Exámenes resueltos de Matemáticas para Economistas IV

Carmen Puerta
Juan Antonio Rivas

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

ARGITALPEN ZERBITZUA
SERVICIO EDITORIAL

www.argitalpenak.ehu.es

ISBN: 978-84-9860-439-9

Exámenes resueltos de
Matemáticas para Economistas IV

Exámenes resueltos de Matemáticas para Economistas IV

Carmen Puerta
Juan Antonio Rivas

eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea
ARGITALPEN ZERBITZUA
SERVICIO EDITORIAL

Fotocomposición/Fotokonposizioa: Ipar, S. Coop.
Zurbaran, 2-4 - 48007 Bilbao

ISBN: 978-84-9860-439-9

Índice

Introducción

Matemáticas para Economistas IV es una asignatura cuatrimestral dedicada fundamentalmente a la optimización con convexidad que se ha impartido en los últimos años en el segundo curso de la licenciatura de Economía en la facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad del País Vasco.

Esta publicación recoge problemas planteados en los exámenes de ésta asignatura desde el año 2000 al 2009, en las convocatorias de Junio y Septiembre.

El temario oficial de la asignatura desglosado por temas es el siguiente:

Tema 1. ÁLGEBRA LINEAL

— FORMAS CUADRÁTICAS.
Formas cuadráticas y su representación matricial. Clasificación de las formas cuadráticas. Criterio de los menores principales.

Tema 2. ANÁLISIS CONVEXO

— CONVEXIDAD
Conjuntos convexos en Rn. Funciones convexas y cóncavas. Funciones estrictamente convexas y cóncavas. Propiedades de las funciones convexas y cóncavas.

— DIFERENCIABILIDAD, CONVEXIDAD Y CONCAVIDAD
Derivada direccional. Derivada dereccional de una función diferenciable. Gradiente. Matriz Hessiana. Caracterización de las funciones convexas y cóncavas de clase C2.

Tema 3. OPTIMIZACIÓN Y CONVEXIDAD

— PROPIEDADES EXTREMALES DE LAS FUNCIONES CONVEXAS Y CÓNCAVAS
Extremos locales y extremos globales. Los extremos de las funciones convexas y cóncavas.

— INTRODUCCIÓN A LA PROGRAMACIÓN NO LINEAL

Planteamiento general del problema. Condiciones de Kuhn-Tucker. Necesidad. Condiciones de Kuhn-Tucker. Suficiencia.

— INTRODUCCIÓN A LA PROGRAMACIÓN LINEAL
Planteamiento general del problema. Análisis gráfico. Teoremas fundamentales de la programación lineal.

En el libro *Temas de Matemáticas para Economistas*, de los profesores Valenciano y Aramendía, publicado por el servicio editorial de la UPV/EHU, se puede encontrar el desarrollo teórico de la asignatura.

En los exámenes mencionados se incluyen problemas sobre todos los temas estudiados en la asignatura.

En la primera parte se presentan los problemas en su formato original, tal y como fueron presentados a los estudiantes en el examen, con el objetivo de que el lector los pueda realizar en su totalidad o realizar solo la parte de cada examen correspondiente a un tema. En la segunda parte aparecen los problemas resueltos en su totalidad.

De esta manera, y una vez acabado su trabajo el lector puede comprobar sus resultados con las respuestas de las preguntas. El estudiante puede autoevaluarse e incluso obtener una nota aproximada de su trabajo ya que en todas las preguntas se indica la puntuación de la misma sobre el total del examen.

Es fundamental que el estudiante resuelva los exámenes cuando ha adquirido suficientes conocimientos sobre la materia y que no consulte los resultados hasta que haya hecho el esfuerzo personal de resolver las preguntas del problema en su totalidad. Así podrá comprobar si ha asimilado los conocimientos estudiados sobre cada uno de los temas.

Sarriko, febrero 2010

Enunciados de Exámenes

Examen de Matemáticas IV
Economía. Junio de 2000

1. *(4 puntos)* Sea $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & c\\ 0 & 0 & b\\ c & a & 2\end{pmatrix}$.

i) Si sabemos que A es la matriz de representación de una forma cuadrática que cumple

$$\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 / \ Q(\boldsymbol{x})\geq 0\}=\mathbb{R}^3 \quad \text{y} \quad \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 / \ Q(\boldsymbol{x})=0\}\neq\{(0,0,0)\},$$

encuentra los valores de a, b y c.

ii) ¿Para qué valores de a, b y c será A matriz de representación de una forma cuadrática que cumpla: $\exists\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \ / \ Q(\boldsymbol{x})>0$ y $\exists\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^3/ \ Q(\boldsymbol{y})<0$?

2. i) *(3 puntos)* Sea el problema

$$\begin{gathered}\max/\min f(x,y)\\ y^2-x\leq 0\\ x\leq 3\end{gathered}$$

siendo f cóncava en X, el conjunto de soluciones factibles y $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ Los puntos $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ son los únicos puntos de X que verifican las condiciones de Kuhn-Tucker, $\boldsymbol{x}$ las de mínimo e $\boldsymbol{y}$ las de máximo. Encuentra todos los puntos en los que se alcanza el máximo y el mínimo y explica el por qué.

ii) *(7 puntos)* Resuelve el siguiente problema aplicando los teoremas de Kuhn-Tucker:

$$\begin{gathered}\max/\min x^2\\ y^2-x\leq 0\\ x\leq 3\end{gathered}$$

3. *(6 puntos)* Una empresa textil proporciona camisas y blusas a una tienda que le compra todo lo que le proporciona. El proceso de producción incluye corte, costura y empaquetado, utilizando 25 trabajadores en el departamento de corte, 35 en el de costura y 5 en el de empaquetado y siendo el horario de cada operario de 40 horas semanales. La siguiente tabla proporciona los requerimientos de tiempo en minutos y los ingresos por unidad en pesetas para las dos prendas:

	minutos por unidad			
	corte	costura	empaquetado	ingresos
camisas	20	70	12	2000
blusas	60	60	4	3000

i) Determina el programa de producción semanal de la empresa si pretende maximizar los ingresos.

ii) Si quisiera contratar más trabajadores en cada uno de los procesos, ¿cuántos contrataría y con qué sueldo por hora?

Examen de Matemáticas IV
Economía. Septiembre de 2000

1. *(4 puntos)* Encuentra los diferentes valores de α y β para que la forma cuadrática Q cuya matriz de representación es $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 6 \end{pmatrix}$ cumpla:

i) $\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3-\{\mathbf{0}\}/\ Q(\boldsymbol{x})>0\}=\mathbb{R}^3-\{\mathbf{0}\}$

ii) $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3: Q(\boldsymbol{x})\geq 0$

2. Sea

$$\max/\min f(x,y)$$
$$x^2+y^2\leq 1$$
$$x^2+y-1\leq 0$$
$$x+y\geq -1$$

donde f es una función diferenciable y cóncava en $\mathbb{R}^2$ y X es el conjunto de soluciones factibles del problema:

a) *(3 puntos)* Explica razonadamente si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:
   - i) Si $z\in X$ y $\nabla f(z)=\mathbf{0}$, entonces f alcanza en z un máximo respecto de X.
   - ii) Si $z\in X$ y $\nabla f(z)\neq\mathbf{0}$, es seguro que z no es solución óptima de f respecto de X.
   - iii) El mínimo de f en X puede alcanzarse en un punto de la frontera que no sea vértice.

b) *(7 puntos)* Sea $f(x,y)=2x+2y-(x+y)^2$.
   - i) ¿Cumplen los puntos (1,0) y (0,1) las condiciones de Kuhn-Tucker? ¿Son soluciones óptimas? ¿Son únicas?
   - ii) ¿Cumple el punto (0,-1) las condiciones de Kuhn-Tucker? ¿Qué se puede concluir sobre este punto?

3. *(6 puntos)* Una refinería dispone de tres tipos de petróleo crudo, P_1, P_2 y P_3. Cada barril de petróleo crudo ya refinado produce gasolina y gasóleo. La siguiente tabla indica las cantidades en barriles de petróleo crudo necesarios para producir un barril de gasolina o de gasóleo:

	barriles de P_1	barriles de P_2	barriles de P_3
gasolina	4,5	1,8	3,5
gasóleo	3,5	3,6	1,5

La refinería dispone de 1.260 barriles de P_1, 900 barriles de P_2 y 870 barriles de P_3. Si vende cada barril de gasolina a 30 euros y cada barril de gasóleo a 22 euros:

i) Determina el programa de producción de la empresa para maximizar los ingresos.

ii) Si pudiera disponer de más petróleo del tipo P_2 y P_3, ¿le interesaría? ¿qué cantidad? ¿a qué precio?

iii) Si quisiera vender más barriles de gasóleo de los que produce en la solución de i), manteniendo el precio de la gasolina, ¿a qué precio debería vender el gasóleo?

Examen de Matemáticas IV
Economía. Junio de 2001

1. Sea $f(x,y)=x^2+Ay^2+Bxy$ ($A,B\in\mathbb{R}$) y el conjunto $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ / \ -1\leq x+y\leq 1, -1\leq x-y\leq 1\}$.

i) ¿Para qué valores de A y B es f convexa en todo $\mathbb{R}^2$?
¿Para qué valores de A y B es f estrictamente convexa en todo $\mathbb{R}^2$?
¿Para qué valores de A y B es f cóncava en todo $\mathbb{R}^2$?

ii) Para A=-1, B=0 y utilizando el gradiente de la función f, deduce en qué puntos se alcanza el máximo y el mínimo de dicha función respecto a X.

2. Sea el siguiente problema de programación no lineal:

$$\max\,(-x+4y)$$
$$\begin{cases} x\geq y^2 \\ x+y\geq 2 \end{cases}$$

i) Calcula todos los puntos en los que se cumplen las condiciones de Kuhn-Tucker.

ii) Utilizando los teoremas de Kuhn-Tucker, ¿qué podemos concluir acerca de los puntos obtenidos en i)?

iii) Si nos planteáramos encontrar el mínimo del problema, utilizando los teoremas de Kuhn-Tucker, ¿dónde se alcanzaría?, ¿porqué?

3. Una empresa produce televisores de 14 y de 25 pulgadas, de los cuales obtiene un beneficio de 400 y 500 euros respectivamente. El proceso de fabricación requiere que cada televisor pase por tres divisiones distintas de la factoría. Los televisores de 14 pulgadas necesitan 1, 3 y 1 horas respectivamente en las divisiones 1, 2 y 3, mientras los televisores de 25 pulgadas requieren 2, 1 y 3 respectivamente. Las divisiones 1 y 2 trabajan un máximo de 16 y 18 horas diarias respectivamente mientras la tercera trabaja como mínimo 9 horas diarias.

i) Encuentra la producción óptima diaria si la empresa se propone maximizar el beneficio.

ii) ¿Cuál debería ser el beneficio por televisor de 14 pulgadas si la empresa se planteara producir únicamente televisores de 25 pulgadas?

iii) Bajo las condiciones iniciales, si la empresa pudiera aumentar una hora de trabajo diario en sólo una de las divisiones que tiene, ¿cuál elegiría?

Examen de Matemáticas IV
Economía. Septiembre de 2001

1. Sea el conjunto $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \ x>0;\ y>0\}$ y la función $f(x,y)=x^{\alpha}\, y^{\frac{1}{2}}$, donde $\alpha>0$.
i) ¿Para qué valores de α es f una función estrictamente cóncava en X?
ii) ¿Para qué valores de α es f una función cóncava en X?
iii) ¿Para qué valores de α es f una función convexa en X?

2. Sea el conjunto $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \ x\geq 0;\ 4\geq y\geq x^2\}$ y la función $f(x,y)=ax^2+bxy+y^2$.
Se sabe que el punto (1,1) verifica las condiciones de Kuhn-Tucker de máximo y que $D_{(1,-1)}f(1,1)=3\sqrt{2}$.
i) ¿Qué valores toman los parámetros a y b y las derivadas $f_1(1,1)$ y $f_2(1,1)$?
Considérese a partir de ahora $a=4$ y $b=-4$.
ii) Utilizando las propiedades extremales de las funciones cóncavas y convexas, halla $\min\limits_{(x,y)\in X} f(x,y)$ indicando los puntos donde se alcanza.
iii) Sabiendo que el máximo del problema se encuentra en un vértice y utilizando los teoremas de Kuhn-Tucker, encuentra los puntos donde se alcanza $\max\limits_{(x,y)\in X} f(x,y)$.

3. Una empresa produce tornillos y tuercas especiales para lo que dispone de tres máquinas $M1$, $M2$ y $M3$ que se han de utilizar sucesivamente. Los tiempos que cada máquina invierte en producir un tornillo o una tuerca así como los tiempos disponibles semanales de cada una de las máquinas y el beneficio unitario por cada unidad producida vienen expresados en la siguiente tabla:

	$M1$	$M2$	$M3$	beneficio (pta.)
tornillo	7 min.	7 min.	3,5 min.	90 pta.
tuerca	4 min.	12 min.	16 min.	100 pta.
tiempo total	7.000 min.	8.400 min.	8.400 min.	

i) Si la empresa pretende obtener el máximo beneficio, encuentra la producción semanal óptima de tornillos y tuercas.
ii) Si la empresa deseara disminuir el número de tuercas producidas incrementando el beneficio obtenido por los tornillos, ¿en cuánto lo situaría?
iii) En las condiciones iniciales, ¿en cuántos minutos estaría dispuesta la empresa a incrementar los disponibles por la 2.ª máquina? ¿a qué precio?
iv) En las condiciones iniciales, ¿en cuántos minutos estaría dispuesta la empresa a incrementar los disponibles por la 1.ª máquina? ¿a qué precio?

Examen de Matemáticas IV
Economía. Junio de 2002

1. *(8 puntos)* Sea la forma cuadrática Q definida como

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + ax_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3;\ a\in\mathbb{R}.$$

i) Encuentra los valores de a tales que $\exists \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 / \ Q(\boldsymbol{x})=0$.
ii) Encuentra los valores de a tales que $\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3: Q(\boldsymbol{x})\geq 0$.
iii) Encuentra los valores de a tales que $\exists \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 / \ Q(\boldsymbol{x})<0$.

2. *(14 puntos)* Sean $X = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \ / \ y \geq x^2,\ \ y \leq x + 2\}$ y

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 4y.$$

i) Utilizando las propiedades extremales de las funciones cóncavas y convexas, halla $\min\limits_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x})$, indicando los puntos en los que se alcanza.
ii) Comprueba que el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ cumple las condiciones de Kuhn-Tucker para el problema de máximo de f en X.
iii) ¿Puede concluirse que el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ es un óptimo de f en X?

3. *(8 puntos)* Una pastelería artesana produce bizcochos y magdalenas como sus especialidades. Diariamente dispone de 10 docenas de huevos de granja, 18 kilos de harina ecológica y 24 kilos de azúcar de caña con los que realiza sus especialidades: para producir una hornada de bizcochos necesita 1 docena de huevos, 2 kilo de harina y 1 kilo de azúcar, mientras que para producir una hornada de magdalenas necesita 1 docena de huevos, 1 kilo de harina y 3 kilos de azúcar. Por cada hornada de bizcochos obtiene un ingreso de 8€ y por cada hornada de magdalenas 6€.

i) Calcula el número de hornadas diarias de cada una de las especialidades para que el pastelero obtenga el ingreso máximo.
ii) Si el pastelero decide disminuir la producción de bizcochos ¿Cuál es el ingreso por las magdalenas a partir del cual consigue su actual objetivo?
iii) Si pudiera incrementar el número de docenas de huevos y los kilos de harina diarias, ¿en cuánto lo haría? ¿cuánto estaría dispuesto a pagar por ellos?

Examen de Matemáticas IV
Economía. Septiembre de 2002

1. *(10 puntos)* Sea el conjunto $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ 0\le x\le 1;\ 0\le y\le 1\}$ y la función

$$f(x,y)=\alpha x^2+\alpha y^2+2\alpha xy.$$

i) Estudia la concavidad o convexidad de f en $\mathbb{R}^2$ para todos los valores de α.

ii) ¿Para qué valores de α se cumple que $\min\limits_{x\in A} f(\boldsymbol{x}) = f(0,0)$?

iii) ¿Para qué valores de α se cumple que $\max\limits_{x\in A} f(\boldsymbol{x}) = f(0,0)$?

iv) Sea $\alpha=2$. Utilizando las propiedades extremales halla al menos un punto donde se alcance el máximo de f en A.

2. *(12 puntos)* Sea el conjunto $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x^2\le y+2;\ y\le 2-x^2\}$ y la función $f(x,y)=y+ax^2$.

i) Utilizando los teoremas de Kuhn-Tucker encuentra los valores de a para los que se puede asegurar que (0,-2) es un mínimo de f en X. Razona la respuesta.

ii) Utilizando los teoremas de Kuhn-Tucker encuentra los valores de a para los que se puede asegurar que (0,-2) **no** es un máximo de f en X. Razona la respuesta.

iii) Resuelve el problema de programación no lineal:

$$\text{Máx } (y+2x^2)$$
$$x^2\le y+2$$
$$y\le 2-x^2$$

3. *(8 puntos)* En una fábrica se hacen zapatos y botas. Para ello dispone semanalmente de 120 piezas de cuero y tiene 6 trabajadores que cada uno trabaja 7 horas diarias durante 4 días a la semana. Para hacer un par de zapatos se necesitan 4 horas de trabajo y 2 piezas de cuero y para un par de botas 3 horas de trabajo y 3 piezas de cuero. El empresario sabe que vende todo lo que produce y que con los clientes fijos tiene vendidos de antemano 10 pares de botas a la semana.

i) Si el precio de los zapatos es de 80€ y el de las botas de 75€, encuentra la producción semanal que maximiza los ingresos.

ii) ¿Entre qué precios máximo y mínimo puede oscilar el precio de los zapatos sin que varíe la solución óptima hallada en el apartado anterior?

iii) ¿Le interesaría al empresario contratar un aprendiz que trabaje 4 horas diarias durante 4 días a la semana a 10€ la hora?

Examen de Matemáticas IV
Economía. Junio de 2003

1. *(6 puntos)* Sea la forma cuadrática: $Q(\boldsymbol{x})={}^tM(\boldsymbol{x})\begin{pmatrix} \alpha & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} M(\boldsymbol{x})$.

i) Encuentra los valores de α para los que se cumple:
   a) $\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$: $Q(\boldsymbol{x})\geq 0$; $\exists z\neq\boldsymbol{0}/Q(z)=0$.
   b) $\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$-$\{\boldsymbol{0}\}$: $Q(\boldsymbol{x})>0$.
   c) $\exists \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3/Q(\boldsymbol{x})>0$; $\exists \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^3/Q(\boldsymbol{y})<0$.

ii) Para $\alpha=0$ ¿cuál es el signo que toma $Q(x_1,0,x_3)$?

2. *(8 puntos)* Sea la función

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{x-y} & x\neq y \\ 2 & x=y \end{cases}$$

Encuentra las direcciones en las que está definida la derivada direccional de f en (0,0) y en (0,1).
¿Existe $\nabla f(0,0)$?, ¿existe $\nabla f(0,1)$?, por qué? En caso de que existan, calcúlalos.

3. *(10 puntos)* Sea la función $f(x,y)=x^2+3y$ y el conjunto $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x^2+y^2\leq 4;\ x+y\leq 2\}$. Plantea el problema de programación no lineal para esta función objetivo y este conjunto de soluciones factibles.
i) Encuentra todos los puntos que cumplen las condiciones de Kuhn-Tucker.
ii) Utilizando los teoremas de Kuhn-Tucker, encuentra el mínimo de f en X.
iii) Encuentra el máximo de f en X.

4. *(6 puntos)* Una industria química se dedica a comercializar dos productos de limpieza: garbiplus y garbinet. Para producirlos utiliza dos tipos de disolventes convenientemente mezclados con agua: para producir un litro de garbiplus se utilizan 0,005 litros de disolvente I y 0,006 litros de disolvente II mientras que para producir garbinet se necesitan 0,005 litros y 0,004 litros respectivamente de disolvente I y II. Las cantidades de disolventes disponibles por la industria son de 15 litros diarios del de tipo I y 16 litros diarios del de tipo II, y por problemas de almacenamiento, debe utilizar al menos 10 litros de disolvente tipo I diariamente. Si por cada litro de garbiplus obtiene un beneficio de 8€ y por cada litro de garbinet 6€.
i) Calcula la producción diaria de los productos de limpieza que maximice sus beneficios.
ii) Si la industria pretendiera producir únicamente garbinet, cuál debería ser el beneficio por litro de garbiplus?
iii) Si le ofrecen incrementar la disponibilidad de los disolventes, ¿cuántos litros de más de cada disolvente estaría dispuesta a adquirir? ¿a qué precio?

Examen de Matemáticas IV
Economía. Septiembre de 2003

1. *(4 puntos)* Sea $M(Q) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ con $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ la matriz de representación de un forma cuadrática.

i) Encuentra los valores de α,β tal que Q sea semidefinida positiva.

ii) Encuentra los valores de α,β tal que $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 / Q(\boldsymbol{x}) > 0\} = \mathbb{R}^3 - \{\boldsymbol{0}\}$.

2. *(5 puntos)* Sea $f(x, y) = x^2 y + (y - 4)^2$.

i) Estudia la convexidad o concavidad de f en $\mathbb{R}^2$ y en $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq x^2 + 1\}$.

ii) Halla y representa el conjunto $B = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 - \{\boldsymbol{0}\} / D_v f(1, 4) > 0\}$.

iii) ¿Puede haber en el punto (1,4) un máximo de f relativamente a A?

3. *(12 puntos)* Sean $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 4, x + y \leq 2, y \geq 0\}$ y

$$f(x, y) = 4 - x^2 + 2xy - y^2 .$$

i) Utilizando las propiedades extremales de las funciones cóncavas y convexas, halla el punto o puntos donde se alcanza el máximo de f en X y su valor.

ii) Utilizando el gradiente de f en el tramo de frontera de X $\{(x, y) \in X / y = 0, -2 \leq x \leq 2\}$, explica qué puntos podrían ser extremos de f en este tramo de frontera.

iii) Comprueba que el punto $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ verifica las condiciones de Kuhn-Tucker. Sabiendo que este punto es el único del tramo de frontera de X $\{(x, y) \in X / x^2 + y^2 = 4\}$ que cumple las condiciones de Kuhn-Tucker y utilizando las propiedades extremales de las funciones cóncavas y convexas y los teoremas de Kuhn-Tucker, encuentra al menos un punto donde se alcanza el mínimo de f en X.

4. *(4 puntos)* Un artesano dispone de 36 g. de cobre, 150 g. de estaño y 30 g. de oro para confeccionar pendientes y anillos. Para hacer un par de pendientes necesita 2 g. de cobre, 5 g. de estaño y 1 g. de oro mientras que para hacer un anillo necesita 1 g. de cobre, 5 g. de estaño y 2,5 g. de oro. El artesano vende cada par de pendientes a 20€ y cada anillo a 30€.

i) ¿Cuántas pares de pendientes y anillos debe realizar dicho artesano para maximizar sus ingresos?

ii) Si pudiera conseguir más cobre, ¿cuántos gramos y a qué precio lo haría?

Examen de Matemáticas IV
Economía. Junio de 2004

1. (*5 puntos*) Sea la función $f(x, y) = |x + y|$. Calcular $D_{(1,1)}f(1,-3)$. ¿Para qué direcciones está definida la derivada direccional de f en el punto (0,0)?

2. (*8 puntos*) Para cada una de las siguientes funciones encuentra, si existe, un abierto convexo donde sea convexa y otro abierto convexo donde sea cóncava:

i) $f(x, y) = \dfrac{1}{x + y}$

ii) $g(x, y) = \ln(x + y)$

3. (*12 puntos*) Sea el problema:

$$\max/\min f(x, y)$$
$$\begin{cases} y^2 \le x \\ y \ge x - 2 \end{cases}$$

siendo f una función lineal.

i) ¿Tiene solución el problema? En caso afirmativo, indica si los extremos se alcanzan en el interior o en la frontera.

ii) Si un punto $\boldsymbol{x}$ es solución del problema ¿tiene que verificar las condiciones de Kuhn-Tucker?

iii) Si los puntos $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ verifican las condiciones de Kuhn-Tucker de mínimo, indica si en alguno o algunos de esos puntos se alcanza el mínimo del problema y por qué.

iv) Si en (0,0) se alcanza el máximo del problema, siendo los escalares que hacen que se cumpla la condición $KT1$ λ_1=-1 y λ_2=0, encuentra el punto o los puntos en los que la función alcanza el mínimo.

4. (*5 puntos*) Una floristería realiza dos tipos de ramos de flores, tipo *A* y tipo *B*, para los que utiliza lirios y claveles de los cuales dispone de 1800 y 2400 unidades respectivamente; para confeccionar un ramo tipo *A* utiliza 10 lirios y 20 claveles y para un ramo tipo *B* 20 lirios y 10 claveles. Por otra parte, saben que no pueden vender más de 60 ramos tipo *B*. Si vende cada ramo tipo *A* a 20 euros y cada ramo tipo *B* a 30 euros,

i) Calcular cuántos ramos de cada tipo realizará si quiere maximizar el ingreso.

ii) ¿A cuánto debería vender cada ramo tipo *A* si quisiera vender más ramos tipo *B*?

iii) Si pudiera adquirir más claveles, ¿cuánto estaría dispuesto a pagar por cada uno de ellos?, ¿cuántos adquiriría?

Examen de Matemáticas IV
Economía. Septiembre de 2004

1. (*8 puntos*) Sea $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + \frac{1}{2} z^2 + xz + \alpha yz$.

i) ¿Para qué valores de α podemos asegurar que f es convexa en todo $\mathbb{R}^3$?
ii) ¿Para qué valores de α podemos asegurar que f es estrictamente convexa en todo $\mathbb{R}^3$?
iii) ¿Para qué valores de α podemos asegurar que f no es ni convexa ni cóncava en todo $\mathbb{R}^3$?

2. (*12 puntos*) Sean $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \ y\leq 2-x^2;\ y\leq x;\ y\geq -x\}$ y $f(x,y)=x^2+9y^2+6xy-4x-12y+4$.
i) Utilizando las propiedades extremales de las funciones cóncavas y convexas hallar el mínimo de f en X.
ii) Utilizando el gradiente de f, ¿qué podemos asegurar acerca de los puntos (0,0) y (1,1)?
iii) ¿Verifica el punto (1,1) las condiciones de Kuhn-Tucker? Utilizando los teoremas de Kuhn-Tucker, ¿qué se puede afirmar acerca de este punto?
iv) ¿Verifica el punto (1/2,1/2) las condiciones de Kuhn-Tucker? ¿Se puede asegurar que es extremo global de f en X?

3. (*10 puntos*) Un hospital desea reducir la lista de espera de las operaciones pendientes de riñón y de vesícula. Debido al gran número de operaciones pendientes desea realizar más operaciones de vesícula que de riñón. Por otra parte, no puede realizar más de 50 operaciones de vesícula diarias. Cada operación de riñón requiere la presencia de dos médicos y se realiza en una hora. Cada operación de vesícula sólo requiere un médico y también se realiza en una hora. Para estos tipos de operaciones el hospital tiene asignados 16 médicos que dedican 5 hora al día cada uno de ellos y cuenta con 12 quirófanos disponibles cada uno de ellos 5 horas al día.
i) Maximizar el número de operaciones diarias.
ii) ¿Le interesaría al hospital disponer de más quirófanos? En caso afirmativo, ¿de cuantos?
iii) ¿Le interesaría al hospital contratar más médicos? En caso afirmativo, ¿cuántos contrataría?

Examen de Matemáticas IV
Economía. Junio de 2005

1. *(4 puntos)* Sea la forma cuadrática $Q(\boldsymbol{x})$ definida por

$$Q(\boldsymbol{x})={}^{t}M(\boldsymbol{x})\begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & a & 4 \end{pmatrix} aM(\boldsymbol{x}), \text{ donde } a\in\mathbb{R}.$$

Halla la matriz de representación de $Q(\boldsymbol{x})$. Razona para qué valores de a se da cada uno de los siguientes casos:

i) Para todo $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$-$\{\boldsymbol{0}\}$ se cumple $Q(\boldsymbol{x})<0$.
ii) Para todo $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$-$\{\boldsymbol{0}\}$ se cumple $Q(\boldsymbol{x})>0$.
iii) Para todo $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ se cumple $Q(\boldsymbol{x})^{3}0$.
iv) Existen $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2\in\mathbb{R}^3$ tales que $Q(\boldsymbol{x}_1)<0$ y $Q(\boldsymbol{x}_2)>0$.

2. (*10 puntos*) Sea la función $f(x,y)=-\dfrac{x^2}{y+1}$ y el conjunto $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\,x^2+y^2\leq 5\leq x+3y\}$.

i) Estudia la convexidad o concavidad de f en X.
ii) Utilizando las propiedades extremales de las funciones convexas y cóncavas, halla $\max_{x\in X} f(\boldsymbol{x})$ y todos los puntos donde se encuentra.
iii) Comprueba que los puntos (2,1) y (-1,2) cumplen las condiciones de Kuhn-Tucker de mínimo.
iv) Sabiendo que (2,1), (-1,2), $(0,\sqrt{5})$ y (0,5/3) son los únicos puntos de la frontera de X que cumplen Kuhn-Tucker de mínimo, halla $\min_{x\in X} f(\boldsymbol{x})$ y todos los puntos donde se encuentra.

3. *(6 puntos)* Una compañía produce mesas y sillas. Para ello dispone de tres plantas. En la planta 1 se cortan las piezas de madera, en la planta 2 se realiza el ensamblaje de las piezas y en la planta 3 se realiza el acabado de los productos. En la tabla se resumen los horas semanales requeridas para fabricar una unidad de cada producto, así como el beneficio obtenido por unidad producida. La compañía sabe que puede vender la cantidad que desee de ambos productos con la capacidad disponible en las tres plantas.

	Mesas	Sillas	Horas disponibles
Planta 1	1	3	210
Planta 2	3	3	270
Planta 3	4	1	240
Beneficio (€)	60	30	

i) Si la compañía pretende maximizar sus beneficios, formula el problema de programación lineal y halla la solución óptima de dicho problema.
ii) ¿Entre qué valores debe estar el beneficio por mesa para que la solución óptima sea la misma que la obtenida en el apartado anterior?
iii) ¿En qué plantas sería conveniente aumentar la capacidad horaria semanal disponible? ¿Cuánto estaría dispuesta a pagar la empresa por cada hora añadida a la capacidad respectiva de estas plantas?

Examen de Matemáticas IV
Economía. Septiembre de 2005

1. (*6 puntos*) Sea $f(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cxz + d$.

i) ¿Para qué valores de *a, b, c, d* es *f* una forma cuadrática definida positiva?
ii) ¿Para qué valores de *a, b, c, d* es *f* una forma cuadrática semidefinida positiva?
iii) ¿Para qué valores de *a, b, c, d* es *f* una función convexa?

2. (*6 puntos*) Sea la función $f(x,y) = \left|x^2 - y^2\right|$.

i) Calcula, si es que existen, $\nabla f(0,0)$ y $\nabla f(1,0)$.
ii) Calcula las siguientes derivadas direccionales: $D_{(1,1)}f(0,0)$, $D_{(1,0)}f(0,0)$ y $D_{(0,1)}f(1,0)$.

3. *(8 puntos)* Sea $f(x,y) = 5 - x^2 + 4xy - 4y^2$ junto con

$$X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 \le y \le 4\right\}.$$

i) Utilizando las propiedades extremales de las funciones cóncavas y convexas, halla $\max\limits_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x})$ indicando los puntos de *X* en los que se alcance.
ii) Halla todos los puntos que verifican las condiciones de Kuhn-Tucker.
iii) ¿Es necesario el cumplimiento de las condiciones de Kuhn-Tucker para que en un punto *f* alcance su mínimo en *X*?; ¿y suficiente?
iv) Halla razonadamente $\min\limits_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x})$.

Examen de Matemáticas IV
Economía. Junio de 2006

1. *(7 puntos)* Para cada una de las siguientes funciones halla los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales es una forma cuadrática, y en su caso, clasifícala:

i) $f(x,y)=(5x+a)^2$

ii) $g(x,y)=(2x-ay)^2$

iii) $h(x,y)=(x+ay)^3$

2. *(6 puntos)* Sea la función $f(x,y)=e^{xy}$.

i) ¿En qué direcciones la derivada direccional de f en el punto (-1,0) es positiva?

ii) ¿Aumenta el valor de la función cuando pasamos del punto (-1,4) a otro suficientemente próximo a él en la dirección (1,1)?

3. *(12 puntos)* Sea $f(x,y)=\alpha x^2-y$, $\alpha \in \mathbb{R}$, y el conjunto

$$X=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \,/\, y \geq x^2-1,\ y \leq 2\}.$$

i) Para los diferentes valores de α estudia la convexidad o concavidad de f en X.

ii) ¿Para qué valores de α cumple el punto (0,-1) las condiciones de Kuhn-Tucker?

iii) Utilizando los teoremas de Kuhn-Tucker, indica para qué valores de α podemos asegurar que el punto (0,-1) **es máximo** de f en X.

iv) Utilizando los teoremas de Kuhn-Tucker, indica para qué valores de α podemos asegurar que el punto (0,-1) **no es mínimo** de f en X.

4. *(5 puntos)* Dos servicios médicos tienen asignados 10 médicos y 6 médicos respectivamente; cada médico atiende como máximo a 10 pacientes y el coste de cada paciente es de 10€/día y 20€/día respectivamente. Si el presupuesto total diario de ambos servicios es de 1800€,

i) Encuentra la asignación diaria de pacientes en cada servicio que maximice el número de personas atendidas.

ii) Si el primer servicio quisiera ampliar el número de pacientes atendidos, ¿cuántos médicos debería contratar para atender al máximo de aquellos?

Examen de Matemáticas IV
Economía. Septiembre de 2006

1. *(7 puntos)* Sea la forma cuadrática $Q(x,y,z) = ax^2 + bz^2 + 2yz + cy^2$. Encuentra los valores de $a,b,c \in \mathbb{R}$ para los cuales Q es semidefinida negativa.

2. *(8 puntos)* Sea la función $f(x,y) = \ln(x+y)$ y el conjunto X formado por todas las combinaciones lineales convexas de los puntos (1,0), (1,1) y (0,1). Utilizando las propiedades extremales de las funciones convexas y cóncavas junto con el gradiente de f, encuentra los extremos de f en X indicando todos los puntos en los que se alcanzan.

3. *(10 puntos)* Sean $f(x,y) = x^2 + 10x + y^2$ y $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y^2 - 4 \leq x \leq 5\}$.

i) Comprueba que los puntos (-4,0) y (5,0) cumplen las condiciones de Kuhn-Tucker de f en X.
ii) Utilizando los teoremas de Kuhn-Tucker, ¿qué podemos concluir acerca de los puntos del apartado anterior?
iii) Sabiendo que los únicos puntos que verifican KT son, además de los anteriores, el (5,3) y el (5,-3), encuentra el maximo de f en X (razona suficientemente la respuesta).

4. *(5 puntos)* Dos servicios médicos tienen asignados 10 médicos y 6 médicos respectivamente; cada médico atiende como máximo a 10 pacientes y el coste de cada paciente es de 10€/día y 20€/día respectivamente. Si el presupuesto total diario de ambos servicios es de 1800€,

i) Encuentra la asignación diaria de pacientes en cada servicio que maximice el número de personas atendidas.
ii) Si el primer servicio quisiera ampliar el número de pacientes atendidos, ¿cuántos médicos debería contratar para atender al máximo de aquellos?

Examen de Matemáticas IV
Economía. Junio de 2007

1. *(7 puntos)* Sea la familia de funciones $f(x,y) = x^2 + y^2 + axy + bx + cy$, siendo $a,b,c \in \mathbb{R}$

i) ¿Para que valores de $a,b,c \in \mathbb{R}$, es una forma cuadrática?

ii) ¿Para que valores de $a,b,c \in \mathbb{R}$, es una función cóncava, convexa o estrictamente convexa?

iii) ¿Para que valores de $a,b,c \in \mathbb{R}$, se verifica que $f(1,1) = 2$ y $\nabla f(1,1) = (2,-2)$?

iv) Sabiendo que $\nabla f(1,1) = (2,-2)$ ¿Cuál es el valor de $D_{(-3,4)} f(1,1)$?
¿La dirección $\boldsymbol{v}$ = (-3,4) es una dirección de crecimiento de la función?

2. *(16 puntos).* Sea la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y$, definida en el recinto $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 25 \ ; \ x \geq 0\}$

i) Hallar los gradientes de la función en los puntos (0,-5) y (0,5). Representarlos gráficamente. ¿Pueden existir algún tipo de extremo en dichos puntos?

ii) Utilizando las propiedades extremales de las funciones cóncavas y convexas, encontrar el mínimo valor de la función f en X y el punto o puntos donde se alcanza, si es que existe dicho valor mínimo.

iii) Comprobar si los puntos (0,-5) y (0,5) verifican las condiciones de Kuhn-Tucker.

iv) ¿Qué puntos del tramo de la frontera $FrX = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 25 \ ; \ x > 0\}$ verifican las condiciones de Kuhn-Tucker?

v) ¿Qué podemos concluir sobre el máximo valor de f en X? En caso de que exista ¿Cuánto vale y dónde se alcanza?

3. *(7 puntos).* Una entidad financiera dispone de 12 millones de euros para la adquisición de acciones en bolsa de Iberdrola y Telefónica. El dividendo anual de las primeras es del 12% mientras que el de las segundas es del 8%. En esta situación, la entidad desea invertir en acciones de Iberdrola por lo menos tanto capital como en acciones de Telefónica. También decide invertir por lo menos 3 millones de euros en acciones de Telefónica, pero no más de 8 millones de euros en acciones de Iberdrola.

i) Encontrar la distribución de capital de los dos tipos de acciones que maximiza los beneficios.

ii) ¿Entre qué valores puede oscilar el dividendo anual de las acciones de Iberdrola para que no se modifique la solución encontrada?

iii) Si quisiera invertir más de 12 millones y tuviera que pedir un crédito, ¿qué cantidad máxima le interesaría pedir y cuál sería el interés que estaría dispuesto a pagar por el crédito?

Examen de Matemáticas IV
Economía. Septiembre de 2007

1. *(9 puntos)* Sea la familia de funciones $f(x,y) = ax^2 + (a+b)y^2 + 2axy + 2$, siendo $a, b \in \mathbb{R}$

i) ¿Para que valores de $a, b \in \mathbb{R}$, es una forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$?

ii) ¿Para que valores de $a, b \in \mathbb{R}$, es una función convexa en $\mathbb{R}^2$?
¿Para que valores de $a, b \in \mathbb{R}$, es una función estrictamente cóncava en $\mathbb{R}^2$?

iii) Para los valores de $a = 1,\ b = 0$, utilizando las propiedades extremales de las funciones cóncavas y convexas, encuentra los puntos dónde la función alcanza los valores máximo y mínimo de f en
$X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y \geq 0, y - x \leq 1, x + y \leq 1\right\}$ y cuales son esos valores.

2. *(10 puntos).* Sea la función $f(x,y) = (x-2)^2 + y^2$ definida en $\mathbb{R}^2$ y el conjunto $X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y^2 - x \leq 1 \ ;\ y^2 + x \leq 1\right\}$.

i) ¿Es seguro que la función f alcanza máximo global y mínimo global en X? Si es así, ¿podrá estar alguno de ellos en el interior de X?

ii) Encuentra todos los puntos que cumplen las condiciones de Kuhn-Tucker.

iii) Encuentra los valores $\max\limits_{(x,y)\in X} f(x,y)$ y $\min\limits_{(x,y)\in X} f(x,y)$, y los puntos donde se alcanzan. Razona suficientemente la respuesta.

3. *(6 puntos)* Una empresa automovilística produce dos tipos de vehículos: coches y furgonetas, de los cuales obtiene un beneficio de 4.000 y 5.000 euros respectivamente. El proceso de fabricación requiere que cada vehículo pase por tres divisiones distintas de la factoría. Los coches necesitan 1, 3 y 1 horas respectivamente en las divisiones A, B y C, mientras las furgonetas requieren 2, 1 y 3 respectivamente en las divisiones A, B y C. Las divisiones A y B trabajan un máximo de 16 y 18 horas diarias respectivamente mientras la tercera trabaja como mínimo 9 horas diarias.

i) Encuentra la producción óptima diaria si la empresa se propone maximizar el beneficio.

ii) ¿Cuál debería ser el beneficio por coche si la empresa se planteara producir únicamente furgonetas?

iii) Bajo las condiciones iniciales, si la empresa pudiera aumentar una hora de trabajo diario en sólo una de las divisiones que tiene, ¿cuál elegiría?

Examen de Matemáticas IV
Economía. Junio de 2008

1. *(7 puntos)* Sea la familia de funciones:

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 2ayz \text{ , siendo } a \in \mathbb{R}$$

i) ¿Para que valores de $a \in \mathbb{R}$, es una forma cuadrática? Clasifícala.
ii) ¿Para que valores de $a \in \mathbb{R}$, es una función cóncava o convexa en $\mathbb{R}^3$?
iii) Para el valor de $a = 3$, ¿Cuál es el valor de $D_{(-3,0,4)} f(1,0,1)$?
¿La dirección $\boldsymbol{v}$ = (-3,0,4) es una dirección de crecimiento de la función?

2. *(16 puntos).* Sea la función $f(x,y) = 4x + 4y - x^2 - y^2$, definida en el recinto

$$X = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \le 25 \ ;\ 0 \le x \le y \le 4 \right\}$$

i) Hallar los gradientes de la función en los puntos (0,4) y (3,4). Representarlos gráficamente. ¿Pueden existir extremo de *f* relativo a *X* en dichos puntos?
ii) Utilizando las propiedades extremales de las funciones cóncavas y convexas, encontrar el máximo valor de la función f en X y el punto o puntos donde se alcanza, si es que existe dicho valor máximo.
iii) Escribir el problema como un problema de programación no lineal (en forma canónica) señalando la función objetivo y las restricciones.
iv) Comprobar si el punto (0,0) verifica las condiciones de Kuhn-Tucker.
v) Sabiendo que en el tramo de la frontera $Fr(X) = \left\{ (x,y) \in X \,/\, x^2 + y^2 = 25 \right\}$ sólo verifican las condiciones de Kuhn-Tucker los puntos $(3,4)$ y $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}} \right)$ ¿Qué podemos concluir sobre el mínimo valor de f en X? En caso de que exista ¿Cuánto vale y dónde se alcanza?

3. *(7 puntos).* Una compañía escocesa fabrica dos tipos de whisky de calidades distintas en función de las calidades de tres tipos de malta: M_1, M_2 y M_3 utilizadas para su fabricación. Del tipo de base M_1 dispone de 36 unidades, del tipo normal M_2 dispone de 25 unidades mientras que de la de mayor calidad M_3 sólo dispone de 8 unidades. Para la obtención de una unidad del whisky normal necesita utilizar 6 unidades del tipo de base M_1 y 5 unidades del tipo normal M_2. Para la obtención de una unidad del whisky de mayor calidad necesita utilizar 6 unidades del tipo de base M_1 y 4 unidades del tipo de mayor calidad M_3.Por razones de la demanda necesita fabricar como mínimo tantas unidades del whisky normal como del whisky de mayor calidad. El precio en el mercado de cada tipo de whisky es de 20€ para el normal y 30€ para el de mayor calidad.

i) Encontrar la producción de los dos tipos de whisky que maximiza los ingresos.
ii) ¿Entre qué valores puede oscilar el precio del whisky normal para que no se modifique la solución encontrada?
iii) Sabiendo que en el mercado el precio de la malta de mayor calidad M_3 es de 3€/unidad ¿le interesaría comprarla para aumentar la producción?

Examen de Matemáticas IV
Economía. Septiembre de 2008

1. *(5 puntos)* Sea la siguiente familia de formas cuadráticas;

$$Q_a(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + ax_3^2 + 6x_1x_2 \,.$$

i) Clasifica la forma cuadrática para todos los valores de a.
ii) Para a=3, ¿existen dos vectores $\boldsymbol{z}$ e $\boldsymbol{y}$ tales que $Q(\boldsymbol{z})>0$ y $Q(\boldsymbol{y})<0$?
iii) Para a=4, sea f una función polinómica cuya matriz hessiana es $\forall(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : H_f(x_1, x_2, x_3) = M(Q_4)$. ¿Qué puede concluirse sobre la concavidad o convexidad de f ?

2. *(9 puntos)* Sean la función $f(x, y) = x + y^2 - 2$ y el recinto

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y^2 \leq x,\;\; x \leq 2 - y,\;\; y \geq 0\}\,.$$

i) ¿Es seguro que la función f alcanza máximo global y mínimo global en X? Si es así, ¿podrá estar alguno de ellos en el interior de X?
ii) Encuentra el punto o puntos que verifican las condiciones de Kuhn-Tucker sólo en el tramo de frontera $\{(x, y) \in X \,/\, y^2 = x\}$. ¿Qué podemos concluir sobre ellos?
iii) Utilizando las propiedades extremales de las funciones cóncavas y convexas, encuentra $\max\limits_{(x,y)\in X} f(x, y)$.

