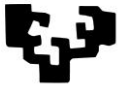
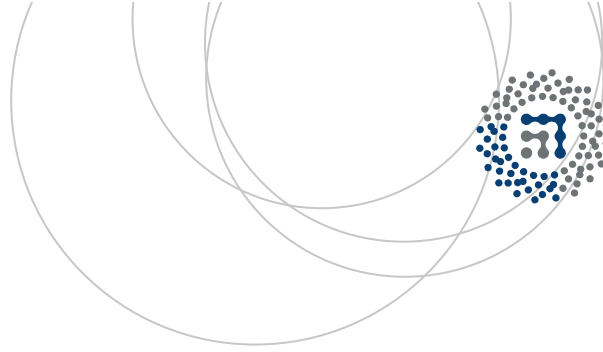


eman ta zabal zazu



Universidad  
del País Vasco

Euskal Herriko  
Unibertsitatea



ZTF-FCT

Zientzia eta Teknologia Fakultatea  
Facultad de Ciencia y Tecnología



Gradu Amaierako Lana / Trabajo Fin de Grado  
Fisikako Gradua / Grado en Física

# Inflazio Kosmikoaren Fisika / La Física de la Inflación Cósmica

Unibertsoaren egituraren jatorri kuantikoa / Origen cuántico de la  
estructura del Universo

Egilea/Autor:  
Julen Jose Azkona iribar  
Zuzendaria/Director/a:  
Jon Urrestilla Urizabal

Leioa, 2015ko Ekainaren 25a /Leioa, 25 de junio de 2015

# Gaien Aurkibidea

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Sarrera eta Helburuak</b>                                 | <b>2</b>  |
| <b>2</b> | <b>Unibertsoaren Sorrera:</b>                                |           |
|          | <b>Eztanda Handitik, Inflazio Esponentzialera</b>            | <b>2</b>  |
| 2.1      | Eredu Kosmologiko Estandarra . . . . .                       | 3         |
| 2.2      | Eredu Kosmologiko Estandarraren Mugak . . . . .              | 6         |
| 2.2.1    | Horizontearen Arazoa . . . . .                               | 6         |
| 2.2.2    | Lautasunaren arazoa . . . . .                                | 6         |
| 2.2.3    | Monopoloen Arazoa . . . . .                                  | 6         |
| 2.3      | Inflazio Mekanismoa . . . . .                                | 7         |
| 2.4      | Inflazioaren Eredu Matematiko bat; Inflatoia . . . . .       | 8         |
| 2.4.1    | Eremu Eskalarren Eboluzio Kosmologikoa . . . . .             | 8         |
| 2.4.2    | <i>Slow-Roll</i> hurbilpena . . . . .                        | 10        |
| <b>3</b> | <b>Unibertsoaren egituraren jatorri kuantikoa</b>            | <b>12</b> |
| 3.1      | Perturbazioen teoria lineal erlatibista . . . . .            | 12        |
| 3.1.1    | Gauge Aukeraketa . . . . .                                   | 14        |
| 3.1.2    | Kurbaturaren perturbazio kohigikorra . . . . .               | 16        |
| 3.1.3    | Perturbazio tentsorialak; uhin grabitatorioak . . . . .      | 16        |
| 3.2      | Perturbazioen hasierako baldintzak . . . . .                 | 16        |
| 3.2.1    | Fluktuazioen fisika . . . . .                                | 17        |
| 3.3      | Mukhanov-Sasaki ekuazioa . . . . .                           | 21        |
| 3.4      | Kuantizazio Kanonikoa . . . . .                              | 23        |
| 3.4.1    | Huts Fisikoa . . . . .                                       | 26        |
| <b>4</b> | <b>Inflazioa eta Behaketa Esperimentalak</b>                 | <b>29</b> |
| 4.1      | Inflatoi kuantikoaren iragarpenak . . . . .                  | 29        |
| 4.2      | CMBko anisotropiak aztertzeko eredu matematikoa . . . . .    | 33        |
| 4.3      | CMBko anisotropien dentsitate espektral angeluarra . . . . . | 36        |
| 4.3.1    | Perturbazio Moduen Faseak . . . . .                          | 36        |
| <b>5</b> | <b>Ondorioak</b>   | <b>37</b> |

# 1 Sarrera eta Helburuak

Kosmologiaren urrezko era deitzen duten garai honetan, inoiz baino neurketa zehatz eta anitzagoak ditugu eskura. Hala eta guztiz ere, inflazioa behin betiko egiaztatuko duen froga oraindik ez da iritsi, mundu guztiko ikerketa taldeak honen atzetik ibilita ere. Inflazioak iragartzen dituen ondorioak hain dira sakonak non unibertsoaren barne izaera fisikoa ulertzen laguntzeaz gain, unibertso bakar baten ideia bera ere kolokan jartzen duen [14].

Unibertsoaren eboluzioaren fenomeno fisiko ezezagunak azaltzeko motibazioarekin, ordurarteko eredu kosmologiko estandarra osatzeko proposamenetako bat izan zen inflazioaren teoria. Denboraren poderioz, zuzenketa desberdinak bereganatuz joan da, eta ideien sinpletasun eta iragartzeko ahalmena dela eta, teoria babesten duten ebidentziak metatuz doa.

