

Mecánica de Fractura

Problemas Resueltos

José Luis Arana
Javier Jesús González

Departamento de Ingeniería Minera y Metalúrgica y Ciencia de Materiales
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA BILBAO

$$\frac{da}{dN} = 5 \cdot 10^{-12} (\Delta K_I)^{3,2} = 5 \cdot 10^{-12} (1,8 \cdot 100 \cdot \sqrt{a})^{3,2} = 8,24 \cdot 10^{-5} \cdot a^{1,6}$$
$$\frac{da}{a^{1,6}} = 8,24 \cdot 10^{-5} \cdot dN \Rightarrow \int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{a^{1,6}} = 8,24 \cdot 10^{-5} \cdot \int_0^N dN \Rightarrow \left[\frac{a^{-0,6}}{-0,6} \right]_{a_i}^{a_f} = 8,24 \cdot 10^{-5} \cdot N$$
$$a_i^{-0,6} - a_f^{-0,6} = 4,944 \cdot 10^{-5} \cdot N$$



Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

ARGITALPEN
ZERBITZUA
SERVICIO EDITORIAL

Mecánica de Fractura

Problemas Resueltos

José Luis Arana

Javier Jesús González

Departamento de Ingeniería Minera y Metalúrgica y Ciencia de Materiales
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA BILBAO

eman ta zabal zazu



Universidad Euskal Herriko
del País Vasco Unibertsitatea

A R G I T A L P E N
Z E R B I T Z U A
SERVICIO EDITORIAL

Bilbao, 2013

© Es propiedad de los autores. Reservados todos los derechos

© Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitateko Argitalpen Zerbitzua

ISBN: 978-84-9860-957-8

Indice

Introducción	Página 01
Tema 2 Problemas 2.1 a 2.11	Página 03
Tema 3 Problemas 3.1 a 3.15	Página 17
Tema 4 Problemas 4.1 a 4.11	Página 37
Tema 5 Problemas 5.1 a 5.20	Página 55
Tema 8 Problemas 8.1 a 8.14	Página 97
Tema 9 Problemas 9.1 a 9.6	Página 115
Tema 10 Problemas 10.1 a 10.7	Página 123
Apéndice	Página 137

Introducción

Se presentan en este manual un conjunto de problemas y ejercicios resueltos, de acuerdo a los temas del texto de Mecánica de Fractura de los mismos autores, publicado por la Universidad del País Vasco- Euskal Herriko Unibertsitatea, incluyendo problemas propuestos en los exámenes de la asignatura del mismo nombre, de la titulación de Ingeniería de Materiales de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Bilbao. En el apéndice de este Manual se incluyen algunas normas y especialmente la norma EN ISO 12737 que cubre la determinación de la resistencia a fractura por deformación plana de materiales metálicos.

Estos ejercicios sirven para que el alumno trabaje por su cuenta, consolidando el conocimiento teórico y familiarizándose con algunas aplicaciones ingenieriles de la Mecánica de Fractura.

Bilbao, Enero 2013

Tema 2

2.1.- Para la fabricación de la carcasa de un cohete tenemos a nuestra disposición tubos de pared delgada de los siguientes materiales:

- a) Acero de media aleación con $\sigma_y = 1200 \text{ MPa}$ y tenacidad a fractura $G_c = 24 \text{ kJ m}^{-2}$
- b) Acero Maraging con $\sigma_y = 1800 \text{ MPa}$ y tenacidad a fractura $G_c = 24 \text{ kJ m}^{-2}$

Los valores de G_c han sido medidos en chapa del espesor adecuado.

Siendo el criterio de diseño para la tensión $\sigma_y/1,5$. Calcular el tamaño mínimo de defecto que se necesita para que se produzca una fractura frágil en servicio en los dos materiales y discutir el resultado.

Módulo de Young en ambos casos: 200 GPa

Resolución:

Al ser un tubo de pared delgada aplicamos las fórmulas de tensión plana (T.P.)

Aplicaremos la siguiente expresión para calcular la longitud mínima de grieta para rotura frágil:

$$G = \frac{\pi \cdot \sigma^2 \cdot a}{E} \quad \text{despejamos: } a = \frac{G \cdot E}{\pi \cdot \sigma^2}$$

a) En el caso del acero de media aleación:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_y}{C.S.} = \frac{1200 \text{ MPa}}{1,5} = 800 \text{ MPa}$$

$$a_1 = \frac{G_c \cdot E}{\pi \cdot \sigma_1^2} = \frac{24 \cdot 10^3 \text{ N.m.m}^{-2} \cdot 200 \cdot 10^9 \text{ N.m}^{-2}}{\pi \cdot (800 \cdot 10^6)^2 \cdot \text{N}^2 \cdot \text{m}^{-4}} = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 2,4 \text{ mm}$$

b) En el caso del acero Maraging seguimos el mismo procedimiento:

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_Y}{C.S.} = \frac{1800 \text{ MPa}}{1.5} = 1200 \text{ MPa}$$

$$a_2 = \frac{G_C \cdot E}{\pi \cdot \sigma_2^2} = \frac{24 \cdot 10^3 \text{ N mm}^{-2} \cdot 200 \cdot 10^9 \text{ Nm}^{-2}}{\pi \cdot (1200 \cdot 10^6)^2 \text{ N}^2 \text{ m}^{-4}} = 1,06 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1,06 \text{ mm}$$

Por lo tanto la pieza de Maraging se puede hacer más delgada porque resiste más, pero es menos tolerante al fallo. Sólo admite 2,12 mm frente a 4,8 mm.

2.2.- Si la tensión de fractura de una chapa de gran tamaño de acero Maraging, conteniendo una grieta pasante de 40 mm, es de 480 MPa, calcular la tensión de fractura para una chapa similar que tuviera una grieta pasante de 100 mm.

Resolución:

Aplicaremos la siguiente ecuación: $G = \frac{\pi \cdot \sigma^2 \cdot a}{E}$

La tasa de liberación de energía y el modulo de elasticidad serán los mismos en ambos casos. Así que: $\frac{G \cdot E}{\pi} = \text{cte}$

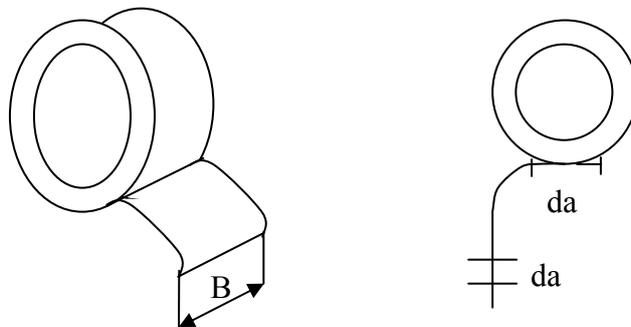
Caso 1: $\frac{G \cdot E}{\pi} = \sigma_1^2 \cdot a_1 = (480 \text{ MPa})^2 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 4608 \text{ MPa}^2 \text{ m}$

Caso 2: Ahora la grieta mide $a_2 = 50 \text{ mm}$

$$\frac{G \cdot E}{\pi} = \sigma_2^2 \cdot a_2 = 4608 \text{ MPa}^2 \text{ m} \rightarrow \sigma_2 = 304 \text{ MPa}$$

2.3.- La tasa de liberación de energía G_C , también sirve para medir la resistencia de los adhesivos. Determinar el valor aproximado de G_C de una rollo típico de cinta adhesiva, que tiene una anchura de 2 cm.

Resolución:



La variación de energía elástica dU_E que experimenta la cinta es despreciable, comparada con el trabajo realizado por el peso M , por lo tanto la ecuación de energía será:

$$dU_R = dU - dU_E = dU$$

$$G = \frac{dU_R}{dA} \rightarrow dU_R = G \cdot B \cdot da \quad \text{y} \quad dU = M \cdot g \cdot da$$

$$dU_R = dU \rightarrow G \cdot B \cdot da = M \cdot g \cdot da$$

$$G = \frac{M \cdot g}{B} = \frac{0,25 \text{ Kg} \cdot 9,8 \text{ N/Kg}}{2 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 122,5 \text{ J} \cdot \text{m}^{-2}$$

Repasando datos de adhesivos se puede comprobar que este valor es coherente para varios adhesivos. Naturalmente en muchos otros casos no podemos despreciar el valor de la componente elástica dU_E .

2.4.- En la calibración de la flexibilidad de una probeta de aluminio 2090, entallada en un extremo, se observó que para una carga de 100 kN se producía un desplazamiento en el extensómetro de 0,3000 mm, cuando la grieta tenía 24,5 mm y 0,3025 mm, cuando la grieta era de 25,5 mm. La carga de fractura de una pieza idéntica, conteniendo una grieta de 25 mm de longitud, es de 158 kN. Calcular el valor crítico de la tasa de liberación de energía en fractura (G_C) y la tenacidad a fractura de la aleación (K_{IC}) en condiciones de deformación plana.

Espesor de la probeta $B = 25 \text{ mm}$
 Módulo de Young $E = 70 \text{ GPa}$
 Coeficiente de Poisson $\nu = 0,30$

Resolución:

Primero hallaremos el valor de la tasa de liberación de energía a través de la siguiente expresión:

$$G_C = \frac{P_C^2}{2 \cdot B} \cdot \frac{dc}{da} \quad \text{podemos sustituir:} \quad \frac{dc}{da} \approx \frac{\Delta C}{\Delta a}$$

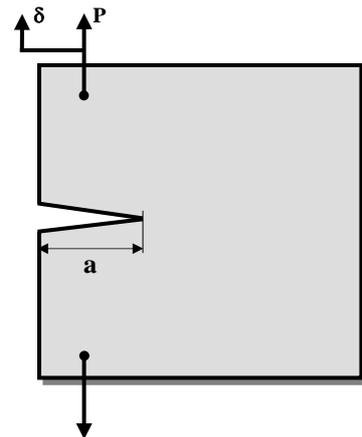
Teniendo en cuenta la definición de flexibilidad:

$$C_1 = \frac{\delta_1}{P} = \frac{0,3 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{100 \cdot 10^3 \text{ N}} = 3 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot \text{N}^{-1}$$

$$C_2 = \frac{\delta_2}{P} = \frac{0,3025 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{100 \cdot 10^3 \text{ N}} = 3,025 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot \text{N}^{-1}$$

$$\frac{\Delta C}{\Delta a} = \frac{C_2 - C_1}{a_2 - a_1} = \frac{(3,025 - 3) \cdot 10^{-9}}{1 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 2,5 \cdot 10^{-8} \text{ N}^{-1}$$

$$\text{Entonces:} \quad G_C = \frac{(158 \cdot 10^3)^2 \cdot 2,5 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 25 \cdot 10^{-3}} = 12,5 \text{ kJ m}^{-2}$$



Par hallar la tenacidad a la fractura empleamos: $G_C = \frac{K_I^2}{E'}$

Y como estamos en condiciones de deformación plana: $E' = \frac{E}{(1-\nu^2)}$

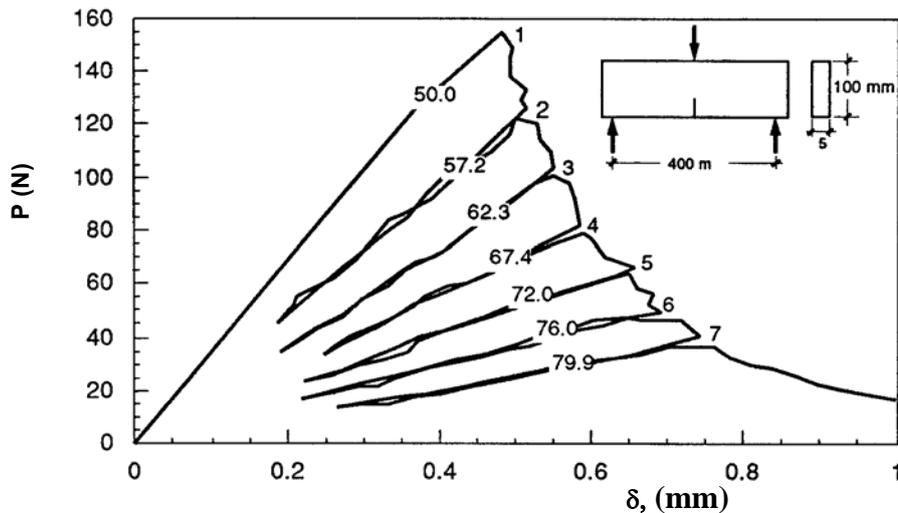
$$K_{IC}^2 = \frac{G_C \cdot E}{(1-\nu^2)} = \frac{12,5 \cdot 10^{-3} \cdot 70 \cdot 10^3}{0,91} = 962$$

$$K_{IC} = \sqrt{962} = 31 \text{ MPa } \sqrt{m}$$

2.5. Para medir la energía específica de fractura del PMMA se ha ensayado una probeta de este material en forma de viga, cuyas características geométricas se indican en la figura adjunta.

Durante el ensayo de fisuración estable se han hecho descargas parciales, midiendo en cada descarga el tamaño de la fisura. Las longitudes de las fisuras también se indican en la figura.

Calcular la energía específica de fractura, R , midiendo el área encerrada en cada descarga parcial.



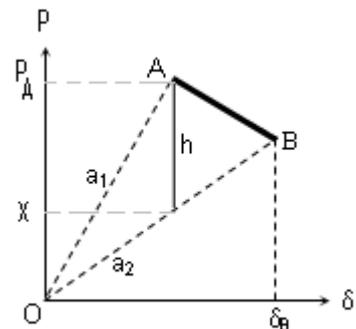
Resolución:

Durante el proceso de fisuración estable $A \rightarrow B$ la fisura crece desde a_1 hasta a_2 y la energía específica de fractura viene dada por:

$$R = \frac{Area(OAB)}{B(a_2 - a_1)} = \frac{h\delta_B / 2}{B(a_2 - a_1)}$$

donde B es el espesor de la probeta y $h = P_A - x$.

A partir de los datos del ensayo y midiendo sobre la figura los valores de h y δ se obtiene la siguiente tabla:



Punto	a (mm)	P (N)	δ (mm)	h (N)	A = h· δ /2 (J)	B (mm)	Δa (mm)	J=A/B Δa (J m ⁻²)
1	50	153	0,49			5		
2	57,2	123	0,52	34	0,00884	5	7,2	246
3	62,3	101	0,55	28	0,0077	5	5,1	302
4	67,4	80	0,59	25	0,007375	5	5,1	289
5	72	65	0,65	21	0,006825	5	4,6	297
6	76	49	0,7	17	0,00595	5	4	298
7	79,9	39	0,75	12	0,0045	5	3,9	231
							R =	277

Errores del orden del 10% suelen ser normales en la medida de R .

La medida de las longitudes de las fisuras no es sencilla porque el frente de la fisura no suele ser recto. Los valores de este ejercicio son valores medios.

2.6. Para medir la energía específica de fractura del polimetil metacrilato (PMMA) se ha ensayado una probeta de este material en forma de viga, cuyas características geométricas se indican en la figura del ejercicio 2.5.

Durante el ensayo de fisuración estable se han hecho descargas parciales, midiendo en cada descarga el tamaño de la fisura. Las longitudes de las fisuras también se han indicado en la citada figura.

Calcular R utilizando la flexibilidad, determinada a partir de los datos experimentales.

Dato: Módulo de Elasticidad del PMMA, $E = 3,40 \text{ GPa}$.

Resolución:

La energía específica de fractura se puede calcular a partir de la expresión 2.31 y 2.34 del

libro de texto: $R = \frac{P^2}{2B} \frac{dC}{da}$ donde sustituiremos $\frac{dc}{da} \approx \frac{\Delta C}{\Delta a}$.

Punto	a (mm)	δ (mm)	P (N)	C= δ /P(mm/N)	ΔC	Δa (mm)	$\Delta C/\Delta a$	$R = \frac{P^2}{2B} \frac{\Delta C}{\Delta a}$
1	50	0,49	153	0,0032				
2	57,2	0,52	123	0,0042	0,00102	7,2	0,000142	214,83
3	62,3	0,55	101	0,0054	0,00123	5,1	0,000241	245,84
4	67,4	0,59	80	0,0074	0,00192	5,1	0,000376	240,64
5	72	0,65	65	0,010	0,00263	4,6	0,000572	241,67
6	76	0,7	49	0,0143	0,0043	4	0,00108	259,31
7	79,9	0,75	39	0,019	0,0049	3,9	0,00126	191,65
							R =	232,32 J m²

El valor de la flexibilidad en función de la longitud de longitud de la fisura se puede deducir ajustando una expresión polinómica a los valores de $C(a)$ medidos en el ensayo.

Esta expresión se puede mejorar si se obliga a que $C(a = 0)$ sea el valor que da la Resistencia de Materiales:

$$C(a=0) = \frac{L^3}{48EI} = 1(\mu\text{m}/N)$$

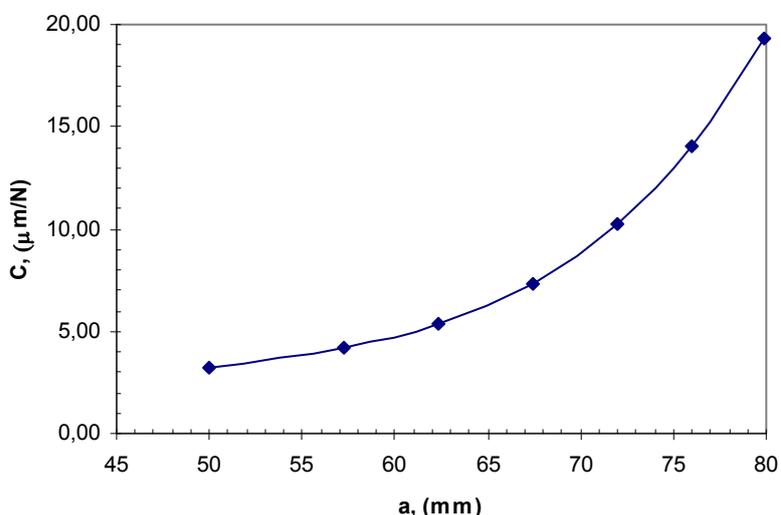
ya que la derivada para $a = 0$ sea nula, para este tipo de probeta.

Una expresión aproximada a partir de un polinomio de grado 5 con a (mm) es:

$$C(\mu\text{m}/N) = 1,0 - 7,2099 \cdot 10^{-3} a^2 + 4,6762 \cdot 10^{-4} a^3 - 9,1897 \cdot 10^{-6} a^4 + 6,1523 \cdot 10^{-8} a^5$$

A partir de este resultado y de los datos experimentales se obtiene la siguiente tabla:

Punto	a (mm)	B (mm)	P (N)	C ($\mu\text{m}/N$)	dC/da (mN^{-1})	$J = \frac{P^2}{2B} \frac{dC}{da}$ (J m^{-2})
1	50	5	153	3,22	0,11390	267
2	57,2	5	123	4,22	0,17874	270
3	62,3	5	101	5,39	0,29215	298
4	67,4	5	80	7,35	0,49423	316
5	72	5	65	10,24	0,78085	330
6	76	5	49	14,03	1,13349	272
7	79,9	5	39	19,31	1,59074	242
				R =		285



Este resultado es compatible con el obtenido en el ejercicio 2.5, ya que en este tipo de medidas un error de 10% es admisible.

La determinación experimental de dC/da está sujeta a varios errores que añaden imprecisión al método de la flexibilidad.

Examen Junio 2004

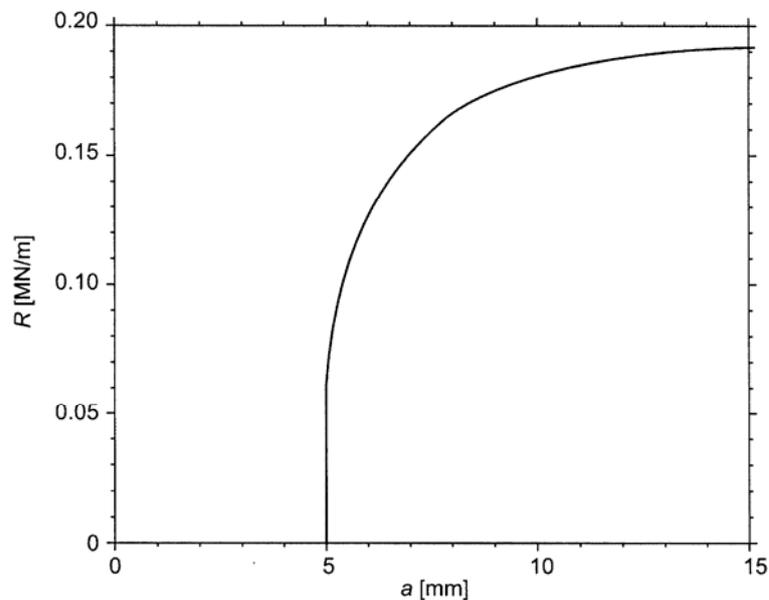
2.7. Medimos la curva R de una placa gruesa de la aleación de aluminio 2094 T6, conteniendo una grieta central de tamaño $2a = 10$ mm, y obtenemos la curva de la figura.

- Calcular el valor aproximado de la tenacidad a fractura en deformación plana K_{Ic} de este aluminio.
- Determinar para que valor de K_I fallará una placa idéntica, cargada en la dirección normal a la grieta.
- ¿Cuál es el valor de la tensión nominal de la placa en dicho momento?

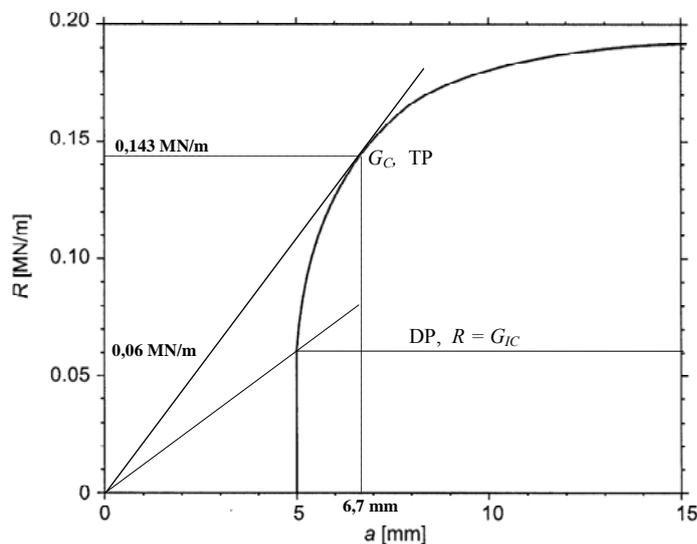
Datos del aluminio 2094-T6

$$E = 7 \times 10^4 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0,33$$

**Resolución:**

Se trata de una curva R creciente. La solución de este problema aparece reflejada en la figura adjunta desarrollada sobre la curva R original del enunciado del problema.



Nos piden hallar la tenacidad a fractura. Para ello, determinaremos el valor de G y luego aplicaremos la expresión que nos relaciona ambos parámetros:

$$K_{IC} = \sqrt{E' \cdot G}$$

- a) El valor aproximado de la tenacidad a fractura en deformación plana K_{IC} de este aluminio corresponde a un valor de $G_{IC} = 0,06$ MN/m, por lo tanto:

$$K_{IC} = \sqrt{\frac{E \cdot G_{IC}}{1 - \nu^2}} = \sqrt{\frac{70000 \cdot 0,06}{1 - 0,33^2}} \approx 69 \text{ MPa}\sqrt{m}$$

- b) Una placa idéntica cargada en la dirección normal a la grieta falla con la tensión tangente a la curva R representada, que se corresponde con un valor de $G_c = 0,143$ MN/m.

$$K_I = \sqrt{E \cdot G_c} = \sqrt{70000 \cdot 0,143} = 100 \text{ MPa}\sqrt{m}$$

- c) El valor de la tensión en ese momento se calcula a partir del tamaño de grieta $a = 6,7$ mm, según se ve en el gráfico.

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi \cdot a} \Rightarrow 100 \text{ MPa}\sqrt{m} = \sigma \sqrt{\pi \cdot 6,7 \cdot 10^{-3} m}$$

$$\sigma = \frac{100}{\sqrt{\pi \cdot 0,0067}} = 690 \text{ MPa}$$

Examen Junio 2005

2.8. La curva de resistencia al crecimiento de grieta de un material de espesor 2 mm está expresada por la ecuación:

$$R = \frac{K_{IC}^2}{E} + \frac{1}{2} \cdot (\Delta a)^{0,5} \text{ MJ} \cdot m^{-2}, \quad K_{IC} = 95 \text{ MPa}\sqrt{m}, \quad E = 210000 \text{ MPa}$$

Considere un panel de gran tamaño y 2 mm de espesor que tiene una grieta pasante de 4 cm de longitud. Calcular la longitud del crecimiento estable de grieta y la tensión crítica de inestabilidad.

Resolución:

La condición de estabilidad: $G \geq R$ y $\frac{\partial G}{\partial a} \leq \frac{\partial R}{\partial a}$

$$R = \frac{95^2}{210000} + 0,5(a - 0,02)^{0,5} = 0,043 + 0,5(a - 0,02)^{0,5}$$

$$G = \frac{\pi \cdot \sigma^2 \cdot a}{E}$$

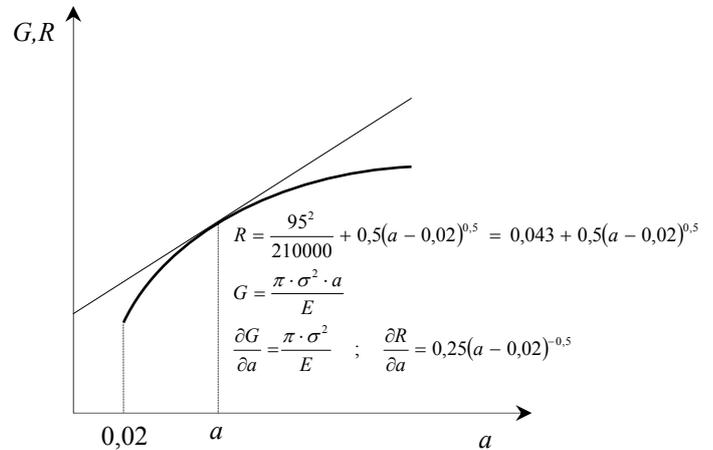
Derivamos:

$$\frac{\partial G}{\partial a} = \frac{\pi \cdot \sigma^2}{E}$$

$$\frac{\partial R}{\partial a} = 0,25(a - 0,02)^{-0,5}$$

Igualamos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi \cdot \sigma^2 \cdot a}{E} = 0,043 + 0,5(a - 0,02)^{0,5} \\ \frac{\pi \cdot \sigma^2}{E} = 0,25(a - 0,02)^{-0,5} \end{array} \right\}$$



Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolvemos sustituyendo

$$\frac{\pi \cdot \sigma^2}{E} \text{ por } 0,25(a - 0,02)^{-0,5} :$$

$$0,25a(a - 0,02)^{-0,5} = 0,043 + 0,5(a - 0,02)^{0,5}, \text{ multiplicando por } (a - 0,02)^{0,5} \text{ tenemos:}$$

$$a = 0,172(a - 0,02)^{0,5} + 2(a - 0,02), \text{ obteniendo una ecuación de 2º grado:}$$

$$a^2 - 0,1096a + 0,0022 = 0, \text{ cuya solución es:}$$

$$a = \frac{0,1096 \pm \sqrt{0,1096^2 - 4 \cdot 0,0022}}{2} = 0,0263 \text{ m}$$

Puesto que se trata de una grieta pasante $2a_c = 0,0263 \times 2 = 0,0526 \text{ m} = 5,26 \text{ cm}$, y por lo tanto, la longitud de crecimiento de grieta estable es: $\Delta a = 5,26 - 4 = 1,26 \text{ cm}$

Calculamos la tensión crítica (será para $R=G$):

$$R = 0,043 + \frac{\sqrt{0,0263 - 0,02}}{2} = 0,08273 \text{ MJ m}^{-2}$$

$$G = R = 0,08273 = \frac{\pi \cdot \sigma^2 \cdot 0,0263}{210000}$$

$$\sigma = 458,365 \text{ MPa}$$

Examen Junio 2005

2.9. La curva R de un determinado material puede ser expresada mediante la siguiente ecuación:

$$R = \frac{K_{IC}^2}{E} + 3(a - a_0)^{0,1}$$

donde las unidades de R están en MN/m, las unidades de a y a_0 en metros, $K_{IC} = 150 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ y $E = 210.000 \text{ MPa}$.

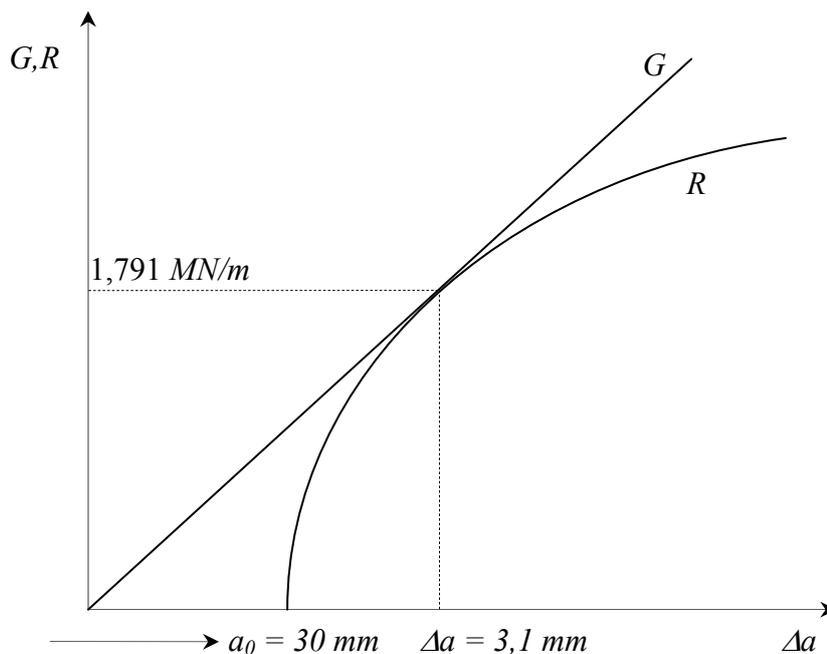
Una placa ancha de este material tiene una grieta en el centro de longitud $2a_0 = 60 \text{ mm}$.

Esta placa presenta, antes de la rotura, un crecimiento máximo de grieta estable de 3,1 mm en cada uno de los extremos de la grieta.

- Mostrar el diagrama R correspondiente.
- Calcular los valores de tensión (σ_c) y el factor de intensidad de tensiones (K_c) críticos.

Resolución:

a) Crecimiento estable hasta: $R = \frac{150^2}{210000} + 3[(33,1 - 30) \cdot 10^{-3}]^{0,1} = 1,791 \text{ MN/m}$



b) En ese momento $R=G_c$ y como $G = \frac{\pi \cdot \sigma^2 \cdot a}{E}$ sustituimos los datos:

$$1,791 \cdot 10^6 = \frac{\pi \cdot \sigma^2 \cdot 33,1 \cdot 10^{-3}}{210000 \cdot 10^6} \Rightarrow \sigma_c = 1902 \text{ MPa}$$

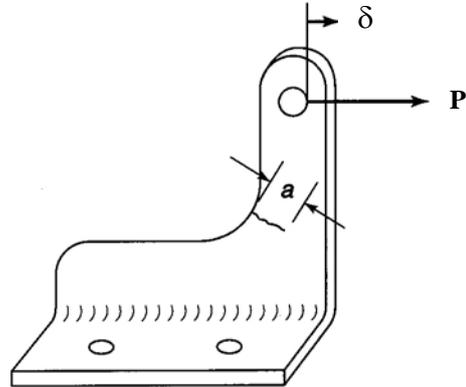
Y el factor de intensidad de tensiones se calcula también a partir del mismo valor de G :

$$K_c = \sqrt{G \cdot E} = \sqrt{1,791 \cdot 210000} = 613,3 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$$

Examen Junio 2005

2.10. Un brazo estructural de acero de 5 mm de espesor es susceptible al desarrollo de grietas de fatiga, como se indica en la figura adjunta. Realizamos una serie de experimentos con grietas simuladas de longitud variable, encontrando una ley de variación de la *flexibilidad* en función del tamaño de grieta, de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$C = \frac{\delta}{P} = [5 + \text{sen}(7 \cdot \pi \cdot a)] \times 10^{-7} \text{ m N}^{-1}$$



- Plantear una expresión del factor de intensidad de tensiones K , para este brazo estructural de acero con grieta, en función de la carga y del tamaño de grieta. Asumir condiciones de tensión plana.
- En una inspección visual se pueden detectar grietas de longitud mínima 5 mm. Teniendo en cuenta que este brazo se ha proyectado para cargas de hasta 10.000 N, calcular el mínimo valor de tenacidad a fractura K_C que debe tener el acero para esta aplicación. Incluir en el análisis un coeficiente de seguridad en fractura de $CS = 2$.

$$E = 210 \text{ GPa}; \nu = 0,29$$

Resolución:

- El factor de intensidad de tensiones lo podemos expresar de la siguiente forma:

$$K^2 = E \cdot G \quad \text{donde} \quad G = \frac{P_C^2}{2 \cdot B} \cdot \frac{dC}{da}$$

$$\text{Hallamos la derivada de la flexibilidad: } \frac{dC}{da} = 7\pi \cos(7\pi a) \times 10^{-7}$$

Y la sustituimos en la ecuación,

$$K^2 = E \cdot G = \frac{E \cdot P^2}{2B} \cdot \frac{dC}{da} = 210 \cdot 10^9 \cdot \frac{P^2}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} \cdot 7\pi \cos(7\pi a) \times 10^{-7}$$

$$K = P \sqrt{1,47 \cdot 10^7 \cdot \pi \cdot \cos(7\pi a)}$$

- En el caso concreto de grietas de $a = 5 \times 10^{-3} \text{ m}$ y para una carga de $P = 10000 \text{ N}$ resulta que :

$$K = 10000 \sqrt{1,47 \cdot 10^7 \cdot \pi \cdot \cos(7\pi \cdot 0,005)} = 67,75 \text{ MPa} \sqrt{m}$$

Considerando el coeficiente de seguridad:

$$K_{\min} = CS \times K_C = 2 \times 67,75 = 135,5 \text{ MPa} \sqrt{m}$$

Examen Junio 2006

2.11. Necesitamos resolver una disputa entre un cliente y un fabricante de gancho de grúa que ha fallado en servicio. El cliente reclama que el gancho falló porque tenía un defecto y presenta como prueba el hecho de que la superficie de fractura del elemento presenta una grieta con una superficie aproximada de 225 mm² (Ver Figura 1) El fabricante reclama que se han tenido en cuenta los criterios de tolerancia a fallo en el diseño del gancho y que la razón de su rotura es una sobrecarga de 2000 kg. Para resolver esta cuestión se llevan a cabo unos ensayos de flexibilidad, con grietas mecanizadas de 200 y de 250 mm². Los resultados se muestran en la Figura 2. El gancho es de acero moldeado ($E = 210 \text{ GPa}$ y $\nu = 0,29$) y tiene una tenacidad a fractura en deformación plana de $K_{Ic} = 47 \text{ MPa} \sqrt{m}$.

Usando esta información conteste quien tiene razón, justificando la respuesta.

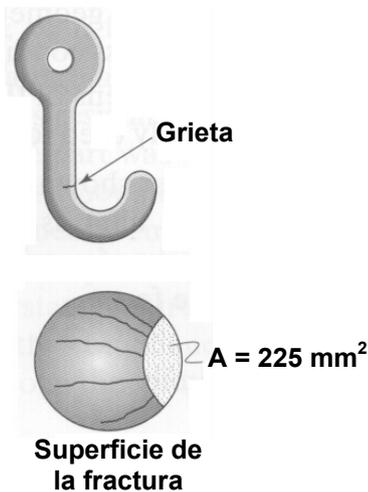


Figura 1

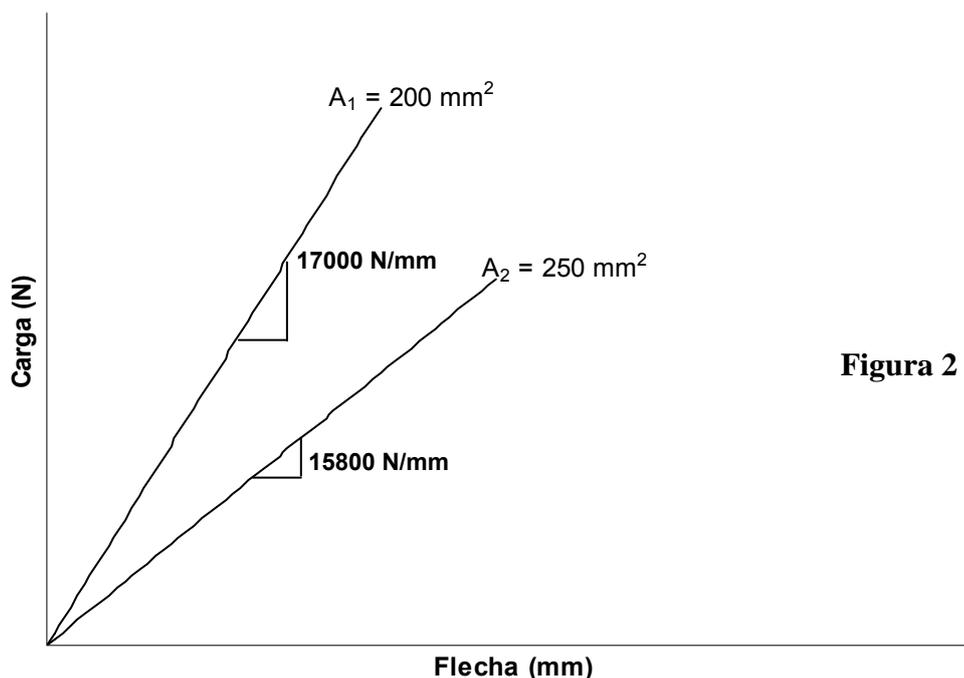


Figura 2

Resolución:

Para ver quien de los dos tiene razón tendremos que comprobar con que carga ha roto el gancho.

Con los datos del enunciado podemos hallar la G_c :

$$G_c = \frac{K_{IC}^2 (1 - \nu^2)}{E} = \frac{(47 \cdot 10^6)^2 \cdot (1 - 0,29^2)}{210 \cdot 10^9} = 9634 \text{ J m}^{-2}$$

Ahora aplicamos la ecuación 2.31 del libro teniendo en cuenta que también se puede expresar en función de la superficie de la fractura, que es un dato conocido en ambos ensayos:

$$G_c = \frac{P^2}{2B} \frac{dC}{da} \quad \text{Sustituimos por: } dA = B da \quad \text{y nos queda: } G_c = \frac{P^2}{2} \frac{dC}{dA} = \frac{P^2}{2} \frac{\Delta C}{\Delta A}$$

Con los datos de la Figura 2:

$$\frac{\Delta C}{\Delta A} = \frac{\left(\frac{1}{15,8 \cdot 10^6} - \frac{1}{17 \cdot 10^6} \right) \text{ m N}^{-1}}{(250 - 200) \cdot 10^{-6} \text{ mm}^2} = 8,93 \cdot 10^{-5}$$

Despejamos P:

$$9634,4 = \frac{P^2}{2} \cdot 8,93 \cdot 10^{-5} \Rightarrow P = \sqrt{\frac{9634,4 \cdot 2}{8,93 \cdot 10^{-5}}} = 14685 \text{ N}; P \approx 1500 \text{ Kg}$$

No ha habido sobrecarga. El cliente tenía razón

Tema 3

3.1. Para determinar el factor de intensidad de tensiones en un elemento estructural que trabaja en deformación plana, se realiza un modelo a escala con material fotoelástico. El modelo se somete a un estado de cargas proporcional al real y se analiza su estado tensional mediante un polariscopio, obteniéndose las siguientes medidas para distintos puntos situados sobre la perpendicular a la dirección de la fisura trazada por su extremo.

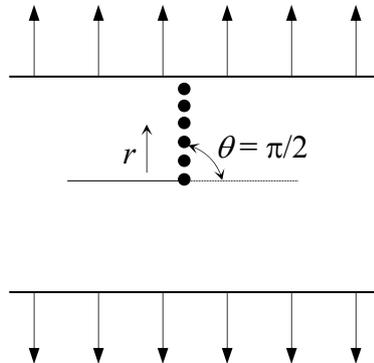
	r (mm)	$\sigma_1 - \sigma_2$ ($10^{-3} \text{ kg mm}^{-2}$)
I	0,26	65,26
II	0,40	52,21
III	0,66	39,15
IV	1,18	29,41
V	1,89	22,89

Donde σ_1 y σ_2 son las tensiones principales y r la distancia del punto al extremo de la fisura. Se pide:

- a) Deducir la ley teórica de variación de la diferencia $\sigma_1 - \sigma_2$ frente a r a lo largo de la recta indicada, tomando únicamente el término singular del desarrollo en serie de la distribución de tensiones.
- b) Comprobar que los valores experimentales siguen la ley anterior y obtener un valor del factor de intensidad de tensiones para el modelo fotoelástico.
- c) A partir del valor anterior determinar dicho factor para el elemento estructural sabiendo que las dimensiones del modelo son dos veces las del elemento, mientras que las cargas de éste son mil veces las de aquel.

Resolución:

a) Una representación esquemática de la posición de medida con respecto a la fisura, se presenta en la figura, r es la distancia del punto al extremo de la fisura.



El término singular del desarrollo en serie de la distribución de tensiones en Modo I, se expresa, según las siguientes ecuaciones:

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$$

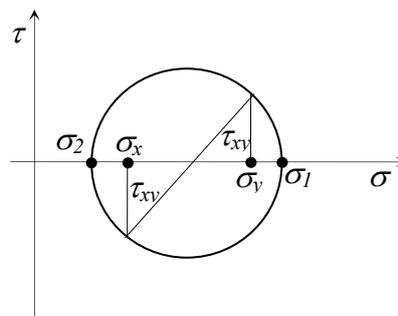
y en el caso concreto de nuestro problema, $\theta = \pi/2$, con lo cual las ecuaciones se reducen a:

$$\sigma_x = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$$

$$\sigma_y = \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$$

$$\tau_{yx} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$$

Haciendo uso del círculo de Mohr, podremos deducir la expresión que relaciona σ_1 y σ_2 con σ_x , σ_y , τ_{xy}



De forma que: $\sigma_1 - \sigma_2 = 2 \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

Sustituyendo en esta ecuación las correspondientes componentes de tensión y operando adecuadamente, resulta la expresión:

b) $\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$ ley teórica de variación de la diferencia $\sigma_I - \sigma_{II}$ frente a r a lo largo de la

recta indicada

El factor de intensidad de tensiones vendrá dado por:

$$K_I = \sqrt{2\pi r} \cdot (\sigma_1 - \sigma_2)$$

b) Vamos a comprobar si los valores experimentales del modelo se ajustan a la ley deducida en el anterior apartado. Para ello, sustituimos los distintos valores de r y $\sigma_I - \sigma_2$ en la expresión del factor de intensidades.

$$K_I = \sqrt{2\pi \cdot 0,26} \cdot 65,26 \cdot 10^{-3} = 83,41 \cdot 10^{-3} \text{ Kg} \cdot \text{mm}^{-3/2}$$

$$K_I = \sqrt{2\pi \cdot 0,40} \cdot 52,21 \cdot 10^{-3} = 82,77 \cdot 10^{-3} \text{ Kg} \cdot \text{mm}^{-3/2}$$

$$K_I = \sqrt{2\pi \cdot 0,66} \cdot 39,15 \cdot 10^{-3} = 79,72 \cdot 10^{-3} \text{ Kg} \cdot \text{mm}^{-3/2}$$

$$K_I = \sqrt{2\pi \cdot 1,18} \cdot 29,41 \cdot 10^{-3} = 80,08 \cdot 10^{-3} \text{ Kg} \cdot \text{mm}^{-3/2}$$

$$K_I = \sqrt{2\pi \cdot 1,89} \cdot 22,89 \cdot 10^{-3} = 78,88 \cdot 10^{-3} \text{ Kg} \cdot \text{mm}^{-3/2}$$

A la vista de los resultados obtenidos podemos estimar un valor del factor de intensidad de tensiones para el modelo de:

$$K_I = (81 \pm 2) \cdot 10^{-3} \text{ Kg} \cdot \text{mm}^{-3/2}$$

c) A partir del valor del factor de intensidad de tensiones estimado para el modelo, vamos a deducir el real del elemento estructural.

Para el modelo se verifica:

$$K_{I,m} = (\sigma_1 - \sigma_2)_m \cdot \sqrt{2\pi r_m}$$

Para el elemento estructural la relación será análoga:

$$K_{I,e} = (\sigma_1 - \sigma_2)_e \cdot \sqrt{2\pi r_e}$$

Dividiendo ambas expresiones miembro a miembro:

$$\frac{K_{I,e}}{K_{I,m}} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)_e}{(\sigma_1 - \sigma_2)_m} \cdot \sqrt{\frac{r_e}{r_m}}$$

Dado que por hipótesis las dimensiones del modelo son dos veces las del elemento estructural ($r_m=2r_e$), y las cargas del elemento son mil veces las del modelo,

$$(\sigma_1 - \sigma_2)_e = 10^3 (\sigma_1 - \sigma_2)_m,$$

resulta que

$$K_{I,e} = K_{I,m} \cdot 10^3 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = 81 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow K_{I,e} = 57,3 \text{ Kg} \cdot \text{mm}^{-3/2}$$

o equivalentemente, teniendo en cuenta que: $1 \text{ kg} \cdot \text{mm}^{-3/2} = 0,31 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$

$$K_{I,e} = 17,76 \text{ MPa} \cdot \sqrt{\text{m}}$$

3.2. Considere los materiales más representativos de cada uno de los grupos que se indican en la Tabla 4.1 del Libro de texto.

- Calcular la longitud de grieta mínima que puede causar una fractura frágil para tensiones de plastificación.
- Discutir los valores obtenidos, en función de los defectos de fabricación, típicos de cada material.

Resolución:

a) $K_{IC} = \sigma_{ys} \cdot \sqrt{\pi \cdot a_{crit}}$ despejando el valor de a_{crit} .

$$a_{crit} = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_{ys}} \right)^2$$

utilizando los datos de la tabla 4.1 el valor de la longitud de grieta

mínima, que puede causar fractura frágil en función de los diferentes materiales será:

Resultados del tamaño de grieta crítico para cada material.

Material	Condición	σ_{ys} (MPa)	K_{IC} (MPa m ^{1/2})	Tamaño de grieta (mm)
Aceros				
Maraging 300	500 °C 3 horas	1980	60	0,29
Maraging 250	500 °C 3 horas	1500	100	1,41
40NiCrMo10	Revenido a 150 °C	1850	50	0,23
	Revenido a 550 °C	1200	120	3,18
A 533 B	Recipientes a presión	350	091	21,52
Al carbono	Baja resistencia	240	002	0,02
D6 Herramientas	Forjado	1500	100	1,41
	Revenido a 450 °C	1500	75	0,80
304	Solución	300	180	114,59
Titanios				

6Al-4V	($\alpha + \beta$) STA	1100	40	0,42
13V-11Cr-3Al	STA	1150	35	0,29
6Al-2Sn-4Zr-6Mo	($\alpha + \beta$) STA	1200	30	0,20
6Al-6V-2Sn	($\alpha + \beta$) STA	1100	40	0,42
4Al-4Mo-2Sn-0,5Si	($\alpha + \beta$) STA	950	70	1,73
Aluminios				
7075	T651	550	31	1,01
7079	T651	460	33	1,64
DTD 5024	Forjado-Longitudinal	500	43	2,35
	Transversal	480	15	0,31
2014	T4	450	30	1,41
2024	T3	400	34	2,30
Polímeros				
Nylon-6,6		90	5	0,98
ABS		45	3	1,41
Epoxy		60	0,6	0,03
PET		11	5	65,77
PVC mod.	Con goma	40	3,5	2,44
Poliéster		30	0,6	0,13
Cerámicas				
Vidrio		501	0,8	0,0008
Nitruro de silicio Si ₃ N ₄		4501	6	0,0006

¹ Valores de rotura

b) Para aquellos materiales con $a_{crit.}$ del orden de pocos mm, los defectos de fabricación tendrán importancia en cuanto a rotura por fractura frágil.

3.3.- Se prevé que un tirante para un puente metálico va a sufrir fisuración por efecto de una soldadura, por lo que se decide comprobar su seguridad en fractura.

Si la temperatura mínima de servicio del puente es de $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ y el tirante ha de soportar 3.5 MN por metro de ancho, determinar el espesor b del mismo seleccionando el acero más adecuado de los dos siguientes de modo que el coeficiente de seguridad en fractura sea 1,5 y la tensión máxima no supere el 67 % del límite elástico, y estableciendo cual de los dos criterios será el crítico para el acero elegido.

Considérese una semi-fisura de 10 mm y un factor de intensidad de tensiones $K_I = 2,13 \cdot \sigma \sqrt{a}$

ACERO	A	B
Límite elástico (MPa)	270	350
Tenacidad a fractura (MPa m ^{1/2}) a $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$	65	50

Resolución:

$$\text{La tensión de trabajo será : } \sigma = \frac{3,5 [\text{MN/m}]}{b [\text{m}]} = \frac{3,5}{b} \text{ MPa}$$

El factor de intensidad de tensiones responde a $K_I = M \cdot \sigma \sqrt{a}$ con $M=2,13$

Y puesto que el defecto es del tamaño 10mm $K_I = 2,13 \cdot \frac{3,5}{b} \sqrt{0,01}$

Si el coeficiente de seguridad en fractura es 1,5 $K_I \leq \frac{K_{IC}}{1,5}$ luego plantearemos

$$K_{IC} \geq 1,5 \cdot 2,13 \cdot \frac{3,5}{b} \cdot \sqrt{0,01} = \frac{1,11825}{b} \text{ de donde despejando } b \text{ tendremos: } b \geq \frac{1,11825}{K_{IC}} \quad (1)$$

Debido a que la tensión máxima no debe superar el 67% del límite elástico $\frac{3,5}{b} \leq 0,67 \sigma_Y$,

$$\text{por lo cual la segunda condición para } b \text{ será: } b \geq \frac{5,224}{\sigma_Y} \quad (2)$$

Con las condiciones (1) y (2) vamos a elegir el acero:

Acero A de (1) se obtiene $b \geq 17,20$ mm (condición de fractura)

de (2) $b \geq 19,35$ mm (condición de plasticidad)

Para que cumpla las dos condiciones $b \geq 19,35$ mm.

Acero B de (1) se obtiene $b \geq 22,37$ mm (condición de fractura)

de (2) $b \geq 14,93$ mm (condición de plasticidad)

Para que cumpla las dos condiciones $b \geq 22,37$ mm.

A la vista de los resultados vemos que el **acero A** con un espesor menor (19,35 mm) cumple todos los requerimientos. Siendo el criterio de plasticidad el más crítico. El **acero B** obliga a espesores mayores y será por tanto menos económico.

3.4. Una placa gruesa de aluminio 7075 tiene 200 mm de anchura y contiene una grieta pasante en el centro de 80 mm de longitud. La placa falla cuando se aplica una tensión de 100 MPa.

- a) Calcular la tenacidad a fractura de este material.
- b) Que valor de la tensión produciría la fractura para la misma longitud de grieta:
 - i. En una placa infinita
 - ii. En una placa de 120 mm de anchura

Resolución:

a) El valor de la tenacidad a la fractura vendrá dado por el valor: $K_{IC} = Y \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi a}$, siendo Y el “factor geométrico” cuyo valor se encuentra tabulado. (Figura 3.6, libro) y está en función de la relación $2a/W = 80/200 = 0,4$ obteniendo un valor de $Y = 1,12$

Si se calcula el factor geométrico con la fórmula siguiente da este resultado:

$$Y = \left(\frac{W}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{W} \right)^{1/2} = \left(\frac{200}{\pi 40} \tan \frac{\pi 40}{200} \right)^{1/2} = 1.08$$

$$\text{Luego } K_{IC} = 1,12 \cdot 100 \cdot \sqrt{\pi \cdot 40 \cdot 10^{-3}} = 39,70 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$$

b) i) En una placa infinita la importancia del defecto será menor, necesitando mayor carga para romper. Para este caso $Y=1$

$$39,70 = 1 \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot 40 \cdot 10^{-3}}; \text{ siendo } \sigma = 112 \text{ MPa}$$

ii) Para una placa de 120 mm de anchura, la importancia del defecto será mayor, y por tanto la placa fallará a una tensión menor. El valor de $Y=1,4$ ($80/120=0,65$)

$$39,70 = 1,4 \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot 40 \cdot 10^{-3}}; \text{ siendo } \sigma = 80 \text{ MPa}$$

3.5 El ensayo de caracterización en fatiga de cordones de pretensado se siete alambres, de 5 mm de diámetro cada uno, se realiza en dos fases, ambas en control de carga:

1. Con carga alternada entre el 60 al 70 % de la carga de rotura del cordón, se fatiga éste durante dos millones de ciclos.
2. Con carga alternada entre el 60 y el 80 % de la carga de rotura del cordón, se fatiga éste hasta rotura.

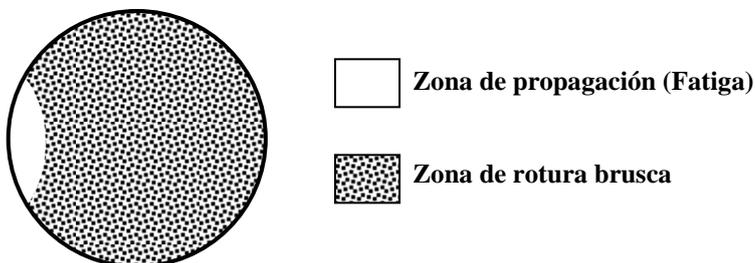
El ensayo de dos cordones (A1 y B2) da los siguientes resultados:

A1 rotura en segunda fase tras 150.000 ciclos

B2 rotura en primera fase tras 1.100.000 ciclos.

Al observar la rotura al microscopio se aprecia en los alambres rotos de ambos cordones, fisuras de fatiga en forma de lúnulas elípticas como se aprecia en la figura.

El cordón A1 rompe en dos alambres, uno de ellos con una fisura de 1.20 mm de profundidad y el otro con una de 1,32 mm. El cordón B2 rompe en un solo alambre con una fisura de 1,52 mm.



Justificar el comportamiento de estos alambres, explicándolo. Deducir para ello la tenacidad a fractura del acero del cordón sabiendo que la carga de rotura de los cordones era de 28350 kg y que se puede considerar igualmente repartida la carga que soporta entre los siete alambres. El factor de intensidad de tensiones para un alambre con defecto de forma elíptica es:

$$K_I = M \left(\frac{a}{D} \right) \cdot \sigma \sqrt{\pi a}$$

$$M \left(\frac{a}{D} \right) = \left[0,473 - 3,286 \left(\frac{a}{D} \right) + 14,797 \left(\frac{a}{D} \right)^2 \right]^{1/2} \left[\left(\frac{a}{D} \right) - \left(\frac{a}{D} \right)^2 \right]^{-1/4}$$

Resolución:

La rotura de cualquier alambre del cordón tiene lugar cuando en algún lugar del mismo se alcanza la condición: $K_I \geq K_{IC}$

Si estamos en un ensayo de fatiga con tensión variable, la rotura viene dada por el valor máxima de la tensión, que es el instante más desfavorable de carga.

El cordón A1 rompe en segunda fase, en la que $P_{max} = 80\%$ carga de rotura del cordón (28350Kg), luego la tensión máxima será:

$$P_{max} = 0,8 \times 28350 = 22680 \text{Kg} \quad \text{Sección del cordón} = 7 \cdot \pi \cdot 5^2 / 4 = 137,4 \text{mm}^2$$

$$\sigma_{max} = \frac{22680}{137,4} = 165 \frac{\text{Kg}}{\text{mm}^2} = 1617 \text{MPa}$$

El alambre que rompe en primer lugar es aquel cuya fisura es mayor en un momento dado, con una fisura de 1,32mm. Su factor geométrico según la relación a/D será:

$$M \left(\frac{1,32}{5} \right) = \left[0,473 - 3,286 \left(\frac{1,32}{5} \right) + 14,797 \left(\frac{1,32}{5} \right)^2 \right]^{1/2} \left[\left(\frac{1,32}{5} \right) - \left(\frac{1,32}{5} \right)^2 \right]^{-1/4} = 1,202$$

y por tanto $K_I = 1,202 \cdot 1617 \cdot \sqrt{\pi \cdot 0,00132} = 125,3 \text{MPa} \sqrt{m}$ en el momento de rotura

El alambre que tiene una fisura de 1,20 mm rompe en segundo lugar, en un momento en el cual la tensión es mayor, ya que la carga se reparte entre 6 cordones

$$\sigma_{max} = \frac{22680}{6 \cdot \pi \cdot \frac{5^2}{4}} = 192,5 \frac{\text{Kg}}{\text{mm}^2} = 1887 \text{MPa}$$

$$M \left(\frac{1,2}{5} \right) = 1,1208 \rightarrow K_I = 1,1208 \cdot 1887 \cdot \sqrt{\pi \cdot 0,0012} = 130 \text{MPa} \sqrt{m}$$

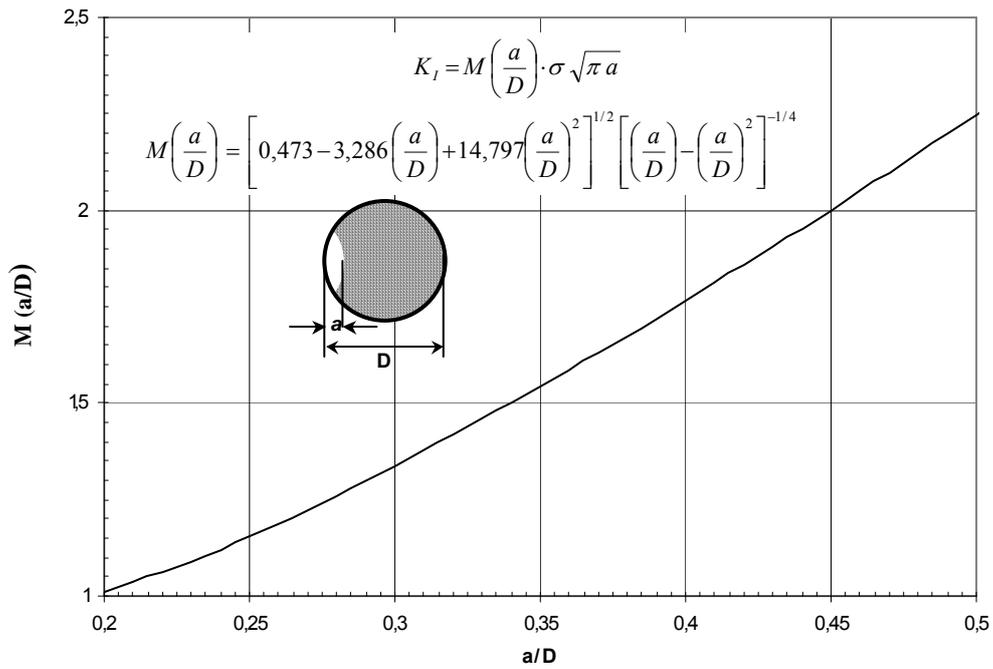
El cordón B2 rompe en primera fase con una P_{max} del 70 % de la carga de rotura

$$\sigma_{max} = \frac{70 \cdot 28350}{7 \cdot \pi \cdot \frac{5^2}{4}} = 144 \text{Kg/mm}^2 = 1416 \text{MPa} \text{ el alambre presenta una fisura de } 1,52 \text{mm}$$

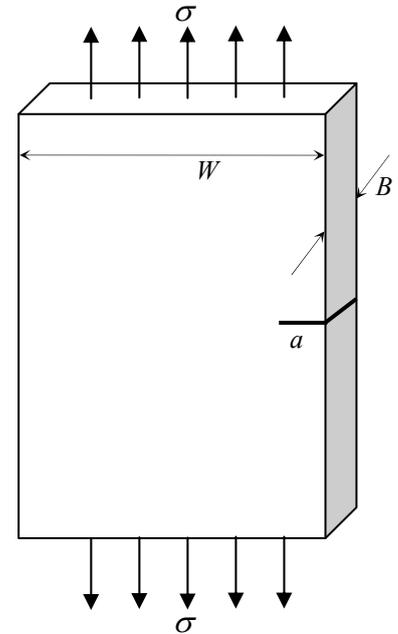
$$M\left(\frac{1,52}{5}\right) = 1,35 \text{ y por tanto } K_I = 1,35 \cdot 1416 \cdot \sqrt{\pi \cdot 0,00152} = 132 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$$

La tenacidad a fractura es $125 \text{ MPa m}^{1/2}$

El factor geométrico también se puede obtener de forma gráfica partir del diagrama que se adjunta:



3.6. Una placa de acero se utiliza como elemento estructural de una vasija a presión, donde va a estar solicitada por un estado tensional en Modo I. De dicho acero se conoce su resistencia mecánica (219 kg/mm^2) y su tenacidad a fractura ($32 \text{ MN m}^{-3/2}$). La placa de 4 mm de espesor y 8 mm de anchura, tiene en su borde una fisura pasante, tal como se ve en la figura adjunta.



a) Determinar si la placa trabajará en condiciones de deformación plana.

b) Si la carga que va a soportar equivale al 54% de la resistencia mecánica, determinar la longitud crítica de grieta que hará inestable su propagación.

c) Durante una inspección previa a la instalación se observa el tamaño real del defecto que resulta ser 0,5 mm. Por ello, la carga unitaria admisible fue minorada hasta 600 MPa. Determinar si el elemento estará del lado de la seguridad.