3. *(6 puntos)* Una empresa produce dos productos P_1 y P_2 a partir de tres materias primas M_1, M_2 y M_3. Para producir una tonelada de P_1 necesita 2 toneladas de M_1, 3 de M_2 y 1 tonelada de M_3, mientras que para producir una tonelada de P_2 necesita 3 de M_1, 2 de M_2 y 2 de M_3. La empresa dispone actualmente de 100 toneladas de M_1, 120 de M_2 y 60 de M_3. Vende cada tonelada de P_1 a 400 euros y cada tonelada de P_2 a 500 euros.
i) Plantea y resuelve el problema de programación lineal que maximiza el ingreso.
ii) ¿Entre qué cantidades debe estar el precio de P_2 para que no varíe la solución hallada anteriormente?
iii) Si el coste de M_1 es de 100 € por tonelada, ¿le interesaría a la empresa conseguir más toneladas de esta materia prima?, ¿cuántas?, ¿cuál seria la nueva solución óptima?

Examen de Matemáticas IV
Economía. Junio de 2009

1. *(8 puntos)* Sea $Q(\boldsymbol{x})$ la forma cuadrática definida por:

$$Q(x,y,z) = ax^2 + 2ay^2 + z^2 + 4xy + 2xz \text{ , con } a \in \mathbb{R} .$$

i) ¿Para qué valores de a es $Q(\boldsymbol{x})$ una forma cuadrática definida positiva? ¿Y semidefinida positiva?

ii) ¿Para qué valores de a es $Q(\boldsymbol{x})$ una forma cuadrática definida negativa? ¿Y semidefinida negativa?

iii) Para $a = 2$ y utilizando las propiedades extremales de las funciones cóncavas y convexas, determinar el conjunto $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, Q(x,y,z) = 0\}$.

2. *(6 puntos)* Una persona dispone de 9.000€ que desea invertir en dos tipos de bonos A y B. El interés de los bonos de tipo A es de 2% y de los de tipo B 3,5%. Si desea invertir en los de tipo A como mínimo 4.000€ y al menos lo mismo que en los de tipo B,

i) Obtener el capital que se debe invertir en cada tipo de bonos para maximizar el beneficio.

ii) ¿Entre qué valores puede oscilar el interés de los bonos de tipo B sin que cambie la solución anterior?

3. *(10 puntos)* Dada la función $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy - 8x - 8y$, y el conjunto:

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 \le y \le x\} ,$$

i) ¿Puede concluirse directamente (examinando *f* y *X*) si *f* alcanza un máximo y un mínimo en *X*?

ii) Obtener el máximo y el mínimo valor de *f* en *X* utilizando los teoremas de Kuhn-Tucker.

Examen de Matemáticas IV
Economía. Septiembre de 2009

1. *(4 puntos)* Usando la clasificación de las formas cuadráticas, demostrar que si $f(x,y)=ax^2+2y^2$, $g(x,y)=x^2-y^2+6xy$ y $a>4$, entonces para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ se cumple $f(x,y)\geq g(x,y)$. ¿Se verifica $f(x,y)=g(x,y)$ para algún punto?

2. *(4 puntos)* Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ diferenciable que verifica, $D_{\nabla f(1,1)}f(1,1)=5$ y $D_{(1,-1)}f(1,1)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ¿Qué valor o valores puede tomar $D_{(1,1)}f(1,1)$?

3. *(6 puntos)* Para la campaña de verano un banco dispone de 100 millones de euros para créditos a particulares y empresas con las siguientes condiciones: al menos la mitad del dinero disponible debe ser para particulares y el 30% del dinero para particulares junto con el 50% para empresas no debe ser superior a 35 millones de euros. Si el tipo de interés a particulares es del 2% y a empresas del 4%,

i) ¿Cuánto dinero destinará a cada colectivo si pretende maximizar el interés que obtiene de los créditos concedidos?

ii) ¿Aumentarían los beneficios del banco si el porcentaje mínimo destinado a préstamos a particulares se redujera del 50% al 30%?

iii) Si el tipo de interés para las empresas se mantiene en un 4%, ¿cuánto debería aumentar el interés de los préstamos destinados a particulares para que la cantidad destinada a las empresas en el óptimo disminuya?

4. *(10 puntos)* Sean $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2\leq 2,\ x\leq y,\ x\geq -y\}$ y

$$f(x,y)=(x-1)^2+y^2 .$$

i) ¿Cumplen $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ y $(1,1)$ las condiciones de Kuhn-Tucker? Aplicando los teoremas de Kuhn-Tucker, ¿qué podemos concluir sobre ambos puntos?

ii) Utilizando las propiedades extremales de las funciones cóncavas y convexas, encuentra $\max\limits_{(x,y)\in X} f(x,y)$ y todos los puntos en los que se encuentra.

Exámenes resueltos

Examen de Matemáticas IV

Economía. Septiembre de 2009

1. (4 puntos) Usando la clasificación de las formas cuadráticas, demostrar que si $f(x, y) = ax^2 + 2y^2$, $g(x, y) = x^2 - y^2 + 6xy$ y $a > 4$, entonces para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se cumple $f(x, y) \geq g(x, y)$. ¿Se verifica $f(x, y) = g(x, y)$ para algún punto?

Veamos que

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ f(x, y) \geq g(x, y) \Rightarrow f(x, y) - g(x, y) \geq 0$

o lo que es lo mismo:

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) - g(x, y) = ax^2 + 2y^2 - x^2 + y^2 - 6xy = (a - 1)x^2 + 3y^2 - 6xy \geq 0$.

Por lo tanto, la función $f - g$ es una forma cuadrática. Su matriz de representación será:

$$M_{(f-g)} = \begin{pmatrix} a-1 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculamos sus menores principales,

Menores principales de orden 1: $\{a - 1, 3\}$

Menores principales de orden 2: $|M(f - g)| = 3a - 12$.

Para $a > 4$ y $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f - g$ es una forma cuadrática definida positiva, es decir,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ y } a > 4,\ f(x, y) - g(x, y) \geq 0$$

Y por tanto, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $a > 4$, se cumple $f(x, y) \geq g(x, y)$

¿Se verifica $f(x,y) = g(x,y)$ para algún punto?

Como la función $f - g$ es definida positiva, se tiene,

Para todo punto $(x,y) \neq (0,0) \;\rightarrow\; f(x,y) - g(x,y) > 0$ y $f(0,0) - g(0,0) = 0$

Luego, $f(0,0) = g(0,0)$

2. (4 puntos) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable que verifica, $D_{\nabla f(1,1)} f(1,1) = 5$ y $D_{(1,-1)} f(1,1) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ¿Qué valor o valores puede tomar $D_{(1,1)} f(1,1)$?

Al ser la función diferenciable en todos los puntos de $\mathbb{R}^2$, se tiene:

$$D_{\nabla f(1,1)} f(1,1) = D_{(f_1(1,1), f_2(1,1))} f(1,1) = \frac{f_1(1,1) f_1(1,1) + f_2(1,1) f_2(1,1)}{\sqrt{f_1^2(1,1) + f_2^2(1,1)}} = \frac{f_1^2(1,1) + f_2^2(1,1)}{\sqrt{f_1^2(1,1) + f_2^2(1,1)}} = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{f_1^2(1,1) + f_2^2(1,1)} = 5$$

Y por tanto: $f_1^2(1,1) + f_2^2(1,1) = 25$. (1)

Sabiendo que:

$$D_{(1,-1)} f(1,1) = \frac{f_1(1,1) - f_2(1,1)}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow f_1(1,1) - f_2(1,1) = 1 \,. \qquad (2)$$

Además de (1) y (2), dependiendo de cuál sea la función *f*, se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} f_1^2(1,1) + f_2^2(1,1) = 25 \\ f_1(1,1) - f_2(1,1) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f_1^2(1,1) + (f_1(1,1) - 1)^2 = 25 \Rightarrow 2 f_1^2(1,1) - 2 f_1(1,1) - 24 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_1(1,1) = 4,\; f_2(1,1) = 3. \\ f_1(1,1) = -3,\; f_2(1,1) = -4. \end{cases}$$

De donde obtenemos que la derivada direccional de la función *f* en el punto (1,1) podría tomar los valores:

$$D_{(1,1)} f(1,1) = \frac{f_1(1,1) + f_2(1,1)}{\sqrt{2}} = \frac{4+3}{\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}}$$

o

$$D_{(1,1)}f(1,1) = \frac{-3-4}{\sqrt{2}} = -\frac{7}{\sqrt{2}}$$

3. (6 puntos) Para la campaña de verano un banco dispone de 100 millones de euros para créditos a particulares y empresas con las siguientes condiciones: al menos la mitad del dinero disponible debe ser para particulares y el 30% del dinero para particulares junto con el 50% para empresas no debe ser superior a 35 millones de euros. Si el tipo de interés a particulares es del 2% y a empresas del 4%,

i) ¿Cuánto dinero destinará a cada colectivo si pretende maximizar el interés que obtiene de los créditos concedidos?
ii) ¿Aumentarían los beneficios del banco si el porcentaje mínimo destinado a préstamos a particulares se redujera del 50% al 30%?
iii) Si el tipo de interés para las empresas se mantiene en un 4%, ¿cuánto debería aumentar el interés de los préstamos destinados a particulares para que la cantidad destinada a las empresas en el óptimo disminuya?

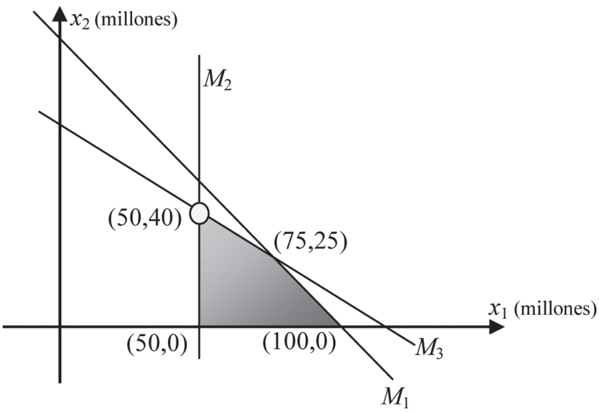
i) ¿Cuánto dinero destinará a cada colectivo si pretende maximizar el interés que obtiene de los créditos concedidos?

Se consideran las variables:

x_1: millones destinado a créditos a particulares

x_2: millones destinado a créditos a empresas

$\max[0,02x_1 + 0,04x_2]$
$M_1 : x_1 + x_2 \leq 100.000.000$
$M_2 : x_1 \geq 50.000.000$
$M_3 : 0,3x_1 + 0,5x_2 \leq 35.000.000$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$



Llamando m_f a la pendiente de las curvas de nivel de la función objetivo y m_1 y m_3 a las pendientes de las rectas correspondientes a las restricciones

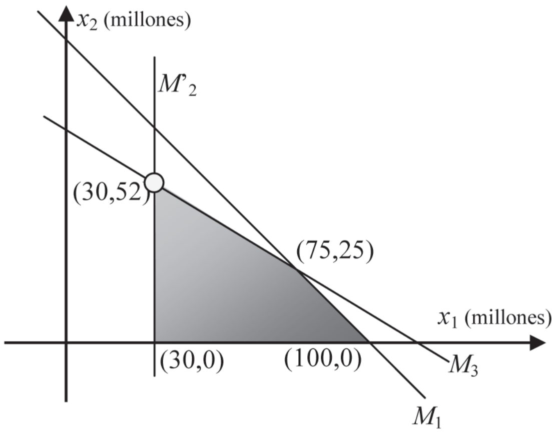
$$-\infty < m_1 = -1 < m_3 = -\frac{3}{5} < 0$$

Se tiene $m_3 < m_f = -\frac{1}{2}$. Teniendo en cuenta las pendientes, obtenemos que la función objetivo alcanza su máximo valor en (50,40).

El óptimo se obtiene destinando 50 millones de euros a particulares y 40 millones a las empresas, obteniendo de esta manera un interés de, 2.600.000€.

ii) ¿Aumentarían los beneficios del banco si el porcentaje mínimo destinado a préstamos a particulares se redujera del 50% al 30%?

Como podemos ver en la siguiente figura, en este caso la solución se alcanza en (30,52) y el interés será de 2,68 millones de euros.



iii) Si el tipo de interés para las empresas se mantiene en un 4%, ¿cuánto debería aumentar el interés de los préstamos destinados a particulares para que la cantidad destinada a las empresas en el óptimo disminuya?

Llamando A al interés de los préstamos a particulares, para que la cantidad destinada a empresas en el óptimo disminuya se tendrá

$$m_f = -\frac{A}{0,04} < m_3 = -\frac{3}{5} \Rightarrow A > 0,024\,.$$

Por tanto, el interés tendrá que ser superior al 2,4%

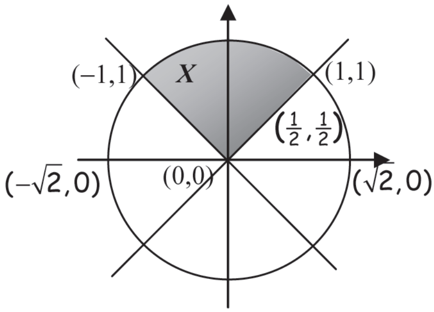
4. (10 puntos) Sean $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leq 2,\ x \leq y,\ x \geq -y\}$ y $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$.

i) ¿Cumplen $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ y $(1,1)$ las condiciones de Kuhn-Tucker? Aplicando los teoremas de Kuhn-Tucker, ¿qué podemos concluir sobre ambos puntos?

ii) Utilizando las propiedades extremales de las funciones cóncavas y convexas, encuentra $\max\limits_{(x,y)\in X} f(x,y)$ y todos los puntos en los que se encuentra.

Escribimos el problema en su forma estándar:

$\max/\min[\,(x-1)^2 + y^2\,]$
$g^1(x,y) = x^2 + y^2 - 2 \leq 0$
$g^2(x,y) = x - y \leq 0$
$g^3(x,y) = -x - y \leq 0$



Las condiciones de Kuhn Tucker para el problema se escriben

$KT1$: $\nabla f(x,y) + \lambda_1 \nabla g^1(x,y) + \lambda_2 \nabla g^2(x,y) + \lambda_3 \nabla g^3(x,y) = (0,0)$

$$\begin{bmatrix} 2x-2 \\ 2y \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x - 2 + 2\lambda_1 x + \lambda_2 - \lambda_3 = 0. \\ 2y + 2\lambda_1 y - \lambda_2 - \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

$KT2$: $\lambda_1 g^1(x,y) = \lambda_1 (x^2 + y^2 - 2) = 0$

$\lambda_2 g^2(x,y) = \lambda_2 (x - y) = 0$

$\lambda_3 g^3(x,y) = \lambda_3 (-x - y) = 0$

$KT3$: $g^1(x,y) = x^2 + y^2 - 2 \leq 0$

$g^2(x,y) = x - y \leq 0$

$g^3(x,y) = -x - y \leq 0$

$KT4$: $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0$ min

$\lambda_1 \leq 0, \lambda_2 \leq 0, \lambda_3 \leq 0$ max

i) ¿Cumplen $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ y $(1,1)$ las condiciones de Kuhn-Tucker? Aplicando los teoremas de Kuhn-Tucker, ¿qué podemos concluir sobre ambos puntos?

Veamos si el punto $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ cumple las condiciones de KT:

KT1: $\begin{cases} -1+\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=0 \\ 1+\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3=0 \end{cases}$

KT2: $\lambda_1 g^1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\lambda_1\left(-\frac{3}{2}\right)=0 \Rightarrow \lambda_1=0$.

$\lambda_2 g^2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\lambda_2 0=0$.

$\lambda_3 g^3\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\lambda_3(-1)=0 \Rightarrow \lambda_3=0$.

Sustituyendo en *KT1*:

$$\left.\begin{array}{l} -1+\lambda_2=0 \\ 1-\lambda_2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_2=1.$$

KT3: $g^1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}\le 0$, $g^2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=0$, $g^3\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=-1\le 0$.

KT4: $\lambda_1=0, \lambda_2=1, \lambda_3=0$

En conclusión, el punto $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ cumple las condiciones de KT de mínimo.

Veamos el punto (1,1):

KT1: $\begin{cases} 2\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=0 \\ 2+2\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3=0 \end{cases}$

KT2: $\lambda_1 g^1(1,1)=\lambda_1 0=0$.

$\lambda_2 g^2(1,1)=\lambda_2 0=0$.

$\lambda_3 g^3(1,1)=\lambda_3(-2)=0 \Rightarrow \lambda_3=0$.

Sustituyendo en *KT1*:

$$\left.\begin{array}{r} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2 + 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{2},\ \lambda_2 = 1 .$$

KT3: $g^1(1,1) = 0$, $g^2(1,1) = 0$, $g^3(1,1) = -2 \le 0$.

KT4: $\lambda_1 = -\frac{1}{2}, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$

En conclusión, el punto (1,1) no cumple las condiciones de KT.

Para aplicar los teoremas de KT hay que comprobar si se cumplen las condiciones de regularidad:

R1: f, g^1, g^2, g^3 diferenciables en $\mathbb{R}^2$.

R2: g^2 y g^3 son lineales luego convexas en $\mathbb{R}^2$

$g^1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$ escribimos su matriz hessiana: $H_{g^1}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Esta matriz es definida positiva, luego g^1 es convexa en $\mathbb{R}^2$.

$$\text{R3:} \quad \begin{cases} g^1(0,\frac{1}{2}) = 0 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 < 0 \\ g^2(0,\frac{1}{2}) = 0 - \frac{1}{2} < 0 \\ g^3(0,\frac{1}{2}) = -0 - \frac{1}{2} < 0 \end{cases}$$

R4: $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, su matriz hessiana será: $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

luego f es convexa en $\mathbb{R}^2$

Se cumplen R1, R2, R3 y R4 (f convexa), por lo tanto, las condiciones de KT son necesarias y suficientes para mínimo. Podemos concluir que el punto $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ es un mínimo y se tiene:

$$\min_{(x,y)\in X} f(x,y) = f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Además, al cumplirse las condiciones R1, R2 y R3, se tiene que, todo óptimo tiene que cumplir necesariamente las condiciones de KT. En conclusión, el punto (1,1) no es óptimo puesto que no cumple las condiciones de KT.

ii) Utilizando las propiedades extremales de las funciones cóncavas y convexas, encuentra $\max\limits_{(x,y)\in X} f(x,y)$ y todos los puntos en los que se encuentra.

ii) Como f es continua y el conjunto X es compacto existe $\max\limits_{(x,y)\in X} f(x,y)$, además, por las propiedades extremales de las funciones cóncavas y convexas sabemos que el máximo se alcanza en un vértice.

Los vértices del conjunto son (-1,1), (0,0), (1,1) y los punto de la frontera de X que pertenecen a la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$.

Utilizamos las condiciones necesarias de extremo local condicionado de f condicionado a $x^2 + y^2 = 2$, para descartar puntos. Para ello, escribimos la función lagrangiana

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = (x-1)^2 + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 2)$$

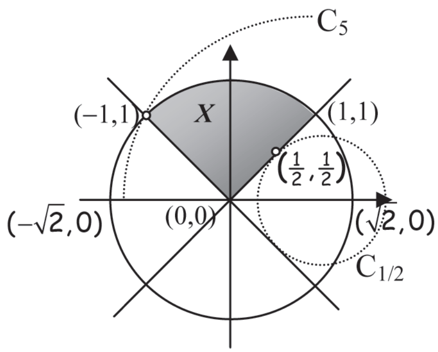
anulamos sus derivadas parciales y resolvemos el sistema

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) &= 2x - 2 + 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) &= 2y + 2\lambda y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) &= x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2y(1+\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ \lambda = -1 \Rightarrow -2 = 0, \textit{no hay} \text{ solución} \end{cases}$$

Como $(\sqrt{2},0) \notin X$, $(-\sqrt{2},0) \notin X$, el máximo se encontrará en los vértices (0,0) ó (-1,1) ya que hemos visto que el punto (1,1) no puede ser óptimo .

Y siendo, $f(0,0) = 1$ y $f(-1,1) = 5$, se tiene:

$$\max_{(x,y)\in X} f(x,y) = f(-1,1) = 5 .$$



Examen de Matemáticas IV

Economía. Junio de 2009

1. (8 puntos) Sea $Q(\boldsymbol{x})$ la forma cuadrática definida por:

$$Q(x, y, z) = ax^2 + 2ay^2 + z^2 + 4xy + 2xz \text{ , con } a \in \mathbb{R} .$$

i) ¿Para qué valores de *a* es $Q(\boldsymbol{x})$ una forma cuadrática definida positiva? ¿Y semidefinida positiva?
ii) ¿Para qué valores de *a* es $Q(\boldsymbol{x})$ una forma cuadrática definida negativa? ¿Y semidefinida negativa?
iii) Para $a = 2$ y utilizando las propiedades extremales de las funciones cóncavas y convexas, determinar el conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / Q(x, y, z) = 0\}$.

i) y ii) Vamos a clasificar la forma cuadrática utilizando el criterio de los menores principales, para ello, escribimos su matriz de representación: $M(Q) = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & 2a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculamos los menores principales de esta matriz en función de *a*:

Menores principales de orden 1: $\{a,\ 2a,\ 1\}$

Menores principales de orden 2: $\{2a^2 - 4,\ a - 1,\ 2a\}$

Menores principales de orden 3: $|M(Q)| = 2a^2 - 2a - 4$.

La forma cuadrática *Q* es **definida positiva** si y sólo si todos los menores principales de M(Q) son positivos, en nuestro caso:

$a > 0$,

$2a^2 - 4 > 0$, ($a > \sqrt{2}$ ó $a < -\sqrt{2}$),

$a-1>0$, ($a>1$)

$2a^2-2a-4=(a+1)(a-2)>0$, ($a<-1$ ó $a>2$).

Por tanto, para $a>2$, Q es definida positiva.

La forma cuadrática Q es **semidefinida positiva** si y sólo si todos los menores principales de M(Q) son mayores o igual a cero y $|M(Q)|=0$, en nuestro caso:

Por tanto, para $a=2$, Q es semidefinida positiva.

Hay un menor de orden 1 positivo, por tanto, no hay ningún valor de a que haga la forma cuadrática Q **definida** o **semidefinida negativa**.

> iii) Para $a=2$ y utilizando las propiedades extremales de las funciones cóncavas y convexas, determinar el conjunto $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, Q(x,y,z)=0\}$.

Para a =2, se tiene $Q(x,y,z)=2x^2+4y^2+z^2+4xy+2xz$, la forma cuadrática es semidefinida positiva, es decir, $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : Q(x,y,z)\geq 0$.

Por tanto, el conjunto a determinar $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, Q(x,y,z)=0\}$ es el conjunto de puntos donde Q alcanza su **mínimo** valor. Para encontrar estos puntos, veamos primero que Q es una función convexa.

Se tiene que $Q\in C^2(\mathbb{R}^3)$ y su matriz hessiana será

$$H_Q(x,y,z)=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Esta matriz es semidefinida positiva, sus menores principales son mayores o igual a cero y $|H_Q(x,y,z)|=0$, por tanto, Q es convexa en $\mathbb{R}^3$.

Utilizando las propiedades extremales de las funciones convexas sabemos que en los puntos donde se anula el gradiente de Q la función alcanza un mínimo.

$$\nabla Q(x,y,z)=(4x+4y+2z,\, 8y+4x,\, 2z+2x)=(0,0,0)\Rightarrow x=-z,\ 2y=z.$$

Por tanto,

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, Q(x,y,z)=0\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x=-z,\ 2y=z\}.$$

2. (6 puntos) Una persona dispone de 9.000€ que desea invertir en dos tipos de bonos A y B. El interés de los bonos de tipo A es de 2% y de los de tipo B 3,5%. Si desea invertir en los de tipo A como mínimo 4.000€ y al menos lo mismo que en los de tipo B,

i) Obtener el capital que se debe invertir en cada tipo de bonos para maximizar el beneficio.

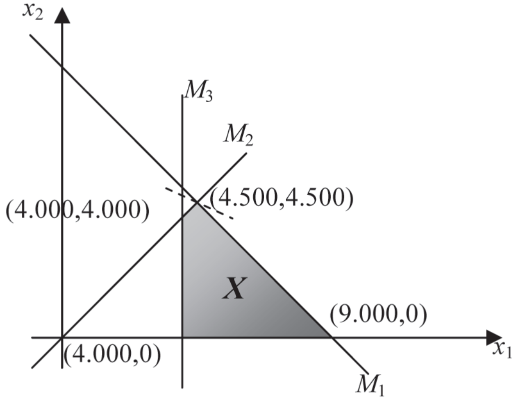
ii) ¿Entre qué valores puede oscilar el interés de los bonos de tipo B sin que cambie la solución anterior?

Consideramos las variables:

x_1 :bonos tipo A

x_2 :bonos tipo B

$\max[0,02x_1 + 0,035x_2]$
$M_1 : x_1 + x_2 \le 9.000$ $M_2 : x_1 \ge x_2$ $M_3 : x_1 \ge 4.000$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$



i) Obtener el capital que se debe invertir en cada tipo de bonos para maximizar el beneficio.

La pendiente de la recta M_1 es -1 y se tiene:

$$-\infty < m_1 = -1 < 0$$

Y siendo la pendiente de las curvas de nivel de la función objetivo $m_f = -\frac{20}{35} > -1$, podemos ver en el gráfico que la solución se alcanza en el punto (4.500, 4.500).

La solución óptima es invertir 4.500€, tanto en bonos tipo A como tipo B, obteniendo unos beneficios de 247,5 €.

ii) ¿Entre qué valores puede oscilar el interés de los bonos de tipo B sin que cambie la solución anterior?

Llamando b al interés de los bonos B, se tiene $m_f = -\dfrac{0,02}{b}$. Y, para que la solución no cambie se tiene:

$$-1 < m_f = -\frac{0,02}{b} < 0 \Rightarrow b > 0,02 .$$

El interés de los bonos B deberá ser mayor del 2%, para que la solución no cambie.

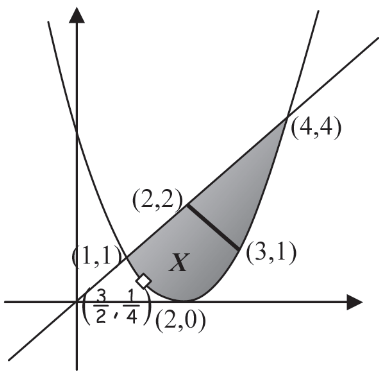
3. (10 puntos) Dada la función $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy - 8x - 8y$, y el conjunto:

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 \leq y \leq x\} ,$$

i) ¿Puede concluirse directamente (examinando *f* y *X*) si *f* alcanza un máximo y un mínimo en *X*?
ii) Obtener el máximo y el mínimo valor de *f* en *X* utilizando los teoremas de Kuhn-Tucker.

i) ¿Puede concluirse directamente (examinando *f* y *X*) si *f* alcanza un máximo y un mínimo en *X*?

f es una función continua y *X* es un conjunto compacto (cerrado y acotado), por tanto, *f* alcanza en *X* el máximo y el mínimo valor.



ii) Obtener el máximo y el mínimo valor de *f* en *X* utilizando los teoremas de Kuhn-Tucker.

Escribimos el problema su forma estándar:

$\max/\min[x^2 + y^2 + 2xy - 8x - 8y]$
$g^1(x,y) = (x-2)^2 - y \le 0$ $g^2(x,y) = y - x \le 0$

Las condiciones de Kuhn Tucker para el problema serán:

$$KT1: \ \nabla f(x,y) + \lambda_1 \nabla g^1(x,y) + \lambda_2 \nabla g^2(x,y) = (0,0)$$

$$\begin{bmatrix} 2x+2y-8 \\ 2y+2x-8 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 2x-4 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x+2y-8+\lambda_1(2x-4)-\lambda_2 = 0 \\ 2y+2x-8-\lambda_1+\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$KT2: \ \lambda_1 g^1(x,y) = \lambda_1((x-2)^2 - y) = 0$$

$$\lambda_2 g^2(x,y) = \lambda_2(y-x) = 0$$

$$KT3: \ g^1(x,y) = (x-2)^2 - y \le 0$$

$$g^2(x,y) = y - x \le 0$$

$$KT4: \ \lambda_1 \ge 0, \lambda_2 \ge 0 \ \min$$

$$\lambda_1 \le 0, \lambda_2 \le 0 \ \max$$

De *KT2* consideremos los casos siguientes:

a) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

b) $\lambda_1 = g^2(x,y) = 0$

c) $\lambda_2 = g^1(x,y) = 0$

d) $g^1(x,y) = g^2(x,y) = 0$

a) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Por *KT1* $\left.\begin{array}{l} 2x+2y-8=0 \\ 2y+2x-8=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \{(x,y) \in X \,/\, x+y=4\} = \overline{(2,2)(3,1)}$.

Estos puntos cumplen las condiciones de KT de máximo y de mínimo.

b) $\lambda_1 = g^2(x,y) = 0$

$$KT1:\ \left.\begin{aligned} 2x+2y-8-\lambda_2 &= 0 \\ 2y+2x-8+\lambda_2 &= 0 \\ y-x &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (2,2) \in X,\ \lambda_2 = 0.$$

c) $\lambda_2 = g^1(x,y) = 0$

$$KT1:\ \left.\begin{aligned} 2x+2y-8+\lambda_1(2x-4) &= 0 \\ 2y+2x-8-\lambda_1 &= 0 \\ (x-2)^2-y &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} (3,1) \in X, \lambda_1 = 0. \\ \left(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{4}\right) \in X, \lambda_1 = -\dfrac{9}{2}. \end{cases}$$

$\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{4}\right)$ con $\lambda_1 = -\dfrac{9}{2}$ y $\lambda_2 = 0$ (KT máximo).

d) $g^1(x,y) = g^2(x,y) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{aligned} (x-2)^2-y &= 0 \\ y-x &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (1,1)$ y $(4,4)$.

Veamos si el punto (1,1) cumple KT:

$$\left.\begin{aligned} -4-2\lambda_1-\lambda_2 &= 0 \\ -4-\lambda_1+\lambda_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{8}{3}, \lambda_2 = \frac{4}{3}.$$

El punto (1,1) no cumple las condiciones de KT.

Veamos si el punto (4,4) cumple KT:

$$\left.\begin{aligned} 8+4\lambda_1-\lambda_2 &= 0 \\ 8-\lambda_1+\lambda_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{16}{3}, \lambda_2 = -\frac{40}{3}.$$

El punto (4,4) con $\lambda_1 = -\dfrac{16}{3}, \lambda_2 = -\dfrac{40}{3}$ cumple las condiciones de KT de máximo.

En resumen se tiene:

Todos los puntos de $\overline{(2,2)(3,1)}$ cumplen las condiciones de KT de mínimo.

Todos los puntos de $\overline{(2,2)(3,1)}$, $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{4}\right)$ y **(4,4)** cumplen las condiciones de KT de máximo

Pasamos ahora a comprobar las condiciones de regularidad para utilizar los teoremas de K-T:

R1: f, g^1 y g^2 diferenciables en $\mathbb{R}^2$ (funciones polinómicas).

R2: g^1 y g^2 son convexas en $\mathbb{R}^2$,

g^2 función lineal y $g^1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$ y, $H_{g^1}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (semidefinida positiva),

luego, g^1 convexa en $\mathbb{R}^2$.

R3: $g^1(2,1) < 0$, $g^2(2,1) < 0$

R4: $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, su matriz hessiana será $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ luego,

f es convexa en $\mathbb{R}^2$.

Entonces, todo punto que cumple las condiciones de KT de mínimo es mínimo del problema.

La función alcanza mínimo en todos los puntos del conjunto $\overline{(2,2)(3,1)}$ y se tiene

$$\min_{(x,y)\in X} f(x,y) = -16 .$$

Como f es contínua y X es compacto, sabemos que f alcanza máximo en X, y el punto o los puntos en los que lo alcanza tienen que cumplir las condiciones de KT de máximo. Evaluamos la función en estos puntos y se tiene:

$$f\left(\frac{3}{2},\frac{1}{4}\right) = -\frac{175}{16} \qquad\qquad f(4,4) = 0$$

El máximo se alcanza en (4,4) y se tiene $\max_{(x,y)\in X} f(x,y) = f(4,4) = 0$.

Examen de Matemáticas IV

Economía. Septiembre de 2008

1. (5 puntos) Sea la siguiente familia de formas cuadráticas;

$$Q_a(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + ax_3^2 + 6x_1x_2 .$$

i) Clasifica la forma cuadrática para todos los valores de a.
ii) Para a=3, ¿existen dos vectores $\boldsymbol{z}$ e $\boldsymbol{y}$ tales que $Q(\boldsymbol{z})>0$ y $Q(\boldsymbol{y})<0$?
iii) Para a=4, sea f una función polinómica cuya matriz hessiana es $\forall(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : H_f(x_1, x_2, x_3) = M(Q_4)$. ¿Qué puede concluirse sobre la concavidad o convexidad de f ?

i) Clasifica la forma cuadrática para todos los valores de a.

Para cada a, escribimos la matriza asociada a la correspondiente forma cuadrática:

$M(Q_a) = \begin{bmatrix} a & 3 & 0 \\ 3 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ y sus menores principales son:

$$\begin{cases} orden\,1: \ \{a, a, a\} \\ orden\,2: \ \{a^2 - 9, \ a^2, \ a^2\} \\ orden\,3: \ a^3 - 9a = a(a^2 - 9) \end{cases}$$

Por lo tanto, siendo $|M(Q_a)| = a(a^2 - 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \pm 3 \end{cases}$ se tiene:

$$\forall a \in \mathbb{R} \begin{cases} a < -3 & \textit{Definida Negativa} \\ a = -3 & \textit{Semidefinida Negativa} \\ -3 < a < 0 & \textit{Indefinida} \\ a = 0 & \textit{Indefinida} \\ 0 < a < 3 & \textit{Indefinida} \\ a = 3 & \textit{Semidefinida Positiva} \\ a > 3 & \textit{Definida Positiva} \end{cases}$$

ii) Para a=3, ¿existen dos vectores $\boldsymbol{z}$ e $\boldsymbol{y}$ tales que $Q(\boldsymbol{z})>0$ y $Q(\boldsymbol{y})<0$?

NO. Para a=3 la forma cuadrática es semidefinida positiva, es decir,

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 : Q(x) \geq 0 \ \wedge \ \exists y \neq 0 / Q(y) = 0$$

por lo que no existe ningún punto donde la forma cuadrática tome valores negativos.

iii) Para a=4, sea f una función polinómica cuya matriz hessiana es $\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : H_f(x_1, x_2, x_3) = M(Q_4)$. ¿Qué puede concluirse sobre la concavidad o convexidad de f?

Para a=4, la forma cuadrática cuya matriz de representación es $M(Q_4), \forall x \in \mathbb{R}^3$ es definida positiva. Entonces, como $\forall x \in \mathbb{R}^3 \ H_f(x) = M(Q_4)$ se tiene que f es estrictamente convexa.

2. (9 puntos) Sean la función $f(x, y) = x + y^2 - 2$ y el recinto

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y^2 \leq x, \ \ x \leq 2 - y, \ \ y \geq 0\}.$$

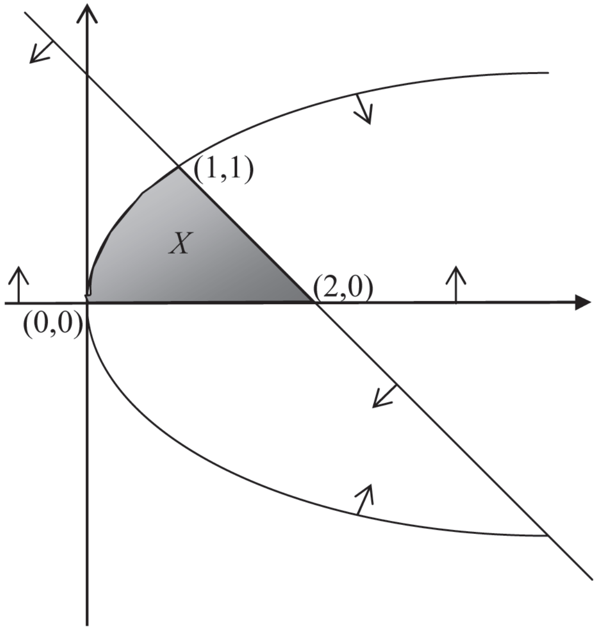
i) ¿Es seguro que la función f alcanza máximo global y mínimo global en X? Si es así, ¿podrá estar alguno de ellos en el interior de X?

ii) Encuentra el punto o puntos que verifican las condiciones de Kuhn-Tucker sólo en el tramo de frontera $\{(x, y) \in X / y^2 = x\}$. ¿Qué podemos concluir sobre ellos?

iii) Utilizando las propiedades extremales de las funciones cóncavas y convexas, encuentra $\max\limits_{(x,y) \in X} f(x, y)$.

i) ¿Es seguro que la función f alcanza máximo global y mínimo global en X? Si es así, ¿podrá estar alguno de ellos en el interior de X?

El recinto X es un conjunto compacto (cerrado y acotado).



La función *f* es continua en todo $\mathbb{R}^2$ y por lo tanto también en *X*, por lo que es seguro que *f* alcanza máximo y mínimo global en *X*.

Para que la función *f* alcance extremo en el interior de *X*, es necesario que se anule el gradiente de *f* en algún punto interior de *X*

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x,y)=1 \\ f_2(x,y)=2y \end{array}\right\} \Rightarrow \nabla f(x,y)=(1,2y)\neq(0,0)$$, el gradiente no se anula en ningún punto, es

seguro, entonces, que los extremos de la función no se encuentran en el interior del conjunto, y por tanto, estarán en la frontera.

ii) Encuentra el punto o puntos que verifican las condiciones de Kuhn-Tucker sólo en el tramo de frontera $\{(x,y)\in X \,/\, y^2=x\}$. ¿Qué podemos concluir sobre ellos?

El problema escrito en forma canónica, es el siguiente:

$\max/\min\left[x+y^2-2\right]$
$g^1(x,y)=-x+y^2\leq 0$ $g^2(x,y)=x+y-2\leq 0$ $g^3(x,y)=-y\leq 0$

Si sólo queremos estudiar el tramo de frontera $\{(x,y)\in X / y^2 = x\}$ tendremos que:

$$g^1(x,y) = -x + y^2 = 0$$
$$g^2(x,y) = x + y - 2 < 0 \qquad \text{y por KT2} \qquad \begin{cases} \lambda_1 g^1(x,y) = 0 \\ \lambda_2 g^2(x,y) = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 g^3(x,y) = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 0 \end{cases}$$
$$g^3(x,y) = -y < 0$$

Escribiendo KT1 para $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ se tiene:

$$\nabla f(x,y) + \lambda_1 \nabla g^1(x,y) = (0,0)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2y \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1 - \lambda_1 = 0 \to \lambda_1 = 1 \\ 2y + \lambda_1 2y = 0 \to y = 0 \end{cases}$$

Para y =0, se tiene: $g^1(x,y) = -x + y^2 = -x = 0 \to x = 0$,

obtenemos un único punto (0,0) que verifica KT1 y KT2. También verifica KT3 puesto que el $(0,0)\in X$ y KT4 de mínimo con $\lambda_1 = 1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0.$

Para poder concluir si este punto es un extremo, es preciso analizar las condiciones de regularidad y así poder utilizar los teoremas de Kuhn-Tucker:

R1.: f, g^1, g^2, g^3 son diferenciables en todo $\mathbb{R}^2$ puesto que son polinómicas.

R2.: g^1, g^2, g^3 son convexas en $\mathbb{R}^2$.

g^2, g^3 son lineales, luego son convexas en $\mathbb{R}^2$ y, siendo $g^1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$ escribimos su matriz hessiana $H_{g^1}(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ es semidefinida positiva, luego g^1 también es convexa en $\mathbb{R}^2$.

R3.: $\exists \overline{x} \in IntX$, por ejemplo el $\overline{x} = (1/2, 1/2)$ en donde las restricciones valen:

$$g^1(\overline{x}) = -1/4 < 0, g^2(\overline{x}) = -1 < 0, g^3(\overline{x}) = -1/2 < 0$$

R4.: la función f es convexa en $\mathbb{R}^2$, puesto que $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ y su matriz hessiana

$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ es semidefinida positiva.

Por lo tanto, las condiciones de Kuhn-Tucker son necesarias para máximo y suficientes para mínimo. Como el punto encontrado verifica las condiciones de Kuhn-Tucker de mínimo entonces es seguro que el (0,0) es el mínimo global.

iii) Utilizando las propiedades extremales de las funciones cóncavas y convexas, encuentra $\max_{(x,y)\in X} f(x,y)$.

El recinto X es convexo y como la función es convexa en X, si f alcanza máximo, al menos uno de ellos será vértice de X, por lo tanto, se encontrará entre los puntos siguientes:

$\{(0,0),(2,0),(1,1)\} \cup \{(x,y)\in X \,/\, y^2 = x\}$.

Como en el tramo de frontera $\{(x,y)\in X \,/\, y^2 = x\}$ no hay ningún punto que pueda ser máximo, sólo quedan los puntos $\{(0,0),(2,0),(1,1)\}$

Sabiendo que el punto (0,0) es un mínimo, el máximo se alcanzará en (2,0) ó (1,1).

Como $f(2,0) = f(1,1) = 0$ ambos puntos son máximos y se tiene que $\max_{(x,y)\in X} f(x,y) = 0$

Siendo fácil comprobar que no puede haber ningún otro punto donde la función alcance el máximo.

3. (6 puntos) Una empresa produce dos productos P_1 y P_2 a partir de tres materias primas M_1, M_2 y M_3. Para producir una tonelada de P_1 necesita 2 toneladas de M_1, 3 de M_2 y 1 tonelada de M_3, mientras que para producir una tonelada de P_2 necesita 3 de M_1, 2 de M_2 y 2 de M_3. La empresa dispone actualmente de 100 toneladas de M_1, 120 de M_2 y 60 de M_3. Vende cada tonelada de P_1 a 400 euros y cada tonelada de P_2 a 500 euros.

i) Plantea y resuelve el problema de programación lineal que maximiza el ingreso.

ii) ¿Entre qué cantidades debe estar el precio de P_2 para que no varíe la solución hallada anteriormente?

iii) Si el coste de M_1 es de 100 € por tonelada, ¿le interesaría a la empresa conseguir más toneladas de esta materia prima?, ¿cuántas?, ¿cuál seria la nueva solución óptima?

i) Plantea y resuelve el problema de programación lineal que maximiza el ingreso.

Consideramos las variables

x_1 : número de Tn de P_1,

x_2 : número de Tn de P_2

$$\max[400x_1 + 500x_2]$$

$$\begin{aligned} M_1 &: 2x_1 + 3x_2 \le 100 \\ M_2 &: 3x_1 + 2x_2 \le 120 \\ M_3 &: x_1 + 2x_2 \le 60 \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

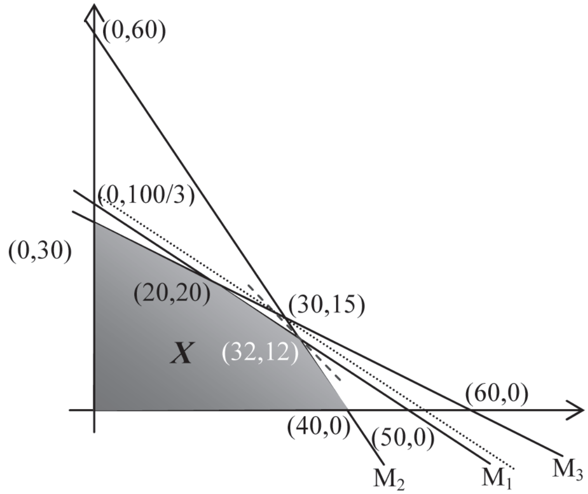
Valorando la función objetivo en los vértices:

$f(40,0)=16.000€$

$\boldsymbol{f(32,12)=18.800€}$

$f(20,20)=18.000€$

$f(0,30) = 15.000€$



Debe producir 32 Tn. de P_1 y 12 Tn. de P_2 obteniendo unos ingresos máximos de 18.800€.

ii) ¿Entre qué cantidades debe estar el precio de P_2 para que no varíe la solución hallada anteriormente?

La pendiente de la función objetivo es $m_f = -\frac{p_1}{p_2} = -\frac{400}{500}$, donde, p_1 es el precio de venta por Tn. de P_1 y p_2 el precio de venta por Tn. de P_2. Para que no varíe la solución óptima encontrada, la pendiente de la función objetivo debe estar comprendida entre las pendientes de las restricciones M_1 y M_2: $m_2 < m_f < m_1$, es decir, $-\frac{3}{2} < -\frac{400}{p_2} < -\frac{2}{3}$

de donde el precio de P_2 debe estar comprendido entre:

$$\frac{800}{3} < p_2 < 600$$

iii) Si el coste de M_1 es de 100 € por tonelada, ¿le interesaría a la empresa conseguir más toneladas de esta materia prima?, ¿cuántas?, ¿cuál seria la nueva solución óptima?

