla adjunta se presentan los costes de envío, por toneladas, en miles de euros, entre cada una de las fábricas y las ciudades.

| Fábricas | C1 | C2 | C3 |
|---|---|---|---|
| F1 | 3 | 7 | 8 |
| F2 | 2 | 5 | 6 |

Se desea enviar al menos 10 toneladas entre cada fábrica y cada ciudad. La cantidad total enviada desde F1 suponga, al menos, el 60% de la cantidad total enviada desde ambas fábricas.
Formula, sin resolver, mediante programación lineal cuál debe de ser la cantidad que se debe enviar desde cada fábrica a cada ciudad para que, cubriendo la demanda en las ciudades, se minimice el coste total de transporte.

Definimos las variables:

$x_{ij}$ =nº de toneladas enviadas desde la fábrica F*i* (*i*=1,2) a la ciudad C*j* (*j*=1,2,3)

Entonces, el problema de P.L. que hay que plantear es:

$$Min\left(3x_{11}+7x_{12}+8x_{13}+2x_{21}+5x_{22}+6x_{23}\right)$$
$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}\le 150 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}\le 150 \\ x_{11}+x_{21}=35 \\ x_{12}+x_{22}=65 \\ x_{13}+x_{23}=50 \\ x_{ij}\ge 10, \forall i,j \ \ (i=1,2;\ j=1,2,3) \\ x_{11}+x_{12}+x_{13}\ge 0.6\left(x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{21}+x_{22}+x_{23}\right) \\ x_{ij}\ge 0, \forall i,j \end{cases}$$

**2.** Sea el problema:

$$\max\left(3x_1+4x_2\right)$$
$$\begin{cases} x_1+2x_2\le 24 \\ x_1+x_2\le 20 \\ x_1-x_2\ge 0 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$

a) Indicar qué restricciones están saturadas en la solución factible (8,5). ¿Qué valor alcanza la función objetivo en esa solución?

b) Resolver el problema gráficamente y dar la solución y el valor óptimo.

c) Si se puede aumentar el término independiente de la primera o de la segunda restricción tantas unidades como se quiera y si deseamos maximizar el valor de la función objetivo, ¿cuál de ellas escogerías para este aumento? ¿Cuántas unidades? ¿Por qué?

d) ¿Cuál es el precio sombra de las tres restricciones?

e) Elige una forma de modificar la tercera restricción de modo que la solución óptima del problema no pueda ser la obtenida en b).

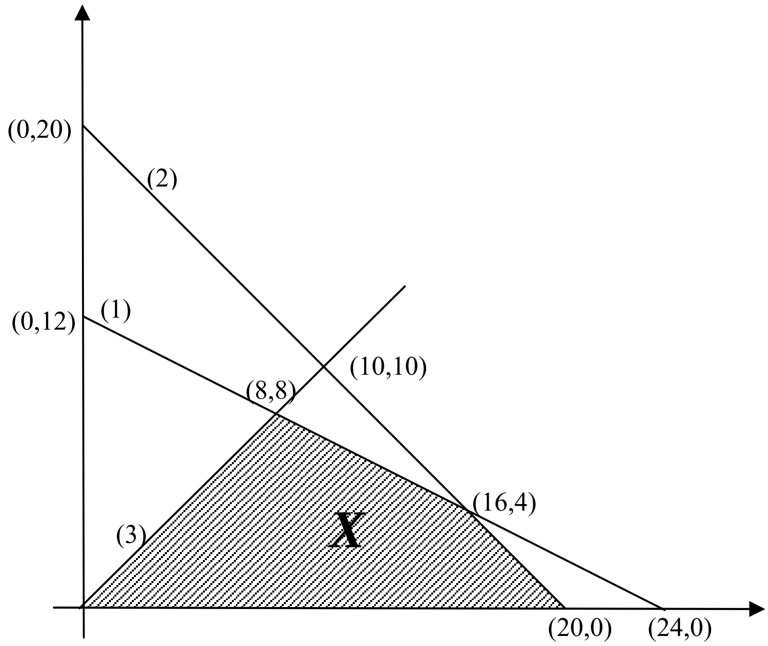
**a)** En (8,5) las restricciones toman los valores

$$x_1+2x_2=18\Rightarrow \text{No saturada}$$
$$x_1+x_2=13\Rightarrow \text{No saturada}$$
$$x_1-x_2=3\Rightarrow \text{No saturada}$$

El valor de la función objetivo es: $f(8,5)=44$.