Jarraian garatuko dugun gradu amaierako lanean, gaur egun onartua den inflazioaren bertsio oinarritzkoena garatuko da. Lanak jarraituko dituen helburuak hauek dira;

1. Unibertsoaren inflazio garai bat egotearen beharra justifikatzea, eredu kosmologiko estandarrak dituen mugak identifikatuz eta inflazioak hauek ebazteko dituen ahalmena adieraziz.
2. Inflazioaren eredu matematiko bat garatzea, fisikoki koherentea izateko beharrezkoa diren baldintzak azpimarratuz eta teoria zientifikoa izateko beharrezkoa duen egitura logikoa jarraituz.
3. Garatutako ereduak izan dituen arrakastak eta porrotak erakustea, eta inflazioaren teoria garatzen jarraitzeko argumentuak ematea.

Gradu amaierako lan hau Fisika Graduko gaitegia sakontzeko asmoarekin, maila aurreratuagoko alor desberdinen sarrera gisa balioko digu, kosmologia estandarra, erlatibitate orokorra, eta eremuen teoria kuantikoak erreferentzi nagusiak izanik.

## 2 Unibertsoaren Sorrera: Eztanda Handitik, Inflazio Esponentzialera

Inflazioaren teoria garatzeko beharra justifikatzeko, eredu kosmologiko estandarren oinarritzko kontzeptuak azalduko ditugu eta formalismo matematikorako laburpen bat egingo dugu. Ondoren, ereduaren mugak azalduko ditugu, eta inflazioak hauek ebazteko duen ahalmena.

**Notazioa:** Hauek izango dira lanean onartuko ditugun hitzarmenak;

- Metrikaren signatura  $(-, +, +, +)$  izango da

- Konstante unibertsal bakarra Plancken masak emana egongo da;  $M_{Pl} = \sqrt{\frac{c\hbar}{8\pi G}} = 2.4 \times 10^{18} GeV$
- $c = 1$  eta  $\hbar = 1$  unitate naturaletan garatuko dugu formalismoa.

## 2.1 Eredu Kosmologiko Estandarra

Kosmologia unibertsoaren eboluzioa eta ezaugarriak aztertzen dituen fisika-ren adarra da. Lurretik beha daitekeen unibertso makroskopikoaren iruditik (100 *Megaparseceko* zabalera baino eskala handiagoetan) bi propietate morfologiko nagusi ondorioztatzen ditugu; unibertsoa homogenea eta isotropoa da [13, 17]. Honek *Printzipio Kosmologiko* bat postulatzera eramaten gaitu; une bakoitzean unibertsoaren propietateak berdinak dira puntu eta norabide guztietan, irregulartasun lokalak ahaztuta [1].

Honetaz gain, beste funtsezko fenomeno bat erakusten du unibertsoak; norabide guztietan ageri diren galaxiak guregandik urruntzen ari dira. Are gehiago, urrutiagoko galaxien urruntze abiadura hurbilagokoena baino handiagoa da. Hubbleren lege izenez, hau da erlatibitate orokorraren ikuspuntutik eskaintzen den interpretazioa; galaxien eta gure arteko espazio-tartea hedatzen ari da. Honen ondorio zuzena da, unibertsoaren eboluzioan denbora atzera eginez, galaxiak elkarrengandik hurbilago egongo lirakekeela. Atzerako martxa hau nahi-bestean eginen bagenu, espazio eta energia guztia puntu batean konzentratuta geratuko zen une batera iritsiko ginatke. Une honi unibertsoaren *sorrera* deituko diogu.

Unibertso honen fisika modu eraginkorrean adierazteko, formalismo matematiko komenigarri bat garatu egiten da. Bi koordenatu espazial erabiliko ditugu;  $\mathbf{x}$  koordenatu *kohigikorrek*, espazioa hedatuko ez balitz ditugun koordenatuak dira, edo beste modu batean esanda, unibertsoarekin batera hedatzen diren koordenatuak dira. Behatzaile kohigikor batek definizioz unibertsoa isotropoa eta homogenea ikusiko luke. Beste aldetik,  $\mathbf{r}$  koordenatu propioak ditugu, bi punturen arteko espazio hedatzearen informazioa biltzen duena. Bi hauek erlazionatzeko,  $\mathbf{r} = a(t)\mathbf{x}$  dugu [13], non  $a(t)$  unibertsoaren eskala-faktorea dugun. Funtzio honetatik Hubbleren parametroa deitzen den funtzioa definitzen da,  $H = \frac{\dot{a}}{a}$  dena.

Propietate guzti hauek dituen espazio-denbora karakterizatzeko, FLRW metrika erabiltzen da. Honek  $t$  denbora kosmiko bat definitzen du, unibertsoa beraren eboluzio ematen duena. Honela, espazio motako hipergainazaletan banatuko da espazio-denbora, non hipergainazal desberdinak paraleloki kokatuta egongo diren, denbora kosmikoko aldiune desberdinetan [1]. Hipergainazal hauek, isotropoak izateagatik, simetria esferikoa izango dute. Bestalde, espazio-denbora homogenea izan beharko da, printzipio kosmologikoaren arabera, behatzaile guztiek espazio-denbora isotropoa behatu behar dutelako. Baldintza hauek be-

tetzen dituen metrika orokorra, FLRW metrika da, koordenatu esferikoetan,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (1)$$

non  $r$  erradio kohigikorra den,  $\Omega$  angelu solidoa eta  $k$  espazio-denboraren kurbadura den.  $k = 1$  eta  $k = -1$  kurbadura itxiari eta irekiari dagokio hurrenez hurren.  $k = 0$  espazio-denbora lau bati dagokio.

