Análisis del riesgo de contraparte a través del modelo estructural de Merton en el marco de Solvencia II

Counterparty risk analysis using Merton´s structural model under Solvency II

Luis Otero González[1]
Pablo Durán Santomil[1]
Sara Fernández López[1]
Milagros Vivel Búa[1]
Universidad de Santiago de Compostela (España)

Recibido el 18 de octubre de 2011, aceptado el 13 de marzo de 2013
Nº de clasificación JEL: G2, C6
DOI: 10.5295/cdg.110314lo

Resumen:

La entrada en vigor del proyecto de Solvencia II transformará por completo el sistema de determinación de las necesidades de capital del sector asegurador europeo. Recientemente se ha presentado el último estudio de impacto cuantitativo (QIS5), donde se establece la forma de cálculo del modelo estándar para la determinación de los requerimientos de capital. Este trabajo trata de analizar la adecuación de la calibración del riesgo de crédito de la contraparte mediante los modelos que se proponen en los últimos informes de impacto cuantitativo (cuarto y quinto). Para ello comparamos las necesidades de capital que se obtienen por ambas alternativas, frente a las que resultarían de aplicar un modelo de simulación basado en el enfoque estructural. Los resultados obtenidos muestran que el uso de probabilidades basadas en la metodología de Merton frente a aquellas basadas en ratings, dan lugar a requerimientos de capital sustancialmente mayores. Además, el modelo propuesto en QIS4 basado en la distribución de Vasicek no es adecuado cuando el número de contrapartes es reducido, situación habitual en el sector asegurador europeo. Por otra parte, la nueva propuesta (QIS5 o modelo de Ter Berg) es más versátil y adecuada que su antecesora pero requiere analizar con más detenimiento las hipótesis de calibración para de este modo aproximar mejor las estimaciones al riesgo realmente asumido.

Palabras clave:

QIS4, QIS5, riesgo de contraparte, modelos estructurales, modelos internos, Solvencia II.

Abstract:

The new solvency regulation in the European insurance sector, denominated Solvency II, will completely transform the system of capital requirements estimation. Recently it has introduced the latest quantitative im-

[1] Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Departamento de Economía Financiera y Contabilidad, Avda. do Burgo, s/n. Campus Norte, 15782, Santiago de Compostela (La Coruña). luis.otero@usc.es; pablo.duran@usc.es; sara.fernandez.lopez@usc.es; mila.vivel@usc.es

pact study (QIS5), which provides the calculation method in the internal model for the determination of capital requirements. The aim of this paper is to analyze the adequacy of the calibration of the counterparty credit risk by the models proposed in recent quantitative impact reports (fourth and fifth). To do this we compare capital requirements obtained by the two alternatives, against which that results from applying a simulation model based on the structural approach. The results shows that the use of probabilities based on the methodology of Merton, which can be used in an internal model, compared to those based on ratings (standard model) result in substantially higher capital requirements. In addition, the model proposed in QIS4 based on Vasicek distribution is not appropriate when the number of counterparties is reduced, a common situation in the European insurance sector. Moreover, the new proposal (QIS5 or Ter Berg model) is more versatile and suitable than its predecessor but requires further research in order to improve the calibration hypothesis and, thus, to better approximate estimates to the risk actually assumed.

Keywords:

QIS4, QIS5, counterparty default risk, structural models, internal models, Solvency II.

1. INTRODUCCIÓN

La nueva regulación de solvencia de las compañías de seguros en el ámbito de la Unión Europea, denominada Solvencia II, supone la revisión de las normas de evaluación de la situación financiera con el objetivo de mejorar la medición y el control del riesgo. El nuevo marco, que se implantará previsiblemente en el año 2016, pretende que las compañías de seguros dispongan de un nivel de recursos propios, denominado *Solvency Capital Requirement (SCR)*[1], ajustado al riesgo realmente asumido. El cálculo de las necesidades de capital podrá realizarse a través de una fórmula estándar o, alternativamente, mediante modelos internos aprobados por el organismo regulador. En cuanto a la segunda opción, se permitirá la implantación de modelos parciales que no incluyan todos los riesgos. En ambos casos, la cuantía obtenida deberá corresponderse con el capital económico que han de poseer las compañías aseguradoras para limitar la probabilidad de ruina al 0.5% a un horizonte de un año (1 ruina cada 200 años). O dicho en términos financieros, una cantidad equivalente al valor en riesgo (VaR) con un nivel de confianza del 99.5 %.

La Autoridad Europea de Seguros y Planes de Pensiones (EIOPA), que ha sustituido a partir del 1 de Enero de 2011 al CEIOPS[2] es la encargada de desarrollar el modelo estándar. Para realizar dicha tarea se proponen fórmulas de cálculo del capital para los diferentes riesgos y se realizan estudios de impacto cuantitativo, los denominados *Quantitative Impact Studies* (QIS), sobre las compañías aseguradoras europeas que sirven para ver en que media la calibración del modelo estándar es adecuada. Las especificaciones técnicas del cuarto estudio de impacto (QIS 4) fueron publicadas en marzo de 2008 (CEIOPS, 2008a) y las de QIS 5 fueron publicadas en Abril de 2010 (CEIOPS, 2010a) y son en las que se basan este trabajo. En concreto, este trabajo tiene por objeto evaluar la propuesta para el análisis del riesgo de contraparte que se recoge en estos estudios de impacto cuantitativo y compararla con los requerimientos de capital que se obtendrían a través de la simulación de un modelo estructural alternativo. Dicho riesgo es el que se deriva de las posibles pérdidas asociadas a la quiebra o deterioro del crédito de la contraparte o de deudores, en contratos de mitigación del riesgo como el reaseguro, los derivados financieros, intermediarios, etc. La nueva propuesta, basada en Ter Berg (2008), que se incorpora en QIS5 no ha sido calibrada y está en proceso de evaluación por lo cual es interesante saber si mide adecuadamente el riesgo de crédito que asumen las entidades con sus contrapartes. Para ello utilizamos un modelo de simulación alternativo por ser más versátil y susceptible de ser utilizado como modelo interno por las compañías de seguros. Pretendemos de este modo comprobar si las dos alternativas que se incorporaran en sendos estudios de impacto cuantitativo, proporcionan niveles de capital acordes con el modelo de simulación estructural. Además, también se trata de evaluar las diferencias que resultan de utilizar probabilidades

[1] Solvencia II establecerá dos cantidades de capital: el capital económico (SCR) que es la cantidad asociada al riesgo realmente soportado por el asegurador y el capital legal o mínimo (MCR) que es la cantidad mínima que la compañía debe disponer en cada momento.

[2] El denominado *Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors* fue el organismo creado en el año 2003 por la Comisión Europea para gestionar el Proyecto Solvencia II. El CEIOPS estaba compuesto de representantes de las autoridades de supervisores de seguros y fondos de pensiones de los Estados Miembros de la Unión Europea y fue sustituido en Enero de 2011 por el EIOPA.

de default basadas en el mercado, frente a la alternativa de usar rating por la que se opta en Solvencia II.