**b)** Calculamos las pendientes:

$$\left.\begin{array}{r} p_f=-\dfrac{3}{4} \\ p_1=-1/2 \\ p_2=-1 \\ p_3=1 \end{array}\right\} \text{ Ordenando: } |p_1|<|p_f|<|p_2|.$$




La solución óptima del problema se encuentra en el punto de corte entre las restricciones 1 y 2, esto es en el punto (16,4) y el valor óptimo es 64.

**c)** Si se aumenta tantas unidades como se quiera el término independiente de la restricción (1), la solución pasará a ser (10,10) y el valor de la solución será *f*(10,10)=70.

Si se aumenta tantas unidades como se quiera el término independiente de la restricción (2), la solución pasará a ser (24,0) y el valor de la solución será *f*(24,0)=72.

Observando los dos valores de la solución, conviene aumentar el de la 2ª hasta donde la recta $x_1 + x_2$ corte con (24,0):

$$x_1 + x_2 = 24 + 0 = 24 \Rightarrow \text{un aumento de 4 unidades}$$

**d)** La restricción (1) es saturada, por lo que un aumento en el término independiente de la restricción conlleva un aumento en el valor de la función objetivo:

cambia la solución hasta el (10,10) donde $x_1 + 2x_2 = 30 = 24 + a \Rightarrow a=6$ y *f*(10,10)=70.

$$\lambda_1 = \frac{f(10,10) - f(16,4)}{6} = 1$$

El precio por unidad del recurso (1) es de 1 hasta un máximo de 6 unidades.

La restricción (2) es saturada, por lo que un aumento en el término independiente de la restricción conlleva un aumento en el valor de la función objetivo:

cambia la solución hasta el (24,0) donde $x_1 + x_2 = 24 = 20 + a \Rightarrow a=4$ y $f(24,0)=72$.

$$\lambda_2 = \frac{f(24,0) - f(16,4)}{4} = 2$$

El precio por unidad del recurso (2) es de 2 hasta un máximo de 4 unidades.

La restricción (3) es no saturada luego: $\lambda_3 = 0$.

**e)** Una forma posible sería cambiando el signo de la restricción:

$$x_1 - x_2 \leq 0.$$

**3.** Sea el problema:

$$\max(2x_1 + x_2)$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \leq 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

a) Completar la tabla siguiente sabiendo que corresponde a un paso del método simplex aplicado al problema anterior en su forma estándar con $A_4$ y $A_5$ vectores asociados a las holguras de la primera y segunda restricción respectivamente (trabaja con la tabla adjunta sin realizar el método desde el principio).

| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -1 | | 1 | 0 | |
| 0 | 1 | | 1 | 1 | |
| | | | | | |

¿Cuál la solución básica factible del problema estándar asociada a la tabla? ¿Es solución óptima? En caso contrario indica cómo cambiaría la base para efectuar el siguiente paso del método.

b) Si la tabla que se presenta corresponde a un paso del método simplex aplicado al problema estándar anterior:

| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 2 | 1 | 3 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 0 | 0 | 1 | 5 | 3 | 8 |

¿Cuál la solución básica factible del problema estándar asociada a la tabla? ¿Es solución óptima? Partiendo de la tabla óptima calcula hasta dónde puede variar el término independiente de la primera restricción para que la base óptima no varíe. Indica cuál es el precio sombra de dicha restricción.

c) Si se modifica a $\geq$ el signo de la segunda restricción del problema inicial, ¿cuál es la solución óptima del nuevo problema? Razona realizando en la tabla del apartado b) los cambios pertinentes a la nueva situación, sin efectuar de nuevo todos los pasos del método.