Datos:

$$K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi a} \cdot f\left(\frac{a}{W}\right)$$

$$\sigma_y = 90\% \cdot \sigma_u$$

$$f\left(\frac{a}{W}\right) = 1,12 - 0,23 \cdot \left(\frac{a}{W}\right) + 10,6 \cdot \left(\frac{a}{W}\right)^2 - 21,7 \cdot \left(\frac{a}{W}\right)^3 + 30,4 \cdot \left(\frac{a}{W}\right)^4$$

Resolución:

a) Para que trabaje en Deformación Plana (D.P.)

$$B > 2,5 \cdot \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_y}\right)^2 \text{ y en este caso } B > 2,5 \cdot \left(\frac{32}{0,9 \cdot 219 \cdot 9,8}\right)^2 = 0,68 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

puesto que $B = 4 \text{ mm} > 0,68 \text{ mm}$, si que hay D.P.

b) (Ahora comenzamos con el cálculo de la longitud crítica donde la grieta dejará de ser estable)

$$\sigma = 0,54 \cdot \sigma_u = 0,54 \cdot 219 \cdot 9,8 = 1160 \text{ MPa}$$

$$32 = 1160 \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot f\left(\frac{a}{W}\right) \Rightarrow \begin{cases} 1^{\text{a}} \text{ iteración } f\left(\frac{a}{W}\right) = f(0) = 1,12 \rightarrow a = 0,193 \text{ mm} \\ 2^{\text{a}} \text{ iteración } f\left(\frac{0,193}{8}\right) = 1,118 \rightarrow a = 0,194 \text{ mm OK} \end{cases}$$

(Desconocemos el valor de $f\left(\frac{a}{W}\right)$ y por lo tanto hemos de hacer en el algoritmo inicial

varias iteraciones hasta que el resultado sea parecido, en la primera introducimos el valor $a=0$ y nos da como resultado el valor de la función el cual sustituiremos en la formula

$32 = 1160 \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot f\left(\frac{a}{W}\right)$ para obtener un valor de a con el cual realizaremos la segunda

iteración, repetimos el proceso y obtenemos una a crítica)

longitud crítica de la grieta: $a = 0,194 \text{ mm}$

c) Si $\left\{ \begin{array}{l} a = 0,5 \text{ mm} \\ \sigma = 600 \text{ MPa} \end{array} \right\}$ verificamos la seguridad

$$f\left(\frac{0,5}{8}\right) = 1,142 \Rightarrow K_I = 600 \cdot \sqrt{\pi \cdot 0,0005} \cdot 1,142 = 27,16 \text{ MPa} \sqrt{m}$$

$$K_I < K_{IC} \quad \text{el elemento es seguro con un C.S.} = \frac{32}{27,16} = 1,18$$

3.7. Calcular la tenacidad a fractura de un material después de un ensayo de fractura en una chapa de $W = 500 \text{ mm}$ de ancho y espesor $B = 20 \text{ mm}$, con una grieta pasante en el centro $2a = 50 \text{ mm}$, que rompe para una carga de 1500 kN . El límite de fluencia del material es $\sigma_{ys} = 500 \text{ MPa}$.

- ¿Se trata de una fractura en deformación plana?
- Compruebe el colapso plástico
- Determine el tamaño de la zona plástica en el momento de la fractura

Resolución:

$$\sigma = \frac{1500 \times 10^3}{500 \times 20} = 150 \text{ MPa}$$

$$K_{IC} = \beta \cdot \sigma \sqrt{\pi \cdot a} = 1 \cdot 150 \sqrt{\pi \cdot 25 \cdot 10^{-3}} = 42 \text{ MPa} \sqrt{m}$$

Hemos tomado $\beta = 1$ ya que $2a/W = 50/500 = 0,1$ (valor que se puede obtener observando la gráfica de la página 57 en el libro de teoría)

Comprobación deformación plana

$$B \geq 2,5 \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_{ys}} \right)^2 = 2,5 \left(\frac{42}{500} \right)^2 = 17,67 \text{ mm} < 20 \text{ mm} \text{ estamos en Deformación plana}$$

Comprobación colapso plástico

$$\sigma = \frac{P}{(W - 2a) \times B}; \quad \sigma = \frac{1500 \times 10^3}{(500 - 50) \times 20} = 166,66 \text{ MPa} \quad \text{No se alcanza el colapso}$$

Luego la rotura es por fractura y podemos admitir un valor de $K_{IC} = 42 \text{ MPa} \sqrt{m}$

Tamaño de la zona plástica

$$r_p^* = \frac{1}{6\pi} \cdot \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_{ys}} \right)^2 = \frac{1}{6\pi} \cdot \left(\frac{42}{500} \right)^2 = 0,37 \text{ mm} \text{ (Calculada con la fórmula de radio plástico para deformación plana, sin corrección de Irwin)}$$

3.8.- Tenemos un material que tiene $80 \text{ MPa}\sqrt{m}$ de tenacidad a fractura y un límite de plastificación de 525 MPa . Determinar la tenacidad residual de una placa agrietada de $W = 500 \text{ mm}$ de ancho, con una grieta pasante en el centro de tamaño $2a = 75 \text{ mm}$ y una segunda placa, también agrietada con 50 mm de anchura y una grieta pasante centrada de $2a = 25 \text{ mm}$. Comprobar el colapso plástico.

Resolución:

Primera placa: $2a/W = 75/500 = 0,15 \quad \beta = 1$ (como hemos dicho antes, obtenida de la gráfica situada en la página 57 del libro de teoría)

$$80 = \sigma \sqrt{\pi \cdot 37,5 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \sigma = \frac{80}{\sqrt{\pi \cdot 0,0375}} = 233,1 \text{ MPa}$$

Plastificación: $\sigma = \frac{233,1 \times 500 \times B}{(500 - 75) \times B} = 274,2 \text{ MPa}$ no hay colapso

Segunda placa: $2a/W = 25/50 = 0,5 \quad \beta = 1,2$

$$80 = 1,2 \cdot \sigma \sqrt{\pi \cdot 12,5 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \sigma = \frac{80}{1,2 \sqrt{\pi \cdot 0,0125}} = 336 \text{ MPa}$$

Plastificación: $\sigma = \frac{336 \times 50 \times B}{(50 - 25) \times B} = 672 \text{ MPa} > \sigma_{ys}$ Como $\sigma_{ys} = 525$ hay colapso plástico

3.9.- En un ensayo de tenacidad de una placa agrietada en el centro, de las siguientes características: $W = 150 \text{ mm}$, $B = 5 \text{ mm}$, $2a = 50 \text{ mm}$; Obtenemos los siguientes resultados: $P_{max} = 200 \text{ kN}$, $\sigma_{ys} = 350 \text{ MPa}$.

- Calcular la tenacidad a fractura.
- Calcular el tamaño de la zona plástica en el momento de la fractura.

Resolución:

Placa: $2a/W = 50/150 = 0,3 \quad \beta = 1,07$ (Obtenida de la gráfica 57)

$$K_I = 1,07 \cdot \frac{200 \times 10^3}{150 \times 5} \sqrt{\pi \cdot 25 \cdot 10^{-3}} = 80 \text{ MPa}\sqrt{m}$$

Comprobación D.P. $B \geq 2,5 \cdot \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_{ys}} \right)^2 \geq 2,5 \cdot \left(\frac{80}{350} \right)^2 = 130 \text{ mm} \gg 5 \text{ mm}$

Estamos claramente en tensión plana, el factor de intensidad de tensiones calculado no sirve para caracterizar el material.

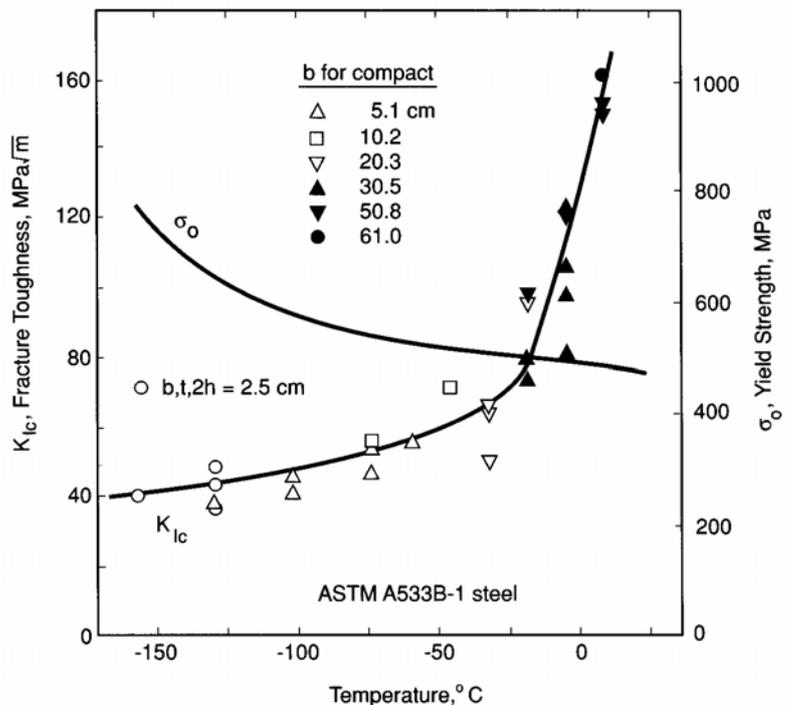
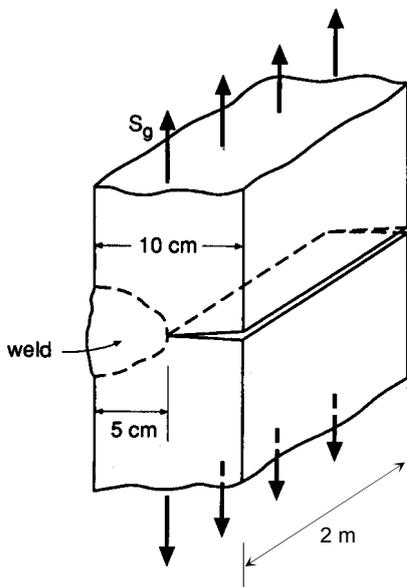
Comprobación colapso

$$P_{max} = (W - 2a) \times B \times \sigma_{ys} = (150 - 50) \times 5 \times 350 = 175 \text{ kN} < 200 \text{ kN}$$

Estamos en colapso plástico, luego el tamaño de la zona plástica es el ligamento total desde el borde de grieta hasta la superficie.

- 3.10.** Dos chapas de acero A533B-1 de dimensiones $2 \times 1 \text{ m}^2$ se juntan por su lado mayor y son soldadas por una de las superficies, de modo que la soldadura penetra en la junta hasta la mitad del espesor, del modo indicado en la figura adjunta. El conjunto forma parte de un depósito de gas licuado a presión, y trabaja bajo las tensiones de la figura s_g a una temperatura de -125°C . Las características mecánicas del material del cordón de soldadura son análogas a las del material de las chapas y vienen dadas en el gráfico adjunto. Calcular:
- El valor de la tensión s_g admisible frente a rotura frágil.
 - El valor de la tensión s_g admisible frente a rotura por agotamiento plástico.
 - Elegir la más limitativa de las anteriores tensiones y analizar el efecto del espesor en las condiciones de deformación plana.
 - Si la temperatura es la ambiente (10°C), repetir las cuestiones a, b y c.
 - ¿Qué valor de la tensión es aconsejable no rebasar a ninguna temperatura?

NOTA: Tomar el factor $K_I = 0,82 \cdot s_g \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$



Resolución:

a)

$$-125^\circ\text{C} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} K_{IC} = 44 \text{ MPa}\sqrt{m} \\ \sigma_0 = 650 \text{ MPa} \\ a = 50 \text{ mm} \end{array} \right\} 44 = 0,82 \cdot s_g \cdot \sqrt{\pi \cdot 0,05} \rightarrow s_g = 135,4 \text{ MPa}$$

Los datos se obtienen de la gráfica y simplemente se sustituyen en la expresión

$$K_I = 0,82 \cdot s_g \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$$

b) $\sigma_0 = 650 \text{ MPa} \rightarrow s_g = \frac{\sigma_0}{2} = 325 \text{ MPa}$

c) Obviamente limita el valor de 135,4 MPa

Espesor D.P. $\Rightarrow e = 2,5 \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_0} \right)^2 = 2,5 \left(\frac{44}{650} \right)^2 = 11,45 \text{ mm}$

En nuestro caso el espesor a considerar es de 2 m, luego hay D.P.

d) $10^\circ\text{C} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} K_{IC} = 160 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}} \\ \sigma_0 = 480 \text{ MPa} \\ a = 50 \text{ mm} \end{array} \right\} 160 = 0,82 \cdot s_g \cdot \sqrt{\pi \cdot 0,05} \rightarrow s_g = 493 \text{ MPa}$

$\sigma_0 = 480 \text{ MPa} \rightarrow s_g = \frac{\sigma_0}{2} = 240 \text{ MPa}$

Limita más 240 MPa, espesor D.P. $\Rightarrow e = 2,5 \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_0} \right)^2 = 2,5 \left(\frac{160}{480} \right)^2 = 256 \text{ mm} < 2 \text{ m}$

e) A una temperatura intermedia, p. ej.

$-50^\circ\text{C} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} K_{IC} = 50 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}} \\ \sigma_0 = 520 \text{ MPa} \\ a = 50 \text{ mm} \end{array} \right\} 50 = 0,82 \cdot s_g \cdot \sqrt{\pi \cdot 0,05} \rightarrow s_g = 154 \text{ MPa}$

$\sigma_0 = 520 \text{ MPa} \rightarrow s_g = \frac{\sigma_0}{2} = 260 \text{ MPa}$

Limita 154 MPa. No sería aconsejable superar nunca 135 MPa

Examen Junio 2003

3.11. Un barra cilíndrica de 100 mm de diámetro, está sometida a un ensayo de carga y al alcanzar $P = 200 \text{ t}$ se produce la rotura de la misma. Al examinar la sección de rotura se observa un gran copo de hidrógeno que podemos considerar como una fisura circular de radio $a = 25 \text{ mm}$, como se puede ver en el esquema de la figura.

- a) Calcular la tenacidad a fractura del material.
- b) Determinar el tamaño de la zona plástica en la fractura.

Otros datos:

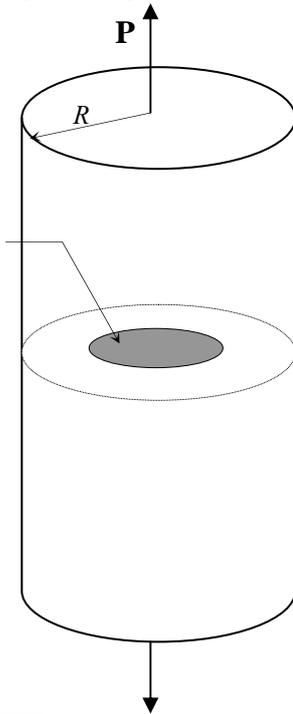
$\sigma_y = 280 \text{ MPa}$

$E = 187 \text{ GPa}$

$\nu = 0,3$

Para calcular el factor de intensidad de tensiones de una fisura circular en una barra cilíndrica, utilizaremos la solución de Erdogan (1982), siguiente:

$$K_I = \left[\frac{1 - 0,5\lambda + 0,148\lambda^3}{\sqrt{1-\lambda}} \right] \cdot 2\sigma \sqrt{\frac{a}{\pi}} ; \quad \lambda = \frac{a}{R}$$



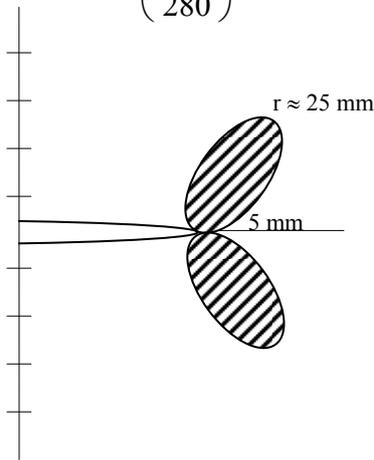
Radio del copo = a

Resolución:

a) $\sigma = \frac{200 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \text{ N}}{\left(\frac{100^2 \cdot \pi}{4} \right) \text{ mm}^2} = 249,5 \text{ MPa}$

$\lambda = \frac{a}{R} = \frac{25}{50} = 0,5 ; K_I = \left[\frac{1 - 0,5 \cdot 0,5 + 0,148 \cdot 0,5^3}{\sqrt{0,5}} \right] \cdot 2 \cdot 249,5 \sqrt{\frac{25 \cdot 10^{-3}}{\pi}} = 48,4 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$

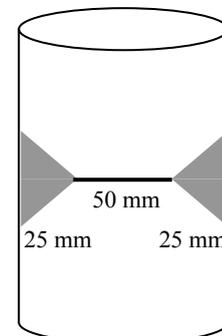
$B \geq 2500 \left(\frac{48,4}{280} \right)^2 = 74,6 \text{ mm}$, nuestro espesor es 25 mm, podemos suponer T.P.



b) $r_p = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{K_{IC}}{\sigma} \right)^2 = \frac{1000 \left(\frac{48,4}{280} \right)^2}{6,28} \approx 5 \text{ mm}$

comprobemos colapso plástico:

$\sigma_p = \frac{200 \cdot 10^3 \cdot 9,8}{\left(\frac{100^2 \cdot \pi}{4} \right) - 25^2 \cdot \pi} = 332,7 \text{ MPa} > \sigma_{ys}$



Hay plastificación, antes de fractura.

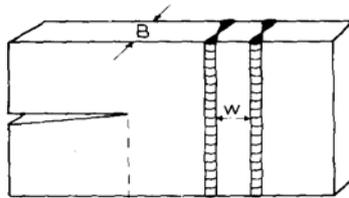
Tamaño de zona plástica: $r_p \approx 25 \text{ mm}$

El valor obtenido anteriormente de K_I no sirve como valor de K_{IC}

Examen Septiembre 2003

3.12. La cubierta de un petrolero está provista de unas costillas que detienen el crecimiento de grietas (crack arrest), consistentes en placas de material de alta tenacidad, soldadas a la cubierta y del mismo espesor que las chapas de la misma (este requerimiento es normal en grandes navíos).

En un barco tenemos colocadas estas placas cada 5 m de distancia como se ve en la Figura, fabricadas en un material que tiene $\sigma_{0,2} = 560 \text{ MPa}$ y $K_{IC} = 165 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}$, siendo las características del material de la cubierta: $\sigma_{0,2} = 275 \text{ MPa}$ y $K_{IC} = 60 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}$.



Durante la ola más grande el barco está sometido una vez al año a una tensión máxima de 150 MPa. Se pregunta.

- Tamaño mínimo de grieta que desencadena la fractura en el material base.
- Tensión máxima admisible con la configuración dada
- Confirmar que el diseño es correcto y que las placas está colocadas a las distancias adecuadas para hacer frente a los máximos temporales y de no ser así calcular la distancia correcta entre placas.

Despreciar los efectos dinámicos y tener en cuenta que la cubierta es muy gruesa

Resolución:

- a) Como se trata de una placa de gran tamaño tomamos: $K_I = \sigma \sqrt{\pi \cdot a}$

$$60 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}} = 150 \sqrt{\pi \cdot a} \Rightarrow a = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{60}{150} \right)^2 = 0,051 \text{ m} ; 2a = 51 \times 2 = 102 \text{ mm}$$

- b) $2a = 5 \text{ m} ; a = 2,5 \text{ m} ; 165 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}} = \sigma \sqrt{\pi \cdot 2,5} \Rightarrow \sigma = \frac{165}{\sqrt{\pi \cdot 2,5}} = 58,9 \text{ MPa}$

- c) Es claro que siendo la máx tensión admisible $58,9 \text{ MPa} < 150 \text{ MPa}$ el diseño es incorrecto.

$$165 = 150 \sqrt{\pi \cdot a} \Rightarrow a = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{165}{150} \right)^2 = 0,385 \text{ m} ; 2a = 0,385 \times 2 = 0,77 \text{ m}$$

La distancia correcta entre placas debe ser 770 mm

Examen Septiembre 2003

3.13 Una lámina de aleación de aluminio tiene una fisura central de 25 mm de longitud. Si la tensión de fractura de este material es $\sigma_f = 200$ MPa y la tensión de plasticidad $\sigma_{ys} = 400$ MPa.

- Calcular la tenacidad del material suponiendo un comportamiento frágil, utilizando la MFEL.
- Calcular la tenacidad del material suponiendo un comportamiento dúctil, utilizando las correcciones por la influencia de la plasticidad en el borde de la fisura.
- Discutir ambos resultados.

Tomar $K_I = \sigma \sqrt{\pi \cdot a}$

Resolución:

$$a) \quad K_{IC} = 200 \sqrt{\pi \cdot \left(\frac{25 \cdot 10^{-3}}{2} \right)} = 39,6 \text{ MPa } \sqrt{m}$$

- Tomamos la corrección de Irwin en tensión plana, dado que nos dicen que ha habido un comportamiento dúctil.

$$r_p^* = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2 = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{39,6}{400} \right)^2 = 0,00156 \text{ m} = 1,56 \text{ mm}$$

$$K'_{IC} = 200 \sqrt{\pi \cdot (12,5 + 1,56) \cdot 10^{-3}} = 42 \text{ MPa } \sqrt{m}$$

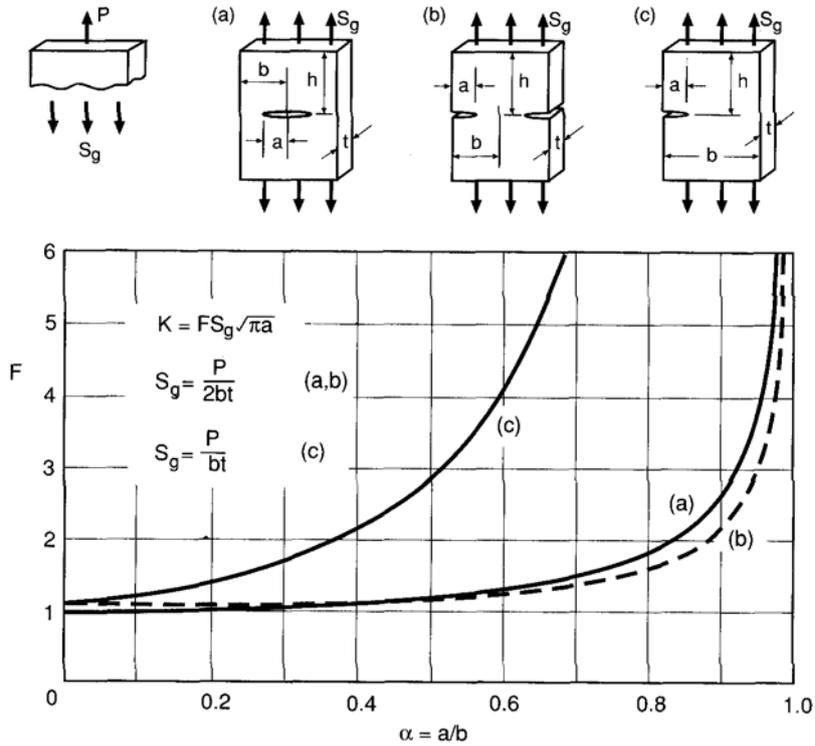
- El resultado con la corrección plástica es mayor, ya que hemos considerado que se presenta un comportamiento dúctil, con importante participación de una situación de tensión plana,
-

Examen Septiembre 2004

3.14. Una placa de de acero de anchura $b = 250$ mm y espesor $t = 20$ mm, contiene una fisura lateral de longitud "a" tal como se indica en la figura (c) con la que trabajaremos y está sometida a un estado tensional "Sg" homogéneo alejado de la fisura. Se pide dibujar dos curvas dentro del primer cuadrante cartesiano con abcisas la longitud de fisura "a" entre cero (0) y 250 mm y con ordenadas "P" entre cero (0) y 4000 kN.

- La curva correspondiente a una rotura frágil por fractura, $K_I = K_{IC}$
- La recta correspondiente a la rotura dúctil por agotamiento plástico, que se alcanza cuando la tensión en la zona no fisurada del plano de la fisura alcanza el límite elástico del acero.
- ¿Qué longitudes de fisura producen siempre rotura por agotamiento plástico?

Datos: Tomar el Factor de intensidad de tensiones K_I tal como indica la figura
 $\sigma_y = 800$ MPa; Tomar para tenacidad a fractura el valor de $240 \text{ MPa } \sqrt{m}$



Resolución:

La sección resistente es: $b \cdot t = 250 \cdot 20 = 5000 \text{ mm}^2 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$

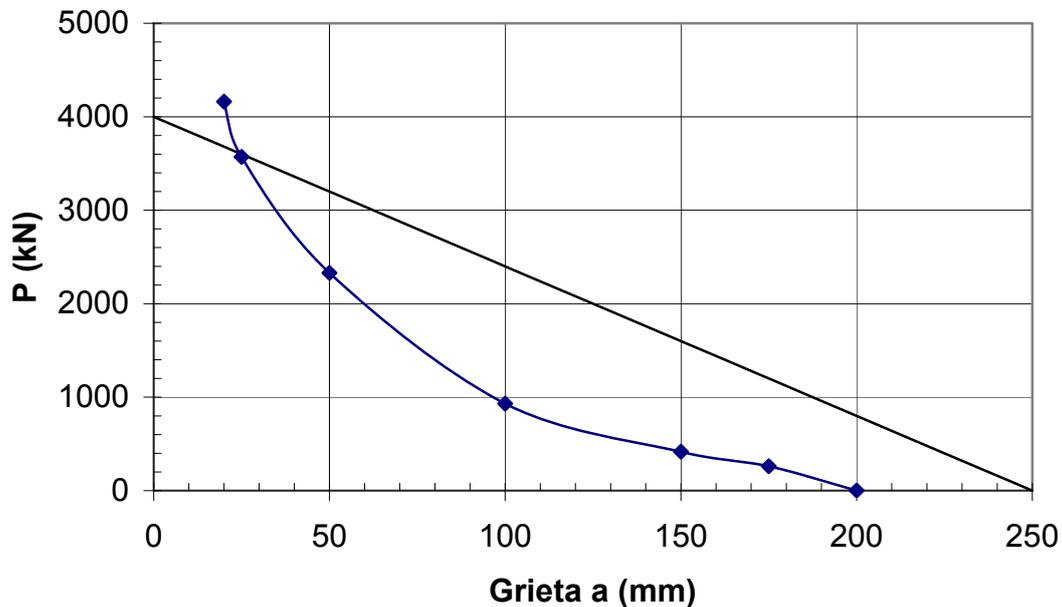
En la Tabla adjunta tenemos los cálculos para los distintos tamaños de grieta desde 175 mm hasta 20 mm, obteniendo el valor de la carga de rotura por fractura a partir de:

$$K_I = K_{IC} \Rightarrow 240 = F \cdot \frac{P}{5 \cdot 10^{-3}} \sqrt{\pi \cdot a}$$

a (mm)	a/b	F	Cálculo	P (kN)
175	0,7	6,2	$240 = 6,2 \cdot \frac{P}{5 \cdot 10^{-3}} \sqrt{\pi \cdot 0,175}$	261
150	0,6	4,2	$240 = 4,2 \cdot \frac{P}{5 \cdot 10^{-3}} \sqrt{\pi \cdot 0,15}$	416
100	0,4	2,3	$240 = 2,3 \cdot \frac{P}{5 \cdot 10^{-3}} \sqrt{\pi \cdot 0,1}$	930
50	0,2	1,3	$240 = 1,3 \cdot \frac{P}{5 \cdot 10^{-3}} \sqrt{\pi \cdot 0,05}$	2330
25	0,1	1,2	$240 = 1,2 \cdot \frac{P}{5 \cdot 10^{-3}} \sqrt{\pi \cdot 0,025}$	3570
20	0,08	1,15	$240 = 1,15 \cdot \frac{P}{5 \cdot 10^{-3}} \sqrt{\pi \cdot 0,02}$	4162

Por otro lado, el colapso plástico obedece a la ecuación de una recta de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$P = \sigma_y \cdot (b - a) \cdot t = 800 \cdot (250 - a) \cdot 20 \cdot \frac{1}{1000} = 4000 - 16 \cdot a$$



Fisuras menores de 24 mm producen siempre rotura por agotamiento plástico:

Esesor:
$$B \geq 2,5 \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_y} \right)^2 \quad B \geq 2500 \left(\frac{240}{800} \right)^2 = 225 \text{ mm}$$

$$B \geq 1000 \left(\frac{240}{800} \right)^2 = 90 \text{ mm TP}$$

Estamos en tensión plana por lo que la tendencia a rotura dúctil es muy alta y por ello nos dan una tenacidad a fractura de $240 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ que es un valor muy alto en aceros.

Examen Junio 2005

3.15. La figura muestra una herramienta, utilizada para picar carreteras. A partir de la información que se incluye, determinar:

- ¿Que fuerza puede soportar si no tuviera ninguna grieta? Considere que las tensiones actúan en la misma dirección, aplicando el principio de superposición y realice el cálculo para la sección donde posteriormente se va a desarrollar la grieta.
- Se desarrolla la grieta, pero solamente se detecta cuando alcanza un tamaño de 5 mm. ¿Cuál es la fuerza crítica en dicho momento?

Datos:

Tenacidad a fractura del material: $K_{IC} = 59 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$

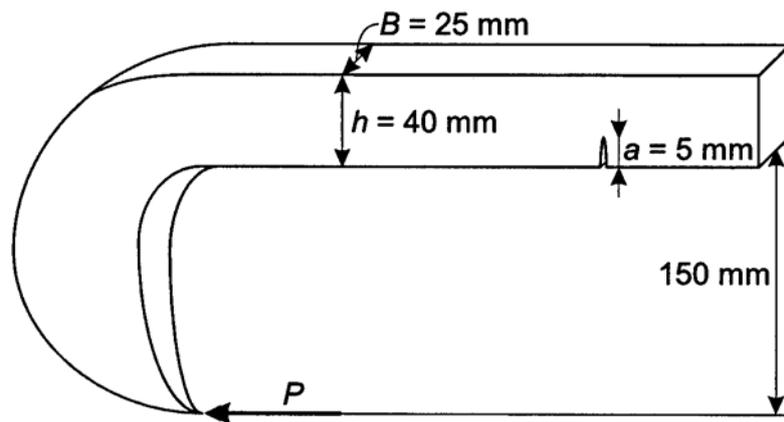
E : 210 GPa

ν : 0,3

Límite de fluencia: $\sigma_{ys} = 1500 \text{ MPa}$

Factor geométrico β : tracción = 1,12; flexión = 1,03

Tensión de flexión: $\sigma_f = \frac{6M}{B \cdot h^2}$, donde M es el momento flector.



Resolución:

a) Criterio de plastificación: $\sigma_f + \sigma_t = \sigma_{ys}$

$$\frac{6 \cdot P(0,15 + 0,02)}{(25 \cdot 10^{-3}) \cdot (40 \cdot 10^{-3})^2} + \frac{P}{(25 \cdot 10^{-3}) \cdot (40 \cdot 10^{-3})} = 1500 \cdot 10^6 ; \frac{1,02 \cdot P}{40} + \frac{P}{1000} = 1500$$

$$P = \frac{1500 \cdot 10^3}{25 \cdot 1,02 + 1} = \frac{1500000}{26,5} = 56604 \text{ N}$$

b) Criterio de fractura: $K_{I_f} + K_{I_t} = K_{Ic}$

$$\left[\frac{6 \cdot P(0,15 + 0,02) \cdot 1,03}{(25 \cdot 10^{-3}) \cdot (40 \cdot 10^{-3})^2} + \frac{1,12 \cdot P}{(25 \cdot 10^{-3}) \cdot (40 \cdot 10^{-3})} \right] \sqrt{\pi \cdot a} = 59 \text{ MPa} \sqrt{m}$$

$$1120 \cdot P + 26225 \cdot P = \frac{59 \cdot 10^6}{\sqrt{\pi \cdot 0,005}} \Rightarrow 27385 \cdot P = 470,75 \cdot 10^6 ; P = 17190 \text{ N}$$

Tema 4

4.1. Se pretende realizar un ensayo C.T.S. para determinar la tenacidad a fractura de un acero del que se conocen las siguientes características mecánicas:

$$E = 205.000 \text{ MPa} \qquad \sigma_y = 1800 \text{ MPa} \qquad \nu = 0,3$$

- a) Calcular el espesor mínimo que debe tener la probeta CTS.
- b) Se fabrica una probeta de ese tipo, se fisura por fatiga y se ensaya a rotura obteniéndose el diagrama carga-desplazamiento de la Figura 4.1. Comprobar que el espesor elegido no ha sido el adecuado y estimar el espesor que debiera elegirse.
- c) A la vista de este primer ensayo se realizan tres probetas del espesor adecuado con una entalla de profundidad igual al espesor que debe ser prolongada con una fisura de fatiga. Para ello se somete la probeta a una carga oscilante entre P_M y $0,05 P_M$, a determinar, donde P_M no debe sobrepasar ninguno de los tres límites siguientes durante el proceso de fisuración:
 1. El 80% de la carga para la que la tensión en el plano medio alcanza el valor σ_y supuesta una distribución lineal de tensiones en ese plano.
 2. El 50% de la carga que produce un valor de K_I igual al obtenido en el ensayo anterior. El 50% de la carga de agotamiento plástico de la sección resistente en el plano medio supuesta una distribución rectangular de tensiones en dicho plano.
- d) Una vez fisuradas las probetas se ensayan a rotura obteniéndose los diagramas de las Figuras 4.2, 4.3 y 4.4. Comprobar que los resultados de estos ensayos son aceptables y que el espesor elegido era suficiente. Determinar la tenacidad a fractura de este acero.

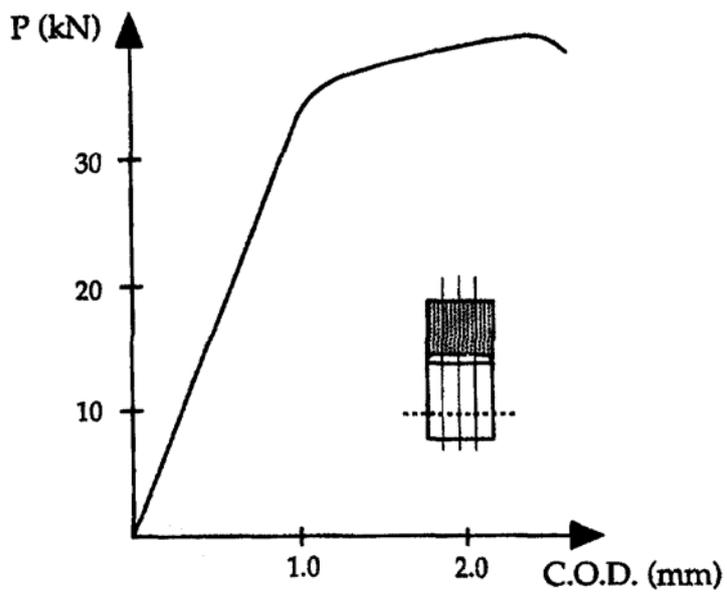


Figura 4.1

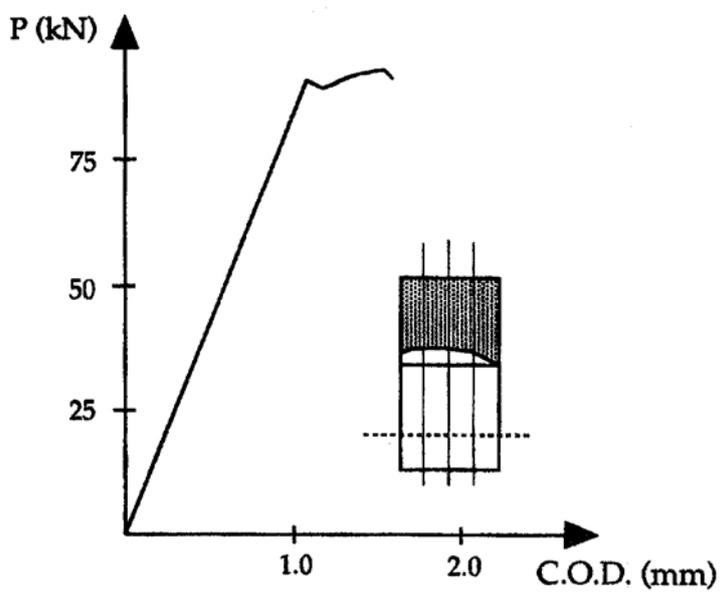


Figura 4.2

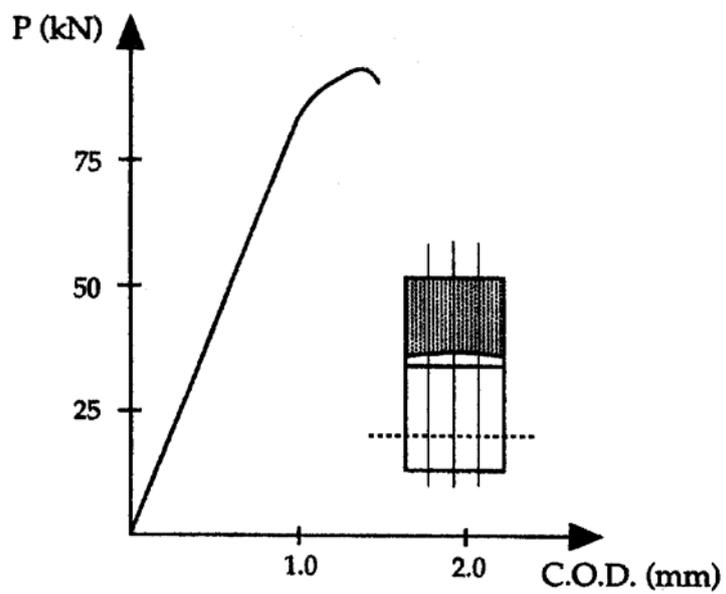


Figura 4.3

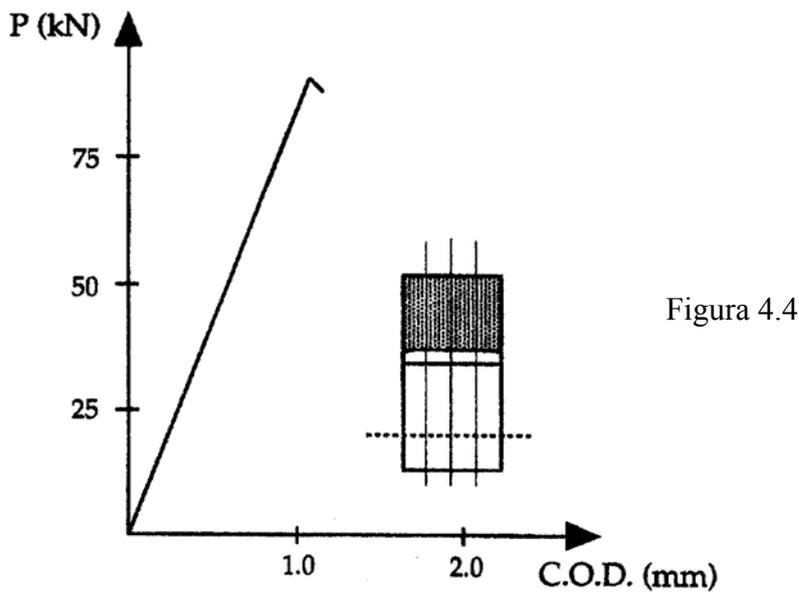


Figura 4.4

La grieta se mide en un proyector de perfiles o con una lupa métrica.

a) $\frac{\sigma_Y}{E} = \frac{1800}{205000} = 0'0087 \rightarrow$ En la tabla del E-399 ASTM con este valor tomamos una probeta de espesor 12'5 mm. El material a estudiar nos da una curva elasto-plástica, por lo que no vamos a poder determinar el K_{IC} .

En la gráfica obtengo que $P_{\max} = 40'4KN$, y al ser la $P_{\max} > P_5 \rightarrow P_5 = P_Q \rightarrow$ Corte con P $\rightarrow P = 34'5KN$.

Compruebo el criterio del 10%:

$P_{\max} > 10\%P + P = 37'5KN \rightarrow$ Al ser $>$ no es válido para K_{IC} .

$$K_Q = \frac{P_Q}{B \cdot \sqrt{W}} \cdot f_2\left(\frac{a}{W}\right) = \frac{34'5 \times 10^3 N}{12'5 \times 10^{-3} \times \sqrt{25 \times 10^{-3}}} \times 10'8 \approx 190 MPa \sqrt{m}$$

con, $\frac{a}{W} = \frac{8}{25} = 0'533 \rightarrow$ obtenemos $f_2\left(\frac{a}{W}\right) = f_2(0'533) = 10'8$

El K_Q no lo puedo usar para el K_{IC} , porque no cumple la condición del $10\% P + P$.

Calculamos ahora B :

$$B \geq 2'5 \cdot \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_{YS}}\right)^2 \geq 2'5 \cdot \left(\frac{190}{1800}\right)^2 = 0'028m = 28mm$$

En la norma E-399 tomamos la probeta de 32mm, pero vamos a tomar la de 25mm, porque la máquina que poseemos no es capaz de trabajar con 32 mm.

b) En las figuras 2, 3, y 4 vemos que las 3 probetas que nos pide la norma no tienen casi componente plástica.

En la figura 2, vemos que la $P_{\max} = 94KN$, $P_5 = 89'5KN$ y haciendo la media de las 3 medidas de a , tomamos $a = 27'1$ mm.

$$\frac{a}{W} = 0'542 \rightarrow f_2\left(\frac{a}{W}\right) = 11'056$$

Por lo que :

$$K_Q = \frac{P_Q}{B \cdot \sqrt{W}} \cdot f_2\left(\frac{a}{W}\right) = \frac{89'5 \times 10^3 N}{25 \times 10^{-3} \times \sqrt{50 \times 10^{-3}}} \times 11'056 \approx 177 MPa \cdot \sqrt{m}$$

En la figura 3, vemos que la $P_{\max} = 87'1KN$, y como la $P_Q = P_{\max} = P_5 = 87'1KN$ al existir una tensión de carga previa > que P_5 y haciendo la media de las 3 medidas de a , tomamos $a = 27'5$ mm.

$$\frac{a}{W} = \frac{27'5}{50} = 0'55 \rightarrow f_2\left(\frac{a}{W}\right) = 11'36$$

Por lo que:

$$K_Q = \frac{P_Q}{B \cdot \sqrt{W}} \cdot f_2\left(\frac{a}{W}\right) = \frac{87'1 \times 10^3 N}{25 \times 10^{-3} \times \sqrt{50 \times 10^{-3}}} \times 11'36 \approx 177 MPa \cdot \sqrt{m}$$

c) Tomo la media aritmética de los valores de a , obteniendo $a = 28$ mm.

$\frac{a}{W} = \frac{28}{50} = 0'56 \rightarrow$ No puedo determinar $f_2\left(\frac{a}{W}\right)$ en la tabla de la pág.188 Tema 10, por lo que debo de emplear la fórmula 4.1, hallando K_I , obteniendo $f_2\left(\frac{a}{W}\right)$, siendo el valor de $f_2\left(\frac{a}{W}\right) = 11'8$

$$K_Q = \frac{P_Q}{B \cdot \sqrt{W}} \cdot f_2\left(\frac{a}{W}\right) = \frac{89 \times 10^3 N}{25 \times 10^{-3} \sqrt{50 \cdot 10^{-3}}} \cdot 11'8 \approx 188 MPa \cdot \sqrt{m} .$$

Por lo tanto tomo el caso de $K_Q \approx 177 MPa \cdot \sqrt{m}$, que es el más bajo de todos:

$$B \geq 2'5 \cdot \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_{YS}}\right)^2 \geq 2'5 \cdot \left(\frac{177}{1800}\right)^2 = 0'024m = 24'17mm \rightarrow \text{Es válido.}$$

Si fuese válido el caso C, siendo $\frac{a}{W} = 0'55 \rightarrow$

$$K_Q = \frac{177+177+188}{3} \approx 181 \text{MPa}\cdot\sqrt{m}$$

$$\rightarrow B \geq 2.5 \cdot \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_{YS}} \right)^2 \geq 2.5 \cdot \left(\frac{181}{1800} \right)^2 = 0.025 \text{m} = 25.3 \text{mm} \rightarrow \text{La probeta no valdría, al ser}$$

> 25mm \rightarrow Tomo $K_{IC} = 177 \text{MPa}$

Calculamos la carga para fatiga:

$$P_m = 0.6 \times P_Q ; K_Q = 177 \text{MPa}\sqrt{m} = \frac{P_Q}{25 \times 10^{-3} \cdot \sqrt{50 \times 10^{-3}}} \cdot 9.66 \rightarrow P_Q = 101.5 \text{MPa}$$

$P_{\max} = P_m = 0.6 \times P_Q = 60.9 \text{MPa} \rightarrow$ Es mejor errar por defecto.

4.2. Una cartela de una estructura de acero presenta un problema de fisuración por soldadura. El diseño se ha realizado de forma clásica, con una tensión de trabajo

$\sigma \leq \sigma_{adm} = \frac{\sigma_y}{1.5}$. Ante la aparición de fisuras de 3 mm en su borde se decide investigar si la

estructura ofrece el mismo coeficiente de seguridad del diseño previo. Para ello se decide determinar la tenacidad a fractura K_{IC} del material que garantiza dicha seguridad.

Para ver si el material cumple esa condición se encarga a un laboratorio la realización de ensayos de determinación de K_{IC} sobre probetas compactas según la Norma ASTM E-399. Especificar el espesor mínimo que se debe exigir a las probetas, y suponiendo que estas se fisuran con una relación $a/W = 0.50$ dar la carga mínima de rotura en el ensayo para que el material tenga la tenacidad prevista.

Datos: $\sigma_y = 360 \text{MPa}$; $E = 210.000 \text{MPa}$; $K_I = \sigma \sqrt{\pi a}$

Resolución:

$$\text{a) } K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi a} ; \sigma = \frac{\sigma_{YS}}{c_s} = \frac{360 \text{MPa}}{1.5} = 240 \text{MPa}$$

$$K_I = 240 \cdot \sqrt{\pi \cdot 3 \cdot 10^{-3}} = 23.3 \text{MPa}\sqrt{m}$$

$K_{IC} \geq 1.5 \times 23.3 \text{MPa}\sqrt{m} \geq 34.94 \text{MPa}\sqrt{m} \rightarrow$ Si K_{IC} es mayor no tendremos problemas. El factor 1.5 corresponde al coeficiente de seguridad a fractura.

b) *Calculamos el espesor mínimo:*

$$B \geq 2.5 \cdot \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_{YS}} \right)^2 \geq 2.5 \cdot \left(\frac{35 \text{MPa}\sqrt{m}}{360 \text{MPa}} \right)^2 = 0.023 \text{m} = 23.63 \text{mm} \rightarrow \text{En la norma E-399}$$

ASTM tomo una probeta de 25mm de espesor. Al dar el valor del ensayo mayor de K_{IC} mayor de $35 \text{MPa}\sqrt{m}$, daríamos el material como bueno. El ensayo verdadero me debería de dar aprox. $110 \text{MPa}\sqrt{m}$, por lo que hallamos con el ensayo de K_{IC} , no es el K_{IC} . En la

tabla 4.1. los aceros de 360 MPa tienen un K_{IC} de aprox. $120 \text{ MPa} \sqrt{m}$, por lo que el ensayo parece coherente.

c) Hallamos la carga:

$$K_Q = \frac{P_Q}{B \cdot \sqrt{W}} \cdot f_2\left(\frac{a}{W}\right), \quad \frac{a}{W} = 0,5 \rightarrow f_2\left(\frac{a}{W}\right) = 9,66$$

$$P_Q = \frac{K_Q \cdot B \cdot \sqrt{W}}{f_2\left(\frac{a}{W}\right)} = \frac{35 \times 10^6 \times 25 \times 10^{-3} \sqrt{50 \times 10^{-3}}}{9,66 \times 9,8} = 2066 \text{ Kg}$$

4.3. Se estudia la posibilidad de evaluar el K_{IC} de un aluminio 7075 utilizando probetas de flexión y de tracción compacta de espesor $B = 50 \text{ mm}$, que están pre-agrietadas por fatiga a una dimensión total de 53 mm . Calcular las cargas necesarias de la máquina de ensayo para caracterizar este material. (Datos del material en la Tabla 4.1 del texto)

Resolución:

En la tabla 4.1. del texto obtenemos los siguientes datos:

$$K_{IC} = 31 \text{ MPa} \sqrt{m} ; \sigma_{YS} = 550 \text{ MPa}$$

En la Fig.4.1. de la Pág. 86 del tema 4 obtenemos: $W = 2B$, Longitud = $4W$

- Para la probeta compacta (C.T.S), tenemos: $K_Q = \frac{P_Q}{B \cdot \sqrt{W}} \cdot f_2\left(\frac{a}{W}\right) \rightarrow$

$$P_Q = \frac{K_Q \cdot B \cdot \sqrt{W}}{f_2\left(\frac{a}{W}\right)} = \frac{31 \times 10^6 \times 50 \times 10^{-3} \sqrt{100 \times 10^{-3}}}{f_2(0,53) \times 9,8} = 4705 \text{ Kg}, \text{ calculando el valor de}$$

$f_2(0,53)$ en la tabla E-399 ASTM. Por lo tanto una máquina de 5 t sería válida.

- Para la probeta de flexión (SB): $K_Q = \frac{P_Q \cdot S}{B \cdot W^{3/2}} \cdot f_1\left(\frac{a}{W}\right) \rightarrow$

$$P_Q = \frac{K_Q \cdot B \cdot W^{3/2}}{f_1\left(\frac{a}{W}\right) \cdot S} = \frac{31 \times 10^6 \text{ Nm}^{-2} \sqrt{m} \cdot 50 \times 10^{-3} \text{ m} \sqrt{(100 \times 10^{-3})^3}}{2,94 \times 0,4 \times 9,8 \text{ Kg}} = 4253 \text{ Kg}, \text{ con}$$

$S = 4 \cdot W = 4 \times 0,1 = 0,4 \text{ m}$, y $f_1\left(\frac{a}{W}\right) = f_1(0,53) = 2,94$ (En E-399 ASTM).

La carga que necesito para la rotura en la probeta de flexión es del 10% al 15% menor, lo que supone el empleo de una máquina de ensayo menor.

El peso de la probeta compacta sería de:

$$1,25 \text{ W} \times 1,20 \text{ W} \times \text{B} \times \rho = 0,25 \times 0,25 \times 0,5 \times 2,7 = 2,1 \text{ kg.}$$

En el caso de la probeta de flexión:

$$0,42 \times 0,1 \times 0,5 \times 2,7 = 5,67 \text{ Kg. La probeta de flexión pesa el doble que la compacta.}$$

Ahora debemos de comprobar la deformación plana:

$$\text{D.P.: } B \geq 2,5 \cdot \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_{YS}} \right) \geq 2,5 \cdot \left(\frac{31 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}}{550 \text{ MPa}} \right)^2 \cdot 10^3 = 7,94 \text{ mm} \rightarrow \text{Con una probeta de 10 mm}$$

sería suficiente, pero al ser el valor de la carga pequeña tomaría una de 25mm.

4.4. Una chapa de acero de 20 mm de espesor y gran tamaño, tiene perforaciones de 25 mm de diámetro que se van a usar para unir otras piezas a la misma. Se supone la chapa sometida a un estado de tensión uniforme, que proporciona un coeficiente de seguridad de 1,5. Por fenómenos de corrosión bajo tensión, puede crecer una fisura como se representa en la figura.

- Determinar la longitud c de la fisura admisible para que no se produzca rotura.
- Determinar el valor de la misma variable en el caso de mantenimiento del coeficiente de seguridad de 1,5 antes de la rotura.
- Determinar el espesor necesario para que la posible rotura se produzca realmente en un estado de deformación plana. Comentar el resultado.

El factor de intensidad de tensiones para una placa de estas características es:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a}$$

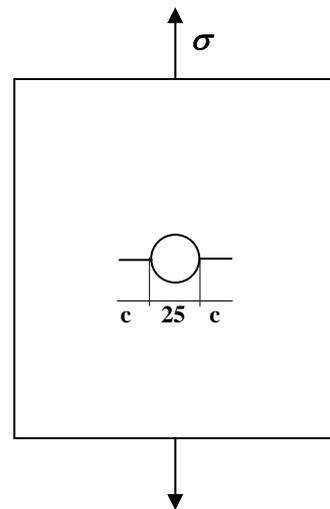
Datos del material:

Módulo de elasticidad $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$

Coefficiente de Poisson $\nu = 0,3$

Límite elástico $\sigma_{0,2} = 360 \text{ MPa}$

Tenacidad a fractura $K_{IC} = 100 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}$



Resolución:

$$\text{a) } 2a = 25 + 2c \rightarrow a = 12,5 + c$$

$$\sigma = \frac{\sigma_Y}{C.S.} = \frac{360}{1,5} = 240 \text{ MPa} \rightarrow \text{Tensión de trabajo.}$$

Suponiendo placa infinita:

$$K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} = 240 \cdot \sqrt{\pi \cdot a} = K_{IC} = 100 \text{ MPa} \cdot \sqrt{\text{m}} \quad (\text{Al ser en rotura } K_I = K_{IC}).$$

$$a = \frac{1}{\pi} \left(\frac{100}{240} \right)^2 \cdot 10^3 = 55'3 \text{ mm} \rightarrow c = 55'3 - 12'5 = 42'8 \text{ mm}.$$

$$\text{b) } K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} = 240 \cdot \sqrt{\pi \cdot a} = \frac{K_{IC}}{C.S.F.} = \frac{100}{1'5} \rightarrow a = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1000}{1'5 \cdot 240} \right)^2 \cdot 10^3 = 24'56 \text{ mm} \rightarrow$$

$$c = 24'50 - 12'5 = 12 \text{ mm}.$$

$$\text{c) D.P.: } B \geq 2'5 \cdot \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_{YS}} \right) \geq 2'5 \cdot \left(\frac{100 \text{ MPa} \cdot \sqrt{\text{m}}}{360 \text{ MPa}} \right)^2 \cdot 10^3 = 193 \text{ mm}$$

$$\text{T.P.: } B \leq 1 \cdot \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_Y} \right)^2 \leq \left(\frac{100}{360} \right)^2 \cdot 10^3 = 77'2 \text{ mm} \rightarrow \text{Al ser 20 en nuestro caso, estamos en}$$

tensión plana, por lo que los apartados a) y b) no serían válidos. Si se rompe se rompe por plastificación, no por fractura.

4.5. Una placa de grandes dimensiones de un cierto acero aleado va a estar sometida a un estado tensional en modo I. La tensión de diseño se toma como el 50 % de la resistencia mecánica, y el mínimo tamaño de defecto pasante que se puede detectar es 2 mm. En orden a reducir el peso de la estructura se propone alterar el tratamiento térmico original del acero con el fin de elevar su resistencia de 1500 a 2000 MPa. Paralelamente a dicho aumento, hay una reducción en la tenacidad a la fractura de 70 a 35 MPa m^{1/2}.

- Asumiendo condiciones de deformación plana, decidir si es recomendable la propuesta.
- Razonar sobre la influencia del espesor en la decisión.
- Una vez efectuado el tratamiento adecuado entre los dos propuestos, y durante una inspección previa a la puesta en carga, se observa que la placa tiene una fisura pasante de 2,4 mm de semi-longitud. Por otro lado, se comprueba que la tensión real de trabajo supera en un 10 % a la considerada en la etapa de diseño. Determinar si la instalación de la placa es compatible con la seguridad de la estructura.

Datos: $K_I = \sigma \sqrt{\pi a}$, $\sigma_Y = 0,8 \sigma_R$

Resolución:

$$\text{a) } K_{IA} = \frac{\sigma_R}{C.S.} \cdot \sqrt{\pi \cdot a} = \frac{1500}{2} \cdot \sqrt{\pi \cdot 1 \cdot 10^{-3}} = 42 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}} \rightarrow \text{Comparamos con la tenacidad a fractura para obtener el coeficiente de seguridad:}$$

$$C.S. = \frac{K_{ICA}}{K_{IA}} = \frac{70}{42} = 1,66$$

$$K_{IB} = \frac{\sigma_R}{C.S.} \cdot \sqrt{\pi \cdot a} = \frac{2000}{2} \cdot \sqrt{\pi \cdot 1 \cdot 10^{-3}} = 56,1 \text{ MPa} \rightarrow \text{Comparamos con la tenacidad a}$$

fractura para obtener el coeficiente de seguridad:

$$C.S. = \frac{K_{ICA}}{K_{IA}} = \frac{35}{561} < 1 \rightarrow \text{Hay fractura, por lo que no es válido.}$$

b)

$$B_A \geq 2,5 \cdot \left(\frac{K_{ICA}}{\sigma_{YA}} \right)^2 \geq 2,5 \cdot \left(\frac{70}{0,8 \cdot 1500} \right)^2 \cdot 10^3 = 8,5 \text{ mm} \rightarrow \text{Tenemos más deformación plana.}$$

$$B_B \geq 2,5 \cdot \left(\frac{K_{ICB}}{\sigma_{YB}} \right)^2 \geq 2,5 \cdot \left(\frac{35}{0,8 \cdot 2000} \right)^2 \cdot 10^3 = 1,2 \text{ mm} \rightarrow \text{Con 1 mm casi estaríamos en tensión}$$

plana, por lo que no podríamos trabajar. Comprobamos el espesor para TP:

$$B_B < 1 \cdot \left(\frac{K_{ICB}}{\sigma_{YB}} \right)^2 = \left(\frac{35}{0,8 \cdot 2000} \right)^2 \cdot 10^3 = 0,47 \text{ mm} \rightarrow \text{La chapa debe de tener un espesor menor que } 0,47 \text{ mm para estar en tensión plana.}$$

$$c) \quad K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} = 1,1 \cdot \frac{1500}{2} \sqrt{\pi \cdot 2,4 \cdot 10^{-3}} = 71,63 \text{ MPa} \cdot \sqrt{m} > 70 \text{ MPa} \cdot \sqrt{m} \rightarrow$$

La estructura es insegura, aunque siendo un valor tan próximo a la tenacidad a fractura del material, depende del espesor que la chapa sea compatible con la seguridad

4.6.- En un ensayo de fractura en deformación plana, en una probeta compacta, la carga de fallo fue de 25 kN y las características dimensionales de la probeta: $W = 50 \text{ mm}$, $B = 25 \text{ mm}$, $a = 25 \text{ mm}$, $\sigma_{ys} = 560 \text{ MPa}$.

- Calcular la tenacidad a fractura.
- Tamaño de la zona plástica en la fractura.

Resolución:

$$K_Q = \frac{P_Q}{B \cdot \sqrt{W}} \cdot f_2 \left(\frac{a}{W} \right) = \frac{25000}{25 \times 10^{-3} \cdot \sqrt{50 \times 10^{-3}}} \cdot 9,66 = 43,2 \text{ MPa} \cdot \sqrt{m}$$

Comprobación del espesor

$$B \geq 2,5 \cdot \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_{ys}} \right)^2 \geq 2,5 \cdot \left(\frac{43,2}{560} \right)^2 = 14,88 \text{ mm}, \text{ como es menor que } 25 \text{ mm es válido}$$

Tamaño de la zona plástica en la fractura.

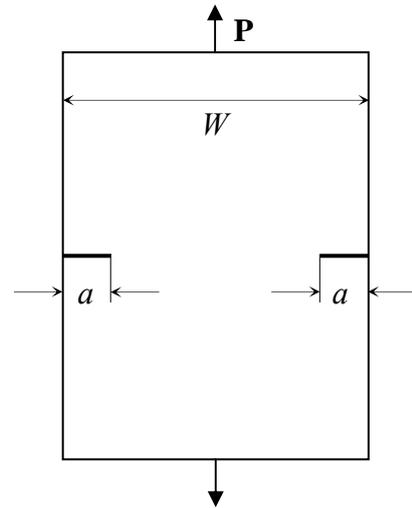
$$r_p^* = \frac{1}{6\pi} \cdot \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_{ys}} \right)^2 = \frac{1}{6\pi} \cdot \left(\frac{43,2}{560} \right)^2 = 0,3156 \text{ mm}$$

4.7. El factor de intensidad de tensiones K_I para una placa que contiene dos fisuras en sus bordes situadas simétricamente, como puede verse en la figura, es:

$$K_I = \sigma \sqrt{W} \sqrt{\tan\left(\frac{\pi a}{W}\right) + 0,1 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi a}{W}\right)}$$

donde a es la longitud de fisura, W es la anchura de la placa y σ la tensión media aplicada, normal al plano de las fisuras y en secciones alejadas de este plano.

En pruebas con un acero maraging, se utilizaron probetas de esta geometría con $a = 15 \text{ mm}$ y $W = 15 \text{ cm}$. Se encontró una dependencia de la carga P , a la cual las fisuras propagan de forma inestable, con el espesor B de la placa de la siguiente forma:



P (MN)	0,332	0,450	0,569	0,692	0,830
B (m)	0,004	0,006	0,008	0,010	0,012

Calcular el K_c para cada valor de B (en unidades de $\text{MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$) y representar la variación de la tenacidad del material con el espesor de probeta. Determinar la tenacidad a fractura del material. Discutir el significado de los resultados teniendo en cuenta que el límite elástico del acero maraging es $1,7 \text{ GPa}$.

