Información y su Valor. Nivel de Información Óptimo. Valor de la Flexibilidad

José María Usategui

Departamento de Fundamentos del Análisis Económico II

Universidad del País Vasco - Euskal Herriko Unibertsitatea

Índice

1 Introducción

En este trabajo se analizan las decisiones de un agente económico cualquiera, en un contexto incierto, cuando puede obtener o recibir información que resuelve total o parcialmente la incertidumbre a la que se enfrenta. La presentación se centra fundamentalmente en el caso en el que el decisor es neutral ante el riesgo, aunque también se mostrará cómo proceder cuando el decisor tiene aversión al riesgo. En los problemas estudiados se compara la decisión que realizaría el agente económico sin información con la decisión que realizaría con información. La recepción de información permite al agente adaptar su decisión al mensaje proporcionado por esa información y aumentar, como consecuencia de esa adaptación, sus ganancias esperadas (o su utilidad esperada).

El valor de un servicio de información para el decisor es igual a la cantidad de dinero que estaría dispuesto a pagar, como máximo, por acceder a ese servicio de información. Cuando el decisor puede acceder a varios servicios de información escogerá aquél para el que sea máxima la diferencia entre el valor de la información y el coste para el decisor de conseguir esa información, si esa diferencia es positiva.

Cuando el decisor es neutral ante el riesgo el valor de un servicio de información es la diferencia entre las ganancias esperadas del agente económico con información y sus ganancias esperadas sin información. Es un valor ex-ante, anterior al conocimiento de esa información.

Se denomina información completa a la información que resuelve totalmente la incertidumbre del decisor y permite al decisor saber con seguridad cuál es la situación o el estado en el que se van a producir los resultados de su decisión. Una información que resuelve parcialmente la incertidumbre del decisor es una información incompleta. A menudo hay distintos servicios de información que proporcionan diferentes informaciones incompletas.

La información completa siempre es más valiosa para el decisor que cualquier servicio de información incompleta. El valor de distintos servicios de información incompleta será, en general, diferente.

El decisor tiene unas creencias iniciales sobre la probabilidad de que ocurra cada estado o situación posible. Un mensaje proporcionado por un servicio de información induce, por parte del decisor, una revisión de las probabilidades asignadas a los distintos estados o situaciones posibles conforme a la Regla o Teorema de Bayes. El valor de la información es positivo si esa revisión de probabilidades hace que el agente económico modifique su decisión con respecto a la que habría tomado si no hubiera recibido información, al menos para uno de los mensajes que puede proporcionar ese servicio de información. Si la revisión de probabilidades implica que, cualquiera que sea el mensaje recibido, la decisión del agente económico es la misma que habría tomado si no hubiera recibido información el valor de la información sería cero.[1] El valor de la información no puede ser negativo en el contexto considerado aquí (el agente económico siempre tiene la posibilidad de no modificar su decisión cuando recibe la información).

Para que un servicio de información pueda resultar valioso para el decisor es preciso que sus mensajes proporcionen información sobre los estados, pero no se requiere ninguna condición sobre el formato de esos mensajes. Además, para que la información pueda ser valiosa es preciso que suministre uno entre varios mensajes alternativos. Si sólo hubiera un mensaje que puede proporcionar la información el decisor no estaría dispuesto a pagar nada por esa información, puesto que ya conoce el mensaje que va a recibir. De hecho, actuará como si ya hubiera recibido ese mensaje porque lo tendrá en cuenta al precisar sus creencias iniciales.

[1] El valor de la información también sería cero si no fuera posible reaccionar ante la información recibida (ésta llega demasiado tarde, por ejemplo).

En la Sección 6 se considera una situación, diferente, en la que llega información con el paso del tiempo y el decisor recibe esa información sin tener que pagar nada por ella. En esa sección se estudia el efecto de esa información que llega en el futuro sobre la decisión (más o menos flexible) que escoge el decisor en el presente.

2 El valor de la información completa

Un servicio de información que proporciona información completa predice perfectamente lo que va a ocurrir. Si hay n estados o situaciones posibles, la información completa dice cuál de esos n estados va a ocurrir. Con ese servicio de información hay, por tanto, n mensajes posibles, cada uno indicando con seguridad que ocurrirá un estado distinto. Como el decisor no sabe qué estado va a ocurrir, no sabe tampoco qué mensaje va a recibir. Si cree que hay una probabilidad p_i de que ocurra el estado E_i creerá también, por consistencia, que hay una probabilidad p_i de que el mensaje del servicio de información completa diga que el estado va a ser E_i.

Ejemplo: Un decisor neutral ante el riesgo tiene que elegir entre las alternativas X^1, X^2 y X^3 en un contexto en el que puede haber dos estados posibles: E_1 y E_2. El decisor cree que la probabilidad del estado E_1 es 0,3 y, por tanto, cree que la probabilidad del estado E_2 es 0,7. Las ganancias de cada alternativa en cada estado son:

ganancias	E_1	E_2
X^1	3	3
X^2	9	0
X^3	2	4

Sin información, el decisor escogerá la alternativa que le proporcione mayor ganancia esperada. El decisor escogerá, en ese caso, la alternativa X^3 ya que:

$$\text{ganancia esperada } (X^1) = 3$$
$$\text{ganancia esperada } (X^2) = 0,3(9) + 0,7(0) = 2,7$$
$$\text{ganancia esperada } (X^3) = 0,3(2) + 0,7(4) = 3,4.$$

Si, en cambio, el decisor recibiera información completa decidiría X^2 si la información le dijera que el estado va a ser E_1 y sólo decidiría X^3 si la información le dijera que el estado va a ser E_2. El decisor no sabe cuál de esos dos mensajes va a recibir pero, como consecuencia de sus creencias iniciales sobre las probabilidades de los estados, cree que hay una probabilidad 0,3 de que la información diga que el estado va a ser E_1 y que hay una probabilidad 0,7 de que la información diga que el estado va a ser E_2. Por tanto, la ganancia esperada del decisor con información completa es:

$$\Pr(E_1)X^2 + \Pr(E_2)X^3 = 0,3(9) + 0,7(4) = 5,5.$$

Como el decisor es neutral ante el riesgo el valor de la información completa, VI, es la diferencia entre la ganancia esperada con información completa y la ganancia esperada sin información. En consecuencia, se obtiene: $VI = 5,5 - 3,4 = 2,1$. $\square$

Ejercicio A: Petición de ordenadores para la campaña de Navidad

El dueño de una tienda de informática tiene que decidir el número de ordenadores de un determinado tipo que va a pedir a su suministrador para la campaña de Navidad. Puede vender cada ordenador a 1200 euros pero no sabe cuál va a ser la cantidad demandada de ese tipo de ordenadores. Cree que hay una probabilidad igual a 0,6 de que la cantidad demandada sea 60 ordenadores y una probabilidad igual a 0,4 de que la cantidad demandada sea 100 ordenadores. Considérese que el dueño de la tienda es neutral ante el riesgo y tiene que elegir entre dos alternativas: pedir 60 ordenadores a su suministrador o pedirle 100 ordenadores. Si le pide 60 ordenadores, tiene que pagar 820 euros por cada uno al suministrador. Si, en cambio, le pide 100 ordenadores, cada uno le cuesta 700 euros (el suministrador le hace un descuento cuando le compra más ordenadores). Si el dueño de la tienda devuelve un ordenador al suministrador, éste sólo le reintegra la mitad de lo que había pagado el dueño de la tienda por ese ordenador. Se desea analizar qué valor tendría para el dueño de esta tienda una información completa sobre la cantidad de ordenadores demandada.

Si, en el momento de realizar la petición de ordenadores al suministrador, el dueño de la tienda no conociera el precio r al que se van a poder vender los ordenadores, ¿cómo dependería el valor de la información completa del precio r estimado por el dueño de la tienda? Considérese que el dueño de la tienda cree que $r > 820$.

Solución

En este Ejercicio los estados son la situación en la que la cantidad demandada es 100 (demanda alta) y la situación en la que la cantidad demandada es 60 (demanda baja). Las alternativas entre las que tiene que elegir el dueño de la tienda son pedir 100 ordenadores al suministrador y pedir 60 ordenadores al suministrador.

Si el dueño de la tienda no recibe ninguna información que resuelva la incertidumbre sobre la cantidad de ordenadores demandada escogerá aquella alternativa que maximice sus beneficios esperados, dadas las probabilidades que asigna a cada nivel de demanda. El beneficio esperado si pide 60 ordenadores al suministrador es:

$$60(1200 - 820) = 22800$$

ya que es seguro que venderá esos 60 ordenadores. En cambio, si pide 100 ordenadores hay una probabilidad 0,4 de que venda los 100 ordenadores y una probabilidad 0,6 de que sólo venda 60 ordenadores y tenga que devolver al suministrador los restantes 40 ordenadores. Como por cada ordenador devuelto el suministrador sólo le reintegra $\frac{700}{2} = 350$, el beneficio esperado si pide 100 ordenadores es:

$$0,6\,[60(1200 - 700) + (100 - 60)(350 - 700)] +$$
$$+0,4\,[100(1200 - 700)] = 29600$$

Por tanto, el dueño de la tienda pedirá 100 ordenadores si no recibe información. En este caso espera ganar 50000 euros (es decir, $100(1200-700)$) con una probabilidad 0,4 y 16000 euros (es decir, $60(1200 - 700) + (100 - 60)(350 - 700)$) con una probabilidad 0,6.

Consideremos ahora que el dueño de la tienda puede adquirir un servicio de información que le proporciona información completa sobre cuál va a ser la cantidad demandada de ese tipo de ordenadores (supongamos, por ejemplo, que se realiza un buen estudio de mercado que suministra esa información). En este caso el dueño de la tienda comprará 60 ordenadores si el servicio de información le dice que la cantidad demandada va a ser igual a 60 y, en cambio, comprará 100 ordenadores si el servicio de información le dice que la cantidad demandada va a ser igual a 100. Como el decisor cree inicialmente que hay una probabilidad igual a 0,6 de que la cantidad demandada sea 60, cree también que la probabilidad de que la información (completa) indique que la cantidad demandada va a ser 60 es 0,6, y, análogamente, cree que la probabilidad de que la información (completa) indique que la cantidad demandada va a ser 100 es 0,4. La ganancia esperada cuando se recibe información completa es, por tanto:

$$0,6\,[60(1200-820)]+0,4\,[100(1200-700)]=33680$$

En consecuencia, el valor de la información completa es:

$$33680-29600=4080$$

El dueño de la tienda estaría dispuesto a pagar hasta 4080 euros por un estudio de mercado que proporcionara información completa.

Con un servicio que le proporcione información completa el dueño de la tienda de informática consigue evitar la compra de 100 ordenadores cuando la demanda resulta ser 60 (con lo que evita tener que devolver 40 ordenadores y obtiene un ahorro esperado en devoluciones igual a $0.6(700-350)(40)=8400$). Sin embargo, al pedir 60 ordenadores cuando la demanda resulte ser 60 tendrá que pagar 820 por cada ordenador al suministrador en vez de los 700 euros que habría pagado al pedir 100 ordenadores sin información (esto implica un coste esperado adicional de $0,6(820-700)(60)=4320$). El valor de la información completa es precisamente $8400-4320=4080$.

A continuación se muestra que el valor de la información completa en este Ejercicio no depende del precio de venta de los ordenadores, siempre que ese precio sea mayor que 820. Si el dueño de la tienda cree que el precio al que se van a poder vender los ordenadores va a ser r, la ganancia esperada si pide 60 ordenadores al suministrador será $60(r-820)$ (como $r > 820$ pedir 60 ordenadores al suministrador es una alternativa viable) y la ganancia esperada si pide 100 ordenadores será $0,4(100(r-700)) + 0,6(60(r-700) + (100-60)(350-700) = 0,4(100(r-700)) + 0,6(60r-56000)$. Como

$$0,4(100(r-700)) + 0,6(60r-56000) > 60(r-820) \Leftrightarrow r > 775,$$

y hemos considerado que $r > 820$, el dueño de la tienda de informática pedirá 100 ordenadores al suministrador si no obtiene información.

La ganancia esperada con información completa es $0,4(100(r-700)) + 0,6(60(r-820))$. Por tanto, el valor de la información completa es $0,6(60(r-820)-(60r-56000)) = 4080$. El valor de la información completa no depende de r en este Ejercicio, si $r > 820$. Como el dueño de la tienda pide 100 ordenadores si no obtiene información vendería, en cada estado, el mismo número de ordenadores con información completa y sin información (aunque el número de ordenadores vendido dependa del estado). Por otra parte, los precios que cobra el suministrador por los ordenadores y lo que recibe el dueño de la tienda por cada ordenador que devuelve al suministrador no dependen del precio al que se venden los ordenadores. El valor de la información completa no depende de r, si $r > 820$, ya que la ganancia esperada con información completa y la ganancia esperada sin información varían con r en la misma cuantía. $\square$

El Ejercicio siguiente rehace el Ejercicio anterior para el caso en que el decisor tiene aversión al riesgo. Si el decisor fuera averso al riesgo las ganancias en unidades monetarias que resultan con cada alternativa en cada estado deben transformarse en unidades de utilidad conforme a la función de utilidad del decisor. Si el decisor es averso al riesgo esa función de utilidad debe ser cóncava (por ejemplo, $u(x) = \sqrt{x}$, donde x mide las ganancias en dinero). Si se cumplen los axiomas que hacen válida la Teoría de la Utilidad Esperada se puede calcular la utilidad esperada del decisor sin información y la utilidad esperada del decisor con información y obtener el valor de la información.