**a)** La base asociada a la tabla presentada es $<A_1, A_5>$. Las coordenadas de los vectores incompletos en la tabla en dicha base son:

$$A_3 = \alpha A_1 + \beta A_5 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = -1 \\ \beta = 1 \end{matrix}$$

$$b = b_1 A_1 + b_2 A_5 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} b_1 = 1 \\ b_2 = 2 \end{matrix}$$

La tabla completa es:

| | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $\boldsymbol{b}$ | $\boldsymbol{\theta}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{A_1}$ | 1 | -1 | **-1** | 1 | 0 | **1** | **---** |
| $\boldsymbol{A_5}$ | 0 | 1 | **1** | 1 | 1 | **2** | **2/1** |
| $z_j$-$c_j$ | **0** | **-3** | **-2** | **2** | **0** | **2** | |

La solución básica factible del problema estándar asociada a la tabla es: $\overline{x} = (1,0,0,0,2)$; $z = 2$ que corresponde a la solución (1,0,0) del problema inicial.

No es solución óptima puesto que tiene valores $z_j$-$c_j$ negativos.

Entrará en la base la variable que más aumente el valor de la función objetivo ($z_j$-$c_j$ más negativa): $A_2$ y saldrá la variable que asegure la factibilidad: menor coeficiente $\theta$ entre los que tengan valores positivos en la coordenada asociada a la variable de entrada en la base: $A_5$. Nueva base es $<A_1,A_2>$.

**b)** La solución básica factible del problema estándar asociada a la tabla es (3,2,0,0,0) de valor 8. Es solución óptima puesto que todos los $z_j$-$c_j$ son no negativos. La solución además es única.

Un cambio en el término independiente de la primera restricción se traduciría en un nuevo vector de términos independientes: $b' = b + \varepsilon A_4$. Si lo escribimos en la base de la tabla óptima <$A_1$ , $A_2$>:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2\varepsilon \\ 2+1\varepsilon \end{pmatrix}$$

Para que la base no cambie dicha solución deberá ser factible, por lo que tiene que cumplirse:

$$\left.\begin{array}{c} 3+2\varepsilon \geq 0 \rightarrow \varepsilon \geq -3/2 \\ 2+1\varepsilon \geq 0 \rightarrow \varepsilon \geq -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \varepsilon \geq -3/2$$

Luego, si $\varepsilon \in [-3/2, \infty)$ el término independiente de la restricción variará $R1 \in [-1/2, \infty)$ y la nueva solución será: (3+2ε, 2+ε, 0, 0 ,0) de valor 8 + 5ε.

El precio sombra de la primera restricción es 5.

**c)** En el nuevo problema estándar la restricción será:

$$-x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_5 = 1$$

Por ello, la variable 5 pasa a ser ahora:

$$A_5^* = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Si calculamos las nuevas coordenadas de este vector en la base de la tabla óptima <$A_1$ , $A_2$>:

$$A_5^* = \alpha A_1 + \beta A_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = -1 \\ \beta = -1 \end{array}$$

$$z_5 - c_5 = -3$$

Con el cambio la tabla anterior no lleva a la solución óptima puesto que $z_5 - c_5 = -3$ y $A_5^*$ entraría en la base. Sin embargo, todas sus coordenadas son negativas luego el problema no tiene solución (en este caso es infactible).

**4.**

a) Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} d & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & d & a \end{pmatrix}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Estudia la diagonalizabilidad de *A* según los valores de *a, b, c* y *d* cuando $d \neq 0$.

b) Se considera la forma cuadrática $Q(x) = {}^tM(x)BM(x)$ con:

$$B = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$$

Si *b*+*c*=0, clasifica *Q* según los valores de *a*, *b* y *c*.