Resolución:

Aplicamos la expresión del factor de intensidad de tensiones para esta geometría:

$$K_I = \sigma \sqrt{W} \sqrt{\tan\left(\frac{\pi a}{W}\right) + 0,1 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi a}{W}\right)}$$

y puesto que aquí: $a = 15 \text{ mm}$; $W = 15 \text{ cm}$, pasado a m , resulta:

$$K_I = 0,24 \cdot \sigma \left[\text{MPa} \sqrt{m} \right]$$

Puesto que entre los datos tenemos diferentes cargas y espesores:

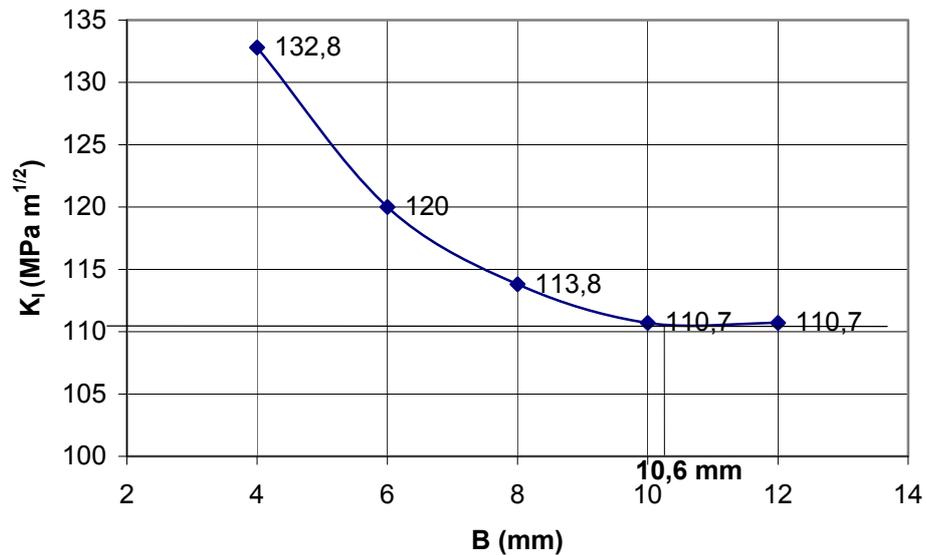
$$\sigma = \frac{P}{B \cdot W} = \frac{P[\text{MN}]}{B \cdot 0,15} [\text{MPa}]$$

entonces para:

B (mm)	P (kN)	σ (MPa)
4	332	553,3
6	450	500
8	569	474,2
10	692	461,3
12	830	461,3

y como $K_I = 0,24 \cdot \sigma \left[\text{MPa} \sqrt{m} \right]$ para cada espesor tenemos un K_C de:

B (mm)	K_{IC} [$MPa\sqrt{m}$]
4	132,8
6	120
8	113,8
10	110,7
12	110,7



Queda claro que $K_{IC} = 110,7 MPa\sqrt{m}$ y que estamos en Deformación Plana (Placas gruesas) a partir de 10 mm.

Verifiquémoslo: $B > 2,5 \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_y} \right)^2$ sale $B > 2,5 \left(\frac{110,7}{1700} \right)^2 = 10,6 mm$ **correcto**.

Verificación final: tensión en la sección remanente en el caso más desfavorable:

$$\sigma = 553,5 \cdot \frac{150}{150 - (15 \cdot 2)} = 553,5 \cdot \frac{15}{12} = 692 MPa \ll \sigma_y$$

4.8. En un ensayo de tenacidad en deformación plana obtenemos: $K_{Ic} = 55 \text{ MPa} \sqrt{m}$

- Confirmar que es un valor válido para caracterizar la tenacidad a fractura del material que tiene un límite de fluencia $\sigma_{ys} = 700 \text{ MPa}$ y la probeta un espesor de 12,5 mm.
- ¿Cuál es el máximo valor de tenacidad a fractura de este material que se puede caracterizar con esta probeta?
- Si la tenacidad no es válida; ¿podría estimar el valor de la tenacidad a fractura?. Con que precisión?.
- Defina el tamaño mínimo que tendría que tener una probeta para medir la tenacidad a fractura.

Resolución:

Comprobación del espesor

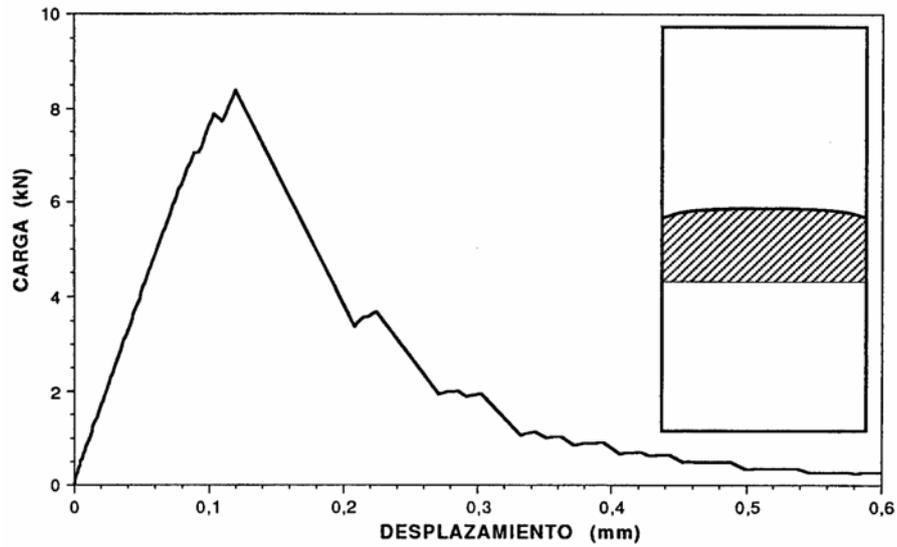
$$B \geq 2,5 \cdot \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_{ys}} \right)^2 \geq 2,5 \cdot \left(\frac{55}{700} \right)^2 = 15,43 \text{ mm}$$
, como es mayor que el espesor de la probeta, que es $B = 12,5 \text{ mm}$ no es válido.

Veamos cual es el máximo valor de tenacidad a fractura que se puede medir con esta probeta, para este acero.

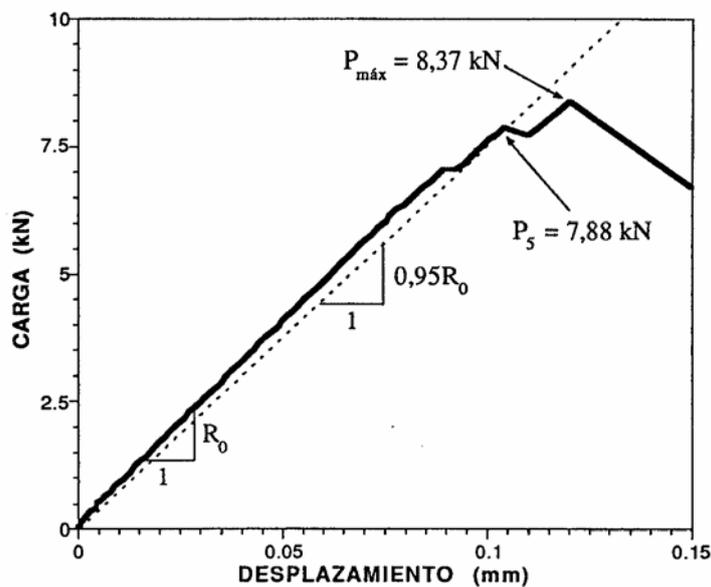
$$12,5 = 2,5 \cdot \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_{ys}} \right)^2 = 2,5 \cdot \left(\frac{K_I}{700} \right)^2 \Rightarrow K_I = 700 \cdot \sqrt{\frac{12,5 \times 10^{-3}}{2,5}} = 49,49 \text{ MPa} \sqrt{m}$$

El máximo valor medible no es muy distinto del obtenido en el ensayo, por lo que se podría decir que el valor de tenacidad a fractura real del material puede ser del orden de $50 \text{ MPa} \sqrt{m}$.

4.9. Para medir la tenacidad a fractura de un acero de alta resistencia (1143 MPa de límite elástico y 205 GPa de módulo de elasticidad) a temperatura ambiente, se ha realizado un ensayo de fractura según la norma ASTM E-399. La probeta empleada es de flexión, de 16 mm de espesor, 32 mm de anchura y 144 mm de longitud. La fisura de fatiga se ha hecho crecer a partir de una entalla de 14,1 mm de profundidad en cuatro escalones de 0,75 mm de longitud cada uno. Para ello se han aplicado cuatro bloques de ciclos sinusoidales de carga, con carga mínima de 0,2 kN y carga máxima de 7, 6, 5 y 4 kN respectivamente. El registro carga-desplazamiento obtenido, así como la superficie de fractura de la probeta, son los que se indican en la figura. Comprobar si el ensayo es válido y en caso afirmativo determinar la tenacidad a fractura del acero.



Resolución:



$$P_{max} = 8,37 \text{ kN}$$

$$P_5 = 7,88 \text{ kN}$$

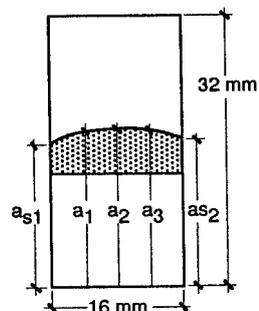
$$P_Q = P_5 = 7,88 \text{ kN}$$

El cociente entre cargas máxima y crítica satisface la condición de la norma:

$$1,1 > \frac{P_{max}}{P_Q} = \frac{8,37}{7,88} = 1,06$$

Determinación del tamaño de fisura a

Al medir la longitud de fisura en las cinco posiciones de la figura resulta:



$$a_1 = 17,18$$

$$a_2 = 17,32$$

$$a_3 = 17,24$$

$$a_4 = 16,69$$

$$a_5 = 16,53$$

siendo el valor medio de las tres primeras: $a = (a_1 + a_2 + a_3)/3 = 17,25 \text{ mm}$

Además de las indicadas en el texto, la norma ASTM E-399 establece que las longitudes de la fisura medidas en las caras a_{s1} no diferirán de la media a en más del 15 % y entre si en más del 10 % de la media. Para considerar la longitud de la zona fisurada se tendrá en cuenta el mínimo de $a_1 - a_e$ o de $a_{s1} - a_1$, donde a_e es la profundidad de la entalla. Por último, el valor de a deberá estar comprendido entre $0,45 W$ y $0,55 W$. Todas estas condiciones están destinadas a asegurar que las expresiones utilizadas para calcular K_Q son aplicables:

$$0,45W < a < 0,55W : 14,4 \text{ mm} < 17,25 \text{ mm} < 17,6 \text{ mm}$$

$$0,1 > \text{Máx} \left\{ \frac{|a_i - a_j|}{a} \right\} = \frac{17,32 - 17,18}{17,25} = 0,008$$

$$0,15 > \text{Máx} \left\{ \frac{|a_{si} - a|}{a} \right\} = \frac{17,25 - 16,53}{17,25} = 0,042$$

$$0,1 > \frac{|a_{s1} - a_{s2}|}{a} = \frac{16,69 - 16,53}{17,25} = 0,009$$

$$\text{Máx} (1,3 \text{ mm}; 0,025 W = 0,8 \text{ mm}) < \text{Min} \Delta a = a_{s2} - a_e = 16,53 - 14,1 = 2,43 \text{ mm}$$

$$a = 17,25 \text{ mm} = 0,539 W$$

Determinación del factor de intensidad de tensiones crítico K_Q

Utilizando la expresión de la norma tenemos:

$$K_Q = \frac{P_Q \cdot S}{B \cdot W^{3/2}} \cdot f_1 \left(\frac{a}{W} \right) = \frac{0,00788 \times 0,128}{0,016 \cdot (0,032)^{3/2}} \cdot f_1(0,539) = 33,3 \text{ MPa} \sqrt{m}$$

donde la distancia entre apoyos $S = 4W = 4 \times 32 = 128 \text{ mm}$ (inferior a la longitud total de la probeta: 144 mm y $f_1(0,539) = 3,03$

Validez de la prefisuración

En la fase de la prefisuración durante la cual la norma limita el factor de intensidad de tensiones aplicable, el máximo factor aplicado es el correspondiente al último ciclo de carga

$$K_f = \frac{P_f \cdot S}{B \cdot W^{3/2}} \cdot f_1 \left(\frac{a}{W} \right) = \frac{0,004 \times 0,128}{0,016 \cdot (0,032)^{3/2}} \cdot f_1(0,539) = 16,9 \text{ MPa} \sqrt{m}$$

que, en efecto, es inferior al valor límite fijado en la norma:

$$K_f < \text{Min} \left\{ 0,6 K_Q = 20,0 \text{ MPa} \sqrt{m}; 32 \cdot 10^{-5} \sqrt{m} E = 65,6 \text{ MPa} \sqrt{m} \right\}$$

Determinación de la tenacidad a fractura K_{IC}

El factor de intensidad de tensiones crítico es igual a la tenacidad a fractura si el espesor de la probeta ($B = 16 \text{ mm}$) verifica:

$$B \geq 2,5 \cdot \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_{ys}} \right)^2 = 2,5 \cdot \left(\frac{33,3}{1143} \right)^2 = 0,0021 \text{ m} = 2,1 \text{ mm}$$

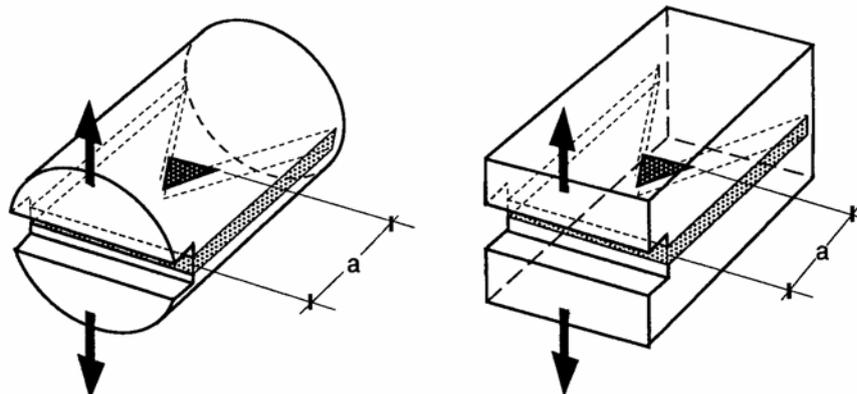
Así pues, la tenacidad a fractura del acero ensayado es de $33,3 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}$.

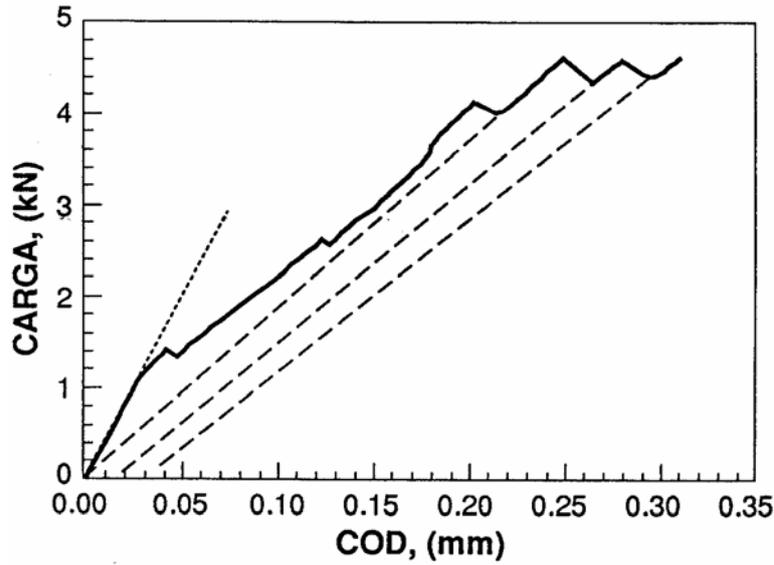
4.10. En el ensayo para medir la tenacidad a fractura con probeta prismática corta (SBS) se provoca la rotura estable de la probeta mediante la aplicación de un esfuerzo de tracción creciente. Para un sólido idealmente frágil la propagación de la fisura tiene lugar sin variación del factor de intensidad de tensiones y la curva de carga-COD es la curva iso- K correspondiente a la tenacidad a fractura del material. La ecuación de esta curva es conocida y la norma ASTM E-1304 la emplea para determinar dicha tenacidad estableciendo distintas condiciones encaminadas a asegurar que los resultados experimentales se ajustan a las hipótesis teóricas. En la práctica, la propagación estable de la fisura no se produce de modo continuo, sino en pequeños escalones que hacen caer la carga ligera, pero bruscamente, a la vez que aumenta el COD.

Estas caídas de carga originan dientes de sierra en la curva carga-COD y según la norma indicada, cuando se produzca una de ellas la probeta debe descargarse y cargarse de nuevo determinando la pendiente de la recta de descarga. Con este valor y con el de la carga inmediatamente anterior a la caída, se puede calcular el factor de intensidad de tensiones en el instante de propagación de la fisura. La expresión a emplear depende de cada tipo de probeta: cilíndrica, prismática, etc; por la probeta prismática corta la expresión es:

$$K_I = 0,830 \cdot P \cdot B^{-3/2} \cdot e^{5,112 - 10,36r + 22,46r^2 - 21,88r^3 + 8,46r^4}$$

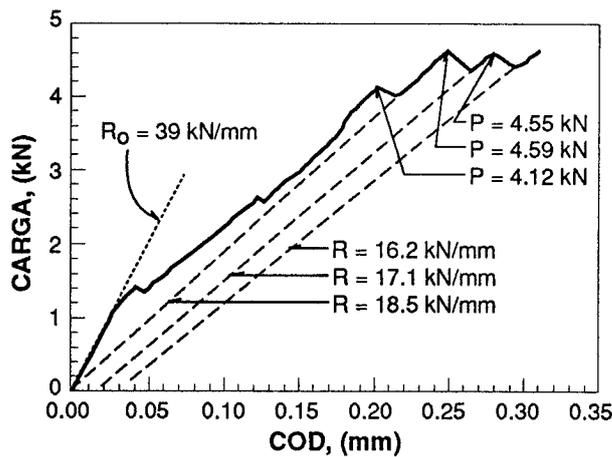
donde P es la carga, B es el espesor de la probeta (la única dimensión independiente) y r es el cociente entre la pendiente y la pendiente inicial. El factor K_I debe calcularse para las caídas de carga cuyo cociente r esté comprendido entre 0,41 y 0,62 y los valores resultantes promediarse. El valor medio obtenido coincidirá con la tenacidad a fractura si es inferior a $0,894 \sqrt{B} \cdot \sigma_y$, donde σ_y es el límite elástico del material. A partir de estos datos compruébese si la curva carga-COD de la figura, que corresponde a una probeta SBS de 20 mm de espesor y 1050 MPa de límite elástico, permite determinar la tenacidad del material.





Resolución:

Las pendientes de descarga, la pendiente inicial y las cargas de propagación, obtenidas a partir de la curva dada, pueden verse en la figura. De este modo se tiene:



- $R_0 = 39,0 \text{ kN/mm}$
- $R_1 = 16,2 \text{ kN/mm}$
- $R_2 = 17,1 \text{ kN/mm}$
- $R_3 = 18,5 \text{ kN/mm}$

Con $B = 20 \text{ mm}$ y $\sigma_y = 1050 \text{ MPa}$

Con la expresión dada del factor de intensidad de tensiones, podemos componer los resultados que se indican en la Tabla adjunta en la que también se presenta el valor medio. Las escasas diferencias que presentan los tres valores de K_I confirman la hipótesis de propagación basada en una curva iso- K .

$R \text{ (kN/mm)}$	$r = R/R_0$	$0,41 < r < 0,62$	$P \text{ (kN)}$	$K_I \text{ (MPa}\cdot\sqrt{m})$
18,5	0,4744	Si	4,12	31,4
17,1	0,4385	Si	4,59	35,8
16,2	0,4154	Si	4,55	34,5
Valor medio				33,9

El valor medio es la tenacidad a fractura del material, ya que satisface la condición de la norma:

$$K_I < 0,894 \sqrt{B} \cdot \sigma_y = 0,894 \cdot \sqrt{0,02} \cdot 1050 = 132,7 \text{ MPa}\cdot\sqrt{m} \Rightarrow K_{IC} = 33,9 \text{ MPa}\cdot\sqrt{m}$$

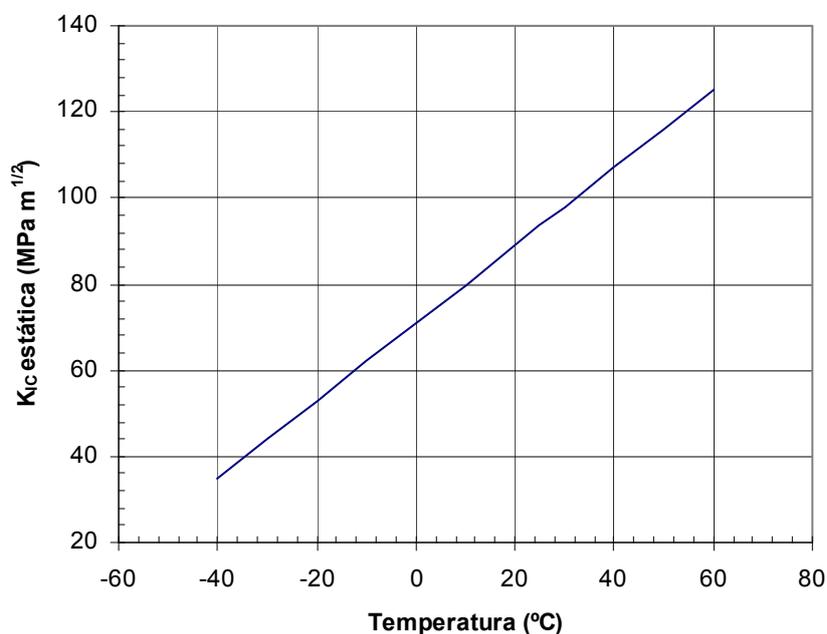
Examen Junio 2003

4.11. La pieza de sujeción de la cabina de un ascensor está sometida a cargas dinámicas que pueden originar en ella una tensión máxima de 200 MPa. La temperatura de trabajo de la citada pieza está comprendida entre 0 y 50°C, y por su configuración y mecanizado puede contener alguna grieta que ha pasado inadvertida en una inspección ocular.

Calcule la tensión mínima bajo carga estática a la que se debe probar la pieza para garantizar su seguridad con un coeficiente de 2,0. La temperatura a la que se realizará la prueba estática es de 20°C.

Para resolver el ejercicio considere que el factor de intensidad de tensiones para la posible grieta que pueda existir se toma como $K_I = Y \cdot \sigma \sqrt{\pi a}$, siendo σ la tensión sobre la pieza e Y una constante.

El material con el que se ha fabricado la pieza de sujeción es un acero con una tensión de cedencia igual a 850 MPa, del que se conoce la variación de la tenacidad de fractura estática con la temperatura, dada en la figura.

**Resolución:**

$$K_{IC} \text{ a } 0^{\circ}\text{C} \rightarrow 71 \text{ MPa} \cdot \sqrt{\text{m}}, \text{ a } 20^{\circ} \rightarrow 89 \text{ MPa} \cdot \sqrt{\text{m}}$$

$$\text{Tamaño de grieta crítico: } \frac{71}{2} = Y \cdot 200 \cdot \sqrt{\pi \cdot a_c} \Rightarrow a_c = \frac{1}{\pi} \left(\frac{35,5}{Y \cdot 200} \right)^2$$

$$\text{Ensayo a fractura: } 89 = Y \cdot \sigma_{\text{ensayo}} \sqrt{\pi \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{35,5}{Y \cdot 200} \right)^2} \Rightarrow \sigma_{\text{ensayo}} = \frac{89 \cdot 200}{35,5} = 501,4 \text{ MPa}$$

$$\text{Ensayo a plastificación: } 200 \times 2 = 400 \text{ MPa} < 501,4 \text{ MPa}$$

El ensayo debe hacerse a $\sigma = 501,4$ MPa

Tema 5

5.1. Una aleación de aluminio de límite elástico 400 MPa se ensaya en chapas anchas de 40 mm de espesor. Para una grieta central de longitud 25,4 mm la tensión de rotura que se anota es de 200 MPa y para una grieta de longitud total 16,6 mm la tensión de rotura es de 240 MPa. Calcular los valores de tenacidad a fractura de la aleación

- Usando el análisis de la MFEL
- Aplicando las correcciones de la plastificación del borde de grieta

Resolución:

- Aplicando la mecánica de la fractura elástica lineal (MFEL):

$$\left. \begin{aligned} K_{IC} &= \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} = 200 \cdot \sqrt{\pi \cdot 12,7 \cdot 10^{-3}} = 39'94 \text{MPa} \cdot \sqrt{\text{m}} \\ K_{IC} &= \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} = 240 \cdot \sqrt{\pi \cdot 8,3 \cdot 10^{-3}} = 38'65 \text{MPa} \cdot \sqrt{\text{m}} \end{aligned} \right\} \text{Supongo } K_{IC} \approx 40 \text{MPa} \sqrt{\text{m}}$$

Para conocer que el valor de K_I calculado es el de K_{IC} comprobaremos que nos encontramos en deformación plana:

$B > 2'5 \cdot \left(\frac{K_{ICB}}{\sigma_{YB}} \right)^2 = 2'5 \cdot \left(\frac{40}{400} \right)^2 \cdot 10^3 = 25mm \rightarrow$ Sí, es mayor de 25 mm, estamos en deformación plana, luego $K_I = K_{IC}$.

$$b) \text{ Irwin: } r_f = \frac{1}{6\pi} \cdot \left(\frac{K_I}{\sigma_{YS}} \right)^2 = \frac{1}{6 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{\sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}}{\sigma_{YS}} \right)^2 = \frac{1}{6 \cdot \pi} \cdot \frac{\sigma^2 \cdot \pi \cdot a}{\sigma_{YS}^2}$$

Aplicando la mecánica de la fractura elastoplástica (MFEP):

$$K_{IC} = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot (a + r_i)}$$

$$\rightarrow K_{IC} = 200 \cdot \sqrt{\pi \cdot \left(0'0127 + \frac{1}{6\pi} \left(\frac{40}{400} \right)^2 \right)} = 40,77 MPa \sqrt{m}$$

$$\rightarrow K_{IC} = 240 \cdot \sqrt{\pi \cdot \left(0'0083 + \frac{1}{6\pi} \left(\frac{40}{400} \right)^2 \right)} = 39,97 MPa \sqrt{m}$$

5.2. En un ensayo de determinación de CTOD realizado en un acero estructural se utiliza una probeta de flexión de dimensiones, $B = 25 \text{ mm}$ $W = 50 \text{ mm}$. El pre-agrietamiento de la probeta llega a una profundidad de 26 mm con un desplazamiento total de la galga de apertura de 0,33 mm, que corresponde a una carga en este punto de 50 kN. El espesor de las cuchillas de la galga es de 2 mm.

Datos del material:

Módulo de elasticidad $E = 2,0 \cdot 10^5 \text{ MPa}$

Coefficiente de Poisson $\nu = 0,3$

Límite elástico $\sigma_{0,2} = 430 \text{ MPa}$

Resolución:

Los apoyos de una probeta de flexión están separados según norma:

$$S = 4 \cdot W = 200mm = 0'2m ;$$

$$\text{CTOD : } \delta = \delta_E + \delta_P$$

Determinamos la componente elástica:

$$\delta_E = \frac{K_I^2 \cdot (1 - \nu^2)}{m \cdot E \cdot \sigma_{YS}} = \frac{101'6^2 \cdot (1 - 0'3^2)}{2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 430} \cdot 10^3 = 0'055mm \quad (\text{m}=2 \text{ según norma})$$

Para el cálculo de K_I de una probeta de flexión (Tema 3, libro de texto pág 85):

$$K_I = \frac{F \cdot S}{B \cdot W^{3/2}} \cdot f\left(\frac{a}{W}\right) = \frac{0'05 \cdot 0'2}{0'025 \cdot 0'05^{1'5}} \cdot 2'84 = 101'6 \text{ MPa} \cdot \sqrt{\text{m}}$$

$$\frac{a_0}{W} = \frac{26}{50} = 0'52 \rightarrow \text{En tabla E399 ASTM } f\left(\frac{a}{W}\right) = 2'84$$

Determinamos la componente plástica:

$$\delta_p = \frac{r_p \cdot (W - a) \cdot v_p}{r_p \cdot (W - a) + a + z} = \frac{0'40 \cdot (50 - 26) \cdot v_p}{0'40W + 0'6a + z} = \frac{0'40 \cdot (50 - 26) \cdot 0'33}{0'40 \cdot 50 + 0'6 \cdot 26 + 2} = 0'0842 \text{ mm}$$

(Tomo $r_p = 0'40$ según la norma BS 7449).

Por lo tanto el global:

$$C.T.O.D. = 0'055 + 0'0842 = 0'14 \text{ mm}$$

5.3. Se ha realizado un ensayo para la determinación del CTOD en una pieza fundida de acero NiCrMo con probetas de flexión de dimensiones $B = 10 \text{ mm}$ y $W = 20 \text{ mm}$. Se han usado dos galgas I y II, que están montadas respectivamente a alturas de $z_I = 0 \text{ mm}$ y $Z_{II} = 2 \text{ mm}$ por encima de la superficie de cada probeta. La primera desviación significativa de la linealidad en el gráfico $V_{g(I)}$ en relación a $V_{g(II)}$ se produce cuando $V_{g(I)} = 0,295 \text{ mm}$, para una longitud de grieta de $9,83 \text{ mm}$.

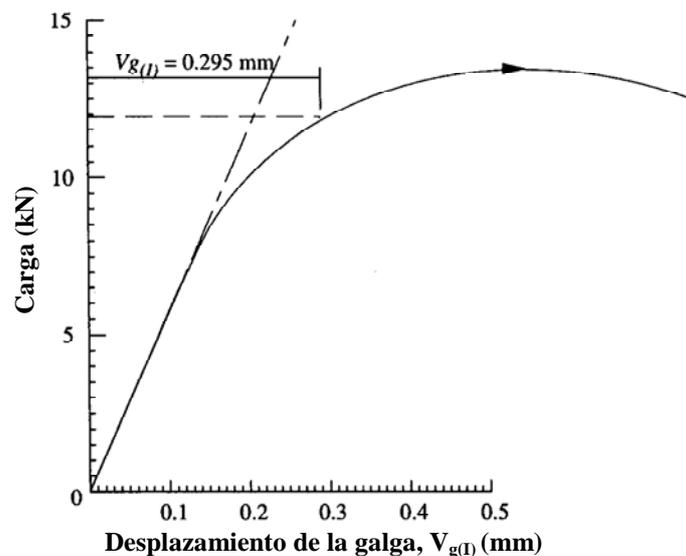
Determinar el valor de δ_i para este acero a partir del diagrama de carga versus $V_{g(I)}$ que se indica en la figura adjunta

Datos del material:

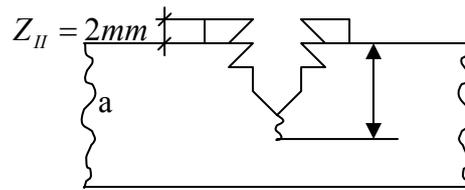
Módulo de elasticidad $E = 2,06 \cdot 10^5 \text{ MPa}$

Coefficiente de Poisson $\nu = 0,3$

Límite elástico $\sigma_{0,2} = 713 \text{ MPa}$



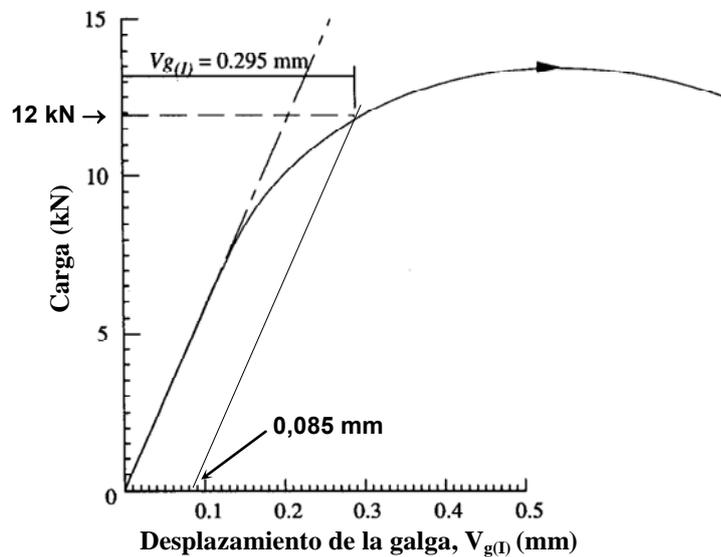
Resolución:



Los apoyos de una probeta de flexión están separados según norma: $S = 4 \cdot W = 80mm$;

$$\delta = \delta_{El} + \delta_{Pl} = \frac{K_I^2 \cdot (1 - \nu^2)}{m \cdot E \cdot \sigma_{YS}} + \frac{r_p \cdot (W - a) \cdot v_p}{r_p \cdot (W - a) + a + \tau_I}$$

Tomamos la carga del gráfico $F = 12 \text{ kN}$ y $Vg = 0,085 \text{ mm}$. Los valores de $r_p = 0'4$ de la norma B.S., $m=2$ y $\tau_I = 0$, como se ve en el croquis.



Para el cálculo de K_I de una probeta de flexión:

$$K_I = \frac{F \cdot S}{B \cdot W^{3/2}} \cdot f_1\left(\frac{a}{W}\right) = \frac{12 \text{ kN} \cdot 10^{-3} \cdot 0'08 \text{ m}}{0'01 \cdot (0'02)^{3/2}} \cdot 2'58 \approx 87'5 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}$$

$$f_1\left(\frac{a}{W}\right) = f_1\left(\frac{9'83}{20}\right) = f_1(0'4915) \rightarrow \text{Interpolando} \rightarrow 2'58$$

$$\delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{(87'5)^2 \cdot (1 - 0'09)}{2'06 \cdot 10^5 \cdot 713} \cdot 10^3 + \frac{0'40 \cdot (20 - 9'83) \cdot 0'085}{0'40 \cdot (20 - 9'83) + 9'83} = 0'05 \text{ mm} = \text{CTOD}$$

5.4. La carcasa de un cohete está fabricada con un acero aleado CrNiMo. Esta carcasa puede considerarse como un largo cilindro de 0,5 m de diámetro y un espesor de pared de 2,5 mm. El cohete se ha diseñado para una presión máxima de 8 MPa. Calcular el tamaño del defecto más grande que puede tolerar esta carcasa sin riesgo de rotura, teniendo en cuenta que en un ensayo de CTOD se ha determinado para este acero un valor de CTOD crítico de 50 μm en una probeta de tamaño pequeño

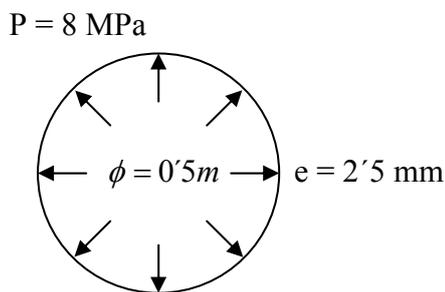
Datos del material:

Módulo de elasticidad $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$

Coefficiente de Poisson $\nu = 0,3$

Límite elástico $\sigma_{0,2} = 1,2 \text{ GPa}$

Resolución:



Asumiendo que las condiciones son de tensión plana, a la vista del pequeño espesor, el defecto más peligroso será un defecto longitudinal, siendo la tensión de trabajo:

$$\sigma = \frac{p \cdot d}{2 \cdot e} = \frac{8 \times 0,5}{2 \times 2,5 \times 10^{-3}} = 800 \text{ MPa}$$

Consideramos el valor de CTOD del enunciado como el $\delta_{\text{elástico}}$ debido a que su valor es muy pequeño, es decir que se abre muy poco la grieta en el momento de la rotura. Despreciando por tanto la parte plástica correspondiente a la relación de CTOD.

$$K_{IC}^2 = E \cdot G_C = E \cdot \delta_C \cdot \sigma_Y = 200 \times 10^3 \times 1200 \times 50 \times 10^{-6} = 12000 \text{ MPa}^2 \text{ m}$$

$$K_{IC} = \sigma \sqrt{\pi \cdot a_{\text{crt}}}$$

$$a_{\text{crt}} = \frac{K_{IC}^2}{\sigma^2 \cdot \pi} = \frac{12000 \cdot 10^3}{800^2 \cdot \pi} = 5,8 \text{ mm}$$

La longitud total del máximo defecto tolerables es de $2a = 11,6 \text{ mm}$

Comprobación de la situación en tensión plana:

$$B \geq 2,5 \cdot \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_{YS}} \right)^2 \geq 347 \text{ mm} \rightarrow \text{Por lo que nos encontramos en tensión plana.}$$

Estimación grosera del radio de la zona plástica:

$$r_y = \frac{a}{2} \left(\frac{\sigma_F}{\sigma_y} \right)^2 = \frac{5,8}{2} \left(\frac{800}{1200} \right)^2 = 1,3 \text{ mm}, \text{ por lo tanto } 2 r_y \text{ es } 2,6 \text{ mm que es}$$

aproximadamente igual al espesor de la chapa, una nueva confirmación de que nos encontramos en tensión plana

5.5. Un recipiente a presión cilíndrico de 25 m de diámetro está fabricado con chapa de un acero al carbono de 500 MPa de límite elástico y un espesor de 250 mm. La presión de trabajo es de 5,5 MPa.

A este recipiente se le practican diversas aperturas circulares para soldarle varios tubos y en la inspección mediante Ensayos No Destructivos podemos garantizar que el mínimo defecto detectable en las soldaduras es de 10 mm.

Calcular el mínimo valor $CTOD_c$ que debe tener la soldadura para prevenir la fractura frágil, asumiendo que la concentración de tensiones en un círculo es $k_t = 3$ y adicionalmente podemos encontrarnos en la región de la soldadura una tensión residual de tracción equivalente a la mitad del límite elástico.

Resolución:

Teniendo en cuenta que el diámetro d , es mucho mayor que el espesor e , podemos calcular la tensión de trabajo:

$$\sigma = \frac{p \cdot d}{2 \cdot e} = \frac{5,5 \times 25}{2 \times 0,25} = 275 \text{ MPa}$$

Conocemos que alrededor de los agujeros circulares la concentración de tensiones alcanza un valor en torno a 3, por lo tanto el valor del límite elástico es sobrepasado localmente en estos puntos en los que se presenta un plastificación.

$$\text{Asumimos: } \frac{\sigma}{\sigma_y} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_y} = \frac{275 \times 3}{500} = 1,65 \text{ respecto a la carga exterior}$$

Pero también tenemos unas tensiones residuales: $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_y} = 0,5$, luego el resultado total será:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_y} = 1,65 + 0,5 = 2,15$$

La correlación dio origen a la curva de diseño en $CTOD$ que se presenta esquemáticamente en la Figura 5.5 del libro de texto (pag. 113) El valor crítico de $CTOD$ es adimensional por el cociente entre el valor de la semigrieta, a , de la placa y se presenta en el eje de ordenadas del gráfico. Este valor está representado en función de la deformación en el momento del fallo a gran escala de la placa, ε_f , normalizada por el cociente con el valor de la deformación en el límite elástico, ε_y .

Burdekin y Dawes del Welding Institute, proponen la relación recogida en la norma BS PD 6493 “Guidance on methods for assessing the acceptability of flaws in fusion welded structures”

$$\Phi = \frac{\delta_{crit}}{2\pi \varepsilon_y a} = \left(\frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_y}\right)^2 \quad \text{para } \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_y} \leq 0,5$$

$$\Phi = \frac{\delta_{crit}}{2\pi \varepsilon_y a} = \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_y} - 0,25 \quad \text{para } \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_y} > 0,5$$

En nuestro caso: $\Phi = \frac{\delta_{crit}}{2\pi \varepsilon_y a} = \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_y} - 0,25 = 2,15 - 0,25 = 1,9$, luego:

$$\varepsilon_y = \frac{500}{200 \cdot 10^3} = 2,5 \cdot 10^{-3}$$

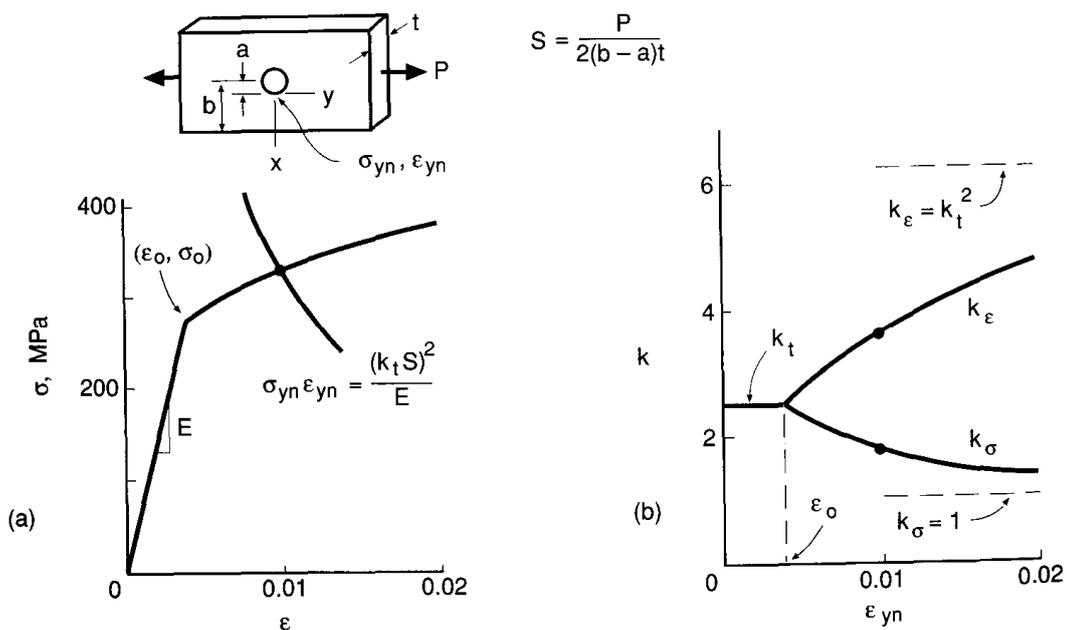
Para que nos encontremos del lado de la seguridad, aplicamos este valor, teniendo en cuenta que el valor de la grieta $a = 10$ mm es el mínimo valor detectable por el sistema de no destructivos:

$$\delta_c \geq 2\pi \cdot 2,5 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 1,9 \Rightarrow \delta_c \geq 0,3 \text{ mm}$$

Un valor de CTOD mayor de 0,3 mm no es difícil de conseguir en un material base de buena calidad, pero este valor para una soldadura sin recocido de eliminación de tensiones es bastante difícil de garantizar.

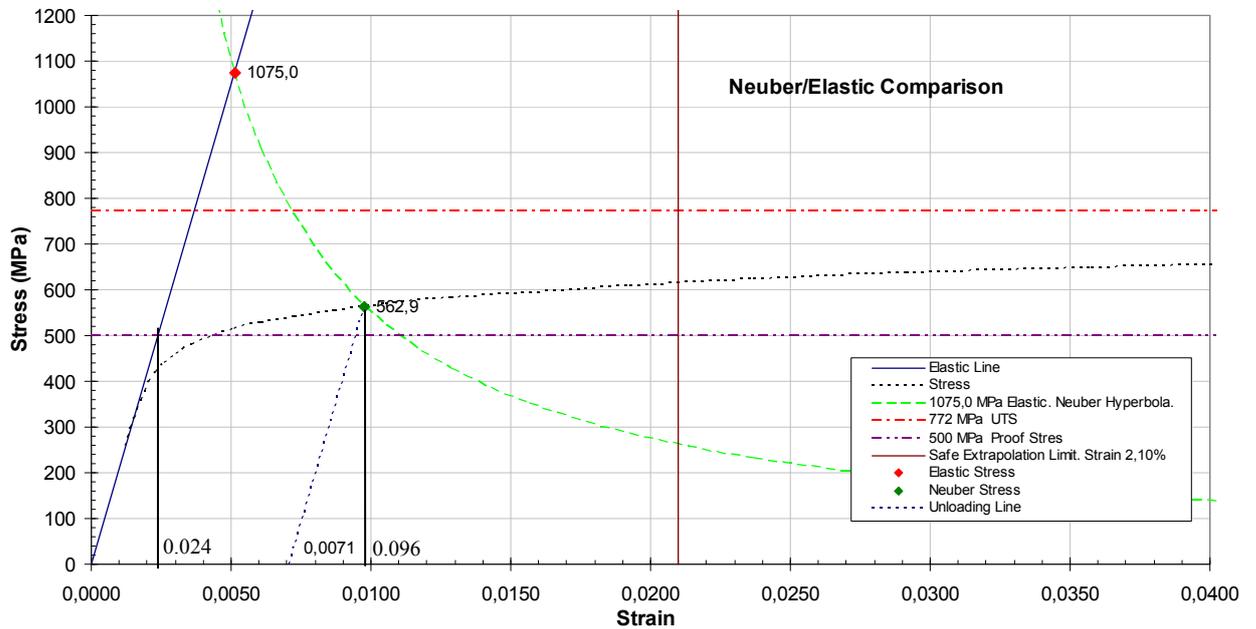
Aplicación de la regla de Neuber

Para una determinada concentración de tensiones y una determinada curva tensión-deformación (a) La regla de Neuber puede ser utilizada para estimar las deformaciones y tensiones locales, σ y ε correspondientes a un determinado valor de la tensión nominal S . Los factores de concentración de tensiones y deformaciones varían según (b).



Después de simples manipulaciones obtenemos:

$$\sigma \varepsilon = \frac{(k_t S)^2}{E}$$



Obtenemos para el problema anterior 5.6: $\frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_y} = \frac{0,096}{0,024} = 4$

5.6. El gráfico de *carga-desplazamiento de la línea de carga* para un material elástico no-lineal está caracterizado por la ecuación:

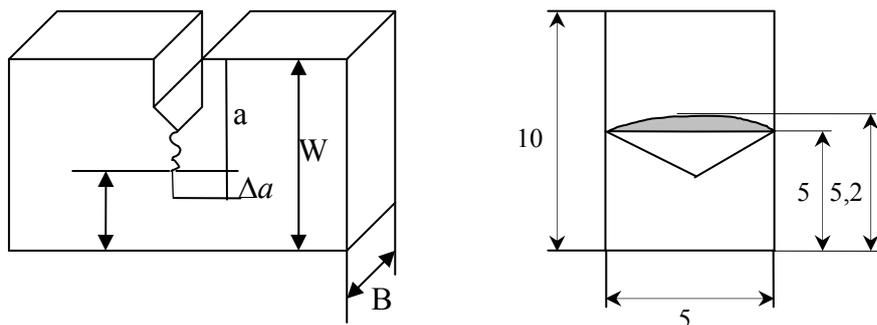
$$P = 3,16 \cdot 10^5 \left(1 - \frac{a}{W}\right) \cdot \delta^{\frac{1}{2}}$$

donde P es la carga en N, y δ es el punto de desplazamiento en m. La probeta tiene de dimensiones $W = 10$ mm, $B = 5$ mm y la grieta inicial de 5 mm crece hasta 5,2 mm.

Calcular el valor de J si:

- i. El punto de desplazamiento de la carga permanece constante a 1 mm
- ii. La carga permanece constante a 5 kN

Resolución:

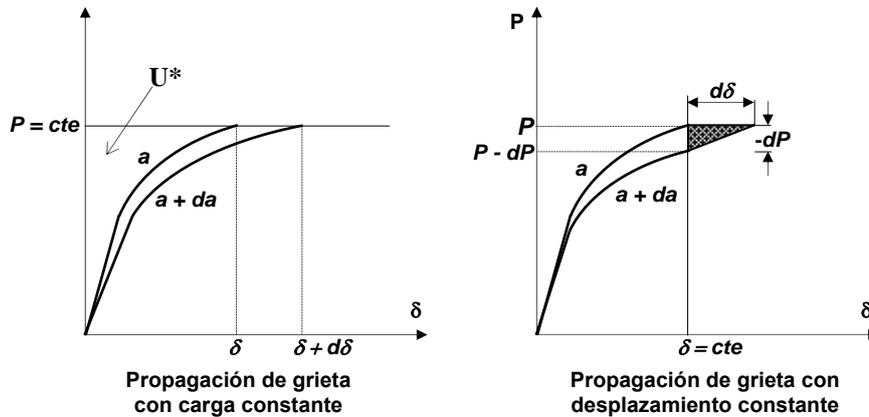


Para conocer el valor de $\Delta a = 0,2\text{mm}$, es necesario realizar un calentamiento a la temperatura del azul de revenido, en torno a $500\text{ }^\circ\text{C}$, antes de la rotura final lo que permite examinar la superficie total de fractura después del ensayo de rotura y establecer el tamaño de Δa para el acero.

Definiendo J como:

$$J = \frac{dU_{\text{propagar la grieta}}}{dA_{\text{area de grieta creada}}} = \frac{d(U_{\text{fuerzas exteriores}} - U_{\text{elástica}})}{dA}, \text{ donde } U_{\text{elástica}} = \int_0^\delta P d\delta ; \text{ con las dos}$$

formas de crecimiento de grieta: propagación con carga constante y propagación con desplazamiento constante, como se esquematiza en los diagramas de esfuerzo-desplazamiento de la Figura 5.8. En estos dos casos se cumplirá:



-Propagación de grieta con $\delta = \text{constante}$

$$U_{\text{fuerzas exteriores}} = 0$$

$$J = \frac{d(0 - U_e)}{dA} = -\frac{1}{B} \cdot \frac{du}{da}; \quad J = -\frac{1}{B} \int_0^\delta \left(\frac{dP}{da}\right) \cdot d\delta; \quad U(a) - U(a + da)$$

Pero realmente sería: $J = -\frac{1}{B} \cdot \int_0^\delta \left(\frac{dP}{da}\right)_\delta \cdot d\delta$

$$\left. \begin{aligned} P(a) &= 3,16 \cdot 10^5 \cdot \left(1 - \frac{5 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-3}}\right) \cdot \delta^{1/2} \\ P(a + da) &= 3,16 \cdot 10^5 \cdot \left(1 - \frac{5,2 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-3}}\right) \cdot \delta^{1/2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} dP &= P(a) - P(a + da) \rightarrow \\ \rightarrow \Delta P &= 3,16 \cdot 10^5 \cdot (0,5 - 0,48) \cdot \delta^{1/2} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \Delta U = 3,16 \cdot 10^5 \cdot 0,02 \cdot \int_0^{10^{-3}} \delta^{1/2} \cdot d\delta = 6,32 \cdot 10^3 \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot \delta^{3/2} \right]_0^{10^{-3}} \rightarrow$$

$$\rightarrow J = -\frac{1}{B} \cdot \frac{\Delta U}{\Delta a} = -\frac{6,32 \cdot 10^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot (10^{-3})^{3/2}}{5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,2 \cdot 10^{-3}} = \frac{0,13323}{1 \cdot 10^{-6}} = 0,13323 \cdot 10^6 J \cdot m^{-2}$$

$$J = 133,23 KJ \cdot m^{-2}$$

-Propagación de grieta a carga constante

$$U_{\text{fuerzas exteriores}} = P \cdot \delta \rightarrow J = \frac{dU^*}{dA} = \frac{d}{dA} \left(\int_0^P \delta \cdot dP \right)$$

$$J = \frac{1}{B} \frac{d}{da} \left(\int_0^P \delta \cdot dP \right); \quad J = \frac{1}{B} \int_0^P \left(\frac{d\delta}{da} \right) \cdot dP$$

$$\delta = \left(\frac{P}{3,16 \cdot 10^5 \cdot \left(1 - \frac{a}{W} \right)} \right)^2; \text{ De (1):}$$

$$\left. \begin{aligned} \delta(a) &= \left(\frac{P}{3,16 \cdot 10^5 \cdot \left(1 - \frac{5}{10} \right)} \right)^2 \\ \delta(a + da) &= \left(\frac{P}{3,16 \cdot 10^5 \cdot \left(1 - \frac{5,2}{10} \right)} \right)^2 \end{aligned} \right\} d\delta = \delta(a) - \delta(a + da) = \Delta\delta$$

$$J = \frac{1}{5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,2 \cdot 10^{-3}} \cdot \left(\frac{1}{(3,16 \cdot 10^5)^2 \cdot \left(1 - \frac{5}{10} \right)^2} - \frac{1}{(3,16 \cdot 10^5 \cdot \left(1 - \frac{5,2}{10} \right))^2} \right) \cdot \int_0^{5000} P^2 \cdot dP =$$

$$= 10^{-6} \cdot (4 \cdot 10^{-11} - 4,34 \cdot 10^{-11}) \cdot \frac{5000^3}{3} = 141,66 KJ \cdot m^{-2}$$

El diferencial de a (da) = 0,2 mm es muy grande. Si se usase $1 \mu m = 1 \cdot 10^{-6} m$ por ejemplo, los 2 resultados dan muy parecidos.

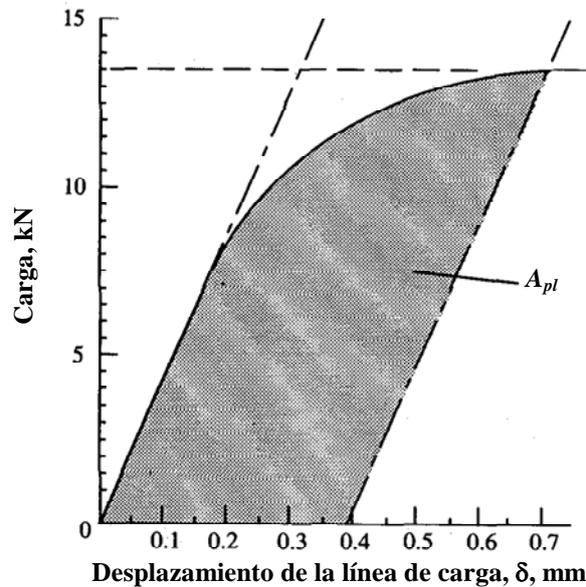
5.7. Una probeta de flexión de acero NiCrMo de dimensiones $W = 20$ mm, $B = 10$ mm, presenta un gráfico *carga/desplazamiento de la línea de carga*, como se ve en la Figura adjunta. Si la longitud de la grieta es de 9,83 mm, calcular el valor J del material.

Datos:

Módulo de elasticidad $E = 2,06 \cdot 10^5$ MPa

Coefficiente de Poisson $\nu = 0,3$

Área A_{pl} del gráfico = 4.820 Nmm



Resolución:

El cálculo de K_I para una probeta de flexión:

$$K_I = \frac{P \cdot S}{B \cdot W^{1.5}} \cdot f\left(\frac{a}{W}\right);$$

El término $f\left(\frac{a}{W}\right)$ se determina de acuerdo a la norma E-399 de ASTM.

$$f\left(\frac{a}{W}\right) = f\left(\frac{9,83}{20}\right) = f(0,491) \rightarrow \text{Interpolando} \rightarrow 2,59$$

El valor de $S = 4W = 20 \times 4 = 80$ mm, en este caso.

Tomamos el valor $F = 13,5$ KN del gráfico.

$$K_I = \frac{13,5 \cdot 10^3 \cdot 80 \cdot 10^{-3}}{0,01 \cdot (20 \cdot 10^{-3})^{1.5}} \cdot 2,59 = 99,09 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}$$

$$J = \frac{K_I^2 \cdot (1 - \nu^2)}{E} + \frac{\eta \cdot A_{pl}}{B \cdot (W - a)} = \frac{99,09^2 \cdot 0,91}{206000 \cdot 10^6} + \frac{2 \cdot 4820 \cdot 10^{-3}}{10^{-2} \cdot 10,17 \cdot 10^{-3}} = 138,2 \text{ KJ} \cdot \text{m}^{-2}$$

Como es una probeta de flexión: $\eta = 2$ para la evaluación de la J_{pl}

2º Método

$$J = \frac{\eta \cdot A_{total}}{B \cdot (W - a)}$$

$$A_{total} = A_{elástica} + A_{plástica} = 2160 + 4820 = 6980 \text{ Nmm}$$

$$A_{elástica} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{(0'71 - 0'39) \cdot 13500}{2} = 2160 \text{ Nmm} \text{ (tomando datos gráfico)}$$

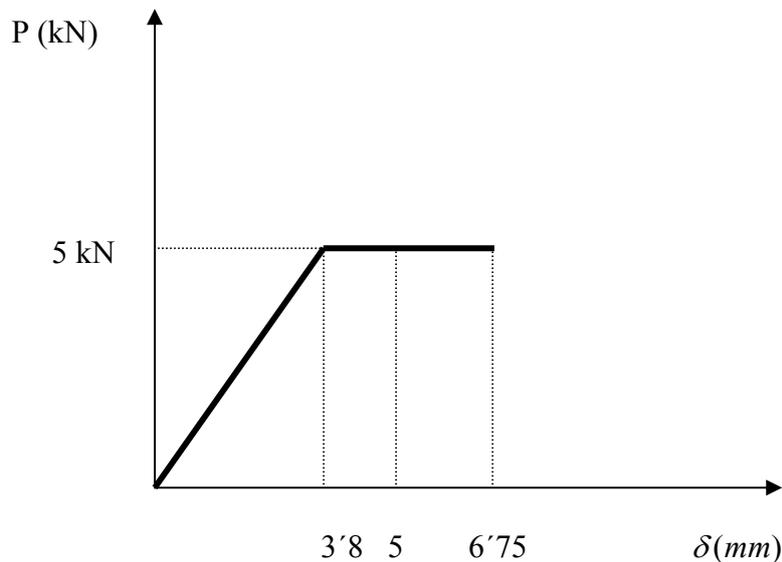
$$A_{plástica} = 4820 \text{ Nmm} \text{ (dato enunciado)}$$

$$J = \frac{2 \cdot 6980 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-3} \cdot (20 - 9'83) \cdot 10^{-3}} \cdot 10^{-3} = 138'2 \text{ KJm}^{-2}$$

5.8. En un ensayo de evaluación de J_R en una probeta de flexión los valores de la carga son prácticamente lineales hasta 5 kN, en cuyo momento comienza la fractura y a partir de este momento el diagrama *carga-desplazamiento* es esencialmente horizontal.

La probeta tiene un espesor $B = 12,5$ mm y una anchura $W = 50$ mm; la grieta inicial tiene 25 mm; el desplazamiento cuando comienza la fractura es de 3,8 mm. El tamaño de la grieta (fractura) alcanza 26,2 mm cuando el desplazamiento es 5 mm y 28,75 mm cuando el desplazamiento es 6,75 mm. Calcular la curva J_R .

Resolución:



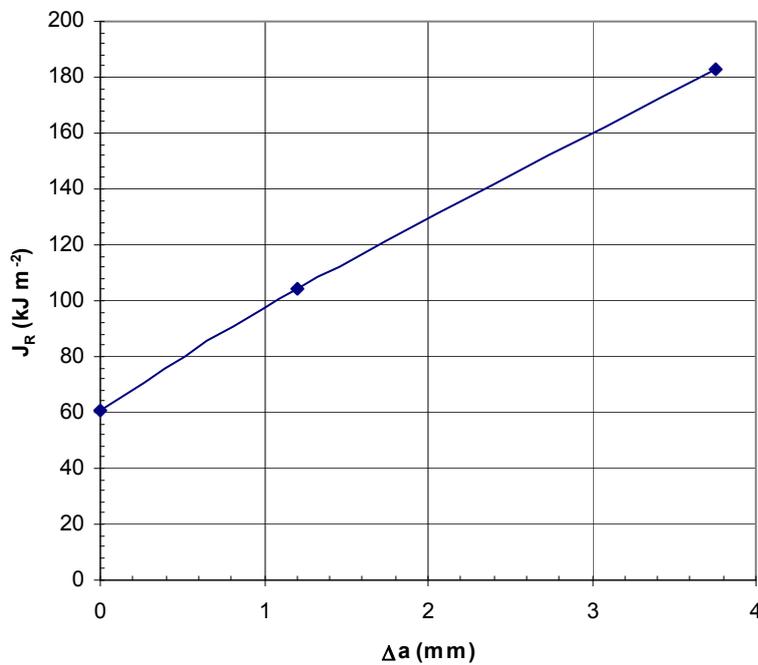
$$J = \frac{\eta \cdot A}{B \cdot b} = (\text{Probeta de flexión} \rightarrow \eta = 2) = \frac{2 \cdot A}{B \cdot b}, \text{ del gráfico obtenemos:}$$

a_0 : $A_{total} \rightarrow$ triángulo

a_1 : $A_{total} \rightarrow$ triángulo + rectángulo 1 ($\delta=3,8\text{mm}$ a $\delta=5\text{mm}$)

a_2 : $A_{total} \rightarrow$ triángulo + rectángulo 1 ($\delta=3,8\text{mm}$ a $\delta=5\text{mm}$) + rectángulo 2 ($\delta=5\text{mm}$ a $\delta=6.75\text{mm}$)

	a (mm)	Δa (mm)	δ (mm)	p (KN)	$\Delta\delta$ (mm)	$A_{Parcial}$ (Nm)	A_{Total} (Nm)	B (mm)	$b = W - a$ (mm)	$J_r [KJ.m^{-2}]$
a_0	25	0	3'8	5	0	$5 \times 3,8/2 = 9,5$	9'5	12'5	25	$\frac{2.9'5Nm}{12'5 \cdot 10^{-3} \cdot 25 \cdot 10^{-3}} = 60'8$
a_1	26'2	1'2	5	5	1'2	$1'2 \cdot 5 = 6$	15'5	12'5	23'8	$\frac{2.15'5}{12'5 \cdot 10^{-3} \cdot 23'8 \cdot 10^{-3}} = 104'2$
a_2	28'75	3'75	6'75	5	1'75	$1'75 \cdot 5 = 8'75$	24'25	12'5	21'25	$\frac{2.24'25}{12'5 \cdot 10^{-3} \cdot 21'25 \cdot 10^{-3}} = 182'6$



Este gráfico es la curva R del material que hemos medido.

5.9. En un ensayo J_C , realizado en una probeta de flexión, se ha obtenido una curva que responde a $\delta = 10^{-8} \cdot P + 10^{-15} \cdot P^4$ (δ en m y P en N). La iniciación de la grieta se produce a $P = 1.500$ N; $W = 50$ mm; $a = 27$ mm; $B = 30$ mm. Estimar J_C .

Resolución:

$\delta_{1500N} = 10^{-8} \cdot 1500 + 10^{-15} \cdot 1500^4 = 5,0625 \text{ mm} \rightarrow$ Gran deformación, por lo que podría tratarse de un polímero o tal vez de un aluminio puro sin alea, dando un valor de J pequeño.