Ejercicio B: Petición de ordenadores para la campaña de Navidad con aversión al riesgo

Resuelva de nuevo el Ejercicio anterior considerando que el dueño de la tienda de informática es averso al riesgo de forma que la utilidad que le proporcionan unas ganancias iguales a x es $u(x) = \sqrt{x}$. Analice el caso en el cada ordenador puede venderse a 1200 euros.

Solución

Si no recibe ninguna información que resuelva su incertidumbre, la utilidad esperada del dueño de la tienda de informática con cada decisión será:

$$U(60) = \sqrt{60(1200 - 820)} = 151$$

$$\begin{gathered} U(100) = 0,6\sqrt{60(1200 - 700) + 40(350 - 700)} + \\ +0,4\left[\sqrt{100(1200 - 700)}\right] = 165,34 \end{gathered}$$

Por tanto, el dueño de la tienda pedirá 100 ordenadores si no recibe información cuando su aversión al riesgo es como la considerada en este ejercicio.

Si el dueño de la tienda obtiene información completa sobre cuál va a ser la demanda de ese tipo de ordenadores comprará 60 ordenadores si la demanda va a ser igual a 60 y, en cambio, comprará 100 ordenadores si la demanda es igual a 100. Como el decisor cree inicialmente que hay una probabilidad igual a 0,6 de que la demanda sea 60, cree también que la probabilidad de que la información (completa) indique que la demanda es 60 será 0,6, y, análogamente, cree que la probabilidad de que la información (completa) indique que la demanda es 100 será 0,4. La utilidad esperada del decisor cuando recibe información completa es, por tanto:

$$0,6\sqrt{60(1200 - 820)} + 0,4\sqrt{100(1200 - 700)} = 180,04$$

Para calcular el valor de la información completa (la máxima cantidad que estaría dispuesto a pagar el dueño de la tienda de ordenadores por esa información completa) resolvemos

$$0,6\sqrt{60(1200-820)-x}+0,4\sqrt{100(1200-700)-x}=165,34$$

La solución es $x = 4862,8$. El dueño de la tienda estaría dispuesto a pagar hasta $4862,8$ euros por un estudio de mercado que proporcionara información completa. Esta cantidad es superior a la cantidad (4080 euros) que estaba dispuesto a pagar por esa información un dueño de la tienda neutral ante el riesgo (véase el Ejercicio A). El decisor averso al riesgo está dispuesto a pagar más por una información que le resuelva completamente la incertidumbre que lo que estaba dispuesto a pagar en el Ejercicio A un decisor neutral ante el riesgo. $\square$

Ejercicio C: Establecimiento de una oficina comercial en un país extranjero

Un empresario de la Unión Europea que es neutral ante el riesgo tiene que decidir si establece o no una delegación u oficina comercial en el país H. El empresario sabe que la Unión Europea está negociando un acuerdo comercial con ese país y cree que hay una probabilidad p de que el acuerdo se firme. Si el empresario establece la delegación y se firma el acuerdo sus ganancias son 200 (millones de euros), y si establece una delegación y no se firma el acuerdo sus pérdidas son 40. El coste de la inversión ha sido descontado al calcular los valores de esas ganancias y pérdidas. Si el empresario no establece una delegación sus ganancias son cero. Conteste las siguientes preguntas:

i) ¿para qué valores de p decidirá el empresario establecer la delegación si no recibe ninguna información sobre la firma del acuerdo?,

ii) ¿qué valor tendría para el empresario conocer con seguridad si se va a firmar el acuerdo con H o no?

Solución

i) La ganancia esperada del empresario si establece la delegación cuando no recibe información es

$$200p - 40(1-p)$$

Como $200p - 40(1-p) > 0 \Leftrightarrow p > \frac{1}{6}$, el empresario decidirá establecer la delegación si su p es tal que $p > \frac{1}{6}$ y, en cambio, no establecerá la delegación si su p es tal que $p < \frac{1}{6}$ (estará indiferente entre ambas alternativas cuando $p = \frac{1}{6}$). La ganancia esperada sin información es $200p - 40(1-p)$ si $p \geq \frac{1}{6}$ y es, en cambio, 0 si $p \leq \frac{1}{6}$.

ii) El empresario conocerá con seguridad si se va a firmar o no el acuerdo comercial con el país H si consigue información completa. Con información completa el empresario establecería la delegación si la información le dijera que se va a firmar el acuerdo comercial, y no realizaría la inversión si la información le dijera que no se va a firmar el acuerdo comercial, ya que lo que va a ocurrir va a ser lo que indique la información completa. Como cree que hay una probabilidad p de que se firme el acuerdo comercial, cree también que hay una probabilidad p de que la información completa diga que se va a firmar el acuerdo comercial y, por tanto, que hay una probabilidad $1-p$ de que la información completa diga que no se va a firmar el acuerdo comercial. Así, la ganancia esperada con información completa es $p(200) + (1-p)(0) = 200p$.

El valor de la información completa (VI) es la diferencia entre la ganancia esperada con información completa y la ganancia esperada sin información. En este caso el valor de la información completa depende de p. Si $p < \frac{1}{6}$ (sin información el empresario no abriría la delegación en el país H) el valor de la información completa es:

$$200p - 0 = 200p$$

Si $p > \frac{1}{6}$ (sin información el empresario establecería la delegación en el país H) el valor de la información completa es:

$$200p - (200p - 40(1-p)) = 40(1-p)$$

Por tanto, será:

$$VI = \begin{cases} 200p & \text{si } p \leq \frac{1}{6} \\ \\ (1-p)(40) & \text{si } p \geq \frac{1}{6} \end{cases}$$

VI es nulo cuando $p = 0$ y cuando $p = 1$. En estos casos el empresario está seguro de lo que va a ocurrir, cree que la información completa solamente va a confirmar sus creencias (por supuesto, puede equivocarse) y no está dispuesto a pagar nada por esa información. El valor de la información es máximo cuando $p = \frac{1}{6}$, ya que el valor de la información aumenta con p cuando $p < \frac{1}{6}$ y disminuye con p cuando $p > \frac{1}{6}$ (por tanto, el valor de la información no disminuye siempre con la probabilidad de que se firme el acuerdo comercial). Cuando $p = \frac{1}{6}$ el empresario está indiferente entre establecer la delegación y no establecerla si no recibe información y es entonces cuando la información resulta más útil para elegir entre ambas alternativas. El valor máximo de VI es $VI_{\max} = \frac{200}{6}$. Nótese que $VI_{\max} < 200$ y que $VI_{\max} < 40$. Obviamente, el decisor no puede estar dispuesto a pagar por la información más que la máxima ganancia (200) que puede obtener. Pero el decisor tampoco está dispuesto a pagar por la información más que la máxima pérdida (40) que puede obtener, ya que si pagara por la información más de 40 estaría cambiando una situación en la que la máxima pérdida posible es 40 por un gasto seguro en información mayor que 40.

Cuando $p < \frac{1}{6}$ no se establecería la delegación sin información. En ese caso la información completa es valiosa porque, cuando el mensaje es que se va a firmar el acuerdo comercial, se obtiene seguro una ganancia igual a 200 estableciendo la delegación. Por otra parte, cuando $p > \frac{1}{6}$ sí se establecería la delegación sin información. En ese caso la información completa es valiosa porque cuando el mensaje es que no se va a firmar el acuerdo comercial no se establece la delegación y esto permite al empresario ahorrarse las pérdidas de establecer la delegación cuando finalmente no se firma el acuerdo comercial. $\square$

Ejercicio D: Elección de cultivo

Un agricultor debe decidir qué cultivar en una finca que posee. Está indeciso entre los cultivos A y B ya que sus ganancias pueden dependen de si la primavera es lluviosa o seca. Si cultiva A sus ganancias son 400 independientemente de lo lluviosa que sea la primavera. Si cultiva B sus ganancias son 450 si la primavera es lluviosa y 225 si la primavera es seca. El agricultor es neutral ante el riesgo y cree que hay una probabilidad p de que la primavera sea seca. Conteste a las siguientes preguntas:

i) ¿para qué valores de p decidirá el agricultor cultivar A?,

ii) si existe la posibilidad de adquirir una información que predice con certeza el tiempo que hará en primavera, ¿cuál es el valor de esa información para el agricultor?

Solución

i) Cuando el agricultor no recibe información ganará 400 si cultiva A y $225p+(1-p)450 = 450-225p$ si cultiva B. Como $400 > 450-225p \Leftrightarrow p > \frac{2}{9}$, el agricultor cultivará A si su p es tal que $p > \frac{2}{9}$ y, en cambio, cultivará B si su p es tal que $p < \frac{2}{9}$ (estará indiferente entre ambas alternativas cuando $p = \frac{2}{9}$). La ganancia esperada sin información es 400 si $p \geq \frac{2}{9}$ y es, en cambio, $450 - 225p$ si $p \leq \frac{2}{9}$.

ii) Si la información indica que la primavera será seca el agricultor cultivará A y ganará 400. Si la información indica que la primavera será lluviosa el agricultor cultivará B y ganará 450. Por tanto, la ganancia esperada con esta información completa es:

$$400p + 450(1-p) = 450 - 50p$$

El valor de esta información completa depende de p. Si $p < \frac{2}{9}$ (sin información cultivaría B) el valor de la información completa es:

$$450 - 50p - (450 - 225p) = 175p$$

Si $p > \frac{2}{9}$ (sin información cultivaría A) el valor de la información completa es:

$$450 - 50p - (400) = 50 - 50p$$

El valor de la información es máximo cuando $p = \frac{2}{9}$ (el valor de la información aumenta con p cuando $p < \frac{2}{9}$ y disminuye con p cuando $p > \frac{2}{9}$). Cuando $p = \frac{2}{9}$ el agricultor está indiferente entre cultivar A o cultivar B si no recibe información y es entonces cuando la información resulta más útil para elegir entre ambas alternativas. □

3 Revisión de las probabilidades de los estados cuando se recibe información

El decisor revisa las probabilidades que asigna a los estados cuando recibe información y utiliza esas probabilidades revisadas para resolver el problema de decisión al que se enfrenta. Cada mensaje distinto de un servicio de información daría lugar a unas probabilidades revisadas del decisor que serían diferentes.

Cuando la información es completa, la revisión de probabilidades de los estados es fácil de obtener. En ese caso el número de mensajes es igual al número de estados posibles, ya que cualquier mensaje debe resolver completamente la incertidumbre y, por tanto, debe haber un mensaje distinto para cada estado. Como el mensaje que se reciba dirá con seguridad cuál es el estado que va a ocurrir, si se recibiera el mensaje que pronostica el estado E_i la probabilidad revisada (a posteriori) del estado E_i sería 1 y las probabilidades revisadas de los demás estados serían 0.

Cuando se recibe información incompleta, la revisión de las probabilidades de los estados puede obtenerse a veces de forma bastante directa. Considérese, por ejemplo, que hay tres estados posibles, E_1, E_2 y E_3, y que el decisor cree inicialmente que la probabilidad de cada estado es la misma ($\frac{1}{3}$). Si el decisor adquiere un servicio de información que sólo informa si va a ocurrir el estado E_3 o si no va a ocurrir ese estado, la revisión de las probabilidades de los estados será de la siguiente forma: Si el mensaje que recibe el decisor es que va a ocurrir E_3, el decisor asignará una probabilidad revisada igual a 1 a ese estado y una probabilidad revisada igual a cero a cada uno de los demás estados. Si el mensaje que recibe el decisor es que no va a ocurrir E_3, el decisor sabe que ocurrirá E_1 o E_2, pero no sabe cuál de esos dos estados ocurrirá. Como inicialmente creía que E_1 y E_2 eran igual de probables, seguirá creyendo que son igual de probables (el mensaje que dice que no va a ocurrir E_3 no da al decisor ningún argumento para dejar de creer que E_1 y E_2 son igual de probables). Por tanto, si recibe el mensaje que dice que no va a ocurrir E_3, la probabilidad revisada para E_3 será 0 y las probabilidades revisadas para los estados E_1 y E_2 serán $0,5$ para cada uno (la suma de las probabilidades tiene que ser 1).