Para maximizar el ingreso se necesita toda la cantidad disponible de M_1: $2 \cdot 32+3 \cdot 12=100$, luego, le interesa disponer de más cantidad de M_1 y así mejorar el óptimo. Al aumentar M_1 la solución pasa al punto (30,15), y se tiene

$$\lambda_1 = \frac{f(30,15) - f(32,12)}{105 - 100} = \frac{19.500 - 18.800}{5} = 140\ € / Tn$$

Le interesaría adquirir como máximo 5 Tn. a un precio inferior a 140 euros por tonelada. La nueva solución óptima sería 30 Tn. de P_1 y 15 Tn. de P_2.

Examen de Matemáticas IV

Economía. Junio de 2008

1. (7 puntos) Sea la familia de funciones: $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 2ayz$, siendo $a \in \mathbb{R}$

i) ¿Para que valores de $a \in \mathbb{R}$, es una forma cuadrática? Clasifícala.
ii) ¿Para que valores de $a \in \mathbb{R}$, es una función cóncava o convexa en $\mathbb{R}^3$?
iii) Para el valor de $a = 3$, ¿Cuál es el valor de $D_{(-3,0,4)} f(1,0,1)$? ¿La dirección $\boldsymbol{v}$ = (-3,0,4) es una dirección de crecimiento de la función?

i) ¿Para que valores de $a \in \mathbb{R}$, es una forma cuadrática? Clasifícala.

Una forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ es una función de la forma $f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j$, con a_{ij} números reales dados para cada $i, j \in \{1,2,3\}$. Por lo que $\forall a \in \mathbb{R}$, *f* es una forma cuadrática y su matriz asociada será:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & a \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix},\ \textit{siendo sus menores principales}: \begin{cases} \textit{orden}\,1 \to \{1,2,1\} \\ \textit{orden}\,2 \to \{1,0,2-a^2\} \\ \textit{orden}\,3 \to -a^2 - 2a - 1 \end{cases}$$

Veamos que valores de *a* anulan su determinante:

$|M(f)| = -a^2 - 2a - 1 = 0 \to a = -1$ que es una raíz doble, luego

$$\forall a \in \mathbb{R} \begin{cases} a < -1 \to \textit{Indefinida} \\ a = -1 \to \textit{Semidefinida Positiva} \\ a > -1 \to \textit{Indefinida} \end{cases}$$

ii) ¿Para que valores de $a \in \mathbb{R}$, es una función cóncava o convexa en $\mathbb{R}^3$?

Como $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$, hallamos su matriz hessiana $H_f(x,y,z)$

$$f_1(x,y,z) = 2x - 2y + 2z \quad \rightarrow \begin{cases} f_{11}(x,y,z) = 2 \\ f_{12}(x,y,z) = -2 \\ f_{13}(x,y,z) = 2 \end{cases}$$

$$f_2(x,y,z) = 4y - 2x + 2az \rightarrow \begin{cases} f_{21}(x,y,z) = -2 \\ f_{22}(x,y,z) = 4 \\ f_{23}(x,y,z) = 2a \end{cases} \qquad \text{luego}$$

$$f_3(x,y,z) = 2z + 2x + 2ay \rightarrow \begin{cases} f_{31}(x,y,z) = 2 \\ f_{32}(x,y,z) = 2a \\ f_{33}(x,y,z) = 2 \end{cases}$$

$$H_f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 2a \\ 2 & 2a & 2 \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta que $H_f(x,y,z) = 2M(f)$ la función no puede ser cóncava. Para el valor de $a = -1$ es convexa puesto que entonces $H_f(x,y,z)$ es semidefinida positiva.

iii) Para el valor de $a = 3$, ¿Cuál es el valor de $D_{(-3,0,4)}f(1,0,1)$? ¿La dirección $\boldsymbol{v}$ = (-3,0,4) es una dirección de crecimiento de la función?

$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 6yz$, como es una función polinómica, es diferenciable y por lo tanto la derivada direccional será:

$$D_{(v_1,v_2,v_3)}f(x,y,z) = \frac{v_1 f_1(x,y,z) + v_2 f_2(x,y,z) + v_3 f_3(x,y,z)}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

sus primeras derivadas en el punto (1,0,1) son:

$$f_1(x,y,z) = 2x - 2y + 2z \rightarrow f_1(1,0,1) = 4$$

$$f_2(x,y,z) = 4y - 2x + 6z \rightarrow f_2(1,0,1) = 4$$

$$f_3(x,y,z) = 2z + 2x + 6y \rightarrow f_3(1,0,1) = 4$$

Para $\boldsymbol{v}$ = (-3,0,4) y $\boldsymbol{x}$=(1,0,1) tendremos:

$$D_{(-3,0,4)}f\left(1,0,1\right)=\frac{-3\cdot 4+0\cdot 4+4\cdot 4}{\sqrt{\left(-3\right)^2+0^2+4^2}}=\frac{4}{5}>0$$

Por lo tanto $\boldsymbol{v}$ = (-3,0,4) **sí** es una dirección de crecimiento de la función en el punto (1,0,1).

2. (16 puntos). Sea la función $f\left(x,y\right)=4x+4y-x^2-y^2$, definida en el recinto

$$X=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2\leq 25 \;\; ; \; 0\leq x\leq y\leq 4\right\}$$

i) Hallar los gradientes de la función en los puntos (0,4) y (3,4). Representarlos gráficamente. ¿Pueden existir extremo de f relativo a X en dichos puntos?
ii) Utilizando las propiedades extremales de las funciones cóncavas y convexas, encontrar el máximo valor de la función f en X y el punto o puntos donde se alcanza, si es que existe dicho valor máximo.
iii) Escribir el problema como un problema de programación no lineal (en forma canónica) señalando la función objetivo y las restricciones.
iv) Comprobar si el punto (0,0) verifica las condiciones de Kuhn-Tucker.
v) Sabiendo que en el tramo de la frontera $Fr(X)=\left\{\left(x,y\right)\in X \,/\, x^2+y^2=25\right\}$ sólo verifican las condiciones de Kuhn-Tucker los puntos $\left(3,4\right)$ y $\left(\frac{5}{\sqrt{2}},\frac{5}{\sqrt{2}}\right)$ ¿Qué podemos concluir sobre el mínimo valor de f en X? En caso de que exista ¿Cuánto vale y dónde se alcanza?

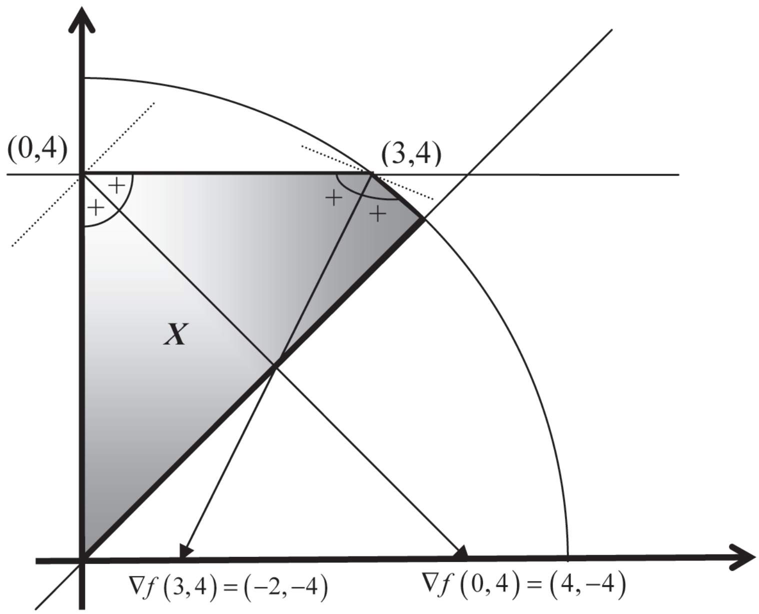
i) Hallar los gradientes de la función en los puntos (0,4) y (3,4). Representarlos gráficamente. ¿Pueden existir extremo de f relativo a X en dichos puntos?

Se tiene $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$, por tanto, existe el gradiente de f en cualquier punto, y se tiene

$$\left.\begin{array}{l} f_1\left(x,y\right)=4-2x \\ f_2\left(x,y\right)=4-2y \end{array}\right\}$$

en el punto (0,4) toman los valores: $\left\{\begin{array}{l} f_1(0,4)=4 \\ f_2(0,4)=-4 \end{array}\right\}\rightarrow \nabla f\left(0,4\right)=\left(4,-4\right)$

en el punto (3,4) toman los valores: $\left\{\begin{array}{l} f_1(3,4)=-2 \\ f_2(3,4)=-4 \end{array}\right\}\rightarrow \nabla f\left(3,4\right)=\left(-2,-4\right)$



Como podemos ver en el gráfico, en dichos puntos, podría haber mínimo local de *f* relativamente a *X*.

ii) Utilizando las propiedades extremales de las funciones cóncavas y convexas, encontrar el máximo valor de la función f en X y el punto o puntos donde se alcanza, si es que existe dicho valor máximo.

El conjunto *X* es compacto (cerrado y acotado) y convexo

La función $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ y sabiendo que *X* es convexo, vamos a hallar $H_f(x,y)$:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x,y) = 4-2x \rightarrow \begin{cases} f_{11}(x,y) = -2 \\ f_{12}(x,y) = 0 \end{cases} \\ f_2(x,y) = 4-2y \rightarrow \begin{cases} f_{21}(x,y) = 0 \\ f_{22}(x,y) = -2 \end{cases} \end{array}\right\} \rightarrow H_f(x,y) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$ es definida negativa, por lo tanto, la función *f* es estrictamente cóncava en *X*.

Siendo la función *f* continua en un *X* compacto, es seguro que existen extremos (máximo y mínimo) de *f* en ***X***.

Como f alcanza máximo en X y es estrictamente cóncava en X el punto donde lo alcanza es único. Además, si $\exists (x,y) \in X$ tal que $\nabla f(x,y) = (0,0)$, dicho punto será máximo global:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x,y) = 4 - 2x = 0 \rightarrow x = 2 \\ f_2(x,y) = 4 - 2y = 0 \rightarrow y = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \nabla f(2,2) = (0,0)$$, luego, el punto (2,2) es máximo global

y el valor máximo es $\max\limits_{(x,y)\in X} f(x,y) = f(2,2) = 8$

iii) Escribir el problema como un problema de programación no lineal (en forma canónica) señalando la función objetivo y las restricciones.

$$\begin{array}{|l|}
\hline
\max/\min \left[4x + 4y - x^2 - y^2 \right] \quad \rightarrow \textit{funcion objetivo} \\
\hline
\left.\begin{array}{ll}
g^1(x,y) = \quad x^2 + y^2 - 25 & \leq 0 \\
g^2(x,y) = -x & \leq 0 \\
g^3(x,y) = \quad x - \ y & \leq 0 \\
g^4(x,y) = \qquad y - 4 & \leq 0
\end{array}\right\} \rightarrow \textit{restricciones} \\
\hline
\end{array}$$

iv) Comprobar si el punto (0,0) verifica las condiciones de Kuhn-Tucker.

KT1 :

$$\nabla f(x,y) + \lambda_1 \nabla g^1(x,y) + \lambda_2 \nabla g^2(x,y) + \lambda_3 \nabla g^3(x,y) + \lambda_4 \nabla g^4(x,y) = (0,0)$$

$$\begin{bmatrix} 4-2x \\ 4-2y \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

KT2 :

$$\lambda_1 g^1(x,y) = \lambda_1 (x^2 + y^2 - 25) = 0$$

$$\lambda_2 g^2(x,y) = \lambda_2 (-x) = 0$$

$$\lambda_3 g^3(x,y) = \lambda_3 (x - y) = 0$$

$$\lambda_4 g^4(x,y) = \lambda_4 (y - 4) = 0$$

KT3 :

$$g^1(x,y) = x^2 + y^2 - 25 \le 0$$
$$g^2(x,y) = -x \le 0$$
$$g^3(x,y) = x - y \le 0$$
$$g^4(x,y) = y - 4 \le 0$$

KT4 :

$$minimo : \lambda_1 \ge 0, \lambda_2 \ge 0, \lambda_3 \ge 0, \lambda_4 \ge 0$$
$$maximo : \lambda_1 \le 0, \lambda_2 \le 0, \lambda_3 \le 0, \lambda_4 \le 0$$

Sustituyendo el punto (0,0) en **KT2,** obtenemos:

$$\lambda_1 g^1(0,0) = \lambda_1(0^2 + 0^2 - 25) = 0 \to \lambda_1 = 0$$
$$\lambda_2 g^2(0,0) = \lambda_2(-0) = 0$$
$$\lambda_3 g^3(0,0) = \lambda_3(0-0) = 0$$
$$\lambda_4 g^4(0,0) = \lambda_4(0-4) = 0 \to \lambda_4 = 0$$

Sustituyendo el punto (0,0) y los valores de λ_1 y λ_4 en **KT1,** se obtiene

$$\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} + \lambda_2\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix} + \lambda_3\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \text{ es decir} \to \begin{cases}4 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \to \lambda_2 = 8 \ge 0\\ 4 - \lambda_3 = 0 \to \lambda_3 = 4 \ge 0\end{cases}$$

KT3 :

$$g^1(0,0) = 0^2 + 0^2 - 25 = -25 \le 0$$
$$g^2(0,0) = -0 = 0 \le 0$$
$$g^3(0,0) = 0 - 0 = 0 \le 0$$
$$g^4(0,0) = 0 - 4 = -4 \le 0$$

KT4 :

$\lambda = 0 \ge 0, \lambda_2 = 4 \ge 0, \lambda_3 = 8 \ge 0, \lambda_4 = 0 \ge 0$ verifica KT4 de mínimo.

v) Sabiendo que en el tramo de la frontera $Fr(X) = \{(x, y) \in X / x^2 + y^2 = 25\}$ sólo verifican las condiciones de Kuhn-Tucker los puntos $(3,4)$ y $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}\right)$ ¿Qué podemos concluir sobre el mínimo valor de f en X? En caso de que exista ¿Cuánto vale y dónde se alcanza?

Para poder concluir sobre estas preguntas, necesitamos conocer si se cumplen las condiciones de regularidad:

R1.: f, g^1, g^2, g^3, g^4 son diferenciables en $\mathbb{R}^2$, puesto que son polinómicas.

R2.: g^1, g^2, g^3, g^4 son convexas en $\mathbb{R}^2$.

g^2, g^3, g^4 son lineales, luego son convexas y $g^1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$ y su matriz hessiana $H_{g^1}(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ es defina positiva luego g^1 también es convexa.

R3.: $\exists \overline{x} \in IntX$, por ejemplo el $\overline{x} = (1,2) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} g^1(\overline{x}) = 1 + 4 - 25 = -20 < 0 \\ g^2(\overline{x}) = -1 < 0 \\ g^3(\overline{x}) = 1 - 2 = -1 < 0 \\ g^4(\overline{x}) = 2 - 4 = -2 < 0 \end{array} \right\}$

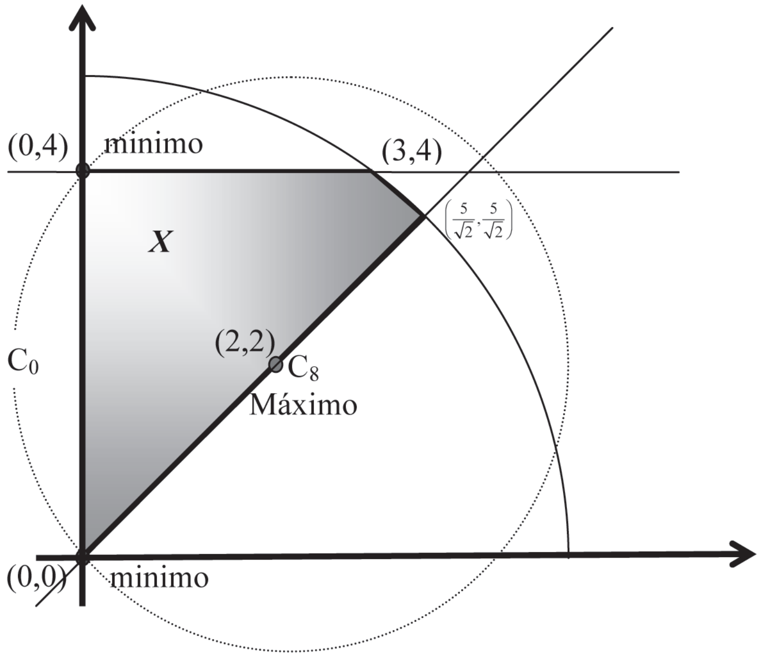
R4.: la función f es estrictamente cóncava (apartado ii)

Por lo tanto, las condiciones de Kuhn-Tucker son suficientes para máximo y sólo son necesarias para mínimo. Hay cuatro puntos que verifican K-T de mínimo y como el problema tiene solución al ser la función continua en un recinto compacto, el mínimo se alcanzará necesariamente en alguno de los cuatro puntos (0,0),(0,4),(3,4) y $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}\right)$

y siendo: $f(0,0) = 0$, $f(0,4) = 0$, $f(3,4) = 3$ y el de $f\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}\right) = \frac{40}{\sqrt{2}} - \frac{50}{2} \cong 3.1$

podemos concluir que el mínimo valor es 0 y se alcanza en los puntos (0,0) y (0,4).

En conclusión:



$$\forall (x,y) \in X : 0 = \min_{(x,y)\in X} f(x,y) = f(0,0) = f(0,4) \leq f(x,y) \leq f(2,2) = \max_{(x,y)\in X} f(x,y) = 8$$

3. (7 puntos). Una compañía escocesa fabrica dos tipos de whisky de calidades distintas en función de las calidades de tres tipos de malta: M_1, M_2 y M_3 utilizadas para su fabricación. Del tipo de base M_1 dispone de 36 unidades, del tipo normal M_2 dispone de 25 unidades mientras que de la de mayor calidad M_3 sólo dispone de 8 unidades. Para la obtención de una unidad del whisky normal necesita utilizar 6 unidades del tipo de base M_1 y 5unidades del tipo normal M_2. Para la obtención de una unidad del whisky de mayor calidad necesita utilizar 6 unidades del tipo de base M_1 y 4 unidades del tipo de mayor calidad M_3.Por razones de la demanda necesita fabricar como mínimo tantas unidades del whisky normal como del whisky de mayor calidad. El precio en el mercado de cada tipo de whisky es de 20€ para el normal y 30€ para el de mayor calidad.

i) Encontrar la producción de los dos tipos de whisky que maximiza los ingresos.
ii) ¿Entre qué valores puede oscilar el precio del whisky normal para que no se modifique la solución encontrada?
iii) Sabiendo que en el mercado el precio de la malta de mayor calidad M_3 es de 3€/unidad ¿le interesaría comprarla para aumentar la producción?

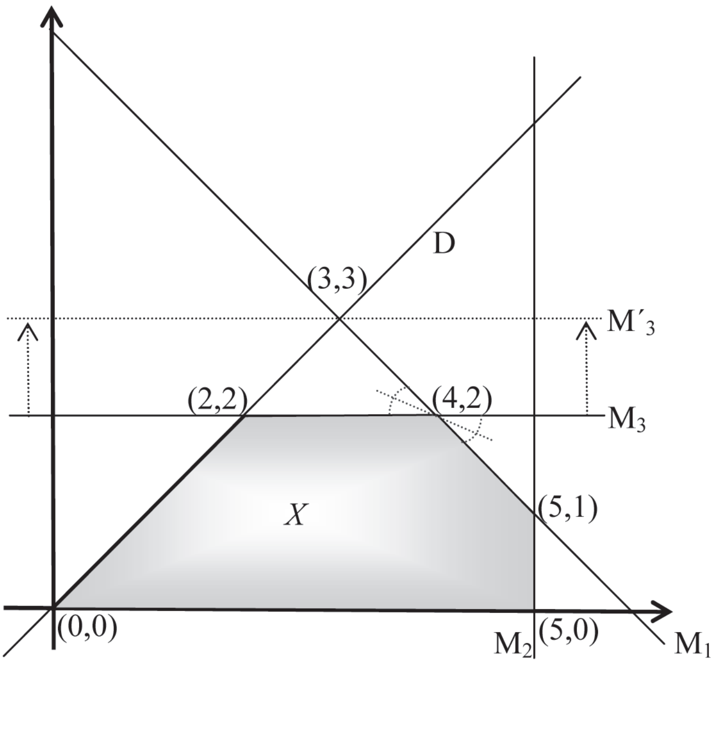
i) Encontrar la producción de los dos tipos de whisky que maximiza los ingresos.

Consideramos las variables:

x_1 : número de unidades del tipo normal

x_2 : número de unidades del tipo de mayor calidad

$\max\left[20x_1 + 30x_2\right]$
$M_1: \ 6x_1 + 6x_2 \leq 36$ $M_2: \ 5x_1 \leq 25$ $M_3: \ 4x_2 \leq 8$ $D: \ x_1 - x_2 \geq 0$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$



$f(0,0) = 0€$

$f(2,2) = 100€$

$f(4,2) = 140€$

$f(5,1) = 130€$

$f(5,0) = 100€$

El óptimo se obtiene en el punto (4,2) y su valor es de f(4,2)=140€. La producción óptima es por tanto, 4 unidades de tipo normal y 2 unidades del tipo de mayor calidad, siendo el beneficio de 140€.

ii) ¿Entre qué valores puede oscilar el precio del whisky normal para que no se modifique la solución encontrada?

Para que no se modifique la solución óptima obtenida, la pendiente de la función objetivo tiene que estar comprendida entre las pendientes de las restricciones M_1 y M_3

$$m_1 = -1 < m_f = \frac{-c_1}{30} < 0 = m_3 \rightarrow 0 < c_1 < 30 .$$

Es decir, el precio del whisky normal no debe llegar a 30€

iii) Sabiendo que en el mercado el precio de la malta de mayor calidad M_3 es de 3€ unidad ¿le interesaría comprarla para aumentar la producción?

La malta M_3 se agota para producir el óptimo: 4·2=8, luego en función de su precio puede interesar comprar más y así mejorar el óptimo.

Debemos obtener el precio sombra de la materia prima M_3

$$\overline{x} = (4,2) \rightarrow \overline{x}' = (3,3) \qquad f(3,3) = 150€$$

$$M_3(3,3) = 12 = 8 + 4$$

$$\lambda_3 = \frac{f(3,3) - f(4,2)}{12-8} = \frac{150-140}{4} = 2,5€ / unidad$$

No le interesa comprar, puesto que si lo compra a 3€ por unidad perderá dinero, ya que el precio máximo al que le interesaría comprar es de 2,5€ por unidad.

Examen de Matemáticas IV

Economía. Septiembre de 2007

1. (9 puntos) Sea la familia de funciones $f(x, y) = ax^2 + (a+b)y^2 + 2axy + 2$, siendo $a, b \in \mathbb{R}$

i) ¿Para que valores de $a, b \in \mathbb{R}$, es una forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$?

ii) ¿Para que valores de $a, b \in \mathbb{R}$, es una función convexa en $\mathbb{R}^2$?
¿Para que valores de $a, b \in \mathbb{R}$, es una función estrictamente cóncava en $\mathbb{R}^2$?

iii) Para los valores de $a = 1,\ b = 0$, utilizando las propiedades extremales de las funciones cóncavas y convexas, encuentra los puntos dónde la función alcanza los valores máximo y mínimo de f en $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0, y - x \leq 1, x + y \leq 1\}$ y cuáles son esos valores.

i) ¿Para que valores de $a, b \in \mathbb{R}$, es una forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$?

Una forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$ es una función de la forma $f(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_i x_j$, con a_{ij} números reales dados para cada $i, j \in \{1, 2\}$.

La función $f(x, y) = ax^2 + (a+b)y^2 + 2axy + 2$, tiene término independiente , igual a 2, luego no es forma cuadrática para todo *a* y *b*.

ii) ¿Para que valores de $a, b \in \mathbb{R}$, es *f* una función convexa en $\mathbb{R}^2$?
¿Para que valores de $a, b \in \mathbb{R}$, es *f* una función estrictamente cóncava en $\mathbb{R}^2$?

Se tiene que, $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ *f* será **convexa** si en todo punto la matriz hessiana de f es definida o semidefinida positiva. Buscamos la matriz hessiana de *f*,

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x,y)=2ax+2ay \\ \\ f_2(x,y)=2(a+b)y+2ax \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} f_{11}(x,y)=2a \\ f_{12}(x,y)=f_{21}(x,y)=2a \\ f_{22}(x,y)=2(a+b) \end{cases} \Rightarrow H_f(x,y)=\begin{bmatrix} 2a & 2a \\ 2a & 2(a+b) \end{bmatrix}$$

Escribimos los menores principales de esta matriz

menores principales de orden 1: $\{2a, 2(a+b)\}$,

menor principal de orden 2**:** $|H_f(x,y)| = 4ab$ **,**

por lo tanto, $H_f(x,y)$ será definida o semidefinida positiva cuando los menores de orden 1 sean mayores a igual a 0 y el de orden 2 igual a 0,

$2a \geq 0, 2(a+b) \geq 0$,

$|H_f(x,y)| = 4ab = 0$

En conclusión: $\begin{cases} a=0 \rightarrow b \geq 0 \\ b=0 \rightarrow a \geq 0 \end{cases}$

f será **estrictamente cóncava** si en todo punto la matriz hessiana de *f* es definida negativa, por lo tanto, los menores de orden 1: $2a < 0, 2(a+b) < 0$,

y el de orden 2 mayor que cero $|H_f(x,y)| = 4ab > 0$

En conclusión: $a < 0 \ y \ b < 0$

iii) Para los valores de $a=1,\ b=0$, utilizando las propiedades extremales de las funciones cóncavas y convexas, encuentra los puntos dónde la función alcanza los valores máximo y mínimo de f en $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0, y-x \leq 1, x+y \leq 1\}$ y cuáles son esos valores.

Para los valores de $a=1,\ b=0$ se tiene $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy + 2$ que por el apartado ii) sabemos que es convexa. Como el recinto *X* es compacto y la función es continua, existen los extremos globales de dicha función en *X*. Además, como *f* es convexa en $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0, y-x \leq 1, x+y \leq 1\}$ convexo, la función alcanzará su valor mínimo en los puntos del recinto que anulen el gradiente:

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} f_1(x,y) = 2x+2y = 0 \\ f_2(x,y) = 2y+2x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = -y,$$

por lo tanto, la función alcanzará su valor mínimo en todos los puntos del recinto $(\overline{x},\overline{y}) \in X$ *tal que* $x = -y$ es decir, en los puntos

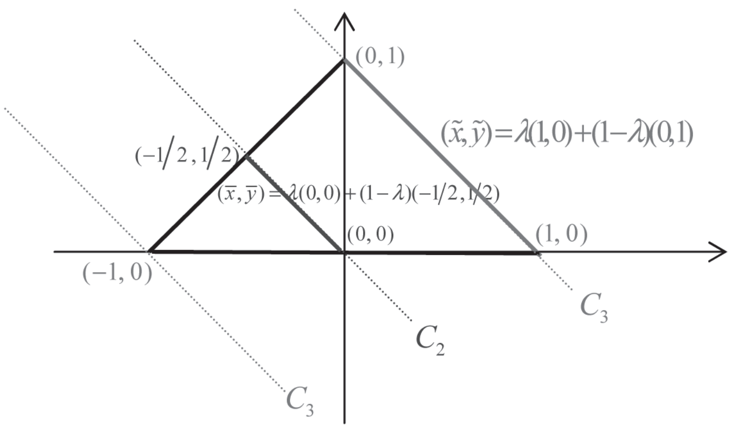
$$(\overline{x},\overline{y}) = \lambda(-1/2, 1/2) + (1-\lambda)(0,0) = (-1/2\lambda, 1/2\lambda) \ \forall\lambda \in [0,1]$$

siendo su valor: $\min\limits_{(x,y)\in X} f(x,y) = f(\overline{x},\overline{y}) = 2$.

El valor máximo se alcanzará al menos en un vértice del recinto convexo. Los vértices de X son los puntos $\{(1,0),(0,1),(-1,0)\}$, el valor de la función en dichos puntos es $f(1,0) = f(0,1) = f(-1,0) = 3$, por lo tanto, en los tres vértices se alcanzará el valor máximo. Además, también se alcanzará en todos los puntos del tramo de la frontera comprendido entre los vértices (1,0) y (0,1) puesto que pertenecen a la curva de nivel 3 de la función, es decir, también se alcanzará el valor máximo en los puntos combinación lineal convexa de ambos puntos, (ver figura)

En conclusión, el máximo se alcanza en

$(-1,0)$ y en $(\tilde{x},\tilde{y}) = \lambda(1,0) + (1-\lambda)(0,1) \ \forall\lambda \in [0,1]$



$$\forall (x,y) \in X : 2 \le f(x,y) \le 3$$

2. (10 puntos). Sea la función $f(x,y) = (x-2)^2 + y^2$ definida en $\mathbb{R}^2$ y el conjunto $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y^2 - x \le 1 \ ; \ y^2 + x \le 1\}$.

i) ¿Es seguro que la función f alcanza máximo global y mínimo global en X? Si es así, ¿podrá estar alguno de ellos en el interior de X?
ii) Encuentra todos los puntos que cumplen las condiciones de Kuhn-Tucker.
iii) Encuentra los valores $\max\limits_{(x,y)\in X} f(x,y)$ y $\min\limits_{(x,y)\in X} f(x,y)$, y los puntos donde se alcanzan. Razona la respuesta.

i) ¿Es seguro que la función f alcanza máximo global y mínimo global en X? Si es así, ¿podrá estar alguno de ellos en el interior de X?

Como la función f es continua (por ser polinómica) en $\mathbb{R}^2$ y el conjunto es un compacto (por ser cerrado y acotado), es seguro que la función alcanza valores extremos globales en puntos del recinto X.

Para que se encuentren en el interior es necesario que se anule el gradiente de f en algún punto del interior de X, por lo tanto:

$$\nabla f(x,y)=(0,0)\rightarrow\left\{\begin{array}{l} f_1(x,y)=2x-4=0 \\ f_2(x,y)=2y=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} x=2 \\ y=0\end{array}\right\}\quad \textit{pero}\ \ (2,0)\notin \textit{IntX}\ \ \text{luego no}$$

hay extremos en el interior, por lo que necesariamente se encuentran en la frontera de X.

ii) Encuentra todos los puntos que cumplen las condiciones de Kuhn-Tucker.

El problema en su forma canónica:

$\max/\min\left[(x-2)^2+y^2\right]$
$g^1(x,y)=y^2-x-1\leq 0$ $g^2(x,y)=y^2+x-1\leq 0$

$$KT1:\ \nabla f(x,y)+\lambda_1\nabla g^1(x,y)+\lambda_2\nabla g^2(x,y)=(0,0)$$

$$\begin{bmatrix}2x-4\\ 2y\end{bmatrix}+\lambda_1\begin{bmatrix}-1\\ 2y\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}1\\ 2y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$KT2:\ \lambda_1 g^1(x,y)=\lambda_1(y^2-x-1)=0$$

$$\lambda_2 g^2(x,y)=\lambda_2(y^2+x-1)=0$$

$$KT3:\ g^1(x,y)=y^2-x-1\leq 0$$

$$g^2(x,y)=y^2+x-1\leq 0$$

$$KT4:\ \lambda_1\geq 0,\lambda_2\geq 0\ \min$$

$$\lambda_1\leq 0,\lambda_2\leq 0\,\max$$

De *KT2* pueden presentarse cuatro posibilidades:

$i)\ \ (x,y)\in \textit{IntX}=\left\{(x,y)\in X\,/\,g^1(x,y)<0,g^2(x,y)<0\right\}\Rightarrow\lambda_1=0,\lambda_2=0$

$ii)\ (x,y)\in Fr_1X=\left\{(x,y)\in X\,/\,g^1(x,y)=0,g^2(x,y)<0\right\}\Rightarrow g^1(x,y)=0,\lambda_2=0$

$iii)(x,y)\in Fr_2X=\left\{(x,y)\in X\,/\,g^1(x,y)<0,g^2(x,y)=0\right\}\Rightarrow\lambda_1=0,g^2(x,y)=0$

$iv)\,(x,y)\in Fr_3X=\left\{(x,y)\in X\,/\,g^1(x,y)=0,g^2(x,y)=0\right\}\Rightarrow g^1(x,y)=0,g^2(x,y)=0$

Analizando los cuatro casos posibles obtenemos:

i) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$

$KT1:\ \nabla f(x,y) + 0\nabla g^1(x,y) + 0\nabla g^2(x,y) = (0,0)$

$$\begin{bmatrix} 2x-4 \\ 2y \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} -1 \\ 2y \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 1 \\ 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-4 \\ 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 2x-4=0 \\ 2y=0 \end{Bmatrix} \rightarrow (2,0)$$

$$\left.\begin{aligned} KT3:\ g^1(2,0) &= y^2 - x - 1 = -3 < 0 \\ g^2(2,0) &= y^2 + x - 1 = 1 > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (2,0) \notin X$$

ii) $g^1(x,y) = 0, \lambda_2 = 0$

$KT1:\ \nabla f(x,y) + \lambda_1 \nabla g^1(x,y) + 0\nabla g^2(x,y) = (0,0)$

$$\begin{bmatrix} 2x-4 \\ 2y \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x - 4 - \lambda_1 = 0 \xrightarrow{\lambda_1 = -1} x = 3/2 \rightarrow g^1(3/2, y) = y^2 - 3/2 - 1 = 0 \rightarrow y = \pm\sqrt{5/2} \\ 2y(1+\lambda_1) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \rightarrow g^1(x,0) = -x-1 = 0 \Rightarrow (-1,0), \lambda_1 = -6 \\ \lambda_1 = -1 \end{cases} \end{cases}$$

Por lo tanto de *KT1* y *KT2* se obtienen tres puntos: $(-1,0)$ *con* $\lambda_1 = -6 < 0,\ \lambda_2 = 0$, y los puntos $(3/2, \sqrt{5/2})$, $(3/2, -\sqrt{5/2})$ *con* $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 0$.

Siguiendo con *KT3* sólo el punto $(-1,0) \in X : g^1(-1,0) = 0,\ g^2(-1,0) = -2 < 0$ pertenece a *X*, mientras que los otros dos puntos no pertenecen al conjunto de soluciones factibles:

$$g^2(3/2, \sqrt{5/2}) = 3 > 0,\ g^2(3/2, -\sqrt{5/2}) = 3 > 0$$

Acabando con *KT4* el punto $(-1,0)$ *con* $\lambda_1 = -6 < 0,\ \lambda_2 = 0$ verifica *KT4* de máximo.

$iii)\,\lambda_1 = 0, g^2(x,y) = 0$

$KT1:\ \nabla f(x,y) + 0\nabla g^1(x,y) + \lambda_2 \nabla g^2(x,y) = (0,0)$

$$\begin{bmatrix} 2x-4 \\ 2y \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x - 4 + \lambda_2 = 0 \xrightarrow{\lambda_2 = -1} x = 5/2 \rightarrow y^2 + 5/2 - 1 = 0 \Rightarrow y = \pm\sqrt{-3/2} \notin \mathbb{R} \\ 2y(1+\lambda_2) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \rightarrow g^2(x,0) = x - 1 = 0 \Rightarrow (1,0), \lambda_2 = 2 \\ \lambda_2 = -1 \ \textit{no hay solucion} \end{cases} \end{cases}$$

Por lo tanto, de *KT1* y *KT*2 se obtiene un punto: $(1,0)$ *con* $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2 > 0$.

Siguiendo con *KT3* el punto $(1,0) \in X : g^1(1,0) = -2 < 0, g^2(1,0) = 0$.

Acabando con *KT4* el punto $(1,0)\, con\, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2 > 0$ verifica *KT4* de mínimo.

$iv)$ $g^1(x,y) = 0, g^2(x,y) = 0$, es decir, los puntos $(0,1), (0-1)$

Para el punto $(0,1)$ *KT1* queda:

$KT1:\ \nabla f(0,1) + \lambda_1 \nabla g^1(0,1) + \lambda_2 \nabla g^2(0,1) = (0,0)$

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\left.\begin{cases} -4 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases}\right\} \rightarrow \lambda_1 = -\tfrac{5}{2} < 0, \lambda_2 = \tfrac{3}{2} > 0$$

Luego el punto $(0,1)$ no verifica *KT4*.

Para el punto $(0,-1)$ *KT1* queda:

$KT1:\ \nabla f(0,-1) + \lambda_1 \nabla g^1(0,-1) + \lambda_2 \nabla g^2(0,-1) = (0,0)$

$$\begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\left.\begin{cases} -4 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -2 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \end{cases}\right\} \rightarrow \lambda_1 = -\tfrac{5}{2} < 0, \lambda_2 = \tfrac{3}{2} > 0$$

Luego el punto $(0,-1)$ no verifica $KT4$.

En resumen, sólo hay dos puntos que verifican todas las condiciones de Kuhn-Tucker, uno de mínimo: $(1,0)$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2 > 0$ y otro de máximo: $(-1,0)$, $\lambda_1 = -6 < 0$, $\lambda_2 = 0$.

> iii) Encuentra los valores $\max\limits_{(x,y)\in X} f(x,y)$ y $\min\limits_{(x,y)\in X} f(x,y)$, y los puntos donde se alcanzan. Razona la respuesta.

Para poder concluir algo necesitamos conocer si se cumplen las condiciones previas de regularidad:

R1.: f, g^1, g^2 son diferenciables en todo el plano puesto que son polinómicas.

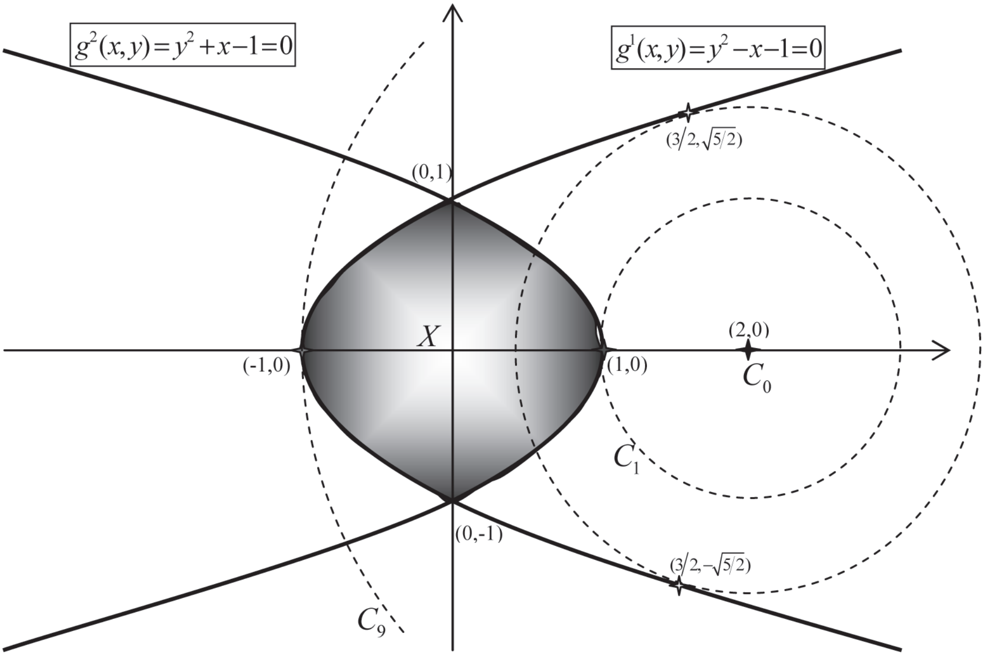
R2.: g^1, g^2 son convexas en todo el plano.

$g^1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$ y su matriz hessiana $H_{g^1}(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ es semidefinida positiva luego g^1 es convexa, $g^2 \in C^2(\mathbb{R}^2)$ y su matriz hessiana $H_{g^2}(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ es semidefinida positiva luego g^2 también es convexa.

R3.: $\exists \overline{x} \in IntX$, por ejemplo el $\overline{x} = (0,0) \to \begin{Bmatrix} g^1(\overline{x}) = 0 - 0 - 1 = -1 < 0 \\ g^2(\overline{x}) = 0 + 0 - 1 = -1 < 0 \end{Bmatrix}$

R4.: la función $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ y su matriz hessiana $H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ es definida positiva luego es estrictamente convexa.

Por lo tanto, las condiciones de Kuhn- Tucker son suficientes para mínimo y sólo son necesarias para máximo. Sólo hay dos puntos que verifican K-T, uno de mínimo y otro de máximo y como el problema tiene solución al ser la función continua en un recinto compacto (apartado i)), dichos puntos serán el mínimo y el máximo:



$$\min_{(x,y)\in X} f(x,y) = f(1,0) = 1 \leq f(x,y) \leq 9 = f(-1,0) = \max_{(x,y)\in X} f(x,y)$$

3. (6 puntos) Una empresa automovilística produce dos tipos de vehículos: coches y furgonetas, de los cuales obtiene un beneficio de 4.000 y 5.000 euros respectivamente. El proceso de fabricación requiere que cada vehículo pase por tres divisiones distintas de la factoría. Los coches necesitan 1, 3 y 1 horas respectivamente en las divisiones A, B y C, mientras las furgonetas requieren 2, 1 y 3 horas respectivamente en las divisiones A, B y C. Las divisiones A y B trabajan un máximo de 16 y 18 horas diarias respectivamente mientras la tercera trabaja como mínimo 9 horas diarias.

i) Encuentra la producción óptima diaria si la empresa se propone maximizar el beneficio.
ii) ¿Cuál debería ser el beneficio por coche si la empresa se planteara producir únicamente furgonetas?
iii) Bajo las condiciones iniciales, si la empresa pudiera aumentar una hora de trabajo diario en sólo una de las divisiones que tiene, ¿cuál elegiría?

i) Encuentra la producción óptima diaria si la empresa se propone maximizar el beneficio.

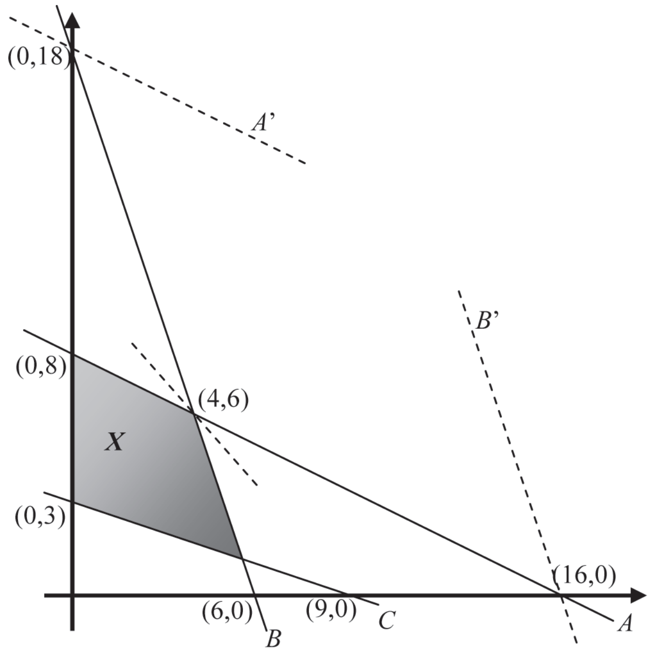
Consideramos las variables

x_1: número de coches .

x_2: número de furgonetas.

El problema a resolver será el siguiente:

$\max[4.000x_1 + 5.000x_2]$
$A: x_1 + 2x_2 \leq 16$ $B: 3x_1 + x_2 \leq 18$ $C: x_1 + 3x_2 \geq 9$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$



Valorando la función objetivo en los vértices:

f(0,8)=40.000€

f(0,3)=15.000€

f(45/8,9/8)=28.125€

***f*(4,6)=46.000€**

La producción óptima diaria será producir 4 coches y 6 furgonetas obteniendo unos beneficios máximos de 46.000€.

ii) ¿Cuál debería ser el beneficio por coche si la empresa se planteara producir únicamente furgonetas?

La pendiente de las curvas de nivel de la función objetivo es $m_f = -\frac{b_C}{b_F} = -\frac{4.000}{5.000}$ donde, b_C es el beneficio por coche y b_F el beneficio por furgoneta. Si se plantea producir sólo furgonetas, la solución óptima se desplazará del punto (4,6) al punto (0,8) y por lo tanto $m_f > m_A$

$$m_f = -\frac{b_C}{5.000} > -\frac{1}{2} = m_A \Rightarrow \frac{b_C}{5.000} < \frac{1}{2} \Rightarrow b_C < 2.500€$$

El beneficio por coche debe ser inferior a 2.500€.

iii) Bajo las condiciones iniciales, si la empresa pudiera aumentar una hora de trabajo diario en sólo una de las divisiones que tiene, ¿cuál elegiría?