Unibertsoaren metrika ezaguna dugularik, unibertsoaren eboluzioa  $a(t)$ k emanda egongo da. Hau Einsteinen ekuazioek zehaztuta izango dugu, non kurbadura sortzen duen energia-momentuaren tentsoreak unibertsoaren energia-materia edukia karakterizatuko duen. Kosmologiak aztertzen duen eskalan, energia-materia edukia  $\rho(t)$  eta  $p(t)$  dentsitate eta presioko fluido perfektutzak jo daiteke, non iturri grabitatorio desberdinentzat, (materia, erradiazioa eta konstante kosmologikoa), egoera-ekuazio desberdineko fluidoa izango dugun. Honela, unibertsoaren edukiaren izaera fisikoaren arabera, eboluzio desberdina izango dugu.

Einsteinen ekuazioak fluido honentzat ebatziz, Friedmann eta Lemaitreren ekuazio izenez ezagutzen ditugun eboluzio-ekuazioak lortzen ditugu;

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho a^2 - \frac{\Lambda}{3} a^2 - k, \quad (2)$$

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3P)a + \frac{\Lambda}{3} a, \quad (3)$$

non  $\Lambda$ , konstante kosmologikoa den, hau da, espazio-denbora hutsari dagokion energia-dentsitatea.

Azkenik, unibertsoaren irudi oso bat lortzeko, honen tamaina karakterizatuko duten horizonte espazial desberdinak defini ditzakegu. Hauek dira gure interesekoak;

- *Partikula horizontea*: honek muga kausala definituko digu, hots, komunikatu ahal izan diren puntu geometriko kopurua. Informazioak argia baino azkarrago bidaiatu ezin dezakeenez, fotoi baten higidura-ekuazioak emango digu kausalitatearen muga. Beraz, denborak aurrera egin ahala, partikula horizontea beti handiagotuko da. Muga honek unibertso behargarria mugatzen digu, haratago dagoenaz ezin dugu ezer jakin.

$$r_{part} = \int_0^t \frac{1}{a(t')} dt'. \quad (4)$$

- *Hubbleren erradioa*: argiaren abiaduran urruntzen ari diren gorputzetara dagoen distantzia propioa izango da. Haratago dauden gorputzak gure

unibertso behagarrian egon daitezke, erlatibitate bereziaren postulaturik hautsi gabe, espazio-denborarekiko higidura erlatiboa baita  $c$  baino txikiagoa izan behar duena. Hemen espazio-denbora bera da hedatzen dena.

$$R_H = \frac{1}{H}. \quad (5)$$

Luzera unitate honek prozesu fisikoak koherenteki gertatzen diren limitea karakterizatuko du. Gainera, irizpide bat emango digu efektu erlatibistak kontuan hartu behar diren jakiteko ala ez. Zentzu honetan ulertuz, komenigarria egingo zaigu *Hubbleren erradio kohigikorra* definitzea [17];

$$\chi_H = \frac{R_H}{a} = \frac{1}{aH}. \quad (6)$$

Horizonteen desberdintasun nagusia azpimarratzeko; partikula horizonteak, integralak adierazten duen moduan,  $t$  horretarainoko unibertsoaren hedatze osoa kontuan hartzen du.  $R_H$ k eta  $\chi_H$ k ordea, aldiune batean neurtuko litzatekeen distantzia bat baino ez da, unibertsoaren lehenagoko eboluzioarekiko independentea izanik. Bi partikulen arteko distantzia  $d$  badugu [5];

- $d > r_{part}$  baldin bada, ezin izan dute inoiz elkarrekin komunikatu.
- $d > \chi_H$  baldin bada, ezin dute *orain* komunikatu, aldiune horretako unibertso parametroen menpeko *iturazko* partikula horizonteak ez direlako gainezartuko.

Eredu kosmologiko estandarrean, Hubbleren erradio kohigikorrek eta partikula horizonteak antzeko balioa hartzen dute.

Amaitzeko, eredu hau ezartzen duen datu esperimentalen iturri nagusia, mikrouhin-hondo kosmikoa, -*Cosmic Microwave Background* (CMB)- izango da. Hau eskura dugun unibertso primitiboaren irudia dugu.

Unibertsoak 100.000 urteko adina zuenean, tenperatura oso altuan zegoen eta hidrogeno atomo guztiak ionizatuta zeuden. Honela, fotoi-barioiez osatutako plasma batez osatuta zegoela diogu, non Thomson sakabanaketa dela eta, fotoien ibilbide librea oso txikia zen. Unibertsoaren hedapenarekin, tenperatura jaitsiz joan zen eta une batean, 380.000 urteko adinarekin, hidrogenoa ionizatuta mantentzeko gai izateari utzi zion, *birkonbinaketa* aroan sartuz. Lehenengoz, hidrogeno atomoak sortu ziren eta fotoiek libre bidaiatzen hasi ziren, unibertsoa garden bihurtuz. Garai horretan askatutako fotoiak oztoporik gabe iristen zaizkigu, urrutien behatu dezakegun irudi bezala, non gure ikuspuntutik, azken sakabanatze gainazal bat eratzen duten. Fotoi horiek oso energetikoak baziren ere, unibertsoaren hedapenaren ondorioz, askatuak izan ziren uhin-luzerak luzatu egin dira, *redshift* grabitazionalak eraginda, eta mikrouhin maiztasunetan iristen zaizkigu orain [1, 9].