En muchos servicios de información incompleta la revisión de las probabilidades de los estados no puede calcularse de forma tan directa. Hay que aplicar el método general de revisión de probabilidades que utiliza la Regla (o Teorema) de Bayes para revisar las probabilidades asignadas a los estados. El método general de revisión de probabilidades es aplicable a cualquier servicio de información y procede a partir de las creencias iniciales del decisor. Para calcular la revisión de las probabilidades de los estados causada por un servicio de información hace falta considerar las probabilidades iniciales que el decisor asigna a los estados y, además, las probabilidades que el decisor cree que hay de recibir cada mensaje de ese servicio de información en cada estado posible. Esas probabilidades pueden estar basadas en la experiencia o en conocimientos previos del decisor.

Este suele ser el contexto al que se enfrenta a menudo un decisor. El decisor no sabe qué estado va a ocurrir, pero tiene unas creencias iniciales sobre las probabilidades que asigna a cada estado posible. Además, el decisor puede conseguir información, pero esa información es pocas veces completa. Evidentemente el decisor no sabe qué le va a decir la información, pero tiene también unas creencias sobre la probabilidad de que la información consista en el mensaje M_j si el estado fuese E_i (y esto para cualesquier par i y j). Así, habrá informaciones (mensajes) que considerará poco probables en ciertos estados, pero mucho más probables en otros estados.

Sea $\Pr(E_i)$ la probabilidad que asigna inicialmente el decisor al estado E_i y representemos mediante $\Pr(M_j/E_i)$ la probabilidad de recibir el mensaje M_j cuando el estado es E_i.[2] Para obtener las probabilidades revisadas de los estados (en función del mensaje recibido) se aplica la Regla o Teorema de Bayes:

$$\Pr(E_i/M_j) = \frac{\Pr(M_j/E_i)\Pr(E_i)}{\sum_{i=1}^{n}(\Pr(M_j/E_i)\Pr(E_i))}$$

donde n es el número de estados o situaciones posibles. La Regla de Bayes implica consistencia en la revisión de las probabilidades de los estados. Nótese que $\sum_{i=1}^{n}(\Pr(M_j/E_i)\Pr(E_i)) = \Pr(M_j)$, donde $\Pr(M_j)$ es la probabilidad de recibir el mensaje M_j y, por tanto, puede escribirse:

$$\Pr(E_i/M_j) = \frac{\Pr(M_j/E_i)\Pr(E_i)}{\Pr(M_j)}$$

Cuando la información es completa la revisión de las probabilidades de los estados mencionada anteriormente aplica, de hecho, la Regla de Bayes. En ese caso $\Pr(M_i/E_i) = 1$ para todo i y $\Pr(M_j/E_i) = 0$ para todo $j \neq i$. Para $i = 1, ..., n$, el decisor cree que el servicio de información completa informará que el estado es el E_i con una probabilidad igual a la probabilidad a priori que el propio decisor asignaba a ese estado. Así, $\Pr(M_i) = \Pr(E_i)$ para todo i, $\Pr(E_i/M_i) = 1$ para todo i y $\Pr(E_j/M_i) = 0$ para todo $j \neq i$.

En un servicio de información incompleta el número de mensajes puede coincidir también con el número de estados. Pero en muchos servicios de información incompleta el número de mensajes es menor que el número de estados. Considérese el servicio de información incompleta analizado anteriormente en esta sección: hay tres estados posibles, E_1, E_2 y E_3, el

[2] Las probabilidades de los mensajes dado cada estado podrían ser probabilidades en términos esperados. Por ejemplo, $\Pr(M_1/E_2)$ podría depender de alguna variable aleatoria que no esté incorporada en la definición de los estados (la climatología, algún aspecto de la coyuntura económica, la regulación del mercado correspondiente, etc.). Así, $\Pr(M_1/E_2) = 0,3$ puede obtenerse en una situación en la que hay un 50% de posibilidades de que esa probabilidad sea 0,5 y un 50% de posibilidades de que sea 0,1. En todo caso debe ser $\sum_{j=1}^{m}\Pr(M_j/E_i) = 1$ para cualquier estado E_i.

decisor cree inicialmente que la probabilidad de cada estado es la misma ($\Pr(E_i) = \frac{1}{3}$ para todo i) y el servicio de información sólo puede comunicar si va a ocurrir el estado E_3 o si no va a ocurrir ese estado. En este caso sería:

$\Pr(M/E)$	E_1	E_2	E_3
$M_1 : E_3$ *ocurre*	0	0	1
$M_2 : E_3$ *no ocurre*	1	1	0

$$\Pr(M_1) = \sum_{i=1}^{n} (\Pr(M_1/E_i) \Pr(E_i)) = \frac{1}{3},$$

$$\Pr(M_2) = \sum_{i=1}^{n} (\Pr(M_2/E_i) \Pr(E_i)) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

y

$\Pr(E/M)$	M_1	M_2
E_1	0	$\frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$
E_2	0	$\frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$
E_3	$\frac{1/3}{1/3} = 1$	0

Estas probabilidades a posteriori de los estados ya se habían obtenido antes de forma más directa.

El decisor debe tratar cualquier información incompleta que reciba como un mensaje a tener en cuenta para revisar las probabilidades de los estados. Considérese una empresa que contrata a unos expertos para que le informen sobre la conveniencia de comercializar un producto nuevo que acaba de desarrollar. Los mensajes de los expertos pueden ser de distintos tipos. Considérense los siguientes tipos de mensaje:

i) "Las ventas en el mercado están aumentando un 15% en relación al año pasado". En este caso el experto aporta un dato.

ii) "Estimo que hay un 60% de posibilidades de que el producto tenga éxito si se comercializa". En este caso el experto nos comunica su estimación sobre una probabilidad.

iii) "Mi recomendación es comercializar el producto". En este caso el experto aporta su opinión sobre la alternativa con mayor ganancia (o con mayor utilidad) esperada.

Estos tres tipos de mensajes deben ser tratados mediante el mismo procedimiento por el decisor. El decisor tiene que combinar las probabilidades que asigna inicialmente a los estados con las probabilidades que cree que hay de recibir cada mensaje en cada estado para obtener las probabilidades revisadas de los estados. Sin embargo, la matriz de probabilidades de cada mensaje en cada estado depende no sólo de la credibilidad que otorgue el decisor al experto, sino también del tipo de mensajes que elabore el experto (datos, estimaciones sobre probabilidades, recomendación sobre la alternativa a elegir, etc.).

Ejercicio E: Información y revisión de las probabilidades de los estados

Considere una situación en la que hay tres posibles estados, E_1, E_2 y E_3, y las probabilidades a priori que asigna un decisor neutral ante el riesgo a cada estado son $\Pr(E_1) = 0,1$, $\Pr(E_2) = 0,5$ y $\Pr(E_3) = 0,4$. Se puede conseguir o generar información sobre los estados y esa información consiste en la recepción del mensaje M_1 o del mensaje M_2. Calcule las probabilidades que asignaría el decisor a cada estado después de recibir cada mensaje (probabilidades revisadas o a posteriori) en los siguientes casos:

i) El decisor cree que las probabilidades de recibir cada mensaje en cada estado ($\Pr(M/E)$) vienen dadas por la siguiente matriz:

$\Pr(M/E)$	E_1	E_2	E_3
M_1	$0,9$	$0,3$	0
M_2	$0,1$	$0,7$	1

ii) Los mensajes sólo informan sobre si va a ocurrir el estado E_2 o no, de forma que si el decisor recibe el mensaje M_1 sabrá que ocurrirá E_2, pero si recibe el mensaje M_2 sólo sabrá que no ocurrirá E_2 (y que, por tanto puede ocurrir E_1 o E_3).

Solución

i) A partir del análisis desarrollado en esta sección sabemos que $\Pr(M_j) = \sum_{i=1}^{3}(\Pr(M_j/E_i)\Pr(E_i))$, $j = 1, 2$. Por tanto, $\Pr(M_1) = 0,24$ y $\Pr(M_2) = 0,76$. Aplicando la Regla de Bayes:

$$\Pr(E_i/M_j) = \frac{\Pr(M_j/E_i)\Pr(E_i)}{\Pr(M_j)}$$

se obtiene:

$\Pr(E/M)$	M_1	M_2
E_1	$0,375$	$0,013$
E_2	$0,625$	$0,461$
E_3	0	$0,526$

Si la información consiste en el mensaje M_1 el decisor cambia la distribución de probabilidades a priori sobre los estados (0,1, 0,5, 0,4) por la distribución de probabilidades a posteriori (0,375, 0,625, 0) que es más favorable para los estados 1 y 2. Si la información consiste en el mensaje M_2 ocurre lo contrario.

ii) Un servicio de información incompleta que sólo informa sobre si E_2 ocurrirá o no es un servicio que no puede distinguir entre E_1 y E_3. Si la información recibida indica que E_2 ocurrirá (E_2 sí), las probabilidades a posteriori para el decisor (es decir, las probabilidades revisadas una vez recibida esa información) serán $\Pr(E_1/E_2\ \textit{sí}) = 0$, $\Pr(E_2/E_2\ \textit{sí}) = 1$ y $\Pr(E_3/E_2\ \textit{sí}) = 0$. Si la información recibida indica que E_2 no ocurrirá (E_2 no), el decisor mantendrá la misma proporción entre las probabilidades de los estados E_1 y E_3 que tenía a priori (no hay ninguna razón para cambiar sus creencias iniciales sobre cuánto más probable es E_3 que E_1) y, por tanto, seguirá creyendo que E_3 es cuatro veces más probable que E_1. Así, las probabilidades a posteriori para el decisor, cuando la información recibida indica que E_2 no ocurrirá, serán $\Pr(E_1/E_2\ \textit{no}) = \frac{0,1}{0,1+0,4} = 0,2$, $\Pr(E_2/E_2\ \textit{no}) = 0$ y $\Pr(E_3/E_2\ \textit{no}) = \frac{0,4}{0,1+0,4} = 0,8$. $\square$

4 El valor de la información incompleta

En esta parte del trabajo se analizan situaciones en las que el decisor puede acceder a un servicio de información incompleta y se calcula el valor de la información incompleta en esas situaciones. La información puede ser incompleta de diversas maneras y, por tanto, podría haber distintos servicios de información que proporcionen diferentes informaciones incompletas. Los valores de distintos servicios de información incompleta serán, en general, diferentes. Cuando el decisor neutral ante el riesgo puede optar entre varios servicios de información incompleta escogerá aquél que aumenta más su beneficio esperado, es decir, el servicio de información incompleta para el que es mayor la diferencia entre valor de la información y coste de obtener esa información.

Cuando el decisor es neutral ante el riesgo el valor de un servicio de información incompleta es igual a la diferencia entre la ganancia esperada con ese servicio de información incompleta y la ganancia esperada sin información. La ganancia esperada con un servicio de información incompleta es igual a la suma de los productos de la probabilidad de recibir cada mensaje por la ganancia esperada que se obtiene con la alternativa que proporciona la mayor ganancia esperada si se recibe ese mensaje (y se revisan, en consecuencia, las probabilidades de los estados).

Ejercicio F: Renovación de producto y publicidad

Considérese una empresa que tiene que tomar decisiones en un contexto de incertidumbre en el que no sabe cómo va a variar en el futuro la demanda de productos como el suyo. En concreto, la demanda futura puede ser menor (estado E_1), igual (estado E_2) o mayor (estado E_3) que la actual. La empresa tiene que decidir entre las siguientes tres alternativas:

$\rightarrow A$: seguir como hasta ahora en términos de características del producto de la empresa y niveles de publicidad,
$\rightarrow B$: mantener las características del producto y realizar una campaña publicitaria intensa, y
$\rightarrow C$: renovar profundamente el producto y lanzarlo al mercado mediante la correspondiente campaña publicitaria.

El empresario o gerente que debe elegir entre estas tres alternativas es neutral ante el riesgo. Las creencias iniciales de ese decisor son tales que asigna la misma probabilidad a priori a cada estado ($\Pr(E_1)$=$\Pr(E_2)$=$\Pr(E_3)$=$\frac{1}{3}$). Las ganancias que se derivan de cada alternativa dependen del estado en que se desarrollen esas alternativas. Esas ganancias que se obtienen con cada alternativa en cada estado (en miles de euros) se recogen en la siguiente matriz (un número negativo indica pérdidas):

	E_1	E_2	E_3
A	24	60	96
B	0	80	130
C	-30	74	151

Así, por ejemplo, renovar profundamente el producto y lanzarlo al mercado mediante la correspondiente campaña publicitaria sería la mejor alternativa si la demanda va a ser mayor en el futuro. Conteste las siguientes preguntas:

i) ¿qué alternativa escogerá la empresa si no recibe información sobre cuál va a ser la demanda futura?,

ii) ¿qué alternativa escogerá la empresa si recibe información completa sobre la demanda futura?, ¿qué valor tiene para ella esa información?,

iii) ¿qué alternativa escogerá la empresa si recibe una información (incompleta) sobre la demanda futura que sólo le informa sobre si va a aumentar la demanda o no (es decir, que sólo le informa sobre si va a ocurrir el estado E_3 o no)?, ¿qué valor tiene esa información para la empresa?

