FUNDAMENTOS DEL ÁLGEBRA LINEAL.
EJERCICIOS Y CUESTIONES.
SOLUCIONES CON MATHEMATICA

Isabel Eguia Ribero

Aitziber Unzueta Inchaurbe

Elisabete Alberdi Celaya

ISBN: 978-84-606-6054-5
Depósito legal: BI-355-2015

ÍNDICE

1.- MATRIZ Y DETERMINANTE 7
1.1- Matriz 7
1.1.1- Concepto de matriz y tipos de matrices 7
1.2- Operaciones con matrices 8
1.2.1- Suma de matrices 8
1.2.2- Producto de un escalar por una matriz 8
1.2.3- Producto de matrices 9
1.3- Determinante de una matriz 9
1.3.1- Determinantes de orden 2 y 3 10
1.3.2- Determinante de cualquier orden 10
1.3.2.1- Cálculo del determinante de una matriz de dimensión n mediante adjuntos 10
1.3.3- Propiedades de los determinantes 10
1.3.4- Otras formas para calcular determinantes de cualquier orden 12
1.3.4.1- Método de Chio 12
1.3.4.2- Escalonamiento de la matriz 12
1.4- Traspuesta de una matriz 12
1.5- Matriz inversa 13
1.5.1- Cálculo de la matriz inversa mediante adjuntos 13
1.5.2- Cálculo de la matriz inversa mediante el método de Gauss 14
1.6- Rango de una matriz 14
1.7- Potencia de una matriz 15
Ejercicios resueltos 16
Cuestiones resueltas 27
Ejercicios resueltos con Mathematica 31

2.- SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 47
2.1- Introducción 47
2.2- Teorema de Rouché-Fröbenius 48
2.3- Regla de Cramer 48

2.4- Equivalencia de los sistemas de ecuaciones lineales 49
2.5- Método de Gauss 49
2.6- Método general para la resolución de un sistema de ecuaciones lineales 51
Ejercicios resueltos 53
Cuestiones resueltas 71
Ejercicios resueltos con Mathematica 74

3.- ESPACIO VECTORIAL 87
3.1- Ley de composición 87
3.2- Propiedades de la ley de composición interna 87
3.3- Propiedades de la ley de composición externa 88
3.4- Grupo 88
3.5- Anillo 88
3.6- Divisiores de cero. Dominio de integridad 89
3.7- Cuerpo 89
3.8- Espacio vectorial 89
3.8.1- Propiedades de los espacios vectoriales 90
3.9- Subespacio vectorial 91
3.10- Combinación lineal. Sistema generador 91
3.10.1- Combinación lineal 91
3.10.2- Sistema generador 92
3.11- Dependencia e independencia lineal 92
3.12- Base de un espacio vectorial. Dimensión. 93
3.12.1- Base de un espacio vectorial 93
3.12.2- Dimensión de un espacio vectorial 93
3.12.3- Ecuaciones paramétricas de un subespacio vectorial 94
3.12.4- Ecuaciones implícitas de un subespacio vectorial 94
3.13- Teorema de la base incompleta 95
3.14- Operaciones con subespacios vectoriales 95
3.14.1- Intersección de subespacios vectoriales 95
3.14.2- Suma de subespacios vectoriales 95
3.14.3- Suma directa de subespacios vectoriales 95
3.14.4- Subespacios suplementarios 96
3.15- Matriz de cambio de base 96
Ejercicios resueltos 97
Cuestiones resueltas 115
Ejercicios resueltos con Mathematica 118

4.- APLICACION LINEAL ... 133
4.1- Concepto de aplicación lineal y propiedades ... 133
4.2- Clasificación de una aplicación lineal ... 133
4.3- Propiedades de las aplicaciones lineales ... 134
4.4- Imagen de una aplicación lineal ... 134
4.5- Matriz de una aplicación lineal ... 135
4.5.1- Rango de una aplicación lineal ... 136
4.6- Núcleo de una aplicación lineal ... 136
4.7- Caracterización de las aplicaciones lineales ... 136
4.8- Suma de aplicaciones lineales ... 137
4.9- Producto de una aplicación lineal por un escalar ... 137
4.10- Composición de aplicaciones lineales ... 137
Ejercicios resueltos ... 139
Cuestiones resueltas ... 154
Ejercicios resueltos con Mathematica ... 158

5.- DIAGONALIZACIÓN ... 171
5.1- Vector y valor propio ... 171
5.2- Propiedades de los vectores propios ... 171
5.3- Cálculo de valores y vectores propios ... 172
5.4- Endomorfismo diagonalizable ... 173
5.5- Endomorfismo simétrico ... 174
5.6- Diagonalización de un endomorfismo simétrico ... 174
5.7- Forma canónica de Jordan ... 175
Ejercicios resueltos ... 179
Cuestiones resueltas ... 210
Ejercicios resueltos con Mathematica ... 214

6.- ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO ... 237
6.1- Producto escalar ... 237
6.2- Espacio vectorial euclídeo ... 237
6.3- Expresión matricial del producto escalar ... 238
6.4- Norma inducida por un producto escalar ... 239
6.5- Ortogonalidad y ortonormalidad ... 239
6.6- Método de Gram-Schimdt ... 240
6.7- Subespacios vectoriales ortogonales ... 241

Ejercicios resueltos 243
Cuestiones resueltas.. 254
Ejercicios resueltos con Mathematica... 258

BIBLIOGRAFÍA.. 267

1 MATRIZ Y DETERMINANTE

1.1 Matriz

1.1.1 Concepto de matriz y tipos de matrices

Definición: Se llama matriz de orden o dimensión nxp a un conjunto de $(n \cdot p)$ elementos dispuestos en n filas y p columnas de la siguiente manera:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Utilizando una notación abreviada, una matriz se escribe como:

$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} \in M_{nxp}$, siendo M_{nxp} el conjunto de las matrices de n filas y p columnas.

Definición: Se llama diagonal principal de una matriz $A \in M_{nxp}$ al conjunto formado por los elementos a_{ii}, $\forall i = 1, 2, \ldots, min\ (n, p)$.

Tipos de matrices:

A continuación se muestran las matrices más comunes:

- Matriz fila: Matriz con una única fila, $n = 1$.
- Matriz columna: Matriz con una única columna, $p = 1$.
- Matriz cuadrada: Matriz en la que el número de filas y de columnas coincide, $n = p$. El conjunto de las matrices cuadradas de orden n se denota por M_{nxn} o simplemente por M_n.
- Matriz rectangular: Matriz en la que el número de filas y de columnas no coincide, $n \neq p$.
- Matriz nula: Matriz cuyos elementos son nulos, $a_{ij} = 0, \forall i = 1, 2, \ldots, n, \forall j = 1, 2, \ldots, p$. La matriz nula de dimensión nxp se denota por 0_{nxp} o simplemente por 0.
- Matriz opuesta: Dada una matriz $A = (a_{ij})$, se dice que $B = (b_{ij})$ es su opuesta si cumple que $B = -A$, o lo que es lo mismo $b_{ij} = -a_{ij}, \forall i = 1, 2, \ldots, n, \forall j = 1, 2, \ldots, p$.

- Matriz triangular superior: Matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ cuyos elementos situados por debajo de la diagonal principal son nulos, $a_{ij} = 0 \ \forall i > j$.
- Matriz triangular inferior: Matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ cuyos elementos situados por encima de la diagonal principal son nulos, $a_{ij} = 0 \ \forall i < j$.
- Matriz diagonal: Matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ cuyos elementos situados fuera de la diagonal principal son nulos, $a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$.
- Matriz identidad: Matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal principal son unos. La matriz identidad de dimensión n se denota por I_n.

1.2 Operaciones con matrices

1.2.1 Suma de matrices

Sean las matrices $A, B \in M_{nxp}$, la suma de ambas se define como:

$$C = A + B = (c_{ij}) \in M_{nxp}, \text{ siendo } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i = 1,2, \dots, n, \forall j = 1, 2, \dots, p$$

Propiedades de la suma de matrices:

Dadas las matrices $A, B, C \in M_{nxp}$, la suma de matrices cumple las siguientes propiedades:

- Propiedad asociativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$
- Existencia del elemento neutro: El elemento neutro respecto de la suma es la matriz nula: $A + 0 = 0 + A$, siendo 0 la matriz nula de igual dimensión que la matriz A.
- Existencia del elemento simétrico: El elemento simétrico respecto de la suma es la matriz opuesta: $A + (-A) = (-A) + A = 0$
- Propiedad conmutativa: $A + B = B + A$

1.2.2 Producto de un escalar por una matriz

Sea la matriz $A \in M_{nxp}$ y sea $k \in \mathbb{R}$ un escalar, el producto del escalar k por la matriz A se define como:

$$C = k \cdot A = (c_{ij}) \in M_{nxp}, \text{ siendo } c_{ij} = k \cdot a_{ij}, \forall i = 1, 2, \dots, n, \forall j = 1, 2, \dots, p$$

Propiedades del producto de un escalar por una matriz:

Dadas las matrices $A, B \in M_{nxp}$ y los escalares $k, m \in \mathbb{R}$, el producto de un escalar por una matriz cumple las siguientes propiedades:

- Propiedad distributiva respecto de la suma de matrices: $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$

- Propiedad distributiva respecto de la suma de escalares: $(k+m)\cdot A = k\cdot A + m\cdot A$
- Propiedad asociativa: $(k\cdot m)\cdot A = k\cdot(m\cdot A)$
- Existencia del elemento neutro: $1\cdot A = A$

1.2.3 Producto de matrices

El producto de dos matrices se puede realizar cuando el número de columnas de la primera matriz coincide con el número de filas de la segunda. Es decir, se puede realizar el producto $A\cdot B$ cuando $A \in M_{nxp}$ y $B \in M_{pxq}$. La matriz resultante C tendrá tantas filas como la matriz A y tantas columnas como la matriz B:

$$C = A\cdot B = \left(c_{ij}\right) \in M_{n\mathrm{x}q}, \text{ siendo } c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\ \forall i = 1,2,..,n, \forall j = 1,2,..,q$$

Propiedades del producto de matrices:

Dadas tres matrices A, B y C de dimensiones adecuadas, el producto de matrices cumple las siguientes propiedades:

- Propiedad asociativa: $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$
- Propiedad distributiva respecto de la suma:
  - $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$
  - $A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$
- Existencia del elemento neutro: el elemento neutro respecto del producto es la matriz identidad: $A\cdot I = I\cdot A$, siendo A una matriz cuadrada e I la matriz identidad de igual dimensión que la matriz A.

Observaciones:

- En general la propiedad conmutativa no se cumple: $A\cdot B \neq B\cdot A$.
- No siempre existe el elemento simétrico respecto del producto como se verá posteriormente. El elemento simétrico de la matriz A es una matriz B que cumple: $A\cdot B = B\cdot A = I$.

1.3 Determinante de una matriz

A toda matriz cuadrada $A \in M_n$, se le asocia un escalar que se denomina determinante de la matriz y que se denota por:

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1.3.1 Determinantes de orden 2 y 3

- El determinante de una matriz cuadrada de orden 2 se puede calcular de la siguiente manera:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- El determinante de una matriz cuadrada de orden 3 se puede calcular mediante el siguiente método conocido como la regla de Sarrus:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31}$$
$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

1.3.2 Determinante de cualquier orden

Para calcular el determinante de una matriz de dimensión mayor o igual que 4, es necesario introducir los siguientes conceptos:

Definición: Dada una matriz $A \in M_n$, el menor complementario del elemento a_{ij} se denota por α_{ij} y es el determinante de la submatriz que resulta al eliminar la i-ésima fila y la j-ésima columna de la matriz A.

Definición: Dada una matriz $A \in M_n$, el adjunto del elemento a_{ij} se denota por A_{ij} y se calcula de la siguiente manera: $A_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}$

1.3.2.1 Cálculo del determinante de una matriz de dimensión n mediante adjuntos

El determinante de una matriz de dimensión n, se calcula realizando la suma de los productos de los elementos de una fila (o de una columna) por sus adjuntos.

- Si se desarrolla la i-ésima fila: $|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$
- Si se desarrolla la j-ésima columna: $|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$

1.3.3 Propiedades de los determinantes

- Al intercambiar dos filas o dos columnas de un determinante, su valor cambia de signo.
- Al multiplicar una fila o una columna de un determinante por un escalar, su valor numérico queda multiplicado por ese escalar.
- Si en un determinante una fila (o una columna) es combinación lineal* de otras filas (u otras columnas), su valor es cero. Por tanto, en un determinante las filas son linealmente independientes** si y sólo si las columnas son linealmente independientes.

***Definición:** Sean $F_1, F_2, \ldots., F_n$ las n filas de la matriz A. Una fila F_i es combinación lineal de las demás filas si existen $(n-1)$ escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots., \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ para los cuales se cumple que:

$$F_i = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \ \ldots. + \alpha_{i-1} F_{i-1} + \alpha_{i+1} F_{i+1} + \cdots + \ \alpha_n F_n$$

La definición de combinación lineal de columnas se formula de similar manera. Así, una columna C_j de la matriz A es combinación lineal del resto de columnas, si existen $(n-1)$ escalares $\beta_1, \beta_2, \ldots., \beta_{j-1}, \beta_{j+1}, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ para los cuales se cumple que:

$$C_j = \beta_1 C_1 + \beta_2 C_2 + \ \ldots. + \beta_{j-1} C_{j-1} + \beta_{j+1} C_{j+1} + \cdots + \ \beta_n C_n$$

****Definición:** Cuando una fila (o una columna) es combinación lineal de otras filas (o de otras columnas), se dice que las filas (o las columnas) son linealmente dependientes. En caso contrario, se dice que éstas son linealmente independientes.

- Si en un determinante una fila (o una columna) es suma de varios elementos, el determinante se puede escribir como suma de varios determinantes de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \ldots & b_{ij}+c_{ij} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \ldots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \ldots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- Si en un determinante a una fila (o a una columna) se le suma una combinación lineal de otras filas (o de otras columnas), su valor no varía.
- El determinante de una matriz triangular o diagonal, es el producto de los elementos de su diagonal principal.
- $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

1.3.4 Otras formas para calcular determinantes de cualquier orden

Las fórmulas que se han obtenido anteriormente para calcular el determinante de una matriz mediante adjuntos, $|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ o $|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$, resultan costosas cuando muchos de los elementos de la fila o de la columna seleccionada para realizar el desarrollo son no nulos. Sin embargo, resultan eficientes cuando varios de sus elementos son nulos. A continuación se muestran otros dos métodos para el cálculo de determinantes.

1.3.4.1 Método de Chio

Este método consiste en escoger un elemento no nulo del determinante denominado pivote y en anular el resto de elementos pertenecientes a su fila o a su columna. Supóngase que se toma el elemento no nulo $\boldsymbol{a_{11}}$ como pivote y que se desea anular el resto de elementos de la primera fila. Para ello, a la segunda columna se le suma la primera columna multiplicada por $\frac{-\boldsymbol{a_{12}}}{\boldsymbol{a_{11}}}$, a la tercera columna se le suma la primera columna multiplicada por $\frac{-\boldsymbol{a_{13}}}{\boldsymbol{a_{11}}}$ y así sucesivamente, hasta la última columna a la que se le suma la primera multiplicada por $\frac{-\boldsymbol{a_{1n}}}{\boldsymbol{a_{11}}}$. De esta manera, se consigue que todos los elementos de la primera fila excepto el elemento $\boldsymbol{a_{11}}$ sean nulos. A continuación se desarrolla el determinante por los adjuntos de la primera fila, con lo que sólo habrá que calcular un adjunto, el correspondiente al elemento $\boldsymbol{a_{11}}$.

1.3.4.2 Escalonamiento de la matriz

Este método se basa en convertir la matriz inicial en una matriz escalonada o triangular utilizando la quinta propiedad de los determinantes. Así, el valor del determinante será el producto de los elementos de la diagonal principal.

1.4 Traspuesta de una matriz

Definición: Dada una matriz $A = (a_{ij}) \in M_{nxp}$, su traspuesta se denota por $A^t = (b_{ij}) \in M_{pxn}$ y se obtiene al intercambiar las filas por las columnas y viceversa, sin variar el orden de las mismas:

$$b_{ij} = a_{ji} \ \forall i = 1, 2, \dots, p, \forall j = 1, 2, \dots, n$$

Propiedades de la traspuesta de una matriz:

- $(A^t)^t = A$
- $(A + B)^t = A^t + B^t$
- $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$
- $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$, siendo $k \in \mathbb{R}$
- $|A| = |A^t|$

Definición: Una matriz cuadrada $A = (a_{ij}) \in M_n$ es simétrica si cumple que $A = A^t$, o lo que es lo mismo si $a_{ij} = a_{ji}\ \forall i = 1, 2, \dots, n, \forall j = 1, 2, \dots, n$.

Definición: Una matriz cuadrada $A = (a_{ij}) \in M_n$ es antisimétrica si cumple que $A = -A^t$, es decir, si $a_{ij} = -a_{ji}\ \forall i = 1, 2, \dots, n, \forall j = 1, 2, \dots, n$.

1.5 Matriz inversa

Definición: Una matriz cuadrada A es regular si existe su inversa (el elemento simétrico respecto del producto de matrices), es decir, si existe la matriz B tal que $A \cdot B = B \cdot A = I$. Entonces, B es la inversa de A y se denota por A^{-1}. En caso contrario se dice que la matriz es singular.

La condición necesaria y suficiente para que una matriz sea regular es que su determinante sea no nulo:

$$|A| \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ matriz regular}$$

Propiedades de la matriz inversa:

- En el caso de que exista la inversa de una matriz, ésta es única.
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$
- $|A| = |A^t|$

Definición: Una matriz cuadrada $A = (a_{ij}) \in M_n$ es ortogonal si su inversa coincide con su traspuesta, es decir, si se verifica que $A \cdot A^t = A^t \cdot A = I$, con lo que $A^{-1} = A^t$.

1.5.1 Cálculo de la matriz inversa mediante adjuntos

La inversa de una matriz se puede calcular mediante la siguiente fórmula:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{(A^d)^t}{|A|}$$

siendo $A^d = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$ la matriz adjunta que se obtiene al sustituir cada elemento de la matriz A por su adjunto.

1.5.2 Cálculo de la matriz inversa mediante el método de Gauss

Para aplicar el método de Gauss se construye la matriz ampliada $(A|I)$, siendo I la matriz identidad de igual dimensión que la matriz A. A continuación, se realizan operaciones por filas hasta obtener la matriz identidad I en la parte izquierda de la matriz ampliada. De esta forma, la matriz resultante en la parte derecha de la matriz ampliada es la matriz inversa A^{-1}:

$$(A|I) \xRightarrow[operaciones\ filas]{} (I|A^{-1})$$

Las operaciones que se pueden realizar con las filas de la matriz ampliada son:

- Intercambiar dos filas entre sí.
- Multiplicar las filas por cualquier escalar no nulo.
- Sumar a una fila otra fila multiplicada por un escalar.

1.6 Rango de una matriz

Definición: Dada una matriz $A \in M_{nxp}$, los elementos pertenecientes a m filas y a m columnas prefijadas forman una submatriz de A. El determinante de esta submatriz se denomina menor de orden m de la matriz A.

Teorema: Si la matriz A tiene un menor no nulo de orden k, entonces, las k filas que forman este menor son linealmente independientes. También son linealmente independientes las k columnas que determinan el menor.

Definición: El rango de una matriz A es el orden del mayor menor no nulo de dicha matriz y se denota por $rg(A)$ o $rango(A)$.

Propiedades del rango de una matriz:

- El rango de una matriz no varía al multiplicar una columna (o una fila) por un escalar no nulo.
- El rango de una matriz no varía si a una columna (o a una fila) se le suma una combinación lineal de otras columnas (o de otras filas).
- El rango de una matriz no varía si se suprime una columna (o una fila) que sea combinación lineal de otras columnas (o de otras filas).

1.7 Potencia de una matriz

Dada una matriz cuadrada $A \in M_n$, su potencia p-ésima se calcula multiplicando A por ella misma p veces:

$$A^p = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{p\ veces} \quad \text{donde} \quad p \in \mathbb{N}$$

Propiedades de la potencia de una matriz:

- $\forall p, q \in \mathbb{N}$, $A^p \cdot A^q = A^{p+q}$
- $\forall p, q \in \mathbb{N}$, $(A^p)^q = A^{p \cdot q}$
- Si A es regular, entonces: $\forall p \in \mathbb{N}$, $(A^{-1})^p = (A^p)^{-1}$
- Si A es regular, entonces: $\forall p, q \in \mathbb{N}$, $A^{-p} \cdot A^{-q} = A^{-(p+q)}$
- Si A es regular, entonces: $\forall p, q \in \mathbb{N}$, $(A^{-p})^{-q} = A^{p \cdot q}$

EJERCICIOS RESUELTOS

P1. Hallar la matriz simétrica A que sumada a la matriz $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ da como resultado la matriz $Q = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -5 & 2 & 7 \\ 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}$.

RESOLUCIÓN

Se considera una matriz genérica $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ que debe ser de dimensión 3x3 para poder realizar la suma con la matriz P.

$$A + P = Q \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -5 & 2 & 7 \\ 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Sumando e igualando términos se tiene

$$\begin{cases} a_{11} + 3 = 5 \\ a_{12} - 1 = -2 \\ a_{13} + 0 = 4 \\ a_{21} - 4 = -5 \\ a_{22} + 1 = 2 \\ a_{23} + 2 = 7 \\ a_{31} + 2 = 6 \\ a_{32} + 0 = 5 \\ a_{33} + 5 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = 2 \\ a_{12} = -1 \\ a_{13} = 4 \\ a_{21} = -1 \\ a_{22} = 1 \\ a_{23} = 5 \\ a_{31} = 4 \\ a_{32} = 5 \\ a_{33} = 3 \end{cases}$$

La matriz solución es $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

P2. Hallar todas las matrices reales que conmutan con la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

RESOLUCIÓN

La matriz buscada es una matriz $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que $A \cdot B = B \cdot A$

$$A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + c = 2a - b \\ 2b + d = a + 2b \\ -a + 2c = 2c - d \\ -b + 2d = c + 2d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = d \\ b = -c \end{cases} \quad \forall\, d, c \in \mathbb{R}$$

Por tanto existen infinitas matrices que conmutan con la matriz A y vienen dadas por $\begin{pmatrix} d & -c \\ c & d \end{pmatrix}$ $\forall\, d, c \in \mathbb{R}$

P3. Calcular el valor del parámetro p para que la matriz simétrica $A = \begin{pmatrix} p & p \\ p & -p \end{pmatrix}$ sea ortogonal.

RESOLUCIÓN

Para que la matriz simétrica A sea ortogonal debe cumplir: $A \cdot A^t = I \Leftrightarrow A^{-1} = A^t$. Entonces

$$\begin{pmatrix} p & p \\ p & -p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & p \\ p & -p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2p^2 & 0 \\ 0 & 2p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 2p^2 = 1 \Rightarrow p = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Se obtienen dos valores del parámetro p, por lo que existen dos matrices ortogonales

- Cuando $p = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.
- Cuando $p = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow A_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Se puede comprobar que efectivamente las matrices A_1 y A_2 son ortogonales ya que cumplen la igualdad $A^t = A^{-1}$.

$$A_1{}^t = A_1{}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad A_2{}^t = A_2{}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

P4. Calcular el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \\ 5 & 4 & -5 & 3 \\ -2 & 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ escalonando la matriz.

RESOLUCIÓN

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \\ 5 & 4 & -5 & 3 \\ -2 & 3 & 6 & 6 \end{vmatrix} \overset{F_1 \leftrightarrow F_2}{=} (-1) \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 & 6 \\ -3 & 2 & -1 & -1 \\ 5 & 4 & -5 & 3 \\ -2 & 3 & 6 & 6 \end{vmatrix} \overset{\frac{1}{2}F_1}{=}$$

$$(-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & -1 & -1 \\ 5 & 4 & -5 & 3 \\ -2 & 3 & 6 & 6 \end{vmatrix} \overset{\substack{F_2+3F_1 \\ F_3-5F_1 \\ F_4+2F_1}}{=} (-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & 9 & -15 & -12 \\ 0 & 1 & 10 & 12 \end{vmatrix} \overset{\substack{F_3+9F_2 \\ F_4+F_2}}{=}$$

$$(-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 30 & 60 \\ 0 & 0 & 15 & 20 \end{vmatrix} \overset{F_4-\frac{1}{2}F_3}{=} (-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 30 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{vmatrix}$$

El determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de su diagonal principal. Por lo que $|A| = (-2) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 30 \cdot (-10) = -600$

P5. Calcular la matriz X que cumple la ecuación $A \cdot X - A^t \cdot E = C^2 + \frac{1}{2}D$, siendo las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} -6 & -12 & -2 \\ 6 & -22 & -8 \\ 12 & 4 & -6 \end{pmatrix}$.

RESOLUCIÓN

Despejando X de la ecuación se tiene

$$A \cdot X - A^t \cdot E = C^2 + \frac{1}{2}D \Rightarrow A \cdot X = A^t \cdot E + C^2 + \frac{1}{2}D \Rightarrow X = A^{-1} \cdot \left(A^t \cdot E + C^2 + \frac{1}{2}D\right)$$

Se obtiene el determinante de la matriz A

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-2) + 1 \cdot 1(-2) - 2 \cdot (-2) \cdot (-2) - 1 \cdot (-1) \cdot 4$$

$$= 2 - 2 - 8 + 4 = -4 \Rightarrow |A| = -4$$

A es una matriz regular, por tanto, existe su matriz inversa A^{-1} que se calcula de la siguiente manera

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A^d)^t$$

Se calculan los adjuntos de los elementos de A

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

La matriz adjunta correspondiente es $A^d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & -4 & -6 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^d)^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 2 \\ 5 & -6 & 7 \end{pmatrix}$

Por lo que la inversa de la matriz A viene dada por $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 & -3/4 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ -5/4 & 3/2 & -7/4 \end{pmatrix}$

Por otro lado, se calcula $C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Como $X = A^{-1} \cdot \left(A^t \cdot E + C^2 + \frac{1}{2}D\right)$, se calcula la expresión $(A^t \cdot E + C^2 + \frac{1}{2}D)$

$$A^t \cdot E + C^2 + \frac{1}{2}D =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 & -12 & -2 \\ 6 & -22 & -8 \\ 12 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & 2 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -6 & -1 \\ 3 & -11 & -4 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^t \cdot E + C^2 + \frac{1}{2}D = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -3 \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, se obtiene X

$$X = A^{-1} \cdot \left(A^t \cdot E + C^2 + \tfrac{1}{2}D\right) = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 & -3/4 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ -5/4 & 3/2 & -7/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -6 & -3 \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

P6. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$, resolver el sistema matricial $\begin{cases} A \cdot X - A \cdot Y = B \\ X - 2Y = C \end{cases}$

RESOLUCIÓN

Se despeja X de la segunda ecuación del sistema y se sustituye en la primera

$$\begin{cases} A \cdot X - A \cdot Y = B \\ X - 2Y = C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \cdot X - A \cdot Y = B \\ X = C + 2Y \end{cases}$$

$$A(C + 2Y) - AY = B \Rightarrow AC + 2AY - AY = B \Rightarrow AC + AY = B \Rightarrow AY = B - AC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y = A^{-1}(B - AC) \Rightarrow Y = A^{-1}B - C$$

Se calcula A^{-1} mediante la igualdad $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A^d)^t$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}1 = 1 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}(-1) = 1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}(-1) = 1 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}2 = 2$$

$$A^d = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^d)^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$Y = A^{-1} \cdot B - C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Una vez que la matriz Y es conocida se calcula $X = C + 2Y$, que resulta

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

P7. Calcular la inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ utilizando el método de Gauss.

RESOLUCIÓN

Intercambiando las filas de la matriz A entre sí y realizando operaciones con las mismas se tiene

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\overset{F_1\leftrightarrow F_2}{\Rightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\overset{\substack{F_2-2F_1\\ F_3-F_1}}{\Rightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -4 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1\end{array}\right)\overset{F_2\leftrightarrow F_3}{\Rightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 3 & -4 & 1 & -2 & 0\end{array}\right)\overset{\substack{F_1+F_2\\ F_3-3F_2}}{\Rightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -3\end{array}\right)\overset{(-1)F_3}{\Rightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 3\end{array}\right)\overset{\substack{F_1-F_3\\ F_2+F_3}}{\Rightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 4\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 3\end{array}\right)$$

Entonces, la matriz inversa de A es $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -1 & -2 & 4\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}$.

Se comprueba que efectivamente esta matriz es la inversa de la matriz A

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -1 & -2 & 4\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I$$

P8. Calcular el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & a & 4\\ 2 & 1 & a & 3\\ a & 3 & -2 & -2\\ a & 5 & 1 & a\end{pmatrix}$ en función del parámetro real a.

RESOLUCIÓN

Como A es una matriz cuadrada con un parámetro, se comienza estudiando el mayor menor de la matriz y a partir de este menor se obtienen los casos particulares. Para resolver el determinante de la matriz se utiliza el método de Chio, tomando como pivote el elemento $a_{22}=1$ y haciendo ceros en su columna

$$\begin{vmatrix}-2 & 1 & a & 4\\ 2 & 1 & a & 3\\ a & 3 & -2 & -2\\ a & 5 & 1 & a\end{vmatrix}\overset{F_1-F_2}{=}\begin{vmatrix}-4 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & a & 3\\ a & 3 & -2 & -2\\ a & 5 & 1 & a\end{vmatrix}\overset{F_3-3F_2}{=}\begin{vmatrix}-4 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & a & 3\\ a-6 & 0 & -2-3a & -11\\ a & 5 & 1 & a\end{vmatrix}$$

$$\overset{F_4-5F_2}{=}\begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & a & 3 \\ a-6 & 0 & -2-3a & -11 \\ a-10 & 0 & 1-5a & a-15 \end{vmatrix}$$

Se resuelve el determinante por los adjuntos de la segunda columna y se tiene que

$$(-1)^{2+2}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ a-6 & -2-3a & -11 \\ a-10 & 1-5a & a-15 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ a-6 & -2-3a & -11 \\ a-10 & 1-5a & a-15 \end{vmatrix}$$

Se aplica el método de Chio de nuevo y se resuelve el determinante por los adjuntos de los elementos de la primera fila

$$\overset{C_1+4C_3}{=}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-50 & -2-3a & -11 \\ 5a-70 & 1-5a & a-15 \end{vmatrix}=(-1)^{1+3}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} a-50 & -2-3a \\ 5a-70 & 1-5a \end{vmatrix}$$

$$=(a-50)(1-5a)-(5a-70)(-2-3a)$$

$$=a-5a^2-50+250a-(-10a-15a^2+140+210a)=10a^2+51a-190$$

Se calculan los valores de a para los que se anula el determinante de A, estableciéndose así los diferentes casos posibles

$$10a^2+51a-190=0\Leftrightarrow\begin{cases} a=\dfrac{5}{2} \\ a=-\dfrac{38}{5} \end{cases}$$

<u>Caso 1:</u> Si $a\neq\frac{5}{2}$ y $a\neq-\frac{38}{5}\ \Rightarrow\ rg(A)=4$

<u>Caso 2:</u> Si $a=\frac{5}{2}\ \Rightarrow\ rg(A)\leq 3$

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 5/2 & 4 \\ 2 & 1 & 5/2 & 3 \\ 5/2 & 3 & -2 & -2 \\ 5/2 & 5 & 1 & 5/2 \end{pmatrix}$$

Véase cuál es el rango de A

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 5/2 \\ 2 & 1 & 5/2 \\ 5/2 & 3 & -2 \end{vmatrix}=38\neq 0\ \Rightarrow\ rg(A)=3$$

<u>Caso 3:</u> Si $a=-\frac{38}{5}\ \Rightarrow\ rg(A)\leq 3$

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -38/5 & 4 \\ 2 & 1 & -38/5 & 3 \\ -38/5 & 3 & -2 & -2 \\ -38/5 & 5 & 1 & -38/5 \end{pmatrix}$$

Véase cuál es el rango de A

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -38/5 \\ 2 & 1 & -38/5 \\ -38/5 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -416/5 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3$$

En conclusión

<u>Caso 1:</u> Si $a \neq \frac{5}{2}$ y $a \neq -\frac{38}{5} \Rightarrow rg(A) = 4$

<u>Caso 2:</u> Si $a = \frac{5}{2} \Rightarrow rg(A) = 3$

<u>Caso 3:</u> Si $a = -\frac{38}{5} \Rightarrow rg(A) = 3$

P9. Hallar el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} -4 & 4a & 2a \\ 4a & -4 & -3+b \\ -4 & 4a & -2 \end{pmatrix}$ en función de los parámetros reales a y b.

RESOLUCIÓN

Procediendo de forma similar al ejercicio anterior

$$|A| = \begin{vmatrix} -4 & 4a & 2a \\ 4a & -4 & -3+b \\ -4 & 4a & -2 \end{vmatrix} \overset{F_1-F_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2a+2 \\ 4a & -4 & -3+b \\ -4 & 4a & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}(2a+2)\begin{vmatrix} 4a & -4 \\ -4 & 4a \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+1)\underbrace{(16a^2-16)}_{16(a-1)(a+1)} = 32(a+1)^2(a-1)$$

$$|A| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 1 \end{cases} \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

<u>Caso 1:</u> Si $a \neq 1$ y $a \neq -1$ $\forall b \in \mathbb{R} \Rightarrow rg(A) = 3$

<u>Caso 2:</u> Si $a = 1$ $\forall b \in \mathbb{R} \Rightarrow rg(A) \leq 2$

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 4 & -4 & -3+b \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Las dos primeras columnas son proporcionales, por lo que $rg(A) = rg\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -4 & -3+b \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Se calcula el rango de esta matriz

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -8 - 8 = -16 \neq 0 \;\Rightarrow rg(A) = rg(B) = 2$$

<u>Caso 3:</u> Si $a = -1 \;\; \forall b \in \mathbb{R} \;\Rightarrow rg(A) \leq 2$

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -2 \\ -4 & -4 & -3+b \\ -4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Las dos primeras columnas son idénticas, además en este caso la primera y la última fila también coinciden, por tanto $rg(A) = rg\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -4 & -3+b \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -4 & -3+b \end{vmatrix} = -4(-3+b) - 8 = 12 - 4b - 8 = -4b + 4$$

<u>Caso 3.1:</u> Si $b = 1 \;\Rightarrow\; |B| = 0 \Rightarrow\; rg(A) = 1$

<u>Caso 3.2:</u> Si $b \neq 1 \;\Rightarrow |B| \neq 0 \Rightarrow\; rg(A) = 2$

Resumiendo

<u>Caso 1:</u> Si $a \neq 1$ y $a \neq -1\; \forall b \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; rg(A) = 3$

<u>Caso 2:</u> Si $a = 1, \forall b \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; rg(A) = 2$

<u>Caso 3:</u> Si $a = -1$:

<u>Caso 3.1:</u> Si $a = -1$ y $b = 1 \;\Rightarrow\; rg(A) = 1$

<u>Caso 3.2:</u> Si $a = -1$ y $b \neq 1 \Rightarrow\; rg(A) = 2$

P10. Hallar el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} a-1 & b+1 & b \\ b & a & b \\ 1 & -a & 1 \end{pmatrix}$ en función de los parámetros reales a y b.

RESOLUCIÓN

Procediendo de forma similar a los ejercicios anteriores

$$|A| = \begin{vmatrix} a-1 & b+1 & b \\ b & a & b \\ 1 & -a & 1 \end{vmatrix} \overset{C_1 - C_3}{=} \begin{vmatrix} a-b-1 & b+1 & b \\ 0 & a & b \\ 0 & -a & 1 \end{vmatrix} = (a-b-1)(a+ab)$$

$$= (a-b-1)a(b+1) = -a(b+1)(b-(a-1))$$

Por tanto $|A| = -a(b+1)(b-(a-1)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \\ b = a-1 \end{cases}$

<u>Caso 1:</u> Si $a \neq 0, b \neq -1$ y $b \neq a-1 \Rightarrow rg(A) = 3$

<u>Caso 2:</u> Si $a = 0 \Rightarrow rg(A) \leq 2$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & b+1 & b \\ b & 0 & b \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $b \neq 0$, la segunda y la tercera fila son proporcionales y si $b = 0$, la segunda fila es nula. Por lo que en cualquier caso se tiene

$$rg(A) = rg\begin{pmatrix} -1 & b+1 & b \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Además, se sabe que $rg(A) \leq 2$. Para calcular el rango de la matriz se deben estudiar los menores de orden 2

$$\begin{vmatrix} -1 & b+1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(1+b) \qquad \begin{vmatrix} -1 & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1-b \qquad \begin{vmatrix} b+1 & b \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+b$$

Todos los menores de orden dos se anulan para $b = -1$. Por tanto

<u>Caso 2.1:</u> Si $a = 0$ y $b = -1 \Rightarrow rg(A) = 1$

<u>Caso 2.2:</u> Si $a = 0$ y $b \neq -1 \Rightarrow rg(A) = 2$

<u>Caso 3:</u> Si $b = -1 \Rightarrow rg(A) \leq 2$

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ 1 & -a & 1 \end{pmatrix}$$

Para determinar el rango de la matriz, se debe tener en cuenta que la segunda y la tercera fila son proporcionales, por lo que

$$rg(A) = rg\begin{pmatrix} a-1 & 0 & -1 \\ -1 & a & -1 \end{pmatrix}$$

Al igual que en el caso anterior se deben estudiar los menores de orden 2

$$\begin{vmatrix} a-1 & 0 \\ -1 & a \end{vmatrix} = a(a-1) \qquad \begin{vmatrix} a-1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -(a-1)-1 = -a \qquad \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ a & -1 \end{vmatrix} = a$$

Todos los menores se anulan para $a = 0$.

<u>Caso 3.1:</u> Si $b = -1$ y $a = 0 \Rightarrow rg(A) = 1$

<u>Caso 3.2:</u> Si $b = -1$ y $a \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$

<u>Caso 4:</u> Si $b = a-1 \Rightarrow rg(A) \leq 2$

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & a & a-1 \\ a-1 & a & a-1 \\ 1 & -a & 1 \end{pmatrix}$$

En este caso las dos primeras filas, así como la primera y la última columna coinciden, por lo que

$$rg(A) = rg\begin{pmatrix} a-1 & a \\ 1 & -a \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a-1 & a \\ 1 & -a \end{vmatrix} = (a-1)(-a) - a = -a^2 + a - a = -a^2$$

Por tanto

<u>Caso 4.1:</u> Si $b = a - 1$ y $a = 0 \;\Rightarrow\; rg(A) = 1$

<u>Caso 4.2:</u> Si $b = a - 1$ y $a \neq 0 \;\Rightarrow\; rg(A) = 2$

En conclusión

<u>Caso 1:</u> Si $a \neq 0$, $b \neq -1$ y $b \neq a - 1 \Rightarrow\; rg(A) = 3$

<u>Caso 2:</u> Si $a = 0$

<u>Caso 2.1:</u> Si $b = -1,\; rg(A) = 1$

<u>Caso 2.2:</u> Si $b \neq -1,\; rg(A) = 2$

<u>Caso 3:</u> Si $b = -1$

<u>Caso 3.1:</u> Si $a = 0,\; rg(A) = 1$

<u>Caso 3.2:</u> Si $a \neq 0,\; rg(A) = 2$

<u>Caso 4:</u> Si $b = a - 1$

<u>Caso 4.1:</u> Si $a = 0,\; rg(A) = 1$

<u>Caso 4.2:</u> Si $a \neq 0,\; rg(A) = 2$

CUESTIONES RESUELTAS

C1. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ -2 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ siendo $|A|=2$ y $|B|=-1$. Utilizando las propiedades de los determinantes, calcular:

a) $|2A|$ b) $|AB|$ c) $\begin{vmatrix}-1 & 0 & 2\\ -1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$.

RESOLUCIÓN

a) $|2A|=2^3|A|=2^4$

b) $|AB|=|A|\cdot|B|=2\cdot(-1)=-2$

c) $$\begin{vmatrix}-1 & 0 & 2\\ -1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1-2 & 1+1 & -1+2\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\underbrace{\begin{vmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}}_{|A|}+\underbrace{\begin{vmatrix}-1 & 0 & 2\\ -2 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}}_{|B|}$$

$$=|A|+|B|=1$$

d) $$\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}\overset{C_1\leftrightarrow C_2}{=}(-1)\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}\overset{C_2\leftrightarrow C_3}{=}\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}\overset{(-1)C_1}{=}(-1)\begin{vmatrix}-1 & 0 & 2\\ -1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$\overset{(c)}{=}(-1)1=-1$$

C2. Sabiendo que $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 4 & 2\end{vmatrix}=-4$, calcular el valor de $\begin{vmatrix}3 & 3 & 1\\ 4 & 3 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}$ utilizando las propiedades de los determinantes.

RESOLUCIÓN

$$\begin{vmatrix}3 & 3 & 1\\ 4 & 3 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}\overset{C_2-C_3}{=}\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 4 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}\overset{C_1\leftrightarrow C_3}{=}-\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}\overset{|A|=|A^t|}{=}-\underbrace{\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 4 & 2\end{vmatrix}}_{|A|}=-(-4)=4$$

C3. Dadas las matrices regulares del mismo orden A, B y C, despejar X en las siguientes expresiones matriciales:

a) $X \cdot A = B^{-1} - A$

b) $A \cdot X^t + B = C$

RESOLUCIÓN

a) $X \cdot A = B^{-1} - A \Rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = (B^{-1} - A) \cdot A^{-1} \Rightarrow X \cdot I = B^{-1} \cdot A^{-1} - A \cdot A^{-1} \Rightarrow$

$$X = (A \cdot B)^{-1} - I$$

b) $A \cdot X^t + B = C \Rightarrow (A \cdot X^t + B)^t = C^t \Rightarrow (A \cdot X^t)^t + B^t = C^t \Rightarrow$

$$(X^t)^t \cdot A^t = C^t - B^t \Rightarrow X \cdot A^t = C^t - B^t \Rightarrow X \cdot A^t \cdot (A^t)^{-1} = (C^t - B^t) \cdot (A^t)^{-1} \Rightarrow$$

$$X = (C - B)^t (A^t)^{-1}$$

C4. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si A y B son dos matrices regulares entonces $A^2 \cdot B$ y $A^t \cdot A \cdot B$ también lo son.

b) Si A es una matriz singular su inversa también lo es.

RESOLUCIÓN

a) Si A y B son dos matrices regulares, por definición se tiene que $|A| \neq 0$ y $|B| \neq 0$. Véase ahora si $A^2 \cdot B$ y $A^t \cdot A \cdot B$ son regulares o no

$$|A^2 \cdot B| = |A^2||B| = \underbrace{|A||A|}_{|A^2|}|B| \neq 0 \Rightarrow A^2 \cdot B \text{ es regular.}$$

$$|A^t \cdot A \cdot B| = |A^t \cdot A||B| = \underbrace{|A^t|}_{|A|}|A||B| = |A|^2|B| \neq 0 \Rightarrow A^t \cdot A \cdot B \text{ es regular.}$$

Por lo que la afirmación es cierta.

b) Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz singular $|\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{0} \Rightarrow \nexists \boldsymbol{A}^{-1}$. Entonces, la afirmación es falsa.

C5. Hallar todas las matrices reales de orden 3x3 que sean simétricas y antisimétricas a la vez.

RESOLUCIÓN

Si $A \in M_{3x3}(\mathbb{R})$ es una matriz simétrica se cumple que $A = A^t$, entonces

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Si $A \in M_{3x3}(\mathbb{R})$ es una matriz antisimétrica se cumple que $A = -A^t$, por lo que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, si $A \in M_{3x3}(\mathbb{R})$ es una matriz simétrica y antisimétrica a la vez se tiene que

$$A = A^t = -A^t$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0 \\ a_{12} = -a_{12} \Rightarrow a_{12} = 0 \\ a_{13} = -a_{13} \Rightarrow a_{13} = 0 \\ a_{23} = -a_{23} \Rightarrow a_{23} = 0 \end{cases}$$

Es decir, la única matriz que es simétrica y antisimétrica a la vez es la matriz nula

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C6. Indicar el valor de las siguientes expresiones:

a) $(A - B)^2 - (A + B) \cdot A + (A + B)^2 - A^2 + 2B \cdot A$

b) $A[(A \cdot B^{-1})^{-1}(B \cdot A^t)^t]^{-1}(B \cdot B^t)^t - A^t \cdot (B \cdot A^t)^{-1}$

c) $A^t \cdot (A - B)^t - (A - B)^2 - (A \cdot B^t)^t$ si A y B son matrices simétricas

d) $(A + B) \cdot A - [(A + B) \cdot A]^t + [(B^2)^t - A \cdot B]^t - [(A^2)^t - B \cdot A]^t$ si A y B son matrices simétricas

e) $(A^2 - B)^t - (A \cdot B)^{-1} + B^{-1} - (A^{-1})^2 + (A \cdot B)^t$ si A y B son matrices ortogonales

RESOLUCIÓN

a) $(A - B)^2 - (A + B) \cdot A + (A + B)^2 - A^2 + 2B \cdot A$

$= (A - B) \cdot (A - B) - (A + B) \cdot A + (A + B) \cdot (A + B) - A^2 + 2B \cdot A$

$= A^2 - A \cdot B - B \cdot A + B^2 - A^2 - B \cdot A + A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2 - A^2 + 2B \cdot A$

$= 2B^2 + B \cdot A$

b) $A \cdot [(A \cdot B^{-1})^{-1}(B \cdot A^t)^t]^{-1}(B \cdot B^t)^t - A^t \cdot (B \cdot A^t)^{-1}$

$= A \cdot [(B^{-1})^{-1} \cdot A^{-1} \cdot (A^t)^t \cdot B^t]^{-1}(B \cdot B^t)^t - A^t \cdot (B \cdot A^t)^{-1}$

$= A \cdot [B \cdot A^{-1} \cdot A \cdot B^t]^{-1}(B \cdot B^t)^t - A^t \cdot (B \cdot A^t)^{-1}$

$= A \cdot [B \cdot B^t]^{-1} \cdot (B^t)^t \cdot B^t - A^t \cdot (B \cdot A^t)^{-1}$

$= A \cdot [B \cdot B^t]^{-1} \cdot (B.B^t) - A^t \cdot (B \cdot A^t)^{-1}$

$= A - A^t \cdot (B \cdot A^t)^{-1} = A - A^t \cdot (A^t)^{-1} \cdot B^{-1} = A - B^{-1}$

c) $A^t \cdot (A - B)^t - (A - B)^2 - (A \cdot B^t)^t$

$= A^t \cdot (A^t - B^t) - (A^2 - A \cdot B - B \cdot A + B^2) - (B^t)^t A^t$

$= (A^t)^2 - A^t \cdot B^t - A^2 + A \cdot B + B \cdot A - B^2 - B \cdot A^t$

$= A^2 - A \cdot B - A^2 + A \cdot B + B \cdot A - B^2 - B \cdot A = -B^2$

d) $(A + B) \cdot A - [(A + B) \cdot A]^t + [(B^2)^t - A \cdot B]^t - [(A^2)^t - B \cdot A]^t$

$= A \cdot A + B \cdot A - [A^t \cdot (A^t + B^t)] + [(B^t)^2 - A \cdot B]^t - [(A^t)^2 - B \cdot A]^t$

$= A^2 + B \cdot A - [A \cdot (A + B)] + [B^2 - A \cdot B]^t - [A^2 - B \cdot A]^t$

$= A^2 + B \cdot A - A^2 - A \cdot B + (B^2)^t - B^t \cdot A^t - (A^2)^t + A^t \cdot B^t$

$= A^2 + B \cdot A - A^2 - A \cdot B + (B^t)^2 - B \cdot A - (A^t)^2 + A \cdot B = B^2 - A^2$

e) $(A^2 - B)^t - (A \cdot B)^{-1} + B^{-1} - (A^{-1})^2 + (A \cdot B)^t =$

$= (A^2)^t - B^t - (B^{-1} \cdot A^{-1}) + B^t - (A^t)^2 + B^t \cdot A^t =$

$= (A^t)^2 - B^t \cdot A^t - (A^t)^2 + B^t \cdot A^t = 0$

EJERCICIOS RESUELTOS CON MATHEMATICA

M1. Hallar la matriz simétrica A que sumada a la matriz $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ da como resultado la matriz $Q = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -5 & 2 & 7 \\ 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}$.

RESOLUCIÓN

```
Remove["Global`*"]
```

Se definen las matrices P y Q

```
P = {{3, -1, 0}, {-4, 1, 2}, {2, 0, 5}}; MatrixForm[P]
```

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

```
Q = {{5, -2, 4}, {-5, 2, 7}, {6, 5, 8}}; MatrixForm[Q]
```

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -5 & 2 & 7 \\ 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Para poder sumar las matrices, la matriz A debe ser del mismo orden que las matrices P y Q

```
A = Array[x, {3, 3}]; MatrixForm[A]
```

$$\begin{pmatrix} x[1,1] & x[1,2] & x[1,3] \\ x[2,1] & x[2,2] & x[2,3] \\ x[3,1] & x[3,2] & x[3,3] \end{pmatrix}$$

Para que una matriz sea simétrica debe cumplir que $A = A^t$. Se resuelve esta ecuación matricial obteniendo una matriz genérica simétrica de orden adecuado

```
sol = Reduce[A == Transpose[A]]; sol = {ToRules[sol]}
```

```
{{x[2, 3] → x[3, 2], x[1, 3] → x[3, 1], x[1, 2] → x[2, 1]}}
```

```
A = A /. Flatten[sol]; MatrixForm[A]
```

$$\begin{pmatrix} x[1,1] & x[2,1] & x[3,1] \\ x[2,1] & x[2,2] & x[3,2] \\ x[3,1] & x[3,2] & x[3,3] \end{pmatrix}$$

Se obtiene la matriz A buscada resolviendo la ecuación $A+P=Q$

```
sol = Solve[A + P == Q]
```

{{x[1, 1] → 2, x[2, 1] → -1, x[2, 2] → 1, x[3, 1] → 4, x[3, 2] → 5, x[3, 3] → 3}}

```
A = A /. sol[[1]]; MatrixForm[A]
```

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

M2. Sea una matriz antisimétrica A de dimensión 4x4

a) Determinar la forma genérica de A.

b) Determinar la matriz antisimétrica A que multiplicada con la matriz $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ da como resultado la matriz $F=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

c) Calcular el determinante de A y extraer su diagonal principal.

d) Comprobar que la matriz obtenida en el segundo apartado es antisimétrica.

RESOLUCIÓN

```
Remove["Global`*"]
```

a) Se define una matriz genérica de dimensión 4x4

```
A = Array[x, {4, 4}]; MatrixForm[A]
```

$$\begin{pmatrix} x[1,1] & x[1,2] & x[1,3] & x[1,4] \\ x[2,1] & x[2,2] & x[2,3] & x[2,4] \\ x[3,1] & x[3,2] & x[3,3] & x[3,4] \\ x[4,1] & x[4,2] & x[4,3] & x[4,4] \end{pmatrix}$$

Para que una matriz sea antisimétrica debe cumplir que $A=-A^t$. Se resuelve esta ecuación matricial obteniendo una matriz genérica antisimétrica

```
sol = Reduce[A == -Transpose[A]]; sol = {ToRules[sol]}

{{x[4, 4] → 0, x[3, 4] → -x[4, 3], x[3, 3] → 0,
  x[2, 4] → -x[4, 2], x[2, 3] → -x[3, 2], x[2, 2] → 0, x[1, 4] → -x[4, 1],
  x[1, 3] → -x[3, 1], x[1, 2] → -x[2, 1], x[1, 1] → 0}}
```

```
A = A /. Flatten[sol]; MatrixForm[A]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & -x[2,1] & -x[3,1] & -x[4,1] \\ x[2,1] & 0 & -x[3,2] & -x[4,2] \\ x[3,1] & x[3,2] & 0 & -x[4,3] \\ x[4,1] & x[4,2] & x[4,3] & 0 \end{pmatrix}$$

b) Se definen las matrices B y F

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; F = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix};$$

Se obtiene la matriz A buscada resolviendo la ecuación $A \cdot B = F$ en la que las incógnitas son los coeficientes de la matriz antisimétrica

```
sol = Solve[A.B == F, {x[2, 1], x[3, 1], x[4, 1], x[3, 2], x[4, 2], x[4, 3]}]

{{x[2, 1] → -1, x[3, 1] → 2, x[4, 1] → 0, x[3, 2] → -2, x[4, 2] → 3, x[4, 3] → 0}}
```

```
A = A /. sol[[1]]; MatrixForm[A]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Cálculo del determinante y extracción de la diagonal principal de la matriz A

```
Det[A]

36
```

```
Diagonal[A]

{0, 0, 0, 0}
```

La diagonal principal de cualquier matriz antisimétrica debe ser el vector nulo.

d) La matriz A es antisimétrica ya que verifica $A = -A^t$

```
A == -Transpose[A]
```

```
True
```

M3. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & k^2 & 1 & 2 & 0 & k \\ k & 2 & 2k & k & 1 & k^2 \\ 0 & k & -2 & k^2 & k & 1 \\ -k & -2 & k^2 & 2 & -1 & 0 \\ k & 2k & k^2 & k & -2 & -1 \\ 1 & k & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Determinar el parámetro real k para que el determinante de la matriz sea 100.000.

RESOLUCIÓN

```
Remove["Global`*"]
```

Se define la matriz A y se calcula su determinante

$$A = \begin{pmatrix} 2 & k^2 & 1 & 2 & 0 & k \\ k & 2 & 2k & k & 1 & k^2 \\ 0 & k & -2 & k^2 & k & 1 \\ -k & -2 & k^2 & 2 & -1 & 0 \\ k & 2k & k^2 & k & -2 & -1 \\ 1 & k & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \text{Det[A] // Simplify}$$

$$56 + 50\,k + 17\,k^2 + 29\,k^3 + 33\,k^4 - 2\,k^5 - 9\,k^6 - 4\,k^7$$

Utilizando el comando Solve se intenta resolver la ecuación $|A| = 100000$

```
Solve[Det[A] == 100000, k]
```

```
{{k → Root[99944 - 50 #1 - 17 #1^2 - 29 #1^3 - 33 #1^4 + 2 #1^5 + 9 #1^6 + 4 #1^7 &, 1]},
 {k → Root[99944 - 50 #1 - 17 #1^2 - 29 #1^3 - 33 #1^4 + 2 #1^5 + 9 #1^6 + 4 #1^7 &, 2]},
 {k → Root[99944 - 50 #1 - 17 #1^2 - 29 #1^3 - 33 #1^4 + 2 #1^5 + 9 #1^6 + 4 #1^7 &, 3]},
 {k → Root[99944 - 50 #1 - 17 #1^2 - 29 #1^3 - 33 #1^4 + 2 #1^5 + 9 #1^6 + 4 #1^7 &, 4]},
 {k → Root[99944 - 50 #1 - 17 #1^2 - 29 #1^3 - 33 #1^4 + 2 #1^5 + 9 #1^6 + 4 #1^7 &, 5]},
 {k → Root[99944 - 50 #1 - 17 #1^2 - 29 #1^3 - 33 #1^4 + 2 #1^5 + 9 #1^6 + 4 #1^7 &, 6]},
 {k → Root[99944 - 50 #1 - 17 #1^2 - 29 #1^3 - 33 #1^4 + 2 #1^5 + 9 #1^6 + 4 #1^7 &, 7]}}
```

Con el comando Solve no se puede obtener la solución exacta de la ecuación, por ello se resuelve utilizando el comando NSolve obteniendo así una aproximación

```
NSolve[Det[A] == 100000, k]
```

```
{{k → -4.56796}, {k → -3.02299 - 3.33164 i}, {k → -3.02299 + 3.33164 i},
 {k → 0.59423 - 4.06314 i}, {k → 0.59423 + 4.06314 i},
 {k → 3.58774 - 1.77663 i}, {k → 3.58774 + 1.77663 i}}
```

Dado que k debe ser un parámetro real, la solución pedida es $k = -4{,}56796$.

M4. Sea $A = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -k & -1 & 1 \\ 3 & -6 & k+2 \end{pmatrix}$

a) Determinar los valores del parámetro k para que al multiplicar la matriz A por una matriz B se obtenga la matriz nula de dimensión 4x5. Interpretar los resultados.

b) ¿Cuál es la expresión general de la matriz B si ésta debe ser no nula? Especificar dos casos particulares.

RESOLUCIÓN

```
Remove["Global`*"]
```

a) Se definen la matriz nula NU y la matriz A

```
NU = ConstantArray[0, {4, 5}]; MatrixForm[NU]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
A = {{k, 1, -1}, {1, 1, 1}, {-k, -1, 1}, {3, -6, k + 2}};
MatrixForm[A]
```

$$\begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -k & -1 & 1 \\ 3 & -6 & 2+k \end{pmatrix}$$

Se define también una matriz B genérica de dimensión adecuada para poder multiplicar las matrices en el orden fijado

```
B = Array[x, {3, 5}]; MatrixForm[B]
```

$$\begin{pmatrix} x[1,1] & x[1,2] & x[1,3] & x[1,4] & x[1,5] \\ x[2,1] & x[2,2] & x[2,3] & x[2,4] & x[2,5] \\ x[3,1] & x[3,2] & x[3,3] & x[3,4] & x[3,5] \end{pmatrix}$$

Se obtienen los valores de k resolviendo la ecuación $A \cdot B = NU$

```
sol = Reduce[A.B == NU, Flatten[B]]; sol = {ToRules[sol]}
```

$$\{\{k \to -5,\ x[2,1] \to \tfrac{1}{2}(-x[1,1] - k\,x[1,1]),\ x[2,2] \to \tfrac{1}{2}(-x[1,2] - k\,x[1,2]),$$
$$x[2,3] \to \tfrac{1}{2}(-x[1,3] - k\,x[1,3]),\ x[2,4] \to \tfrac{1}{2}(-x[1,4] - k\,x[1,4]),$$
$$x[2,5] \to \tfrac{1}{2}(-x[1,5] - k\,x[1,5]),\ x[3,1] \to \tfrac{1}{2}(-x[1,1] + k\,x[1,1]),$$
$$x[3,2] \to \tfrac{1}{2}(-x[1,2] + k\,x[1,2]),\ x[3,3] \to \tfrac{1}{2}(-x[1,3] + k\,x[1,3]),$$
$$x[3,4] \to \tfrac{1}{2}(-x[1,4] + k\,x[1,4]),\ x[3,5] \to \tfrac{1}{2}(-x[1,5] + k\,x[1,5])\},$$
$$\{k \to -2,\ x[2,1] \to \tfrac{1}{2}(-x[1,1] - k\,x[1,1]),\ x[2,2] \to \tfrac{1}{2}(-x[1,2] - k\,x[1,2]),$$
$$x[2,3] \to \tfrac{1}{2}(-x[1,3] - k\,x[1,3]),\ x[2,4] \to \tfrac{1}{2}(-x[1,4] - k\,x[1,4]),$$
$$x[2,5] \to \tfrac{1}{2}(-x[1,5] - k\,x[1,5]),\ x[3,1] \to \tfrac{1}{2}(-x[1,1] + k\,x[1,1]),$$
$$x[3,2] \to \tfrac{1}{2}(-x[1,2] + k\,x[1,2]),\ x[3,3] \to \tfrac{1}{2}(-x[1,3] + k\,x[1,3]),$$
$$x[3,4] \to \tfrac{1}{2}(-x[1,4] + k\,x[1,4]),\ x[3,5] \to \tfrac{1}{2}(-x[1,5] + k\,x[1,5])\},$$
$$\{x[1,1] \to 0,\ x[1,2] \to 0,\ x[1,3] \to 0,\ x[1,4] \to 0,\ x[1,5] \to 0,$$
$$x[2,1] \to 0,\ x[2,2] \to 0,\ x[2,3] \to 0,\ x[2,4] \to 0,\ x[2,5] \to 0,$$
$$x[3,1] \to 0,\ x[3,2] \to 0,\ x[3,3] \to 0,\ x[3,4] \to 0,\ x[3,5] \to 0\}\}$$

Si $k = -5$ o $k = -2$, la matriz B obtenida puede ser una matriz no nula.