## 2.2 Eredu Kosmologiko Estandarraren Mugak

Eskura ditugun behaketek, CMBak eta eskala handiko unibertsoaren galaxia-banaketa egiturak, unibertsoaren zenbait propietate identifikatzera eramán gaituzte. Eredu kosmologiko estandarrean ulertuta, propietate hauetako batzuk, ez dira *a priori* espero daitekeen bezain ebidenteak izango. Azalpen onargarririk probestu gabe, azalpen posibleak eredu kosmologiko estandarretik kanpo bilatu behar izan ziren. Hauek dira inflazioaren kontzeptura eramaten gaituzten arazo desberdinak [5, 17].

### 2.2.1 Horizontearen Arazoa

CMBaren irudia sortzen den unerako, unibertsoak 380 000 urteko adina dauka, baina unibertsoaren tamaina hain handia da non, materia edo erradiazio menpeko garaia izango balitz, unibertsoaren esparru asko ezin izan dira kontaktu kausalean egon. Denbora une horretarako, partikula horizonteez ez dute oraindik elkar gainezartzeko aukera izan. Hau horrela izanda ere, puntu desberdin hauetatik iristen zaizkigun fotoiak energia berdina dutela erakusten dute. Honek zera esan nahi du, fisikoki lotuta egon ezin diren puntuak badira ere, oreka termikoan daudela. Kasualitatea handiegia izango litzateke, kausalki kontaktuan egon ez diren hamarmila inguru espazioko esparru desberdinek, hamarmilareneko tenperatura diferentzia edukitzea.

### 2.2.2 Lautasunaren arazoa

Eredu kosmologiko estandarren aurkezpenean erakutsi genuen moduan, unibertsoaren eboluzioa eta kurbadura, honen energia-materiaren edukiaren araberakoa izango da. Izatez, energia-materia dentsitate kritiko bat definitzen da, non eduki hau izango zuen unibertso bat definizioz idealki laua den. CMBko neurketan ageri diren energia-materia dentsitateak balio honetatik oso hurbil daude, eta berriz ere, balio zehatz hau zoriz izateak kasualitate handiegia dirudi.

### 2.2.3 Monopoloen Arazoa

Partikulen fisikak iragartzen duten fenomeno batekin lotuta, unibertsoaren hasieran energia maila oso altuak zeudela espero dugu, eta honek monopolo magnetiko ugari egotea iragarri beharko luke. Hau honela izan balitz, monopoloak partikula astunak direnez, unibertsoaren materia edukia askoz handiagoa izango zen, eta honek unibertsoaren hedapena kolapsatzea eragingo luke. Unibertso behagarriak ez dituen ezaugarri hauek erakusten, teoriaren hutsen bat dagoela espero dugu.

### 2.3 Inflazio Mekanismoa

Eredu kosmologiko estandarreko lehenengo bi problemak formalki ebatziz hasiko gara. Gaur egun elkarrekin komunikatu ezin diren unibertso puntukoak, eta CMBa lortu zeneko errekonbinaketa garaikoak, inflazioa gertatu baino lehenagoko uneren batean kontaktu kausalean egotea espero dugu. Hau matematikoki adieraz daiteke,

$$(a_{CMB}H_{CMB})^{-1} < (a_0H_0)^{-1} < (a_IH_I)^{-1}, \quad (7)$$

non Hubbleren erradio kohigikorrek ditugun unibertsoaren aro desberdinetarako;  $(a_IH_I)^{-1}$  inflazioa gertatu baino lehenagokoa,  $(a_0H_0)^{-1}$  gaur egungoa eta  $(a_{CMB}H_{CMB})^{-1}$  birkonbinaketa garaikoa.  $\chi_H$  guzti hauen arteko diferentzia ulertzeko, inflazio hipotesia formulatuko dugu; unibertsoaren lehenengo eboluzioa, hedapen azeleratuko ( $\ddot{a} > 0$ ) garai batek emanda egongo da, *inflazio* garaia deituko duguna [2, 5]. Fenomeno hau modu alternatibo batean formulatu daiteke, txikitzen ari den Hubbleren erradio kohigikorreko  $(aH)^{-1}$  garai moduan adieraziz;

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(aH)^{-1} < 0 &\Rightarrow \frac{d}{dt}(\dot{a}^{-1}) < 0, \\ -\dot{a}^{-2}\ddot{a} < 0 &\Rightarrow \frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2} > 0, \end{aligned} \quad (8)$$

non  $\dot{a}^2 > 0$  denez,  $\ddot{a} > 0$  bete beharko da. Inflazio aurreko  $\chi_{H_I} = (a_IH_I)^{-1}$  bada, inflazioak aurrera joan ahala,  $\chi_H$  txikiagotzen joango da. Honela, Hubbleren erradio kohigikor minimo bat defini dezakegu, inflazioaren amaierarako;  $(a_EH_E)^{-1}$ . *Reheating* izena duen une honetan, inflazioa amaitu eta erradiazio-menpeko garaia hasi zen. Kalkulua errazteko, demagun *reheating* unetik orainera materia menpeko eta energia-ilun menpeko garairik ez zela egon. Eboluzio guztia erradiazio menpekoa izan balitz,  $H \propto a^{-2}$  izango da (ek.(3));

$$\frac{a_0H_0}{a_EH_E} \sim \frac{a_0}{a_E} \left(\frac{a_E}{a_0}\right)^2 = \frac{a_E}{a_0} \sim \frac{T_0}{T_E}. \quad (9)$$