Las horas de trabajo disponible se agotan en las divisiones A y B, veamos si en estas divisiones podría tener interés aumentar las horas de trabajo y en este caso cual elegiría.

Para la división A.

A: $x_1+2x_2 \leq 16+a$

El óptimo pasa de (4,6) a (0,18)

$a=0 \rightarrow a=20$

$$\lambda_A = \frac{f(0,18) - f(4,6)}{20} = \frac{90.000 - 46.000}{20} = \mathbf{2.200\ €/h}$$

En esta división puede aumentar 20 de trabajo con lo que el óptimo pasaría a 90.000€ y podría pagar la hora a menos de **2.200€/hora.**

Para la división B.

B: $3x_1+x_2 \leq 18+b$

El óptimo pasa de (4,6) a (16,0)

$b=0 \rightarrow b=30$

$$\lambda_B = \frac{f(16,0) - f(4,6)}{30} = \frac{64.000 - 46.000}{30} = \mathbf{600€/h}$$

En esta división puede aumentar 30h de trabajo con lo que el óptimo pasaría a 64.000€ y podría pagar la hora a menos de **600€/hora.**

Elegiría la primera de las tres divisiones, la división *A* puesto que obtendría un mayor incremento del beneficio

Examen de Matemáticas IV

Economía. Junio de 2007

1. (7 puntos) Sea la familia de funciones $f(x,y) = x^2 + y^2 + axy + bx + cy$, siendo $a,b,c \in \mathbb{R}$

i) ¿Para que valores de $a,b,c \in \mathbb{R}$, es una forma cuadrática?

ii) ¿Para que valores de $a,b,c \in \mathbb{R}$, es una función cóncava, convexa o estrictamente convexa?

iii) ¿Para que valores de $a,b,c \in \mathbb{R}$, se verifica que $f(1,1) = 2$ y $\nabla f(1,1) = (2,-2)$?

iv) Sabiendo que $\nabla f(1,1) = (2,-2)$ ¿Cuál es el valor de $D_{(-3,4)} f(1,1)$?
¿La dirección $\boldsymbol{v}$ = (-3,4) es una dirección de crecimiento de la función?

i) ¿Para que valores de $a,b,c \in \mathbb{R}$, es una forma cuadrática?

La expresión general de una forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$ es $f(x_1,x_2) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_ix_j$, con a_{ij} números reales dados para cada $i,j \in \{1,2\}$.

Por tanto, para $b = c = 0$ $f(x,y) = x^2 + y^2 + axy$ es una forma cuadrática $\forall a, \in \mathbb{R}$.

ii) ¿Para que valores de $a,b,c \in \mathbb{R}$, es una función cóncava, convexa o estrictamente convexa?

$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ y su matriz Hessiana será:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x,y)=2x+ay+b \\ \\ f_2(x,y)=2y+ax+c \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} f_{11}(x,y)=2 \\ f_{12}(x,y)=f_{21}(x,y)=a \\ f_{22}(x,y)=2 \end{array}\right. \Rightarrow H_f(x,y)=\begin{bmatrix} 2 & a \\ a & 2 \end{bmatrix}$$ luego sus menores principales son:

Menores de orden 1: {2>0, 2>0}

Menores de orden 2 **:** $\left|H_f(x,y)\right|=4-a^2$

Por lo tanto, para $a=\pm 2$, $\left|H_f(x,y)\right|=0 \Rightarrow H_f(x,y)$ es semidefinida positiva, luego la función es convexa.

Si $a\in(-2,2)$, $\left|H_f(x,y)\right|>0 \Rightarrow H_f(x,y)$ es definida positiva, luego la función es estrictamente convexa.

Si $a\in(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$, $\left|H_f(x,y)\right|<0 \Rightarrow H_f(x,y)$ es indefinida.

Por lo tanto, $\forall b,c\in\mathbb{R}$, la función sólo puede ser convexa si $a=\pm 2$ y estrictamente convexa si $a\in(-2,2)$ y nunca puede ser cóncava.

iii) ¿Para que valores de $a,b,c\in\mathbb{R}$, se verifica que $f(1,1)=2$ y $\nabla f(1,1)=(2,-2)$?

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} f(1,1)=2+a+b+c=2 \\ f_1(1,1)=2+a+b=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad c=0 \\ f_2(1,1)=2+a+c=-2 \xrightarrow{c=0} a=-4 \end{array}\right\} \rightarrow b=4$$

iv) Sabiendo que $\nabla f(1,1)=(2,-2)$ ¿Cuál es el valor de $D_{(-3,4)}f(1,1)$?
¿La dirección ***v*** = (-3,4) es una dirección de crecimiento de la función?

$$D_{(-3,4)}f(1,1)=\frac{-3f_1(1,1)+4f_2(1,1)}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}=\frac{-3\cdot 2+4\cdot(-2)}{\sqrt{25}}=-\frac{14}{5}<0$$

La dirección (-3,4) no es de crecimiento sino de decrecimiento puesto que la derivada direccional es negativa

2. (16 puntos). Sea la función $f\left(x,y\right)=x^2+y^2-2xy+2x-2y$, definida en el recinto

$$X=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2\leq 25 \ \ ; \ x\geq 0\right\}$$

i) Hallar los gradientes de la función en los puntos (0,-5) y (0,5). Representarlos gráficamente. ¿Pueden existir algún tipo de extremo en dichos puntos?

ii) Utilizando las propiedades extremales de las funciones cóncavas y convexas, encontrar el mínimo valor de la función f en X y el punto o puntos donde se alcanza, si es que existe dicho valor mínimo.

iii) Comprobar si los puntos (0,-5) y (0,5) verifican las condiciones de Kuhn-Tucker.

iv) ¿Qué puntos del tramo de la frontera $FrX=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2=25 \ \ ; \ x>0\right\}$ verifican las condiciones de Kuhn-Tucker?

v) ¿Qué podemos concluir sobre el máximo valor de f en X? En caso de que exista ¿Cuánto vale y dónde se alcanza?

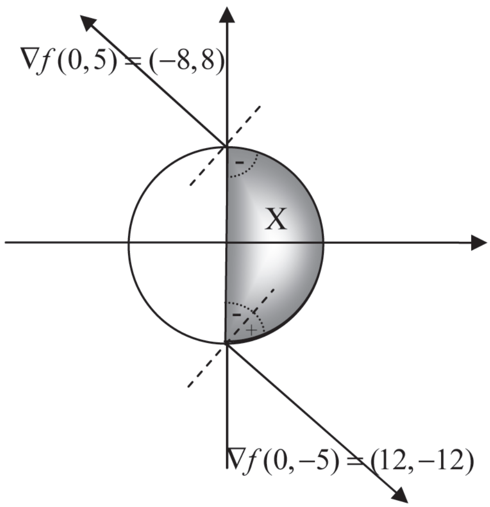
i) Hallar los gradientes de la función en los puntos (0,-5) y (0,5). Representarlos gráficamente. ¿Pueden existir algún tipo de extremo en dichos puntos?

La función $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$, por lo que existe el gradiente de *f* en cualquier punto, y se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x,y)=2x-2y+2 \\ f_2(x,y)=2y-2x-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \nabla f(x,y)=(2x-2y+2\,,2y-2x-2)$$

Entonces, se tiene: $\nabla f(0,-5)=(12,-12)$ y $\nabla f(0,5)=(-8,8)$

Como podemos ver en el gráfico, en (0,5) la función *f* podría alcanzar un máximo mientras que en el punto (0,-5) no hay ningún tipo de extremo.



ii) Utilizando las propiedades extremales de las funciones cóncavas y convexas, encontrar el mínimo valor de la función *f* en *X* y el punto o puntos donde se alcanza, si es que existe dicho valor mínimo.

Estudio del recinto: *X* es compacto (cerrado y acotado) y es convexo con infinitos vértices Los vértices de *X* son los punto del conjunto:

$$\{(0,5),(0,-5)\} \cup \{(x,y) \in X \,/\, x^2 + y^2 = 25, x > 0\}$$

Estudio de la función: *f* es continua en todo el plano y como el recinto es un compacto, es seguro que existen extremos globales de *f* en *X*.

Siendo $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ y como X es convexo, hallamos la matriz hessiana de *f* en X :

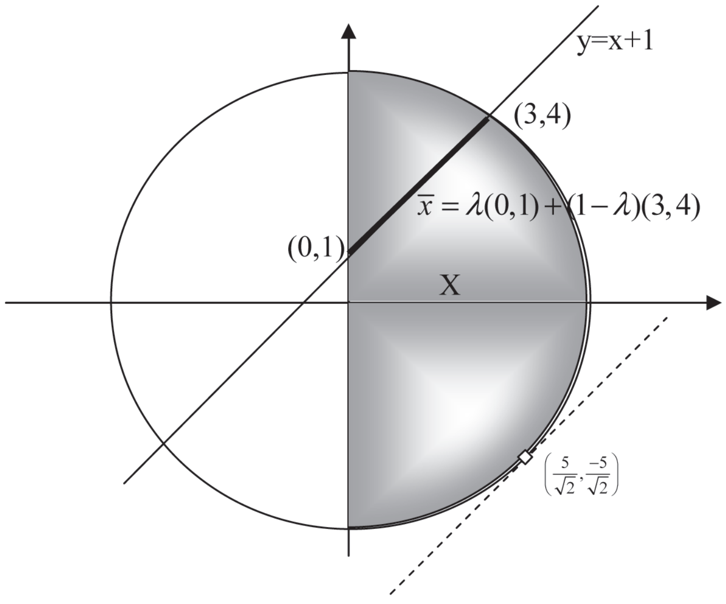
$$\left.\begin{array}{l} f_1(x,y) = 2x - 2y + 2 \\ \\ f_2(x,y) = 2y - 2x - 2 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} f_{11}(x,y) = 2 \\ f_{12}(x,y) = f_{21}(x,y) = -2 \\ f_{22}(x,y) = 2 \end{array}\right. \Rightarrow H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Vemos que la matriz hessiana de *f* es semidefinida positiva y por lo tanto *f* será **convexa** en *X*.

Comprobamos si existe algún punto del recinto que anule el gradiente de la función:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x,y) = 2x - 2y + 2 = 0 \\ f_2(x,y) = 2y - 2x - 2 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow y = x + 1$$ por lo tanto, todos los puntos de esta recta que pertenezcan al recinto serán mínimos globales de *f* en *X*, puesto que si la función es convexa es condición suficiente que se anule el gradiente en un punto para que en ese punto haya mínimo.

$$f(\overline{x}) = \min_{(x,y)\in X} f(x,y) = -1 \text{ y se alcanza en } \overline{x} = \lambda(0,1) + (1-\lambda)(3,4) \quad , \forall \lambda \in [0,1]$$



iii) Comprobar si los puntos (0,-5) y (0,5) verifican las condiciones de Kuhn-Tucker.

El problema de programación no lineal escrito en forma canónica es el siguiente:

$\max/\min\left[x^2+y^2-2xy+2x-2y\right]$
$g^1(x,y)=x^2+y^2-25\le 0$ $g^2(x,y)=-x\le 0$

Las condiciones de Kuhn-Tucker para este problema son:

KT1 :

$$\nabla f(x,y)+\lambda_1\nabla g^1(x,y)+\lambda_2\nabla g^2(x,y)=(0,0)$$

$$\begin{bmatrix}2x-2y+2\\2y-2x-2\end{bmatrix}+\lambda_1\begin{bmatrix}2x\\2y\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

KT2 :

$$\lambda_1 g^1(x,y)=\lambda_1(x^2+y^2-25)=0$$

$$\lambda_2 g^2(x,y)=\lambda_2(-x)=0$$

KT3 :

$$g^1(x,y)=x^2+y^2-25\le 0$$

$$g^2(x,y)=-x\le 0$$

KT4 :

$$minimo:\lambda_1\ge 0,\lambda_2\ge 0$$

$$maximo:\lambda_1\le 0,\lambda_2\le 0$$

En el punto (0,-5) serán:

KT3 :

$$g^1(0,-5)=0+25-25=0$$

$$g^2(0,-5)=0=0$$

KT2 :

$$\lambda_1 g^1(0,-5)=\lambda_1(0+25-25)=0$$

$$\lambda_2 g^2(0,-5)=\lambda_2(0)=0$$

KT1 :

$$\nabla f(0,-5)+\lambda_1\nabla g^1(0,-5)+\lambda_2\nabla g^2(0,-5)=(0,0)$$

$$\begin{bmatrix}12\\-12\end{bmatrix}+\lambda_1\begin{bmatrix}0\\-10\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}12-\lambda_2=0\\-12-\lambda_1 10=0\end{cases}$$

KT4 :

$$\lambda_1=-1,2<0,\lambda_2=12>0$$

Por lo tanto el punto **(0,-5) no verifica** las condiciones de Kuhn-Tucker.

En el punto (0,5) serán:

KT3 :

$$g^1(0,5)=25+0-25=0$$

$$g^2(0,5)=0=0$$

KT2 :

$$\lambda_1 g^1(0,5)=\lambda_1(25+0-25)=0$$

$$\lambda_2 g^2(0,5)=\lambda_2(0)=0$$

KT1 :

$$\nabla f(0,5)+\lambda_1\nabla g^1(0,5)+\lambda_2\nabla g^2(0,5)=(0,0)$$

$$\begin{bmatrix}-8\\8\end{bmatrix}+\lambda_1\begin{bmatrix}0\\10\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}-8-\lambda_2=0\\8+\lambda_1 10=0\end{cases}$$

KT4 :

$$\lambda_1=-0,8<0,\lambda_2=-8<0$$

Por lo tanto el punto **(0,5) verifica** las condiciones de Kuhn-Tucker de **máximo**.

iv) ¿Qué puntos del tramo de la frontera $FrX=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x^2+y^2=25\ ;\ x>0\right\}$ verifican las condiciones de Kuhn-Tucker?

KT2 :

$$\lambda_1 g^1(x,y)=\lambda_1(x^2+y^2-25=0)=0$$

$$\lambda_2 g^2(x,y)=\lambda_2(-x<0)=0\rightarrow\lambda_2=0$$

KT1 :

$$\nabla f(x,y)+\lambda_1 \nabla g^1(x,y)=(0,0)$$

$$\begin{bmatrix} 2x-2y+2 \\ 2y-2x-2 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\left. \begin{cases} 2x-2y+2+2\lambda_1 x=0 \\ 2y-2x-2+2\lambda_1 y=0 \end{cases} \right\} \rightarrow 2\lambda_1 (x+y)=0 \rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ \lambda_1=0 \end{cases}$$

$$\text{Si } x+y=0 \rightarrow x^2+y^2-25=0 \Rightarrow \begin{cases} \overline{x}_1=\left(\dfrac{5}{\sqrt{2}},\dfrac{-5}{\sqrt{2}}\right) \in X, \lambda_1=-2-\dfrac{2\sqrt{2}}{5}<0 \\ \overline{x}_2=\left(\dfrac{-5}{\sqrt{2}},\dfrac{5}{\sqrt{2}}\right) \notin X \end{cases}$$

Si $\lambda_1=0 \rightarrow y=x+1 \rightarrow x^2+y^2-25=0 \Rightarrow \overline{x}_3=(3,4)\in X$, $\overline{x}_4=(-4,-3)\notin X$

KT3:

De los cuatro puntos que verifican KT1 sólo dos pertenecen al recinto y por lo tanto verifican KT3

$$\overline{x}_1=\left(\frac{5}{\sqrt{2}},\frac{-5}{\sqrt{2}}\right) \text{, es decir } \left\{ \begin{array}{l} g^1(\overline{x}_1)=\dfrac{25}{2}+\dfrac{25}{2}-25=0 \\ g^2(\overline{x}_1)=-\dfrac{5}{\sqrt{2}}<0 \end{array} \right\}$$

y el punto

$$\overline{x}_3=(3,4) \text{, es decir } \left\{ \begin{array}{l} g^1(\overline{x}_3)=9+16-25=0 \\ g^2(\overline{x}_3)=-3<0 \end{array} \right\}$$

KT4:

$\begin{array}{l} \textit{minimo}: \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0 \\ \textit{maximo}: \lambda_1 \leq 0, \lambda_2 \leq 0 \end{array}$ por lo tanto de todos los puntos del tramo de frontera estudiado sólo dos verifican las condiciones de Kuhn-Tucker:

$\overline{x}_1=\left(\dfrac{5}{\sqrt{2}},\dfrac{-5}{\sqrt{2}}\right)$ *con* $\lambda_1<0, \lambda_2=0$ de **máximo.** y

$\overline{x}_3=(3,4)$ *con* $\lambda_1=0, \lambda_2=0$ de **máximo** y de **mínimo.**

v) ¿Qué podemos concluir sobre el máximo valor de *f* en *X*? En caso de que exista ¿Cuánto vale y dónde se alcanza?

Para poder concluir sobre estas preguntas necesitamos conocer si se cumplen las condiciones previas de regularidad:

R1.: f, g^1, g^2 son diferenciables en todo el plano puesto que son polinómicas.

R2.: g^1, g^2 son convexas en todo el plano.

g^2 es lineal, luego es convexa y $g^1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$ y su matriz hessiana $H_{g^1}(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ es defina positiva luego g^1 también es convexa.

R3.: $\exists \overline{x} \in IntX$, por ejemplo el $\overline{x} = (1,0) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} g^1(\overline{x}) = 1 + 0 - 25 = -24 < 0 \\ g^2(\overline{x}) = -1 < 0 \end{array} \right\}$

R4.: la función f es convexa (apartado ii)

Entonces las condiciones de Kuhn-Tucker son suficientes para mínimo y sólo son necesarias para máximo. Sólo hay dos puntos que verifican K-T de máximo y como el problema tiene solución al ser la función continua en un recinto compacto, el máximo se alcanzará necesariamente en alguno de los dos puntos $(0,5), \left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{-5}{\sqrt{2}} \right)$

Siendo el valor de la función en estos puntos

$f(0,5) = 15$

$$f\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{-5}{\sqrt{2}} \right) = \frac{25}{2} + \frac{10}{\sqrt{2}} = \frac{25 + 10\sqrt{2}}{2}$$

En conclusión, el máximo valor de *f* en *X* es $\frac{25 + 10\sqrt{2}}{2}$ y se alcanza en $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{-5}{\sqrt{2}} \right)$.

3. (7 puntos). Una entidad financiera dispone de 12 millones de euros para la adquisición de acciones en bolsa de Iberdrola y Telefónica. El dividendo anual de las primeras es del 12% mientras que el de las segundas es del 8%. En esta situación, la entidad desea invertir en acciones de Iberdrola por lo menos tanto capital como en acciones de Telefónica. También decide invertir por lo menos 3 millones de euros en acciones de Telefónica, pero no más de 8 millones de euros en acciones de Iberdrola.

i) Encontrar la distribución de capital de los dos tipos de acciones que maximiza los beneficios.

ii) ¿Entre qué valores puede oscilar el dividendo anual de las acciones de Iberdrola para que no se modifique la solución encontrada?

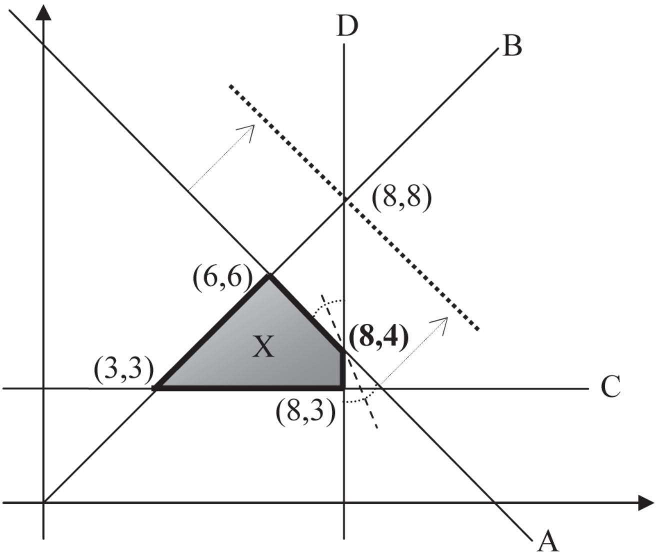
iii) Si quisiera invertir más de 12 millones y tuviera que pedir un crédito, ¿qué cantidad máxima le interesaría pedir y cuál sería el interés que estaría dispuesto a pagar por el crédito?

Consideramos las variables

x_1 : capital en acciones de Iberdrola,

x_2 : capital en acciones de Telefónica.

i) Encontrar la distribución de capital de los dos tipos de acciones que maximiza los beneficios.



$$\max \left[0,12x_1 + 0,08x_2 \right]$$

$A: \; x_1 + x_2 \leq 12$

$B: \; x_1 \geq x_2$

$C: \; x_2 \geq 3$

$D: \; x_1 \leq 8$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Valorando la función objetivo en los vértices:

$$f(3,3) = 0,6$$
$$f(6,6) = 1,2$$
$$f(8,4) = 1,28$$
$$f(8,3) = 1,2$$

$$-\infty = m_D < m_f = -4/3 < m_A = -1$$

El óptimo se alcanza en el punto (8,4), es decir, el máximo se alcanza invirtiendo 8 millones en acciones de Iberdrola y 4 millones en acciones de Telefónica, obteniendo un beneficio de 1,28 millones de euros.

ii) ¿Entre qué valores puede oscilar el dividendo anual de las acciones de Iberdrola para que no se modifique la solución encontrada?

Para que no se modifique la solución, se debe dar $m_D = -\infty < m_f = -c_1 / 0,08 < m_A = -1$ luego $c_1 > 0{,}08$, es decir los dividendos podrían bajar hasta el 8%.

iii) Si quisiera invertir más de 12 millones y tuviera que pedir un crédito, ¿qué cantidad máxima le interesaría pedir y cuál sería el interés que estaría dispuesto a pagar por el crédito ?

En el óptimo se ha invertido el total de la cantidad disponible, si puede disponer de más millones el nuevo óptimo se podrá desplazar alcanzar el punto (8,8) y se tiene:

$A: 8+8 = 16 = 12+4$ millones de euros.

El valor de la función en el nuevo óptimo sería de $f(8,8) = 1,6$ millones de euros, por tanto

el precio sombra $\lambda_A = \dfrac{f(8,8) - f(8,4)}{16-12} = \dfrac{1,6-1,28}{16-12} = \dfrac{0,32}{4} = 0,08$

Pediría un crédito de 4 millones de euros como máximo, siempre que el interés sea inferior al 8%

Examen de Matemáticas IV

Economía. Septiembre de 2006

1. (7 puntos) Sea la forma cuadrática $Q(x, y, z) = ax^2 + bz^2 + 2yz + cy^2$. Encuentra los valores de $a,b,c \in \mathbb{R}$ para los cuales Q es semidefinida negativa.

La matriz de representación de Q es $M(Q) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & c & 1 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}$

Y sus menores principales,

Menores principales de orden 1:{ a, c, b}

Menores principales de orden 2:{ ac, ab, cb-1}

Menores principales de orden 3: $|M(Q)|=acb-a=a(cb-1)$.

Para que Q sea semidefinida negativa, el determinante de la matriz M(Q) tiene que ser cero, los menores principales de M(Q) de orden impar tienen que ser menores o igual a cero y los de orden par mayores o igual a cero. Por tanto:

Menores de orden 1 : $\{a \leq 0,\ c \leq 0,\ b \leq 0\}$

Menores de orden 2 : $\{ac \geq 0,\ ab \geq 0,\ cb \geq 1\}$

Menor de orden 3 :$|M(Q)|=0 \Longrightarrow a(cb-1)=0$

Entonces se tiene: si $a(cb - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} Si\ a = 0,\ c < 0,\ b < 0\ y\ cb\ \geq 1 \\ Si\ cb = 1\ y\ a\ \leq 0,\ c < 0,\ b < 0 \end{cases}$

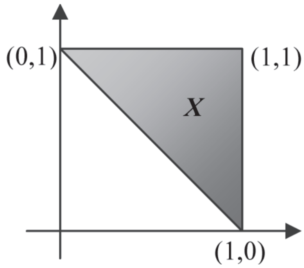
2. (8 puntos) Sea la función $f(x, y) = \ln(x + y)$ y el conjunto X formado por todas las combinaciones lineales convexas de los puntos (1,0), (1,1) y (0,1). Utilizando las propiedades extremales de las funciones convexas y cóncavas junto con el gradiente de *f*, encuentra los extremos de *f* en *X* indicando todos los puntos en los que se alcanzan.

La función *f* está definida en: $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x + y > 0\right\}$.

Se tiene $f \in C^2(E)$ y $X \subset E$

Además, *f* es continua en el compacto *X*, por tanto,

$\exists \max\limits_{(x,y)\in X} f(x, y)$ y $\exists \min\limits_{(x,y)\in X} f(x, y)$



La matriza hesssiana de *f* en E es: $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{(x+y)^2} & -\dfrac{1}{(x+y)^2} \\ -\dfrac{1}{(x+y)^2} & -\dfrac{1}{(x+y)^2} \end{pmatrix}$

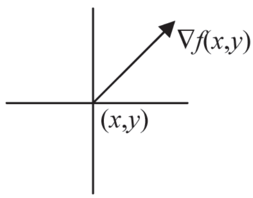
$\forall x \in E$, $H_f(x, y)$ es semidefinida negativa, por tanto, *f* es cóncava en E.

En los puntos en los que $\nabla f(x,y)=(0,0)$, *f* alcanza máximo:

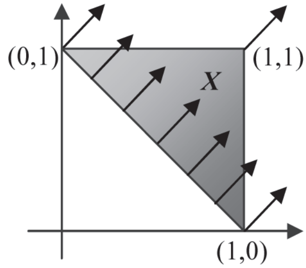
$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{1}{x+y}, \frac{1}{x+y} \right) \neq (0, 0)$$

Siendo el gradiente de la función distinto de cero en todos los puntos, los extremos de *f* en *X* se encuentran en la frontera de *X*.

Utilizamos el gradiente de la función en *X* para encontrar los extremos.



Sabiendo que *f* alcanza el máximo y el mínimo en *X* y teniendo en cuenta la dirección del gradiente de *f* en *X* se tiene que



El máximo se alcanza en el (1,1) y su valor es ln2 : $\max\limits_{(x,y)\in X} f(x,y) = f(1,1) = \ln 2$

$\min\limits_{(x,y)\in X} f(x,y) = \ln 1 = 0$ y lo alcanza en todos los puntos del segmento $\overline{(1,0)(0,1)}$

3. (10 puntos) Sean $f(x,y) = x^2 + 10x + y^2$ y $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y^2 - 4 \le x \le 5\}$.

i) Comprueba que los puntos (-4,0) y (5,0) cumplen las condiciones de Kuhn-Tucker de *f* en *X*.

ii) Utilizando los teoremas de Kuhn-Tucker, ¿qué podemos concluir acerca de los puntos del apartado anterior?

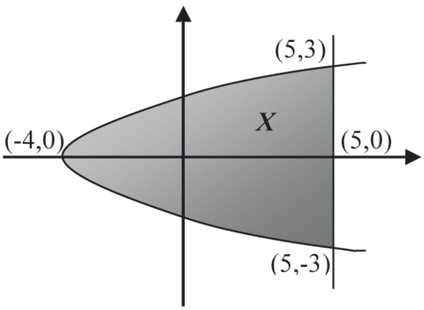
iii) Sabiendo que los únicos puntos que verifican KT son, además de los anteriores, el (5,3) y el (5,-3), encuentra el máximo de *f* en *X* (razona suficientemente la respuesta).

i) Comprueba que los puntos (-4,0) y (5,0) cumplen las condiciones de Kuhn-Tucker de *f* en *X*.

Planteamos el problema de programación no lineal:

$\max/\min[x^2 + 10x + y^2]$
$g^1(x,y) = y^2 - x - 4 \le 0$
$g^2(x,y) = x - 5 \le 0$

Los gradientes de las funciones serán: $\nabla f(x,y)=(2x+10,2y)$; $\nabla g^1(x,y)=(-1,2y)$; $\nabla g^2(x,y)=(1,0)$.



Condiciones de Kuhn-Tucker:

$$KT1:\ \nabla f(x,y)+\lambda_1\nabla g^1(x,y)+\lambda_2\nabla g^2(x,y)=(0,0)$$

$$\begin{bmatrix}2x+10\\2y\end{bmatrix}+\lambda_1\begin{bmatrix}-1\\2y\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}2x+10-\lambda_1+\lambda_2=0\\2y+2y\lambda_1=0\end{cases}$$

$$KT2:\ \lambda_1 g^1(x,y)=\lambda_1(y^2-x-4)=0$$

$$\lambda_2 g^2(x,y)=\lambda_2(x-5)=0$$

$$KT3:\ g^1(x,y)=y^2-x-4\le 0$$

$$g^2(x,y)=x-5\le 0$$

$$KT4:\ \lambda_1\ge 0,\lambda_2\ge 0\ \text{min}$$

$$\lambda_1\le 0,\lambda_2\le 0\ \text{max}$$

Punto (-4,0) :

$KT2$: $g^1(-4,0)=0$ y $g^2(-4,0)=-9<0$, entonces, $\lambda_2=0$.

$KT1$: $(2,0)+\lambda_1(-1,0)+\lambda_2(1,0)=(0,0)\Rightarrow 2-\lambda_1=0\Rightarrow\lambda_1=2$.

$KT3$: $(-4,0)\in X$

$KT4$: $\lambda_1=2>0$ y $\lambda_2=0$ .por lo tanto el punto (-4,0) verifica KT de mínimo

Punto (5,0) :

$KT2$: $g^1(5,0)=-9<0$ y $g^2(5,0)=0$, entonces, $\lambda_1=0$.

$KT1$: $(20,0)+\lambda_1(-1,0)+\lambda_2(1,0)=(0,0)\Rightarrow 20+\lambda_2=0\Rightarrow\lambda_2=-20$.

$KT3$: $g^1(-4,0)\le 0$, $g^2(-4,0)\le 0$

$KT4$: $\lambda_1=0$ y $\lambda_2=-20<0$ por lo tanto el punto (5,0) verifica KT de máximo

ii) Utilizando los teoremas de Kuhn-Tucker, ¿qué podemos concluir acerca de los puntos del apartado anterior?

Para utilizar los teoremas de KT necesitamos comprobar las condiciones de regularidad:

$R1$: f, g^1, g^2 diferenciables en $\mathbb{R}^2$

$R2$: $g^1, g^2\in C^2(\mathbb{R}^2)$): $H_{g^1}(x,y)=\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}$,

g^1 es convexa en $\mathbb{R}^2$ y g^2 es lineal luego convexa en $\mathbb{R}^2$.

$$R3: \quad \begin{array}{l} g^1(0,0) = 0-0-4 < 0 \\ g^2(0,0) = 0-5 < 0 \end{array}.$$

$R4$: $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, f es convexa en $\mathbb{R}^2$.

Por los teoremas de KT se tiene:

Para un problema de mínimo se cumplen las condiciones R1, R2, R3 y R4, por tanto, las condiciones de KT son necesarias y suficientes para mínimo luego el punto (-4,0) es mínimo de *f* en *X*.

Para un problema de máximo se cumplen las condiciones R1, R2 y R3 por tanto, las condiciones de KT sólo son necesarias para que un punto sea máximo del problema por lo que no podemos afirmar que el punto (5,0) sea un máximo de *f* en *X*..

iii) Sabiendo que los únicos puntos que verifican KT son, además de los anteriores, el (5,3) y el (5,-3), encuentra el máximo de *f* en *X* (razona suficientemente la respuesta).

La función *f* es continua y *X* es compacto, luego *f* alcanza su máximo valor en *X*, además, como hemos indicado anteriormente, para que un punto haya máximo necesariamente tiene que verificar las condiciones de KT. Evaluamos la función en los puntos que verifican KT y se tiene:: *f*(5,0)=75, *f*(5,3)=84, *f*(5,-3)=84.

De donde: $\max\limits_{(x,y)\in X} f(x,y) = f(5,3) = f(5,-3) = 84$

4. (5 puntos) Dos servicios médicos tienen asignados 10 médicos y 6 médicos respectivamente; cada médico atiende como máximo a 10 pacientes y el coste de cada paciente es de 10€/día y 20€/día respectivamente. Si el presupuesto total diario de ambos servicios es de 1800€,

i) Encuentra la asignación diaria de pacientes en cada servicio que maximice el número de personas atendidas.

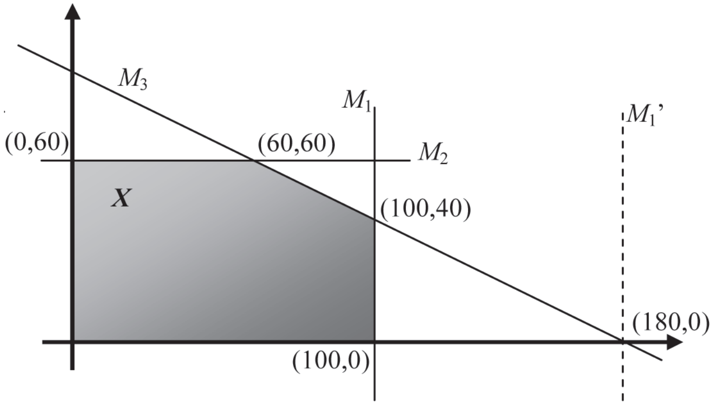
ii) Si el primer servicio quisiera ampliar el número de pacientes atendidos, ¿cuántos médicos debería contratar para atender al máximo de aquellos?

Consideramos las variables,

x_1:nº de pacientes del servicio 1,

x_2:nº de pacientes del servicio 2,

$\max[x_1 + x_2]$
$M_1 : x_1 \leq 100$ $M_2 : x_2 \leq 60$ $M_3 : 10x_1 + 20x_2 \leq 1800$
$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$



i) Encuentra la asignación diaria de pacientes en cada servicio que maximice el número de personas atendidas.

El valor de la función objetivo en los vértices del conjunto será:

$f(0,0)=0$

$f(0,60)=60$

$f(60,60)=120$

$\boldsymbol{f(100,40)=140}$

$f(100,0)=100$

Solución óptima es de 140 pacientes y se obtiene atendiendo a 100 pacientes del servicio 1 y 40 del 2.

ii) Si el primer servicio quisiera ampliar el número de pacientes atendidos, ¿cuántos médicos debería contratar para atender al máximo de aquellos?

La restricción del primer servicio puede aumentar como máximo hasta el punto (180,0), por lo que el incremento máximo de pacientes atendidos por el primer servicio será de 180-100 =80 nuevos pacientes. Teniendo en cuenta que cada médico atiende a 10 pacientes, el número máximo de médicos a contratar será de 80/10=8.

Examen de Matemáticas IV

Economía. Junio de 2006

1. (7 puntos) Para cada una de las siguientes funciones halla los valores de $a\in\mathbb{R}$ para los cuales es una forma cuadrática, y en su caso, clasifícala:

i) $f(x,y)=(5x+a)^2$

ii) $g(x,y)=(2x-ay)^2$

iii) $h(x,y)=(x+ay)^3$

La expresión general de una forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$ es $f(x_1,x_2)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}a_{ij}x_ix_j$, con a_{ij} números reales dados para cada $i,j\in\{1,2\}$. Se tiene, entonces:

i) $f(x,y)=25x^2+a^2+10ax$, para que *f* sea una forma cuadrática tiene que ser $a=0$.

Por lo tanto, $f(x,y)=25x^2$ y su matriz asociada es $M(f)=\begin{pmatrix}25 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

En conclusión, para a =0, *f* es una forma cuadrática semidefinida positiva.

ii) $g(x,y)=4x^2+a^2y^2-4axy$, para todo valor de *a* es una forma cuadrática y su matriz asociada $M(g)=\begin{pmatrix}4 & -2a\\ -2a & a^2\end{pmatrix}$

En conclusión, para todo valor $a\in\mathbb{R}$, g es una forma cuadrática semidefinida positiva

iii) $h(x,y)=x^3+a^3y^3+3ax^2y+3a^2xy^2$, cualquiera que sea a en esta función hay términos que no son cuadráticos o biliniales.

En conclusión, para todo valor de $a\in\mathbb{R}$, *h(x,y)* no es una forma cuadrática.

2. (6 puntos) Sea la función $f(x,y)=\mathrm{e}^{xy}$.

i) ¿En qué direcciones la derivada direccional de *f* en el punto (-1,0) es positiva?

ii) ¿Aumenta el valor de la función cuando pasamos del punto (-1,4) a otro suficientemente próximo a él en la dirección (1,1)?

i) La función $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ por lo tanto es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ y la derivada direccional en el punto (-1,0) será:

$$D_{(v_1,v_2)}f(-1,0)=\frac{v_1 f_1(-1,0)+v_2 f_2(-1,0)}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$$

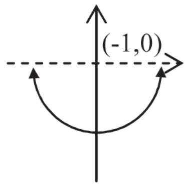
$f_1(x,y)=y\mathrm{e}^{xy}$ en el punto(-1,0) $f_1(-1,0)=0$

$f_2(x,y)=x\mathrm{e}^{xy}$ en el punto(-1,0) $f_2(-1,0)=-1$

por lo tanto

$$D_{(v_1,v_2)}f(-1,0)=\frac{0\ v_1+(-1)\ v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}=\frac{-v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$$

Luego será positiva en las direcciones $\left\{(v_1,v_2)\in \mathbb{R}^2 / v_2<0\right\}$



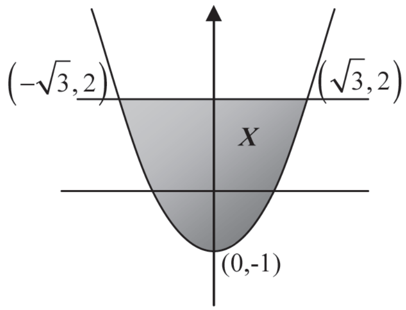
ii) El valor de la derivada direccional en el punto (-1,4) según la dirección (1,1) será:

$$D_{(1,1)}f(-1,4)=\frac{f_1(-1,4)+f_2(-1,4)}{\sqrt{2}}=\frac{4\mathrm{e}^{-4}-\mathrm{e}^{-4}}{\sqrt{2}}=\frac{3\mathrm{e}^{-4}}{\sqrt{2}}>0$$

la derivada direccional es positiva, luego el valor de la función en puntos suficientemente próximos al punto (-1,4) según la dirección (1,1) será mayor que en (-1,4).

3. (12 puntos) Sea $f(x, y) = \alpha x^2 - y$, $\alpha \in \mathbb{R}$, y el conjunto
$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y \geq x^2 - 1,\ y \leq 2\}$.

i) Para los diferentes valores de α estudia la convexidad o concavidad de f en X.
ii) ¿Para qué valores de α cumple el punto (0,-1) las condiciones de Kuhn-Tucker?
iii) Utilizando los teoremas de Kuhn-Tucker, indica para qué valores de α podemos asegurar que el punto (0,-1) **es máximo** de f en X.
iv) Utilizando los teoremas de Kuhn-Tucker, indica para qué valores de α podemos asegurar que el punto (0,-1) **no es mínimo** de f en X.



i) Para los diferentes valores de α estudia la convexidad o concavidad de f en X.

La función $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ y su matriz Hessiana es:

$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, luego para $\alpha \geq 0$, la matriz $H_f(x,y)$ es semidefinida positiva, por lo tanto, f es convexa para $\alpha \geq 0$ en todo $\mathbb{R}^2$ y para los valores de $\alpha \leq 0$, la matriz $H_f(x,y)$ es semidefinida negativa por lo tanto f es cóncava para $\alpha \leq 0$ en $\mathbb{R}^2$.

ii) ¿Para qué valores de α cumple el punto (0,-1) las condiciones de Kuhn-Tucker?

El problema escrito de forma canónica es el siguiente:

$\max/\min[\alpha x^2 - y]$
$g^1(x, y) = x^2 - y - 1 \leq 0$
$g^2(x, y) = y - 2 \leq 0$

Los gradientes son: $\nabla f(x, y) = (2\alpha x, -1)$; $\nabla g^1(x,y)=(2x,-1)$; $\nabla g^2(x,y)=(0,1)$.

Las condiciones de Kuhn-Tucker:

$KT1: \; \nabla f(x,y) + \lambda_1 \nabla g^1(x,y) + \lambda_2 \nabla g^2(x,y) = (0,0)$

$$\begin{bmatrix} 2\alpha x \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 2x \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$KT2: \; \lambda_1 g^1(x,y) = \lambda_1 (x^2 - y - 1) = 0$

$\lambda_2 g^2(x,y) = \lambda_2 (y-2) = 0$

$KT3: \; g^1(x,y) = x^2 - y - 1 \leq 0$

$g^2(x,y) = y - 2 \leq 0$

$KT4: \; \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0 \; \text{min}$

$\lambda_1 \leq 0, \lambda_2 \leq 0 \, \text{max}$

En el punto (0,-1) :

$KT1$ $\nabla f(0,-1) + \lambda_1 \nabla g^1(0,-1) + \lambda_2 \nabla g^2(0,-1) = (0,0)$

$(0,-1) + \lambda_1(0,-1) + \lambda_2(0,1) = (0,0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 - 1$

$KT2$ $\lambda_1 g^1(0,-1) = 0$; $\lambda_2 g^2(0,-1) = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$.

$KT3$ $g^1(0,-1) = 0$; $g^2(0,-1) = -3 < 0$

$KT4$ $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ (max)

Luego para todo valor α el punto (0,-1) verifica las condiciones de Kuhn-Tucker de máximo.

iii) Utilizando los teoremas de Kuhn-Tucker, indica para qué valores de α podemos asegurar que el punto (0,-1) **es máximo** de f en X.

Las condiciones de regularidad son las siguientes:

$R1$: f, g^1, g^2 son diferenciables en todo $\mathbb{R}^2$ puesto que son polinómicas.

$R2$: g^1, g^2 son convexas en todo $\mathbb{R}^2$ puesto que g^2 es lineal y como $g^1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$ su matriz hessiana: $H_{g^1}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es semidefinida positiva, luego g^1 es convexa.

$R3$: $g^1(0,0) = 0 - 0 - 1 < 0$, $g^2(x,y) = 0 - 2 < 0$

$R4$: por el apartado i) sabemos que para $\alpha \geq 0$ la función objetivo f es convexa y para $\alpha \leq 0$ es cóncava.

Por lo tanto, para $\alpha \leq 0$ las condiciones de Kuhn-Tucker son **suficientes** para **máximo** y por el apartado anterior el punto (0,-1) verifica las condiciones de Kuhn-Tucker de máximo, por lo tanto para $\alpha \leq 0$ podemos garantizar que dicho punto será máximo.

iv) Utilizando los teoremas de Kuhn-Tucker, indica para qué valores de α podemos asegurar que el punto (0,-1) **no es mínimo** de f en X.

Por $R1$, $R2$ y $R3$ las condiciones de Kuhn-Tucker son **necesarias** para máximo y para **mínimo**, pero en el apartado ii) hemos visto que el punto (0,-1) verifica para todo valor de α las condiciones de Kuhn-Tucker de máximo y no las de mínimo luego para ningún valor de α, puede ser mínimo.

4. (5 puntos) Dos servicios médicos tienen asignados 10 médicos y 6 médicos respectivamente; cada médico atiende como máximo a 10 pacientes y el coste de cada paciente es de 10€/día y 20€/día respectivamente. Si el presupuesto total diario de ambos servicios es de 1800€,

i) Encuentra la asignación diaria de pacientes en cada servicio que maximice el número de personas atendidas.

ii) Si el primer servicio quisiera ampliar el número de pacientes atendidos, ¿cuántos médicos debería contratar para atender al máximo de aquellos?

Este problema coincide con el 4º problema del examen de septiembre de 2006.

Examen de Matemáticas IV

Economía. Septiembre de 2005

1. (6 puntos) Sea $f(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cxz + d$.
i) ¿Para qué valores de *a, b, c, d* es *f* una forma cuadrática definida positiva?
ii) ¿Para qué valores de *a, b, c, d* es *f* una forma cuadrática semidefinida positiva?
iii) ¿Para qué valores de *a, b, c, d* es *f* una función convexa?

Una forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ es una función de la forma $f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j$, con a_{ij} números reales dados para cada $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

i) ¿Para qué valores de *a, b, c, d* es *f* una forma cuadrática definida positiva?

Para que f sea una forma cuadrática necesariamente tiene que ser d=0 .

La matriz simétrica asociada a esta forma cuadrática será:

$$M(f) = \begin{pmatrix} a & 0 & c/2 \\ 0 & b & 0 \\ c/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y sus menores principales son:

Primer orden: $\{a, b, 0\}$

Segundo orden: $\{ab, -c^2/4, 0\}$

Tercer orden: $|M(f)| = -bc^2/4$.

Para que sea definida positiva todos sus menores principales tienen que ser estrictamente positivos. Como existen menores principales iguales a cero, no puede ser nunca una forma cuadrática definida positiva.

ii) ¿Para qué valores de *a, b, c, d* es *f* una forma cuadrática semidefinida positiva?