Solución

i) e ii)[3]: Si la empresa no recibiera información escogería la alternativa B (mantener las características del producto y realizar una campaña publicitaria intensa), ya que es la que le proporciona la mayor ganancia esperada, y tendría una ganancia esperada igual 70. Si la empresa recibiera

[3] Se presentan de forma abreviada las respuestas a estos apartados. Pueden elaborarse respuestas más completas procediendo como en el Ejercicio A.

información completa sobre cuál va a ser la demanda futura de productos como el suyo escogerá A si el servicio de información informa que el estado es E_1, B si informa que E_2 y C si informa que E_3. La ganancia esperada (a priori) con este servicio de información perfecta sería:

$$\frac{1}{3}(24) + \frac{1}{3}(80) + \frac{1}{3}(151) = 85$$

Por tanto, el decisor estará dispuesto a pagar como máximo por ese servicio de información completa: $85 - 70 = 15$ con lo que el valor de la información completa es 15.

iii) Un servicio de información incompleta que sólo informa sobre si E_3 ocurrirá o no es un servicio que no puede distinguir entre E_1 y E_2. Si el servicio de información informa que el estado es E_3 la empresa hará C. Si la información recibida indica que E_3 no ocurrirá la empresa asignará las mismas probabilidades a posteriori (es decir, una vez recibida esa información) a los estados E_1 y E_2 ya que cree inicialmente que ambos estados son igual de probables y el mensaje que dice que E_3 no ocurrirá no proporciona ningún argumento para dejar de creer que E_1 y E_2 son igual de probables. Por tanto, si la información recibida indica que E_3 no ocurrirá la empresa creerá que hay una probabilidad $\frac{1}{2}$ de que el estado sea el E_1 y una probabilidad $\frac{1}{2}$ de que el estado sea E_2. Si la empresa recibe el mensaje de que E_3 no ocurrirá decidirá realizar la acción A ya que la ganancia esperada con cada acción será:

ganancia esperada (A)=$\frac{1}{2}(24 + 60)$=42
ganancia esperada (B)=$\frac{1}{2}(0 + 80)$=40
ganancia esperada (C)=$\frac{1}{2}(-30 + 74)$=22

La empresa, conforme a sus creencias iniciales cree que hay una probabilidad $\frac{1}{3}$ de que el mensaje indique que E_3 ocurrirá y una probabilidad $\frac{2}{3}$ de que el mensaje indique que E_3 no ocurrirá. Por tanto, la ganancia esperada (a priori) con este servicio de información incompleta es:

$$\frac{2}{3}(42) + \frac{1}{3}(151) = \frac{235}{3}$$

Así, la empresa estará dispuesta a pagar como máximo por ese servicio de información incompleta: $\frac{235}{3} - 70 = 8,33$. Lógicamente el valor de un servicio de información incompleta, en este caso $8,33$, es menor que el valor de la información completa (15). $\square$

4.1 Procedimiento abreviado para el cálculo de la ganancia esperada con una información incompleta

A veces, como se ha indicado en la sección anterior, la información incompleta recibida no permite calcular las probabilidades a posteriori de los estados de forma tan inmediata como en iii) del Ejercicio F. En ese caso se puede utilizar la Regla de Bayes para calcular esas probabilidades (y las probabilidades de los mensajes). No obstante, existe un procedimiento más breve, que se expone a continuación, para obtener la ganancia esperada con información incompleta y, por tanto, el valor de esa información incompleta.

Considérese un decisor que tiene que elegir entre l alternativas X^k, con $k = 1, ..., l$. La situación es incierta ya que puede haber n situaciones o estados E_i posibles, $i = 1, ..., n$. La alternativa X^k proporciona una ganancia x_i^k en el estado E_i (si $x_i^k < 0$, la alternativa X^k ocasiona una pérdida si el estado es E_i).

Si el decisor recibe información incompleta esa información consiste en la recepción de un mensaje entre los m mensajes M_j, $j = 1, ..., m$. Las creencias del decisor se concretan en las probabilidades $\Pr(E_i)$ y $\Pr(M_j/E_i)$ para $i = 1, ..., n$ y $j = 1, ..., m$. La ganancia esperada con la alternativa X^k cuando se recibe el mensaje M_j es $\sum_{i=1}^{n} \Pr(E_i/M_j)x_i^k$. Por tanto, la alternativa que escogería el decisor si recibiera el mensaje M_j sería X^k tal que k sea la solución de $\max_k \left\{\sum_{i=1}^{n} \Pr(E_i/M_j)x_i^k\right\}$, ya que esa alternativa maximizaría la ganancia esperada cuando se recibe el mensaje M_j.

La ganancia esperada con ese servicio de información incompleta puede expresarse, teniendo en cuenta la Regla o Teorema de Bayes:

$$\sum_{j=1}^{m} \Pr(M_j) \max_k \left\{ \sum_{i=1}^{n} \Pr(E_i/M_j)x_i^k \right\} = \sum_{j=1}^{m} \max_k \left\{ \sum_{i=1}^{n} \Pr(E_i/M_j) \Pr(M_j)x_i^k \right\}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \max_k \left\{ \sum_{i=1}^{n} \Pr(M_j/E_i) \Pr(E_i) x_i^k \right\}$$

En consecuencia, no hace falta calcular las probabilidades de los mensajes ni las probabilidades revisadas o a posteriori de los estados para calcular la ganancia esperada con un servicio de información incompleta y el valor de ese servicio de información incompleta.

Por otra parte, nótese que la alternativa escogida si se recibiera el mensaje M_j sería la alternativa X^k, tal que k es la solución de $\max_k \left\{\sum_{i=1}^{n} \Pr(M_j/E_i) \Pr(E_i) x_i^k\right\}$ ya que, teniendo en cuenta la Regla o Teorema de Bayes y como $\Pr(M_j)$ no depende de k:

$$\max_k \left\{ \sum_{i=1}^{n} \Pr(E_i/M_j) x_i^k \right\} = \max_k \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\Pr(M_j/E_i) \Pr(E_i)}{\Pr(M_j)} x_i^k \right\}$$

$$= \frac{1}{\Pr(M_j)} \max_k \left\{ \sum_{i=1}^{n} \Pr(M_j/E_i) \Pr(E_i) x_i^k \right\}$$

Si la alternativa escogida fuese independiente del mensaje recibido (se escoge la misma alternativa con cualquier mensaje), esa alternativa sería también la que se escogería sin información y el valor de la información incompleta sería nulo. El valor de la información incompleta también es nulo si el decisor cree que la probabilidad de cada mensaje es la misma en todos los estados (aunque las probabilidades de mensajes diferentes sean distintas). En este último caso la información incompleta, cualquiera que sea el mensaje recibido, no modifica las creencias iniciales del decisor sobre las probabilidades de los estados: Si, para todo j, $\Pr(M_j/E_i)$ no depende de i será:

$$\Pr(M_j) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(M_j/E_i) \Pr(E_i) = \Pr(M_j/E_i) \sum_{i=1}^{n} \Pr(E_i) = \Pr(M_j/E_i)$$

para cualquier i y, por tanto, aplicando la Regla de Bayes:

$$\Pr(E_i/M_j) = \Pr(E_i)$$

para todo i.

Ejercicio G: Valor de distintos servicios de información

Un decisor neutral ante el riesgo tiene que elegir entre las alternativas A, B y C. Las ganancias que se derivan de cada alternativa dependen del estado (de la economía, etc...) en que se desarrollen esas alternativas. Hay tres estados posibles que denominamos E_1, E_2 y E_3. Las creencias iniciales del decisor son tales que asigna la misma probabilidad a priori a cada estado ($\Pr(E_1)=\Pr(E_2)=\Pr(E_3)=\frac{1}{3}$). Las ganancias que se obtienen con cada alternativa $X \in \{A, B, C\}$ en cada estado $g(X/E)$ se recogen en la siguiente matriz:

$g(X/E)$	E_1	E_2	E_3
A	1	5	9
B	6	2	8
C	7	4	3

Conteste las siguientes preguntas:

i) ¿Cuál es el valor de la información completa?

ii) ¿Cuál es el valor de un servicio de información que sólo informa sobre si ocurrirá E_2 o si no ocurrirá E_2?

iii) ¿Cuál es el valor de un servicio de información incompleta con tres mensajes posibles, M_1, M_2 y M_3, tales que las probabilidades de cada mensaje dado cada estado ($\Pr(M/E)$) son:

$\Pr(M/E)$	E_1	E_2	E_3
M_1	$0,6$	$0,2$	$0,1$
M_2	$0,3$	$0,6$	$0,3$
M_3	$0,1$	$0,2$	$0,6$

?

iv) ¿Cuál es el valor de un servicio de información incompleta con tres mensajes posibles, N_1, N_2 y N_3, tales que las probabilidades de cada mensaje dado cada estado ($\Pr(N/E)$) son:

$\Pr(N/E)$	E_1	E_2	E_3
N_1	$0,45$	$0,4$	$0,3$
N_2	$0,25$	$0,3$	$0,3$
N_3	$0,3$	$0,3$	$0,4$

?

Solución

i) Si el decisor no recibe información escogerá la acción B, que es la que le proporciona la mayor ganancia esperada, y su ganancia esperada será $\frac{16}{3}$. Si el decisor recibe información completa sobre el estado hará C si el servicio de información informa que el estado es E_1 y hará A tanto si el servicio de información informa que el estado es E_2 como si informa que es E_3. Su ganancia esperada con este servicio de información completa será:

$$\frac{1}{3}(7) + \frac{1}{3}(5) + \frac{1}{3}(9) = \frac{21}{3}$$

Por tanto, el valor de la información completa es $\frac{21}{3} - \frac{16}{3} = \frac{5}{3}$.

ii) Un servicio de información que sólo informa sobre si ocurrirá E_2 o si no ocurrirá E_2 no permite distinguir entre E_1 y E_3. Si el servicio de información informa que el estado es E_2 el decisor hará A. Si la información recibida indica que E_2 no ocurrirá el decisor asignará las mismas probabilidades a posteriori (es decir, una vez recibida esa información) a los estados E_1 y E_3 y, por tanto, creerá que hay una probabilidad $\frac{1}{2}$ de que el estado sea el E_1 y una probabilidad $\frac{1}{2}$ de que el estado sea E_3. Las razones para estas probabilidades a posteriori de los estados E_1 y E_3 son que a priori el decisor creía que todos los estados eran igual de probables y que el mensaje recibido, que E_2 no ocurrirá, no da al decisor ningún argumento para dejar de creer que E_1 y E_3 son igual de probables.

Por tanto, si el decisor recibe como mensaje que E_2 no ocurrirá decidirá realizar la acción B ya que:

ganancia esperada (A)=$\frac{1}{2}(1+9)$=$\frac{10}{2}$
ganancia esperada (B)=$\frac{1}{2}(6+8)$=$\frac{14}{2}$
ganancia esperada (C)=$\frac{1}{2}(7+3)$=$\frac{10}{2}$

El decisor cree que hay una probabilidad $\frac{1}{3}$ de que el mensaje indique que E_2 ocurrirá, ya que esa es su creencia inicial sobre la probabilidad de que ocurra E_2, y, por tanto, cree que hay una probabilidad $\frac{2}{3}$ de que el mensaje indique que E_2 no ocurrirá. En consecuencia, la ganancia esperada con este servicio de información incompleta es:

$$\frac{2}{3}(\frac{14}{2}) + \frac{1}{3}(5) = \frac{19}{3}$$

Así, el decisor estará dispuesto a pagar como máximo por ese servicio de información incompleta: $\frac{19}{3} - \frac{16}{3} = \frac{3}{3} = 1$.

iii) Con este servicio de información incompleta la alternativa que escogería el decisor si se recibiera el mensaje M_j, con $j \in \{1, 2, 3\}$, sería la alternativa $X \in \{A, B, C\}$ que resuelva $\max_{X \in \{A,B,C\}} \left\{\sum_{i=1}^{3} \Pr(M_j/E_i) \Pr(E_i) g(X/E_i)\right\}$, como se ha probado anteriormente en esta sección. Se obtiene que:

- si mensaje M_1:

$$\begin{array}{c} \sum_{i=1}^{3} \Pr(M_1/E_i) \Pr(E_i) g(A/E_i) = \frac{2,5}{3} \\ \sum_{i=1}^{3} \Pr(M_1/E_i) \Pr(E_i) g(B/E_i) = \frac{4,8}{3} \\ \sum_{i=1}^{3} \Pr(M_1/E_i) \Pr(E_i) g(C/E_i) = \frac{5,3}{3} \end{array}$$

- si mensaje M_2:

$$\begin{array}{c} \sum_{i=1}^{3} \Pr(M_2/E_i) \Pr(E_i) g(A/E_i) = 2 \\ \sum_{i=1}^{3} \Pr(M_2/E_i) \Pr(E_i) g(B/E_i) = 1,8 \\ \sum_{i=1}^{3} \Pr(M_2/E_i) \Pr(E_i) g(C/E_i) = 1,8 \end{array}$$