Podemos eliminar la parte elástica $10^{-8} P$ por su escasa relevancia. Para calcular el área sólo tomamos la exponencial, eliminando la zona elástica.

$$J = \frac{\eta \cdot A}{B \cdot b} = (\text{Probeta de flexión} \rightarrow \eta = 2) = \frac{2 \cdot U}{B \cdot b} \quad P (N)$$

Siendo: $U = \int_0^{\delta} P \cdot d\delta$

Resolución 1:

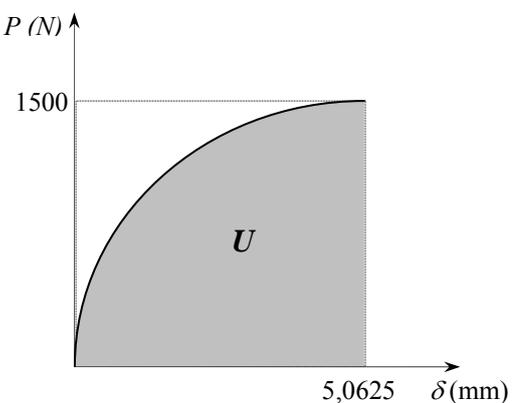
$$U = \int_0^{\delta} P \cdot d\delta$$

$$\delta = 10^{-15} \cdot P^4 \Rightarrow P = (10^{15} \cdot \delta)^{\frac{1}{4}}$$

$$U = \int_0^{5,0625 \cdot 10^{-3}} (10^{15} \cdot \delta)^{\frac{1}{4}} d\delta = 10^{\frac{15}{4}} \cdot \frac{4}{5} \left| \delta^{\frac{5}{4}} \right|_0^{5,0625 \cdot 10^{-3}} = 10^{\frac{15}{4}} \cdot \frac{4}{5} [5,0625 \cdot 10^{-3}]^{\frac{5}{4}} =$$

$$10^{\frac{15}{4}} \cdot 10^{-\frac{15}{4}} \cdot \frac{4 \cdot 5,0625^{\frac{5}{4}}}{5} = 6,075 J \Rightarrow$$

$$J = \frac{2 \cdot 6,075}{30 \cdot 10^{-3} \cdot 23 \cdot 10^{-3}} = 17,6 KJ m^{-2}$$



Resolución 2:

También podemos resolver el problema cambiando de variable

$$U = \int_0^{\delta} P \cdot d\delta \quad \text{para lo cual tenemos que obtener la } d\delta, \text{ y cambiar los límites de la integral}$$

$$\delta = 10^{-15} \cdot P^4 \rightarrow d\delta = 4 \cdot 10^{-15} \cdot P^3 \cdot dP$$

$$U = \int_0^{1500} P \cdot 4 \cdot 10^{-15} P^3 \cdot dP = \int_0^{1500} 4 \cdot 10^{-15} \cdot P^4 \cdot dP = 4 \cdot 10^{-15} \cdot \left[\frac{P^5}{5} \right]_0^{1500} =$$

$$4 \cdot 10^{-15} \cdot \frac{1500^5}{5} [N \cdot m] = 6,075 N \cdot m$$

$$J = \frac{2U}{B \cdot (W - a_0)} = \frac{2 \cdot 6,075}{30 \cdot 10^{-3} \cdot 23 \cdot 10^{-3}} = 17,6 KJ \cdot m^{-2}$$

5.10. Necesitamos realizar un ensayo de determinación de K_{IC} en un acero estructural, considerando que está en la zona alta de la tenacidad para iniciación de microhuecos, con un valor de tenacidad a fractura del orden de $200 MPa \sqrt{m}$

- a) Calcular el tamaño de probeta necesario, para la realización de un ensayo de determinación de K_{IC} de acuerdo con la norma ASTM E-399

- b) Tenemos probetas compactas mecanizadas de espesor $B = 25$ mm. ¿Cuál es el máximo valor de K_{IC} que se puede determinar con estas probetas?
- c) Alternativamente definir cual es el tamaño mínimo de espesor necesario para la realización de un ensayo J de este acero.

Otros datos: $\sigma_{ys} = 350$ MPa, $E = 207$ GPa $\nu = 0,3$

Resolución:

$$a) B, (W - a) = 2'5 \cdot \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_Y} \right)^2 = 2'5 \cdot \left(\frac{200}{350} \right)^2 = 0'816m \rightarrow W = 1'63m \rightarrow \text{No es posible}$$

hacer esta probeta, puesto que pesaría más de 20 t, siendo compacta.

$$b) \text{ Si } B = 25 \text{ mm} \rightarrow 25 \cdot 10^{-3} = 2'5 \cdot \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_Y} \right)^2 \rightarrow K_{IC} = 35 \text{ MPa} \cdot \sqrt{m} \rightarrow \text{No podemos evaluar más que } 35 \text{ MPa} \cdot \sqrt{m}, \text{ valor pequeño para un acero dúctil.}$$

c) Con el ensayo J :

$$K_{IC} = \sqrt{J_{IC} E'} \quad E' = \frac{E}{1 - \nu^2}$$

$$J_Q \Rightarrow J_{IC} = \frac{K_{IC}^2 \cdot (1 - \nu^2)}{E} = \frac{200^2 \cdot 0'91}{207000 \cdot 10^6} = 176 \text{ KJ} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$B, (W - a) = 25 \cdot \left(\frac{J_{IC}}{\sigma_Y} \right) = 25 \cdot \left(\frac{176 \text{ kJ} \cdot \text{m}^{-2}}{350 \text{ MPa}} \right) = 0.0126 \text{ m}$$

Como vemos bastaría una probeta de 12.6 mm para poder evaluar J_{IC} y posteriormente hallar el valor de K_{IC} .

5.11. Para medir la J_{IC} de un acero, se han ensayado 9 probetas compactas con una relación $W/B = 2$ siguiendo la norma ASTM E-1820. Mediante un planímetro se ha medido el área A , situada bajo la curva carga-desplazamiento hasta el valor máximo de la carga (punto de descarga) y, después de romper totalmente la probeta a baja temperatura, se ha medido la longitud de la fisura inicial a (entalla más fatiga) y la longitud de la fisura en el punto de descarga $a + \Delta a$. Los resultados se indican en la siguiente tabla:

ENSAYO	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a (mm)	14,55	13,98	13,52	13,07	14,6	14,38	13,89	13,96	13,88
a + Δa (mm)	14,71	14,47	13,96	13,32	15,19	15,89	15,05	14,78	15,82
A (J)	4,56	7,8	7,13	6,27	8,25	12,91	11,3	9,58	14,63

Analizar los resultados de acuerdo con la norma indicada y en su caso, determinar el valor de J_{IC} y K_{IC} .

Otros datos:

Espesor de la probeta $B = 12,5$ mm

$\sigma_{0,2} = 282$ MPa, $\sigma_R = 363$ MPa, $E = 208$ GPa, $\nu = 0,3$

Resolución:

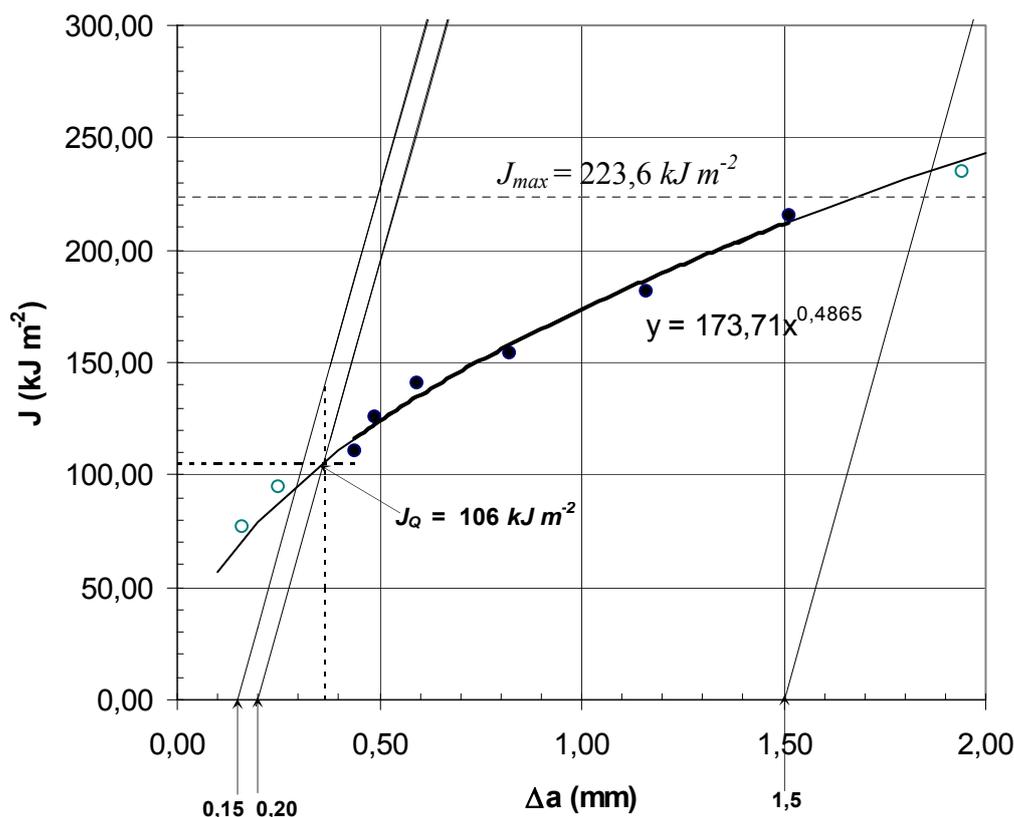
Para determinar J se utiliza la expresión $J = \frac{\eta \cdot A}{B \cdot (W - a)}$, después de comprobar que los valores de a/W están comprendidos entre 0,5 y 0,75.

El cálculo de η se realiza mediante la siguiente expresión al ser una probeta compacta:

$$\eta = 2 + \frac{0,522(W - a)}{W}$$

ENSAYO	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a (mm)	14,55	13,98	13,52	13,07	14,6	14,38	13,89	13,96	13,88
a + Δa (mm)	14,71	14,47	13,96	13,32	15,19	15,89	15,05	14,78	15,82
A (J)	4,56	7,8	7,13	6,27	8,25	12,91	11,3	9,58	14,63
Δa (mm)	0,16	0,49	0,44	0,25	0,59	1,51	1,16	0,82	1,94
(W-a) (mm)	10,45	11,02	11,48	11,93	10,4	10,62	11,11	11,04	11,12
η	2,2182	2,2301	2,2397	2,2491	2,2172	2,2217	2,2320	2,2305	2,2322
B (mm)	12,5	12,5	12,5	12,5	12,5	12,5	12,5	12,5	12,5
a/W	0,58	0,56	0,54	0,52	0,58	0,58	0,56	0,56	0,56
J (kJ m ⁻²)	77,4	126,3	111,3	94,6	140,7	216,1	181,6	154,8	234,9

A partir de estos resultados se puede dibujar el siguiente diagrama:



Ecuación de la recta de embotamiento:

$$J = 2\sigma_m \cdot \Delta a = 2 \cdot \frac{282 + 363}{2} \cdot \Delta a = 645 \left(\frac{\text{kJ}}{\text{m}^2 \text{ mm}} \right) \Delta a (\text{mm})$$

$$\text{Siendo: } \sigma_m = \frac{\sigma_{ys} + \sigma_R}{2}$$

Al representar la zona de validez de los datos, limitada por dos rectas paralelas a la línea de embotamiento que pasan por los puntos: (0,15 mm, 0) y (1,5 mm, 0), y por la recta horizontal $J_{\max} = b_{\min} \cdot \frac{\sigma_m}{15} = 10,4 \times \frac{322,5}{15} = 223,6 \text{ kJ m}^{-2}$, se observa que los ensayos 1, 4 y 9 quedan fuera y, siguiendo la norma, hay que descartarlos.

Curva de regresión

Comprobamos que hay más de 4 puntos en la zona de validez y se ajusta, por el método de mínimos cuadrados, una curva potencial $J = C \Delta a^m$ a los puntos no excluidos. La ecuación de la curva y la curva están en la Figura.

El valor de J_Q se obtiene de la intersección de la curva de regresión con la recta paralela de embotamiento, trazada por el punto (0,2 mm, 0), resultando ser: $J_Q = 106 \text{ kJ m}^{-2}$

Cualificación de J_Q como J_{IC}

Tamaño de probeta:

$$B, (W - a) = 12,5 \text{ mm} > 25 \cdot \left(\frac{J_Q}{\sigma_{ys}} \right) = 9,39 \text{ mm}$$

Comprobación de la pendiente:

$$\left(\frac{dJ}{d(\Delta a)} \right)_{J_Q} \text{ (particularizada en } J_Q) = 142,33 \text{ kJ / m}^2 \text{ mm} < \sigma_m = 322,5 \text{ kJ / m}^2 \text{ mm}$$

Se cumplen las condiciones por lo tanto $J_{IC} = 106 \text{ kJ m}^{-2}$

$$K_{IC,J} = \sqrt{J_{IC} \cdot E'} = \sqrt{\frac{106 \times 208}{(1 - 0,09)}} = 155,65 \text{ MPa } \sqrt{\text{m}}$$

5.12. Para medir la energía específica de fractura del PMMA se ha ensayado una probeta de este material en forma de viga, cuyas características geométricas se indican en la figura del problema 2.5.

Durante el ensayo de fisuración estable se han hecho descargas parciales, midiendo en cada descarga el tamaño de la fisura. Las longitudes de las fisuras también se han indicado en la citada figura.

Calcular R utilizando el método basado en el área de la curva fuerza-desplazamiento.

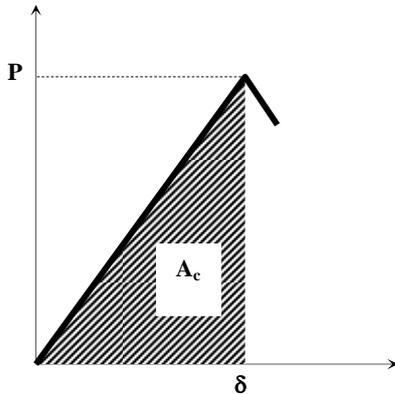
Dato: Módulo de Elasticidad del PMMA, $E = 3,40 \text{ GPa}$. $\nu = 0,35$

Resolución:

Por tratarse de un material elástico lineal: $J=G$

Tal y como se estudió en el Tema 2, el comienzo de la propagación de la grieta se produce cuando: $G=R$

De esta forma, bajo las condiciones de este problema se puede considerar: $J=R$, teniendo en cuenta que: $J = \frac{\eta \cdot A_c}{B \cdot b}$



La energía específica de fractura se puede calcular a partir de la expresión: $R = \frac{\eta \cdot A_c}{B \cdot b}$

donde A_c es el área encerrada en el diagrama P, δ cuando se inicia la fisuración y $B \cdot b$ es el área del ligamento (B es el espesor de la probeta y $b = W - a$, donde W es el canto y a la longitud de la fisura). El coeficiente η en probetas de flexión, suele tomarse igual a 2 para $0,5 < a/W < 0,75$.

A partir de $R = \frac{\eta \cdot A_c}{B \cdot b}$ y de los datos de la figura del

problema 2.5 se obtiene la siguiente tabla.

a (mm)	W (mm)	B (mm)	b = (W-a) (mm)	P (N)	delta (mm)	A_c (N mm)	R (J m ⁻²)
50	100	5	50	153	0,49	37,485	300
57,2	100	5	42,8	123	0,52	31,98	299
62,3	100	5	37,7	101	0,55	27,775	295
67,4	100	5	32,6	80	0,59	23,6	290
72	100	5	28	65	0,65	21,125	302
76	100	5	24	49	0,7	17,15	286
79,9	100	5	20,1	39	0,75	14,625	291
Valor medio							295

Vemos que el valor medio obtenido es coherente con los hallados en los problemas 2,5 y 2.6. Teniendo en cuenta que el PMMA es un material frágil con una comportamiento elástico lineal, también se puede aplicar simplemente el valor de la componente elástica

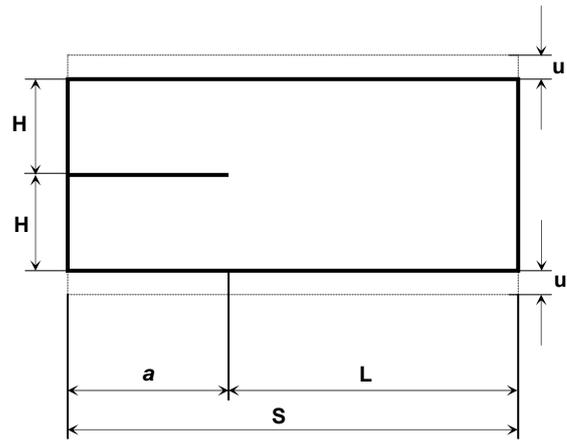
$R = \frac{K_I^2 \cdot (1 - \nu^2)}{E}$, obteniendo el valor de K_Q a partir del factor de intensidad de tensiones

de la probeta de flexión: $K_I = \frac{P S}{B W^{1,5}} \cdot f_1\left(\frac{a}{W}\right)$

De esta forma obtenemos los valores que se indican en la Tabla que nuevamente son coherentes con los hallados en todos los casos anteriores.

a (mm)	W (mm)	B	a/W	f(a/W)	P (N)	K_Q (Pa m ^{1/2})	E (MPa)	nu	J (J m ⁻²)
50	100	5	0,5	2,66	153	1030554,667	3400	0,35	274
57,2	100	5	0,572	3,40	123	1057095,384	3400	0,35	288
62,3	100	5	0,623	4,13	101	1055480,698	3400	0,35	288
67,4	100	5	0,674	5,16	80	1043642,653	3400	0,35	281
72	100	5	0,72	6,50	65	1068047,999	3400	0,35	294
76	100	5	0,76	8,20	49	1016608,029	3400	0,35	267
79,9	100	5	0,799	10,72	39	1057874,623	3400	0,35	289
Valor medio									283

5.13. Deducir una expresión para la energía específica disponible para la rotura, G , en una viga en doble voladizo, solicitada por un desplazamiento uniforme vertical u en los bordes superior e inferior, como se indica en el esquema adjunto. Utilícese la integral J .



La sección se supondrá rectangular, de canto $2H$ y espesor B , y también que a y L son mucho mayores que H . Para facilitar los cálculos supóngase que tanto a como L tienden a infinito.

Resolución:

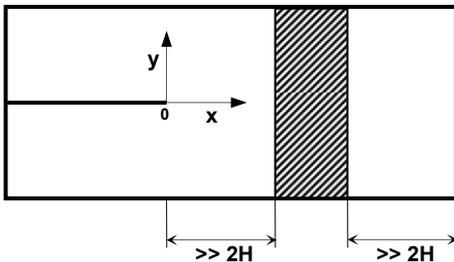
Características Elásticas

a.- En los bordes horizontales el desplazamiento vertical es uniforme e igual a u y el desplazamiento horizontal es nulo.

b.- El borde vertical con fisura (el de la izquierda) está descargado. Si $L \gg 2H$, la zona rayada muy alejada, tanto de la fisura como del borde libre de la derecha, está en extensión uniforme ($\epsilon_y = \epsilon = u/H$; $\epsilon_x = 0$). Por tanto la tensión $\sigma_y = \sigma$ vendrá dada por:

$$\sigma = \beta E \epsilon = \beta E \frac{u}{H}$$

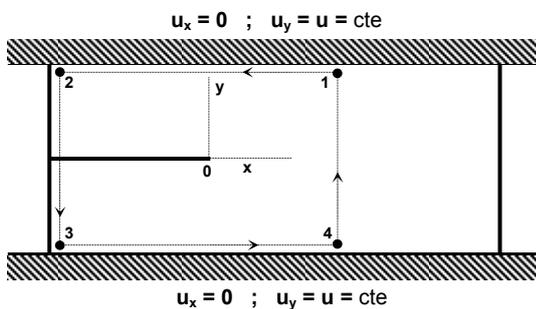
donde el parámetro β viene dado por:



$$\beta = \frac{1}{1 - \nu^2} \quad \text{o} \quad \beta = \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

según se trate de un estado de tensión plana o de deformación plana, respectivamente. ν es el coeficiente de Poisson.

Energía Específica Disponible



Para calcular G se utilizará la expresión integral (5.22 del libro de texto)

$$J = \int_{\Gamma} \left[w dy - T \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right] = G$$

El sistema de coordenadas y el camino de integración se indican en la figura. Los tramos horizontales van cerca de los bordes y el tramo vertical $4 \rightarrow 1$ se toma muy alejado de 0 y del borde libre de la derecha.

El integrando se anula en los tramos horizontales porque $dy = 0$ y $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$. También se anula el integrando a lo largo del tramo vertical $2 \rightarrow 3$ porque $w = 0$ y $T_i = 0$. En el tramo vertical $4 \rightarrow 1$, $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ y se obtiene finalmente:

$$J = \int_{-H}^H w dy = \int_{-H}^H \frac{1}{2} \sigma \varepsilon dy = \beta E \frac{u^2}{H}$$

Nótese que al aplicar la expresión (5.22) se ha supuesto que no había fuerzas en el interior del sólido ni sobre los labios de la fisura y que ésta se propagaba según x .

Sistemas con Cargas Distribuidas

Considérese una situación más general, un sólido elástico lineal homogéneo y plano, (de espesor B) con una fisura de longitud inicial a que crece hasta $a + da$, bajo la acción de las siguientes sollicitaciones: Tracciones \mathbf{T} sobre parte del contorno S_T y desplazamientos \mathbf{u} sobre S . Para simplificar los cálculos se supondrá que las fuerzas por unidad de volumen son nulas.

Se pretende obtener una expresión para G , en función de los valores de los campos \mathbf{T} y \mathbf{u} definidos sobre el contorno del cuerpo fisurado. Para ello partimos de la definición de G y tenemos en cuenta las expresiones conocidas para el trabajo de las fuerzas exteriores y la energía elástica para un medio elástico lineal.

$$G = \frac{1}{B} \left[\frac{1}{da} \int_{S_T} T_i u_i dS - \frac{d}{da} \int_V \omega(\varepsilon_{ij}) dV \right] = \frac{1}{B} \left[\int_S T_i \frac{du_i}{da} dS - \frac{d}{da} \int_V \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \right]$$

donde S es la superficie exterior del sólido, V el volumen, y $\omega(\varepsilon_{ij})$ la densidad de energía elástica. La primera integral de la última igualdad puede extenderse de S_T a S , puesto que en el resto el integrando es nulo por ser $T_i = 0$, o bien porque u_i es constante sobre S_u .

Transformando la integral de volumen en una integral de superficie, resulta:

$$\frac{d}{da} \int_V \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \frac{d}{da} \frac{1}{2} \int_S T_i u_i dS = \frac{1}{2} \int_S \left(T_i \frac{du_i}{da} + u_i \frac{dT_i}{da} \right) dS$$

y por consiguiente:

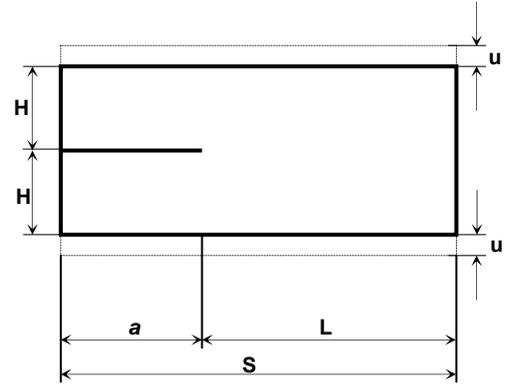
$$G = \frac{1}{2B} \int_S \left(T_i \frac{du_i}{da} - u_i \frac{dT_i}{da} \right) dS = \frac{1}{2B} \int_{S_T} T_i \frac{du_i}{da} dS - \frac{1}{2B} \int_{S_u} u_i \frac{dT_i}{da} dS$$

En particular, cuando se consideran situaciones donde sólo se imponen desplazamientos (control de desplazamiento) o sólo se aplican cargas sobre el contorno (control de carga), se obtiene, respectivamente:

$$G = - \frac{1}{2B} \int_{S_u} u_i \frac{dT_i}{da} dS \quad \text{para desplazamientos impuestos}$$

$$G = \frac{1}{2B} \int_{S_T} T_i \frac{du_i}{da} dS \quad \text{para cargas impuestas}$$

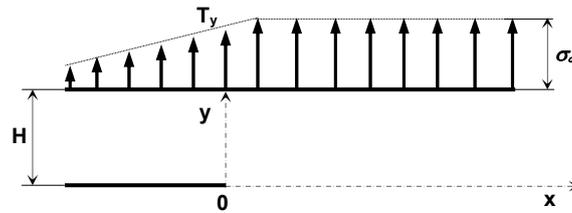
5.14. Deducir una expresión para la energía específica disponible para la rotura, G , en una viga en doble voladizo, solicitada por un desplazamiento vertical uniforme u en los bordes superior e inferior, como se indica en el esquema adjunto.



La sección se supondrá rectangular, de canto $2H$ y espesor B , y también que a y L son mucho mayores que H . Para facilitar los cálculos supóngase que tanto a como L tienden a infinito.

Características elásticas de la viga en doble voladizo

Las hipótesis hechas en el enunciado permiten suponer que el material de la viga en puntos muy lejanos de la izquierda no soporta tensiones. En puntos muy lejanos de la derecha está sometido a una extensión uniforme ($\epsilon_y = \epsilon = u/H$; $\epsilon_x = 0$). En consecuencia, la distribución de tensiones T_y en el contorno superior varía desde 0 para $x \rightarrow -\infty$ a σ_∞ para $x \rightarrow +\infty$, con σ_∞ dado por:



$$\sigma_\infty = \beta E \epsilon = \beta E \frac{u}{H}$$

El parámetro β viene dado por:

$$\beta = \frac{1}{1 - \nu^2} \quad \text{o} \quad \beta = \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

según se trate de un estado de tensión plana o de deformación plana, respectivamente. ν es el coeficiente de Poisson.

Energía específica disponible

El valor de G se puede calcular a partir de la energía elástica que vendrá dada para desplazamientos impuestos, por:

$$G = -\frac{1}{2B} \int_{S_u} u_y \frac{dT_y}{da} dS = \frac{1}{2B} \cdot 2u \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dT_y}{dx} d(Bx)$$

$$G = u [\sigma(+\infty) - \sigma(-\infty)] = u \sigma_\infty = \beta E \frac{u^2}{H}$$

donde se ha tenido en cuenta que a y L tienden a ∞ , y que $\frac{d}{da} = -\frac{d}{dx}$.

5.15. Un panel de ensayos agrietado en el centro, presenta una grieta de tamaño $2a = 100$ mm, con $W = 800$ mm y se fractura para un valor de tensión de $\sigma = 300$ MPa.

Las características mecánicas del material se han determinado mediante un ensayo de tracción con una probeta Europea de $\varnothing 10$ mm ($L = 5\varnothing$) y están dadas por la curva tensión-deformación cuyos datos se presentan en la Tabla adjunta. El material presenta un estado de colapso para una tensión intermedia entre $\sigma_{0,2}$ y la tensión de rotura de valor $\sigma_{ys} = 375$ MPa.

- Calcular el valor de la integral J_R en la fractura, asumiendo que se dan condiciones de deformación plana.
- ¿Se produjo el fallo por colapso plástico?

	F(N)	Δl(mm)
	3927,0	0,0117
	7854,0	0,023395
	11781,0	0,035095
	15708,0	0,046795
	19635,0	0,058495
	23562,0	0,07019
A	25171,4	0,175
B	29300,0	0,625
C	30188,0	1,25
D	31075,8	2,5
E	32407,6	3,75
F	32851,6	5
G	33295,5	6,25
H	33561,6	7,5
	30000,0	9,5

Resolución:

El criterio de conservación de energía nos indica: $\frac{dU}{da} = \frac{dW}{da}$ ó $G = R$

Para el comportamiento elástico hemos demostrado: $\frac{\beta^2 \cdot \pi \cdot \sigma^2 \cdot a}{E} = \frac{dW}{da}$

Teniendo en cuenta que estamos en MFEL se cumple la Ley de Hooke, ($\sigma = \varepsilon E$) y podemos escribir:

$$\beta^2 \cdot \pi \cdot \sigma \cdot \varepsilon \cdot a = R ; G = R$$

El factor β es adimensional, la energía de deformación es: $\int \sigma \cdot d\varepsilon = C \cdot \sigma \cdot \varepsilon$, luego la ecuación de G debe contener el factor $\sigma \varepsilon$. Obviamente G depende del tamaño de grieta a .

En términos de unidades también es correcto, puesto que $\sigma [N \cdot m^{-2}]$ y ε (adimensional), $a [m]$ tenemos:

$$\beta^2 \cdot \pi \cdot \sigma [N \cdot m^{-2}] \cdot \varepsilon \cdot a [m] = G [N \cdot m \cdot m^{-2}] \text{ ó } G [J \cdot m^{-2}]$$

Como vemos la ecuación contiene el factor $\sigma \varepsilon$.

En un material elástico-lineal $\frac{dU}{da}$ se denomina G , mientras que para un material de comportamiento no lineal, lo denominamos J . De la misma manera, cuando usamos R para la energía de fractura de un material elástico-lineal, usamos J_R para el mismo concepto en régimen no-lineal.

Para calcular la componente plástica con esta ecuación necesitamos calcular los valores de σ y ε en una curva tensión-deformación no lineal. La ecuación de Ramberg-Osgood es adecuada para esta determinación:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma^n}{F} \quad \text{ó} \quad \varepsilon_t = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{pl} \quad \text{por lo tanto: } \varepsilon_{pl} = \frac{\sigma^n}{F}$$

(como se puede comprobar el comportamiento elástico sería un caso particular para $n = 1$ (ley de Hooke, $F = E$))

Sustituyendo tenemos: $H \cdot \sigma \cdot \varepsilon \cdot a = J_R \Rightarrow H \sigma \cdot \frac{\sigma^n}{F} \cdot a = J_R \Rightarrow \frac{H \cdot \sigma^{n+1} \cdot a}{F} = J_R$

Ahora $\frac{dU}{da}$ para la parte elástica, G , y $\frac{dU}{da}$ para la parte no lineal, J , son ambas conocidas y la ecuación de fractura puede expresarse como:

$$\frac{\beta^2 \cdot \pi \cdot \sigma^2 \cdot a}{E'} + \frac{H \cdot \sigma^{n+1} \cdot a}{F} = \frac{dW}{da}$$

$$\text{ó} \quad G + J = J_R + R = J_R$$

Es más consistente usar la nomenclatura en base J , o sea:

$$\text{Fractura si: } J_{el} + J_{pl} = J_R$$

$$\text{Fractura si: } \frac{\beta^2 \cdot \pi \cdot \sigma^2 \cdot a}{E'} + \frac{H \cdot \sigma^{n+1} \cdot a}{F} = \frac{dW}{da}$$

Cálculo de los valores del ensayo de tracción y factores de Ramberg-Osgood

Como consecuencia de que la probeta tiene $\varnothing 10$ mm, obtenemos la sección transversal y todos los datos que nos permiten obtener las variables ingenieriles y reales

$$\text{Sección transversal: } A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{10^2 \cdot \pi}{4} = 78,54 \text{ mm}^2$$

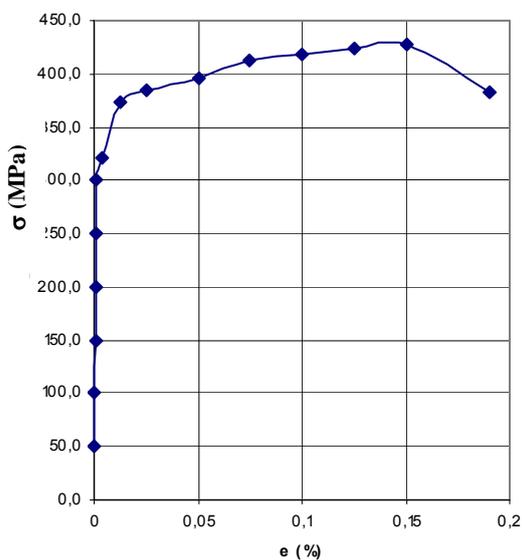
En la Tabla siguiente se presentan todos los valores deducibles en este ensayo.

El Módulo de elasticidad es de $E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{300}{0.0014038} = 213.700 \text{MPa}$

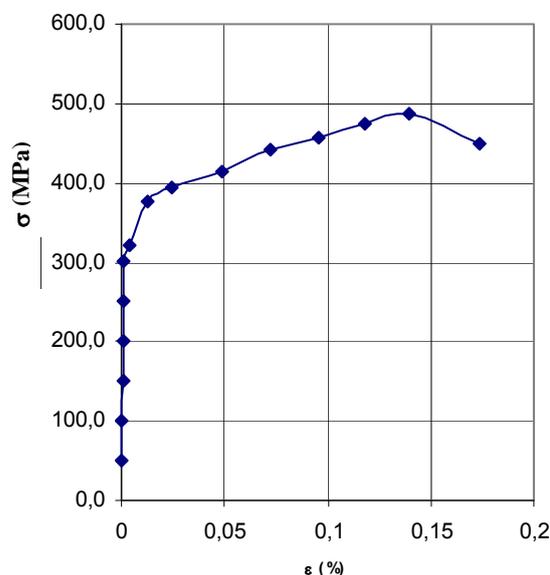
La resistencia a tracción: $\sigma_R = \frac{33561,6}{78,54} = 427,3 \text{MPa}$

	F(N)	s (MPa)	e	e(%)	e _{el}	e _{pl}	log s	log e
	0,0	0,0						
	3927,0	50,0	0,000233973	0,0234	0,00023	0,00000		
	7854,0	100,0	0,000467946	0,04679	0,00047	0,00000		
	11781,0	150,0	0,000701919	0,07019	0,00070	0,00000		
	15708,0	200,0	0,000935891	0,09359	0,00094	0,00000		
	19635,0	250,0	0,001169864	0,11699	0,00117	0,00000		
	23562,0	300,0	0,001403837	0,14038	0,00140	0,00000		
A	25171,4	320,5	0,0035	0,35	0,00150	0,00200	2,506	-2,699
B	29300,0	373,1	0,0125	1,25	0,00175	0,01075	2,572	-1,968
C	30188,0	384,4	0,0250	2,5	0,00180	0,02320	2,585	-1,634
D	31075,8	395,7	0,0500	5	0,00185	0,04815	2,597	-1,317
E	32407,6	412,6	0,0750	7,5	0,00193	0,07307	2,616	-1,136
F	32851,6	418,3	0,1000	10	0,00196	0,09804	2,621	-1,009
G	33295,5	423,9	0,1250	12,5	0,00198	0,12302	2,627	-0,910
H	33561,6	427,3	0,1500	15	0,00200	0,14800	2,631	-0,830
	30000,0	382,0	0,19	19	0,00179	0,18821	2,582	-0,725

El valor del límite elástico convencional para una deformación del 0.002 o sea del 0,2%, que corresponde al punto A es de $\sigma_{0,2} = 320,5 \text{MPa}$.

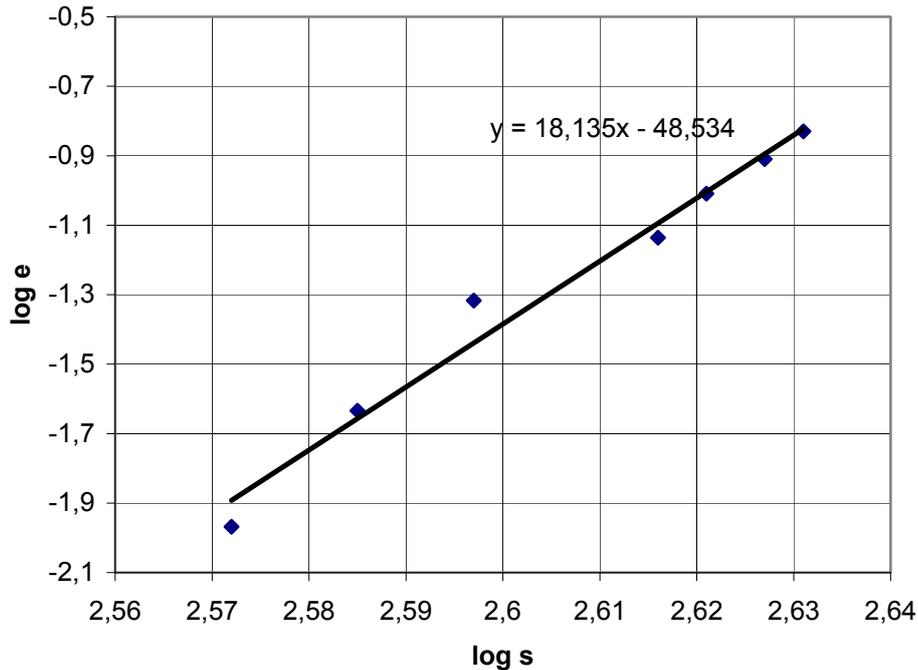


Variables ingenieriles



Variables reales

También determinamos los valores para la ecuación de Ramberg-Osgood a partir de la regresión lineal de los logaritmos de la tensión y de la deformación, obteniendo el gráfico que se presenta en la Figura siguiente:



De esta forma obtenemos: $n = 18,135$; $F = 3,42 \cdot 10^{48}$

Cálculo del factor geométrico H (adimensional)

Los factores geométricos H que dependen de a/W y de n han sido desarrollados para un cierto número de geometrías estructurales y ciertos valores de n , utilizando cuatro parámetros geométricos, h , g , k y l con la siguiente expresión:

$$H = l \cdot h \left(\frac{g}{k} \right)^{n+1}$$

Para los valores de tres de ellos, g , k y l tenemos las expresiones que se indican y para los valores de h tenemos que utilizar las Tablas de EPRI, uno de cuyos ejemplos, válido para este problema, aparece en el apéndice.

$$l = \frac{W}{2a} - 1$$

$$P = g \cdot \sigma$$

$$P_0 = k \cdot \sigma_0 \Rightarrow \begin{cases} D.P.; P_0 = \frac{4 \cdot c \cdot \sigma_0}{\sqrt{3}} \Rightarrow k = \frac{4 \cdot c}{\sqrt{3}} \\ T.P.; P_0 = 2 \cdot c \cdot \sigma_0 \Rightarrow k = 2c \end{cases}$$

$$l = \frac{800}{100} - 1 = 7$$

$$c = \frac{W - 2a}{2} = \frac{0,8 - 0,1}{2} = 0,35$$

$$k = \frac{4 \cdot 0,35}{\sqrt{3}} = 0,808$$

$$g = 0,8$$

$h \Rightarrow$ ver Tablas en Apéndice para $n = 18$; $h = 2,76$

$$H = 7 \cdot 2,76 \left(\frac{0,8}{0,808} \right)^{19,135} = 15,86$$

$$\sigma_0 = \varepsilon_0 \cdot E$$

Cálculo de J_R

$$J_R = J_{el} + J_{pl} = \frac{\beta^2 \cdot \pi \cdot \sigma^2 \cdot a}{E'} + \frac{H \cdot \sigma^{n+1} \cdot a}{F}$$

$$J_{el} = \frac{\beta^2 \cdot \pi \cdot \sigma^2 \cdot a}{E'} = \left\{ \beta = \sqrt{\sec \frac{\pi \cdot a}{W}} = 1,17 \right\} = \frac{(1 - 0,3^2) \cdot 1,17^2 \cdot 300^2 \cdot 50 \cdot 10^{-3}}{213700} = 82,6 \text{ kJ m}^{-2}$$

$$J_{pl} = \frac{15,86 \cdot 300^{(18,135+1)} \cdot 50 \cdot 10^{-3}}{3,42 \cdot 10^{48}} = 58,2 \text{ kJ m}^{-2}$$

$$J_R = J_{el} + J_{pl} = 82,6 + 58,2 = 140,8 \text{ kJ m}^{-2}$$

2ª OPCIÓN

Asumiendo que el material sigue la ley tensión-deformación, que hemos visto:

$$\frac{\varepsilon_{pl}}{\varepsilon_0} = \alpha \cdot \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n$$

que es el segundo término del modelo de Ramberg-Oswood. Los parámetros α , n , ε_0 y σ_0 son:

σ_0 = normalmente el límite de elasticidad

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}$$

α = constante adimensional

n = exponente de endurecimiento

Cerca del borde de la grieta, en condiciones de control por J , las tensiones están dadas por la singularidad HRR (libro de texto; ecuación 5.29, pág. 122)

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \left(\frac{J}{\alpha \cdot \varepsilon_0 \cdot \sigma_0 \cdot I_n \cdot r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \cdot \tilde{\sigma}_{ij}(n, \theta)$$

resolviendo J en la ecuación HRR, tenemos:

$$J = \alpha \cdot \varepsilon_0 \cdot \sigma_0 \cdot I_n \cdot r \left(\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0} \right)^{n+1} \cdot \tilde{\sigma}_{ij}^{n+1}$$

Para condiciones controladas por J , la carga debe ser proporcional. Esto es, las tensiones locales deben aumentar en proporción con la carga remota P . Consecuentemente la ecuación anterior puede escribirse en función de P :

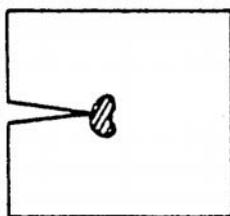
$$J = \alpha \cdot \varepsilon_0 \cdot \sigma_0 \cdot c \cdot h \cdot L \left(\frac{P}{P_0} \right)^{n+1}$$

donde h es un término adimensional, función de la geometría, n es el exponente de endurecimiento, L es la longitud característica de la estructura y P_0 es la carga de referencia. Ambos L y P_0 pueden ser definidos arbitrariamente y el valor de h se puede determinar mediante análisis numérico para un caso concreto. Estamos en el frente de grieta con dominio J y proporcional a la carga en la propagación P^{n+1} , lo que permite conocer la forma correcta de la relación J - P .

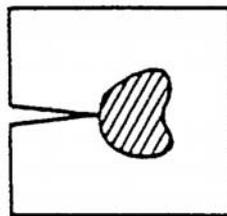
Esta ecuación es una estimación de J totalmente plástica. En condiciones lineales J es función de P^2 . El procedimiento EPRI¹ asume que la J_{total} es la suma de las componentes elástica y plástica (ver Figura a continuación):

$$J_{total} = J_{el} + J_{pl}$$

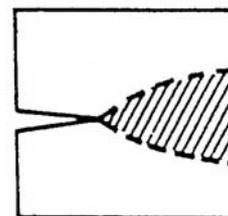
Las ecuaciones de la J plástica, el desplazamiento de la apertura de grieta (V_p) y el desplazamiento de la carga (Δ_p) tienen las siguientes ecuaciones para la mayor parte de las geometrías.



J_{el} Elástico



$J_{el} + J_{pl}$ Elasto-plástico



J_{pl} Plastificación generalizada

Ilustración de los comportamientos elásto-plásticos

¹ En 1976, Shih y Hutchinson proponen una metodología avanzada para calcular la fuerza motriz de la fractura, teniendo en cuenta el endurecimiento por deformación. Este procedimiento se validó por General Electric Corporation en Schenectady, New York en los años 80 y ha sido publicado como regla de ingeniería por Electric Power Research Institute (EPRI) en 1981

$$J = \alpha \cdot \varepsilon_0 \cdot \sigma_0 \cdot c \cdot h_1(a/W, n) \left(\frac{P}{P_0} \right)^{n+1}$$

$$V_p = \alpha \cdot \varepsilon_0 \cdot a \cdot h_2(a/W, n) \left(\frac{P}{P_0} \right)^n$$

$$\Delta_p = \alpha \cdot \varepsilon_0 \cdot a \cdot h_3(a/W, n) \left(\frac{P}{P_0} \right)^n$$

donde c es la longitud del ligamento sin agrietar, a es la longitud de la grieta y h_1 , h_2 y h_3 son parámetros adimensionales, que dependen de la geometría y del exponente de endurecimiento. Los factores h de varias geometrías, para distintos valores de n , en tensión plana y deformación plana están tabulados en el Apéndice.

La carga de referencia P_0 normalmente corresponde a la carga a la cual la sección neta plastifica.

$$\frac{\varepsilon_{pl}}{\varepsilon_0} = \alpha \cdot \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \Rightarrow \varepsilon_p = \alpha \cdot \varepsilon_0 \cdot \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \Rightarrow \varepsilon_p = \left(\frac{\alpha \cdot \varepsilon_0}{\sigma_0^n} \right) \cdot \sigma^n = A \cdot \sigma^n; A = \frac{\alpha \cdot \varepsilon_0}{\sigma_0^n}$$

$$\log \varepsilon_p = \log A + n \cdot \log \sigma \Rightarrow \log A = \log \varepsilon_p - n \cdot \log \sigma$$

$$\log A = -48,534 \Rightarrow A = 2,92 \cdot 10^{-49} = \left(\frac{\alpha \cdot \varepsilon_0}{\sigma_0^n} \right);$$

$$\alpha = \frac{A \cdot \sigma_0^n}{\varepsilon_0} = \frac{2,92 \cdot 10^{-49} \cdot 320^{18,135}}{0,0014} = 0,5633$$

$$\text{ligamento } c = \frac{W - 2a}{2} = \frac{0,8 - 0,1}{2} = 0,35$$

h_1 ver Tabla en el apéndice para deformación plana, para $n = 18$; $h_1 = 2,76$

$$P_0 = \frac{4 \cdot c \cdot \sigma_0}{\sqrt{3}} = \frac{4 \cdot 0,35 \cdot 320}{\sqrt{3}}$$

$$P = 0,8 \cdot 300$$

$$J_{pl} = 0,5633 \cdot 0,0014 \cdot 320 \cdot 0,35 \cdot 2,76 \left(\frac{0,8 \cdot 300}{\frac{4 \cdot 0,35 \cdot 320}{\sqrt{3}}} \right)^{18,135+1} = 0,0582 \text{ MJ m}^{-2}$$

o sea el mismo resultado anterior de $58,2 \text{ kJ m}^{-2}$ para la componente plástica

Se produjo el fallo por plastificación?

$$\sigma_{pl} = \frac{W}{(W - 2a)} \cdot \sigma_{fr} = \frac{800}{800 - 100} \cdot 300 = 342,85 \text{ MPa} < 375 \text{ MPa}$$

No se produjo plastificación, luego se ha producido fractura y podemos dar por válido el valor de J_R

Examen Septiembre 2004

5.16. Un gran recipiente a presión soldado de gran tamaño tiene los siguientes datos:

$$\begin{aligned} \text{Tensión de servicio} & \quad \sigma = 200 \text{ N/mm}^2 \\ \text{Límite de fluencia de la soldadura:} & \quad \sigma_{ys} = 450 \text{ N/mm}^2 \\ \text{Módulo de Young de la soldadura:} & \quad E = 205.000 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Como consecuencia de las contracciones, después del proceso de soldadura, se desarrollan tensiones residuales en el cordón soldado, con valor igual al límite de fluencia del metal soldado. Estas tensiones se pueden aminorar mediante un tratamiento de recocido de eliminación de tensiones. Es necesario que el recipiente pueda soportar una grieta cuyo tamaño sea $2a = 120 \text{ mm}$, con un valor de $CTOD = 0,5 \text{ mm}$

¿A que nivel deben ser reducidas las tensiones residuales, para cumplir esta especificación?

Resolución:

$$\frac{\delta_c}{2\pi \cdot \varepsilon_y \cdot a} = \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_y} - 0,25 \Rightarrow \frac{0,5}{2\pi \cdot \frac{450}{205000} \cdot 60} = \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_y} - 0,25$$

$$\frac{0,5 \cdot 205000}{2\pi \cdot 450 \cdot 60} = 0,60 \Rightarrow 0,60 + 0,25 = 0,85 = \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_y}$$

$$\varepsilon_f = 0,85 \cdot \varepsilon_y \Rightarrow 0,85 \cdot \sigma_{ys} = 0,85 \cdot 450 = 383 \text{ MPa}$$

La tensión total no debe superar los 383MPa, restándole los 200MPa correspondientes a la tensión de servicio, las tensiones residuales se deben de reducir hasta 183MPa.

5.17. Se han ensayado cinco (5) probetas compactas de espesor $B = 2 \text{ mm}$ con diferente longitud de grieta y se han obtenido los diagramas carga-desplazamiento. A partir de los registros correspondientes, se ha calculado la energía potencial absorbida Π , que se presenta en la Figura adjunta en función de la longitud de grieta. Dibuje un gráfico que represente la variación de la integral- J versus el desplazamiento.

Resolución:

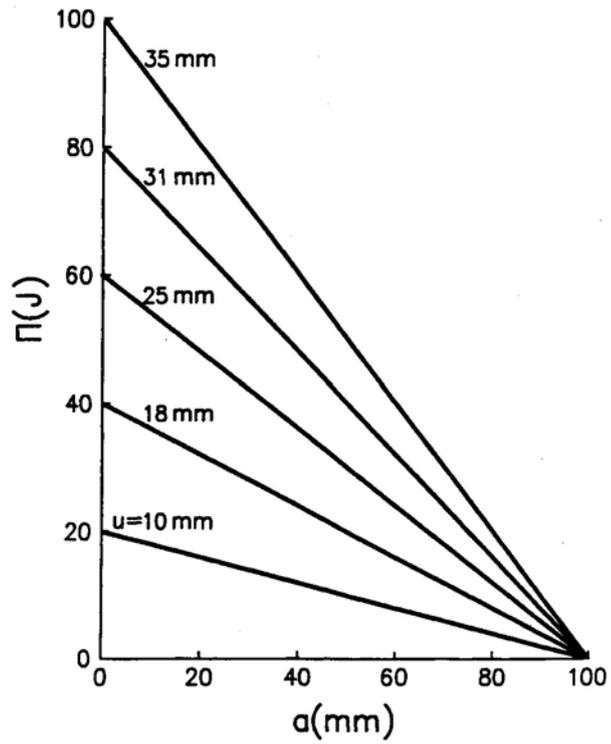
Ecuación 5.31 en la página 127 del libro de texto: $J = -\frac{1}{B} \left(\frac{\partial U}{\partial a} \right)_\delta \approx -\frac{1}{B} \left(\frac{\Delta U}{\Delta a} \right)_\delta$

$$\delta = 10 \text{ mm}; J = -\frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{-20}{100 \cdot 10^{-3}} = 100 \text{ kJ} \cdot \text{m}^{-2}$$

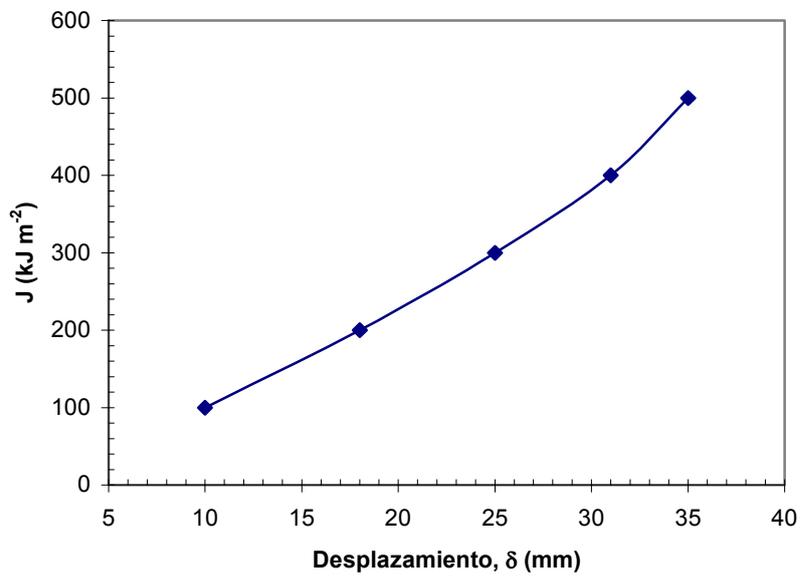
$$\delta = 18 \text{ mm}; J = -\frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{-40}{100 \cdot 10^{-3}} = 200 \text{ kJ} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$\delta = 25 \text{ mm}; J = -\frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{-60}{100 \cdot 10^{-3}} = 300 \text{ kJ} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$\delta = 31 \text{ mm}; J = -\frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{-80}{100 \cdot 10^{-3}} = 400 \text{ kJ} \cdot \text{m}^{-2}$$



$$\delta = 35 \text{ mm}; J = -\frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{-100}{100 \cdot 10^{-3}} = 500 \text{ kJ} \cdot \text{m}^{-2}$$



5.18. El diagrama carga-desplazamiento (P - δ) de una probeta compacta de tracción, de dimensiones: $W = 40$ mm, $a = 25$ mm, $B = 20$ mm se aproxima a la ecuación:

$$\delta = 10^{-22} P^5$$

donde δ está medido en metros y P en Newtons. La iniciación del crecimiento de grieta se produce para $\delta = 10$ mm. Estimar el valor de J .

Resolución:

Ecuación 5.40 en la página 130 del libro de texto: $J = \frac{\eta \cdot A}{B \cdot (W - a)}$

Teniendo en cuenta que el área total encerrada bajo la curva se calcula: $A = \int_0^{\delta} P \cdot d\delta$

$$\delta = 10^{-22} P^5 \Rightarrow P = (10^{22} \delta)^{\frac{1}{5}} \quad A = \int_0^{10 \cdot 10^{-3}} (10^{22} \delta)^{\frac{1}{5}} = 10^{\frac{22}{5}} \cdot \frac{5}{6} \left[\delta^{\frac{5}{6}} \right]_0^{0,01} = \frac{500}{6} J$$

$$\text{Probeta CT: } \eta = 2 + 0,522 \cdot \frac{(W - a)}{W} = 2 + 0,522 \cdot \frac{15}{40} = 2,196$$

$$J = \frac{2,196 \cdot 500}{6 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \cdot 15 \cdot 10^{-3}} = 610 \text{ kJ m}^{-2}$$

Examen Junio 2004

5.19. Considere una probeta de acero de 25 mm de espesor agrietada en el borde. Realizamos un ensayo mediante el cual la probeta se carga con una carga de tracción de 10000 N en la dirección I. A medida que aumentamos artificialmente el tamaño de la grieta, medimos el desplazamiento del borde de grieta, encontrando una relación entre la longitud de la grieta a y el desplazamiento δ (ambos en mm), dado por la ecuación:

$$\delta = 8 \cdot 10^{-7} \cdot a^3$$

Se pregunta cual puede ser el tamaño máximo de grieta, inmediatamente antes de la rotura si el valor de K_{IC} para este acero es de $1785 \text{ N/mm}^{3/2}$.

Datos del material

Módulo de Young: $E = 210.000 \text{ N/mm}^2$

Coefficiente de Poisson: $\nu = 0,28$

Límite de fluencia: $\sigma_{ys} = 650 \text{ N/mm}^2$

Resolución:

$$B \geq 2,5 \cdot \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_Y} \right)^2 = 2,5 \cdot \left(\frac{1785}{650} \right)^2 = 18,85 \text{ mm} < 25 \text{ mm}, \text{ estamos en deformación plana}$$

$$G = \frac{P^2}{2B} \cdot \frac{dC}{da} \Rightarrow \frac{K_{IC}^2}{E'} = \frac{P^2}{2B} \cdot \frac{dC}{da}$$

$$C = \frac{\delta}{P} = \frac{8 \cdot 10^{-7} \cdot a^3}{P} \Rightarrow \frac{dC}{da} = \frac{24 \cdot 10^{-7} \cdot a^2}{P}$$

$$K_{IC}^2 = \frac{E' \cdot P^2}{2B} \cdot \frac{24 \cdot 10^{-7} \cdot a^2}{P} = \frac{210000 \cdot 10^{-4} \cdot 24 \cdot 10^{-7} \cdot a^2}{50 \cdot (1 - 0,28^2)} = 109,4 \cdot a^2$$

$$K_{IC} = 10,46a \Rightarrow a = \frac{1785}{10,46} = 171 \text{ mm}$$

Examen Junio 2006

5.20. Se realiza un ensayo de J_{IC} de un acero de las siguientes propiedades:

$E = 207 \text{ GPa}$; $\sigma_{ys} = 360 \text{ MPa}$; $\sigma_R = 560 \text{ MPa}$; $\nu = 0,28$

La probeta utilizada es la de flexión de apoyo en tres puntos con las siguientes dimensiones:

$W = 50 \text{ mm}$; $B = 20 \text{ mm}$; $a = 30 \text{ mm}$; $S = 4W$

En el ensayo encontramos una linealidad perfecta entre la carga y el desplazamiento. En el inicio de extensión de la grieta la carga es de 25 kN, siendo el desplazamiento de 4 mm.

- ¿Cual es el valor de J_{IC} si lo definimos como el valor de inicio de extensión de la grieta?
- ¿La probeta satisface las condiciones de la normas?
- ¿Cual es el valor correspondiente de K_{IC} ?
- ¿Cual hubiera sido el espesor de probeta necesario para determinar el valor de K_{IC} ?

Resolución:

$$a) \quad J = \frac{\eta \cdot A}{B \cdot (W - a)}; \quad A = \frac{25 \cdot 10^3 \text{ N} \times 4 \text{ mm}}{2} = 50000 \text{ N mm}$$

Al existir linealidad perfecta entre la carga y el desplazamiento, el área encerrada bajo la curva se calcula como el área de un triángulo.

$$\text{Probeta de flexión } \eta = 2, \text{ luego: } J = \frac{2 \cdot 50000}{20 \cdot (50 - 30)} = 250 \text{ N/mm} = 250 \text{ kJ m}^{-2}$$

$$b) \quad B, (W - a) \geq 25 \left(\frac{J_Q}{\sigma_{ys}} \right)$$

$$B, (W - a) \geq 25 \left(\frac{250 \text{ N mm}^{-1}}{360 \text{ N mm}^{-2}} \right) = 17,76 \text{ mm} < 20 \text{ mm} \quad \text{es válida}$$

$$c) \quad K_{IC} = \sqrt{J_{IC} \cdot E'} = \sqrt{\frac{J_{IC} \cdot E}{(1 - \nu^2)}}$$

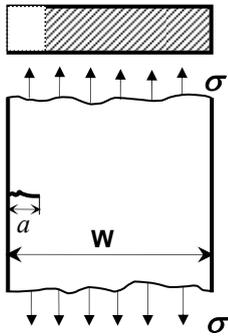
$$K_{IC} = \sqrt{\frac{250 \text{ N mm}^{-1} \cdot 207000 \text{ N mm}^{-2}}{(1 - 0,28^2)}} = 237 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}$$

d) $B \geq 2,5 \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_{ys}} \right)^2 = 1,083 \text{ m} = 1083 \text{ mm}$

$B \geq 2,5 \left(\frac{237}{360} \right)^2 = 1,083 \text{ m} = 1083 \text{ mm}$ tamaño enorme

Failure Assessment Diagrams (FAD)

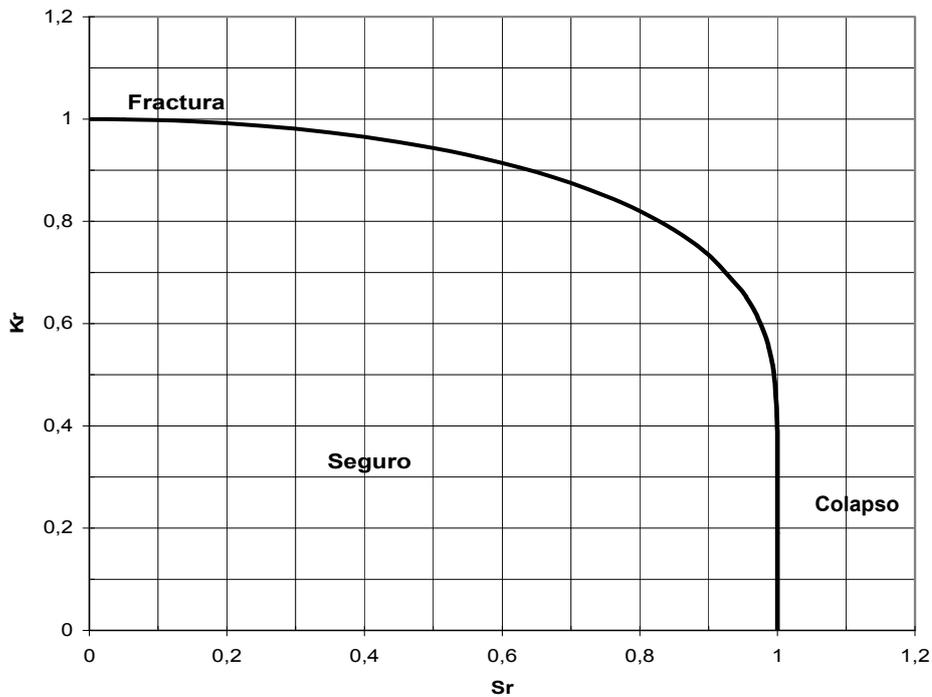
A partir de la ecuación de Dugdale: $K_{eff} = \sigma_{ys} \sqrt{\pi a} \sqrt{\frac{8}{\pi^2} \text{Insec} \left(\frac{\pi \sigma}{2 \sigma_{ys}} \right)}$



$$\sigma_c = \sigma_{ys} \left(1 - \frac{a}{W} \right)$$

$$K_r = \frac{K_{eff}}{K} ; S_r = \frac{\sigma}{\sigma_c}$$

$$K_r = \frac{S_r}{\sqrt{\frac{8}{\pi^2} \text{Insec} \left(\frac{\pi}{2} S_r \right)}}$$

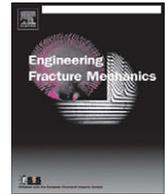




ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

Engineering Fracture Mechanics

journal homepage: www.elsevier.com/locate/engfracmech

Comparison of CTOD standards: BS 7448-Part 1 and revised ASTM E1290

Tetsuya Tagawa^{a,*}, Yoichi Kayamori^b, Mitsuru Ohata^c, Tsunehisa Handa^d, Tomoya Kawabata^e, Yoichi Yamashita^f, Kazuyuki Tsutsumi^g, Hitoshi Yoshinari^h, Shuji Aiharaⁱ, Yukito Hagihara^j^a Nagoya University, Department of Materials Science and Engineering, Nagoya 464-8603, Japan^b Nippon Steel Corporation, Steel Research Laboratory, Futtsu 293-8511, Japan^c Osaka University, Department of Manufacturing Science, Suita 565-0871, Japan^d JFE Steel Corporation, Steel Research Laboratory, Chiba 260-0835, Japan^e Sumitomo Metal Industry Ltd., Corporate Research and Development Laboratories, Amagasaki 660-0891, Japan^f IHI Corporation, Research Laboratory, Yokohama 235-8501, Japan^g Kobe Steel Ltd., Mechanical Engineering Research Laboratory, Kobe 651-2271, Japan^h National Maritime Research Institute, Mitaka 181-0004, Japanⁱ University of Tokyo, Department of Environmental and Ocean Engineering, Tokyo 113-8656, Japan^j Sophia University, Department of Mechanical Engineering, Tokyo 102-8554, Japan

ARTICLE INFO

Article history:

Received 12 December 2008

Received in revised form 8 February 2009

Accepted 9 February 2009

Available online 20 February 2009

Keywords:

Toughness testing

Test standards

Crack tip opening displacement

 J -integral

Brittle fracture

ABSTRACT

Crack tip opening displacement (CTOD) has been calculated using the plastic hinge model with an assumed rotational center since the British Standards Institution (BS) standardized BS5762 in 1979. The American Society for Testing and Materials (ASTM) accepted the plastic hinge model and standardized E1290 in 1989. However, ASTM revised E1290 in 2002, and has proposed a conversion from J to CTOD. CTOD-based fracture toughness evaluation has been widely used for the defect assessment of many welded structural components, and two different CTOD calculations could lead to confusion for Fitness-for-Service. In this study, the effects of CTOD testing methodologies on CTOD values were investigated according to round robin tests conducted by the Japan Welding Engineering Society (WES), and the concept of CTOD as a fracture parameter is discussed.