Si $k \neq -5$ y $k \neq -2$, la matriz B debe ser la matriz nula.

b) Cuando $k = -5$ o $k = -2$, los coeficientes de la matriz B deben cumplir las siguientes condiciones

```
B = B /. sol[[1]]; MatrixForm[B]
```

$$\begin{pmatrix} x[1,1] & x[1,2] & x[1,3] & x[1,4] & x[1,5] \\ \tfrac{1}{2}(-x[1,1] - k\,x[1,1]) & \tfrac{1}{2}(-x[1,2] - k\,x[1,2]) & \tfrac{1}{2}(-x[1,3] - k\,x[1,3]) & \tfrac{1}{2}(-x[1,4] - k\,x[1,4]) & \tfrac{1}{2}(-x[1,5] - k\,x[1,5]) \\ \tfrac{1}{2}(-x[1,1] + k\,x[1,1]) & \tfrac{1}{2}(-x[1,2] + k\,x[1,2]) & \tfrac{1}{2}(-x[1,3] + k\,x[1,3]) & \tfrac{1}{2}(-x[1,4] + k\,x[1,4]) & \tfrac{1}{2}(-x[1,5] + k\,x[1,5]) \end{pmatrix}$$

Se obtienen dos casos particulares dando diferentes valores a las incógnitas y se comprueba que efectivamente $A \cdot B = NU$

```
B1 = B /. {k → -5, x[1, 1] → 0, x[1, 2] → 1, x[1, 3] → -1, x[1, 4] → 2,
   x[1, 5] → 3};
MatrixForm[B1]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & -3 & 3 & -6 & -9 \end{pmatrix}$$

```
A1 = A /. k → -5; A1.B1 == NU
```

```
True
```

```
B2 = B /. {k → -2, x[1, 1] → -4, x[1, 2] → 2, x[1, 3] → 0, x[1, 4] → 2,
   x[1, 5] → 6};
MatrixForm[B2]
```

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & 2 & 6 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 6 & -3 & 0 & -3 & -9 \end{pmatrix}$$

```
A2 = A /. k → -2; A2.B2 == NU
```

```
True
```

M5. Calcular el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & m & 4 \\ 2 & 1 & m & 3 \\ m & 3 & -2 & -2 \\ m & 5 & 1 & m \end{pmatrix}$ en función del parámetro real m.

RESOLUCIÓN

```
Remove["Global`*"]
```

Se define la matriz *A*

```
A = {{-2, 1, m, 4 }, {2, 1, m, 3}, {m, 3, -2, -2}, {m, 5, 1, m}};
MatrixForm[A]
```

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & m & 4 \\ 2 & 1 & m & 3 \\ m & 3 & -2 & -2 \\ m & 5 & 1 & m \end{pmatrix}$$

Mathematica no realiza directamente el estudio del rango de una matriz en función de parámetros, por lo que para estudiar el rango de A se debe ir paso a paso calculando el valor de los distintos menores

```
Det[A]
```

$-190 + 51\, m + 10\, m^2$

```
Solve[Det[A] == 0]
```

$\left\{\left\{m \to -\frac{38}{5}\right\}, \left\{m \to \frac{5}{2}\right\}\right\}$

Caso 1: Si $m \neq -\frac{38}{5}$ y $m \neq \frac{5}{2} \Rightarrow rg(A) = 4.$

Caso 2: Si $m = -\frac{38}{5}$

```
m = -38 / 5; MatrixForm[A]
```

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -\frac{38}{5} & 4 \\ 2 & 1 & -\frac{38}{5} & 3 \\ -\frac{38}{5} & 3 & -2 & -2 \\ -\frac{38}{5} & 5 & 1 & -\frac{38}{5} \end{pmatrix}$$

En este caso, al eliminar el parámetro de la matriz, es posible utilizar el comando *MatrixRank* para calcular el rango

```
MatrixRank[A]
```

3

Caso 3: Si $m = \frac{5}{2}$

Procediendo de forma similar al caso anterior

```
m = 5 / 2; MatrixRank[A]
```

3

Resumiendo: $\begin{cases} \text{Si } m \neq -\frac{38}{5} \text{ y } m \neq \frac{5}{2} \Rightarrow rg(A) = 4 \\ \text{Si } m = -\frac{38}{5} \text{ o } m = \frac{5}{2} \Rightarrow rg(A) = 3 \end{cases}$

M6. Calcular el rango de la matriz $M = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & b & 1 \\ 2 & 1 & b & -1 \\ 0 & 2b-1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ en función de los parámetros reales a y b.

RESOLUCIÓN

```
Remove["Global`*"]
```

Se define la matriz M y se calcula el valor de su determinante

```
M = {{a, 1, 2, 0}, {2, -3, b, 1}, {2, 1, b, -1}, {0, 2 b - 1, 0, 4}};
MatrixForm[M]
```

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & b & 1 \\ 2 & 1 & b & -1 \\ 0 & -1+2b & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Se calculan los valores que anulan este determinante para obtener los posibles casos

```
Det[M]
sol = Reduce[Det[M] == 0]
sol = {ToRules[sol]}
```

$56 + 16 b - 14 a b - 4 a b^2$

$\left(b \neq 0 \,\&\&\, a == \frac{4}{b}\right) \,||\, b == -\frac{7}{2}$

$\left\{\left\{a \to \frac{4}{b}\right\}, \left\{b \to -\frac{7}{2}\right\}\right\}$

Caso 1: Si $b \neq -\frac{7}{2}$ y $a \neq \frac{4}{b}$ y $b \neq 0 \Rightarrow rg(M) = 4$.

Caso 2: Si $a = \frac{4}{b}$ y $b \neq 0 \Rightarrow rg(M) \leq 3$

Se sustituye en la matriz M el valor $a = \frac{4}{b}$ y se obtiene la matriz $M1$

```
M1 = M /. a → 4 / b; MatrixForm[M1]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{b} & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & b & 1 \\ 2 & 1 & b & -1 \\ 0 & -1+2b & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Se comprueba que el determinante de esta matriz es nulo $\forall b \in \mathbb{R}$

```
Det[M1]
```

0

Se calcula el valor de todos los menores de orden 3 de la matriz $M1$

```
j = Minors[M1]; MatrixForm[j]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 4+\frac{8}{b} & 0 & -4-2b \\ 0 & -16-\frac{44}{b} & 0 & 22+8b \\ 0 & \frac{12}{b} & 0 & -6 \\ 0 & 28+8b & 0 & -14b-4b^2 \end{pmatrix}$$

Basta que uno de estos menores sea distinto de cero para que el rango de la matriz $M1$ sea 3

```
Solve[j[[1, 2]] == 0]
```

{{b → -2}}

```
Solve[j[[2, 2]] == 0]
```

$\{\{b \to -\frac{11}{4}\}\}$

No existe ningún valor de b que anule simultáneamente estos dos menores de orden 3, por lo que $rg(M) = 3$.

<u>Caso 3:</u> Si $b = -\frac{7}{2} \Rightarrow rg(M) \leq 3$

Se sustituye en la matriz M el valor $b = -\frac{7}{2}$ y se obtiene la matriz $M2$. Se comprueba que el determinante de esta matriz es nulo para cualquier valor del parámetro a

```
M2 = M /. b -> -7 / 2; MatrixForm[M2]
```

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -\frac{7}{2} & 1 \\ 2 & 1 & -\frac{7}{2} & -1 \\ 0 & -8 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

```
Det[M2]
```

0

Se calcula el valor de todos los menores de orden tres de la matriz $M2$

```
j = Minors[M2]; MatrixForm[j]
```

$$\begin{pmatrix} 16+14a & 4+2a & 8+7a & 3 \\ -32-28a & -8-4a & -16-14a & -6 \\ -32-28a & -8-4a & -16-14a & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Basta que uno de estos menores sea distinto de cero para que el rango de la matriz $M2$ sea 3

```
Solve[j[[1, 2]] == 0]
```

{{a → -2}}

```
Solve[j[[2, 3]] == 0]
```

$\{\{a \to -\frac{8}{7}\}\}$

No existe ningún valor del parámetro a que anule estos dos menores de orden 3 simultáneamente, por lo que $rg(M) = 3$.

Resumiendo los casos se tiene que: $\begin{cases} \text{Si } b \neq -\frac{7}{2} \text{ y } a \neq \frac{4}{b} \text{ y } b \neq 0 \Rightarrow rg(M) = 4 \\ \text{Si } b = -\frac{7}{2} \Rightarrow rg(M) = 3 \\ \text{Si } a = \frac{4}{b} \text{ y } b \neq 0 \Rightarrow rg(M) = 3 \end{cases}$

M7. Sea una matriz A triangular inferior cuya diagonal principal es $(1,-1,1)$. Calcular la matriz A sabiendo que $A\cdot B=G$, siendo $B=\begin{pmatrix}1 & 8 & 0\\ -1 & 5 & 1\\ 7 & -2 & 2\end{pmatrix}$ y $G=\begin{pmatrix}1 & m-1 & 0\\ 10 & 67 & -1\\ 4 & 65 & m\end{pmatrix}$, y que $|G|=-84$.

RESOLUCIÓN

```
Remove["Global`*"]
```

Se define la matriz A triangular inferior genérica de orden 3 x 3, cuya diagonal principal es $(1,-1,1)$ y las matrices B y G

```
A = {{1, 0, 0}, {a21, -1, 0}, {a31, a32, 1}}; MatrixForm[A]
B = {{1, 8, 0}, {-1, 5, 1}, {7, -2, 2}}; MatrixForm[B]
G = {{1, m - 1, 0}, {10, 67, -1}, {4, 65, m}};
MatrixForm[G]
```

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ a21 & -1 & 0\\ a31 & a32 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 8 & 0\\ -1 & 5 & 1\\ 7 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1+m & 0\\ 10 & 67 & -1\\ 4 & 65 & m\end{pmatrix}$$

Se calculan los valores del parámetro m que hacen que el determinante de la matriz G sea -84

```
Solve[Det[G] == -84, m]
```

$$\left\{\left\{m\to-\frac{17}{10}\right\},\ \{m\to 9\}\right\}$$

Se obtienen dos valores del parámetro m, por lo que habrá que analizar dos casos distintos resolviendo la ecuación $A\cdot B=G$

Si $m=9$

```
m = 9; sol = Solve[A.B == G]
```

{{a21 → 9, a31 → 4, a32 → 7}}

Por lo que una de las matrices A buscada es

```
A = A /. sol[[1]]; MatrixForm[A]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & -1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $m = -\frac{17}{10}$

```
m = -17 / 10; Solve[A.B == G]
```

{}

El sistema no tiene solución. La única matriz que cumple las condiciones del problema es la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & -1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

M8. Sean $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 7 \\ 7 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 61 & 3 & -9 \\ -9 & 56 & 32 \\ 5 & 18 & 30 \end{pmatrix}$ y $G = \begin{pmatrix} 34 & 20 & 15 \\ -29 & -1 & 13 \\ -14 & 21 & 14 \end{pmatrix}$ tres matrices. Calcular las matrices X e Y que cumplen el sistema de ecuaciones matricial

$$\begin{cases} X + Y \cdot A^t = F \\ X \cdot A - Y = G \end{cases}$$

RESOLUCIÓN

```
Remove["Global`*"]
```

Se definen las matrices A, F y G

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 7 \\ 7 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 8 \\ 4 & 7 & -2 \\ 0 & -4 & 9 \end{pmatrix}; F = \begin{pmatrix} 61 & 3 & -9 \\ -9 & 56 & 32 \\ 5 & 18 & 30 \end{pmatrix};$$

$$G = \begin{pmatrix} 34 & 20 & 15 \\ -29 & -1 & 13 \\ -14 & 21 & 14 \end{pmatrix};$$

Se definen también las matrices X e Y genéricas de dimensión adecuada para poder resolver el sistema de ecuaciones matricial

```
X = Array[m1, {3, 3}]; MatrixForm[X]
```

$$\begin{pmatrix} m1[1,1] & m1[1,2] & m1[1,3] \\ m1[2,1] & m1[2,2] & m1[2,3] \\ m1[3,1] & m1[3,2] & m1[3,3] \end{pmatrix}$$

```
Y = Array[m2, {3, 3}]; MatrixForm[Y]
```

$$\begin{pmatrix} m2[1,1] & m2[1,2] & m2[1,3] \\ m2[2,1] & m2[2,2] & m2[2,3] \\ m2[3,1] & m2[3,2] & m2[3,3] \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema y se obtienen las matrices X e Y pedidas

```
sol = Solve[{X + Y.Transpose[A] == F, X.A - Y == G}]

{{m1[1, 1] → 2, m1[1, 2] → 5, m1[1, 3] → 0, m2[1, 1] → -3,
  m2[1, 2] → 5, m2[1, 3] → 4, m1[2, 1] → 2, m1[2, 2] → -3, m1[2, 3] → 1,
  m2[2, 1] → 8, m2[2, 2] → 1, m2[2, 3] → 0, m1[3, 1] → 3, m1[3, 2] → 0,
  m1[3, 3] → -1, m2[3, 1] → 4, m2[3, 2] → -5, m2[3, 3] → 5}}
```

```
X = X /. sol[[1]] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Y = Y /. sol[[1]] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 & 4 \\ 8 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

M9. Hallar todas las matrices reales que conmutan con la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

RESOLUCIÓN

```
Remove["Global`*"]
```

Se definen la matriz A y una matriz B genérica del mismo orden

```
A = {{2, 1}, {-1, 2}}

{{2, 1}, {-1, 2}}
```

```
B = Array[x, {2, 2}]

{{x[1, 1], x[1, 2]}, {x[2, 1], x[2, 2]}}
```

Se resuelve la ecuación $A \cdot B = B \cdot A$

```
sol = Reduce[A.B == B.A]; sol = {ToRules[sol]}

{{x[1, 2] → -x[2, 1], x[1, 1] → x[2, 2]}}
```

```
B = B /. Flatten[sol] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} x[2,2] & -x[2,1] \\ x[2,1] & x[2,2] \end{pmatrix}$$

Las matrices que conmutan con la matriz A tienen el mismo elemento en la diagonal principal siendo el resto de elementos opuestos.

M10. Calcular el valor del parámetro p para que la matriz simétrica $A = \begin{pmatrix} p & p \\ p & -p \end{pmatrix}$ sea ortogonal.

RESOLUCIÓN

```
Remove["Global`*"]
```

Se define la matriz A

```
A = {{p, p}, {p, -p}}

{{p, p}, {p, -p}}
```

La matriz A es ortogonal si verifica que $A \cdot A^t = I$. Se calculan los valores de p que satisfacen esta igualdad

```
sol = Solve[A.Transpose[A] == IdentityMatrix[2]]
```

$$\left\{\left\{p \to -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \left\{p \to \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}\right\}$$

Se obtienen dos valores de p, por lo que habrá dos matrices ortogonales

```
A1 = A /. sol[[1]]; MatrixForm[A1]
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

```
A2 = A /. sol[[2]]; MatrixForm[A2]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Se comprueba que $A1$ y $A2$ son matrices ortogonales, es decir, que verifican la ecuación $A^t = A^{-1}$

```
Transpose[A1] == Inverse[A1]
True
```

```
Transpose[A2] == Inverse[A2]
True
```

2 SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

2.1 Introducción

Definición: Se llama sistema de n ecuaciones lineales con p incógnitas al conjunto de n igualdades del tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

siendo a_{ij} los coeficientes, b_i los términos independientes pertenecientes a $\mathbb{R}$ y x_j las incógnitas del sistema.

Algunas consideraciones:

- Cualquier p-tupla $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$ que al sustituirse en el sistema de ecuaciones lineales verifica todas las igualdades, es solución del sistema.
- Si un sistema de ecuaciones tiene solución, se dice que es un sistema compatible. En caso contrario, se dice que es incompatible.
- Un sistema compatible puede tener una única solución o varias soluciones. Cuando la solución es única el sistema es compatible determinado y cuando posee varias soluciones, el sistema es compatible indeterminado.
- Un sistema de ecuaciones lineales es homogéneo cuando todos los términos independientes son nulos, es decir, $b_i = 0,\ \forall i = 1,2, \dots, n$. Un sistema homogéneo siempre es compatible, ya que la solución trivial $x_j = 0,\ \forall j = 1,2, \dots, p$ es siempre solución del mismo.
- La representación matricial del sistema de ecuaciones lineales es:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{\vec{b}} \Longrightarrow A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

siendo A la matriz de los coeficientes, $\vec{x}$ el vector de las incógnitas y $\vec{b}$ el vector de los términos independientes.

Asimismo, se define matriz ampliada como la matriz que se construye solapando a la matriz de los coeficientes A el vector de términos independientes $\vec{b}$ y se denota por M o $\left(A\middle|\vec{b}\right)$:

$$M = \left(A\middle|\vec{b}\right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{np} & b_n \end{array}\right)$$

2.2 Teorema de Rouché-Fröbenius

Teorema: Un sistema de ecuaciones lineales es compatible si y sólo si, el rango de la matriz de los coeficientes coincide con el rango de la matriz ampliada:

$$rg(A) = rg(M)$$

- Si $rg(A) = rg(M) =$ número de incógnitas, el sistema es compatible determinado.
- Si $rg(A) = rg(M) <$ número de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado.

En caso contrario, el sistema de ecuaciones es incompatible y se cumple que:

$$rg(A) \neq rg(M)$$

Nota: En el caso particular de los sistemas homogéneos, siempre se cumple que $rg(A) = rg(M)$, por lo que éstos siempre son compatibles.

2.3 Regla de Cramer

La regla de Cramer se utiliza para resolver un sistema lineal de ecuaciones en él que el número de ecuaciones coincide con el número de incógnitas y la matriz de los coeficientes es regular. Es decir, cuando el sistema es compatible determinado.

Sea un sistema de n ecuaciones lineales y n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

siendo $|A| \neq 0$. Utilizando la regla de Cramer cada incógnita genérica x_i se calcula dividiendo el determinante resultante al sustituir en la matriz de los coeficientes la columna i-ésima por el vector columna de los términos independientes entre el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}, \dots, x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & b_n \end{vmatrix}}{|A|}$$

2.4 Equivalencia de los sistemas de ecuaciones lineales

Definición: Dos sistemas de ecuaciones lineales S_1 y S_2 son equivalentes si tienen las mismas soluciones y se denota por $S_1 \Leftrightarrow S_2$.

Dado un sistema de ecuaciones lineales, se pueden obtener sistemas equivalentes al mismo mediante las siguientes operaciones:

- La supresión (o la adición) de una ecuación que sea combinación lineal de las demás ecuaciones del sistema.
- La multiplicación de una ecuación del sistema por un escalar no nulo.
- La sustitución de una ecuación por la suma de dicha ecuación y una combinación lineal de otras ecuaciones del sistema.

2.5 Método de Gauss

El método de Gauss es uno de los más utilizados para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Este algoritmo transforma un sistema en otro equivalente más sencillo de resolver.

Por ejemplo, utilizando el método de Gauss un sistema de n ecuaciones y n incógnitas se puede convertir en un sistema escalonado o triangular:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \xRightarrow[\textit{método de Gauss}]{} \begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\ \qquad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad\qquad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad c_{nn}x_n = d_n \end{cases}$$

donde:

- Si $c_{ii} \neq 0, \forall i = 1,2,\dots,n$, de la última ecuación del sistema escalonado se obtiene el valor de la incógnita x_n. A continuación, se sustituye este valor en la $(n-1)$-ésima ecuación y se despeja la incógnita x_{n-1} obteniéndose su valor, y así sucesivamente hasta despejar la incógnita x_1 de la primera ecuación del sistema. En este caso, el sistema es compatible determinado.

- Si alguno de los coeficientes c_{ii} es nulo pueden darse dos casos: si en la ecuación i-ésima se obtiene una igualdad el sistema es compatible indeterminado y si se obtiene una contradicción el sistema es incompatible.

Sea el sistema inicial S_1:

$$S_1 \equiv \begin{cases} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{cases}$$

donde la ecuación k-ésima viene dada por la expresión:

$$E_k: a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k$$

El sistema escalonado se puede obtener realizando las siguientes operaciones:

- Intercambiar la i-ésima ecuación con la j-ésima, para $\forall i, j = 1,2, \dots, n$

$$S_1 \equiv \begin{cases} E_1 \\ \vdots \\ E_i \\ \vdots \\ E_j \\ \vdots \\ E_n \end{cases} \Leftrightarrow S_2 \equiv \begin{cases} E_1 \\ \vdots \\ E_j \\ \vdots \\ E_i \\ \vdots \\ E_n \end{cases}$$

- Reemplazar la i-ésima ecuación por un múltiplo no nulo de ella:

$$S_1 \equiv \begin{cases} E_1 \\ \vdots \\ E_i \\ \vdots \\ E_n \end{cases} \Leftrightarrow S_2 \equiv \begin{cases} E_1 \\ \vdots \\ \alpha E_i \\ \vdots \\ E_n \end{cases} \text{siendo } \alpha \neq 0$$

- Reemplazar la j-ésima ecuación por la suma de ella misma con un múltiplo de la i-ésima ecuación:

$$S_1 \equiv \begin{cases} E_1 \\ \vdots \\ E_i \\ \vdots \\ E_j \\ \vdots \\ E_n \end{cases} \Leftrightarrow S_2 \equiv \begin{cases} E_1 \\ \vdots \\ E_i \\ \vdots \\ E_j + \alpha E_i \\ \vdots \\ E_n \end{cases} \text{siendo } \alpha \neq 0$$

2.6 Método general para la resolución de un sistema de ecuaciones lineales

Sea un sistema lineal compatible de n ecuaciones y p incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

es decir, $rg(A) = rg(M) = k \leq p$.

El procedimiento general para hallar la solución del sistema es el siguiente:

- Elegir un menor no nulo de dimensión k de la matriz de los coeficientes. Supóngase que este menor está formado por las k primeras filas y las k primeras columnas:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

  Las incógnitas que en el sistema de ecuaciones multiplican a los coeficientes de ese menor son las incógnitas básicas a las que se les llama variables básicas y al resto de incógnitas se les llama variables libres.

$$S_1 \equiv \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kk}x_k + \cdots + a_{kp}x_p = b_k \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nk}x_k + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

- Construir un sistema equivalente eliminando las filas cuyos coeficientes no intervienen en el menor elegido:

$$S_1 \Leftrightarrow S_2 \equiv \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kk}x_k + \cdots + a_{kp}x_p = b_k \end{cases}$$

- Introducir con signo opuesto en ambos lados de las igualdades los sumandos correspondientes a las variables básicas:

$$S_2 \Leftrightarrow S_3 \equiv \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k = b_1 - (a_{1k+1}x_{k+1} + \cdots + a_{1p}x_p) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k = b_2 - (a_{2k+1}x_{k+1} + \cdots + a_{2p}x_p) \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kk}x_k = b_k - (a_{k,k+1}x_{k+1} + \cdots + a_{kp}x_p) \end{cases}$$

- Resolver el sistema utilizando por ejemplo la regla de Cramer, obteniendo el valor de las variables básicas $x_1, x_2, \ldots., x_k$ en función de las variables libres $x_{k+1}, \ldots., x_p$ y teniendo en cuenta que los términos a la derecha de la igualdad son los nuevos términos independientes del sistema $c_i = b_i - (a_{i,k+1}x_{k+1} + \cdots + a_{ip}x_p), \forall i = 1, 2, \ldots, k.$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1k} \\ c_2 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_k & a_{k2} & \cdots & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & \cdots & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & c_2 & \cdots & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_k1 & c_k & \cdots & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}}, \ldots, x_k = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & \cdots & c_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

P1. Resolver el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+y+z=6 \\ -x-y+2z=1 \end{cases}$ utilizando el método de Cramer.

RESOLUCIÓN

La matriz de los coeficientes y la matriz ampliada son

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (A|\vec{b})=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Se calcula el determinante de la matriz de los coeficientes

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-1\neq 0 \Rightarrow rg(A)=3$$

$rg(A)=rg(A|\vec{b})=3=$ número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

Se utiliza el método de Cramer para su resolución

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-1}=\frac{-4}{-1}=4; \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-1}=\frac{3}{-1}=-3; \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-1}=\frac{-1}{-1}=1$$

P2. Resolver el sistema $\begin{cases} 2x+2y-3z+t=3 \\ 4x-y+2z-t=-10 \\ x+2y+t=2 \\ 2x-2y-4z-2t=0 \end{cases}$ mediante el método de Gauss.

RESOLUCIÓN

$$\begin{cases} 2x+2y-3z+t=3 \\ 4x-y+2z-t=-10 \\ x+2y+t=2 \\ 2x-2y-4z-2t=0 \end{cases} \xRightarrow[F_1\leftrightarrow F_4]{F_4/2} \begin{cases} x-y-2z-t=0 \\ 4x-y+2z-t=-10 \\ x+2y+t=2 \\ 2x+2y-3z+t=3 \end{cases} \xRightarrow{\substack{F_2-4F_1 \\ F_3-F_1 \\ F_4-2F_1}}$$

$$\begin{cases} x-y-2z-t=0 \\ 3y+10z+3t=-10 \\ 3y+2z+2t=2 \\ 4y+z+3t=3 \end{cases} \overset{\substack{F_3-F_2 \\ F_4-\frac{4}{3}F_2}}{\Rightarrow} \begin{cases} x-y-2z-t=0 \\ 3y+10z+3t=-10 \\ -8z-t=12 \\ \frac{-37}{3}z-t=\frac{49}{3} \end{cases} \overset{F_4-\frac{37}{24}F_3}{\Rightarrow}$$

$$\begin{cases} x-y-2z-t=0 \\ 3y+10z+3t=-10 \\ -8z-t=12 \\ \frac{13}{24}t=\frac{-13}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4+2(-1)-4=-2 \\ y=\frac{1}{3}(-10+10+12)=4 \\ z=\frac{-1}{8}(12-4)=-1 \\ t=\frac{24}{13}\cdot\left(\frac{-13}{6}\right)=-4 \end{cases}$$

La solución del sistema es $\begin{cases} x=-2 \\ y=\ \ 4 \\ z=-1 \\ t=-4 \end{cases}$

P3. Estudiar el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y-2z+t=0 \\ -x-2y+t=1 \\ z+t=2 \end{cases}$ y resolverlo cuando sea posible.

RESOLUCIÓN

Se definen la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \left(A\middle|\vec{b}\right)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Se calcula el rango de la matriz de los coeficientes

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0\Rightarrow rg(A)=3$$

$rg(A)=rg\left(A\middle|\vec{b}\right)=3<$ número de incógnitas $=4\Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

Se resuelve en función del menor utilizado para calcular el rango

$$\begin{cases} x+y-2z+t=0 \\ -x-2y+t=1 \\ z+t=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z=-\lambda \\ -x-2y=1-\lambda \\ z=2-\lambda \\ \mathrm{t}=\lambda \end{cases}$$

Sustituyendo la tercera ecuación en la primera y despejando el valor de x e y se tiene que

$$x = 9 - 7\lambda; \quad y = -5 + 4\lambda; \quad z = 2 - \lambda; \quad t = \lambda; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

P4. Estudiar el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 1 \\ -3x - y - 3z = -2 \\ -x - y - z = 0 \end{cases}$ y resolverlo cuando sea posible.

RESOLUCIÓN

La matriz de los coeficientes y la matriz ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad (A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Se calcula el rango de la matriz de los coeficientes. Dado que la primera y la última fila de la matriz A son proporcionales, y la primera y la última columna son iguales

$$rg(A) = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$$

Se calcula el rango de la matriz ampliada

$$rg(A|\vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow rg(A|\vec{b}) = 3$$

Como $rg(A) = 2 \neq rg(A|\vec{b}) = 3 \Rightarrow$ Sistema Incompatible, por lo que no existe solución.

P5. Sea el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x - 2y + 2z - 2t = 6 \\ x - y + 4z + at = a - 3 \end{cases}$

a) Clasificar en función del parámetro a.

b) Resolver cuando sea posible.

RESOLUCIÓN

a) La matriz de los coeficientes y la matriz ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & a \end{pmatrix} \qquad (A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 4 & a & a-3 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \ \Rightarrow rg(A) = rg(A|\vec{b}) = 2 < \text{número de incógnitas} = 4$$

Se trata de un Sistema Compatible Indeterminado para cualquier valor del parámetro a.

b) Utilizando el menor del apartado anterior

$$\begin{cases} x - 2y + 2z - 2t = 6 \\ x - y + 4z + at = a - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 6 - 2\lambda + 2\mu \\ x - y = a - 3 - 4\lambda - a\mu \\ z = \lambda \\ t = \mu \end{cases}$$

Restando las dos ecuaciones se tiene que

$$y = -9 + a - 2\lambda - (2 + a)\,\mu$$

Sustituyendo esta expresión en la segunda ecuación se obtiene el valor de la incógnita x

$$x = -12 + 2a - 6\lambda - (2a + 2)\mu$$

En conclusión, la solución del sistema es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 + 2a \\ -9 + a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2a - 2 \\ -2 - a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

P6. Sea el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + 3y - z = 6 \\ x + 2y + z = 2 \\ y - z = 2 \\ -2x + ay - 10z = 2a \end{cases}$

a) Utilizar el teorema de Rouché-Fröbenius para determinar el valor del parámetro a para el cual el sistema es compatible.

b) Resolver el sistema en ese caso.

RESOLUCIÓN

a) La matriz de los coeficientes y la matriz ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & a & -10 \end{pmatrix} \qquad (A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & a & -10 & 2a \end{array}\right)$$

Dado que la matriz A es una matriz de dimensión 4x3, verifica que $rg(A) \leq 3$

Véase exactamente cuál es el rango, $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3$

Por tanto, para que el sistema sea compatible debe cumplirse que $rg(A) = rg\left(A\middle|\vec{b}\right) = 3$

Por otro lado $3 \leq rg(A) = rg(A|\vec{b}) \leq 4$

Para determinar el rango de la matriz ampliada se calcula su determinante

$$|A|\vec{b}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & a & -10 & 2a \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -10 & 2a \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}(-1) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & a & 2a \end{vmatrix} +$$

$$+2(-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & a & -10 \end{vmatrix} = 12 - 2a$$

$$|A|\vec{b}| = 12 - 2a = 0 \Leftrightarrow a = 6$$

En conclusión

<u>Caso 1</u>: Si $a = 6 \Rightarrow rg(A) = rg\left(A\middle|\vec{b}\right) =$ número de incógnitas $= 3 \Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

<u>Caso 2</u>: Si $a \neq 6 \Rightarrow rg(A) = 3 \neq rg\left(A\middle|\vec{b}\right) = 4 \Rightarrow$ Sistema Incompatible.

b) El sistema que se debe resolver es $\begin{cases} x + 3y - z = 6 \\ x + 2y + z = 2 \\ y - z = 2 \\ -2x + 6y - 10z = 12 \end{cases}$

Dado que la última ecuación es combinación lineal de las primeras, el sistema anterior es equivalente al sistema $\begin{cases} x + 3y - z = 6 \\ x + 2y + z = 2 \\ y - z = 2 \end{cases}$ cuya solución es $x = 4, y = 0, z = -2$.

P7. Discutir el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} ax - y - z = 1 \\ x + ay + 2az = a \\ x + y + z = -1 \end{cases}$ en función del parámetro real a y resolverlo en los casos en que sea posible.

RESOLUCIÓN

Se definen la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ 1 & a & 2a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \left(A\middle|\vec{b}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & a & 2a & a \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Se calcula el determinante de la matriz de los coeficientes

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ 1 & a & 2a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -a(a+1) \ ; \ |A| = 0 \Leftrightarrow -a(a+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -1 \end{cases}$$

<u>Caso 1:</u> Si $a \neq 0$ y $a \neq -1$

$rg(A) = rg(A|\vec{b}) = 3 =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

Resolviendo por Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ a & a & 2a \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-a(a+1)} = 0; \ y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & 2a \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-a(a+1)} = \frac{3a(a+1)}{-a(a+1)} = -3; \ z = \frac{\begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-a(a+1)} = \frac{-2a(a+1)}{-a(a+1)} = 2$$

<u>Caso 2:</u> Si $a = 0 \ \Rightarrow rg(A) \leq 2$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Se estudia el rango de las matrices A y $(A|\vec{b})$. Dado que la segunda y la tercera columna de ambas matrices son iguales

$$rg(A) = rg\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$$

Por otro lado, la segunda y la cuarta columna de la matriz ampliada son proporcionales, por tanto

$$rg(A|\vec{b}) = rg\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$rg(A) = rg(A|\vec{b}) = 2 <$ número de incógnitas $= 3 \Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

Se resuelve teniendo en cuenta el menor no nulo utilizado para calcular el rango

$$\begin{cases} -y - z = 1 \\ x = 0 \\ x + y + z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y = 1 + \lambda \\ x = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

<u>Caso 3:</u> Si $a = -1 \ \Rightarrow rg(A) \leq 2$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Se estudia el rango de las matrices A y $(A|\vec{b})$. La primera y la tercera fila de la matriz de los coeficientes son proporcionales, es decir

$$rg(A) = rg\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$$

En cuanto al rango de la matriz ampliada, como la primera y última fila, así como la primera y la última columna son proporcionales

$$rg(A|\vec{b}) = rg\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow rg(A|\vec{b}) = 2$$

$rg(A) = rg(A|\vec{b}) = 2 <$ número de incógnitas $= 3$ $\Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

Al igual que en el caso anterior, se resuelve utilizando el menor que ha proporcionado el rango de la matriz de los coeficientes A.

$$\begin{cases} -x - y - z = 1 \\ x - y - 2z = -1 \\ x + y + z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - y = 1 + \lambda \\ x - y = -1 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + \frac{1}{2}\lambda \\ y = -\frac{3}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix} \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

P8. Sea el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} ax + 4y + az = -1 \\ x + 4ay + z = 1 \\ 3x - (4a-2)y + 2z = 3 \end{cases}$

a) Discutir el sistema en función del parámetro real a.

b) Resolver el sistema cuando sea compatible indeterminado.

RESOLUCIÓN

a) Para estudiar el sistema se calculan el rango de la matriz de los coeficientes y el rango de la matriz ampliada

$$A = \begin{pmatrix} a & 4 & a \\ 1 & 4a & 1 \\ 3 & -(4a-2) & 2 \end{pmatrix} \qquad (A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 4 & a & -1 \\ 1 & 4a & 1 & 1 \\ 3 & -(4a-2) & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 4 & a \\ 1 & 4a & 1 \\ 3 & -(4a-2) & 2 \end{vmatrix} \overset{C_1 - C_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 4 & a \\ 0 & 4a & 1 \\ 1 & -(4a-2) & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 4 & a \\ 4a & 1 \end{vmatrix} = 4(1-a^2)$$

$$|A| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

Caso 1: Si $a \neq -1$ y $a \neq 1 \Rightarrow rg(A) = rg(A|\vec{b}) = 3 =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

Caso 2: Si $a = -1 \Rightarrow rg(A) \leq 2$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \qquad (A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Las dos primeras filas de la matriz A son proporcionales, por lo que

$$rg(A) = rg\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -14 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$$

Por otro lado, dado que la columna que se añade al construir la matriz ampliada $(A|\vec{b})$ es igual que la primera, el rango de la matriz ampliada coincide con el rango de A. Entonces, $rg(A) = rg(A|\vec{b}) = 2 <$ número de incógnitas $= 3 \Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

Caso 3: Si $a = 1 \Rightarrow rg(A) \leq 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad (A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

En este caso las dos primeras filas de la matriz A son idénticas, por tanto

$$rg(A) = rg\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$$

Véase cuál es el rango de la matriz $(A|\vec{b})$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -20 \neq 0 \Rightarrow rg(A|\vec{b}) = 3$$

Es decir, $rg(A) = 2 \neq rg(A|\vec{b}) = 3 \Rightarrow$ Sistema Incompatible.

En resumen

Caso 1: Si $a \neq -1$ y $a \neq 1 \Rightarrow rg(A) = rg(A|\vec{b}) = 3 =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

Caso 2: Si $a = -1 \Rightarrow rg(A) = rg(A|\vec{b}) = 2 <$ número de incógnitas $= 3 \Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

Caso 3: Si $a = 1 \Rightarrow rg(A) = 2 \neq rg(A|\vec{b}) = 3 \Rightarrow$ Sistema Incompatible.

b) Se resuelve el problema para $a = -1$.

Se plantea el sistema utilizando el menor no nulo que ha determinado el rango de A

$$\begin{cases} -x+4y-z=-1 \\ x-\ 4y+z=\ \ 1 \\ 3x+6y+2z\ =\ 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ -\ 4y+z=\ \ 1-\lambda \\ 6y+2z\ =\ 3-3\lambda \end{cases}$$

Se resuelve el sistema $\begin{cases} -\ 4y+z=\ \ 1-\lambda \\ 6y+2z\ =\ 3-3\lambda \end{cases}$ mediante la regla de Cramer

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3-3\lambda & 2 \end{vmatrix}}{-14}=\frac{1-\lambda}{14};\quad z=\frac{\begin{vmatrix} -4 & 1-\lambda \\ 6 & 3-3\lambda \end{vmatrix}}{-14}=\frac{-9}{7}(\lambda-1)$$

La solución del sistema es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1/14 \\ 9/7 \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -1/14 \\ -\,9/7 \end{pmatrix}\ \forall\,\lambda\in\mathbb{R}$$

P9. Sea el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} (a+1)y+2(a+1)z\ =2a \\ 3ax\ +(2a-1)z=\ \ 0 \\ (a+1)y\ =-4a \end{cases}$

a) Discutir el sistema en función del parámetro real a.

b) Resolver cuando sea posible.

RESOLUCIÓN

a) Se definen la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada y se determina el valor del determinante de la matriz de los coeficientes para analizar los posibles casos

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a+1 & 2(a+1) \\ 3a & 0 & (2a-1) \\ 0 & a+1 & 0 \end{pmatrix}\qquad \left(A\middle|\vec{b}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a+1 & 2(a+1) & 2a \\ 3a & 0 & (2a-1) & 0 \\ 0 & a+1 & 0 & -4a \end{array}\right)$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & a+1 & 2(a+1) \\ 3a & 0 & (2a-1) \\ 0 & a+1 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{3+2}(a+1)\begin{vmatrix} 0 & 2(a+1) \\ 3a & (2a-1) \end{vmatrix}=6a(a+1)^2$$

$$|A|=0\Leftrightarrow\ \begin{cases} a=-1 \\ a=\ \ 0 \end{cases}$$

<u>Caso 1:</u> Si $a\neq-1$ y $a\neq0\ \Rightarrow rg(A)=\ rg\left(A\middle|\vec{b}\right)=\ 3=$ número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

<u>Caso 2:</u> Si $a = -1 \Rightarrow rg(A) \leq 2$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

La primera y la última fila de la matriz A, así como la segunda columna son nulas, por lo que $rg(A) = 1$.

Véase cuál es $rg(A|\vec{b})$

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \;\; \Rightarrow \; rg(A|\vec{b}) \; = \; 2$$

Entonces, $rg(A) = 1 \neq \; rg(A|\vec{b}) \; = \; 2 \;\Rightarrow$ Sistema Incompatible.

<u>Caso 3:</u> Si $a = 0 \Rightarrow rg(A) \leq 2$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Utilizando el siguiente menor de orden dos se obtiene el rango de la matriz A

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \;\; \Rightarrow rg(A) = 2$$

Una vez calculado el rango de la matriz A, se debe calcular el rango de la matriz ampliada $(A|\vec{b})$. Dado que la columna que se añade es nula, el sistema es homogéneo, por tanto, es compatible y $rg(A) = \; rg(A|\vec{b}) = \; 2 <$ número de incógnitas $= \; 3 \Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

En conclusión

<u>Caso 1:</u> Si $a \neq -1$ y $a \neq 0 \;\Rightarrow rg(A) = \; rg(A|\vec{b}) = \; 3 =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

<u>Caso 2:</u> Si $a = -1 \Rightarrow rg(A) = 1 \neq \; rg(A|\vec{b}) = \; 2 \Rightarrow$ Sistema Incompatible.

<u>Caso 3:</u> Si $a = 0 \Rightarrow rg(A) = rg(A|\vec{b}) = 2 <$ número de incógnitas $= 3 \Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

b) <u>Caso 1:</u> Si $a \neq -1$ y $a \neq 0 \;\Rightarrow rg(A) = \; rg(A|\vec{b}) = \; 3 =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

$$\begin{cases} (a+1)y + 2(a+1)z \; = 2a \\ \quad 3ax \; + (2a-1)z = \; 0 \\ \qquad\qquad (a+1)y \; = -4a \end{cases}$$

Utilizando la regla de Cramer la solución del sistema es

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2a & a+1 & 2(a+1)\\ 0 & 0 & (2a-1)\\ -4a & a+1 & 0\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{1-2a}{a+1};\quad y=\frac{\begin{vmatrix}0 & 2a & 2(a+1)\\ 3a & 0 & (2a-1)\\ 0 & -4a & 0\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-4a}{a+1};\quad z=\frac{\begin{vmatrix}0 & a+1 & 2a\\ 3a & 0 & 0\\ 0 & a+1 & -4a\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{3a}{a+1}$$

Caso 3: Si $a=0 \Rightarrow rg(A) = rg\left(A\middle|\vec{b}\right) = 2 <$ número de incógnitas $=3 \Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

El sistema a resolver es $\begin{cases} y+2z=0\\ -z=0\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-z=0\\ y=0\end{cases}$ y su solución $\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ $\forall\lambda\in\mathbb{R}$

P10. Resolver el sistema homogéneo $\begin{cases}(a+1)x+y+3z=0\\ x+(a+1)y+z=0\\ 3x-y+(a+1)z=0\end{cases}$ en función del parámetro real a.

RESOLUCIÓN

Al tratarse de un sistema homogéneo, el sistema es compatible, es decir, $rg(A)=rg\left(A\middle|\vec{b}\right)$ $\forall\, a\in\mathbb{R}$. Véanse los casos en los que es determinado o indeterminado.

$$A=\begin{pmatrix}a+1 & 1 & 3\\ 1 & a+1 & 1\\ 3 & -1 & a+1\end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}a+1 & 1 & 3\\ 1 & a+1 & 1\\ 3 & -1 & a+1\end{vmatrix}=(-2+a)(1+a)(4+a)=0\Leftrightarrow\begin{cases}a=-4\\ a=-1\\ a=\ \ 2\end{cases}$$

Caso 1: Si $a\neq-4$ y $a\neq-1$ y $a\neq 2\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado (solución trivial).

Caso 2: Si $a=-4\Rightarrow rg(A)\leq 2$

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 3\\ 1 & -3 & 1\\ 3 & -1 & -3\end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix}1 & 3\\ -3 & 1\end{vmatrix}=10\neq 0\Rightarrow rg(A)=2 <$ número de incógnitas $=3\Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

Se plantea el sistema utilizando el menor no nulo que ha determinado el rango de la matriz de los coeficientes A

$$\begin{cases} -3x+y+3z=0 \\ x-3y+z=0 \\ 3x-y-3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y+3z=3\lambda \\ -3y+z=-\lambda \end{cases}$$

Se calculan los valores de las incógnitas y y z

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 3\lambda & 3 \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix}}{10}=\frac{3\lambda}{5}; \quad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3\lambda \\ -3 & -\lambda \end{vmatrix}}{10}=\frac{4\lambda}{5}$$

La solución del sistema en este caso es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$$

<u>Caso 3:</u> Si $a=-1 \Rightarrow \ rg(A) \leq 2$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1 \neq 0 \Rightarrow rg(A)=2$$

$rg(A)=2<$ número de incógnitas $=3 \Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado. Procediendo de forma similar al caso anterior

$$\begin{cases} y+3z=0 \\ x+z=0 \\ 3x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y+3z=0 \\ z=-\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=-3z \\ z=-\lambda \end{cases}$$

Por lo que, la solución del sistema es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$$

<u>Caso 4:</u> Si $a=2 \Rightarrow \ rg(A) \leq 2$

$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-8 \neq 0 \Rightarrow rg(A)=2<$ número de incógnitas $=3 \Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

Se plantea el sistema equivalente utilizando el menor anterior

$$\begin{cases} 3x+y+3z=0 \\ x+3y+z=0 \\ 3x-y+3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y+3z=-3\lambda \\ 3y+z=-\lambda \end{cases}$$

Por último, se obtienen los valores de y y de z

$$y=\frac{\begin{vmatrix} -3\lambda & 3 \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix}}{-8}=0; \quad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -3\lambda \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix}}{-8}=-\lambda$$

La solución del sistema en este caso es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

P11. Discutir el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + by - z = 1 \\ x + ay + 2bz = a \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ en función de los parámetros reales a y b. Resolverlo en los casos en que sea compatible indeterminado.

RESOLUCIÓN

Se especifican la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & -1 \\ 1 & a & 2b \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \left(A\middle|\vec{b}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & -1 & 1 \\ 1 & a & 2b & a \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Se calcula el determinante de la matriz de los coeficientes

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & b & -1 \\ 1 & a & 2b \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2b^2 - b - 1 = 2(b-1)\left(b + \frac{1}{2}\right)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 2(b-1)\left(b + \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

<u>Caso 1:</u> Si $b \neq 1$ y $b \neq -\frac{1}{2}$

$rg(A) = rg\left(A\middle|\vec{b}\right) = 3 =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

<u>Caso 2:</u> Si $b = 1 \Rightarrow \ rg(A) \leq 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \left(A\middle|\vec{b}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & a & 2 & a \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Se estudia el rango de las matrices A y $\left(A\middle|\vec{b}\right)$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2; \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow rg\left(A\middle|\vec{b}\right) = 3$$

Entonces, $rg(A) = 2 \neq rg\left(A\middle|\vec{b}\right) = 3 \Rightarrow$ Sistema Incompatible.

Caso 3: Si $b=-\frac{1}{2} \Rightarrow\ rg(A)\leq 2$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1/2 & -1\\ 1 & a & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix} \qquad (A|\vec{b})=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1/2 & -1 & 1\\ 1 & a & -1 & a\\ 1 & 1 & -1 & 0\end{array}\right)$$

Se estudia el rango de las matrices A y $(A|\vec{b})$

$$\begin{vmatrix}1 & -1/2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=\frac{3}{2}\neq 0\Rightarrow rg(A)=2$$

$$\begin{vmatrix}1 & -1/2 & 1\\ 1 & a & a\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\frac{-5a}{2}+1\Rightarrow\frac{-5a}{2}+1=0\Rightarrow a=\frac{2}{5}\Rightarrow\begin{cases}\text{Si } a=\frac{2}{5}\Rightarrow rg\left(A|\vec{b}\right)=2\\ \text{Si } a\neq\frac{2}{5}\Rightarrow rg\left(A|\vec{b}\right)=3\end{cases}$$

Caso 3.1: Si $b=-\frac{1}{2}$ y $a=\frac{2}{5}\Rightarrow\ rg(A)=rg\left(A|\vec{b}\right)=2<$ número de incógnitas $=3\Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

Se resuelve el sistema en función del menor que ha determinado el rango

$$\begin{cases}x-\frac{y}{2}-z=1\\ x+\frac{2}{5}y-z=\frac{2}{5}\\ x+y-z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-\frac{y}{2}=1+\lambda\\ x+y=\lambda\\ z=\lambda\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{2}{3}+\lambda\\ y=-\frac{2}{3}\\ z=\lambda\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/3\\ -2/3\\ 0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\quad\forall\,\lambda\in\mathbb{R}$$

Caso 3.2: Si $b=-\frac{1}{2}$ y $a\neq\frac{2}{5}\Rightarrow\ rg(A)=2\neq rg\left(A|\vec{b}\right)=3\Rightarrow$ Sistema Incompatible.

Resumiendo

Caso 1: Si $b\neq 1$ y $b\neq-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

Caso 2: Si $b=1$ $\Rightarrow$ Sistema Incompatible.

Caso 3: Si $b=-\frac{1}{2}$

Caso 3.1: Si $a=\frac{2}{5}\Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

Caso 3.2: Si $a\neq\frac{2}{5}\Rightarrow$ Sistema Incompatible.

P12. Discutir el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases}(a-1)y-bz=1\\ ax+y=b\\ x+y+bz=1\end{cases}$ en función de los parámetros reales a y b. Resolverlo en los casos en que sea compatible indeterminado.

RESOLUCIÓN

Se definen la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada

$$A=\begin{pmatrix}0 & a-1 & -b\\ a & 1 & 0\\ 1 & 1 & b\end{pmatrix} \qquad (A|\vec{b})=\left(\begin{array}{ccc|c}0 & a-1 & -b & 1\\ a & 1 & 0 & b\\ 1 & 1 & b & 1\end{array}\right)$$

Se calcula el determinante de la matriz de los coeficientes

$$|A|=\begin{vmatrix}0 & a-1 & -b\\ a & 1 & 0\\ 1 & 1 & b\end{vmatrix}=-b(a^2-1), \qquad |A|=0 \Leftrightarrow -b(a^2-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}b=0\\ a=1\\ a=-1\end{cases}$$

<u>Caso 1</u>: Si $b\neq 0$ y $a\neq 1$ y $a\neq -1$

$rg(A)=rg(A|\vec{b})=3=$ número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

<u>Caso 2</u>: Si $b=0 \Rightarrow\ rg(A)\leq 2$

$$A=\begin{pmatrix}0 & a-1 & 0\\ a & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad (A|\vec{b})=\left(\begin{array}{ccc|c}0 & a-1 & 0 & 1\\ a & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)$$

Se calcula el rango de la matriz de los coeficientes. Como la última columna de la matriz es nula

$$rg(A)=rg\begin{pmatrix}0 & a-1\\ a & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Los menores de orden 2 a considerar son

$$\begin{vmatrix}0 & a-1\\ a & 1\end{vmatrix}=-a(a-1) \qquad \begin{vmatrix}0 & a-1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-(a-1) \qquad \begin{vmatrix}a & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=a-1$$

Los tres menores de orden dos se anulan para el mismo valor del parámetro a. Por tanto

Si $a=1 \Rightarrow rg(A)=1$

Si $a\neq 1 \Rightarrow rg(A)=2$

Se calcula el rango de la matriz ampliada

$$\begin{vmatrix}0 & a-1 & 1\\ a & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-(a-1)^2$$

El determinante se anula si $a = 1$. En este caso el rango de la matriz ampliada lo determina el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow rg\left(A\middle|\vec{b}\right) = 2$.

Entonces

Si $a = 1 \Rightarrow rg\left(A\middle|\vec{b}\right) = 2$

Si $a \neq 1 \Rightarrow rg\left(A\middle|\vec{b}\right) = 3$

Se compara el rango de la matriz de los coeficientes con el rango de la matriz ampliada en función de los valores del parámetro real a

<u>Caso 2.1:</u> Si $a \neq 1 \Rightarrow rg(A) = 2 \neq rg\left(A\middle|\vec{b}\right) = 3 \Rightarrow$ Sistema Incompatible.

<u>Caso 2.2:</u> Si $a = 1 \Rightarrow rg(A) = 1 \neq rg\left(A\middle|\vec{b}\right) = 2 \Rightarrow$ Sistema Incompatible.

<u>Caso 3:</u> Si $a = 1 \Rightarrow\ rg(A) \leq 2$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -b \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix} \qquad \left(A\middle|\vec{b}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -b & 1 \\ 1 & 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & b & 1 \end{array}\right)$$

Se calcula el rango de la matriz de los coeficientes. Como las dos primeras columnas de la matriz A son iguales

$$rg(A) = rg\begin{pmatrix} 0 & -b \\ 1 & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

Se consideran los tres menores de orden dos

$$\begin{vmatrix} 0 & -b \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = b \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & b \end{vmatrix} = b \qquad \begin{vmatrix} 0 & -b \\ 1 & b \end{vmatrix} = b$$

Los menores anteriores se anulan para el mismo valor del parámetro b. Por tanto

Si $b = 0 \Rightarrow rg(A) = 1$

Si $b \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$

Se calcula el rango de la matriz ampliada

$$\begin{vmatrix} 0 & -b & 1 \\ 1 & 0 & b \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix} = -b^2 + 2b$$

El determinante se anula cuando $b = 0$ o $b = 2$. En ambos casos el rango de la matriz ampliada se calcula utilizando el menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rg\left(A\middle|\vec{b}\right) = 2$. Entonces

Si $b = 0 \Rightarrow rg\left(A\middle|\vec{b}\right) = 2$

Si $b = 2 \Rightarrow rg\left(A\middle|\vec{b}\right) = 2$

Si $b \neq 0$ y $b \neq 2 \Rightarrow rg\left(A\middle|\vec{b}\right) = 3$

Se compara el rango de la matriz de los coeficientes con el rango de la matriz ampliada en función de los valores del parámetro real b

<u>Caso 3.1:</u> Si $b \neq 0$ y $b \neq 2 \Rightarrow rg(A) = 2 \neq rg\left(A\middle|\vec{b}\right) = 3$ = número de incógnitas ⇒ Sistema Incompatible.

<u>Caso 3.2:</u> Si $b = 0 \Rightarrow rg(A) = 1 \neq rg\left(A\middle|\vec{b}\right) = 2 \Rightarrow$ Sistema Incompatible.

<u>Caso 3.3:</u> Si $b = 2 \Rightarrow rg(A) = rg\left(A\middle|\vec{b}\right) = 2 <$ número de incógnitas $= 3 \Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

Resolución del caso 3.3 ($a = 1$ y $b = 2$)

$$\begin{cases} -2z = 1 \\ x + y = 2 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2z = 1 \\ x + 2z = 1 - \lambda \\ y = \lambda \end{cases}$$

Resolviendo se tiene que $z = -\frac{1}{2}$, $y = \lambda$, $x = 2 - \lambda$, es decir

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

<u>Caso 4</u>: Si $a = -1 \Rightarrow \ rg(A) \leq 2$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -b \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix} \qquad \left(A\middle|\vec{b}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & -b & 1 \\ -1 & 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & b & 1 \end{array}\right)$$

Se calcula el rango de la matriz de los coeficientes

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$$

Las columnas de la matriz de los coeficientes no son proporcionales por tanto existe una combinación lineal entre ellas. Por esta razón se puede suprimir cualquier columna de la matriz de los coeficientes para calcular el rango de la matriz ampliada. En particular se elimina la tercera columna

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2b - 4$$

El determinante se anula cuando $b = -2$. Entonces

Si $b = -2 \Rightarrow rg\left(A\middle|\vec{b}\right) = 2$

Si $b \neq -2 \Rightarrow rg\left(A\middle|\vec{b}\right) = 3$

Se compara el rango de la matriz de los coeficientes con el rango de la matriz ampliada en función de los valores del parámetro real b

<u>Caso 4.1:</u> Si $b \neq -2 \Rightarrow rg(A) = 2 \neq rg\left(A \middle| \vec{b}\right) = 3 \Rightarrow$ Sistema Incompatible.

<u>Caso 4.2:</u> Si $b = -2 \Rightarrow rg(A) = 2 = rg\left(A \middle| \vec{b}\right) <$ número de incógnitas del sistema $= 3 \Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

Resolución del caso 4.2 ($a = -1$ y $b = -2$)

$$\begin{cases} -2y + 2z = 1 \\ -x + y = -2 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y = 1 - 2\lambda \\ -x + y = -2 \\ z = \lambda \end{cases}$$

Expresando la solución en forma vectorial

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

CUESTIONES RESUELTAS

C1. Determinar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa:

Sea $A \in M_n\ (\mathbb{R})$ y sea el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$. Si el término independiente $\vec{b}$ es proporcional a los coeficientes de la segunda incógnita, entonces, el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ es incompatible.

RESOLUCIÓN

Falso. Si el término independiente $\vec{b}$ es proporcional a una columna de A, $rg(A) = rg(A|\vec{b})$. Por tanto, el sistema es compatible determinado o compatible indeterminado dependiendo de que el rango sea igual o menor que el número de incógnitas del sistema.

C2. Determinar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa:

En un sistema de ecuaciones lineales el rango de la matriz ampliada $(A|\vec{b})$ es siempre mayor que el rango de la matriz de los coeficientes A.

RESOLUCIÓN

Falso. El rango de la matriz ampliada $\left(A|\vec{b}\right)$ es siempre mayor o igual que el rango de la matriz A, es decir, $rg(A) \leq rg(A|\vec{b})$, puesto que la matriz de los coeficientes A es una submatriz de la matriz ampliada $\left(A|\vec{b}\right)$.

C3. Sea el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ siendo $A \in M_n(\mathbb{R})$. Si al menos tres columnas de la matriz A son iguales y si $rg(A) = rg(A|\vec{b})$, determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) El sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ es compatible indeterminado.

b) El sistema tiene $(n-2)$ variables básicas y 2 variables libres.

RESOLUCIÓN

a) Verdadero. Dado que $rg(A) = rg(A|\vec{b})$, el sistema es compatible. Por otra parte, la matriz A tiene al menos tres columnas iguales, por lo que $rg(A) \leq n-2 \leq n =$ número de incógnitas. Por tanto, se trata de un sistema compatible indeterminado.

b) Falso. Como la matriz A tiene al menos tres columnas iguales se tiene que $rg(A) \leq n-2$, siendo n el número de incógnitas. Supóngase que $rg(A) = k$, en este caso, las incógnitas que multiplican a los coeficientes del menor no nulo de orden k que determina el rango son las variables básicas y las $(n-k)$ incógnitas restantes son las variables libres. Como se verifica que $rg(A) = k \leq n-2$, el sistema tiene como máximo $(n-2)$ variables básicas y como mínimo 2 variables libres.

C4. Sean la matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$, el sistema lineal de ecuaciones $A\vec{x} = \vec{b}$ y $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^t \in \mathbb{R}^n$ una solución del mismo. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ es compatible indeterminado, entonces cualquier n-tupla del tipo $k \cdot \vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ es solución del sistema.

b) Si el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ es homogéneo, entonces cualquier n-tupla del tipo $k \cdot \vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ es solución del sistema.

RESOLUCIÓN

a) Falso. Se utiliza un contraejemplo para demostrar que la afirmación anterior es falsa. Es decir, se plantea y se resuelve un sistema compatible indeterminado y se observa que un múltiplo de la solución no satisface las ecuaciones del sistema.

Sea el sistema lineal de ecuaciones $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y+z=-2 \end{cases}$. La matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \left(A\middle|\vec{b}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Se calculan los rangos de ambas matrices

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = rg\left(A\middle|\vec{b}\right) = 2 <$ número de incógnitas $= 3 \Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

Se resuelve el sistema $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y+z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y=\lambda \\ x+z=-2-\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=-3 \end{cases}$ cuya solución es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Por tanto, $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ es una solución del mismo. Véase si $2 \cdot \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 \\ 2\alpha_2 \\ 2\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ también es solución del sistema

$$\begin{cases} 2 + 0 = 2 \neq 1 \\ 2 + 0 - 6 = -4 \neq -2 \end{cases}$$

No se satisfacen las ecuaciones por lo que $2 \cdot \vec{\alpha}$ no es solución del sistema planteado y la afirmación no es cierta.

b) Verdadero. Si $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^t \in \mathbb{R}^n$ es solución del sistema homogéneo $A\vec{x} = \vec{0}$, se cumple que $A\vec{\alpha} = \vec{0}$. Por otra parte, el vector $k \cdot \vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ será solución del sistema $A\vec{x} = \vec{0}$ si se verifica que $A(k \cdot \vec{\alpha}) = \vec{0}$. Desarrollando la parte izquierda de esta igualdad se obtiene

$$A(k \cdot \vec{\alpha}) = k \cdot \underbrace{A\vec{\alpha}}_{\vec{0}} = \vec{0}$$

Se ha demostrado que $k \cdot \vec{\alpha}$ es solución del sistema.

EJERCICIOS RESUELTOS CON MATHEMATICA

M1. Sea el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} ax + 4y + az = -1 \\ x + 4ay + z = 1 \\ 3x - (4a-2)y + 2z = 3 \end{cases}$

a) Discutir el sistema en función del parámetro real a utilizando para ello el teorema de Rouché-Fröbenius.

b) Resolver el sistema cuando sea posible.

RESOLUCIÓN

```
Remove["Global`*"]
```

a) Se definen la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada

```
matcoef = {{a, 4, a}, {1, 4 a, 1}, {3, -(4 a - 2), 2}}; MatrixForm[matcoef]
```

$$\begin{pmatrix} a & 4 & a \\ 1 & 4a & 1 \\ 3 & 2-4a & 2 \end{pmatrix}$$

```
matamp = {{a, 4, a, -1}, {1, 4 a, 1, 1}, {3, -(4 a - 2), 2, 3}};
MatrixForm[matamp]
```

$$\begin{pmatrix} a & 4 & a & -1 \\ 1 & 4a & 1 & 1 \\ 3 & 2-4a & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Dado que la matriz de los coeficientes es una matriz cuadrada, se estudian los valores del parámetro real a que anulan el determinante

```
Det[matcoef] // Factor
```

```
-4 (-1 + a) (1 + a)
```

```
Solve[Det[matcoef] == 0]
```

```
{{a → -1}, {a → 1}}
```

<u>Caso 1:</u> Si $a \neq -1$ y $a \neq 1 \Rightarrow rg(A) = rg\left(A|\vec{b}\right) = 3 =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

<u>Caso 2:</u> Si $a = -1$, véase cuál es el rango de la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada

```
a = -1; MatrixForm[matcoef]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

```
MatrixRank[matcoef]
```

```
2
```

```
MatrixRank[matcoef] == MatrixRank[matamp]
```

```
True
```

En este caso, $rg(A) = rg\left(A|\vec{b}\right) = 2 <$ número de incógnitas $= 3 \Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

<u>Caso 3:</u> Si $a = 1$, véase cuál es el rango de ambas matrices

```
a = 1; MatrixForm[matcoef]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

```
MatrixRank[matcoef] == MatrixRank[matamp]
```

```
False
```

Como $rg(A) \neq rg(A|\vec{b}) \Rightarrow$ Sistema Incompatible.

b) Se calcula la solución cuando el sistema es compatible.

<u>Caso 1:</u> Si $a \neq -1$ y $a \neq 1 \Rightarrow rg(A) = rg\left(A|\vec{b}\right) = 3 =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

```
Clear[a]; MatrixForm[matcoef]
```

$$\begin{pmatrix} a & 4 & a \\ 1 & 4a & 1 \\ 3 & 2-4a & 2 \end{pmatrix}$$

Dado que el sistema depende del parámetro real a, se resuelve utilizando el comando Reduce

```
sol = Reduce[matcoef.{x, y, z} = {-1, 1, 3}, {x, y, z}]
```

$$\left(a == -1 \,\&\&\, y == \frac{1-x}{14} \,\&\&\, z == -\frac{9}{7}(-1+x)\right) \,||\, \left((-1+a)(1+a) \neq 0 \,\&\&\, x == \frac{-3+8a}{2(-1+a)} \,\&\&\, y == \frac{1}{70}(-19-24a+x+6ax) \,\&\&\, z == \frac{1}{35}(53+8a-47x-2ax)\right)$$

```
sol = {ToRules[sol]};
```

Se obtiene el valor de las incógnitas

```
x = x /. sol[[2]] // Simplify
```

$$\frac{3-8a}{2-2a}$$

```
y = y /. sol[[2]] // Simplify
```

$$\frac{1}{4(-1+a)}$$

```
z = z /. sol[[2]] // Simplify
```

$$\frac{1-8a}{2(-1+a)}$$

En conclusión, la solución del sistema es $x = \frac{3-8a}{2-2a}, y = \frac{1}{4(-1+a)}, z = \frac{1-8a}{-2+2a}$.