Kosmologiako beste alor batzuek probestutako emaitzak erabiliz (nukleosintes primitiboa), garai bakoitzeko tenperatura estimatuak jakin ditzakegu; honen arabera,  $T_E \sim 10^{15}$  GeV eta  $T_0 = 10^{-3}$  eV erabilita [5], ondorengo emaitza dugu;

$$(a_IH_I)^{-1} > (a_0H_0)^{-1} \sim 10^{28}(a_EH_E)^{-1}. \quad (10)$$

Orain, demagun inflazio garaian zehar  $H$  ia konstantea mantendu zela. Hau beteko duen eskala-faktorea,  $a(t) \propto e^{Ht}$  moduko funtzio esponenziala izango da derrigorrez. Baldintza hau onartuta,  $H_E \simeq H_I$  izango da, eta beraz,

$$\frac{a_E}{a_I} > 10^{28} \Rightarrow \ln \frac{a_E}{a_I} > 64. \quad (11)$$



Laburbilduz, horizontearen arazoa konpontzeko, inflazio garai bat egon beharko du non honetan zehar, unibertsoaren eskala-faktorea gutxienez  $10^{28}$  aldiz handiagoa izan beharko den. Maniagarriagoa den formalismo bat edukitzeko,  $N$  *e-fold* kopurua definituko dugu, non  $a \propto e^N$  baldin bada, inflazioak gutxienez  $N = 60$  *e-fold*etan puztu behar du unibertsoa.

Eredu honek lautasan arazoa ebazteko aukera ematen digu. Lautasan baldintza dentsitate bati lotu daiteke Friedmannen ekuazioak erabilia;  $\Omega = 1$  unibertso guztiz lau bat izango da. CMB garaiko behaketek dioten arabera,  $0.99995 < \Omega_{CMB} < 1.00005$  lautasan handia zegoela adierazten du [18]. Dentsitatearen eboluzioa  $a(t)$ rekin erlazionatu dezakegu eboluzio ekuazioak erabilia. Hemendik ekuazio hau ondorioztatzen dugu;

$$(1 - \Omega)a^2H^2 = konst. \quad (12)$$

Inflazioak  $H$  ia konstantea izatea inplikatzan duenez, eta inflazioan zehar  $a(t)$  gutxienez  $10^{28}$  aldiz handitzen denez, zuzenean ikusten da  $\Omega \rightarrow 1$ era oso zehazki joango dela.

## 2.4 Inflazioaren Eredu Matematiko bat; Inflatoia

Eredu kosmologiko estandarren muga hauek gainditzeko behar diren ezaugarriak dituen espazio-denbora, *quasi-de Sitter* motako espazio-denbora bat dela esango dugu. De Sitterren espazio-denbora metrika honekin adierazten bada [4],

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\mathbf{x}^2, \quad (13)$$

non  $a(t) = e^{Ht}$ . Denbora koordenatua aldatzen badugu,  $dt = a(t)d\tau$  denbora *konformea* definituz,

$$ds^2 = a^2(\tau)(-d\tau^2 + d\mathbf{x}^2), \quad (14)$$

non  $a(\tau) = -\frac{1}{H\tau}$ .

De Sitterren espazio-denbora puru bat edukitzeko,  $H$  eta  $\dot{H}$  guztiz konstantea izan beharko dute. Metrikaren adierazpena berdina erabilia, baina denboran zehar gutxika eboluzionatzen duen  $H$ ak eta  $\dot{H}$ ak ordea, quasi-de Sitter espazio-denbora bat emango digu. Denbora konformean gaudenean, De Sitterren espazio-denbora Minkowskiren espazio-denboraren proportzionala da. Honela, argi-konoak espazio-denbora lau batean bezala hedatuko dira. Denbora konformean,  $t = 0$  singularitatea  $\tau = -\infty$ ri dagokio, eta inflazioaren amaiera  $\tau = 0$ n gertatuko da. [5]

### 2.4.1 Eredu Eskalarren Eboluzio Kosmologikoa

Inflazioa, ikusi dugunez, eredu kosmologiko estandarreko mugak azaltzeko gai den mekanismo fisiko bezala uler dezakegu. Jarraian garatu nahi dugun ere-

dua erabatekoa izan dadin, inflazioa sortuko duen mekanismo fisikoa zehaztea falta zaigu. Erlatibitate Orokorra ematen dizkigun tresna kontzeptualak erabiliz, hedapen esponentzial bat emateko, espazio hutseko energia-dentsitate ia konstante batez betetako unibertso bat beharko dugu. Edo beste modu batean adieraziz, presio negatiboa eragingo zuen fluido perfektu batez betetako unibertsoa.