© 2009 Elsevier Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

BS initially standardized CTOD toughness evaluation against cleavage-type brittle fracture as BS5762 [1] in 1979, where the plastic hinge model was adopted for the estimation of CTOD from the crack mouth opening displacement (CMOD), V_g . The methodology with the plastic hinge model has continued in the latest unified BS standard, BS7448:1991 [2]. This kind of displacement-based geometric CTOD calculation was applied to other CTOD test standards such as ASTM E1290 [3]–89, WES 1108:1995 [4] and the International Organization for Standardization (ISO) 12135 [5], and has been widely used for the flaw assessment of welded structures. On the other hand, J toughness evaluation was standardized as ASTM E813 [6] in 1981. The critical fracture condition in the standard was mainly focused on ductile crack initiation at the crack tip. In addition, ASTM prescribed E1820 [7]–96, which covered fracture toughness in J against cleavage fracture, J_c . Then, ASTM revised E1290 in 2002, and the converted critical CTOD from the critical J was used as a measure of fracture toughness. ASTM also revised E1820 in 2005, and at present, the geometrically defined CTOD has disappeared from the ASTM standards.

* Corresponding author. Tel. +81 52 789 3577; fax: +81 52 789 3236.

E-mail addresses: tagawa@numse.nagoya-u.ac.jp (T. Tagawa), kayamori.yoichi@nsc.co.jp (Y. Kayamori), ohata@mapse.eng.osaka-u.ac.jp (M. Ohata), t-handa@jfe-steel.co.jp (T. Handa), kawabata-tmy@sumitomometals.co.jp (T. Kawabata), yoichi.yamashita@ihi.co.jp (Y. Yamashita), tsutsumi.kazuyuki@kobelco.com (K. Tsutsumi), hitoshi@nmri.go.jp (H. Yoshinari), aihara@sunshine.naoe.t.u-tokyo.ac.jp (S. Aihara), hagihara@me.sophia.ac.jp (Y. Hagihara).

Nomenclature

a_0	initial crack length
A_{pl}	plastic area under the plot of load versus crack mouth opening displacement
A_0, A_1, A_2, A_3	factors in ASTM E1290-08
B	specimen thickness
E	Young's modulus
f_1, f_2	CTOD conversion factors
h_1, h_2	factors in the EPRI J calculation scheme
J	J -integral
J_c	critical J against cleavage fracture
J_{el}	elastic component of J
J_{pl}	plastic component of J
$J_{pl,max}$	plastic component of the maximum local J
$J_{pl,ave}$	plastic component of the averaged local J
$J_{pl,Pstrain}$	plastic component of the J -integral for plane-strain
K	stress intensity factor
m	constraint factor in ASTM E1290-08
N	strain hardening exponent of the Ramberg–Osgood relation
P	load
P_0	limit load in the EPRI J calculation scheme
r_p	plastic rotational factor
S	span in three point bending specimens
V_g	crack mouth opening displacement
V_{pl}	plastic component of crack mouth opening displacement
W	specimen width
x_1, x_2, x_3, x_3^*	coordinates
Y/T	yield-to-tensile ratio, σ_{ys}/σ_{uts}
z	distance of the knife edge measurement point from the front face on three point bending specimens or from the load line in CT specimens
α_{pl}	fitting parameter in the plastic term of the Ramberg–Osgood relation
$\delta_c, \delta_u, \delta_m$	each critical CTOD prescribed in ASTM E1290-08 or BS7448-1:1991
δ_{cr}	general expression of the critical CTOD
δ_{ASTM}	CTOD in ASTM E1290-08
$\delta_{c,ASTM}, \delta_{u,ASTM}$	δ_c and δ_u in ASTM E1290-08
$\delta_{cr,ASTM}$	critical CTOD in ASTM E1290-08
δ_{BS}	CTOD in BS7448-1:1991
$\delta_{pl,BS}$	plastic component of δ_{BS}
$\delta_{c,BS}, \delta_{u,BS}$	δ_c and δ_u in BS7448-1:1991
$\delta_{cr,BS}$	critical CTOD in BS7448-1:1991
δ_{el}	elastic component of CTOD
δ_{pl}	plastic component of CTOD
δ_{tip}	CTOD directly measured on the cross sections of the blunted crack tip
Δ	load point displacement
Δ_{pl}	plastic component of Δ
ϵ	strain
ϵ_{ys}	yield strain, σ_{ys}/E
η	plastic eta factor for J calculation
ν	Poisson's ratio
θ_{pl}	half of the plastic component of crack mouth opening angle
σ	stress
σ_{ys}	yield strength
$\sigma_{ys@RT}$	yield strength at room temperature
$\sigma_{ys@T}$	yield strength at T °C
σ_Y	effective yield strength, $(\sigma_{ys} + \sigma_{uts})/2$
σ_{uts}	ultimate tensile strength
$\sigma_{uts@RT}$	ultimate tensile strength at room temperature
$\sigma_{uts@T}$	ultimate tensile strength at T °C

It is conceptually known that CTOD is similar to J in terms of elastic–plastic fracture mechanics parameters, and CTOD should be transferable with J . However, the converted CTOD from J in ASTM E1290 may give a different value from the conventional geometric CTOD based on BS7448 [8,9] because the details of their test methodologies are different. In addition, CTOD has a longer history than J in the evaluation of cleavage-type brittle fracture, and has been a rather popular fracture mechanics parameter in the Fitness-for-Service evaluation of welded structures in a sense. For example, most of Fitness-for-Service codes for welded structures recommend the critical CTOD evaluated by BS7448. However, some codes such as the American Petroleum Institute (API) RP2Z [10] accept reference to ASTM E1290 as well as BS7448. Two different CTOD calculations could lead to confusion in Fitness-for-Service basis design.

A working group was organized in the WES Fracture Toughness Study Committee in order to investigate the CTOD test methodology in the revised ASTM E1290-02 and its later revisions. In the working group, CTOD round robin tests were performed using more than 35 kinds of rolled steels for welded structures, and inconsistency in the critical CTOD values of ASTM E1290-08 and BS7448 was indicated. This paper firstly reviews two different CTOD calculations, secondly gives a preliminary consideration to inconsistency in calculated CTODs, thirdly demonstrates the CTOD round robin test results, and finally discusses the concept of CTOD as a fracture parameter.

2. Review of CTOD calculations

BS7448-based CTOD, δ_{BS} , is calculated using the plastic component of CMOD, V_{pl} , in the following equation:

$$\delta_{BS} = \delta_{el} + \delta_{pl} = \frac{K^2(1 - \nu^2)}{2E\sigma_{ys}} + \frac{r_p(W - a_0)V_{pl}}{r_p(W - a_0) + a_0 + z} \tag{1}$$

In the equation, δ_{el} is the elastic component of CTOD, δ_{pl} is the plastic component of CTOD, K is the stress intensity factor for the critical load, E is Young’s modulus, ν is Poisson’s ratio and σ_{ys} is the yield strength of the material. W , a_0 and z are the specimen sizes shown in Fig. 1. The factor of r_p gives the location of the rotational center in the plastic hinge model, and basically depends on the relative crack depth, a_0/W . In addition, the rotational center usually increases during initial crack opening [11], and r_p depends on the strain hardening behavior [9]. From the viewpoint of engineering judgment, BS7448 has adopted $r_p = 0.4$ for three point bend specimens and $r_p = 0.46$ for compact tension specimens with $a_0/W = 0.45\text{--}0.55$.

On the other hand, ASTM-based CTOD, δ_{ASTM} , is converted from J . Although the source of J calculation is not described in the ASTM standards, J is obtained using the plastic area under a load, P , versus V_g curve, A_{pl} , in the following equations, where J_{el} is the elastic component of J , J_{pl} is the plastic component of J , η is the plastic eta factor calculated using a_0/W , and B is the specimen thickness.

$$\delta_{ASTM} = \frac{1}{m\sigma_Y}(J_{el} + J_{pl}) \tag{2a}$$

$$= \frac{1}{m\sigma_Y} \left[\frac{K^2(1 - \nu^2)}{E} + \frac{\eta A_{pl}}{B(W - a_0)\{1 + z/(0.8a_0 + 0.2W)\}} \right] \tag{2b}$$

J in the parentheses of Eq. (2a) is converted to δ_{ASTM} using $m\sigma_Y$, where σ_Y is the effective yield strength, which is the average of σ_{ys} and the ultimate tensile strength, σ_{uts} . m is the constraint factor, and is given by the following equation for three point bend specimens in E1290-08:

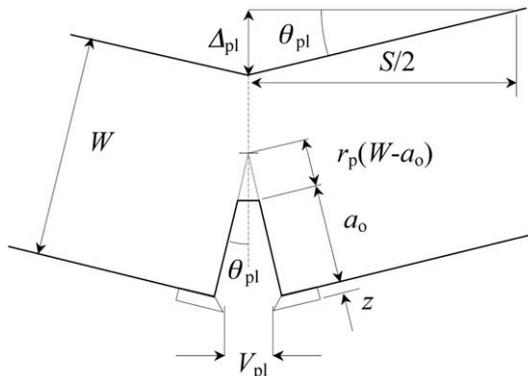


Fig. 1. Plastic hinge model in crack opening deformation.

$$\begin{aligned}
 m &= A_0 - A_1(\sigma_{ys}/\sigma_{uts}) + A_2(\sigma_{ys}/\sigma_{uts})^2 - A_3(\sigma_{ys}/\sigma_{uts})^3, \\
 A_0 &= 3.18 - 0.22(a_0/W), \quad A_1 = 4.32 - 2.23(a_0/W) \\
 A_2 &= 4.44 - 2.29(a_0/W), \quad A_3 = 2.05 - 1.06(a_0/W)
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

J_{pl} in the original J toughness testing, ASTM E1820, is proportional to the plastic area under a P versus load point displacement, Δ , curve and another proportional η -factor, which is similar to Eq. (2b). When the value of J_{pl} derived from a P - V_g curve is the same as that from a P - Δ curve, J_{pl} in Eq. (2b) assumes a proportional relation between V_{pl} and the plastic component of Δ , Δ_{pl} . This implies that J_{pl} in Eq. (2b) involves the plastic hinge model with a constant r_p , although ASTM E1290-02 and -08 do not refer to the plastic hinge model.

3. Preliminary consideration

In this section, the relationships between δ_{BS} and δ_{ASTM} are analytically investigated with the following two calculations.

Firstly, two elastic terms in Eqs. (1) and (2b) were compared. δ_{el} in Eqs. (1) and (2b) is the converted elastic CTOD from the energy release rate calculated using K . Assuming a very brittle fracture of $V_{pl} \approx 0$, the partial denominators of the elastic terms, $2\sigma_{ys}$ in Eq. (1) and $m\sigma_Y$ in Eqs. (2a) and (2b), are directly reflected in their CTOD values. Table 1 shows both of the values examined for nine material models, where N is the strain hardening exponent of the Ramberg–Osgood relation in Eq. (4), and was estimated using Eq. (5) according to E1290-02 [3]. ϵ_{ys} and α_{pl} in Eq. (4) are the yield strain and the fitting parameter, respectively. The ratio of $2\sigma_{ys}$ to $m\sigma_Y$, $2\sigma_{ys}/m\sigma_Y$, was not constant, but was significantly influenced by N and σ_{ys}/σ_{uts} . Accordingly, inconsistency between δ_{BS} and δ_{ASTM} in the very small deformation region originates in a mismatch between $2\sigma_{ys}$ and $m\sigma_Y$.

$$\epsilon/\epsilon_{ys} = \sigma/\sigma_{ys} + \alpha_{pl}(\sigma/\sigma_{ys})^N \tag{4}$$

$$N = 1/\{1.724 - 6.098(\sigma_{ys}/\sigma_{uts}) + 8.326(\sigma_{ys}/\sigma_{uts})^2 - 3.965(\sigma_{ys}/\sigma_{uts})^3\} \tag{5}$$

Secondly, δ_{BS} and δ_{ASTM} including the plastic terms of both CTODs were estimated. In an Electric Power Research Institute (EPRI) report, Kumar et al. [12] formulated the estimations of both J_{pl} and V_{pl} according to limit load solutions. The following equations provide J_{pl} and V_{pl} for plane-strain, where P is the load, P_0 is the limit load, and S is the span of three point bend specimens. h_1 and h_2 are factors as determined by a_0/W , N , specimen geometry and constraint conditions.

$$J_{pl} = \alpha_{pl}\epsilon_{ys}\sigma_{ys}(W - a_0)h_1(P/P_0)^{N+1} \tag{6}$$

$$V_{pl} = \alpha_{pl}\epsilon_{ys}a_0h_2(P/P_0)^N \tag{7}$$

$$P_0 = 1.455B(W - a_0)^2/S \tag{8}$$

Substituting Eq. (7) into Eqs. (1) and (6) into Eq. (2a), respectively, δ_{BS} and δ_{ASTM} can be analytically calculated. Kayamori et al. [13] proposed an equation for the transformation of δ_{BS} to δ_{ASTM} based on this approach, as follows:

$$\frac{\delta_{ASTM}}{\delta_{BS}} = f_1 \left\{ \frac{(f_2 P/P_0 - 1)\delta_{pl,BS}}{\delta_{BS}} + 1 \right\}, \quad f_1 = \frac{2\sigma_{ys}}{m\sigma_Y}, \quad f_2 = \frac{h_1\{r_p(W - a_0) + a_0 + z\}}{2r_p a_0 h_2} \tag{9}$$

In the present work, the effect of flow properties such as σ_{ys} and N on δ_{BS} and δ_{ASTM} was investigated by Eq. (9), in which the nine material models used in Table 1 were assumed. For a brief calculation, B , a_0/W and α_{pl} were set at 25.4 mm, 0.5 and 1.0, respectively. Fig. 2 shows the ratio of δ_{ASTM} to δ_{BS} , $\delta_{ASTM}/\delta_{BS}$, against δ_{BS} ; hereafter $\delta_{ASTM}/\delta_{BS}$ will be called the CTOD ratio. N essentially affected the CTOD ratio although the ratio was not dependent on σ_{ys} in particular. As δ_{BS} approaches zero in Fig. 2, the CTOD ratio corresponds to $2\sigma_{ys}/m\sigma_Y$, which is shown in Table 1; the reason has already been given in the previous paragraph. In addition, Fig. 2 shows changes in the CTOD ratio with increasing δ_{BS} ; this suggests that the CTOD ratio is affected by the load and plastic deformation levels as well as the mismatch between $2\sigma_{ys}$ and $m\sigma_Y$. Further investigations such as the effects of specimen geometry and size on the CTOD ratio are detailed in the literature [13].

Table 1
Review of elastic terms for 3PB specimens ($a_0/W = 0.5$).

σ_{ys} (MPa)	N	σ_{ys}/σ_{uts}	BS7448 $2\sigma_{ys}$ (MPa)	ASTM E1290-08		$2\sigma_{ys}/m\sigma_Y$
				m	$m\sigma_Y$ (MPa)	
400	5	0.62	800	1.99	1038	0.77
400	10	0.89	800	1.76	746	1.07
400	20	0.95	800	1.70	696	1.15
600	5	0.62	1200	1.99	1558	0.77
600	10	0.89	1200	1.76	1119	1.07
600	20	0.95	1200	1.70	1044	1.15
800	5	0.62	1600	1.99	2077	0.77
800	10	0.89	1600	1.76	1492	1.07
800	20	0.95	1600	1.70	1392	1.15

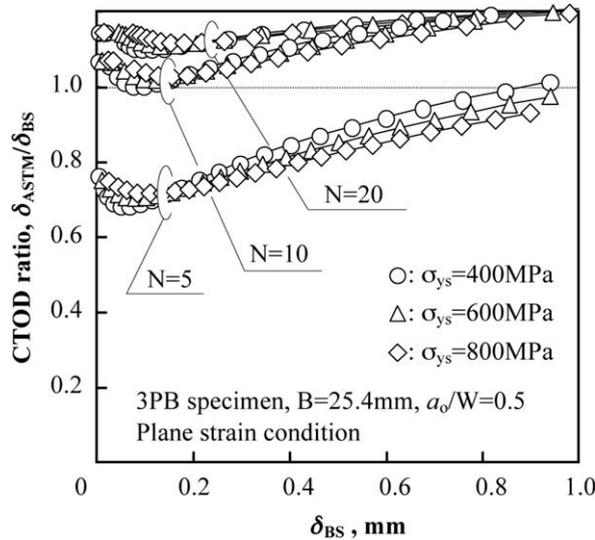


Fig. 2. Analytical CTOD ratio, $\delta_{ASTM}/\delta_{BS}$, calculated using the EPRI estimation of J_{pl} and V_{pl} .

4. Experiments

4.1. Materials and test procedures

Thirty-six kinds of structural steels, whose σ_{ys} ranged from 260 to 1060 MPa, were used for the CTOD round robin tests in this study. Three point bend specimens and compact tension specimens were machined out in L-T orientation. Their thicknesses were equal to the original plate thicknesses ranging from 16 to 80 mm, but the majority of the steel plates were 25 mm in thickness. The CTOD tests were carried out according to BS7448 part 1. Several test temperatures from room temperature to -196°C were selected for the tests. Besides the $P-V_g$ curves of the specimens, σ_{ys} and σ_{uts} are indispensable in evaluating the critical CTOD at the same temperature as the CTOD test temperature. When no tensile tests were performed at the CTOD test temperature, both σ_{ys} and σ_{uts} were estimated from the tensile properties at room temperature according to the formula recommended by JWES 2808 [14] as follows:

$$\begin{aligned} \sigma_{ys@T} &= \sigma_{ys@RT} \exp \left\{ 8.48 \times 10^{-3} \left(\frac{\sigma_{ys@RT}}{E} \right)^{-1.5} \left(\frac{1}{T+273} - \frac{1}{293} \right) \right\} \\ \sigma_{uts@T} &= \sigma_{uts@RT} \exp \left\{ 7.83 \times 10^{-3} \left(\frac{\sigma_{uts@RT}}{E} \right)^{-1.5} \left(\frac{1}{T+273} - \frac{1}{293} \right) \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

Unstable crack initiation from the pre-crack tip was evaluated; two kinds of critical CTOD, δ_c and δ_u , were used for this evaluation, but another critical CTOD, δ_m , which coincides with plastic instability, was omitted here. δ_c and δ_u were calculated according to both BS7448 and ASTM E1290-08 for each $P-V_g$ curve. Hereafter, the critical CTOD in BS7448 is indicated in $\delta_{c,BS}$, $\delta_{u,BS}$ and $\delta_{cr,BS}$, and the critical CTOD in ASTM E1290-08 is denoted by $\delta_{c,ASTM}$, $\delta_{u,ASTM}$ and $\delta_{cr,ASTM}$.

One of the definitions of CTOD is the crack opening displacement caused by blunting at the original crack tip, and CTOD values obtained by the standard CTOD test methods should agree with the measurements of crack tip blunting displacement. Accordingly, in addition to the standardized critical CTODs, the blunted crack tip was directly quantified in a specimen unloaded before stable crack initiation. Its test conditions are listed as follows:

- Steel: SM400B in the Japan Industrial Standards, $\sigma_{ys} = 289$ MPa, $\sigma_{uts} = 483$ MPa.
- Specimen: 1T-CT, $a_0/W = 0.53$ on the side surface and 0.54 at mid-thickness.
- Temperature: 20°C .
- Loading and unloading: $P = 31.6$ kN just before unloading, $V_{pl} = 0.49$ mm, $A_{pl} = 14.8$ kNmm.
- CTOD: $\delta_{BS} = 0.168$ mm, $\delta_{ASTM} = 0.090$ mm.

After unloading, the specimen was cut and divided into eight pieces of crack front samples. The blunted crack tip was observed using an optical microscope on each cross section of the samples from mid-thickness to the side surface. The shape of the blunted crack tip was approximated to a semi-circle, where the diameter of the semi-circle was defined as the directly measured CTOD, δ_{tip} .

4.2. Results

The relation between $\delta_{cr,BS}$ and $\delta_{cr,ASTM}$ is shown in Fig. 3. Although the data of the higher strength steels showed a better coincidence between $\delta_{cr,BS}$ and $\delta_{cr,ASTM}$, $\delta_{cr,ASTM}$ was smaller than $\delta_{cr,BS}$ on average. In some steels, $\delta_{cr,ASTM}$ occasionally gave about 60% of $\delta_{cr,BS}$. The ratio of $\delta_{cr,ASTM}$ to $\delta_{cr,BS}$, $\delta_{cr,ASTM}/\delta_{cr,BS}$, is shown against $\delta_{cr,BS}$ in Fig. 4. Some data in the large δ_u were located within a range of 20% deviation in the CTOD ratio. However, the data of $\delta_{c,ASTM}/\delta_{c,BS}$, which are shown with solid marks in Fig. 4, were widely scattered from 0.5 to 1.20.

Fig. 5 shows two photos and a figure of measured δ_{tip} . Because this CTOD test was interrupted by unloading without an unstable fracture of the specimen, a_0 cannot be measured directly on the fracture surface. In this study, as shown in Fig. 5a, a_0 was measured on the plane of crack sectioning. Fig. 5a and b apparently demonstrate that δ_{tip} at mid-thickness is considerably larger than that on the nearside surface of the specimen. Measured δ_{tip} values along the pre-crack front are shown in Fig. 5c. δ_{tip} at mid-thickness was more than three times as large as that on the nearside surface. δ_{BS} and δ_{ASTM} calculated using its $P-V_g$ curve are also shown in Fig. 5c. Inconsistency in δ_{BS} and δ_{ASTM} is recognized in the figure. Furthermore, the figure indicates that δ_{tip} at mid-thickness coincides well with δ_{pl} not in ASTM E1290 but in BS7448; δ_{pl} in ASTM E1290 was smaller than that in BS7448 in this steel.

5. Discussion

5.1. Effects of material and constraint constants on the CTOD ratio in cleavage cracking

As shown in Figs. 3–5, δ_{ASTM} tends to be smaller than δ_{BS} , and this results in $\delta_{ASTM}/\delta_{BS}$ smaller than 1 on average. For example, when the required δ_{cr} in a design code is originally prescribed by BS7448 but tested by ASTM E1290-08, the CTOD ratio of the plate is likely to be smaller than 1 such as 0.5 in an extreme case. In such a case, it is inevitably difficult to satisfy the required δ_{cr} because $\delta_{c,ASTM}$ gives half of $\delta_{c,BS}$. Considering the long history of the use of δ_{BS} for more than 40 years, the revised CTOD testing methodology in ASTM E1290 can bring needless problems in practice.

It is known that fracture mechanics parameters lose their meanings with increasing yield scale [15]. The yield scale for valid toughness evaluations with K and J is limited by the specimen size requirements in ASTM standards [6,7]. Even in the evaluation of CTOD, ASTM E1820-05 prescribes some yield scale limitations such as $\delta_c < a_0/300$ and $\delta_c < B/300$. The results in Fig. 4, however, showed that the deviation of the CTOD ratio became larger in the small $\delta_{cr,BS}$ region, where δ_c was predominant. Accordingly, this inconsistency in $\delta_{cr,ASTM}$ and $\delta_{cr,BS}$ did not result from the expansion of yield scale or stable crack extension before cleavage cracking.

The vertical axis in Fig. 4 shows the critical CTOD ratio, $\delta_{cr,ASTM}/\delta_{cr,BS}$, obtained by the experiments, but that in Fig. 2 indicates the analytical CTOD ratio, $\delta_{ASTM}/\delta_{BS}$, calculated using the EPRI scheme for plane-strain; the sources of the CTOD ratios are distinct. In addition, it is difficult to compare $\delta_{cr,ASTM}/\delta_{cr,BS}$ in Fig. 4 with $\delta_{ASTM}/\delta_{BS}$ in Fig. 2 because the values of N have not been experimentally determined at their CTOD test temperatures in Fig. 4. However, the behaviors of $\delta_{cr,ASTM}/\delta_{cr,BS}$ toward $\delta_{cr,BS}$ in Fig. 4 are in fact similar to those of $\delta_{ASTM}/\delta_{BS}$ toward δ_{BS} in Fig. 2. As shown in Eq. (5), N relates to σ_{ys}/σ_{uts} .

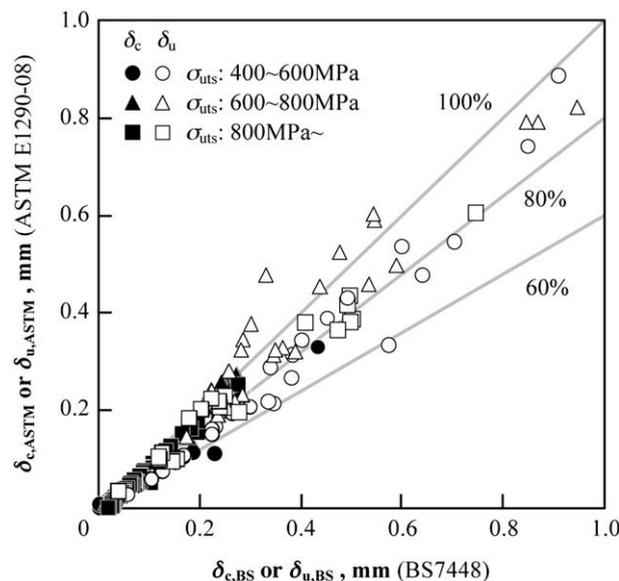


Fig. 3. Relation between $\delta_{cr,BS}$ and $\delta_{cr,ASTM}$.

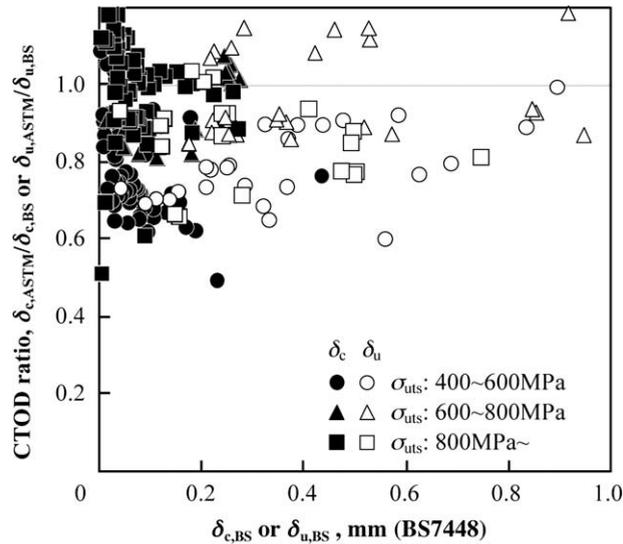
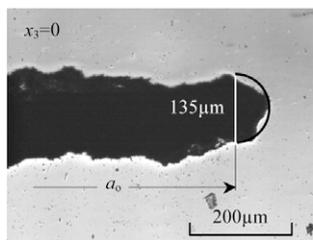
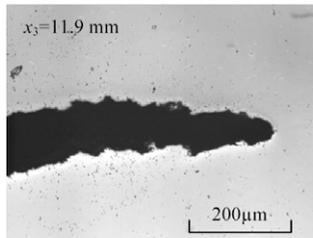


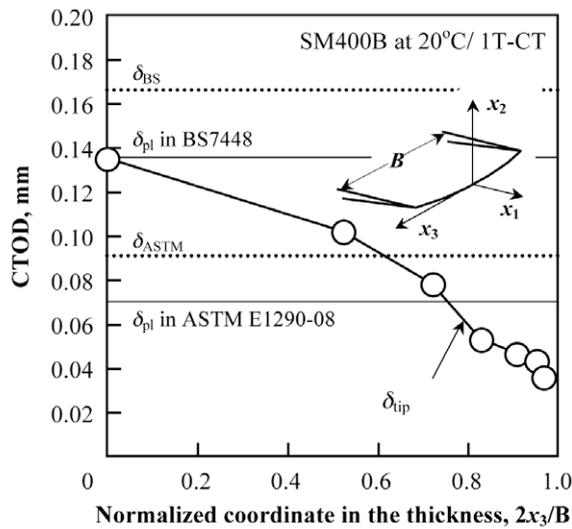
Fig. 4. Variation of $\delta_{cr,ASTM}/\delta_{cr,BS}$ with $\delta_{cr,BS}$.



(a) at mid-thickness



(b) near side surface



(c) δ_{tip} distribution along the pre-crack front

Fig. 5. Direct measurement of CTOD, δ_{tip} , at the blunted crack tip. (a) At mid-thickness, (b) near side surface, and (c) δ_{tip} distribution along the pre-crack front.

Accordingly, the relationships between σ_{ys}/σ_{uts} and $\delta_{cr,ASTM}/\delta_{cr,BS}$ in Fig. 4 are arranged in Fig. 6, where all data of $\delta_{c,BS}$ smaller than 0.05 mm were omitted because any error in the CTOD ratio was likely to be enhanced by the CTOD calculation methods in ASTM E1290 and BS7448 in the small CTOD region. Fig. 6 demonstrates the tendency for $\delta_{cr,ASTM}/\delta_{cr,BS}$ to be particularly influenced by σ_{ys}/σ_{uts} ; $\delta_{cr,ASTM}/\delta_{cr,BS}$ decreased with reducing σ_{ys}/σ_{uts} . As shown in Table 1, low σ_{ys}/σ_{uts} gave a low value of $2\sigma_{ys}/m\sigma_Y$. The inconsistency of δ_c in ASTM E1290 and BS7448 is therefore affected by σ_{ys}/σ_{uts} , and is mainly caused by the mismatch between $2\sigma_{ys}$ and $m\sigma_Y$.

5.2. How should the critical CTOD be determined in cleavage cracking?

Brittle fracture caused by cleavage cracking is mainly controlled by the maximum principal stress, and the stress is usually the highest at the highest-constraint mid-thickness of the specimen. When a British research group investigated CTOD testing methodology in the 1960s [16], they originally paid attention to the local CTOD at mid-thickness. It is therefore reasonable that δ_{tip} at mid-thickness corresponds to the plastic term of δ_{BS} as shown in Fig. 5c. On the other hand, the plastic

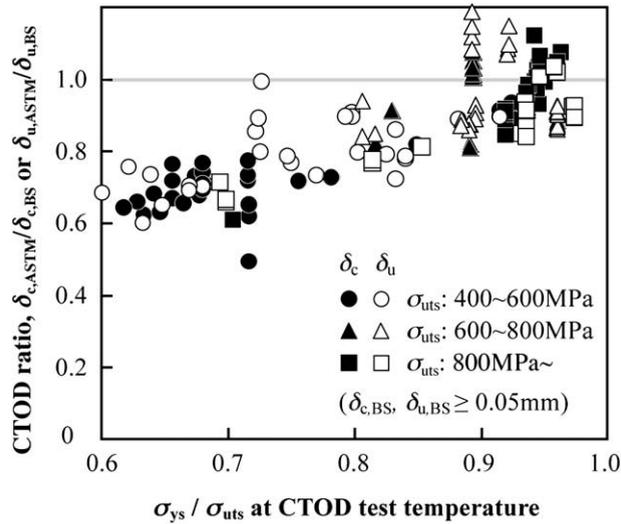


Fig. 6. Relation between σ_{ys}/σ_{uts} and $\delta_{cr,ASTM}/\delta_{cr,BS}$ divided into three steel strength levels.

term of δ_{ASTM} in Fig. 5c almost coincided with the thickness average of δ_{tip} . When ASTM revised E1290 in 2002, they referred to 2-D plane-strain FEM solutions for the relationships among domain-integrated J , δ_{tip} obtained by the $\pm 45^\circ$ intercept procedure and A_{pl} under $P-V_g$ curves [17,18]. Nevalainen and Dodds [19] also investigated similar relations to the previous one [17,18] by FEM, and compared their 2-D plane-strain solutions with 3-D solutions, where the average of J_{pl} throughout the thickness in a 3-D specimen, $J_{pl,avg}$, agreed well with J_{pl} for 2-D plane-strain, $J_{pl,Pstrain}$, for a certain value of A_{pl} . However, their 3-D solutions demonstrated that J_{pl} at mid-thickness, $J_{pl,max}$, was 20–40% larger than $J_{pl,avg}$ for the value of A_{pl} . Nevalainen and Dodds [19] also quantified 3-D η -factors, which were proportional to the slopes of the $J_{pl}-A_{pl}$ curves. Some of their η -factors are listed in Table 2, in comparison with η [20,21] in ASTM E1290-08. This table suggests that $J_{pl,Pstrain}$ in ASTM E1290-08 almost agrees with $J_{pl,avg}$, and it is reasonable for the plastic component of δ_{ASTM} to be close to the thickness average δ_{tip} as shown in Fig. 5c.

In the present work, some fracture surfaces were observed by a scanning electron microscope (SEM) in order to quantify the cleavage trigger locations of the specimens. Fig. 7 shows the normalized thickness coordinate of the cleavage trigger, $2x_3^2/B$, against the normalized $\delta_{cr,BS}$, $\delta_{cr,BS}/B$ or $\delta_{u,BS}/B$, for four steels of 500 MPa class tensile strength, one steel of 600 MPa class tensile strength and two steels of 800 MPa class tensile strength, where σ_{ys}/σ_{uts} at room temperature was shown in Y/T . The cleavage triggers were widely scattered from the thickness center to the nearside surface, but all triggers were located within 20% of B around the thickness center for the steel of Y/T up to 0.79. It is unclear why other high Y/T steels showed such a large trigger scatter in the thickness, but metallurgical inhomogeneity in the thickness and constraint possibly affect the triggers in these steels. In spite of the large trigger scatter in the thickness in Fig. 7, the steels of Y/T approximately more than 0.85 showed good δ_{cr} agreement in ASTM E1290 and BS7448 as shown in Fig. 6. The reason for this is beyond the scope of this study at present. Fig. 7 suggests the importance of δ_{cr} assessment near mid-thickness for steels of 500–600 MPa class tensile strength, which are widely used for structural purposes. The revised ASTM E1290-08 focuses on the thickness average CTOD, and this can give an excessively conservative estimation of δ_{cr} for steels of 500–600 MPa class tensile strength.

Another possible problem of δ_{ASME} is the validity of J ; the use of J is limited by the yield scale and/or the constraint loss [15]. δ_{pl} converted from J_{pl} in Eqs. (2a) and (2b) in ASTM E1290-08 should be also limited by the severe yield scale require-

Table 2
Comparison of η -factors.

Specimen	J calculation	η -Factors		
		$N = 5^\circ$	$N = 10^\circ$	$N = 20^\circ$
Three point bend ($a_0/W = 0.5$)	$J_{pl,max}$ by 3-D FEA [19]	3.45	3.53	3.57
	$J_{pl,avg}$ by 3-D FEA [19]	2.64	2.59	2.57
	$J_{pl,Pstrain}$ by 2-D FEA [20] in ASTM E1290		2.74	
Compact tension ($a_0/W = 0.6$)	$J_{pl,max}$ by 3-D FEA [19]	2.78	2.90	2.87
	$J_{pl,avg}$ by 3-D FEA [19]	2.17	2.17	2.15
	$J_{pl,Pstrain}$ by 2-D FEA [21] in ASTM E1290		2.31	

^a N in the Ramberg–Osgood relation in Eq. (4).

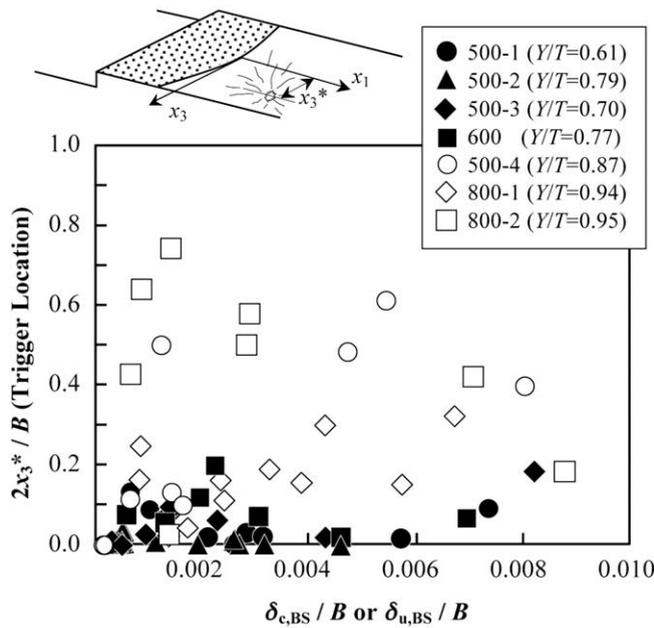


Fig. 7. Normalized relation between the thickness coordinate of cleavage trigger, $2x_3^*$, and $\delta_{cr,BS}$.

ments of J_c in ASTM E1820. On the other hand, CTOD is a displacement parameter, and it is sensible to convert δ_{pl} from V_{pl} specially for large scale yielding.

The CTOD concept has been accepted for more than 40 years, and in the circumstances of the wide and long use of CTOD, the applications of CTOD to structural integrity are well established in, for example, CTOD design curves and correlation between critical CTOD properties and Charpy absorbed energy characteristics. The requirement of the critical CTOD for the assessment of flaws in welded structures is sometimes reflected in the qualification of structural steels. The use of two different CTODs, δ_{ASTM} and δ_{BS} , can result in confusion for brittle fracture assessment. The transferability of fracture mechanics parameters between CTOD and J is occasionally useful for structural integrity, but it is not rational to waste the critical CTOD requirements established in the wide and long use of CTOD. An idea of coping with the above problems is to restore ASTM E1290, or to recalculate η and m in the standard for CTOD at mid-thickness with yield scale requirements.

6. Conclusions

CTOD round robin tests were carried out in the Fracture Toughness Study Committee of the Japan Welding Engineering Society, and the critical CTOD values in ASTM E1290-08 were compared with those in BS7448.

ASTM E1290-08 tends to give a smaller value of the critical CTOD, $\delta_{cr,ASTM}$, than that evaluated by BS7448, $\delta_{cr,BS}$, and $\delta_{cr,ASTM}$ was occasionally about 60% of $\delta_{cr,BS}$ in cleavage cracking for low yield-to-tensile ratio steels. This inconsistency in $\delta_{cr,ASTM}$ and $\delta_{cr,BS}$ is mainly caused by the mismatch between $2\sigma_{ys}$ and $m\sigma_y$, where σ_{ys} is the yield stress, m is the constraint factor in ASTM E1290-08 and σ_y is the effective yield strength. According to the experimental investigation into crack tip blunting and the comparison among plastic η -factors for J calculation, the plastic component of CTOD in ASTM E1290-08 is probably based not on the plastic component of J at mid-thickness, but on that of the thickness average. On the other hand, the plastic component of CTOD in BS7448 was as high as that at mid-thickness in a low yield-to-tensile ratio steel of JIS SM400B. In addition, fracture surface observation demonstrated that cleavage triggers were almost all located within 20% of the specimen thicknesses around mid-thickness for low yield-to-tensile ratio steels.

Considering the wide and long use of geometric CTOD calculation for structural integrity assessment and steel qualification, a few ideas of reconsidering the current ASTM E1290 were described in this paper.

References

- [1] BS5762. Methods for crack opening displacement (COD) testing. London: British Standards Institution; 1979.
- [2] BS7448. Part 1: method for determining of K_{Ic} , critical crack tip opening displacement (CTOD) and critical J values of fracture toughness for metallic materials under displacement controlled monotonic loading at quasistatic rates. London: British Standards Institution; 1991.
- [3] ASTM E1290-89, -02, -08. Standard test method for crack-tip opening displacement (CTOD) fracture toughness measurement. West Conshohocken: American Society for Testing and Materials; 1989, 2002, 2008.
- [4] WES1108. Standard test method for crack-tip opening displacement (CTOD) fracture toughness measurement. Tokyo: The Japan Welding Engineering Society; 1995.

Tema 8

8.1. La evaluación por Ensayos No Destructivos de un componente revela la presencia de grietas de 3 mm que han crecido por fatiga hasta una longitud final de 8 mm, en cuyo momento se produce la fractura frágil del mismo. Calcular el incremento de vida en % que cabe esperar al aumentar en 2 mm la vida de la pieza, en dos supuestos:

- a) Aumentando la longitud final de la grieta en 2 mm (de 8 a 10 mm) en base a la utilización de un material con mayor tenacidad a fractura.
- b) Disminuir 2 mm la grieta inicial (de 3 a 1 mm).
- c) Discuta el resultado obtenido.

Considere que el exponente de la ecuación de Paris es $m = 3$

Resolución:

$$a) \quad \frac{da}{dN} = C \cdot (\Delta K)^m$$

$$\frac{da}{a^{3/2}} = C \cdot Y^3 \cdot \Delta \sigma^3 \cdot \pi^{3/2} \cdot N \rightarrow N = \frac{1}{C \cdot Y^3 \cdot \Delta \sigma^3 \cdot \pi^{3/2}} \cdot \frac{da}{a^{3/2}}$$

$$\int_3^8 a^{-3/2} da = -2 \left[a^{-1/2} \right]_3^8 = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{8}} \right)$$

$$N = \frac{1}{C \cdot Y^3 \cdot \Delta \sigma^3 \cdot \pi^{3/2}} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{8}} \right) = \alpha \times 0'224$$

Hemos denominado α al factor constante: $\alpha = \frac{2}{C \cdot Y^3 \cdot \Delta \sigma^3 \cdot \pi^{3/2}}$

b) Para $a_i = 3\text{mm}$ y $a_f = 10\text{mm}$ operando análogamente:

$$N = \alpha \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{10}} \right) = \alpha \cdot 0'261 \rightarrow \text{Ha aumentado a } 0'261 \text{ de } 0'224, \text{ que supone un aumento del } 16'5\%.$$

Para $a_i = 1\text{mm}$ y $a_f = 8\text{mm}$ operando análogamente:

$$N = \alpha \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{8}} \right) = \alpha \cdot 0'647 \rightarrow \text{Ha aumentado a } 0'647 \text{ de } 0'224 \text{ que supone un aumento del } 188'84\%.$$

Por lo tanto observamos que no es tan importante en este caso tomar un material mejor, sino fabricar materiales con menores defectos.

8.2. En una serie de ensayos de crecimiento de grieta, realizados en un polimetilmetacrilato moldeado, se obtuvieron los siguientes resultados:

da/dN (m/ciclo)	$2,25 \cdot 10^{-7}$	$4 \cdot 10^{-7}$	$6,2 \cdot 10^{-7}$	$11 \cdot 10^{-7}$	$17 \cdot 10^{-7}$	$29 \cdot 10^{-7}$
ΔK (MPa $m^{1/2}$)	0,42	0,53	0,63	0,79	0,94	1,17

El factor crítico de intensidad de tensiones de este material es $K_{IC} = 1,8 \text{ MPa } m^{1/2}$ y se conoce que en el proceso de fabricación se introducen defectos internos de tamaño máximo $40 \mu\text{m}$. Estimar el valor del máximo incremento de tensión para $R = 0$, que se puede aplicar al material para que dure por lo menos un millón de ciclos. ($K_I = \sigma \sqrt{\pi a}$)

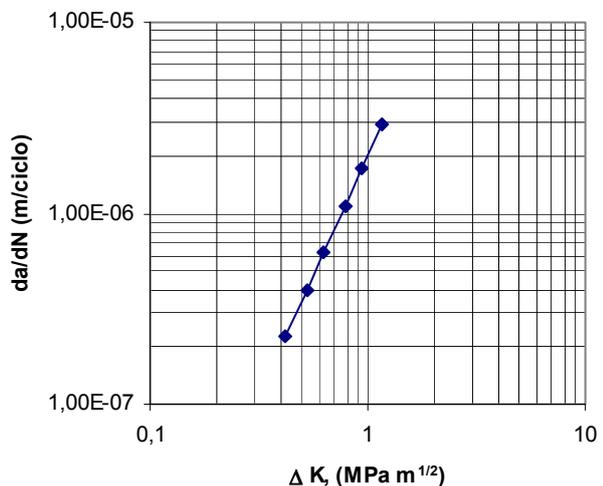
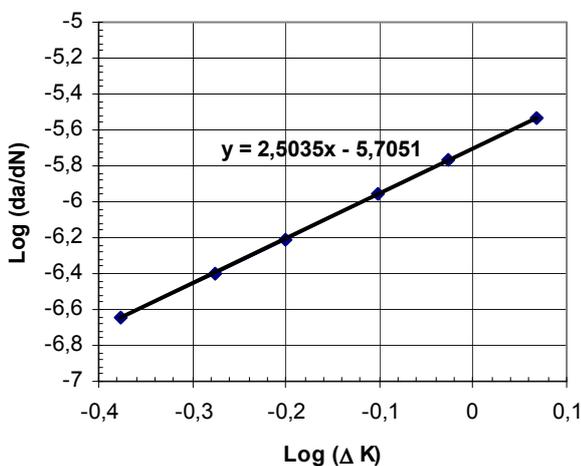
Resolución:

Polimetil-metacrilato						
ΔK	da/dN	$\text{Log}(\Delta K)$	$\text{Log}(da/dN)$	$\Delta \text{Log}(da/dN)$	$\Delta \text{Log}(\Delta K)$	m
0,42	2,25E-07	-0,37675071	-6,64781748			
0,53	4,00E-07	-0,27572413	-6,39794001	2,50E-01	0,101026579	2,473
0,63	6,20E-07	-0,20065945	-6,20760831	1,90E-01	0,07506468	2,536
0,79	1,10E-06	-0,10237291	-5,95860731	2,49E-01	0,098286542	2,533
0,94	1,70E-06	-0,02687215	-5,76955108	1,89E-01	0,075500762	2,504
1,17	2,90E-06	0,06818586	-5,537602	2,32E-01	0,095058008	2,440
						2,497

$$10^{-5,7051}$$

$$1,97197\text{E-}06$$

$$\text{Tomamos } C = 2 \cdot 10^{-6}; m = 2,5$$



$$\frac{da}{dN} = 2 \cdot 10^{-6} (\sigma \sqrt{\pi \cdot a})^{2,5} \quad \text{siendo: } a_i = 40 \cdot 10^{-6} \text{ m} ; a_f = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1,8}{\sigma} \right)^2$$

$$2 \cdot 10^{-6} \cdot \sigma^{2,5} \cdot \pi^{1,25} \int_0^{10^6} dN = \int_{40 \cdot 10^{-6}}^{\frac{1}{\pi} \left(\frac{1,8}{\sigma} \right)^2} a^{-1,25} da \Rightarrow$$

$$\frac{10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot \sigma^{2,5} \cdot \pi^{1,25}}{4} = \left[\frac{\pi^{0,25} \cdot 1,8^{-0,5}}{\sigma^{-0,5}} - (40 \cdot 10^{-6})^{-0,25} \right] = 12,57 - 0,992 \cdot \sigma^{0,5} \Rightarrow$$

$$12,57 = 2,09 \cdot \sigma^{2,5} - \sigma^{0,5} \Rightarrow \sigma = 2,14 \text{ MPa}$$

8.3. Un elemento metálico resistente de un barco está sometido a un estado tensional que varía cíclicamente entre 100 y 120 MPa cuando el barco está descargado y entre 300 y 400 MPa con barco en carga, por efecto de un oleaje de frecuencia 0,2 Hz. Dicho elemento, asimilable a una placa plana con fisura lateral, finaliza su vida útil con un coeficiente de seguridad de 1,1 en fractura.

Calcular el tamaño de fisura inicial máxima que puede admitirse en una inspección por ultrasonidos para garantizar una vida útil al buque de 20 años suponiendo que el 25 % del tiempo viaja vacío y el resto a plena carga

Datos:

$$K_I = 1,12 \cdot \sigma \sqrt{\pi a} ; K_{IC} = 88 \text{ MPa} \sqrt{m} ;$$

$$\frac{da}{dN} = 8 \cdot 10^{-14} (\Delta K_I)^{2,8} \text{ (m/ciclo) para } \Delta K_I > 5 \text{ MPa} \sqrt{m}$$

$$\sigma_y = 700 \text{ MPa}$$

Resolución:

A partir de los datos podemos deducir que el factor de intensidades umbral para que se inicie la fatiga es: $\Delta K_I > 5 \text{ MPa} \sqrt{m} \rightarrow \Delta K_{TH} = 5 \text{ MPa} \sqrt{m}$

$$K_{IC} = 88 \text{ MPa} \sqrt{m} \rightarrow \frac{K_{IC}}{1,1} = \frac{88}{1,1} = 80 \text{ MPa} \sqrt{m}$$

La rotura de la grieta se produce si $K_I \geq K_{IC}$, por lo que:

$$80 \text{ MPa} \sqrt{m} = 1,12 \cdot \sigma \sqrt{\pi a} \rightarrow (\sigma = 400 \text{ MPa, máximo}) \rightarrow a = 0,01 \text{ m} = 10 \text{ mm}$$

$$\frac{da}{dN} = 8 \cdot 10^{-14} (\Delta K_I)^{2,8} = 8 \cdot 10^{-14} \cdot (1,12 \cdot 100 \sqrt{\pi \cdot a})^{2,8} \rightarrow$$

$$\rightarrow N_f = 0,2 \text{ seg} \cdot 3600 \text{ seg} \cdot 24 \text{ h} \cdot 365 \text{ días} \cdot 20 \text{ años} = 1,26 \cdot 10^8 \text{ ciclos} ;$$

Pero como el número de ciclos a plena carga es el 75%:

$$= 0,75 \cdot 1,26 \cdot 10^8 = 9,45 \cdot 10^7 \text{ Ciclos (300-400 MPa) .}$$

$$\int_0^{9'46 \cdot 10^7} dN = \frac{1}{8 \cdot 10^{-14} \cdot 1'12^{2'8} \cdot 100^{2'8} \cdot \pi^{1'4}} \cdot \int_{a_i}^{0'01} a^{-1'4} \cdot da \rightarrow 9'46 \cdot 10^7 \cdot 8 \cdot 10^{-14} \cdot 1'12^{2'8} \cdot 100^{2'8} \cdot \pi^{1'4} =$$

$$\frac{1}{-0'4} \cdot [a^{-0'4}]_{a_i}^{a_f} \rightarrow$$

$$\rightarrow F = 2'5 \cdot \left[\frac{1}{a_i^{0'4}} - \frac{1}{0'01^{0'4}} \right] \rightarrow \frac{F}{2'5} + \frac{1}{0'01^{0'4}} = \frac{1}{a_i^{0'4}} \rightarrow a_i = 1'243 \text{ mm}$$

Entre 100 y 120 MPa:

$\Delta K_{I_{desc}} = 1'12 \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} = 1'12 \cdot 20 \sqrt{\pi \cdot 0'01} = 4 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}} \rightarrow$ En vacío nunca consigue superar el ΔK_{TH} , por lo que cuando va vacío la grieta no crece. Corre el tiempo, pero no la grieta.

8.4. Un elemento estructural está sometido a un estado tensional oscilante entre 300 y 400 MPa con una frecuencia media de 250 ciclos por día. Se pide:

- Tamaño de fisura inicial máxima para que, bajo la citada sollicitación, la vida del elemento esté garantizada por un periodo ilimitado.
- Tamaño máximo de fisura inicial admisible, suponiendo una duración de vida para la estructura de 20 años

Datos:

$$K_I = 1,8 \cdot \sigma \sqrt{a} ; K_{IC} = 100 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}} ;$$

$$\frac{da}{dN} = 5 \cdot 10^{-12} (\Delta K)^{3,2} \text{ (m/ciclo) para } \Delta K_I > 6 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}$$

$$\sigma_y = 1600 \text{ MPa}$$

Resolución:

a) Para garantizar una vida ilimitada del elemento, debemos mantenernos por debajo del umbral de propagación: $\Delta K_I \leq \Delta K_{th}$ por lo cual $\Delta \sigma \cdot 1,8 \cdot \sqrt{a} \leq 6 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ y con $\Delta \sigma = 400 - 300 = 100 \text{ MPa}$, el valor de a que resulta es de $a = 1,11 \text{ mm}$

b) Para garantizar una vida de 20 años, al final de su vida se cumplirá que $K_I = K_{IC}$, en ese momento $100 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2} = 1,8 \cdot \sigma_{\max} \cdot \sqrt{a}$ con $\sigma_{\max} = 400 \text{ MPa}$ el valor de la grieta final $a_f = 19,3 \text{ mm}$.

Para calcular el valor de la grieta inicial que al cabo de 20 años nos dará una grieta de 19,3mm, la calculamos con la Ley de Paris.

$$\frac{da}{dN} = 5 \cdot 10^{-12} (\Delta K_I)^{3,2} = 5 \cdot 10^{-12} (1,8 \cdot 100 \cdot \sqrt{a})^{3,2} = 8,24 \cdot 10^{-5} \cdot a^{1,6}$$

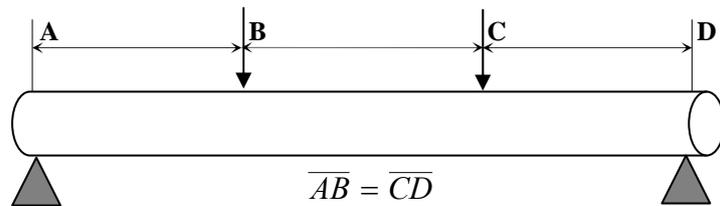
$$\frac{da}{a^{1,6}} = 8,24 \cdot 10^{-5} \cdot dN \Rightarrow \int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{a^{1,6}} = 8,24 \cdot 10^{-5} \cdot \int_0^N dN \Rightarrow \left[\frac{a^{-0,6}}{-0,6} \right]_{a_i}^{a_f} = 8,24 \cdot 10^{-5} \cdot N$$

$$a_i^{-0,6} - a_f^{-0,6} = 4,944 \cdot 10^{-5} \cdot N$$

En 20 años $N = 20.365.250 = 1.825.000$ ciclos y $a_f = 0,0193m$ con lo cual el valor inicial de la grieta es de $a_i = 0,46mm$.

Puesto que este valor es inferior al obtenido en el apartado a) la respuesta correcta en este apartado también será de 1,11mm, ya que garantiza una vida del elemento de 20 años y mucho más.

8.5. Un eje de máquina soporta unas cargas puntuales, según el esquema de la figura, mientras gira a una velocidad de 60 rpm durante 8 horas al día. El eje está diseñado para soportar en condiciones de trabajo tensiones máximas de 125 MPa. Después de un funcionamiento total de 90 días y durante una reparación en que se sobrecargó a un 300 % del nivel de trabajo, el eje rompió de un modo frágil.



Examinada la rotura se observó que había sido causada por la presencia de una fisura en el tramo BC de tamaño $a = 27$ mm, desarrollada a partir de un defecto inicial. Realizados ensayos en el laboratorio sobre el material obtenido del eje, se determinó la velocidad de propagación de grietas según se indica. Determinar:

- Tenacidad a fractura del material.
- Coefficiente de seguridad a fractura a los 50 días.
- Tamaño del defecto inicial.

Datos:

$$K_{Ic} = 0,85 \cdot \sigma \sqrt{\pi \cdot a} \quad ; \quad \frac{da}{dN} = 4,8 \cdot 10^{-12} (\Delta K)^{2,8} \quad (m/ciclo)$$

Resolución:

- a) En el tramo BC tenemos: $\left\{ \begin{array}{l} \text{cortante nulo} \\ \text{flector constante que produce tracción de 125 MPa} \end{array} \right.$

En cada giro un punto de la periferia está sometido a un $\Delta\sigma = 125$ MPa, ya que solamente la tracción es efectiva en fatiga.

El eje se rompió de modo frágil con $\left\{ \begin{array}{l} \sigma = 3 \cdot \sigma_t = 375 \text{ MPa} \\ a = 27 \text{ mm} \end{array} \right.$ luego:

$$K_{Ic} = 0,85 \cdot 375 \sqrt{\pi \cdot 0,027} = 93 \text{ MPa} \sqrt{m}$$

- b) El coeficiente de seguridad en fractura a los 50 días. Ley de Paris:

$$\frac{da}{dN} = 4,8 \cdot 10^{-12} (\Delta K)^{2,8} \Rightarrow \frac{da}{dN} = 4,8 \cdot 10^{-12} (0,85 \cdot \Delta\sigma \sqrt{\pi \cdot a})^{2,8} = 1,51225 \cdot 10^{-11} \cdot \Delta\sigma^{2,8} \cdot a^{1,4}$$

separando variables e integrando: $\int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{a^{1,4}} = 1,51225 \cdot 10^{-11} \cdot \Delta\sigma^{2,8} \int dN$

$$a_i^{-0,4} - a_f^{-0,4} = 6,05 \cdot 10^{-12} \cdot \Delta\sigma^{2,8} \cdot N \quad (\text{ecuación de Paris integrada en el caso más general})$$

Sabemos que a los 90 días $a_{90} = 27 \text{ mm}$ y desde el día 50 al 90 hay:

$$40 \cdot 8 \cdot 60 \cdot 60 = 1152000 \text{ ciclos}$$

$$\text{luego: } a_{50}^{-0,4} - 0,027^{-0,4} = 6,05 \cdot 10^{-12} \cdot 125^{2,8} \cdot 1152000 \Rightarrow a_{50} = 0,00367 \text{ m}$$

$$\text{y con dicha grieta: } a_{50} = 3,67 \text{ mm} \Rightarrow C.S. = \frac{93}{0,85 \cdot 125 \cdot \sqrt{\pi} \cdot 0,00367} = \frac{93}{11,41} = 8,15$$

c) Tamaño del defecto inicial: aplicamos de nuevo la Ley de Paris integrada:

La fisura inicial del día 0 será:

$$a_0^{-0,4} - 0,027^{-0,4} = 6,05 \cdot 10^{-12} \cdot 125^{2,8} \cdot [90 \cdot 8 \cdot 60 \cdot 60] \Rightarrow a_0 = 0,000992 \text{ m} \cong 1 \text{ mm}$$

8.6. En la figura adjunta se muestra un elemento estructural aeronáutico, fabricado con aluminio 7075-T6. En la esquina del elemento aparece una grieta de tamaño $a = 0,5 \text{ mm}$. Se pregunta cuantos ciclos, hasta la fractura frágil, aguantará el elemento para un ciclo de cargas $\sigma_{\max} = 336$ y $\sigma_{\min} = -68 \text{ MPa}$, admitiendo que el mismo modelo de grieta de un cuarto de círculo se mantendrá hasta la rotura.

Datos:

$$K_{IC} = 29 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}} ;$$

$$\frac{da}{dN} = 2,71 \cdot 10^{-11} (\Delta K_I)^{3,7} \quad (\text{m/ciclo})$$

$$\sigma_y = 523 \text{ MPa}$$



Resolución:

Tomamos un factor geométrico $\beta = 0,722$ (véase el Apéndice):

$$29 = 0,722 \cdot 336 \sqrt{\pi \cdot a} ; a = \left(\frac{29}{0,722 \cdot 336} \right)^2 \cdot \frac{1}{\pi} = 4,55 \text{ mm}$$

comprobamos validez del coeficiente geométrico $\beta = 0,722$ en todo el crecimiento:

$$\frac{4,55}{15} = 0,3 \text{ vale } \frac{4,55}{l} \text{ muy pequeño válido también}$$

$$\frac{da}{dN} = 2,71 \cdot 10^{-11} (0,722 \cdot 336 \cdot \sqrt{\pi \cdot a})^{3,7}$$

$$\int_0^{N_f} dN \sigma_y = \frac{1}{2,7 \cdot 10^{-11} \cdot 0,722^{3,7} \cdot 336^{3,7} \cdot \pi^{1,85}} \cdot \int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{a^{1,85}}$$

$$N_f = \frac{1}{2,7 \cdot 10^{-11} \cdot 0,722^{3,7} \cdot 336^{3,7} \cdot \pi^{1,85}} \cdot \left[-\frac{1}{0,85} \cdot a^{-0,85} \right]_{0,5 \cdot 10^{-3}}^{4,55 \cdot 10^{-3}}$$

$$N_f = 7,83 \cdot \left[(0,5 \cdot 10^{-3})^{-0,85} - (4,55 \cdot 10^{-3})^{-0,85} \right] = 7,83 \cdot (639,55 - 97,87) = 4242 \text{ ciclos}$$

8.7. Tenemos un redondo de acero estructural ferrítico-perlítico según norma EN 10025 S355 J2G3 de 50 mm de diámetro que contiene una grieta semicircular.

Calcular el incremento de tensión $\Delta\sigma$, que provoca que la grieta inicial $a_i = 0,50$ mm crezca hasta $a_f = 10$ mm en dos millones de ciclos, asumiendo que la morfología de la grieta mantiene su forma semicircular en todo el intervalo.