**a)** Hallamos las raíces del polinomio característico:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} d-\lambda & b & c \\ 0 & a-\lambda & d \\ 0 & d & a-\lambda \end{vmatrix} = (d-\lambda)\left[(a-\lambda)^2 - d^2\right] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = d \\ (a-\lambda)^2 = d^2 \Rightarrow a - \lambda = \pm d \Rightarrow \lambda = a \pm d \end{cases}$$

<u>Casos:</u>

**1.** <u>*a*=0</u>. Entonces, los valores propios son $\lambda = d$ (doble) y $\lambda = -d$ (simple).

dim S(*d*)=3-rg(*A*-*d*I)

$$A\text{-}d\text{I}=\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & -d & d \\ 0 & d & -d \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} b & c \\ -d & d \end{vmatrix} = d(b+c) \neq 0 \Leftrightarrow b+c \neq 0\text{, porque } d \neq 0.$$

Por tanto,

- Si $b+c \neq 0 \Rightarrow$ rg(*A*-*d*I)=2 $\Rightarrow$ dim S(*d*)=1 $\Rightarrow$ *A* no es diagonalizable.
- Si $b+c = 0 \Rightarrow$ rg(*A*-*d*I)=1 (porque $d \neq 0$) $\Rightarrow$ dim S(*d*)=2 $\Rightarrow$ *A* es diagonalizable.

**2.** <u>*a*=2*d*</u>. Entonces, los valores propios son $\lambda = d$ (doble) y $\lambda = 3d$ (simple).

dim S(*d*)=3-rg(*A*-*d*I)

$$A\text{-}d\mathrm{I}=\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & d & d \\ 0 & d & d \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} b & c \\ d & d \end{vmatrix} = d(b-c) \neq 0 \Leftrightarrow b-c \neq 0 \text{, porque } d \neq 0 .$$

Por tanto,

- Si $b-c \neq 0 \Rightarrow$ rg($A$-$d$I)=2 $\Rightarrow$ dim S($d$)=1 $\Rightarrow$ $A$ no es diagonalizable.
- Si $b-c=0 \Rightarrow$ rg($A$-$d$I)=1 (porque $d \neq 0$) $\Rightarrow$ dim S($d$)=2 $\Rightarrow$ $A$ es diagonalizable.

**3.** $\underline{a \neq 0 \text{ y } a \neq 2d}$. En este caso, los tres valores propios son reales y distintos y, por tanto, $A$ es diagonalizable.

**b)** Si $b$+$c$=0, entonces la matriz de representación de $Q$ es:

$$M(Q)=\begin{pmatrix} a & a/2 & 0 \\ a/2 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Sus menores principales son:

de orden 1: $a$; $a$; $a$

de orden 2: $\frac{3}{4}a^2; a^2; a^2$

de orden 3: $|M(Q)|=\frac{3}{4}a^3$

<u>Casos:</u>

**1.** <u>$a$<0</u>. Entonces, $Q$ es definida negativa, porque los menores principales de orden impar son negativos y los de orden par son positivos.

**2**. <u>*a>0*</u>. Entonces, $Q$ es definida positiva, porque todos los menores principales son positivos.

**3.** <u>*a=0*</u>. Entonces, $Q$ es semidefinida positiva y semidefinida negativa, porque todos los menores son nulos.

# Examen de Matemáticas III
# LADE junio de 2010

**1.** Un agricultor valenciano produce dos tipos de naranjas A y B que distribuye en España y en Francia. El coste por tonelada de producción de la naranja A es de 200 € y de 250 € por tonelada de B. En caso de distribuirla en Francia se le tiene que añadir el coste del transporte, estimado en un 10% del coste de producción para cada tonelada distribuida a este país y cada tipo de naranja. El agricultor dispone de 1000 ha de terreno. Para obtener una tonelada de naranjas de tipo B requiere 1.5 ha y para obtener una tonelada de A 1 ha. Por lo menos la mitad de la producción de naranjas de tipo B han de distribuirse en Francia. Del total de la producción, se distribuirá en España como máximo el 60%. Por cada 3 toneladas de tipo A distribuidas en España, deben de distribuirse como mínimo 2 en Francia de ese mismo tipo. Han de producirse por lo menos 300 toneladas de cada tipo de naranjas. Plantear (sin resolver) un problema de P.L. que permita calcular cuántas toneladas de naranjas de cada tipo deben producirse con el objeto de minimizar el coste total.