Hau honela izanik, inflazio eredu sinpleena ematen duen  $\phi(\mathbf{x}, t)$  eremu eskalar bat definitzen da, *inflatoi* izenez ezagutzen dena. Eremu honi energia potentzial bat esleituko diogu,  $V(\phi)$ . Inflatoiak energia zinetikoa ere edukiko du, eremuaren denbora-eboluzioarekin lotuta dagoena. Inflatoiak, inflazioa sortuko du elkarrekintza grabitatorioaren bidez, hots, espazio-denboraren kurbadura modu partikular *horretan* deformatzen.

Jarraian, eremu eskalar orokor baten eboluzio-ekuazioa garatzen hasiko gara. Einsteinen ekuazioek eremu eskalarraren eboluzioa emango digute. Honetarako, eremu eskalar orokor baten energia-momentu tentsorea definitzen hasiko gara [5, 11, 12];

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu} \left( \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi - V(\phi) \right). \quad (15)$$

Unibertso isotropoa eta homogeneoa emateko, demagun eremu eskalarra denboraren menpekoa dela bakarrik,  $\phi = \phi(t)$  edukiz. Hurrengo atalean askatasun gradu espaziala sartuko dugu, perturbazio lokalak azaltzeko gai izateko. Beraz, deribatu espazial guztiak nuluak izanda, (15) ekuazioa garatuz;

$$T_{00} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (16)$$

non  $T_{00} = \rho_\phi$  fluidoaren energia-dentsitatea dugun. Espazio-espazio osagaiak ordea,  $T_{ij} = -P_\phi\delta_{ij}$  presio efektibo batekin lotzen denez, (15)ren gai espazialak kalkulatu,

$$P_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (17)$$

Magnitude hauek ezagunak ditugularik, eremu eskalarraren eboluzio-ekuazio kalkulatu dezakegu,  $a(t)$  unibertsoaren eskala-faktoreak karakterizatuko duena. Hau Friedmannen ekuazioek emango digute,  $k = 0$  unibertso lau eta  $\Lambda = 0$  konstante kosmologikoak hartuz;

$$H^2 = \frac{\rho_\phi}{3M_{pl}^2} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)}{3M_{pl}^2}, \quad (18)$$

$$\dot{H} = -\frac{(\rho_\phi + P_\phi)}{2M_{pl}^2} = -\frac{\dot{\phi}^2}{2M_{pl}^2}. \quad (19)$$

(18) ekuazioa denborarekiko deribatuz zera lortzen dugu;

$$2H\dot{H} = \frac{1}{3M_{pl}^2} \left( \dot{\phi}\ddot{\phi} + \frac{dV}{d\phi}\dot{\phi} \right). \quad (20)$$

Sisteman ordezkatzuz;

$$\dot{H} = -\frac{\dot{\phi}^2}{2M_{pl}^2} = \frac{1}{6HM_{pl}^2} \left( \dot{\phi}\ddot{\phi} + \frac{dV}{d\phi}\dot{\phi} \right). \quad (21)$$

Eta sinplifikatuz;

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V' = 0. \quad (22)$$

*Klein-Gordon* izenez ezaguna den ekuazio honek eremu eskalar orokor baten eboluzioa ematen du. Jarraian ikusiko dugunez, inflazioa gertatzeko baldintza bereziek eremu eskalar orokorraren adierazpena murriztera eramango gaituzte. Inflazio baldintza hauen barnean eboluzionatzen duen eremu eskalarrari *inflatoia* deituko diogu.

#### 2.4.2 *Slow-Roll* hurbilpena

Inflazioa txikitzen den Hubbleren erradio kohigikor bat bezala definitzeak, inflazioaren ezaugarriak parametrizatzeko aukera ematen digu. Definizio hau berriz garatuz [2, 5],

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = \frac{-\dot{a}H - a\dot{H}}{(aH)^2} = -\frac{1}{a}(1 - \epsilon), \quad (23)$$

moduan adieraz dezakegu, non  $\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2}$  parametroa definituta,  $\epsilon < 1$  bete beharko da  $\frac{d}{dt}(aH)^{-1} < 0$  izateko. Parametro honen definizio formalago bat edukitzeko,  $N$  *e-fold* kopurua erabil dezakegu, inflazio kantitatea adierazten duena. Honekin, beste modu honetan adieraz dezakegu;

$$\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{d \ln H}{dN} < 1. \quad (24)$$

Honen esanahia da inflazioa gertatzen den garaian zehar (Hubbleren erradio kohigikorra txikitzen den bitartean),  $H$  ia konstante mantentzeko moduan egin beharko dela. Bestalde,  $\epsilon$  bera ere ia konstantea mantentzea nahiko dugu, inflazioa gutxika gertatu dadin. Honekin beste parametro bat defini dezakegu;

$$|\eta| \equiv \frac{|\dot{\epsilon}|}{H\epsilon} = \frac{d \ln \epsilon}{dN} < 1. \quad (25)$$

Bi baldintza hauek eremu eskalarran balioekin erlazionatu ahal ditugu, (18) eta (19) ekuazioak hauen definizioetan ordezkatuta;

$$\epsilon = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2}{M_{pl}^2 H^2}. \quad (26)$$

$\epsilon < 1$  izan behar duenez,  $\dot{\phi}^2$ k energia osoari ekarpen txikia eman beharko dio. Bestalde,  $\eta = \frac{\dot{\epsilon}}{H\epsilon}$  definizioa garatzeko, (26) denborarekiko deribatuz,