Datos:

$$K_{IC} = 200 \text{ MPa} \sqrt{m}$$

$$\frac{da}{dN} = 6,89 \cdot 10^{-12} (\Delta K_I)^3 \text{ (m/ciclo)}$$

$$\sigma_y = 335 \text{ MPa}$$

Resolución:

$$N_f = \frac{a_f^{1-m/2} - a_i^{1-m/2}}{C(F \cdot \Delta\sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a})^m \cdot \left(1 - \frac{m}{2}\right)}$$

F = constante, F = 0,728, para $\left(\frac{a}{d} < 0,2\right)$ (ver Tablas del Apéndice)

$$\frac{a_i}{d} = \frac{0,5}{50} = 0,01 \quad \text{vale} \quad \frac{a_f}{d} = \frac{10}{50} = 0,2 \quad \text{vale} \quad F = 0,728$$

$$N_f = \frac{(10 \cdot 10^{-3})^{-0,5} - (0,5 \cdot 10^{-3})^{-0,5}}{6,89 \cdot 10^{-12} \cdot 0,728^3 \cdot \Delta\sigma^3 \cdot \pi^{1,5} \cdot (-0,5)} = 2 \cdot 10^6$$

$$2 \cdot 10^6 = \frac{1,35 \cdot 10^{11}}{\Delta\sigma^3} \cdot [4,472 - 10] \Rightarrow \Delta\sigma^3 = \frac{1,35 \cdot 10^{11} \cdot 34,72}{2 \cdot 10^6} \Rightarrow \Delta\sigma = 132,8 \text{ MPa}$$

8.8. Una pieza de acero moldeado de 1,5 % Ni-Cr-Mo está sometida a un estado tensional oscilante con una frecuencia de 34 ciclos a la hora. Si el estado tensional de la pieza varía entre 180 y 250 MPa, se pide calcular los siguientes apartados:

- a) ¿Qué tamaño máximo de defecto inicial es admisible, bajo la sollicitación indicada, para que la vida de la pieza sea ilimitada?

- b) En realidad esta pieza se sustituye por una nueva, por razones de seguridad del equipo, cada 10 años, independientemente de su estado. Consecuentemente calcular el tamaño máximo que podría tener una grieta inicial admisible y representar gráficamente la evolución del tiempo de vida de esta pieza en función del tamaño de defecto inicial existente.
- c) Como consecuencia de una avería se produce un estado anormal de tensiones que origina la rotura de esta pieza. En un análisis posterior se encuentra que la sobrecarga ha sido de 800 MPa. ¿Cual hubiera sido en este caso la esperanza de vida de la pieza?
- d) Si se hubiera realizado inicialmente un ensayo de tensión experimental de prueba, se pregunta ¿Qué valor de tensión hubiera soportado para garantizar la vida útil prevista de 10 años? Discutir la viabilidad de esta prueba.

Datos:

$$K_I = 1,2\sigma\sqrt{\pi a}$$

$$K_{IC} = 65 \text{ MPa}\sqrt{m}$$

Coefficiente de seguridad de resistencia = 1,25

$$\frac{da}{dN} = 3,5 \cdot 10^{-12} (\Delta K_I)^{3,4} \text{ (m/ciclo) para } \Delta K_{th} > 5 \text{ MPa}\sqrt{m}$$

$$\sigma_y = 900 \text{ MPa}$$

Resolución:

- a) Para garantizar la vida ilimitada de la pieza se debe mantener el incremento del factor de intensidad de tensiones < umbral de propagación: $\Delta K_I \leq \frac{\Delta K_{th}}{F}$

$$\Delta K_{th} > 5 \text{ MPa}\sqrt{m}$$

Coefficiente de seguridad = 1,25

$$\Delta K_I = 1,2\Delta\sigma\sqrt{\pi a}$$

$$\Delta\sigma = 250-180 \text{ MPa} = 70 \text{ MPa}$$

Tamaño inicial máximo admisible para que no exista propagación será:

$$1,2\Delta\sigma\sqrt{\pi a_c} \leq \frac{\Delta K_{th}}{F} \Rightarrow 1,2 \cdot 70\sqrt{\pi a_c} = \frac{5}{1,25} \Rightarrow a_c = \frac{1}{\pi} \left(\frac{4}{1,2 \cdot 70} \right)^2 = 0,00072m = 0,72mm$$

- b) Al final de la vida útil se produce la fractura de la pieza y entonces vemos que:

$$K_I = \frac{K_{IC}}{F} = 1,2 \cdot \sigma_{max} \sqrt{\pi a_f}$$

donde: $K_{IC} = 65 \text{ MPa m}^{1/2}$ y $\sigma_{max} = 250 \text{ MPa}$, con lo cual:

$$\frac{K_{IC}}{F} = 1,2 \cdot 250\sqrt{\pi a_f} \Rightarrow \frac{65}{1,25} = 1,2 \cdot 250\sqrt{\pi a_f} \Rightarrow a_f = \frac{1}{\pi} \left(\frac{52}{1,2 \cdot 250} \right)^2 = 0,00956m = 9,56mm$$

La ley de Paris, expresada en la forma:

$$\frac{da}{dN} = 3,5 \cdot 10^{-12} (\Delta K_I)^{3,4} = 3,5 \cdot 10^{-12} (1,2 \cdot 70 \sqrt{\pi a})^{3,4} \Rightarrow \frac{da}{dN} = 8,55 \cdot 10^{-5} a^{1,7}$$

$N = 34 \times 24 \times 365 \times 10 = 2.978.400$ ciclos en los 10 años

$$\int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{a^{1,7}} = 8,55 \cdot 10^{-5} \int_0^{2.986000} dN \Rightarrow \left[\frac{a^{-0,7}}{0,7} \right]_{a_i}^{a_f} = 8,55 \cdot 10^{-5} N \Rightarrow a_i^{-0,7} - a_f^{-0,7} = 5,98 \cdot 10^{-5} N$$

$$\Rightarrow a_i^{-0,7} - 0,00956^{-0,7} = 178,10$$

$$\Rightarrow a_i^{-0,7} = 178,10 + 25,92 = 204,02 \Rightarrow \log 204,02 = 0,7 \log a_i \Rightarrow a_i = 0,50 \text{ mm}$$

Este tamaño de grieta es inferior al que garantiza la vida ilimitada de la pieza, de forma que podemos afirmar que el tamaño inicial máximo es $a_c = 0,72 \text{ mm}$

La vida útil se considera agotada cuando la grieta tiene $a = 9,56 \text{ mm}$. El tamaño máximo admisible inicial que *realmente* garantiza la vida útil ilimitada será, sin tener en cuenta el coeficiente de seguridad:

$$1,2 \cdot \Delta \sigma \sqrt{\pi a_c} \leq \Delta K_{th} \Rightarrow 1,2 \cdot 70 \sqrt{\pi a_c} \leq 5 \Rightarrow a_c \frac{1}{\pi} \left(\frac{5}{1,2 \cdot 70} \right)^2 = 0,00112 \text{ m} = 1,12 \text{ mm}$$

con lo cual la pieza tendrá vida ilimitada si su grieta inicial está comprendida entre $a = 0$ y $a = 1,12 \text{ mm}$.

Según esto, la duración de la pieza se obtendrá a partir de la ley de Paris con $a_i = 1,12 \text{ mm}$ y $a_f = 9,56 \text{ mm}$

$$a_i^{-0,7} - a_f^{-0,7} = 5,98 \cdot 10^{-5} N \Rightarrow 0,00112^{-0,7} - 0,00956^{-0,7} = 5,98 \cdot 10^{-5} N$$

$$116,29 - 25,92 = 5,98 \cdot 10^{-5} N \Rightarrow N = 1.511.159 \text{ ciclos}$$

Como se efectúan 34 ciclos/hora, se obtiene:

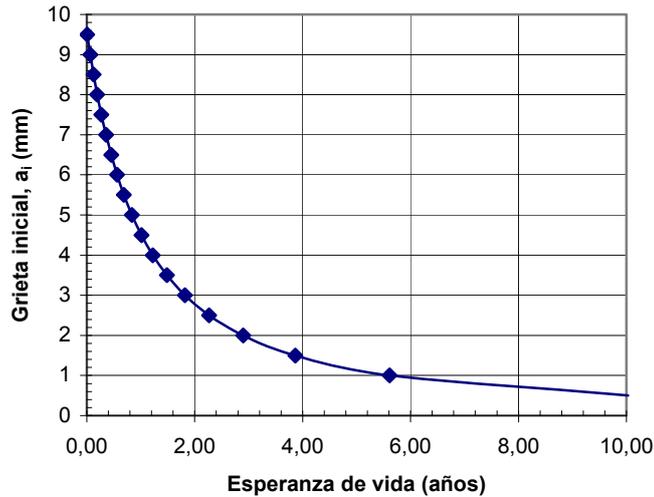
$$N^\circ \text{ de años} = \frac{1.511.159}{34 \cdot 24 \cdot 365} = 5,07 \text{ años}$$

Dibujamos el gráfico adjunto, esperanza de vida vs. grieta inicial, con el que podemos estimar la vida en años a partir de un tamaño de grieta.

c) Si una sobrecarga de 800 MPa produce la rotura de la pieza, el tamaño de fisura presente será:

$$K_{IC} = 1,2 \cdot \sigma \sqrt{\pi a} \Rightarrow 65 = 1,2 \cdot 800 \sqrt{\pi a} \Rightarrow a = 0,00146 \text{ m} = 1,46 \text{ mm}$$

como se ve no hemos considerado el coeficiente de seguridad por tratarse de una sobrecarga real y no de una cuestión de diseño.



La vida que le queda a la pieza hubiera sido de 3,5 años aproximadamente (ver gráfico).

d) Hemos visto que un valor del tamaño de grieta inicial de 0,72 mm garantizaba una vida de 10 años o superior, con lo cual la prueba de carga que garantizaría esta vida útil requerirá una tensión de:

$$K_{IC} = 1,2 \cdot \sigma \sqrt{\pi a} \Rightarrow 65 = 1,2 \cdot \sigma_p \sqrt{\pi a} \Rightarrow 65 = 1,2 \cdot \sigma_p \sqrt{\pi \cdot 0,00072} \Rightarrow \sigma_p = 1139 \text{ MPa}$$

Dado que esta tensión es superior al límite elástico del material ($\sigma_Y = 900 \text{ MPa}$), hemos de concluir que la prueba de carga es inviable puesto que el material rompería por colapso plástico.

8.9. En un ensayo de crecimiento de grieta en un panel con una grieta pasante en el centro, obtenemos los siguientes resultados:

2a = 1 mm	No propaga
2a = 2,5 mm	N = 0
2a = 2,8 mm	N = 36000
2a = 100 mm	N = N _k
2a = 102,4 mm	N = N _k + 1200

El panel está cargado con una carga cíclica, $R = 0$, de amplitud media $\sigma_m = 60 \text{ MPa}$.

- Calcular la ecuación de Paris de crecimiento de grieta (6 puntos)
- Dibujar el diagrama correspondiente. (4 puntos).

El factor de intensidad de tensiones para esta placa es: $K_I = \sigma \sqrt{\pi \cdot a}$

Medidas del panel: $W = 300 \text{ mm}$, $B = 12,5 \text{ mm}$

Datos del material: $\sigma_y = 850 \text{ MPa}$, $K_{IC} = 70 \text{ MPa m}^{1/2}$.

Resolución:

a) Al ser $R = 0$ y $\sigma_{\min} = 0$:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} ; \sigma_{\max} = 2 \cdot \sigma_m = 2 \cdot 60 = 120 \text{ MPa}$$

$$\frac{2a_i - 2a_{i-1}}{N_i - N_{i-1}} = C \cdot \left(\sigma_{\max} \cdot \sqrt{\pi \cdot \frac{2a_i + 2a_{i-1}}{2}} \right)^m \rightarrow \frac{0,3 \cdot 10^{-3}}{36000} = C \cdot (120 \cdot \sqrt{\pi \cdot 0,00265})^m$$

$$\frac{2,4 \cdot 10^{-3}}{1200} = C \cdot (120 \cdot \sqrt{\pi \cdot 0,1012})^m$$

De donde:

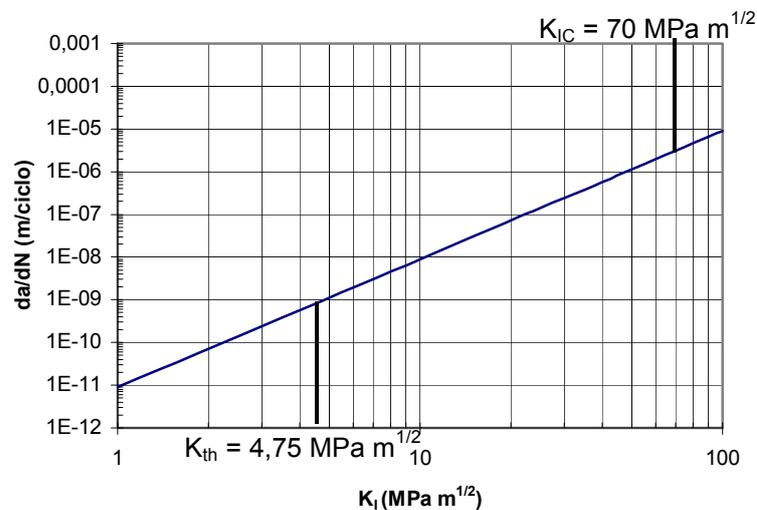
$$\frac{0'0024}{0'0003} \cdot \frac{36000}{1200} = \left(\frac{0'1012}{0'00265} \right)^{\frac{m}{2}} \rightarrow 80.3 = (38'2)^{\frac{m}{2}} \rightarrow \frac{m}{2} = \frac{\text{Log}240}{\text{Log}38'2} \rightarrow m \approx 3$$

$$\frac{1'2 \cdot 10^{-3}}{1200} = C \cdot (120 \cdot \sqrt{\pi \cdot 0'0506})^3 \rightarrow C = \frac{10^{-6}}{(120 \cdot \sqrt{\pi \cdot 0'0506})^3} = 9'13 \cdot 10^{-12}$$

$$\frac{0'15 \cdot 10^{-3}}{36000} = C \cdot (120 \cdot \sqrt{\pi \cdot 0'001325})^3 \rightarrow C = \frac{4 \cdot 10^{-6}}{(120 \cdot \sqrt{\pi \cdot 0'001325})^3} = 8'98 \cdot 10^{-12}$$

Tomamos: $C \approx 9 \cdot 10^{-12}$

$$\frac{da}{dN} = C \cdot (\Delta K)^3 = 9 \cdot 10^{-12} \cdot (\Delta K)^3 \rightarrow \Delta K_{th} = 120 \cdot \sqrt{\pi \cdot 0'5 \cdot 10^{-3}} = 4'75 \text{ MPa } \sqrt{m}$$



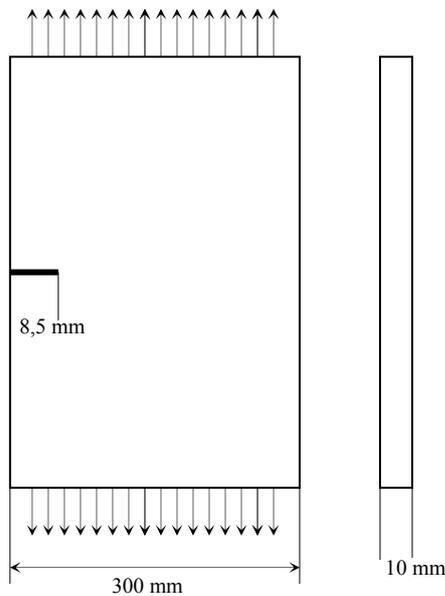
8.10. Un tirante de acero está sometido a fatiga con cargas que oscilan entre 900 kN y 600 kN 6 veces por hora. El espesor del tirante es de 10 mm y su anchura de 300 mm, como se indica en el esquema adjunto. Se tienen los siguientes datos del acero:
 Límite elástico 400 MPa. Tensión de rotura 550 MPa.

Tenacidad de fractura: $80 \text{ MPa } \sqrt{m}$.

Fatiga: Los parámetros de la fórmula de Paris, cuando $da/dN(m/ciclo)$ y $\Delta K \text{ (MPa } \sqrt{m})$, son $A = 4.6 \times 10^{-12}$ y $m = 3,3$.

En una inspección rutinaria se ha descubierto una fisura lateral de 8.5 mm de profundidad. Se pide:

- Estudiar si se producirá la rotura por fatiga. En caso afirmativo calcular el número de ciclos que resistirá el tirante antes de su rotura.
- Una vez reparada la fisura, se desea establecer un programa de inspecciones, sabiendo que se dispone de una técnica que garantiza la detección de fisuras mayores de 5 mm. Proponer un intervalo de tiempo razonable entre dos inspecciones.



Supóngase que la longitud es mucho mayor que la anchura y tómesese: $K = 1,12 \cdot \sigma \sqrt{\pi a}$

Resolución:

Cálculo de las tensiones máxima y mínima

Las tensiones máxima y mínima, $\sigma_{m\acute{a}x}$ y $\sigma_{m\acute{i}n}$ que actúan sobre el tirante pueden calcularse a partir de $\sigma = P/bd$, donde P es la carga aplicada, d el ancho de la placa y b el espesor. Se obtiene:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = 300MPa \quad \sigma_{m\acute{i}n} = 200MPa \quad \text{y} \quad \Delta\sigma = 100MPa$$

Comprobación de la propagación

La fisura iniciará su propagación si $\Delta K > \Delta K_o$. ΔK viene dado por

$$\Delta K = 1,12 \times \Delta\sigma \sqrt{\pi a_o} = 18,3 MPa \sqrt{m}$$

donde a_o es el tamaño inicial de la fisura y la expresión de K , para esta geometría. ΔK_o se puede estimar (para aceros) a partir de la fórmula empírica de Rolfe y Barsom

$$\Delta K_o = 7(1 - 0,85R) = 3 MPa \sqrt{m} \quad (\text{donde } R = \sigma_{m\acute{i}n}/\sigma_{m\acute{a}x} = 200/300)$$

como $\Delta K > \Delta K_o$ la fisura **se propagará**,

Cálculo del tamaño crítico de la fisura a_c

Para calcular el número de ciclos necesitamos conocer los límites de la integración, a_o y a_c , (el tamaño inicial y el tamaño crítico de la fisura).

El tamaño crítico para el cual se produce la rotura catastrófica, se calcula aplicando el criterio de rotura

$$K_{IC} = K_{m\acute{a}x}$$

$$K_{IC} = 1,12 \cdot \sigma_{m\acute{a}x} \sqrt{\pi \cdot a_c} \Rightarrow a_c = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{80}{1,12 \times 300} \right)^2 = 0,01804 \text{ m} = 18,04 \text{ mm}$$

Cálculo del número de ciclos

El número de ciclos se obtiene integrando la fórmula de Paris entre a_o y a_c ,

$$\frac{da}{dN} = A(\Delta K)^m$$

$$N_f = \int_{a_o}^{a_c} \frac{da}{A(\Delta K)^m} = \int_{a_o}^{a_c} \frac{da}{A[Y \cdot \Delta \sigma \sqrt{\pi a}]^m}$$

En general la integración se hace numéricamente debido a la naturaleza del integrando, resultando:

$$N_f = \frac{\left(\frac{1}{a_o}\right)^{\frac{m}{2}-1} - \left(\frac{1}{a_c}\right)^{\frac{m}{2}-1}}{A\left(\frac{m}{2}-1\right) \times Y^m \times \pi^{m/2} \times (\Delta \sigma)^m}$$

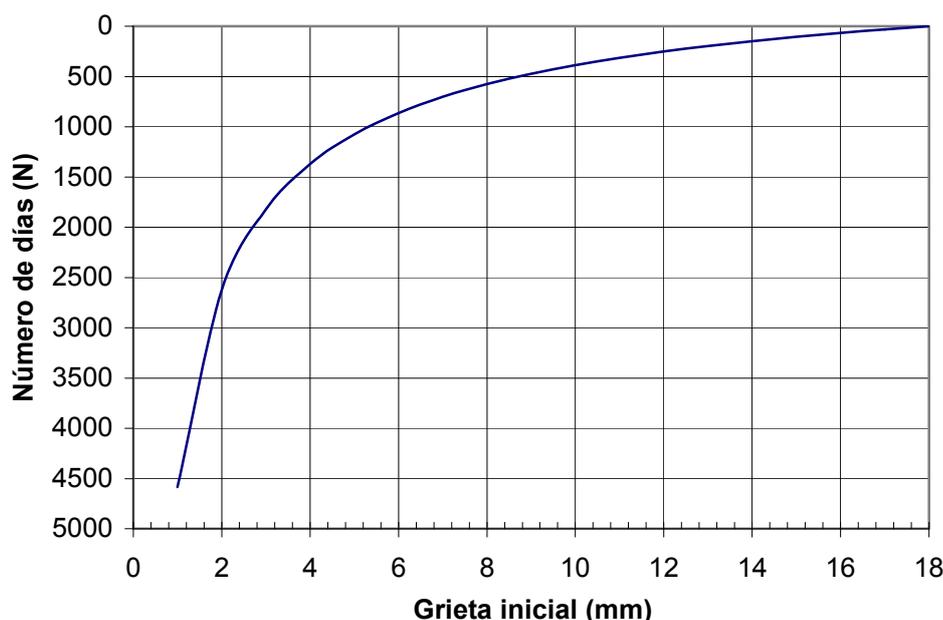
Sustituyendo los valores correspondientes se obtiene $N = 74988$ ciclos (aprox.), equivalentes a 520 días.

Programa de inspecciones

Para establecer un programa de inspecciones conviene conocer el tiempo que tarda la fisura en crecer. Para distintos tamaños de la fisura inicial a_o se ha calculado la vida del

tirante a partir de $N_f = \frac{\left(\frac{1}{a_o}\right)^{\frac{m}{2}-1} - \left(\frac{1}{a_c}\right)^{\frac{m}{2}-1}}{A\left(\frac{m}{2}-1\right) \times Y^m \times \pi^{m/2} \times (\Delta \sigma)^m}$, resultando

$N_f = 8742 \cdot \left(\frac{1}{a_o^{0,65}} - 13,6 \right)$ en número de ciclos y en días: $N_d = \frac{60,7}{a_o^{0,65}} - 825$ Los resultados se indican en la figura.



Cuanto menor es el tamaño de la fisura inicial que se puede detectar mayor será la vida del tirante y, por tanto, las inspecciones se pueden distanciar más. Por ejemplo si se toma un intervalo entre inspecciones igual a $N_f/2$, en el caso de que una inspección pueda detectar fisuras de 1 mm, el intervalo entre inspecciones podría ser de 2295 días (unos seis años), mientras que si la inspección sólo es capaz de detectar fisuras mayores de 10 mm el intervalo sería de 193 días (unos seis meses) .

Como las técnicas para detectar fisuras muy pequeñas son más costosas se deberá llegar a un equilibrio entre el período de inspección y el tamaño de la fisura a detectar. Hay otros factores que pueden influir en el establecimiento del programa de inspecciones, entre otros, la localización de la obra (urbana o en un descampado), el riesgo de accidentes mortales, o el valor de las indemnizaciones en caso de accidente.

Examen Septiembre 2003

8.11. Tenemos un material que tiene $\sigma_{ys} = 630$ MPa y sus propiedades de crecimiento de grieta para $R = 0$ son: $\frac{da}{dN} = 1,4 \cdot 10^{-11} (\Delta K)^{3,5} \left[m / ciclo ; K \text{ en } MPa\sqrt{m} \right]$. Al analizar un componente estructural de gran tamaño, fabricado con este acero que ha fallado por fractura, observamos una grieta de 15 mm de penetración desde la superficie. Tomamos una muestra de la fractura y después de una observación microscópica a 2000 aumentos, vemos que en la zona próxima a la fractura el espacio entre estrías es de 3 mm. La carga corresponde a una amplitud constante con sobrecargas ocasionales dos veces superiores a la amplitud constante ($R = 0$ en ambos casos).

- Calcular la tenacidad del material.
- Calcular la máxima tensión durante la cargas de amplitud constante.

Tomar $K_I = 0,64 \cdot \sigma \sqrt{\pi \cdot a}$

Resolución:

$$a) \frac{da}{dN} = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{2000} = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ m/ciclo} = 1,4 \cdot 10^{-11} (\Delta K)^{3,5} \Rightarrow \frac{1,5 \cdot 10^{-6}}{1,4 \cdot 10^{-11}} = (\Delta K)^{3,5}$$

$$1,1 \cdot 10^5 = (\Delta K)^{3,5}; \log(1,1 \cdot 10^5) = 3,5 \cdot \log(\Delta K) \Rightarrow \Delta K = 27,36 \text{ MPa}\sqrt{m}$$

$$K_I = 2 \cdot \Delta K = 54,72 \text{ MPa}\sqrt{m}$$

$$b) R = 0; \sigma_{\max} \Rightarrow 27,36 = 0,64 \cdot \sigma \sqrt{\pi \cdot 15 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \sigma_{\max} = \frac{27,36}{0,64 \sqrt{\pi \cdot 15 \cdot 10^{-3}}} = 196,93 \text{ MPa}$$

Sobrecargas ocasionales: $196,93 \times 2 = 396,86 \text{ MPa}$; muy por debajo del límite elástico σ_{ys} . Resultado coherente.

Examen Septiembre 2004

8.12. Un empleado resentido con su empresa intenta destruir un componente ingenieril de gran valor. Para ello, una noche, después de finalizar su jornada laboral, provoca una entalla aguda en el borde de una placa de acero. Dicha entalla se encuentra orientada perpendicularmente a las tensiones de la placa. Otro empleado observa la acción y llama por teléfono al vigilante de la empresa. Este, que vive a 5 km de la factoría, tarda 2 minutos en partir tras recibir el aviso, viajando después en bicicleta a una velocidad de 15 km/h. Sabiendo que:

- 1.- La placa dañada está fabricada en acero presentando las siguientes características mecánicas: $s_y = 1250 \text{ MPa}$; $K_{Ic} = 48 \text{ MPa}\sqrt{m}$, siendo su ancho de 180 mm y su espesor de 5 mm.
- 2.- La placa se encuentra sometida a cargas variables entre 5 kN y 85 kN a una frecuencia de 75 Hz.
- 3.- La fisura producida por el empleado nº1 tiene una profundidad de 10 mm ocupando el espesor de la placa.
- 4.- La propagación de grietas por fatiga en el acero viene dada por:

$$\frac{da}{dN} = 6,4 \cdot 10^{-10} \cdot \Delta K_I^2 \left(\frac{m}{\text{ciclo}} \right) \text{ para } \Delta K_I \geq 7,8 \text{ MPa}\sqrt{m}$$

¿Alcanzará el vigilante la factoría a tiempo de detener los equipos antes del fallo catastrófico? Haga las suposiciones que crea oportunas, pero exponiéndolas con claridad.

$$\text{Datos: } K_I = 1,12 \cdot \sigma \sqrt{\pi \cdot a}$$

Resolución:

$$s_{\max} = \frac{85000}{180 \cdot 5} = 94,5 \text{ MPa} \quad s_{\min} = \frac{5000}{180 \cdot 5} = 5,5 \text{ MPa}$$

Para:

$$a_0 = 10 \text{ mm} ; K_{I_{max}} = 1,12 \cdot 94,5 \sqrt{\pi \cdot 0,01} = 18,8 \text{ MPa} \sqrt{m} < K_{IC}$$

$$\text{ROTURA} \Rightarrow 48 = 1,12 \cdot 94,5 \sqrt{\pi \cdot a_c} \Rightarrow a_c = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{48}{1,12 \cdot 94,5} \right)^2 = 0,065 \text{ m} = 65 \text{ mm}$$

$$B \geq 2,5 \cdot \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_y} \right)^2 \Rightarrow 5 \text{ mm} \geq 2500 \left(\frac{48}{1250} \right)^2 = 3,7 \text{ mm} \text{ Correcto}$$

Crecimiento por fatiga: $a_i = 10 \text{ mm}; a_f = 65 \text{ mm}$

$$\frac{da}{dN} = 6,4 \cdot 10^{-10} \cdot \Delta K_I^2 \left(\frac{mm}{ciclo} \right) \text{ para } \Delta K_I \geq 7,8 \text{ MPa} \sqrt{m}$$

$$\Delta K_I = 1,12 \cdot (94,5 - 5,5) \sqrt{\pi \cdot 0,01} = 17,7 \text{ MPa} \sqrt{m} > 7,8$$

$$\text{luego: } \frac{da}{dN} = 6,4 \cdot 10^{-10} \cdot 1,12^2 \cdot (94,5 - 5,5)^2 \cdot \pi \cdot a \Rightarrow \frac{da}{a} = 2 \cdot 10^{-5} dN$$

$$\int_{0,01}^{0,065} \frac{da}{a} = 2 \cdot 10^{-5} N \Rightarrow N = \frac{1}{2 \cdot 10^{-5}} \cdot [\ln 0,065 - \ln 0,01] = 93694 \text{ ciclos}$$

$$t = \frac{93694}{75} = 1250 \text{ seg}$$

El vigilante tarda en llegar: $t = 120 + \frac{5}{15} \cdot 3600 = 1320 \text{ seg} > 1250 \text{ seg}$

Solución al Problema: El vigilante debe correr más en la bici.

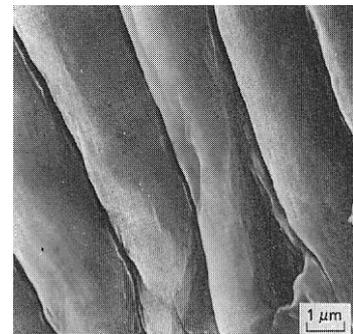
Examen Junio 2005

8.13. Calcular la vida de un panel de 15 cm de espesor, sometido a un ciclo de tensiones entre 0 y $0,2\sigma_y$, siendo $\sigma_y = 350 \text{ MPa}$.

El componente presenta un defecto pasante, origen de la fatiga, $2a = 200 \mu\text{m}$. Las estriaciones de fatiga a 4 cm del defecto se muestran en la figura adjunta, y a 4 mm del defecto la separación entre las estriaciones de fatiga es 100 veces más pequeña que las que se muestran en la figura.

La frecuencia es de 10 Hz, y la tenacidad a fractura en deformación plana, del material es: $44 \text{ MPa} \sqrt{m}$

Tomar $K_I = 1,12 \cdot \sigma \sqrt{\pi \cdot a}$



Resolución:

$$B \geq 2,5 \left(\frac{44}{350} \right)^2 \approx 40 \text{ mm} > 150 \text{ mm}, \text{ estamos en Deformación Plana}$$

$$a_i = \frac{200 \times 10^{-6}}{2} = 10^{-4} \text{ m}$$

$$a_f = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{44}{1,12 \cdot 0,2 \cdot 350} \right)^2 = 0,1 \text{ m}$$

$$\Delta K_{I,4cm} = 1,12 \cdot 70 \sqrt{\pi \cdot 4 \cdot 10^{-2}} = 27,8 \text{ MPa} \sqrt{m}$$

$$\Delta K_{I,4mm} = 1,12 \cdot 70 \sqrt{\pi \cdot 4 \cdot 10^{-3}} = 8,8 \text{ MPa} \sqrt{m}$$

De la micrografía, tenemos:

$$4 \text{ cm} \Rightarrow \frac{da}{dN} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ m/ciclo} = C \left(1,12 \cdot 70 \sqrt{\pi \cdot 4 \cdot 10^{-2}} \right)^m$$

$$4 \text{ mm} \Rightarrow \frac{da}{dN} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ m/ciclo} = C \left(1,12 \cdot 70 \sqrt{\pi \cdot 4 \cdot 10^{-3}} \right)^m$$

$$\log C - m \cdot \log \left[1,12 \cdot 70 \sqrt{\pi \cdot 4 \cdot 10^{-2}} \right] = \log (2 \cdot 10^{-6})$$

$$\log C - m \cdot \log \left[1,12 \cdot 70 \sqrt{\pi \cdot 4 \cdot 10^{-3}} \right] = \log (2 \cdot 10^{-8})$$

$$m \cdot \log \left[\frac{1,12 \cdot 70 \sqrt{\pi \cdot 4 \cdot 10^{-2}}}{1,12 \cdot 70 \cdot \sqrt{\pi \cdot 4 \cdot 10^{-3}}} \right] = \log \left[\frac{2 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-8}} \right]$$

$$m = \frac{2}{0,5} = 4; \quad C = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{27,8} = 3,35 \cdot 10^{-12} \Rightarrow \frac{da}{dN} = 3,35 \cdot 10^{-12} (\Delta K)^4$$

$$N_f = \int_0^N dN = \frac{1}{3,35 \cdot 10^{-12} \cdot 1,12^4 \cdot 70^4 \cdot \pi^2} \int_{10^{-4}}^{0,1} \frac{da}{a^2} = \frac{1}{3,35 \cdot 10^{-12} \cdot 1,12^4 \cdot 70^4 \cdot \pi^2} \left[\frac{1}{a} \right]_{0,1}^{10^{-4}}$$

$$N_f = \frac{10^4 - 10}{3,35 \cdot 10^{-12} \cdot 1,12^4 \cdot 70^4 \cdot \pi^2} = 8 \cdot 10^6 \text{ ciclos}; \quad \frac{8 \cdot 10^6}{10 \cdot 3600} = 222 \text{ horas}$$

Examen Junio 2005

8.14. Un perno de sujeción de rueda a buje del primer eje de un tractocamión es de acero y posee un diámetro nominal de 18 mm y una longitud eficaz a considerar en los cálculos de alargamiento de 90 mm. El par de apriete original produce una tracción de 20 kN en el perno, y el giro de rueda durante la marcha produce que dicha tracción original oscile entre valores de 15 y 25 kN.

Uno de los doce pernos de una llanta de aluminio ha quedado con una pretensión inicial insuficiente de 12 kN, oscilando entre 7 y 17 kN en el giro de la rueda, de modo que bajo la cabeza del perno se produce una corrosión por frotamiento con el aluminio, con un crecimiento de la capa de alúmina, formada bajo su cabeza, de 0,1 nm /vuelta de rueda.

Los defectos de fondo de rosca del perno, de 0,1 mm de tamaño, comienzan a crecer bajo una tensión máxima en el perno de 300 MPa y cuando lo hacen siguen una ley de Paris con coeficientes $n = 2$ y $A = 4 \cdot 10^{-10} \text{ m}^4 / \text{ciclo} \cdot \text{MN}^2$ y el perno rompe finalmente con una fisura semi elíptica de profundidad $a = 6 \text{ mm}$.

Calcular:

1. Kilómetros recorridos por el vehículo hasta que comienza la propagación de grietas por fatiga.
2. Kilómetros recorridos hasta la rotura del perno.
3. Tenacidad de fractura del acero empleado en el perno.

Datos:

1 vuelta de rueda = 2,65 metros;

Factor de intensidad de tensiones K_I en perno roscado = $2,2 \cdot \sigma \sqrt{a}$

$E = 210 \text{ GPa}$

Resolución:

$$A = \frac{18^2 \cdot \pi}{4} = 254,5 \text{ mm}^2; \sigma_{\min} = \frac{7 \cdot 10^3}{A} = 27,5 \text{ MPa}; \sigma_{\max} = \frac{17 \cdot 10^3}{A} = 66,8 \text{ MPa}$$

Por lo tanto $\Delta\sigma = 66,8 - 27,5 = 39,3 \text{ MPa}$

$$\varepsilon = \frac{300 - 66,8}{210000} = 1,11 \cdot 10^{-3} \text{ m/m}; \Delta l = 90 \cdot 1,11 \cdot 10^{-3} = 0,099 \text{ mm}$$

$$\text{Número de vueltas} = \frac{0,099 \cdot 10^3 \text{ m}}{0,1 \cdot 10^{-9} \text{ m}} \approx 1.000.000 \Rightarrow 1000000 \times 2,65 \approx 2650 \text{ km}$$

$$\frac{da}{dN} = 4 \cdot 10^{-10} (2,2 \cdot 39,3 \sqrt{a})^2 \Rightarrow N = \frac{1}{4 \cdot 10^{-10} \cdot 2,2^2 \cdot 39,3^2} \int_{0,1 \cdot 10^{-3}}^{6 \cdot 10^{-3}} \frac{da}{a}$$

$$N = \frac{1}{4 \cdot 10^{-10} \cdot 2,2^2 \cdot 39,3^2} \cdot LN \frac{0,006}{0,001} = 1.369.285 \text{ vueltas} \Rightarrow 1369285 \times 2,65 = 3628,6 \text{ km}$$

$$\sigma_{\text{fractura}} = 300 + \frac{1369285 \cdot 0,1 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{90 \cdot 10^{-3} \text{ m}} \times 210000 = 300 + 319,5 \approx 620 \text{ MPa}$$

$$K_{IC} = 2,2 \cdot 620 \sqrt{6 \cdot 10^{-3}} = 105,6 \text{ MPa } \sqrt{\text{m}}$$

Tema 9

9.1. Un tirante metálico de una plataforma petrolífera marina que ha sufrido un accidente catastrófico es estudiado en el laboratorio para conocer las causas de la rotura.

De los ensayos realizados se obtienen las siguientes características:

- Límite elástico: 800 MPa
- Resistencia mecánica: 980 MPa
- Alargamiento de rotura en base 5 Ø: 12 %

De la observación del elemento roto se obtienen estos datos:

- Longitud de la fisura en rotura: 15 mm
- Defectos de mayor tamaño: 2,5 mm
- Defectos menores de 2 mm no sufren propagación

De la situación real del elemento en servicio, se sabe:

- Espesor de la chapa: 32 mm
- Tensión de trabajo: 500 MPa
- Ambiente agresivo marino-petrolífero de alto riesgo
- Factor de intensidad de tensiones del tirante: $K_I = 0,82 \sigma \sqrt{\pi a}$
- Esperanza de vida del elemento: 5 años

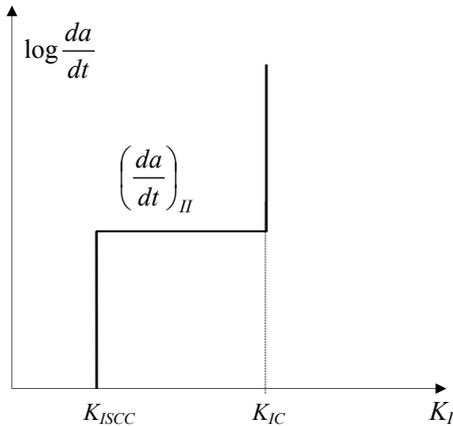
Se pide:

1) Dibujar la curva característica del comportamiento en Corrosion Bajo Tensión del material (6 puntos)

2) Calcular la vida útil con una tensión de trabajo de 400 MPa y defectos de tamaño máximo 3,5 mm (4 puntos)

Resolución:

1)



Rotura: $a = 15 \text{ mm}$
 $\sigma = 500 \text{ MPa}$

$$K_{IC} = 0,82 \cdot 500 \cdot \sqrt{\pi \cdot 0,015} = 89 \text{ MPa}\sqrt{m}$$

$$D.P. \rightarrow B > 2,5 \left(\frac{89}{800} \right)^2 = 31 \text{ mm}$$

No propagación: Umbral $a = 2 \text{ mm}$
 $\sigma = 500 \text{ MPa}$

$$K_{ISCC} = 0,82 \cdot 500 \cdot \sqrt{\pi \cdot 0,002} = 32,5 \text{ MPa}\sqrt{m}$$

Propagación en estado II

$$\left(\frac{da}{dt} \right)_{II} = \frac{(15 - 2,5) \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 365 \cdot 86400} = 8 \cdot 10^{-11} \text{ m} \cdot \text{seg}^{-1}$$

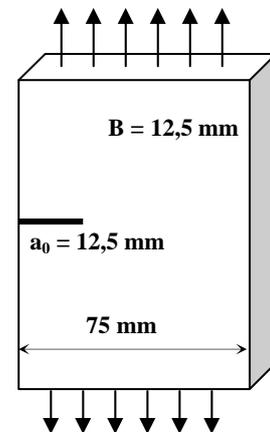
2) $a = 3,5 \text{ mm}$ En el mismo acero: $K_{IC} = 89 \text{ MPa}\sqrt{m}$
 $\sigma = 400 \text{ MPa}$ $89 = 0,82 \cdot 400 \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \Rightarrow a = 23,4 \text{ mm}$

vida útil: $t = \frac{(23,4 - 3,5) \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 10^{-11}} = 249 \cdot 10^6 \text{ seg} = 7,9 \text{ años}$

siempre y cuando haya propagación al comienzo:

$$K_I = 0,82 \cdot 400 \cdot \sqrt{\pi \cdot 0,0035} = 34,4 \text{ MPa}\sqrt{m} > K_{ISCC} \text{ en efecto la hay}$$

9.2. Tres (3) probetas agrietadas en un extremo, cuyo esquema se presenta en la figura adjunta, están sometidas a ensayos de corrosión bajo tensión en agua de mar, cargadas a cargas uniformes, P , de 80, 110 y 135 kN respectivamente. Las grietas iniciales de las tres probetas son iguales y tienen un tamaño $a_0 = 12,5 \text{ mm}$ y los tiempos de fallo de las tres probetas son respectivamente: 5000, 100 y 3 horas. Estimar el valor de K_{ISCC} y calcular cuanto ha crecido la grieta en cada una de los tres probetas.



Características del material:

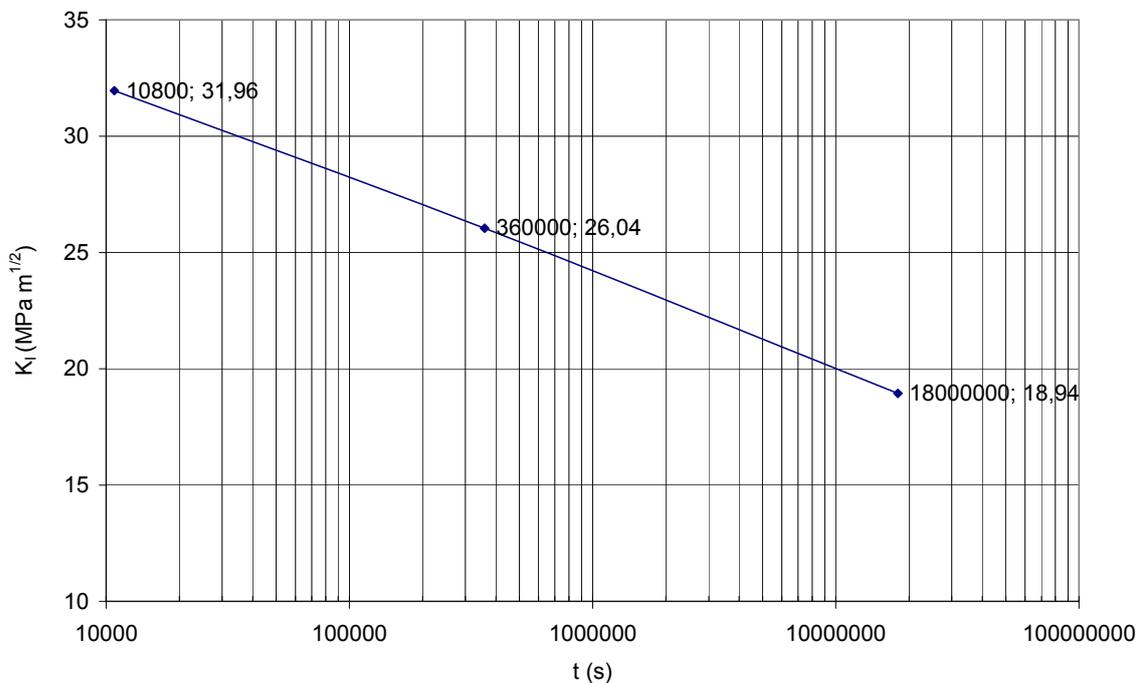
$$\sigma_y = 500 \text{ MPa}, K_{IC} = 35 \text{ MPa m}^{1/2}$$

Factor de intensidad de tensiones:

$$K_I = \beta \cdot \sigma \sqrt{\pi \cdot a} ; \beta = 1,12$$

Resolución:

CBT de tres probetas				
Ancho, W (mm)	75			
Espesor, B (mm)	12,5			
Area, mm ²	937,5			
Carga, kN	80	110	135	35
Tensión, s, (MPa)	85,33	117,33	144,00	157,70
Grieta inicial (mm)	12,5	12,5	12,5	12,5
K _I (MPa m ^{1/2})	18,94	26,04	31,96	35
K _{IC} (MPa m ^{1/2})	35	35	35	35
Grieta final (mm)	42,68	22,58	15,0	12,5
Crecimiento (mm)	30,19	10,08	2,49	0
Tiempo (s)	18000000	360000	10800	0
da/dt (m s ⁻¹)	1,67E-09	2,8E-08	2,30E-07	0
s _Y (MPa)	500	500	500	500
Colapso plástico (mm)	62,2	57,4	53,4	



El valor más apropiado de detención de la propagación depende del par metal-medio considerado y debe ser objeto de acuerdo entre las partes. Por lo que se refiere a las aleaciones de alta resistencia, se han sugerido velocidades del entorno de 10^{-7} mm/s, pero la experiencia indica que las fisuras de CBT pueden propagarse a una velocidad inferior a 10^{-8} mm/s. El valor límite de 10^{-9} mm/s para el umbral K_{ISCC} puede ser satisfactorio.

En nuestro caso parece que podría estar un valor aproximado a: $K_{ISCC} = 15 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}$

9.3. Para un anteproyecto de un depósito que almacenará un líquido corrosivo se desea elegir el material más adecuado. Por consideraciones de diseño, el depósito tiene forma cilíndrica y un diámetro de 2 m. El depósito se puede construir con tres aleaciones diferentes, cuyas propiedades mecánicas se encuentran recogidas en la tabla adjunta.

Material	ρ (kg/m^3)	σ_y (MPa)	K_{ISCC} (MPa \sqrt{m})
Aleación de magnesio	1700	400	2
Aleación de aluminio	2700	500	6
Acero inoxidable	7800	700	20

donde ρ es la densidad, σ_y el límite elástico, y K_{ISCC} el umbral de propagación de fisuras por corrosión bajo tensión en presencia del líquido corrosivo.

El equipo de control de calidad utiliza un sistema combinado de líquidos penetrantes y rayos X para detectar las fisuras superficiales en la pared del depósito. Con el primer sistema se pueden detectar fisuras cuya *traza superficial* sea igual o superior a 1 mm. El equipo de rayos X permite localizar fisuras cuya *profundidad* sea superior a 0,1 mm.

Sabiendo que la presión del líquido en el depósito es 2 MPa, se pide indicar el espesor de la pared del cilindro y el material con el que se debe fabricar teniendo en cuenta las siguientes especificaciones de diseño:

- a) La tensión de trabajo en la pared del depósito no puede superar nunca el 50% del límite elástico del material.
- b) Se debe garantizar la fiabilidad del depósito por tiempo indefinido.
- c) El peso del depósito debe ser mínimo.

Resolución:

1. *Diseño en régimen elástico (condiciones a y c)*

La tensión circunferencial en la tubería se calcula mediante la fórmula de tubos delgados de acuerdo con $p2R = \sigma 2e$ de donde: $\sigma = \frac{pR}{e} = 0,5\sigma_y$

con lo que se obtienen unos espesores de 10 mm para el magnesio, 8 mm para el aluminio y 5,71mm para el acero. Las densidades por metro de longitud del depósito, ρ_L , se pueden calcular para cada material de acuerdo con,

$$\rho_L = \rho 2\pi R e$$

obteniendo 106,8 kg/m para el magnesio, 135,7 kg/m para el aluminio y 279,8 kg/m para el acero. Por lo tanto, el depósito mas adecuado según el diseño en régimen elástico sería el de Mg (cumpliendo las condiciones a y c).

2. Diseño teniendo en cuenta la corrosión bajo tensión

Al existir un ambiente agresivo es necesario comprobar que no se va a producir la propagación de una grieta por corrosión bajo tensión. Como se pide que la vida del depósito sea indefinida, el factor de intensidad de tensiones en la punta de la fisura deberá ser inferior a K_{ISCC} .

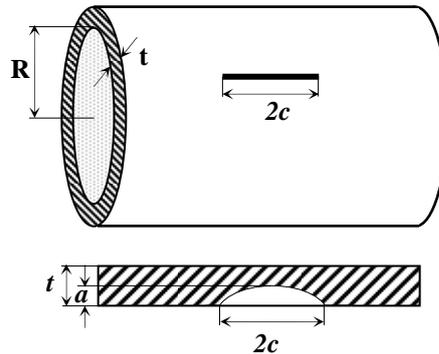
Las fisuras longitudinales en la superficie del tubo pueden aproximarse por semielipses definidas por su traza superficial $2c$ y su profundidad a . Por lo tanto, la sensibilidad del equipo de detección de fisuras permite detectar fisuras con $a = 0.1$ mm y $c = 0.5$ mm.

Para una fisura semielíptica superficial sometida a tracción, con $a/c < 1$, el factor de intensidad de tensiones en modo I es máximo en el extremo interior de la fisura y viene expresado por :

$$K_I = \frac{pR}{t} \sqrt{\frac{\pi a}{Q}} F \left(\frac{a}{t}, \frac{a}{2c}, \frac{R}{t} \right)$$

$$F = 1,12 + 0,053\xi + 0,0055\xi^2$$

$$+ (1 + 0,02\xi + 0,0191\xi^2) \frac{\left(20 - \frac{R}{t}\right)^2}{1400}$$



donde $\xi = \frac{2c}{t}$ y $Q = 1 + 1,464 \left(\frac{a}{c}\right)^{1,65}$ como se puede ver en el libro de texto Tema 10.

Simplificando esta expresión, la condición de diseño por corrosión bajo tensión se puede expresar como:

$$K_I = \frac{pR}{e} \sqrt{\frac{\pi a}{Q}} \left[1,13 - 0,09 \frac{a}{c} \right] \leq K_{ISCC}$$

Sustituyendo en esta expresión los valores de a , c , p y R , que son comunes a todos los materiales, y los valores de K_{ISCC} , específicos de cada aleación, se puede conocer el valor mínimo del espesor para que no se produzca rotura por corrosión bajo tensión. Realizando las operaciones se llega a que el espesor mínimo para la aleación de magnesio sería 18,77 mm, 6,26 mm para el aluminio y 1,88 mm para el acero.

La combinación del diseño elástico y del diseño en corrosión bajo tensión exige que el espesor mínimo del tubo sea 18,77 mm para el magnesio, 8 mm para el aluminio y 5,71 mm para el acero. Las correspondientes densidades lineales serían 200,4 kg/m, 135,7 kg/m y 279,8 kg/m. El material mas adecuado sería la aleación de aluminio con un espesor de 8 mm. Los resultados se resumen en la siguiente tabla:

Material	espesor mínimo e (50% σ_y)	espesor mínimo e (corrosión)	peso relativo (kg/m)
Magnesio	10	18,8	200,4
Aluminio	8	6,3	135,7
Acero	5,7	1,9	279,8

Examen Junio 2003

9.4. Realizamos un ensayo de CBT en tres probetas del mismo material a tres tensiones diferentes, hasta la rotura, todas ellas con la misma grieta inicial, $a = 12$ mm. Los tiempos de fallo son 1, 10 y 1000 horas para cada una de las tres probetas. Después del ensayo de fractura medimos los tamaños finales de grieta, resultando ser: 20, 30 y 50 mm respectivamente para cada una de las tres probetas. La anchura de la probeta es $W = 100$ mm. Asumir que hay deformación plana con un valor $K_{IC} = 45 \text{ MPa} \sqrt{m}$

Estimar el valor de K_{ISCC} .

Datos:

$$K_I = \beta \cdot \sigma \sqrt{\pi a} \quad ; \quad \beta = 1,12 + \left(\frac{a}{W} \right)^2$$

$$\sigma_{ys} = 1500 \text{ MPa}$$

Resolución:

$$1) \beta_1 = 1,12 + \left(\frac{20}{100} \right)^2 = 1,16 \quad ; \quad 45 = 1,16 \cdot \sigma \sqrt{\pi \cdot 20 \cdot 10^{-3}} \quad ; \quad \sigma_1 = 154,76 \text{ MPa}$$

$$2) \beta_2 = 1,12 + \left(\frac{30}{100} \right)^2 = 1,21 \quad ; \quad 45 = 1,21 \cdot \sigma \sqrt{\pi \cdot 30 \cdot 10^{-3}} \quad ; \quad \sigma_2 = 121,14 \text{ MPa}$$

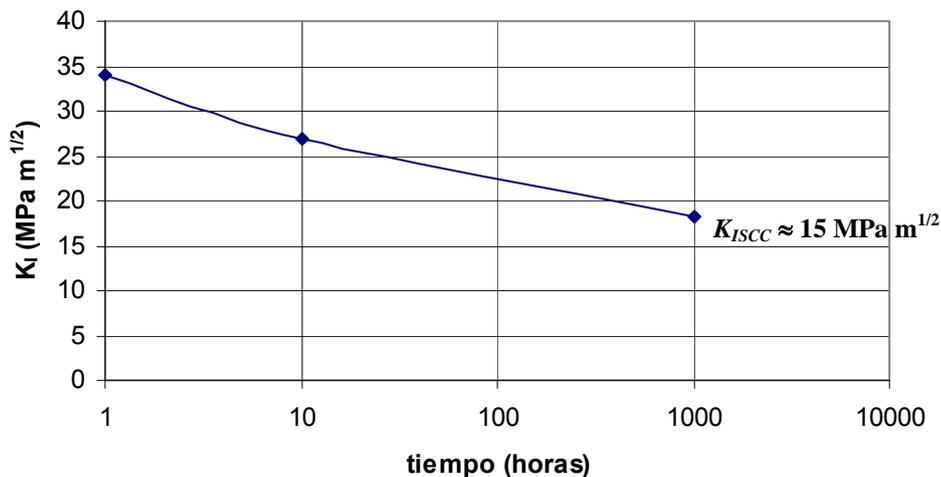
$$3) \beta_3 = 1,12 + \left(\frac{50}{100} \right)^2 = 1,37 \quad ; \quad 45 = 1,37 \cdot \sigma \sqrt{\pi \cdot 50 \cdot 10^{-3}} \quad ; \quad \sigma_3 = 82,87 \text{ MPa}$$

grieta de 12 mm al inicio: $\beta_1 = 1,12 + \left(\frac{12}{100} \right)^2 = 1,1344$

$$1) K_{I1} = 1,1344 \cdot 154,76 \cdot \sqrt{\pi \cdot 12 \cdot 10^{-3}} = 34,08 \text{ MPa} \sqrt{m} \quad \text{1 hora}$$

$$2) K_{I2} = 1,1344 \cdot 121,14 \cdot \sqrt{\pi \cdot 12 \cdot 10^{-3}} = 26,86 \text{ MPa} \sqrt{m} \quad \text{10 horas}$$

$$3) K_{I3} = 1,1344 \cdot 82,87 \cdot \sqrt{\pi \cdot 12 \cdot 10^{-3}} = 18,25 \text{ MPa} \sqrt{m} \quad \text{1000 horas}$$



Examen Junio 2004

9.5. El análisis de un fallo muestra que un elemento de construcción, sometido a una carga constante, presenta una fractura de CBT. La longitud de la grieta en el momento del fallo es de 6 mm. El espesor del material es suficiente para que estemos en deformación plana. La empresa donde se fabrican los elementos puede garantizar, mediante ensayos no destructivos, que el máximo defecto presente en las piezas no será mayor de 1 mm.

Calcular el porcentaje de aumento de sección que es necesario llevar a cabo en el diseño para garantizar que no se van a producir fallos de esta naturaleza en el futuro.

Datos:

$$K_{Ic} = 60 \text{ MPa}\sqrt{m}$$

$$K_{Isc} = 20 \text{ MPa}\sqrt{m}$$

$$K_I = 1,12 \cdot \sigma \sqrt{\pi \cdot a}$$

Resolución:

$$60 = 1,12 \cdot \sigma_f \sqrt{\pi \cdot 6 \cdot 10^{-3}} \quad \Rightarrow \quad \sigma_f = \frac{60}{1,12 \sqrt{\pi \cdot 6 \cdot 10^{-3}}}$$

$$20 = 1,12 \cdot \sigma_{sc} \sqrt{\pi \cdot 1 \cdot 10^{-3}} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{sc} = \frac{20}{1,12 \sqrt{\pi \cdot 1 \cdot 10^{-3}}}$$

La relación entre las secciones de diseño frente a fractura y corrosión bajo tensión nos va dar la respuesta respecto a la relación de secciones.

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_{sc}} = \frac{\frac{60}{1,12 \sqrt{\pi \cdot 6 \cdot 10^{-3}}}}{\frac{20}{1,12 \sqrt{\pi \cdot 1 \cdot 10^{-3}}}} = 1,22 = \frac{A_f}{A_{sc}}$$

Luego, será necesario aumentar la sección resistente un 22 % adicional para evitar el inicio de agrietamiento por CBT.

Examen Junio 2006

9.6. Encontramos una grieta de longitud $2a = 40$ mm en un elemento estructural de gran longitud. El elemento va a ser utilizado en condiciones ambientales de manera que se va a producir una corrosión bajo tensión. El tiempo de incubación o nucleación para la combinación de material, espesor y acción ambiental se presenta en el gráfico de la figura A. La información correspondiente a la velocidad de crecimiento de grieta por la corrosión bajo tensión se presenta en la figura B. Para la geometría del componente, tomamos un factor de intensidad de tensiones en función de la longitud de grieta, de: $K_I = \sigma \sqrt{\pi a}$. Este elemento va a estar sometido a una carga constante que produce una tensión nominal de 100 MPa.

Se pregunta cual es el tiempo de vida del elemento estructural si el posible crecimiento de grieta no puede superar un factor de intensidad de tensiones de $K_I \leq \frac{K_c}{4}$

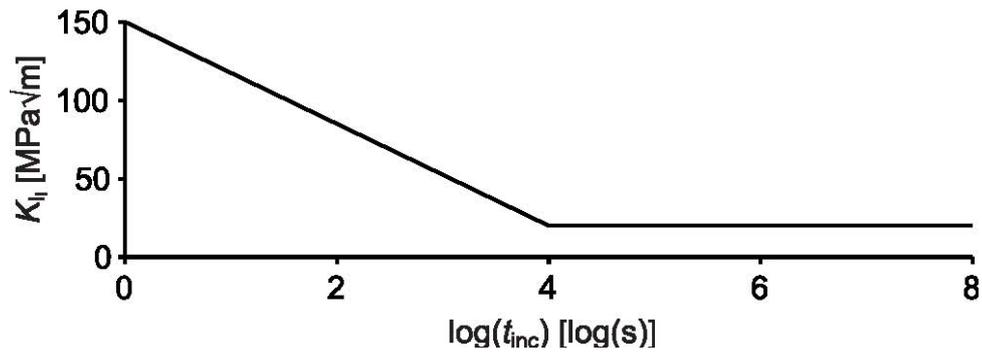


Figura A

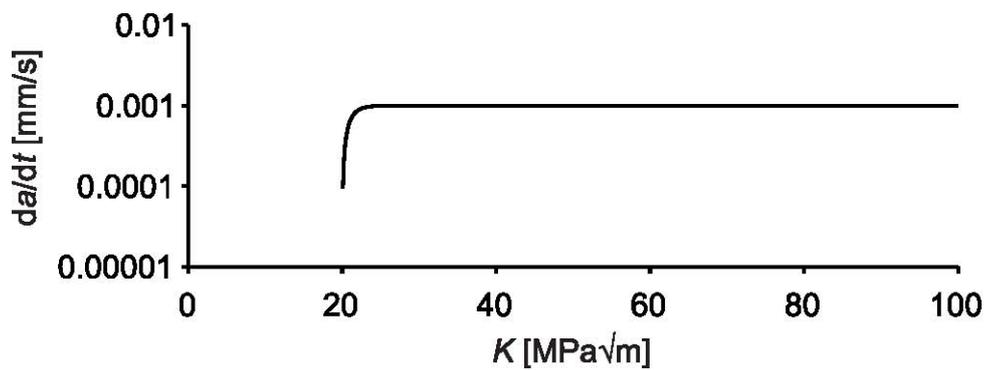


Figura B

Resolución:

$K_I = 100 \sqrt{\pi \cdot 20 \cdot 10^{-3}} = 25,06 \text{ MPa } \sqrt{m}$, A partir del gráfico de la Figura A obtenemos el tiempo de nucleación: $\log(t_{inc}) \approx 3,8 \Rightarrow t_{inc} \approx 6000$

Cálculo: $a_f \Rightarrow \frac{150 \text{ MPa } \sqrt{m}}{4} = 100 \sqrt{\pi \cdot a_f}$; $a_f = \frac{1}{\pi} \left(\frac{150}{4 \cdot 100} \right)^2 = 44,76 \text{ mm}$

Tiempo de crecimiento: $t_{crec} = \frac{44,76 - 20}{0,001} = 24762 \text{ s}$

Tiempo total = $6000 + 24762 = 30762 \text{ s}$

Tema 10

DISEÑO FRENTE A FRACTURA

Como se ha visto en el Tema 3 del libro de texto de planteamiento tensional de la fractura el factor de intensidad de tensiones para una temperatura dada y para una carga determinada, está relacionado con el tamaño de grieta tal como se presento en la ecuación 3.17 del texto, por:

$$K_{IC}, K_C = M \sigma \sqrt{a} \quad (10.1)$$

donde: K_{IC}, K_C , etc. = propiedad característica del material en tenacidad a fractura, en, en un ensayo realizado a una temperatura determinada (Tema 4). Si no tenemos un valor característico de K_{IC} y tenemos valores realizados en ensayos de Mecánica de Fractura Elasto-plástica, como J_C o δ_C (Tema 5), podemos convertir estos datos a valores de K_{IC} como se ha visto en el Tema 5.

$M =$ constante que depende de la geometría del elemento (en diferentes tablas y ábacos aparecen valores para el coeficiente geométrico M , y en el Tema 3 se han desarrollado algunos.

$\sigma =$ tensión nominal aplicada, MPa , usando los criterios y metodologías tradicionales de resistencia de materiales.

$a =$ Tamaño del semi-defecto o profundidad de defecto.