Definimos las variables:

$x_{11}$ = toneladas de naranjas producidas del tipo A para distribuir en España

$x_{12}$ = toneladas de naranjas producidas del tipo A para distribuir en Francia

$x_{21}$ = toneladas de naranjas producidas del tipo B para distribuir en España

$x_{22}$ = toneladas de naranjas producidas del tipo B para distribuir en Francia

Entonces, el problema de P.L. que hay que plantear es:

$$Min\left(200x_{11} + 220x_{12} + 250x_{21} + 275x_{22}\right)$$
$$\begin{cases} (x_{11} + x_{12}) + 1.5(x_{21} + x_{22}) \le 1000 \\ 0.5(x_{21} + x_{22}) \le x_{22} \\ 0.6(x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22}) \ge x_{11} + x_{21} \\ 2x_{11} \le 3x_{12} \\ x_{11} + x_{12} \ge 300 \\ x_{21} + x_{22} \ge 300 \\ x_{11} \ge 0, x_{12} \ge 0, x_{21} \ge 0, x_{22} \ge 0 \end{cases}$$

**2.** Se considera el problema

$$\max\left(6x_1+5x_2\right)$$

$$\begin{cases} x_1+x_2\le 8 \\ 2x_1+x_2\le 10 \\ 4x_1-3x_2\le 10 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$

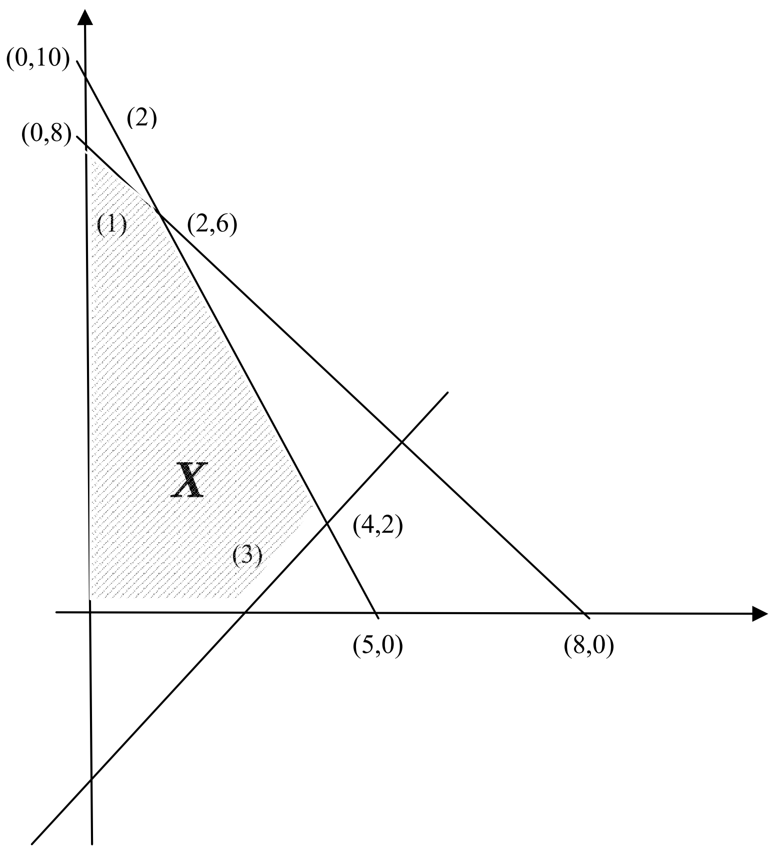
a) Representar gráficamente el conjunto de soluciones factibles y calcular la solución óptima.

b) ¿Cuál es el rango de variación del coeficiente de la variable $x_1$ en la función objetivo para que la tercera restricción esté saturada en la solución óptima?

c) Hallar el precio sombra de la primera restricción.

d) Si se añade al problema la restricción $ax_1-x_2\le 0$, ( $a\ge 0$ ), ¿cuáles son los valores de $a$ para que la solución óptima cambie?

**a)**




$$p_1=-1;\;\; p_2=-2;\;\; p_f=-6/5 \quad\Rightarrow\quad |p_1|<|p_f|<|p_2|$$

La solución óptima del problema se encuentra en el vértice (2,6) y el valor óptimo es $f(2,6)=42$.