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\phi}\ddot{\phi}}{H^2 M_{pl}^2} - \frac{\dot{\phi}^2 \dot{H}}{H^3 M_{pl}^2}, \quad (27)$$

eta  $\eta$ n ordezkatuz

$$\eta = 2 \frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} - 2 \frac{\dot{H}}{H^2}. \quad (28)$$

Itxura komenigarriago bat lortzeko,  $\delta \equiv -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}}$  definituta [2],

$$\eta = 2(\epsilon - \delta). \quad (29)$$

$|\eta| < 1$  izateko, eta  $\epsilon < 1$  izanda,  $\delta \ll 1$  izan beharko da derrigorrez. Hemendik inflatoiar buruzko beste ezagupen garrantzitsu bat izango dugu,  $\ddot{\phi}$  ekarpena oso txikia izango dela [2].

Hemendik ondorioztatuko dugu, inflazioa gertatzeko, *slow-roll* motako eboluzioa duen eremu eskalarra izango dela inflatoia, hots, inflazio eboluzioan zehar  $\ddot{\phi}$  eta  $\dot{\phi}^2$  arbuigarriak mantentzen dituen.

Inflatoia zer den definituta, honen eboluzio-ekuazioa zehaztuko dugu. Inflatoiaren definizioak probestuta, eremu eskalar orokor baten eboluzioeko zenbait ekarpenek ez dute ezertan inflatoiaren eboluzioan eragingo.  $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \ll V$  eta  $\delta \ll 1$  argumentuekin, *slow roll* hurbilpena erabiltzea zilegia izango dugu [11, 12];

$$H^2 \approx \frac{V}{3M_{pl}^2}, \quad (30)$$

$$3H\dot{\phi} \approx -V''. \quad (31)$$

Honaino garatutako tresneria guztia oinarrizko Inflazioaren Teoria osatuko luke. Teoria honekin lan egiteko, inflatoi eredu desberdinak erabili beharko dira. Normalean, inflatoi eredu partikularren bat aukeratzeko,  $V(\phi)$  bat aukeratuko dugu, eta eboluzio-ekuaziotik,  $\phi(t)$ ren adierazpena lortu. Honela,  $V(\phi)$ k aukeratzeko irizpide bat edukitzeko, *slow-roll* potentzialaren parametroak definitu behar dira;

(30) ekuazioa  $\epsilon$ n ordezkatzen badugu;

$$\epsilon \approx \frac{\frac{1}{2}(-\frac{V'}{3H})^2}{M_{pl}^2 H^2} \approx \frac{M_{pl}^2}{2} \left( \frac{V'}{V} \right)^2 \equiv \epsilon_v. \quad (32)$$

Bestalde,(31) denborarekiko deribatuz;

$$3\dot{H}\dot{\phi} + 3H\ddot{\phi} = -V''\dot{\phi}. \quad (33)$$

(33) ekuazioa  $3H^2\dot{\phi}$ rekin zatituz,

$$-\frac{\dot{H}}{H} - \frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} \approx \frac{V''}{3H^2}. \quad (34)$$

$\epsilon$  eta  $\delta$ ren definizioak ordezkaturaz,

$$\epsilon + \delta \approx M_{pl}^2 \frac{|V''|}{V} \equiv |\eta_v|. \quad (35)$$

*Slow-roll* potentzial parametroei  $\{\epsilon_v, \eta_v\} \ll 1$  baldintza betetzea eskatuko diogu ere bai. Lehenago definitutako definitutako  $\{\epsilon, \eta\}$  parametroen antzekoak dira, baina ez guztiz berdinak. *Slow Roll* fasean dagoen bitartean,  $\epsilon_v \approx \epsilon$  eta  $\eta_v \approx 2\epsilon - \frac{1}{2}\eta$  balioak hartzen dituzte [2]. Parametro hauek erabiliz, inflazio eredu bat eraikiko digun energia potentzial bat aukeratu dezakegu.

Hala ere, baldintza hauek ez dira oso murriztaileak, eta inflazio eredu desberdin asko onartzen ditu. Hau dela eta, anbigutasun dexente dago gure unibertsoarako behin betiko inflazio eredu bat aukeratzeko orduan. Beste adarretako argumentu fisikoak erabili beharko dira eredu partikular bat babesteko, partikulen fisikakoak gehienbat, eta batez ere, gainontzeko eredu iragarpentatik bereizgarria eta esperimentalki behagarria den iragarpena egiteko gai izan beharko da.

### 3 Unibertsoaren egituraren jatorri kuantikoa

Unibertsoa idealiki isotropoa eta homogeneoa dela esan bagenezake ere, benetako unibertsoak erakusten duen aniztasuna galtzen ariko ginatke; galaxia *cluster*ak, galaxiak, izarrak... lokalki ageri diren inhomogeneotasunak dira [5]. Orain arte garatu dugun FRW metrikak emaitza onak ematen ditu hondoko unibertsoaren eboluzioa emateko, baina ez du bere baitan, unibertsoaren barne egiturei buruzko iragarpenik egiteko ahalmenik.