Este trabajo contribuye a la literatura existente aportando un enfoque novedoso y ayudando a los aseguradores a seleccionar entre modelos alternativos de medición del riesgo de crédito. Este aspecto es particularmente relevante puesto que cada modelo puede dar lugar a requerimientos de capital diferentes. Además, es importante conocer si los modelos capturan convenientemente el riesgo que se quiere medir. A modo de aplicación práctica, hemos asumido que actúan como contrapartes de la cartera una muestra de bancos españoles cotizados. La metodología utilizada es susceptible de ser replicada por parte del sector asegurador para construir modelos internos con los que evaluar su nivel de exposición al riesgo y los requerimientos de capital necesarios de acuerdo con la nueva regulación que entrará en vigor en el horizonte previsible de 2016.

El trabajo se ha estructurado en cuatro apartados. En el segundo exponemos el modelo estructural de simulación del riesgo de contraparte que se pretende comparar con el modelo estándar propuesto en Solvencia II. En el tercer epígrafe se analiza la propuesta para medición del riesgo de contraparte en Solvencia II. En el cuarto epígrafe se realiza el análisis empírico. Por último, se exponen las principales conclusiones del trabajo.

2. MEDICIÓN DEL RIESGO DE CONTRAPARTE A TRAVÉS DE UN MODELO DE SIMULACIÓN

Este epígrafe aborda de forma detallada la metodología para la medición de riesgo de crédito mediante el modelo de simulación que pretendemos utilizar como benchmark para analizar la adecuación de la metodología propuesta en Solvencia II. Nuestra propuesta está basada en modelos estructurales, también denominados *option models*, *contingent claims* o *Merton models*. Las variables relevantes del modelo son la probabilidad de insolvencia y la correlación entre eventos de la cartera. Hay otras alternativas para obtener las probabilidades de default necesarias para cuantificar el riesgo de crédito. Los modelos contables estiman la probabilidad de default a partir de información de los estados financieros. Esta información es histórica y asume que empresas con ratios iguales tendrán la misma probabilidad de insolvencia. Mientras que, en el caso del modelo propuesto, empresas con el mismo nivel de capital y deuda pueden tener probabilidades muy diferentes debido a que también se considera la volatilidad y las expectativas futuras, al basarse en información del mercado. Otra alternativa es utilizar los ratings y la probabilidad implícita en cada *rating*. Nuevamente, esta alternativa implica suponer que cada activo dentro de un mismo rating tiene una probabilidad de *default* igual a la media histórica. Sin embargo, es habitual que una empresa experimente cambios importantes en su probabilidad de default antes de producirse un cambio en su *rating* (Vassalou y Xing, 2004). El modelo que se propone ha sido ampliamente utilizado para el análisis del riesgo de impago y diversos estudios indican su adecuación y superioridad frente a otras alternativas [Lau (2006), Gropp *et al*. (2002) y Vassalou y Xing (2004)], debido a su flexibilidad y capacidad para medir de forma continuada el riesgo a partir de información de mercado. A través de este modelo podemos construir mediante simulación la distribución esperada de pérdidas asumiendo diferentes correlaciones y probabilidades de default con lo cual es una alternativa muy flexible para modelizar el riesgo de crédito de un conjunto de contrapartes. En Solvencia II se opta por utilizar probabilidades basadas en ratings frente a las probabilidades basadas en el mercado obtenidas mediante un modelo estructural. A continuación exponemos como realizar la simulación del riesgo de crédito para una cartera de N contrapartes mediante el método de simulación.

2.1. **Estimación de las probabilidades individuales de impago**

El primer elemento que se precisa es la probabilidad de impago de cada contraparte. Utilizando el modelo de Merton (1974) puede obtenerse dicho valor a partir de información contable y de mercado. Dicho modelo parte de la premisa de que una empresa entra en default cuando el valor de los activos es inferior al de los pasivos. El valor de mercado de los activos de la empresa sigue un movimiento browniano geométrico de la forma:

$$dA_i = \mu_i A_i dt + \sigma_i A_i dX \quad (1)$$

Donde el valor del activo puede ser representado por:

$$\log A_{i,t+T} = \log A_{i,t} + \mu_{i,t+T} - \frac{1}{2}\sigma^2_{i,t+T} + \sigma_i\sqrt{T}dX \quad (2)$$

La probabilidad de default es la probabilidad de que el valor de los activos (A) sea inferior al valor del pasivo, o alternativamente, de que la variable aleatoria (X) que determina el comportamiento aleatorio del valor del activo sea inferior a d_i:

$$p = P\left(A_{i,t+T} \leq L_t/A_t\right) = P(X_i < d_i) \quad (3)$$

La distancia al *default* (DD) mide la diferencia entre el valor de la empresa y el valor nominal de su deuda en términos de desviaciones típicas, de modo que cuanto mayor sea la distancia al default, menor será la probabilidad de impago:

$$DD = \left[\frac{\ln(A_t) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) - \text{LnL}}{\sigma\sqrt{T-t}}\right] \quad (4)$$

Donde A_t es el valor de mercado del activo de la empresa, L el valor de su pasivo, σ la volatilidad del activo y μ el cambio logarítmico esperado en el valor del activo.

Por tanto, la probabilidad de *default* (p) puede ser definida como la probabilidad acumulada de la función de distribución normal en el punto equivalente a la distancia al default:

$$p = \emptyset(-DD) \quad (5)$$

El principal problema para resolver la ecuación es que no es posible observar los valores de mercado del valor de los activos y de la volatilidad. Sólo disponemos del valor en libros de los activos y pasivos y del valor de mercado del capital. La teoría de valoración de opciones establece la relación entre las variables inobservables (A_t, σ) y las observables, ya que el valor del capital puede ser visto como el valor de una opción call sobre el valor de los activos con un precio de ejercicio igual al valor de las obligaciones a un cierto plazo. Por tanto, el valor del capital puede determinarse con la fórmula estándar de Black y Scholes (1973):

$$E_t = A_t \emptyset(d_1) - Le^{rt} \emptyset(d_2) \quad (6)$$

Donde:

$$d_1 = \frac{\ln\left(A_t/_L\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (7)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \quad (8)$$

Para obtener los valores de las variables un procedimiento habitual es utilizar una segunda ecuación que relaciona las volatilidades de activo y capital a través de la siguiente fórmula:

$$\sigma_\varepsilon = \sigma_A \emptyset(d_1) \frac{A_t}{E_t} \quad (9)$$

Entre otros estudios que optan por esta alternativa destacan los de Crosbie y Bohn (2003), Bharath y Shumway (2004), Hillegeist et al. (2004), Löffler y Posch (2007) y Magee (2008).