Caso 2: Si $a = -1 \Rightarrow rg(A) = rg\left(A|\vec{b}\right) = 2 <$ número de incógnitas $= 3 \Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

```
Clear[x, y, z, sol]
```

```
a = -1; MatrixForm[matcoef]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Se resuelve de nuevo el sistema utilizando el comando Reduce

```
sol = Reduce[matcoef.{x, y, z} == {-1, 1, 3}, {x, y, z}];
sol = {ToRules[sol]}
```

$$\left\{\left\{y \to \frac{1}{14} - \frac{x}{14},\ z \to \frac{9}{7} - \frac{9\,x}{7}\right\}\right\}$$

```
y = y /. sol[[1]] // Simplify
```

$$\frac{1-x}{14}$$

```
z = z /. sol[[1]] // Simplify
```

$$-\frac{9}{7}\,(-1+x)$$

La solución del sistema en este caso es $y = \frac{1-x}{14}, z = \frac{-9(-1+x)}{7}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

M2. Resolver el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + by - z = 1 \\ x + ay + 2bz = a \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ en función de los parámetros reales a y b.

RESOLUCIÓN

```
Remove["Global`*"]
```

Se definen la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada

```
matcoef = {{1, b, -1}, {1, a, 2 b}, {1, 1, -1}}
```

```
{{1, b, -1}, {1, a, 2 b}, {1, 1, -1}}
```

```
matamp = {{1, b, -1, 1}, {1, a, 2 b, a}, {1, 1, -1, 0}}
```

```
{{1, b, -1, 1}, {1, a, 2 b, a}, {1, 1, -1, 0}}
```

Al ser la matriz de los coeficientes una matriz cuadrada, se obtienen los valores que anulan su determinante. A partir de los valores obtenidos se estudian los diferentes casos que se pueden presentar

```
Solve[Det[matcoef] == 0]
```

$$\left\{\left\{b \to -\frac{1}{2}\right\}, \{b \to 1\}\right\}$$

Existen dos casos

Caso 1: Si $b \neq -\frac{1}{2}$ y $b \neq 1 \Rightarrow rg(A) = rg\left(A|\vec{b}\right) = 3 =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

Caso 2: Si $b = -\frac{1}{2} \Rightarrow rg(A) \leq 2$. Se estudia el rango de la matriz de los coeficientes

```
matcoef1 = matcoef /. b → -1/2; MatrixForm[matcoef1]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Minors[matcoef1] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+a & 0 & \frac{1}{2}+a \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 1-a & 0 & 1-a \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de los coeficientes es 2, ya que existe al menos un menor de orden dos no nulo. Véase cuál es el rango de la matriz ampliada cuando $b = -\frac{1}{2}$

```
matamp1 = matamp /. b → -1/2; MatrixForm[matamp1]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 1 & a & -1 & a \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
m1 = matamp1[[{1, 3}, {1, 2}]]; MatrixForm[m1]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
Det[m1]
```

$$\frac{3}{2}$$

Por lo que el rango de la matriz ampliada es al menos dos. Por otro lado, dado que la primera y la tercera columna de la matriz ampliada son proporcionales, el rango de dicha matriz coincide con el rango de la siguiente

```
m2 = matamp1[[{1, 2, 3}, {1, 2, 4}]]; MatrixForm[m2]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
Det[m2]
```

$$1-\frac{5a}{2}$$

```
Solve[% == 0]
```

$$\left\{\left\{a\to\frac{2}{5}\right\}\right\}$$

Si $a=\frac{2}{5}\Rightarrow rg\left(A|\vec{b}\right)=\ 2$, ya que no existe ningún menor de orden tres distinto de cero.

Si $a\neq\frac{2}{5}\Rightarrow rg\left(A|\vec{b}\right)=\ 3$, ya que existe un menor de orden tres no nulo. Esto es

<u>Caso 2.1:</u> Si $a=\frac{2}{5}\ \Rightarrow rg(A)=rg\left(A|\vec{b}\right)=\ 2<$ número de incógnitas $=3\ \Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

<u>Caso 2.2:</u> Si $a\neq\frac{2}{5}\Rightarrow rg(A)=2\neq rg\left(A|\vec{b}\right)=\ 3\Rightarrow$ Sistema Incompatible.

<u>Caso 3:</u> Si $b=1$, véase cuál es el rango de la matriz de los coeficientes

```
matcoef2 = matcoef /. b → 1; MatrixForm[matcoef2]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Minors[matcoef2]
```

```
{{-1 + a, 3, 2 + a}, {0, 0, 0}, {1 - a, -3, -2 - a}}
```

El rango de esta matriz es 2 ya que existe al menos un menor de orden dos no nulo.

A continuación se estudia el rango de la matriz ampliada cuando $b=1$

```
matamp2 = matamp /. b → 1; MatrixForm[matamp2]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & a & 2 & a \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
m1 = matamp2[[{1, 2}, {1, 3}]]; MatrixForm[m1]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

```
Det[m1]
```

3

Es decir, el rango de la matriz ampliada es al menos 2. Orlando el menor $m1$ se tiene el siguiente menor no nulo de orden 3

```
m2 = matamp2[[{1, 2, 3}, {1, 3, 4}]]; MatrixForm[m2]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
Det[m2]
```

-3

Es decir, el rango de la matriz ampliada es $rg(A|\vec{b}) = 3 \ \forall a \in \mathbb{R}$. Por ello, $rg(A) = 2 \neq rg(A|\vec{b}) = 3 \Rightarrow$ Sistema Incompatible.

Otra forma de obtener la clasificación y resolver el sistema de ecuaciones es utilizando el comando Reduce

```
sol = Reduce[{x + b*y - z = 1, x + a*y + 2 b*z == a, x + y - z = 0}, {y, x, z}]
```

$$\left(b == -\frac{1}{2} \ \&\& \ a == \frac{2}{5} \ \&\& \ y == -\frac{2}{3} \ \&\& \ z == \frac{1}{3}(-2+3x)\right) \ || \ \left(-1+b \neq 0 \ \&\& \ y == \frac{1}{-1+b} \ \&\& \ 1+2b \neq 0 \ \&\& \ x == \frac{-2+a-2y-ay}{1+2b} \ \&\& \ z == x+y\right)$$

Como se puede observar en el output, la resolución de este sistema es

<u>Caso 1:</u> Si $b \neq -\frac{1}{2}$ y $b \neq 1$

```
sol1 = {ToRules[sol]}
```

$$\left\{\left\{b \to -\frac{1}{2},\ a \to \frac{2}{5},\ y \to -\frac{2}{3},\ z \to \frac{1}{3}(-2+3x)\right\},\ \left\{y \to \frac{1}{-1+b},\ x \to \frac{-2+a-2y-ay}{1+2b},\ z \to x+y\right\}\right\}$$

```
{x, y, z} = {x, y, z} /. sol1[[2]] // Simplify
```

$$\left\{\frac{2a+2b-ab}{1+b-2b^2},\ \frac{1}{-1+b},\ -\frac{1+a(-2+b)}{1+b-2b^2}\right\}$$

Su solución es $x = \frac{2a+2b-ab}{1+b-2b^2}$, $y = \frac{1}{-1+b}$, $z = -\frac{1+a(-2+b)}{1+b-2b^2}$. Por tanto se trata de un sistema compatible determinado.

Caso 2:

Caso 2.1: Si $b = -\frac{1}{2}$ y $a = \frac{2}{5}$, la solución del sistema es $y = -\frac{2}{3}$, $z = \frac{(-2+3x)}{3}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Se trata de un sistema compatible indeterminado.

Caso 2.2: Si $b = -\frac{1}{2}$ y $a \neq \frac{2}{5}$, este caso no figura en el output obtenido con el comando *Reduce* porque el sistema es incompatible.

Caso 3: Si $b = 1$, este caso tampoco figura en el output por lo que el sistema es incompatible.

M3. Resolver el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{c} -y+2z+t=0 \\ x-2ay-z=1 \\ y-2z-at=0 \\ x-z-t=a \end{array}\right.$ en función del parámetro real a.

RESOLUCIÓN

```
Remove["Global`*"]
```

Se define el sistema de ecuaciones lineales

```
sistema = {-y + 2 z + t == 0, x - 2 a * y - z == 1, y - 2 z - a * t == 0, x - z - t == a};
```

Se definen la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada

```
matcoef = {{0, -1, 2, 1}, {1, -2 a, -1, 0}, {0, 1, -2, -a}, {1, 0, -1, -1}};
MatrixForm[matcoef]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2a & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -a \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
b = {0, 1, 0, a}; matamp = Transpose[Join[Transpose[matcoef], {b}]];
MatrixForm[matamp]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2a & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -a & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & a \end{pmatrix}$$

Por ser la matriz de los coeficientes una matriz cuadrada, se calcula su determinante y se iguala a cero. A partir de los valores obtenidos, se estudian los diferentes casos que se pueden presentar

```
Solve[Det[matcoef] == 0]
```

{{a → 0}, {a → 1}}

Caso 1: Si $a \neq 0$ y $a \neq 1 \Rightarrow rg(A) = rg(A|\vec{b}) = 4 =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado, cuya solución es

```
Solve[sistema, {x, y, z, t}]
```

$$\left\{\left\{x \to -\frac{1 - a - 4a^2}{4a},\ y \to -\frac{1-a}{2a},\ z \to -\frac{1-a}{4a},\ t \to 0\right\}\right\}$$

Caso 2: Si $a = 1$, se calculan el rango de la matriz de los coeficientes y el rango de la matriz ampliada

```
matcoef1 = matcoef /. a → 1; MatrixRank[matcoef1]
```

3

```
matamp1 = matamp /. a → 1; MatrixRank[matamp1]
```

3

En este caso, $rg(A) = rg(A|\vec{b}) = 3 <$ número de incógnitas $= 4 \Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

Se resuelve el sistema para $a = 1$

```
sistema1 = sistema /. a → 1; Solve[sistema1, {x, y, z, t}]
```

$$\left\{\left\{x \to 1 + \frac{3\,t}{4},\ y \to \frac{t}{2},\ z \to -\frac{t}{4}\right\}\right\}$$

Caso 3: Si $a = 0$, véanse el rango de la matriz de los coeficientes y el rango de la matriz ampliada

```
matcoef2 = matcoef /. a → 0; MatrixRank[matcoef2]
```

3

```
matamp2 = matamp /. a → 0; MatrixRank[matamp2]
```

4

Como $rg(A) = 3 \neq rg(A|\vec{b}) = 4 \Rightarrow$ Sistema Incompatible.

Otra forma de obtener la clasificación y resolver el sistema de ecuaciones es utilizar el comando Reduce

```
Reduce[sistema, {x, y, z, t}]
```

$$\left(a == 1\ \&\&\ y == \frac{2}{3}\,(-1 + x)\ \&\&\ z == \frac{1 - x}{3}\ \&\&\ t == \frac{4}{3}\,(-1 + x)\right)\ ||$$
$$\left((-1 + a)\,a \neq 0\ \&\&\ x == \frac{-1 + a + 4\,a^2}{4\,a}\ \&\&\ y == \frac{1}{3}\,\left(-1 - 5\,a + 4\,a^2 + 6\,x - 4\,a\,x\right)\ \&\&\right.$$
$$\left. z == \frac{1}{3}\,\left(-1 - 2\,a + 4\,a^2 + 3\,x - 4\,a\,x\right)\ \&\&\ t == \frac{1}{3}\,\left(1 - a - 4\,a^2 + 4\,a\,x\right)\right)$$

Como aparece en el output la solución de este sistema es

Caso 1: Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$, se trata de un sistema compatible determinado cuya solución es

$$y = \frac{1}{3}\,\left(-1 - 5\,a + 4\,a^2 + 6\,x - 4\,a\,x\right)\ /.\ x \text{ -> } \frac{-1 + a + 4\,a^2}{4\,a}\ //\ \text{Simplify}$$

$$\frac{-1 + a}{2\,a}$$

$$z = \frac{1}{3}\,\left(-1 - 2\,a + 4\,a^2 + 3\,x - 4\,a\,x\right)\ /.\ x \text{ -> } \frac{-1 + a + 4\,a^2}{4\,a}\ //\ \text{Simplify}$$

$$\frac{-1 + a}{4\,a}$$

```
t = 1/3 (1 - a - 4 a^2 + 4 a x) /. x -> (-1 + a + 4 a^2)/(4 a) // Simplify
```

```
0
```

$$x = \frac{4a^2+a-1}{4a},\ y = \frac{-1+a}{2a},\ z = \frac{-1+a}{4a},\ t = 0$$

<u>Caso 2:</u> Si $a = 1$, el sistema es compatible indeterminado siendo su solución

$$y = \frac{2}{3}(x-1),\ z = \frac{1}{3}(1-x),\ t = \frac{4}{3}(x-1),\ \forall x \in \mathbb{R}$$

<u>Caso 3:</u> Si $a = 0$, este caso no figura en el output del comando *Reduce*, por lo que el sistema no tiene solución en este caso, es decir, es incompatible.

M4. Resolver el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y + z = 6 \\ -x - y + 2z = 1 \end{cases}$.

RESOLUCIÓN

```
Remove["Global`*"]
```

Se definen la matriz de los coeficientes y el vector de los términos independientes

```
m = {{1, 1, -1}, {2, 1, 1}, {-1, -1, 2}}; b = {0, 6, 1};
```

Se forma el sistema de ecuaciones

```
ecuaciones = Thread[m.{x, y, z} == b]
```

```
{x + y - z == 0, 2 x + y + z == 6, -x - y + 2 z == 1}
```

```
Det[m]
```

```
-1
```

Como el determinante de la matriz de los coeficientes es no nulo, la matriz de los coeficientes es regular. Se puede obtener el valor de las incógnitas x, y, z utilizando el comando *LinearSolve*

```
sol1 = LinearSolve[m, b]
{4, -3, 1}
```

El sistema se puede resolver también utilizando el comando *Solve*

```
sol2 = Solve[ecuaciones, {x, y, z}]
{{x → 4, y → -3, z → 1}}
```

M5. Discutir el sistema homogéneo $\begin{cases}(a+1)x+y+3z=0\\ x+(a+1)y+z=0\\ 3x-y+(a+1)z=0\end{cases}$ en función del parámetro real a.

RESOLUCIÓN

```
Remove["Global`*"]
```

Dado que el sistema es homogéneo, sólo se define la matriz de los coeficientes

```
matcoef = {{a+1, 1, 3}, {1, 1+a, 1}, {3, -1, a+1}};
MatrixForm[matcoef]
```

$$\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 3 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 3 & -1 & 1+a \end{pmatrix}$$

Para obtener la solución del sistema en función de un parámetro se utiliza el comando *Reduce*

```
sol = Reduce[matcoef.{x, y, z} = ConstantArray[0, 3], {x, y, z}]
```

$$\left((a==-4\ ||\ a==-1\ ||\ a==2)\ \&\&\ y==\frac{1}{10}\left(26x-7ax-3a^2x\right)\ \&\&\ z==\frac{1}{10}\left(-12x-ax+a^2x\right)\right)\ ||\ \left(-8-6a+3a^2+a^3\neq 0\ \&\&\ x==0\ \&\&\ y==0\ \&\&\ z==0\right)$$

```
Solve[-8 - 6 a + 3 a^2 + a^3 = 0]
{{a → -4}, {a → -1}, {a → 2}}
```

Tal y como se puede apreciar en el output de este comando, la solución del sistema es

<u>Caso 1:</u> Si $a=-4$ o $a=-1$ o $a=2$

$$y = \frac{26x - 7ax - 3a^2x}{10},\ z = \frac{-12x - ax + a^2x}{10},\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Es decir se trata de un sistema compatible indeterminado.

Caso 2: Si $a \neq -4$ y $a \neq -1$ y $a \neq 2$, el sistema homogéneo es compatible determinado. Es decir, la única solución del sistema es la solución trivial

$$x = y = z = 0$$

3 ESPACIO VECTORIAL

3.1 Ley de composición

Definición: Dados los conjuntos A, B y C, se llama ley de composición a toda aplicación:

$$f: A \times B \to C$$

$$f(a, b) = a * b = c, \forall a \in A, \forall b \in B, \text{ siendo } c \in C$$

Observaciones:

- Si $A = B = C$, es decir, si $f: A \times A \to A$, se dice que la ley de composición es interna.
- Si $A \neq C$ y $B = C$, es decir, si $f: A \times B \to B$, se dice que la ley de composición es externa en B.

3.2 Propiedades de la ley de composición interna

Una ley de composición interna $f: A \times A \to A$ denotada por “$*$” cumple las siguientes propiedades:

- Propiedad asociativa: $(a * b) * c = a * (b * c), \forall a, b, c \in A$
- Propiedad conmutativa: $a * b = b * a, \forall a, b \in A$
- Existencia del elemento neutro: se dice que $e \in A$ es el elemento neutro respecto a la ley de composición interna “$*$” si verifica la igualdad $a * e = e * a, \forall a \in A$
- Existencia del elemento simétrico: se dice que $a' \in A$ es el elemento simétrico del elemento $a \in A$ respecto a la ley de composición interna “$*$” si verifica la igualdad $a * a' = a' * a = e$, siendo e el elemento neutro de la ley de composición interna “$*$”.
- Propiedad distributiva de una ley de composición interna respecto a otra: sean las leyes de composición interna “Δ” y “$*$”, se dice que “Δ” es distributiva respecto a “$*$” si se verifica que:

$$a\Delta(b * c) = (b * c)\Delta a = (a * b)\Delta(a * c) = (b * a)\Delta(c * a), \forall a, b, c \in A$$

Teorema: Sea A un conjunto con una ley de composición interna “$*$”. Si existe el elemento neutro $e \in A$ respecto de “$*$”, entonces éste es único.

Teorema: Sea A un conjunto con una ley de composición interna "$*$" asociativa, con elemento neutro e. Si un elemento $a \in A$ tiene simétrico $a' \in A$ respecto de la ley de composición interna "$*$", entonces éste es único.

3.3 Propiedades de la ley de composición externa

Sean $f_1: A \times B \to B$ una ley de composición externa y $f_2: A \times A \to A$ una ley de composición interna representadas mediante los símbolos "$\circ$" y "$\cdot$" respectivamente. Entonces:

- La ley de composición externa "$\circ$" es asociativa respecto a la ley de composición interna "$\cdot$" si:

$$(\alpha \cdot \beta) \circ b = \alpha \circ (\beta \circ b), \forall \alpha, \beta \in A, \forall b \in B$$

- La ley de composición externa "$\circ$" es distributiva respecto a la ley de composición interna "$\cdot$" si:

$$\alpha \circ (b \cdot b') = (b \cdot b') \circ \alpha = (\alpha \circ b) \cdot (\alpha \circ b'), \forall \alpha \in A, \forall b, b' \in B$$

3.4 Grupo

Definición: Un conjunto no vacío G dotado de una ley de composición interna "$*$" es un grupo si "$*$" cumple la propiedad asociativa, tiene elemento neutro y todo elemento $a \in G$ tiene simétrico respecto de "$*$". El grupo se denota por $(G,*)$.

Definición: Un grupo G es abeliano si la ley de composición interna "$*$" cumple la propiedad conmutativa.

3.5 Anillo

Definición: Un conjunto A dotado de las leyes de composición interna "$+$" y "$\cdot$" es un anillo si cumple las siguientes condiciones:

- $(A,+)$ es un grupo abeliano.
- La ley de composición interna "$\cdot$" es asociativa.
- La ley de composición interna "$\cdot$" es distributiva respecto a la ley de composición interna "$+$" por ambos lados.

El anillo se denota por $(A,+,\cdot)$.

Definición: Se dice que un anillo es unitario si la ley de composición interna "·" tiene elemento neutro.

Definición: Se dice que un anillo es conmutativo si la ley de composición interna "·" es conmutativa.

3.6 Divisores de cero. Dominio de integridad

Definición: Sea el anillo $(A,+,\cdot)$. Se dice que los elementos $a,b \in A$ son divisores de cero si cumplen la condición $a \cdot b = 0$, siendo $a \neq 0, b \neq 0$ y 0 el elemento neutro respecto a la ley de composición interna "$+$".

Definición: Se llama anillo de integridad a cualquier anillo conmutativo que no tiene divisores de 0.

Definición: Se llama dominio de integridad a cualquier anillo de integridad unitario.

3.7 Cuerpo

Definición: Se dice que un dominio de integridad $(K,+,\cdot)$ es un cuerpo si cualquier elemento distinto del elemento neutro, $a \in K - \{0\}$, tiene elemento simétrico respecto a "·".

3.8 Espacio vectorial

Definición: Se llama espacio vectorial a una terna $\big((E,+),(K,+,\cdot),\circ\big)$ donde:

- $(E,+)$ es un grupo abeliano cuyos elementos se llaman vectores y se representan por $\vec{u},\vec{v},\vec{w},\ldots$, siendo la operación "+" la ley de composición interna suma de vectores.
- $(K,+,\cdot)$ es un cuerpo cuyos elementos se llaman escalares, representados por $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$, siendo las operaciones "+" y "·" la suma y la multiplicación de escalares respectivamente.
- El signo "∘" representa una ley de composición externa $f: K \times E \to E$ que a cada pareja $(\alpha,\vec{v}) \in K \times E$ le asocia un vector $\vec{u} = \alpha \circ \vec{v}$. Esta ley de composición externa cumple las siguientes propiedades:
    - Propiedad distributiva respecto a la suma de vectores:
    $$\alpha \circ (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \circ \vec{u} + \alpha \circ \vec{v}, \qquad \forall \alpha \in K, \forall \vec{u}, \vec{v} \in E$$

- Propiedad distributiva respecto a la suma de escalares:
$$(\alpha+\beta)\circ\vec{u}=\alpha\circ\vec{u}+\beta\circ\vec{u}, \qquad \forall\alpha,\beta\in K,\forall\vec{u}\in E$$
- Propiedad asociativa respecto al producto de escalares:
$$(\alpha\cdot\beta)\circ\vec{u}=\alpha\circ(\beta\circ\vec{u}), \qquad \forall\alpha,\beta\in K,\forall\vec{u}\in E$$
- Existencia del elemento neutro respecto a la ley de composición externa "∘":
$$1\circ\vec{u}=\vec{u}, \qquad \forall\vec{u}\in E$$

Habitualmente se abrevia y se dice que $(E,K,\circ)$ es un espacio vectorial, o que E es un espacio vectorial sobre el cuerpo K, o simplemente que E es un espacio vectorial.

Si el cuerpo K es el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ con su suma y multiplicación ordinarias, se dice que el espacio vectorial $\big((E,+),(\mathbb{R},+,\cdot),\circ\big)$ es real, siendo la ley de composición externa el producto entre escalar y vector, $\alpha\circ\vec{u}=\alpha\cdot\vec{u},\forall\alpha\in\mathbb{R},\forall\vec{u}\in E$.

Ejemplos de espacios vectoriales:

- El conjunto de los vectores de n coordenadas constituye el espacio vectorial real $\big((\mathbb{R}^n,+),(\mathbb{R},+,\cdot),\circ\big)$, siendo la ley de composición interna la suma de vectores y la ley de composición externa el producto de un escalar por un vector.
- El conjunto de los polinomios de grado menor o igual que n constituye en $(\mathbb{R},+,\cdot)$ el espacio vectorial $\big((\mathbb{P}_n(x),+),(\mathbb{R},+,\cdot),\circ\big)$, siendo la ley de composición interna la suma de polinomios y la ley de composición externa el producto de un escalar por un polinomio.
- El conjunto de las matrices de dimensión nxm constituye en $(\mathbb{R},+,\cdot)$ el espacio vectorial $\big((M_{nxm},+),(\mathbb{R},+,\cdot),\circ\big)$, siendo la ley de composición interna la suma de matrices y la ley de composición externa el producto de un escalar por una matriz.

3.8.1 Propiedades de los espacios vectoriales

En un espacio vectorial $(E,K,\circ)$ se cumplen las siguientes propiedades:

- $\forall\vec{u}\in E-\{\vec{0}\},\ \alpha\circ\vec{u}=\vec{0}\ \Leftrightarrow\alpha=0$
- $\forall\alpha\in K,\forall\vec{u}\in E,\ (-\alpha)\circ\vec{u}=\alpha\circ(-\vec{u})=-(\alpha\circ\vec{u})$
- $\forall\alpha\in K,\forall\vec{u}\in E,\ (-\alpha)\circ(-\vec{u})=\alpha\circ\vec{u}$
- $\forall\alpha,\beta\in K,\forall\vec{u}\in E,$ si $\alpha\circ\vec{u}=\beta\circ\vec{u},$ para $\vec{u}\neq\vec{0}\Rightarrow\alpha=\beta$
- $\forall\alpha\in K,\forall\vec{u},\vec{v}\in E,$ si $\alpha\circ\vec{u}=\alpha\circ\vec{v},$ para $\alpha\neq 0\Rightarrow\vec{u}=\vec{v}$

3.9 Subespacio vectorial

Definición: Sea $\big((E,+),(K,+,\cdot),\circ\big)$ un espacio vectorial y sea S un subconjunto de E. Si con las leyes de composición inducidas en S, $\big((S,+),(K,+,\cdot),\circ\big)$ es también un espacio vectorial, se dice que $\big((S,+),(K,+,\cdot),\circ\big)$ es un subespacio vectorial de $\big((E,+),(K,+,\cdot),\circ\big)$.

Teorema: S es un subespacio vectorial de $\big((E,+),(K,+,\cdot),\circ\big)$ si y sólo si, se satisfacen las siguientes condiciones:

- $\forall \vec{u},\vec{v} \in S,\ \ \vec{u}+\vec{v} \in S$
- $\forall \alpha \in K, \forall \vec{u} \in S,\ \ \alpha \circ \vec{u} \in S$

o lo que es equivalente a las dos expresiones anteriores:

$$S \text{ subespacio vectorial} \Leftrightarrow \forall \alpha,\beta \in K, \forall \vec{u},\vec{v} \in S,\ \ \alpha \circ \vec{u} + \beta \circ \vec{v} \in S$$

Algunas consideraciones:

- Todo subespacio vectorial contiene al vector nulo.
- El conjunto que sólo contiene al vector nulo es un subespacio de cualquier espacio vectorial.
- Todo espacio vectorial es un subespacio vectorial de sí mismo.
- Los subespacios del espacio vectorial $\big((E,+),(K,+,\cdot),\circ\big)$ distintos de $\{\vec{0}\}$ y E se denominan subespacios propios.

3.10 Combinación lineal. Sistema generador

3.10.1 Combinación lineal

Definición: Sea $P=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_p\}$ un sistema finito de vectores del espacio vectorial $\big((E,+),(K,+,\cdot),\circ\big)$, se dice que un vector $\vec{u} \in E$ es combinación lineal de los vectores del sistema P, si existen p escalares $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p \in K$ tales que:

$$\vec{u}=\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\cdots+\alpha_p\vec{v}_p$$

Algunas consideraciones:

- El vector nulo $\vec{0}$ se puede expresar como combinación lineal de cualquier sistema de vectores. Para ello, basta tomar todos los coeficientes $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p$ nulos, es decir,

$$\vec{0}=0\cdot\vec{v}_1+0\cdot\vec{v}_2+\cdots+0\cdot\vec{v}_p$$

- Si $\vec{u} \in E$ es combinación lineal de los vectores del sistema $P = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ y cada vector $\vec{v}_i$ es combinación lineal de los vectores de otro sistema $Q = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_q\}$, entonces, el vector $\vec{u} \in E$ es combinación lineal de los vectores del sistema Q.

3.10.2 Sistema generador

Definición: Sea $((E,+),(K,+,\cdot),\circ)$ un espacio vectorial y sea $P = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ un sistema de vectores de E. El conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores de P se denomina envoltura lineal del sistema de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ y se denota por $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p \rangle \equiv \langle P \rangle \equiv \mathcal{L}(P)$.

Teorema: El conjunto de todas las combinaciones lineales formadas por los vectores del sistema P constituye un subespacio vectorial de E.

Definición: Si $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p \rangle = E$, se dice que $P = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ es un sistema generador de E.

Observación: Si en un sistema de vectores generador de un espacio vectorial se suprime un vector que es combinación lineal del resto, el espacio vectorial engendrado no varía.

3.11 Dependencia e independencia lineal

Definición: Un sistema finito de vectores $P = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ de un espacio vectorial E se dice que es libre o que los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p$ son linealmente independientes, si la igualdad

$$\alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v}_2 + \cdots + \alpha_p \cdot \vec{v}_p = \vec{0}$$

sólo se satisface cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0$. En caso contrario, es decir, si se satisface la igualdad para algún $\alpha_i \neq 0$, se dice que el sistema es ligado o que los vectores son linealmente dependientes.

Teorema: Si un sistema de vectores P es ligado, cualquier sistema Q que lo contenga, $P \subseteq Q$, también es ligado.

Teorema: Si un sistema de vectores P es libre, todo subsistema A del mismo, $A \subseteq P$, también es libre.

Teorema: Un sistema de vectores P es ligado si y sólo si, algún vector del mismo es combinación lineal del resto. En particular, un sistema que contenga al vector nulo es ligado.

Teorema: Si el sistema de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ es libre y si $\vec{v}_{p+1} \notin \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p \rangle$, entonces, el sistema $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p, \vec{v}_{p+1}\}$ también es libre.

3.12 Base de un espacio vectorial. Dimensión.

3.12.1 Base de un espacio vectorial

Definición: Sea $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ un sistema de vectores del espacio vectorial $\big((E,+),(K,+,\cdot),\circ\big)$. Se dice que V es una base de E si es libre y generador de E.

Teorema: Sea $\big((E,+),(K,+,\cdot),\circ\big)$ un espacio vectorial y sea $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ una base del mismo. Todo vector $\vec{u} \in E$ se expresa de forma única como combinación lineal de los vectores de la base V:

$$\vec{u} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n$$

Los escalares $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ se denominan componentes o coordenadas del vector $\vec{u}$ en la base V y se denota por $\vec{u} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)_V$.

Propiedades:

- En todo espacio vectorial engendrado por un número finito de vectores existe al menos una base.
- En un espacio vectorial engendrado por un número finito de vectores todas las bases tienen el mismo número de elementos.

3.12.2 Dimensión de un espacio vectorial

Definición: Dada una base $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ del espacio vectorial E, se denomina dimensión de E al número de elementos de V y se expresa por $dim(E) = n$.

Observación:

Sea un espacio vectorial $\big((E,+),(K,+,\cdot),\circ\big)$ y sea S un subespacio del mismo, entonces, se cumple que $dim\, S \leq dim\, E$.

Conclusiones:

- Todo sistema generador de un espacio vectorial de dimensión n formado por n vectores es libre.
- Un sistema libre de vectores en un espacio vectorial de dimensión n contiene como máximo n vectores.
- Un sistema de vectores en un espacio vectorial de dimensión n que tenga más de n elementos es ligado.

3.12.3 Ecuaciones paramétricas de un subespacio vectorial

Sea $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ una base del espacio vectorial $\big((E,+),(K,+,\cdot),\circ\big)$ y sean $\big((S,+),(K,+,\cdot),\circ\big)$ un subespacio vectorial de E y $\{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_r\}$ un sistema generador de S siendo:

$$\begin{gathered}\vec{s}_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1})_V \\ \vec{s}_2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2})_V \\ \vdots \\ \vec{s}_r = (a_{1r}, a_{2r}, \dots, a_{nr})_V\end{gathered}$$

Entonces, el subespacio S se puede expresar respecto a la base V de la siguiente manera:

$$S \equiv \left.\begin{array}{c} x_1 = a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \cdots + a_{1r}t_r \\ x_2 = a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \cdots + a_{2r}t_r \\ \vdots \\ x_n = a_{n1}t_1 + a_{n2}t_2 + \cdots + a_{nr}t_r \end{array}\right\}_V$$

siendo $t_1, t_2, \dots, t_r$ parámetros pertenecientes al cuerpo K y $\vec{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n)_V$ un vector genérico de S. Las ecuaciones que forman el sistema anterior se denominan ecuaciones paramétricas de S respecto de la base V.

3.12.4 Ecuaciones implícitas de un subespacio vectorial

Sea $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ una base del espacio vectorial $\big((E,+),(K,+,\cdot),\circ\big)$ y sea $\big((S,+),(K,+,\cdot),\circ\big)$ un subespacio vectorial de E. Entonces, el subespacio S se puede expresar como el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo:

$$S \equiv \left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right\}_V$$

Estas ecuaciones reciben el nombre de ecuaciones implícitas o cartesianas del subespacio S respecto de la base V. En un subespacio vectorial se cumple la siguiente igualdad:

$$dim\, E = dim\, S + \text{nº ecuaciones implícitas linealmente independientes}$$

3.13 Teorema de la base incompleta

Teorema: Sea E un espacio vectorial de dimensión n y sea $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ un sistema de p vectores linealmente independientes de E siendo $p \leq n$. Entonces, existen $(n-p)$ vectores $\vec{v}_{p+1}, \vec{v}_{p+2}, \dots, \vec{v}_n$ de E linealmente independientes entre sí y respecto al sistema V de forma que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p, \vec{v}_{p+1}, \dots, \vec{v}_n\}$ sea una base de E.

3.14 Operaciones con subespacios vectoriales

3.14.1 Intersección de subespacios vectoriales

Definición: Sean S_1 y S_2 dos subespacios del espacio vectorial E. Se llama intersección de los subespacios de S_1 y S_2 y se denota por $S_1 \cap S_2$, al conjunto de vectores de E que pertenecen tanto S_1 como a S_2:

$$S_1 \cap S_2 = \{\vec{u} \in E : \vec{u} \in S_1 \wedge \vec{u} \in S_2\}$$

3.14.2 Suma de subespacios vectoriales

Definición: Sean S_1 y S_2 dos subespacios del espacio vectorial E. Se llama suma de S_1 y S_2 y se denota por $S_1 + S_2$, al conjunto de vectores:

$$S_1 + S_2 = \{\vec{u}_1 + \vec{u}_2 : \vec{u}_1 \in S_1 \wedge \vec{u}_2 \in S_2\}$$

Este conjunto es un subespacio vectorial de E, siendo además el menor de los subespacios de E que contienen tanto a S_1 como a S_2.

Teorema: Sean S_1 y S_2 dos subespacios del espacio vectorial E, siendo $V_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ y $V_2 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_q\}$ bases de S_1 y S_2 respectivamente. Entonces $S_1 + S_2 = \langle V_1 \cup V_2 \rangle$.

La dimensiones de los subespacios cumple la relación:

$$dim\ (S_1 + S_2) = dim\ S_1 + dim\ S_2 - dim\ (S_1 \cap S_2)$$

3.14.3 Suma directa de subespacios vectoriales

Definición: Sean S_1 y S_2 dos subespacios del espacio vectorial E. Si $S_1 \cap S_2 = \{\vec{0}\}$, a la suma $S_1 + S_2$ se le llama suma directa de S_1 y S_2 y se denota por $S_1 \oplus S_2$.

Teorema: La suma $S_1 + S_2$ es directa, si y sólo si, todo vector de $S_1 + S_2$ se puede descomponer de forma única como suma de un vector de S_1 y otro vector de S_2.

Teorema: Si $S_1 + S_2$ es suma directa de los subespacios vectoriales S_1 y S_2, siendo $V_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ una base de S_1 y $V_2 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_q\}$ una base de S_2, entonces $V_1 \cup V_2$ es una base de $S_1 + S_2$ y se cumple:

$$dim\ (S_1 + S_2) = dim\ S_1 + dim\ S_2$$

3.14.4 Subespacios suplementarios

Definición: En un espacio vectorial E dos subespacios S_1 y S_2 se dice que son suplementarios si todo vector $\vec{u} \in E$ se puede descomponer de forma única como suma de un vector de S_1 y otro vector de S_2.

$$S_1 \text{ y } S_2 \text{ de } E \text{ son suplementarios} \Leftrightarrow S_1 \oplus S_2 = E \Leftrightarrow \begin{cases} S_1 + S_2 = E \\ S_1 \cap S_2 = \{\vec{0}\} \end{cases}$$

3.15 Matriz de cambio de base

Sea E un espacio vectorial de dimensión n, y sean $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ y $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ dos bases del mismo. La siguiente expresión relaciona las coordenadas de un vector en ambas bases:

$$(\vec{x})_U = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)_U\ (\vec{x})_V$$

siendo:

- $(\vec{x})_V$ el vector columna formado por las coordenadas del vector $\vec{x}$ en la base V.
- $(\vec{x})_U$ el vector columna formado por las coordenadas del vector $\vec{x}$ en la base U.
- $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)_U \in M_n(\mathbb{R})$ la matriz de cambio de base, en la que la i-ésima columna corresponde a las coordenadas del vector $\vec{v}_i$ en la base U.

EJERCICIOS RESUELTOS

P1. Indicar si los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$ respectivamente:

a) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y = 3z;\ x - y = 0\}$

b) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + 2z = t;\ x + y = 2t - 1\}$

RESOLUCIÓN

a) Se comprueba si el vector nulo $(x, y, z) = (0,0,0)$ pertenece al subconjunto V ya que si no perteneciese, V no sería un subespacio vectorial

$$\begin{cases} 2 \cdot 0 + 0 = 3 \cdot 0 \\ 0 - 0 = 0 \end{cases}$$

Se cumplen ambas igualdades, por lo que V puede ser un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Para determinar si lo es, se debe demostrar que $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in V \wedge \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in V$

Sean $\vec{x} = (x_1, y_1, z_1) \in V$ e $\vec{y} = (x_2, y_2, z_2) \in V$, por tanto, $\vec{x}$ e $\vec{y}$ verifican las siguientes igualdades

$$\begin{cases} 2x_1 + y_1 = 3z_1 \ {\scriptstyle (1)} \\ x_1 - y_1 = 0 \ {\scriptstyle (2)} \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} 2x_2 + y_2 = 3z_2 \ {\scriptstyle (3)} \\ x_2 - y_2 = 0 \ {\scriptstyle (4)} \end{cases}$$

Se forma el vector $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$

$$\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} = \alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$$

Para que $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in V$ se tiene que cumplir que

$$\begin{cases} 2(\alpha x_1 + \beta x_2) + (\alpha y_1 + \beta y_2) = 3(\alpha z_1 + \beta z_2)_{(5)} \\ (\alpha x_1 + \beta x_2) - (\alpha y_1 + \beta y_2) = 0_{(6)} \end{cases}$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación (1) por α, ambos miembros de la ecuación (3) por β y sumando las ecuaciones resultantes se tiene

$$\begin{cases} \alpha(2x_1 + y_1) = \alpha(3z_1) \\ \qquad\qquad + \\ \beta(2x_2 + y_2) = \beta(3z_2) \end{cases} \Rightarrow\ 2\alpha x_1 + \alpha y_1 + 2\beta x_2 + \beta y_2 = 3\alpha z_1 + 3\beta z_2$$

$$\Rightarrow 2(\alpha x_1 + \beta x_2) + (\alpha y_1 + \beta y_2) = 3(\alpha z_1 + \beta z_2)$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación (2) por α, ambos miembros de la ecuación (4) por β y sumando las ecuaciones resultantes se tiene

$$\begin{cases} \alpha(x_1 - y_1) = 0 \\ \qquad + \\ \beta(x_2 - y_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha x_1 - \alpha y_1 + \beta x_2 - \beta y_2 = 0 \Rightarrow (\alpha x_1 + \beta x_2) - (\alpha y_1 + \beta y_2) = 0$$

Por tanto el vector $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in V$ ya que satisface las ecuaciones (5) y (6) y por ello V es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

b) Se comprueba si el vector nulo pertenece al subconjunto W

$$\begin{cases} 0 - 0 + 2 \cdot 0 = 0 \\ 0 + 0 \neq 2 \cdot 0 - 1 \end{cases}$$

No se cumple la segunda igualdad, es decir, el vector nulo no pertenece a W, por lo que W no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

P2. Dado el conjunto $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid ax + y = bz;\ \ bx - 2y + a = t - b\}$, calcular la relación entre los parámetros reales a y b para que sea un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

RESOLUCIÓN

Para que V sea un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ es necesario que el vector nulo $\vec{0} = (0,0,0,0)$ satisfaga las ecuaciones del mismo.

$$\text{Si } \vec{0} \in V \Rightarrow \begin{cases} a \cdot 0 + 0 = b \cdot 0 \\ b \cdot 0 - 2 \cdot 0 + a = 0 - b \end{cases} \Rightarrow a = -b \Rightarrow a + b = 0$$

Véase ahora si $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in V \wedge \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in V$

Sean $\vec{x} = (x_1, y_1, z_1, t_1) \in V$ e $\vec{y} = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in V$, por lo que se verifica

$$\begin{cases} ax_1 + y_1 = bz_1 \ _{(1)} \\ bx_1 - 2y_1 + a = t_1 - b \ _{(2)} \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} ax_2 + y_2 = bz_2 \ _{(3)} \\ bx_2 - 2y_2 + a = t_2 - b \ _{(4)} \end{cases}$$

Se forma el vector $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$

$$\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} = \alpha(x_1, y_1, z_1, t_1) + \beta(x_2, y_2, z_2, t_2)$$

$$= (\underbrace{\alpha x_1 + \beta x_2}_{x_3}, \underbrace{\alpha y_1 + \beta y_2}_{y_3}, \underbrace{\alpha z_1 + \beta z_2}_{z_3}, \underbrace{\alpha t_1 + \beta t_2}_{t_3})$$

y se plantean las condiciones para que $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in V$

$$\begin{cases} ax_3 + y_3 = bz_{3\,(5)} \\ bx_3 - 2y_3 + a = t_3 - b_{(6)} \end{cases}$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación (1) por α, ambos miembros de la ecuación (3) por β y sumando las ecuaciones resultantes se tiene

$$\begin{cases} \alpha(ax_1 + y_1) = \alpha(bz_1) \\ \qquad\qquad + \\ \beta(ax_2 + y_2) = \beta(bz_2) \end{cases} \Rightarrow \ a\alpha x_1 + \alpha y_1 + a\beta x_2 + \beta y_2 = b\alpha z_1 + b\beta z_2 \Rightarrow$$

$$a(\alpha x_1 + \beta x_2) + (\alpha y_1 + \beta y_2) = b(\alpha z_1 + \beta z_2) \Rightarrow ax_3 + y_3 = bz_3$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación (2) por α y ambos miembros de la ecuación (4) por β y sumando las ecuaciones resultantes se tiene

$$\begin{cases} \alpha(bx_1 - 2y_1 + a) = \alpha(t_1 - b) \\ \qquad\qquad + \\ \beta(bx_2 - 2y_2 + a) = \beta(t_2 - b) \end{cases} \Rightarrow$$

$$b\alpha x_1 - 2\alpha y_1 + a\alpha + b\beta x_2 - 2\beta y_2 + a\beta = \alpha t_1 - \alpha b + \beta t_2 - \beta b \Rightarrow$$

$$b(\alpha x_1 + \beta x_2) - 2(\alpha y_1 + \beta y_2) + a(\alpha + \beta) = (\alpha t_1 + \beta t_2) - b(\alpha + \beta) \ \Rightarrow$$

$$bx_3 - 2y_3 + a(\alpha + \beta) = \ t_3 - b(\alpha + \beta)$$

Véase que, según las ecuaciones (5) y (6), el vector $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$ satisface las condiciones para ser subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ si

$$\begin{cases} a(\alpha + \beta) = a \\ b(\alpha + \beta) = b \end{cases} \Rightarrow a = 0 \text{ y } b = 0 \ \ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Es decir, si $a = 0$ y $b = 0$, el vector $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$ satisface también la ecuación (6) por lo que V es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$. Obsérvese que dicha solución cumple la igualdad $a + b = 0$ necesaria para que el vector nulo pertenezca a V.

Resumiendo, para que V sea un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ es necesario que $a = b = 0$.

P3. Indicar si los vectores $\vec{u} = (-2,1,0,1)$, $\vec{v} = (0,1,-2,0)$, $\vec{w} = (0,3,-2,-1)$ y $\vec{t} = (1,0,1,-1)$ son linealmente dependientes o independientes.

RESOLUCIÓN

Se plantea la relación de dependencia o independencia lineal de forma que si solamente se cumple si todos los coeficientes de la relación son nulos, los vectores son linealmente independientes y en caso contrario linealmente dependientes.

$$\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} + \ \gamma \cdot \vec{w} + \delta \cdot \vec{t} = \vec{0}$$

$$\alpha(-2,1,0,1) + \beta(0,1,-2,0) + \gamma(0,3,-2,-1) + \delta(1,0,1,-1) = (0,0,0,0) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2\alpha+\delta=0 \\ \alpha+\beta+3\gamma=0 \\ -2\beta-2\gamma+\delta=0 \\ \alpha-\gamma-\delta=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha=\frac{\delta}{2}, \qquad \beta=\delta, \qquad \gamma=-\frac{\delta}{2} \qquad \forall\, \delta\in\mathbb{R}$$

Entonces, se demuestra que los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ y $\vec{t}$ son linealmente dependientes.

P4. Demostrar que $S=\{(1,2,1),(-2,0,1),(1,0,1)\}$ es un sistema generador del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ utilizando la definición del sistema generador.

RESOLUCIÓN

S es un sistema generador de $\mathbb{R}^3$ si todo vector de $\mathbb{R}^3$ puede expresarse como combinación lineal de los vectores de S.

Es decir, se debe demostrar que

$$\forall\vec{x}=(x,y,z)\in\ \mathbb{R}^3\ \exists\, a,b,c\ \in\mathbb{R}: \vec{x}=a(1,2,1)+b(-2,0,1)+c(1,0,1)$$

Realizando las operaciones se tiene el sistema $\begin{cases} x=a-2b+c \\ y=2a \\ z=a+b+c \end{cases}$ y resolviéndolo por la regla de Cramer su solución es $\begin{cases} b=\frac{z-x}{3} \\ a=\frac{y}{2} \\ c=\frac{-y}{2}+\frac{2z}{3}+\frac{x}{3} \end{cases}$

Es decir, se ha demostrado que para todo elemento $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^3$ existen $a,b,c\ \in\mathbb{R}$, donde

$$\vec{x}=a(1,2,1)+b(-2,0,1)+c(1,0,1)$$

En conclusión, S es un sistema generador de $\mathbb{R}^3$.

P5. Sea el sistema $P=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ siendo $\vec{u}=(1,m,-2)$, $\vec{v}=(m+1,0,1)$ y $\vec{w}=(2,0,2m-1)$.

a) Calcular el valor del parámetro real m para que el sistema de vectores sea libre.

b) ¿Puede ser P una base de $\mathbb{R}^3$? En caso afirmativo, hallar las coordenadas del vector $\vec{x}=(-2,2,2)$ en dicha base para el valor $m=-1$.

RESOLUCIÓN

a) El sistema de vectores P es libre si $rg\begin{pmatrix} 1 & m+1 & 2 \\ m & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2m-1 \end{pmatrix} = 3$.

Se calculan los valores del parámetro real m que anulan el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & m+1 & 2 \\ m & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2m-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3m - m^2 - 2m^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \\ m = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Cuando $m \in \mathbb{R} - \{0, 1, -3/2\}$ el sistema P es libre.

b) Para los valores del apartado anterior, el sistema P es una base de $\mathbb{R}^3$ ya que está formado por tres vectores linealmente independientes y pertenece a un espacio vectorial de dimensión 3.
Si $m = -1$, el sistema de vectores P es $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ donde $\vec{u} = (1, -1, -2), \vec{v} = (0,0,1)$ y $\vec{w} = (2,0,-3)$.
Para calcular las coordenadas del vector $\vec{x}$ en la base P basta plantear la ecuación

$$\vec{x} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} + \gamma \cdot \vec{w} \Rightarrow (-2,2,2) = \alpha(1,-1,-2) + \beta(0,0,1) + \gamma(2,0,-3) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2 = \alpha + 2\gamma \\ 2 = -\alpha \\ 2 = -2\alpha + \beta - 3\gamma \end{cases} \Rightarrow \alpha = -2, \quad \beta = -2, \quad \gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{x}_P = (-2,-2,0)_P$$

P6. Sea $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ siendo $\vec{v}_1 = (1,0,1)$, $\vec{v}_2 = (-2,0,-1)$ y $\vec{v}_3 = (2,-1,1)$ y sea el vector $\vec{v} = 3\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3$. Sea S un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ siendo $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base del mismo, donde $\vec{u}_1 = (0,1,-1)$ y $\vec{u}_2 = (1,0,1)$.
a) Hallar las coordenadas del vector $\vec{v}$ en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
b) Indicar si el vector $\vec{v}$ pertenece al subespacio S y en caso afirmativo, calcular sus coordenadas respecto de la base B.

RESOLUCIÓN

a) Sustituyendo $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ en la expresión del vector $\vec{v}$ se tiene

$$\vec{v} = 3\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3 \Rightarrow \vec{v} = 3(1,0,1) - 2(-2,0,-1) - (2,-1,1) \Rightarrow \vec{v} = (5,1,4)$$

Las coordenadas del vector $\vec{v}$ en la base canónica son $\vec{v}_C = (5,1,4)_C$.

b) Como $S = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$, $\forall\, \vec{x} \in S, \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \vec{x} = \alpha\,(0,1,-1) + \beta(1,0,1) = (\beta, \alpha, -\alpha + \beta)$

Es decir, el vector $\vec{v}$ pertenecerá al subespacio S si es de la forma $(\beta, \alpha, -\alpha+\beta)$. Igualando ambos términos

$$(5,1,4) = (\beta, \alpha, -\alpha+\beta) \Rightarrow \begin{cases} 5 = \beta \\ 1 = \alpha \\ 4 = -\alpha+\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1 \text{ y } \beta = 5$$

Por tanto, el vector $\vec{v}$ pertenece al subespacio S y sus coordenadas en la base B son $\vec{v}_B = (1,5)_B$.

P7. Sea $\mathbb{P}_2(x)$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a dos con $p(x) = a + bx + cx^2$ donde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) Dado el polinomio $p_1\,(x) = 3$ y considerando la constante de integración nula, demostrar que el sistema $V = \{p_1\,(x), \int p_1\,(x)dx\,, \iint(p_1\,(x)d(x))\,dx\}$ es una base de $\mathbb{P}_2(x)$

b) Hallar las coordenadas del vector $-1+3x+2x^2$ en la base V.

RESOLUCIÓN

a) Se calculan los vectores del sistema V

$$\int p_1(x)dx = 3x, \qquad \iint (p_1(x)dx)dx = \frac{3}{2}x^2$$

Se plantea la relación de dependencia o independencia lineal entre los vectores del sistema $V = \left\{3, 3x, \frac{3}{2}x^2\right\}$ para comprobar si forman un sistema libre o ligado

$$\gamma \cdot \frac{3}{2}x^2 + \beta \cdot 3x + \alpha \cdot 3 = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \\ 3\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0 \\ 3\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \end{cases}$$

El sistema V es libre. Dado que V tiene 3 vectores linealmente independientes y la dimensión de $\mathbb{P}_2(x)$ es 3, el sistema anterior es una base del espacio vectorial $\mathbb{P}_2(x)$.

b) Para calcular las coordenadas del vector $-1+3x+2x^2$ se plantea la ecuación

$$-1+3x+2x^2 \;=\; \alpha \cdot 3 + \beta \cdot 3x + \gamma \cdot \frac{3}{2}x^2 \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{3} \\ 3\beta = 3 \Rightarrow \beta = 1 \\ \frac{3}{2}\gamma = 2 \Rightarrow \gamma = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Por tanto las coordenadas del vector $-1+3x+2x^2$ en la base $V=\left\{3,3x,\frac{3}{2}x^2\right\}$ son $\left(-\frac{1}{3},1,\frac{4}{3}\right)_V$.

P8. Calcular la dimensión, las ecuaciones implícitas y las ecuaciones paramétricas de los siguientes subespacios vectoriales:

a) $S=\langle(1,-1,0),(0,1,0)\rangle$

b) $T=\langle(1,2,1,0),(2,-1,1,0),(0,0,0,1)\rangle$

c) $W=\langle(1,0,2,0),(2,0,0,-1)\rangle$

RESOLUCIÓN

a) Se calcula la dimensión del subespacio vectorial $S=\langle(1,-1,0),(0,1,0)\rangle$

$$\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow dim\, S=2$$

Se sabe que $dim\, S=dim\, \mathbb{R}^3-p$ siendo p el número de ecuaciones implícitas linealmente independientes del subespacio vectorial S.

En este caso $2=3-p\Rightarrow p=1$. Esto indica que S únicamente tiene una ecuación implícita.

Para calcularla se exige que $rg\begin{pmatrix}x & 1 & 0\\ y & -1 & 1\\ z & 0 & 0\end{pmatrix}=2$ siendo $(x,y,z)\in S$. Es decir

$$\begin{vmatrix}x & 1 & 0\\ y & -1 & 1\\ z & 0 & 0\end{vmatrix}=0\ \Rightarrow z=0$$

Entonces la ecuación implícita del subespacio vectorial S es $z=0$.

Para obtener las ecuaciones paramétricas de S, se expresa un vector cualquiera $(x,y,z)\in S$ como combinación lineal de los vectores del sistema generador

$$(x,y,z)=\alpha(1,-1,0)+\beta(0,1,0)=(\alpha,-\alpha+\beta,0)$$

Es decir, las ecuaciones paramétricas del subespacio vectorial S son

$$\begin{cases}x=\alpha\\ y=-\alpha+\beta,\ \ \forall\, \alpha,\beta\ \in\mathbb{R}\\ z=0\end{cases}$$

b) Se calcula la dimensión del subespacio vectorial $T=\langle(1,2,1,0),(2,-1,1,0),(0,0,0,1)\rangle$

$$\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=3\neq 0\ \Rightarrow dim\, T=3$$

Procediendo de forma similar al apartado anterior

$$dim\, T = dim\, \mathbb{R}^4 - p \Rightarrow 3 = 4 - p \Rightarrow p = 1$$

Se obtiene la ecuación implícita del subespacio vectorial T considerando que el vector $(x, y, z, t) \in T$ es combinación lineal de los vectores $(1, 2, 1, 0)$, $(2, -1, 1, 0)$ y $(0, 0, 0, 1)$ que generan T, o lo que es lo mismo

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 0 \\ y & 2 & -1 & 0 \\ z & 1 & 1 & 0 \\ t & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 0 \\ y & 2 & -1 & 0 \\ z & 1 & 1 & 0 \\ t & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ y & 2 & -1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x + y - 5z = 0$$

La ecuación implícita del subespacio vectorial T es $3x + y - 5z = 0$.

Para obtener las ecuaciones paramétricas, se debe analizar la expresión de cualquier elemento del subespacio vectorial T

$$(x, y, z, t) = \alpha(1,2,1,0) + \beta(2, -1,1,0) + \gamma(0,0,0,1) = (\alpha + 2\beta, 2\alpha - \beta, \alpha + \beta, \gamma)$$

En conclusión, las ecuaciones paramétricas del subespacio vectorial T son

$$\begin{cases} x = \alpha + 2\beta \\ y = 2\alpha - \beta \\ z = \alpha + \beta \\ t = \gamma \end{cases}, \quad \forall\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

c) Se repite el mismo proceso que en los apartados anteriores para el subespacio $W = \langle (1, 0, 2, 0), (2, 0, 0, -1) \rangle$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow dim\, S = 2$$

$$dim\, W = dim\, \mathbb{R}^4 - p \Rightarrow 2 = 4 - p \Rightarrow p = 2$$

En este caso se deben obtener dos ecuaciones implícitas de W

$$rg \begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ y & 0 & 0 \\ z & 2 & 0 \\ t & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

Dado que $p = 2$, se consideran dos menores de orden 3 de forma que las ecuaciones resultantes sean linealmente independientes

$$\begin{vmatrix} y & 0 & 0 \\ z & 2 & 0 \\ t & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2y = 0 \Rightarrow y = 0; \quad \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ z & 2 & 0 \\ t & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x - 4t + z = 0$$

Las ecuaciones implícitas del subespacio vectorial W son $\begin{cases} y = 0 \\ -2x - 4t + z = 0 \end{cases}$

Las ecuaciones paramétricas se obtienen planteando la siguiente combinación lineal

$$(x, y, z, t) = \alpha(1,0,2,0) + \beta(2,0,0,-1) = (\alpha + 2\beta, 0, 2\alpha, -\beta)$$

Con lo que las ecuaciones paramétricas de W son

$$\begin{cases} x = \alpha + 2\beta \\ y = 0 \\ z = 2\alpha \\ t = -\beta \end{cases}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

P9. Sea el conjunto $S = \{p(x) \in \mathbb{P}_3(x) | \, p'(-1) = 0\}$.

a) Demostrar que S es un subespacio vectorial.

b) Obtener una base del subespacio y calcular su dimensión.

c) Completar la base del subespacio S de forma que se obtenga una base del espacio vectorial $\mathbb{P}_3(x)$.

RESOLUCIÓN

a) S es un subespacio vectorial si se verifica que

$$\forall\, p(x), q(x) \in S \;\wedge \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, r(x) = \alpha p(x) + \beta q(x) \in S$$

Es decir, partiendo de dos polinomios pertenecientes a S se debe comprobar que cualquier combinación lineal de ellos pertenece también a S.

Para comprobar si el polinomio $r(x)$ es un elemento de S se debe estudiar si satisface la condición $r'(-1) = 0$.

Por tanto, derivando la expresión y sustituyendo el valor -1 se tiene que

$$r'(x) = \alpha p'(x) + \beta q'(x) \;\Rightarrow\; r'(-1) = \alpha p'(-1) + \beta q'(-1) \overset{\substack{p(x)\in S \\ q(x)\in S}}{=} \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$

En conclusión, $r(x) \in S$, es decir, S es un subespacio vectorial de $\mathbb{P}_3(\mathrm{x})$.

b) Sea $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{P}_3(\mathrm{x})$. Si $p(x)$ pertenece a S se cumple

$$p'(-1) = 0 \Rightarrow 3a - 2b + c = 0 \;\Rightarrow c = -3a + 2b$$

Es decir, la expresión general de cualquier polinomio perteneciente al subespacio vectorial S es

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + (-3a + 2b)x + d \Rightarrow\; p(x) = a(x^3 - 3x) + b(x^2 + 2x) + d$$

Por tanto, cualquier elemento de S puede expresarse como combinación lineal de los elementos del sistema $B = \{x^3 - 3x,\ x^2 + 2x,\ 1\}$, es decir, B es un sistema generador del subespacio vectorial S. Véase si es un sistema libre

$\alpha_1(x^3 - 3x) + \alpha_2(x^2 + 2x) + \alpha_3 = 0 \ \Rightarrow\ \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^2 + (-3\alpha_1 + 2\alpha_2)x + \alpha_3 = 0 \ \Rightarrow$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \ \Rightarrow B$ es un sistema libre.

Resumiendo, B además de ser un sistema generador es un sistema libre, por lo que es una base del subespacio vectorial S.

c) Dado que $dim\ \mathbb{P}_3(x) = 4$ y $dim\ S = 3$, utilizando el teorema de la base incompleta basta añadir un vector linealmente independiente a la base B para obtener una base del espacio vectorial $\mathbb{P}_3(x)$.
Considérese el sistema $B' = \{x^3 - 3x, x^2 + 2x, x, 1\}$, generado al añadir a la base B el polinomio x. Véase si este sistema es libre

$\alpha_1(x^3 - 3x) + \alpha_2(x^2 + 2x) + \alpha_3 x + \alpha_4 = 0 \ \Rightarrow \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^2 + (-3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3)x + \alpha_4 = 0$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$

$B' = \{x^3 - 3x, x^2 + 2x, x, 1\}$ es un sistema libre y por tanto es una base del espacio vectorial $\mathbb{P}_3(x)$.

P10. Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ y sean $A = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4\}$ y $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4\}$ dos bases del mismo donde $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2$, $\vec{a}_2 = 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = \vec{b}_1 + 2\vec{b}_4$ y $\vec{a}_4 = \vec{b}_2 - \vec{b}_3$.
a) Calcular las coordenadas del vector $\vec{x}$ en la base B sabiendo que sus coordenadas en la base A son $\vec{x}_A = (1,0,-1,-1)_A$.
b) Calcular las coordenadas del vector $\vec{y}$ en la base A sabiendo que sus coordenadas en la base B son $\vec{y}_B = (1,1,0,-1)_{\mathrm{B}}$.

RESOLUCIÓN

a) Se calculan las coordenadas del vector $\vec{x}$ en la base B utilizando la definición de coordenadas de un vector en una base. Sean (x_1, x_2, x_3, x_4) las coordenadas de $\vec{x}$ en la base B, entonces

$$\vec{x} = x_1 \cdot \vec{b}_1 + x_2 \cdot \vec{b}_2 + x_3 \cdot \vec{b}_3 + x_4 \cdot \vec{b}_4 \ {}_{(1)}$$

Como $x_A = (1,0,-1,-1)_A \Rightarrow \vec{x} = 1 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + (-1) \cdot \vec{a}_3 + (-1) \cdot \vec{a}_4$

Se sustituyen los valores de $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ y $\vec{a}_4$ en esta ecuación

$$\vec{x} = 1 \cdot (\vec{b}_1 - \vec{b}_2) + 0 \cdot 2\vec{b}_3 + (-1) \cdot (\vec{b}_1 + 2\vec{b}_4) + (-1) \cdot (\vec{b}_2 - \vec{b}_3) \Rightarrow$$

$$\vec{x} = -2\vec{b}_2 + \vec{b}_3 - 2\vec{b}_4 \quad (2)$$

Igualando las expresiones (1) y (2) se tiene $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = -2 \end{cases}$

Por tanto las coordenadas del vector $\vec{x}$ en la base B son $\vec{x}_B = (0, -2, 1, -2)_B$.