- si mensaje M_3:

$$\begin{array}{c} \sum_{i=1}^{3} \Pr(M_3/E_i) \Pr(E_i) g(A/E_i) = \frac{6,5}{3} \\ \sum_{i=1}^{3} \Pr(M_3/E_i) \Pr(E_i) g(B/E_i) = \frac{5,8}{3} \\ \sum_{i=1}^{3} \Pr(M_3/E_i) \Pr(E_i) g(C/E_i) = \frac{3,3}{3} \end{array}$$

Por tanto, la mejor respuesta al mensaje M_1 es C, la mejor respuesta al mensaje M_2 es A y la mejor respuesta al mensaje M_3 es también A. Utilizando el procedimiento abreviado de cálculo de la ganancia esperada con información incompleta explicado antes del comienzo de este Ejercicio se obtiene que la ganancia esperada con este servicio de información incompleta es $\frac{5,3}{3} + 2 + \frac{6,5}{3} = \frac{17,8}{3}$. Por tanto, el valor de esa información incompleta es $\frac{17,8}{3} - \frac{16}{3} = \frac{1,8}{3}$. El valor de este servicio de información incompleta es menor que el valor del servicio de información incompleta considerado en el apartado b).

iv) Con este servicio de información incompleta la alternativa que escogería el decisor si recibiera el mensaje N_j, con $j \in \{1,2,3\}$, sería la alternativa X que resuelva $\max_{X\in\{A,B,C\}}\left\{\sum_{i=1}^{3}\Pr(N_j/E_i)\Pr(E_i)g(X/E_i)\right\}$. Se obtiene que:

- si mensaje N_1:

$$\begin{array}{r}\sum_{i=1}^{3}\Pr(N_1/E_i)\Pr(E_i)g(A/E_i)=\frac{5{,}15}{3}\\ \sum_{i=1}^{3}\Pr(N_1/E_i)\Pr(E_i)g(B/E_i)=\frac{5{,}9}{3}\\ \sum_{i=1}^{3}\Pr(N_1/E_i)\Pr(E_i)g(C/E_i)=\frac{5{,}65}{3}\end{array}$$

- si mensaje N_2:

$$\begin{array}{r}\sum_{i=1}^{3}\Pr(N_2/E_i)\Pr(E_i)g(A/E_i)=\frac{4{,}45}{3}\\ \sum_{i=1}^{3}\Pr(N_2/E_i)\Pr(E_i)g(B/E_i)=\frac{4{,}5}{3}\\ \sum_{i=1}^{3}\Pr(N_2/E_i)\Pr(E_i)g(C/E_i)=\frac{3{,}85}{3}\end{array}$$

- si mensaje N_3:

$$\begin{array}{r}\sum_{i=1}^{3}\Pr(N_3/E_i)\Pr(E_i)g(A/E_i)=\frac{5{,}4}{3}\\ \sum_{i=1}^{3}\Pr(N_3/E_i)\Pr(E_i)g(B/E_i)=\frac{5{,}6}{3}\\ \sum_{i=1}^{3}\Pr(N_3/E_i)\Pr(E_i)g(C/E_i)=\frac{4{,}5}{3}\end{array}$$

Cualquiera que sea el mensaje que reciba (N_1, N_2 o N_3), el decisor hará B. El valor de este servicio de información es, por tanto, nulo, ya que el decisor sabe que debe hacer B, independientemente de lo que diga la información. En efecto, la ganancia esperada con este servicio de información incompleta es $\frac{5{,}9}{3}+\frac{4{,}5}{3}+\frac{5{,}6}{3}=\frac{16}{3}$ y el valor de esa información incompleta es $\frac{16}{3}-\frac{16}{3}=0$.

Nota 1 al Ejercicio G: El apartado ii) podría haberse resuelto como los apartados iii) e iv). Para ello basta con observar que en ii) la probabilidad de los mensajes dados los estados es:

$\Pr(M/E)$	E_1	E_2	E_3
M_1 : E_2 *ocurre*	0	1	0
M_2 : E_2 *no ocurre*	1	0	1

Nota 2 al Ejercicio G: En general, las ganancias (o pérdidas, en su caso) de cada alternativa pueden referirse a diferencias en comparación con las que se obtendrían con la alternativa correspondiente a la situación preexistente o status quo. Si esta alternativa fuera también una opción a considerar, proporcionaría una ganancia, en relación a sí misma, igual a cero en cada estado. En este Ejercicio ninguna de las tres alternativas consideradas implica pérdidas en relación al status quo en ningún estado. $\square$

Ejercicio H: Decisión de inversión e información incompleta

Un decisor neutral ante el riesgo tiene que decidir si realiza una inversión en un activo arriesgado. Si no realiza la inversión sus beneficios son cero. Si realiza la inversión sus beneficios son 100 si el estado es E_1 (auge o expansión de la economía) y -40 (negativos) si el estado es E_2 (recesión económica). El decisor cree inicialmente que hay una probabilidad igual a 0,3 de auge de la economía.

i) ¿Qué acción realizará el decisor si no recibe información adicional?

ii) Suponga que el decisor puede recibir como información los mensajes M_1 y M_2, de forma que cree que la probabilidad de recibir el mensaje M_1 si el estado es E_1 es 0,6 y la probabilidad de recibir el mensaje M_1 si el estado de la naturaleza es E_2 es 0,2. Determine cuál es el valor de este servicio de información incompleta.

Solución

i) Realiza la inversión ya que: $0,3(100) + 0.7(-40) = 2 > 0$.

ii) Si recibiese el mensaje M_1 realizaría la inversión ya que: $0,6(0,3)(100) + 0,2(0,7)(-40) = 12,4 > 0$ (nótese que 0 es lo que resultaría haciendo el cálculo análogo correspondiente para la alternativa consistente en no realizar la inversión).

Si recibiese el mensaje M_2 no realizaría la inversión ya que: $0,4(0,3)(100) + 0,8(0,7)(-40) = -10,4 < 0$.

La ganancia esperada con esa información incompleta será: $12,4 + 0 = 12,4$ y, por tanto, el valor de esa información incompleta será: ganancia esperada con información incompleta-ganancia esperada sin información $= 12,4 - 2 = 10,4$. $\square$

Ejercicio I: Búsqueda de petróleo mediante perforaciones

Considere un decisor neutral ante el riesgo que es dueño de una finca en la que puede haber petróleo. El decisor tiene que decidir si realiza perforaciones en su terreno o no, y cree que la probabilidad de que haya petróleo (estado E_1) es $\frac{1}{3}$ y, por tanto, la probabilidad de que no haya petróleo, o de que la cantidad o características cualitativas del petróleo que encuentra desaconsejan su extracción, (estado E_2) es $\frac{2}{3}$. Si decide perforar gana 1000 millones de euros si el estado es E_1 pero pierde 300 millones de euros si el estado es E_2. Si decide no perforar sus ganancias son cero. Para conseguir información el dueño de la finca puede encargar un estudio geológico del terreno. Conteste las siguientes preguntas:

i) Hay una probabilidad igual a 0,6 de que el estudio geológico suministre información completa y una probabilidad igual a 0,4 de que ese estudio no sea capaz de proporcionar ninguna información útil al decisor. ¿Cuánto estaría dispuesto a pagar como máximo el decisor por ese estudio geológico?

ii) ¿Realizará perforaciones el dueño del terreno si el estudio geológico sólo le proporciona información incompleta (sobre si hay petróleo o no en su finca) de forma que el decisor cree que si el estado es E_1 el estudio geológico dirá que hay petróleo en la finca con una probabilidad $0,6$, pero que si el estado es E_2 el estudio geológico dirá que hay petróleo en la finca con una probabilidad de sólo $0,2$?, ¿Qué valor tiene esa información incompleta para el decisor?

iii) Obtenga el valor del estudio geológico considerado en ii) cuando el dueño de la finca cree que la probabilidad de que haya petróleo (estado E_1) es $\frac{1}{4}$ y pierde 400 millones de euros si realiza perforaciones y no encuentra petróleo.

Solución

i) Sin información el dueño de la finca decidiría realizar perforaciones en su finca ya que $\frac{1}{3}(1000) + \frac{2}{3}(-300) = \frac{400}{3} > 0$.

La ganancia esperada con información completa sería: $\frac{1}{3}(1000) + \frac{2}{3}(0) = \frac{1000}{3}$. Por tanto, el valor de la información completa es $\frac{1000}{3} - \frac{400}{3} = 200$ millones de euros. Como sólo hay una probabilidad igual a 0,6 de que el estudio geológico proporcione información completa lo máximo que estaría dispuesto a pagar el dueño de la finca por el estudio geológico sería $0,6(200) = 120$.

ii) Si recibiera el mensaje M_1 (hay petróleo) realizaría perforaciones ya que: $0,6(\frac{1}{3})(1000)+0,2(\frac{2}{3})(-300) = 160 > 0$ (nótese que 0 es lo que resultaría haciendo el cálculo análogo correspondiente para la alternativa consistente en no realizar perforaciones).

Si recibiera el mensaje M_2 (no hay petróleo) no realizaría perforaciones ya que: $0,4(\frac{1}{3})(1000) + 0,8(\frac{2}{3})(-300) = \frac{400}{3} - 160 < 0$.

La ganancia esperada con esa información incompleta será: $160+0 = 160$ y, por tanto, el valor de ese servicio de información incompleta será: ganancia esperada con información incompleta - ganancia esperada sin información $= 160 - \frac{400}{3} = \frac{80}{3}$.

iii) En este caso, el dueño de la finca no hará perforaciones en su terreno si no obtiene información ya que $\frac{1}{4}(1000) + \frac{3}{4}(-400) = -50 < 0$.

Si recibiera el mensaje M_1 (hay petróleo) realizaría perforaciones ya que: $0,6(\frac{1}{4})(1000) + 0,2(\frac{3}{4})(-400) = 90 > 0$ (nótese que 0 es lo que resultaría haciendo el cálculo análogo correspondiente para la alternativa consistente en no realizar perforaciones).

Si recibiera el mensaje M_2 (no hay petróleo) no realizaría perforaciones ya que: $0,4(\frac{1}{4})(1000) + 0,8(\frac{3}{4})(-400) = -140 < 0$.

La ganancia esperada con esa información incompleta será: $90+0 = 90$ y, por tanto, el valor de ese servicio de información incompleta será: ganancia esperada con información incompleta - ganancia esperada sin información $= 90 - 0 = 90$.

Nota al Ejercicio I: La situación a la que se enfrenta el decisor es peor en el apartado iii) que en el apartado ii) ya que la probabilidad de que haya petróleo es menor en iii) que en ii) y las pérdidas si perfora y no hay petróleo son mayores en iii) que en ii). Se ha obtenido que el decisor está dispuesto a pagar más en iii) que en ii) por la información incompleta considerada. No obstante, el valor de la información sería mayor en ii) que en iii) si, por ejemplo, en iii) fuera $\frac{1}{7}$ la probabilidad de que haya petróleo (estado E_1). $\square$

Ejercicio J: Comercialización de un producto nuevo

Una empresa neutral ante el riesgo ha desarrollado un producto nuevo y tiene que decidir si introducirlo en el mercado (comercializarlo) o no. Si comercializa el producto y la comercialización es un éxito la empresa gana 8 (millones de euros). Pero si comercializa el producto y la comercialización fracasa la empresa pierde 2. La empresa cree que hay un 40 por ciento de posibilidades de que el producto sea un éxito (estado E_1) y un 60 por ciento de posibilidades de que el producto fracase (estado E_2). Si no comercializa el producto su ganancia es 0. Si la empresa puede conseguir información, la forma en que obtiene esa información es con un estudio de mercado o mediante un test de mercado consistente en lanzar el producto en una ciudad, región o país que considera representativo del mercado total. Deseamos contestar las siguientes preguntas:

i) ¿comercializará su producto la empresa si no consigue información sobre cuál va a ser el resultado, éxito o fracaso, que obtendrá si lanza su producto en el mercado total?,

ii) ¿comercializará su producto la empresa si, mediante un estudio o test de mercado, consigue información completa sobre cuál va a ser el resultado, éxito o fracaso, que obtendrá si lanza su producto en el mercado total?, ¿qué valor tiene para ella esa información completa?,

iii) ¿comercializará su producto la empresa si el test sólo le proporciona información incompleta (sobre cuál va a ser el resultado, éxito o fracaso, que obtendrá si lanza su producto en el mercado total) de forma que la empresa cree que si el estado es E_1 el test tendrá éxito con una probabilidad $\frac{6}{7}$, pero si el estado es E_2, la probabilidad de que el test tenga éxito es sólo $\frac{2}{7}$?, ¿qué valor tiene esa información incompleta para la empresa?,

iv) considere que la empresa puede realizar el test de mercado en la ciudad (región o país) C o en la ciudad (región o país) D. Realizando el test de mercado en C obtiene información completa y, en cambio, realizándolo en D obtiene la información incompleta analizada en el apartado iii) (puede considerarse que C es más representativa del mercado total o más grande que D). Si los costes de realizar los tests de mercado son, respectivamente, 0,6 en C y 0,3 en D, ¿en cuál de las dos ciudades (regiones o países) realizará el test de mercado la empresa?