2.2. Estimación de la correlación empleando el método del valor de los activos

Otro elemento fundamental en el análisis del riesgo de crédito de una cartera es la correlación entre eventos. Si los eventos de impago de los préstamos en la cartera fuesen independientes, la distribución de pérdidas de la cartera convergería a una distribución normal, pero como no son independientes, no es posible utilizar dicha hipótesis. La consideración de la correlación en el *Asset Value Approach* se hace a través de la representación del default como una función de variables continuas a la que se le impone una estructura de correlaciones entre dichas variables [Vasicek (1991, 2002) y Löffler y Posch (2007)]. Como indica Vasicek (2002), la correlación se introduce asumiendo que las X_i (la variable aleatoria que define el movimiento del precio de los activos) son variables estándar normales con la misma correlación parcial y que pueden representarse a través de:

$$X_i = \sqrt{w_i}Z + \sqrt{1 - w_i}\varepsilon_i \quad (10)$$

La variable Z puede interpretarse como el factor común, tal como un índice económico, y $\sqrt{w_i}Z$ la exposición de la empresa a dicho factor, mientras que $\sqrt{1 - w_i}$ es el riesgo específico, donde Z y ε_i son variables normales estándar incorreladas. Si tenemos probabilidades individuales de default, podemos construir un indicador como:

$$Y_i = 1 \rightarrow X_i \leq d_i \ (11)$$

$$Y_i = 0 \rightarrow X_i > d_i \ (12)$$

Donde d_i será un valor crítico que determina el nivel de default y será en concreto el percentil asociado a la probabilidad de default estimada para una determinada contraparte, que se determina como $d_i = Ø^{-1}$ (p). Como hemos determinado a partir del mercado la probabilidad de default, cuando la variable creada caiga por debajo de un percentil, significará que quiebra. Pero como A_i tiene un factor común (Z) con el resto de contrapartes, la dependencia en los eventos de crédito vendrá dada por el efecto de dicho factor sobre el valor de A_i. De hecho, el coeficiente de correlación entre ambas variables viene determinado por:

$$\rho_{ij}^{asset} = \frac{cov(x_i, x_j)}{\sigma_{xi}\sigma_{xj}} = \frac{Cov(\sqrt{w_i}Z + \sqrt{1-w_i}\varepsilon_i, \sqrt{w_i}Z + \sqrt{1-w_i}\varepsilon_j)}{1 \times 1} = \sqrt{w_i}\sqrt{w_i}Var(Z) = W_i \ (13)$$

Por tanto, en el caso más simple, la probabilidad de default conjunto para dos contrapartes viene determinada por:

$$P(A_i \leq d_i, A_j \leq d_j) = Ø_2(A_i \leq d_i, A_j \leq d_j, \rho_{ij}^{asset}) \ (14)$$

En la Tabla 1 representamos el valor de la probabilidad de *default* conjunta en función de las probabilidades de default individuales y de la correlación asumida entre los activos. Como puede observarse, en el caso de sucesos independientes, la probabilidad de default conjunta vendría dada exclusivamente por el producto de las probabilidades, propiedad de la binomial independiente, mientras que si se asume dependencia de 0.4, la probabilidad conjunta se multiplica prácticamente por cuatro. En el Apéndice exponemos como obtener la correlación entre eventos a partir de datos empíricos.

Tabla 1

Probabilidad de default conjunta de dos contrapartes para diferentes niveles de correlación

p/w_i	0	0.1	0.2	0.4
5.00%	0.25%	0.37%	0.52%	0.94%
7.50%	0.56%	0.78%	1.05%	1.73%
10.00%	1.00%	1.33%	1.72%	2.67%
12.50%	1.56%	2.01%	2.52%	3.73%
15.00%	2.25%	2.82%	3.46%	4.92%
17.50%	3.06%	3.76%	4.51%	6.22%
20.00%	4.00%	4.81%	5.68%	7.62%

2.3. Estimación del riesgo por simulación

La estimación del riesgo de una cartera podemos obtenerla mediante la simulación de eventos de crédito, teniendo en cuenta las variables que se expusieron anteriormente. La simulación tiene como particularidad la versatilidad, ya que permite adaptar el análisis a la realidad de la cartera de crédito que tenga cada asegurador. Hay que tener en cuenta en muchos casos el número de contrapartes puede ser reducido y heterogéneo, cuestión que se puede abordar fácilmente si se hace mediante simulación. El modelo que se pretende utilizar como referencia consiste en aplicar la simulación de Monte Carlo siguiendo los siguientes pasos:

1. *Especificación de las probabilidades de default individuales*. Dichas probabilidades son estimadas siguiendo los pasos explicados en el apartado 2.1.
2. *Especificar las pérdidas en caso de default*. Dichas pérdidas son estimadas asumiendo un determinado porcentaje de pérdida en caso de default, para lo cual se utilizan los valores basados en la experiencia histórica de las agencias de calificación.
3. *Especificación de la correlación*. Como utilizamos el Asset value approach, la correlación se introduce asumiendo que $X_i = \sqrt{w_i}Z + \sqrt{1 - w_i}\varepsilon_i$.
4. *Determinación del default*. Asumiremos que hay un default en el caso de que el valor de X caiga por debajo de un determinado valor, que a su vez se corresponde con una determinada probabilidad de impago.
5. *Simulación del modelo*. A través de simulación de Monte Carlo N veces para obtener finalmente la distribución de la cartera.

3. MEDICIÓN DEL RIESGO DE CONTRAPARTE EN SOLVENCIA II

El riesgo de contraparte se deriva de las posibles pérdidas asociadas a la quiebra o deterioro del crédito de la contraparte o de deudores, en contratos de mitigación del riesgo como el reaseguro, los derivados financieros, intermediarios, así como cualquier exposición al crédito no cubierta en el riesgo de spread. A continuación exponemos la determinación de los requerimientos de capital bajo en el modelo estándar de Solvencia II recogido en los dos últimos estudios de impacto cuantitativo.

3.1. Riesgo de contraparte en QIS4

El análisis del riesgo de la contraparte en el cuarto estudio de impacto cuantitativo (QIS4) es abordado mediante la distribución de Vasicek (véase Vasicek, 1897, 1991), empleada también en la regulación de los requerimientos de capital del sistema bancario (Basilea II). El modelo de Vasicek establece la dependencia entre *default* tal y como se expuso en el apartado anterior, a través del efecto que el estado de la economía tiene sobre el valor de todos los activos.

El modelo de Vasicek deduce la distribución de P (probabilidad de default) cuando hay correlación entre los incumplimientos y cuando el número de exposiciones tiende a infinito

($N = \infty$). La probabilidad de un evento individual de incumplimiento ($X_i = 1$) condicionado sobre el estado de la economía se puede escribir como[3]:

$$P(y) = P(X_i = 1|Z) = \emptyset\left(\frac{\beta - \sqrt{\rho}Z}{\sqrt{1-\rho}}\right) \quad (15)$$

Por lo que sustituyendo $\beta = \emptyset^{-1}$ (PD) resulta que:

$$P(X_i = 1|Y) = \emptyset\left(\frac{\emptyset^{-1}(PD) - \sqrt{\rho}Z}{\sqrt{1-\rho}}\right) \quad (16)$$

Siendo frecuente denotar $\Pi(Z) = \emptyset\left(\frac{\emptyset^{-1}(PD) - \sqrt{\rho}Z}{\sqrt{1-\rho}}\right)$. De esta forma $\Pi(Z)$ representa la probabilidad de incumplimiento bajo un escenario dado. Cuando en vez de tener una exposición individual tenemos una cartera de exposiciones, y dado que al condicionar sobre el estado de la economía las X_i son variables independientes idénticamente distribuidas y con varianza finita, la pérdida condicionada converge a su expectativa $\Pi(Z)$ a medida que N tienda a infinito. Por tanto, podemos aproximar la distribución de la morosidad condicionada a la economía mediante una normal de media $\Pi(Z)$ y desviación típica $\sqrt{\frac{\Pi(Z)(1-\Pi(Z))}{N}}$, es decir $\left(\Pi(Z), \sqrt{\frac{\Pi(Z)(1-\Pi(Z))}{N}}\right)$.