Para que f sea una forma cuadrática necesariamente tiene que ser d=0.

Para que sea semidefinida positiva todos sus menores principales tienen que ser mayores o iguales a cero y el de mayor orden igual a cero, por lo tanto: $a\geq 0$, $b\geq 0$, $ab\geq 0$, $-c^2/4\geq 0$, $-bc^2/4=0$, es decir, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c = 0$ y $d = 0$.

iii) ¿Para qué valores de *a, b, c, d* es *f* una función convexa?

La función $f\in C^2(\mathbb{R}^3)$ y su matriz Hessiana es la matriz simétrica siguiente:

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2a & 0 & c \\ 0 & 2b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

siendo sus menores principales:

Primer orden: $\{2a, 2b, 0\}$

Segundo orden: $\{4ab, -c^2, 0\}$

Tercer orden: $|H_f(x,y,z)| = -2bc^2$.

Para que la función sea convexa su matriz Hessiana debe ser definida o semidefinida positiva, por lo tanto: $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c = 0$ y $\forall\, d\in \mathbb{R}$.

2. (6 puntos) Sea la función $f(x,y) = \left|x^2 - y^2\right|$. i) Calcula, si es que existen, $\nabla f(0,0)$ y $\nabla f(1,0)$. ii) Calcula las siguientes derivadas direccionales: $D_{(1,1)}f(0,0)$, $D_{(1,0)}f(0,0)$ y $D_{(0,1)}f(1,0)$.

i) Calcula, si es que existen, $\nabla f(0,0)$ y $\nabla f(1,0)$.

Se tiene: $f(x,y) = \left|x^2 - y^2\right| = \begin{cases} x^2 - y^2, & x^2 - y^2 \geq 0 \\ y^2 - x^2, & x^2 - y^2 < 0 \end{cases}$,

Veamos si existen las derivadas parciales de *f* en (0,0):

$$f_1(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h^2|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2}{h}=0$$

$$f_2(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|-h^2|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2}{h}=0$$

La función es diferenciable en el punto (0,0) y se tiene: $\nabla f(0,0)=(0,0)$

Punto (1,0): $f\in C^1(B(1,0))$, además en torno al punto (1,0) se tiene:

$f_1(x,y)=2x$ y $f_2(x,y)=-2y$. Y, por tanto: $\nabla f(1,0)=(f_1(1,0), f_2(1,0))=(2,0)$

ii) Calcula las siguientes derivadas direccionales: $D_{(1,1)}f(0,0)$, $D_{(1,0)}f(0,0)$ y $D_{(0,1)}f(1,0)$.

En ambos puntos la función es diferenciable y se tiene, por tanto:

$$D_{(1,1)}f(0,0)=\frac{1\bullet f_1(0,0)+1\bullet f_2(0,0)}{\sqrt{2}}=\frac{1\bullet 0+1\bullet 0}{\sqrt{2}}=0$$

$$D_{(1,0)}f(0,0)=\frac{1\bullet f_1(0,0)+0\bullet f_2(0,0)}{\sqrt{2}}=\frac{1\bullet 0+0\bullet 0}{\sqrt{2}}=0$$

$$D_{(0,1)}f(1,0)=\frac{0\bullet f_1(1,0)+1\bullet f_2(1,0)}{1}=\frac{0\bullet 2+1\bullet 0}{1}=0$$

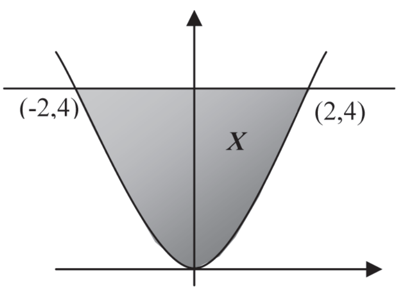
3. *(8 puntos)* Sea $f(x,y)=5-x^2+4xy-4y^2$ junto con $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2\le y\le 4\}$.

i) Utilizando las propiedades extremales de las funciones cóncavas y convexas, halla $\max_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x})$ indicando los puntos de X en los que se alcance.

ii) Halla todos los puntos que verifican las condiciones de Kuhn-Tucker.

iii) ¿Es necesario el cumplimiento de las condiciones de Kuhn-Tucker para que en un punto f alcance su mínimo en X?; ¿y suficiente?

iv) Halla razonadamente $\min_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x})$.



i) Utilizando las propiedades extremales de las funciones cóncavas y convexas, halla $\max_{x\in X} f(\boldsymbol{x})$ indicando los puntos de X en los que se alcance.

La función $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$ y su matriz Hessiana es $H_f(x,y)=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$ semidefinida negativa.

Como el conjunto X es convexo, la función f será cóncava en X. Por lo tanto, los puntos que anulen el gradiente de f, si es que existen, serán máximos globales de f en X:

$$\nabla f(x,y)=(-2x+4y,4x-8y)=(0,0) \Rightarrow x=2y.$$

Entonces: $\{(x,y)\in X / x=2y\}=\overline{(0,0)(1/2,1/4)}$ son todos los puntos donde f alcanza el máximo y su valor es $\max_{x\in X} f(\boldsymbol{x})=5$.

ii) Halla todos los puntos que verifican las condiciones de Kuhn-Tucker.

Escribimos el problema en forma canónica:

$\max/\min\ [5-x^2+4xy-4y^2]$
$g^1(x,y)=x^2-y\le 0$ $g^2(x,y)=y-4\le 0$

Las condiciones de Kuhn Tucker para el problema serán:

$KT1:\ \nabla f(x,y)+\lambda_1\nabla g^1(x,y)+\lambda_2\nabla g^2(x,y)=(0,0)$

$$\begin{bmatrix} -2x+4y \\ 4x-8y \end{bmatrix}+\lambda_1\begin{bmatrix} 2x \\ -1 \end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2x+4y+2\lambda_1 x=0 \\ 4x-8y-\lambda_1+\lambda_2=0 \end{cases}$$

$KT2:\ \lambda_1 g^1(x,y)=\lambda_1(x^2-y)=0$

$\lambda_2 g^2(x,y)=\lambda_2(y-4)=0$

$KT3:\ g^1(x,y)=x^2-y\le 0$

$g^2(x,y)=y-4\le 0$

$KT4:\ \lambda_1\ge 0,\lambda_2\ge 0$ min

$\lambda_1\le 0,\lambda_2\le 0$ max

De *KT2* se pueden considerar los cuatros casos siguientes:

a) λ_1=λ_2=0. Obtenemos los puntos: $\begin{cases} -2x+4y=0 \\ 4x-8y=0 \end{cases} \Rightarrow x=2y \Rightarrow \overline{(0,0)(1/2,1/4)}$.

b) λ_1=g^2=0.

$$\left.\begin{aligned} -2x+4y &= 0 \\ 4x-8y+\lambda_2 &= 0 \\ y-4 &= 0 \end{aligned}\right\}$$ Obtenemos para λ_2=0 el punto (8,4) que no verifica *KT3*: (8,4)$\notin X$.

c) λ_2=g^1=0.

$$\left.\begin{aligned} -2x+4y+2\lambda_1 x &= 0 \\ 4x-8y-\lambda_1 &= 0 \\ x^2-y &= 0 \end{aligned}\right\}$$ Obtenemos para λ_1=0: (0,0) y (1/2,1/4) (obtenidos anteriormente)

y el punto (1/4,1/16)$\in X$, para λ_1=1/2 >0.

d) g^1=g^2=0. Son los puntos (2,4) y (-2,4):

Punto(2,4) : $\left.\begin{aligned} 12+4\lambda_1 &= 0 \\ -24-\lambda_1+\lambda_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$ λ_1=-3<0 y λ_2=21>0. (no verifica *KT4*)

Punto(-2,4): $\left.\begin{aligned} 20-4\lambda_1 &= 0 \\ -40-\lambda_1+\lambda_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$ λ_1=5>0 y λ_2=45>0.

Por lo tanto, los puntos $\overline{(0,0)(1/2,1/4)}$ verifican *KT* de máximo y de mínimo mientras que los puntos (1/4,1/16) y (-2,4) verifican *KT* de mínimo.

iii) ¿Es necesario el cumplimiento de las condiciones de Kuhn-Tucker para que en un punto *f* alcance su mínimo en *X*?; ¿y suficiente?

*R*1: *f*, g^1, g^2 son diferenciables en $\mathbb{R}^2$.

*R*2: g^2 es lineal, luego, es convexa y $g^1\in C^2(\mathbb{R}^2)$ su matriz Hessiana $H_{g^1}(x,y)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es semidefinida positiva, luego, g^1 también es convexa.

*R*3: $g^1(x,y)=0-1<0,\ \ g^2(x,y)=1-4<0$

*R*4: *f* es cóncava.

Las condiciones de regularidad $R1$, $R2$ y $R3$ permiten afirmar que las condiciones de Kuhn-Tucker son necesarias para máximo y para mínimo, y las condiciones de regularidad $R1$, $R2$ y $R4$ hacen que las condiciones de Kuhn-Tucker sean suficientes para máximo por lo tanto para que un punto sea mínimo es necesario el cumplimiento de las condiciones de Kuhn-Tucker pero no suficiente.

iv) Halla razonadamente $\min_{\mathbf{x}\in X} f(\mathbf{x})$.

Como f es continua y X es compacto, es seguro que la función alcanza su valor máximo y mínimo en X. Por el apartado iii) sabemos que los puntos donde se alcance el mínimo necesariamente deben verificar las condiciones de Kuhn-Tucker.

En el apartado ii) hemos encontrado todos los puntos que verifican las condiciones de Kuhn-Tucker de mínimo. Pero como los puntos del segmento $\overline{(0,0)(1/2,1/4)}$ también verifican las condiciones de Kuhn-Tucker de máximo (que son suficientes para máximo) sólo quedan dos puntos (1/4,1/16) y (-2,4) como posibles candidatos a mínimo. El valor de la función en dichos puntos es: f(1/4,1/16)=319/64 y f(-2,4)= -95

Por tanto, el mínimo se alcanza en (-2,4) y su valor es $\min_{\mathbf{x}\in X} f(\mathbf{x}) = -95$.

Examen de Matemáticas IV

Economía. Junio de 2005

1. (4 puntos) Sea la forma cuadrática $Q(\boldsymbol{x})$ definida por

$$Q(\boldsymbol{x})={}^{t}M(\boldsymbol{x})\begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & a & 4 \end{pmatrix} aM(\boldsymbol{x}), \text{ donde } a\in\mathbb{R}.$$

Halla la matriz de representación de $Q(\boldsymbol{x})$. Razona para qué valores de a se da cada uno de los siguientes casos:

i) Para todo $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$-{$\mathbf{0}$} se cumple $Q(\boldsymbol{x})<0$.

ii) Para todo $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$-{$\mathbf{0}$} se cumple $Q(\boldsymbol{x})>0$.

iii) Para todo $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ se cumple $Q(\boldsymbol{x})^{3}0$.

iv) Existen $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2\in\mathbb{R}^3$ tales que $Q(\boldsymbol{x}_1)<0$ y $Q(\boldsymbol{x}_2)>0$.

La matriz de representación de Q será:

$$M(Q)=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & a & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculamos sus menores principales:

Menores principales de orden 1: $\{a, 1, 4\}$.

Menores principales de orden 2: $\{a, 4a, 4\text{-}a^2\}$.

Menores principales de orden 3:$|M(Q)|=4a\text{-}a^3=a(4\text{-}a^2)$.

i) Para todo $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$-$\{\mathbf{0}\}$ se cumple $Q(\boldsymbol{x})<0$.

Si para todo $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$-$\{\mathbf{0}\}$ se cumple $Q(\boldsymbol{x})<0$, Q es una forma cuadrática definida negativa y por tanto, los menores principales de orden impar tienen que ser negativos, por lo tanto, no existe ningún valor de a que haga Q definida negativa, ya que, hay un menor de orden 1 positivo, $1>0$.

ii) Para todo $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$-$\{\mathbf{0}\}$ se cumple $Q(\boldsymbol{x})>0$.

Si para todo $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$-$\{\mathbf{0}\}$ se cumple $Q(\boldsymbol{x})>0$, Q es una forma cuadrática definida positiva. Por tanto, todos los menores principales tienen que ser mayor que cero, $a>0$ y $4-a^2>0$. En conclusión $0<a<2$.

iii) Para todo $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ se cumple $Q(\boldsymbol{x})^3 0$.

Si para todo $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ se cumple $Q(\boldsymbol{x})^3 0$, Q es una forma cuadrática definida o semidefinida positiva.

Q será semidefinida positiva si $a\geq 0$ $4-a^2\geq 0$ y $a(4-a^2)=0$, es decir, cuando $a=0$ y $a=2$.

Por tanto, y teniendo en cuenta el apartado (ii) se tiene:

Q será definida o semidefinida positiva para $0\leq a\leq 2$

iv) Existen $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2\in\mathbb{R}^3$ tales que $Q(\boldsymbol{x}_1)<0$ y $Q(\boldsymbol{x}_2)>0$.

Si existen $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2\in\mathbb{R}^3$ tales que $Q(\boldsymbol{x}_1)<0$ y $Q(\boldsymbol{x}_2)>0$, Q es una forma cuadrática indefinida.

De (i), (ii), (iii) se tiene que $a<0$ ó $a>2$

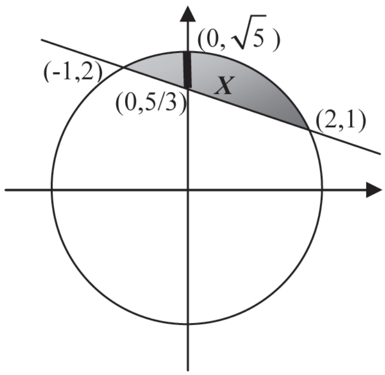
2. (*10 puntos*) Sea la función $f(x,y) = -\dfrac{x^2}{y+1}$ y el conjunto $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \leq 5 \leq x+3y\}$.

i) Estudia la convexidad o concavidad de f en X.

ii) Utilizando las propiedades extremales de las funciones convexas y cóncavas, halla $\max\limits_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x})$ y todos los puntos donde se encuentra.

iii) Comprueba que los puntos (2,1) y (-1,2) cumplen las condiciones de Kuhn-Tucker de mínimo.

iv) Sabiendo que (2,1), (-1,2), $(0, \sqrt{5})$ y (0,5/3) son los únicos puntos de la frontera de X que cumplen Kuhn-Tucker de mínimo, halla $\min\limits_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x})$ y todos los puntos donde se encuentra.



i) Estudia la convexidad o concavidad de f en X.

Consideremos el abierto $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y > -1\}$ donde $f\in C^2(U)$, se puede utilizar la caracterización de las funciones convexas y cóncavas de clase C^2 para estudiar la convexidad o concavidad de la función f en el convexo $X\subset U$:

$$f_1(x,y) = -\frac{2x}{y+1}; \;\; f_2(x,y) = \frac{x^2}{(y+1)^2} \;\; \text{y}$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{y+1} & \dfrac{2x}{(y+1)^2} \\ \dfrac{2x}{(y+1)^2} & -\dfrac{2x^2}{(y+1)^3} \end{pmatrix}$$

menores principales de orden 1: $\left\{ -\dfrac{2}{y+1},\ -\dfrac{2x^2}{(y+1)^3} \right\}$.

menores principales de orden 2: $|H_f(x,y)|=0$.

Los menores principales de orden 1 son negativos en X y el determinante es igual a cero, por tanto, f es cóncava en X.

ii) Utilizando las propiedades extremales de las funciones convexas y cóncavas, halla $\max\limits_{x\in X} f(\boldsymbol{x})$ y todos los puntos donde se encuentra.

Como f es cóncava en X y $f\in C^2(U)$, en los puntos en los que se anula el gradiente f alcanza máximo global.

Se tiene $\nabla f(x,y) = \left(-\dfrac{2x}{y+1}, \dfrac{x^2}{(y+1)^2} \right)$=(0,0) $\Rightarrow x=0$.

Por tanto, f alcanza máximo en todos los puntos del conjunto

$\{(x,y)\in X/\ x=0\}=\overline{\left(0,\sqrt{5}\right)\left(0,5/3\right)}$ (ver gráfico) y se tiene, $\max\limits_{(x,y)\in X} f(x,y)=0$.

iii) Comprueba que los puntos (2,1) y (-1,2) cumplen las condiciones de Kuhn-Tucker de mínimo.

Escribimos el problema de programación no lineal en la forma:

$\min[-\dfrac{x^2}{y+1}]$
$g^1(x,y) = x^2 + y^2 - 5 \le 0$
$g^2(x,y) = 5 - x - 3y \le 0$

Calculamos: $\nabla f(x,y) = \left(-\dfrac{2x}{y+1}, \dfrac{x^2}{(y+1)^2} \right)$; $\nabla g^1(x,y)=(2x,2y)$; $\nabla g^2(x,y)=(-1,-3)$.

Condiciones de KT:

$KT1$ $\nabla f(x,y)+\lambda_1\nabla g^1(x,y)+\lambda_2\nabla g^2(x,y)=(0,0)$

$KT2$ $\lambda_1 g^1(x,y)=0$; $\lambda_2 g^2(x,y)=0$

$KT3 \quad g^1(x,y) \leq 0;\ g^2(x,y) \leq 0$

$KT4 \quad \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ (min)

Punto (2,1) :

$KT1$: $(-2,1)+ \lambda_1(4,2) + \lambda_2(-1,-3)=(0,0) \Rightarrow \lambda_1=7/10$ y $\lambda_2=4/5$.

$KT2$: $g^1(2,1)=g^2(2,1)=0$

$KT3$: $(2,1)\in X$

$KT4$: $\lambda_1=7/10$ y $\lambda_2=4/5$

El punto (2,1) verifica las condiciones de *KT* de mínimo.

Punto (-1,2):

$KT1$: $(2/3,1/9)+ \lambda_1(-2,4) + \lambda_2(-1,-3)=(0,0) \Rightarrow \lambda_1=17/90$ y $\lambda_2=13/45$.

$KT2$: $g^1(-1,2)=g^2(-1,2)=0$

$KT3$: $(-1,2)\in X$

$KT4$: $\lambda_1=17/90$ y $\lambda_2=13/45$.

El punto (-1,2) verifica las condiciones de *KT* de mínimo.

iv) Sabiendo que (2,1), (-1,2), $(0, \sqrt{5})$ y (0,5/3) son los únicos puntos de la frontera de *X* que cumplen Kuhn-Tucker de mínimo, halla $\min_{x\in X} f(\boldsymbol{x})$ y todos los puntos donde se encuentra.

Condiciones de regularidad:

$R1$: f, g^1, g^2 diferenciables en U, abierto y convexo de $\mathbb{R}^2$

$R2$: g^1, g^2 convexas en U.

g^2 es una función lineal luego es convexa en U.

$g^1 \in C^2(U)$ y en todo punto (x,y) se tiene: $H_{g^1}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

luego es convexa en U.

$R3$: $g^1(0,2)= -1<0$, $g^2.(0,2)=-1<0$

Si un punto es mínimo del problema necesariamente tiene que cumplir las condiciones de KT de mínimo.

Además, sabemos que f es continua en el compacto X, por tanto, f alcanza su mínimo valor en el conjunto.

Se evalúa la función en los puntos que cumplen las condiciones de KT de mínimo:

$f(2,1)=-2$, $f(-1,2)=-1/3$, $f(0,\sqrt{5})=f(0,5/3)=0$

El mínimo se alcanza en (2,1) y vale $\min\limits_{(x,y)\in X} f(x,y) = f(2,1) = -2$

3. (6 puntos) Una compañía produce mesas y sillas. Para ello dispone de tres plantas. En la planta 1 se cortan las piezas de madera, en la planta 2 se realiza el ensamblaje de las piezas y en la planta 3 se realiza el acabado de los productos. En la tabla se resumen los horas semanales requeridas para fabricar una unidad de cada producto, así como el beneficio obtenido por unidad producida. La compañía sabe que puede vender la cantidad que desee de ambos productos con la capacidad disponible en las tres plantas.

	Mesas	Sillas	Horas disponibles
Planta 1	1	3	210
Planta 2	3	3	270
Planta 3	4	1	240
Beneficio (€)	60	30	

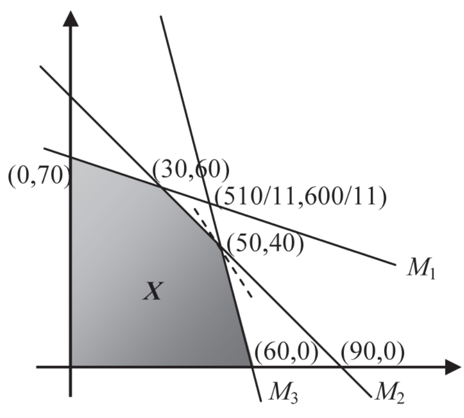
i) Si la compañía pretende maximizar sus beneficios, formula el problema de programación lineal y halla la solución óptima de dicho problema.
ii) ¿Entre qué valores debe estar el beneficio por mesa para que la solución óptima sea la misma que la obtenida en el apartado anterior?
iii) ¿En qué plantas sería conveniente aumentar la capacidad horaria semanal disponible? ¿Cuánto estaría dispuesta a pagar la empresa por cada hora añadida a la capacidad respectiva de estas plantas?

Se consideran las variables:

x_1 : nº de mesas

x_2 : nº de sillas

$\max[60x_1 + 30x_2]$
$M_1 : x_1 + 3x_2 \le 210$
$M_2 : 3x_1 + 3x_2 \le 270$
$M_3 : 4x_1 + x_2 \le 240$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$



i) Si la compañía pretende maximizar sus beneficios, formula el problema de programación lineal y halla la solución óptima de dicho problema.

Teniendo en cuenta las pendientes de las rectas y como podemos ver en el gráfico:

$$-\infty \xleftrightarrow{(60,0)} m_3 = -4 \xleftrightarrow{(50,40)} m_2 = -1 \xleftrightarrow{(30,60)} m_1 = -\frac{1}{3} \xleftrightarrow{(0,70)} 0$$

$$\text{y } m_f = -\frac{60}{30} = -2$$

La solución óptima se alcanza en el punto (50,40). Es decir, la producción óptima es de 50 mesas y 40 sillas, siendo el beneficio en este caso de 4.200€.

ii) ¿Entre qué valores debe estar el beneficio por mesa para que la solución óptima sea la misma que la obtenida en el apartado anterior?

Llamamos A al beneficio de las mesas, entonces $m_f = -\frac{A}{30}$, para que la solución óptima no varíe, se tiene:

$$-4 < -\frac{A}{30} < -1 \quad \Rightarrow \quad 1 < \frac{A}{30} < 4 \quad \Rightarrow \quad 30 < A < 120$$

El beneficio por mesa debe estar comprendido entre 30€ y 120€

iii) ¿En qué plantas sería conveniente aumentar la capacidad horaria semanal disponible? ¿Cuánto estaría dispuesta a pagar la empresa por cada hora añadida a la capacidad respectiva de estas plantas?

En las plantas donde se utilicen todas las horas semanales disponibles, sería conveniente aumentar las horas semanales disponibles:

Planta 1: 50+120=170<210, en esta planta no se agotan las horas disponibles, por tanto, no interesa aumentarlas.

Planta 2: 150+120=270.

En esta planta se utilizan para la producción óptima todas las horas disponibles, luego podría interesar aumentarlas y así mejorar la producción.

M_2: $3x_1+3x_2=270+b$

(50,40)→(510/11,600/11)

$b=0 \rightarrow b=360/11=32,7$

Como vemos podría interesar aumentar en 32,7 horas la capacidad de la planta 2 y se tiene:

$$\lambda_2 = \frac{\frac{48.600}{11} - 4.200}{\frac{360}{11}} = 6,6 \text{ €} / h$$

Por lo que en esta planta por cada hora aumentada obtendría un beneficio de 6,6€/h, por lo tanto, estaría dispuesto a pagar la hora aumentada a menos de 6,6€ la hora.

Planta 3: 200+40=240.

En esta planta, también, se utilizan para la producción óptima todas las horas disponibles, luego podría interesar aumentarlas y así mejorar la producción.

M_3: $4x_1+x_2=240+c$ b

$(50,40)\rightarrow(90,0)$

$c=0\rightarrow c=120$

Como vemos podría interesar aumentar en 120 horas la capacidad de la planta3 y en este caso se tiene:

$$\lambda_3 = \frac{5.400 - 4.200}{120} = 10 \text{ €} / h$$

Por lo que en esta planta por cada hora aumentada obtendría un beneficio de 10€/h, por lo tanto, estaría dispuesto a pagar la hora aumentada a menos de 10€ la hora.

Examen de Matemáticas IV

Economía. Septiembre de 2004

1. (*8 puntos*) Sea $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + \frac{1}{2}z^2 + xz + \alpha yz$.

i) ¿Para qué valores de α podemos asegurar que f es convexa en todo $\mathbb{R}^3$?
ii) ¿Para qué valores de α podemos asegurar que f es estrictamente convexa en todo $\mathbb{R}^3$?
iii) ¿Para qué valores de α podemos asegurar que f no es ni convexa ni cóncava en todo $\mathbb{R}^3$?

Como f es una función de clase C^2, se puede estudiar su convexidad mediante su matriz hessiana. Se tiene entonces:

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

Hallamos sus menores principales,

Menores principales de orden 1: $\{4, 2, 1\}$

Menores principales de orden 2: $\{8, 3, 2-\alpha^2\}$

Menores principales de orden 3: $|H_f(x,y,z)|=6-4\alpha^2$.

i) ¿Para qué valores de α podemos asegurar que f es convexa en todo $\mathbb{R}^3$?

La función f es convexa en $\mathbb{R}^3$ (conjunto abierto), si y sólo si, en todo punto (x,y,z) la matriz $H_f(x,y,z)$ es definida o semidefinida positiva y ,por lo tanto, todos los menores principales tienen que ser mayores o igual a 0. Entonces:

$2-\alpha^2 \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq \alpha \leq \sqrt{2}$

$6\text{-}4\alpha^2 \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{\frac{3}{2}} \leq \alpha \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$

Para $-\sqrt{\frac{3}{2}} \leq \alpha \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$, la función f es convexa en $\mathbb{R}^3$.

ii) ¿Para qué valores de α podemos asegurar que f es estrictamente convexa en todo $\mathbb{R}^3$?

La función f es estrictamente convexa en $\mathbb{R}^3$ si en todo punto (x,y,z) la matriz $H_f(x,y,z)$ es definida positiva. Entonces, los menores principales tienen que ser mayores que cero:

$2\text{-}\alpha^2 > 0 \Rightarrow -\sqrt{2} < \alpha < \sqrt{2}$ y $6\text{-}4\alpha^2 > 0 \Rightarrow -\sqrt{\frac{3}{2}} < \alpha < \sqrt{\frac{3}{2}}$

Para, $-\sqrt{\frac{3}{2}} < \alpha < \sqrt{\frac{3}{2}}$ la función f es estrictamente convexa en $\mathbb{R}^3$.

iii) ¿Para qué valores de α podemos asegurar que f no es ni convexa ni cóncava en todo $\mathbb{R}^3$?

Esta función no es cóncava en ningún caso, ya que hay al menos un menor principal de orden 1 positivo, por otra parte, si $\alpha < -\sqrt{\frac{3}{2}}$ ó $\alpha > \sqrt{\frac{3}{2}}$ la función no es convexa en $\mathbb{R}^3$.

Por tanto, podemos asegurar que f no es ni convexa ni cóncava en todo $\mathbb{R}^3$, para:

$$\alpha < -\sqrt{\frac{3}{2}} \text{ ó } \alpha > \sqrt{\frac{3}{2}}$$

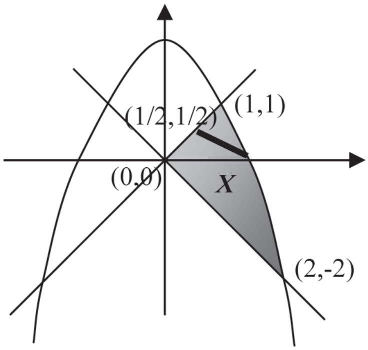
2. (12 puntos) Sean $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ y\leq 2-x^2;\ y\leq x;\ y\geq -x\}$ y $f(x,y)=x^2+9y^2+6xy-4x-12y+4$.

i) Utilizando las propiedades extremales de las funciones cóncavas y convexas hallar el mínimo de f en X.

ii) Utilizando el gradiente de f, ¿qué podemos asegurar acerca de los puntos (0,0) y (1,1)?

iii) ¿Verifica el punto (1,1) las condiciones de Kuhn-Tucker? Utilizando los teoremas de Kuhn-Tucker, ¿qué se puede afirmar acerca de este punto?

iv) ¿Verifica el punto (1/2,1/2) las condiciones de Kuhn-Tucker? ¿Se puede asegurar que es extremo global de f en X?



i) Utilizando las propiedades extremales de las funciones cóncavas y convexas hallar el mínimo de f en X.

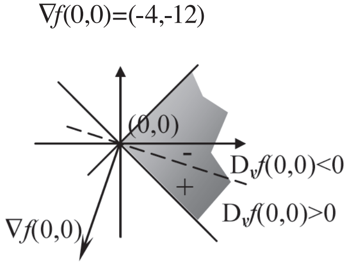
La función $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$, y se tiene, $H_f(x,y)=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 18 \end{pmatrix}$ es semidefinida positiva, luego f es convexa.

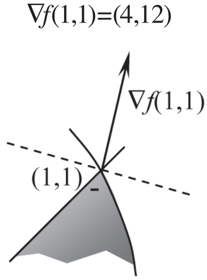
Entonces, en los puntos de X que anulen el gradiente $\nabla f(x,y)=(0,0)$, se alcanzará el mínimo global de f en X :

$\nabla f(x,y)=(2x+6y-4,6x+18y-12)=(0,0) \Rightarrow x+3y=2$.

En conclusión, en el conjunto de puntos $\{(x,y)\in X/\ x+3y=2\}=\overline{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{3},\frac{2}{9}\right)}$ f alcanza el mínimo global en X.

ii) Utilizando el gradiente de f, ¿qué podemos asegurar acerca de los puntos (0,0) y (1,1)?





Teniendo en cuenta el gradiente de f en el punto (0,0), en dicho punto no se alcanza ningún extremo ya que existen puntos de X próximos al (0,0), en los que la función alcanza valores mayores y menores ya que existen direcciones cuyas derivadas direccionales son positivas y direcciones cuyas derivadas direccionales son negativas, como se puede ver en el gráfico.

Teniendo en cuenta el gradiente de f en el punto (1,1), en dicho punto se alcanza un máximo local, como podemos ver en la figura, aunque no podemos asegurar que sea global.

iii) ¿Verifica el punto (1,1) las condiciones de Kuhn-Tucker? Utilizando los teoremas de Kuhn-Tucker, ¿qué se puede afirmar acerca de este punto?

Escribamos el problema en forma canónica:

$\max/\min[x^2+9y^2+6xy-4x-12y+4]$
$g^1(x,y) = x^2 + y - 2 \le 0$ $g^2(x,y) = y - x \le 0$ $g^3(x,y) = -x - y \le 0$

Las condiciones de KT son las siguientes:

$$KT1:\ \nabla f(x,y)+\lambda_1\nabla g^1(x,y)+\lambda_2\nabla g^2(x,y)+\lambda_3\nabla g^3(x,y)=(0,0)$$

$$\begin{bmatrix}2x+6y-4\\6x+18y-12\end{bmatrix}+\lambda_1\begin{bmatrix}2x\\1\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}+\lambda_3\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}2x+6y-4+2\lambda_1 x-\lambda_2-\lambda_3=0.\\6x+18y-12+\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=0.\end{cases}$$

$$KT2:\ \lambda_1 g^1(x,y)=\lambda_1(x^2+y-2)=0$$

$$\lambda_2 g^2(x,y)=\lambda_2(y-x)=0$$

$$\lambda_3 g^3(x,y)=\lambda_3(-x-y)=0$$

$$KT3:\ g^1(x,y)=x^2+y-2\le 0$$

$$g^2(x,y)=y-x\le 0$$

$$g^3(x,y)=-x-y\le 0$$

$$KT4:\ \lambda_1\ge 0,\lambda_2\ge 0,\lambda_3\ge 0\ \text{min}$$

$$\lambda_1\le 0,\lambda_2\le 0,\lambda_3\le 0\,\text{max}$$

Para el punto (1,1) :

$$KT1:\ \begin{cases}4+2\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3=0\\12+\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=0\end{cases}.$$

*KT*2 y *KT*3: $g^1(1,1)=0$, $g^2(1,1)=0$, $g^3(1,1) = -2$, luego, $\lambda_3=0.\rightarrow \lambda_1=-\dfrac{16}{3},\lambda_2=-\dfrac{52}{3}$, por lo tanto, el punto (1,1) verifica KT de máximo.

Veamos que condiciones de regularidad se verifican:

*R*1: $f,g^1,g^2\ g^3$ son funciones diferenciables en todo $\mathbb{R}^2$ (son funciones polinómicas).

*R*2: g^1, g^2, g^3 son convexas en $\mathbb{R}^2$. g^2 y g^3 son lineales, por lo tanto convexas y $g^1\in C^2(\mathbb{R}^2)$:

$H_{g^1}(x,y)=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$ su matriz hessiana es semidefinida positiva, luego g^1 es convexa.

$$R3:\ \begin{cases}g^1(1,0)=1+0-2<0\\g^2(1,0)=0-1<0\\g^3(1,0)=-1-0<0\end{cases}$$

Se cumplen las tres condiciones de regularidad. Por lo tanto las condiciones de Kuhn-Tucker son necesarias para máximo y para mínimo.

*R*4: *f* es convexa.

Las condiciones *KT* no son suficientes para máximo. En conclusión, el punto (1,1) puede que sea un máximo global del problema, pero no es seguro que lo sea.

iv) ¿Verifica el punto (1/2,1/2) las condiciones de Kuhn-Tucker? ¿Se puede asegurar que es extremo global de *f* en *X*?

Para el punto (1/2,1/2) :

*KT*1: $\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}.$

*KT*2: $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$.

*KT*3: $(1/2,1/2) \in X$.

*KT*4: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Verifica las condiciones de *KT* de máximo y de mínimo.

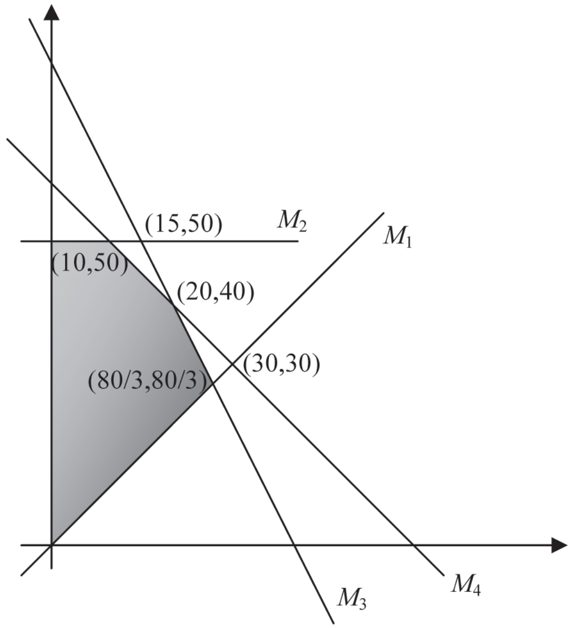
Por *R*1, *R*2 y *R*4 (*f* convexa) las condiciones de *KT* son suficientes para mínimo, luego el punto (1/2,1/2) es mínimo global.

3. (10 puntos) Un hospital desea reducir la lista de espera de las operaciones pendientes de riñón y de vesícula. Debido al gran número de operaciones pendientes desea realizar más operaciones de vesícula que de riñón. Por otra parte, no puede realizar más de 50 operaciones de vesícula diarias. Cada operación de riñón requiere la presencia de dos médicos y se realiza en una hora. Cada operación de vesícula sólo requiere un médico y también se realiza en una hora. Para estos tipos de operaciones el hospital tiene asignados 16 médicos que dedican 5 hora al día cada uno de ellos y cuenta con 12 quirófanos disponibles cada uno de ellos 5 horas al día. i) Maximizar el número de operaciones diarias. ii) ¿Le interesaría al hospital disponer de más quirófanos? En caso afirmativo, ¿de cuantos? iii) ¿Le interesaría al hospital contratar más médicos? En caso afirmativo, ¿cuántos contrataría?

Se consideran las variables

x_1: número de operaciones de riñón, x_2: número de operaciones de vesícula,

$\max[x_1 + x_2]$
$M_1: \quad x_2 \geq x_1$
$M_2: \quad x_2 \leq 50$
$M_3: 2x_1 + x_2 \leq 80$
$M_4: \quad x_1 + x_2 \leq 60$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$



i) Maximizar el número de operaciones diarias.

La solución óptima se encontrará en alguno de los vértices del conjunto de soluciones factibles,

$f(0,0)=0$

$f(80/3,80/3)=160/3$

$f(20,40)=60$

$f(10,50)=60$

$f(0,50)=50$

Por lo tanto el máximo se alcanza en el segmento $\overline{(10,50)(20,40)}$.

El máximo de operaciones diarias es 60.

ii) ¿Le interesaría al hospital disponer de más quirófanos? En caso afirmativo, ¿de cuantos?

Para realizar las 60 operaciones se utilizan todos los quirófanos, restricción saturada, por lo que puede interesar disponer de más quirófanos. Veamos cuantos más.

M_4: $x_1+x_2 \leq 60+q$

$\overline{(10,50)(20,40)} \rightarrow (15,50)$

$q=0 \rightarrow q=5$

En el nuevo óptimo pasaría de 60 horas → 65 horas

En conclusión, necesitaría un nuevo quirófano durante 5 horas al día.

> iii) ¿Le interesaría al hospital contratar más médicos? En caso afirmativo, ¿cuántos contrataría?

Veamos que sucede si contrata más médicos

M_3: $2x_1+x_2 \leq 80+m$

$\overline{(10,50)(20,40)} \rightarrow (30,30)$

$m=0 \rightarrow m=10$

En el nuevo óptimo aumentaría en 10 horas de médico, pero seguiría realizando el mismo número de operaciones:

60 operaciones → 60 operaciones

Por lo tanto, no le interesaría contratar más médicos.

Examen de Matemáticas IV

Economía. Junio de 2004

1. (5 puntos) Sea la función $f(x, y) = |x + y|$. Calcular $D_{(1,1)}f(1,-3)$. ¿Para qué direcciones está definida la derivada direccional de f en el punto (0,0)?

La función f está definida en $\mathbb{R}^2$ y se tiene: $f(x, y) = \begin{cases} x + y, & x + y \geq 0 \\ -x - y, & x + y < 0 \end{cases}$.

En el punto (1,-3) esta función es diferenciable y, por tanto, existe la derivada direccional en cualquier dirección. Siendo $f_1(1,-3) = -1$ y $f_2(1,-3) = -1$, se tiene:

$$D_{(1,1)}f(1,-3) = \frac{f_1(1,-3) + f_2(1,-3)}{\sqrt{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}}.$$

Sea $(v_1, v_2) \neq (0,0)$, veamos para que direcciones esta definida la $D_{(v_1,v_2)}f(0,0)$.

Como la función no es diferenciable en (0,0) se tiene entonces:

$$D_{(v_1,v_2)}f(0,0) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{f(0 + tv_1, 0 + tv_2) - f(0,0)}{\|t\boldsymbol{v}\|} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{|tv_1 + tv_2|}{\|t\boldsymbol{v}\|} =$$

$$= \begin{cases} v_1 + v_2 \geq 0 \Rightarrow \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \dfrac{t(v_1 + v_2)}{t\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \dfrac{v_1 + v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \\ v_1 + v_2 < 0 \Rightarrow \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \dfrac{t(-v_1 - v_2)}{t\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \dfrac{-v_1 - v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \end{cases}$$

Como este límite existe para todo $(v_1, v_2) \neq (0, 0)$, existe la derivada direccional de la función f en el punto (0,0) en cualquier dirección $(v_1, v_2) \neq (0, 0)$.

2. (8 puntos) Para cada una de las siguientes funciones encuentra, si existe, un abierto convexo donde sea convexa y otro abierto convexo donde sea cóncava:

i) $f(x,y) = \dfrac{1}{x+y}$

ii) $g(x,y) = \ln(x+y)$

i) $f(x,y) = \dfrac{1}{x+y}$

La función f está definida en $D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x+y\neq 0\}$ abierto, no convexo. Siendo $f\in C^2(D_f)$ se tiene:

$$f_1(x,y) = f_2(x,y) = -\frac{1}{(x+y)^2} \qquad f_{11}(x,y) = f_{12}(x,y) = f_{22}(x,y) = \frac{2}{(x+y)^3}$$

y, por tanto, su matriz Hessiana es: $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{(x+y)^3} & \dfrac{2}{(x+y)^3} \\ \dfrac{2}{(x+y)^3} & \dfrac{2}{(x+y)^3} \end{pmatrix}$

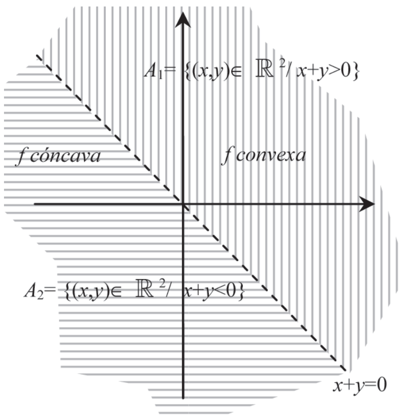
siendo sus menores principales:

Menores principales de orden1: $\left\{ \dfrac{2}{(x+y)^3}, \dfrac{2}{(x+y)^3} \right\}$

Menores principales de orden2: $|H_f(x,y)|=0$

Como el dominio D_f no es convexo, buscamos el mayor conjunto abierto y convexo contenido en D_f. Consideramos el abierto convexo $A_1=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2/\ x+y>0\}$; se tiene que para todo (x,y) de A_1 la matriz $H_f(x,y)$ es semidefinida positiva, por tanto, f convexa en A_1.

De igual forma, podemos considerar el conjunto $A_2=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2/\ x+y<0\}$ } abierto y convexo; se tiene que para todo (x,y) de A_2 la matriz $H_f(x,y)$ es semidefinida negativa, por tanto, f cóncava en A_2.



ii) $g(x,y)=\ln(x+y)$

La función f está definida en D_g={(x,y)∈ $\mathbb{R}^2$/ $x+y>0$}abierto, convexo. Siendo $g\in C^2(D_g)$ se tiene:

$$g_1(x,y)=g_2(x,y)=\frac{1}{x+y} \qquad g_{11}(x,y)=g_{12}(x,y)=g_{22}(x,y)=-\frac{1}{(x+y)^2}$$

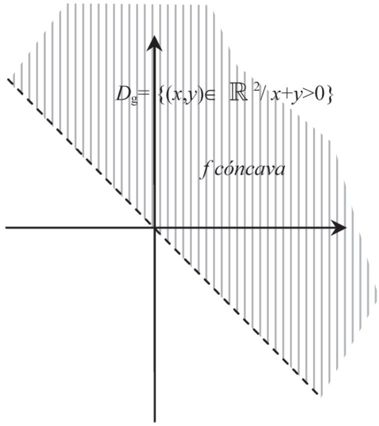
y su matriz Hessiana es $H_g(x,y)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{(x+y)^2} & -\frac{1}{(x+y)^2} \\ -\frac{1}{(x+y)^2} & -\frac{1}{(x+y)^2} \end{pmatrix}$

siendo sus menores principales:

Menores principales de orden1: $\left\{-\frac{1}{(x+y)^2},-\frac{1}{(x+y)^2}\right\}$

Menores principales de orden2 :$|H_g(x,y)|=0$

Para todo $(x,y)\in D_g$ la matriz $H_f(x,y)$ es semidefinida negativa, por tanto, f cóncava en D_g.

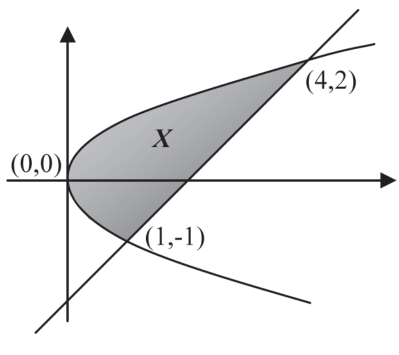


3. (12 puntos) Sea el problema: $$\max/\min f(x,y)$$ $$\begin{cases} y^2 \le x \\ y \ge x-2 \end{cases}$$ siendo f una función lineal. i) ¿Tiene solución el problema? En caso afirmativo, indica si los extremos se alcanzan en el interior o en la frontera. ii) Si un punto $\boldsymbol{x}$ es solución del problema ¿tiene que verificar las condiciones de Kuhn-Tucker? iii) Si los puntos $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$ verifican las condiciones de Kuhn-Tucker de mínimo, indica si en alguno o algunos de esos puntos se alcanza el mínimo del problema y por qué. iv) Si en (0,0) se alcanza el máximo del problema, siendo los escalares que hacen que se cumpla la condición $KT1$ λ_1=-1 y λ_2=0, encuentra el punto o los puntos en los que la función alcanza el mínimo.