Solución

i) Sí comercializa ya que: $0,4(8) + 0,6(-2) = 2 > 0$.

ii) Ganancia esperada con información completa: $0,4(8) + 0,6(0) = 3,2$. El valor de la información completa es: $3,2 - 2 = 1,2$.

iii) Si el test fuera un éxito comercializaría ya que: $\frac{6}{7}(0,4)(8) + \frac{2}{7}(0,6)(-2) = 2,4 > 0$ (nótese que 0 es lo que obtiene si no comercializa). Si el test no tuviera éxito no comercializaría ya que: $\frac{1}{7}(0,4)(8) + \frac{5}{7}(0,6)(-2) = -0.4 < 0$. La ganancia esperada con esa información incompleta será: $2,4 + 0 = 2,4$ y, por tanto, el valor de ese servicio de información incompleta será: ganancia esperada con información incompleta - ganancia esperada sin información $= 2,4 - 2 = 0,4$.

iv) Es mejor realizar el test en la ciudad C que en la ciudad D porque la diferencia entre el valor de la información (completa) y el coste de obtener esa información en C es $1,2 - 0,6 = 0,6$ y, en cambio, la diferencia entre el valor de la información (incompleta) y el coste de esta información en D es $0,4 - 0,3 = 0,1$. $\square$

5 Nivel de información óptimo para el decisor. El valor de una segunda opinión.

En esta sección se estudia en primer lugar la determinación del nivel de información óptimo para el decisor cuando éste puede elegir distintos grados de precisión de la información, con un coste de adquirir la información que aumenta con el grado de precisión. A continuación se analizan el valor de una segunda opinión (o de una segunda información), cuando ya se ha recibido una primera opinión o información, y el valor de una opinión o información adicional, cuando el decisor posee varias opiniones o informaciones previas.

En algunas situaciones hay que decidir ex-ante la cantidad de información a adquirir: por ejemplo, ¿a cuántas personas entrevistar antes de decidir sobre el lanzamiento de un nuevo producto al mercado? o ¿cuántas pruebas exigir antes de autorizar la comercialización de un producto de alimentación? ¿Cuánta información adquirirá el decisor cuando se debe decidir inicialmente el nivel (cantidad o calidad) de información a adquirir? Al decisor le va a merecer la pena adquirir un nivel mayor de información si el aumento en la ganancia esperada con ese nivel más elevado de información es mayor que el correspondiente aumento en el coste de adquisición de la información. Considérese la siguiente variante del primer apartado del Ejercicio I para analizar esta decisión:

Ejercicio K: Nivel de información óptimo para el decisor

Considere un decisor neutral ante el riesgo que es dueño de una finca en la que puede haber petróleo. El decisor tiene que decidir si realiza perforaciones en su terreno o no, y cree que la probabilidad de que haya petróleo (estado E_1) es $\frac{1}{3}$ y, por tanto, la probabilidad de que no haya petróleo (estado E_2) es $\frac{2}{3}$. Si decide perforar gana 1000 millones de euros si encuentra petróleo pero pierde 300 millones de euros si no encuentra petróleo (o si la cantidad o características cualitativas del petróleo que encuentra desaconsejan su extracción). Si decide no perforar sus ganancias son cero. Para conseguir información el dueño de la finca puede encargar un estudio geológico del terreno. Realizar un estudio geológico que suministre información completa con una probabilidad q y que con una probabilidad $1-q$ no sea capaz de proporcionar ninguna información útil al decisor cuesta $C(q) = 140q^2$ (por tanto, aumentar la probabilidad q de que el estudio geológico resuelva la incertidumbre es costoso, ya que hay que hacer más pruebas y más estudios para que q aumente). ¿Cuánto decidirá invertir el decisor en ese estudio geológico?

Solución

Sin información el dueño de la finca decidiría realizar perforaciones en su finca ya que $\frac{1}{3}(1000) + \frac{2}{3}(-300) = \frac{400}{3} > 0$.

La ganancia esperada con información completa sería: $\frac{1}{3}(1000) + \frac{2}{3}(0) = \frac{1000}{3}$. Por tanto, el valor de la información completa es $\frac{1000}{3} - \frac{400}{3} = 200$ millones de euros. Como sólo hay una probabilidad q de que el estudio geológico proporcione información completa lo máximo que estaría dispuesto a pagar el dueño de la finca por el estudio geológico sería $q(200)$. Para decidir el nivel óptimo de q el decisor maximizará la diferencia entre el valor que tendría el estudio geológico y el coste de ese estudio geológico, es decir, resolverá:

$$\max_q \; 200q - 140q^2$$

A partir de la condición de primer orden se obtiene (la condición de segundo orden para máximo también se cumple):

$$200 - 280q = 0 \Rightarrow q = \frac{10}{14} = 0,714$$

En este caso, por tanto, invertirá $140(\frac{10}{14})^2 = 71,\ 43$ en el estudio geológico. El aumento en el beneficio esperado del decisor con ese estudio geológico será: $\frac{10}{14}(200) - 71,\ 43$. □

En otros casos la decisión es secuencial: si se han adquirido una serie de unidades de información, ¿merece la pena adquirir una unidad más (consultar a otro expecialista o experto, consultar otro artículo sobre un tema que nos interesa, entrevistar a otro candidato para un trabajo, visitar otro piso más, consultar otra página web, buscar otra oferta de trabajo, exigir una prueba más antes de autorizar un medicamento)? No es difícil calcular el valor de un segundo servicio de información, cuando se ha obtenido previamente información de un servicio de información incompleta. El valor de un segundo servicio de información, cuando ya se ha recibido un mensaje proporcionado por un primer servicio de información incompleta, se calcula utilizando las probabilidades revisadas de los estados tras la recepción de ese mensaje como probabilidades a priori para la revisión de probabilidades de los estados con ese segundo servicio de información. El valor del segundo servicio de información depende, por tanto, del mensaje que se haya recibido del primer servicio de información. El valor de un servicio de información adicional cuando ya se han recibido mensajes de varios servicios de información previos se calcula de forma análoga a partir de las probabilidades revisadas en función de los mensajes anteriores. Merecerá la pena adquirir un servicio de información adicional (pedir una segunda opinión) cuando el valor que añade ese servicio de información sea mayor que su coste.

6 Flexibilidad e información. Valor de la flexibilidad

En esta Sección se consideran situaciones en las que el decisor puede escoger entre alternativas que producen ganancias en varios periodos de tiempo. Así, por ejemplo, si hubiera dos periodos (1 y 2: presente y futuro) y cada alternativa produjera beneficios (o costes) en cada uno de los dos periodos, el decisor debería tener en cuenta en su elección no sólo las ganancias de cada alternativa en el presente sino también sus ganancias en el futuro. Para ello debe descontar las ganancias futuras (multiplicándolas por su factor de descuento δ) para convertir las unidades monetarias del futuro en unidades monetarias del presente.

Se considera, además, que hay alternativas cuyas ganancias en el futuro son inciertas ya que dependen del estado que ocurra en el futuro. Con el paso del tiempo (después del periodo presente) llega información que resuelve total o parcialmente la incertidumbre sobre esas ganancias futuras (sobre el estado que ocurrirá en el futuro). Esa información llega independientemente de lo que haga el decisor en el presente y, además, el decisor la recibe sin tener que pagar nada por ella.

Cuando hay más de un periodo hay que tener en cuenta la posibilidad de que el decisor elija una determinada alternativa en el presente y opte, en cambio, por una alternativa diferente en el futuro debido a la información recibida con el paso del tiempo. No obstante, la posibilidad de cambiar de una alternativa a otra depende del grado de flexibilidad de la alternativa inicial. Una alternativa es totalmente flexible si se puede cambiar desde esa alternativa a cualquier otra sin ningún coste (los costes de cambiar a cualquier otra alternativa son nulos). Una alternativa es irreversible si no es factible cambiar desde esa alternativa a ninguna otra (o si los costes de cambiar a cualquier otra alternativa son tan elevados que no merece la pena realizar ese cambio en ningún caso). Por último, una alternativa es parcialmente flexible si se puede cambiar de esa alternativa a otra u otras incurriendo en costes de cambio que no son altos. Así, el grado de flexibilidad de una alternativa disminuye al aumentar los costes de cambiar de esa alternativa a otras alternativas.

Considérese un decisor neutral ante el riesgo que tiene que elegir entre alternativas con distintos grados de flexibilidad y que se enfrenta a un horizonte de dos periodos en el que hay incertidumbre sobre los beneficios de cada alternativa en el segundo periodo. Al final del primer periodo se recibe información que resuelve total o parcialmente la incertidumbre sobre las ganancias que proporciona cada alternativa en el segundo periodo. Esta información podría, por tanto, utilizarse para decidir la alternativa que se llevará a cabo en el segundo periodo, excepto si se ha escogido una alternativa irreversible en el presente. Después de esa elección de alternativa a realizar en el futuro se resuelve el resto de la incertidumbre (cuando la información ha sido incompleta) y se sabe cuál es el estado en el futuro.

En este contexto hay que analizar si merece la pena adoptar en el presente una decisión más flexible que pueda modificarse en el futuro en función de la información recibida. Considérese, por ejemplo, que la alternativa más flexible es la que proporciona menos ganancias en el presente y/o que hay ciertos costes de cambiar desde la alternativa más flexible a otras alternativas. En ese caso, escoger en el primer periodo una alternativa menos flexible puede implicar pérdidas en el futuro por la imposibilidad de modificar en el segundo periodo la decisión tomada, pero escoger la alternativa más flexible implica pérdidas en el presente y quizá incurrir en ciertos costes de cambio en el futuro.

El decisor escogerá en el presente la alternativa que le proporcione una ganancia esperada mayor teniendo en cuenta tanto la ganancia en el presente como la ganancia esperada en el futuro con cada alternativa. Las ganancias en el presente para todas las alternativas y las ganancias en el futuro para las alternativas irreversibles están predeterminadas. En cambio, cuando se adopta una alternativa flexible en el presente existe la posibilidad de cambiar a otras alternativas en el futuro y, además, la alternativa a la que se cambie puede depender del mensaje recibido. Por tanto, para calcular la ganancia esperada cuando se escoge una alternativa flexible en el presente, hay que tener en cuenta la alternativa que se escogería en el futuro para cada mensaje posible.

En esta Sección se estudia la relación entre la llegada de información en el futuro y el valor de adoptar en el presente una decisión flexible que puede modificarse, sin coste o con un coste no demasiado alto, cuando se recibe esa información. Se denomina valor de la flexibilidad a la diferencia entre la ganancia esperada que obtiene el decisor cuando recibe información (y adapta sus decisiones de forma óptima a la información que recibe) y la ganancia esperada sin información. El valor de la flexibilidad es, así, el aumento en la ganancia esperada que obtiene el decisor al aprovechar esa información que llega en el futuro mediante la adopción de una decisión flexible en el presente (el valor de la flexibilidad proviene del valor de mantener opciones abiertas para aprovechar la información que se reciba en el futuro). Veremos que una alternativa más flexible es más valiosa (y es más probable que sea adoptada en el presente) cuando se espera la llegada de más información en el futuro o cuando son menores los costes de cambiar de esa alternativa a otras alternativas. En consecuencia, el valor de la flexibilidad aumenta en esos casos si el decisor prefiere escoger una alternative flexible en el presente.

Ejercicio L: Disponibilidad en el futuro de una tecnología nueva con un coste de instalación incierto

Considérese un mercado en el que la venta de un producto permite obtener 200 como ganancias en el primer periodo y 2000 en el conjunto de los periodos segundo y siguientes. Para fabricar ese producto puede utilizarse la tecnología T, que está disponible desde el primer periodo. El coste de instalación de esa tecnología es 1800. En el segundo periodo va a estar disponible una tecnología nueva N cuyo coste de instalación es incierto. El coste de instalación de la tecnología N puede ser 1200 o 2500 (hay, así, dos estados posibles). El decisor cree (creencias iniciales) que este coste será 1200 con probabilidad 0,6 o será 2500 con probabilidad 0,4. Esta incertidumbre sobre el coste de instalación de N se resuelve completamente al final del primer periodo (la información que llega al final de ese periodo es completa).

Cambiar de la tecnología T a la tecnología N es muy costoso. Así, el decisor, que es neutral ante el riesgo, tiene dos alternativas: empezar a fabricar el producto en el primer periodo utilizando la tecnología T y continuar utilizando esa tecnología en los periodos siguientes, o esperar hasta el segundo periodo para empezar a fabricar el producto y decidir entonces qué tecnología utilizar. Calcule el valor de la flexibilidad (de esperar hasta el segundo periodo para decidir la tecnología a utilizar), considerando que una unidad monetaria ganada en el futuro equivale a una unidad monetaria ganada en el presente (y que, por tanto, el decisor no descuenta el futuro y su factor de descuento es uno).