Otro método para calcular las coordenadas del vector $\vec{x}$ en la base B es utilizar la fórmula del cambio de base

$$\vec{x}_B = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4)_B \cdot \vec{x}_A$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}_B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}_A \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}_B$$

b) Se calculan las coordenadas del vector $\vec{y}$ en la base A utilizando la definición de coordenadas de un vector en una base. Sean (y_1, y_2, y_3, y_4) las coordenadas de $\vec{y}$ en la base A

$$\vec{y} = y_1 \cdot \vec{a}_1 + y_2 \cdot \vec{a}_2 + y_3 \cdot \vec{a}_3 + y_4 \cdot \vec{a}_4$$

Se sustituyen los valores de $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ y $\vec{a}_4$ en esta ecuación

$$\vec{y} = y_1 \cdot (\vec{b}_1 - \vec{b}_2) + y_2 \cdot 2\vec{b}_3 + y_3 \cdot (\vec{b}_1 + 2\vec{b}_4) + y_4 \cdot (\vec{b}_2 - \vec{b}_3) \Rightarrow$$

$$\vec{y} = (y_1 + y_3)\vec{b}_1 + (-y_1 + y_4)\vec{b}_2 + (2y_2 - y_4)\vec{b}_3 + 2y_3\vec{b}_4 \quad (3)$$

Como $\vec{y}_B = (1,1,0,-1)_B \Rightarrow \vec{y} = 1 \cdot \vec{b}_1 + 1 \cdot \vec{b}_2 + 0 \cdot \vec{b}_3 + (-1) \cdot \vec{b}_4 \quad (4)$

Igualando las expresiones (3) y (4) se tiene

$$\begin{cases} y_1 + y_3 = 1 \\ -y_1 + y_4 = 1 \\ 2y_2 - y_4 = 0 \\ 2y_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 3/2 \\ y_2 = 5/4 \\ y_3 = -1/2 \\ y_4 = 5/2 \end{cases}$$

Por tanto las coordenadas del vector $\vec{y}$ en la base A son $\vec{y}_A = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)_A$.

Al igual que en el apartado anterior, un método alternativo para calcular las coordenadas del vector $\vec{y}$ en la base A es utilizar la fórmula del cambio de base

$$\vec{y}_B = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4)_B \cdot \vec{y}_A$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}_B \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}_A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}_B^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}_A \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}_A \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}_A = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 5/4 \\ -1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}_A$$

P11. Sea el sistema de matrices $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

a) Demostrar que B es una base de $M_2(\mathbb{R})$.

b) Sea $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ en la base B, calcular las coordenadas de la matriz A_1 en la base canónica.

c) Sea $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ en la base canónica, calcular las coordenadas de la matriz A_2 en la base B.

RESOLUCIÓN

a) Como $dim\ M_2(\mathbb{R}) = 4$, para demostrar que B es una base de $M_2(\mathbb{R})$ basta comprobar que es un sistema libre

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \alpha + \beta + \delta & -\alpha + \gamma \\ -\beta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$$

B es un sistema libre, por tanto es una base de $M_2(\mathbb{R})$.

b) Se calculan las coordenadas de la matriz A_1 en la base canónica utilizando la definición de coordenadas de un vector en una base

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}_C = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}_C$$

Por tanto las coordenadas de A_1 en la base canónica son $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}_C$.

A continuación se vuelven a calcular las coordenadas de la matriz A_1 en la base canónica mediante la fórmula del cambio de base

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_C \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}_B \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}_C$$

c) Se calculan las coordenadas de la matriz A_2 en la base B utilizando la definición de coordenadas de un vector en una base

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \alpha+\beta+\delta & -\alpha+\gamma \\ -\beta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\delta = 3 \\ -\alpha+\gamma = -1 \\ -\beta = 2 \\ \delta = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = -2 \\ \gamma = 2 \\ \delta = 2 \end{cases}$$

Por tanto las coordenadas de A_2 en la base B son $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_B$.

De forma similar al apartado anterior, se utiliza la fórmula de cambio de base comprobando que las coordenadas de la matriz A_2 en la base B son las anteriores

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}_B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_C^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}_B \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}_B \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_B$$

P12. En el espacio vectorial de las matrices reales de dimensión 2x2 se considera el subconjunto $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b+a & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

a) Demostrar que S es un subespacio vectorial.

b) Calcular una base del subespacio vectorial S.

c) Sea $T = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$ otro subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$, calcular el subespacio vectorial $S \cap T$.

RESOLUCIÓN

a) S es un subespacio vectorial si se verifica que

$$\forall\alpha,\beta \in \mathbb{R}, \forall A,B \in S\,, C = \alpha A + \beta B \in S$$

A partir de las matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b+a & a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} c & d \\ d+c & c \end{pmatrix}$ del subconjunto S se forma el vector $C = \alpha A + \beta B$

$$C = \alpha\begin{pmatrix} a & b \\ b+a & a \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} c & d \\ d+c & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ \alpha b + \alpha a + \beta d + \beta c & \alpha a + \beta c \end{pmatrix} \underset{\substack{b' = \alpha b + \beta d \\ a' = \alpha a + \beta c}}{\Rightarrow}$$

$$C = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' + a' & a' \end{pmatrix} \in S \;\Rightarrow\; S \text{ es un subespacio vectorial.}$$

b) Para obtener una base del subespacio vectorial S, se calcula un sistema generador y se estudia si dicho sistema es libre.

Sea A una matriz genérica del subespacio vectorial S

$$\forall\, A \in S, \exists a,b \in \mathbb{R}:\; A = \begin{pmatrix} a & b \\ b+a & a \end{pmatrix}$$

Esta matriz se puede descomponer de la siguiente manera

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b+a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ es un sistema generador del subespacio vectorial S.

Véase si el sistema B es libre

$$\alpha_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

B es un sistema libre, en conclusión, $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ es una base del subespacio vectorial S.

c) Cualquier matriz del subespacio $S \cap T$ pertenece a ambos subespacios, es decir

$$\forall\, A \in S \cap T, A \in S \;\wedge\; A \in T$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } A \in S \Rightarrow \exists a,b \in \mathbb{R}: A = \begin{pmatrix} a & b \\ b+a & a \end{pmatrix} \\ \\ \text{Si } A \in T \Rightarrow \exists x,y \in \mathbb{R}: A = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b+a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = x \\ b = y \\ b + a = y \end{cases} \Rightarrow a = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \forall\, b,y \in \mathbb{R}$$

Cualquier elemento perteneciente a la intersección es de la forma $A = \begin{pmatrix} 0 & y \\ y & 0 \end{pmatrix}$, por lo que el subespacio vectorial es $S \cap T = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y \\ y & 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\}$.

P13. Sean $S = \{(0, -\alpha, 0, \beta) |\, \alpha,\ \beta \epsilon\, \mathbb{R}\}$ y $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) |\, x_4 = -x_3\}$ dos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$.

a) Obtener una base de cada uno de ellos.

b) Obtener una base del subespacio $S \cap T$.

c) Obtener una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ que contenga una base del subespacio vectorial $S + T$.

RESOLUCIÓN

a) Para obtener una base del subespacio vectorial S es necesario hallar un sistema generador libre del mismo

$$\forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in S, \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} :\ \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = \ \alpha(0, -1,0,0) + \beta(0,0,0,1)$$

Por lo que, $B_S = \{(0, -1,0,0), (0,0,0,1)\}$ es una sistema generador de S. Véase si es un sistema libre

$$\alpha_1(0, -1,0,0) + \alpha_2(0,0,0,1) = (0,0,0,0) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \Rightarrow B_S \text{ es un sistema libre.}$$

Es decir, $B_S = \{(0, -1,0,0), (0,0,0,1)\}$ es una base del subespacio vectorial S.

Se procede de forma análoga para el subespacio vectorial T

$$\forall \vec{x} \in T, \exists x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}: \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, -x_3)$$

$$\vec{x} = (x_1, 0, 0,0) + (0, x_2, 0,0) + (0,0, x_3, -x_3) = x_1(1,0,0,0) + x_2(0,1,0,0) + x_3(0,0,1, -1)$$

Por tanto, $B_T = \{(1,0, 0,0), (0,1, 0,0), (0,0, 1, -1)\}$ es un sistema generador de T. Se debe comprobar si además es un sistema libre

$$\alpha_1(1,0, 0,0) + \alpha_2(0,1, 0,0) + \alpha_3(0,0, 1, -1) = (0,0,0,0) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

B_T es un sistema libre, por lo que $B_T = \{(1,0, 0,0), (0,1, 0,0), (0,0, 1, -1)\}$ es una base de T.

b) $\forall \vec{x} \in S \cap T \ \Rightarrow \vec{x} \in S \wedge \vec{x} \in T$. Se considera un vector perteneciente a ambos subespacios

$$\left.\begin{array}{r} \vec{x} \in S, \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \vec{x} = \ (0, -\alpha, 0, \beta) \\ \vec{x} \in T, \exists x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}: \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, -x_3) \end{array}\right\}$$

Igualando ambas expresiones se tiene $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\alpha \\ x_3 = 0 \\ -x_3 = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -x_2 \\ \beta = 0 \end{cases}$

En conclusión, $\forall \vec{x} \in S \cap T \ \Rightarrow \ \vec{x} = (0, x_2, 0,0) = x_2(0,1,0,0), \ \forall\, x_2 \in \mathbb{R}$.

Es decir, $B_{S \cap T} = \{(0,1,0,0)\}$ es un sistema generador de $S \cap T$, y como este sistema sólo contiene un vector no nulo, es un sistema libre. Por tanto, $B_{S \cap T} = \{(0,1,0,0)\}$ es una base del subespacio vectorial $S \cap T$.

c) Para obtener una base de $\mathbb{R}^4$ que contenga la base del subespacio vectorial $S + T$, previamente se debe obtener la base de dicho subespacio. Se sabe que

$$\{(0,-1,0,0), (0,0,0,1), (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,-1)\}$$

es un sistema generador de $S + T$.

Además, $dim(S + T) = dim\, S + dim\, T - dim(S \cap T) = 2 + 3 - 1 = 4$.

Por tanto, para determinar una base de $S + T$ basta seleccionar cuatro vectores linealmente independientes del sistema generador anterior.

Como $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow B_{S+T} = \{(0,-1,0,0), (0,0,0,1), (1,0,0,0), (0,0,1,-1)\}$ es un sistema libre, es decir, es una base de $S + T$.

Además, $\left.\begin{matrix} S + T \subseteq \mathbb{R}^4 \\ dim(S + T) = dim\, \mathbb{R}^4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow S + T = \mathbb{R}^4 \Rightarrow$ una base de $\mathbb{R}^4$ que contiene la base de $S + T$ es la propia base $B_{S+T} = \{(0,-1,0,0), (0,0,0,1), (1,0,0,0), (0,0,1,-1)\}$.

P14. Sean $S = \langle(1,0,0,1), (0,0,1,1)\rangle$ y $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) |\, x_1 - x_3 - x_4 = 0,\ x_2 + x_4 = 0\}$ dos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$.

a) Obtener una base de cada uno de ellos.

b) Calcular el subespacio $S \cap T$.

c) Calcular $S + T$ ¿Es suma directa?

RESOLUCIÓN

a) Se calcula una base del subespacio vectorial $S = \langle(1,0,0,1), (0,0,1,1)\rangle$. Véase si el sistema de vectores $\{(1,0,0,1), (0,0,1,1)\}$ es un sistema libre

$$\alpha_1(1,0,0,1) + \alpha_2(0,0,1,1) = (0,0,0,0) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

Es decir, $B_S = \{(1,0,0,1),(0,0,1,1)\}$ es un sistema libre y generador de S y por ello es una base del mismo.

A continuación se obtiene una base del subespacio vectorial T

$$T = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) |\, x_1 - x_3 - x_4 = 0,\ x_2 + x_4 = 0\}$$

$\forall \vec{x} \in T, \exists x_3, x_4 \in \mathbb{R}: \vec{x} = (x_3 + x_4, -x_4, x_3, x_4)$, es decir

$\vec{x} = (x_4, -x_4, 0, x_4) + (x_3, 0, x_3, 0) \Rightarrow \vec{x} = x_4(1,-1,0,1) + x_3(1,0,1,0)$

$B_T = \{(1,-1,0,1),(1,0,1,0)\}$ es un sistema generador de T.

Además el sistema de vectores es libre puesto que

$$\alpha_1(1,-1,0,1) + \alpha_2(1,0,1,0) = (0,0,0,0) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

Entonces $B_T = \{(1,-1,0,1),(1,0,1,0)\}$ es una base de T.

b) Para obtener una base del subespacio vectorial $S \cap T$ se analiza la expresión general de cualquier elemento del mismo

Se sabe que $\forall \vec{x} \in S \cap T \Rightarrow \vec{x} \in S \wedge \vec{x} \in T$

$$\left.\begin{array}{r} \vec{x} \in S, \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \vec{x} = (\alpha, 0, \beta, \alpha+\beta) \\ \vec{x} \in T, \exists x_3, x_4 \in \mathbb{R}, \vec{x} = (x_3 + x_4, -x_4, x_3, x_4) \end{array}\right\}$$

Igualando ambas expresiones $\begin{cases} x_4 + x_3 = \alpha \\ -x_4 = 0 \\ x_3 = \beta \\ x_4 = \alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta = 0 \\ x_4 = x_3 = 0 \end{cases}$

Por lo que $S \cap T = \{\vec{0}\}$.

c) Se calcula la dimensión del subespacio vectorial $S + T$

$$dim(S+T) = dim\, S + dim\, T - dim(S \cap T) = 2 + 2 - 0 = 4$$

Como $dim(S+T) = 4$ y $S + T \subseteq \mathbb{R}^4$, entonces $S + T = \mathbb{R}^4$. Además como $S \cap T = \{\vec{0}\}$, la suma es directa $\Rightarrow S \oplus T = \mathbb{R}^4$.

P15. Sean $S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) |\, x_1 + x_2 = 0,\ x_3 - 2x_4 = 0\}$ y $T = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) |\, x_1 - x_2 + x_4 = 0\}$ dos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$.

a) Obtener una base de cada uno de ellos.

b) Obtener una base del subespacio $S \cap T$.

c) Calcular $S + T$. ¿Es suma directa?

RESOLUCIÓN

Para calcular una base del subespacio vectorial S se obtiene un sistema generador del mismo

$$\forall\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in S, \exists x_2, x_4 \in \mathbb{R}: \vec{x} = (-x_2, x_2, 2x_4, x_4) = (-x_2, x_2, 0{,}0) + (0{,}0{,}2x_4, x_4)$$

$$= x_2(-1{,}1{,}0{,}0) + x_4(0{,}0{,}2\,{,}1)$$

Es decir, $B_S = \{(-1{,}1{,}0{,}0), (0{,}0{,}2\,{,}1)\}$ es un sistema generador de S. Para comprobar si es una base, se debe estudiar si es un sistema libre

$\alpha_1(-1{,}1{,}0{,}0) + \alpha_2(0{,}0{,}2\,{,}1) = (0{,}0{,}0{,}0) \Rightarrow\ \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \Rightarrow B_S$ es un sistema libre $\Rightarrow$

$B_S = \{(-1{,}1{,}0{,}0), (0{,}0{,}2\,{,}1)\}$ es una base del subespacio vectorial S.

Procediendo de forma similar para el subespacio vectorial T

$$\forall\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in T, \exists x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R}: \vec{x} = (x_1, x_1 + x_4, x_3, x_4) = (x_1, x_1, 0{,}0) +$$

$$+ (0{,}0, x_3, 0) + (0, x_4, 0, x_4) = x_1(1{,}1, 0{,}0) + x_3(0{,}0{,}1{,}0) + x_4(0{,}1{,}0{,}1)$$

Por lo que $B_T = \{(1{,}1, 0{,}0), (0{,}0{,}1{,}0), (0{,}1{,}0{,}1)\}$ es un sistema generador del subespacio vectorial T, véase si es un sistema libre

$$\alpha_1(1{,}1, 0{,}0) + \alpha_2(0{,}0{,}1{,}0) + \alpha_3(0{,}1{,}0{,}1) = (0{,}0{,}0{,}0) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \Rightarrow$$

B_T es un sistema libre $\Rightarrow B_T$ es una base del subespacio vectorial T.

b) $\forall\vec{x} \in S \cap T\ \Rightarrow\ \vec{x} \in S\ \wedge\ \vec{x} \in T$, es decir, un elemento perteneciente a la intersección debe cumplir las ecuaciones implícitas de ambos subespacios

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1 \\ x_3 = 2x_4 \\ x_4 = -2x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1 \\ x_3 = -4x_1 \\ x_4 = -2x_1 \end{cases} \forall x_1 \in \mathbb{R}$$

Por tanto, $\forall\vec{x} \in S \cap T \Rightarrow \vec{x} = (x_1, -x_1, -4x_1, -2x_1) \Rightarrow B_{S\cap T} = \{(1, -1, -4, -2)\}$ es un sistema generador del subespacio intersección y dado que solo contiene un vector no nulo, es un sistema libre, es decir, es una base del subespacio vectorial $S \cap T$.

c) $dim(S + T) = dim\, S + dim\, T - dim(S \cap T) = 2 + 3 - 1 = 4$

$$\left.\begin{array}{c} S + T \subseteq \mathbb{R}^4 \\ dim(S + T) = dim\,\mathbb{R}^4 \\ S \cap T \neq \{\vec{0}\} \end{array}\right\} \Rightarrow S + T = \mathbb{R}^4$$

En este caso, aunque la suma de los dos subespacios vectoriales es el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$, la suma no es directa porque $S \cap T \neq \{\vec{0}\}$.

CUESTIONES RESUELTAS

C1. Sea $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ una base $\mathbb{R}^3$, determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) $V_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2 - \vec{v}_1, \vec{v}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

b) $V_2 = \{-\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \vec{v}_2 - \vec{v}_3, -\vec{v}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

c) $V_3 = \{-\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \vec{v}_2 - \vec{v}_3, 2\vec{v}_3 - \vec{v}_1\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

RESOLUCIÓN

a) Verdadero. Si $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ son linealmente independientes y el determinante formado por estos tres vectores es no nulo, es decir, $|\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3| \neq 0$.

Por las propiedades de los determinantes, se sabe que $|\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3| \overset{C_2-C_1}{=} |\vec{v}_1, \vec{v}_2 - \vec{v}_1, \vec{v}_3|$, y como $|\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3| \neq 0 \Rightarrow |\vec{v}_1, \vec{v}_2 - \vec{v}_1, \vec{v}_3| \neq 0$.

Es decir, $V_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2 - \vec{v}_1, \vec{v}_3\}$ es un sistema libre. Además como la dimensión del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ es 3, $V_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2 - \vec{v}_1, \vec{v}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

b) Verdadero. Procediendo de forma similar al apartado anterior se tiene

$$|\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3| \overset{\substack{C_2-C_1\\C_3-C_1}}{=} |\vec{v}_1, \vec{v}_2 - \vec{v}_1, \vec{v}_3 - \vec{v}_1| \overset{C_1+C_2+C_3}{=} |-\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \vec{v}_2 - \vec{v}_1, \vec{v}_3 - \vec{v}_1| \overset{C_2-C_3}{=}$$

$$= |-\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \vec{v}_2 - \vec{v}_3, \vec{v}_3 - \vec{v}_1| \overset{C_3-C_1+C_2}{=} |-\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \vec{v}_2 - \vec{v}_3, -\vec{v}_3|$$

Como $|\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3| \neq 0$, entonces $|-\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \vec{v}_2 - \vec{v}_3, -\vec{v}_3| \neq 0$.

Por lo que $V_2 = \{-\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \vec{v}_2 - \vec{v}_3, -\vec{v}_3\}$ es un sistema libre y como la dimensión del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ es 3, V_2 es una base de $\mathbb{R}^3$.

c) Falso. El vector $2\vec{v}_3 - \vec{v}_1$ del sistema V_3 es combinación lineal de los otros dos vectores del sistema

$$2\vec{v}_3 - \vec{v}_1 = (-\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3) - (\vec{v}_2 - \vec{v}_3)$$

Entonces, V_3 no es libre, con lo que no puede ser una base de $\mathbb{R}^3$.

C2. Determinar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: si los sistemas $V=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ y $U=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ son libres, entonces el sistema $W=\{\vec{v}_1+\vec{u}_1,\vec{v}_2+\vec{u}_2,\vec{v}_3+\vec{u}_3\}$ también es libre.

RESOLUCIÓN

Falso. Dado un sistema libre $V=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ basta escoger un sistema libre $U=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ tal que $\vec{v}_i=-\vec{u}_i$ para algún $i=1,2,3$. Supóngase que $\vec{v}_1=-\vec{u}_1$, entonces, $W=\left\{\vec{0},\vec{v}_2+\vec{u}_2,\vec{v}_3+\vec{u}_3\right\}$ no es libre, ya que contiene al vector nulo.

C3. Determinar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: las coordenadas del vector nulo respecto de cualquier base de $\mathbb{R}^n$ son nulas.

RESOLUCIÓN

Verdadero. Esta afirmación se demuestra mediante reducción al absurdo. Supóngase que existe alguna base $V=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\ \vec{v}_n\}$ en $\mathbb{R}^n$ en la que el vector nulo se expresa como

$$\vec{0}=\alpha_1\cdot\vec{v}_1+\alpha_2\cdot\vec{v}_2+\cdots+\alpha_n\cdot\ \vec{v}_n \text{ siendo algún } \alpha_i\neq 0$$

Entonces, el sistema de vectores $V=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\ \vec{v}_n\}$ no es libre, lo cual es imposible porque V es una base. Por tanto se ha demostrado que las coordenadas del vector nulo en cualquier base de $\mathbb{R}^n$ son nulas.

C4. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^5$ se consideran los subespacios vectoriales S y T siendo $dim\,S=2$ y $dim\,T=4$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) $dim\,S+dim\,T\geq dim\,(S+T)$

b) $dim(S\cap T)=1$

c) $1\leq dim\,(S\cap T)\leq 2$

RESOLUCIÓN

a) Verdadero. La suma de subespacios cumple que

$$dim(S+T) = dim\,S + dim\,T - dim\,(S \cap T).$$

Como $dim\,(S \cap T) \geq 0$, entonces, $dim\,S + dim\,T \geq dim\,(S+T)$.

b) Falso. Para que la desigualdad sea cierta debe cumplirse que $S + T = \mathbb{R}^5$.

Además como se verifica la igualdad $dim(S+T) = dim\,S + dim\,T - dim\,(S \cap T)$, en general, se satisface que $dim(S+T) \leq 5$

$dim(S+T) = dim\,S + dim\,T - \dim(S \cap T) \leq 5 \Rightarrow 2 + 4 - di\,m(S \cap T) \leq 5 \Rightarrow$
$dim\,(S \cap T) \geq 1$

c) Verdadero. En el apartado anterior se ha demostrado que $dim\,(S \cap T) \geq 1$.

Además, como $S \cap T \subseteq S \Rightarrow dim\,(S \cap T) \leq dim\,S = 2 \Rightarrow dim\,(S \cap T) \leq 2$.

Teniendo en cuenta ambas desigualdades se puede concluir que $1 \leq dim\,(S \cap T) \leq 2$

EJERCICIOS RESUELTOS CON MATHEMATICA

M1. Indicar si los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$ respectivamente:

a) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y = 3z, x - y = 0\}$.

b) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + 2z = t, x + y = 2t - 1\}$.

RESOLUCIÓN

```
Remove["Global`*"]
```

a) Se definen las ecuaciones del subconjunto V y se comprueba si el vector nulo las satisface

```
ec1[{a_, b_, c_}] = 2 a + b - 3 c; ec2[{a_, b_, c_}] = a - b - 0; nulo = {0, 0, 0};
```

```
ec1[nulo] == 0
True
```

```
ec2[nulo] == 0
True
```

El vector nulo satisface las dos ecuaciones del subconjunto V por lo que V puede ser un subespacio vectorial. A continuación se comprueba si $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in V \wedge \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in V$. Se definen los vectores genéricos $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in V$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in V$ y $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$

```
x = {x1, x2, x3}; y = {y1, y2, y3};
```

```
vec = α * x + β * y
{x1 α + y1 β, x2 α + y2 β, x3 α + y3 β}
```

Como los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ pertenecen a V, verifican sus dos ecuaciones implícitas

```
ec1x = ec1[x]
```
```
2 x1 + x2 - 3 x3
```

```
ec2x = ec2[x]
```
```
x1 - x2
```

```
ec1y = ec1[y]
```
```
2 y1 + y2 - 3 y3
```

```
ec2y = ec2[y]
```
```
y1 - y2
```

Se comprueba si el vector $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$ también las verifica

```
ec1[vec]
```
```
x2 α + y2 β + 2 (x1 α + y1 β) - 3 (x3 α + y3 β)
```

```
ec2[vec]
```
```
x1 α - x2 α + y1 β - y2 β
```

```
ec1[vec] == α*ec1[x] + β*ec1[y] // Simplify
```
```
True
```

```
ec2[vec] == α*ec2[x] + β*ec2[y] // Simplify
```
```
True
```

Como se cumplen las condiciones, el vector $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in V$ y por tanto V es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

b) Se definen las ecuaciones del subconjunto W y se comprueba si el vector nulo las satisface

```
ec1 = x - y + 2 z == t; ec2 = x + 2 y == 2 t - 1;
```

```
ec1 /. {x → 0, y → 0, z → 0, t → 0}
True
```

```
ec2 /. {x → 0, y → 0, z → 0, t → 0}
False
```

El vector nulo no satisface la segunda igualdad del subconjunto W por lo que éste no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

M2. Indicar si los vectores $\vec{u} = (-2,1,0,1)$, $\vec{v} = (0,1,-2,0)$, $\vec{w} = (0,3,-2,-1)$ y $\vec{t} = (1,0,1,-1)$ son linealmente independientes.

RESOLUCIÓN

```
Remove["Global`*"]
```

Se definen los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ y $\vec{t}$

```
u = {-2, 1, 0, 1}; v = {0, 1, -2, 0}; w = {0, 3, -2, -1};
t = {1, 0, 1, -1};
```

Se plantea la relación de dependencia o independencia lineal

```
sol = Solve[α1 * u + α2 * v + α3 * w + α4 * t == {0, 0, 0, 0}]
```

$$\left\{\left\{\alpha_1 \to \frac{\alpha_4}{2},\ \alpha_2 \to \alpha_4,\ \alpha_3 \to -\frac{\alpha_4}{2}\right\}\right\}$$

Existen infinitas soluciones además de la solución trivial, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, que satisfacen el anterior sistema de ecuaciones, luego los vectores son linealmente dependientes.

M3. Dado el sistema $P = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ donde $\vec{u} = (1, m, -2)$, $\vec{v} = (m+1,0,1)$ y $\vec{w} = (2,0,2m-1)$,

a) Calcular el valor del parámetro real m para que el sistema de vectores sea libre.

b) ¿Puede ser el sistema P una base de $\mathbb{R}^3$? En caso afirmativo, hallar las coordenadas del vector $\vec{x} = (-2,2,2)$ en dicha base para el valor $m = -1$.

RESOLUCIÓN

```
Remove["Global`*"]
```

a) Se definen los vectores del sistema P y se calculan los valores del parámetro real m para los cuales el sistema P es libre, planteando la condición de dependencia o independencia lineal

```
u = {1, m, -2}; v = {m + 1, 0, 1}; w = {2, 0, 2 m - 1};
```

```
Reduce[a * u + b * v + c * w == {0, 0, 0}]
```

$$(m == 0 \;\&\&\; b == -c \;\&\&\; a == -c) \;||\; \left(\left(m == -\frac{3}{2} \;||\; m == 1\right) \;\&\&\; b == c - 2\,c\,m \;\&\&\; a == 0\right) \;||\; \left(-3 + m + 2\,m^2 \neq 0 \;\&\&\; c == 0 \;\&\&\; b == 0 \;\&\&\; a == 0\right)$$

```
Solve[-3 + m + 2 m^2 == 0, m]
```

$$\left\{\left\{m \to -\frac{3}{2}\right\}, \{m \to 1\}\right\}$$

De la solución del sistema de ecuaciones se deduce que para $m = 0$ o $m = 1$ o $m = -3/2$ los vectores son linealmente dependientes. Por tanto, $\forall m \in \mathbb{R} - \{0,1,-3/2\}$ el sistema P es libre.

Véase otra forma de calcular el valor de m utilizando el concepto de rango de una matriz

```
mat = Transpose[{u, v, w}]; MatrixForm[mat]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+m & 2 \\ m & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1+2\,m \end{pmatrix}$$

```
Solve[Det[mat] == 0]
```

$$\left\{\left\{m \to -\frac{3}{2}\right\}, \{m \to 0\}, \{m \to 1\}\right\}$$

Cuando $m = 0$ o $m = 1$ o $m = -3/2$, el rango de la matriz formada por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es menor que tres ya que su determinante es nulo, es decir, el sistema P es ligado. Entonces, si $m \in \mathbb{R} - \{0,1,-3/2\}$, el sistema P es libre.

b) Basta con que el sistema P sea libre para que sea una base de $\mathbb{R}^3$, puesto que es un sistema de 3 vectores en un espacio vectorial de dimensión 3. Por lo que P sí es una base de $\mathbb{R}^3$ para los valores de m calculados en el apartado anterior.

A continuación se considera que el parámetro real m toma el valor -1 y se calculan las coordenadas del vector $\vec{x} = (-2,2,2)$ en la base P

```
u = u /. m → -1; v = v /. m → -1; w = w /. m → -1;
```

```
sol = Solve[a*u + b*v + c*w == {-2, 2, 2}]
{{a → -2, b → -2, c → 0}}
```

```
xp = {a, b, c} /. sol[[1]]
{-2, -2, 0}
```

Las coordenadas del vector $\vec{x} = (-2,2,2)$ en la base P son $\vec{x}_P = (-2,-2,0)_P$.

M4. Sea $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$, siendo $\vec{v}_1 = (1,0,1)$, $\vec{v}_2 = (-2,0,-1)$ y $\vec{v}_3 = (2,-1,1)$, y sea el vector $\vec{v} = 3\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3$. Sea S un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ cuya base es $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, donde $\vec{u}_1 = (0,1,-1)$ y $\vec{u}_2 = (1,0,1)$.

a) Hallar las coordenadas del vector $\vec{v}$ en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

b) Indicar si el vector $\vec{v}$ pertenece al subespacio S y en caso afirmativo, calcular sus coordenadas respecto de la base B.

RESOLUCIÓN

```
Remove["Global`*"]
```

a) Se definen los vectores de los sistemas A y B

```
v1 = {1, 0, 1}; v2 = {-2, 0, -1}; v3 = {2, -1, 1}; u1 = {0, 1, -1};
u2 = {1, 0, 1};
```

Las coordenadas del vector $\vec{v}$ en la base canónica son

```
vc = 3*v1 - 2*v2 - v3
{5, 1, 4}
```

Es decir, $\vec{v}_C = (5,1,4)_C$.

b) Se calculan las ecuaciones paramétricas del subespacio S a partir de los vectores de su base

```
ecuaciones = α*u1 + β*u2
{β, α, -α + β}
```

Para que el vector $\vec{v}$ pertenezca al subespacio S debe verificar sus ecuaciones paramétricas

```
Solve[vc == ecuaciones]
{{α → 1, β → 5}}
```

Como el vector $\vec{v}$ satisface dichas ecuaciones, pertenece al subespacio vectorial S. A continuación se calculan sus coordenadas en la base B

```
sol = Solve[a*u1 + b*u2 == vc]
{{a → 1, b → 5}}
```

```
vb = {a, b} /. sol[[1]]
{1, 5}
```

Las coordenadas del vector $\vec{v}$ en la base B son $\vec{v}_B = (1,5)_B$.

M5. Sea $\mathbb{P}_2(x)$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a dos con $p(x) = a + bx + cx^2$ donde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) Dado el polinomio $p_1(x) = 3$, demostrar que el sistema de vectores $A = \{p_1(x), \int p_1(x)dx, \iint (p_1(x)dx)dx\}$ es una base de $\mathbb{P}_2(x)$, considerando la constante de integración nula.

b) Hallar las coordenadas del vector $-1 + 3x + 2x^2$ en la base del apartado anterior.

RESOLUCIÓN

```
Remove["Global`*"]
```

a) En la resolución de este problema se consideran los polinomios como vectores cuyas coordenadas son las referidas a la base canónica de $\mathbb{P}_2(x)$, $C = \{1, x, x^2\}$. Es decir, el polinomio $p(x) = a + bx + cx^2$ se expresa como $(a, b, c)_C$.

Se calculan los vectores del sistema $A = \{p_1(x), \int p_1(x)dx, \iint (p_1(x)dx)dx\}$

```
p1 = 3
3
```

```
p1c = {3, 0, 0}
{3, 0, 0}
```

```
p2 = Integrate[p1, x]
3 x
```

```
p2c = {0, 3, 0}
{0, 3, 0}
```

```
p3 = Integrate[p2, x]
```

$$\frac{3\,x^2}{2}$$

```
p3c = {0, 0, 3/2}
```

$$\left\{0,\ 0,\ \frac{3}{2}\right\}$$

Para demostrar que $A = \left\{3{,}3x, \frac{3}{2}x^2\right\}$ es una base de $\mathbb{P}_2(x)$, basta comprobar que es libre, ya que si lo es, se trata de un sistema formado por 3 vectores linealmente independientes en un espacio vectorial de dimensión 3, y por tanto, de una base

```
Reduce[α * p1c + β * p2c + γ * p3c == {0, 0, 0}, {α, β, γ}]
α == 0 && β == 0 && γ == 0
```

Por ello, A es una base de $\mathbb{P}_2(x)$.

b) Aplicando la definición de coordenadas de un vector en una base

```
Solve[{-1, 3, 2} == a * p1c + b * p2c + c * p3c, {a, b, c}]
```

$$\left\{\left\{a \to -\frac{1}{3},\ b \to 1,\ c \to \frac{4}{3}\right\}\right\}$$

Entonces las coordenadas del polinomio $-1+3x+2x^2$ en la base $A=\left\{3, 3x, \frac{3}{2}x^2\right\}$ son $\left(-\frac{1}{3}, 1, \frac{4}{3}\right)_A$.

M6. Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ y sean $A=\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4\}$ y $B=\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4\}$ dos bases del mismo donde $\vec{a}_1=\vec{b}_1-\vec{b}_2$, $\vec{a}_2=2\vec{b}_3$, $\vec{a}_3=\vec{b}_1+2\vec{b}_4$ y $\vec{a}_4=\vec{b}_2-\vec{b}_3$.

a) Calcular las coordenadas del vector $\vec{x}$ en la base B sabiendo que sus coordenadas en la base A son $\vec{x}_A=(1,0,-1,-1)_A$.

b) Calcular las coordenadas del vector $\vec{y}$ en la base A sabiendo que sus coordenadas en la base B son $\vec{y}_B=(1,1,0,-1)_B$.

RESOLUCIÓN

```
Remove["Global`*"]
```

a) Se calculan las coordenadas del vector $\vec{x}$ en la base B mediante la igualdad

$$\vec{x}_B=(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4)_B \cdot \vec{x}_A$$

para lo cual se obtiene la matriz del cambio de base formada por las coordenadas de los vectores de la base A expresadas en la base B

```
xa = {1, 0, -1, -1}; xb = {x1, x2, x3, x4};
```

```
a1 = {1, -1, 0, 0}; a2 = {0, 0, 2, 0}; a3 = {1, 0, 0, 2}; a4 = {0, 1, -1, 0};
mat = Transpose[{a1, a2, a3, a4}];
MatrixForm[mat]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

```
sol = Solve[xb == mat.xa]; xb = xb /. sol[[1]]
```

```
{0, -2, 1, -2}
```

Las coordenadas del vector $\vec{x}$ en la base B son $\vec{x}_B=(0,-2,1,2)_B$.

b) Se calculan las coordenadas del vector $\vec{y}$ en la base A aplicando la igualdad

$$\vec{y}_B = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4)_B \cdot \vec{y}_A$$

```
yb = {1, 1, 0, -1}; ya = {y1, y2, y3, y4};
```

```
sol = Solve[yb == mat.ya]; ya = ya /. sol[[1]]
```

$$\left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right\}$$

Las coordenadas del vector $\vec{y}$ en la base A son $\vec{y}_A = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)_A$.

M7. Sea el sistema de matrices $B = \left\{\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\-1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$.

a) Demostrar que B es una base de $M_2(\mathbb{R})$.

b) Sea $A_1 = \begin{pmatrix}2 & 4\\3 & -2\end{pmatrix}$ en la base B, calcular las coordenadas de la matriz A_1 en la base canónica.

c) Sea $A_2 = \begin{pmatrix}3 & -1\\2 & 2\end{pmatrix}$ en la base canónica, calcular las coordenadas de la matriz A_2 en la base B.

RESOLUCIÓN

```
Remove["Global`*"]
```

a) Dado que $dim\ M_2(\mathbb{R}) = 4$, y que B es un sistema formado por 4 elementos de $M_2(\mathbb{R})$, basta comprobar que B es un sistema libre para demostrar que es una base de $M_2(\mathbb{R})$

```
b1 = (1 -1
      0  0); b2 = ( 1 0
                   -1 0); b3 = (0 1
                                0 0); b4 = (1 0
                                            0 1);
```

```
Solve[α1 b1 + α2 b2 + α3 b3 + α4 b4 == 0, {α1, α2, α3, α4}]
```

```
{{α1 → 0, α2 → 0, α3 → 0, α4 → 0}}
```

Por tanto B es una base de $M_2(\mathbb{R})$.

b) Para calcular las coordenadas de la matriz A_1 en la base canónica se puede utilizar la definición de coordenadas de un vector en una base o la matriz del cambio de base. Se calculan las coordenadas mediante su definición

```
a1 = 2 b1 + 4 b2 + 3 b3 - 2 b4; a1 = Flatten[a1]

{4, 1, -4, -2}
```

Las coordenadas de A_1 en la base canónica son $A_1 = (4,1,-4,-2)_C$.

A continuación se utiliza la matriz de cambio de base P para calcular las coordenadas de la matriz A_1 en la base canónica. La matriz P tiene por columnas las coordenadas de cada uno de los vectores de la base B respecto de la base canónica, es decir

```
P = Transpose[{{1, -1, 0, 0}, {1, 0, -1, 0}, {0, 1, 0, 0}, {1, 0, 0, 1}}];
MatrixForm[P]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se calculan las coordenadas utilizando la expresión $(A_1)_C = P \cdot (A_1)_B$

```
P.{2, 4, 3, -2}

{4, 1, -4, -2}
```

Por tanto, las coordenadas de la matriz A_1 en la base canónica son $A_1 = (4,1,-4,-2)_C$.

c) Para la resolución de este apartado se procede de forma similar a la utilizada en el apartado anterior

```
a2 = {α1, α2, α3, α4};
sol = Solve[α1 b1 + α2 b2 + α3 b3 + α4 b4 == {{3, -1}, {2, 2}}, {α1, α2, α3, α4}]

{{α1 → 3, α2 → -2, α3 → 2, α4 → 2}}
```

```
a2 = a2 /. sol[[1]]

{3, -2, 2, 2}
```

Es decir, las coordenadas de la matriz A_2 en la base B son $A_2 = (3,-2,2,2)_B$.

A continuación, se comprueban estas coordenadas utilizando la inversa de la matriz del cambio de base P calculada en el apartado anterior

$$(A_2)_C = P.(A_2)_B \Rightarrow P^{-1}.(A_2)_C = (A_2)_B$$

```
Inverse[P] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
Inverse[P].{3, -1, 2, 2}
```

```
{3, -2, 2, 2}
```

M8. Sean los subespacios vectoriales $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | \ x_1 + x_2 = 0, \ x_3 - 2x_4 = 0\}$ y $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | \ x_1 - \ x_2 + x_4 = 0\}$.

a) Obtener una base de cada uno de ellos.

b) Obtener una base del subespacio vectorial $S \cap T$.

c) Calcular $S + T$. ¿Es suma directa?

RESOLUCIÓN

```
Remove["Global`*"]
```

a) Partiendo de las ecuaciones implícitas del subespacio vectorial S, se obtiene un sistema generador del mismo

```
sol1 = Solve[{x1 + x2 == 0, x3 - 2 x4 == 0}, {x1, x2, x3, x4}]
```

```
{{x1 → -x2, x3 → 2 x4}}
```

```
x = {x1, x2, x3, x4} /. sol1[[1]]
```

```
{-x2, x2, 2 x4, x4}
```

```
bs1 = x /. {x2 → 1, x4 → 0}
```

```
{-1, 1, 0, 0}
```

```
bs2 = x /. {x2 → 0, x4 → 1}
```

```
{0, 0, 2, 1}
```

$B_S = \{(-1,1,0,0),(0,0,2,1)\}$ es un sistema generador del subespacio vectorial S. Para comprobar si es una base se debe estudiar si es un sistema libre

```
Solve[α1 bs1 + α2 bs2 == 0, {α1, α2}]
{{α1 → 0, α2 → 0}}
```

El sistema B_S es libre, y por tanto una base de S.

Procediendo de forma similar se obtiene una base del subespacio vectorial T

```
sol2 = Solve[x1 - x2 + x4 == 0, {x1, x2, x3, x4}]
{{x1 → x2 - x4}}
```

```
x = {x1, x2, x3, x4} /. sol2[[1]]
{x2 - x4, x2, x3, x4}
```

```
bt1 = x /. {x2 → 1, x3 → 0, x4 → 0}
{1, 1, 0, 0}
```

```
bt2 = x /. {x2 → 0, x3 → 1, x4 → 0}
{0, 0, 1, 0}
```

```
bt3 = x /. {x2 → 1, x3 → 0, x4 → 1}
{0, 1, 0, 1}
```

El sistema $B_T = \{(1,1,0,0),(0,0,1,0),(0,1,0,1)\}$ es un sistema generador de T. Véase si es un sistema libre

```
Solve[α1 bt1 + α2 bt2 + α3 b t3 == 0, {α1, α2, α3}]
{{α2 → 0, α1 → 0, α3 → 0}}
```

Por tanto, $B_T = \{(1,1,0,0),(0,0,1,0),(0,1,0,1)\}$ es una base del subespacio vectorial T.

b) Dado que cualquier vector del subespacio intersección $S \cap T$ pertenece a ambos subespacios, debe satisfacer simultáneamente las ecuaciones implícitas de los mismos

```
sol3 = Solve[{x1 + x2 == 0, x3 - 2 x4 == 0, x1 - x2 + x4 == 0}, {x1, x2, x3, x4}]
```

$$\left\{\left\{x1 \to -\frac{x4}{2},\ x2 \to \frac{x4}{2},\ x3 \to 2\,x4\right\}\right\}$$

```
x = {x1, x2, x3, x4} /. sol3[[1]]
```

$$\left\{-\frac{x4}{2},\ \frac{x4}{2},\ 2\,x4,\ x4\right\}$$

De esta forma se obtiene la expresión general de un vector perteneciente al subespacio intersección. Se considera un vector cualquiera de dicho subespacio

```
int1 = x /. x4 → -2
{1, -1, -4, -2}
```

$B_{S\cap T} = \{(1,-1,-4,-2)\}$ es un sistema generador de $S \cap T$. Además como este sistema está formado por un único vector no nulo, es libre, por lo que es una base de $S \cap T$.

c) El sistema generador del subespacio vectorial $S + T$ es

$$\{(-1,1,0,0), (0,0,2,1), (1,1,0,0), (0,0,1,0), (0,1,0,1)\}$$

Para calcular el subespacio vectorial $S + T$ basta obtener una base del mismo. Para ello se deben escoger los vectores linealmente independientes del sistema de vectores anterior

```
m = Transpose[{bs1, bs2, bt1, bt2, bt3}]; MatrixForm[m]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
MatrixRank[m]
4
```

```
Det[m[[{1, 2, 3, 4}, {1, 2, 3, 4}]]]
-2
```

Como los cuatro primeros vectores columna de la matriz son linealmente independientes, $\{(-1,1,0,0), (0,0,2,1), (1,1,0,0), (0,0,1,0)\}$ es una base de $S + T$. A partir de ella se obtienen las ecuaciones paramétricas del subespacio vectorial $S + T$