Supongamos que $N = \infty$, aplicando la ley de los grandes números $M|Y \approx \Pi(Z)$ y de esta forma se puede establecer la función de distribución de M como:

$$P(M \leq t) = E\left(P(M \leq t|Z)\right) = P(\Pi(Z) \leq t) = P(Z \geq \Pi^{-1}(t)) \quad (17)$$

Y por lo tanto, la función de distribución acumulada de morosidad de una cartera de exposiciones muy elevada tiende en el límite a (Vasicek, 1991,2002)[4]:

$$F(t; PD; \rho) = P(M \leq t) = \emptyset\left(\frac{\emptyset^{-1}(t)\sqrt{1-\rho} - \emptyset^{-1}(PD)}{\sqrt{\rho}}\right) \quad (18)$$

La convergencia a la forma límite de distribución se sostiene para carteras con exposiciones con distintos pesos, siempre y cuando exista un número suficientemente elevado de exposiciones sin que ninguna de las exposiciones individuales sea mucho más elevada que el resto. Dado un número de exposiciones de la cartera elevado N, el valor en riesgo o VaR de la cartera se determina como:

$$VaR_\alpha(M) = \emptyset\left(\emptyset^{-1}(\alpha)\sqrt{\frac{\rho}{1-\rho}} + \emptyset^{-1}(PD)\sqrt{\frac{1}{1-\rho}}\right) \quad (19)$$

---

3 El evento de incumplimiento condicionado se traslada a $(X_i = 1|Y) = (Z_i \leq \beta|Y) = \left(W_i \leq \frac{\beta - \sqrt{\rho}Y}{\sqrt{1-\rho}}\right)$

4 Además, debe observarse que: $F(t; PD; \rho) = s \Leftrightarrow \emptyset^{-1}(t)\sqrt{1-\rho} - \emptyset^{-1}(s)\sqrt{\rho} = \emptyset^{-1}(PD)$.

De esta forma el $VaR_\alpha(M)$ es una función creciente de ρ[5] y PD.

La principal limitación de esta propuesta es que sólo es válida en el caso de grandes poblaciones homogéneas. El principal inconveniente de este enfoque para el riesgo de contraparte de una compañía aseguradora, formado principalmente por el reaseguro, es que normalmente existen un número reducido de contrapartes y estas son heterogéneas. Además, la correlación entre contrapartes es medida por el índice de concentración de Herfindahl, lo cual no es correcto desde un punto de vista conceptual (véase Ter Berg, 2008) ni empíricamente apropiado para el sector asegurador[6]. Otro problema de QIS4 es que asigna a las exposiciones sin calificación una probabilidad de incumplimiento que muchas compañías consideraron que no reflejan el riesgo crediticio de la exposición (CEIOPS, 2009a).

3.2. **Riesgo de contraparte en QIS5**

En QIS5 se procede a una diferenciación de dos tipos de exposiciones (tipo 1 y tipo 2) con un tratamiento diferenciado. Las exposiciones tipo 1 están formadas por riesgos que no se pueden diversificar y en los cuales es probable que la contraparte tenga calificación crediticia. De esta forma esta clase contiene exposiciones en relación con: acuerdos de reaseguro, titulizaciones y derivados, etc. Las exposiciones tipo 2, se relacionan con riesgos que están generalmente diversificados y contrapartes probablemente no calificadas. Estarán formadas por todas las exposiciones que no son de tipo 1, en particular: créditos de los intermediarios, deudas de los asegurados con la compañía, etc. Para hacer frente a los anteriores problemas el CEIOPS analizó enfoques alternativos al modelo de QIS4 (Vasicek-Herfindahl) para las exposiciones tipo 1. El modelo ter Berg propuesto en QIS5 se considera que mejora la propuesta de QIS4 al hacer hincapié en la heterogeneidad de la cartera y el limitado número de contrapartes[7].

Modelo Ter Berg

El nuevo modelo propuesto para el riesgo de contraparte de las exposiciones tipo 1 en QIS5 tiene dos características fundamentales. La primera supone una variable de estrés común o shock aleatorio (S) que afecta a todas las contrapartes, lo que conduce a una correlación implícita entre las probabilidades de incumplimiento de las contrapartes. La segunda es que la vulnerabilidad de cada contraparte a esta variable común se modeliza expresando la probabilidad de incumplimiento específica como función monótona creciente de la variable de estrés. Bajo estos dos supuestos existe una correlación positiva entre las contrapartes que viene determinada sólo por las probabilidades de incumplimiento media de las contrapartes y de dos parámetros: que determina la aleatoriedad de la variable común(s) y τ que viene dado por la capacidad de respuesta de las PD individuales a la variable común. Bajo este modelo es relativamente sencillo calcular la media y la varianza de la distribu-

---

5 Para $\rho = 0$ el VaR es *PD* y para $\rho = 100\%$ el VaR es 100 %.

6 CEIOPS (2009a) muestra un ejemplo práctico donde la relación entre la diversificación y el número de contrapartes no es adecuado. En la clase AAA y para más de una contraparte el requerimiento de capital aumenta con el número de contrapartes, lo cual incentivaría la concentración de riesgos.

7 El CEIOPS ha comprobado que está exento de los comportamientos anómalos como los observados en el enfoque de Vasicek-Herfindahl.

ción de pérdidas agregadas. De esta forma la carga de capital para las exposiciones tipo 1 es el producto de un factor cuantil denominado q y la desviación típica $\sqrt{V}$, estando los resultados sujetos a un límite superior dado por la suma de las LGD de la cartera, donde q toma el valor 3 o 5[8]:

$$SCR_{contraparte,1} = \min\left(\sum_{i=1}^{k} LGD_i \,;\, q\sqrt{V}\right) \quad (20)$$

A continuación describiremos matemáticamente el modelo. El modelo parte del supuesto básico de que existe una variable común S que sigue una distribución de probabilidad:

$$\Pr(S \leq s) = s^{\propto} \quad 0 < s < 1 \quad 0 < \propto < 1 \quad (21)$$

Donde $\propto$ es el parámetro de forma. La probabilidad de impago p(S) viene dada por S mediante:

$$p(s) = b + (1 - b)S^{\tau/b} \quad 0 < b < 1 \quad (22)$$

Donde b es la probabilidad de incumplimiento básica y τ un parámetro de forma. La probabilidad de incumplimiento básica es la probabilidad mínima de incumplimiento de una contraparte, por ejemplo, en caso de situaciones económicas muy favorables. La idea de esta especificación es que las entidades con probabilidades de impago bajas son bastante inmunes a las crisis, siempre y cuando estas no sean muy extremas. Las probabilidades de impago elevadas aumentan la sensibilidad a las crisis incluso si estas son de tamaño más modesto, lo cual recoge el modelo en el exponente (τ/b) de modo que una mayor probabilidad de quiebra individual da lugar a un exponente menor y consecuentemente a un efecto mayor del shock. El factor común genera una correlación entre las contrapartes. La correlación es inducida por los parámetros de forma $\propto$ y τ, así como las probabilidades de incumplimiento básicas. La probabilidad de default asignada a una contraparte viene dada por[9]:

$$p = E(p) = \int_0^1 p(s)f(s)ds = \frac{(\tau+\propto)b}{\tau+\propto b} = \frac{\left(1+\frac{\propto}{\tau}\right)b}{1+\frac{\propto}{\tau}b} \quad (23)$$