Por lo tanto, el tamaño máximo de defecto tolerable en una determinado componente estructural, a partir de 10.1 será:

$$a_c = \left[\frac{K_{IC}, K_C}{M \cdot \sigma} \right]^2 \quad (10.2)$$

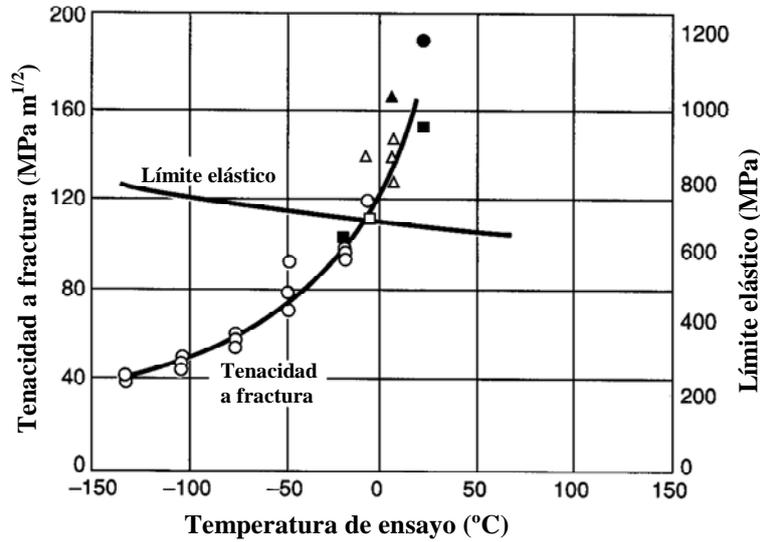
Consecuentemente, el ingeniero puede analizar la seguridad de un elemento respecto a la fractura frágil de la siguiente manera:

- A. Determinar los valores característicos críticos de K y del límite elástico a las temperaturas de servicio y las tensiones de trabajo que van a soportar los materiales objeto de estudio. Téngase en cuenta que si estamos diseñando o analizando estructuras o elementos soldados, debemos caracterizar las propias soldaduras y dentro de las soldaduras en determinadas aplicaciones las zonas afectadas por la temperatura consiguiendo datos precisos de K y de las propiedades a tracción de estas mismas zonas.
- B. Seleccionar el más probable tipo de defecto que podemos encontrarnos en una pieza o en un elemento estructural de la naturaleza que estamos diseñando. En este paso es muy importante la experiencia acumulada en fabricaciones anteriores y el análisis de otras roturas típicas que se hayan producido. En el Apéndice se presenta unos pequeños ejemplos de defectos típicos con los correspondientes factores geométricos. Otros tipos de defectos se pueden encontrar en distintos manuales de Mecánica de Fractura.
- C. Determinar la relación entre la tensión de trabajo y el tamaño del defecto para distintos valores de K_I que corresponderían a distintos tipos de materiales a seleccionar para la aplicación que estamos estudiando.

Por lo tanto, podemos ver que para minimizar la posibilidad de fractura frágil en una estructura dada, el ingeniero de diseño tiene tres factores básicos que puede controlar:

- a) El tipo de material, lo que incluye un determinado valor de tenacidad a fractura (K_{IC}), $MPa\sqrt{m}$, a la temperatura particular de servicio del elemento estructural.
- b) El nivel de tensiones nominales, (σ), MPa .
- c) Tamaño de grieta presente en la estructura (a), m .

10.1. Una compañía de fabricación de helicópteros precisa un acero inoxidable para el eje del rotor que sea adecuado para su uso en zonas templadas (20 °C) y árticas (-50 °C). Las características mecánicas del material elegido están en la figura adjunta. A la tensión de trabajo, el eje admite una fisura superficial de profundidad 2 mm cuando vuela en zona templada. En el vuelo por el ártico la tensión de trabajo se incrementa en un 20 %. ¿Será seguro en fractura en ese momento?. Tomar: $K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$



Resolución

Del gráfico:
$$\begin{cases} 20^{\circ}C \Rightarrow K_{IC} = 160 \text{ MPa}\sqrt{m} & ; \sigma_y = 640 \text{ MPa} \\ -50^{\circ}C \Rightarrow K_{IC} = 75 \text{ MPa}\sqrt{m} & ; \sigma_y = 660 \text{ MPa} \end{cases}$$

Zona templada:
$$\begin{cases} 160 > \sigma \sqrt{\pi \cdot 0,002} \Rightarrow \sigma < 2018 \text{ MPa} \\ \text{luego como } \sigma_y = 640 \text{ MPa} \Rightarrow \sigma < 640 \text{ MPa} \end{cases}$$

Ártico:
$$\begin{cases} \sigma' = 1,2 \sigma < 660 \text{ MPa} \\ \text{luego en el ártico en el caso peor } \sigma' = 660 \text{ MPa} \text{ y entonces } \sigma = 550 \text{ MPa} \end{cases}$$

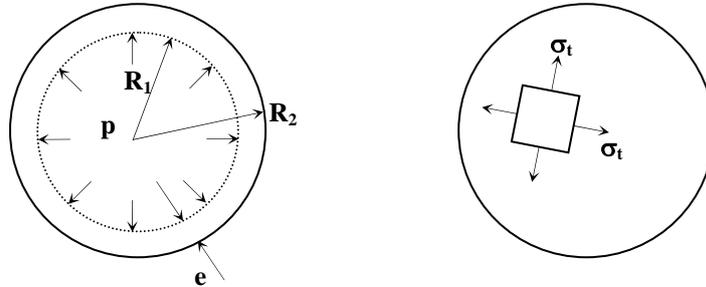
En zona templada:
$$K_I = 550 \sqrt{\pi \cdot 0,002} = 44 \text{ MPa}\sqrt{m}$$

En zona ártica:
$$K_I = 660 \sqrt{\pi \cdot 0,002} = 52,8 \text{ MPa}\sqrt{m}$$

10.2. Un recipiente esférico a presión está fabricado con el acero Ni-Cr-Mo-V (Tabla A-1) y funciona a temperatura ambiente: El diámetro interior es, $D_I = 1,5$ m, el espesor de pared es $e = 10$ mm y la máxima presión es $p = 6$ MPa.

- ¿Se cumple la condición Fuga Antes de Fractura, FAF(LBB)?
- Calcular el coeficiente de seguridad en fractura y en colapso plástico.

Resolución:



$$\sigma_t \approx \frac{p \cdot R_1}{2e} = \frac{(6 \text{ MPa}) \cdot (750 \text{ mm})}{2 \cdot (10 \text{ mm})} = 225 \text{ MPa}$$

$$K_{IC} = 187 \text{ MPa}\sqrt{m} = 225 \sqrt{\pi \cdot a_c}; a_c = \frac{1}{\pi} \left(\frac{187}{225} \right)^2 = 0,22 \text{ m} = 220 \text{ mm}$$

$220 \gg 10$; $a_c \gg e$; Se cumple "Fuga antes que Fractura"

Cuando la grieta alcanza un tamaño para la fuga a lo largo de la superficie, $2c = 2e$ o sea $c = e = 10$ mm.

En este momento el factor de intensidad de tensiones es:

$K = Y \cdot \sigma \sqrt{\pi \cdot a_c} = 1 \cdot 225 \sqrt{\pi \cdot 10 \cdot 10^{-3}} = 39,9 \text{ MPa}\sqrt{m}$, tomando $Y = 1$ ya que se puede asimilar a una placa plana de gran tamaño.

$$X_f = \frac{K_{IC}}{K_I} = \frac{187 \text{ MPa}\sqrt{m}}{39,9 \text{ MPa}\sqrt{m}} = 4,69 \text{ coeficiente de seguridad en fractura}$$

Es un buen coeficiente de seguridad contra fractura frágil.

Coeficiente de seguridad en plastificación

Criterio de máxima tensión $\sigma_1 = \sigma_2 = 225 \text{ MPa}$; $\sigma_3 \approx 0$

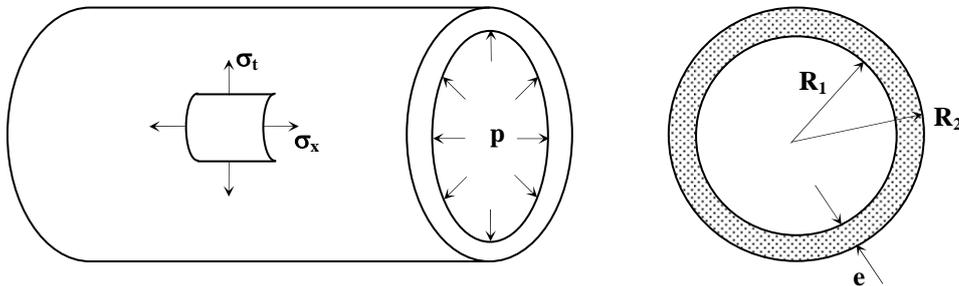
$$\sigma_{\max} = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3|); \sigma_{\max} = 225 \text{ MPa}$$

$$X_p = \frac{\sigma_y}{\sigma_{\max}} = \frac{760 \text{ MPa}}{225 \text{ MPa}} = 3,38$$

10.3. Seleccionar un material para un recipiente cilíndrico de diámetro interior $D_I = 150$ mm, con espesor de pared 5 mm, que está sometido a presión interior $p = 20$ MPa. El factor de seguridad a colapso plástico $X_p = \frac{\sigma_y}{\sigma}$ es 2 y también se debe cumplir el diseño de Fuga Antes de Fractura FAF(LBB), con factor $X_a = 9$, respecto a la longitud crítica de grieta, $X_a = \frac{c_c}{e}$.

- Establecer si el recipiente es seguro fabricado con acero 300-M, revenido a 300 °C.
- La misma pregunta anterior para el acero Ni-Cr-Mo-V (Tabla A.1).
- Mínimo valor de tenacidad a fractura del material para esta aplicación.
- ¿Qué factor de seguridad en fractura $X_f = \frac{K_{IC}}{K_I}$ se corresponden con $X_a = 9$?

Resolución:



$$\sigma_t \approx \frac{p \cdot R_1}{e} \quad ; \quad \sigma_x \approx \frac{p \cdot R_1}{2e} \quad (\sigma_x = 0, \text{abierto}); \quad \sigma_r = -p$$

$$\sigma_t = \frac{20 \cdot 75}{5} = 300 \text{ MPa}; \quad \sigma_x = \frac{20 \cdot 75}{2 \cdot 5} = 150 \text{ MPa} \quad ; \quad \sigma_r = -20 \text{ MPa}$$

$\sigma_t, \sigma_x, \sigma_r = \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ Criterio de Von Mises

$$\Rightarrow \sigma_H = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(300 - 150)^2 + (150 + 20)^2 + (-20 - 300)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{150^2 + 170^2 + 320^2} = 277 \text{ MPa}$$

a) **Acero 300-M Revenido a 300°C**

$$X_p = \frac{\sigma_y}{\sigma_H} = \frac{1740}{277} = 6,28 > 2 \quad \text{Vale en plastificación}$$

$$c_c = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_t} \right)^2 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{65}{300} \right)^2 = 0,01494 \text{ m} = 14,94 \text{ mm}; \quad X_a = \frac{14,94}{5} = 2,98 < 9 \quad \text{Fractura no vale}$$

b) **Acero Ni-Cr-Mo-V**

$$X_p = \frac{\sigma_y}{\sigma_H} = \frac{760}{277} = 2,74 > 2 \quad \text{Vale en plastificación}$$

$$c_c = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_t} \right)^2 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{187}{300} \right)^2 = 0,1236 \text{ m} = 123,6 \text{ mm}; X_a = \frac{123,6}{5} = 24,73 > 9$$

Vale en fractura

c) **Tenacidad mínima**

$$c_c = X_a \cdot e = 9 \cdot 5 = 45 \gg 9; \Rightarrow 0,045 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_{IC}}{300} \right)^2 \Rightarrow K_{IC} = 300 \sqrt{\pi \cdot 0,045} = 112,8 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}$$

d) **Factor de seguridad para $X_g = 9$**

$$X_a \text{ va dentro de la raíz, } K_I = \sigma \sqrt{\pi \cdot e \cdot X_a}, \text{ luego } X_f = \frac{K_{IC}}{K_I} = \sqrt{X_a} = \sqrt{9} = 3$$

10.4. Seleccionar un material para un vasija cilíndrica a presión para su uso en el espacio.

a) Desarrollar un algoritmo que minimice el peso del material a utilizar, satisfaciendo el criterio de diseño de Fuga Antes de Fractura FAF, para una presión p y un diámetro D fijos, pero el espesor de la vasija variable, con factor de seguridad en fractura,

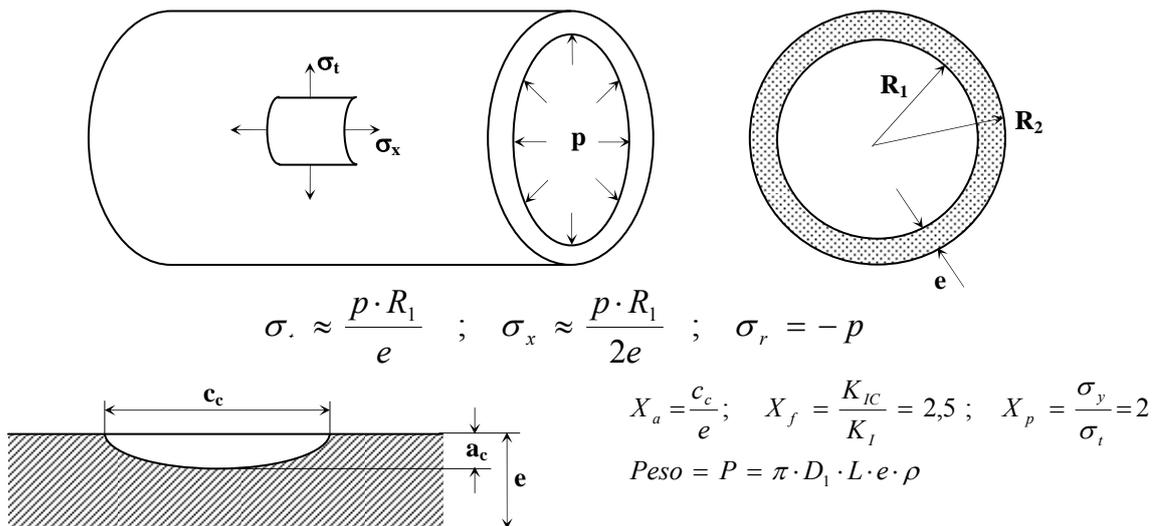
$$X_f = \frac{K_{IC}}{K_I} \text{ cuando el recipiente inicia la fuga.}$$

b) Seleccionar un material de la Tabla A.1

c) Para una vasija de diámetro 200 mm y presión $p = 5$ MPa con $X_p = 2$ y $X_f = 2,5$, calcular el mínimo espesor de vasija para cada material.

d) Finalmente elija un único material.

Resolución:



a) Diseñar un algoritmo

$$c_c = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_t} \right)^2; \quad c_c = X_a \cdot e; \quad X_a \cdot e = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_t} \right)^2 \Rightarrow e = \frac{1}{X_a \cdot \pi} \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_t} \right)^2 \quad \text{cambiamos } \sigma_t \text{ por } \frac{\sigma_y}{X_p} \Rightarrow e = \frac{1}{X_a \cdot \pi} \left(\frac{K_{IC} \cdot X_p}{\sigma_y} \right)^2$$

$$X_f = \sqrt{X_a}; \quad X_a = X_f^2 \quad \text{cambiamos } X_a \text{ por } X_f^2 \Rightarrow e = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_{IC} \cdot X_p}{\sigma_y \cdot X_f} \right)^2 \quad \text{sustituyendo en la ecuación del peso, tenemos:}$$

$$P = \pi \cdot D_1 \cdot L \cdot \rho \cdot \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_{IC} \cdot X_p}{\sigma_y \cdot X_f} \right)^2 \Rightarrow P = D_1 \cdot L \cdot \left(\frac{X_p}{X_f} \right)^2 \cdot \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_y} \right)^2 \cdot \rho \Rightarrow P = \left[D_1 \cdot L \cdot \left(\frac{X_p}{X_f} \right)^2 \right] \cdot \left[\rho \cdot \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_y} \right)^2 \right] \Rightarrow P = f_1 \cdot f_2$$

$$f_1 = \left[D_1 \cdot L \cdot \left(\frac{X_p}{X_f} \right)^2 \right] \quad \text{depende exclusivamente de los datos del problema y por lo tanto es fijo}$$

$$f_2 = \left[\rho \cdot \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_y} \right)^2 \right] \quad \text{depende de las propiedades del material}$$

b) Selección del material para máxima presión

Minimizamos el término f_2 del algoritmo hallado $f_2 = \left[\rho \cdot \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_y} \right)^2 \right]$ que como se ve en

la Tabla, es mínimo para el aluminio **7075-T651**

	K_I (MPa m ^{1/2})	σ_Y (MPa)	σ_u (MPa)	100 ϵ_f	Z (%)	ρ (t m ⁻³)	$f_2 = \frac{\rho K_{IC}^2}{\sigma_Y^2}$	e_1 FAF	e_2 Colapso	e_1/e_2
Aceros										
C45K	66	540	840	5	7	7,9	0,1180	3,04	1,85	1,64
Cr-Mo-V	60	620	780	17	45	7,9	0,0740	1,91	1,61	1,18
Ni-Cr-Mo-V	187	760	830	20	66	7,9	0,4783	12,33	1,31	9,37
35CrMo4	110	1090	1150	14	49	8,1	0,0825	2,07	0,91	2,26
18-Ni maraging, sin vacío	123	1310	1350	12	54	8,1	0,0714	1,80	0,76	2,35
18-Ni maraging, fundido al vacío	176	1290	1345	15	66	8,1	0,1508	3,79	0,77	4,89
300-M Revenido a 650°	152	1070	1190	18	56	7,9	0,1594	4,11	0,93	4,40
300-M Revenido a 300°	65	1740	2010	12	48	7,9	0,0110	0,28	0,57	0,49
Aluminio y Titanio										
2014-T651	24	415	485	13	-	2,7	0,0090	0,68	2,41	0,28
2024-T351	34	325	470	20	-	2,7	0,0295	2,23	3,07	0,72
2219-T851	36	350	455	10	-	2,7	0,0286	2,16	2,85	0,75
7075-T651	29	505	570	11	-	2,7	0,0089	0,67	1,98	0,34
7475-T7351	52	435	505	14	-	2,7	0,0386	2,91	2,30	1,27
Ti-6Al-4V, Recocido	66	925	1000	16	34	4,5	0,0229	1,04	1,08	0,96

c) Vasija $D_1 = 200 \text{ mm}$, $p = 5 \text{ MPa}$, $X_p = 2$, $X_f = 2,5$

Criterio de fractura $e_1 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_{IC} \cdot X_p}{\sigma_y \cdot X_f} \right)^2$ Acero C45K;

$$e_1 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{66 \cdot 2}{2,5 \cdot 540} \right)^2 = 3,04 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 3,04 \text{ mm}$$

Criterio de plastificación $e_2 = \frac{p \cdot D_1 \cdot X_p}{2 \cdot \sigma_y}$; Acero C45K;

$$e_2 = \frac{5 \cdot 200 \cdot 2}{2 \cdot 540} = 1,852 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1,852 \text{ mm}$$

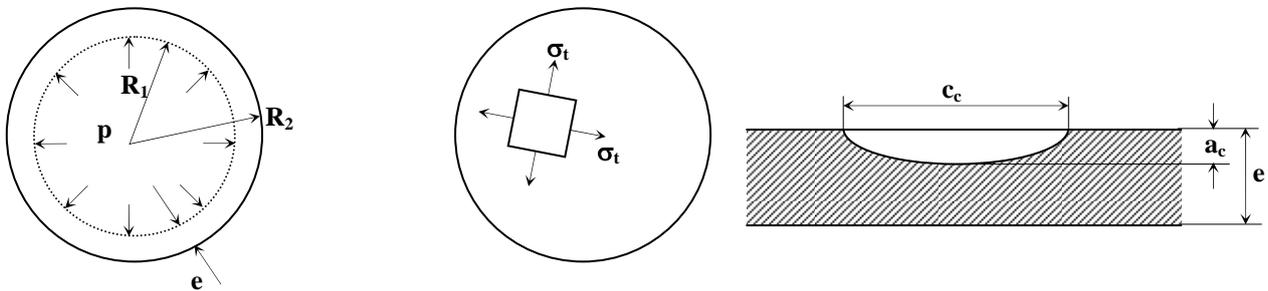
Criterio "Fuga antes de Fractura" $e_1 > e_2$; Todos los aceros lo cumplen menos 300-M Rev. A 300°C; Al solo 7475-T7351, Ti muy cerca

10.5. Seleccionar un material para un recipiente esférico de diámetro D_1 para conseguir alta presión, con factor de seguridad a colapso plástico $X_p = \frac{\sigma_y}{\sigma}$ y diseño de Fuga Antes de

Fractura FAF, con factor X_a respecto a la longitud crítica de grieta, $X_a = \frac{c_c}{e}$. El espesor de pared puede variar en el diseño:

- Desarrollar un algoritmo, en base a el límite elástico σ_y y la tenacidad a fractura K_{IC} , para maximizar la presión que se puede alcanzar para un diámetro fijo D_1
- Seleccionar un material de la Tabla A.1.
- Calcular la presión máxima y el espesor de pared necesario para cada material posible, y estimar el coste relativo, para $D_1 = 300 \text{ mm}$, $X_p = 3$ y $X_a = 6$.
- Si en una determinada aplicación la presión máxima requerida es 30 MPa. ¿Qué material es el más adecuado? Justifique la respuesta.

Resolución:



$$\sigma_t \approx \frac{p \cdot R_1}{2e} ; \quad \sigma_r = -p$$

$$X_a = \frac{c_c}{e} ; \quad X_f = \frac{K_{IC}}{K_I} ; \quad X_p = \frac{\sigma_y}{\sigma_t}$$

a) Diseñar un algoritmo

$$c_c = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_t} \right)^2; \quad c_c = X_a \cdot e; \quad X_a \cdot e = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_t} \right)^2 \Rightarrow e = \frac{1}{X_a \cdot \pi} \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_t} \right)^2$$

cambiamos σ_t por $\frac{\sigma_y}{X_p} \Rightarrow e = \frac{1}{X_a \cdot \pi} \left(\frac{K_{IC} \cdot X_p}{\sigma_y} \right)^2$

$$\sigma_t = \frac{p \cdot R_1}{2e} \Rightarrow \frac{\sigma_y}{X_p} = \frac{p \cdot R_1}{2e} \Rightarrow p = \frac{\sigma_y \cdot 2e}{X_p \cdot R_1} \Rightarrow e = \frac{p \cdot X_p \cdot R_1}{2\sigma_y}$$

$$\frac{p \cdot X_p \cdot R_1}{2\sigma_y} = \frac{1}{X_a \cdot \pi} \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_t} \right)^2 \Rightarrow p = \frac{2\sigma_y}{X_p \cdot X_a \cdot R_1 \cdot \pi} \left(\frac{K_{IC} \cdot X_p}{\sigma_y} \right)^2 = \frac{2 \cdot K_{IC}^2 \cdot X_p}{X_a \cdot R_1 \cdot \pi \cdot \sigma_y} \Rightarrow P = f_1 \cdot f_2$$

$$f_1 = \left[\frac{2 \cdot X_p}{\pi \cdot R_1 \cdot X_a} \right] \quad \text{depende exclusivamente de los datos del problema y por lo tanto es fijo}$$

$$f_2 = \left[\frac{K_{IC}^2}{\sigma_y} \right] \quad \text{depende de las propiedades del material}$$

b) Selección del material para máxima presión

Obtenemos el valor del término f_2 del algoritmo hallado $f_2 = \left[\frac{K_{IC}^2}{\sigma_y} \right]$ que como se ve en

la Tabla es máximo para el acero Ni-Cr-Mo-V ($f_2 = 46$)

	Precio (€/kg)	K_I (MPa m ^{1/2})	σ_y , (MPa)	σ_u , (MPa)	100 ϵ_f	Z (%)	ρ (t m ⁻³)	$f_2 = \frac{K_{IC}^2}{\sigma_y}$	p (MPa)	e mm	P (kg)	Precio (€)
Aceros												
C45K	0,5	66	540	840	5	7	7,9	8,1	17,1	7,1	15,9	8,0
Cr-Mo-V	0,7	60	620	780	17	45	7,9	5,8	12,3	4,5	10,0	7,0
Ni-Cr-Mo-V	1	187	760	830	20	66	7,9	46,0	97,6	28,9	64,6	64,6
35CrMo4	0,8	110	1090	1150	14	49	8,1	11,1	23,6	4,9	11,1	8,9
18-Ni maraging, sin vacío	4	123	1310	1350	12	54	8,1	11,5	24,5	4,2	9,6	38,6
18-Ni maraging, fundido al vacío	5	176	1290	1345	15	66	8,1	24,0	51,0	8,9	20,4	101,8
300-M Revenido a 650°	2	152	1070	1190	18	56	7,9	21,6	45,8	9,6	21,5	43
300-M Revenido a 300°	2	65	1740	2010	12	48	7,9	2,4	5,2	0,7	1,5	3
Aluminio y Titanio												
2014-T651	4	24	415	485	13	-	2,7	1,4	2,9	1,6	1,2	4,9
2024-T351	4	34	325	470	20	-	2,7	3,6	7,5	5,2	4,0	16,0
2219-T851	3,5	36	350	455	10	-	2,7	3,7	7,9	5,1	3,9	13,5
7075-T651	4,5	29	505	570	11	-	2,7	1,7	3,5	1,6	1,2	5,4
7475-T7351	4,25	52	435	505	14	-	2,7	6,2	13,2	6,8	5,2	22,1
Ti-6Al-4V, Recocido	10	66	925	1000	16	34	4,5	4,7	10,0	2,4	3,1	30,9

c) Vasija $D_I = 300$ mm, $X_p = 3$, $X_a = 6$

Criterio de fractura $e_1 = \frac{1}{\pi \cdot X_a} \left(\frac{K_{IC} \cdot X_p}{\sigma_y} \right)^2$

Acero C45K; $e_1 = \frac{1}{\pi \cdot 6} \left(\frac{66 \cdot 3}{540} \right)^2 = 7,13 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 7,13 \text{ mm}$

Criterio de plastificación $e_2 = \frac{p \cdot R_1 \cdot X_p}{2 \cdot \sigma_y}$; como $p = 17,1 \text{ MPa}$

$$\text{Acero C45K; } e_2 = \frac{17,1 \cdot 150 \cdot 3}{2 \cdot 540} = 7,13 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 7,13 \text{ mm}$$

Coste relativo:

En un recipiente esférico $R \approx D_1 / 2$, tomamos D_1 como diámetro medio

$$\text{Area} = \frac{\pi \cdot D_1^2}{4} \cdot 4 = \pi \cdot D_1^2 \Rightarrow \text{Peso} = \pi \cdot D_1^2 \cdot e \cdot \rho$$

$$\text{Acero C45K} \Rightarrow \pi \cdot 3^2 \cdot 7,13 \cdot 10^{-2} \cdot 7,9 \cdot 0,5 = 8 \text{ €}$$

Repitiendo la operación para todos los materiales vemos el coste relativo de cada uno de ellos.

d) $p = 30 \text{ MPa}$, el más adecuado

Solo valen los aceros: Ni-Cr-Mo-V, el maraging fabricado al vacío y el 300-M revenido a 650 °C. De estos tres el más económico es el 300-M revenido a 650 °C.

10.6. Se quiere proyectar un gasoducto que se prevé trabaje a una presión máxima de 8 MPa, que desciende a un valor mínimo de 2 MPa dos veces al día debido a variaciones en el consumo. La tubería correspondiente se proyecta con un radio medio de 175 mm y un espesor de 6 mm. Ante el problema que se plantea se determina el comportamiento en fatiga del material de la tubería, estudiando la chapa de la que se fabrica la misma, perforada lateralmente con una fisura de 20 mm. Los ensayos de caracterización han revelado que con una variación tensional de hasta 40 MPa no hay propagación y si es superior a dicho valor, la propagación viene dada por la ley:

$$\frac{da}{dN} = 1,3 \cdot 10^{-11} (\Delta K_I)^3 \left(\frac{m}{\text{ciclo}} \right)$$

Aplicar los resultados para determinar la máxima profundidad de una fisura elíptica, longitudinal y no pasante en el tubo, primero para que no se propague, y segundo para evitar que la tubería se perfora en 50 años de vida de la misma suponiendo propagación. En este último caso, determinar la tenacidad a fractura mínima que debe exigirse al acero en el Pliego de Condiciones para evitar roturas catastróficas.

$$K_I (\text{chapas}) = 1,12 \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \qquad K_I (\text{tubería}) = 0,96 \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$$

Resolución:

Teniendo en cuenta que el espesor de la tubería es pequeño frente al radio, se admite la

fórmula de los tubos delgados: $\sigma = \frac{p \cdot R}{e}$

$$p_{\max} = 8 \text{ MPa} \Rightarrow \sigma_{\max} = \frac{8 \cdot 175}{6} = 233 \text{ MPa}$$

Para: $\} \Rightarrow \Delta\sigma = 175 \text{ MPa}$, 2 veces al día

$$p_{\min} = 2 \text{ MPa} \Rightarrow \sigma_{\min} = \frac{2 \cdot 175}{6} = 58 \text{ MPa}$$

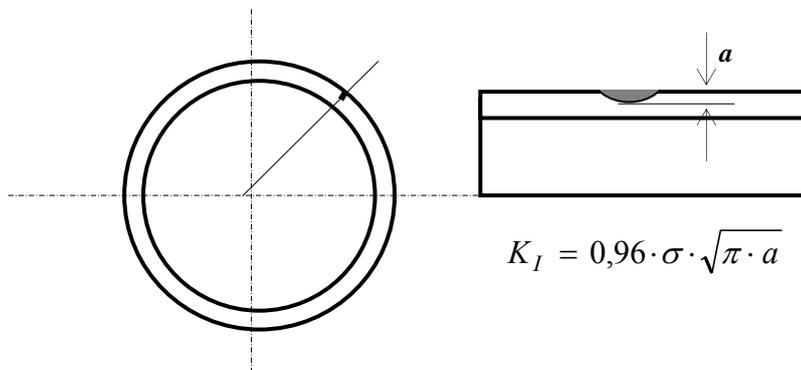
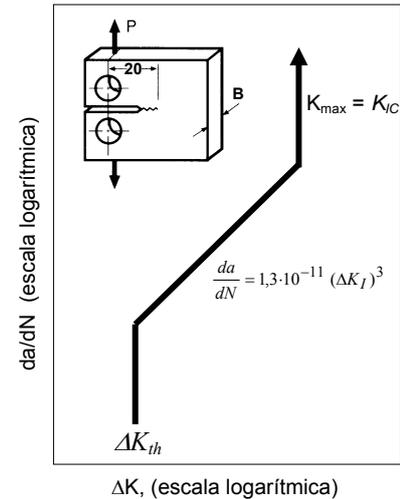
Ensayos sobre la chapa de fabricar tubería: $K_I(\text{chapas}) = 1,12 \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$, fisura de 20 mm

No propagación para $\Delta\sigma = 40 \text{ MPa}$, luego:

$$\Rightarrow \text{Umbral} \quad \Delta K_{th} = 1,12 \cdot 40 \cdot \sqrt{\pi \cdot a} = 11,2 \text{ MPa}\sqrt{m}$$

$$\Rightarrow \text{Zona II} \quad \frac{da}{dN} = 1,3 \cdot 10^{-11} (\Delta K_I)^3 \text{ (m/ciclo)}$$

Conocido el comportamiento en fatiga del material, volvemos a la tubería con una fisura elíptica no pasante y longitudinal (exterior sin gas a presión)



a) **No propagación** $\Rightarrow \Delta K_I \leq \Delta K_{th}$

$$0,96 \cdot 175 \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \leq 11,2 \text{ MPa}\sqrt{m} \Rightarrow a \leq 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ [m]} = 1,4 \text{ mm}$$

b) **Vida de 50 años** $\Rightarrow \Delta K_I > \Delta K_{th} \text{ [} a \leq 1,4 \text{ mm]}$

Ley de Paris

$$\frac{da}{dN} = 1,3 \cdot 10^{-11} \cdot (\Delta K_I)^3 = 1,3 \cdot 10^{-11} \cdot (0,96 \cdot 175 \cdot \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{a})^3 = 3,432 \cdot 10^{-4} \cdot a^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{Integrándola: } \int_0^{50 \text{ años}} dN = \int_{a_i}^{6 \text{ mm}} \frac{1}{3,432 \cdot 10^{-4}} \cdot \frac{da}{a^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow N_{50 \text{ años}} = \frac{1}{3,432 \cdot 10^{-4}} \left[\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \right]_{a_i}^{6 \text{ mm}}$$

$$50 \cdot 365 \cdot 2 = \frac{1}{3,432 \cdot 10^{-4}} [-2] \left[\frac{1}{\sqrt{0,006}} - \frac{1}{\sqrt{a_i}} \right] \Rightarrow a_i = 2,7 \text{ mm}$$

c) Tenacidad a fractura mínima para evitar rotura catastrófica,

Debe producirse perforación o fuga antes de la rotura *leak before break*.

$$K_{IC} \geq 0,96 \cdot \sigma_{\max} \cdot \sqrt{\pi \cdot 0,006} \Rightarrow K_{IC} \geq 0,96 \cdot 233 \cdot \sqrt{\pi \cdot 0,006} = 30,7 \text{ MPa} \sqrt{m}$$

10.7 Calcular el diagrama completo de resistencia residual de una placa de anchura $W = 600 \text{ mm}$, agrietada en el centro de un material que tiene $\sigma_{ys} = 485 \text{ MPa}$ y $K_C = 95 \text{ MPa} \sqrt{m}$

- b) Lo mismo para un panel de anchura $W = 150 \text{ mm}$
- c) Lo mismo para una placa con una grieta en un extremo de anchura $W = 250 \text{ mm}$

En todos los casos tome los valores de la constante geométrica de las tablas adjuntas. Tenga en cuenta el colapso.

Para cada caso determine el tamaño de grieta permisible para una tensión de 400 MPa, una tensión de 200 MPa y una tensión de 100 MPa, mediante la lectura de los diagramas.

Resolución:

$$\text{a) } W = 600 \text{ mm } \sigma = 400 \text{ MPa}, Y = 1 \quad 95 = 1 \cdot 400 \sqrt{\pi \cdot a}; a = 18 \text{ mm} \Rightarrow Y = 1,0069$$

$$95 = 1,069 \cdot 400 \sqrt{\pi \cdot a}; a = 17,7 \text{ mm}$$

$$\sigma = 200 \text{ MPa}, Y = 1; \quad 95 = 1 \cdot 200 \sqrt{\pi \cdot a}; a = 71,81 \text{ mm} \Rightarrow Y = 0,91$$

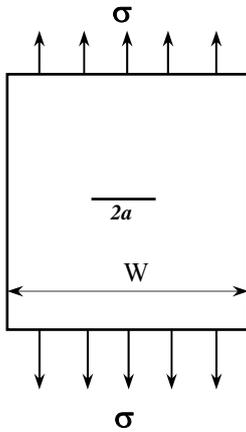
$$95 = 0,91 \cdot 200 \sqrt{\pi \cdot a}; a = 86,7 \text{ mm}$$

$$\sigma = 100 \text{ MPa}, Y = 1; \quad 95 = 1 \cdot 100 \sqrt{\pi \cdot a}; a \approx 200 \text{ mm} \Rightarrow Y \approx 1,30$$

De esta misma manera se opera en los otros casos.

Es mejor utilizar una hoja electrónica tipo Excell que nos permite escenificar todos los casos, como se ha representado en la Figura, obtenida a partir de un archivo Excell, que nos itera las distintas soluciones del factor geométrico a partir de la introducción de los algoritmos que se han indicado en la Tabla de este problema para las distintas formas de grieta.

En los casos a) y b) la fractura es mucho más probable que el colapso, representado por la línea recta, mientras que en el caso c) son muy semejantes.

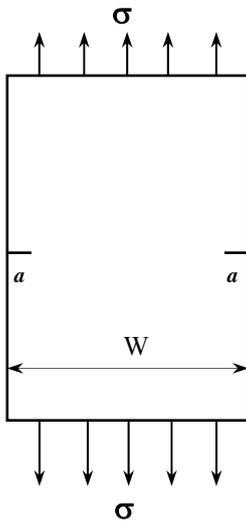


$$K_I = Y \sigma \sqrt{\pi a}$$

$$Y = \sqrt{\sec \frac{\pi a}{W}}$$

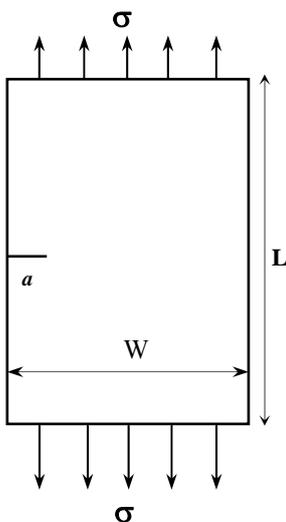
ó

$$Y = 1 + 0,256 \frac{a}{W} - 1,152 \left(\frac{a}{W} \right)^2 + 12,2 \left(\frac{a}{W} \right)^3$$



$$K_I = Y \sigma \sqrt{\pi a}$$

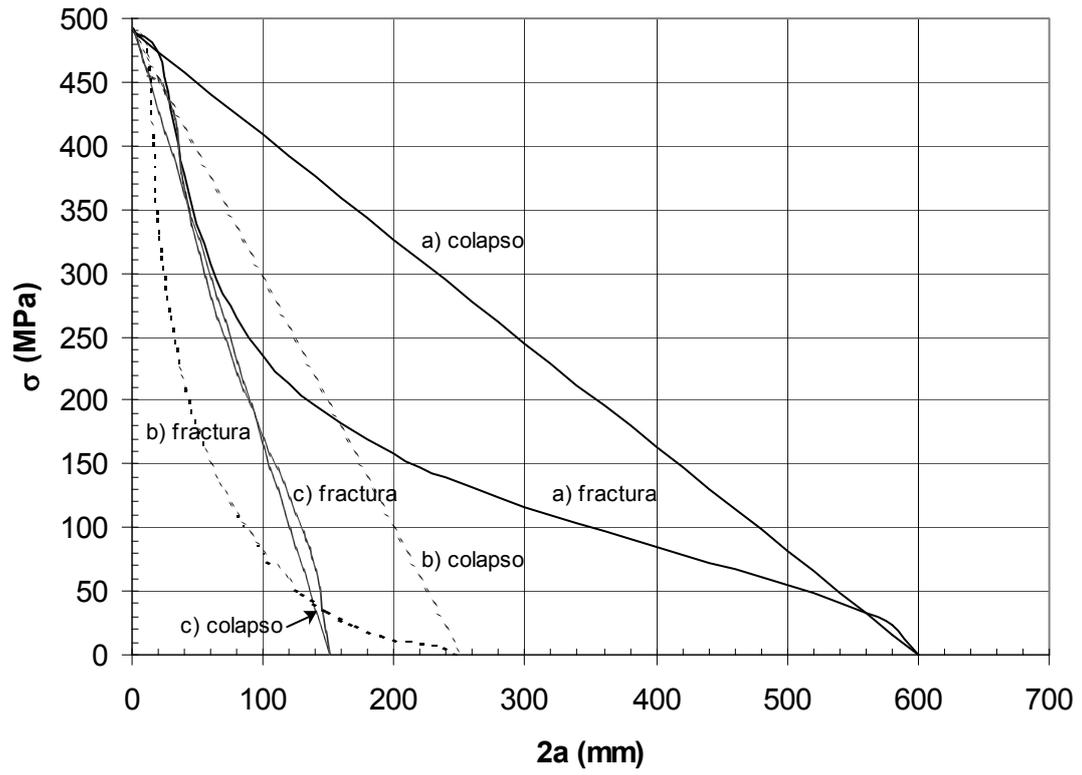
$$Y = 1,12 + 0,43 \frac{a}{W} - 4,79 \left(\frac{a}{W} \right)^2 + 15,48 \left(\frac{a}{W} \right)^3$$



Solo para $L/W = 2$

$$K_I = Y \sigma \sqrt{\pi a}$$

$$Y = 1,12 + 0,23 \frac{a}{W} + 10,56 \left(\frac{a}{W} \right)^2 - 21,74 \left(\frac{a}{W} \right)^3 + 30,42 \left(\frac{a}{W} \right)^4$$



Apéndice

TABLAS PARA EL CÁLCULO DE $f(a/W)$ PARA PROBETAS DE FLEXIÓN Y TRACCIÓN (ASTM E-399 1997)

Probeta de Flexión

a/W	f(a/W)	a/W	f/a/W)
0,450	2,29	0,500	2,66
0,455	2,32	0,505	2,70
0,460	2,35	0,510	2,75
0,465	2,39	0,515	2,79
0,470	2,43	0,520	2,84
0,475	2,46	0,525	2,89
0,480	2,50	0,530	2,94
0,485	2,54	0,535	2,99
0,490	2,58	0,540	3,04
0,495	2,62	0,545	3,09
		0,550	3,14

Probeta de Tracción Compacta

a/W	f(a/W)	a/W	f/a/W)
0,450	8,34	0,500	9,66
0,455	8,46	0,505	9,81
0,460	8,58	0,510	9,96
0,465	8,70	0,515	10,12
0,470	8,83	0,520	10,29
0,475	8,96	0,525	10,45
0,480	9,09	0,530	10,63
0,485	9,23	0,535	10,80
0,490	9,37	0,540	10,98
0,495	9,51	0,545	11,17
		0,550	11,36

AENOR

NORMA EUROPEA
EUROPEAN STANDARD
NORME EUROPÉENNE
EUROPÄISCHE NORM

EN ISO 12737

Diciembre 2010

ICS 77.040.10

Sustituye a EN ISO 12737:2005

Versión en español

Materiales metálicos
Determinación de la resistencia a la fractura por deformación plana
(ISO 12737:2010)

**Metallic materials. Determination of
plane-strain fracture toughness.**
(ISO 12737:2010).

**Matériaux métalliques. Détermination du
facteur d'intensité de contrainte critique.**
(ISO 12737:2010).

**Metallische Werkstoffe. Bestimmung der
Bruchzähigkeit (ebener
Dehnungszustand).** (ISO 12737:2010).

Esta norma europea ha sido aprobada por CEN el 2010-10-04.

Los miembros de CEN están sometidos al Reglamento Interior de CEN/CENELEC que define las condiciones dentro de las cuales debe adoptarse, sin modificación, la norma europea como norma nacional. Las correspondientes listas actualizadas y las referencias bibliográficas relativas a estas normas nacionales pueden obtenerse en el Centro de Gestión de CEN, o a través de sus miembros.

Esta norma europea existe en tres versiones oficiales (alemán, francés e inglés). Una versión en otra lengua realizada bajo la responsabilidad de un miembro de CEN en su idioma nacional, y notificada al Centro de Gestión, tiene el mismo rango que aquéllas.

Los miembros de CEN son los organismos nacionales de normalización de los países siguientes: Alemania, Austria, Bélgica, Bulgaria, Chipre, Croacia, Dinamarca, Eslovaquia, Eslovenia, España, Estonia, Finlandia, Francia, Grecia, Hungría, Irlanda, Islandia, Italia, Letonia, Lituania, Luxemburgo, Malta, Noruega, Países Bajos, Polonia, Portugal, Reino Unido, República Checa, Rumanía, Suecia y Suiza.

CEN
COMITÉ EUROPEO DE NORMALIZACIÓN
European Committee for Standardization
Comité Européen de Normalisation
Europäisches Komitee für Normung
CENTRO DE GESTIÓN: Avenue Marnix, 17-1000 Bruxelles

© 2010 CEN. Derechos de reproducción reservados a los Miembros de CEN.

PRÓLOGO

El texto de la Norma EN ISO 12737:2010 ha sido elaborado por el Comité Técnico ISO/TC 164 *Ensayos mecánicos de los materiales metálicos* en colaboración con el Comité Técnico ECISS/TC 101 *Métodos de ensayo (distintos de análisis químicos)*, cuya Secretaría desempeña AFNOR.

Esta norma europea debe recibir el rango de norma nacional mediante la publicación de un texto idéntico a ella o mediante ratificación antes de finales de junio de 2011, y todas las normas nacionales técnicamente divergentes deben anularse antes de finales de junio de 2011.

Se llama la atención sobre la posibilidad de que algunos de los elementos de este documento estén sujetos a derechos de patente. CEN y/o CENELEC no es(son) responsable(s) de la identificación de dichos derechos de patente.

Esta norma anula y sustituye a la Norma EN ISO 12737:2005.

De acuerdo con el Reglamento Interior de CEN/CENELEC, están obligados a adoptar esta norma europea los organismos de normalización de los siguientes países: Alemania, Austria, Bélgica, Bulgaria, Chipre, Croacia, Dinamarca, Eslovaquia, Eslovenia, España, Estonia, Finlandia, Francia, Grecia, Hungría, Irlanda, Islandia, Italia, Letonia, Lituania, Luxemburgo, Malta, Noruega, Países Bajos, Polonia, Portugal, Reino Unido, República Checa, Rumanía, Suecia y Suiza.

DECLARACIÓN

El texto de la Norma ISO 12737:2010 ha sido aprobado por CEN como Norma EN ISO 12737:2010 sin ninguna modificación.

ÍNDICE

	Página
PRÓLOGO	7
1 OBJETO Y CAMPO DE APLICACIÓN	8
2 NORMAS PARA CONSULTA	8
3 TÉRMINOS Y DEFINICIONES	8
4 SÍMBOLOS Y DESIGNACIONES	9
5 PRINCIPIO	9
6 APARATOS	11
6.1 Máquina de ensayo y medida de la fuerza	11
6.2 Máquina de fisuración por fatiga.....	11
6.3 Galga de desplazamiento	11
6.4 Dispositivos de ensayo.....	11
7 TAMAÑO, CONFIGURACIÓN Y PREPARACIÓN DE LA PROBETA	12
7.1 Tamaño de la probeta	12
7.2 Proporciones recomendadas para las probetas	12
7.2.1 Probetas recomendadas	12
7.2.2 Proporciones alternativas	12
7.2.3 Configuraciones de las probetas alternativas (sólo para información).....	12
7.2.4 Muesca de inicio de fisura por fatiga	12
7.3 Preparación de la probeta y prefisuración por fatiga	12
7.3.1 Estado del material.....	12
7.3.2 Orientación del plano de fisura	14
7.3.3 Mecanizado	14
7.3.4 Prefisuración por fractura.....	15
8 PROCEDIMIENTO OPERATORIO	15
8.1 Determinación de las dimensiones de la probeta	15
8.2 Temperatura de ensayo de la probeta	15
8.3 Determinación de las dimensiones del dispositivo para una probeta en flexión	15
9 PROCEDIMIENTO DE ENSAYO	16
10 CÁLCULO E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS	16
10.1 Generalidades	16
10.2 Tensiones residuales	16
11 INFORME DE ENSAYO	16
ANEXO A (Normativo) PREFISURACIÓN POR FATIGA DE PROBETAS PARA RESISTENCIA A LA FRACTURA K_{Ic}	19
ANEXO B (Normativo) PROBETA PARA ENSAYO DE FLEXIÓN	20

ANEXO C (Normativo) PROBETA COMPACTA 22
ANEXO D (Informativo) DISPOSITIVOS DE FIJACIÓN PARA EL ENSAYO 24
BIBLIOGRAFÍA 26

1 OBJETO Y CAMPO DE APLICACIÓN

Esta norma internacional especifica el método para determinar la resistencia a la fractura por deformación plana de materiales metálicos homogéneos utilizando una probeta mellada y prefisurada por fatiga, y que ha sido sometida a un aumento lento de la fuerza de rotura por desplazamiento.

2 NORMAS PARA CONSULTA

Las normas que a continuación se indican son indispensables para la aplicación de esta norma. Para las referencias con fecha, sólo se aplica la edición citada. Para las referencias sin fecha se aplica la última edición de la norma (incluyendo cualquier modificación de ésta).

ISO 7500-1 *Materiales metálicos. Verificación de máquinas de ensayos uniaxiales estáticos. Parte 1: Máquinas de ensayo de tracción/compresión. Verificación y calibración del sistema de medida de fuerza.*

ISO 9513 *Materiales metálicos. Calibración de los extensómetros utilizados en ensayos uniaxiales.*

ASTM E399-09, *Método de ensayo estándar para la resistencia a la fractura por deformación plana elástica lineal K_{Ic} de materiales metálicos.*

3 TÉRMINOS Y DEFINICIONES

Para los fines de este documento, se aplican los términos y definiciones siguientes:

3.1 factor de intensidad del esfuerzo en la deformación plana, K_I :

Magnitud del campo elástico de esfuerzos en el extremo de una fisura sometida a un desplazamiento en modo de apertura (modo I).

NOTA Es función de la fuerza aplicada y del tamaño y geometría de la probeta de ensayo y de la longitud de la fisura, y tiene dimensiones de fuerza por longitud elevada a $^{-3/2}$.

3.2 resistencia a la fractura por deformación plana, K_{Ic} :

Medida, mediante el procedimiento operacional de este método, de la resistencia de un material a la extensión de la fisura cuando en el estado del esfuerzo cerca del extremo de la fisura predomina la deformación plana y la deformación plástica es limitada.

NOTA Es el valor crítico de K_I para el que se produce una importante extensión de la fisura a medida que aumenta la carga con alta limitación a la deformación plástica.

3.3 orientación del plano de fisura:

Método para relacionar el plano y la dirección de extensión de la fisura con las direcciones características del producto.

NOTA Se utiliza una notación con guiones en la que la letra(s) que preceden al guión representa(n) la dirección perpendicular al plano de fisura y la(s) letra(s) que sigue(n) al guión representa(n) la dirección prevista de la extensión de la fisura (véase la figura 1). Para metales forjados, la letra X siempre denota la dirección de la deformación principal (flujo máximo del grano en el producto), la letra Y la dirección de deformación mínima y la letra Z la dirección perpendicular al plano X-Y. En la notación empleada en la Norma ASTM E399-09, la X corresponde a la L, la Y corresponde a la T y la Z corresponde a la S.

Si las direcciones de la probeta no coinciden con las direcciones características del producto, se utilizan dos letras para designar la dirección perpendicular al plano de fisura o la dirección prevista de la extensión de la fisura [véase la figura 1 b)]. Si no existe dirección de flujo del grano (como en una fundición), los ejes de referencia pueden elegirse arbitrariamente, pero han de quedar claramente identificados.

3.4 desplazamiento de la apertura de la muesca, V :

Desplazamiento medido en o cerca de la boca de la muesca.

4 SÍMBOLOS Y DESIGNACIONES

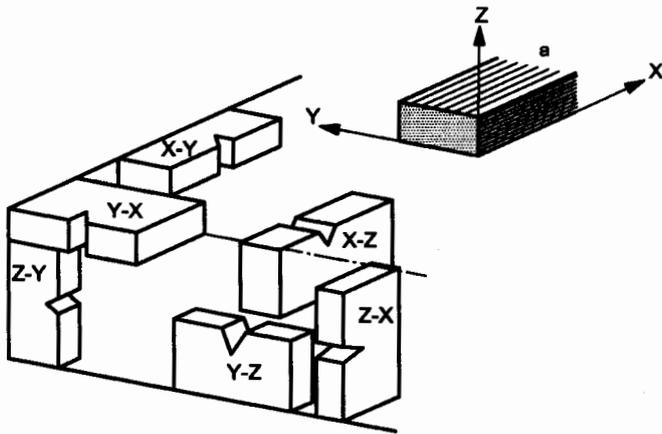
Para los fines de esta norma internacional se aplican los siguientes símbolos (véanse también las figuras 1, 2 y 4).

Símbolo	Unidad	Designación
a	mm	Longitud de la fisura
B	mm	Espesor de la probeta
E	MPa	Módulo de Young
F	kN	Fuerza aplicada
F_Q	kN	Valor particular de F (véase la figura 4)
F_5	kN	Valor particular de F (véase la figura 4)
K_f	MPa·m ^{1/2 a}	Factor de intensidad del esfuerzo máximo durante el estado final de fisuración por fatiga
K_Q	MPa·m ^{1/2}	Valor provisional de K_{Ic}
K_I	MPa·m ^{1/2}	Factor de intensidad del esfuerzo del modo de apertura (modo I)
K_{Ic}	MPa·m ^{1/2}	Valor crítico de K_I (resistencia a la fractura por deformación plana)
R	–	Relación entre las fuerzas mínima y máxima de fisuración por fatiga durante cualquier ciclo individual de la operación de fatiga
$R_{p0,2}$	MPa	Límite elástico convencional al 0,2%
S	mm	Espaciado entre los puntos de carga externos en caso de flexión
V	mm	Desplazamiento de la apertura de la muesca
W	mm	Anchura de la probeta
ΔK_I	MPa·m ^{1/2}	Diferencia entre los valores máximo y mínimo de K_I durante cualquiera de los ciclos de la operación de fatiga

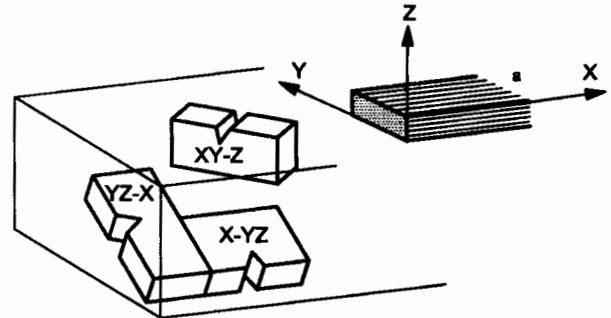
^a 0,031 6 MPa·m^{1/2} = 1 N·mm^{-3/2} = 0,031 6 MN·m^{-3/2}.

5 PRINCIPIO

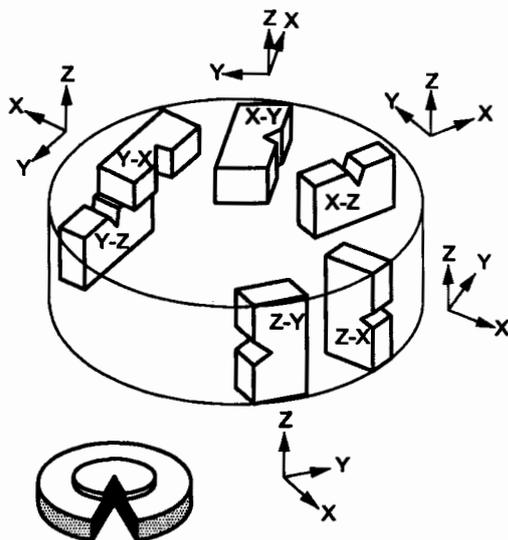
Este método abarca la determinación de la resistencia a la fractura por deformación plana (K_{Ic}) de materiales metálicos mediante ensayos con aumento progresivo de la fuerza en probetas prefisuradas por fatiga. En los anexos B y C se proporcionan detalles sobre las probetas y los procedimientos experimentales. Se registra de forma gráfica y automática la fuerza frente al desplazamiento de la apertura de la muesca, o se transforma dicha información en forma digital para su acumulación en un programa informático de almacenamiento de información y subsecuente procesado. La fuerza correspondiente a un 2% de extensión aparente de la fisura se establece mediante una desviación especificada del tramo lineal del registro del ensayo. Si se satisfacen ciertos requisitos de validación, el valor de K_{Ic} se calcula a partir de dicha fuerza.



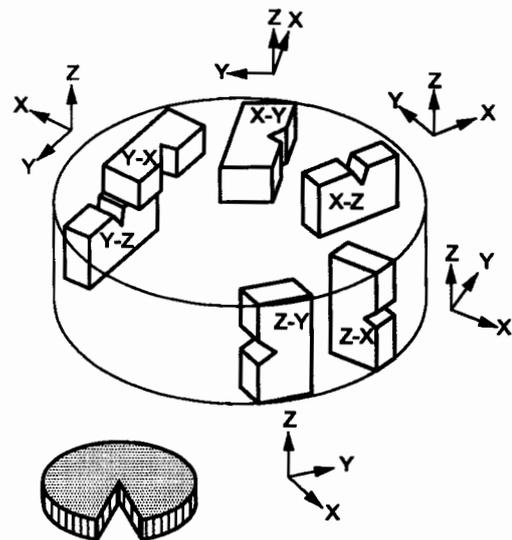
a) Identificación básica



b) Identificación no básica



c) Flujo de grano radial, dirección de trabajo axial



d) Flujo de grano axial, dirección de trabajo radial

^a Dirección de flujo de grano

Figura 1 – Identificación del plano de fisura

La propiedad K_{Ic} caracteriza la resistencia a la fractura de un material que presenta una fisura pronunciada bajo condiciones de tracción rigurosas, de modo que:

- a) el estado tensional cerca del frente de la fisura se aproxima al de deformación plana; y
- b) la zona plástica del extremo de la fisura es pequeña comparada con el tamaño de la fisura, el espesor de la probeta y el ligamento delante de la fisura.

Se admite que el valor de K_{Ic} representa un límite inferior de resistencia a la fractura en el entorno y a la temperatura de ensayo.

Las cargas cíclicas o sostenidas pueden provocar una extensión de la fisura a valores de K_I menores que K_{Ic} . La extensión de la fisura bajo cargas cíclicas o sostenidas puede verse influida por la temperatura y el entorno. Por lo tanto, cuando K_{Ic} se aplica al diseño de componentes, deberían considerarse las diferencias que pudieran existir entre las condiciones del laboratorio de ensayo y las reales.

Con el ensayo de resistencia a la fractura por deformación plana no puede garantizarse por adelantado que se determinará un K_{Ic} válido en un ensayo particular.

6 APARATOS

6.1 Máquina de ensayo y medida de la fuerza

La máquina de ensayo debe estar calibrada de acuerdo con la Norma ISO 7500-1 y debe ser al menos de grado 1. La máquina de ensayo debe disponer de un dispositivo para el registro gráfico y automático de la fuerza aplicada a la probeta; de manera alternativa, puede utilizarse un sistema informático de adquisición de datos para registrar la fuerza y el desplazamiento para sucesivos análisis. La combinación del dispositivo sensor de la carga y el sistema de registro debe permitir que se pueda determinar la fuerza F_Q (como se define en el capítulo 10) a partir del registro del ensayo hasta $\pm 1\%$.

6.2 Máquina de fisuración por fatiga

Cuando sea posible, la máquina de fatiga y el dispositivo indicador de la fuerza deben calibrarse estáticamente de acuerdo con la Norma ISO 7500-1, y deben tener un grado de al menos 2. Si la máquina no puede calibrarse estáticamente, la fuerza aplicada debe conocerse con una precisión de $\pm 2,5\%$. Es necesario realizar con cuidado la alineación y colocación de la probeta para favorecer la formación de fisuras rectas por fatiga. La colocación debe ser tal que la distribución del esfuerzo sea uniforme en todo el espesor de la probeta y simétrica con respecto al plano de la posible fisura.

6.3 Galga de desplazamiento

El dispositivo eléctrico indicador del desplazamiento debe representar el desplazamiento relativo (V) entre dos posiciones de la galga localizadas con precisión que abarquen la boca de la muesca. El diseño de la galga de desplazamiento y de las cuchillas debe permitir la libre rotación de los puntos de contacto entre la galga y la probeta.

La galga de desplazamiento debe calibrarse de acuerdo con la Norma ISO 9513, interpretada según este método, y debe ser al menos de clase 1; sin embargo, la calibración debe realizarse al menos semanalmente durante el tiempo que la galga esté en uso. Puede requerirse una verificación periódica de mayor frecuencia dependiendo del uso y del acuerdo entre las partes contractuales.

La verificación de la galga debe realizarse a la temperatura de ensayo con una precisión de $\pm 5\text{ }^\circ\text{C}$. La respuesta de la galga debe corresponderse con la calibración del aparato con una precisión de $\pm 0,003\text{ mm}$ para desplazamientos de hasta $0,3\text{ mm}$, y de $\pm 1\%$ para valores mayores.

La determinación de un valor de desplazamiento absoluto no es necesaria porque en este método sólo se utilizan cambios en el desplazamiento. En la Norma ASTM E399-09 y en la referencia bibliográfica [1] se proporcionan dos diseños probados de galga de desplazamiento, y en el mercado se encuentran disponibles galgas similares.

6.4 Dispositivos de ensayo

El ensayo de flexión debe realizarse utilizando un dispositivo diseñado para minimizar los efectos de la fricción permitiendo a los rodillos de apoyo rotar y trasladarse ligeramente cuando la probeta esté cargada para, de este modo, conseguir un contacto de rodadura permanente. En la figura D.1 se muestra un diseño apropiado para probetas sometidas al ensayo de flexión.

En la figura D.2 se muestra una brida de carga apropiada para ensayos con probetas compactas.

7 TAMAÑO, CONFIGURACIÓN Y PREPARACIÓN DE LA PROBETA

7.1 Tamaño de la probeta

Para que un resultado pueda considerarse válido de acuerdo con este método, el espesor de la probeta (B), la longitud de la fisura (a) y la longitud del ligamento ($W - a$) no deben ser menores que $2,5 (K_{Ic}/R_{p0,2})^2$, donde $R_{p0,2}$ es el límite elástico convencional al 0,2% del material en las condiciones del entorno y a la temperatura de ensayo. Como no puede garantizarse por adelantado que se vaya a cumplir este requisito, las dimensiones de la probeta deberían establecerse de forma conservadora para el primer ensayo de una serie. Si la forma del material disponible es tal que no es posible obtener una probeta de ensayo con espesor, longitud de fisura y longitud de ligamento mayor o igual que $2,5 (K_{Ic}/R_{p0,2})^2$, entonces no es posible realizar una medida válida de K_{Ic} de acuerdo con este método.

7.2 Proporciones recomendadas para las probetas

7.2.1 Probetas recomendadas

Las probetas recomendadas están representadas en las figuras B.1 y C.1. La anchura (W) es, nominalmente, el doble del espesor (B). La longitud de fisura (a) se encuentra comprendida entre 0,45 y 0,55 veces la anchura.