```
α * bs1 + β * bs2 + γ * bt1 + δ * bt2
```

```
{-α + γ, α + γ, 2 β + δ, β}
```

Además como $dim(S+T)=4$ y $S+T \subseteq \mathbb{R}^4 \Rightarrow S+T=\mathbb{R}^4$, pero la suma de ambos subespacios no es una suma directa ya que, como se ha demostrado en el apartado anterior, $S \cap T \neq \{\vec{0}\}$.

4 APLICACIÓN LINEAL

4.1 Concepto de aplicación lineal y propiedades

Definición: Sean $\big((E,+),(K,+,\cdot),\circ\big)$ y $\big((F,+),(K,+,\cdot),\circ\big)$ dos espacios vectoriales definidos sobre el cuerpo K y sea una aplicación f:

$$\begin{aligned} f: E &\rightarrow \ F \\ \vec{u} &\rightarrow f(\vec{u}) \end{aligned}$$

La aplicación f es lineal si cumple las siguientes condiciones:

- $f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}),\ \forall \vec{u},\vec{v} \in E$
- $f(\alpha \circ \vec{u}) = \alpha \circ f(\vec{u}),\quad \forall \vec{u} \in E, \forall \alpha \in K$

Teorema: Sean $\big((E,+),(K,+,\cdot),\circ\big)$ y $\big((F,+),(K,+,\cdot),\circ\big)$ dos espacios vectoriales definidos sobre el cuerpo K y sea f una aplicación de E en F. La aplicación f es lineal si verifica que:

$$f(\alpha \circ \vec{u} + \beta \circ \vec{v}) = \alpha \circ f(\vec{u}) + \beta \circ f(\vec{v}), \qquad \forall \vec{u},\vec{v} \in E, \forall \alpha,\beta \in K$$

4.2 Clasificación de una aplicación lineal

Dada una aplicación $f: E \rightarrow \ F$:

- f es inyectiva si a cada imagen le corresponde una única anti-imagen, es decir, si no existen dos o más elementos con la misma imagen:

  $$\vec{u}_1 \neq \vec{u}_2 \Rightarrow f(\vec{u}_1) \neq f(\vec{u}_2)$$

  o lo que es lo mismo si $f(\vec{u}_1) = f(\vec{u}_2) \Rightarrow \vec{u}_1 = \vec{u}_2$

- f es sobreyectiva o suprayectiva si todos los elementos del conjunto final tienen al menos una anti-imagen:

  $$\forall \vec{w} \in F\ \exists \vec{u} \in E: f(\vec{u}) = \vec{w}$$

- f es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva simultáneamente. Es decir, si todos los elementos del conjunto final tienen una única anti-imagen:

  $$\forall \vec{w} \in F\ \exists! \, \vec{u} \in E: f(\vec{u}) = \vec{w}$$

Las aplicaciones lineales también se denominan homomorfismos entre espacios vectoriales.

- Si $E \neq F$:
  - Si la aplicación lineal f es sobreyectiva, se denomina epimorfismo.
  - Si la aplicación lineal f es inyectiva, se denomina monomorfismo.
  - Si la aplicación lineal f es biyectiva, se denomina isomorfismo.
- Si $E = F$:
  - Toda aplicación lineal f se denomina endomorfismo.
  - Si un endomorfismo f es biyectivo, se denomina automorfismo.

4.3 Propiedades de las aplicaciones lineales

Dada la aplicación lineal $f: E \rightarrow F$, se cumplen las siguientes propiedades:

- $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$, siendo $\vec{0}_E$ el elemento neutro de E y $\vec{0}_F$ el elemento neutro de F respecto a la suma.
- $\forall \vec{u} \in E, f(-\vec{u}) = -f(\vec{u})$.
- Si Wes un subespacio vectorial de E, su imagen, $f(W)$, es un subespacio vectorial de F.
- Si $f(W)$ es un subespacio vectorial de F, W es un subespacio vectorial de E.
- Si el sistema de vectores $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ es ligado, el sistema de vectores $f(S) = \{f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_n)\}$ también es ligado.
- Si el sistema de vectores $f(S) = \{f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_n)\}$ es libre, el sistema de vectores $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ también es libre.

4.4 Imagen de una aplicación lineal

Definición: Sea $f: E \rightarrow F$ una aplicación lineal. Se llama imagen de f al subconjunto formado por las imágenes de los vectores de E, y se denota por $Im(f)$

$$Im(f) = \{f(\vec{u}): \vec{u} \in E\} \subseteq F$$

Teorema: Sean E un espacio vectorial de dimensión p y $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ una base del mismo. Entonces, $Im(f)$ es un subespacio de F tal que $Im(f) = \langle f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_p) \rangle$.

4.5 Matriz de una aplicación lineal

Definición: Sea $f: E \to F$ una aplicación lineal siendo E y F dos espacios vectoriales de dimensión p y n respectivamente. Sea $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ una base de E y sea $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ una base de F.

La matriz de la aplicación lineal f respecto a las bases U y V es la matriz formada por las coordenadas de los vectores del sistema $f(U) = \{f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_p)\}$ respecto a la base V. Esta matriz se representa mediante $\left(f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_p)\right)_{U,V}$.

Sean las imágenes de los vectores de la base U respecto a la base V:

$$f(\vec{u}_1) = \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ \vdots \\ f_{n1} \end{pmatrix}_V, f(\vec{u}_2) = \begin{pmatrix} f_{12} \\ f_{22} \\ \vdots \\ f_{n2} \end{pmatrix}_V, \dots, f(\vec{u}_p) = \begin{pmatrix} f_{1p} \\ f_{2p} \\ \vdots \\ f_{np} \end{pmatrix}_V$$

En este caso, la matriz de la aplicación lineal f respecto a las bases U y V es:

$$\left(f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_p)\right)_{U,V} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1p} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{np} \end{pmatrix}_{U,V} \equiv f_{U,V}$$

Como U es una base de E, $\forall \vec{u} \in E, \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathrm{K}$: $\vec{u} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \cdots + \alpha_p \vec{u}_p$. Entonces, se puede calcular su imagen mediante la matriz de la aplicación lineal f respecto a las bases U y V de la siguiente manera:

$$f(\vec{u}) = \alpha_1 f(\vec{u}_1) + \alpha_2 f(\vec{u}_2) + \cdots + \alpha_p f(\vec{u}_p)$$

ya que f es lineal. Sustituyendo los valores de $\left(f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_p)\right)_{U,V}$ en la expresión anterior se obtiene el valor de la imagen $f(\vec{u})$ en la base V:

$$f(\vec{u})_V = \alpha_1 f(\vec{u}_1) + \alpha_2 f(\vec{u}_2) + \cdots + \alpha_p f(\vec{u}_p) = \alpha_1 \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ \vdots \\ f_{n1} \end{pmatrix}_V + \alpha_2 \begin{pmatrix} f_{12} \\ f_{22} \\ \vdots \\ f_{n2} \end{pmatrix}_V + \cdots + \alpha_p \begin{pmatrix} f_{1p} \\ f_{2p} \\ \vdots \\ f_{np} \end{pmatrix}_V$$

Es decir,

$$f(\vec{u})_V \equiv \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathrm{V}} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1p} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{np} \end{pmatrix}_{U,V} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix}_{\mathrm{U}} \Rightarrow (\vec{y})_V = f_{U,V} \cdot (\vec{u})_U$$

4.5.1 Rango de una aplicación lineal

Sea $f: E \rightarrow F$ una aplicación lineal, siendo E y F dos espacios vectoriales de dimensión p y n respectivamente y sea $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ una base de E. Ya que $Im(f) = \langle f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_p)\rangle$, basta escoger los vectores linealmente independientes del sistema generador anterior para obtener una base de $Im(f)$.

Por otro lado, recordar que las columnas de la matriz $f_{U,V}$ son las coordenadas de los vectores $\{f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_p)\}$ en la base V. Debido a que el rango de esta matriz es el número de columnas linealmente independientes, se tiene:

$$rg(f_{U,V}) = dim(Im(f))$$

Con lo que el rango de la aplicación lineal f coincide con el rango de la matriz $f_{U,V}$.

4.6 Núcleo de una aplicación lineal

Definición: Sea $f: E \rightarrow F$ una aplicación lineal siendo E y F dos espacios vectoriales de dimensión p y n respectivamente. El núcleo de f es el subconjunto de E formado por los vectores cuya imagen es el vector $\vec{0}_F \in F$ y se representa por $Ker(f)$:

$$Ker(f) = \{\vec{u} \in E: f(\vec{u}) = \vec{0}_F\}$$

Propiedades:

- El núcleo de f es un subespacio vectorial de E.
- Se verifica la siguiente igualdad:

$$dim(E) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) \Leftrightarrow dim(E) = dim(Ker(f)) + rg(f_{U,V})$$

4.7 Caracterización de las aplicaciones lineales

Sea una aplicación lineal $f: E \rightarrow F$:

- Se dice que f es inyectiva si su núcleo es únicamente el vector nulo:

$$f \text{ es inyectiva} \Leftrightarrow Ker(f) = \{\vec{0}_E\}$$

o lo que es lo mismo:

$$f \text{ es inyectiva} \Leftrightarrow dim(E) = dim(Im(f))$$

- Se dice que f es sobreyectiva si su imagen coincide con el espacio vectorial destino F:

$$f \text{ es sobreyectiva} \Leftrightarrow Im(f) = F$$

- Se dice que f es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva simultáneamente:

$$f \text{ es biyectiva} \Leftrightarrow \begin{cases} Im(f) = F \\ Ker(f) = \{\vec{0}_E\} \end{cases}$$

4.8 Suma de aplicaciones lineales

Definición: Sean $f: E \to F$ y $g: E \to F$ dos aplicaciones lineales y $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ y $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ bases de E y de F respectivamente. La suma de las aplicaciones lineales f y g es otra aplicación lineal $f + g: E \to F$ definida por:

$$\forall \vec{u} \in E, (f+g)(\vec{u}) = f(\vec{u}) + g(\vec{u})$$

La matriz de la aplicación lineal suma $f + g$ es la suma de las matrices de cada una de las aplicaciones lineales:

$$(f+g)_{U,V} = f_{U,V} + g_{U,V}$$

siendo $f_{U,V}$ y $g_{U,V}$ las matrices de las aplicaciones f y g respecto a las bases U y V.

4.9 Producto de una aplicación lineal por un escalar

Definición: Sea $f: E \to F$ una aplicación lineal y sean $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ y $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ bases de E y de F respectivamente. Dado $\alpha \in K$, el producto del escalar α por la aplicación lineal f es otra aplicación lineal $(\alpha \circ f): E \to F$ definida por:

$$\forall \vec{u} \in E, (\alpha \circ f)(\vec{u}) = \alpha f(\vec{u})$$

La matriz asociada a la aplicación lineal anterior es:

$$(\alpha f)_{U,V} = \alpha (f)_{U,V}$$

4.10 Composición de aplicaciones lineales

Sean $((E,+),(K,+,\cdot),\circ)$, $((F,+),(K,+,\cdot),\circ)$ y $((H,+),(K,+,\cdot),\circ)$ tres espacios vectoriales definidos sobre un mismo cuerpo K, de dimensión p, n y q respectivamente y sean las aplicaciones $f: E \to F$ y $g: F \to H$. La composición de las aplicaciones lineales f y g es otra aplicación lineal $g \circ f: E \to H$ definida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (g \circ f): E &\xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} H \\ \vec{u} &\to f(\vec{u}) \to (g \circ f)(\vec{u}) = g[f(\vec{u})] \end{aligned}$$

Sean $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ una base de E, $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ una base de F y $T = \{\vec{t}_1, \vec{t}_2, \dots, \vec{t}_q\}$ una base de H. Entonces, la matriz de la aplicación lineal $g \circ f$, es el producto de las respectivas matrices de las aplicaciones lineales:

$$\underbrace{(g \circ f)_{U,T}}_{\in M_{qxp}} = \underbrace{(g)_{V,T}}_{\in M_{qxn}} \cdot \underbrace{(f)_{U,V}}_{\in M_{nxp}}$$

siendo:

- $f_{U,V}$ la matriz de la aplicación lineal f respecto a las bases U y V.
- $g_{V,T}$ la matriz de la aplicación lineal g respecto a las bases V y T.

EJERCICIOS RESUELTOS

P1. Indicar si $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y,z)=(2x+y,x-z,-x+2y+z)$ es una aplicación lineal.

RESOLUCIÓN

Para que f sea una aplicación lineal se tiene que verificar que

$$f(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})=\alpha f(\vec{x})+\beta f(\vec{y})\ \forall\ \vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^3 \wedge \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{cases} f(\vec{x}+\vec{y})=f(\vec{x})+f(\vec{y}) \\ f(\alpha\vec{x})=\alpha f(\vec{x}) \end{cases},\quad \forall\ \vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^3 \wedge \forall\alpha\in\mathbb{R}$$

Se comprueba si f es una aplicación lineal analizando si se satisfacen estas dos últimas igualdades.

Sean los vectores $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ e $\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$, entonces el vector $\vec{x}+\vec{y}$ tiene por coordenadas

$\vec{x}+\vec{y}=(x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3)=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)$.

Se calculan los transformados de estos vectores respecto a f:

$$f(\vec{x})=(2x_1+x_2,x_1-x_3,-x_1+2x_2+x_3)$$

$$f(\vec{y})=(2y_1+y_2,y_1-y_3,-y_1+2y_2+y_3)$$

$$\begin{aligned} f(\vec{x}+\vec{y}) &= (2(x_1+y_1)+(x_2+y_2),(x_1+y_1)-(x_3+y_3),-(x_1+y_1)+2(x_2+y_2)+ \\ &\quad +(x_3+y_3)) \\ &= (2x_1+2y_1+x_2+y_2,x_1+y_1-x_3-y_3,-x_1-y_1+2x_2+2y_2+x_3+y_3)\ {\scriptstyle(1)} \end{aligned}$$

Por otro lado se obtiene la suma $f(\vec{x})+f(\vec{y})$

$$\begin{aligned} f(\vec{x})+f(\vec{y}) &= (2x_1+x_2,x_1-x_3,-x_1+2x_2+x_3)+(2y_1+y_2,y_1-y_3,-y_1+2y_2+y_3) \\ &= (2x_1+x_2+2y_1+y_2,x_1-\ x_3+y_1-y_3,-x_1+2x_2+x_3-y_1+2y_2+y_3)\ {\scriptstyle(2)} \end{aligned}$$

Los vectores (1) y (2) coinciden, por lo que se satisface la primera condición, $f(\vec{x}+\vec{y})=f(\vec{x})+f(\vec{y})$. Véase si se satisface la segunda condición.

Se forma el vector $\alpha\vec{x}=\alpha(x_1,x_2,x_3)=(\alpha x_1,\alpha x_2,\alpha x_3)$ y se calcula su imagen

$f(\alpha\vec{x}) = (2\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha x_1 - \alpha x_3, -\alpha x_1 + 2\alpha x_2 + \alpha x_3)$ $_{(3)}$

Se calcula $\alpha f(\vec{x})$

$\alpha f(\vec{x}) = \alpha(2x_1 + x_2, x_1 - x_3, -x_1 + 2x_2 + x_3)$

$= (2\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha x_1 - \alpha x_3, -\alpha x_1 + 2\alpha x_2 + \alpha x_3)$ $_{(4)}$

Los vectores (3) y (4) son idénticos, por lo que se satisface también la segunda condición, $f(\alpha\vec{x}) = \alpha f(\vec{x})$, y en consecuencia f es una aplicación lineal.

P2. Dada la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (x - 2y + 2z, x - z)$

a) Calcular el núcleo de la aplicación.

b) Calcular una base de $Im(f)$ y su dimensión.

c) Clasificar la aplicación lineal.

RESOLUCIÓN

a) Por la definición de núcleo de una aplicación se sabe que

$$\forall\vec{x} \in Ker(f) \Leftrightarrow f(\vec{x}) = \vec{0}$$

Es decir, $\vec{x} = (x, y, z) \in Ker(f) \Leftrightarrow f(\vec{x}) = f(x, y, z) = (x - 2y + 2z, x - z) = (0,0)$. Por tanto, para calcular el núcleo de la aplicación lineal basta igualar término a término los dos vectores anteriores y resolver el sistema resultante

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{3}y \\ x = z \end{cases}$$

El núcleo de la aplicación lineal es $Ker(f) = \left\{\left(\frac{2}{3}y, y, \frac{2}{3}y\right) \mid y \in \mathbb{R}\right\}$.

b) Sea $C = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Por la definición de subespacio imagen se tiene que $Im(f) = \langle f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3)\rangle$, por ello se calcula la imagen de los vectores de la base canónica

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1) = f(1,0,0) = (1,1) \\ f(\vec{e}_2) = f(0,1,0) = (-2,0) \\ f(\vec{e}_3) = f(0,0,1) = (2,-1) \end{cases} \Rightarrow Im(f) = \langle (1,1), (-2,0), (2,-1)\rangle$$

Para obtener una base del subespacio imagen basta seleccionar los vectores linealmente independientes del sistema generador anterior

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow rg\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

Es decir, $B = \{(1,1), (-2,0)\}$ es una base de $Im(f)$ siendo $dim\big(Im(f)\big) = 2$. Además, $dim\big(Im(f)\big) = dim\,\mathbb{R}^2$, luego se puede concluir que $Im(f) = \mathbb{R}^2$.

c) Se analizan los siguientes aspectos

- $E = \mathbb{R}^3 \neq \mathrm{F} = \mathbb{R}^2$
- $dim\big(Ker(f)\big) = 1 \neq 0 \Rightarrow f$ no es inyectiva
- $dim(Im(f)\,) = 2 = dim\,\mathbb{R}^2 \ \Rightarrow f$ es suprayectiva

Por todo ello se deduce que f es un epiformismo.

P3. Dada la aplicación lineal $f: \mathbb{P}_2(x) \to \mathbb{P}_2(x)$ definida por $f\big(p(x)\big) = k^2 p(x) - p(1)$, $\forall k \neq 0$.

a) Obtener la matriz de la aplicación considerando la base canónica.

b) Calcular una base del núcleo y su dimensión.

c) Calcular una base de $Im(f)$.

d) Clasificar la aplicación lineal.

RESOLUCIÓN

a) Se considera la base canónica $C_2 = \{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{P}_2(x)$ y se calculan las coordenadas de las imágenes de cada uno de los vectores de C_2 en la base canónica

$$f(1) = k^2 - 1 = (k^2 - 1,0,0)_{C_2}$$
$$f(x) = k^2 x - 1 = (-1, k^2, 0)_{C_2}$$
$$f(x^2) = k^2 x^2 - 1 = (-1,0, k^2)_{C_2}$$

La matriz respecto a la base canónica es la matriz que se obtiene al colocar por columnas estas imágenes

$$f_{C_2,C_2} = \begin{pmatrix} k^2 - 1 & -1 & -1 \\ 0 & k^2 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 \end{pmatrix}_{C_2,C_2}$$

b) Utilizando la definición de núcleo, $p(x) \in Ker(f) \Leftrightarrow f\big(p(x)\big) = 0 = 0x^2 + 0x + 0$.

Sea $p(x)$ un polinomio cualquiera del espacio vectorial $\mathbb{P}_2(x)$

$$\forall p(x) \in \mathbb{P}_2 : p(x) = ax^2 + bx + c$$

Este polinomio pertenece al núcleo si se satisface la igualdad

$$f\big(p(x)\big) = ak^2x^2 + bk^2x + ck^2 - a - b - c = 0x^2 + 0x + 0$$

Igualando ambos polinomios término a término

$$\begin{cases} ak^2 = 0 \\ bk^2 = 0 \\ ck^2 - a - b - c = 0 \end{cases} \overset{k\neq 0}{\Longrightarrow} \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c(k^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

Se deben diferenciar dos casos

<u>Caso 1:</u> Si $k \neq \pm 1 \Rightarrow c = 0$

La solución del sistema es $a = 0,\ b = 0,\ c = 0$. Por tanto, el núcleo de la aplicación lineal es el polinomio nulo, $Ker(f) = \{\vec{0}\}$ y $dim\big(Ker(f)\big) = 0$

<u>Caso 2:</u> Si $k = \pm 1$

La solución del sistema es $a = 0,\ b = 0,\ \forall c \in \mathbb{R}$. Por tanto, el núcleo de la aplicación lineal es el subespacio vectorial de los polinomios constantes

$$Ker(f) = \{p(x) = c \mid c \in \mathbb{R}\}$$

siendo $B = \{1\}$ una base del núcleo y $dim\big(Ker(f)\big) = 1$.

c) Se utiliza la siguiente relación entre las dimensiones

$$dim(\mathbb{P}_2(x)) = dim\big(Ker(f)\big) + dim(Im(f))$$

Dado que la dimensión del núcleo de la aplicación varía en función de la constante k, al igual que en el apartado anterior se deben diferenciar dos casos

<u>Caso 1:</u> Si $k \neq \pm 1$

$$dim\big(Ker(f)\big) = 0 \Rightarrow dim\big(Im(f)\big) = dim\ (\mathbb{P}_2(x))$$

Como $Im(f) \subseteq \mathbb{P}_2(x) \Rightarrow Im(f) = \mathbb{P}_2(x)$. Por tanto cualquier base del espacio vectorial $\mathbb{P}_2(x)$ es base de $Im(f)$, por ejemplo la base canónica $C = \{1, x, x^2\}$ es una base de la imagen de la aplicación lineal.

<u>Caso 2:</u> Si $k = \pm 1$

De la relación de las dimensiones se sabe que $dim\big(Im(f)\big) = dim(\mathbb{P}_2(x)) - dim\big(Ker(f)\big)$

Como $dim\big(Ker(f)\big) = 1 \Rightarrow dim\big(Im(f)\big) = 2$.

Utilizando la definición del subespacio imagen se tiene que

$$Im(f) = \langle f(1), f(x), f(x^2)\rangle = \langle k^2 - 1,\ k^2x - 1, k^2x^2 - 1\rangle$$

Dado que la dimensión del subespacio imagen es dos, basta seleccionar dos vectores linealmente independientes. Véase que los dos primeros polinomios del sistema generador son linealmente independientes

$$\alpha_1(k^2-1)+\alpha_2(k^2x-1)=0 \Rightarrow \alpha_1k^2-\alpha_1+\alpha_2k^2x-\alpha_2=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha_1k^2-\alpha_1-\alpha_2=0\\ \alpha_2k^2=0\end{cases} \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=0$$

Por tanto, $B=\{k^2-1,\ k^2x-1\}$ es una base de $Im(f)$.

d) <u>Caso 1:</u> Si $k\neq\pm1$. Se sabe que

- $E=\mathbb{P}_2(x)=\mathrm{F}$
- $dim\big(Ker(f)\big)=0\Rightarrow f$ es inyectiva
- $dim(Im(f)\,)=3=dim\,\mathbb{P}_2(x)\Rightarrow\ f$ es suprayectiva

Se deduce que f es un automorfismo.

<u>Caso 2:</u> Si $k=\pm1$. En este caso se tiene que

- $E=\mathbb{P}_2(x)=\mathrm{F}$
- $dim\big(Ker(f)\big)=1\neq0\Rightarrow f$ no es inyectiva
- $dim(Im(f)\,)=2\neq3\ =dim\,\mathbb{P}_2(x)\Rightarrow$ no es suprayectiva

Entonces, f es simplemente un homormorfismo.

P4. Sea la aplicación lineal $f\colon M_2(\mathbb{R})\to M_2(\mathbb{R})$ definida por $f\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b&0\\a&c+d\end{pmatrix}$

a) Calcular la matriz de la aplicación respecto a la base canónica de $M_2(\mathbb{R})$.

b) Calcular $Ker(f)$, una base y su dimensión.

c) Calcular la dimensión de $Im(f)$.

d) Clasificar f.

RESOLUCIÓN

a) Se considera la base canónica de $M_2(\mathbb{R})$, $C=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ y se calcula la matriz de la aplicación lineal f hallando las imágenes de estos vectores respecto de la base canónica

$$\begin{cases} f\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow f\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} = (1,0,1,0)_C \end{cases}$$

$$\begin{cases} f\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow f\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} = (1,0,0,0)_C \end{cases}$$

$$\begin{cases} f\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow f\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} = (0,0,0,1)_C \end{cases}$$

$$\begin{cases} f\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow f\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = (0,0,0,1)_C \end{cases}$$

Colocando por columnas estas imágenes se obtiene la matriz de la aplicación f

$$f_{C,C} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}_{C,C}$$

b) El núcleo de la aplicación lineal f está formado por los siguientes vectores

$$Ker(f) = \left\{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid f(A) = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

Sea $A = \begin{pmatrix}x & y\\z & t\end{pmatrix} \Rightarrow f(A) = \begin{pmatrix}x+y & 0\\x & z+t\end{pmatrix}$.

La matriz A pertenecerá al núcleo si se verifica

$$f(A) = \begin{pmatrix}x+y & 0\\x & z+t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y=0\\ 0=0\\ x=0\\ z+t=0\end{cases} \Rightarrow x=y=0, z=-t \;\; \forall t \in \mathbb{R}$$

Es decir, $Ker(f) = \left\{\begin{pmatrix}0 & 0\\-t & t\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}0 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\right\}$, siendo $B = \left\{\begin{pmatrix}0 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix}\right\}$ una base de $Ker(f)$ y por tanto, $dim\big(Ker(f)\big) = 1$.

c) Para determinar la dimensión de $Im(f)$ basta estudiar el rango de la matriz de la aplicación

$$rg\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = 3 \Rightarrow dim(Im(f)) = 3$$

d) f es simplemente un homomorfismo ya que

- $E = \mathrm{F} = M_2(\mathbb{R})$
- $dim\big(Ker(f)\big) = 1 \neq 0 \Rightarrow f$ no es inyectiva
- $dim(Im(f)\,) = 3 \neq 4 = dim(M_2(\mathbb{R})) \Rightarrow\ f$ no es suprayectiva

P5. Sea la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y, z, t) = (2x + y - t, x + z + t, -x - y + z + 2t)$

a) Calcular el transformado del vector $\vec{v} = (0,4,-1,3)$ respecto a f ¿Es posible que $\vec{v} \in Ker(f)$?

b) Hallar un vector que se transforme en el vector $\vec{w} = (1,4,3)$ respecto a f.

RESOLUCIÓN

a) Se calcula el transformado del vector $\vec{v}$

$$f(\vec{v}) = f(0,4,-1,3) = (4 - 3, -1 + 3, -4 + (-1) + 2 \cdot 3) = (1,2,1)$$

El vector $\vec{v}$ no pertenece al núcleo de la aplicación ya que no se transforma en el vector nulo.

b) Se trata de hallar $\vec{u} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tal que $f(\vec{u}) = \vec{w}$.

Se comprueba si existe algún vector de $\mathbb{R}^4$ cuya imagen sea el vector (1,4,3) resolviendo el sistema de ecuaciones

$$f(x, y, z, t) = (1,4,3) \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - t = 1 \\ x + z + t = 4 \\ -x - y + z + 2t = 3 \end{cases}$$

Para resolver dicho sistema se estudia el rango de la matriz de los coeficientes y el rango de la matriz ampliada

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

En ambas matrices se cumple que $F_3 = F_2 - F_1$, con lo que $rg(A) = rg(A|b) \leq 2$. Además $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg(A) = rg(A|b) = 2$.

Como $rg(A) = 2 = rg(A|b) <$ nº incógnitas $= 4\ \Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado.

Se puede obtener un sistema de ecuaciones equivalente al anterior de la siguiente manera

$$\begin{cases} 2x + y - t = 1 \\ x + z + t = 4 \\ -x - y + z + 2t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 1 + t \\ x = 4 - z - t \end{cases}$$

Si $\lambda = z$ y $\mu = t$ se tiene que

$$\begin{cases} 2x + y = 1 + \mu \\ x = 4 - \lambda - \mu \end{cases} \Rightarrow \ x = 4 - \lambda - \mu, \ \ y = -7 + 2\lambda + 3\mu, \ \ z = \lambda, \ \ t = \mu$$

Basta dar un valor a los parámetros λ y μ para obtener una solución de las infinitas posibles soluciones. Por ejemplo, si se toma $\lambda = 0$ y $\mu = 0$, entonces la solución del sistema es $x = 4$, $y = -7$, $z = 0$ y $t = 0$. Es decir, uno de los vectores que se transforma en el vector $\vec{w} = (1,4,3)$ es el vector $\vec{u} = (4,-7,0,0)$.

P6. Sea la aplicación lineal $f: M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$ definida por $f\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b+d & c+g \\ d-b & 0 & f+h \\ g-c & h-f & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcular el transformado de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ respecto a f.

b) Calcular la anti-imagen de $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ respecto a f.

RESOLUCIÓN

a) Se calcula la imagen de la matriz A respecto a f

$$f(A) = f\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Se trata de encontrar una matriz $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ cuya imagen sea la matriz B, para lo que basta resolver el sistema

$$f\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & b+d & c+g \\ d-b & 0 & f+h \\ g-c & h-f & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Igualando término a término ambas matrices

$$\begin{cases} b + d = 3 \\ d - b = -3 \\ c + g = 5 \\ g - c = 3 \\ f + h = 1 \\ h - f = 1 \end{cases} \Rightarrow d = 0, b = 3, g = 4, c = 1, h = 1, f = 0$$

Por tanto cualquier matriz de la forma $\begin{pmatrix} a & 3 & 1 \\ 0 & e & 0 \\ 4 & 1 & i \end{pmatrix}$ $\forall a, e, i \in \mathbb{R}$ es anti-imagen de la matriz B, es decir, existen infinitas matrices cuya imagen respecto de la aplicación f es la matriz B, por ejemplo una de ellas es $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 10 & 0 \\ 4 & 1 & -10 \end{pmatrix}$.

P7. Sea la aplicación lineal $f: \mathbb{P}_2(x) \rightarrow \mathbb{P}_1(x)$ definida por $f\big(p(x)\big) = 2p'(x)$

a) Determinar la matriz de la aplicación considerando las bases canónicas de $\mathbb{P}_2(x)$ y $\mathbb{P}_1(x)$.

b) Determinar la matriz de la aplicación considerando la base canónica de $\mathbb{P}_2(x)$ y la base $V = \{x, x-2\}$ de $\mathbb{P}_1(x)$.

c) Determinar la matriz de la aplicación considerando la base $U = \{2, 1+2x, x+x^2\}$ de $\mathbb{P}_2(x)$ y la base canónica de $\mathbb{P}_1(x)$.

d) Determinar la matriz de la aplicación considerando la base $U = \{2, 2x+1, x+x^2\}$ de $\mathbb{P}_2(x)$ y la base $V = \{x, x-2\}$ de $\mathbb{P}_1(x)$.

RESOLUCIÓN

a) Se consideran la base canónica $C_2 = \{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{P}_2(x)$ y la base canónica $C_1 = \{1, x\}$ de $\mathbb{P}_1(x)$ y se calculan las imágenes de los vectores de C_2 en función de los vectores de C_1

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(x) = 2 \\ f(x^2) = 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x \Rightarrow \; f(1) = (0,0)_{C_1} \\ 2 = 2 \cdot 1 + 0 \cdot x \Rightarrow \; f(x) = (2,0)_{C_1} \\ 4x = 0 \cdot 1 + 4 \cdot x \Rightarrow \; f(x^2) = (0,4)_{C_1} \end{cases}$$

Por tanto la matriz de f respecto de las bases canónicas es $f_{C_2,C_1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}_{C_2,C_1}$

b) Se consideran la base canónica $C_2 = \{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{P}_2(x)$ y la base $V = \{x, x-2\}$ de $\mathbb{P}_1(x)$ y se calculan las imágenes de los vectores de C_2 en función de los vectores de V

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(x) = 2 \\ f(x^2) = 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \cdot x + 0 \cdot (x-2) \Rightarrow \; f(1) = (0,0)_V \\ 2 = a \cdot x + b \cdot (x-2) \Rightarrow \; a = 1, b = -1 \Rightarrow f(x) = (1,-1)_V \\ 4x = a \cdot x + b \cdot (x-2) \Rightarrow \; a = 4, b = 0 \Rightarrow f(x^2) = (4,0)_V \end{cases}$$

Entonces la matriz de f respecto de las bases C_2 y V es $f_{C_2,V} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{C_2,V}$

c) Se consideran la base $U = \{2, 1+2x, x+x^2\}$ de $\mathbb{P}_2(x)$ y la base canónica $C_1 = \{1, x\}$ de $\mathbb{P}_1(x)$ y se calculan las imágenes de los vectores de U en función de los vectores de C_1

$$\begin{cases} f(2) = 0 \\ f(1+2x) = 4 \\ f(x+x^2) = 2+4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0\cdot 1 + 0\cdot x \Rightarrow f(2) = (0,0)_{C_1} \\ 4 = 4\cdot 1 + 0\cdot x \Rightarrow f(1+2x) = (4,0)_{C_1} \\ 2+4x = 2\cdot 1 + 4\cdot x \Rightarrow f(x+x^2) = (2,4)_{C_1} \end{cases}$$

En este caso la matriz de f respecto de las bases U y C_1 es $f_{U,C_1} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}_{U,C_1}$

d) Se consideran la base $U = \{2, 1+2x, x+x^2\}$ de $\mathbb{P}_2(x)$ y la base $V = \{x, x-2\}$ de $\mathbb{P}_1(x)$ y se calculan las imágenes de los vectores de U en función de los vectores de V

$$\begin{cases} f(2) = 0 \\ f(1+2x) = 4 \\ f(x+x^2) = 2+4x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 0 = 0\cdot x + 0\cdot (x-2) \Rightarrow f(2) = (0,0)_V \\ 4 = a\cdot x + b\cdot (x-2) \Rightarrow a = 2, b = -2 \Rightarrow f(1+2x) = (2,-2)_V \\ 2+4x = a\cdot x + b\cdot (x-2) \Rightarrow a = 5, b = -1 \Rightarrow f(x+x^2) = (5,-1)_V \end{cases}$$

Por tanto la matriz de f respecto de las bases U y V es $f_{U,V} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}_{U,V}$

P8. Sea la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y) = (x-y, 0, y-x)$

a) Calcular la matriz de la aplicación respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ y a partir de esa matriz determinar $Ker(f)$.

b) Calcular la matriz de la aplicación respecto de las bases $A = \{(1,-1),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $B = \{(0,1,1),(2,1,0),(-1,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y a partir de esa matriz determinar $Ker(f)$.

c) Comprobar que los núcleos calculados en los dos apartados anteriores son equivalentes.

RESOLUCIÓN

a) Sean las bases canónicas $C_2 = \{(1,0),(0,1)\}$ y $C_3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente. Se hallan las imágenes de los vectores de la base C_2 en función de los vectores de la base C_3

$$\begin{cases} f(1,0) = (1,0,-1) \\ f(0,1) = (-1,0,1) \end{cases}$$

Entonces, la matriz de la aplicación f respecto a las bases canonicas es

$$f_{C_2,C_3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{C_2,C_3}$$

A partir de esta matriz se determina el núcleo de la aplicación

$$Ker(f) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid f(\vec{x}) = (0,0,0)\}$$

Considerando el vector genérico $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(\vec{x}) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Por tanto, $Ker(f) = \{(x_1, x_1) = x_1(1,1)\}$ siendo $B = \{(1,1)\}$ una base del núcleo y su dimensión 1.

b) Se calculan las imágenes de los vectores de la base $A = \{(1,-1), (2,1)\}$ y se expresan como combinación lineal de los vectores de la base B

$$f(1,-1) = (2,0,-2)_{C_3} \Rightarrow (2,0,-2) = a(0,1,1) + b(2,1,0) + c(-1,0,1)$$

$$\Rightarrow a = b = 0, c = -2 \Rightarrow f(1,-1) = (0,0,-2)_B$$

$$f(2,1) = (1,0,-1)_{C_3} \Rightarrow (1,0,-1) = a(0,1,1) + b(2,1,0) + c(-1,0,1)$$

$$\Rightarrow a = b = 0, c = -1 \Rightarrow f(2,1) = (0,0,-1)_B$$

Entonces, la matriz de la aplicación f respecto a las bases A y B es

$$f_{A,B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}_{A,B}$$

Utilizando esta matriz se calcula el núcleo de f

$$Ker(f) = \{\vec{z} \in \mathbb{R}^2 \mid f(\vec{z}) = (0,0,0)\}$$

Sea $\vec{z} = (z_1, z_2)$ un vector genérico de $\mathbb{R}^2$

$$f(\vec{z}) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -2z_1 - z_2 = 0 \Rightarrow z_2 = -2z_1$$

Por tanto $Ker(f) = \{(z_1, -2z_1) = z_1(1,-2)\}$ siendo $B' = \{(1,-2)\}$ una base del mismo y su dimensión 1.

c) Se va a comprobar que los núcleos calculados en los apartados a) y b) son equivalentes, aunque a simple vista parezca que son distintos. Esto es debido a que en el apartado a) el núcleo está expresado en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y en el apartado b) está expresado en la base A de $\mathbb{R}^2$. Considérese el vector $(1,-2)$ de la base de $Ker(f)$ calculado en el apartado b). Este vector está expresado en la base A. Realizando el cambio de base a la base canónica se obtiene lo siguiente

$$(1,-2)_A = 1 \cdot (1,-1) + (-2) \cdot (2,1) = (-3,-3)_{C_2}$$

El vector $(-3,-3)$ es proporcional al vector $(1,1)$, que es el vector obtenido como base del núcleo en el apartado a). Entonces los subespacios engendrados por ellos coinciden, es decir, los núcleos obtenidos en los dos apartados anteriores son iguales.

P9. Sean las aplicaciones lineales $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, g: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ y $h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definidas por $f(x,y,z) = (2x+y, x+z, 2z, x+2y)$, $g(x,y,z,t) = (x+y+z, x+2z, y+2t)$ y $h(x,y,z) = (x,y,y-z)$.

Calcular cuando sea posible la matriz y las ecuaciones implícitas de las siguientes aplicaciones lineales respecto de las bases canónicas:

a) fog

b) $fogoh$

c) $fohog$

RESOLUCIÓN

a) $fog: \mathbb{R}^4 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^4$

Para calcular la matriz de la aplicación composición fog basta multiplicar las matrices de las aplicaciones f y g. Por tanto se calcula la matriz de cada una de las aplicaciones y la matriz de la composición

$$\begin{cases} f(1,0,0) = (2,1,0,1) \\ f(0,1,0) = (1,0,0,2) \\ f(0,0,1) = (0,1,2,0) \end{cases} \Rightarrow f_{C_3,C_4} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{C_3,C_4}$$

$$\begin{cases} g(1,0,0,0) = (1,1,0) \\ g(0,1,0,0) = (1,0,1) \\ g(0,0,1,0) = (1,2,0) \\ g(0,0,0,1) = (0,0,2) \end{cases} \Rightarrow g_{C_4,C_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{C_4,C_3}$$

$$fog_{C,C} = f_{C,C} \cdot g_{C,C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}_{C_4,C_4}$$

Para calcular las ecuaciones de la aplicación lineal se multiplica la matriz por un vector genérico de $\mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \\ 2x_2 + 4x_4 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}$$

Por tanto las ecuaciones de la aplicación fog son

$$fog(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1 + 2x_2 + 4x_3, x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4, 2x_2 + 4x_4,$$
$$3x_1 + x_2 + 5x_3)$$

Otra forma de resolver este apartado es utilizar la definición de aplicación lineal
Sea el vector $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, entonces

$$(fog)(\vec{x}) = f(g(\vec{x})) = f(x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 2x_3, x_2 + 2x_4)$$

$$(fog)(\vec{x}) = (2(x_1 + x_2 + x_3) + (x_1 + 2x_3), (x_1 + x_2 + x_3) + (x_2 + 2x_4), 2(x_2 + 2x_4),$$
$$(x_1 + x_2 + x_3) + 2(x_1 + 2x_3))$$

$$(fog)(\vec{x}) = (3x_1 + 2x_2 + 4x_3, x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4, 2x_2 + 4x_4, 3x_1 + x_2 + 5x_3)$$

b) No se puede realizar la composición dado que el espacio vectorial de origen de la aplicación g no coincide con el espacio vectorial de llegada de la aplicación h.

c) $fohog : \mathbb{R}^4 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{h} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^4$

Al igual que en el primer apartado, para obtener la matriz de la composición basta multiplicar las matrices de las tres aplicaciones del primer apartado se tiene

$$f_{C_3,C_4} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{C_3,C_4} \qquad g_{C_4,C_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{C_4,C_3}$$

A continuación se obtiene la matriz correspondiente a la aplicación h

$$\left\{ \begin{array}{l} h(1,0,0) = (1,0,0) \\ h(0,1,0) = (0,1,1) \\ h(0,0,1) = (0,0,-1) \end{array} \right. \Rightarrow h_{C_3,C_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}_{C_3,C_3}$$

Entonces, procediendo de forma similar la matriz de la composición es:

$$(fohog)_{C_4,C_4} = f_{C_3,C_4} \cdot [h_{C_3,C_3} \cdot g_{C_4,C_3}] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}_{C_4,C_4}$$

Para calcular las ecuaciones del sistema se multiplica la matriz por un vector genérico $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ de $\mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ 2x_1 + 3x_3 - 2x_4 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 4x_4 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}$$

Entonces las ecuaciones de la aplicación $fohog$ son

$$(fohog)(\vec{x}) = (3x_1 + 2x_2 + 4x_3, 2x_1 + 3x_3 - 2x_4, 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 4x_4, 3x_1 + x_2 + 5x_3)$$

P10. Hallar las ecuaciones de la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sabiendo que $f(2,0,1) = (4,1)$, $f(-1,1,0) = (-2,0)$ y $f(1,1,2) = (2,2)$.

RESOLUCIÓN

Se consideran la base canónica de $\mathbb{R}^3$, $C_3 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ donde $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$ y $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ y la base canónica de $\mathbb{R}^2$, $C_2 = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$, siendo $\vec{e}'_1 = (1,0)$ y $\vec{e}'_2 = (0,1)$. El vector $(2,0,1)$ se puede expresar como $2\vec{e}_1 + \vec{e}_3$.

Aplicando las propiedades de las aplicaciones lineales

$$f(2,0,1) = (4,1) \Rightarrow f(2\vec{e}_1 + \vec{e}_3) = 2f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_3) = (4,1)_{C_2}$$

Repitiendo el proceso para los vectores $(-1,1,0)$ y $(1,1,2)$ se obtiene

$$f(-1,1,0) = (-2,0) \Rightarrow f(-\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = -f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_2) = (-2,0)_{C_2}$$

$$f(1,1,2) = (2,2) \Rightarrow f(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) = f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_2) + 2f(\vec{e}_3) = (2,2)_{C_2}$$

Se forma un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas donde las incógnitas son las imágenes de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ expresados en la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} 2f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_3) = (4,1) \\ -f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_2) = (-2,0) \\ f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_2) + 2f(\vec{e}_3) = (2,2) \end{cases}$$

Se resuelve el sistema y se obtiene que $f(\vec{e}_1) = (2,0)$, $f(\vec{e}_2) = (0,0)$ y $f(\vec{e}_3) = (0,1)$. Una vez obtenidos, basta colocar estos vectores en columnas para obtener la matriz de la aplicación

$$f_{C_3,C_2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{C_3,C_2}$$

A partir de esta matriz, se determinan las ecuaciones de la aplicación lineal f

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2x_1 \\ y_2 = x_3 \end{cases} \Rightarrow f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, x_3)$$

P11. Hallar la matriz asociada a la aplicación lineal $f: \mathbb{P}_1(x) \to \mathbb{P}_1(x)$ considerando la base $B = \{2 + x, x - 1\}$ en el espacio vectorial origen y la base canónica en el espacio vectorial destino sabiendo que $f(4x + 2) = x - 2$ y $f(x - 4) = 2x + 1$.

RESOLUCIÓN

Se expresa el vector $4x + 2$ como combinación lineal de los vectores de la base B

$$4x + 2 = a(2 + x) + b(x - 1) \Rightarrow a = 2 \text{ y } b = 2 \ \Rightarrow 4x + 2 = 2(2 + x) + 2(x - 1)$$

Aplicando las propiedades de las aplicaciones lineales

$$f(4x + 2) = f[2(2 + x) + 2(x - 1)] = 2f(2 + x) + 2f(x - 1) = x - 2$$

Se repite el proceso con el vector $x - 4$

$x - 4 = a(2 + x) + b(x - 1) \Rightarrow a = -1$ y $b = 2 \ \Rightarrow x - 4 = -(2 + x) + 2(x - 1)$

Por tanto $f(x - 4) = f[-(2 + x) + 2(x - 1)] = -f(2 + x) + 2f(x - 1) = 2x + 1$

Se forma un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas donde las incógnitas son las imágenes de los vectores de la base B de $\mathbb{P}_1(x)$ expresados en la base canónica del mismo

$$\begin{cases} 2f(2 + x) + 2f(x - 1) = x - 2 \\ -f(2 + x) + 2f(x - 1) = 2x + 1 \end{cases}$$

La solución del sistema es $f(2 + x) = -\frac{1}{3}x - 1$ y $f(x - 1) = \frac{5}{6}x$

Estas imágenes ya están expresadas como combinación lineal de los vectores de la base canónica $\{1, x\}$ del espacio vectorial de llegada $\mathbb{P}_1(x)$. Con lo que la matriz de f en las bases pedidas es

$$f_{B,C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1/3 & 5/6 \end{pmatrix}_{B,C}$$

CUESTIONES RESUELTAS

C1. Sean f un endomorfismo definido en $\mathbb{R}^3$, $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y las imágenes $f(\vec{e}_1) = \vec{u}$, $f(\vec{e}_2) = \vec{v}$, $f(\vec{e}_3) = \vec{u} + \vec{v}$, siendo $\vec{u}$ y $\vec{v}$ linealmente independientes. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) f es inyectiva.

b) f es sobreyectiva.

RESOLUCIÓN

a) Falso. f es inyectiva si y sólo si, $Ker(f) = \{\vec{0}\}$. Véase si se verifica esta igualdad

$$Ker(f) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : f(x_1, x_2, x_3) = \vec{0}\}$$

Para cualquier $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, se cumple

$$(x_1, x_2, x_3) = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$

Como la aplicación f es lineal

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + x_3 f(\vec{e}_3) = x_1\vec{u} + x_2\vec{v} + x_3(\vec{u} + \vec{v}) = (x_1 + x_3)\vec{u} +$$
$$+ (x_2 + x_3)\vec{v}$$

Para que $(x_1, x_2, x_3) \in Ker(f)$, $f(x_1, x_2, x_3) = \vec{0}$. Se plantea esta última igualdad

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3)\vec{u} + (x_2 + x_3)\vec{v} = \vec{0}$$

Dado que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes y por tanto no nulos, se tiene que

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = -x_3$$

Por lo que los vectores del núcleo son de la forma

$$Ker(f) = \{(-x_3, -x_3, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\} \neq \{\vec{0}\}$$

Y se concluye que la afirmación es falsa.

b) Falso. f es sobreyectiva si y sólo si, $dim\big(Im(f)\big) = dim\ \mathbb{R}^3 = 3$

En el caso particular del endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ las dimensiones verifican

$$dim\ \mathbb{R}^3 = dim\big(Ker(f)\big) + dim\big(Im(f)\big)$$

Del apartado anterior se sabe que $Ker(f) = \{(-x_3, -x_3, x_3): x_3 \in \mathbb{R}\} = \langle(-1,-1,1)\rangle$, y por tanto $dimKer(f) = 1$. Sustituyendo este valor en la ecuación anterior

$$\underbrace{dim\,\mathbb{R}^3}_{=3} = \underbrace{dim\big(Ker(f)\big)}_{=1} + dim\big(Im(f)\big) \Rightarrow dim\big(Im(f)\big) = 2$$

Por lo que la afirmación es falsa.

C2. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Es posible definir una aplicación lineal inyectiva de la forma $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$.

b) Es posible definir una aplicación lineal sobreyectiva de la forma $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$.

c) Es posible definir una aplicación lineal inyectiva de la forma $g: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$.

d) Es posible definir una aplicación lineal sobreyectiva de la forma $g: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$.

RESOLUCIÓN

a) Verdadero. Utilizando la igualdad que relaciona las dimensiones del núcleo, del subespacio imagen y del espacio vectorial de origen de la aplicación lineal f se tiene que

$$dim\,\mathbb{R}^2 = dim\big(Ker(f)\big) + dim\big(Im(f)\big)$$

f es inyectiva si y sólo si, $Ker(f) = \{\vec{0}\}$, o lo que es lo mismo si y sólo si, $dim\big(Ker(f)\big) = 0$. En este caso, la dimensión del subespacio vectorial imagen resulta

$$\underbrace{dim\,\mathbb{R}^2}_{=2} = \underbrace{dim\big(Ker(f)\big)}_{=0} + dim\big(Im(f)\big) \Rightarrow dim\big(Im(f)\big) = 2$$

Debido a que $Im(f)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$, se deberá cumplir que $dim\big(Im(f)\big) \leq dim\,\mathbb{R}^4 = 4$. Esta condición no resulta contradictoria con la igualdad $dim\big(Im(f)\big) = 2$, condición que debe cumplir el subespacio imagen cuando la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ es inyectiva.

b) Falso. f es sobreyectiva si y sólo si, $Im(f) = \mathbb{R}^4$, es decir, $dim\big(Im(f)\big) = 4$.

$$\underbrace{dim\,\mathbb{R}^2}_{=2} = dim\big(Ker(f)\big) + \underbrace{dim\big(Im(f)\big)}_{=4} \Rightarrow 2 = dim\big(Ker(f)\big) + 4 \Rightarrow dim\big(Ker(f)\big) = -2$$

lo cual es absurdo ya que la dimensión de cualquier subespacio vectorial es siempre positiva, $dimKer(f) \geq 0$.

c) Falso. No es posible encontrar una aplicación lineal $g: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ inyectiva. g será inyectiva si y sólo si, $Ker(g) = \{\vec{0}\}$, o lo que es lo mismo, si y sólo si $dim\big(Ker(g)\big) = 0$. De nuevo igualando dimensiones

$$\underbrace{dim\,\mathbb{R}^4}_{=4} = \underbrace{dim\big(Ker(g)\big)}_{=0} + dim(Im(g)) \Rightarrow dim(Im(g)) = 4$$

Como $Im(g)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$, $dim(Im(g)) \leq 2$, lo cual contradice la condición para que la aplicación lineal g sea inyectiva.

d) Verdadero. g será sobreyectiva si y sólo si, $Im(g) = \mathbb{R}^2$, es decir, si y sólo si $dim(Im(g)) = 2$

$$\underbrace{dim\,\mathbb{R}^4}_{=4} = dim\big(Ker(g)\big) + \underbrace{dim(Im(g))}_{=2} \Rightarrow dim\big(Ker(g)\big) = 2$$

Y es posible que esta última igualdad se verifique puesto que $Ker(g)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ y por tanto, $dim\big(Ker(g)\big) \leq 4$.

C3. Sea la siguiente aplicación lineal $f: E \to F$, siendo $dimE = n$ y $dimF = m$, con $n < m$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ es un sistema libre en E, entonces $\{f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_n)\}$ también lo es en F.

b) Si $\{f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_n)\}$ es un sistema libre en F, entonces $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ es libre en E.

RESOLUCIÓN

a) Falso. Se utiliza un contraejemplo para demostrar que la afirmación es falsa.

Considérense $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}^3$ y las bases canónicas de los mismos $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ y $B' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$. Sea la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2, 0)$. El sistema $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ es libre en $\mathbb{R}^2$, pero el sistema $\{f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2)\} = \{(1,1,0), (2,2,0)\}$ no es libre en $\mathbb{R}^3$.

b) Verdadero. Esta afirmación se demuestra mediante reducción al absurdo.

Supóngase que el sistema $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ es ligado siendo el sistema $\{f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_n)\}$ un sistema libre, es decir, que existe algún vector $\vec{u}_i$ que es combinación lineal del resto de vectores del sistema. Supóngase que este vector es el primero

$\vec{u}_1 = \alpha_2 \vec{u}_2 + \alpha_3\, \vec{u}_3 + \cdots + \alpha_n\, \vec{u}_n$ siendo algún $\alpha_i \neq 0$.

Como f es lineal se tiene que $f(\vec{u}_1) = \alpha_2 f(\vec{u}_2) + \alpha_3\, f(\vec{u}_3) + \cdots + \alpha_n f(\,\vec{u}_n)$ siendo algún $\alpha_i \neq 0$. De esta última igualdad se concluye que $f(\vec{u}_1)$ es combinación lineal de los vectores

$\{f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_n)\}$, con lo que el sistema $\{f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_n)\}$ no es libre, lo cual es absurdo. Por tanto, la afirmación es cierta.

EJERCICIOS RESUELTOS CON MATHEMATICA

M1. Indicar si $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por $f(x, y, z) = (2x + y, x - z, -x + 2y + z)$ es una aplicación lineal.

RESOLUCIÓN

```
Remove["Global`*"]
```

Se definen la aplicación f y dos vectores genéricos del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$

```
x = {x1, x2, x3}; y = {y1, y2, y3};
```

```
f[{a_, b_, c_}] = {2 a + b, a - c, -a + 2 b + c};
```

Para que f sea una aplicación lineal se deben verificar las siguientes condiciones

$$\begin{cases} f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \\ f(\alpha\vec{x}) = \alpha f(\vec{x}) \end{cases} \forall\, \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \wedge \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Se comprueba que se cumple la primera condición

```
f[x]
{2 x1 + x2, x1 - x3, -x1 + 2 x2 + x3}
```

```
f[y]
{2 y1 + y2, y1 - y3, -y1 + 2 y2 + y3}
```

```
f[x + y]
{x2 + 2 (x1 + y1) + y2, x1 - x3 + y1 - y3, -x1 + x3 - y1 + 2 (x2 + y2) + y3}
```

```
f[x + y] == f[x] + f[y] // Simplify
True
```

Se comprueba que se cumple la segunda condición

```
f[α * x]
```
```
{2 x1 α + x2 α, x1 α - x3 α, -x1 α + 2 x2 α + x3 α}
```

```
α * f[x]
```
```
{(2 x1 + x2) α, (x1 - x3) α, (-x1 + 2 x2 + x3) α}
```

```
f[α * x] == α * f[x] // Simplify
```
```
True
```

Por tanto f es una aplicación lineal.

M2. Dada la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y,z) = (x - 2y + 2z, x - z)$,

a) Calcular la matriz de la aplicación lineal.

b) Calcular el núcleo de f.

c) Calcular una base de $Im(f)$ y su dimensión.

d) Clasificar la aplicación.

RESOLUCIÓN

```
Remove["Global`*"]
```

a) Se define la aplicación f y se calcula su matriz hallando previamente las imágenes de los vectores de la base canónica

```
f[{x_, y_, z_}] = {x - 2 y + 2 z, x - z};
```

```
fe1 = f[{1, 0, 0}]; fe2 = f[{0, 1, 0}]; fe3 = f[{0, 0, 1}];
```

```
mat = Transpose[{fe1, fe2, fe3}]; MatrixForm[mat]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Para calcular el núcleo de f se define un vector $\vec{x} = (x,y,z) \in Ker(f)$ que cumple, por tanto, que $f(\vec{x}) = \vec{0}$

```
nuc = {x1, x2, x3};
```

```
sol = Solve[f[nuc] == {0, 0}]
```

$$\left\{\left\{x1 \to \frac{2\,x2}{3},\ x3 \to \frac{2\,x2}{3}\right\}\right\}$$

```
nuc = nuc /. Flatten[sol]
```

$$\left\{\frac{2\,x2}{3},\ x2,\ \frac{2\,x2}{3}\right\}$$

Una vez calculada la forma genérica de los vectores del núcleo, se calcula una base del mismo dando cualquier valor no nulo a la variable $x2$

```
basenuc = nuc /. x2 → 1
```

$$\left\{\frac{2}{3},\ 1,\ \frac{2}{3}\right\}$$

Otra forma de resolver este ejercicio es mediante el comando NullSpace, comando que devuelve una base del núcleo

```
basenuc = Flatten[NullSpace[mat]]

{2, 3, 2}
```

La forma genérica del núcleo es

```
nucleo = α * basenuc

{2 α, 3 α, 2 α}
```

c) Para calcular la dimensión de la imagen basta calcular el rango de la matriz de la aplicación

```
dimimag = MatrixRank[mat]

2
```

Se toma un menor no nulo de orden dos de la matriz anterior. Los vectores que forman ese menor son los vectores de la base de la imagen

```
Det[mat[[{1, 2}, {1, 2}]]]
```

```
2
```

$B = \{(1,1),(-2,0)\}$ es una base de $Im(f)$ y $dim\big(Im(f)\big) = 2$. Como $dim\,\mathbb{R}^2 = 2$ y $Im(f) \subseteq \mathbb{R}^2$, se concluye que $Im(f) = \mathbb{R}^2$.

d) Se analizan los siguientes aspectos

- $E = \mathbb{R}^3 \neq \mathrm{F} = \mathbb{R}^2$
- $dim\big(Ker(f)\big) = 1 \neq 0 \Rightarrow f$ no es inyectiva
- $dim(Im(f)\,) = 2 = dim\,\mathbb{R}^2 \Rightarrow f$ es suprayectiva

Por todo ello se deduce que f es un epimorfismo.

M3. Dada la aplicación lineal $f\colon M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definida por $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ a & c+d \end{pmatrix}$,

a) Calcular la matriz de la aplicación respecto a la base canónica de $M_2(\mathbb{R})$

b) Calcular $Ker(f)$ una base y su dimensión.

c) Calcular la dimensión de $Im(f)$.

d) Clasificar f.

RESOLUCIÓN

```
Remove["Global`*"]
```

a) Se define la aplicación f y se calcula la matriz de la aplicación hallando las imágenes de los vectores de la base canónica

```
f[{{a_, b_}, {c_, d_}}] = {{a + b, 0}, {a, c + d}}
```

```
{{a + b, 0}, {a, c + d}}
```

```
fe1 = f[{{1, 0}, {0, 0}}]; fe2 = f[{{0, 1}, {0, 0}}]; fe3 = f[{{0, 0}, {1, 0}}];
fe4 = f[{{0, 0}, {0, 1}}];
```

```
mat = Transpose[{Flatten[fe1], Flatten[fe2], Flatten[fe3], Flatten[fe4]}];
MatrixForm[mat]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Se define un vector de $M_2(\mathbb{R})$ y se calculan las condiciones para que pertenezca a $Ker(f)$

```
ker = {{x1, x2}, {x3, x4}};
```

```
sol = Solve[f[ker] == {{0, 0}, {0, 0}}]
```

```
{{x1 → 0, x2 → 0, x3 → -x4}}
```

```
ker = ker /. sol[[1]]
```

```
{{0, 0}, {-x4, x4}}
```

Una vez calculada la forma genérica de los vectores del núcleo, se obtiene una base del mismo dando cualquier valor no nulo a la variable $x4$

```
bker = ker /. x4 → 1; MatrixForm[bker]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La base del núcleo está formada por un único vector no nulo, por lo que $dim\big(Ker(f)\big) = 1$.

c) Para calcular la dimensión de la imagen basta calcular el rango de la matriz de la aplicación

```
dimimag = MatrixRank[mat]
```

```
3
```

d) f es simplemente un homomorfismo ya que

- $E = \mathrm{F} = M_2(\mathbb{R})$
- $dim\big(Ker(f)\big) = 1 \neq 0 \Rightarrow f$ no es inyectiva
- $dim(Im(f)\,) = 3 \neq 4 = dim(M_2(\mathbb{R})) \Rightarrow \; f$ no es suprayectiva

M4. Sea la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y,z,t) = (2x + y - t, x + z + t, -x - y + z + 2t)$,

a) Calcular el transformado del vector $\vec{v} = (0,4,-1,3)$ respecto a f. ¿Es posible que $\vec{v} \in Ker(f)$?

b) Hallar un vector que respecto a f se transforme en el vector $\vec{w} = (1,4,3)$.

RESOLUCIÓN

```
Remove["Global`*"]
```

a) Se define la aplicación lineal f y se calcula la imagen del vector $\vec{v}$

```
f[{x_, y_, z_, t_}] = {2 x + y - t, x + z + t, -x - y + z + 2 t}
```

```
{-t + 2 x + y, t + x + z, 2 t - x - y + z}
```

```
v = {0, 4, -1, 3}; f[v]
```

```
{1, 2, 1}
```

```
f[v] == {0, 0, 0}
```

```
False
```

El vector $\vec{v}$ no pertenece al núcleo de la aplicación ya que su imagen no es el vector nulo, $f(\vec{v}) \neq \vec{0}$.

b) Se define un vector genérico de $\mathbb{R}^4$ y se obtienen los vectores que se transforman en $\vec{w}$ mediante la aplicación f

```
vector = {x, y, z, t}; w = {1, 4, 3};
```

```
sol = Solve[f[vector] == w]
```

$$\left\{\left\{t \to \frac{7}{3} + \frac{y}{3} - \frac{2 z}{3},\ x \to \frac{5}{3} - \frac{y}{3} - \frac{z}{3}\right\}\right\}$$

```
vector = vector /. sol[[1]]
```

$$\left\{\frac{5}{3}-\frac{y}{3}-\frac{z}{3},\ y,\ z,\ \frac{7}{3}+\frac{y}{3}-\frac{2z}{3}\right\}$$

De los infinitos vectores que se transforman en el vector $\vec{w}$, se toma uno cualquiera dando valores arbitrarios a las variables z e y

```
vector = vector /. {y → -7, z → 0}
{4, -7, 0, 0}
```

M5. Sea la aplicación lineal $f\colon M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$ definida por

$$f\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b+d & c+g \\ d-b & 0 & f+h \\ g-c & h-f & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcular el transformado de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ respecto a f.

b) Calcular la anti-imagen de $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ respecto a f.

RESOLUCIÓN

```
Remove["Global`*"]
```

a) Se define la aplicación f y se calcula la imagen de la matriz A

```
f[{{a_, b_, c_}, {d_, e_, f_}, {g_, h_, i_}}] =
 {{0, b + d, c + g}, {d - b, 0, f + h}, {g - c, h - f, 0}}
{{0, b + d, c + g}, {-b + d, 0, f + h}, {-c + g, -f + h, 0}}
```

```
A = {{1, 2, 0}, {-1, 1, 2}, {4, 0, 1}}; f[A] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Se definen la matriz B y una matriz genérica de dimensión 3x3

```
B = {{0, 3, 5}, {-3, 0, 1}, {3, 1, 0}}; antiimagen = Array[m, {3, 3}];
MatrixForm[antiimagen]
```

$$\begin{pmatrix} m[1,1] & m[1,2] & m[1,3] \\ m[2,1] & m[2,2] & m[2,3] \\ m[3,1] & m[3,2] & m[3,3] \end{pmatrix}$$

Se obtienen las matrices que mediante f se transforman en la matriz B

```
sol = Solve[f[antiimagen] == B]
```

```
{{m[1, 2] → 3, m[2, 1] → 0, m[1, 3] → 1, m[3, 1] → 4, m[2, 3] → 0, m[3, 2] → 1}}
```

```
antiimagen = antiimagen /. sol[[1]]; MatrixForm[antiimagen]
```

$$\begin{pmatrix} m[1,1] & 3 & 1 \\ 0 & m[2,2] & 0 \\ 4 & 1 & m[3,3] \end{pmatrix}$$

Los parámetros $m(1,1)$, $m(2,2)$ y $m(3,3)$ pueden tomar infinitos valores. De las infinitas matrices que se transforman en la matriz B, se toma una cualquiera dando valores arbitrarios a las variables $m(1,1)$, $m(2,2)$ y $m(3,3)$.

```
antiimagen = antiimagen /. {m[1, 1] → 1, m[2, 2] → 10, m[3, 3] → -10};
MatrixForm[antiimagen]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 10 & 0 \\ 4 & 1 & -10 \end{pmatrix}$$

M6. Sean las aplicaciones lineales $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $g: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ y $h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definidas por $f(x,y,z) = (2x+y, x+z, 2z, x+2y)$, $g(x,y,z,t) = (x+y+z, x+2z, y+2t)$ y $h(x,y,z) = (x,y,y-z)$.

Calcular cuando sea posible la matriz y las ecuaciones de las siguientes aplicaciones lineales respecto de las bases canónicas:

a) $fo\ g$.

b) $fog\ oh$.

c) $foh\ og$.

RESOLUCIÓN

```
Remove["Global`*"]
```

a) Se definen las aplicaciones f, g y h

```
f[{x_, y_, z_}] = {2 x + y, x + z, 2 z, x + 2 y};
g[{x_, y_, z_, t_}] = {x + y + z, x + 2 z, y + 2 t};
h[{x_, y_, z_}] = {x, y, y - z};
```

Se calculan las matrices de las tres aplicaciones respecto de las bases canónicas

```
fe1 = f[{1, 0, 0}]; fe2 = f[{0, 1, 0}]; fe3 = f[{0, 0, 1}];
```

```
matf = Transpose[{fe1, fe2, fe3}]; MatrixForm[matf]
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

```
ge1 = g[{1, 0, 0, 0}]; ge2 = g[{0, 1, 0, 0}]; ge3 = g[{0, 0, 1, 0}];
ge4 = g[{0, 0, 0, 1}];
```

```
matg = Transpose[{ge1, ge2, ge3, ge4}]; MatrixForm[matg]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

```
he1 = h[{1, 0, 0}]; he2 = h[{0, 1, 0}]; he3 = h[{0, 0, 1}];
```

```
math = Transpose[{he1, he2, he3}]; MatrixForm[math]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Se calcula la matriz de la aplicación fog multiplicando la matriz de f por la matriz de g

```
matfg = matf.matg
```

```
{{3, 2, 4, 0}, {1, 2, 1, 2}, {0, 2, 0, 4}, {3, 1, 5, 0}}
```

A partir de esta matriz se calculan las ecuaciones de la aplicación fog

```
{y1, y2, y3, y4} = matfg.{x1, x2, x3, x4}

{3 x1 + 2 x2 + 4 x3, x1 + 2 x2 + x3 + 2 x4, 2 x2 + 4 x4, 3 x1 + x2 + 5 x3}
```

Otra forma de hallar las ecuaciones de la aplicación fog es utilizar directamente la definición de composición de aplicaciones lineales

```
f[g[{x1, x2, x3, x4}]] // Simplify

{3 x1 + 2 x2 + 4 x3, x1 + 2 x2 + x3 + 2 x4, 2 (x2 + 2 x4), 3 x1 + x2 + 5 x3}
```

b) Se procede del mismo modo para $fogoh$ comprobándose que no se pueden obtener ni las ecuaciones ni la matriz de la aplicación. Esto es debido a que no se pueden componer las aplicaciones en ese orden ya que el espacio de llegada de h es $\mathbb{R}^3$ y el espacio de origen de g es $\mathbb{R}^4$

```
f[g[h[{x1, x2, x3}]]] // Simplify

f[g[{x1, x2, x2 - x3}]]
```

```
matf.matg.math

Dot::dotsh :
  Tensors {{3, 2, 4, 0}, {1, 2, 1, 2}, {0, 2, 0, 4}, {3, 1, 5, 0}} and {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 1, -1}} have incompatible
        shapes. >>

{{3, 2, 4, 0}, {1, 2, 1, 2}, {0, 2, 0, 4}, {3, 1, 5, 0}}.
 {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 1, -1}}
```

c) Se repite el mismo proceso para la aplicación $fohog$

```
matf.math.matg

{{3, 2, 4, 0}, {2, 0, 3, -2}, {2, -2, 4, -4}, {3, 1, 5, 0}}
```

```
f[h[g[{x1, x2, x3, x4}]]] // Simplify

{3 x1 + 2 x2 + 4 x3, 2 x1 + 3 x3 - 2 x4, 2 (x1 - x2 + 2 x3 - 2 x4), 3 x1 + x2 + 5 x3}
```

M7. Sea la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y) = (x - y, 0, y - x)$.

a) Calcular la matriz de la aplicación f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ y a partir de esa matriz determinar $Ker(f)$.

b) Calcular la matriz de la aplicación respecto de la base $A = \{(1,-1), (2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $B = \{(0,1,1), (2,1,0), (-1,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y a partir de esa matriz determinar $Ker(f)$.

c) Comprobar que los núcleos calculados en los dos apartados anteriores son equivalentes.

RESOLUCIÓN

```
Remove["Global`*"]
```

a) Se calcula la matriz de la aplicación respecto de las bases canónicas

```
f[{x_, y_}] = {x - y, 0, y - x};
```

```
fe1 = f[{1, 0}]; fe2 = f[{0, 1}];
```

```
matcc = Transpose[{fe1, fe2}]; MatrixForm[matcc]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

A partir de esta matriz se obtiene $Ker(f)$ y una base del mismo

```
ker1 = {x1, x2}; sol = Solve[matcc.ker1 == {0, 0, 0}]
{{x1 → x2}}
```

```
ker1 = ker1 /. Flatten[sol]
{x2, x2}
```

```
bker1 = ker1 /. x2 → 1
{1, 1}
```

Una base del núcleo respecto de la base canónica es $D = \{(1,1)\}$.

b) Se calcula la matriz de la aplicación respecto de las bases A y B

```
a1 = {1, -1}; a2 = {2, 1}; b1 = {0, 1, 1}; b2 = {2, 1, 0};
b3 = {-1, 0, 1};
```

```
fa1 = f[a1]
```

```
{2, 0, -2}
```

```
sol = Solve[fa1 == α * b1 + β * b2 + γ * b3, {α, β, γ}]
```

```
{{α → 0, β → 0, γ → -2}}
```

```
fa1baseb = {α, β, γ} /. sol[[1]]
```

```
{0, 0, -2}
```

```
fa2 = f[a2]
```

```
{1, 0, -1}
```

```
sol = Solve[fa2 == α * b1 + β * b2 + γ * b3, {α, β, γ}]
```

```
{{α → 0, β → 0, γ → -1}}
```

```
fa2baseb = {α, β, γ} /. sol[[1]]
```

```
{0, 0, -1}
```

```
matab = Transpose[{fa1baseb, fa2baseb}]; MatrixForm[matab]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

A partir de esta matriz se obtiene $Ker(f)$ y una base del mismo

```
ker2 = {x1, x2}; sol = Solve[matab.ker2 == {0, 0, 0}]
```

$$\left\{\left\{x1 \to -\frac{x2}{2}\right\}\right\}$$

```
ker2 = ker2 /. Flatten[sol]
```

$$\left\{-\frac{x2}{2}, x2\right\}$$

```
bker2 = ker2 /. x2 → -2
{1, -2}
```

Una base de $Ker(f)$ calculada respecto de las bases A y B es $D' = \{(1,-2)\}$.

c) Se comprueba que la base del núcleo obtenida en el segundo apartado es equivalente a la base del núcleo obtenida en el primer apartado, ya que el vector de la base D'está expresado respecto a la base A y el vector de la base D respecto de la base canónica. Para comprobarlo, se lleva a cabo un cambio de base del vector de la base D', obteniendo sus coordenadas respecto a la base canónica