Un aspecto fundamental de la anterior ecuación es el ratio $\propto/\tau$. Cuanto mayor sea su valor mayor es la diferencia entre la probabilidad de incumplimiento p y la básica b. Por ejemplo, para b cercano a cero, si la ratio toma el valor 0,5 entonces p ≈ 1,5b y si la ratio toma el valor 4 (valor propuesto por el CEIOPS, 2009b), entonces p ≈ 5b. Además las covarianzas entre contrapartes también dependen de este ratio. Una cartera de exposiciones

[8] La distribución de pérdidas de la cartera es demasiado compleja para determinar el VaR al 99,5% directamente a partir de ella. En cambio, si es sencillo multiplicando la desviación por un factor fijo que toma el valor 3. Este valor es adecuado si la distribución lognormal se considerada como una aproximación adecuada de la distribución de pérdidas. Sin embargo, si la cartera está dominada por un pequeño número de exposiciones con una alta probabilidad de incumplimiento, la distribución resultante puede ser considerablemente más asimétrica que la distribución lognormal. Esto se produce cuando la desviación estándar de la distribución de pérdidas supera el 5% de la pérdida total en caso de impago. En este caso el factor de debe fijarse en 5.

[9] A partir de la cual podemos determinar la probabilidad de impago base como: $b = \frac{p\tau}{\tau+\propto(1-p)}$

viene dada por un conjunto de contrapartes k indexadas de i = 1; …,, k, la probabilidad de impago la denotaremos por p_i y la LGD por y_i. Las covarianzas entre las distintas contrapartes son los elementos de la matriz $\Omega = \omega_{ij}$ dados por las siguientes expresiones:

$$\omega_{ii} \text{ para } i = 1; \dots; k \quad (24)$$

$$\omega_{ij} = \frac{\propto(1-b_i)(1-b_j)}{\propto+\tau b_i^{-1}+\tau b_j^{-1}} - (p_i - b_i)(p_j - b_j) \text{ para } i,j = 1; \dots; k \quad i \neq j \quad (25)$$

El riesgo de quiebra de la contraparte sigue una distribución de probabilidad con una masa de probabilidad concentrada en torno a cero. La media y la varianza de dicha distribución son:

$$\text{Media: } \sum_{i=1}^{k} p_i y_i \quad (26)$$

$$\text{Varianza (V): } \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \omega_{ij} y_i y_j \quad (27)$$

En donde sólo la varianza determina la carga de capital para soportar este riesgo. Además en el caso de que sólo exista una contraparte (k = 1) La varianza se reduce a $V = p(1 - p)y^2$ (Ter Berg, 2008).

4. ANÁLISIS EMPÍRICO: DETERMINACIÓN DE LAS CARGAS DE CAPITAL A TRAVÉS DE LAS DIFERENTES METODOLOGÍAS

En este apartado pretendemos evaluar la estimación de los requerimientos de capital mediante el modelo de simulación y aquellas que resultan de aplicar las propuestas de QIS4 y QIS5. Para ello, hemos asumido una hipotética cartera de contrapartes formada por bancos españoles cotizados. En concreto utilizamos la información disponible a 31-12-2009 relativa al valor de mercado del capital, valor en libros del pasivo y volatilidad diaria del último año. Como proxy del tipo de interés libre de riesgo (r_f) hemos utilizado el tipo a un año de las letras del Tesoro. La elección de este plazo se basa en la hipótesis de que la deuda vence en el plazo de un año, algo estándar en la literatura sobre este tema.

El objetivo de esta parte empírica no es otro que comprobar en qué medida las dos alternativas, que se incorporaran en sendos estudios de impacto cuantitativo, proporcionan niveles de capital acordes con el modelo de simulación estructural. Además, también se trata de evaluar el efecto que tiene utilizar probabilidades de default basadas en el mercado, frente a la alternativa de usar ratings, opción utilizada en Solvencia II. En este sentido, realizamos un análisis de sensibilidad de los requerimientos de capital ante diversas hipótesis que explicamos a continuación.

4.1. Requerimientos de capital bajo el modelo de simulación basado en Merton

Para determinar la probabilidad de default de cada entidad en Diciembre de 2009 hemos utilizado el valor de Mercado del capital (E) al cierre de 2009, y la volatilidad histórica a partir de los rendimientos logarítmicos diarios. Además, el valor de la deuda se valoró tomando el valor en libros (D). Utilizando esa información, hemos estimado (véase la Tabla 2) la distancia al default tomando la propuesta de Löffler y Posch (2007), que consiste en utilizar dos ecuaciones, una que relaciona el valor del capital con el valor del activo y la volatilidad, y otra para la volatilidad del capital y del activo. Algunos estudios que optan por esta alternativa son los de Crosbie y Bohn (2003), Bharath y Shumway (2004), Hillegeist, *et al*. (2004), Löffler y Posch (2007) y Magee (2008).

Tabla 2

Estimación de la distancia al default y probabilidades de impago

	Sabadell	Valencia	Banesto	Guipuzcoano	Pastor	Popular	Santander	Bankinter	BBVA
E	4650	2513.771	5884.031	889.604	1279.642	6839.068	95042.941	3385.151	47711.647
Volatilidad E	29.79%	34.09%	34.33%	22.84%	33.28%	42.63%	45.52%	38.13%	43.29%
D	77525.5	21297.3	120748	9700.7	30275.8	120842.1	1036658.9	51541.1	504302
Rf	0.88%	0.88%	0.88%	0.88%	0.88%	0.88%	0.88%	0.88%	0.88%
Horizonte	1	1	1	1	1	1	1	1	1
A	81,496	23,624	125,573	10,505	31,290	126,614	1,122,449	54,473	547,540
Volatilidad A	1.70%	3.63%	1.61%	1.93%	1.36%	2.32%	3.90%	2.38%	3.80%
DD	2.947	2.874	2.441	4.130	2.426	2.021	2.060	2.339	2.183
P	0.16%	0.20%	0.73%	0.00%	0.76%	2.16%	1.97%	0.97%	1.45%

Fuente: Bankscope y elaboración propia.