Solución

Si se empezara a fabricar el producto en el primer periodo (con la tecnología T) los beneficios serían:

$$200 - 1800 + 2000 = 400$$

Si, en cambio, se decide esperar hasta el segundo periodo para decidir la tecnología a utilizar, se escogerá la tecnología N para fabricar el producto si el coste de instalación de esa tecnología es 1200 y se utilizará, en cambio, la tecnología T para fabricar el producto si el coste de instalación de la tecnología N es 2500. Así, si se empezara a fabricar el producto en el segundo periodo los beneficios serían:

$$0 + 0,6(2000 - 1200) + 0,4(2000 - 1800) = 560 > 400$$

El valor de la flexibilidad, o de mantener la opción de adoptar la nueva tecnología, es, por tanto, $560 - 400 = 160$.[4] $\square$

Ejercicio M: ¿Invertir ahora, o esperar y decidirlo más adelante?

Un decisor neutral ante el riesgo tiene que elegir entre las alternativas Invertir (I) y No Invertir (NI) en un contexto en el que hay incertidumbre sobre los beneficios de la inversión en el futuro. La alternativa I es irreversible (no se puede deshacer la inversión realizada y recuperar el dinero invertido) y la alternativa NI es totalmente flexible. Así, si ha hecho NI hasta un determinado periodo puede decidir entre hacer NI o hacer I en el periodo siguiente. Las ganancias con la alternativa NI son nulas en cada periodo.[5] La alternativa I proporciona unas ganancias de 200 en el primer periodo (en el presente). Los beneficios de la alternativa I en el futuro dependen de si el estado es E_A o E_B. El decisor cree que hay una probabilidad 0,6 de que ocurra el estado E_A (y, por tanto, cree que $\Pr(E_B) = 0,4$). Realizar la alternativa I tiene un coste de 1800 (es la cuantía de la inversión a realizar). Ese coste se paga en el periodo en el que se realiza la inversión. Calcule el valor de la flexibilidad en los siguientes contextos, considerando que una unidad monetaria ganada en el futuro equivale a una unidad monetaria ganada en el presente (y que, por tanto, el decisor no descuenta el futuro y su factor de descuento es uno):

i) Las ganancias que se obtienen con la alternativa I en el futuro (en el conjunto de los periodos segundo y siguientes), expresadas en unidades monetarias del periodo segundo, son 3000 si el estado es E_A y 1000 si el

[4] No se está considerando que pueda obtenerse un rendimiento del dinero que no se utiliza en el primer periodo cuando se decide esperar al segundo periodo para empezar a producir. Esto podría añadirse fácilmente al análisis.

[5] Podría considerarse que todas las ganancias se expresan como ganancias adicionales en relación a las ganancias en el mejor uso alternativo al que puede dedicarse el dinero que requiere la inversión considerada.

estado es E_B. La incertidumbre se resuelve completamente al final del primer periodo.

ii) La alternativa I proporciona unas ganancias iguales a x en el segundo periodo, y unas ganancias en el conjunto de los periodos tercero y siguientes iguales a $3000 - x$ si el estado es E_A y $1000 - x$ si el estado es E_B, donde $x < 1000$ (por tanto, hay incertidumbre sobre los beneficios de la alternativa I en los periodos tercero y siguientes). No llega información al final del primer periodo y la incertidumbre se resuelve completamente al final del segundo periodo. Nótese que el valor de la flexibilidad dependerá de x.

Solución

i) Los beneficios esperados de invertir en el primer periodo son positivos ya que:

$$200 - 1800 + 0,6(3000) + 0,4(1000) = 600 > 0$$

(es decir, el valor presente neto esperado de la inversión es positivo). Sin embargo, no es esa la mejor alternativa para el decisor. Es mejor no invertir en el primer periodo e invertir en el segundo periodo sólo si el estado es E_A (y, por tanto, no invertir si el estado resulta ser E_B) ya que, entonces, los beneficios esperados son:

$$0 + 0,6(3000 - 1800) + 0,4(0) = 720 > 600$$

En este último caso la inversión sólo se realiza si el estado es E_A y, por tanto, el coste de la inversión sólo se paga con una probabilidad 0,6. El beneficio adicional si se aplaza la decisión de invertir (si se mantiene la opción de hacer I o hacer NI en el futuro) es $720 - 600 = 120$. Este es el valor de optar por la alternativa flexible o valor de la flexibilidad (VF).

Si se realiza la inversión en el primer periodo hay que tener en cuenta el coste de oportunidad que supone la pérdida de la opción de decidir sobre la inversión en el segundo periodo. Ese coste de oportunidad es 720 en este ejemplo y, por tanto, el beneficio neto esperado de realizar la inversión en el primer periodo, en vez de esperar hasta el segundo periodo, es $600 - 720 = -120 < 0$.[6]

Nota a la parte i): Si, mientras no se realice la inversión, puede obtenerse un rendimiento de los 1800 euros que cuesta esa inversión, la alternativa flexible (no invertir en el primer periodo) sería más valiosa y el valor de la flexibilidad aumentaría. El valor de la flexibilidad también aumenta si aumenta el coste de la inversión, si aumenta la probabilidad de E_B, si disminuye la ganancia de la inversión en el presente o si disminuye la ganancia de la inversión en el futuro si ocurre E_B. Por último, en la situación considerada en i) el valor de la flexibilidad aumentará si el factor de descuento es menor que 1 ya que los costes de la inversión para la alternativa flexible ponderarán menos puesto que se realizan en el futuro (en cambio se incurre en esos costes en el presente si la inversión se hace en el presente) y, además, hay más ganancias futuras a descontar si se realiza la inversión en el presente que si se escoge la alternativa flexible.

ii) El decisor no realizará la inversión en el segundo periodo, ya que obtendría más beneficios realizando esa inversión en el primer periodo (si realizase la inversión en el segundo periodo las ganancias esperadas en el futuro serían las mismas pero perdería las ganancias del primer periodo). Los beneficios esperados de invertir en el primer periodo serían:

$$200 - 1800 + x + 0,6(3000 - x) + 0,4(1000 - x) = 600$$

Alternativamente, el decisor podría esperar a la llegada de la información completa y realizar la inversión en el tercer periodo sólo si ocurre E_A. Los beneficios de esta alternativa serían:

$$0 + 0 + 0,6(3000 - x - 1800) = 720 - 0,6x$$

El valor de la flexibilidad en este caso sería $720 - 0,6x - 600 = 120 - 0,6x$. Como $120 - 0,6x > 0 \Leftrightarrow x < 200$ el decisor decidiría esperar hasta el tercer periodo para decidir sobre la inversión si $x < 200$. En cambio, si $x > 200$ el decisor decidiría invertir en el primer periodo (en este caso el valor de

[6] Al invertir en el primer periodo, en vez de esperar al segundo periodo, el decisor consigue apropiarse de las ganancias (200) del primer periodo, pero se arriesga a perder $1800 - 1000 = 800$ en el segundo periodo, con una probabilidad igual a 0,4. Por tanto, al invertir en el primer periodo sus ganancias esperadas varían en $200 - 0,4(800) = -120$.

la flexibilidad es cero). El retraso en la llegada de información hasta el final del segundo periodo hace que sea menos valioso esperar a que llegue la información para decidir sobre la inversión. Comparando este resultado con el obtenido en i) se obtiene que el valor de la flexibilidad es mayor cuando la incertidumbre se resuelve antes. Así, si la información completa llegara al final del segundo periodo el decisor podría realizar la inversión en el primer periodo (un retraso en la llegada de información puede adelantar la realización de la inversión). □

Ejercicio N: Elección entre alternativas y flexibilidad

Un decisor neutral ante el riesgo tiene que elegir en un contexto de dos periodos (presente y futuro) entre las alternativas A, B y C. La alternativa A es flexible y las alternativas B y C son irreversibles. En el futuro puede ocurrir el estado E_1 o puede ocurrir el estado E_2. El decisor cree que hay una probabilidad 0,6 de que ocurra el estado E_1 (y, por tanto, cree que $\Pr(E_2) = 0,4$).

Las ganancias de cada acción en el presente y en el futuro (en el futuro en función de que ocurra E_1 o E_2) se recogen en la tabla siguiente:

	presente	*futuro* E_1	*futuro* E_2
A	100	120	90
B	120	190	60
C	130	40	220

Este ejercicio se desarrolla en tres apartados que analizan, respectivamente, la importancia de: i) el grado de resolución de la incertidumbre en el futuro, ii) el grado de flexibilidad de las alternativas (es decir, los costes de cambiar a otras alternativas) e iii) la ponderación del futuro en la decisión a tomar:

i) grado de resolución de la incertidumbre en el futuro

Analicemos en primer lugar la importancia del grado de resolución de la incertidumbre, como consecuencia de la información que se espera recibir en el futuro. Esa información llegará al final del periodo presente, antes de decidir la alternativa que se llevará a cabo en el futuro (esa alternativa en el futuro ya estará decidida si se ha escogido una alternativa irreversible en el presente). Después de esa elección de alternativa en el futuro, se resuelve la incertidumbre que haya quedado, si la información recibida anteriormente ha sido incompleta, y se sabe cuál es el estado en el futuro.[7] Se considera que una unidad monetaria ganada en el futuro equivale, para el decisor, a una unidad monetaria ganada en el presente. Por tanto, el decisor no descuenta el futuro y su factor de descuento es uno. Considérese, también, que la alternativa A es totalmente flexible. Deseamos contestar las siguientes preguntas:

a) ¿qué alternativas escogerá el decisor, en el presente y en el futuro, si no espera la llegada de información sobre cuál va a ser el estado futuro?,

b) ¿qué alternativas escogerá el decisor, en el presente y en el futuro, si espera la llegada de información completa, al final del periodo presente, sobre cuál va a ser el estado futuro?, ¿qué valor tiene esa información para el decisor?, ¿es valiosa la flexibilidad?,

c) ¿qué alternativas escogerá el decisor, en el presente y en el futuro, si espera la llegada, al final del periodo presente, de información incompleta (sobre cuál va a ser el estado futuro) que proporcione el mensaje M_1 (va a ocurrir E_1) o el mensaje M_2 (va a ocurrir E_2), de forma que la empresa cree que, si el estado es E_1, la probabilidad de recibir el mensaje M_1 es $\frac{6}{7}$, pero que, si el estado es E_2, la probabilidad de recibir el mensaje M_1 es sólo $\frac{1}{7}$?, ¿qué valor tiene esa información para el decisor?, ¿es valiosa la flexibilidad?,

d) ¿qué alternativas escogerá el decisor, en el presente y en el futuro, si espera la llegada, al final del periodo presente, de información incompleta que proporcione el mensaje N_1 (va a ocurrir E_1) o el mensaje N_2 (va a ocurrir E_2), de forma que la empresa cree que, si el estado es E_1, la probabilidad de recibir el mensaje N_1 es $0,7$, pero que, si el estado es E_2, la probabilidad de recibir el mensaje N_1 es $0,4$ (nótese que esta información es más incompleta que la información incompleta considerada en c)?, ¿qué valor tiene esa información

[7] Si la información recibida al final del primer periodo ha sido completa se habrá resuelto toda la incertidumbre con la llegada de esa información.

para el decisor?, ¿es valiosa la flexibilidad?,

Solución

a) Si el decisor no espera la llegada de información que resuelva parcial o totalmente la incertidumbre existente en el futuro, tomará su decisión teniendo en cuenta las ganancias esperadas con cada posible alternativa o combinación de alternativas que pueda escoger. Si el decisor hace B en el presente, tendrá que hacer también B en el futuro, ya que la alternativa B es irreversible. Por la misma razón, tendrá que hacer C en el futuro si decide C en el presente. En cambio, si realiza A en el presente, podrá seguir en el futuro con A o cambiar a B o a C, ya que A es flexible.

La ganancia esperada si el decisor hace A en el presente y en el futuro es

$$100 + 0,6(120) + 0,4(90) = 208$$

La ganancia esperada si el decisor hace B en el presente y en el futuro es

$$120 + 0,6(190) + 0,4(60) = 258$$

Por último, la ganancia esperada si el decisor hace C en el presente y en el futuro es

$$130 + 0,6(40) + 0,4(220) = 242$$

Nótese que el decisor prefiere hacer B en el presente y en el futuro que hacer A en el presente y B en el futuro, ya que la única diferencia entre estas dos alternativas es lo que se hace en el presente, y ocurre que en el presente B es mejor que A. Por la misma razón, el decisor prefiere hacer C en el presente y en el futuro que hacer A en el presente y C en el futuro. En consecuencia, las alternativas A en el presente y B en el futuro, y A en el presente y C en el futuro, nunca serán escogidas por el decisor. Por tanto, teniendo en cuenta los cálculos anteriores, el decisor hará B en el presente y B en el futuro cuando no recibe información, y su ganancia esperada será 258.

b) Si el decisor recibe información que resuelve completamente su incertidumbre sobre el futuro, creerá que la probabilidad de que la información (completa) indique que el estado será E_1 es 0,6, ya que cree inicialmente que hay una probabilidad igual a 0,6 de que el estado sea E_1. Por la misma razón, el decisor creerá que la probabilidad de que la información indique que el estado es E_2 será 0,4.