Si f es una función lineal será de la forma $f(x,y)=ax+by$; con a y b números reales.

El problema escrito de forma estándar será:

$\max/\min[ax+by]$
$g^1(x,y) = y^2 - x \le 0$
$g^2(x,y) = x - y - 2 \le 0$



i) ¿Tiene solución el problema? En caso afirmativo, indica si los extremos se alcanzan en el interior o en la frontera.

Sí. Al ser *f* una función lineal, es contínua y el conjunto de soluciones factibles *X* es un conjunto compacto (cerrado y acotado), por lo tanto, el problema tiene solución . Además, los extremos se alcanzarán **en la frontera** puesto que al ser *f* una función lineal, su gradiente no se anula en ningún punto. $\nabla f(x,y) = (a,b) \neq (0,0)$

ii) Si un punto $\boldsymbol{x}$ es solución del problema ¿tiene que verificar las condiciones de Kuhn-Tucker?

Sí. Utilizando lo teoremas de K-T, tenemos

$R1$: f, g^1, g^2 son funciones diferenciables en todo $\mathbb{R}^2$

$R2$: g^1, g^2 son convexas en $\mathbb{R}^2$. g^2 es lineal y por lo tanto convexa y $g^1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$:su matriz Hessiana $H_{g^1}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ es semidefinida positiva en todo punto del dominio, por lo tanto g^1 es convexa.

$R3$: Existe al menos un punto interior, por ejemplo $\mathbf{x} = (1,0)$:

$g^1(1,0) = -1<0$, $g^2(1,0) = -1<0$.

Se cumplen las condiciones de regularidad de necesidad de Kuhn-Tucker, es decir, todo punto solución del problema debe verificar las condiciones de Kuhn-Tucker.

iii) Si los puntos $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$ verifican las condiciones de Kuhn-Tucker de mínimo, indica si en alguno o algunos de esos puntos se alcanza el mínimo del problema y por qué.

Como hemos comprobado (en el apartado anterior) se cumplen $R1$, $R2$. Por ser *f* lineal, es convexa y se verifica $R4$ (mínimo). Es decir, se cumplen las condiciones de regularidad de suficiencia de Kuhn-Tucker. Por lo tanto si $\boldsymbol{x}_1$ y $\boldsymbol{x}_2$ verifican las condiciones de Kuhn-Tucker de mínimo es seguro que, en los dos puntos, se alcanza el mínimo global del problema, puesto que las condiciones de Kuhn-Tucker son suficientes.

iv) Si en (0,0) se alcanza el máximo del problema, siendo los escalares que hacen que se cumpla la condición $KT1$ λ_1=-1 y λ_2=0, encuentra el punto o los puntos en los que la función alcanza el mínimo.

Escribimos las condiciones de KT para este problema:

$$KT1:\ \nabla f(x,y)+\lambda_1\nabla g^1(x,y)+\lambda_2\nabla g^2(x,y)=(0,0)$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}+\lambda_1\begin{bmatrix} -1 \\ 2y \end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$KT2:\ \lambda_1 g^1(x,y)=\lambda_1(y^2-x)=0$$

$$\lambda_2 g^2(x,y)=\lambda_2(x-y-2)=0$$

$$KT3:\ g^1(x,y)=y^2-x\leq 0$$

$$g^2(x,y)=x-y-2\leq 0$$

$$KT4:\ \lambda_1\geq 0,\lambda_2\geq 0\ \text{min}$$

$$\lambda_1\leq 0,\lambda_2\leq 0\ \text{max}$$

En el punto (0,0) , (λ_1=-1 y λ_2=0) se tiene:

$KT1$: (a,b)-(-1,0)=(0,0). es decir: a=-1, b=0 luego $f(x,y) = -x$.

Minimo

De *KT2* podemos considerar los casos siguientes:

a) Para $\lambda_1=\lambda_2=0$. De $KT1$, (-1,0) = (0,0) absurdo, no hay ningún punto .

b) Para $\lambda_1=0$; $g^2=0$. De $KT1$, (-1,0)+ λ_2(1,-1)=(0,0). Entonces $\lambda_2=0$ igual que el anterior.

c) Para $\lambda_2=0$; $g^1=0$. De $KT1$, (-1,0)+ $\lambda_1(-1,2y)$=(0,0). λ_1= -1 , y=0 , junto con la ecuación $g^1=0$, x=0 obtenemos el punto(0,0) , que es el máximo del problema.

d) Para $g^1=g^2=0$ se obtienen los puntos (4,2) y (1,-1) .

Punto (4,2):

(-1,0)+ λ_1(-1,4)+ λ_2(1,-1)=(0,0). λ_1=1/3 y λ_2= 4/3. Verifica las condiciones de *KT* de mínimo.

Punto (1,-1):

(-1,0)+ λ_1(-1,-2)+ λ_2(1,-1)=(0,0). λ_1= -1/3 y λ_2= 2/3. No verifica las condiciones de *KT*.

El único punto que verifica las condiciones de mínimo es el (4,2) y como se cumplen las condiciones de regularidad suficientes de mínimo, *CR*1, *CR*2 y *CR*4 (*f* convexa), en el punto **(4,2)** se alcanza el **mínimo global** de la función en *X* .

4. (5 puntos) Una floristería realiza dos tipos de ramos de flores, tipo *A* y tipo *B*, para los que utiliza lirios y claveles de los cuales dispone de 1800 y 2400 unidades respectivamente; para confeccionar un ramo tipo *A* utiliza 10 lirios y 20 claveles y para un ramo tipo *B* 20 lirios y 10 claveles. Por otra parte, saben que no pueden vender más de 60 ramos tipo *B*. Si vende cada ramo tipo *A* a 20 euros y cada ramo tipo *B* a 30 euros,

i) Calcular cuántos ramos de cada tipo realizará si quiere maximizar el ingreso.

ii) ¿A cuánto debería vender cada ramo tipo *A* si quisiera vender más ramos tipo *B*?

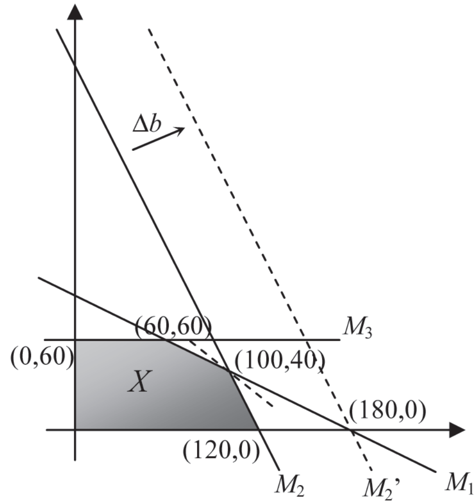
iii) Si pudiera adquirir más claveles, ¿cuánto estaría dispuesto a pagar por cada uno de ellos?, ¿cuántos adquiriría?

Se consideran las variables:

x_1: número de ramos de flores tipo *A*,

x_2: número de ramos de flores tipo *B* .

$\max[20x_1 + 30x_2]$
$M_1 : 10x_1 + 20x_2 \leq 1800$ $M_2 : 20x_1 + 10x_2 \leq 2400$ $M_3 : x_2 \leq 60$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$



i) Calcular cuántos ramos de cada tipo realizará si quiere maximizar el ingreso.

Valorando la función objetivo en los vértices:

$f(0,0)$=0€

$f(0,60)$=1800€

$f(60,60)$=3000€

$f(100,40)$=3200€

$f(120,0)$=2400€

Se obtiene que para maximizar el ingreso debe realizar 100 ramos del tipo *A* y 40 ramos del tipo *B* y así obtiene unos ingresos máximos de 3.200€.

ii) ¿A cuánto debería vender cada ramo tipo *A* si quisiera vender más ramos tipo *B*?

La pendiente de la función objetivo es $m_f = -\dfrac{p_A}{p_B} = -\dfrac{20}{30}$, donde, p_A es el precio de venta de los ramos tipo *A* y p_B de los ramos tipo *B*. Si quiere vender mas ramos del tipo B, la solución óptima se desplazará del punto (100,40) al punto (60,60) y por lo tanto $m_f > m_1$ $\quad m_f = -\dfrac{p_A}{30} > -\dfrac{1}{2} = m_1 \Rightarrow \dfrac{p_A}{30} < \dfrac{1}{2} \Rightarrow p_A < 15$

$$-\infty \xleftrightarrow{(120,0)} m_2 = -2 \xleftrightarrow{(100,40)} m_1 = -\frac{1}{2} \xleftrightarrow{(60,60)} m_3 = 0$$

Debería vender cada ramo de tipo A a un precio inferior o igual a 15€.

iii) Si pudiera adquirir más claveles, ¿cuánto estaría dispuesto a pagar por cada uno de ellos?, ¿cuántos adquiriría?

Para maximizar los ingresos utiliza todos los claveles disponible, luego podría interesarle disponer de más claveles. Veamos de cuantos y a que precio.

M_2: $20x_1+10x_2 \leq 2400+b$

(100,40)→(180,0)

b=0→b=1200

3200€→3600€

$\lambda_2 = \dfrac{f(100,40) - f(180,0)}{1200} = \dfrac{3600-3200}{1200} = 0,33$ euros/clavel

Le interesa comprar, para mejorar el óptimo, hasta 3600€, 1.200 claveles, a un precio inferior 0,33 euros cada clavel.

Examen de Matemáticas IV

Economía. Septiembre de 2003

1. (4 puntos) Sea $M(Q)=\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ con $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ la matriz de representación de un forma cuadrática.

i) Encuentra los valores de α,β tal que Q sea semidefinida positiva.

ii) Encuentra los valores de α,β tal que $\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 / Q(\boldsymbol{x})>0\}=\mathbb{R}^3-\{\boldsymbol{0}\}$.

Se calculan los menores principales de la matriz $M(Q)$:

Menores principales de orden 1: $\{\alpha, 1, \alpha\}$

Menores principales de orden 2: $\{\alpha, \alpha^2-\beta^2, \alpha\}$

Menores principales de orden 3: $|M(Q)|=\alpha^2-\beta^2$

i) Encuentra los valores de α,β tal que Q sea semidefinida positiva.

Para que la forma cuadrática Q sea semidefinida positiva los menores principales tienen que ser mayores o iguales que cero y $|M(Q)|=0$. Se tiene:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha^2=\beta^2\\ \alpha\geq 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}|\alpha|=|\beta|\\ \alpha\geq 0\end{array}\right\}\Rightarrow \alpha=\pm\beta \text{ y } \alpha\geq 0$$

ii) Encuentra los valores de α,β tal que $\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 / Q(\boldsymbol{x})>0\}=\mathbb{R}^3-\{\boldsymbol{0}\}$.

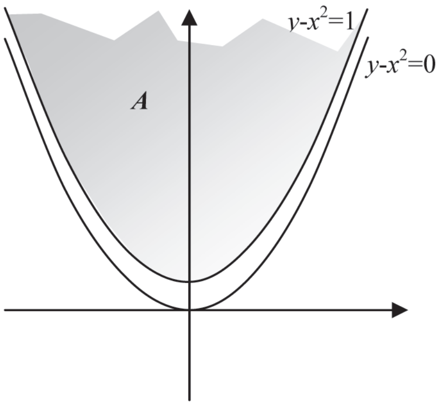
En este caso la forma cuadrática Q tiene que ser definida positiva y, por tanto, todos los menores principales mayores que cero. Se tiene:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha^2>\beta^2\\ \alpha>0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}|\alpha|>|\beta|\\ \alpha>0\end{array}\right\}\Rightarrow\alpha>\pm\beta \text{ y } \alpha>0$$

> **2.** (5 puntos) Sea $f(x, y) = x^2 y + (y - 4)^2$.
> i) Estudia la convexidad o concavidad de f en $\mathbb{R}^2$ y en $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq x^2 + 1\}$.
> ii) Halla y representa el conjunto $B = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\} / D_v f(1, 4) > 0\}$.
> iii) ¿Puede haber en el punto (1,4) un máximo de f relativamente a A?

> i) Estudia la convexidad o concavidad de f en $\mathbb{R}^2$ y en $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq x^2 + 1\}$.

Como $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ estudiamos convexidad o concavidad mediante su matriz hessiana:



$f_1(x,y)=2xy$

$f_2(x,y)=x^2+2(y-4)$

$f_{11}(x,y)=2y$

$f_{12}(x,y)=2x$

$f_{22}(x,y)=2$

Y, por tanto, $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 2 \end{pmatrix}$

Menores principales de orden 1: $\{2y, 2\}$

Menores principales de orden 2: $|H_f(x,y)|=4y-4x^2=4(y-x^2)$

Los menores principales no mantienen el signo en $\mathbb{R}^2$, como además $\mathbb{R}^2$ es un conjunto abierto se concluye que f no es convexa ni cóncava en $\mathbb{R}^2$.

Esta función es estrictamente convexa en A, pues en este conjunto todos los menores principales de $H_f(x, y)$ tienen signo positivo.

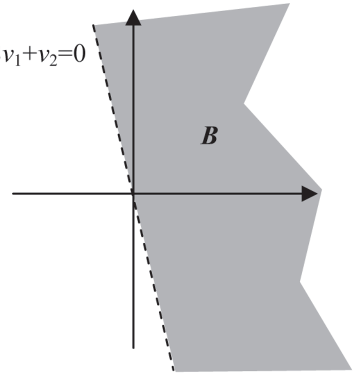
> ii) Halla y representa el conjunto $B = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\} / D_v f(1, 4) > 0\}$.

Siendo $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ se tiene:

$$D_v f(x, y) = \frac{v_1 f_1(x, y) + v_2 f_2(x, y)}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \frac{v_1 2xy + v_2 (x^2 + 2y - 8)}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

$$D_v f(1,4) = \frac{8v_1 + v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} > 0 \Rightarrow 8v_1 + v_2 > 0 \Rightarrow 8v_1 > -v_2$$

$B = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 8v_1 > -v_2\}$



iii) ¿Puede haber en el punto (1,4) un máximo de f relativamente a A?

Siendo $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ y $(1,4) \in \text{int}(A)$ la condición necesaria para que en (1,4) halla extremo (máximo o mínimo) es que las derivada parciales en el punto se anulen. Se tiene:

$\nabla f(1,4)=(8,1) \neq (0,0)$. La función f no alcanza en (1,4) máximo relativamente a A.

3. (12 puntos) Sean $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \leq 4, x + y \leq 2, y \geq 0\}$ y

$f(x, y) = 4 - x^2 + 2xy - y^2$.

i) Utilizando las propiedades extremales de las funciones cóncavas y convexas, halla el punto o puntos donde se alcanza el máximo de f en X y su valor.

ii) Utilizando el gradiente de f en el tramo de frontera de X $\{(x, y) \in X \ / \ y = 0, \ -2 \leq x \leq 2\}$, explica qué puntos podrían ser extremos de f en este tramo de frontera.

iii) Comprueba que el punto $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ verifica las condiciones de Kuhn-Tucker. Sabiendo que este punto es el único del tramo de frontera de X $\left\{(x, y) \in X \ / \ x^2 + y^2 = 4\right\}$ que cumple las condiciones de Kuhn-Tucker y utilizando las propiedades extremales de las funciones cóncavas y convexas y los teoremas de Kuhn-Tucker, encuentra al menos un punto donde se alcanza el mínimo de f en X.

i) Utilizando las propiedades extremales de las funciones cóncavas y convexas, halla el punto o puntos donde se alcanza el máximo de f en X y su valor.

$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ es una función polinómica, aplicamos el método de la matriz hessiana:

$f_1(x,y)$=-2x+2y

$f_2(x,y)$=2x-2y

$f_{11}(x,y)$= -2

$f_{12}(x,y)$= 2

$f_{22}(x,y)$= -2

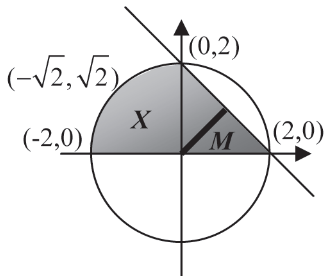
Como $H_f(x,y)=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ es semidefinida negativa, f es cóncava en todo $\mathbb{R}^2$.

Por las propiedades extremales de las funciones cóncavas sabemos que en los puntos que se anule el gradiente, $\nabla f(x,y) = (0,0)$, se alcanzan los máximos de f en X:

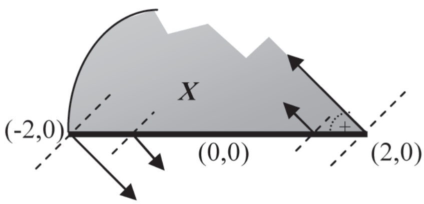
$\nabla f(x,y) = (-2x+2y,\ 2x-2y) = (0,0) \Rightarrow x=y$

$$M = \{(x,y) \in X \,/\, x = y\} = \overline{\mathbf{(0,0)(1,1)}}$$

y su valor es $\max\limits_{x,y \in X} f(x,y) = \mathbf{4}$.



ii)	Utilizando el gradiente de f en el tramo de frontera de X $\{(x,y) \in X \,/\, y=0,\ -2 \le x \le 2\}$, explica qué puntos podrían ser extremos de f en este tramo de frontera.



Si y = 0, entonces, $\nabla f(x,y) = (-2x,\ 2x)$

El punto (0,0) es un máximo (encontrado en el apartado anterior). En los otros puntos del segmento, salvo en el punto (2,0), no hay extremo (por las direcciones de los gradientes).En el punto (2,0) , se tiene $\nabla f(2,0) = (-4,\ 4)$, luego en este punto podría haber mínimo (ver la figura).

El punto **(2,0)** podría ser un mínimo, pero utilizando sólo el gradiente no se puede asegurar.

iii) Comprueba que el punto $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ verifica las condiciones de Kuhn-Tucker. Sabiendo que este punto es el único del tramo de frontera de X $\left\{(x,y)\in X \,/\, x^2+y^2=4\right\}$ que cumple las condiciones de Kuhn-Tucker y utilizando las propiedades extremales de las funciones cóncavas y convexas y los teoremas de Kuhn-Tucker, encuentra al menos un punto donde se alcanza el mínimo de f en X.

Escribamos el problema de forma estandar:

$\min[4 - x^2 + 2xy - y^2]$
$g^1(x,y) = x^2 + y^2 - 4 \le 0$
$g^2(x,y) = x + y - 2 \le 0$
$g^3(x,y) = -y \le 0$

Escribimos las condiciones de KT para este problema:

$KT1$: $\nabla f(x,y) + \lambda_1 \nabla g^1(x,y) + \lambda_2 \nabla g^2(x,y) + \lambda_3 \nabla g^3(x,y) = (0,0)$

$$\begin{bmatrix} -2x+2y \\ 2x-2y \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$KT2$: $\lambda_1 g^1(x,y) = \lambda_1 (x^2 + y^2 - 4) = 0$

$\lambda_2 g^2(x,y) = \lambda_2 (x + y - 2) = 0$

$\lambda_3 g^3(x,y) = \lambda_3 (-y) = 0$

$KT3$: $g^1(x,y) = x^2 + y^2 - 4 \le 0$

$g^2(x,y) = x + y - 2 \le 0$

$g^3(x,y) = -y \le 0$

$KT4$: $\lambda_1 \ge 0, \lambda_2 \ge 0, \lambda_3 \ge 0$ min

$\lambda_1 \le 0, \lambda_2 \le 0, \lambda_3 \le 0$ max

Vamos a comprobar si $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ verifica éstas condiciones :

$KT1$: Sustituyendo $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$:

$$\left.\begin{aligned} 4\sqrt{2} - \lambda_1 2\sqrt{2} + \lambda_2 &= 0 \\ -4\sqrt{2} + \lambda_1 2\sqrt{2} + \lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \lambda_1 = 2$$

$KT2$: $g^1(-\sqrt{2}, \sqrt{2})=0$; $g^2(-\sqrt{2}, \sqrt{2})<0$; $g^3(-\sqrt{2}, \sqrt{2})<0 \Rightarrow \lambda_2=\lambda_3=0$

$KT3$: $g^1(-\sqrt{2},\sqrt{2})\leq 0$; $g^2(-\sqrt{2},\sqrt{2})\leq 0$; $g^3(-\sqrt{2},\sqrt{2})\leq 0$

$KT4$: $\lambda_1= 2, \lambda_2= 0, \lambda_3= 0$ (*KT* de mínimo)

Por lo tanto, el punto $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ **sí** verifíca las condiciones de ***KT* de mínimo**.

Para saber si este punto es extremo, comprobamos las condiciones de regularidad:

$R1$: f, g^1, g^2, g^3 son diferenciables en $\mathbb{R}^2$ por ser funciones polinómicas.

$R2$: g^1, g^2 y g^3 son convexas; g^2 y g^3 son lineales por lo tanto convexas en $\mathbb{R}^2$, $g^1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$:

$$H_{g^1}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$ definida positiva por lo que g^1 es convexa.

$R3$: $\mathrm{int}(X)\neq\emptyset$ (por ejemplo el punto $(0,1) \in \mathrm{int}(X)$) $g^1(0,1)=-3<0$, $g^2(0,1)=-1<0$, $g^3(0,1)=-1<0$

$R4$: f es cóncava (encontrada en el primer apartado)

Las condiciones de regularidad de KT nos indican que son suficientes para el caso de máximo pero sólo son **necesarias** para el caso de mínimo por ser f cóncava.

Como la función es contínua (por ser polinómica) y el recinto X es un compacto, podemos asegurar que existen máximo y mínimo globales de f en X. Por las propiedades extremales de las funciones cóncavas, sabemos que si existe mínimo, al menos uno de ellos es vértice de X, por lo tanto los únicos vértices que pueden ser candidatos a mínimo son los puntos $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ y (2,0). Valorando la función en dichos puntos obtenemos:

$\boldsymbol{f(-\sqrt{2},\sqrt{2})= -4}$

$f(2,0)=0$

En el punto $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ se alcanza el mínimo de f en X y su valor es – 4.

4. (4 puntos) Un artesano dispone de 36 g. de cobre, 150 g. de estaño y 30 g. de oro para confeccionar pendientes y anillos. Para hacer un par de pendientes necesita 2 g. de cobre, 5 g. de estaño y 1 g. de oro mientras que para hacer un anillo necesita 1 g. de cobre, 5 g. de estaño y 2,5 g. de oro. El artesano vende cada par de pendientes a 20€ y cada anillo a 30€.

i) ¿Cuántas pares de pendientes y anillos debe realizar dicho artesano para maximizar sus ingresos?

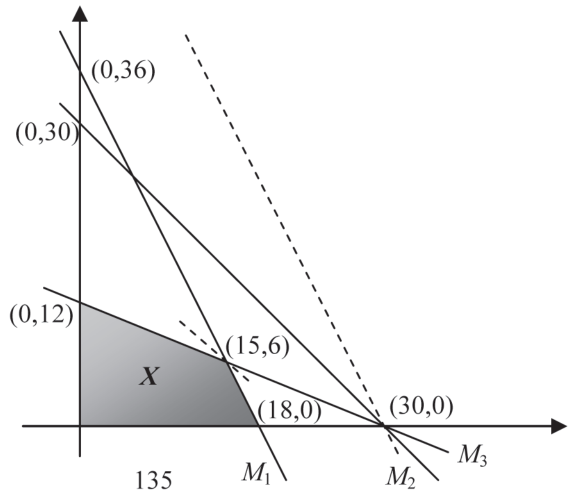
ii) Si pudiera conseguir más cobre, ¿cuántos gramos y a qué precio lo haría?

Consideramos las variables:

x_1: pares de pendientes

x_2 : anillos

$\max[20x_1 + 30x_2]$
$M_1: \quad 2x_1 + x_2 \leq 36$ $M_2: 5x_1 + 5x_2 \leq 150$ $M_3: x_1 + 2,5x_2 \leq 30$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$



i) ¿Cuántas pares de pendientes y anillos debe realizar dicho artesano para maximizar sus ingresos?

El conjunto de soluciones factibles X es el representado en la figura, evaluando la función en los vértices se tiene:

$f(0,0)=0$€

$f(0,12)=360$€

$f(15,6)=480$€

$f(18,0)=360$€

El máximo se alcanza en el punto (15,6), es decir debería realizar 15 pares de pendientes y 6 anillos para obtener un beneficio máximo de 480€ .

El máximo se alcanza en el vértice (15,6), intersección de las restricciones M_1 y M_3 ya que la pendiente de la función objetivo m_f ,está comprendida entre las pendientes de M_1 y M_3 (ver gráfico).

ii) Si pudiera conseguir más cobre, ¿cuántos gramos y a qué precio lo haría?

La restricción M_1, correspondiente a las disponibilidades de cobre está saturada, entonces puede interesarle disponer de más cantidad para aumentar los beneficios.

M_1: $2x_1+x_2 \leq 36+c$

(15,6) $\rightarrow$ (30,0)

$c=0$ $\rightarrow$ $c=24$

480€ $\rightarrow$ 600€

$$\lambda_1 = \frac{f(30,0) - f(15,6)}{24} = \frac{600 - 480}{24} = 5 \text{ euros/gr}$$

Debería conseguir **24 gr.** de cobre más, a un precio no superior a **5€** por gramo, y de esta manera el ingreso pasaría de 480 a 600 euros.

Examen de Matemáticas IV

Economía. Junio de 2003

1. *(6 puntos)* Sea la forma cuadrática: $Q(\boldsymbol{x})={}^tM(\boldsymbol{x})\begin{pmatrix} \alpha & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}M(\boldsymbol{x})$.

i) Encuentra los valores de α para los que se cumple:
   a) $\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$: $Q(\boldsymbol{x})\geq 0$; $\exists z\neq \boldsymbol{0}/Q(z)=0$.
   b) $\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$-$\{\boldsymbol{0}\}$: $Q(\boldsymbol{x})>0$.
   c) $\exists \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3/Q(\boldsymbol{x})>0$; $\exists \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^3/Q(\boldsymbol{y})<0$.

ii) Para $\alpha=0$ ¿cuál es el signo que toma $Q(x_1,0,x_3)$?

i) Encuentra los valores de α para los que se cumple:
   a) $\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$: $Q(\boldsymbol{x})\geq 0$; $\exists z\neq \boldsymbol{0}/Q(z)=0$.

Para que se cumpla que $\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$: $Q(\boldsymbol{x})\geq 0$; $\exists z\neq \boldsymbol{0}/Q(z)=0$, Q tiene que ser una forma cuadrática semidefinida positiva.

Calculamos los menores principales de $M(Q)$:

menores principales de orden 1: $\{\alpha,\alpha,1\}$

menores principales de orden 2: $\{\alpha^2-2,\alpha,\alpha-1\}$

menores principales de orden 3: $|M(Q)|=\alpha^2-\alpha-2$

Para que la forma cuadrática sea semidefinida positiva todos los menores principales tienen que ser mayor o igual que cero y $|M(Q)|=0$:

$\alpha\geq 0$

$\alpha\geq\sqrt{2}\ \vee\ \alpha\leq-\sqrt{2}$, $\alpha\geq 1$

$\alpha^2-\alpha-2=(\alpha-2)(\alpha+1)=0$, $\alpha=2\ \vee\ \alpha=-1$.

De donde, $\boldsymbol{\alpha=2}$.

i) Encuentra los valores de α para los que se cumple: b) $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$: $Q(\boldsymbol{x})>0$.

Para que se cumpla que $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$: $Q(\boldsymbol{x})>0$ la forma cuadrática debe ser definida positiva, y por tanto, todos los menores principales mayores que cero:

$\alpha > 0$

$\alpha > \sqrt{2} \lor \alpha < -\sqrt{2}$,$\alpha>1$

$\alpha^2-\alpha-2=(\alpha-2)(\alpha+1)>0$, entonces , $\alpha>2$ ó $\alpha<-1$.

De donde: α **>2**.

i) Encuentra los valores de α para los que se cumple: c) $\exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 / Q(\boldsymbol{x})>0$; $\exists \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3 / Q(\boldsymbol{y})<0$.

Para que se cumpla que $\exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 / Q(\boldsymbol{x})>0$; $\exists \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3 / Q(\boldsymbol{y})<0$ la forma cuadrática debe ser indefinida. Esta forma cuadrática no puede ser definida ni semidefinida negativa (un menor principal de orden 1 es positivo), entonces es indefinida para, α **<2**.

ii) Para $\alpha=0$ ¿cuál es el signo que toma $Q(x_1,0,x_3)$?

Para $\alpha=0$ se tiene:

$$Q(x_1,x_2,x_3) = {}^tM(x)\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} M(x) = x_3^2 + 2\sqrt{2}x_1x_2 + 2x_2x_3 \quad .$$

De donde: $Q(x_1,0,x_3) = x_3^2 \geq 0$

2. (8 puntos) Sea la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{x-y} & x\neq y\\[2mm] 2 & x=y\end{cases}$$

Encuentra las direcciones en las que está definida la derivada direccional de f en (0,0) y en (0,1).
¿Existe $\nabla f(0,0)$?, ¿existe $\nabla f(0,1)$?, por qué? En caso de que existan, calcúlalos.

En el punto (0,0) la función no es diferenciable (no es continua ni derivable en (0,0)). Sea $v=(v_1, v_2)\neq(0,0)$ calculamos la derivada direccional de f en (0,0):

$$D_v f(0,0)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{f(tv_1,tv_2)-f(0,0)}{\|t\boldsymbol{v}\|}=\begin{cases}=\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\dfrac{2-2}{\|t\boldsymbol{v}\|}=0 & \text{si } v_1=v_2\\[4mm] =\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\dfrac{\dfrac{t^2v_1^2}{tv_1-tv_2}-2}{\|t\boldsymbol{v}\|}\ \textit{no existe} & \text{si } v_1\neq v_2\end{cases}$$

La derivada direccional de f en el punto (0,0) está definida únicamente en las direcciones $v=(v_1, v_2)\neq(0,0)$ tal que $v_1=v_2$.

Veamos que en el punto (0,1) f es diferenciable:

$$f_1(x,y)=\frac{x^2-2xy}{(x-y)^2}$$

$$f_2(x,y)=\frac{x^2}{(x-y)^2}$$

estas funciones son continuas en un entorno de (0,1), por tanto, f es diferenciable en (0,1), existe entonces, la derivada direccional en cualquier dirección y se tiene:

$$D_v f(0,1)=\frac{v_1f_1(0,1)+v_2f_2(0,1)}{\|\boldsymbol{v}\|}=\frac{v_1\left[\dfrac{x^2-2xy}{(x-y)^2}\right]_{(0,1)}+v_2\left[\dfrac{x^2}{(x-y)^2}\right]_{(0,1)}}{\|\boldsymbol{v}\|}=0$$

Como f no es diferenciable en (0,0) no existe $\nabla f(0,0)$.

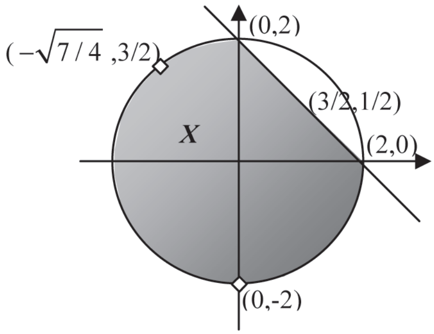
En (0,1), f es diferenciable, por tanto, existe $\nabla f(0,1)$ y se tiene:

$$\nabla f(0,1)=\left(f_1(0,1),f_2(0,1)\right)=\left(\left[\frac{x^2-2xy}{(x-y)^2}\right]_{(0,1)},\left[\frac{x^2}{(x-y)^2}\right]_{(0,1)}\right)=(0,0)$$

3. (10 puntos) Sea la función $f(x,y)=x^2+3y$ y el conjunto $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x^2+y^2\leq 4;\ x+y\leq 2\}$. Plantea el problema de programación no lineal para esta función objetivo y este conjunto de soluciones factibles. i) Encuentra todos los puntos que cumplen las condiciones de Kuhn-Tucker. ii) Utilizando los teoremas de Kuhn-Tucker, encuentra el mínimo de f en X. iii) Encuentra el máximo de f en X.

Problema estandar:

$\max/\min\ [x^2+3y]$
$g^1(x,y)=x^2+y^2-4\leq 0$ $g^2(x,y)=x+y-2\leq 0$



Gradientes: $\nabla f(x,y)=(2x,3)$; $\nabla g^1(x,y)=(2x,2y)$; $\nabla g^2(x,y)=(1,1)$.

i) Encuentra todos los puntos que cumplen las condiciones de Kuhn-Tucker.

Condiciones de Kuhn-Tucker:

$$KT1:\ \nabla f(x,y)+\lambda_1\nabla g^1(x,y)+\lambda_2\nabla g^2(x,y)=(0,0)$$

$$\begin{bmatrix}2x\\3\end{bmatrix}+\lambda_1\begin{bmatrix}2x\\2y\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$KT2:\ \lambda_1 g^1(x,y)=\lambda_1(x^2+y^2-4)=0$$

$$\lambda_2 g^2(x,y)=\lambda_2(x+y-2)=0$$

$$KT3:\ g^1(x,y)=x^2+y^2-4\leq 0$$

$$g^2(x,y)=x+y-2\leq 0$$

$$KT4:\ \lambda_1\geq 0,\lambda_2\geq 0\ \min$$

$$\lambda_1\leq 0,\lambda_2\leq 0\,\max$$

*De la condición KT*2 podemos deducir:

a) $\lambda_1=\lambda_2=0$

*KT*1: $\nabla f(x,y)=(0,0)=(2x,3)$ no hay ningún punto que lo verifique.

b) $\lambda_1=g^2(x,y)=0$

*KT*1: $\nabla f(x,y)+\lambda_2\nabla g^2(x,y)=(0,0)$

$(2x,3)+\lambda_2(1,1)=(0,0)$

$$\left.\begin{array}{r} 2x+\lambda_2=0 \\ 3+\lambda_2=0 \\ x+y-2=0 \end{array}\right\} \textbf{(3/2,1/2) con } \lambda_2\textbf{=-3, } \lambda_1\textbf{=0 (KT4- máximo)}$$

*KT*3: $(g^1(3/2,1/2)=-3/2<0)$

c) $\lambda_2=g^1(x,y)=0$

*KT*1: $\nabla f(x,y)+\lambda_1\nabla g^1(x,y)=(0,0)$

$(2x,3)+\lambda_1(2x,2y)=(0,0)$

$$\left.\begin{array}{r} 2x+2x\lambda_1=0 \\ 3+2y\lambda_1=0 \\ x^2+y^2-4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} (0,2),\ \lambda_1=-3/4,\ \lambda_2=0 \\ (0,-2),\ \lambda_1=3/4,\ \lambda_2=0 \\ (\sqrt{7/4},3/2),\ \lambda_1=-1,\ \lambda_2=0 \\ (-\sqrt{7/4},3/2),\ \lambda_1=-1,\ \lambda_2=0 \end{cases}$$

Los puntos que verifican *KT*3 son:

(0,2) con λ_1=-3/4, λ_2=0 (KT4- máximo)

(0,-2) con λ_1=3/4, λ_2=0 (KT4- mínimo)

(-$\sqrt{7/4}$,3/2) con λ_1=-1, λ_2=0 (KT4- máximo)

d) $g^1(x,y)=g^2(x,y)=0$

Los puntos que verifican las dos ecuaciones son: (0,2) y (2,0) .El punto (0,2) ha sido obtenido anteriormente, por lo tanto sólo queda por estudiar el punto(2,0) :

*KT*1: $\nabla f(2,0)+\lambda_1\nabla g^1(2,0)+\lambda_2\nabla g^2(2,0)=(0,0)$

$(4,3)+\lambda_1(4,0)+\lambda_2(1,1)=(0,0)$

$$\left.\begin{array}{r} 4+4\lambda_1+\lambda_2=0 \\ 3+\lambda_2=0 \end{array}\right\} \lambda_1=-1/4,\ \lambda_2=-3$$

Es decir: **(2,0) con λ_1=-1/4, λ_2=-3 (KT4- máximo)**.

ii) Utilizando los teoremas de Kuhn-Tucker, encuentra el mínimo de f en X.

Estudiamos las condiciones de regularidad:

$R1$: f,g^1,g^2 son diferenciables. Las tres son funciones polinómicas.

$R2$: g^1,g^2 son convexas. g^2 es lineal por lo tanto convexa y $g^1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$ su matriz Hessiana: $H_{g^1}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, definida positiva por lo tanto, g^1 convexa.

$R3$: $\begin{matrix} g^1(0,0) = 0+0-4 < 0 \\ g^2(0,0) = 0+0-2 < 0 \end{matrix}$

$R4$: Siendo $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ su matriz Hessiana será: $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, definida positiva por lo tanto, f es convexa.

En conclusión:

Para un problema de máximo se tiene: se cumplen las condiciones R1, R2 y R3, entonces, todo máximo necesariamente tiene que verificar las condiciones de Kuhn-Tucker.

Para un problema de mínimo se tiene: se cumplen las condiciones R1, R2, R3 y R4, entonces, para que un punto sea mínimo es necesario y suficiente que cumpla las condiciones de Kuhn-Tucker.

Entonces el punto **(0,-2)** es el **mínimo global** de f en X.

iii) Encuentra el máximo de f en X.

La función f es contínua y X es compacto, por lo que existen el máximo y el mínimo globales de f en X. Dichos puntos deben verificar, como se ha visto en el apartado (ii) las condiciones de Kuhn-Tucker.

Se han encontrado en el apartado(i) cuatro puntos que verifican las condiciones necesarias de Kuhn-Tucker de máximo.Valorando la función objetivo en dichos puntos:

$f(3/2,1/2)=15/4$

$f(0,2)=6$

$\boldsymbol{f(-\sqrt{7/4},3/2)=25/4}$

$f(2,0)=4$

Por lo tanto, el punto $\boldsymbol{(-\sqrt{7/4},3/2)}$ es el **máximo global** de f en X *y su valor es* ***25/4.***

4. (6 puntos) Una industria química se dedica a comercializar dos productos de limpieza: garbiplus y garbinet. Para producirlos utiliza dos tipos de disolventes convenientemente mezclados con agua: para producir un litro de garbiplus se utilizan 0,005 litros de disolvente I y 0,006 litros de disolvente II mientras que para producir garbinet se necesitan 0,005 litros y 0,004 litros respectivamente de disolvente I y II. Las cantidades de disolventes disponibles por la industria son de 15 litros diarios del de tipo I y 16 litros diarios del de tipo II, y por problemas de almacenamiento, debe utilizar al menos 10 litros de disolvente tipo I diariamente. Si por cada litro de garbiplus obtiene un beneficio de 8 € y por cada litro de garbinet 6 €,

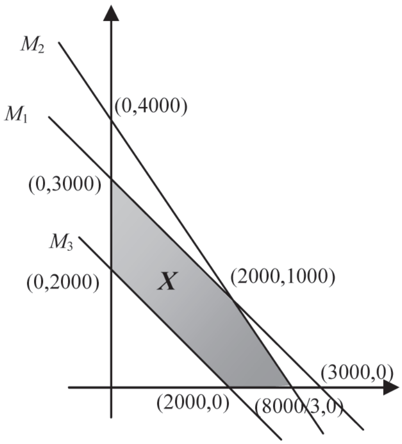
i) Calcula la producción diaria de los productos de limpieza que maximice sus beneficios.
ii) Si la industria pretendiera producir únicamente garbinet, cuál debería ser el beneficio por litro de garbiplus?
iii) Si le ofrecen incrementar la disponibilidad de los disolventes, ¿cuántos litros de más de cada disolvente estaría dispuesta a adquirir? ¿a qué precio?

Se consideran las variables

x_1: litros de garbiplus

x_2: litros de garbinet

$\max[8x_1 + 6x_2]$
$M_1 : 0,005x_1 + 0,005x_2 \leq 15$ $M_2 : 0,006x_1 + 0,004x_2 \leq 16$ $M_3 : 0,005x_1 + 0,005x_2 \geq 10$
$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$



i) Calcula la producción diaria de los productos de limpieza que maximice sus beneficios.

El conjunto de soluciones factibles X es compacto y la función objetivo es continua por lo que se puede asegurar que el problema tiene solución. Además, sabemos que una solución se encuentra en un vértice. Evaluando la función en los vértices, se tiene:

$f(0,2000)=12000$ €

$f(2000,0)=16000$ €

$f(8000/3,0)=21333,33$ €

$f(2000,1000)=22000$ €

$f(0,3000)=18000$ €

El valor máximo es de 22000 €, y se alcanza produciendo 2000 litros de garbiplus y 1000 litros de garbinet.

Mediante las pendientes de las restricciones obtendríamos:

$$-\infty \xleftrightarrow{(8000/3,0)} m_2 = -3/2 \xleftrightarrow{(2000,1000)} m_1 = -1 \xleftrightarrow{(0,3000)} 0$$

Como la pendiente de la función objetivo es m_f=-4/3 comprendida entre los valores de las pendientes de m_1 y m_2 , la solución óptima se alcanza en el punto de intersección de las restricciones M_1 y M_2.

> ii) Si la industria pretendiera producir únicamente garbinet, cuál debería ser el beneficio por litro de garbiplus?

Para que la solución óptima se alcance produiendo solo x_2 (garbiplus) el punto óptimo tendría que ser (0,3000) . Llamando p_{gp} al beneficio por litro de garbiplus, tenemos que la pendiente de las curvas de nivel de la función objetivo $m_f = -\frac{p_{gp}}{6}$ debería ser $m_1 < m_f$ y entonces:

$$-1 < m_f \Rightarrow -1 < -\frac{p_{gp}}{6} \Rightarrow 1 > \frac{p_{gp}}{6} \Rightarrow 6 > p_{gp}$$

Por lo tanto, el beneficio de garbiplus debería ser inferior a 6€.

> iii) Si le ofrecen incrementar la disponibilidad de los disolventes, ¿cuántos litros de más de cada disolvente estaría dispuesta a adquirir? ¿a qué precio?

En el óptimo, las dos restricciones correspondientes a los disolventes están saturadas, por lo tanto, puede ser interesante disponer de más cantidades de ambos. Veamos en que cantidad y a que precio.

M_1: $0{,}005x_1+0{,}005x_2 \leq 15+a$

$(2000,1000) \rightarrow (0,4000)$

$a=0 \rightarrow a=5$

22000€→24000€

$\lambda_1 = \frac{f(0,4000) - f(2000,1000)}{5} = \frac{24000 - 22000}{5}$ =**400 euros/litro**

En el segundo caso tenemos:

M_2: $0{,}006x_1+0{,}004x_2 \leq 16+b$

$(2000{,}1000) \to (3000{,}0)$

$b=0 \to b=2$

22000€→24000€

$\lambda_2 = \dfrac{f(3000,0)-f(2000,1000)}{2} = \dfrac{24000-22000}{2}$ =**1000 euros/litro**

En conclusión, del disolvente I podría aumentar en 5 litros a un precio inferior a 400€/litro del disolvente II debería aumentar en 2 litros a un precio inferior a 1000 €/ litro. En ambos casos el óptimo pasaría de 22000€ a 24000€.

Examen de Matemáticas IV

Economía. Septiembre de 2002

1. (10 puntos) Sea el conjunto $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / 0\leq x\leq 1; 0\leq y\leq 1\}$ y la función $f(x,y)=\alpha x^2+\alpha y^2+2\alpha xy$.

i) Estudia la concavidad o convexidad de f en $\mathbb{R}^2$ para todos los valores de α.

ii) ¿Para qué valores de α se cumple que $\min\limits_{\boldsymbol{x}\in A} f(\boldsymbol{x}) = f(0,0)$?

iii) ¿Para qué valores de α se cumple que $\max\limits_{\boldsymbol{x}\in A} f(\boldsymbol{x}) = f(0,0)$?

iv) Sea $\alpha=2$. Utilizando las propiedades extremales halla al menos un punto donde se alcance el máximo de f en A.

Cualquiera que sea α la función f es de clase C^2 en $\mathbb{R}^2$

i) Estudia la concavidad o convexidad de f en $\mathbb{R}^2$ para todos los valores de α.

Utilizando la caracterización de las funciones convexas y cóncavas de clase C^2, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x,y) = 2\alpha x + 2\alpha y \\ f_2(x,y) = 2\alpha y + 2\alpha x \\ f_{11}(x,y) = 2\alpha \\ f_{12}(x,y) = 2\alpha \\ f_{22}(x,y) = 2\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2\alpha & 2\alpha \\ 2\alpha & 2\alpha \end{pmatrix}$$

Cuando $\alpha \geq 0$ la matriz $H_f(x,y)$ es definida o semidefinida positiva, por tanto, f convexa en $\mathbb{R}^2$

Cuando $\alpha \leq 0$ la matriz $H_f(x,y)$ es definida o semidefinida negativa, por tanto, f cóncava en $\mathbb{R}^2$

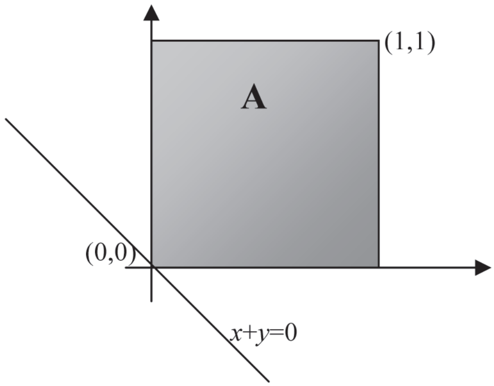
Se utilizan las propiedades extremales de las funciones convexas y cóncavas para los apartados (ii), (iii) y (iv).

ii) ¿Para qué valores de α se cumple que $\min\limits_{\boldsymbol{x}\in A} f(\boldsymbol{x}) = f(0,0)$?