A continuación exponemos el resultado de estimar el capital necesario para una cartera compuesta por las nueve contrapartes y con una exposición de 100 unidades, asumiendo una tasa de recuperación (RR) del 50 por ciento y diferentes escenarios de correlación entre los activos (Wi). Para ello se realizó una simulación de 50000 escenarios a un año por el método Latino Hipercúbico[10]. En la Tabla 3 se muestran las necesidades de capital inherentes a cada escenario de correlación y otras estadísticas de interés de la distribución de pérdidas agregadas. Se observa como el valor en riesgo, pérdida máxima, varianza, asimetría y curtosis de la distribución aumentan a medida que lo hace la correlación. Como puede observarse, las necesidades de capital pueden oscilar considerablemente, en función del valor asumido por el factor de ponderación del estado de la economía. Por otra parte, en general podemos observar que en cualquiera de los casos, al tratarse de un número pequeño de contrapartes, la curtosis de la distribución de pérdidas y la varianza son muy elevadas, y esta última es muy sensible a las variaciones en el coeficiente de correlación.

[10] El método de simulación Latino Hibercúbico (LHS) es un método de recogida de muestras por estratificación. Permite recrear una distribución con una mayor precisión para un mismo número de iteraciones que el método de Monte Carlo puro, en el que las muestras son seleccionadas de forma completamente aleatoria.

Tabla 3

Estimación de los requerimientos de capital por simulación y otras estadísticas

W	0.1	0.3	0.5	0.56	0.7	0.9
VaR (99.5%)	100.00	100.00	100.00	150.00	150.00	250.00
Mínimo	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Media	4.23	4.24	4.18	4.15	4.15	4.21
Máximo	150.00	300.00	350.00	350.00	400.00	450.00
D.E.	14.88	16.40	18.68	19.54	22.38	28.21
Varianza	221.49	268.97	349.02	381.66	500.78	795.53
Asimetría	3.65	4.77	6.21	6.69	7.91	8.83
Curtosis	17.16	33.22	55.49	62.66	83.79	92.35
Moda	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

4.2. Requerimientos de capital utilizando la propuesta de QIS4

En QIS4, independientemente de la forma legal de las obligaciones contractuales, se debe considerar la exposición global al riesgo de cada contraparte. La información necesaria para el cálculo del capital asociado al riesgo de la contraparte son la probabilidad de impago de la contraparte (*probability of default* o PD), y la pérdida estimada dado el impago o cuantía de la pérdida estimada en caso de incumplimiento de la contraparte. La LGD_i global en relación a la contraparte i es la suma de las pérdidas dado un impago derivadas del reaseguro y SPVs, derivados financieros, riesgo de intermediarios y otras exposiciones al crédito. La PD se obtiene a partir de los datos de agencias de rating. En la Tabla 4 se muestran las empleadas en QIS4 y QIS5.

Tabla 4

Probabilidad de impago en función del rating

$Rating_i$	PD_i (QIS4)	PD_i (QIS5)
AAA	0.002%	0.002%
AA	0.010%	0.010%
A	0.050%	0.050%
BBB	0.240%	0.240%
BB	1.200%	1.200%
B	6.04%	4.175%
CCC o inferior, no calificado	30.41%	4.175%

Para determinar el capital necesario para soportar el riesgo de la contraparte se efectúa un cálculo en tres etapas:

1º Paso: Cálculo de la concentración: El índice de concentración de Herfindahl para las exposiciones al riesgo de la contraparte se calcula como:

$$p(s) = b + (1 - b)S^{t/b} \quad 0 < b < 1 \quad (22)$$

2º Paso: Cálculo de los requerimientos de capital para cada contrapartida. La correlación implícita entre cada contraparte y el índice de concentración de Herfindahl se calcula como:

$$R = 0.5 + 0.5H \quad (29)$$

Posteriormente, se calculan las exigencias de capital mediante la distribución de Vasicek empleando como correlación el capital anteriormente calculado

3º Paso: Agregación. Las cargas individuales de capital son sumadas algebraicamente para obtener el requerimiento de capital para el riesgo de contraparte.

En la Tabla 5 se resumen los resultados obtenidos en QIS4, para las nueve contrapartes anteriormente citadas calificadas utilizando los datos proporcionados por *Fitch Long term,* y con las mismas hipótesis de cartera que en el ejemplo anterior. El índice de concentración de Herfindahl es 0.11, lo que produce una correlación (W) de 0.56 dando un requerimiento de capital de 9.99 unidades monetarias (u.m.), cantidad muy inferior a la alcanzada por el modelo de simulación (150 u.m.) para un nivel de correlación equivalente. De este modo se demuestra que para un número reducido de contrapartes, habitual en el sector asegurador, no resulta adecuado este modelo ya que subestima considerablemente el riesgo asumido.

Tabla 5

Resumen cálculos capital en QIS4

H	R	VaR (99,5%)
0.111	0.556	9.992

4.3. **Requerimientos de capital utilizando la propuesta de QIS5**

La información necesaria para el cálculo del capital asociado al riesgo de la contraparte en QIS5 son nuevamente la probabilidad de impago de la contraparte, y la cuantía de la pérdida estimada en caso de incumplimiento. Dadas las probabilidades de default (p) y las pérdidas estimadas para cada una de las n contrapartes (LGD), la carga de capital para el riesgo de contraparte se calcula mediante:

$$3\sqrt{V} \text{ si } \sqrt{V} \leq 5\% \textstyle\sum_{i=1}^{n} LGD_i \quad (30)$$

$$\min\left(\textstyle\sum_{i=1}^{n} LGD_i \,;\, 5\sqrt{V}\right) \text{ si } \sqrt{V} > 5\% \textstyle\sum_{i=1}^{n} LGD_i \quad (31)$$

Siendo V la varianza de la distribución de pérdidas agregadas, calculadas mediante la siguiente expresión para las j categorías de rating distintas

$$V = \sum_j \sum_k u_{j,k} \cdot y_j \cdot y_k + \sum_k v_j \cdot z_j \quad (32)$$

Donde

– j y k son los subíndices para cada categoria de rating,

– y_j es la suma de las pérdidas estimadas para la categoría de rating j, es decir, $y_j = \sum_i (LGD_i)^2$

– z_j es la suma de los cuadrados de las pérdidas estimadas para la categoría de rating j, $z_j = \sum_i (LGD_i)^2$

– $u_{j,k}$ y v_j son parámetros fijos que sólo dependen de la categoría del rating, calculados como $u_{i,j} = \frac{p_i(1-p_i)p_j(1-p_j)}{(1+\gamma)(p_i+p_j)-p_i p_j}$ y $v_i = \frac{(1+2\gamma)p_i(1-p_i)}{2+2\gamma-p_i}$ y donde γ toma el valor 0,25 y p denota las probabilidades de impago conforme a la última columna de la Tabla 6.

En la Tabla 6 y 7 se muestran los elementos $u_{i,j}$ y v_i, calculados a partir de las ecuaciones anteriores.