```
baseker2canonica = 1 * a1 + (-2) * a2
{-3, -3}
```

```
baseker2canonica == (-3) * baseker1
True
```

El vector $(-3,-3)$ es proporcional al vector (1,1). Por tanto, los subespacios generados por ambos son iguales, y los núcleos obtenidos en los dos apartados coinciden.

5 DIAGONALIZACIÓN

5.1 Vector y valor propio

Definición: Sean $((E,+),(K,+,\cdot),\circ)$ un espacio vectorial y f un endomorfismo en E. Se dice que un vector no nulo $\vec{x} \in E$ es un vector propio o autovector de f, si existe un escalar $\lambda \in K$ tal que $f(\vec{x}) = \lambda\,\vec{x}$. Al escalar λ se le llama valor propio o autovalor de f asociado al vector propio $\vec{x}$.

Sea A la matriz asociada al endomorfismo f, entonces se cumple que $f(\vec{x}) = A\vec{x}$. También se dice que $\vec{x} \in E$ es un vector propio de A, si existe un escalar $\lambda \in K$ tal que $A\vec{x} = \lambda\,\vec{x}$.

5.2 Propiedades de los vectores propios

Sean $((E,+),(K,+,\cdot),\circ)$ un espacio vectorial y f un endomorfismo en E. Entonces

- Un vector propio de f está asociado a un único valor propio, o lo que es lo mismo, si $\vec{x} \in E$ es un vector propio de f asociado a dos valores propios $\lambda, \mu \in K$, entonces $\lambda = \mu$.
- Si $\vec{x} \in E$ es un vector propio de f asociado al valor propio $\lambda \in K$, cualquier vector $(\delta\,\vec{x}) \in E$ es un vector propio de f asociado al mismo valor propio λ.
- Cualquier valor propio $\lambda \in K$ tiene asociados infinitos autovectores de f.
- Los vectores propios de f asociados al valor propio $\lambda \in K$ constituyen un subespacio vectorial que se denota por E_λ y se denomina subespacio propio asociado a λ:

  $$E_\lambda = \{\,\vec{x} \in E : f(\,\vec{x}) = \lambda\,\vec{x}\}$$

  o lo que es lo mismo

  $$E_\lambda = \left\{\,\vec{x} \in E : (f-\lambda i)(\,\vec{x}) = \vec{0}\right\} = Ker(f-\lambda i)$$

  siendo i la aplicación lineal identidad $i(\,\vec{x}) = \,\vec{x}$.
- Los vectores propios de f asociados a distintos valores propios son linealmente independientes.

5.3 Cálculo de valores y vectores propios

Sean $\left((\boldsymbol{E},+),(\boldsymbol{K},+,\cdot),\circ\right)$ un espacio vectorial de dimensión finita $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{f}$ un endomorfismo definido en $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{U}=\{\vec{\boldsymbol{u}}_{\mathbf{1}},\vec{\boldsymbol{u}}_{\mathbf{2}},\dots,\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{n}}\}$ una base del mismo. Sea $\vec{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{E}$ un vector propio de $\boldsymbol{f}$ asociado el valor propio $\boldsymbol{\lambda}$, por tanto

$$\boldsymbol{f}(\vec{\boldsymbol{x}})=\boldsymbol{\lambda}\,\vec{\boldsymbol{x}},\quad \text{siendo } \vec{\boldsymbol{x}}\neq\vec{\mathbf{0}}$$

Expresado matricialmente $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{U},\boldsymbol{U}}\cdot(\vec{\boldsymbol{x}})_{\boldsymbol{U}}=\boldsymbol{\lambda}(\vec{\boldsymbol{x}})_{\boldsymbol{U}}$, siendo $\mathbf{f}_{\mathbf{U},\mathbf{U}}$ la matriz asociada a $\boldsymbol{f}$.

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n}\\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn}\end{pmatrix}_{U,U}\cdot\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}_U=\lambda\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}_U$$

Esta igualdad equivale al sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{cases}(f_{11}-\lambda)x_1+f_{12}x_2+\cdots+f_{1n}x_n=0\\ f_{21}x_1+(f_{22}-\lambda)x_2+\cdots+f_{2n}x_n=0\\ \qquad\vdots\\ f_{n1}x_1+f_{n2}x_2+\cdots+(f_{nn}-\lambda)x_n=0\end{cases}$$

Como $\vec{x}$ es una solución no trivial del sistema homogéneo anterior, debe verificarse que:

$$\begin{vmatrix} f_{11}-\lambda & f_{12} & \cdots & \cdots & f_{1n}\\ f_{21} & f_{22}-\lambda & \cdots & \cdots & f_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & \cdots & f_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=0$$

Esta igualdad se denomina ecuación característica y el determinante polinomio característico del endomorfismo f y se representa por $P_f(\lambda)$:

$$P_f(\lambda)=\begin{vmatrix} f_{11}-\lambda & f_{12} & \cdots & \cdots & f_{1n}\\ f_{21} & f_{22}-\lambda & \cdots & \cdots & f_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & \cdots & f_{nn}-\lambda\end{vmatrix}$$

Los valores propios del endomorfismo f son las raíces $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_r\in K$ del polinomio $P_f(\lambda)$ y los vectores propios asociados a los valores propios λ_i son los vectores $\vec{x}_i$ que cumplen $f(\vec{x}_i)=\lambda_i\vec{x}_i$.

Definición: Se llama multiplicidad algebraica de un autovalor λ, al orden de multiplicidad que tiene en la ecuación característica y se denota por $m_a(\lambda)$.

Definición: Se llama multiplicidad geométrica de un autovalor λ, a la dimensión del subespacio propio asociado al mismo, E_λ, y se denota por $m_g(\lambda)$.

Proposición: Si λ es un autovalor de f entonces se verifica que:

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$$

5.4 Endomorfismo diagonalizable

Definición: Se dice que dos matrices A y B de dimensión n son semejantes si existe una matriz regular P tal que $B = P^{-1}AP$.

Proposición: Si A y B son dos matrices semejantes, entonces:

- $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$
- $|A| = |B|$
- $tr(A) = tr(B)$, donde tr denota la traza de la matriz, es decir, la suma de los elementos de su diagonal principal.

Definición: Se dice que un endomorfismo es diagonalizable si su matriz asociada A es semejante a una matriz diagonal, es decir, si existen una matriz regular P y una matriz diagonal D tales que:

$$D = P^{-1}AP$$

Definición: Se dice que un endomorfismo f definido en el espacio vectorial E es diagonalizable si existe una base de E respecto de la cual su matriz asociada es diagonal. Esta base es la formada por vectores propios linealmente independientes de f.

Teorema: Un endomorfismo f definido en un espacio vectorial de dimensión finita E es diagonalizable si y sólo si, la suma de las dimensiones de los núcleos de las aplicaciones $(f - \lambda_j i)$, para $j = 1, 2, \ldots, r$ coincide con la dimensión de E, siendo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in K$ los valores propios del endomorfismo:

$$dim\big(Ker(f - \lambda_1 i)\big) + dim\big(Ker(f - \lambda_2 i)\big) + \cdots + dim\big(Ker(f - \lambda_r i)\big) = dim\ (E)$$

Teorema: Sean $\big((E, +), (K, +, \cdot), \circ\big)$ un espacio vectorial de dimensión finita n y f un endomorfismo definido en E. El endomorfismo f es diagonalizable si y sólo si, se verifica que:

- El polinomio característico $P_f(\lambda)$ se descompone completamente en K.
- Para cada autovalor λ_j, su multiplicidad algebraica coincide con su multiplicidad geométrica, es decir, con la dimensión del subespacio vectorial $Ker\big(f - \lambda_j i\big)$.

- Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in K$ los autovalores de f con multiplicidad algebraica $m_a(\lambda_1), m_a(\lambda_2), \ldots, m_a(\lambda_r)$ siendo sus respectivas multiplicidades geométricas $m_g(\lambda_1), m_g(\lambda_2), \ldots, m_g(\lambda_r)$, entonces f es diagonalizable si y sólo si:

$$\begin{cases} m_a(\lambda_1) + m_a(\lambda_2) + \cdots + m_a(\lambda_r) = n \\ m_a(\lambda_j) = m_g(\lambda_j) \text{ para } j = 1, 2, \ldots, r \end{cases}$$

Observación: Un endomorfismo f con n autovalores distintos siempre es diagonalizable, puesto que verifica las dos condiciones anteriores.

5.5 Endomorfismo simétrico

Definición: Se dice que un endomorfismo f definido en el espacio vectorial E es simétrico si:

$$f(\vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot f(\vec{y}), \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in E$$

Definición: Se dice que un endomorfismo f es simétrico si su matriz asociada es simétrica.

5.6 Diagonalización de un endomorfismo simétrico

Definición: Se dice que la matriz $A \in M_n$ es diagonalizable ortogonalmente, si existen una matriz ortogonal real P y una matriz diagonal D tales que:

$$D = P^{-1}AP = P^t AP$$

Teorema: Sean E un espacio vectorial de dimensión n y f un endomorfismo simétrico definido en E, entonces f tiene n autovalores reales.

Teorema: Sean E un espacio vectorial de dimensión n y f un endomorfismo simétrico definido en E, entonces los autovectores de f asociados a distintos autovalores son ortogonales dos a dos.

Teorema: Un endomorfismo f es diagonalizable ortogonalmente si y sólo si, es simétrico.

Teorema: Sea E un espacio vectorial de dimensión n y sea f un endomorfismo simétrico definido en E. Entonces, es posible generar una base ortonormal de E formada por los vectores propios de f. Esta base ortonormal es la unión de las bases ortonormales de los subespacios propios asociados a los valores propios de f.

5.7 Forma canónica de Jordan

Definición: Se denomina matriz elemental o bloque elemental de Jordan de orden m asociado al autovalor λ y se denota por $J(\lambda)$, a una matriz de orden mxm cuyos elementos son nulos exceptuando los elementos situados en la diagonal principal y en la diagonal superior, que toman los valores λ y 1 respectivamente.

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}_{mxm}$$

Definición: Se dice que la matriz J es una matriz de Jordan o una forma canónica de Jordan si es diagonal por bloques, es decir, si existen los bloques elementales de Jordan $J(\lambda_1)$, $J(\lambda_2), \dots, J(\lambda_s)$ para los que:

$$J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & & & \\ & J(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

Construcción de la forma canónica de Jordan

Sean $\big((E,+),(K,+,\cdot),\circ\big)$ un espacio vectorial, $f: E \to E$ un endomorfismo y A su matriz asociada, siendo $K = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{Q}$ o $K = \mathbb{C}$. Debido a que el endomorfismo f no es siempre diagonalizable, no siempre es posible encontrar una matriz diagonal D y una matriz regular P tales que $D = P^{-1}AP$. En alguno de estos casos es posible hallar una matriz de Jordan J y una matriz regular P tales que $J = P^{-1}AP$. Nótese que si $K = \mathbb{C}$, esto siempre es posible.

Proposición: Sea $f: E \to E$ un endomorfismo siendo E un espacio vectorial de dimensión n y sea λ un autovalor de multiplicidad algebraica $m_a(\lambda)$.

Supóngase que $m_g(\lambda) = dim\, E_\lambda < m_a(\lambda)$, entonces existe $p \in \mathbb{N}$ tal que:

$$E_\lambda \subsetneq E_\lambda^2 \subsetneq \cdots \subsetneq E_\lambda^p = E_\lambda^{p+1}, \text{ siendo } E_\lambda^j = Ker(f - \lambda i)^j.$$

Además $\forall q \in \mathbb{N}: q > \tilde{p} \Rightarrow E_\lambda^{\tilde{p}} = E_\lambda^q$.

Las dimensiones de la cadena de subespacios anterior verifican que:

$$dim\, E_\lambda < dim\, E_\lambda^2 < \cdots < dim\, E_\lambda^p = m_a(\lambda)$$

Destacar que la dimensión del último subespacio de la cadena, E_λ^p, coincide con la multiplicidad algebraica del autovalor λ, es decir, $dim\, E_\lambda^p = m_a(\lambda)$. Este subespacio se llama autoespacio máximo asociado a λ.

Teorema: Sean $f: E \to E$ un endomorfismo y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ autovalores del mismo. Entonces, para cada subespacio E_{λ_k}, la aplicación lineal $f|_{E_{\lambda_k}}: E_{\lambda_k} \to E_{\lambda_k}$ admite una base $B(\lambda_k)$ tal que la matriz asociada a $f|_{E_{\lambda_k}}$ con respecto a esta base es una matriz de Jordan; el conjunto de vectores $B = B(\lambda_1) \cup B(\lambda_2) \cup \ldots \cup B(\lambda_s)$ forma una base de E denominada base de Jordan, siendo la matriz asociada a f con respecto a dicha base la forma canónica de Jordan:

$$J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & & & \\ & J(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

La matriz P se obtiene colocando las coordenadas de los vectores de la base de Jordan por columnas verificándose que $J = P^{-1}AP$.

Algoritmo para la obtención de la forma canónica de Jordan

Sean $((E,+),(K,+,\cdot),\circ)$ un espacio vectorial, $f: E \to E$ un endomorfismo y A su matriz asociada, siendo $K = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{Q}$ o $K = \mathbb{C}$. El proceso para hallar la forma canónica de Jordan J tal que $J = P^{-1}AP$ consiste en los siguientes pasos:

1.- Se calculan los autovalores de A: se obtienen las raíces del polinomio característico $|A - \lambda I|$ y sus respectivas multiplicidades algebraicas. Supóngase que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s \in K$ son los autovalores de A siendo $m_a(\lambda_1), m_a(\lambda_2), \ldots, m_a(\lambda_s)$ sus respectivas multiplicidades algebraicas.

2.- Para cada autovalor λ_k $\forall k = 1, 2, \ldots, s$ se calcula el subespacio propio E_{λ_k}. Se sabe que la multiplicidad geométrica de cualquier autovalor es siempre menor o igual que la multiplicidad algebraica del mismo, $m_g(\lambda_k) \leq m_a(\lambda_k)$, por lo que se deben diferenciar dos casos particulares:

2.1.- Si $m_g(\lambda_k) = m_a(\lambda_k) \Rightarrow$ Existen $m_a(\lambda_k)$ autovectores linealmente independientes que forman la base de Jordan $B(\lambda_k)$, siendo la matriz de Jordan correspondiente una matriz diagonal:

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix}_{m_a(\lambda_k) \mathrm{x} m_a(\lambda_k)}$$

2.2.- Si $m_g(\lambda_k) < m_a(\lambda_k) \Rightarrow$ Existen $m_g(\lambda_k)$ bloques elementales de Jordan asociados al autovalor λ_k. Se calcula la cadena de subespacios $E_{\lambda_k}^{j} = Ker(f - \lambda_k i)^j$ siendo $k = 1, 2, \ldots, s$, que verifica:

$$E_{\lambda_k} \subsetneq E_{\lambda_k}^{2} \subsetneq \cdots \subsetneq E_{\lambda_k}^{p_k} = E_{\lambda_k}^{p_k+1}, \text{ para } k = 1, 2, \ldots, s$$

y se sigue el siguiente proceso:

a) Se calcula la diferencia entre las dimensiones de los subespacios $E_{\lambda_k}^{p_k}$ y $E_{\lambda_k}^{p_k-1}$, $q_{p_k} = dim\, E_{\lambda_k}^{p_k} - dim\, E_{\lambda_k}^{p_k-1}$ que es el número de vectores linealmente independientes en $E_{\lambda_k}^{p_k} - E_{\lambda_k}^{p_k-1}$. Es decir, q_{p_k} es el número de vectores linealmente independientes que pertenecen al subespacio $E_{\lambda_k}^{p_k}$ pero no pertenecen al subespacio $E_{\lambda_k}^{p_k-1}$. Resaltar que estos vectores forman una base del subespacio vectorial $E_{\lambda_k}^{p_k} - E_{\lambda_k}^{p_k-1}$. Sea dicha base $\tilde{B} = \left\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{q_{p_k}}\right\}$.

Para cada vector de esta base se obtiene un bloque elemental de Jordan de orden p_k y autovalor λ_k, por lo que en total se construyen q_{p_k} bloques elementales de Jordan de autovalor λ_k y dimensión p_kxp_k.

Cada uno de estos bloques elementales de Jordan se construye mediante las sucesivas imágenes de cada vector de la base $\tilde{B}$ respecto la aplicación $(f - \lambda_k i)$.

De esta forma para cada $j = 1, 2, \ldots, q_{p_k}$ se obtiene el siguiente conjunto de p_k vectores:

$$B_{p_k}^{j}(\lambda_k) = \left\{\vec{u}_j^{\,p_k-1} = (A - \lambda_k I) \cdot \vec{u}_j^{\,p_k-2}, \ldots, \vec{u}_j^{\,2} = (A - \lambda_k I) \cdot \vec{u}_j^{\,1}, \vec{u}_j^{\,1} = (A - \lambda_k I) \cdot \vec{u}_j, \vec{u}_j\right\}$$

Obsérvese que:

$$(A - \lambda_k I)\vec{u}_j^{\,p_k-1} = (A - \lambda_k I)^2\vec{u}_j^{\,p_k-2} = \ldots = (A - \lambda_k I)^{p_k}\vec{u}_j \xRightarrow{\vec{u}_j \in E_{\lambda_k}^{p_k}} (A - \lambda_k I)\vec{u}_j^{\,p_k-1} = 0$$

$$\Rightarrow A\vec{u}_j^{\,p_k-1} = \lambda_k \vec{u}_j^{\,p_k-1} \Rightarrow \vec{u}_j^{\,p_k-1} \in E_{\lambda_k}$$

$$(A - \lambda_k I)^2\, \vec{u}_j^{\,p_k-2} = \cdots = (A - \lambda_k I)^{p_k}\vec{u}_j \xRightarrow{\vec{u}_j \in E_{\lambda_k}^{p_k}} (A - \lambda_k I)^2\, \vec{u}_j^{\,p_k-2} = 0 \Rightarrow \vec{u}_j^{\,p_k-2} \in E_{\lambda_k}^{2}$$

Análogamente se obtiene el vector $\vec{u}_j^{\,1} \in E_{\lambda_k}^{p_k-1}$.

Por otro lado, se puede demostrar que $u_j^{\,1} \notin E_{\lambda_k}^{p_k-2}$ por reducción al absurdo. Supóngase que:

$$\vec{u}_j^{\,1} \in E_{\lambda_k}^{p_k-2} \Rightarrow (A - \lambda_k I)^{p_k-2}\vec{u}_j^{\,1} = 0 \xRightarrow{\vec{u}_j^{\,1} = (A-\lambda_k I)\cdot \vec{u}_j} (A - \lambda_k I)^{p_k-1}\vec{u}_j = 0 \Rightarrow \vec{u}_j \in E_{\lambda_k}^{p_k-1}$$

lo cual es absurdo dado que el vector $\vec{u}_j$ pertenece al subespacio $E_{\lambda_k}^{p_k} - E_{\lambda_k}^{p_k-1}$.

De forma similar se puede comprobar que $u_j{}^2 \notin E_{\lambda_k}^{p_k-3}, \dots, \vec{u}_j{}^{p_k-2} \notin E_{\lambda_k}$.

En conclusión se puede asegurar que los vectores del conjunto $B_{p_k}^j(\lambda_k)$ cumplen lo siguiente:

$$\vec{u}_j{}^{p_k-1} \in E_{\lambda_k},\ \vec{u}_j{}^{p_k-2} \in E_{\lambda_k}^2 - E_{\lambda_k}, \dots, \vec{u}_j{}^2 \in E_{\lambda_k}^{p_k-2} - E_{\lambda_k}^{p_k-3}, \vec{u}_j{}^1 \in\ E_{\lambda_k}^{p_k-1} - E_{\lambda_k}^{p_k-2},$$

$$\vec{u}_j \in E_{\lambda_k}^{p_k} - E_{\lambda_k}^{p_k-1}$$

siendo el bloque elemental de Jordan correspondiente a cada uno de los conjunto $B_{p_k}^j(\lambda_k)$:

$$J_j = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix}_{p_k x p_k}$$

La unión de todos estos conjuntos, $B_{p_k}^1(\lambda_k) \cup B_{p_k}^2(\lambda_k) \cup \dots B_{p_k}^{q_{p_k}}(\lambda_k)$, formará una parte de la base de Jordan.

b) Se calcula la diferencia $dim\, E_{\lambda_k}^{p_k-1} - dim\, E_{\lambda_k}^{p_k-2}$. Al igual que en el apartado anterior, esta diferencia es el número de vectores linealmente independientes en el subespacio $E_{\lambda_k}^{p_k-1} - E_{\lambda_k}^{p_k-2}$.

Dado que en el apartado a) se obtienen q_{p_k} vectores pertenecientes a dicho subespacio, uno por cada vector de la base $\tilde{B} = \left\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{q_{p_k}}\right\}$, basta seleccionar $q_{p_k-1} = dim\, E_{\lambda_k}^{p_k-1} - dim\, E_{\lambda_k}^{p_k-2} - q_{p_k}$ vectores. Estos vectores además de pertenecer al subespacio $E_{\lambda_k}^{p_k-1}$ y no pertenecer al subespacio $E_{\lambda_k}^{p_k-2}$ deben ser linealmente independientes entre sí y respecto del sistema de vectores $B_{p_k}^1(\lambda_k) \cup B_{p_k}^2(\lambda_k) \cup \dots B_{p_k}^{q_{p_k}}(\lambda_k)$ construido hasta el momento.

Procediendo de forma similar al apartado a), es decir, calculando las sucesivas imágenes de cada uno de los nuevos vectores seleccionados mediante la aplicación $(f - \lambda_k i)$, se obtiene un bloque elemental de Jordan de orden $p_k - 1$ con autovalor λ_k.

c) Se realiza el procedimiento del apartado b) hasta el subespacio E_{λ_k}, donde se eligen, si es posible, los vectores que junto con todos los anteriores formarán una base $B(\lambda_k)$ del autoespacio máximo $E_{\lambda_k}^{p_k}$.

EJERCICIOS RESUELTOS

P1. Calcular los valores y vectores propios del endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada en una determinada base es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

RESOLUCIÓN

Se calcula el polinomio característico del endomorfismo f

$$P_f(\lambda) = |A - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda - 5$$

Se resuelve la ecuación característica $P_f(\lambda) = 0$ y se obtienen los valores propios de f

$$-\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda - 5 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - \sqrt{5})(\lambda + \sqrt{5}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = +\sqrt{5} \\ \lambda_3 = -\sqrt{5} \end{cases}$$

Para cada valor propio, se calculan los vectores propios asociados. Para calcular los vectores propios asociados al valor propio $\lambda_1 = 1$, basta resolver el sistema de ecuaciones $(A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0}$, donde $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$(A - I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0, x = -z, \ \ \forall z \in \mathbb{R}$$

Los vectores propios asociados al valor propio $\lambda_1 = 1$ forman el subespacio vectorial

$$E_{\lambda_1} = \{(x, y, z) : x = -z, y = 0\} = \{(-z, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} = \langle (-1,0,1) \rangle$$

Los vectores propios asociados al valor propio $\lambda_2 = +\sqrt{5}$, se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones $(A - \lambda_2 I)\vec{v} = \vec{0}$, donde $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$(A - \sqrt{5}I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} & 1 & 0 \\ 2 & -1-\sqrt{5} & 2 \\ 0 & 1 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (1-\sqrt{5})x + y = 0 \\ 2x + (-1-\sqrt{5})y + 2z = 0 \\ y + (1-\sqrt{5})z = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -(1-\sqrt{5})z,\ x = z\ \ \forall z \in \mathbb{R}$$

Por lo que los vectores propios asociados al valor propio $\lambda_2 = +\sqrt{5}$ forman el subespacio vectorial

$$E_{\lambda_2} = \{(x,y,z): x = z, y = -(1-\sqrt{5})z\} = \{(z,(-1+\sqrt{5})z,z): z \in \mathbb{R}\} = \langle(1,-1+\sqrt{5},1)\rangle$$

Procediendo de forma similar se obtienen los autovectores asociados a $\lambda_3 = -\sqrt{5}$

$$(A+\sqrt{5}I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 1 & 0 \\ 2 & -1+\sqrt{5} & 2 \\ 0 & 1 & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (1+\sqrt{5})x + y = 0 \\ 2x + (-1+\sqrt{5})y + 2z = 0 \\ y + (1+\sqrt{5})z = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -(1+\sqrt{5})z,\ x = z\ \ \forall z \in \mathbb{R}$$

Los vectores propios asociados al valor propio $\lambda_3 = -\sqrt{5}$ forman el subespacio vectorial

$$E_{\lambda_3} = \{(x,y,z): x = z, y = -(1+\sqrt{5})z\} = \{(z,(-1-\sqrt{5})z,z): z \in \mathbb{R}\} = \langle(1,-1-\sqrt{5},1)\rangle$$

P2. Calcular una matriz A de orden 3x3 cuyos valores propios son $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = -2$ siendo $\vec{v}_1 = (1,2,1)$, $\vec{v}_2 = (-1,4,1)$ y $\vec{v}_3 = (1,-1,-1)$ sus correspondientes vectores propios.

RESOLUCIÓN

Del enunciado se obtienen las matrices $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ que cumplen la igualdad $D = P^{-1}AP$.

Si $D = P^{-1}AP$ entonces, $A = PDP^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/6 & 1/3 & -1/2 \\ 1/3 & 1/3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

P3. Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 2 & 0 & c \end{pmatrix}$ siendo a, b y c parámetros reales. Si se sabe que la traza de M es 6 y que $\vec{v}_1 = (0,0,1)$ y $\vec{v}_2 = (1,-1,2)$ son dos vectores propios de M,

a) Determinar la matriz M.

b) Calcular el valor de la expresión $3M^3 - 7M^2 + 2M - I$ utilizando los conceptos de valor y vector propio.

RESOLUCIÓN

Si la traza de M es 6, entonces

$$2 + b + c = 6 \Rightarrow b + c = 4$$

Si $\vec{v}_1$ es un autovector de M entonces, $\exists \lambda_1 \mid M\vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1$, es decir

$$\begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 2 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow c = \lambda_1$$

Si $\vec{v}_2$ es un autovector de M entonces, $\exists \lambda_2 \mid M\vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2$, es decir

$$\begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 2 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2 - a = \lambda_2 \\ 1 - b = -\lambda_2 \\ 2 + 2c = 2\lambda_2 \end{cases}$$

Se resuelve el sistema formado por las ecuaciones anteriores

$$\begin{cases} b + c = 4 \\ c = \lambda_1 \\ 2 - a = \lambda_2 \\ 1 - b = -\lambda_2 \\ 2 + 2c = 2\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 3 \\ c = 1 \\ \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

Por lo que la matriz buscada es $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Se calcula el tercer valor propio λ_3 de la matriz M sabiendo que la traza de esta matriz es igual a la suma de sus valores propios

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \underbrace{2 + 3 + 1}_{traza\ de\ M} = 6 \Rightarrow \lambda_3 = 3$$

Al valor propio λ_3 le corresponderá un vector propio de la matriz M. Sea $\vec{v}_3 = (x, y, z)$ este vector, entonces

$$M\vec{v}_3 = \lambda_3\,\vec{v}_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 3x \\ x + 3y = 3y \\ 2x + z = 3z \end{cases} \Rightarrow x = 0, z = 0\ \forall y \in \mathbb{R}$$

Los vectores propios correspondientes al valor propio λ_3 son de la forma $\vec{v}_3 = (0, y, 0)$. Se toma por ejemplo $y = 1 \Rightarrow \vec{v}_3 = (0,1,0)$.

De modo que se tienen las matrices $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ que cumplen que $D = P^{-1}MP$. Si $D = P^{-1}MP \Rightarrow M = PDP^{-1}$;

$M^2 = MM = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2P^{-1}$ y así sucesivamente con lo que $M^n = PD^nP^{-1}$

Utilizando esta última igualdad se calcula la expresión pedida

$3M^3 - 7M^2 + 2M - I = 3\,PD^3P^{-1} - 7PD^2P^{-1} + 2PDP^{-1} - PIP^{-1} =$

$P(3D^3 - 7D^2 + 2D - I)P^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\left[3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^3 - 7\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^2 + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 23 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 24 & 23 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

P4. Sean $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base del espacio vectorial E y f un endomorfismo definido en E siendo $f(\vec{u}_1) = \vec{u}_1 - 3\vec{u}_2$, el vector $\vec{v} = \vec{u}_1 + 3\vec{u}_3$ un vector propio de f asociado al valor propio $\lambda_1 = 1$ y el vector propio $\vec{w} = (1, -1{,}2)$ el correspondiente al valor propio $\lambda_2 = 2$.

a) Determinar la matriz asociada a f en la base U.

b) Determinar una matriz diagonal semejante a la del apartado anterior y una base de E respecto de la que esta matriz diagonal sea la matriz asociada a f.

RESOLUCIÓN

a) Para obtener la matriz asociada a f en la base U basta hallar $f(\vec{u}_1)$, $f(\vec{u}_2)$ y $f(\vec{u}_3)$ y colocarlos en columnas.

Si $f(\vec{u}_1) = \vec{u}_1 - 3\vec{u}_2 = (1, -3{,}0)_U$, la primera columna de la matriz pedida es $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Si $\vec{v}$ es un vector propio de f asociado al valor propio 1, entonces

$f(\vec{v}) = 1\vec{v} \Rightarrow f(\vec{u}_1 + 3\vec{u}_3) = \vec{u}_1 + 3\vec{u}_3$

Utilizando las propiedades de las aplicaciones lineales

$f(\vec{v}) = f(\vec{u}_1 + 3\vec{u}_3) = f(\vec{u}_1) + 3f(\vec{u}_3) = \vec{u}_1 + 3\vec{u}_3 \Rightarrow$

$3f(\vec{u}_3) = \vec{u}_1 + 3\vec{u}_3 - f(\vec{u}_1) = \vec{u}_1 + 3\vec{u}_3 - (\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2) = 3\vec{u}_2 + 3\vec{u}_3 \Rightarrow$

$f(\vec{u}_3) = \vec{u}_2 + \vec{u}_3 = (0,1,1)_U$.

La tercera columna de la matriz pedida es $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Entonces, la matriz asociada a f en la base U es $f_{U,U} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ -3 & b & 1 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}_{U,U}$ siendo $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Por último, si $\vec{w}$ es un vector propio de f asociado al valor propio 2, entonces

$$f(\vec{w}) = 2\vec{w} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ -3 & b & 1 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1 - a = 2 \\ -3 - b + 2 = -2 \\ -c + 2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = -2 \end{cases}$$

Por lo que la matriz buscada es $f_{U,U} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}_{U,U}$

b) Para determinar la matriz diagonal semejante a $f_{U,U}$ se obtienen sus autovalores. Dos de ellos son conocidos, $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$, y falta por calcular un tercer valor propio λ_3. De la traza de $f_{U,U}$ se tiene que

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + 2 + \lambda_3 = \underbrace{1 + 1 + 1}_{traza\ de\ M} \Rightarrow \lambda_3 = 0$$

Con lo que la matriz diagonal semejante a $f_{U,U}$ es $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Para calcular una base de E respecto de la cual la matriz asociada a f es la matriz diagonal D, basta determinar un autovector asociado a cada autovalor de $f_{U,U}$. Se sabe que a $\lambda_1 = 1$ le corresponde el vector propio $\vec{v} = (1,0,3)$ y que a $\lambda_2 = 2$ le corresponde el vector propio $\vec{w} = (1,-1,2)$, y hay que determinar un vector propio $\vec{t} = (x, y, z)$ asociado al valor propio $\lambda_3 = 0$.

$$f(\vec{t}) = \lambda_3 \vec{t} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ -3x + y + z = 0 \\ -2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{z}{2}, y = \frac{z}{2} \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

Los vectores propios correspondientes al valor propio λ_3 son de la forma $\vec{t} = \left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2}, z\right)$. Se toma por ejemplo $z = 2 \Rightarrow \vec{t} = (1,1,2)$.

Entonces la base de E respecto de la cual la matriz asociada a f es la matriz diagonal D es $B = \{\vec{v}, \vec{w}, \vec{t}\}$ donde $\vec{v} = (1,0,3), \vec{w} = (1,-1,2)$ y $\vec{t} = (1,1,2)$.

P5. Sea $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo cuya matriz asociada es $A=\begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & -1 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$. Hallar los valores del parámetro real a para los cuales A es diagonalizable y diagonalizarla cuando sea posible.

RESOLUCIÓN

Se calculan los autovalores resolviendo la ecuación característica

$$|A-\lambda I| = \left|\begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & -1 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} a-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & a \\ 0 & a & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (a-\lambda)\left((-1-\lambda)^2 - a^2\right) = (a-\lambda)(a-1-\lambda)(-a-1-\lambda)$$

$$|A-\lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = a \\ \lambda_2 = a-1 \\ \lambda_3 = -a-1 \end{cases}$$

Se obtienen tres raíces de la ecuación característica. En función de los valores que tome el parámetro real a, es posible que estas raíces sean simples o múltiples, dando lugar a diferentes casos

Caso 1: $a \neq 0$ y $a \neq -\frac{1}{2}$

Se obtienen tres autovalores distintos $\begin{cases} \lambda_1 = a \\ \lambda_2 = a-1 \\ \lambda_3 = -a-1 \end{cases}$ donde $\begin{matrix} m_a(\lambda_1) = 1 \\ m_a(\lambda_2) = 1 \\ m_a(\lambda_3) = 1 \end{matrix}$

Se calculan los subespacios propios asociados a estos autovalores

Para $\lambda_1 = a$ se resuelve el sistema $(A-\lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0}$, donde $\vec{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$(A-aI)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1-a & a \\ 0 & a & -1-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -z = 0 \\ (-1-a)y + az = 0 \Rightarrow \\ ay + (-1-a)z = 0 \end{cases}$$

$$y = 0, z = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

El subespacio propio asociado al valor propio $\lambda_1 = a$ es

$$E_{\lambda_1} = \{(x,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,0) \rangle \ \text{ con } m_g(\lambda_1) = 1$$

Para $\lambda_2 = a-1$ se resuelve el sistema $(A-\lambda_2 I)\vec{v} = \vec{0}$, donde $\vec{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$(A-(a-1)I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -a & a \\ 0 & a & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ -ay + az = 0 \Rightarrow \\ ay - az = 0 \end{cases}$$

$$x = z, y = z \ \forall z \in \mathbb{R}$$

El subespacio propio asociado al valor propio $\lambda_2 = a - 1$ es

$$E_{\lambda_2} = \{(z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \langle(1,1,1)\rangle \text{ con } m_g(\lambda_2) = 1$$

Para $\lambda_3 = -a - 1$ se procede de forma similar a los casos anteriores

$$(A - (-a-1)I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+1 & 0 & -1 \\ 0 & a & a \\ 0 & a & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (2a+1)x - z = 0 \\ ay + az = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$y = -(2a+1)x, z = (2a+1)x \ \forall x \in \mathbb{R}$$

El subespacio propio asociado al valor propio $\lambda_3 = -a - 1$ es

$$E_{\lambda_3} = \{(x, -(2a+1)x, (2a+1)x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle(1, -(2a+1), 2a+1)\rangle \text{ con } m_g(\lambda_3) = 1$$

Resumen del primer caso $\begin{cases} \lambda_1 = a \\ \lambda_2 = a - 1 \\ \lambda_3 = -a - 1 \end{cases}$ con $\begin{matrix} m_a(\lambda_1) = 1 = m_g(\lambda_1) \\ m_a(\lambda_2) = 1 = m_g(\lambda_2) \\ m_a(\lambda_3) = 1 = m_g(\lambda_3) \end{matrix}$

La matriz es diagonalizable siendo $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & -a-1 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1-2a \\ 0 & 1 & 1+2a \end{pmatrix}$.

<u>Caso 2:</u> $a = 0$

La matriz del endomorfismo f es $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Se obtienen dos autovalores distintos $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$ con $\begin{matrix} m_a(\lambda_1) = 1 \\ m_a(\lambda_2) = 2 \end{matrix}$

Para $\lambda_1 = 0$ se resuelve el sistema $(A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0}$, donde $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -z = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0, z = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$$

El subespacio propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 0$ es

$$E_{\lambda_1} = \{(x, 0,0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle(1,0,0)\rangle \text{ con } m_g(\lambda_1) = 1$$

Para $\lambda_2 = -1$ se resuelve el sistema $(A - \lambda_2 I)\vec{v} = \vec{0}$, donde $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$(A + I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x - z = 0 \Rightarrow x = z \ \forall y, z \in \mathbb{R}$$

El subespacio propio asociado al valor propio $\lambda_2 = -1$ es

$$E_{\lambda_2} = \{(z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} = \langle(1,0,1), (0,1,0)\rangle \text{ con } m_g(\lambda_2) = 2$$

Resumen del caso 2 $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$ con $\begin{matrix} m_a(\lambda_1) = 1 = m_g(\lambda_1) \\ m_a(\lambda_2) = 2 = m_g(\lambda_2) \end{matrix}$

La matriz es diagonalizable siendo $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

<u>Caso 3:</u> $a = -\frac{1}{2}$

La matriz del endomorfismo f es $A = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1 \end{pmatrix}$

Se obtienen dos autovalores distintos $\begin{cases} \lambda_1 = -3/2 \\ \lambda_2 = -1/2 \end{cases}$ con $\begin{matrix} m_a(\lambda_1) = 1 \\ m_a(\lambda_2) = 2 \end{matrix}$

Para $\lambda_1 = -3/2$ se resuelve el sistema $(A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0}$, donde $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\left(A + \frac{3}{2}I\right)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)y - \left(\frac{1}{2}\right)z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x = z, y = z \ \ \forall z \in \mathbb{R}$$

El subespacio propio asociado al valor propio $\lambda_1 = -3/2$ es

$$E_{\lambda_1} = \{(z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \langle(1,1,1)\rangle \text{ con } m_g(\lambda_1) = 1$$

Se repite el proceso para $\lambda_2 = -1/2$

$$\left(\mathrm{A} + \frac{1}{2}\mathrm{I}\right)\vec{\mathrm{v}} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\mathrm{z} = 0 \\ -\left(\frac{1}{2}\right)y - \left(\frac{1}{2}\right)z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$y = 0, z = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

El subespacio propio asociado al valor propio $\lambda_2 = -1/2$ es

$$E_{\lambda_2} = \{(x, 0,0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle(1,0,0)\rangle \text{ con } m_g(\lambda_2) = 1$$

Resumen del caso 3 $\begin{cases} \lambda_1 = -3/2 \\ \lambda_2 = -1/2 \end{cases}$ con $\begin{matrix} m_a(\lambda_1) = 1 = m_g(\lambda_1) \\ m_a(\lambda_2) = 2 \neq m_g(\lambda_2) = 1 \end{matrix}$

En este caso la matriz no es diagonalizable.

P6. Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo cuya matriz asociada es $A = \begin{pmatrix} -a & 1 & b \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}$. Hallar los valores de los parámetros reales a y b para los cuales A es diagonalizable y diagonalizarla cuando sea posible.

RESOLUCIÓN

Se calculan los autovalores resolviendo la ecuación característica

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -a-\lambda & 1 & b \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & b-\lambda \end{vmatrix} = (-a-\lambda)(-1-\lambda)(b-\lambda)$$

$$|A-\lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -a \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = b \end{cases}$$

Se obtienen tres raíces de la ecuación característica. Se deben estudiar los posibles valores de los parámetros reales a y b para analizar los diferentes casos

<u>Caso 1:</u> $a \neq 1$ y $b \neq -1$ y $a \neq -b$

Se obtienen tres autovalores distintos $\begin{cases} \lambda_1 = -a \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = b \end{cases}$ con $\begin{matrix} m_a(\lambda_1) = 1 \\ m_a(\lambda_2) = 1 \\ m_a(\lambda_3) = 1 \end{matrix}$

Se calculan los subespacios propios asociados a estos autovalores

Para $\lambda_1 = -a$ se resuelve el sistema $(A-\lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0}$, donde $\vec{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$(A+aI)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & b \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 1 & a+b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y+bz = 0 \\ (a-1)y = 0 \\ y+(a+b)z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$y = 0, z = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

El subespacio propio asociado al valor propio $\lambda_1 = -a$ es

$$E_{\lambda_1} = \{(x,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle(1,0,0)\rangle \ \text{ con } m_g(\lambda_1) = 1$$

Para $\lambda_2 = -1$ se resuelve el sistema $(A-\lambda_2 I)\vec{v} = \vec{0}$, donde $\vec{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$(A+I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -a+1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (1-a)x+y+bz = 0 \\ y+(b+1)z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x = \frac{1}{1-a}z; \ y = (-1-b)z \ \ \forall z \in \mathbb{R}$$

El subespacio propio asociado al valor propio $\lambda_2 = -1$ es

$$E_{\lambda_2} = \left\{\left(\tfrac{1}{1-a}z, (-1-b)z, z\right) \mid z \in \mathbb{R}\right\} = \left\langle\left(\tfrac{1}{1-a}, -1-b, 1\right)\right\rangle \ \text{ con } m_g(\lambda_2) = 1$$

Para $\lambda_3 = b$ se resuelve el sistema $(A-\lambda_3 I)\vec{v} = \vec{0}$, donde $\vec{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$(A-bI)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -a-b & 1 & b \\ 0 & -1-b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (-a-b)x+y+bz = 0 \\ (-1-b)y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x = \frac{b}{a+b}z;\ y = 0\ \ \forall z \in \mathbb{R}$$

El subespacio propio asociado al valor propio $\lambda_3 = b$ es

$$E_{\lambda_3} = \left\{\left(\frac{b}{a+b}z, 0, z\right) \mid z \in \mathbb{R}\right\} = \left\langle\left(\frac{b}{a+b}, 0,1\right)\right\rangle \text{ con } m_g(\lambda_3) = 1$$

Resumen del caso 1 $\begin{cases} \lambda_1 = -a \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = b \end{cases}$ con $\begin{matrix} m_a(\lambda_1) = 1 = m_g(\lambda_1) \\ m_a(\lambda_2) = 1 = m_g(\lambda_2) \\ m_a(\lambda_3) = 1 = m_g(\lambda_3) \end{matrix}$

La matriz es diagonalizable siendo $D = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1-a} & \frac{b}{a+b} \\ 0 & -1-b & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>Caso 2:</u> $a = 1$ y $b \neq -1$

La matriz del endomorfismo f en este caso es $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & b \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}$

Se obtienen dos autovalores distintos $\begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = b \end{cases}$ con $\begin{matrix} m_a(\lambda_1) = 2 \\ m_a(\lambda_2) = 1 \end{matrix}$

Para $\lambda_1 = -1$ se resuelve el sistema $(A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0}$, donde $(A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0}$

$$(A + I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y + bz = 0 \\ y + (b+1)z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$y = 0, z = 0\ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

El subespacio propio asociado al valor propio $\lambda_1 = -1$ es

$$E_{\lambda_1} = \{(x, 0,0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle(1,0,0)\rangle \text{ con } m_g(\lambda_1) = 1$$

Como $m_a(\lambda_1) = 2 \neq m_g(\lambda_1) = 1$, en este caso la matriz no es diagonalizable.

<u>Caso 3:</u> $b = -1$ y $a \neq 1$

La matriz del endomorfismo f en este caso es $A = \begin{pmatrix} -a & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Se obtienen dos autovalores distintos $\begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -a \end{cases}$ con $\begin{matrix} m_a(\lambda_1) = 2 \\ m_a(\lambda_2) = 1 \end{matrix}$

Para $\lambda_1 = -1$ se resuelve el sistema $(A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0}$, donde $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$(A + I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -a+1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (1-a)x + y - z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$y = 0, z = (1-a)x \;\; \forall x \in \mathbb{R}$$

El subespacio propio asociado al valor propio $\lambda_1 = -1$ es

$$E_{\lambda_1} = \{(x, 0, (1-a)x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,1-a) \rangle \text{ con } m_g(\lambda_1) = 1$$

Como $m_a(\lambda_1) = 2 \neq m_g(\lambda_1) = 1$, en este caso la matriz no es diagonalizable.

Caso 4: $a = -b$ y $a \neq 1$

La matriz del endomorfismo f en este caso es $A = \begin{pmatrix} -a & 1 & -a \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -a \end{pmatrix}$

Se obtienen dos autovalores distintos $\begin{cases} \lambda_1 = -a \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$ con $\begin{array}{c} m_a(\lambda_1) = 2 \\ m_a(\lambda_2) = 1 \end{array}$

Para $\lambda_1 = -a$ se resuelve el sistema $(A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0}$, donde $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$(A + aI)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -a \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y - az = 0 \\ (a-1)y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Caso 4.1: Si $a \neq 0$

$$y = 0, z = 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$$

El subespacio propio asociado al valor propio $\lambda_1 = -a$ es

$$E_{\lambda_1} = \{(x, 0,0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,0) \rangle \text{ con } m_g(\lambda_1) = 1$$

Como $m_a(\lambda_1) = 2 \neq m_g(\lambda_1) = 1$, en este caso la matriz no es diagonalizable

Caso 4.2: Si $a = 0$

$$y = 0 \;\; \forall x, z \in \mathbb{R}$$

El subespacio propio asociado al valor propio $\lambda_1 = -a = 0$ es

$$E_{\lambda_1} = \{(x, 0, z) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,0), (0,0,1) \rangle \text{ con } m_g(\lambda_1) = 2$$

Para $\lambda_2 = -1$ se resuelve el sistema $(A - \lambda_2 I)\vec{v} = \vec{0}$, donde $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$(A + I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x = z, y = -z \;\forall z \in \mathbb{R}$$

El subespacio propio asociado al valor propio $\lambda_2 = -1$ es

$$E_{\lambda_2} = \{(z, -z, z) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle (1,-1,1) \rangle \text{ con } m_g(\lambda_2) = 1$$

Resumen del caso 4.2 $\begin{cases}\lambda_1 = -a \\ \lambda_2 = -1\end{cases}$ con $\begin{matrix} m_a(\lambda_1) = 2 = m_g(\lambda_1) \\ m_a(\lambda_2) = 1 = m_g(\lambda_2)\end{matrix}$ donde $a = 0$

En este caso la matriz es diagonalizable siendo $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>Caso 5:</u> $a = 1$ y $b = -1$

La matriz del endomorfismo f en este caso es $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Se obtiene un único autovalor $\lambda_1 = -1$ con $m_a(\lambda_1) = 3$.

Para $\lambda_1 = -1$ se resuelve el sistema $(A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0}$, donde $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$(A + I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y - z = 0 \\ \quad y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = z = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$$

El subespacio propio asociado al valor propio $\lambda_1 = -1$ es

$$E_{\lambda_1} = \{(x, 0,0)\ |x \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,0) \rangle \text{ con } m_g(\lambda_1) = 1$$

Como $m_a(\lambda_1) = 3 \neq m_g(\lambda_1) = 1$, en este caso la matriz no es diagonalizable

P7. Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo cuya matriz asociada es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular una base ortonormal respecto de la cual la matriz asociada a f sea diagonal.

RESOLUCIÓN

La matriz que caracteriza al endomorfismo f es real y simétrica, por lo que f es diagonalizable ortogonalmente. Se resuelve la ecuación característica $|A - \lambda I| = 0$ para calcular los autovalores de f

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 3 \end{cases}$$

Los autovectores asociados al autovalor $\lambda_1 = 0$ se calculan resolviendo el sistema

$$A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = z\ \forall z \in \mathbb{R}$$

El subespacio propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 0$ es

$$E_{\lambda_1} = \{(z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \langle(1,1,1)\rangle$$

Los autovectores asociados al autovalor $\lambda_2 = 1$ se calculan resolviendo el sistema

$$(A - I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -y = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x = -z, y = 0 \ \forall z \in \mathbb{R}$$

El subespacio propio asociado al valor propio $\lambda_2 = 1$ es

$$E_{\lambda_2} = \{(-z, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \langle(-1,0,1)\rangle$$

Los autovectores asociados al autovalor $\lambda_3 = 3$ se calculan resolviendo el sistema

$$(A - 3I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x - y = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ -y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x = z, y = -2z \ \forall z \in \mathbb{R}$$

El subespacio propio asociado al valor propio $\lambda_3 = 3$ es

$$E_{\lambda_3} = \{(z, -2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\ \} = \langle(1, -2,1)\rangle$$

Una vez calculados los subespacios propios asociados a los autovalores, se puede obtener una base de $\mathbb{R}^3$ respecto de la cual la matriz asociada a f es diagonal. La matriz diagonal es $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y la base de $\mathbb{R}^3$, por ejemplo $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ donde $\vec{v}_1 = (1,1,1), \vec{v}_2 = (-1,0,1)$ y $\vec{v}_3 = (1, -2,1)$. Esta base es una base ortogonal ya que todos los vectores propios están asociados a distintos valores propios.

Para transformar esta base en ortonormal, basta convertir los vectores en unitarios dividiéndolos entre su norma

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} = \frac{(-1,0,1)}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\vec{u}_3 = \frac{\vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|} = \frac{(1, -2,1)}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

Entonces la base $B' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ donde $\vec{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\vec{u}_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\vec{u}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ respecto de la cual la matriz asociada a f es la matriz diagonal $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

P8. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz asociada al endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Calcular una base ortonormal respecto de la cual la matriz asociada a f sea diagonal.

RESOLUCIÓN

La matriz que caracteriza al endomorfismo f es real y simétrica, por lo que f es diagonalizable ortogonalmente. Se resuelve la ecuación característica $|A - \lambda I| = 0$ para calcular los autovalores de f

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & 8 \\ -4 & 7-\lambda & 4 \\ 8 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda + 9)(\lambda - 9)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -9 \\ \lambda_2 = 9 \end{cases}$$

con $m_g(\lambda_1) = 1$ y $m_g(\lambda_2) = 2$.

Los autovectores asociados al autovalor $\lambda_1 = -9$ se calculan resolviendo el sistema

$$(A + 9I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 10 & -4 & 8 \\ -4 & 16 & 4 \\ 8 & 4 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 10x - 4y + 8z = 0 \\ -4x + 16y + 4z = 0 \\ 8x + 4y + 10z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x = -z, y = -\frac{z}{2} \; \forall z \in \mathbb{R}$$

El subespacio propio asociado al valor propio $\lambda_1 = -9$ es

$$E_{\lambda_1} = \left\{\left(-z, -\frac{z}{2}, z\right) \mid z \in \mathbb{R}\right\} = \langle (2,1,-2) \rangle$$

Los autovectores asociados al autovalor $\lambda_2 = 9$ se calculan resolviendo el sistema

$$(A - 9I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -8 & -4 & 8 \\ -4 & -2 & 4 \\ 8 & 4 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -4x - 2y + 4z = 0 \Rightarrow$$

$$x = -\frac{y}{2} + z \;\; \forall y, z \in \mathbb{R}$$

El subespacio propio asociado al valor propio $\lambda_2 = 9$ es

$$E_{\lambda_2} = \left\{\left(-\frac{y}{2} + z, y, z\right) \mid y, z \in \mathbb{R}\right\} = \langle(1,-2,0),(1,0,1)\rangle$$

Una vez calculados los subespacios propios asociados a los autovalores, se puede obtener una base de $\mathbb{R}^3$ respecto de la cual la matriz asociada a f es diagonal.

La matriz diagonal es $D = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ siendo por ejemplo $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ la base de $\mathbb{R}^3$, donde $\vec{v}_1 = (2,1,-2), \vec{v}_2 = (1,-2,0)$ y $\vec{v}_3 = (1,0,1)$. Esta base no es ortogonal ya que aunque los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_3$ son ortogonales entre sí, por ser vectores propios asociados a distintos valores propios, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ no lo son, ya que $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = (1,-2,1) \cdot (1,0,1) = 2 \neq 0$.

Por tanto, hay que transformar uno de los dos vectores asociados al valor propio múltiple para que los tres vectores sean ortogonales. Se construye una base ortogonal utilizando el método de Gramm-Schimdt.

Sea $\vec{w}_3 = \vec{v}_3 + \lambda\vec{v}_2 \Rightarrow \vec{w}_3 = (1,0,1) + \lambda(1,-2,0) = (1+\lambda, -2\lambda, 1)$. Para que $\vec{v}_2$ y $\vec{w}_3$ sean ortogonales se debe cumplir que $\vec{v}_2 . \vec{w}_3 = 0$

$$(1,-2,0) \cdot (1+\lambda, -2\lambda, 1) = 0 \Rightarrow 1 + \lambda + 4\lambda + 0 = 0 \Rightarrow \lambda = -1/5$$

Sustituyendo este valor de λ en el vector $\vec{w}_3$ se tiene que

$$\vec{w}_3 = \left(1 - \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1\right) = \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 1\right)$$

Véase que $\vec{w}_3$ también es ortogonal a $\vec{v}_1$

$$\vec{w}_3 \cdot \vec{v}_1 = \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 1\right) \cdot (2,1,-2) = \frac{8}{5} + \frac{2}{5} - 2 = 0$$

Por tanto la base $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}_3\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de f. Para transformar esta base en ortonormal, se convierten los vectores en unitarios dividiéndolos entre su norma

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{(2,1,-2)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right)$$

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} = \frac{(1,-2,0)}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 0^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}, 0\right)$$

$$\vec{u}_3 = \frac{\vec{w}_3}{\|\vec{w}_3\|} = \frac{\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + 1^2}} = \left(\frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$$

Entonces la base $B'' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ donde $\vec{u}_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right)$, $\vec{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}, 0\right)$ y $\vec{u}_3 = \left(\frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ respecto de la cual la matriz asociada a f es la matriz diagonal $D = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Además se cumple que $D = P^t A P$ donde $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}$.

P9. Obtener la forma canónica de Jordan de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

RESOLUCIÓN

Para determinar cuáles son los autovalores de la matriz A se obtiene el polinomio característico

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1-\lambda & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^4(\lambda+1)^2$$

Por lo que los autovalores de la matriz y las correspondientes multiplicidades algebraicas son

$$(\lambda-1)^4(\lambda+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases} \text{ donde } \begin{matrix} m_a(\lambda_1) = 4 \\ m_a(\lambda_2) = 2 \end{matrix}$$

Recordar, que si la matriz es diagonalizable su forma canónica de Jordan es una matriz diagonal, y que en caso contrario se debe calcular una cadena de subespacios $E^i_{\lambda_j}$ para cada autovalor. Se estudia si la matriz A es diagonalizable, es decir, se calculan los subespacios propios correspondientes a cada valor propio y se comprueba si la multiplicidad algebraica y la geométrica coinciden.

Se calculan los subespacios asociados al autovalor $\lambda_1 = 1$ cuya multiplicidad algebraica es $m_a(\lambda_1) = 4$. El subespacio propio asociado a $\lambda_1 = 1$ se calcula como el núcleo de la aplicación $Ker(A - \lambda_1 I)$

$$E_{\lambda_1} = \left\{ \vec{x} \in E : (A - \lambda_1 I)\vec{x} = \vec{0} \right\} = Ker(A - \lambda_1 I)$$

Es decir, para obtener el subespacio propio E_{λ_1} se debe resolver el siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2 - 2x_4 - 2x_5 + 2x_6 = 0 \\ -x_2 + x_4 + x_5 - x_6 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 - x_5 + 3x_6 = 0 \\ -x_2 + x_4 - 3x_6 = 0 \\ -2x_6 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0, \forall x_1 \in \mathbb{R}$$

El subespacio propio asociado al autovalor $\lambda_1 = 1$ es

$$E_{\lambda_1} = \{ (x_1, 0,0,0,0,0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,0,0,0,0) \rangle$$

Como dicho subespacio esta generado por un único vector $m_g(\lambda_1) = dim\, E_{\lambda_1} = 1 \neq m_a(\lambda_1) = 4$, la matriz no es diagonalizable y se debe construir la cadena de subespacios $E_{\lambda_1}^i$ hasta que la dimensión del subespacio coincida con la multiplicidad algebraica del autovalor.

Además, como $m_g(\lambda_1) = dim\, E_{\lambda_1} = 1$, hay un único bloque elemental de Jordan con autovalor λ_1.

$$E_{\lambda_1}^2 = \left\{ \vec{x} \in E : (A - \lambda_1 I)^2 \vec{x} = \vec{0} \right\} = Ker(A - \lambda_1 I)^2$$

Para obtener un sistema generador del subespacio vectorial se debe resolver el siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 4 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_2 - x_4 + x_5 + x_6 = 0 \\ -x_5 = 0 \\ -4x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 - 8x_6 = 0 \\ -x_5 + 4x_6 = 0 \\ 4x_6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_4 \\ x_5 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_6 = 0 \\ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

El subespacio vectorial es

$$E_{\lambda_1}^2 = \{ (x_1, x_2, 0, x_2, 0,0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,0,0,0,0), (0,1,0,1,0,0) \rangle$$

En este caso, el sistema generador está formado por dos vectores linealmente independientes, en conclusión, $dim\, E_{\lambda_1}^2 = 2 \neq m_a(\lambda_1) = 4$ y se debe continuar construyendo la cadena de subespacios vectoriales.

$$E_{\lambda_1}^3 = \left\{ \vec{x} \in E : (A - \lambda_1 I)^3 \vec{x} = \vec{0} \right\} = Ker(A - \lambda_1 I)^3$$

El sistema a resolver para obtener el subespacio vectorial es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -8 & -8 & -8 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_5 = 0 \\ 8x_2 - 8x_3 - 8x_4 - 8x_5 + 20x_6 = 0 \\ -8x_6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_5 = 0 \\ x_6 = 0 \\ x_2 = x_3 + x_4 \\ \forall x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Por lo que el subespacio vectorial es

$$E_{\lambda_1}^3 = \{ (x_1, x_3 + x_4, x_3, x_4, 0,0) \mid x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,0,0,0,0), (0,1,1,0,0,0), (0,1,0,1,0,0) \rangle$$

Es decir, el sistema generador de $E_{\lambda_1}^3$ consta de tres vectores linealmente independientes, por lo que se puede concluir que el sistema generador es una base de $E_{\lambda_1}^3$ y que $dim E_{\lambda_1}^3 = 3 \neq m_a(\lambda_1) = 4$.

Dado que la dimensión del subespacio vectorial es inferior a la multiplicidad algebraica del autovalor, se debe construir el último subespacio vectorial de la cadena

$$E_{\lambda_1}^4 = \left\{ \vec{x} \in E : (A - \lambda_1 I)^4 \vec{x} = \vec{0} \right\} = Ker(A - \lambda_1 I)^4$$

El sistema de ecuaciones lineales que se debe resolver en este caso es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 16 & 16 & 16 & -48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -16x_2 + 16x_3 + 16x_4 + 16x_5 - 48x_6 = 0 \\ x_6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_3 + x_4 + x_5 \\ x_6 = 0 \\ \forall x_1, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Por tanto, el último subespacio vectorial es

$$E_{\lambda_1}^4 = \{ (x_1, x_3 + x_4 + x_5, x_3, x_4, x_5, 0) \mid x_1, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\} \Rightarrow$$

$$E_{\lambda_1}^4 = \langle (1,0,0,0,0,0), (0,1,1,0,0,0), (0,1,0,1,0,0), (0,1,0,0,1,0) \rangle$$

Como los cuatro vectores del sistema generador son independientes, se tiene que $dim\, E_{\lambda_1}^4 = 4 = m_a(\lambda_1) = 4$, por lo que no se construye el siguiente subespacio.

En resumen, la cadena de subespacios vectoriales obtenidos para el autovalor $\lambda_1 = 1$ es la siguiente $E_{\lambda_1} \subset E_{\lambda_1}^2 \subset E_{\lambda_1}^3 \subset E_{\lambda_1}^4$ siendo las dimensiones $dim\, E_{\lambda_1} = 1 < dim\, E_{\lambda_1}^2 = 2 < dim\, E_{\lambda_1}^3 = 3 < dim\, E_{\lambda_1}^4 = 4$.

Resaltar que $dim\, E_{\lambda_1}^{i+1} - dim\, E_{\lambda_1}^{i} = 1\ \forall i = 1,2,3$ por lo que cada subespacio vectorial $E_{\lambda_1}^{i+1} - E_{\lambda_1}^{i}\ \forall i = 1,2,3$ solo tendrá un vector linealmente independiente.

La base de Jordan correspondiente a este autovalor y al único bloque elemental de Jordan se construye de la siguiente forma

$$B_{J_2} = \{\vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5, \vec{u}_6\}$$

$\vec{u}_6 \in E_{\lambda_1}^{4} - E_{\lambda_1}^{3}$, es decir, se selecciona un vector $\vec{u}_6 \in E_{\lambda_1}^{4}$ pero $\vec{u}_6 \notin E_{\lambda_1}^{3}$.

Sea el vector $\vec{u}_6 = (0,1,0,0,1,0)$, se calculan sus sucesivas imágenes respecto a $(f - \lambda_1 i)$

$$\vec{u}_5 = (A - \lambda_1 I)\vec{u}_6 = (-1,0,1,-1,0,0) \in E_{\lambda_1}^{3} - E_{\lambda_1}^{2}$$

$$\vec{u}_4 = (A - \lambda_1 I)\vec{u}_5 = (2,-1,0,-1,0,0) \in E_{\lambda_1}^{2} - E_{\lambda_1}$$

$$\vec{u}_3 = (A - \lambda_1 I)\vec{u}_4 = (1,0,0,0,0,0) \in E_{\lambda_1}$$

En conclusión, la base de Jordan correspondiente al autovalor $\lambda_1 = 1$ es

$$B_{J_2} = \{(1,0,0,0,0,0), (2,-1,0,-1,0,0), (-1,0,1,-1,0,0), (0,1,0,0,1,0)\}$$

Véase a continuación, cual es el bloque elemental de Jordan relacionado con dicha base. Se calcula la imagen de $\vec{u}_3$

$$f(\vec{u}_3) = A\vec{u}_3$$

Por otro lado

$$(A - \lambda_1 I)\vec{u}_3 = (A - \lambda_1 I)^2\, \vec{u}_4 = (A - \lambda_1 I)^3\, \vec{u}_5 = (A - \lambda_1 I)^4\, \vec{u}_6 \xRightarrow{\vec{u}_6 \in E_{\lambda_1}^{4}} (A - \lambda_1 I)\vec{u}_3 = 0 \Rightarrow$$
$$A\vec{u}_3 = \lambda_1 \vec{u}_3 \Rightarrow\ f(\vec{u}_3) = \lambda_1 \vec{u}_3$$

Se procede de la misma manera con los vectores $\vec{u}_4, \vec{u}_5$ y $\vec{u}_6$

$$f(\vec{u}_4) = A\vec{u}_4$$

$$\vec{u}_3 = (A - \lambda_1 I)\vec{u}_4 \Rightarrow \vec{u}_3 = A\vec{u}_4 - \lambda_1 \vec{u}_4 \Rightarrow A\vec{u}_4 = \vec{u}_3 + \lambda_1 \vec{u}_4 \Rightarrow f(\vec{u}_4) = \vec{u}_3 + \lambda_1 \vec{u}_4$$

$$f(\vec{u}_5) = A\vec{u}_5$$

$$\vec{u}_4 = (A - \lambda_1 I)\vec{u}_5 \Rightarrow \vec{u}_4 = A\vec{u}_5 - \lambda_1 \vec{u}_5 \Rightarrow A\vec{u}_5 = \vec{u}_4 + \lambda_1 \vec{u}_5 \Rightarrow f(\vec{u}_5) = \vec{u}_4 + \lambda_1 \vec{u}_5$$

$$f(\vec{u}_6) = A\vec{u}_6$$

$$\vec{u}_5 = (A - \lambda_1 I)\vec{u}_6 \Rightarrow \vec{u}_5 = A\vec{u}_6 - \lambda_1 \vec{u}_6 \Rightarrow A\vec{u}_6 = \vec{u}_5 + \lambda_1 \vec{u}_6 \Rightarrow f(\vec{u}_6) = \vec{u}_5 + \lambda_1 \vec{u}_6$$

En conclusión, la matriz elemental de Jordan es

$$J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se calculan los subespacios asociados al autovalor $\lambda_2 = -1$, cuya multiplicidad algebraica es $m_a(\lambda_2) = 2$. Para obtener el subespacio propio asociado al autovalor $\lambda_2 = -1$ basta calcular el siguiente núcleo

$$E_{\lambda_2} = \left\{ \vec{x} \in E : (A - \lambda_2 I)\vec{x} = \vec{0} \right\} = Ker(A - \lambda_2 I)$$

Es decir, basta resolver el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2x_1 + x_2 - 2x_4 - 2x_5 + 2x_6 = 0 \\ x_2 + x_4 + x_5 - x_6 = 0 \\ 2x_2 - 2x_4 - x_5 + 3x_6 = 0 \\ -x_2 + 3x_4 - 3x_6 = 0 \\ 2x_5 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0, \forall x_3 \in \mathbb{R}$$

El subespacio propio asociado al autovalor $\lambda_2 = -1$ es

$$E_{\lambda_2} = \{ (0,0,x_3,0,0,0) \mid x_3 \in \mathbb{R}\} = \langle (0,0,1,0,0,0) \rangle$$

Como el subespacio propio esta generado por un único vector, $m_g(\lambda_2) = dim\, E_{\lambda_2} = 1 \neq m_a(\lambda_2) = 2 \Rightarrow$ Hay un único bloque elemental de Jordan asociado al autovalor λ_2 y se construye el siguiente subespacio vectorial de la cadena

$$E_{\lambda_2}^2 = \left\{ \vec{x} \in E : (A - \lambda_2 I)^2\vec{x} = \vec{0} \right\} = Ker(A - \lambda_2 I)^2$$

El sistema de ecuaciones lineales a resolver en este caso es

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 & -9 & -7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 & 8 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 4x_1 + 5x_2 - 9x_4 - 7x_5 + 9x_6 = 0 \\ 4x_4 + 3x_5 - 4x_6 = 0 \\ 4x_2 - 4x_4 + 4x_6 = 0 \\ -4x_2 + 8x_4 - x_5 - 8x_6 = 0 \\ 4x_5 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = x_6 \\ x_5 = 0 \\ \forall x_3, x_4 \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

El subespacio vectorial es

$$E_{\lambda_2}^2 = \{(0,0,x_3,x_4,0,x_4) \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R} \} = \langle (0,0,1,0,0,0), (0,0,0,1,0,1) \rangle$$

Dado que el sistema generador de $E_{\lambda_2}^2$ está formado por dos vectores linealmente independientes, $dim\, E_{\lambda_2}^2 = 2 = m_a(\lambda_2)$, no se construye el siguiente subespacio vectorial.

Resumiendo, la cadena de subespacios vectoriales obtenidos para el autovalor $\lambda_2 = -1$ es $E_{\lambda_2} \subset E_{\lambda_2}^2$ siendo las dimensiones $dim\, E_{\lambda_2} = 1 < dim\, E_{\lambda_2}^2 = 2$. Es decir, como $dim\, E_{\lambda_2}^2 -$

$dim\, E_{\lambda_2} = 1$, basta seleccionar un vector del subespacio $E^2_{\lambda_2} - E_{\lambda_2}$ y calcular su imagen respecto $(f - \lambda_2 i)$.

Recordar que en este caso al igual que en el caso anterior, solo hay una matriz elemental de Jordan correspondiente al autovalor $\lambda_2 = -1$, aunque en este caso la base de Jordan estará formada solo por dos vectores

$$B_{J_1} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$$

$\vec{u}_2 \in E^2_{\lambda_2} - E_{\lambda_2}$, es decir, se selecciona un vector $\vec{u}_2 \in E^2_{\lambda_2}$ pero $\vec{u}_2 \notin E_{\lambda_2}$. Sea el vector $\vec{u}_2 = (0,0,0,1,0,1)$. Entonces

$$\vec{u}_1 = (A - \lambda_2 I)\vec{u}_2 = (0,0,1,0,0,0) \in E_{\lambda_2}$$

La base de Jordan correspondiente al autovalor $\lambda_2 = -1$ es

$$B_{J_1} = \{(0,0,1,0,0,0), (0,0,0,1,0,1)\}$$

Para construir la matriz elemental de Jordan se calculan las imágenes de los vectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ respecto de la aplicación f

$$f(\vec{u}_1) = A\vec{u}_1$$

$$(A - \lambda_2 I)\vec{u}_1 = (A - \lambda_2 I)^2\, \vec{u}_2 \xRightarrow{\vec{u}_2 \in E^2_{\lambda_2}} (A - \lambda_2 I)\vec{u}_1 = 0 \Rightarrow A\vec{u}_1 = \lambda_2 \vec{u}_1$$

Por lo que:

$$f(\vec{u}_1) = \lambda_2 \vec{u}_1$$

Procediendo de forma similar para $\vec{u}_2$

$$f(\vec{u}_2) = A\vec{u}_2$$

$$\vec{u}_1 = (A - \lambda_2 I)\vec{u}_2 \Rightarrow \vec{u}_1 = A\vec{u}_2 - \lambda_2 \vec{u}_2 \Rightarrow A\vec{u}_2 = \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 \Rightarrow f(\vec{u}_2) = \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2$$

Por tanto, la matriz elemental de Jordan es

$$J_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Una vez calculadas las bases de Jordan y las matrices elementales de Jordan correspondientes a cada autovalor, se construyen la base completa de Jordan y la forma canónica de Jordan

La base completa de Jordan se obtiene como la unión de las dos bases anteriores

$$B = B_{J_1} \cup B_{J_2} \Rightarrow B = \{(0,0,1,0,0,0), (0,0,0,1,0,1), (1,0,0,0,0,0), (2,-1,0,-1,0,0)$$
$$(-1,0,1,-1,0,0), (0,1,0,0,1,0)\}$$

La forma canónica de Jordan se obtiene colocando en la diagonal principal las dos matrices elementales de Jordan

$$J = \left(\begin{array}{c:c} J_1 & 0_{2x4} \\ \hdashline 0_{4x2} & J_2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

siendo la matriz regular P que cumple la propiedad $J = P^{-1}AP$ la matriz que se obtiene al colocar los vectores de la base de Jordan por columnas

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

P10. Obtener la forma canónica de Jordan de la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

RESOLUCIÓN

Se resuelve la ecuación característica $|A - \lambda I| = 0$ para calcular los autovalores de la matriz A

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1-\lambda & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^4(\lambda+1)^2$$

Los autovalores y sus multiplicidades algebraicas son

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases} \text{donde} \quad \begin{matrix} m_a(\lambda_1) = 4 \\ m_a(\lambda_2) = 2 \end{matrix}$$

A continuación se calcula el subespacio propio correspondiente a cada autovalor así como la cadena de subespacios en los casos en los que sea necesario.

Se calculan los subespacios asociados al autovalor $\lambda_1 = 1$ cuya multiplicidad algebraica es $m_a(\lambda_1) = 4$. Para obtener el subespacio propio $E_{\lambda_1} = \{\vec{x} \in E : (A - \lambda_1 I)\vec{x} = \vec{0}\} = Ker(A - \lambda_1 I)$ se resuelve el siguiente sistema lineal

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2x_1 = 0 \\ -2x_1 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_5 + x_6 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_6 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_4 - 2x_6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \\ x_2 = -x_6 \\ \forall\, x_3, x_6 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Por lo que el subespacio propio asociado al autovalor $\lambda_1 = 1$ es

$$E_{\lambda_1} = \{ (0, -x_6, x_3, 0,0, x_6) \mid x_3, x_6 \in \mathbb{R}\} = \langle (0,0,1,0,0,0), (0,-1,0,0,0,1) \rangle$$

Como se puede observar el sistema generador del subespacio vectorial E_{λ_1} está formado por dos vectores linealmente independientes, por lo que $m_g(\lambda_1) = dim\, E_{\lambda_1} = 2 \neq m_a(\lambda_1) = 4$. La multiplicidad algebraica y la multiplicidad geométrica no coinciden y se construye la cadena de subespacios, $E^i_{\lambda_1}$. Se calcula el subespacio vectorial $E^2_{\lambda_1}$

$$E^2_{\lambda_1} = \left\{ \vec{x} \in E : (A - \lambda_1 I)^2 \vec{x} = \vec{0} \right\} = Ker(A - \lambda_1 I)^2$$

Para obtener un sistema generador del subespacio vectorial anterior se debe resolver el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4x_1 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 + 4x_6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_6 \\ \forall\, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

En conclusión, el subespacio vectorial es

$$E^2_{\lambda_1} = \{ (0, -x_6, x_3, x_4, x_5, x_6) \mid x_3, x_4, x_5, x_6 \in \mathbb{R}\} \Rightarrow$$

$$E^2_{\lambda_1} = \langle (0,0,1,0,0,0), (0,0,0,1,0,0), (0,0,0,0,1,0), (0,-1,0,0,0,1) \rangle$$

El sistema generador de dicho subespacio vectorial está formado por cuatro vectores linealmente independientes, es decir, $dim\, E^2_{\lambda_1} = 4 = m_a(\lambda_1)$. Por esta razón no se calcula el siguiente subespacio vectorial.

Por tanto, la cadena de subespacios y sus dimensiones son

$$E_{\lambda_1} \subset E^2_{\lambda_1} \text{ siendo las dimensiones } dim\, E_{\lambda_1} = 2 < dim\, E^2_{\lambda_1} = 4$$

En este caso, como $m_g(\lambda_1) = dim\, E_{\lambda_1} = 2$ hay dos bloques elementales de Jordan con autovalor $\lambda_1 = 1$.

Además, como $dim\, E^2_{\lambda_1} - dim\, E_{\lambda_1} = 2$, se seleccionan dos vectores linealmente independientes del subespacio vectorial $E^2_{\lambda_1} - E_{\lambda_1}$, uno por boque y se calculan sus respectivas imágenes respecto a $(f - \lambda_1 i)$ obteniendo así dos vectores pertenecientes al subespacio vectorial E_{λ_1}.

Se seleccionan dos vectores $\vec{u}_6, \vec{u}_4 \in E^2_{\lambda_1} - E_{\lambda_1}$, es decir, $\vec{u}_6, \vec{u}_4 \in E^2_{\lambda_1}$ pero $\vec{u}_6, \vec{u}_4 \notin E_{\lambda_1}$, sean $\vec{u}_6 = (0,0,0,1,0,0)$ y $\vec{u}_4 = (0,0,0,0,1,0)$. Se calculan las imágenes de dichos vectores respecto a $(f - \lambda_1 i)$ obteniendo los vectores $\vec{u}_5$ y $\vec{u}_3$

$$\vec{u}_5 = (A - \lambda_1 I)\vec{u}_6 = (0,-1,0,0,0,1) \in E_{\lambda_1}$$

$$\vec{u}_3 = (A - \lambda_1 I)\vec{u}_4 = (0,0,1,0,0,0) \in E_{\lambda_1}$$

Cada vector perteneciente al último subespacio vectorial y su imagen forman una base de Jordan y tiene asociada una matriz elemental de Jordan. La primera base de Jordan es

$$B_{J_3} = \{\vec{u}_5, \vec{u}_6\}$$

$$B_{J_3} = \{(0,-1,0,0,0,1), (0,0,0,1,0,0)\}$$

El bloque elemental de Jordan correspondiente se obtiene calculando la imagen de cada uno de los vectores de la base respecto a la aplicación f

$$f(\vec{u}_5) = A\vec{u}_5$$

Por otro lado

$$(A - \lambda_1 I)\vec{u}_5 = (A - \lambda_1 I)^2\, \vec{u}_6 \xRightarrow{\vec{u}_6 \in E^2_{\lambda_1}} (A - \lambda_1 I)\vec{u}_6 = 0 \Rightarrow A\vec{u}_5 = \lambda_1 \vec{u}_5 \Rightarrow f(\vec{u}_5) = \lambda_1 \vec{u}_5$$

Se calcula la imagen del vector $\vec{u}_6$

$$f(\vec{u}_6) = A\vec{u}_6$$

$$\vec{u}_5 = (A - \lambda_1 I)\vec{u}_6 \Rightarrow \vec{u}_5 = A\vec{u}_6 - \lambda_1 \vec{u}_6 \Rightarrow A\vec{u}_6 = \vec{u}_5 + \lambda_1 \vec{u}_6 \Rightarrow f(\vec{u}_6) = \vec{u}_5 + \lambda_1 \vec{u}_6$$

Por tanto, la matriz elemental de Jordan es

$$J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La segunda base de Jordan es

$$B_{J_2} = \{\vec{u}_3, \vec{u}_4\}$$

$$B_{J_2} = \{(0,0,1,0,0,0), (0,0,0,0,1,0)\}$$

A continuación se calcula la matriz elemental de Jordan

$$f(\vec{u}_3) = A\vec{u}_3$$

Por otro lado

$$(A-\lambda_1 I)\vec{u}_3 = (A-\lambda_1 I)^2\,\vec{u}_4 \xRightarrow{\vec{u}_4 \in E^2_{\lambda_1}} (A-\lambda_1 I)\vec{u}_3 = 0 \Rightarrow A\vec{u}_3 = \lambda_1\vec{u}_3 \Rightarrow f(\vec{u}_3) = \lambda_1\vec{u}_3$$

$$f(\vec{u}_4) = A\vec{u}_4$$

$$\vec{u}_3 = (A-\lambda_1 I)\vec{u}_4 \Rightarrow \vec{u}_3 = A\vec{u}_4 - \lambda_1\vec{u}_4 \Rightarrow A\vec{u}_4 = \vec{u}_3 + \lambda_1\vec{u}_4 \Rightarrow f(\vec{u}_4) = \vec{u}_3 + \lambda_1\vec{u}_4$$

Por tanto, la matriz elemental de Jordan es

$$J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se calculan los subespacios asociados al autovalor $\lambda_2 = -1$ cuya multiplicidad algebraica es $m_a(\lambda_2) = 2$. Para obtener el subespacio propio asociado al autovalor $\lambda_2 = -1$ se calcula el siguiente núcleo

$$E_{\lambda_2} = \left\{ \vec{x} \in E \,:\, (A-\lambda_2 I)\vec{x} = \vec{0} \right\} = Ker(A-\lambda_2 I)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 + x_6 = 0 \\ 2x_4 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_5 + 2x_6 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = -x_6 \\ \forall\, x_1, x_6 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

El subespacio propio asociado al autovalor $\lambda_2 = -1$ es

$$E_{\lambda_2} = \{\, (x_1, x_1, 0, 0, -x_6, x_6) \mid x_1, x_6 \in \mathbb{R}\} = \langle (1,1,0,0,0,0), (0,0,0,0,-1,1) \rangle$$

El sistema generador del subespacio propio consta de dos vectores linealmente independientes, es decir, $dim\, E_{\lambda_2} = 2 = m_a(\lambda_2)$. En este caso, como la dimensión algebraica y la dimensión geométrica coinciden no se construye la cadena de subespacios. Los vectores de la base de Jordan son los vectores propios del autovalor $\lambda_2 = -1$ siendo el bloque de Jordan correspondiente una matriz diagonal, es decir, la base de Jordan es

$$B_{J_1} = \{(1,1,0,0,0,0), (0,0,0,0,-1,1)\}$$

siendo el bloque de Jordan

$$J_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En conclusión, la base completa de Jordan es

$$B = B_{J_1} \cup B_{J_2} \cup B_{J_3}$$

$$B = \{(1,1,0,0,0,0),(0,0,0,0,-1,1),(0,0,1,0,0,0),(0,0,0,0,1,0),(0,-1,0,0,0,1),(0,0,0,1,0,0)\}$$

Y la matriz de Jordan es

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0_{2x2} & 0_{2x2} \\ 0_{2x2} & J_2 & 0_{2x2} \\ 0_{2x2} & 0_{2x2} & J_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

siendo la matriz regular P que cumple la propiedad $J = P^{-1}AP$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

P11. Obtener la forma canónica de Jordan de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 16 & 8 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

RESOLUCIÓN

Se calcula el polinomio característico de la matriz A

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 16 & 8 & 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^4(\lambda+1)^2$$

Por lo que los autovalores de la matriz y las correspondientes multiplicidades algebraicas son

$$(\lambda-1)^4(\lambda+1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases} \text{ donde } \begin{matrix} m_a(\lambda_1) = 4 \\ m_a(\lambda_2) = 2 \end{matrix}$$

Se obtienen los subespacios asociados al autovalor $\lambda_1 = 1$ cuya multiplicidad algebraica es $m_a(\lambda_1) = 4$. El subespacio propio se calcula resolviendo el siguiente sistema

$$E_{\lambda_1} = \{\vec{x} \in E : (A - \lambda_1 I)\vec{x} = \vec{0}\} = Ker(A - \lambda_1 I)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 16 & 8 & 4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2x_3 - x_4 = 0 \\ -2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_6 = 0 \\ 16x_3 + 8x_4 + 4x_5 - 4x_6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = -2x_3 \\ x_6 = 0 \\ x_5 = 0 \\ \forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Por lo que el subespacio propio asociado al autovalor $\lambda_1 = 1$ es

$$E_{\lambda_1} = \{\, (x_1, x_2, x_3, -2x_3, 0,0) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} \Rightarrow$$

$$E_{\lambda_1} = \langle (1,0,0,0,0,0), (0,1,0,0,0,0), (0,0,1,-2,0,0) \rangle$$

Dicho subespacio esta generado por tres vectores linealmente independientes, por lo que $m_g(\lambda_1) = dim\, E_{\lambda_1} = 3 \neq m_a(\lambda_1) = 4 \Rightarrow$ Se construye el siguiente subespacio vectorial

$$E_{\lambda_1}^2 = \left\{ \vec{x} \in E : (A - \lambda_1 I)^2 \vec{x} = \vec{0} \right\} = Ker(A - \lambda_1 I)^2$$

El sistema de ecuaciones lineales a resolver en este caso es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & -8 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -64 & -32 & -16 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -16x_3 - 8x_4 - 4x_5 + 4x_6 = 0 \\ -64x_3 - 32x_4 - 16x_5 + 16x_6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_6 = 0 \\ x_5 = -4x_3 - 2x_4 \\ \forall x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

El subespacio vectorial es

$$E_{\lambda_1}^2 = \left\{ \left(x_1, x_2, x_3, x_{4,} - 4x_3 - 2x_4, 0 \right) \middle|\, x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow$$

$$E_{\lambda_1}^2 = \langle (1,0,0,0,0,0), (0,1,0,0,0,0), (0,0,1,0,-4,0), (0,0,0,1,-2,0) \rangle$$

$E_{\lambda_1}^2$ esta generado por cuatro vectores linealmente independientes, por lo que $dim\, E_{\lambda_1}^2 = 4 = m_a(\lambda_1)$ y no se calcula el siguiente subespacio vectorial.

En conclusión, la cadena de subespacios que se ha obtenido para el autovalor $\lambda_1 = 1$ es $E_{\lambda_1} \subset E_{\lambda_1}^2$ siendo las correspondientes dimensiones $dim\, E_{\lambda_1} = 3 < dim\, E_{\lambda_1}^2 = 4$.

Como $dim\, E_{\lambda_1} = 3$, hay tres bloques elementales de Jordan con autovalor $\lambda_1 = 1$. Es más, como $dim\, \mathrm{E}_{\lambda_1}^2 - dim\, \mathrm{E}_{\lambda_1} = 1$, en este caso la base completa de Jordan estará formada por un vector del subespacio vectorial $E_{\lambda_1}^2 - E_{\lambda_1}$ y tres vectores del subespacio vectorial E_{λ_1}. Se selecciona el único vector del subespacio vectorial $E_{\lambda_1}^2 - E_{\lambda_1}$, es decir, un vector $\vec{u}_6 \in E_{\lambda_1}^2$ pero $\vec{u}_6 \notin E_{\lambda_1}$. Por ejemplo sea el vector $\vec{u}_6 = (0,0,1,0,-4,0)$, se calcula su imagen respecto $(f - \lambda_1 i)$,

$$\vec{u}_5 = (A - \lambda_1 I)\vec{u}_6 = (-2,0,-2,4,0,0) \in E_{\lambda_1}$$

de esta forma se obtienen un vector $\vec{u}_6 \in E_{\lambda_1}^2 - E_{\lambda_1}$ y otro vector $\vec{u}_5 \in E_{\lambda_1}$. Como $dim\, E_{\lambda_1} = 3$, faltan por seleccionar dos vectores pertenecientes al subespacio vectorial E_{λ_1} que sean linealmente independientes entre sí y respecto de los vectores $\vec{u}_5$ y $\vec{u}_6$. Sean dichos vectores $\vec{u}_4 = (1,0,0,0,0,0)$ y $\vec{u}_3 = (0,1,0,0,0,0)$.

La primera base de Jordan es

$$B_{J_4} = \{\vec{u}_5, \vec{u}_6\}$$

$$B_{J_4} = \{(-2,0,-2,4,0,0), (0,0,1,0,-4,0)\}$$

La matriz elemental de Jordan correspondiente a esta base se obtiene calculando las imagen de los vectores $\vec{u}_5, \vec{u}_6$

$$f(\vec{u}_5) = A\vec{u}_5$$

Por otro lado

$$(A - \lambda_1 I)\vec{u}_5 = (A - \lambda_1 I)^2\, \vec{u}_6 \xRightarrow{\vec{u}_6 \in E_{\lambda_1}^2} (A - \lambda_1 I)\vec{u}_5 = 0 \Rightarrow A\vec{u}_5 = \lambda_1 \vec{u}_5 \text{cir}, f(\vec{u}_5) = \lambda_1 \vec{u}_5$$

$$f(\vec{u}_6) = A \cdot \vec{u}_6$$

$$\vec{u}_5 = (A - \lambda_1 I)\vec{u}_6 \Rightarrow \vec{u}_5 = A\vec{u}_6 - \lambda_1 \vec{u}_6 \Rightarrow A\vec{u}_6 = \vec{u}_5 + \lambda_1 \vec{u}_6 \Rightarrow f(\vec{u}_6) = \vec{u}_5 + \lambda_1 \vec{u}_6$$

Por tanto, la matriz elemental de Jordan es

$$J_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La segunda base de Jordan correspondiente al autovalor $\lambda_1 = 1$ es

$$B_{J_3} = \{\vec{u}_4\}$$

$$B_{J_3} = \{(1,0,0,0,0,0)\}$$

Como el vector $\vec{u}_4 \in E_{\lambda_1}$, la matriz elemental de Jordan correspondiente a esta base es

$$J_3 = (1)$$

Por último, la tercera y última base de Jordan correspondiente al autovalor $\lambda_1 = 1$ es la base formada por el vector $\vec{u}_3$

$$B_{J_2} = \{\vec{u}_3\}$$

$$B_{J_2} = \{(0,1,0,0,0,0)\}$$

Y la matriz elemental de Jordan asociada a esta base es

$$J_2 = (1)$$

Se calculan los subespacios asociados al autovalor $\lambda_2 = -1$ cuya multiplicidad algebraica es $m_a(\lambda_2) = 2$. El subespacio propio asociado al autovalor $\lambda_2 = -1$ es el siguiente núcleo

$$E_{\lambda_2} = \left\{ \vec{x} \in E : (A - \lambda_2 I)\vec{x} = \vec{0} \right\} = Ker(A - \lambda_2 I)$$

Por tanto, se debe resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 16 & 8 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_2 = 0 \\ -x_4 = 0 \\ 4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_5 - x_6 = 0 \\ 16x_3 + 8x_4 + 4x_5 - 2x_6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_6 = 2x_5 \\ \forall x_5 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

El subespacio propio asociado al autovalor $\lambda_2 = -1$ es

$$E_{\lambda_2} = \{ (0,0,0,0,x_5,2x_5) \mid x_5 \in \mathbb{R}\} = \langle (0,0,0,0,1,2) \rangle$$

Como el sistema generador del subespacio propio consta de un único vector, $m_g(\lambda_2) = dim\, E_{\lambda_2} = 1 \neq m_a(\lambda_2) = 2$, se debe calcular el subespacio vectorial $E^2_{\lambda_2}$

$$E^2_{\lambda_2} = \left\{ \vec{x} \in E : (A - \lambda_2 I)^2\vec{x} = \vec{0} \right\} = Ker(A - \lambda_2 I)^2$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -8 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 8x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_2 = 0 \\ -4x_3 - 4x_4 = 0 \\ 16x_3 + 12x_4 = 0 \\ -16x_3 - 8x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \\ \forall x_5, x_6 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Por tanto el segundo subespacio vectorial es

$$E^2_{\lambda_2} = \{ (0,0,0,0,x_5,x_6) \mid x_5, x_6 \in \mathbb{R}\} = \langle (0,0,0,0,1,0), (0,0,0,0,0,1) \rangle$$

$E^2_{\lambda_2}$ es el último subespacio vectorial a calcular dado que su dimensión coincide con la multiplicidad algebraica del autovalor λ_2, es decir, $dim\, E^2_{\lambda_2} = 2 = m_a(\lambda_2)$.

En este caso la cadena de subespacios es $E_{\lambda_2} \subset E^2_{\lambda_2}$ siendo las dimensiones $dim\, E_{\lambda_2} = 1 < dim\, E^2_{\lambda_2} = 2$ y la diferencia entre ellas, $dim\, E^2_{\lambda_2} - dim\, E_{\lambda_2} = 1$. Por tanto, se tienen un único bloque elemental de Jordan y bastará seleccionar un único vector $\vec{u}_2 \in E^2_{\lambda_2} - E_{\lambda_2}$ y calcular su imagen respecto $(f - \lambda_2 i)$ para obtener una base de Jordan

$$B_{J_1} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$$

Se escoge un vector $\vec{u}_2 \in E^2_{\lambda_2} - E_{\lambda_2}$, es decir, el vector $\vec{u}_2$ perteneciente al subespacio vectorial $E^2_{\lambda_2}$ pero no perteneciente a E_{λ_2}. Sea el vector $\vec{u}_2 = (0,0,0,0,0,1)$, se calcula su imagen respecto de $(A - \lambda_2 I)$

$$\vec{u}_1 = (A - \lambda_2 I)\vec{u}_2 = (0,0,0,0,-1,-2) \in E_{\lambda_2}.$$

La base de Jordan correspondiente al autovalor $\lambda_2 = -1$ es

$$B_{J_1} = \{(0,0,0,0,-1,-2), (0,0,0,0,0,1)\}$$

A continuación se construye la única matriz elemental de Jordan correspondiente al autovalor $\lambda_2 = -1$

$$f(\vec{u}_1) = A\vec{u}_1$$

Por otro lado

$$(A - \lambda_2 I)\vec{u}_1 = (A - \lambda_2 I)^2\, \vec{u}_2 \overset{\vec{u}_2 \in E^2_{\lambda_2}}{\Longrightarrow} (A - \lambda_2 I)\vec{u}_1 = 0 \Rightarrow A\vec{u}_1 = \lambda_2 \vec{u}_1 \Rightarrow f(\vec{u}_1) = \lambda_2 \vec{u}_1$$

$$f(\vec{u}_2) = A\vec{u}_2$$

$$\vec{u}_1 = (A - \lambda_2 I)\vec{u}_2 \Rightarrow \vec{u}_1 = A\vec{u}_2 - \lambda_2 \vec{u}_2 \Rightarrow A\vec{u}_2 = \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 \Rightarrow f(\vec{u}_2) = \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2$$

Por tanto, la matriz elemental de Jordan es

$$J_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En resumen, uniendo todas las bases se obtiene la base completa de Jordan

$$B = B_{J_1} \cup B_{J_2} \cup B_{J_3} \cup B_{J_4}$$

Esto es

$$B = \{(0,0,0,0,-1,-2), (0,0,0,0,0,1), (0,1,0,0,0,0), (1,0,0,0,0,0), (-2,0,-2,4,0,0), (0,0,1,0,-4,0)\}$$

siendo la matriz de Jordan

$$J=\left(\begin{array}{c:c:c:c} J_1 & 0_{2x1} & 0_{2x1} & 0_{2x2} \\ \hdashline 0_{1x2} & J_2 & 0_{1x1} & 0_{1x2} \\ \hdashline 0_{1x2} & 0_{1x1} & J_3 & 0_{1x2} \\ \hdashline 0_{2x2} & 0_{2x1} & 0_{2x1} & J_4 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz regular P que cumple la propiedad $J=P^{-1}AP$ se obtiene al colocar los vectores de la base de Jordan por columnas

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

CUESTIONES RESUELTAS

C1. Sea f un endomorfismo definido en un espacio vectorial $(E, K, \circ)$ de dimensión p y sea A la matriz regular asociada al mismo. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Si las afirmaciones son ciertas calcular el autovalor correspondiente.

a) Si $\vec{v}$ es un autovector de A, entonces $\vec{v}$ es un autovector de A^n, siendo $n \geq 0$.

b) Si $\vec{v}$ es un autovector no nulo de A, entonces $\vec{v}$ es un autovector de A^{-1}.

RESOLUCIÓN

a) Verdadero. Si $\vec{v}$ es un autovector de A, $\exists \lambda \in K: A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. Por otro lado, el vector $\vec{v}$ será un autovector de A^n si $\exists \mu \in K: A^n\vec{v} = \mu\vec{v}$.

Utilizando el método de inducción se demuestra que $\vec{v}$ es un autovector de A^n.

Se demuestra esta igualdad para el caso $n = 2$. Partiendo de la igualdad $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ y multiplicando ambos lados de la misma por la matriz A

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Rightarrow A(A\vec{v}) = A(\lambda\vec{v}) \Rightarrow A^2\vec{v} = \lambda(A\vec{v})$$

Como $\vec{v}$ es un autovector de A

$$A^2\vec{v} = \lambda \underbrace{(A\vec{v})}_{\lambda\vec{v}} \Rightarrow A^2\vec{v} = \lambda^2\vec{v}$$

Por lo que $\vec{v}$ es un autovector de A^2 siendo λ^2 el autovalor que le corresponde.

Supóngase que la afirmación es cierta para $n-1$, es decir, que si $\vec{v}$ es un autovector de A, entonces es un autovector de A^{n-1} con autovalor asociado λ^{n-1}, es decir, $A^{n-1}\vec{v} = \lambda^{n-1}\vec{v}$.

Se demuestra que $\vec{v}$ es un autovector de A^n

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Rightarrow A^{n-1}(A\vec{v}) = A^{n-1}(\lambda\vec{v}) \Rightarrow A^n\vec{v} = \lambda \underbrace{(A^{n-1}\vec{v})}_{\lambda^{n-1}\vec{v}} \Rightarrow A^n\vec{v} = \lambda^n\vec{v}$$

Por lo que queda demostrado que $\vec{v}$ es un autovector de A^n, siendo λ^n el autovalor correspondiente.

b) Verdadero. Como $\vec{v}$ es un autovector de A, $\exists \lambda \in K: A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. Por otro lado, el vector $\vec{v}$ será un autovector de A^{-1} si $\exists \mu \in K: A^{-1}\vec{v} = \mu\vec{v}$.

Partiendo de la igualdad $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ y multiplicando ambos lados de la misma por la matriz A^{-1}, que existe por ser A regular, se obtiene

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Rightarrow A^{-1}(A\vec{v}) = A^{-1}(\lambda\vec{v}) \Rightarrow I\vec{v} = \lambda(A^{-1}\vec{v}) \Rightarrow \vec{v} = \lambda(A^{-1}\vec{v})$$

Si $\lambda \neq 0$ existe su simétrico $\frac{1}{\lambda}$ en el cuerpo K. Con lo que de la última igualdad se tiene

$$\vec{v} = \lambda(A^{-1}\vec{v}) \Rightarrow A^{-1}\vec{v} = \frac{1}{\lambda}\vec{v}$$

Esto significa que $\exists\mu = \frac{1}{\lambda} \in K: A^{-1}\vec{v} = \mu\vec{v}$, es decir, que $\vec{v}$ es un autovector de A^{-1}, siendo $\mu = \frac{1}{\lambda}$ el autovalor que le corresponde.

Si $\lambda = 0 \Rightarrow |A| = 0$, por ser el valor del determinante de una matriz el producto de sus autovalores. Entonces A no es regular, lo cual se contradice con el enunciado.

C2. Sea f un endomorfismo definido en un espacio vectorial $(E, K, \circ)$ y sean $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ dos autovectores linealmente independientes cuyos autovalores son respectivamente λ_1 y λ_2 $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Si las afirmaciones son ciertas calcular el autovalor correspondiente.

a) $\vec{w} = 2\vec{u}_1$ es un autovector de f.

b) $\vec{v} = 2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2$ es un autovector de f.

RESOLUCIÓN

a) Verdadero. Como $\vec{u}_1$ es un autovector de f y λ_1 es el autovalor que le corresponde, entonces $f(\vec{u}_1) = \lambda_1\vec{u}_1$. Se calcula el valor de $f(\vec{w})$ utilizando la linealidad de la aplicación f y sabiendo que $\vec{u}_1$ es un autovector de f

$$f(\vec{w}) = f(2\vec{u}_1) = 2f(\vec{u}_1) = 2\lambda_1\vec{u}_1 \Rightarrow f(\vec{w}) = \mu_1\vec{u}_1 \text{ siendo } \mu_1 = 2\lambda_1$$

Con lo que queda demostrado que si $\vec{u}_1$ es un autovector de f siendo λ_1 su autovalor correspondiente, entonces, $\vec{w} = 2\vec{u}_1$ es un autovector de f, siendo su autovalor correspondiente $\mu_1 = 2\lambda_1$. Utilizando el mismo procedimiento se podría demostrar que $\vec{w} = \alpha\vec{u}_1$ es un autovector con autovalor $\mu_1 = \alpha\lambda_1$.

b) Falso. El vector $\vec{v}$ es un autovector de f si existe $\mu \in K$ tal que $f(\vec{v}) = \mu\vec{v}$, es decir

$$f(\vec{v}) = \mu(2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2)$$

Se calcula el valor de $f(\vec{v})$ utilizando la linealidad de la aplicación f y sabiendo que $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ son autovectores de f

$$f(\vec{v}) = f(2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2) = 2f(\vec{u}_1) + 3f(\vec{u}_2) = 2\lambda_1\vec{u}_1 + 3\lambda_2\vec{u}_2 \Rightarrow$$

$$f(\vec{v}) = 2\lambda_1\vec{u}_1 + 3\lambda_2\vec{u}_2$$

Igualando ambas expresiones de $f(\vec{v})$ se tiene

$$\mu(2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2) = 2\lambda_1\vec{u}_1 + 3\lambda_2\vec{u}_2 \Rightarrow 2(\mu - \lambda_1)\vec{u}_1 + 3(\mu - \lambda_2)\vec{u}_2 = 0$$

Como $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ son dos autovectores linealmente independientes, de la igualdad anterior se concluye que $\mu - \lambda_1 = 0$ y $\mu - \lambda_2 = 0$. Esto es, $\mu = \lambda_1 = \lambda_2$. Pero esto no es cierto, ya que los autovalores λ_1 y λ_2 son distintos.

C3. Determinar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: Sean f y g dos endomorfismos definidos en el espacio vectorial $(E, K, \circ)$ y sean A y B las matrices asociadas a los mismos. Si $\vec{v}$ es un autovector de A y de B, entonces, es un autovector de $A \cdot B$.

RESOLUCIÓN

Verdadero. Como $\vec{v}$ es un autovector de A y de B, $\exists \lambda \in K: A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ y $\exists \alpha \in K: B\vec{v} = \alpha\vec{v}$.

Por otro lado, $\vec{v}$ será un autovector de AB si $\exists \mu \in K: (AB)\vec{v} = \mu\vec{v}$. Partiendo de la expresión $(AB)\vec{v}$

$$(AB)\vec{v} = A\,\underbrace{(B\vec{v})}_{\alpha\vec{v}} = A(\alpha\vec{v}) = \alpha \cdot \underbrace{A\vec{v}}_{\lambda\vec{v}} = \alpha\lambda\vec{v} \Rightarrow (AB)\vec{v} = \alpha\lambda\vec{v}$$

Por lo que $\exists \mu = \alpha\lambda \in K: (AB)\vec{v} = \mu\vec{v}$, es decir, $\vec{v}$ es un autovector de AB.

C4. Sea el endomorfismo diagonalizable f definido en $\mathbb{R}^n$ y sea A su matriz asociada. Sean $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 2$ autovalores de f siendo sus multiplicidades algebraicas $\alpha_1 = (n-1)$ y $\alpha_2 = 1$ respectivamente. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) $dim(Ker f) = n - 1$

b) A es una matriz regular.

RESOLUCIÓN

a) Verdadero. Como f es diagonalizable, la multiplicidad algebraica y la geométrica de los autovalores coinciden. Es decir, $dim\,(E_{\lambda_i}) = m_a(\lambda_i)$, siendo $m_a(\lambda_i)$ la multiplicidad algebraica del autovalor λ_i.

Como $\lambda_1 = 0 \Rightarrow E_{\lambda_1} = Ker(f - \lambda_1 I) = Ker(f)$, entonces, $dim\,(E_{\lambda_1}) = dim\big(Ker(f)\big) = n - 1$. Por lo que queda demostrada la igualdad.

b) Falso. Como f es diagonalizable

$$P_f(\lambda) = |A - \lambda I| = (\lambda - \lambda_1)^{n-1}(\lambda - \lambda_2) = \lambda^{n-1}(\lambda - 2)$$

Sustituyendo $\lambda = 0$ en la expresión anterior

$$P_f(0) = |A| = 0$$

Dado que el determinante de la matriz A es nulo, la matriz no es regular.

EJERCICIOS RESUELTOS CON MATHEMATICA

M1. Calcular los valores y vectores propios del endomorfismo $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada en una determinada base es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

RESOLUCIÓN