El conjunto A es convexo, veamos en que puntos se anula el gradiente de f:

$\nabla f(x,y)=(2\alpha x+2\alpha y,\ 2\alpha y+2\alpha x)=(0,0) \Rightarrow x+y=0$

Para $\alpha \geq 0$ f convexa en A y, por tanto, en (0,0) alcanza un mínimo relativamente a A, es decir, $\min\limits_{(x,y)\in A} f(x,y) = f(0,0)$



iii) ¿Para qué valores de α se cumple que $\max\limits_{(x,y)\in A} f(x,y) = f(0,0)$?

Hemos visto que el gradiente de f se anula en $x+y=0$, entonces para $\alpha \leq 0$ f es cóncava en A y, por tanto, en (0,0) f alcanza un máximo en A, es decir, $\max\limits_{(x,y)\in A} f(x,y) = f(0,0)$.

iv) Sea $\alpha=2$. Utilizando las propiedades extremales halla al menos un punto donde se alcance el máximo de f en A.

Para $\alpha=2$ se tiene $f(x,y)=2x^2+2y^2+4xy$, función convexa en el convexo y compacto A, entonces, existe un vértice en el que alcanza su máximo global relativamente a A.

Los vértices de A son (0,0), (1,0), (1,1) y (0,1). Evaluando la función en estos puntos se tiene que en (1,1) f alcanza máximo global en A.

2. (12 puntos) Sea la función $f(x,y)=y+ax^2$ y el conjunto $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x^2\leq y+2;\ y\leq 2-x^2\}$.

i) Utilizando los teoremas de Kuhn-Tucker encuentra los valores de a para los que se puede asegurar que (0,-2) es un mínimo de f en X. Razona la respuesta.

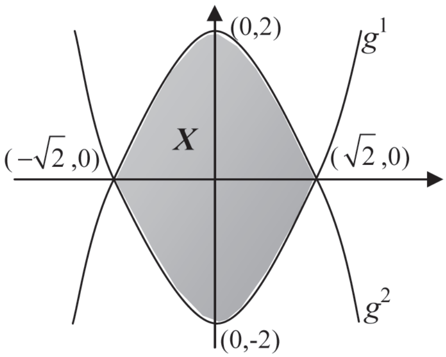
ii) Utilizando los teoremas de Kuhn-Tucker encuentra los valores de a para los que se puede asegurar que (0,-2) no es un máximo de f en X. Razona la respuesta.

iii) Resuelve el problema de programación no lineal:

$$\text{Máx } (y + 2x^2)$$
$$x^2 \leq y + 2$$
$$y \leq 2 - x^2$$

Escribimos el problema en su forma canónica:

$\max/\min[y + ax^2]$
$g^1(x,y) = x^2 - y - 2 \leq 0$
$g^2(x,y) = x^2 + y - 2 \leq 0$



i) Utilizando los teoremas de Kuhn-Tucker encontrar los valores de a para los que se puede asegurar que (0,-2) es un mínimo de f en X.

Veamos si el punto (0,-2) verifica las condiciones de Kuhn-Tucker:

$$KT1:\quad \begin{bmatrix} 2ax \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 2x \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En (0,-2) se tiene: $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 1 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$

$KT2$: $\lambda_1(x^2\text{-}y\text{-}2)=0$; $\lambda_2(x^2+y\text{-}2)=0$

En (0,-2) se tiene: $\lambda_2=0$

$KT3$: $x^2\text{-}y\text{-}2=0$; $x^2+y\text{-}2<0$

$KT4$: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=0$

Por tanto, (0,-2) verifica las condiciones de Kuhn-Tucker de mínimo Veamos si se verifican las condiciones de regularidad para poder aplicar los teoremas de Kuhn-Tucker

$R1$: f, g^1,g^2 son diferenciables en el abierto convexo $\mathbb{R}^2$.

$R2$: g^1, $g^2 \in C^2(\mathbb{R}^2)$: se tiene $H_{g^1}(x,y) = H_{g^2}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

luego g^1 y g^2 convexas en $\mathbb{R}^2$.

$R3$: $g^1(0,0) = g^2(0,0) = -2 < 0$

$R4$: $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ y $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Para $a \geq 0$ f es una función convexa en X y para $a \leq 0$ f es cóncava en X.

Entonces, para $a \geq 0$ podemos asegurar que (0,-2) es un mínimo de f en X.

ii) Utilizando los teoremas de Kuhn-Tucker encontrar los valores de a para los que se puede asegurar que (0,-2) no es un máximo de f en X.

Como se verifican las condiciones de regularidad R1, R2 y R3 se cumple que si un punto es máximo de f en X, entonces, necesariamente tiene que cumplir las condiciones de KT para un problema de máximo. Por tanto, como (0,-2) no cumple KT de máximo podemos asegurar que en (0,-2) f no alcanza máximo en X para todo $a \in \mathbb{R}$.

iii) Resuelve el problema de programación no lineal:
Máx $(y + 2x^2)$
$x^2 \leq y + 2$
$y \leq 2 - x^2$

Escribimos el problema en su forma canónica

$\max[y + 2x^2]$
$g^1(x,y) = x^2 - y - 2 \leq 0$
$g^2(x,y) = x^2 + y - 2 \leq 0$

Veamos que puntos verifican las condiciones de KT.

$KT1$: $\nabla f(x,y)+\lambda_1\nabla g^1(x,y)+\lambda_2\nabla g^2(x,y)=(0,0)$

$$\begin{bmatrix}4x\\1\end{bmatrix}+\lambda_1\begin{bmatrix}2x\\-1\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}2x\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}-2x+4y+2\lambda_1 x=0\\4x-8y-\lambda_1+\lambda_2=0\end{cases}$$

$KT2$: $\lambda_1 g^1(x,y)=\lambda_1(x^2-y-2)=0$

$\lambda_2 g^2(x,y)=\lambda_2(x^2+y-2)=0$

$KT3$: $g^1(x,y)=x^2-y-2\leq 0$

$g^2(x,y)=x^2+y-2\leq 0$

$KT4$: $\lambda_1\geq 0,\lambda_2\geq 0$ min

$\lambda_1\leq 0,\lambda_2\leq 0$ max

De *KT2* pueden presentarse alguna de las cuatro posibilidades:

a) $\lambda_1=\lambda_2=0$

sustituyendo en KT1: $(4x,1)=(0,0)$ no hay solución.

b) $\lambda_1=0$ y $g^2=0$

de *KT1*: $\begin{cases}x(4+2\lambda_2)=0\\1-\lambda_2=0\end{cases}\Rightarrow (0,2)$, λ_2=-1

este punto verifica también $KT3$ y $KT4$(max).

c) $\lambda_2=0$ y $g^1=0$

de *KT1*: $\begin{cases}x(4+2\lambda_1)=0\\1-\lambda_1=0\end{cases}\Rightarrow (0,-2)$, λ_1=1

este punto verifica también $KT3$ y $KT4$(min).

d) $g^1=g^2=0$.

En este caso, hay que estudiar los puntos: $(\sqrt{2},0)$ y $(-\sqrt{2},0)$

Para $(\sqrt{2},0)$ de $KT1$: $\begin{cases}4\sqrt{2}+2\sqrt{2}\lambda_1+2\sqrt{2}\lambda_2=0\\1-\lambda_1+\lambda_2=0\end{cases}\Rightarrow \lambda_1$=-1/2 y λ_2=-3/2

Para($-\sqrt{2}$,0) de $KT1$: $\begin{cases} -4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\lambda_1 - 2\sqrt{2}\lambda_2 = 0 \\ 1 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \lambda_1$=-1/2 y λ_2=-3/2

Para este problema se cumplen las condiciones de regularidad R1, R2, y R3, por tanto, se tiene que si un punto es máximo de f en X tiene que cumplir necesariamente las condiciones de KT de máximo.

Se tiene, además, que f es continua en el compacto X y, por tanto, es seguro que f alcanza máximo en el conjunto X.

El máximo se alcanza, entonces, en uno o algunos de los puntos que verifican KT de máximo, evaluando la función en los puntos (0,2), ($\sqrt{2}$,0) y (– $\sqrt{2}$,0), podemos concluir que:

$$\max_{(x,y)\in X} f(x,y) = f(\sqrt{2},0) = f(-\sqrt{2},0) = 4$$

3. (8 puntos) En una fábrica artesanal se hacen zapatos y botas. Para ello dispone semanalmente de 120 piezas de cuero y tiene 6 trabajadores que cada uno trabaja 7 horas diarias durante 4 días a la semana. Para hacer un par de zapatos se necesitan 4 horas de trabajo y 2 piezas de cuero y para un par de botas 3 horas de trabajo y 3 piezas de cuero. El empresario sabe que vende todo lo que produce y que con los clientes fijos tiene vendidos de antemano 10 pares de botas.

i) Si el precio de los zapatos es de 80 € y el de las botas de 75 €, encuentra la producción semanal que maximiza los ingresos.

ii) ¿Entre qué precios máximo y mínimo puede oscilar el precio de los zapatos sin que varíe la solución óptima hallada en el apartado anterior?

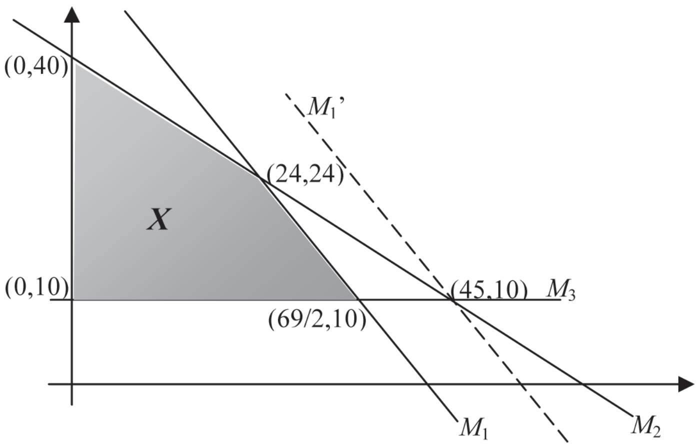
iii) ¿Le interesa al empresario contratar un aprendiz que trabaje 4 horas diarias a 10 € la hora?

Se consideran las variables

x_1: producción semanal de zapatos

x_2: producción semanal de botas

$\max[80x_1 + 75x_2]$
$M_1 : 4x_1 + 3x_2 \leq 168$ $M_2 : 2x_1 + 3x_2 \leq 120$ $M_3 : \quad x_2 \geq 10$
$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$



i) Si el precio de los zapatos es de 80 € y el de las botas de 75 €, encuentra la producción semanal que maximiza los ingresos.

Se calculan las pendientes de las curvas de nivel de la función objetivo, $m_{f,}$ y de la rectas M_1 y M_2, m_1 y m_2; de la relación. $m_1 = -\frac{4}{3} < m_f = -\frac{80}{75} < m_2 = -\frac{2}{3}$, se tiene que la solución se encuentra en el punto (24,24).

La producción optima es de 24 zapatos y 24 botas y el beneficio es de 3720€.

ii) ¿Entre qué precios máximo y mínimo puede oscilar el precio de los zapatos sin que varíe la solución óptima hallada en el apartado anterior?

Denotando p_z al precio de los zapatos, la pendiente de las curvas de nivel de la función objetivo será $m_f = -\frac{p_z}{75}$. Para obtener la misma solución que en (i) se tiene que cumplir la relación:

$$m_1 = -\frac{4}{3} < m_f = -\frac{p_z}{75} < m_2 = -\frac{2}{3}$$

de donde: $50 < p_z < 100$.

iii) ¿Le interesa al empresario contratar un aprendiz que trabaje 4 horas diarias a 10 € la hora?

En el óptimo se tiene 4·24 + 3·24 = 168, esta restricción está saturada.

Por tanto, le podría interesar al empresario incrementar las horas que se trabajan en el taller hasta un total de 210 horas (4·45 + 3·10 = 210).

El precio sombra correspondiente será:

$$\lambda 1 = \frac{f(45,10) - f(24,24)}{210 - 168} = 15 \text{ €/hora}$$

Le interesaría aumentar el número de horas trabajadas en el taller, hasta un máximo de 42 horas semanales, pagando la hora a menos de 15€/hora.

En conclusión, sí le interesa contratar un aprendiz durante 16 horas semanales (4horas·4días) pagando la hora a 10€.

Examen de Matemáticas IV

Economía. Junio de 2002

1. (8 puntos) Sea la forma cuadrática Q definida como

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + ax_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3;\ a\in\mathbb{R}.$$

i) Encuentra los valores de a tales que $\exists \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3/\ Q(\boldsymbol{x})=0$.
ii) Encuentra los valores de a tales que $\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3:\ Q(\boldsymbol{x})\geq 0$.
iii) Encuentra los valores de a tales que $\exists \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3/\ Q(\boldsymbol{x})<0$.

Sea $M(Q)$ la matriz de representación de la forma cuadrática Q, se tiene entonces:

$$M(Q) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ -1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Menores principales de orden 1: $\{1, a, a\}$

Menores principales de orden 2: $\{a-1, a-1, a^2\}$

Menores principales de orden 3: $|M(Q)| = a^2 - 2a = a(a-2)$

i) Encuentra los valores de a tales que $\exists \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3/\ Q(\boldsymbol{x})=0$.

Como Q(0,0,0)=0, entonces $\forall a$ se cumple que $\exists \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3/\ Q(\boldsymbol{x})=0$.

ii) Encuentra los valores de a tales que $\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3:\ Q(\boldsymbol{x})\geq 0$.

En este caso la forma cuadrática tiene que ser definida positiva o semidefinida positiva.

Definida positiva: Menores principales mayores que cero, por tanto

Menores principales de orden 1 mayores que 0: $a>0$.

Menores principales de orden 2 mayores que 0: $a>1$.

Menores principales de orden 3 $|M(Q)|$: $a>2$**.**

Semidefinida positiva: Menores principales mayores o igual que cero y determinante igual a 0:

Menores principales de orden 1 mayores que 0: $a\geq 0$.

Menores principales de orden 2 mayores que 0: $a\geq 1$.

Menores principales de orden 3 $|M(Q)|=0$: $a=2$**.**

Por tanto, cuando $\boldsymbol{a\geq 2}$**,** se cumple que $\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$: $Q(\boldsymbol{x})\geq 0$.

iii) Encuentra los valores de a tales que $\exists \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3/\ Q(\boldsymbol{x})<0$.

En este caso la forma cuadrática Q puede ser definida negativa, semidefinida negativa o indefinida.

Como un menor principal de orden impar es positivo ($1>0$) esta forma cuadrática no es ni definida negativa o semidefinida negativa, por tanto, para que $\exists \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3/\ Q(\boldsymbol{x})<0$, Q ha de ser indefinida, es decir, $\boldsymbol{a<2}$.

2. (14 puntos) Sean $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ y\geq x^2,\ \ y\leq x+2\}$ y

$$f(x,y)=x^2+y^2-2xy+4x-4y.$$

i) Utilizando las propiedades extremales de las funciones cóncavas y convexas, halla $\min\limits_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x})$, indicando los puntos en los que se alcanza.

ii) Comprueba que el punto $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ cumple las condiciones de Kuhn-Tucker para el problema de máximo de f en X.

iii) ¿Puede concluirse que el punto $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ es un óptimo de f en X?

i) Utilizando las propiedades extremales de las funciones cóncavas y convexas, halla $\min\limits_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x})$, indicando los puntos en los que se alcanza.

Se tiene que $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$; las derivadas parciales de f son:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x,y) = 2x - 2y + 4 \\ f_2(x,y) = 2y - 2x - 4 \\ f_{11}(x,y) = 2 \\ f_{12}(x,y) = -2 \\ f_{22}(x,y) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

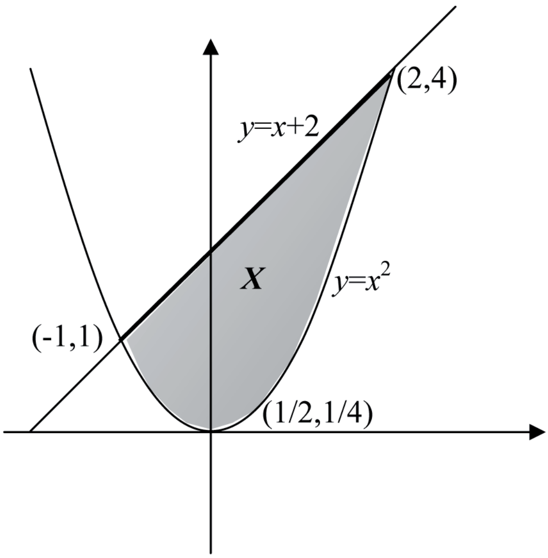
$X_f(x, y)$ es semidefinida positiva y, por lo tanto, f es convexa en $\mathbb{R}^2$.

Además, $X \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto convexo y f es convexa en X entonces en los puntos en los que se anula el gradiente f alcanza mínimo relativamente a X.

$\nabla f(x,y) = (2x\text{-}2y\text{+}4,\ 2y\text{-}2x\text{-}4) = 0 \Rightarrow y\text{-}x = 2$:

La función alcanza mínimo en X en todos los puntos del segmento:

$$\{(x,y) \in X \ / \ y\text{-}x{=}2\} = \overline{(-1,1)(2,4)}\,.$$



Además, no puede alcanzar mínimo en otro punto, puesto que siendo f convexa en X el conjunto de puntos donde alcanza mínimo es un conjunto convexo.

ii) Comprueba que el punto $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$ cumple las condiciones de Kuhn-Tucker para el problema de máximo de f en X.

El problema en su forma canónica es el siguiente:

$\max/\min\,[x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 4y]$
$g^1(x,y) = x^2 - y \le 0$ $g^2(x,y) = y - x - 2 \le 0$

Las condiciones de KT de máximo o mínimo para este problema son:

$KT1:\ \nabla f(x,y) + \lambda_1 \nabla g^1(x,y) + \lambda_2 \nabla g^2(x,y) = (0,0)$

$$\begin{bmatrix} 2x - 2y + 4 \\ 2y - 2x - 4 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 2x \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$KT2:\ \lambda_1 g^1(x,y) = \lambda_1 (x^2 - y) = 0$

$\lambda_2 g^2(x,y) = \lambda_2 (y - x - 2) = 0$

$KT3:\ g^1(x,y) = x^2 - y \le 0$

$g^2(x,y) = y - x - 2 \le 0$

$KT4:\ \lambda_1 \ge 0, \lambda_2 \ge 0$ min

$\lambda_1 \le 0, \lambda_2 \le 0$ max

Veamos si el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ las verifica:

$KT1$: $$\begin{bmatrix} 9/2 \\ -9/2 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -9/2 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$KT2$: $\lambda_1 (x^2 - y) = -\frac{9}{2} \cdot 0 = 0$; $\lambda_2 (y - x - 2) = 0$

$KT3$: $x^2 - y \le 0$; $y - x - 2 \le 0$; $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \in X$

$KT4$: $\lambda_1 = -\frac{9}{2}$; $\lambda_2 = 0$

Por tanto, verifica las condiciones de KT para un problema de máximo.

iii) ¿Puede concluirse que el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ es un óptimo de f en X?

Vamos acomprobar si se verifican las condiciones de regularidad para utilizar los teoremas de KT

$R1$: f, g^1,g^2 son funciones diferenciables en el abierto convexo $\mathbb{R}^2$.

$R2$: g^1 y g^2 son convexas en $\mathbb{R}^2$:

$g^1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$: $H_{g^1}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, y por tanto g^1 es convexa en $\mathbb{R}^2$.

g^2 es lineal en $\mathbb{R}^2$ y por tanto g^2 es convexa en $\mathbb{R}^2$.

$R3$: $g^1(0,1) < 0$

$g^2(0,1) < 0$

$R4$: f convexa en X

Se tiene entonces que, si $\boldsymbol{x}$ es máximo de f en X, entonces $\boldsymbol{x}$ tiene que verificar las condiciones de KT para el problema de máximo.

Por tanto, para saber si el punto $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ es máximo de f en X es necesario encontrar todos los puntos que verifican las condiciones de KT para un problema de máximo.

Teniendo en cuenta (apartado i) que en los puntos del segmento $\overline{(-1,1)(2,4)}$ la función f alcanza mínimo en X (y que la función no es constante) quedan únicamente por estudiar los puntos de X que verifican $g^1(x,y) = 0$.

Las condiciones de KT para este tramo de frontera de X quedarían:

$g^1(x,y) = 0$ y $\lambda_2 = 0$

$$\begin{cases} 2x - 2y + 4 + 2\lambda_1 x = 0 \\ 2y - 2x - 4 - \lambda_1 = 0 \\ x^2 - y = 0 \end{cases}$$

Se obtiene el punto $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$, con $\lambda_1 = -\frac{9}{2}$ y $\lambda_2 = 0$.

El único punto que verifica las condiciones de KT para un problema de máximo es $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ y sabiendo que f alcanza máximo en X puesto que es una función continua en un conjunto compacto se tiene que este punto es máximo de f en X.

3. (8 puntos) Una pastelería artesana produce bizcochos y magdalenas como sus especialidades. Diariamente dispone de 10 docenas de huevos de granja, 18 kilos de harina ecológica y 24 kilos de azúcar de caña con los que realiza sus especialidades: para producir una hornada de bizcochos necesita 1 docena de huevos, 2 kilo de harina y 1 kilo de azúcar, mientras que para producir una hornada de magdalenas necesita 1 docena de huevos, 1 kilo de harina y 3 kilos de azúcar. Por cada hornada de bizcochos obtiene un ingreso de 8€ y por cada hornada de magdalenas 6€.

i) Calcula el número de hornadas diarias de cada una de las especialidades para que el pastelero obtenga el ingreso máximo.

ii) Si el pastelero decide disminuir la producción de bizcochos ¿Cuál es el ingreso por las magdalenas a partir del cual consigue su actual objetivo?

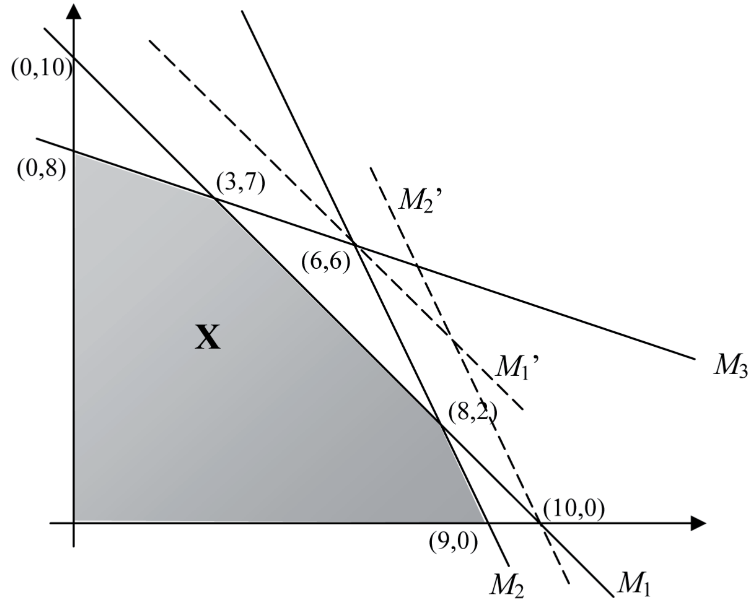
iii) Si pudiera incrementar el número de docenas de huevos y los kilos de harina diarias, ¿en cuánto lo haría? ¿cuánto estaría dispuesto a pagar por ellos?

Se consideran las variables:

x_1: hornadas diarias de bizcochos

x_2: hornadas diarias de magdalenas

$\max[8x_1 + 6x_2]$
$M_1: \ x_1 + x_2 \le 10$
$M_2: 2x_1 + x_2 \le 18$
$M_3: x_1 + 3x_2 \le 24$
$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0$



i) Calcula el número de hornadas diarias de cada una de las especialidades para que el pastelero obtenga el ingreso máximo.

Se calcula la pendiente de las curvas de nivel de la función objetivo p_f y de las rectas M_1, M_2 y M_3 (p_1, p_2 y p_3) y se obtiene:

$$p_2 = -2 < p_f = -4/3 < p_1 = -1 < p_3 = -1/3$$

Por tanto, la solución se alcanza en el punto **(8,2)**, es decir, la solución es 8 hornadas diarias de bizcochos y 2 de magdalenas obteniendo un beneficio de **76€**.

ii) Si el pastelero decide disminuir la producción de bizcochos ¿Cuál es el ingreso por las magdalenas a partir del cual consigue su actual objetivo?

En este caso la pendiente de la función objetivo debe ser mayor que la pendiente de la recta M_1, de esta forma producción de bizcochos disminuye. Por tanto: $-1 < p_f$

Si llamamos A al precio de las magdalenas al pendiente de la nueva función objetivo será $-\frac{8}{A}$ y, por lo tanto, se tiene que cumplir: $-1 < -\frac{8}{A}$ de donde $\boldsymbol{A > 8}$.

iii) Si pudiera incrementar el número de docenas de huevos y los kilos de harina diarias, ¿en cuánto lo haría? ¿cuánto estaría dispuesto a pagar por ellos?

La primera restricción esta saturada. El conjunto de soluciones factibles aumenta cuando aumenta el segundo miembro de la restricción hasta que alcanza el valor 12, es decir, hasta que la recta M_1 pasa por el punto (6,6) ($x_1+x_2 = 6 + 6 = 12$). El precio sombra correspondiente será:

$$\lambda_1 = \frac{f(6,6) - f(8,2)}{12 - 10} = \frac{84 - 76}{12 - 10} = \mathbf{4\ euros/docena}$$

Le puede interesar al pastelero comprar hasta un máximo de 2 docenas de huevos a dispuesto a menos de 4€ la docena.

En el caso de las magdalenas, la restricción también esta saturada y le puede interesar incrementar los kilos de harina hasta un máximo de 20 ($2x_1+x_2 = 20 + 0 = 20$). El precio sombra de la harina será:

$$\lambda_2 = \frac{f(10,0) - f(8,2)}{20 - 18} = \frac{80 - 76}{20 - 18} = \mathbf{2\ euros/kilo}$$

En este caso le puede interesar al pastelero comprar como máximo 2 kilos de harina si el kilo cuesta menos de 2€.

Examen de Matemáticas IV

Economía. Septiembre de 2001

1. Sea el conjunto $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x>0;\ y>0\}$ y la función $f(x,y)=x^{\alpha}\, y^{\frac{1}{2}}$, donde $\alpha>0$. i) ¿Para qué valores de α es f una función estrictamente cóncava en X? ii) ¿Para qué valores de α es f una función cóncava en X? iii) ¿Para qué valores de α es f una función convexa en X?

El conjunto $X=\{(x,y)/\,x>0,\,y>0\}$ es abierto y convexo, $f\in C^2(X)$.

Consideramos la matriz hessiana de f en $x\in X$,

$$H_f(x)=\begin{bmatrix} \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}\alpha x^{\alpha-1}y^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2}\alpha x^{\alpha-1}y^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{4}x^{\alpha}y^{-\frac{3}{2}} \end{bmatrix}$$

i) ¿Para qué valores de α es f una función estrictamente cóncava en X?

Veamos para que valores de $\alpha>0$, la matriz $H_f(x)$ es definida positiva $\forall x\in X$.

Menores principales de orden 1: $$\begin{cases} \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^{\frac{1}{2}}<0 \textit{ entonces } 0<\alpha<1 & (1) \\ -\frac{1}{4}x^{\alpha}y^{-\frac{3}{2}}<0 \textit{ entonces } \forall\alpha>0 & (2) \end{cases}$$

Menor principal de orden 2:

$$\left|H_f(x)\right| = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{4}x^{\alpha}y^{-\frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{1}{2}\alpha x^{\alpha-1}y^{-\frac{1}{2}}\right)^2 =$$

$$= -\frac{1}{4}\alpha(\alpha-1)x^{2\alpha-2}y^{-1} - \frac{1}{4}\alpha^2x^{2\alpha-2}y^{-1} = -\frac{1}{4}x^{2\alpha-2}y^{-1}(\alpha(\alpha-1)+\alpha^2) > 0$$

y se tiene: $\alpha(\alpha-1)+\alpha^2 = 2\alpha^2-\alpha < 0 \rightarrow \alpha(2\alpha-1) < 0$ (3)

De (1), (2), y (3) se tiene: $0<\alpha<\frac{1}{2}$

La función ***f*** **es estrictamente cóncava en *X* para** $0<\alpha<\frac{1}{2}$

ii) ¿Para qué valores de α es f una función cóncava en X?

Veamos para que valores de α >0 la matriz $H_f(x)$ es definida o semidefinida negativa $\forall x \in X$.

Menores principales de orden 1:
$$\begin{cases} \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^{\frac{1}{2}} \leq 0 \ \textit{entonces}\ 0<\alpha\leq 1 & (4) \\ -\frac{1}{4}x^{\alpha}y^{-\frac{3}{2}} \leq 0 \ \textit{entonces}\ \forall\alpha>0 & (5) \end{cases}$$

Menor principal de orden 2:

$$\left|H_f(x)\right| = -\frac{1}{4}x^{2\alpha-2}y^{-1}(\alpha(\alpha-1)+\alpha^2) > 0$$

y se tiene: $\alpha(\alpha-1)+\alpha^2 = 2\alpha^2-\alpha \leq 0 \rightarrow \alpha(2\alpha-1) \leq 0$ (6)

De (4), (5), y (6) se tiene: $0<\alpha\leq\frac{1}{2}$

La función ***f*** **es cóncava en *X* para** $0<\alpha\leq\frac{1}{2}$

iii) ¿Para qué valores de α es f una función convexa en X?

Veamos para que valores de α>0 la matriz $H_f(x)$ es definida o semidefinida positiva $\forall x \in X$.

El menor principal de orden 1, $-\frac{1}{4}x^{\alpha}y^{-\frac{3}{2}}$ es menor que cero para todo $\alpha > 0$.

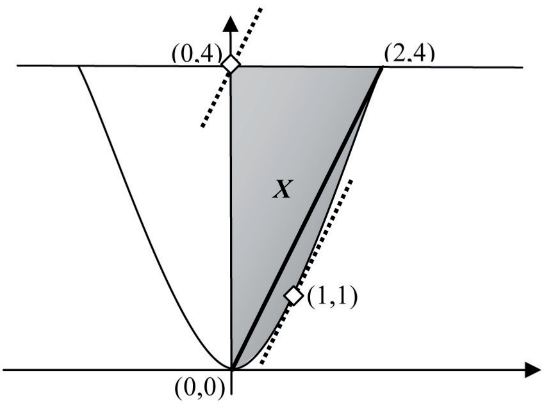
Por tanto, **no existe $\alpha > 0$ tal que haga a la función *f* convexa en *X*.**

2. Sea el conjunto $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x\geq 0;\ 4\geq y\geq x^2\}$ y la función $f(x,y)=ax^2+bxy+y^2$. Se sabe que el punto (1,1) verifica las condiciones de Kuhn-Tucker de máximo y que $D_{(1,-1)}f(1,1)=3\sqrt{2}$. i) ¿Qué valores toman los parámetros a y b y las derivadas $f_1(1,1)$ y $f_2(1,1)$? Considérese a partir de ahora a=4 y b=-4. ii) Utilizando las propiedades extremales de las funciones cóncavas y convexas, halla $\min_{(x,y)\in X} f(x,y)$ indicando los puntos donde se alcanza. iii) Sabiendo que el máximo del problema se encuentra en un vértice y utilizando los teoremas de Kuhn-Tucker, encuentra los puntos donde se alcanza $\max_{(x,y)\in X} f(x,y)$.

i) ¿Qué valores toman los parámetros a y b y las derivadas $f_1(1,1)$ y $f_2(1,1)$?

Escribiendo el problema en su forma estándar:

$\max/\min[ax^2+bxy+y^2]$
$g^1(x,y) = -x \leq 0$ $g^2(x,y) = y-4 \leq 0$ $g^3(x,y) = x^2 - y \leq 0$



Si x satisface las condiciones de KT de máximo, existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 0$ tales que:

$$\nabla f(x) + \lambda_1 \nabla g^1(x) + \lambda_2 \nabla g^2(x) + \lambda_3 \nabla g^3(x) = 0$$

Para el punto (1,1) situado en la frontera de X, sobre la parábola, $y = x^2$, se verifica $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, con la cual el sistema se reduce a:

$$\begin{bmatrix} 2ax+bx \\ bx+2y \end{bmatrix}_{(1,1)} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 2x \\ -1 \end{bmatrix}_{(1,1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Por otro lado, al ser f diferenciable (por ser polinómicas),

$D_v f(x) = \dfrac{\nabla f(x) \bullet v}{\|v\|}$; se tiene de esta manera

$$D_{(1,-1)} f(1,1) = \frac{(2ax+bx, bx+2y)\big|_{(1,1)} \bullet (1,-1)}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \rightarrow 2a+b-b-2=6 \rightarrow a=4$$

Sustituyendo en (1) se tiene,

$$\left.\begin{array}{r} 2a+b+2\lambda_3 = 0 \\ b+2-\lambda_3 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} b+2\lambda_3 = -8 \\ b-\lambda_3 = -2 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_3 = -2 \\ b = -4 \end{array}\right.$$

y también $\boxed{\begin{array}{c} \boldsymbol{f_1(1,1) = 2a+b = -4} \\ \boldsymbol{f_2(1,1) = b+2 = -2} \end{array}}$

ii) Utilizando las propiedades extremales de las funciones cóncavas y convexas, halla $\min\limits_{(x,y)\in X} f(x,y)$ indicando los puntos donde se alcanza.

La función f es convexa en $\mathbb{R}^2$, en particular en el convexo X,

$$H_f(x) = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \text{ es semidefinida positiva } \forall x \in \mathbb{R}^2$$

La función f es diferenciable en cualquier abierto conteniendo a X, y por las propiedades de las funciones convexas, se tiene que todo punto que anule el gradiente es un mínimo global.

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \rightarrow (8x-4y, -4y+2x) = (0,0) \rightarrow \left\{\begin{array}{r} 8x-4y=0 \\ -4x+2y=0 \end{array}\right. \rightarrow y = 2x$$

Por tanto, todos los puntos del segmento que une (0,0) y (2,4) son mínimos globales.

¿Hay otros puntos donde f también alcance su valor mínimo? No, ya que el conjunto de puntos donde la función convexa f alcance mínimo es un conjunto convexo.

En conclusión:

$\mathop{Min}\limits_{(x,y)\in X} f(x,y) = f(0,0) = f(2,4) = 0$ y se alcanza en todos los puntos del segmento $\overline{(0,0)(2,4)}$

iii) Sabiendo que el máximo del problema se encuentra en un vértice y utilizando los teoremas de Kuhn-Tucker, encuentra los puntos donde se alcanza $\max\limits_{(x,y)\in X} f(x,y)$.

Por ser *f* continua en un compacto sabemos que existe $\underset{(x,y)\in X}{Max}\ f(x,y)$. Sea *U* cualquier conjunto abierto convexo conteniendo a *X*. Se verifican las condiciones de necesarias de KT:

R1: f, g^1, g^2, g^3 son diferenciables en *U*.

R2: g^1, g^2, g^3 son convexas en *U*.

R3: $\exists x \in U \,/\, g^i(x) < 0, (i = 1,2,3)$. (Tómese como ejemplo el punto (1,2))

De lo que se deduce que cualquier punto que sea óptimo para el problema de máximo, que sabemos que existe, verificará KT de máximo, es decir, las condiciones de KT de máximo proporciona los candidatos a óptimo del problema.

Sabemos que el máximo del problema se encuentra en un vértice de *X*. Los vértices de este conjunto son los puntos (0,4), (0,0), (2,4) y los puntos del tramo de $y = x^2$ conectando (0,0) y (2,4).

Veamos que puntos del tramo de parábola indicado satisfacen las condiciones de KT de máximo.

$$\nabla f(x) + \lambda_1 \nabla g^1(x) + \lambda_2 \nabla g^2(x) + \lambda_3 \nabla g^3(x) = 0$$

Para dicho tramo se tiene $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, con lo cual,

$$\left\{\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 8x-4y \\ -4x+2y \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 2x \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ y = x^2 \\ \lambda_3 \le 0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{ll} 8x-4y+2\lambda_3 x = 0 & (1) \\ -4x+2y-\lambda_3 = 0 & (2) \\ y = x^2 & \\ \lambda_3 \le 0 & \end{array}\right.$$

$$\rightarrow 2(x-1)\lambda_3 = 0 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1,\ y=1,\ \lambda_3 = -2 \\ \lambda_3 = 0 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} (0,0) \\ (2,4) \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Evaluando la función en dichos vértices se tiene:

$$f(0,4) = 16, \quad f(0,0) = 0, \quad f(2,4) = 0, \quad f(1,1) = 1$$

$\boxed{\underset{(x,y)\in X}{Max}\ f(x,y) = 16}$ y se alcanza en el punto (0,4).

3. Una empresa produce tornillos y tuercas especiales para lo que dispone de tres máquinas *M*1, *M*2 y *M*3 que se han de utilizar sucesivamente. Los tiempos que cada máquina invierte en producir un tornillo o una tuerca así como los tiempos disponibles semanales de cada una de las máquinas y el beneficio unitario por cada unidad producida vienen expresados en la siguiente tabla:

	*M*1	*M*2	*M*3	beneficio (pta.)
tornillo	7 min.	7 min.	3,5 min.	90 pta.
tuerca	4 min.	12 min.	16 min.	100 pta.
tiempo total	7.000 min.	8.400 min.	8.400 min.	

i) Si la empresa pretende obtener el máximo beneficio, encuentra la producción semanal óptima de tornillos y tuercas.

ii) Si la empresa deseara disminuir el número de tuercas producidas incrementando el beneficio obtenido por los tornillos, ¿en cuánto lo situaría?

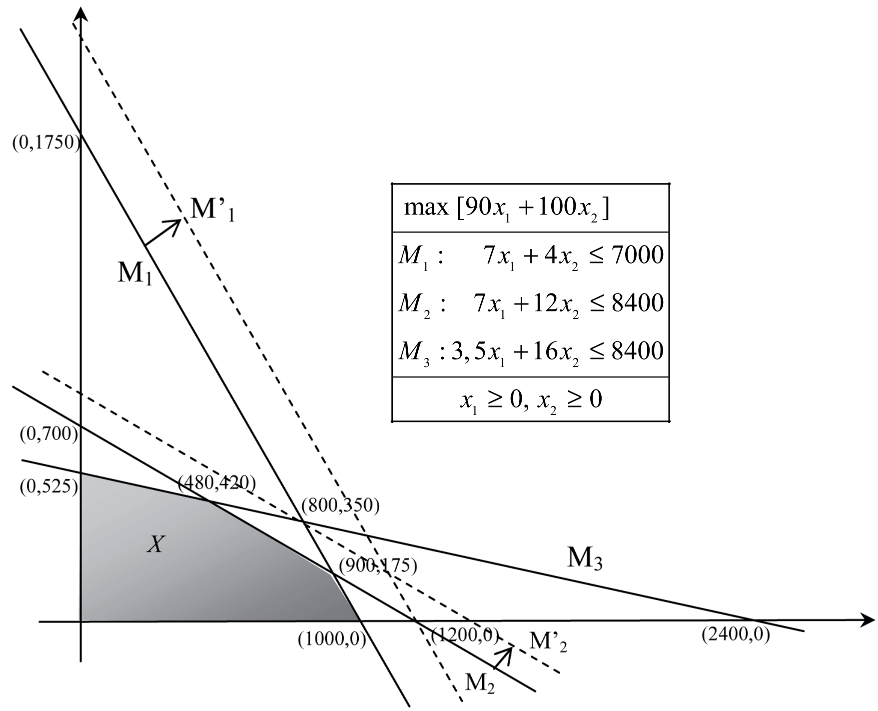
iii) En las condiciones iniciales, ¿en cuántos minutos estaría dispuesta la empresa a incrementar los disponibles por la 2.ª máquina? ¿a qué precio?

iv) En las condiciones iniciales, ¿en cuántos minutos estaría dispuesta la empresa a incrementar los disponibles por la 1.ª máquina? ¿a qué precio?

Se consideran las variables:

x_1 : tornillos

x_2 : tuercas



i) Si la empresa pretende obtener el máximo beneficio, encuentra la producción semanal óptima de tornillos y tuercas.

Evaluando la función en los vértices se obtiene que la producción óptima es de 900 tornillos y 175 tuercas, alcanzando un beneficio máximo de 98500 ptas.

ii) Si la empresa deseara disminuir el número de tuercas producidas incrementando el beneficio obtenido por los tornillos, ¿en cuánto lo situaría?

La solución, en este caso, será el punto (1000, 0) y por tanto $-\infty < m_f < m_1$. Sea A el beneficio de los tornillos, se tiene, $-\frac{A}{100} < -\frac{7}{4} \rightarrow A > 175$

El beneficio obtenido por tornillo deberá ser mayor de 175 ptas.

iii) En las condiciones iniciales, ¿en cuántos minutos estaría dispuesta la empresa a incrementar los disponibles por la 2ª máquina? ¿a qué precio?

En el óptimo, la segunda restricción esta saturada, 7·900+12·175 = 8400, luego puede interesar aumentar los minutos disponibles en la segunda máquina hasta, 7·800+12·350 = 9800.

El beneficio, en este caso, será de 107. 000 pts.

El precio sombra para M_2 será: $\lambda_2 = \frac{107.000 - 98.500}{9.800 - 8.400} = 6'07 \ ptas / minuto$

Puede interesar incrementar los minutos disponibles en la segunda máquina hasta un máximo de 1.400, siempre que el coste por minuto sea inferior a 6’07 pesetas.

iv) En las condiciones iniciales, ¿en cuántos minutos estaría dispuesta la empresa a incrementar los disponibles por la 1ª máquina? ¿a qué precio?

En el óptimo, la primera restricción esta saturada, 7·900+4·175 = 7000, luego puede interesar aumentar los minutos disponibles en la primera máquina hasta, 7·1.200+4·0 = 8.400.

El beneficio, en este caso, será de 108. 000 ptas.

El precio sombra para M_1 será: $\lambda_1 = \frac{108.000 - 98.500}{8.400 - 7.000} = 6'79 \ ptas / minuto$

Puede interesar incrementar los minutos disponibles en la primera máquina hasta un máximo de 1.400, siempre que el coste por minuto sea inferior a 6’79 pesetas.

Examen de Matemáticas IV

Economía. Junio de 2001

1. Sea $f(x,y)=x^2+Ay^2+Bxy$ ($A,B\in\mathbb{R}$) y el conjunto $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ / \ -1\leq x+y\leq 1,\ -1\leq x-y\leq 1\}$.

i) ¿Para qué valores de A y B es f convexa en todo $\mathbb{R}^2$?
¿Para qué valores de A y B es f estrictamente convexa en todo $\mathbb{R}^2$?
¿Para qué valores de A y B es f cóncava en todo $\mathbb{R}^2$?

ii) Para A=-1, B=0 y <u>utilizando el gradiente de la función f</u>, deduce en qué puntos se alcanza el máximo y el mínimo de dicha función respecto a X.

i) ¿Para qué valores de A y B es f convexa en todo $\mathbb{R}^2$?
¿Para qué valores de A y B es f estrictamente convexa en todo $\mathbb{R}^2$?
¿Para qué valores de A y B es f cóncava en todo $\mathbb{R}^2$?

Notar que $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$, por tanto, podemos utilizar la caracterización de funciones cóncavas y convexas de clase C^2 por medio de su matriz Hessiana. Haciendo $x=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2$ abierto y convexo, se tiene,

(1) f es convexa en $\mathbb{R}^2$ si y sólo si $H_f(x)=\begin{pmatrix} 2 & B \\ B & 2A \end{pmatrix}$ es definida o semidefinida positiva $\forall x\in\mathbb{R}^2$

y, por tanto,

$$2A\geq 0,\ 4A-B^2\geq 0 \leftrightarrow A\geq 0,\ B^2\leq 4A \leftrightarrow A\geq 0,\ 2\sqrt{A}\leq B\leq 2\sqrt{A}$$

(2) Para que f sea estrictamente convexa en $\mathbb{R}^2$ es suficiente que $H_f(x)=\begin{pmatrix} 2 & B \\ B & 2A \end{pmatrix}$ sea definida positiva $\forall x\in\mathbb{R}^2$

y, por tanto,

$$2A>0,\ 4A-B^2>0 \leftrightarrow A>0,\ 2\sqrt{A}<B<2\sqrt{A}$$

(3) f es cóncava en $\mathbb{R}^2$ si y sólo si $H_f(x) = \begin{pmatrix} 2 & B \\ B & 2A \end{pmatrix}$ es definida o semidefinida negativa $\forall x \in \mathbb{R}^2$

No existen valores de A y B que hagan la matriz definida o semidefinida negativa, (2>0).

ii) Para A=-1, B=0 y utilizando el gradiente de la función f, deduce en qué puntos se alcanza el máximo y el mínimo de dicha función respecto a X.