Tabla 6

$u_{i,j}$ calculados para QIS5

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC o inferior
AAA	0.001%	0.001%	0.002%	0.002%	0.002%	0.002%	0.002%
AA	0.001%	0.004%	0.007%	0.008%	0.008%	0.008%	0.008%
A	0.002%	0.007%	0.020%	0.033%	0.038%	0.038%	0.038%
BBB	0.002%	0.008%	0.033%	0.096%	0.158%	0.174%	0.174%
BB	0.002%	0.008%	0.038%	0.158%	0.471%	0.711%	0.711%
B	0.002%	0.008%	0.038%	0.174%	0.711%	1.560%	1.560%
CCC o inferior	0.002%	0.008%	0.038%	0.174%	0.711%	1.560%	1.560%

Tabla 7

v_i calculados para QIS5

AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC o inferior
0.001%	0.006%	0.030%	0.144%	0.715%	2.441%	2.441%

En la Tabla 8 se resumen los resultados obtenidos, en los que se observa que la varianza de la cartera es de 37.98, lo que implica que el factor cuantil a aplicar es 3, proporcionando un requerimiento de capital de 18.48 unidades monetarias, un 86% superior al obtenido en QIS4. Sin embargo, dicha cantidad sigue siendo muy inferior a la proporcionada por el modelo de simulación.

Cuadernos de Gestión Vol. 14 - Nº 2 (Año 2014), pp. 99-120 ISSN: 1131 - 6837

Tabla 8

Resumen cálculos capital en QIS5

V	q	VaR (99,5%)
37.98	3	18.487

4.4. **Análisis de sensibilidad de los resultados obtenidos**

Como hemos podido comprobar, el cálculo de las necesidades de capital a través de los diferentes métodos arroja diferencias sustanciales a favor del modelo de simulación. No obstante, dichas diferencias son el resultado haber utilizado diferentes inputs y diferentes métodos. Por un lado, hemos utilizado las probabilidades basadas en el mercado, en el caso del modelo de simulación, frente a aquellas basadas en *ratings* que se proponen en el modelo estándar. Además, la correlación entre impagos, si bien es equivalente en el modelo de simulación y de QIS4, no ocurre lo mismo con la nueva propuesta de QIS5, donde el ratio $\propto/\tau$ determina la relación entre la probabilidad de default (p) y la probabilidad básica (b), así como la varianza de la cartera. Por este motivo, en este apartado trataremos de utilizar inputs equivalentes para ver en qué medida difieren los resultados exclusivamente como consecuencia de la diferente metodología empleada.

Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 9. En el caso de QIS4 los nuevos valores de las probabilidades de impago aumentan el capital a través de las cargas de capital individuales calculadas mediante la distribución de Vasicek, manteniéndose R y H constantes. La suma de las cargas individuales asciende a 77.356 u.m., que es la carga de capital necesario para hace frente a esa exposición al riesgo. En el caso de QIS5, las nuevas probabilidades modifican los valores de los $u_{i,j}$ y v_i, modificando por tanto el valor de la varianza de la distribución de pérdidas agregada y así la carga de capital. De esta forma, el valor de la varianza asciende a 1394.69, lo que implica emplear un factor cuantil de 5 obteniendo un requerimiento de capital de 186.73 u.m.. En el caso de haber aplicado un factor de 3, la carga resultante sería de 112.04 u.m. Por tanto, podemos afirmar que la carga de capital obtenida por el modelo QIS4 sería la menor, seguida del modelo de Merton y finalmente, el modelo QIS5 sería el que proporcionaría mayores cargas de capital. Nuevamente se demuestra que el modelo de Vasicek para pocas contrapartes no es adecuado, mientras que el modelo de QIS5 genera cargas sensiblemente superiores, lo que puede deberse al uso de un ratio $\propto/\tau$ arbitrario y al factor cuantil empleado. Asumiendo, por tanto, que el coeficiente de correlación de 0.56 refleja un escenario suficientemente adverso, lo cual es cierto respecto al calculado por Löffler y Posch (2007), el capital estimado con la nueva propuesta sería sensiblemente superior al del modelo de simulación.

Tabla 9

Resumen cálculo capital con PD de mercado en QIS4 y QIS5

	QIS4	QIS5 (q=3)	Simulación (0.56)	QIS5 (q=5)
VaR (99.5%)	77.36	112.037	150	186.728

5. CONCLUSIONES

Este trabajo tiene por objeto evaluar las propuestas para el análisis del riesgo de crédito que se recogen en los estudios de impacto cuantitativo de Solvencia II, comparándolas con los requerimientos de capital que se obtendrían a través de la simulación de un modelo estructural alternativo. Los resultados obtenidos muestran que el uso de probabilidades de default basadas en el mercado en el modelo de simulación da lugar a unos requerimientos de capital que superan considerablemente a los que resultan de la aplicación de los modelos estándar propuestos. Por tanto, una primera conclusión a la que llegamos es que el uso de probabilidades basadas en un modelo estructural, frente a aquellas basadas en Ratings, dan lugar a requerimientos de capital sustancialmente mayores. Esto podría ser debido a que los datos del mercado anticipan con más rapidez que los ratings las variaciones en el nivel de riesgo.

Además, hemos pretendido comprobar las diferencias en el cálculo del capital debidas exclusivamente a las particularidades de cada modelo para lo que se utilizaron los mismos inputs de partida. De dicho análisis se desprende la inadecuación del modelo propuesto en QIS4 para el número reducido de contrapartes que es habitual en el sector asegurador. Dado que el modelo implícitamente asume un número muy amplio de contrapartes, subestima considerablemente el riesgo asumido proporcionando cargas de capital reducidas. Además, el coeficiente de correlación se ha establecido de acuerdo con el nivel de concentración entre contrapartes, lo que tampoco es correcto ni desde un punto de vista conceptual ni desde el punto de vista empírico. Por otra parte, la nueva propuesta (QIS5), en el caso particular analizado, arroja cargas de capital sustancialmente superiores a las del modelo de simulación lo cual podría indicar la necesidad de mejorar la calibración de los parámetros utilizados. En particular, la hipótesis asumida del valor del parámetro (*alfpha-tau*) igual a 4, es decir, que la probabilidad de default es cinco veces la básica cuando ésta es próxima a cero, deberá someterse a estudios más rigurosos. Algo similar ocurre con los factores que se utilizan como múltiplos de la desviación estándar. En definitiva, el riesgo de contraparte se ha modificado sustancialmente en el quinto y previsiblemente, último estudio de impacto cuantitativo. La nueva propuesta es más versátil y adecuada que su antecesora pero requiere analizar con más detenimiento las hipótesis de calibración para de este modo aproximar mejor las estimaciones al riesgo realmente asumido. Además, desde el punto de vista de la gestión, la adopción de un modelo interno basado en la simulación, puede ser ventajoso ya que permite evaluar el riesgo de forma más precisa y, de acuerdo con lo que hemos visto, puede implicar una reducción importante en los requerimientos de capital.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bharath, S.T. and Shumway, T., 2004. Forecasting default with the KMV-Merton model. Working Paper. Ross School of Business, University of Michigan. Ann Arbor.

Black, F. and Scholes, M., 1973. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *The Journal of Political Economy*, 81(3), 637-654.

CEIOPS., 2008a. QIS4 Technical Specifications. MARKT/2505/08.