**b)** $f(x_1, x_2) = Ax_1 + 5x_2$

Para que la tercera restricción esté saturada en la solución óptima, la solución óptima debe estar en el punto (4,2) y para ello, ha de ser $|p_f| \geq |p_2|$, luego $\frac{A}{5} \geq 2 \Rightarrow A \geq 10$.

**c)** La restricción (1) es saturada, por lo que un aumento en el término independiente de la restricción conlleva un aumento en el valor de la función objetivo:
cambia la solución hasta el (0,10) donde $x_1 + x_2 = 10 = 8 + a \Rightarrow a=2$ y $f(0,10)=50$

$$\lambda_1 = \frac{f(0,10) - f(2,6)}{2} = \frac{50-42}{2} = 4\,.$$

**d)** Si se añade al problema la restricción $ax_1 - x_2 \leq 0$, ($a \geq 0$), la condición para que la solución óptima cambie es que la solución óptima actual no cumpla la nueva restricción, es decir,

$$2a - 6 > 0 \Leftrightarrow a > 3\,.$$

**3.** Considérese el siguiente problema de programación lineal

$$Max\left(6x_1 + 4x_2 + x_3\right)$$
$$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 65 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ x_i \geq 0 \ (i = 1,2,3) \end{cases}$$

a) Completar la tabla siguiente (sin usar las tablas anteriores) y sabiendo que corresponde al problema anterior y, a partir de ella, halla la siguiente tabla del método simplex.

| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | ***b*** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | -1 | 0 | 1 | 0 | -2 | |
| | 1 | 0 | | | -1 | 10 |
| 1 | 2 | | | | 1 | 10 |
| | | | | | 1 | |

b) Sabiendo que la siguiente tabla corresponde al problema anterior, contestar a las siguientes preguntas:

| | | 6 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | ***b*** |
| 0 | $A_4$ | 0 | -6 | -1 | 1 | -3 | 0 | 5 |
| 6 | $A_1$ | 1 | 1 | 1/3 | 0 | 1/3 | 0 | 20/3 |
| 0 | $A_6$ | 0 | 1 | 2/3 | 0 | -1/3 | 1 | 10/3 |
| | | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 0 | 40 |

i) ¿Qué recursos son escasos y cuáles son abundantes?

ii) ¿Cuál es el rango de variación del término independiente de la segunda restricción para que la base óptima no varíe? Si se puede comprar 1 unidad adicional de dicho recurso por un precio unitario de 1, ¿convendría comprarla para incorporarla a la producción?

iii) ¿Cuál es el rango de variación del coeficiente de $x_1$ en la función objetivo para que no varíe la solución óptima?

**a)** La base asociada a la tabla es: [$A_3$ $A_4$ $A_5$ ]

| | | 6 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | ***b*** | | |
| 0 | $A_4$ | 7 | -1 | 0 | 1 | 0 | -2 | *b*=45 | 45/7 | |
| 0 | $A_5$ | *a*=2 | 1 | 0 | 0 | 1 | -1 | 10 | 5 | →s |
| 1 | $A_3$ | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 10 | 10 | |
| | | *c*=-5 | *d*=-2 | 0 | 0 | 0 | 1 | *e*=10 | | |
| | | ↑ e | | | | | | | | |

$$A_1 = 7A_4 + aA_5 + 1A_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 3 = a + 1 \Rightarrow a = 2$$

*c*=1-6=-5 *d*=2-4=-2 *e*=10

$$\begin{pmatrix} 65 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 10\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 10\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 65 = b + 20 \Rightarrow b = 45$$

La siguiente tabla es:

| | | 6 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | **b** |
| 0 | $A_4$ | 0 | -9/2 | 0 | 1 | -7/2 | 3/2 | 10 |
| 6 | $A_1$ | 1 | 1/2 | 0 | 0 | 1/2 | -1/2 | 5 |
| 1 | $A_3$ | 0 | 3/2 | 1 | 0 | -1/2 | 3/2 | 5 |
| | | 0 | 1/2 | 0 | 0 | 5/2 | -3/2 | 35 |

**b)** La solución óptima es (20/3,0,0) y el valor óptimo es 40.

**i)** Los precios sombra de las tres restricciones son, en orden, 0, 2 y 0, , es decir, los últimos elementos de las columnas $A_4, A_5$ y $A_6$. Por tanto, el segundo recurso es escaso y los otros dos son abundantes.