Cuando el decisor recibe información al final del periodo presente, querrá elegir en el futuro aquella alternativa que, en función de la información recibida, proporcione mayor ganancia. En este caso, el decisor en el futuro querrá hacer B si la información dice que el estado futuro va a ser E_1, y querrá hacer C si la información dice que el estado futuro va a ser E_2. Para adaptarse de forma óptima a la información recibida, y hacer B si la información dice que el estado va a ser E_1 y C si la información dice que el estado va a ser E_2, el decisor tiene que escoger A en el presente, ya que A es flexible. Estudiemos cuál es la ganancia que espera obtener el decisor si realiza A en el presente y se adapta de forma óptima a la información recibida, es decir, si hace B cuando la información dice que el estado futuro va a ser E_1 y hace C cuando la información dice que el estado futuro va a ser E_2. La ganancia esperada con esta alternativa será:

$$100 + 0,6(190) + 0,4(220) = 302$$

Por tanto, cuando el decisor espera la llegada de información completa al final del primer periodo puede obtener una ganancia esperada (302) mayor que la máxima ganancia esperada que puede obtener si no espera la llegada de información adicional (258). La diferencia entre la máxima ganancia esperada que puede obtener con esa información y la máxima ganancia esperada que puede obtener sin información es el valor de la flexibilidad (o valor de la información completa recibida por el decisor). En este caso el valor de la flexibilidad es $302 - 258 = 44$.[8]

[8] Si la alternativa que el decisor preferiría realizar (en el futuro) con cada mensaje recibido fuera la misma, la flexibilidad sólo sería valiosa si sus beneficios en el presente fuesen mayores que los beneficios en el presente de esa alternativa que es la mejor a realizar en el futuro. En este Ejercicio, la flexibilidad no sería valiosa si la alternativa elegida con cada mensaje recibido fuera la misma.

c) Determinemos, en primer lugar, cuál es la mejor respuesta en el futuro a cada mensaje. Para ello calculamos $\max_{X\in\{A,B,C\}}\left\{\sum_{i=1}^{2}\Pr(M_j/E_i)\Pr(E_i)g(X/E_i)\right\}$ para cada mensaje M_j, con $j\in\{1,2\}$. Se obtiene, para M_1:

$$\begin{array}{l} A \longrightarrow \frac{6}{7}(0,6)(120)+\frac{1}{7}(0,4)(90)=66,857 \\ B \longrightarrow \frac{6}{7}(0,6)(190)+\frac{1}{7}(0,4)(60)=101,14 \\ C \longrightarrow \frac{6}{7}(0,6)(40)+\frac{1}{7}(0,4)(220)=33,143 \end{array}$$

y para M_2:

$$\begin{array}{l} A \longrightarrow \frac{1}{7}(0,6)(120)+\frac{6}{7}(0,4)(90)=41,143 \\ B \longrightarrow \frac{1}{7}(0,6)(190)+\frac{6}{7}(0,4)(60)=36,857 \\ C \longrightarrow \frac{1}{7}(0,6)(40)+\frac{6}{7}(0,4)(220)=78,857 \end{array}$$

Por tanto, la mejor respuesta en el futuro al mensaje M_1 es B y la mejor respuesta en el futuro al mensaje M_2 es C.

El decisor querría realizar en el futuro B si recibiese el mensaje M_1, pero desearía realizar C si recibiese el mensaje M_2. Por tanto, el decisor sólo puede adaptarse de forma óptima a la información recibida si escoge la alternativa A en el presente, ya que A es la única alternativa flexible flexible. La ganancia que espera obtener el decisor si realiza A en el presente y se adapta de forma óptima a la información recibida, es decir, si hace B cuando recibe el mensaje M_1 y C cuando recibe el mensaje M_2 será:

$$100+101.14+78.857=279,997$$

La diferencia entre la máxima ganancia esperada que puede obtener el decisor con la información incompleta y la máxima ganancia esperada que puede obtener sin información es el valor de la flexibilidad (o valor de la información incompleta recibida por el decisor). En este caso, por tanto, el valor de la flexibilidad será $279,997-258=21,997$. Lógicamente, el valor de la flexibilidad es menor cuando se recibe información incompleta que cuando se recibe información completa.

d) Calculando $\max_{X\in\{A,B,C\}}\left\{\sum_{i=1}^{2}\Pr(N_j/E_i)\Pr(E_i)g(X/E_i)\right\}$ para cada mensaje N_j, con $j\in\{1,2\}$, se obtiene para N_1:

$$\begin{array}{l} A \longrightarrow 0,7(0,6)(120)+0,4(0,4)(90)=64,8 \\ B \longrightarrow 0,7(0,6)(190)+0,4(0,4)(60)=89,4 \\ C \longrightarrow 0,7(0,6)(40)+0,4(0,4)(220)=52,0 \end{array}$$

y para N_2:

$$\begin{array}{l} A \longrightarrow 0,3(0,6)(120) + 0,6(0,4)(90) = 43,2 \\ B \longrightarrow 0,3(0,6)(190) + 0,6(0,4)(60) = 48,6 \\ C \longrightarrow 0,3(0,6)(40) + 0,6(0,4)(220) = 60,0 \end{array}$$

Así, el decisor querría realizar en el futuro B si recibiese el mensaje N_1 pero desearía realizar C si recibiese el mensaje N_2. Por tanto, el decisor sólo puede adaptarse de forma óptima a la información recibida si escoge la alternativa A en el presente ya que A es flexible. La ganancia que espera obtener el decisor si realiza A en el presente y se adapta de forma óptima a la información recibida, es decir, si hace B cuando recibe el mensaje N_1 y C cuando recibe el mensaje N_2 será:

$$100 + 89,4 + 60 = 249,4$$

Por tanto, en este caso el decisor no escoge la alternativa flexible cuando espera recibir esa información incompleta, incluso aunque sea totalmente flexible (no hay costes de cambiar de A a otras alternativas). El decisor prefiere escoger B en el presente, aunque sea una alternativa irreversible. La razón es que las ganancias que se obtienen al adaptarse en el futuro a la información recibida no compensan por la pérdida de ganancias en el presente cuando se elije la alternativa A, en vez de la alternativa B.

ii) grado de flexibilidad

Estudiemos ahora la importancia del grado de flexibilidad (es decir, de los costes de cambiar a otras alternativas). Si la alternativa A es parcialmente flexible (es decir, si hay costes de cambiar de A a la alternativa B y/o a la alternativa C), ¿cómo varían la elección del decisor y el valor de la flexibilidad con los costes de cambio cuando se espera la llegada de la información incompleta de la pregunta c) del apartado i)? Analícese la situación cuando cuesta 12 cambiar de A a B y 18 cambiar de A a C. Si el coste de cambiar de A a B aumenta hasta 30 ¿cómo varía el valor de la flexibilidad?

Solución

Para analizar si merece la pena adoptar la alternativa flexible en el presente el decisor tiene que calcular la ganancia esperada si hace A en el presente y si responde de forma óptima en el futuro a la información que llegue, adoptando la alternativa que más le convenga en función del mensaje recibido. Así, considerando que hace A en el presente se obtiene la mejor respuesta a cada mensaje rehaciendo los cálculos de c) en i) de la siguiente forma para M_1:

$$\begin{array}{r}
A \longrightarrow \frac{6}{7}(0.6)(120)+\frac{1}{7}(0.4)(90)=66.857 \\
B \longrightarrow \frac{6}{7}(0.6)(190-12)+\frac{1}{7}(0.4)(60-12)=94.286 \\
C \longrightarrow \frac{6}{7}(0.6)(40-18)+\frac{1}{7}(0.4)(220-18)=22.857
\end{array}$$

y para M_2:

$$\begin{array}{r}
A \longrightarrow \frac{1}{7}(0.6)(120)+\frac{6}{7}(0.4)(90)=41.143 \\
B \longrightarrow \frac{1}{7}(0.6)(190-12)+\frac{6}{7}(0.4)(60-12)=31.714 \\
C \longrightarrow \frac{1}{7}(0.6)(40-18)+\frac{6}{7}(0.4)(220-18)=71.143
\end{array}$$

La ganancia que espera obtener el decisor si realiza A en el presente y se adapta de forma óptima a la información recibida, es decir, si hace B cuando recibe el mensaje M_1 y C cuando recibe el mensaje M_2 será:

$$100+94.286+71.143=265,43$$

Por tanto, el valor de la flexibilidad en este caso será $265,43-258=7,43$. Como era de esperar, al ser A menos flexible (hay costes de cambio para pasar a otras alternativas) la ganancia del decisor al decidir A (en vez de escoger la mejor de las alternativas irreversibles) es menor que la obtenida en el apartado c) de i).

Si los costes de cambio son mayores el valor de la flexibilidad disminuye. Para niveles suficientemente elevados de los costes de cambio, puede ocurrir que al decisor no le interese realizar la alternativa flexible (cuya flexibilidad es menor al aumentar los costes de cambio) en el presente, aunque espere recibir información al final del primer periodo. Si cambiar de A a B cuesta 30 y cambiar de A a C cuesta 18, nótese, en primer lugar, que la mejor respuesta a M_2 sigue siendo C. Además, la mejor respuesta a M_1 sigue siendo B ya que $\frac{6}{7}(0.6)(190-30)+\frac{1}{7}(0.4)(60-30)=84$. En este caso, por tanto, la ganancia que espera obtener el decisor si realiza A en el presente y se adapta de forma óptima a la información recibida, es decir, si hace B cuando recibe el mensaje M_1 y C cuando recibe el mensaje M_2 será:

$$100+84+71.143=255.143$$

Como $255.43<258$ el decisor preferirá hacer B en el presente y en el futuro.

iii) ponderación del futuro

Estudiamos en este apartado la importancia del nivel al que se pondera el futuro para la decisión a tomar. Si el decisor descuenta el futuro, ¿cómo varían la elección del decisor y el valor de la flexibilidad con la tasa de descuento cuando se espera la llegada de la información incompleta de la pregunta c) del apartado i)? Analícese la situación cuando el factor de descuento es 0,8. Considérese que A es totalmente flexible.

Solución

¿Qué ocurre si el decisor descuenta el futuro? La alternativa flexible (A) es la que proporciona menos ganancias en el presente. El interés del decisor en esa alternativa se basa en su flexibilidad, que permite lograr mayores ganancias en el futuro adaptando la alternativa a realizar en el futuro a la información que llegue al final del periodo presente. Por tanto, si se descuentan las ganancias futuras el valor de la flexibilidad disminuirá.

Si el factor de descuento es $\delta = 0,8$ y no hay costes de cambiar de A a otra alternativa, la ganancia esperada si el decisor hace A en el presente y en el futuro es

$$100 + 0,8(0,6(120) + 0,4(90)) = 186,4$$

La ganancia esperada si el decisor hace B en el presente y en el futuro es

$$120 + 0,8(0,6(190) + 0,4(60)) = 230,4$$

Por último, la ganancia esperada si el decisor hace C en el presente y en el futuro es

$$130 + 0,8(0,6(40) + 0,4(220)) = 219,6$$

Por tanto, sin información el decisor haría B en el presente y en el futuro (no hará A en el presente para cambiar a B o C en el futuro por el mismo argumento presentado en el caso en el apartado a) de i)).

La ganancia que espera obtener el decisor si realiza A en el presente y se adapta de forma óptima a la información recibida, es decir, si hace B cuando recibe el mensaje M_1 y C cuando recibe el mensaje M_2 será:

$$100 + 0.8(101.14 + 78.857) = 244$$

Por tanto, el valor de la flexibilidad en este caso es $244 - 230,4 = 13,6$, que es menor que el valor de la flexibilidad $(21,997)$ obtenido para el caso en el que no se descontaba el futuro y no había costes de cambiar de A a otra alternativa. $\square$

Lecturas recomendadas y referencias bibliográficas

Una referencia clásica sobre el valor de la información es Hirshleifer y Riley (1992), capítulo 5. Análisis más recientes pueden encontrarse en Birchler y Bütler (2007), capítulos 4 y 5, y en Gollier (2001), capítulo 24. Esos trabajos proporcionan otras referencias útiles. Un análisis completo de la interacción entre información y flexibilidad en el contexto de decisiones de inversión puede encontrarse en Dixit y Pindyck (1994).

Birchler, *U.* y *M. Bütler*, 2007. Information Economics. Routledge. Londres.

Dixit, *A.K.* y *R.S. Pindyck*, 1994. Investment under Uncertainty. Princeton University Press.

Gollier, *C.*, 2001. The Economics of Risk and Time. The MIT Press. Cambridge. Massachusetts.

Hirshleifer, *J.* y *J.G. Riley*, 1992. The Analytics of Uncertainty and Information. Cambridge University Press (segunda edición: *Bikhchandani, S.*, *J. Hirshleifer*, *J.* y *J.G. Riley*, 2013).