La función f es continua en X compacto, por tanto, existen $\underset{(x,y)\in X}{Max}\ f(x,y)$ y $\underset{(x,y)\in X}{Min}\ f(x,y)$

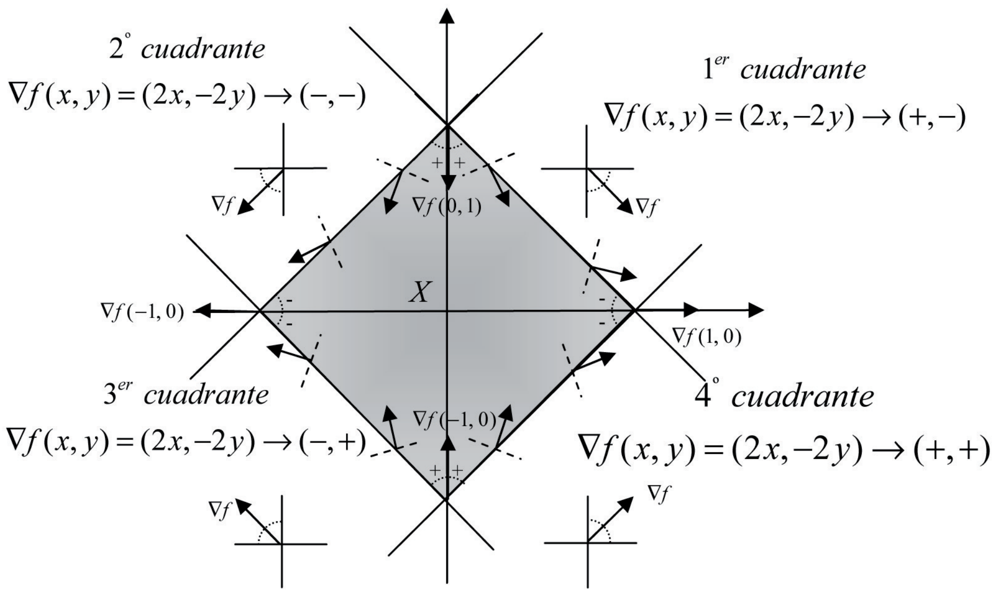
$f(x,y) = x^2 - y^2;\ \ \nabla f(x,y) = (2x,-2y)$

$\nabla f(x,y) = (0,0) \leftrightarrow (x,y) = (0,0)$. Notar que (0,0) no es máximo ni mímimo de f en X.

Recordando que ∇f apunta en la dirección de máximo crecimiento de la función, hagamos un estudio del gradiente para encontrar el $\underset{(x,y)\in X}{Max}\ f(x,y)$ y $\underset{(x,y)\in X}{Min}\ f(x,y)$ en el conjunto X.

Como el gradiente de f sólo se anula en el punto (0,0) los extremos de f en X se alcanzan en la frontera de X.

Estudio de la frontera por tramos utilizando el gradiente.



Conclusión:

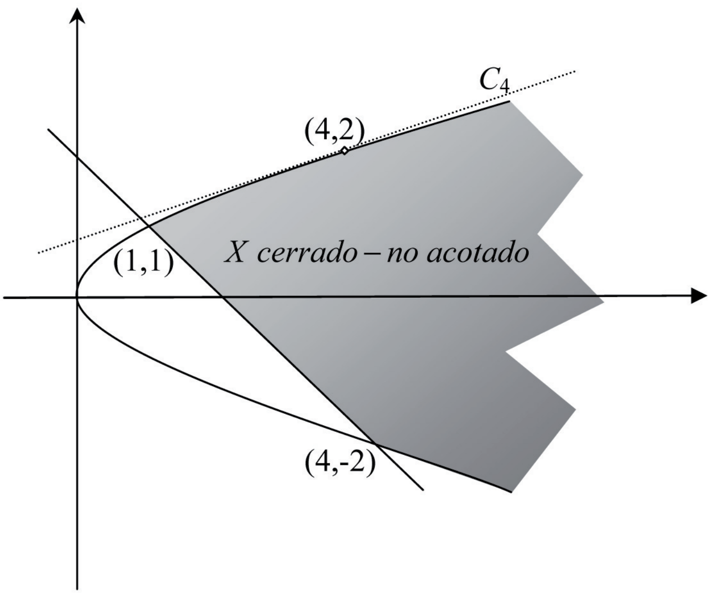
$$\boxed{\begin{array}{l} \underset{(x,y)\in X}{Max}\ f(x,y) = f(1,0) = f(1,0) = 1 \\ \underset{(x,y)\in X}{Min}\ f(x,y) = f(0,1) = f(0,-1) = -1 \end{array}}$$

2. Sea el siguiente problema de programación no lineal:

$$\max\ (-x+4y)$$

$$\begin{cases} x \geq y^2 \\ x+y \geq 2 \end{cases}$$

i) Calcula todos los puntos en los que se cumplen las condiciones de Kuhn-Tucker.
ii) Utilizando los teoremas de Kuhn-Tucker, ¿qué podemos concluir acerca de los puntos obtenidos en i)?
iii) Si nos planteáramos encontrar el mínimo del problema, utilizando los teoremas de Kuhn-Tucker, ¿dónde se alcanzaría?, ¿porqué?



Escribiendo el problema en su forma estándar:

$\max[-x+4y]$
$g^1(x,y) = y^2 - x \leq 0$ $g^2(x,y) = 2 - x - y \leq 0$

i) Calcula todos los puntos en los que se cumplen las condiciones de Kuhn-Tucker.

Si $\boldsymbol{x}$ satisface las condiciones de KT de máximo, existen escalares $\lambda_1, \lambda_2 \le 0$ tales que:

$$KT1:\ \nabla f(x,y) + \lambda_1 \nabla g^1(x,y) + \lambda_2 \nabla g^2(x,y) = (0,0)$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 2y \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$KT2:\ \lambda_1 g^1(x,y) = \lambda_1(\mathrm{y}^2 - x) = 0$$

$$\lambda_2 g^2(x,y) = \lambda_2(2 - x - y) = 0$$

$$KT3:\ g^1(x,y) = \mathrm{y}^2 - x \le 0$$

$$g^2(x,y) = 2 - x - y \le 0$$

$$KT4:\ \lambda_1 \ge 0, \lambda_2 \ge 0 \ \text{min}$$

$$\lambda_1 \le 0, \lambda_2 \le 0 \,\text{max}$$

Estudiamos por casos desde *KT2*

<u>Caso 1</u>.- $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

De KT1 se tiene $\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, lo cual es imposible.

<u>Caso 2</u>.- $\lambda_1 = 0;\ \lambda_2 \ne 0\ (\mathrm{g}^2(x) = 0)$, y de KT1 se obtiene:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{cases} -\lambda_2 - 1 = 0 \\ -\lambda_2 + 4 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} \lambda_2 = -1 \\ \lambda_2 = 4 \end{cases} \text{ lo cual es imposible.}$$

<u>Caso 3</u>.- $\lambda_1 \ne 0 (\mathrm{g}^1(x) = 0);\ \lambda_2 = 0$, y de KT1 y de KT2 se obtiene:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ 4 + 2\lambda_1 y = 0 \\ x = y^2 \end{cases} \to \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ y = 2 \\ x = 4 \end{cases}$$

El punto (4,2) con $\lambda_1 = -1 \le 0,\ \lambda_2 = 0 \le 0$ cumple las condiciones de KT para máximo.

<u>Caso 4</u>.- $\lambda_1 \ne 0\ (\mathrm{g}^1(x) = 0);\ \lambda_2 \ne 0\ (\mathrm{g}^2(x) = 0)$, y de KT1 y de KT2 se obtiene:

$$KT2: \begin{cases} g^1(x,y) = y^2 - x = 0 \to y^2 = x \\ g^2(x,y) = 2 - x - y = 0 \to x = 2 - y \end{cases} \to y^2 = 2 - y \to y^2 + y - 2 = 0 \to \begin{cases} y = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

es decir, se obtienen los puntos (4,-2) y el (1,1). Sustituyendo en KT1 se tiene,

$$KT1: \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 2y \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} (4,-2): & \lambda_1 = 5/3 \;\; \lambda_2 = -8/3 \\ (1,1): & \lambda_1 = -5/3 \;\; \lambda_2 = 2/3 \end{matrix}\right\}$$ En ambos casos no se verifican las condiciones de KT para un problema de máximo ni de mínimo.

Conclusión: El único punto que verifica las condiciones de KT es el punto (4,2) $\lambda_1 = -1 \leq 0$, $\lambda_2 = 0 \leq 0$.

ii) Utilizando los teoremas de Kuhn-Tucker, ¿qué podemos concluir acerca de los puntos obtenidos en i)?

Veamos que se satisfacen las condiciones de regularidad

Veamos que puntos del tramo de parábola indicado satisfacen las condiciones de KT de máximo.

*R*1.- Las funciones *f*, g^1, g^2 son diferenciables en $\mathbb{R}^2$, conjunto abierto y convexo.

*R*2.- Las funciones g^1, g^2 son convexas en $\mathbb{R}^2$.

*R*3.- Existe un punto $(x, y) = (3, 0)$ tal que $g^1(3, 0) < 0$ y $g^2(3, 0) < 0$

*R*4.- La función *f* es cóncava (por ser lineal) en $\mathbb{R}^2$.

Se 1, 2, 3 y 4 se tiene: *Un punto x es óptimo del problema si y sólo si x satisface KT*

Así. el punto (4,2) $\lambda_1 = -1 \leq 0$, $\lambda_2 = 0 \leq 0$ es un óptimo del problema (es un máximo).

$$\underset{(x,y)\in X}{Max} \; f(x,y) = f(4,2) = -4 + 8 = 4$$

iii) Si nos planteáramos encontrar el mínimo del problema, utilizando los teoremas de Kuhn-Tucker, ¿dónde se alcanzaría?, ¿porqué?

No existe $\underset{(x,y)\in X}{Min} \; f(x,y)$, porque de existir se alcanzaría algún punto de *X* y ese punto tendría que satisfacer las condiciones de KT para mínimo y hemos visto que ningún punto de *X* las satisface.

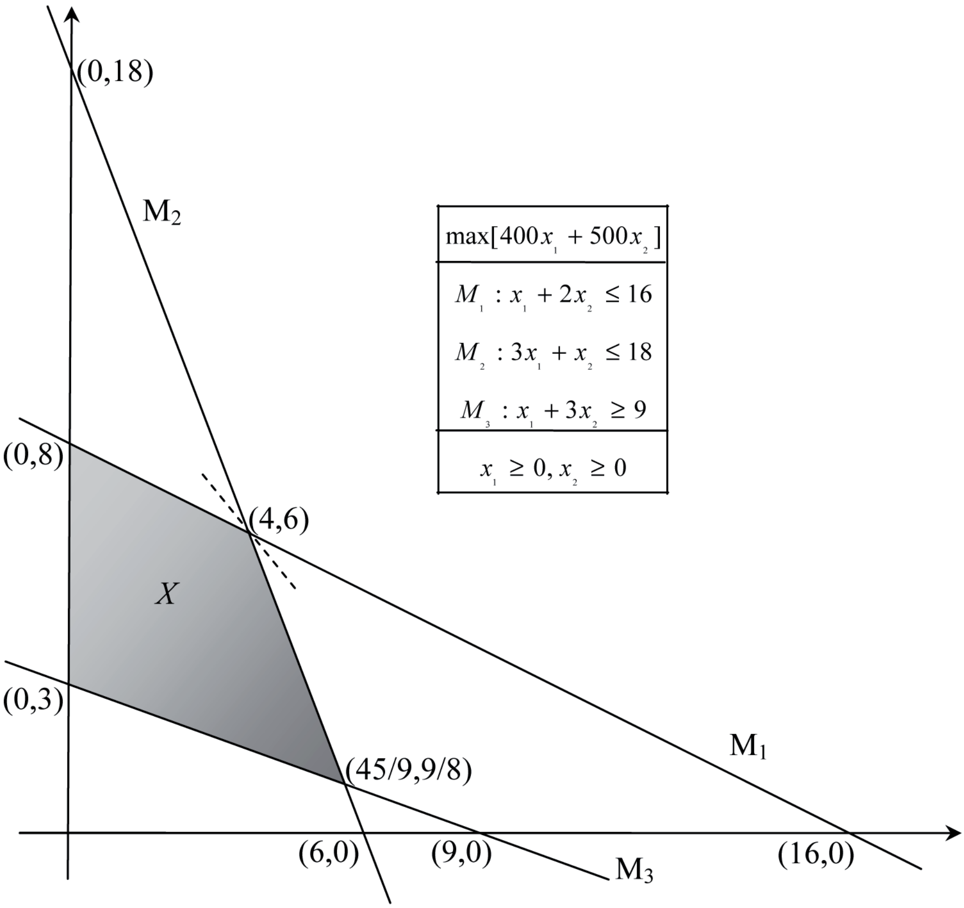
3. Una empresa produce televisores de 14 y de 25 pulgadas, de los cuales obtiene un beneficio de 400 y 500 euros respectivamente. El proceso de fabricación requiere que cada televisor pase por tres divisiones distintas de la factoría. Los televisores de 14 pulgadas necesitan 1, 3 y 1 horas respectivamente en las divisiones 1, 2 y 3, mientras los televisores de 25 pulgadas requieren 2, 1 y 3 respectivamente. Las divisiones 1 y 2 trabajan un máximo de 16 y 18 horas diarias respectivamente mientras la tercera trabaja como mínimo 9 horas diarias.

i) Encuentra la producción óptima diaria si la empresa se propone maximizar el beneficio.
ii) ¿Cuál debería ser el beneficio por televisor de 14 pulgadas si la empresa se planteara producir únicamente televisores de 25 pulgadas?
iii) Bajo las condiciones iniciales, si la empresa pudiera aumentar una hora de trabajo diario en sólo una de las divisiones que tiene, ¿cuál elegiría?

Sean las variables:

x_1 : número de televisores de 14 pulgadas

x_2 : número de televisores de 25 pulgadas



i) Encuentra la producción óptima diaria si la empresa se propone maximizar el beneficio.

La solución óptima se encontrará en alguno de los vértices del conjunto de soluciones factibles:

$f(0,8)=4000$

$f(0,3)=1500$

$f(45/8,9/8)=2812'5$

$\boldsymbol{f(4,6)=4600}$

La producción óptima diaria será 4 televisores de 14 pulgadas y 6 de 25 pulgadas con un beneficio óptimo de 4600€.

ii) ¿Cuál debería ser el beneficio por televisor de 14 pulgadas si la empresa se planteara producir únicamente televisores de 25 pulgadas?

Hay que calcular A para que el problema

$$\begin{array}{|c|}\hline \max[Ax_1+500x_2] \\ \hline M_1 : x_1+2x_2 \le 16 \\ M_2 : 3x_1+x_2 \le 18 \\ M_3 : x_1+3x_2 \ge 9 \\ \hline x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \\ \hline \end{array}$$ alcance el óptimo en el punto (0,8).

Denotando m_i, i=1,2,3 a las pendientes de las restricciones y m_f a la pendiente de las curvas de nivel de la función objetivo. Si el óptimo se alcanza en (0,8) se tiene: $m_2 < m_1 < m_f$ y, por tanto,

-3 <-1/2< -A/500, de donde A<250€.

iii) Bajo las condiciones iniciales, si la empresa pudiera aumentar una hora de trabajo diario en sólo una de las divisiones que tiene, ¿cuál elegiría?

En las divisiones M_1 y M_2 se agotan todas las horas y le podría interesar aumentarlas.Para ello calculamos los precios sombra de dichas restricciones:

$$\lambda_1 = \frac{f(0,18)-f(4,6)}{36-16} = \frac{9000-4600}{20} = 220€/h$$ para la primera división

$$\lambda_2 = \frac{f(16,0) - f(4,6)}{48-18} = \frac{6400-4600}{30} = 60€/h$$ para la segunda división

$\lambda_3 = 0$ para la tercera división, ya que no se saturan las horas en la tercera restricción.

En conclusión, elegiría la primera división.

Examen de Matemáticas IV

Economía. Septiembre de 2000

1. (4 puntos) Encuentra los diferentes valores de α y β para que la forma cuadrática Q cuya matriz de representación es $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 6 \end{pmatrix}$ cumpla:

i) $\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\text{-}\{\mathbf{0}\}/\ Q(\boldsymbol{x})>0\}=\mathbb{R}^3\text{-}\{\mathbf{0}\}$

ii) $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3{:}Q(\boldsymbol{x})\geq 0$

i) $\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\text{-}\{\mathbf{0}\}/\ Q(\boldsymbol{x})>0\}=\mathbb{R}^3\text{-}\{\mathbf{0}\}$

Para que se cumpla $\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\text{-}\{\mathbf{0}\}/\ Q(\boldsymbol{x})>0\}=\mathbb{R}^3\text{-}\{\mathbf{0}\}$, la forma cuadrática Q tiene que ser definida positiva. Se tiene entonces:

Menores principales de orden 1: $\{\alpha, 1, 6\}$

Menores principales de orden: 2 $\{\alpha, 6, 6\alpha-\beta^2\}$

Menores principales de orden: 3 $|M(Q)|= 6\alpha-\beta^2$

Para que la forma cuadrática sea definida positiva todos los menores principales tienen que ser mayores que 0, es decir que:

$\alpha>0$; $6\alpha-\beta^2>0$ y por lo tanto, podemos concluir que

$\alpha>0$ y $-\sqrt{6\alpha}<\beta<\sqrt{6\alpha}$

ii) $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3{:}Q(\boldsymbol{x})\geq 0$

Para que se cumpla $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3{:}Q(\boldsymbol{x})\geq 0$, la forma cuadrática tiene que ser definida o semidefinida positiva. Por tanto, todos los menores principales tienen que ser mayores o iguales a cero:

$\alpha \geq 0$; $6\alpha - \beta^2 \geq 0$, podemos concluir que:

$\alpha \geq 0$ y $-\sqrt{6\alpha} \leq \beta \leq \sqrt{6\alpha}$

2. Sea

$$\max/\min f(x,y)$$
$$x^2+y^2 \leq 1$$
$$x^2+y-1 \leq 0$$
$$x+y \geq -1$$

donde f es una función diferenciable y cóncava en $\mathbb{R}^2$ y X es el conjunto de soluciones factibles del problema:

a) (3 puntos) Explica razonadamente si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:
   i) Si $z \in X$ y $\nabla f(z)=\mathbf{0}$, entonces f alcanza en z un máximo respecto de X.
   ii) Si $z \in X$ y $\nabla f(z) \neq \mathbf{0}$, es seguro que z no es solución óptima de f respecto de X.
   iii) El mínimo de f en X puede alcanzarse en un punto de la frontera que no sea vértice.

b) (7 puntos) Sea $f(x,y)=2x+2y-(x+y)^2$.
   i) ¿Cumplen los puntos (1,0) y (0,1) las condiciones de Kuhn-Tucker? ¿Son soluciones óptimas? ¿Son únicas?
   ii) ¿Cumple el punto (0,-1) las condiciones de Kuhn-Tucker? ¿Qué se puede concluir sobre este punto?

a) i) Si $z \in X$ y $\nabla f(z)=\mathbf{0}$, entonces f alcanza en z un máximo respecto de X.

Cierta. Siendo f diferenciable y cóncava en $\mathbb{R}^2$ los puntos en los que se anula el gradiente serán máximos de f en X, por tanto, la función f alcanza un máximo en X en el punto z.

a) ii) Si $z \in X$ y $\nabla f(z) \neq \mathbf{0}$, es seguro que z no es solución óptima de f respecto de X.

Falsa. No es necesario que se anule el gradiente en un punto para que haya extremo en ese punto.

a) iii) El mínimo de f en X puede alcanzarse en un punto de la frontera que no sea vértice.

Cierta. Siendo f cóncava en $\mathbb{R}^2$, f alcanza mínimo en X (función continua en conjunto compacto) sabemos por las propiedades extremales de las funciones cóncavas que existe un vértice donde lo alcanza, pero puede alcanzar mínimo en puntos que no son vértice.

b) (7 puntos) Sea $f(x,y)=2x+2y-(x+y)^2$.

i) ¿Cumplen los puntos (1,0) y (0,1) las condiciones de Kuhn-Tucker? ¿Son soluciones óptimas? ¿Son únicas?

Escribimos el problema en su forma estándar,

$\max/\min[2x+2y-(x+y)^2]$
$g^1(x,y)=x^2+y^2-1\le 0$
$g^2(x,y)=x^2+y-1\le 0$
$g^3(x,y)=-1-x-y\le 0$

Condiciones de Kuhn-Tucker:

$$KT1:\ \nabla f(x,y)+\lambda_1\nabla g^1(x,y)+\lambda_2\nabla g^2(x,y)+\lambda_3\nabla g^3(x,y)=(0,0)$$

$$\begin{bmatrix}2-2(x+y)\\2-2(x+y)\end{bmatrix}+\lambda_1\begin{bmatrix}2x\\2y\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}2x\\1\end{bmatrix}+\lambda_3\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$KT2:\ \lambda_1 g^1(x,y)=\lambda_1(x^2+y^2-1)=0$$

$$\lambda_2 g^2(x,y)=\lambda_2(x^2+y-1)=0$$

$$\lambda_3 g^3(x,y)=\lambda_3(-1-x-y)=0$$

$$KT3:\ g^1(x,y)=x^2+y^2-1\le 0$$

$$g^2(x,y)=x^2+y-1\le 0$$

$$g^3(x,y)=-1-x-y\le 0$$

$$KT4:\ \lambda_1\ge 0,\lambda_2\ge 0,\lambda_3\ge 0\ \min$$

$$\lambda_1\le 0,\lambda_2\le 0,\lambda_3\le 0\max$$

Punto (1,0):

$KT2$: $g^1(1,0)=0$, $g^2(1,0)=0$ y $g^3(1,0)=-2<0$, entonces, $\lambda_3=0$.

$$KT1:\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+\lambda_1\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2\lambda_1+2\lambda_2=0\to\lambda_1=0\\ \lambda_2=0\end{cases}$$

El punto (1,0) cumple las condiciones de KT de máximo y de mínimo con $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$

Punto (0,1):

$KT2$: $g^1(0,1)=0$ y $g^2(0,1)=0$, $g^3(0,1)=-2<0$ entonces, $\lambda_3=0$.

$$KT1: \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0\lambda_1 + 0\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \rightarrow \boxed{\lambda_2 = -2\lambda_1} \end{cases}$$

Sólo se verifica KT para los valores $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. En cualquier otro caso, para $\lambda_1\neq 0$, λ_2 tendrá signo contrario por lo que no se verificaría KT4. Por lo tanto, el punto (0,1) cumple las condiciones de KT de máximo y de mínimo con $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$

Veamos que se satisfacen las condiciones de regularidad

R1.- Las funciones f, g^1, g^2 y g^3 son diferenciables en $\mathbb{R}^2$, conjunto abierto y convexo.

R2.- Las funciones g^1, g^2 y g^3 son convexas en $\mathbb{R}^2$.

R3.- Existe un punto $(x, y) = (0, 0)$ tal que $g^1(0, 0) = -1 < 0$, $g^2(0, 0) = -1 < 0$ y $g^3(0, 0) = -1 < 0$

R4.- La función $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ y su matriz Hessiana es:

$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, la matriz $H_f(x, y)$ es semidefinida negativa, por lo tanto, f es cóncava en $\mathbb{R}^2$

Para un problema de máximo, las condiciones de KT son necesarias y suficientes puesto que se cumplen: R1, R2, R3 y R4 y ,por lo tanto, se tiene que: *Un punto **x** es máximo del problema si y sólo si **x** satisface KT de máximo.*

Para un problema de mínimo, las condiciones de KT sólo son necesarias puesto que se cumplen: R1, R2 y R3 y por lo tanto se tiene que : *Un punto x es mínimo del problema entonces x satisface KT de mínimo.*

El punto (1,0) es un posible mínimo y el punto (0,1) es seguro un máximo.

b) (7 puntos) Sea $f(x,y)=2x+2y-(x+y)^2$.
   ii) ¿Cumple el punto (0,-1) las condiciones de Kuhn-Tucker? ¿Qué se puede concluir sobre este punto?

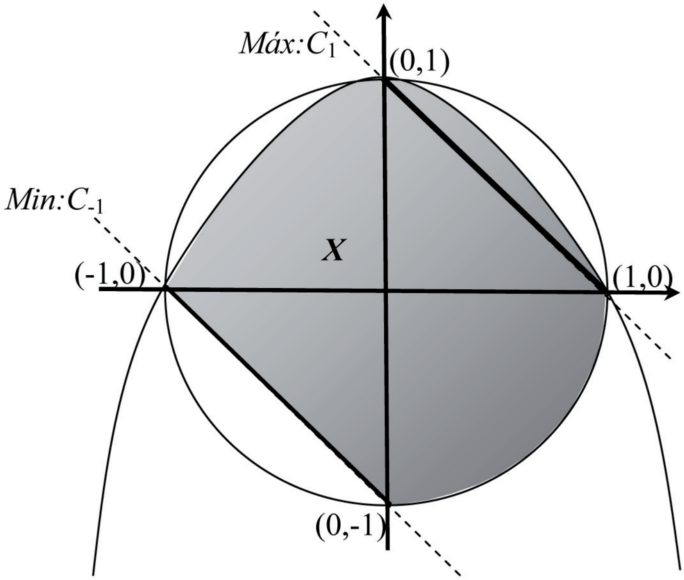
Punto (0,-1):

$KT2$: $g^1(1,0)=0$, $g^2(1,0)<0$ y $g^3(1,0)=0$, entonces, $\lambda_2=0$.

$$KT1: \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4 - \lambda_3 = 0 \rightarrow \lambda_3 = 4 \\ 4 - 2\lambda_1 - \lambda_3 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

El punto (0,-1) satisface las condiciones de KT de mínimo

De R1, R2 y R3 se tiene: *Un punto **x** es mínimo del problema entonces **x** satisface KT de mínimo*. Entonces (0,-1) es un posible mínimo.



3. (6 puntos) Una refinería dispone de tres tipos de petróleo crudo, P_1, P_2 y P_3. Cada barril de petróleo crudo ya refinado produce gasolina y gasóleo. La siguiente tabla indica las cantidades en barriles de petróleo crudo necesarios para producir un barril de gasolina o de gasóleo:

	barriles de P_1	barriles de P_2	barriles de P_3
gasolina	4,5	1,8	3,5
gasóleo	3,5	3,6	1,5

La refinería dispone de 1.260 barriles de P_1, 900 barriles de P_2 y 870 barriles de P_3. Si vende cada barril de gasolina a 30 euros y cada barril de gasóleo a 22 euros:

i) Determina el programa de producción de la empresa para maximizar los ingresos.

ii) Si pudiera disponer de más petróleo del tipo P_2 y P_3, ¿le interesaría? ¿qué cantidad? ¿a qué precio?

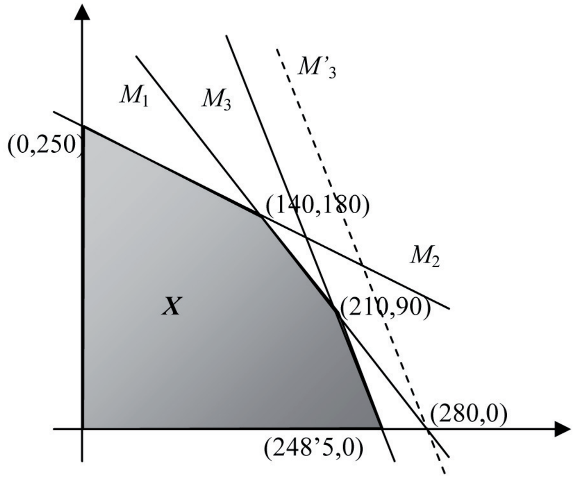
iii) Si quisiera vender más barriles de gasóleo de los que produce en la solución de i), manteniendo el precio de la gasolina, ¿a qué precio debería vender el gasóleo?

Sean las variables:

x_1 : nº de barriles de gasolina

x_2 : nº de barriles de gasóleo

$\max[30x_1 + 22x_2]$
$M_1 : 4,5x_1 + 3,5x_2 \leq 1260$
$M_2 : 1,8x_1 + 3,6x_2 \leq 900$
$M_3 : 3,5x_1 + 1,5x_2 \leq 870$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$



i) Determina el programa de producción de la empresa para maximizar los ingresos.

Valorando la función objetivo en los vértices, obtenemos que la empresa maximiza sus ingresos produciendo 210 barriles de gasolina y 90 barriles de gasóleo, obteniendo unos ingresos máximos de 8.280 €.

ii) Si pudiera disponer de más petróleo del tipo P_2 y P_3, ¿le interesaría? ¿qué cantidad? ¿a qué precio?

No le interesa disponer de más petróleo de tipo P_2, ya que en el óptimo no es una restricción saturada y ,por lo tanto, le sobra petróleo de este tipo.

El petróleo de tipo P_3 si es una restricción saturada y podría interesarle disponer de más barriles pasando desde el punto (210,90) hasta el punto (280,0) a partir del cual la restricción dejaría de estar saturada. El incrementote máximo de barriles sería:

M_3': $3,5x_1+1,5x_2=870+c$ sustituyendo el punto (280,0) obtenemos que c=110.

Entonces podría aumentar hasta un máximo de 110 barriles pasando la solución óptima de 8.280 € hasta obtener un valor de 8.400 € y el precio sombra de cada barril sería :

$$\lambda_3 = \frac{8.400 - 8.280}{980 - 870} = 1,09€ / barril$$

Le interesa comprar 110 barriles mas, hasta 980 barriles de petróleo como máximo de este tipo a un precio menor de 1,09€ cada barril.

iii) Si quisiera vender más barriles de gasóleo de los que produce en la solución de i), manteniendo el precio de la gasolina, ¿a qué precio debería vender el gasóleo?

Si quisiera vender más barriles de gasóleo, la solución óptima debería alcanzar como punto más próximo el punto (140,180), por lo que la pendiente de las curvas de nivel de la función objetivo debería ser mayor que la pendiente de M_1, es decir: $m_f > m_1$

Si la función objetivo es $30x_1 + p_g x_2$ su pendiente m_f será:

$$\frac{-30}{p_g} > \frac{-4,5}{3,5} \Rightarrow p_g > 23{,}33€ \ .$$

Es decir, el precio al que debería vender el gasóleo debería ser superior a 23,33 € por barril

Examen de Matemáticas IV

Economía. Junio de 2000

1. (4 puntos) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & b \\ c & a & 2 \end{pmatrix}$.

i) Si sabemos que A es la matriz de representación de una forma cuadrática que cumple

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 / Q(\boldsymbol{x}) \geq 0\} = \mathbb{R}^3 \quad \text{y} \quad \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 / Q(\boldsymbol{x}) = 0\} \neq \{(0,0,0)\},$$

encuentra los valores de a, b y c.

ii) ¿Para qué valores de a, b y c será A matriz de representación de una forma cuadrática que cumpla: $\exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 / Q(\boldsymbol{x}) > 0$ y $\exists \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3 / Q(\boldsymbol{y}) < 0$?

Si A es la matriz de representación de una forma cuadrática necesariamente tiene que ser a=b.

Los menores principales de A son:

Primer orden: {*1*, *0*, 2}

Segundo orden: $\{0, 2\text{-}c^2, \text{-}a^2\}$

Tercer orden: $|A| = -a^2$

i) Si sabemos que A es la matriz de representación de una forma cuadrática que cumple

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 / Q(\boldsymbol{x}) \geq 0\} = \mathbb{R}^3 \quad \text{y} \quad \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 / Q(\boldsymbol{x}) = 0\} \neq \{(0,0,0)\},$$

Para que se cumpla$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 / Q(\boldsymbol{x}) \geq 0\} = \mathbb{R}^3$ y $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 / Q(\boldsymbol{x}) = 0\} \neq \{(0,0,0)\}$ la forma cuadrática Q tiene que ser semidefinida positiva, por tanto:

orden 3: $|A| = -a^2 = 0 \rightarrow a = 0$

Y sus menores principales son :

orden. 1: $\{1 \geq 0;\ 0 \geq 0;\ 2 \geq 0\}$

orden 2: $\{0 \geq 0,\ 2\text{-c}^2 \geq 0, 0 \geq 0\} \rightarrow -\sqrt{2} \leq c \leq \sqrt{2};$

En conclusión:

Q es semidefinida positiva si y sólo si $a = b = 0;\ \sqrt{2} \leq c \leq \sqrt{2}$

ii) ¿Para qué valores de *a*, *b* y *c* será *A* matriz de representación de una forma cuadrática que cumpla: $\exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 / Q(\boldsymbol{x}) > 0$ y $\exists \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3 / Q(\boldsymbol{y}) < 0$?

Para que se cumpla: $\exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 / Q(\boldsymbol{x}) > 0$ y $\exists \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3 / Q(\boldsymbol{y}) < 0$, Q tiene que ser un forma cuadrática indefinida. Se tiene:

Si $a = b \neq 0;\ \forall \text{c}$ entonces Q es indefinida.

Si $a = b = 0;\ \text{c}<-\sqrt{2}\ \ o\ \ \text{c}>\sqrt{2}$ entonces Q es indefinida.

2. i) (3 puntos) Sea el problema

$$\max/\min f(x,y)$$
$$y^2\text{-}x \leq 0$$
$$x \leq 3$$

siendo *f* cóncava en *X*, el conjunto de soluciones factibles y $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ Los puntos $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ son los únicos puntos de *X* que verifican las condiciones de Kuhn-Tucker, $\boldsymbol{x}$ las de mínimo e $\boldsymbol{y}$ las de máximo. Encuentra todos los puntos en los que se alcanza el máximo y el mínimo y explica el por qué.

ii) (7 puntos) Resuelve el siguiente problema aplicando los teoremas de Kuhn-Tucker:

$$\max/\min x^2$$
$$y^2\text{-}x \leq 0$$
$$x \leq 3$$

Para el problema, $\max/\min f(x,y)$

$$y^2\text{-}x \leq 0$$
$$x \leq 3$$

Se tiene que la función *f* es continua en *X* compacto, por tanto,

$\exists \max\limits_{(x,y) \in X} f(x,y)$ y $\exists \min\limits_{(x,y) \in X} f(x,y)$

Además, se cumple:

R1 Las funciones f, g^1, g^2 son diferenciables en el abierto, convexo $\mathbb{R}^2$.

R2 Las funciones g^1, g^2 son convexas en $\mathbb{R}^2$, ya que $H_{g^1}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, semidefinida positiva en $\mathbb{R}^2$ y g^2 es lineal en $\mathbb{R}^2$.

R3 Existe un punto (1,0) verifica $g^1(1, 0) < 0$; $g^2(1, 0) < 0$

R4 La función f es cóncava en el convexo X (conjunto de soluciones factibles).

Entonces se verifica:

$\bar{x}$ es solución óptima del problema de mínimo $\Rightarrow$ verifica las condiciones de KT de mínimo

$\bar{x}$ es solución óptima del problema de máximo $\Leftrightarrow$ verifica las condiciones de KT de máximo

Si x e y son los únicos puntos que verifican las condiciones de KT, se tiene:

El mínimo del problema se alcanza en el punto $\boldsymbol{x}$, $\max\limits_{x\in X} f(x) = f(x)$

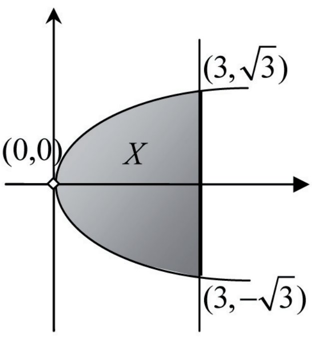
El máximo del problema se alcanza en el punto $\boldsymbol{y}$, $\max\limits_{x\in X} f(x) = f(y)$

(no existe ningún otro punto donde f alcance máximo o mínimo).

ii) (7 puntos) Resuelve el siguiente problema aplicando los teoremas de Kuhn-Tucker:

$$\max/\min\ x^2$$
$$y^2\text{-}x \leq 0$$
$$x \leq 3$$

Sea ahora el problema:



$\max/\min\left[x^2\right]$
$g^1(x, y) = y^2 - x \leq 0$
$g^2(x, y) = x - 3 \leq 0$

Se tiene, la función objetivo, $f(x,y)=x^2$, $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$

Se tiene que la función *f* es continua en *X* compacto, por tanto $\exists \max_{(x,y)\in X} f(x,y)$ y $\exists \min_{(x,y)\in X} f(x,y)$

En el apartado (i) hemos visto que se cumple, R1, R2. y R3., además se tiene,

R4: $f(x,y)=x^2$ es convexa en el convexo $\mathbb{R}^2$ ya que $H_f(x,y)=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ es semidefinida positiva en $\mathbb{R}^2$

Se tiene en este caso:

$\bar{x}$ es solución óptima del problema de mínimo $\Leftrightarrow$ verifica las condiciones de KT de mínimo

$\bar{x}$ es solución óptima del problema de máximo $\Rightarrow$ verifica las condiciones de KT de máximo

Veamos que puntos verifican las condiciones de KT.

$KT1:\ \nabla f(x,y)+\lambda_1\nabla g^1(x,y)+\lambda_2\nabla g^2(x,y)=(0,0)$

$$\begin{bmatrix}2x\\0\end{bmatrix}+\lambda_1\begin{bmatrix}-1\\2y\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$KT2:\ \lambda_1 g^1(x,y)=\lambda_1(y^2-x)=0$

$\lambda_2 g^2(x,y)=\lambda_2(x-3)=0$

$KT3:\ g^1(x,y)=y^2-x\le 0$

$g^2(x,y)=x-3\le 0$

$KT4:\ \lambda_1\ge 0,\lambda_2\ge 0\ \min$

$\lambda_1\le 0,\lambda_2\le 0\ \max$

Trabajando desde KT2 se tienen los cuatro casos siguientes:

a) $\lambda_1=0,\ \lambda_2=0\to(2x,0)=(0,0)\to x=0$, sustituyendo en KT3, $y=0$

El punto (0,0) satisface las condiciones de KT de máximo y de mínimo.

b) $\lambda_1=0,\ \lambda_2\ne 0\to(2x,0)+\lambda_2(1,0)=(0,0)\to\begin{cases}2x+\lambda_2=0\\ x-3=0\end{cases}\to x=3,\ \lambda_2=6$

sustituyendo en KT3 $y^2\le 3\to-\sqrt{3}\le y\le\sqrt{3}$

Para $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -6$, los puntos del conjunto, $\left\{(3,y) \in X / -\sqrt{3} \le y \le \sqrt{3}\right\}$ verifican las condiciones de KT de máximo.

c) $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 = 0 \to (2x,0) + \lambda_1(-1,2y) = (0,0) \to \begin{cases} 2x - \lambda_1 = 0 \\ 2y = 0 \to y = 0 \end{cases}$

sustituyendo en KT3 $y^2 - x = 0 \to x = 0,\ \lambda_1 = 0$

d) $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0 \to (2x,0) + \lambda_1(-1,2y) + \lambda_2(1,0) = (0,0) \to \begin{cases} 2x - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 y = 0 \to y = 0 \end{cases}$

por KT2 se tiene $x = 0$

Los puntos:

(0,0) con $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, satisface las condiciones de KT de máximo y de mínimo

$\left\{(3,y) \in X / -\sqrt{3} \le y \le \sqrt{3}\right\}$ para $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -6$ satisfacen las condiciones de KT de máximo.

Por tanto se tiene que el mínimo es:

$$\min_{(x,y)\in X} f(x,y) = f(0,0) = 0$$

Siendo el máximo valor:

$$\max_{(x,y)\in X} f(x,y) = 9$$

y se alcanza en todos los puntos de conjunto

$$\left\{(3,y) \in X / -\sqrt{3} \le y \le \sqrt{3}\right\}.$$

3. (6 puntos) Una empresa textil proporciona camisas y blusas a una tienda que le compra todo lo que le proporciona. El proceso de producción incluye corte, costura y empaquetado, utilizando 25 trabajadores en el departamento de corte, 35 en el de costura y 5 en el de empaquetado y siendo el horario de cada operario de 40 horas semanales. La siguiente tabla proporciona los requerimientos de tiempo en minutos y los ingresos por unidad en pesetas para las dos prendas:

	minutos por unidad			
	corte	costura	empaquetado	ingresos
camisas	20	70	12	2000
blusas	60	60	4	3000

i) Determina el programa de producción semanal de la empresa si pretende maximizar los ingresos.

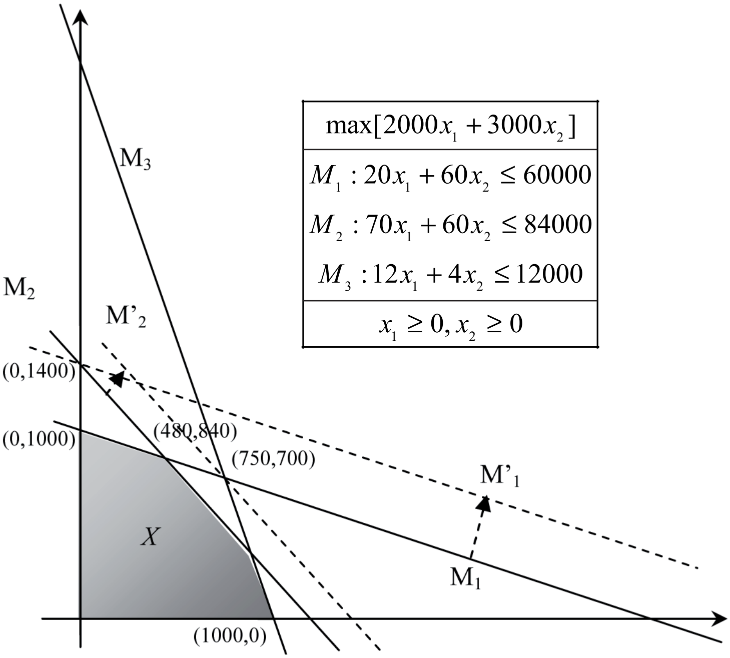
ii) Si quisiera contratar más trabajadores en cada uno de los procesos, ¿cuántos contrataría y con qué sueldo por hora?

Sean las variables:

x_1 : número de camisas

x_2 : número de blusas

i) Determina el programa de producción semanal de la empresa si pretende maximizar los ingresos.



La solución óptima se encontrará en alguno de los vértices del conjunto de soluciones factibles,

$f(1000,0)$=2.000.000 pta

$f(0,1000)$=3.000.000 pta

$f(9600/11,4200/11)$=2.890.909,1 pta

$f(480,840)$=3.480.000 pta

La producción óptima semanal será de 480 camisas y 840 blusas con un beneficio óptimo de 3.480.000ptas.

ii) Si quisiera contratar más trabajadores en cada uno de los procesos, ¿cuántos contrataría y con qué sueldo por hora?

En el óptimo, la restricción correspondiente al proceso 3 no está saturada, por lo que no se agotan las horas disponibles en el proceso de empaquetado y no es necesario contratar más trabajadores. Las restricciones correspondientes a los procesos de corte y costura si están saturadas, veamos si para estos casos le interesaría contratar más trabajadores y a cuanto pagaría la hora.

Proceso 1, corte, restricción saturada, si se aumentan las horas disponibles, se tiene

M_1: $20x_1 + 60x_2 \leq 60000 + a$

El punto óptimo pasa del punto (480,840) al punto (0,1400)

$a=0 \rightarrow a=24.000$

El valor óptimo pasa de 3.480.000 a 4.200.000

Y se tendrá por tanto,

$$\lambda_1 = \frac{4.200.000 - 3.480.000}{84.000 - 60.000} = 30\, ptas / m$$

En el proceso de corte le interesara contratar como máximo 10 trabajadores, pagando a menos de 1.800ptas/hora.

Proceso 2, costura, restricción saturada,

M_2: $70x_1 + 60x_2 \leq 84000 + b$

$b=0 \rightarrow b=13.000$

El punto óptimo pasa del punto (480,840) al punto (750,700)

Y el valor óptimo pasa de 3.480.000 a 3.750.000

$$\lambda_2 = \frac{3.750.000 - 3.480.000}{97.500 - 84.000} = 20\, ptas / m$$

En el proceso de costura le interesara contratar como máximo 5 trabajadores a 40 horas y 1 trabajador a 25 horas, pagando a menos de 1.200ptas/hora.