**ii)**

| $\boldsymbol{b}+\varepsilon A_5$ |
|---|
| $5-3\varepsilon$ |
| $\frac{20}{3}+\frac{1}{3}\varepsilon$ |
| $\frac{10}{3}-\frac{1}{3}\varepsilon$ |
| $40+2\varepsilon$ |

$$\begin{cases} 5-3\varepsilon \geq 0 \Leftrightarrow \quad \varepsilon \leq 5/3 \\ \frac{20}{3}+\frac{1}{3}\varepsilon \geq 0 \Leftrightarrow \quad \varepsilon \geq -20 \\ \frac{10}{3}-\frac{1}{3}\varepsilon \geq 0 \Leftrightarrow \quad \varepsilon \leq 10 \end{cases} \Rightarrow \quad -20 \leq \varepsilon \leq 5/3$$

Por tanto, el rango de variación del término independiente de la segunda restricción para que la base óptima no varíe es [0,65/3].

El precio sombra de esta restricción es 2, por tanto, sí convendría comprar una unidad adicional del segundo recurso a un precio unitario de 1, porque al incorporarla a la producción, el valor óptimo aumentaría en 2 unidades, que es mayor que el precio de adquirirla.

**iii)** Si llamamos $a$ al coeficiente de $x_1$ en la función objetivo, la última fila de la tabla queda:

| | | $\boldsymbol{a}$ | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | **b** |
| 0 | $A_4$ | 0 | -6 | -1 | 1 | -3 | 0 | 5 |
| $\boldsymbol{a}$ | $A_1$ | 1 | 1 | 1/3 | 0 | 1/3 | 0 | 20/3 |
| 0 | $A_6$ | 0 | 1 | 2/3 | 0 | -1/3 | 1 | 10/3 |
| | | 0 | $a$-4 | $\frac{a}{3}-1$ | 0 | $a/3$ | 0 | $20a/3$ |

Para que no varíe la solución óptima:

$$\begin{cases} a-4\geq 0 \Rightarrow a\geq 4 \\ \dfrac{a}{3}-1\geq 0 \Rightarrow a\geq 3 \\ a/3\geq 0 \Rightarrow a\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad a\geq 4$$

---

**4.** Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

a) ¿Para qué valores de *a* es $M(x)=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ vector propio de *A*?

b) ¿Para qué valores de *a* es la matriz *A* diagonalizable?

---

**a)** Por definición de valor propio $\lambda$ de una matriz $A$ asociado a un vector propio $M(x)$:

$$A\,M(x)=\lambda\,M(x)$$

Luego debe de existir $\lambda$ tal que:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ a+4 \\ 0 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esta igualdad se verifica para $\lambda=0 \Rightarrow a=-4$

**b)** Hallamos las raíces del polinomio característico:

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & 0 \\ a & 2-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix}=(-3-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+(8+2a))=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda=-3 \\ \lambda=3\pm\sqrt{1-2a} \end{cases}$$

<u>Casos:</u>

**1.** $a>1/2$. Entonces, $1-2a<0$ y las raíces no son reales luego no es diagonalizable.

**2.** $a=1/2$. Los valores propios son $\lambda=-3$ (simple) y $\lambda=3$ (doble).

dim S(3)=3-rg(*A*-3I)

rg $(A\text{-}3I)$=rg$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1/2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}$=2 $\Rightarrow \dim S(3) = 1 < 2$ luego no es diagonalizable.

**3.** $a = -35/2$. Los valores propios son $\lambda = -3$ (doble) y $\lambda = 9$ (simple).

dim S(-3)=3-rg($A$+3I)

rg $(A+3I)$=rg$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -35/2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$=2 $\Rightarrow \dim S(-3) = 1 < 2$ no es diagonalizable.

**4.** $a < 1/2$ y $a \neq -35/2$. Los valores propios son reales y distintos luego es diagonalizable.