7.2.2 Proporciones alternativas

En ciertos casos puede ser necesario o deseable utilizar probetas que posean relaciones W/B distintas de 2, y se permiten proporciones alternativas (véanse los anexos B o C). Las probetas con proporciones alternativas deben, sin embargo, tener la misma relación entre longitud de fisura y anchura (a/W) que la de las probetas recomendadas.

7.2.3 Configuraciones de las probetas alternativas (sólo para información)

Si así se acuerda previamente, las configuraciones de las probetas alternativas y los métodos de análisis asociados a ellas, pueden utilizarse siempre que sean aceptados como normas nacionales para los ensayos de K_{Ic} por una entidad miembro de ISO, incluyendo aquellas normas que tengan la finalidad múltiple de medir K_{Ic} junto con J y/o las propiedades CTOD (desplazamiento por apertura del extremo de la fisura): por ejemplo, la Norma ASTM E399-09 y las referencias bibliográficas [1] y [2].

7.2.4 Muesca de inicio de fisura por fatiga

En las figuras 2 a) y 2 b) se muestran dos configuraciones de la muesca de inicio de fisura por fatiga. El radio base sugerido para la ranura de canal recto que termina en una muesca en V es de 0,10 mm o menos. Para la forma en diente angular de la muesca, el radio base sugerido es de 0,25 mm o menos. El método de preparación de la muesca es discrecional. La muesca de inicio (más fisura por fatiga) debe situarse dentro de la envolvente que se muestra en la figura 2 c) (véase el anexo A).

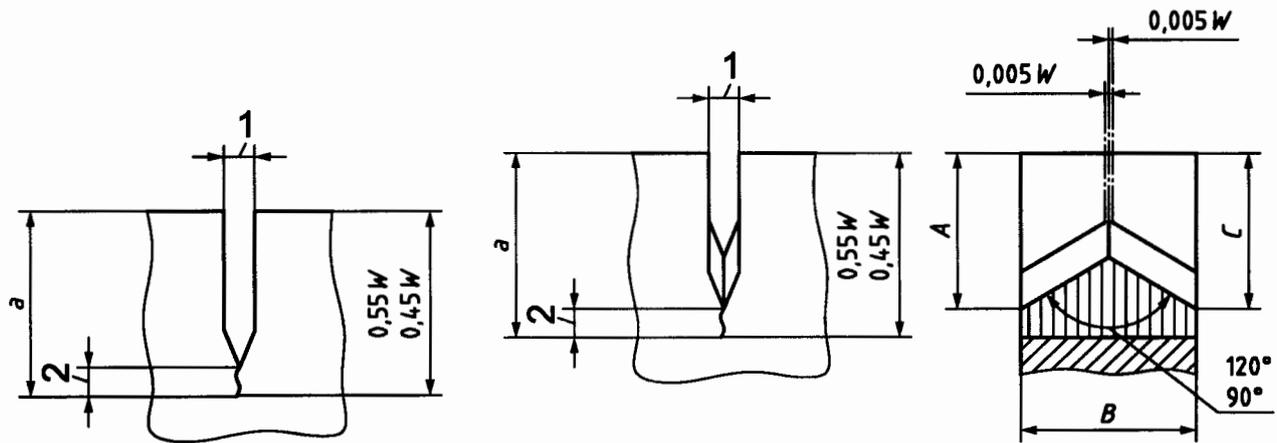
La figura 3 ilustra dos tipos de cuchillas para fijar la galga de desplazamiento.

7.3 Preparación de la probeta y prefisuración por fatiga

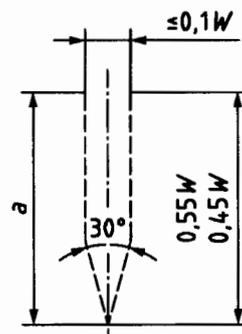
7.3.1 Estado del material

Todas las probetas deben ensayarse en su estado final de tratamiento térmico, mecanizado y acondicionamiento al entorno. Normalmente, las probetas deben mecanizarse también en este estado final. Sin embargo, para materiales que no puedan mecanizarse en el estado final, el tratamiento final puede llevarse a cabo tras el proceso de mecanizado siempre que las dimensiones y tolerancias requeridas para el tamaño, forma y acabado global de la superficie se cumplan (véanse las figuras B.1 y C.1) y que se tengan en cuenta todos los efectos del tamaño de la probeta en el estado metalúrgico inducido por ciertos tratamientos térmicos como, por ejemplo, el enfriamiento en agua de los aceros.

Medidas en milímetros



a) Muesca de canal recto

b) Muesca de diente angular^c

c) Envolvente

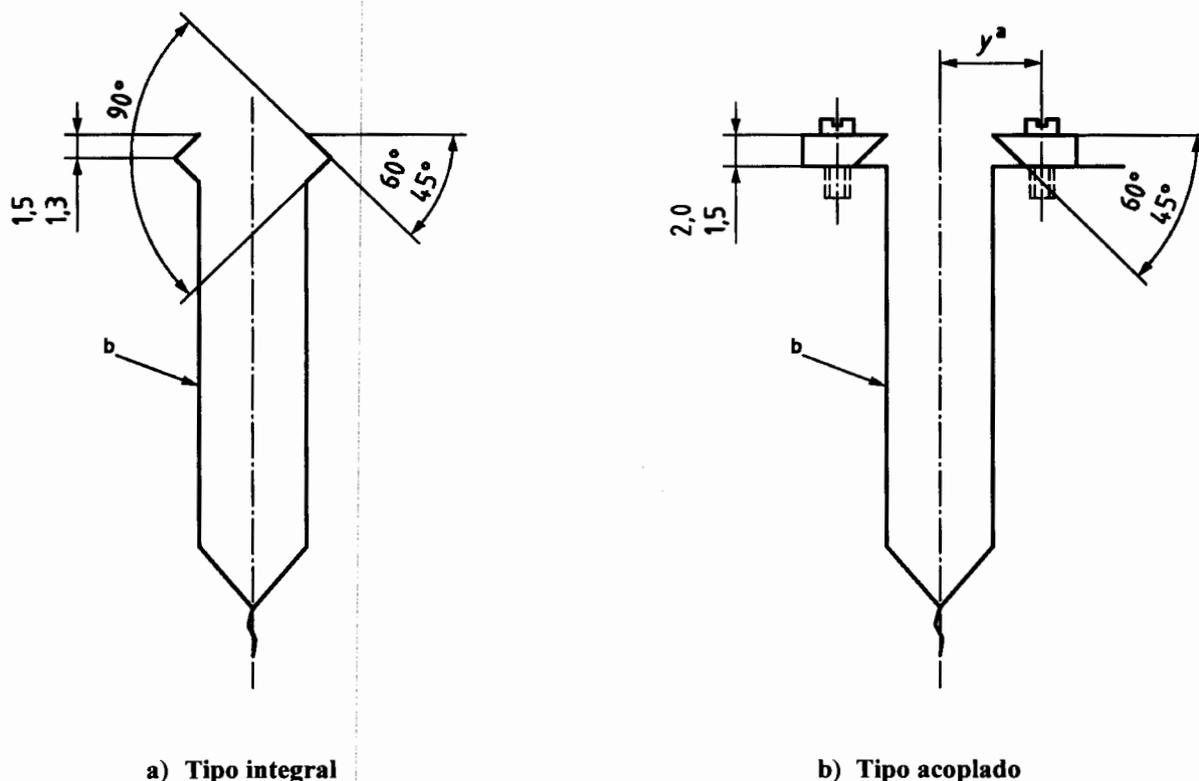
Leyenda

- 1 Anchura de muesca^a
2 Fisura de fatiga^b

- ^a La muesca de inicio de fisura debe ser perpendicular a las superficies de la probeta con una precisión de $\pm 2^\circ$. La anchura de la muesca no debe exceder de $0,1 W$ pero no debe ser menor que 1,6 mm.
- ^b Para muescas de canal recto: radio base de muesca sugerido, 0,10 mm como máximo. Ángulo máximo de extremo de cuchillas de 90° . La extensión de la fisura por fatiga en cada superficie de la probeta debe ser al menos $0,025 W$ o 1,3 mm, la que sea mayor.
- ^c Para muescas de diente angular: radio base de la muesca sugerido, 0,25 mm máximo. Ángulo máximo de extremo de cuchillas 90° , $A = C$ dentro de $\pm 0,01 W$. La fisura de fatiga debe aparecer en ambas superficies de la muestra.

Figura 2 – Muecas de inicio de fisura y máxima envolvente permisible muesca/fisura

Medidas en milímetros



a) Tipo integral

b) Tipo acoplado

Las cuchillas deben ser perpendiculares a las superficies de la muestra y paralelas con una precisión de $\pm 0,5^\circ$.

- a $2y$ más el diámetro de rosca no debe exceder de $W/2$. Si las cuchillas están pegadas o unidas de modo similar al borde de la muestra, la dimensión $2y$ debe corresponder a la distancia entre los puntos extremos de unión.
- b Véase la figura 2.

Figura 3 – Detalle de cuchilla

7.3.2 Orientación del plano de fisura

La resistencia a la fractura de un material depende normalmente de la orientación y la dirección de propagación de la fisura en relación con las direcciones principales de mecanizado del metal, el flujo de grano o las texturas producidas de diferente manera. La orientación del plano de fisura debe decidirse antes del mecanizado (véase 7.3.3), identificándola de acuerdo con los sistemas coordinados prescritos (véase 3.3) y registrándola (véase el capítulo 11).

7.3.3 Mecanizado

Los tamaños, formas, tolerancias dimensionales y acabados de superficie de la probeta deben ser como se especifica en las figuras B.1 y C.1.

7.3.4 Prefisuración por fractura

La prefisuración por fractura debe realizarse normalmente a temperatura ambiente con la probeta en el estado final de tratamiento térmico, mecanizado o acondicionamiento al entorno en que se va a ensayar. Deben utilizarse distintas temperaturas de prefisuración por fatiga y tratamientos intermedios térmicos/mecánicos/de entorno entre la prefisuración por fatiga y el ensayo, sólo cuando tales tratamientos sean necesarios para simular las condiciones para una aplicación estructural específica y puedan mantenerse las dimensiones y tolerancias requeridas para el tamaño y la forma de la muestra. Dicha prefisuración por fatiga debe efectuarse de acuerdo con los requisitos del anexo A.

8 PROCEDIMIENTO OPERATORIO

8.1 Determinación de las dimensiones de la probeta

Se mide el espesor de la probeta (B) redondeando al valor de 0,025 mm más próximo o al 0,1%, lo que sea mayor, en al menos tres posiciones equidistantes a lo largo de la dirección prevista de extensión de la fisura. Se toma la media de estas mediciones como espesor.

Se mide la anchura de la probeta (W) redondeando al valor de 0,025 mm más próximo, o al 0,1%, lo que sea mayor, en al menos tres posiciones cercanas a la situación de la muesca. Se toma la media de esas mediciones como anchura. Para una probeta compacta, se mide la anchura desde el plano de la línea central de los agujeros de los puntos de carga.

Tras la fractura, se mide la longitud de la fisura de la probeta (a) redondeando al valor de 0,05 mm más próximo o al 0,5%, lo que sea mayor, en el punto medio del espesor y en los dos puntos situados a dos cuartos del espesor. Se toma la media de estas mediciones como la longitud de fisura. La diferencia entre dos cualesquiera de las tres mediciones de la longitud de fisura no debe exceder del 10% de la media.

Se mide la longitud de fisura también en cada superficie. Para la muesca de canal recto inicial, ninguna parte del frente de la fisura debe estar a menos de 1,3 mm o 0,025 W , lo que sea mayor, de la muesca de partida; además, ninguna medición de la longitud de fisura en cualquier superficie debe diferir de la longitud media de fisura en más de un 15% y su diferencia no debe exceder del 10% de la longitud media de fisura. Para la muesca en diente angular de partida, la fisura por fatiga debe surgir del diente angular en ambas superficies; además, ninguna medición de la longitud de fisura en cualquier superficie debe diferir de la longitud media de fisura en más de un 15% y su diferencia no debe exceder del 10% de la longitud de media de fisura.

El plano de fractura debe ser paralelo al plano de la muesca de partida con una precisión de $\pm 10^\circ$ y no debe existir evidencia de fisuración múltiple (es decir, más de una fisura).

8.2 Temperatura de ensayo de la probeta

La temperatura de ensayo de la probeta debe controlarse y registrarse con una precisión de $\pm 2^\circ\text{C}$. Para ello debe colocarse un termopar o un termómetro de resistencia de platino en contacto con la superficie de la probeta a una distancia no superior a 5 mm del extremo de la fisura. Los ensayos deben realizarse in situ a una temperatura media, baja o alta, adecuada. Antes de ensayar en un medio líquido, la probeta debe permanecer sumergida en el líquido al menos durante 30 s/mm de espesor B después de que la superficie de la probeta haya alcanzado la temperatura de ensayo. Cuando se emplee un medio gaseoso, se debe considerar un tiempo inmersión de al menos 60 s/mm de espesor. El tiempo mínimo de inmersión a la temperatura de ensayo debe ser de 15 min. La temperatura de la probeta debe permanecer dentro del intervalo de $\pm 2^\circ\text{C}$ de la temperatura nominal de ensayo durante todo el ensayo y debe registrarse como se indica en el punto d) del capítulo 11.

8.3 Determinación de las dimensiones del dispositivo para una probeta en flexión

Se alinea el dispositivo de ensayo a flexión de tal modo que la línea de acción de la fuerza aplicada pase a la misma distancia de cada uno de los rodillos de soporte con una precisión del $\pm 1\%$ del vano (S) y sea perpendicular a los ejes de los rodillos con precisión de $\pm 2^\circ$. Se mide el vano (S) con una precisión del $\pm 0,5\%$.

9 PROCEDIMIENTO DE ENSAYO

Si se utiliza un registro gráfico automático, éste se ajusta de modo que la pendiente de la porción lineal del registro fuerza-desplazamiento esté comprendida entre 0,85 y 1,5. De manera alternativa, si se utiliza un sistema informatizado de adquisición de datos, se programa para recoger datos suficientes como para permitir la realización de los cálculos indicados en el capítulo 10. En cualquier caso, debe satisfacerse el último requisito del apartado 6.1 (es decir, $F_Q \pm 1\%$).

Se carga la probeta de modo que la tasa de aumento de la intensidad de esfuerzo esté comprendida entre $0,5 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{1/2}/\text{s}$ y $3,0 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{1/2}/\text{s}$ durante la deformación elástica inicial. Se continúa el ensayo hasta que la probeta no pueda soportar un mayor incremento de la fuerza aplicada. Se anota y registra la fuerza máxima ($F_{\text{máx.}}$).

10 CÁLCULO E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

10.1 Generalidades

Si se utiliza un registro gráfico automático, el valor condicional F_Q debe determinarse como sigue. Se dibuja la línea secante $0F_5$ (véase la figura 4) desde el punto 0 con pendiente $(F/V)_5 = 0,95 (F/V)_0$, donde $(F/V)_0$ es la pendiente de la tangente $0A$ al tramo lineal del registro. La fuerza F_Q queda definida de la siguiente manera: si la fuerza en cualquier punto del registro que preceda a F_5 es menor que F_5 (tipo I), entonces F_5 es F_Q . Si, no obstante, hay una carga máxima ($F_{\text{máx.}}$) precediendo a F_5 y que la supere (tipo II o tipo III), entonces esta carga máxima es igual a F_Q .

Si se utiliza un sistema informatizado de adquisición de datos, el programa de reducción de datos debe determinar las mismas fuerzas (F_Q y $F_{\text{máx.}}$) antes mencionadas. Los algoritmos para hacer esto se dejan a elección del usuario.

Se calcula la relación $F_{\text{máx.}}/F_Q$, donde $F_{\text{máx.}}$ es la fuerza máxima. Si esta relación no excede de 1,10, se procede a calcular K_Q como se describe en el anexo B o C, según convenga. Si la relación excede de 1,10, el ensayo no es un ensayo K_{Ic} válido.

Se calcula el valor $2,5 (K_Q/R_{p0,2})^2$. Si esta cantidad es menor que el espesor de la probeta, que la longitud de fisura y que la longitud del ligamento, entonces K_Q es igual a K_{Ic} . De lo contrario, no es un ensayo K_{Ic} válido.

10.2 Tensiones residuales

Las medidas de K_Q y K_{Ic} pueden estar afectadas significativamente por las tensiones residuales, especialmente en las probetas tomadas de un material en bruto de tratamiento térmico u otro estado en el que las tensiones residuales no se relajan, como soldaduras, elementos complejos forjados, o elementos en los que se han introducido intencionadamente tensiones residuales (para un efecto beneficioso). Pueden ser señales de tensiones residuales:

- una distorsión durante el mecanizado de la probeta;
- resultados de ensayo dependientes de la configuración de la probeta; y
- un crecimiento irregular de la prefisuración por fatiga (tanto curvatura excesiva del frente de fisura, como crecimiento fuera del plano).

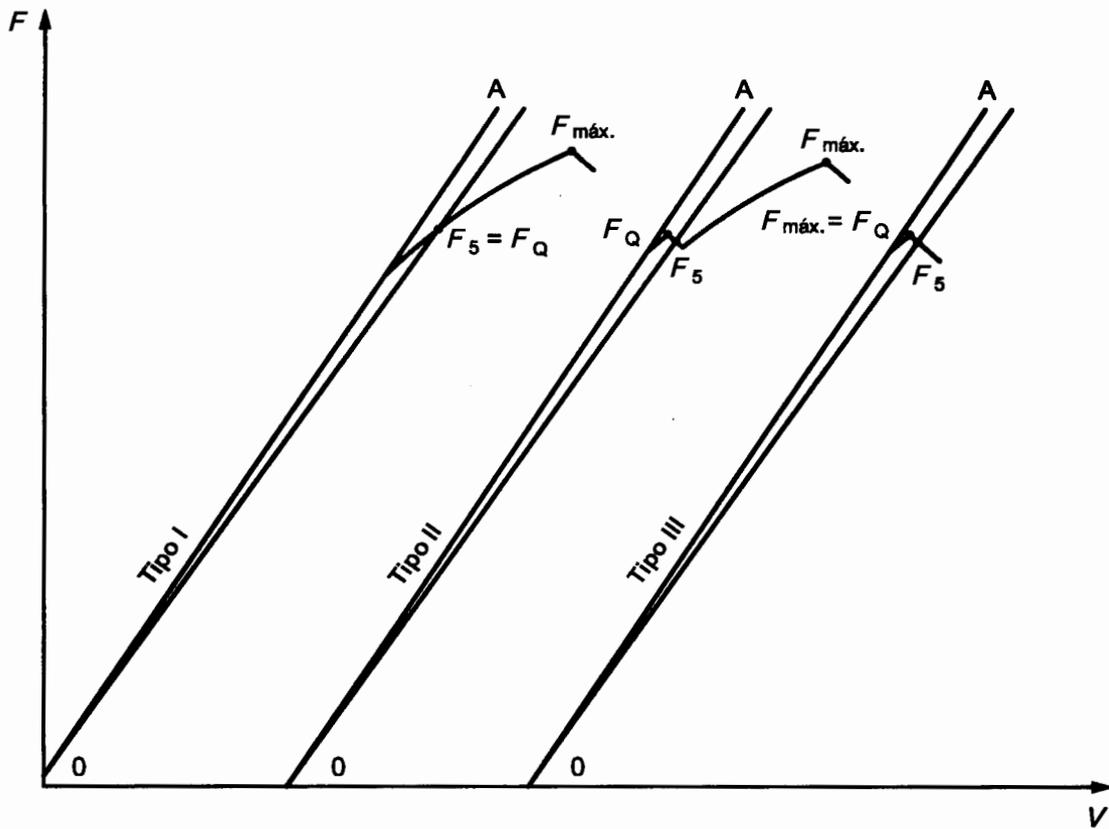
Se debe tener cuidado en la aplicación de resultados de probetas sospechosas de albergar tensiones residuales. Véase la Norma ASTM E399-09.

11 INFORME DE ENSAYO

El informe del ensayo debe incluir al menos la siguiente información:

- referencia a esta norma internacional;

- b) caracterización del material y forma del producto ensayado;
- c) límite elástico convencional al 0,2%;
- d) temperatura y condiciones para el ensayo y para la prefisuración por fatiga;
- e) tipo de probeta de ensayo;
- f) orientación del plano de fisura (véase la figura 1);
- g) propiedades medidas y resultados para cada probeta de ensayo, incluyendo:
 - 1) registro fuerza-desplazamiento; y
 - 2) anchura (W) y espesor (B);
 - 3) máxima intensidad del esfuerzo de fatiga K_f e intervalo de intensidad de esfuerzo ΔK_I en el 2,5% final de la longitud total de la muesca más la extensión de la fisura (a);
 - 4) longitud media de fisura (a);
 - 5) relación de fuerzas $F_{m\acute{a}x.}/F_Q$;
 - 6) resistencia a la fractura por deformación plana (K_{Ic}).



Leyenda

V Desplazamiento
 F Fuerza

Figura 4 – Registros típicos fuerza-desplazamiento

ANEXO A (Normativo)**PREFISURACIÓN POR FATIGA DE PROBETAS PARA RESISTENCIA A LA FRACTURA K_{Ic}**

El objetivo de la prefisuración por fatiga es producir una fisura pronunciada que no se vea afectada por los detalles del procedimiento de prefisuración. Los siguientes requisitos permitirán alcanzar este objetivo.

A.1 Dispositivos

Los dispositivos recomendados para el ensayo de fractura son también adecuados para el ensayo de prefisuración por fatiga. Si se utilizan otros distintos, la curva de calibración de K debe ser conocida con una precisión del $\pm 5\%$.

A.2 Requisitos de la probeta

La prefisuración por fatiga se debe llevar a cabo de acuerdo con el apartado 7.3. Para facilitar la prefisuración a bajos niveles de intensidad de carga, el radio en la base de la muesca en la probeta debe ser como se prescribe en el apartado 7.2.4.

A.3 Procedimiento de prefisuración

La prefisuración por fatiga puede realizarse tanto bajo un control de fuerza como bajo un control de desplazamiento. La relación entre la tensión cíclica mínima y la tensión máxima (R) no debe ser mayor que 0,1. El factor de intensidad de tensión máximo durante la prefisuración por fatiga no debe exceder del 80% del valor de K_Q , valor determinado en el ensayo subsiguiente, si K_Q es cualificado como un resultado válido de K_{Ic} . En la etapa final de la prefisuración por fatiga (2,5% de la longitud a), K_f no debe exceder del 60% de K_Q . Si la prefisuración y el ensayo se llevan a cabo a diferentes temperaturas, K_f no debe exceder de $0,6 [(R_{p0,2})_p / (R_{p0,2})_t] K_Q$, donde $(R_{p0,2})_p$ y $(R_{p0,2})_t$ representan el límite elástico convencional al 0,2% a la prefisuración y a las temperaturas de ensayo, respectivamente.

ANEXO B (Normativo)

PROBETA PARA ENSAYO DE FLEXIÓN

B.1 Probeta de ensayo

La probeta para el ensayo de flexión normalizado consiste en una viga mellada y fisurada por fatiga en un solo canto, cargada en tres puntos flexionándola. El vano (S) es nominalmente igual a cuatro veces la anchura (W). Las proporciones generales de la configuración de esta probeta se muestran en la figura B.1. Otras probetas alternativas a ésta pueden tener una relación $1 < W/B < 4$ y deben tener también un vano nominal igual a $4W$.

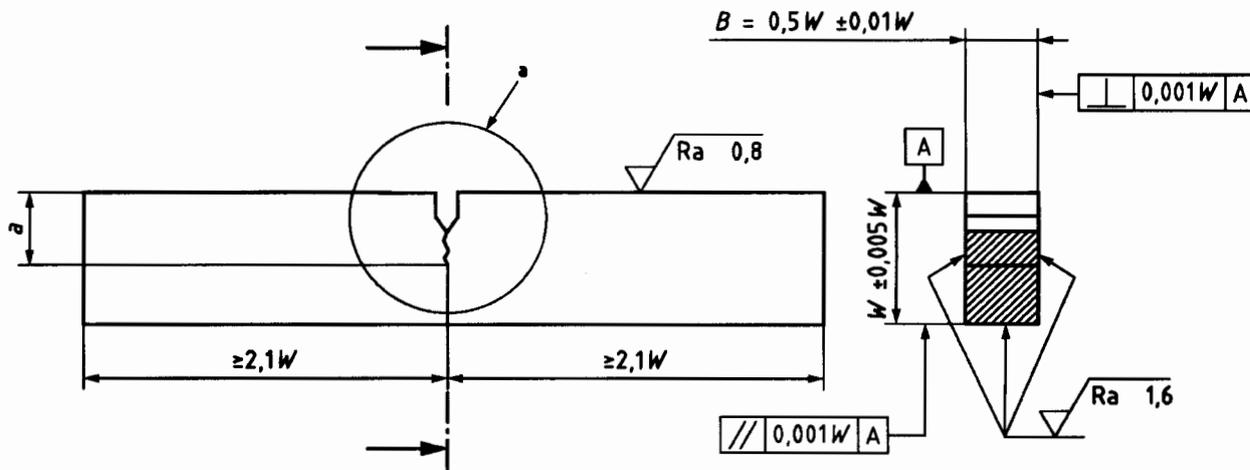
B.2 Dispositivo de fijación del ensayo

Los principios generales del dispositivo de fijación del ensayo de flexión se representan en la figura D.1. El dispositivo debe diseñarse para minimizar los efectos de fricción permitiendo que los rodillos roten y se desplacen ligeramente a medida que se va cargando la probeta, garantizando así el contacto por rodadura.

B.3 Procedimiento de ensayo

Se alinea el dispositivo de ensayo y se mide el vano (S) según se especifica en el apartado 8.3. Se posiciona la muestra con el extremo de la fisura colocado a la misma distancia de cada uno de los centros de los rodillos exteriores, con una tolerancia de un 1% del vano, y se alinea perpendicularmente a los rodillos, con una tolerancia de $\pm 2^\circ$.

Valores de la rugosidad superficial (R_a) en micrómetros



^a Véase la figura 2.

NOTA 1 Pueden utilizarse cuchillas integrales o bien acoplables para la fijación de la galga de desplazamiento (véase la figura 3).

NOTA 2 Para las configuraciones de la mella de inicio y de la fisura por fatiga, véase la figura 2.

Figura B.1 – Probeta para el ensayo de flexión

B.4 Cálculo

Para la probeta de flexión, K_Q se calcula en $\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$ como sigue:

$$K_Q = F_Q \frac{S}{BW^{3/2}} f(a/W)$$

donde

F_Q se expresa en kilonewtons;

S , B y W se expresan en centímetros;

$$f(a/W) = 3(a/W)^{1/2} \times \frac{1,99 - (a/W)(1 - a/W) [2,15 - 3,93(a/W) + 2,7(a/W^2)]}{2(1 + 2a/W)(1 - a/W)^{3/2}}$$

EJEMPLO: Para $a/W = 0,500$, $f(a/W) = 2,66$.

ANEXO C (Normativo)

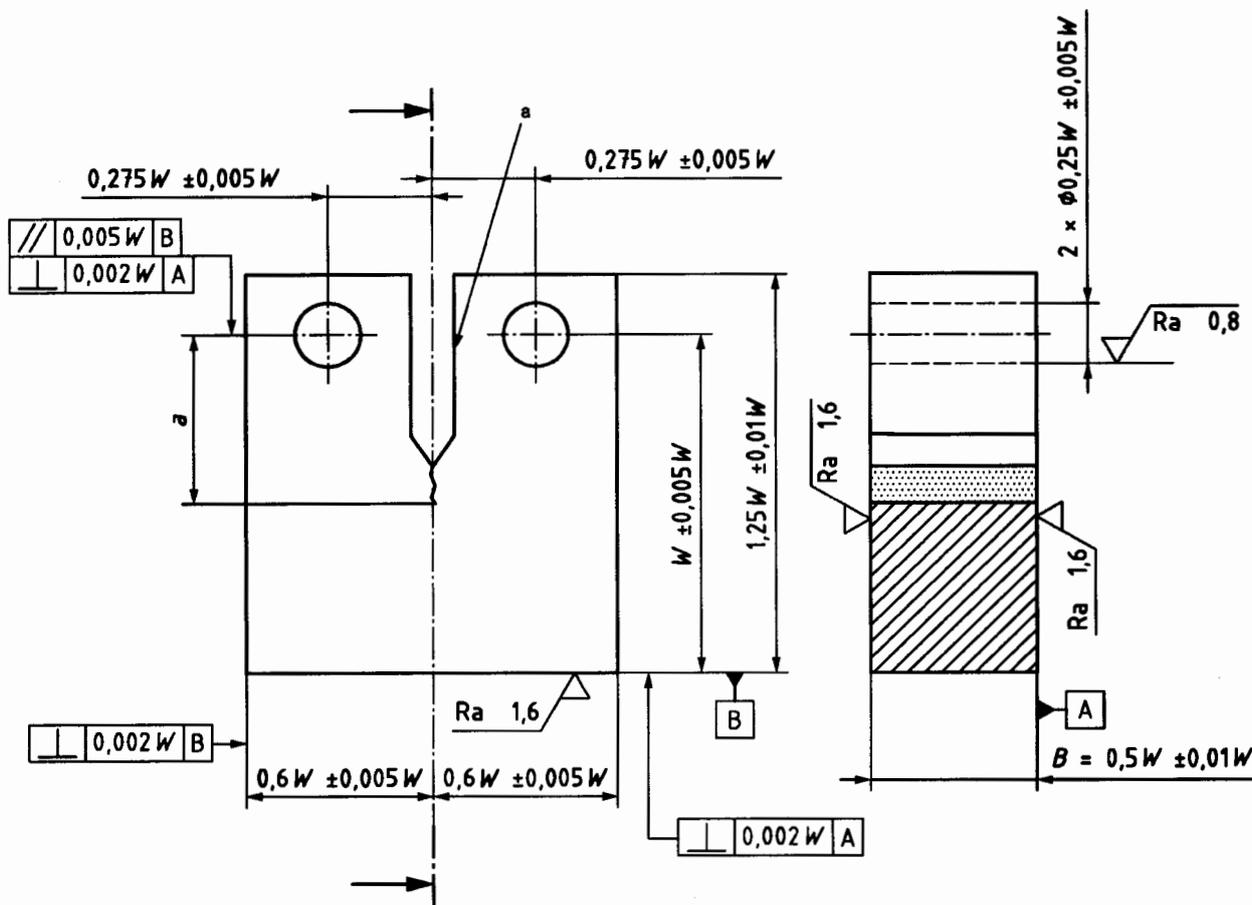
PROBETA COMPACTA

C.1 Probeta de ensayo

La probeta compacta normalizada consiste en una plancha mellada y fisurada por fatiga en un solo canto, cargada a tracción. Las proporciones generales de configuración de esta probeta se muestran en la figura C.1. Se pueden utilizar probetas alternativas con una relación $2 < W/B < 4$, pero sin cambios en las demás proporciones.

Si se adoptan para la probeta otras configuraciones (o proporciones) distintas de las especificadas en el apartado 7.2.3, deben usarse también las fórmulas y los métodos de análisis de registros que sean apropiados.

Valores de la rugosidad superficial (Ra) en micrómetros



^a Véase la figura 2.

NOTA 1 Pueden utilizarse cuchillas integrales o bien acoplables para la fijación de la galga de desplazamiento (véase la figura 3).

NOTA 2 Para las configuraciones de mella inicial y fisura por fatiga, véase la figura 2.

Figura C.1 – Probeta compacta

C.2 Dispositivo de fijación para el ensayo

En la figura D.2 se muestra una brida de carga adecuada para ensayar probetas compactas. Se sujetan ambos extremos de la muestra a la brida y se someten a carga a través de pernos para así permitir el giro de la probeta durante el ensayo. Los taladros de la brida están diseñados mediante pequeñas chapas sobre las superficies a cargar para permitir el contacto por rodadura, minimizando de este modo los efectos de fricción.

C.3 Procedimiento de ensayo

Para minimizar la excentricidad durante la secuencia de carga, se alinean las barras de carga con una tolerancia de $\pm 0,75$ mm y se centra la probeta en la ranura de la brida con una tolerancia de $\pm 0,75$ mm.

C.4 Cálculo

Para la muestra compacta, K_Q se calcula en $\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$ como sigue:

$$K_Q = \frac{F_Q}{BW^{1/2}} f(a/W)$$

donde

F_Q se expresa en kilonewtons;

B y W se expresan en centímetros;

$$f(a/W) = (2 + a/W) \times \frac{0,886 + 4,64(a/W) - 13,32(a/W)^2 + 14,72(a/W)^3 - 5,6(a/W)^4}{(1 - a/W)^{3/2}}$$

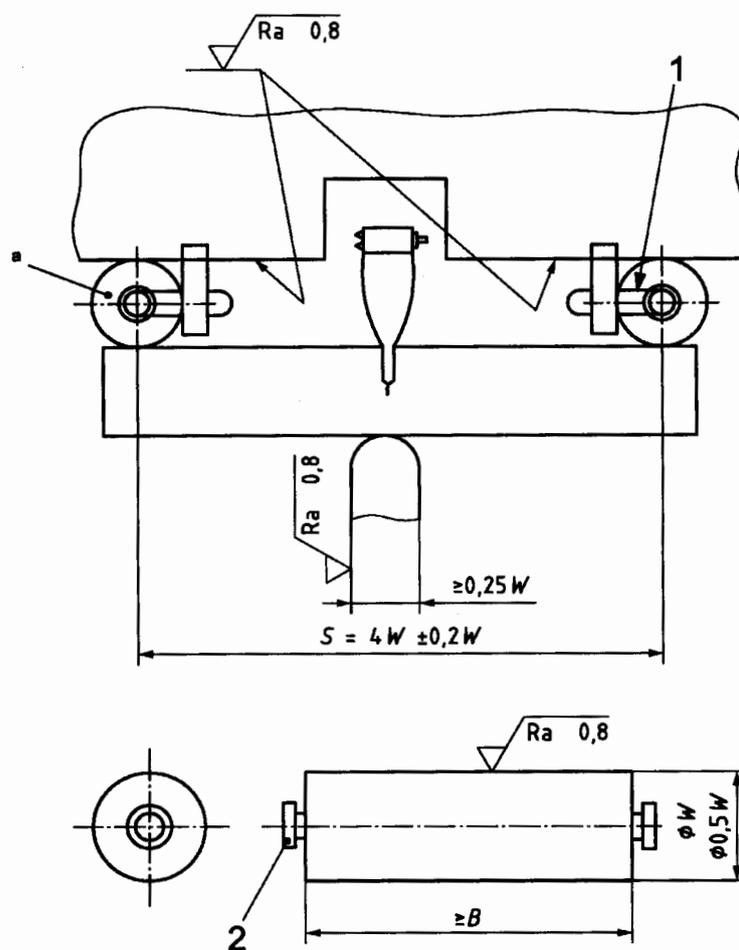
EJEMPLO Para $a/W = 0,500$, $f(a/W) = 9,66$.

ANEXO D (Informativo)

DISPOSITIVOS DE FIJACIÓN PARA EL ENSAYO

En la figura D.1 se muestra un diseño del dispositivo de fijación recomendado para las probetas ensayadas a flexión. En la Norma Inglesa BS 7448 ^[1] se recoge un diseño equivalente. En la figura D.2 se muestra un diseño de brida recomendado para muestras compactas.

Valores de la rugosidad superficial (Ra) en micrómetros



Los pernos de los rodillos y la superficie de carga de la probeta deben ser paralelos entre sí, con una tolerancia de $\pm 2^\circ$.

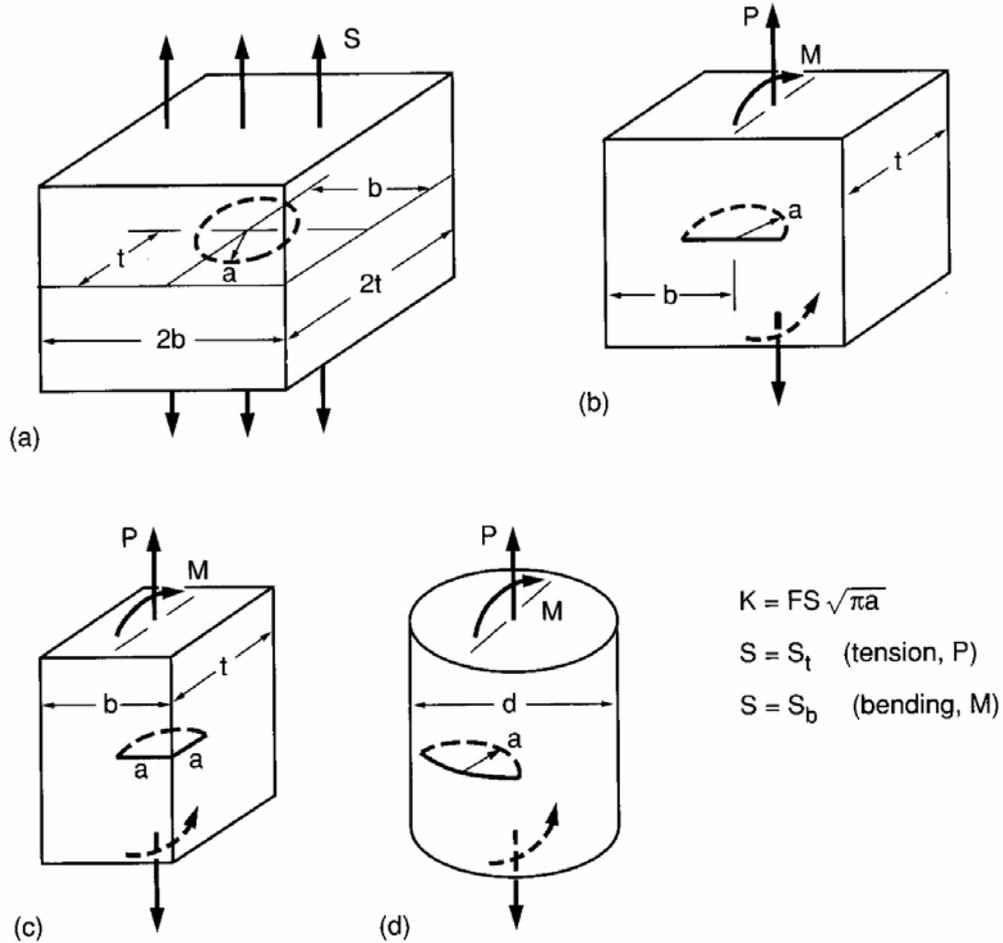
La dureza del dispositivo y de los pernos debe ser > 40 HRC.

Leyenda

- 1 Banda de goma o muelle
- 2 Protuberancias para bandas de goma o muelles
- ^a Véase el detalle del rodillo a continuación

Figura D.1 – Dispositivo de fijación para el ensayo de probetas a flexión

Factores de intensidad de tensiones (a) Grietas circulares con tensiones normales al plano de la grieta, (b) Grieta semicircular en la superficie, (c) Grieta cuarto-circular en una esquina, (d) Grieta semi-circular en una eje. (Newman y Raju, Dowling, *Mechanical Behavior of Materials*, Prentice Hall, 1999)



$$K = FS\sqrt{\pi a}$$

$$S = S_t \quad (\text{tension, } P)$$

$$S = S_b \quad (\text{bending, } M)$$

Case	S_t	S_b	F for small a	Limits for $\pm 10\%$ on F
(a)	$\frac{P}{4bt}$	—	$\frac{2}{\pi} = 0.637$	$\frac{a}{t}, \frac{a}{b} < 0.5$
(b)	$\frac{P}{2bt}$	$\frac{3M}{bt^2}$	0.728	$\frac{a}{t} < 0.4, \frac{a}{b} < 0.3$
(c)	$\frac{P}{bt}$	$\frac{6M}{bt^2}$	0.722	$\frac{a}{t} < 0.35, \frac{a}{b} < 0.2$
(d)	$\frac{4P}{\pi d^2}$	$\frac{32M}{\pi d^3}$	0.728	$\frac{a}{d} < 0.2$ or 0.35^1

Note: ¹Different limits for tension or bending, respectively.

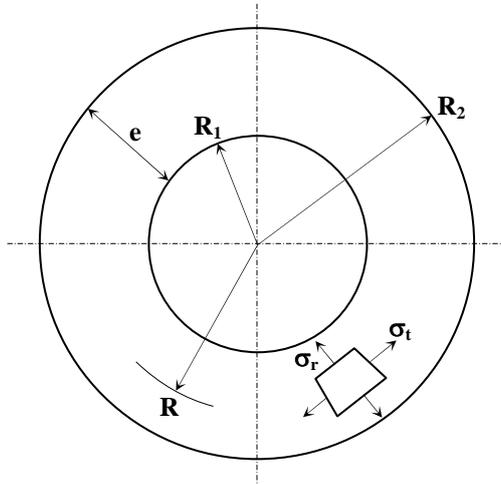
Tabla A.1

Características de diversos materiales metálicos

	K_{Ic} (MPa m ^{1/2})	σ_Y (MPa)	σ_u (MPa)	100 ϵ_f	Z (%)	ρ (t m ⁻³)
Aceros						
C45E	66	540	840	5	7	7,9
Cr-Mo-V	60	620	780	17	45	7,9
Ni-Cr-Mo-V	187	760	830	20	66	7,9
35CrMo4	110	1090	1150	14	49	8,1
18-Ni maraging, fundido al aire	123	1310	1350	12	54	8,1
18-Ni maraging, fundido al vacío	176	1290	1345	15	66	8,1
300-M Revenido a 650°	152	1070	1190	18	56	7,9
300-M Revenido a 300°	65	1740	2010	12	48	7,9
Aluminio y Titanio						
2014-T651	24	415	485	13	-	2,7
2024-T351	34	325	470	20	-	2,7
2219-T851	36	350	455	10	-	2,7
7075-T651	29	505	570	11	-	2,7
7475-T7351	52	435	505	14	-	2,7
Ti-6Al-4V, Recocido	66	925	1000	16	34	4,5

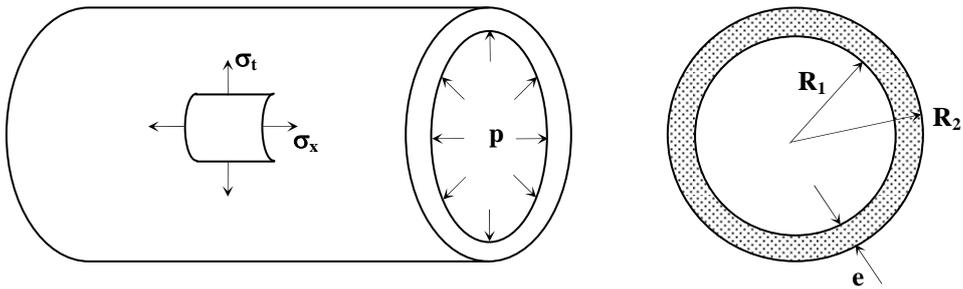
GEOMETRÍA Y TENSIONES PARA RECIPIENTES A PRESIÓN

Geometría



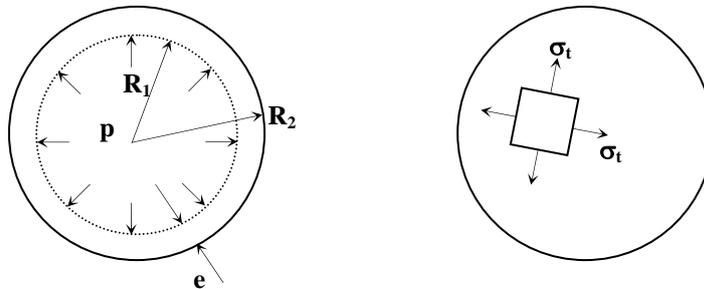
- | | | |
|----------------------|---|-----------------------------|
| R | = | Cualquier radio |
| R₁ | = | Radio interior |
| R₂ | = | Radio exterior |
| σ_t | = | Tensión tangencial |
| σ_r | = | Tensión radial |
| σ_x | = | Tensión longitudinal |
- (solo para tubos)

Recipiente Tubular



$$\sigma_t \approx \frac{p \cdot R_1}{e} \quad ; \quad \sigma_x \approx \frac{p \cdot R_1}{2e} \quad (\sigma_x = 0, \text{abierto}); \quad \sigma_r = -p$$

Recipiente Esférico



$$\sigma_t \approx \frac{p \cdot R_1}{2e} \quad ; \quad \sigma_r = -p$$

Cálculo de J_{pl} y desplazamiento para placa con grieta pasante en el centro en tensión plana. (T.L. Anderson, *Fracture Mechanics, Fundamentals and Applications*, CRC Press, 1995)

a/W:		n=1	n=2	n=3	n=5	n=7	n=10	n=13	n=16	n=20
0.125	h ₁	2.80	3.57	4.01	4.47	4.65	4.62	4.41	4.13	3.72
	h ₂	3.53	4.09	4.43	4.74	4.79	4.63	4.33	4.00	3.55
	h ₃	0.350	0.661	0.997	1.55	2.05	2.56	2.83	2.95	2.92
0.250	h ₁	2.54	2.97	3.14	3.20	3.11	2.86	2.65	2.47	2.20
	h ₂	3.10	3.29	3.30	3.15	2.93	2.56	2.29	2.08	1.81
	h ₃	0.619	1.01	1.35	1.83	2.08	2.19	2.12	2.01	1.79
0.375	h ₁	2.34	2.53	2.52	2.35	2.17	1.95	1.77	1.61	1.43
	h ₂	2.71	2.62	2.41	2.03	1.75	1.47	1.28	1.13	0.988
	h ₃	0.807	1.20	1.43	1.59	1.57	1.43	1.27	1.13	0.994
0.500	h ₁	2.21	2.20	2.06	1.81	1.63	1.43	1.30	1.17	1.00
	h ₂	2.34	2.01	1.70	1.30	1.07	0.871	0.757	0.666	0.557
	h ₃	0.927	1.19	1.26	1.18	1.04	0.867	0.758	0.668	0.560
0.625	h ₁	2.12	1.91	1.69	1.41	1.22	1.01	0.853	0.712	0.573
	h ₂	1.97	1.46	1.13	0.785	0.617	0.474	0.383	0.313	0.256
	h ₃	0.975	1.05	0.970	0.763	0.620	0.478	0.386	0.318	0.273
0.750	h ₁	2.07	1.71	1.46	1.21	1.08	0.867	0.745	0.646	0.532
	h ₂	1.55	0.970	0.685	0.452	0.361	0.262	0.216	0.183	0.148
	h ₃	0.929	0.802	0.642	0.450	0.361	0.263	0.216	0.183	0.149
0.875	h ₁	2.08	1.57	1.31	1.08	0.972	0.862	0.778	0.715	0.630
	h ₂	1.03	0.485	0.310	0.196	0.157	0.127	0.109	0.0971	0.0842
	h ₃	0.730	0.452	0.313	0.198	0.157	0.127	0.109	0.0973	0.0842

$$J_{pl} = \alpha \epsilon_o \sigma_o \frac{ba}{W} h_1(a/W, n) \left(\frac{P}{P_o}\right)^{n+1}$$

$$V_p = \alpha \epsilon_o a h_2(a/W, n) \left(\frac{P}{P_o}\right)^n$$

$$\Delta_{p(c)} = \alpha \epsilon_o a h_3(a/W, n) \left(\frac{P}{P_o}\right)$$

$$P_o = 2Bb\sigma_o$$

$$\Delta_{p(nc)} = \alpha \epsilon_o L \left(\frac{P}{2BW\sigma_o}\right)^n$$

Cálculo de J_{pl} y desplazamiento para placa con grieta pasante en el centro en deformación plana (T.L. Anderson, *Fracture Mechanics, Fundamentals and Applications*, CRC Press, 1995)

a/W:		n = 1	n = 2	n = 3	n = 5	n = 7	n = 10	n = 13	n = 16	n = 20
0.125	h ₁	2.80	3.61	4.06	4.35	4.33	4.02	3.56	3.06	2.46
	h ₂	3.05	3.62	3.91	4.06	3.93	3.54	3.07	2.60	2.06
	h ₃	0.303	0.574	0.840	1.30	1.63	1.95	2.03	1.96	1.77
0.250	h ₁	2.54	3.01	3.21	3.29	3.18	2.92	2.63	2.34	2.03
	h ₂	2.68	2.99	3.01	2.85	2.61	2.30	1.97	1.71	1.45
	h ₃	0.536	0.911	1.22	1.64	1.84	1.85	1.80	1.64	1.43
0.375	h ₁	2.34	2.62	2.65	2.51	2.28	1.97	1.71	1.46	1.19
	h ₂	2.35	2.39	2.23	1.88	1.58	1.28	1.07	0.890	0.715
	h ₃	0.699	1.06	1.28	1.44	1.40	1.23	1.05	0.888	0.719
0.500	h ₁	2.21	2.29	2.20	1.97	1.76	1.52	1.32	1.16	0.978
	h ₂	2.03	1.86	1.60	1.23	1.00	0.799	0.664	0.564	0.466
	h ₃	0.803	1.07	1.16	1.10	0.968	0.796	0.665	0.565	0.469
0.625	h ₁	2.12	1.96	1.76	1.43	1.17	0.863	0.628	0.458	0.300
	h ₂	1.71	1.32	1.04	0.707	0.524	0.358	0.250	0.178	0.114
	h ₃	0.844	0.937	0.879	0.701	0.522	0.361	0.251	0.178	0.115
0.750	h ₁	2.07	1.73	1.47	1.11	0.895	0.642	0.461	0.337	0.216
	h ₂	1.35	0.857	0.596	0.361	0.254	0.167	0.114	0.0810	0.0511
	h ₃	0.805	0.700	0.555	0.359	0.254	0.168	0.114	0.0813	0.0516
0.875	h ₁	2.08	1.64	1.40	1.14	0.987	0.814	0.688	0.573	0.461
	h ₂	0.889	0.428	0.287	0.181	0.139	0.105	0.0837	0.0682	0.0533
	h ₃	0.632	0.400	0.291	0.182	0.140	0.106	0.0839	0.0683	0.0535

$$J_{pl} = \alpha \epsilon_o \sigma_o \frac{ba}{W} h_1(a/W, n) \left(\frac{P}{P_o} \right)^{n+1}$$

$$V_p = \alpha \epsilon_o a h_2(a/W, n) \left(\frac{P}{P_o} \right)^n$$

$$\Delta_{p(c)} = \alpha \epsilon_o a h_3(a/W, n) \left(\frac{P}{P_o} \right)^n$$

$$P_o = \frac{4}{\sqrt{3}} B b \sigma_o$$

$$\Delta_{p(nc)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \alpha \epsilon_o L \left(\frac{\sqrt{3} P}{4 B W \sigma_o} \right)^n$$

Cálculo de J_{pl} y desplazamiento para probeta compacta en deformación plana (T.L. Anderson, *Fracture Mechanics, Fundamentals and Applications*, CRC Press, 1995)

a/W:		n=1	n=2	n=3	n=5	n=7	n=10	n=13	n=16	n=20
0.250	h ₁	2.23	2.05	1.78	1.48	1.33	1.26	1.25	1.32	1.57
	h ₂	17.9	12.5	11.7	10.8	10.5	10.7	11.5	12.6	14.6
	h ₃	9.85	8.51	8.17	7.77	7.71	7.92	8.52	9.31	10.9
0.375	h ₁	2.15	1.72	1.39	0.970	0.693	0.443	0.276	0.176	0.098
	h ₂	12.6	8.18	6.52	4.32	2.97	1.79	1.10	0.686	0.370
	h ₃	7.94	5.76	4.64	3.10	2.14	1.29	0.793	0.494	0.266
0.500	h ₁	1.94	1.51	1.24	0.919	0.685	0.461	0.314	0.216	0.132
	h ₂	9.33	5.85	4.30	2.75	1.91	1.20	0.788	0.530	0.317
	h ₃	6.41	4.27	3.16	2.02	1.41	0.888	0.585	0.393	0.236
0.625	h ₁	1.76	1.45	1.24	0.974	0.752	0.602	0.459	0.347	0.248
	h ₂	7.61	4.57	3.42	2.36	1.81	1.32	0.983	0.749	0.485
	h ₃	5.52	3.43	2.58	1.79	1.37	1.00	0.746	0.568	0.368
0.750	h ₁	1.71	1.42	1.26	1.033	0.864	0.717	0.575	0.448	0.345
	h ₂	6.37	3.95	3.18	2.34	1.88	1.44	1.12	0.887	0.665
	h ₃	4.86	3.05	2.46	1.81	1.45	1.11	0.869	0.686	0.514
→ 1	h ₁	1.57	1.45	1.35	1.18	1.08	0.950	0.850	0.730	0.630
	h ₂	5.39	3.74	3.09	2.43	2.12	1.80	1.57	1.33	1.14
	h ₃	4.31	2.99	2.47	1.95	1.79	1.44	1.26	1.07	0.909

$$J_{pl} = \alpha \epsilon_o \sigma_o b h_1 (a/W, n) \left(\frac{P}{P_o} \right)^{n+1}$$

$$V_p = \alpha \epsilon_o a h_2 (a/W, n) \left(\frac{P}{P_o} \right)^n$$

$$\Delta_p = \alpha \epsilon_o a h_3 (a/W, n) \left(\frac{P}{P_o} \right)^n$$

$$P_o = 1.455 \eta B b \sigma_o$$

where

$$\eta = \sqrt{\left(\frac{2a}{b} \right)^2 + \frac{4a}{b} + 2} - \left(\frac{2a}{b} + 1 \right)$$

Thickness = B

Cálculo de J_{pl} y desplazamiento para probeta compacta en tensión plana (T.L. Anderson, *Fracture Mechanics, Fundamentals and Applications*, CRC Press, 1995)

a/W:		n=1	n=2	n=3	n=5	n=7	n=10	n=13	n=16	n=20
0.250	h_1	1.61	1.46	1.28	1.06	0.903	0.729	0.601	0.511	0.395
	h_2	17.6	12.0	10.7	8.74	7.32	5.74	4.63	3.75	2.92
	h_3	9.67	8.00	7.21	5.94	5.00	3.95	3.19	2.59	2.023
0.375	h_1	1.55	1.25	1.05	0.801	0.647	0.484	0.377	0.284	0.220
	h_2	12.4	8.20	6.54	4.56	3.45	2.44	1.83	1.36	1.02
	h_3	7.80	5.73	4.62	3.25	2.48	1.77	1.33	0.990	0.746
0.500	h_1	1.40	1.08	0.901	0.686	0.558	0.436	0.356	0.298	0.238
	h_2	9.16	5.67	4.21	2.80	2.12	1.57	1.25	1.03	0.814
	h_3	6.29	4.15	3.11	2.09	1.59	1.18	0.938	0.774	0.614
0.625	h_1	1.27	1.03	0.875	0.695	0.593	0.494	0.423	0.370	0.310
	h_2	7.47	4.48	3.35	2.37	1.92	1.54	1.29	1.12	0.928
	h_3	5.42	3.38	2.54	1.80	1.47	1.18	0.988	0.853	0.710
0.750	h_1	1.23	0.977	0.833	0.683	0.598	0.506	0.431	0.373	0.314
	h_2	6.25	3.78	2.89	2.14	1.78	1.44	1.20	1.03	0.857
	h_3	4.77	2.92	2.24	1.66	1.38	1.12	0.936	0.800	0.666
→1	h_1	1.13	1.01	0.775	0.680	0.650	0.620	0.490	0.470	0.420
	h_2	5.29	3.54	2.41	1.91	1.73	1.59	1.23	1.17	1.03
	h_3	4.23	2.83	1.93	1.52	1.39	1.27	0.985	0.933	0.824

$$J_{pl} = \alpha \epsilon_o \sigma_o b h_1 (a/W, n) \left(\frac{P}{P_o} \right)^{n+1}$$

$$V_p = \alpha \epsilon_o a h_2 (a/W, n) \left(\frac{P}{P_o} \right)^n$$

$$\Delta_p = \alpha \epsilon_o a h_3 (a/W, n) \left(\frac{P}{P_o} \right)^n$$

$$P_o = 1.072 \eta B b \sigma_o$$

where

$$\eta = \sqrt{\left(\frac{2a}{b} \right)^2 + \frac{4a}{b} + 2} - \left(\frac{2a}{b} + 1 \right)$$

Thickness = B

Cálculo de J_{pl} y desplazamiento para probeta de flexión en deformación plana (T.L. Anderson, *Fracture Mechanics, Fundamentals and Applications*, CRC Press, 1995)

a/W:		n=1	n=2	n=3	n=5	n=7	n=10	n=13	n=16	n=20
0.125	h ₁	0.936	0.869	0.805	0.687	0.580	0.437	0.329	0.245	0.165
	h ₂	6.97	6.77	6.29	5.29	4.38	3.24	2.40	1.78	1.19
	h ₃	3.00	22.1	20.0	15.0	11.7	8.39	6.14	4.54	3.01
0.250	h ₁	1.20	1.034	0.930	0.762	0.633	0.523	0.396	0.303	0.215
	h ₂	5.80	4.67	4.01	3.08	2.45	1.93	1.45	1.09	0.758
	h ₃	4.08	9.72	8.36	5.86	4.47	3.42	2.54	1.90	1.32
0.375	h ₁	1.33	1.15	1.02	0.884	0.695	0.556	0.442	0.360	0.265
	h ₂	5.18	3.93	3.20	2.38	1.93	1.47	1.15	0.928	0.684
	h ₃	4.51	6.01	5.03	3.74	3.02	2.30	1.80	1.45	1.07
0.500	h ₁	1.41	1.09	0.922	0.675	0.495	0.331	0.211	0.135	0.0741
	h ₂	4.87	3.28	2.53	1.69	1.19	0.773	0.480	0.304	0.165
	h ₃	4.69	4.33	3.49	2.35	1.66	1.08	0.669	0.424	0.230
0.625	h ₁	1.46	1.07	0.896	0.631	0.436	0.255	0.142	0.084	0.0411
	h ₂	4.64	2.86	2.16	1.37	0.907	0.518	0.287	0.166	0.0806
	h ₃	4.71	3.49	2.70	1.72	1.14	0.652	0.361	0.209	0.102
0.750	h ₁	1.48	1.15	0.974	0.693	0.500	0.348	0.223	0.140	0.0745
	h ₂	4.47	2.75	2.10	1.36	0.936	0.618	0.388	0.239	0.127
	h ₃	4.49	3.14	2.40	1.56	1.07	0.704	0.441	0.272	0.144
0.875	h ₁	1.50	1.35	1.20	1.02	0.855	0.690	0.551	0.440	0.321
	h ₂	4.36	2.90	2.31	1.70	1.33	1.00	0.782	0.613	0.459
	h ₃	4.15	3.08	2.45	1.81	1.41	1.06	0.828	0.646	0.486

$$J_{pl} = \alpha \epsilon_o \sigma_o b h_1 (a/W, n) \left(\frac{P}{P_o} \right)^{n+1}$$

$$V_p = \alpha \epsilon_o a h_2 (a/W, n) \left(\frac{P}{P_o} \right)^n$$

$$\Delta_p = \alpha \epsilon_o a h_3 (a/W, n) \left(\frac{P}{P_o} \right)^n$$

$$P_o = \frac{1.455 B b^2 \sigma_o}{S}$$

Thickness = B

Cálculo de J_{pl} y desplazamiento para probeta de flexión en tensión plana (T.L. Anderson, *Fracture Mechanics, Fundamentals and Applications*, CRC Press, 1995)

a/W:		n=1	n=2	n=3	n=5	n=7	n=10	n=13	n=16	n=20
0.125	h ₁	0.676	0.600	0.548	0.459	0.383	0.297	0.238	0.192	0.148
	h ₂	6.84	6.30	5.66	4.53	3.64	2.72	2.12	1.67	1.26
	h ₃	2.95	20.1	14.6	12.2	9.12	6.75	5.20	4.09	3.07
0.250	h ₁	0.869	0.731	0.629	0.479	0.370	0.246	0.174	0.117	0.0593
	h ₂	5.69	4.50	3.68	2.61	1.95	1.29	0.897	0.603	0.307
	h ₃	4.01	8.81	7.19	4.73	3.39	2.20	1.52	1.01	0.508
0.375	h ₁	0.963	0.797	0.680	0.527	0.418	0.307	0.232	0.174	0.105
	h ₂	5.09	3.73	2.93	2.07	1.58	1.13	0.841	0.626	0.381
	h ₃	4.42	5.53	4.48	3.17	2.41	1.73	1.28	0.948	0.575
0.500	h ₁	1.02	0.767	0.621	0.453	0.324	0.202	0.128	0.0813	0.0298
	h ₂	4.77	3.12	2.32	1.55	1.08	0.655	0.410	0.259	0.0974
	h ₃	4.60	4.09	3.09	2.08	1.44	0.874	0.545	0.344	0.129
0.625	h ₁	1.05	0.786	0.649	0.494	0.357	0.235	0.173	0.105	0.0471
	h ₂	4.55	2.83	2.12	1.46	1.02	0.656	0.472	0.286	0.130
	h ₃	4.62	3.43	2.60	1.79	1.26	0.803	0.577	0.349	0.158
0.750	h ₁	1.07	0.786	0.643	0.474	0.343	0.230	0.167	0.110	0.0442
	h ₂	4.39	2.66	1.97	1.33	0.928	0.601	0.427	0.280	0.114
	h ₃	4.39	3.01	2.24	1.51	1.05	0.680	0.483	0.316	0.129
0.875	h ₁	1.086	0.928	0.810	0.646	0.538	0.423	0.332	0.242	0.205
	h ₂	4.28	2.76	2.16	1.56	1.23	0.922	0.702	0.561	0.428
	h ₃	4.07	2.93	2.29	1.65	1.30	0.975	0.742	0.592	0.452

$$J_{pl} = \alpha \epsilon_o \sigma_o b h_1 (a/W, n) \left(\frac{P}{P_o} \right)^{n+1}$$

$$V_p = \alpha \epsilon_o a h_2 (a/W, n) \left(\frac{P}{P_o} \right)^n$$

$$\Delta_p = \alpha \epsilon_o a h_3 (a/W, n) \left(\frac{P}{P_o} \right)^n$$

$$P_o = \frac{1.072 B b^2 \sigma_o}{S}$$

Thickness = B