CEIOPS., 2008b. QIS4 background document Calibration of SCR, MCR and proxies, CEIOPS-DOC-02/2008.
CEIOPS., 2009a. SCR standard formula - Counterparty default risk module, CEIOPS-CP-28/09.
CEIOPS., 2009b. SCR standard formula - Further advice on the counterparty default risk module, CEIOPS-CP-51/09.
CEIOPS., 2010a. Solvency II Calibration Paper, CEIOPS-SEC-40-10.
CEIOPS., 2010b. Technical specifications for QIS 5.
Crosbie, P. and Bohn, J., 2003. *Modelling default risk*. Moody's KMV Corporation.
Frey, R., and McNeil, F., 2003. Dependent defaults in models of portfolio credit risk. *Journal of Risk*, 6, 59-92.
Gordy, M., 2000. A comparative anatomy of credit risk models. *Journal of Banking and Finance*, 24 (1-2), 119-149.
Gropp, R., Vesala, J. and Vulpes, G., (2002). Equity and Bond Market Signals as Leading Indicators of Bank Fragility. Working Paper 150, European Central Bank.
Hillegeist, S., Keating, E., Cram, D. and Lundstedt, K., 2004. Assessing the probability of bankruptcy. *Review of Accounting Studies*, 9 (1), 5-34
Lau, C., 2006: Market-based estimation of default probabilities and its application to financial markets surveillance, IMF working paper.
Löffler G. and Posch P., 2007. *Credit risk modeling using Excel and VBA*. John Wiley and Sons.
Magee, S., 2008. The Effect of Foreign Currency Hedging on the Probability of Financial Distress. Disponible en http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1093139 [consultado 15 de diciembre de 2011]
Merton, R., 1974. On the pricing of corporate debt. The risk structure of interest rates. *Journal of Finance, 29 (2), 449-479*.
Parlamento Europeo y Consejo de la Unión Europea., 2009. Directiva 2009/138/CE, de 25 de noviembre de 2009, sobre el seguro de vida, el acceso a la actividad de seguro y de reaseguro y su ejercicio (Solvencia II).
Ter Berg, P., 2008. Portfolio modelling of counterparty reinsurance default risk. *Life & Pensions*, 29-33.
Vasicek, O., 1987. *Probability of Loss on Loan Portfolio*, KMV Corporation.
Vasicek, O., 1991. *Limiting Loan Loss Probability Distribution*, KMV Corporation.
Vasicek, O., 2002. The distribution of loan portfolio value. *Risk*, 15, 160-162.
Vassalou, M. and Xing, Y., 2004. Default risk in equity returns. *Journal of Finance, 59 (2), 831-868*.

APÉNDICE

En este apéndice recogemos la metodología para estimar la correlación entre eventos de crédito a partir de datos empíricos.

Método de los momentos

Para obtener el valor de la correlación entre eventos, podemos recurrir a la experiencia histórica. Podemos asumir, dentro de un nivel de rating, una probabilidad de default similar para el grupo analizado, así como una correlación similar. Una alternativa consiste en aplicar el método de los momentos propuesto por Gordy (2000) a partir de la experiencia histórica, de modo que calculamos la media histórica de los defaults, que se precisa para determinar d_i que se considera igual para todas las contrapartes. La probabilidad de default conjunta la estimamos como los pares de default $\binom{D_t}{2} = \frac{D_t(D_{t-1})}{2}$ entre el total de pares posibles $\binom{N_t}{2} = \frac{N_t(N_{t-1})}{2}$ que se han producido en relación al número de pares posibles, y consecuentemente, la probabilidad de default conjunta promedio será:

$$P_2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \frac{D_t(D_t-1)/2}{N_t(N_t-1)/2} = p_{ij} \text{ (A1.1)}$$

Una vez que disponemos de la probabilidad de default conjunta podemos despejar:

$$P_{ij} = \emptyset_2(A_i \leq d_i, A_j \leq d_j, \rho_{ij}) \text{ (A1.2)}$$

Si obtenemos la correlación del activo, podemos suponer que es constante entre cada par de contrapartes de un mismo nivel de riesgo y obtener de este modo , que representará el factor de movimiento conjunto entre contrapartes.

Método de máxima verosimilitud

La estimación por máxima verosimilitud requiere la descripción del default a través de la función de distribución apropiada. Para obtener dicha función es preciso determinar la probabilidad condicionada al valor de Z:

$$P_i(Z) = \mathrm{Prob}(X_i \leq \emptyset\left(\varepsilon_i \leq \frac{\emptyset^{-1}(p_i)-\sqrt{w}Z}{\sqrt{1-w}}\right) \text{ (A1.3)}$$

Esto quiere decir que si fijamos un valor extremo de Z (escenario de la economía), la probabilidad de que entre en default va a venir determinada completamente por el riesgo específico, y como se asume que dicha variable sigue una distribución normal estándar, la probabilidad de quiebra va a venir determinada exclusivamente por la probabilidad de que el valor caiga por debajo de ese límite. Una vez que fijamos Z cada variable de default Yi puede ser vista como una variable aleatoria (0-1) con probabilidad de default $P_i(Z)$, de modo que si la probabilidad de default es constante entre emisores, el número de defaults sigue una distribución binomial con parámetros p(Z) y N observaciones. Por tanto, la verosimilitud para el número de defaults en un determinado período en un sector k viene determinada por dicha distribución binomial condicionada al estado de la economía:

$$L_{k,t} = \prod_{t=1}^{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \binom{N_{kt}}{D_{kt}} p(Z)^D \left(1 - p(Z)\right)^{N-D} d\emptyset(Z) \text{ (A1.4)}$$

La maximización de la ecuación anterior es compleja. El proceso propuesto en Löffler y Posch (2007), consiste en discretizar la distribución normal de Z, de modo que en lugar de un intervalo continuo de posibles valores para Z dispondríamos de un número discreto (J), concretamente 21 puntos, con su correspondiente probabilidad de ocurrencia (Véase tabla A.1).

Tabla A.1

Discretización de la función normal

Zi	4.780	4.201	………	0	……..	-4.201	-4.780
P	0.0005%	0.0030%	……..	18.0106%	……..	0.0030%	0.0005%

La probabilidad de quiebra condicionada P(Z), dadas una p y correlación (w), dependerá del valor de Z, de modo que dispondremos también de tantas probabilidades como valores de Z (Véase tabla A.2).

Tabla A.2

Probabilidad de default condicionada al estado de la economía

P(Z)	$\Phi\left(\frac{\emptyset^{-1}(p_i) - \sqrt{w} \cdot (4.780)}{\sqrt{1-w}}\right)$	…	$\Phi\left(\frac{\emptyset^{-1}(p_i) - \sqrt{w} \cdot (0)}{\sqrt{1-w}}\right)$	…	$\left(\frac{\emptyset^{-1}(p_i) - \sqrt{w} \cdot (-4.780)}{\sqrt{1-w}}\right)$

El valor de la función de log-verosimilitud para todo el período, se determina a través de la función binomial: $L_{k,t} = \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{J} \ln\left(\binom{Nt}{Dt} p(Z)^{D} \left(1 - p(Z)\right)^{N-D} \emptyset(Z_i)\right)$

Tabla A.3

Factor W para impagos de investment grade proporcionados por Standard & Poors (1981-2005)

	Método de los Momentos	Máxima Verosimilitud
Probabilidad de Default	0.1%	0.105%
Factor (W)	19.706%	22.305%

Fuente: Löffler y Posch (2007).