```
Remove["Global`*"]
```

Se define la matriz A asociada al endomorfismo

```
a = {{1, 1, 0}, {2, -1, 2}, {0, 1, 1}}; MatrixForm[a]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se calcula el polinomio característico y se resuelve la ecuación característica obteniendo los autovalores de f

```
pol = Det[a - λ * IdentityMatrix[3]]
```

$-5 + 5\lambda + \lambda^2 - \lambda^3$

```
sol = Solve[pol == 0]
```

$\{\{\lambda \to 1\}, \{\lambda \to -\sqrt{5}\}, \{\lambda \to \sqrt{5}\}\}$

```
λ1 = sol[[1]]
```

$\{\lambda \to 1\}$

```
λ1 = λ /. Flatten[λ1]
```

1

```
λ2 = sol[[2]]; λ2 = λ /. Flatten[λ2]
-√5
```

```
λ3 = sol[[3]]; λ3 = λ /. Flatten[λ3]
√5
```

Se calculan los autovectores correspondientes a los autovalores anteriores

```
x = {x1, x2, x3};
```

```
v1 = Solve[(a - λ1 * IdentityMatrix[3]).x == {0, 0, 0}]
{{x2 → 0, x1 → -x3}}
```

```
v1 = x /. v1[[1]]
{-x3, 0, x3}
```

Los autovectores correspondientes al autovalor $\lambda_1 = 1$ son de la forma $(-x_3, 0, x_3)$ y

$$E_{\lambda_1} = \{(-x_3, 0, x_3): x_3 \in \mathbb{R}\} = \langle(-1,0,1)\rangle$$

es un subespacio vectorial de dimensión 1. Dando cualquier valor a x_3 se obtiene un autovector que forma una base de este subespacio vectorial

```
v1 = v1 /. x3 → 1
{-1, 0, 1}
```

Se procede de la misma manera para los demás autovalores obteniéndose los autovectores que forman la base de los subespacio vectoriales propios. Así, para $\lambda_2 = -\sqrt{5}$

```
v2 = Solve[(a - λ2 * IdentityMatrix[3]).x == {0, 0, 0}]
{{x1 → x3, x2 → -(1 + √5) x3}}
```

```
v2 = x /. v2[[1]]
{x3, -(1 + √5) x3, x3}
```

```
v2 = v2 /. x3 → 1
```
```
{1, -1 - √5, 1}
```

El subespacio propio correspondiente a $\lambda_2 = -\sqrt{5}$ es

$$E_{\lambda_2} = \{(z, (-1-\sqrt{5})z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \langle(1, -1-\sqrt{5}, 1)\rangle$$

Finalmente, se calcula el subespacio propio asociado al autovalor $\lambda_3 = +\sqrt{5}$

```
v3 = Solve[(a - λ3 * IdentityMatrix[3]).x == {0, 0, 0}]
```
```
{{x1 → x3, x2 → -(1 - √5) x3}}
```

```
v3 = x /. v3[[1]]
```
```
{x3, -(1 - √5) x3, x3}
```

```
v3 = v3 /. x3 → 1
```
```
{1, -1 + √5, 1}
```

En consecuencia, $E_{\lambda_3} = \{(z, (-1+\sqrt{5})z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \langle(1, -1+\sqrt{5}, 1)\rangle$.

Los autovectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ forman una base de $\mathbb{R}^3$, siendo la matriz asociada al endomorfismo f respecto a dicha base, la matriz diagonal D formada por los autovalores λ_1, λ_2 y λ_3.

```
d = DiagonalMatrix[{λ1, λ2, λ3}]; MatrixForm[d]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Se comprueba que se cumple la igualdad $D = P^{-1}AP$ siendo P la matriz formada al colocar en columnas los autovectores linealmente independientes

```
p = Transpose[{v1, v2, v3}]; MatrixForm[p]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1-\sqrt{5} & -1+\sqrt{5} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
d == Inverse[p].a.p
```

```
True
```

Todo lo realizado anteriormente puede resolverse utilizando comandos específicos del programa *Mathematica* para el tema de diagonalización.

Cálculo del polinomio característico

```
CharacteristicPolynomial[a, λ]
```

$-5 + 5\lambda + \lambda^2 - \lambda^3$

Cálculo de autovalores

```
Eigenvalues[a]
```

$\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}, 1\}$

Cálculo de autovectores

```
Eigenvectors[a]
```

$\{\{1, -1-\sqrt{5}, 1\}, \{1, -1+\sqrt{5}, 1\}, \{-1, 0, 1\}\}$

Cálculo de autovalores y autovectores simultáneamente

```
sol = Eigensystem[a]
```

$\{\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}, 1\}, \{\{1, -1-\sqrt{5}, 1\}, \{1, -1+\sqrt{5}, 1\}, \{-1, 0, 1\}\}\}$

Comprobación de la igualdad $D = P^{-1}AP$

```
d = DiagonalMatrix[sol[[1]]]; MatrixForm[d]
```

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
p = Transpose[sol[[2]]]; MatrixForm[p]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1-\sqrt{5} & -1+\sqrt{5} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
d == Inverse[p].a.p

True
```

M2. Calcular una matriz de dimensión 3x3 cuyos valores propios son $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = -2$, siendo $\vec{v}_1 = (1,2,1)$, $\vec{v}_2 = (-1,4,1)$ y $\vec{v}_3 = (1,-1,-1)$ sus correspondientes vectores propios.

RESOLUCIÓN

```
Remove["Global`*"]
```

Se definen los valores y los vectores propios y se obtienen la matriz diagonal D y la matriz de paso P

```
λ1 = 3; λ2 = 1; λ3 = -2; v1 = {1, 2, 1}; v2 = {-1, 4, 1};
v3 = {1, -1, -1};
```

```
d = DiagonalMatrix[{λ1, λ2, λ3}]; MatrixForm[d]
```

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

```
p = Transpose[{v1, v2, v3}]; MatrixForm[p]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Se define una matriz genérica A de dimensión 3x3 y, utilizando la igualdad $D = P^{-1}AP$, se obtienen sus elementos

```
a = Array[x, {3, 3}];
```

```
sol = Solve[d == Inverse[p].a.p]

{{x[1, 1] → 1, x[1, 2] → -1, x[1, 3] → 4, x[2, 1] → 3,
  x[2, 2] → 2, x[2, 3] → -1, x[3, 1] → 2, x[3, 2] → 1, x[3, 3] → -1}}
```

```
a = a /. sol[[1]]; MatrixForm[a]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Otra forma de calcular la matriz A es utilizar la ecuación $D = P^{-1}AP$

```
a = p.d.Inverse[p]; MatrixForm[a]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

M3. Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 2 & 0 & c \end{pmatrix}$ siendo a, b y c parámetros reales. Si se sabe que la traza de M es 6 y que $\vec{v}_1 = (0,0,1)$ y $\vec{v}_2 = (1,-1,2)$ son dos vectores propios de M,

a) Determinar la matriz M.

b) Calcular el valor de la expresión $3M^3 - 7M^2 + 2M - I$ utilizando los conceptos de valor y vector propio.

RESOLUCIÓN

```
Remove["Global`*"]
```

a) Se definen la matriz M y los vectores propios $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$

```
m = {{2, a, 0}, {1, b, 0}, {2, 0, c}}; MatrixForm[m]
```

$$\begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 2 & 0 & c \end{pmatrix}$$

```
v1 = {0, 0, 1}; v2 = {1, -1, 2};
```

Utilizando la definición de valor y vector propio de una matriz, $M\vec{v} = \lambda\vec{v}$, se obtienen las siguientes asignaciones

```
sol = Solve[m.v1 == λ1 * v1]
```

```
{{c → λ1}}
```

```
sol = Solve[m.v2 == λ2 * v2]
```

```
{{a → 3 - b, λ2 → -1 + b, c → -2 + b}}
```

Resolviendo el sistema formado por estas ecuaciones y el valor de la traza, se obtienen los valores a, b y c pedidos, además de los valores propios correspondientes a los vectores propios $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$

```
sol = Solve[{traza == 6, c == λ1, a == 3 - b, λ2 == -1 + b, λ1 == -2 + b},
  {a, b, c, λ1, λ2}]
```

```
{{a → 0, b → 3, c → 1, λ1 → 1, λ2 → 2}}
```

```
a = a /. sol[[1]]; b = b /. sol[[1]]; c = c /. sol[[1]]; λ1 = λ1 /. sol[[1]];
λ2 = λ2 /. sol[[1]];
```

```
m; MatrixForm[m]
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Se calcula la traza de M

```
traza = 2 + b + c
```

```
2 + b + c
```

Como la suma de los valores propios de una matriz coincide con su traza, se obtiene el tercer valor propio de la matriz, λ_3, y a partir de él la matriz diagonal D

```
sol = Solve[traza == λ1 + λ2 + λ3, λ3]
```

```
{{λ3 → 3}}
```

```
λ3 = λ3 /. sol[[1]]
```

```
3
```

```
d = DiagonalMatrix[{λ1, λ2, λ3}]; MatrixForm[d]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Utilizando la definición de valor y vector propio de una matriz, se calcula el vector propio asociado a λ_3, obteniéndose así la matriz de paso P

```
v3 = {x, y, z}; sol = Solve[m.v3 == λ3 * v3]
```

```
{{x → 0, z → 0}}
```

```
v3 = v3 /. sol[[1]]
```

```
{0, y, 0}
```

```
v3 = v3 /. y → 1
```

```
{0, 1, 0}
```

```
p = Transpose[{v1, v2, v3}]; MatrixForm[p]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular el valor de la expresión $3M^3 - 7M^2 + 2M - I$ se utiliza la igualdad $M^n = PD^nP^{-1}$

```
exp = p.(3 d.d.d - 7 d.d + 2 d - IdentityMatrix[3]).Inverse[p];
MatrixForm[exp]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 24 & 23 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Se comprueba este valor calculando la expresión directamente

```
exp == 3 MatrixPower[m, 3] - 7 MatrixPower[m, 2] + 2 m - IdentityMatrix[3]
```

```
True
```

M4. Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo cuya matriz asociada es $M = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & -1 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$. Hallar los valores del parámetro real a para los cuales M es diagonalizable y diagonalizarla cuando sea posible.

RESOLUCIÓN

```
Remove["Global`*"]
```

Se define la matriz *M* y se calculan sus autovalores

```
m = {{a, 0, -1}, {0, -1, a}, {0, a, -1}}; MatrixForm[m]
```

$$\begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & -1 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$$

```
sol = Eigenvalues[m]
```

```
{-1 - a, -1 + a, a}
```

```
λ1 = -1 - a; λ2 = -1 + a; λ3 = a;
```

Existen diferentes casos en función de los valores del parámetro real a. Por esta razón, se igualan entre sí los autovalores, obteniéndose los valores de a que hace que sean iguales.

```
Solve[λ1 == λ2]
```

```
{{a → 0}}
```

```
Solve[λ1 == λ3]
```

$$\left\{\left\{a \to -\frac{1}{2}\right\}\right\}$$

```
Solve[λ2 == λ3]
```

```
{}
```

<u>Caso 1:</u> $a \neq 0$ y $a \neq -\frac{1}{2}$. En este caso se obtienen tres valores propios distintos con multiplicidad algebraica igual a uno, con lo que la matriz es diagonalizable. Se calculan los vectores propios asociados a cada valor propio.

```
x = {x1, x2, x3};
```

```
v1 = Solve[(m - (-1 - a) * IdentityMatrix[3]).x == {0, 0, 0}, x]
```

$$\left\{\left\{x1 \to -\frac{x3}{-1 - 2a},\ x2 \to -x3\right\}\right\}$$

```
v1 = x /. v1[[1]]
```

$\left\{-\frac{x3}{-1-2a}, -x3, x3\right\}$

```
v1 = v1 /. x3 → 1 + 2 a // Simplify
```

```
{1, -1 - 2 a, 1 + 2 a}
```

El subespacio propio asociado al autovalor $\lambda_1 = -1 - a$ es

$$E_{\lambda_3} = \{(x, -(2a+1)x, (2a+1)x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle(1, -(2a+1), 2a+1)\rangle, \text{ con } m_g(\lambda_3) = 1$$

Se calcula el subespacio propio asociado a $\lambda_2 = -1 + a$

```
v2 = Solve[(m - (-1 + a) * IdentityMatrix[3]).x == {0, 0, 0}, x]
```

```
{{x1 → x3, x2 → x3}}
```

```
v2 = x /. v2[[1]]
```

```
{x3, x3, x3}
```

```
v2 = v2 /. x3 → 1 // Simplify
```

```
{1, 1, 1}
```

$$E_{\lambda_2} = \{(z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \langle(1,1,1)\rangle, \text{ siendo } m_g(\lambda_2) = 1$$

Finalmente, se calcula el subespacio propio asociado al autovalor $\lambda_3 = a$

```
v3 = Solve[(m - a * IdentityMatrix[3]).x == {0, 0, 0}, x]
```

```
{{x2 → 0, x3 → 0}}
```

```
v3 = x /. v3[[1]]
```

```
{x1, 0, 0}
```

```
v3 = v3 /. x1 → 1 // Simplify
```

```
{1, 0, 0}
```

$$E_{\lambda_3} = \{(x, 0,0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle(1,0,0)\rangle, \text{ siendo } m_g(\lambda_1) = 1$$

Como se ha mencionado anteriormente, la matriz A es diagonalizable y por ello se cumple la relación $D = P^{-1}AP$

```
d = DiagonalMatrix[{λ1, λ2, λ3}]; MatrixForm[d]
```

$$\begin{pmatrix} -1-a & 0 & 0 \\ 0 & -1+a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

```
p = Transpose[{v1, v2, v3}]; MatrixForm[p]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1-2a & 1 & 0 \\ 1+2a & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
d == Inverse[p].m.p // Simplify
```

```
True
```

Caso 2: $a = 0$. En este caso se obtienen dos valores propios distintos:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases} \quad \text{donde} \quad \begin{matrix} m_a(\lambda_1) = 1 \\ m_a(\lambda_2) = 2 \end{matrix}$$

Se calculan los subespacios propios para comprobar si las multiplicidades geométricas y algebraicas coinciden

```
m1 = m /. a → 0; λ1 = 0; λ2 = -1; x = {x1, x2, x3};
```

El subespacio propio asociado al autovalor $\lambda_1 = 0$ es

```
v1 = Solve[(m1 - λ1 * IdentityMatrix[3]).x == {0, 0, 0}, x]
```

```
{{x2 → 0, x3 → 0}}
```

```
v1 = x /. v1[[1]]
```

```
{x1, 0, 0}
```

```
v1 = v1 /. x1 → 1 // Simplify
```

```
{1, 0, 0}
```

Es decir, $E_{\lambda_1} = \{(x, 0,0) \,|x \in \mathbb{R}\} = \langle(1,0,0)\rangle$, siendo $m_g(\lambda_1) = 1$.

De forma similar, el subespacio asociado a $\lambda_2 = -1$ es

```
v2 = Solve[(m1 - λ2 * IdentityMatrix[3]).x == {0, 0, 0}, x]
```

```
{{x1 → x3}}
```

```
v2 = x /. v2[[1]]
```

```
{x3, x2, x3}
```

```
v21 = v2 /. {x2 → 1, x3 → 0}
```

```
{0, 1, 0}
```

```
v22 = v2 /. {x2 → 0, x3 → 1}
```

```
{1, 0, 1}
```

$$E_{\lambda_2} = \{(z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,1), (0,1,0) \rangle \text{, siendo } m_g(\lambda_2) = 2$$

Las multiplicidades algebraica y geométrica de los dos valores propios coinciden, con lo que la matriz M es diagonalizable. Véase que se cumple la relación $D = P^{-1}AP$

```
d = DiagonalMatrix[{λ1, λ2, λ2}]; MatrixForm[d]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

```
p = Transpose[{v1, v21, v22}]; MatrixForm[p]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
d == Inverse[p].m1.p // Simplify
```

```
True
```

Caso 3: $a = -\frac{1}{2}$. En este caso se obtienen dos valores propios distintos

$$\begin{cases} \lambda_1 = -3/2 \\ \lambda_2 = -1/2 \end{cases} \text{donde} \quad \begin{matrix} m_a(\lambda_1) = 1 \\ m_a(\lambda_2) = 2 \end{matrix}$$

Se calculan los subespacios propios correspondientes a λ_1 y λ_2

```
m2 = m /. a → -1 / 2; λ1 = -3 / 2; λ2 = -1 / 2; x = {x1, x2, x3};
```

Para $\lambda_1 = -3/2$ se tiene

```
v1 = Solve[(m2 - λ1 * IdentityMatrix[3]).x == {0, 0, 0}, x]
{{x1 → x3, x2 → x3}}
```

```
v1 = x /. v1[[1]]
{x3, x3, x3}
```

```
v1 = v1 /. x3 → 1 // Simplify
{1, 1, 1}
```

Por lo que $E_{\lambda_1} = \{(z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \langle(1,1,1)\rangle$, con $m_g(\lambda_1) = 1$.

Se repite el proceso para $\lambda_2 = -1/2$

```
v2 = Solve[(m2 - λ2 * IdentityMatrix[3]).x == {0, 0, 0}, x]
{{x2 → 0, x3 → 0}}
```

```
v2 = x /. v2[[1]]
{x1, 0, 0}
```

```
v2 = v2 /. x1 → 1
{1, 0, 0}
```

Obteniéndose

$$E_{\lambda_2} = \{(x, 0,0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle(1,0,0)\rangle, \text{ con } m_g(\lambda_2) = 1 \neq m_a(\lambda_2) = 2$$

Es decir, la multiplicidad algebraica y geométrica no coinciden, por tanto, M no es diagonalizable.

M5. Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo cuya matriz asociada es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calcular una base ortonormal respecto de la cual la matriz asociada a f sea diagonal.

RESOLUCIÓN

```
Remove["Global`*"]
```

Se define la matriz A y se calculan sus autovalores y autovectores

```
a = {{1, -1, 0}, {-1, 2, -1}, {0, -1, 1}}; MatrixForm[a]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
Eigenvalues[a]
```

```
{3, 1, 0}
```

```
sol = Eigenvectors[a]
```

```
{{1, -2, 1}, {-1, 0, 1}, {1, 1, 1}}
```

```
λ1 = 3; λ2 = 1; λ3 = 0;
```

```
v1 = sol[[1]]
```

```
{1, -2, 1}
```

```
v2 = sol[[2]]
```

```
{-1, 0, 1}
```

```
v3 = sol[[3]]
```

```
{1, 1, 1}
```

Se obtienen las matrices D y P que cumplen la igualdad $D = P^{-1}AP$

```
d = DiagonalMatrix[{λ1, λ2, λ3}]; MatrixForm[d]
```

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
p = Transpose[{v1, v2, v3}]; MatrixForm[p]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Los vectores propios $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ forman una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ ya que corresponden a valores propios distintos.

```
v1.v2 == 0
True
```

```
v1.v3 == 0
True
```

```
v2.v3 == 0
True
```

Para que dicha base sea ortonormal es necesario que los vectores sean unitarios, por lo que se normalizan

```
u1 = Normalize[v1]
```

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$$

```
u2 = Normalize[v2]
```

$$\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

```
u3 = Normalize[v3]
```

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

La base de los vectores propios $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ respecto de la cual la matriz asociada a f es la matriz diagonal D. Se comprueba que se cumple la igualdad $D = P^t AP$

```
q = Transpose[{u1, u2, u3}]; MatrixForm[q]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

```
d == Transpose[q].a.q
```

```
True
```

M6. Obtener la forma canónica de Jordan de la matriz A $= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

RESOLUCIÓN

```
Remove["Global`*"]
```

Se define la matriz A

```
A = {{1, 1, 0, -2, -2, 2}, {0, 0, 0, 1, 1, -1}, {0, 2, -1, -2, -1, 3},
  {0, -1, 0, 2, 0, -3}, {0, 0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, -1}};
MatrixForm[A]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Se obtiene el polinomio característico y se calculan los valores propios

```
pol = CharacteristicPolynomial[A, x] // Factor
```

$(-1 + x)^4 (1 + x)^2$

```
Solve[pol == 0, x]
```

```
{{x → -1}, {x → -1}, {x → 1}, {x → 1}, {x → 1}, {x → 1}}
```

Los autovalores de la matriz A son

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases} \text{con} \quad \begin{matrix} m_a(\lambda_1) = 4 \\ m_a(\lambda_2) = 2 \end{matrix}$$

Se calculan los subespacios asociados al autovalor $\lambda_1 = 1$, cuya multiplicidad algebraica es $m_a(\lambda_1) = 4$

```
x = {x1, x2, x3, x4, x5, x6};
```

```
λ1 = 1;
sol = Solve[(A - λ1 IdentityMatrix[6]).x == {0, 0, 0, 0, 0, 0}]
```

```
{{x2 → 0, x4 → 0, x6 → 0, x5 → 0, x3 → 0}}
```

```
x = x /. sol[[1]]
```

```
{x1, 0, 0, 0, 0, 0}
```

El subespacio propio obtenido es

$$E_{\lambda_1} = \{\,(x_1, 0,0,0,0,0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\} = \langle(1,0,0,0,0,0)\rangle$$

Como $m_g(\lambda_1) = dim\, E_{\lambda_1} = 1 \neq m_a(\lambda_1) = 4$, la matriz no es diagonalizable y se construye la cadena de subespacios correspondiente. Además, se puede asegurar que existe un único bloque de Jordan correspondiente a este autovalor.

Se construye el siguiente subespacio

$$E_{\lambda_1}^2 = \left\{\vec{x} \in E : (A - \lambda_1 I)^2 \vec{x} = \vec{0}\right\} = Ker(A - \lambda_1 I)^2$$

```
x = {x1, x2, x3, x4, x5, x6};
```

```
sol = Solve[MatrixPower[(A - λ1 IdentityMatrix[6]), 2].x ==
    {0, 0, 0, 0, 0, 0}]
```

```
{{x5 → 0, x6 → 0, x2 → x4, x3 → 0}}
```

```
x = x /. sol[[1]]
```

```
{x1, x4, 0, x4, 0, 0}
```

$$E_{\lambda_1}^2 = \{\,(x_1, x_4, 0, x_4, 0,0) \mid x_1, x_4 \in \mathbb{R}\} = \langle(1,0,0,0,0,0), (0,1,0,1,0,0)\rangle.$$

Dado que $dim\, E_{\lambda_1}^2 = 2 \neq m_a(\lambda_1) = 4$, se continua construyendo la cadena de subespacios vectoriales. Se calcula $E_{\lambda_1}^3$:

$$E_{\lambda_1}^3 = \left\{\vec{x} \in E : (A - \lambda_1 I)^3 \vec{x} = \vec{0}\right\} = Ker(A - \lambda_1 I)^3$$

```
x = {x1, x2, x3, x4, x5, x6};
```

```
sol = Solve[MatrixPower[(A - λ1 IdentityMatrix[6]), 3].x ==
    {0, 0, 0, 0, 0, 0}]

{{x5 → 0, x6 → 0, x2 → x3 + x4}}
```

```
x = x /. sol[[1]]

{x1, x3 + x4, x3, x4, 0, 0}
```

El subespacio vectorial es

$$E_{\lambda_1}^3 = \{ (x_1, x_3 + x_4, x_3, x_4, 0,0) \mid x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,0,0,0,0), (0,1,1,0,0,0), (0,1,0,1,0,0)\rangle$$

Como $dim\, E_{\lambda_1}^3 = 3 \neq m_a(\lambda_1) = 4$, se continua construyendo la cadena de subespacios. Se calcula $E_{\lambda_1}^4$

$$E_{\lambda_1}^4 = \{\vec{x} \in E : (A - \lambda_1 I)^4 \vec{x} = \vec{0}\} = Ker(A - \lambda_1 I)^4$$

```
x = {x1, x2, x3, x4, x5, x6};
```

```
sol = Solve[MatrixPower[(A - λ1 IdentityMatrix[6]), 4].x ==
    {0, 0, 0, 0, 0, 0}]

{{x6 → 0, x2 → x3 + x4 + x5}}
```

```
x = x /. sol[[1]]

{x1, x3 + x4 + x5, x3, x4, x5, 0}
```

$$E_{\lambda_1}^4 = \{ (x_1, x_3 + x_4 + x_5, x_3, x_4, x_5, 0) \mid x_1, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\} \Rightarrow$$

$$E_{\lambda_1}^4 = \langle (1,0,0,0,0,0), (0,1,1,0,0,0), (0,1,0,1,0,0), (0,1,0,0,1,0)\rangle$$

Como $dim\, E_{\lambda_1}^4 = 4 = m_a(\lambda_1) = 4$ no se construye el siguiente subespacio, habiéndose obtenido

$$E_{\lambda_1} \subset E_{\lambda_1}^2 \subset E_{\lambda_1}^3 \subset E_{\lambda_1}^4, \text{ con } dim\, E_{\lambda_1} = 1 < dim\, E_{\lambda_1}^2 = 2 < dim\, E_{\lambda_1}^3 = 3 < dim\, E_{\lambda_1}^4 = 4$$

Resaltar que $dim\, E_{\lambda_1}^{i+1} - dim\, E_{\lambda_1}^i = 1 \ \ \forall i = 1,2,3$, por lo que cada subespacio vectorial $E_{\lambda_1}^{i+1} - E_{\lambda_1}^i \ \ \forall i = 1,2,3$ sólo tendrá un vector linealmente indepediente. La base de Jordan correspondiente al autovalor $\lambda_1 = 1$ será $B_{J_2} = \{\vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5, \vec{u}_6\}$ siendo $\vec{u}_6 \in E_{\lambda_1}^4 - E_{\lambda_1}^3$ y todos los demás sus sucesivas imagenes respecto de la aplicación $(f - \lambda_1 i)$. Se selecciona un vector que verifica $\vec{u}_6 \in E_{\lambda_1}^4$ y $\vec{u}_6 \notin E_{\lambda_1}^3$.

Sea $\vec{u}_6 = (0,1,0,0,1,0)$. Se calculan sus sucesivas imágenes respecto de la apliación $(f - \lambda_1 i)$

```
u6 = {0, 1, 0, 0, 1, 0};
```

```
u5 = (A - λ1 IdentityMatrix[6]).u6
{-1, 0, 1, -1, 0, 0}
```

```
u4 = (A - λ1 IdentityMatrix[6]).u5
{2, -1, 0, -1, 0, 0}
```

```
u3 = (A - λ1 IdentityMatrix[6]).u4
{1, 0, 0, 0, 0, 0}
```

En conclusión, la base de Jordan correspondiente al autovalor $\lambda_1 = 1$ es

$$B_{J_2} = \{(1,0,0,0,0,0), (2,-1,0,-1,0,0), (-1,0,1,-1,0,0), (0,1,0,0,1,0)\}$$

siendo la matriz elemental de Jordan correspondiente J_2

```
J2 = {{1, 1, 0, 0}, {0, 1, 1, 0}, {0, 0, 1, 1}, {0, 0, 0, 1}};
MatrixForm[J2]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se calculan los subespacios asociados al autovalor $\lambda_2 = -1$, cuya multiplicidad algebraica es $m_a(\lambda_2) = 2$.

```
x = {x1, x2, x3, x4, x5, x6};
```

```
λ2 = -1;
sol = Solve[(A - λ2 IdentityMatrix[6]).x == {0, 0, 0, 0, 0, 0}]
{{x5 → 0, x2 → 0, x4 → 0, x6 → 0, x1 → 0}}
```

```
x = x /. sol[[1]]
{0, 0, x3, 0, 0, 0}
```

El subespacio propio asociado al autovalor $\lambda_2 = -1$ es

$$E_{\lambda_2} = \{\ (0,0,x_3,0,0,0)\ |\ x_3 \in \mathbb{R}\} = \ \langle(0,0,1,0,0,0)\rangle$$

Como $m_g(\lambda_2) = dim\, E_{\lambda_2} = 1 \neq m_a(\lambda_2) = 2$, hay un único bloque elemental de Jordan asociado al autovalor $\lambda_2 = -1$ y se construye el siguiente subespacio vectorial de la cadena

$$E^2_{\lambda_2} = \left\{\vec{x} \in E : (A - \lambda_2 I)^2 \vec{x} = \vec{0}\right\} = Ker(A - \lambda_2 I)^2$$

```
x = {x1, x2, x3, x4, x5, x6};
```

```
sol = Solve[MatrixPower[(A - λ2 IdentityMatrix[6]), 2].x == {0, 0, 0, 0, 0, 0}]
{{x5 → 0, x2 → 0, x4 → x6, x1 → 0}}
```

```
x = x /. sol[[1]]
{0, 0, x3, x6, 0, x6}
```

El subespacio vectorial es

$$E^2_{\lambda_2} = \{(0,0,x_3,x_6,0,x_6)\ |\ x_3, x_6 \in \mathbb{R}\ \} = \ \langle(0,0,1,0,0,0),(0,0,0,1,0,1)\rangle$$

Como $dim\, E^2_{\lambda_2} = 2 = m_a(\lambda_2)$, no se calcula el siguiente subespacio habiendo obtenido los siguientes

$$E_{\lambda_2} \subset E^2_{\lambda_2}\ ,\ \text{con}\ \ dim\, E_{\lambda_2} = 1 < dim\, E^2_{\lambda_2} = 2$$

Ya que $dim\, E^2_{\lambda_2} - dim\, E_{\lambda_2} = 1$, basta seleccionar un vector no nulo en el subespacio $E^2_{\lambda_2} - E_{\lambda_2}$ y calcular las sucesivas imágenes de este vector mediante la aplicación $(f - \lambda_2 i)$. La base de Jordan será $B_{J_1} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ siendo $\vec{u}_2 \in E^2_{\lambda_2} - E_{\lambda_2}$ y $\vec{u}_1$ la imagen del vector $\vec{u}_2$ respecto de la aplicación $(f - \lambda_2 i)$, es decir, $(f - \lambda_2 i)(\vec{u}_2) = \vec{u}_1$.

Sea el vector $\vec{u}_2 = (0,0,0,1,0,1) \in E^2_{\lambda_2} - E_{\lambda_2}$

```
u2 = {0, 0, 0, 1, 0, 1};
u1 = (A - λ2 IdentityMatrix[6]).{0, 0, 0, 1, 0, 1}
{0, 0, 1, 0, 0, 0}
```

La base de Jordan correspondiente a $\lambda_2 = -1$ es

$$B_{J_1} = \{(0,0,1,0,0,0),(0,0,0,1,0,1)\}$$

siendo la matriz elemental de Jordan

```
J1 = {{-1, 1}, {0, -1}}; MatrixForm[J1]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Se construye la base completa de Jordan como la unión de las dos bases anteriores ($B = B_{J_1} \cup B_{J_2}$). Esto es

$B = \{(0,0,1,0,0,0), (0,0,0,1,0,1), (1,0,0,0,0,0), (2,-1,0,-1,0,0), (-1,0,1,-1,0,0), (0,1,0,0,1,0)\}$

La forma canónica de Jordan se obtiene colocando en la diagonal principal las matrices elementales de Jordan obtenidas anteriormente

```
J = {{-1, 1, 0, 0, 0, 0}, {0, -1, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 1, 0, 0},
   {0, 0, 0, 1, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 1, 1}, {0, 0, 0, 0, 0, 1}};
MatrixForm[J]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y la matriz P se obtiene colocando los vectores de la base completa de Jordan por columnas

```
P = Transpose[{u1, u2, u3, u4, u5, u6}]; MatrixForm[P]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, se comprueba que las matrices P y J verifican la igualdad $J = P^{-1}AP$

```
J == Inverse[P].A.P
True
```

Otra forma de calcular la matriz y la base de Jordan es utilizar el comando *JordanDecomposition* de *Mathematica*

```
Remove["Global`*"]
```

```
a = {{1, 1, 0, -2, -2, 2}, {0, 0, 0, 1, 1, -1}, {0, 2, -1, -2, -1, 3},
  {0, -1, 0, 2, 0, -3}, {0, 0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, -1}};
MatrixForm[a]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

```
m = JordanDecomposition[a]
```

```
{{{0, 0, 1, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, -1, 2, -4}, {1, 0, 0, 0, 1, -2},
  {0, 1, 0, -1, 1, -3}, {0, 0, 0, 0, 0, 1}, {0, 1, 0, 0, 0, 0}},
 {{-1, 1, 0, 0, 0, 0}, {0, -1, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 1, 0, 0},
  {0, 0, 0, 1, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 1, 1}, {0, 0, 0, 0, 0, 1}}}
```

```
j = m[[2]]; MatrixForm[j]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
b = m[[1]]; MatrixForm[b]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, se comprueba que se cumple la igualdad $J = P^{-1}AP$

```
Inverse[b].a.b == j
```

```
True
```

La base de Jordan obtenida mediante el comando no coincide con la anterior ya que esta base no es única. Asimismo, aunque las matrices de Jordan coinciden, una podría haber sido una permutación de la otra.

6 ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO

6.1 Producto escalar

Definición: Sea $\big((E,+),(\mathbb{R},+,\cdot),\circ\big)$ un espacio vectorial real. Se llama producto escalar de los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ a una aplicación f que a cada pareja de vectores $(\vec{x},\vec{y})$ le hace corresponder un número real

$$\begin{aligned} f: E\times E &\;\to\; \mathbb{R} \\ (\vec{x},\vec{y}) &\to f(\vec{x},\vec{y}) \end{aligned}$$

y que cumple las siguientes propiedades:

- Conmutativa: $\forall \vec{x},\vec{y}\in E,\;\; f(\vec{x},\vec{y}) = f(\vec{y},\vec{x})$
- Definida positiva: $\forall \vec{x}\in E-\{\vec{0}\},\;\; f(\vec{x},\vec{x})>0$ y $f(\vec{x},\vec{x})=0 \Leftrightarrow \vec{x}=\vec{0}$
- Bilinealidad: $\forall \vec{x},\vec{y},\vec{z}\in E, \forall \alpha,\beta\in\mathbb{R},\;\; f(\alpha\circ\vec{x}+\beta\circ\vec{y},\vec{z}) = \alpha f(\vec{x},\vec{z})+\beta f(\vec{y},\vec{z})$

El producto escalar se puede denotar como $f(\vec{x},\vec{y}) = \vec{x}\cdot\vec{y}$.

6.2 Espacio vectorial euclídeo

Definición: Se llama espacio vectorial euclídeo a todo espacio vectorial real $\big((E,+),(\mathbb{R},+,\cdot),\circ\big)$ dotado de un producto escalar “ · ” y se denota por $(E,\cdot)$.

El producto escalar definido en un espacio vectorial euclídeo $(E,\cdot)$ verifica las siguientes propiedades:

- $\vec{x}\cdot\vec{0} = \vec{0}\cdot\vec{x} = 0, \forall \vec{x}\in E$
- $\vec{x}\cdot\vec{y} = 0,\;\; \forall \vec{x}\in E \Leftrightarrow \vec{y}=\vec{0}$
- $(\vec{x}\cdot\vec{y})\circ\lambda = \vec{x}\cdot(\lambda\circ\vec{y})$
- $(\vec{x}+\vec{y})\cdot\vec{z} = \vec{x}\cdot\vec{z}+\vec{y}\cdot\vec{z}$

6.3 Expresión matricial del producto escalar

Sean $(E,\cdot)$ un espacio vectorial euclídeo de dimensión n y $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ una base del mismo. Sean $\vec{x}$ e $\vec{y}$ dos vectores de E, entonces:

$$\begin{gathered}\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \dots + x_n\vec{u}_n \\ \vec{y} = y_1\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2 + \dots + y_n\vec{u}_n\end{gathered}$$

El producto escalar de ambos vectores es el siguiente:

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = (x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \dots + x_n\vec{u}_n)\cdot(y_1\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2 + \dots + y_n\vec{u}_n) =$$

$$x_1y_1\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1 + x_1y_2\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2 + \dots + x_1y_n\vec{u}_1\cdot\vec{u}_n + \ x_2y_1\vec{u}_2\cdot\vec{u}_1 + x_2y_2\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2 + \cdots$$

$$+x_2y_n\vec{u}_2\cdot\vec{u}_n + \dots + \ x_ny_1\vec{u}_n\cdot\vec{u}_1 + x_ny_2\vec{u}_n\cdot\vec{u}_2 + \dots + x_ny_n\vec{u}_n\cdot\vec{u}_n$$

que matricialmente se expresa como:

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = \underbrace{(x_1, x_2, \dots, x_n)}_{(\vec{x})_U^t}\underbrace{\begin{pmatrix}\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1 & \vec{u}_1\cdot\vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_1\cdot\vec{u}_n \\ \vec{u}_2\cdot\vec{u}_1 & \vec{u}_2\cdot\vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_2\cdot\vec{u}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{u}_n\cdot\vec{u}_1 & \vec{u}_n\cdot\vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_n\cdot\vec{u}_n\end{pmatrix}}_{G_U}\underbrace{\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}}_{(\vec{y})_U} = (\vec{x})_U^t\cdot G_U\cdot(\vec{y})_U$$

La matriz $G_U = \left(\vec{u}_i\cdot\vec{u}_j\right)\ \forall i,j = 1,2,\dots,n$ se denomina matriz del producto escalar o matriz de Gramm en la base U.

Observaciones:

- La matriz G_U es simétrica puesto que $\vec{u}_i\cdot\vec{u}_j = \vec{u}_j\cdot\vec{u}_i, \forall i,j = 1,2,\dots,n$
- La matriz G_U es definida positiva puesto que $\begin{cases}(\vec{x})_U G_U (\vec{x})_U^t > 0, & \forall\vec{x}\in E - \{\vec{0}\} \\ (\vec{x})_U G_U (\vec{x})_U^t = 0 \iff & \forall\vec{x} = \vec{0}\end{cases}$
- Los elementos de la diagonal principal de la matriz G_U son positivos,

$$\vec{u}_i\cdot\vec{u}_i > 0, \forall i = 1,2,\dots,n$$

Teorema: Sea $(E,\cdot)$ un espacio vectorial euclídeo y sean $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ y $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ dos bases de E. Las matrices del producto escalar en las bases U y V se relacionan de la siguiente manera:

$$G_V = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)_U^t\cdot G_U\cdot(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)_U$$

siendo $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)_U$ la matriz de cambio de base.

Definición: Dos matrices A y B de igual dimensión son congruentes si existe una matriz regular H tal que $B = H^tAH$.

6.4 Norma inducida por un producto escalar

Definición: Se dice que un espacio vectorial $(E,\cdot)$ es normado si existe una aplicación $h: E \to \mathbb{R}^+$ que cumple:

- $h(\vec{x}) \geq 0, \forall \vec{x} \in E$
- $h(\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$
- $h(\lambda\vec{x}) = |\lambda| h(\vec{x}), \forall \vec{x} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- $h(\vec{x} + \vec{y}) \leq h(\vec{x}) + h(y), \forall \vec{x}, \vec{y} \in E$

Definición: Sea $(E,\cdot)$ un espacio vectorial euclídeo. Se llama norma inducida al producto escalar “ $\cdot$ ” a una aplicación $h: E \to \mathbb{R}^+$ tal que:

$$\begin{aligned} h: E &\to \mathbb{R}^+ \\ \vec{x} &\to +\sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} \end{aligned}$$

Esta aplicación se denota por $||\cdot||$.

Propiedades de la norma:

- $||\vec{x}|| \geq 0, \forall \vec{x} \in E$
- $||\vec{x}|| = 0$, si y sólo si, $\vec{x} = \vec{0}$
- $||\lambda\vec{x}|| = |\lambda| ||\vec{x}|| \ \forall \vec{x} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- $||\vec{x} + \vec{y}|| \leq ||\vec{x}|| + ||\vec{y}|| \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in E$

Definición: El ángulo θ formado por dos vectores no nulos $\vec{x}, \vec{y} \in E$ es:

$$cos\theta = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||} \Rightarrow \theta = arccos\left(\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||}\right)$$

6.5 Ortogonalidad y ortonormalidad

Definición: Dos vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ de un espacio vectorial euclídeo $(E,\cdot)$ son ortogonales si su producto escalar es nulo, $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$.

Definición: Un vector $\vec{x}$ de un espacio vectorial euclídeo $(E,\cdot)$ es normal o unitario si su norma es uno, $||\vec{x}|| = 1$.

Proposición: Sea $\vec{x}$ un vector no nulo del espacio vectorial euclídeo $(E,\cdot)$, entonces el vector $\frac{\vec{x}}{||\vec{x}||}$ es normal. Al proceso de dividir un vector por su norma se le llama normalización del vector.

Definición: Un sistema de vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ de un espacio vectorial euclídeo $(E,\cdot)$ es ortogonal si los vectores que lo forman son ortogonales dos a dos:

$$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0, \quad \forall i, j = 1,2, \dots, n \;\; i \neq j$$

Teorema: Todo sistema de vectores ortogonal de un espacio vectorial euclídeo $(E,\cdot)$ es libre.

Definición: Un sistema de vectores de un espacio vectorial euclídeo $(E,\cdot)$ es ortonormal si es ortogonal y además todos sus vectores son unitarios.

Proposición: Si el sistema $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ es ortogonal, el sistema $\left\{\frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}, \frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|}, \dots, \frac{\vec{u}_n}{\|\vec{u}_n\|}\right\}$ también lo es.

6.6 Método de Gram-Schimdt

Todo espacio vectorial euclídeo $(E,\cdot)$ admite una base ortonormal.

El método de Gram-Schimdt es un método constructivo que partiendo de una base cualquiera de E permite obtener una base ortonormal de dicho espacio. El proceso de Gram-Schimdt consiste en lo siguiente:

Sea $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ una base arbitraria de E a partir de la cual se desea obtener una base ortonormal $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$.

Se obtiene el vector unitario $\vec{v}_1$ normalizando el primer vector de la base U:

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}$$

Se genera un vector $\vec{w}_2 = \vec{u}_2 + \lambda \vec{v}_1$ y se determina λ para que $\vec{w}_2$ sea ortogonal a $\vec{v}_1$:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{w}_2 = \vec{v}_1 \cdot (\vec{u}_2 + \lambda \vec{v}_1) = \vec{v}_1 \cdot \vec{u}_2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -(\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_2)$$

Sustituyendo el valor de λ en la expresión de $\vec{w}_2$:

$$\vec{w}_2 = \vec{u}_2 + \lambda \vec{v}_1 = \vec{u}_2 - (\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_2)\vec{v}_1$$

El vector $\vec{w}_2$ no es nulo puesto que si lo fuese, los vectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ serían linealmente dependientes, lo que es imposible dado que U es una base.

Se normaliza el vector $\vec{w}_2$ obteniéndose así el segundo vector de la base V:

$$\vec{v}_2 = \frac{\vec{w}_2}{\|\vec{w}_2\|}$$

Como los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son combinación lineal de los vectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$, el subespacio vectorial generado por $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ está contenido en el subespacio vectorial generado por $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$:

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle \subseteq \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$$

Además, ambos subespacios vectoriales tienen la misma dimensión, por lo que son iguales:

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$$

Se construye un vector $\vec{w}_3 = \vec{u}_3 + \mu_1 \vec{v}_1 + \mu_2 \vec{v}_2$ y se determinan μ_1 y μ_2 de forma que $\vec{w}_3$ sea ortogonal a $\vec{v}_1$ y a $\vec{v}_2$:

$$\begin{cases} \vec{v}_1 \cdot \vec{w}_3 = 0 \\ \vec{v}_2 \cdot \vec{w}_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_1 \cdot \vec{u}_3 + \mu_1 = 0 \\ \vec{v}_2 \cdot \vec{u}_3 + \mu_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_1 = -(\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_3) \\ \mu_2 = -(\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_3) \end{cases}$$

Sustituyendo los valores de μ_1 y μ_2 en la expresión de $\vec{w}_3$:

$$\vec{w}_3 = \vec{u}_3 - (\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_3)\vec{v}_1 - (\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_3)\vec{v}_2$$

Este vector no es nulo porque si lo fuese, existiría una relación de dependencia lineal entre los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{u}_3$, y teniendo en cuenta que $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$, los vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ serían linealmente dependientes, lo cual no es cierto.

Se normaliza el vector $\vec{w}_3$ obteniéndose así el tercer vector de la base V:

$$\vec{v}_3 = \frac{\vec{w}_3}{\|\vec{w}_3\|}$$

Razonando de forma similar, se puede demostrar que $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_{2,}, \vec{u}_3 \rangle$.

Repitiendo el proceso anterior, se consigue la base ortonormal $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ del espacio vectorial euclídeo E.

6.7 Subespacios vectoriales ortogonales

Definición: Sean $(E, \cdot)$ un espacio vectorial euclídeo y S_1 y S_2 dos subespacios vectoriales del mismo. Se dice que S_1 y S_2 son ortogonales si cualquier vector de S_1 es ortogonal a cualquier vector de S_2, es decir,

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x} = 0, \forall \vec{x} \in S_1, \forall \vec{y} \in S_2$$

Proposición: Sean $(E, \cdot)$ un espacio vectorial euclídeo y S_1 y S_2 dos subespacios vectoriales ortogonales del mismo, entonces $S_1 \cap S_2 = \{\vec{0}\}$.

Proposición: Sean $(E,\cdot)$ un espacio vectorial euclídeo y F un subespacio vectorial del mismo. El conjunto formado por todos los vectores que son ortogonales a los vectores de F es un subespacio vectorial de E denominado subespacio ortogonal de F y se denota por $F^{\perp}$.

$$F^{\perp} = \{\vec{x} \in E : \vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \ \forall \vec{y} \in F\}$$

Teorema: Sean F y G dos subespacios vectoriales de E, entonces se verifican las siguientes propiedades:

- $(F + G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$
- $(F^{\perp})^{\perp} = F$
- $F \subseteq G \Rightarrow G^{\perp} \subseteq F^{\perp}$
- $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$

Teorema: Sean $(E,\cdot)$ un espacio vectorial euclídeo y F un subespacio vectorial del mismo. Entonces $E = F \oplus F^{\perp}$, es decir:

- $F \cap F^{\perp} = \{\vec{0}\}$
- $E = F + F^{\perp}$

EJERCICIOS RESUELTOS

P1. Sea el espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{R}^n,\cdot)$ y sea $\vec{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Determinar si las siguientes funciones son normas asociadas a algún producto escalar de este espacio vectorial:

a) $\|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

b) $\|\vec{u}\| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$

c) $\|\vec{u}\| = \sqrt{|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|}$

RESOLUCIÓN

Una función es una norma si cumple las siguientes propiedades

- $\|\vec{u}\| \geq 0, \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n$ y $\|\vec{u}\| = 0$, si y sólo si, $\vec{u} = \vec{0}$
- $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda|\|\vec{u}\|$
- $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

a) Se comprueba si la función $\|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ verifica las propiedades

- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \geq 0, \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n$

  Si $\|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = 0 \Rightarrow x_i = 0\ \forall i = 1,2,\dots,n$ puesto que $x_i^2 \geq 0$ $\forall i = 1,2,\dots,n \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

- $\|\lambda\vec{u}\| = \|(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)\| = \sqrt{(\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2 + \cdots + (\lambda x_1)^2}$

  $= \sqrt{\lambda^2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} = |\lambda|\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

  $= |\lambda|\|\vec{u}\|, \qquad \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + \cdots + (x_n + y_n)^2 =$

  $= x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1^2 + x_2^2 + 2x_2y_2 + y_2^2 + \dots + x_n^2 + 2x_ny_n + y_n^2$

  $= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + 2(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) + y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$

  $= \|\vec{u}\|^2 + 2(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) + \|\vec{v}\|^2$

Como $x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \vec{u}.\vec{v} \leq \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$ (desigualdad de Cauchy Schwartz) se tiene que $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) + \|\vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2$

$$= (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2$$

Sacando raíz cuadrada se obtiene que $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

Con lo que se ha demostrado que $\|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ es una norma.

b) Se comprueba si la función $\|\vec{u}\| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$ cumple las propiedades

- $\|\vec{u}\| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \geq 0, \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n$

  Si $\|\vec{u}\| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| = 0 \Rightarrow x_i = 0 \;\; \forall\, i = 1,2,\ldots,n$ puesto que $|x_i| \geq 0 \;\; \forall i = 1,2,\ldots,n \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$

- $\|\lambda\vec{u}\| = \|(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)\| = |\lambda x_1| + |\lambda x_2| + \cdots + |\lambda x_n|$

  $= |\lambda|\,(|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|) = |\lambda|\|\vec{u}\|, \qquad \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

- $\|\vec{u}+\vec{v}\| = |x_1+y_1| + |x_2+y_2| + \cdots + |x_n+y_n| \leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| + \cdots +$

  $+\; |x_n| + |y_n| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| + |y_1| + |y_2| + \cdots + |y_n|$

  $= \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

Por lo que $\|\vec{u}\| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$ es una norma.

c) Se comprueba si la función $\|\vec{u}\| = \sqrt{|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|}$ es una norma

- $\|\vec{u}\| = \sqrt{|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|} \geq 0, \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n$

  Si $\|\vec{u}\| = \sqrt{|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|} = 0 \Rightarrow x_i = 0 \;\forall\, i = 1,2,\ldots,n \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$

- $\|\lambda\vec{u}\| = \|(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)\| = \sqrt{|\lambda x_1| + |\lambda x_2| + \cdots + |\lambda x_n|}$

  $= \sqrt{|\lambda|(|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|)} = \sqrt{|\lambda|}\sqrt{|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|}$

  $= \sqrt{|\lambda|}\|\vec{u}\| \neq |\lambda|\|\vec{u}\|, \;\; \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Como la tercera propiedad no se cumple, $\|\vec{u}\| = \sqrt{|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|}$ no es una norma.

P2. Sea $\mathbb{P}_1(x)$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a uno con $p(x) = a + bx$ donde $a, b \in \mathbb{R}$ y sea la aplicación $f\colon \mathbb{P}_1(x) \times \mathbb{P}_1(x) \to \mathbb{R}$, tal que $f\big(p_1(x), p_2(x)\big) = \int_0^1 p_1(x) \cdot p_2(x)dx$.

a) Demostrar que f es un producto escalar.

b) Calcular el ángulo formado por los polinomios $p(x) = 2 + x$ y $q(x) = 1 + 3x$

RESOLUCIÓN

a) La aplicación f será un producto escalar si cumple las siguientes propiedades:

- Propiedad conmutativa $\forall p_1(x), p_2(x) \in \mathbb{P}_1(x),\ \ f\big(p_1(x), p_2(x)\big) = f\big(p_2(x), p_1(x)\big)$

$$f\big(p_1(x), p_2(x)\big) = \int_0^1 p_1(x) \cdot p_2(x)dx = \int_0^1 p_2(x) \cdot p_1(x)dx = f\big(p_2(x), p_1(x)\big)$$

- Definida positiva $\begin{cases} \forall p(x) \in \mathbb{P}_1(x) - \{0\},\ \ f\big(p(x), p(x)\big) > 0 \\ f\big(p(x), p(x)\big) = 0 \Leftrightarrow p(x) = 0 \end{cases}$

Se demuestra que $\forall p(x) \in \mathbb{P}_1(x) - \{0\},\ \ f\big(p(x), p(x)\big) > 0$

$$f\big(p(x), p(x)\big) = \int_0^1 p(x) \cdot p(x)dx = \int_0^1 p^2(x)dx$$

Por las propiedades de la integral definida, si $g(x) > 0$ en $x \in [0,1] \Rightarrow \int_0^1 g(x)dx > 0$

$\forall p(x) \in \mathbb{P}_1(x), p^2(x) > 0$ en $x \in \mathbb{R}$. Por tanto $\int_0^1 p^2(x)dx > 0 \Rightarrow f\big(p(x), p(x)\big) > 0$

A continuación se demuestra que $f\big(p(x), p(x)\big) = 0 \Leftrightarrow p(x) = 0$

$$f\big(p(x), p(x)\big) = \int_0^1 p(x) \cdot p(x)dx = \int_0^1 p^2(x)dx = 0 \Leftrightarrow p^2(x) = 0 \Leftrightarrow p(x) = 0$$

Demostradas las dos condiciones anteriores, se concluye que f es definida positiva.

- Bilinealidad $\forall p_1(x), p_2(x), p_3(x) \in \mathbb{P}_1(x), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$f\big(\alpha \circ p_1(x) + \beta \circ p_2(x), p_3(x)\big) = \alpha f\big(p_1(x), p_3(x)\big) + \beta f\big(p_2(x), p_3(x)\big)$$

Se desarrolla la parte izquierda de la igualdad

$$\begin{aligned} f\big(\alpha \circ p_1(x) + \beta \circ p_2(x), p_3(x)\big) &= \int_0^1 \big(\alpha \circ p_1(x) + \beta \circ p_2(x)\big) \cdot p_3(x)dx \\ &= \int_0^1 \alpha \cdot \big(p_1(x) \cdot p_3(x)\big)dx + \int_0^1 \beta \cdot \big(p_2(x) \cdot p_3(x)\big)dx \\ &= \alpha \int_0^1 p_1(x) \cdot p_3(x)dx + \beta \int_0^1 p_2(x) \cdot p_3(x)dx \\ &= \alpha f\big(p_1(x), p_3(x)\big) + \beta f\big(p_2(x), p_3(x)\big) \end{aligned}$$

Por lo que queda demostrado que f es un producto escalar.

b) El ángulo θ formado por dos vectores no nulos $p(x), q(x) \in \mathbb{P}_1(x)$ viene dado por

$$cos\theta = \frac{p(x) \cdot q(x)}{\|p(x)\| \cdot \|q(x)\|} \Rightarrow \theta = arccos\left(\frac{p(x) \cdot q(x)}{\|p(x)\| \cdot \|q(x)\|}\right)$$

Se calcula el producto escalar de ambos polinomios

$$p(x)\cdot q(x) = \int_0^1 p(x)\cdot q(x)dx = \int_0^1 (2+x)\cdot(1+3x)dx = \int_0^1 (3x^2+7x+2)dx$$

$$= x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 2x\Big|_0^1 = 1 + \frac{7}{2} + 2 = \frac{13}{2}$$

Se calculan las normas de los polinomios

$$\|p(x)\| = +\sqrt{p(x)\cdot p(x)} = \sqrt{\int_0^1 p(x)\cdot p(x)dx} = \sqrt{\int_0^1 (2+x)\cdot(2+x)dx} =$$

$$= \sqrt{\int_0^1 (x^2+4x+4)dx} = \sqrt{\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x\Big|_0^1} = \sqrt{\frac{1}{3}+2+4} = \sqrt{\frac{19}{3}}$$

$$\|q(x)\| = +\sqrt{q(x)\cdot q(x)} = \sqrt{\int_0^1 q(x)\cdot q(x)dx} = \sqrt{\int_0^1 (1+3x)\cdot(1+3x)dx} =$$

$$= \sqrt{\int_0^1 (9x^2+6x+1)dx} = \sqrt{3x^3+3x^2+x|_0^1} = \sqrt{3+3+1} = \sqrt{7}$$

Con lo que el ángulo que forman los dos polinomios es

$$cos\theta = \frac{p(x)\cdot q(x)}{\|p(x)\|\cdot\|q(x)\|} = \frac{\frac{13}{2}}{\sqrt{\frac{19}{3}}\cdot\sqrt{7}} \Rightarrow \theta = arccos\left(\frac{\frac{13}{2}}{\sqrt{\frac{19}{3}}\cdot\sqrt{7}}\right) = 12{,}53°$$

P3. Sean f y g dos formas bilineales definidas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente, cuyas matrices asociadas respecto de la base canónica son $F = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $G = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) F define un producto escalar.

b) G define un producto escalar.

RESOLUCIÓN

a) Falso. Véase que aunque F es simétrica ($F = F^t$), no es definida positiva ya que,

$$\exists \vec{v} \in \mathbb{R}^2, \vec{v}F\vec{v}^t < 0$$

$$\vec{v}F\vec{v}^t = (x, y)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x - 2y, -2x + y)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2 - 4xy = (x - y)^2 - 2xy$$

Sea $\vec{v} = (1,1) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \vec{v}F\vec{v}^t = (x - y)^2 - 2xy = -2 < 0$

Por tanto, la matriz F no define un producto escalar.

b) Falso. Para que G defina un producto escalar tiene que ser simétrica y definida positiva. Como $G \neq G^t$, la matriz G no es simétrica, por lo que no puede definir un producto escalar.

P4. Sea $\|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ la norma euclídea de $\mathbb{R}^n$. Demostrar:

a) $2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2 = \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2$ (ley del paralelogramo)

b) $4\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2$

c) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ (desigualdad triangular), utilizando que $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$ (desigualdad de Cauchy Schwartz).

RESOLUCIÓN

a) Sean $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$. El producto escalar usual de $\mathbb{R}^n$ es $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$.

Se desarrolla el lado izquierdo de la igualdad

$$2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2 = 2(x_1^2 + x_2^2 \dots + x_n^2) + 2(y_1^2 + y_2^2 \dots + y_n^2)$$

Se desarrollan los dos términos del lado derecho de la igualdad

$$\begin{cases} \|\vec{x} + \vec{y}\| = \sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + \cdots + (x_n + y_n)^2} \\ \|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 =$

$[(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + \cdots + (x_n + y_n)^2] + [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2] =$

$2(x_1^2 + x_2^2 \dots + x_n^2) + 2(y_1^2 + y_2^2 \dots + y_n^2)$

Como ambos lados de la igualdad coinciden se cumple la ley del paralelogramo

b) Sean $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$.

Se desarrollan ambos miembros de la igualdad

$4\vec{x} \cdot \vec{y} = 4(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)$

$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2-\|\vec{x}-\vec{y}\|^2=$

$[(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2+\cdots+(x_n+y_n)^2]-[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2]=$

$2(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)+2(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)=4(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)$

Ambos lados coinciden, por lo que queda demostrada la igualdad.

c) Se eleva al cuadrado la parte izquierda de la desigualdad triangular

$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2=(\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}+\vec{y})=\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2+2\vec{x}\cdot\vec{y}\leq\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2+2|\vec{x}\cdot\vec{y}|$

y se aplica la desigualdad de Cauchy Schwartz

$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2\leq\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2+2|\vec{x}\cdot\vec{y}|\leq\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2+2\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|=(\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|)^2\Rightarrow$

$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2\leq(\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|)^2$

Aplicando la raíz cuadrada en ambas partes de la desigualdad obtenida, se tiene que

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2\leq(\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|)^2\Rightarrow\|\vec{x}+\vec{y}\|\leq\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|$$

P5. Sea el producto escalar $f(\vec{x},\vec{y})=3x_1y_1+2x_1y_2-x_1y_3+2x_2y_1+3x_2y_2-x_3y_1+x_3y_3$ donde $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$ e $\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)$.

a) Obtener la matriz de Gramm respecto de la base canónica.

b) Calcular el ángulo formado por los vectores $\vec{u}=(1,-1,0)$ y $\vec{v}=(-1,1,-1)$.

c) Obtener la forma genérica de los vectores ortogonales al vector $\vec{u}=(1,-1,0)$. Determinar tres de ellos.

RESOLUCIÓN

a) Sea $C=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Para obtener la matriz de Gramm se debe calcular el producto escalar de todos los vectores de la base tomados de dos en dos. Como la matriz de Gramm es simétrica no es necesario calcular los nueve productos escalares, basta con calcular los siguientes

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1,\vec{e}_1)=\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1=3\\ f(\vec{e}_1,\vec{e}_2)=\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=2=f(\vec{e}_2,\vec{e}_1)\\ f(\vec{e}_1,\vec{e}_3)=\vec{e}_1\cdot\vec{e}_3=-1=f(\vec{e}_3,\vec{e}_1)\\ f(\vec{e}_2,\vec{e}_2)=\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2=3\\ f(\vec{e}_2,\vec{e}_3)=\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3=0=f(\vec{e}_3,\vec{e}_2)\\ f(\vec{e}_3,\vec{e}_3)=\vec{e}_3\cdot\vec{e}_3=1 \end{cases}\Rightarrow\quad G=\begin{pmatrix}3&2&-1\\2&3&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

b) El ángulo θ formado por los vectores $\vec{u} = (1,-1,0)$ y $\vec{v} = (-1,1,-1)$ se calcula utilizando la fórmula

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$$

Se obtiene el producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$ y las normas de cada vector

$\vec{u}\cdot\vec{v} = f(\vec{u},\vec{v}) = -1$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{f(\vec{u},\vec{u})} = \sqrt{2}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{f(\vec{v},\vec{v})} = \sqrt{1} = 1$

Entonces $cos\,\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$

c) Sea $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ un vector genérico de $\mathbb{R}^3$. Para que $\vec{w}$ sea ortogonal a $\vec{u}$, $\vec{w}\perp\vec{u}$, se debe cumplir que $\vec{w}\cdot\vec{u} = 0$. Desarrollando el producto escalar anterior

$$\vec{w}\cdot\vec{u} = f(\vec{w},\vec{u}) = w_1 - w_2 - w_3 = 0 \ \Rightarrow w_1 = w_2 + w_3$$

Por tanto la forma genérica del vector $\vec{w}$ es $(w_2 + w_3, w_2, w_3)$ $\forall w_2, w_3 \in \mathbb{R}$. Para obtener casos particulares basta asignar valores a las coordenadas w_2 y w_3, por ejemplo, los vectores $\vec{w} = (2,1,1)$, $\vec{v} = (1,1,0)$ y $\vec{t} = (1,0,1)$ son ortogonales al vector $\vec{u}$ respecto del producto escalar anterior.

P6. Sea $B = \{(1,2,2),(3,1,2),(5,0,-1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$, ortonormalizar la base utilizando el producto escalar usual.

RESOLUCIÓN

Para ortonormalizar la base B se utilizará el método de Gramm-Schimdt. Dicho método parte de la base inicial $B = \{(1,2,2),(3,1,2),(5,0,-1)\}$ y construye una base $V = \{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ siendo los elementos de V unitarios y ortogonales dos a dos.

Denótese la base $B = \{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ siendo $\vec{u}_1 = (1,2,2)$, $\vec{u}_2 = (3,1,2)$ y $\vec{u}_3 = (5,0,-1)$.

Se calcula el vector $\vec{v}_1$ normalizando el vector $\vec{u}_1$

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}$$

$$\|\vec{u}_1\| = \sqrt{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1} = 3 \Rightarrow \vec{v}_1 = \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$$

Para obtener el vector $\vec{v}_2$, se construye el vector $\vec{w}_2 = \vec{u}_2 + \lambda\vec{v}_1$ y se determina el parámetro λ para que $\vec{w}_2$ sea ortogonal a $\vec{v}_1$

$$\lambda = -(\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_2) = -\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \cdot (3,1,2) = -3$$

Por tanto, $\vec{w}_2 = \vec{u}_2 + \lambda\vec{v}_1 = (3,1,2) - 3\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = (2, -1,0)$.

El segundo vector de la base V, además de ser ortogonal a $\vec{v}_1$ debe ser unitario, por lo que se normaliza

$$\vec{v}_2 = \frac{\vec{w}_2}{\|\vec{w}_2\|}$$

$$\|\vec{w}_2\| = \sqrt{\vec{w}_2 \cdot \vec{w}_2} = \sqrt{5} \Rightarrow \vec{v}_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, 0\right)$$

Para obtener el vector $\vec{v}_3$, se construye el vector $\vec{w}_3 = \vec{u}_3 + \mu_1\vec{v}_1 + \mu_2\vec{v}_2$

Se determinan los parámetros μ_1 y μ_2 para que el vector $\vec{w}_3$ sea ortogonal a los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2 \Rightarrow \mu_1 = -(\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_3)$ y $\mu_2 = -(\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_3)$

$$\mu_1 = -(\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_3) = -\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \cdot (5,0,-1) = -1$$

$$\mu_2 = -(\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_3) = -\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, 0\right) \cdot (5,0,-1) = -2\sqrt{5}$$

Es decir, el vector $\vec{w}_3$ es

$$\vec{w}_3 = (5,0,-1) - \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) - 2\sqrt{5} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, 0\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{-5}{3}\right)$$

Al igual que los otros dos vectores de la base ortonormal V, el tercer vector debe ser unitario

$$\vec{v}_3 = \frac{\vec{w}_3}{\|\vec{w}_3\|}$$

$$\|\vec{w}_3\| = \sqrt{\vec{w}_3 \cdot \vec{w}_3} = \sqrt{5} \Rightarrow \vec{v}_3 = \left(\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{-5}{3\sqrt{5}}\right)$$

En conclusión, la base ortonormal es $V = \left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, 0\right), \left(\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{-5}{3\sqrt{5}}\right)\right\}$.

P7. Sea $S = \{(x, y, z) |\ x + y - 2z = 0\}$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

a) Obtener el subespacio vectorial ortogonal $S^\perp$.

b) Determinar si el vector $\vec{v} = (1,1,2)$ pertenece al subespacio ortogonal.

RESOLUCIÓN

a) El subespacio vectorial ortogonal a S está formado por todos los vectores que son ortogonales a cualquier vector de S.

$$S^{\perp} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \ \forall \vec{y} \in S\}$$

Cualquier vector del subespacio vectorial S cumple que

$$\forall \vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in S:\ y_1 + y_2 - 2y_3 = 0$$

es decir, es ortogonal al vector $(1,1,-2)$

$$y_1 + y_2 - 2y_3 = 0 \Leftrightarrow (y_1, y_2, y_3) \cdot (1,1,-2) = 0 \Leftrightarrow \vec{y} \cdot (1,1,-2) = 0 \Leftrightarrow \vec{y} \perp (1,1,-2)$$

Por lo que $\vec{x} = (1,1,-2) \in S^{\perp} \Rightarrow \langle(1,1,-2)\rangle \subseteq S^{\perp}$.

Por otro lado, como $\mathbb{R}^3 = S \oplus S^{\perp} \Rightarrow dim\ \mathbb{R}^3 = dim\, S + dim\, S^{\perp} \xRightarrow{dim\, S = 2} dim\, S^{\perp} = 1$.
Entonces, $S^{\perp} = \langle(1,1,-2)\rangle$.

b) El vector $\vec{v}$ pertenecerá al subespacio vectorial ortogonal si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \ \forall \vec{u} \in S$.
Sea $\vec{u} = (1,1,1) \in S$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1,1,1) \cdot (1,1,2) = 4 \neq 0 \Rightarrow$ Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son ortogonales, por tanto el vector $\vec{v}$ no pertenece al subespacio vectorial ortogonal.
Nótese que $\vec{v} = (1,1,2) \notin S^{\perp} = \langle(1,1,-2)\rangle$.

P8. Sea $S = \{(x, y, z, t) |\ x - 2y + t = 0,\ x + y + z + t = 0\}$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$, determinar el subespacio ortogonal al mismo.

RESOLUCIÓN

Recordar que $S^{\perp}$ está formado por todos los vectores ortogonales a los vectores del subespacio vectorial S.

$$S^{\perp} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : \vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \ \forall \vec{y} \in S\}$$

Dado que todo vector perteneciente a S es combinación lineal de los vectores de su base, cualquier vector del subespacio vectorial ortogonal debe ser perpendicular a los vectores de la base de S. Se calcula la base del subespacio vectorial S.
Sea $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in S$, luego $\vec{x}$ satisface las siguientes igualdades

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = -x_1 + 2x_2 \\ x_3 = -3x_2 \end{cases}$$

Es decir, la forma genérica de cualquier vector perteneciente a S es

$$\vec{x} = (x_1, x_2, -3x_2, -x_1 + 2x_2) = x_1(1,0,0,-1) + x_2(0,1,-3,2)$$

Además como los vectores $(1,0,0,-1)$ y $(0,1,-3,2)$ son linealmente independientes forman una base $B = \{(1,0,0,-1), (0,1,-3,2)\}$ del subespacio vectorial S.

Se calculan los vectores pertenecientes al subespacio ortogonal.

Sea $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in S^{\perp} \Rightarrow \vec{y} \perp (1,0,0,-1)$ e $\vec{y} \perp (0,1,-3,2)$. Desarrollando los productos escalares resultantes se obtiene que

$$\vec{y} \perp (1,0,0,-1) \Rightarrow (y_1, y_2, y_3, y_4) \cdot (1,0,0,-1) = 0 \Rightarrow y_1 - y_4 = 0$$

$$\vec{y} \perp (0,1,-3,2) \Rightarrow (y_1, y_2, y_3, y_4) \cdot (0,1,-3,2) = 0 \Rightarrow y_2 - 3y_3 + 2y_4 = 0$$

En conclusión, el subespacio vectorial ortogonal es

$$S^{\perp} = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 |\ y_1 - y_4 = 0, y_2 - 3y_3 + 2y_4 = 0\}$$

P9. Demostrar que los subespacios vectoriales $V = \langle (1,0,-2,-1), (2,0,1,-2) \rangle$ y $W = \{(a + b, a, 0, a + b) | a, b \in \mathbb{R}\}$ son ortogonales.

RESOLUCIÓN

Para demostrar que V y W son ortogonales basta demostrar que

$$\forall \vec{v} \in V \ \wedge \ \forall \vec{w} \in W, \qquad \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$$

Sea $\vec{w} = (a + b, a, 0, a + b)$ un vector genérico de W y $\vec{v}$ un vector genérico de V,

$$\vec{v} = x(1,0,-2,-1) + y(2,0,1,-2) = (x + 2y, 0, -2x + y, -x - 2y)$$

Se comprueba si $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (x + 2y, 0, -2x + y, -x - 2y) \cdot (a + b, a, 0, a + b)$$

$$= xa + xb + 2ya + 2yb - xa - xb - 2ya - 2yb = 0$$

Queda demostrado que V y W son ortogonales.

Otra forma de demostrar que los subespacios son ortogonales es comprobar que los vectores de las bases lo son.

P10. Sea $V_1 = \{(-a - b, -b, 3a) | a, b \in \mathbb{R}\}$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Determinar las ecuaciones implícitas del subespacio ortogonal de V_1.

RESOLUCIÓN

Si $V_1^{\perp}$ es el subespacio ortogonal de V_1, entonces: $\forall \vec{u} \in V_1 \wedge \ \forall \vec{w} \in V_1^{\perp},\ \vec{u} \cdot \vec{w} = 0$.

Se calcula una base de V_1

$$\forall \vec{u} \in V_1, \exists a, b \in \mathbb{R}: \vec{u} = (-a-b, -b, 3a) \Rightarrow$$

$$\vec{u} = a(-1,0,3) + b(-1,-1,0) = \langle(-1,0,3), (-1,-1,0)\rangle$$

Como $\vec{u}_1 = (-1,0,3)$ y $\vec{u}_2 = (-1,-1,0)$ son linealmente independientes, $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ es una base de V.

Dado que los subespacios V_1 y $V_1^{\perp}$ son suplementarios, se cumple la ecuación

$$dim\, \mathbb{R}^3 = dim\, V_1 + dim V_1^{\perp} \Rightarrow dim V_1^{\perp} = dim\, \mathbb{R}^3 - dim\, V_1 = 3 - 2 = 1$$

Por lo que $V_1^{\perp} = \langle\vec{w}\rangle$ donde $\vec{w}$ es un vector genérico de $\mathbb{R}^3$, $\vec{w} = (a, b, c)$ tal que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{w}\}$ es un sistema libre y $\vec{u}_1 \cdot \vec{w} = 0$ y $\vec{u}_2 \cdot \vec{w} = 0$. Entonces

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{w} = (-1,0,3) \cdot (a, b, c) = 0 \Rightarrow -a + 3c = 0 \Rightarrow c = a/3$$

$$\vec{u}_2 \cdot \vec{w} = (-1,-1,0) \cdot (a, b, c) = 0 \Rightarrow -a - b = 0 \Rightarrow b = -a$$

Con lo que $\vec{w} = (a, -a, a/3)$, y $V_1^{\perp} = \{(a, -a, a/3)/\ a \in\ \mathbb{R}\ \} = \langle(3, -3, 1)\rangle$.

Para calcular las ecuaciones implícitas de $V_1^{\perp}$ se exige que $rg = \begin{pmatrix} 3 & x \\ -3 & y \\ 1 & z \end{pmatrix} = 1$. Además, como $dim\, V_1^{\perp} = 1$, se requieren dos ecuaciones implícitas linealmente independientes, por tanto, se consideran los siguientes menores:

$$\begin{vmatrix} 3 & x \\ -3 & y \end{vmatrix} = 0 \ \text{ y } \begin{vmatrix} 3 & x \\ 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3y + 3x = 0 \text{ y } 3z = x$$

Las ecuaciones implícitas de $V_1^{\perp}$ son $\begin{cases} 3y + 3x = 0 \\ 3z = x \end{cases} \ \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$

CUESTIONES RESUELTAS

C1. Se considera la aplicación $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donde $f(\vec{u},\vec{v}) = 2\vec{u}\cdot\vec{v} - 3$, siendo "·" el producto escalar usual entre vectores. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas

a) f es definida positiva.

b) f cumple la propiedad conmutativa.

c) f cumple la propiedad de bilinealidad.

RESOLUCIÓN

a) Falso. f no es definitiva positiva ya que $\exists \vec{u} \in \mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\},\ \ f(\vec{u},\vec{u}) < 0$.

$$f(\vec{u},\vec{u}) = 2\vec{u}\cdot\vec{u} - 3 = 2(x^2 + y^2) - 3$$

Sea $\vec{u} = (1,0) \Rightarrow f(\vec{u},\vec{u}) = -1 < 0$

b) Verdadero. f cumple la propiedad conmutativa si $\forall \vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}^2,\ \ f(\vec{u},\vec{v}) = f(\vec{v},\vec{u})$

Se calculan los dos términos de la igualdad anterior

$$\begin{cases} f(\vec{u},\vec{v}) = 2\vec{u}\cdot\vec{v} - 3 \\ f(\vec{v},\vec{u}) = 2\vec{v}\cdot\vec{u} - 3 \end{cases}$$

Como $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$, entonces $f(\vec{u},\vec{v}) = f(\vec{v},\vec{u})$, por lo que f cumple la propiedad conmutativa.

c) Falso. f cumple la propiedad de bilinealidad si

$$f(\alpha\circ\vec{u} + \beta\circ\vec{v},\vec{w}) = \alpha f(\vec{u},\vec{w}) + \beta f(\vec{v},\vec{w}), \forall \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$$

siendo "∘" el producto entre un escalar y un vector.

Se desarrollan por separado ambos lados de la igualdad anterior

$$\begin{cases} f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v},\vec{w}) = 2(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v})\cdot\vec{w} - 3 \\ \alpha f(\vec{u},\vec{w}) + \beta f(\vec{v},\vec{w}) = \alpha(2\vec{u}\cdot\vec{w} - 3) + \beta(2\vec{v}\cdot\vec{w} - 3) = 2(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v})\cdot\vec{w} - 3(\alpha + \beta) \end{cases}$$

Las expresiones resultan iguales sólo si $\alpha + \beta = 1$. Con lo que f no cumple la propiedad de bilinealidad.

C2. Sea el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^n$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas

a) Los vectores de la base canónica $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ forman un sistema ortonormal.

b) Todo conjunto ortonormal de vectores forma una base de $\mathbb{R}^n$.

RESOLUCIÓN

a) Verdadero. El sistema $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ es ortonormal si los vectores son unitarios y ortogonales dos a dos. Como se trata de la base canónica, $\vec{e}_1 = (1,0,0,\dots,0), \vec{e}_2 = (0,1,0,\dots,0), \dots, \vec{e}_n = (0,0,\dots,0,1)$, todos los vectores son unitarios

$$\|\vec{e}_i\| = 1, i = 1, 2, \dots, n$$

Además, los vectores son ortogonales dos a dos puesto que $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0, \forall i \neq j$

Por lo que se ha demostrado que los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$ forman un sistema ortonormal.

b) Falso. Es suficiente tomar un subconjunto de vectores de la base canónica, por ejemplo $B_k = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k\}$ siendo $k < n$. Todos los vectores del conjunto B_k son unitarios y ortogonales dos a dos, por lo que B_k es un conjunto ortonormal de vectores. Pero, B_k no es una base de $\mathbb{R}^n$ puesto que, aunque esté formado por vectores que son linealmente independientes no es un sistema generador de $\mathbb{R}^n$.

C3. Se considera el espacio vectorial euclídeo E de dimensión n. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas

a) Sea $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$ un sistema libre formado por vectores unitarios de E, entonces el sistema V es ortonormal.

b) Cualquier sistema ortonormal de vectores de E es libre.

RESOLUCIÓN

a) Falso. El sistema será ortonormal si se verifican las siguientes condiciones

- Los vectores son normales o unitarios, es decir $\|\vec{v}_i\| = 1 \ \forall i = 1, 2, \dots, m$
- Los vectores son ortogonales dos a dos, es decir $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0 \ \forall i \neq j$

La primera condición es un dato dado, con lo que sería suficiente que se verificase la segunda condición. Para demostrar que ésta no se verifica se utiliza un contraejemplo. Sea $V =$

$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{v}\}$ siendo $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$ y $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Este sistema es libre, puesto que el determinante de la matriz formado por los tres vectores es no nulo

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$$

y además, los vectores son unitarios, $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{v}\| = 1$. Se comprueba si los vectores son ortogonales dos a dos o lo que es lo mismo, si su producto escalar es cero

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0 \Rightarrow \vec{e}_1 \text{ y } \vec{e}_2 \text{ son ortogonales.}$$
$$\vec{e}_2 \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{e}_2 \text{ y } \vec{v} \text{ son ortogonales.}$$
$$\vec{e}_1 \cdot \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0 \Rightarrow \vec{e}_1 \text{ y } \vec{v} \text{ no son ortogonales.}$$

Por lo que el sistema de vectores V no es ortogonal, y por tanto no puede ser ortonormal.

b) Verdadero. Sea el sistema $A = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ un sistema ortonormal de vectores de E. Esto significa que los vectores son unitarios, $\|\vec{u}_i\| = 1\ \ \forall i = 1, 2, \dots, p$ y ortogonales dos a dos, $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0\ \forall i \neq j$.

Utilizando el método de reducción al absurdo supóngase que la afirmación no es cierta, es decir, que el sistema de vectores ortonormal es ligado. Entonces, existe un vector $\vec{u}_k$ que es combinación lineal de los otros.

$$\exists \alpha_i \neq 0 \text{ tal que } \vec{u}_k = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2\, \vec{u}_2 + \alpha_{k-1}\, \vec{u}_{k-1} + \alpha_{k+1}\, \vec{u}_{k+1} + \dots + \alpha_p \vec{u}_p$$

Realizando el producto escalar del vector $\vec{u}_k$ con el resto de vectores del sistema

$$\begin{cases} \vec{u}_k \cdot \vec{u}_1 = \left(\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2\, \vec{u}_2 + \alpha_{k-1}\, \vec{u}_{k-1} + \alpha_{k+1}\, \vec{u}_{k+1} + \dots + \alpha_p \vec{u}_p\right) \cdot \vec{u}_1 \\ \vec{u}_k \cdot \vec{u}_2 = \left(\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2\, \vec{u}_2 + \alpha_{k-1}\, \vec{u}_{k-1} + \alpha_{k+1}\, \vec{u}_{k+1} + \dots + \alpha_p \vec{u}_p\right) \cdot \vec{u}_2 \\ \vdots \\ \vec{u}_k \cdot \vec{u}_{k-1} = \left(\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2\, \vec{u}_2 + \alpha_{k-1}\, \vec{u}_{k-1} + \alpha_{k+1}\, \vec{u}_{k+1} + \dots + \alpha_p \vec{u}_p\right) \cdot \vec{u}_{k-1} \\ \vec{u}_k \cdot \vec{u}_{k+1} = \left(\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2\, \vec{u}_2 + \alpha_{k-1}\, \vec{u}_{k-1} + \alpha_{k+1}\, \vec{u}_{k+1} + \dots + \alpha_p \vec{u}_p\right) \cdot \vec{u}_{k+1} \\ \vdots \\ \vec{u}_k \cdot \vec{u}_p = \left(\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2\, \vec{u}_2 + \alpha_{k-1}\, \vec{u}_{k-1} + \alpha_{k+1}\, \vec{u}_{k+1} + \dots + \alpha_p \vec{u}_p\right) \cdot \vec{u}_p \end{cases}$$

Como los vectores son unitarios y ortogonales dos a dos se tiene

$$\begin{cases} \vec{u}_k \cdot \vec{u}_1 = \alpha_1 \\ \vec{u}_k \cdot \vec{u}_2 = \alpha_2 \\ \vdots \\ \vec{u}_k \cdot \vec{u}_{k-1} = \alpha_{k-1} \\ \vec{u}_k \cdot \vec{u}_{k+1} = \alpha_{k+1} \\ \vdots \\ \vec{u}_k \cdot \vec{u}_p = \alpha_p \end{cases}$$

Además teniendo en cuenta que $\vec{u}_k$ es combinación lineal de los otros vectores, es decir, que existe algún $\alpha_i \neq 0$, al menos uno de los productos escalares anteriores sería no nulo, con lo que el sistema de vectores no sería ortogonal. Esto contradice la hipótesis del enunciado y significa que lo supuesto no es cierto, es decir, que cualquier conjunto de vectores ortonormal es necesariamente libre.

EJERCICIOS RESUELTOS CON MATHEMATICA

M1. Sean f y g dos formas bilineales definidas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente, cuyas matrices asociadas respecto de la base canónica son $F = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $G = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) F define un producto escalar.

b) G define un producto escalar.

RESOLUCIÓN

```
Remove["Global`*"]
```

a) Para que la matriz F defina un producto escalar debe ser simétrica y definida positiva. Véase si es simétrica

```
F = {{1, -2}, {-2, 1}}; MatrixForm[F]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

```
Transpose[F] == F
```

```
True
```

La matriz F sí es simétrica. Véase si es definida positiva. Sea el vector $\vec{v} = (1,1) \in \mathbb{R}^2$

```
v = {x, y};
pol = v.F.v // Simplify
```

$x^2 - 4 x y + y^2$

```
pol /. {x → 1, y → 1}
```

```
-2
```

Se ha comprobado que $\exists \vec{v} \in \mathbb{R}^2, \vec{v} F \vec{v}^t < 0$, luego F no es definida positiva, y por tanto F no define un producto escalar.

b) Véase si G es una matriz simétrica

```
G = {{3, -1, 4}, {5, 6, 7}, {4, -3, 0}}; MatrixForm[G]
```

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

```
Transpose[G] == G
```

```
False
```

Por lo que la afirmación es falsa, es decir, G no es simétrica y por tanto no define un producto escalar.

M2. Sea el producto escalar $f(\vec{x},\vec{y}) = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 - x_1y_3 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2 - x_3y_1 + x_3y_3$, donde $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$

a) Obtener la matriz de Gramm respecto de la base canónica.

b) Calcular el ángulo formado por los vectores $\vec{u} = (1,-1,0)$ y $\vec{v} = (-1,1,-1)$.

c) Obtener la forma genérica de los vectores ortogonales al vector $\vec{u} = (1,-1,0)$. Determinar tres de ellos.

RESOLUCIÓN

```
Remove["Global`*"]
```

a) Se definen el producto escalar, la norma inducida y la base canónica

```
f[x_?VectorQ, y_?VectorQ] :=
  3 x[[1]] y[[1]] + 2 x[[1]] y[[2]] - x[[1]] y[[3]] + 2 x[[2]] y[[1]] +
   3 x[[2]] y[[2]] - x[[3]] y[[1]] + x[[3]] y[[3]];
Norma[x_?VectorQ] := Sqrt[f[x, x]];
```

```
B = {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}};
```

Se calculan los productos escalares de todos los vectores de la base canónica tomados de dos en dos y se construye la matriz de Gramm

```
Gramm = ConstantArray[0, {3, 3}];
Do[Gramm[[i, j]] = f[B[[i]], B[[j]]], {i, 1, 3}, {j, 1, 3}];
MatrixForm[Gramm]
```

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Para calcular el ángulo entre dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se utiliza la fórmula

$$\theta = arcos\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}\right)$$

```
u = {1, -1, 0}; v = {-1, 1, -1};
Theta = ArcCos[f[u, v] / (Norma[u] * Norma[v])]
```

$$\frac{3\pi}{4}$$

c) Sea $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ un vector genérico de $\mathbb{R}^3$. El vector $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u}$ si el producto escalar $\vec{w}\cdot\vec{u} = 0$ es nulo

```
w = {w1, w2, w3};
sol = Solve[f[w, u] == 0]
```

```
{{w1 → w2 + w3}}
```

Por lo que la forma genérica del vector $\vec{w}$ es

```
w = w /. sol[[1]]
```

```
{w2 + w3, w2, w3}
```

Para obtener casos particulares basta asignar distintos valores a $w2$ y $w3$, por ejemplo

```
v1 = w /. {w2 → 1, w3 → 1}
```

```
{2, 1, 1}
```

```
v2 = w /. {w2 → 1, w3 → 0}
```

```
{1, 1, 0}
```

```
v3 = w /. {w2 → 0, w3 → 1}
```

```
{1, 0, 1}
```

M3. Sea $B = \{(1,2,2),(3,1,2),(5,0,-1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$, ortonormalizar la base utilizando el producto escalar usual.

RESOLUCIÓN

```
Remove["Global`*"]
```

Para ortonormalizar la base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ se utiliza el método de Gramm-Schmidt. Este método parte de una base arbitraria B y construye una base ortogonal $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ siendo

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = \dfrac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} \\ \vec{v}_2 = \dfrac{\vec{w}_2}{\|\vec{w}_2\|} \\ \vec{v}_3 = \dfrac{\vec{w}_3}{\|\vec{w}_3\|} \end{cases} \quad \text{donde} \quad \begin{array}{c} \vec{w}_2 = \vec{u}_2 + \lambda\vec{v}_1,\ \ \lambda = -(\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_2) \\ \vec{w}_3 = \vec{u}_3 + \mu_1\vec{v}_1 + \mu_2\vec{v}_2,\ \ \mu_1 = -(\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_3),\ \mu_2 = -(\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_3) \end{array}$$

Se definen los vectores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$

```
u1 = {1, 2, 2}; u2 = {3, 1, 2}; u3 = {5, 0, -1};
```

Se obtiene el primer vector de la base

```
v1 = u1 / Norm[u1]
```

$$\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\}$$

Se obtiene el segundo vector de la base

```
w2 = u2 - v1.u2 v1
```

{2, -1, 0}

```
v2 = w2 / Norm[w2]
```

$$\left\{\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right\}$$

Se obtiene el tercer vector de la base

```
w3 = u3 - v1.u3 v1 - v2.u3 v2
```

$$\left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{5}{3}\right\}$$

```
v3 = w3 / Norm[w3]
```

$$\left\{\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, -\frac{\sqrt{5}}{3}\right\}$$

En conclusión, la base ortonormal es

$$V = \left\{\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right),\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{-1}{\sqrt{5}},0\right),\left(\frac{2}{3\sqrt{5}},\frac{4}{3\sqrt{5}},\frac{-5}{3\sqrt{5}}\right)\right\}$$

Otra forma de obtener una base ortonormal es utilizar el comando *Orthogonalize* del programa *Mathematica*:

```
Orthogonalize[{u1, u2, u3}]
```

$$\left\{\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\}, \left\{\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right\}, \left\{\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, -\frac{\sqrt{5}}{3}\right\}\right\}$$

M4. Sea $S = \{(x, y, z, t) | \, x - 2y + t = 0, \; x + y + z + t = 0\}$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$, determinar el subespacio ortogonal al mismo.

RESOLUCIÓN

```
Remove["Global`*"]
```

El subespacio vectorial ortogonal a S está formado por todos los vectores que son ortogonales a los vectores de S, y por tanto, por los vectores ortogonales a los vectores de la base del mismo. Se obtiene un sistema generador de S

```
sol = Solve[{x - 2 y + t == 0, x + y + z + t == 0}, {x, y, z, t}]
```

```
{{z → -3 y, t → -x + 2 y}}
```

```
b = {x, y, z, t} /. sol[[1]]
```

```
{x, y, -3 y, -x + 2 y}
```

```
b1 = b /. {x → 1, y → 0}
```
```
{1, 0, 0, -1}
```

```
b2 = b /. {x → 0, y → 1}
```
```
{0, 1, -3, 2}
```

Es decir, $B = \{(1,0,0,-1),(0,1,-3,2)\}$ es un sistema generador de S. Se comprueba que es un sistema libre

```
Solve[α1 b1 + α2 b2 == 0, {α1, α2}]
```
```
{{α1 → 0, α2 → 0}}
```

En conclusión, $B = \{(1,0,0,-1),(0,1,-3,2)\}$ es una base de S.

Se calculan los vectores pertenecientes al subespacio vectorial $S^{\perp}$. Sea $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in S^{\perp} \Rightarrow \vec{y} \perp (1,0,0,-1)$ e $\vec{y} \perp (0,1,-3,2)$, es decir, el producto escalar del vector $\vec{y}$ con ambos vectores es nulo

```
y = {y1, y2, y3, y4};
Solve[{y.b1 == 0, y.b2 == 0}, {y1, y2, y3, y4}]
```
$$\left\{\left\{y3 \to \frac{2\ y1}{3} + \frac{y2}{3},\ y4 \to y1\right\}\right\}$$

Las coordenadas de cualquier vector de $S^{\perp}$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, satisfacen las siguientes ecuaciones implícitas

$$\begin{cases} y_1 = y_4 \\ y_2 + 2y_4 = 3y_3 \end{cases}$$

Por lo que el subespacio ortogonal a S es

$$S^{\perp} = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 |\ y_1 - y_4 = 0, y_2 - 3y_3 + 2y_4 = 0\}$$

M5. Sea $V_1 = \{(-a-b, -b, 3a)|\ a, b \in \mathbb{R}\}$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, determinar las ecuaciones implícitas del subespacio ortogonal a V_1.

RESOLUCIÓN

```
Remove["Global`*"]
```

Procediendo se forma similar al ejercicio anterior se calcula una base del subespacio vectorial V_1

```
b1 = {-a - b, -b, 3 a} /. {a → 1, b → 0}
{-1, 0, 3}
```

```
b2 = {-a - b, -b, 3 a} /. {a → 0, b → 1}
{-1, -1, 0}
```

```
MatrixRank[{b1, b2}]
2
```

Como los vectores $\vec{b}_1 = (-1, 0, 3)$ y $\vec{b}_2 = (-1, -1, 0)$ son linealmente independientes, $B = \{\vec{b}_1, b_2\}$ es una base de V_1.

Por otro lado, dado que los subespacios V_1 y $V_1^{\perp}$ son suplementarios

$$dim\,\mathbb{R}^3 = dim\,V_1 + dimV_1^{\perp} \Rightarrow dimV_1^{\perp} = dim\,\mathbb{R}^3 - dim\,V_1 = 3 - 2 = 1$$

es decir, $V_1^{\perp} = \langle\vec{w}\rangle$ donde $\vec{w} = (a, b, c)$ es un vector genérico de $\mathbb{R}^3$ tal que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{w}\}$ es un sistema libre y además se cumple que $\vec{u}_1 \cdot \vec{w} = 0$ y $\vec{u}_2 \cdot \vec{w} = 0$

```
w = {w1, w2, w3};
sol = Solve[{b1.W == 0, b2.w == 0}]
{{w1 → 3 w3, w2 → -3 w3}}
```

```
w = w /. sol[[1]]
{3 w3, -3 w3, w3}
```

Entonces, la forma genérica del vector $\vec{w}$ es $(3w_3, -3w_3, w_3)$,

```
w = w /. w3 → 1
{3, -3, 1}
```

siendo un caso particular el vector $(3, -3, 1)$.

Por tanto, $V_1^{\perp} = \langle(3,-3,1)\rangle$.

Sea A la matriz formada por el vector generador del subespacio ortogonal $V_1^{\perp}$ y un vector genérico de $\mathbb{R}^3$

```
A = Transpose[{{3, -3, 1}, {x, y, z}}]; MatrixForm[A]
```

$$\begin{pmatrix} 3 & x \\ -3 & y \\ 1 & z \end{pmatrix}$$

Para calcular las ecuaciones implícitas de $V_1^{\perp}$ basta que el rango de la matriz A sea 1. Además, como la dimensión de $V_1^{\perp}$ es 1, se requieren dos ecuaciones implícitas linealmente independientes. Por tanto, se consideran los siguientes menores

```
Det[A[[{1, 2}, {1, 2}]]]
```

```
3 x + 3 y
```

```
Det[A[[{1, 3}, {1, 2}]]]
```

```
-x + 3 z
```

Las ecuaciones implícitas de $V_1^{\perp}$ son $x = -y$, $x = 3z$.

Otra forma de calcular los menores de orden dos en *Mathematica* es utilizar el comando *Minors*

```
Minors[A, 2]
```

```
{{3 x + 3 y}, {-x + 3 z}, {-y - 3 z}}
```

Resaltar que el tercer menor, $-y - 3z$, es redundante dado que es una implicación directa de los anteriores.

BIBLIOGRAFÍA

Broida, J. G. y Williamson, S. G. (1989): *A comprehensive Introduction to Linear Algebra*, Addison-Wesley, Redwood City, CA.

Castellet, M. y Llerena, I. (1991): *Álgebra Lineal y Geometría*, Reverté, Barcelona.

De Burgos, J. (1993): *Álgebra Lineal*, McGraw-Hill, Madrid.

De la Villa, A. (2010): *Problemas de Álgebra*, Clagsa, Madrid.

Granero, F. (1992): *Álgebra y Geometría Analítica*, McGraw-Hill, Madrid.

Raya, A.; Ríder A. y Rubio R. (2007): *Álgebra y Geometría Lineal*, Reverté, Barcelona.

Rojo, J. y Martin, I (2005): *Ejercicios y problemas de Álgebra Lineal*, MacGraw-Hill, Madrid.

Sanz, P.; Vázquez, F.J. y Ortega, P. (1998): *Problemas de Álgebra Lineal. Cuestiones, ejercicios y tratamiento en Derive*®, Prentice Hall, Madrid.

Varios autores (2007): *Algebra lineal. Apuntes de clase*, Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Bilbao, Universidad del País Vasco (UPV/EHU).

Vera López, A. y Vera López, F. (1991): *Aljebrarako Sarrera*, Ellacuria, Erandio.

Wicks, J. R. (1996): *Linear Algebra: an Interactive Laboratory Approach with Mathematica*, Addison-Wesley, Indiana, AEB.

Zurutuza, I. (2000): *Oinarrizko Aljebra*, Fundación Elhuyar, Usurbil.