Benetako unibertsoa guztiz homogeen eta isotropoa izan balitz, elkarrekintza grabitatorioak ezin izango luke energia-materia banaketan eragin, indar erresultante guztiak nuluak izango litzatekelako. Inflazio mekanismoak soluzio natural bat probesten digu, fluktuazio espontaneoak sortzen baititu, inflatoia eremu kuantiko bat dela onartzen dugunean. Honekin ekin aurretik, inhomogeneotasunak tratatzeko formalismo erlatibista garatuko dugu.

#### 3.1 Perturbazioen teoria lineal erlatibista

Perturbazioen teoria lineal bat garatuko dugu hondoko unibertsoaren isotropiaren eta homogeneotasunaren aurreko ereduarekin bat etortzeko. Perturbazioek espazio-denborako diferentzia txikiak sortuko dituzte, kuadratikokoak diren

perturbazio ekarpenak arbuigarriak diren zentzuan. Motibazio honekin metrika perturbatua defini dezakegu;

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}, \quad (36)$$

non  $\bar{g}_{\mu\nu}$  hondoko unibertsoaren metrika den, eta  $\delta g_{\mu\nu}$ , metrikaren perturbazioak izango diren. Irudika dezakegun metrika perturbatu orokorrenak 10 askatasun dituenetz, 10 perturbazio askatasun gradu bilduko ditu [5];

$$ds^2 = a^2(\tau)[-(1 + 2A)d\tau^2 + 2B_i dx^i d\tau + (\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j], \quad (37)$$

non denbora konforme eta koordenatu kohigikorretan gauden. Metrikaren garapen perturbatiboko askatasun berriak espazio eta denborarekiko menpekoak diren funtzioak izango dira, eskalar, bektore eta tentsoreak. Hondoko metrikari dagokion  $D_i$  deribatu kobariantea erabiltzen badugu, askatasun graduak beste modu batean adieraz daitezke. (*SVT decomposition*). Adibidez,  $B_i$  bektorea honela adieraz dezakegu [10];

$$B_i = D_i B + \hat{B}_i, \quad (38)$$

non  $D^i \hat{B}_i = 0$ .

Honela, bektore arrunt batek dituen hiru askatasun graduak eskalar bat eta bi askatasun graduko bektore ortogonalen aukeraketan egongo dira (traza nulua denez, triedroko bektoreren bat guztiz zehaztuta egongo da beste bien bitartez). Hidrodinamikan erabiltzen diren kontzeptuekin analogia eginez,  $B_i$  abiadura bektorea izango balitz,  $B$  abiadura potentziala eta  $\hat{B}_i$  bortizitatea izango ziren.

Tentsorearen 6 askatasun graduak ere irizpide berdinekin deskonposatu daitezke [10],

$$h_{ij} = 2 \left[ C \delta_{ij} + D_{(i} D_{j)} E + D_{(i} \hat{E}_{j)} + \hat{E}_{ij} \right], \quad (39)$$

non

$$D^i \hat{E}_j = 0, D^i \hat{E}_{ij} = 0 = \hat{E}_i^i, \quad (40)$$

Eta  $f_{(ij)} \equiv \frac{1}{2}(f_{ij} + f_{ji})$  den.

Modu honetan, 10 askatasun gradu horiek honela deskonposatzen ditugu; A,B,C eta E, 4 askatasun eskalar alde batetik, bestetik, traza nuloko  $\hat{B}_i$  eta  $\hat{E}_i$  bektoreak, 2 askatasun gradukoak bakoitzak, eta azkenik, dibergentzia eta traza nuloko  $\hat{E}_{ij}$  tentsorea, bi askatasun gradu independente biltzen dituen. Deskonposaketa hau egiteko motibazio nagusia, lehen ordenako perturbazio garapenean, proiektzio bakoitzak independenteki eboluzionatzen duenez, formalismo matematiko independenteak gara ditzazkegula da [10].

### 3.1.1 Gauge Aukeraketa

Erlatibitatearen Teoria Orokorra eraikita dago, kobariantza orokorraren legeak baimenduta, ekuazio fisikoak aldaezinak izateko koordenatu transformazioen aurrean. Hau da,  $X^\mu \mapsto \tilde{X}^\mu \equiv X^\mu + \xi^\mu(\tau, \mathbf{x})$  koordenatu transformazioa eginez gero, koordenatu berrietan adieraziko den metrikak itxura berdina eduki beharko du;

$$d\tilde{s}^2 = a^2(\tilde{\tau})[-(1 + 2\tilde{A})d\tilde{\tau}^2 + 2\tilde{B}_i d\tilde{x}^i d\tilde{\tau} + (\delta_{ij} + \tilde{h}_{ij})d\tilde{x}^i d\tilde{x}^j], \quad (41)$$

Koordenatu desberdinetako metrikak erlazionatzeko, koordenatuen transformazioa kontuan hartu behar da;

$$g_{\mu\nu}(X) = \frac{\partial \tilde{X}^\alpha}{\partial X^\mu} \frac{\partial \tilde{X}^\beta}{\partial X^\nu} \tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{X}) \quad (42)$$

SVT deskonposaketa egin ondorengo transformazioak eginez, hots,  $\tilde{\tau} = \tau + T$  eta  $\tilde{x}^i = x^i + D^i L + \tilde{L}^i$  erabiliz, perturbazio askatasun graduak ere transformatu egingo dira. Transformazio hauen adierazpenak nola kalkulatu erakusteko,  $A$  perturbazioaren transformazio adierazpena kalkulatu dugu, adibide gisa;

$$g_{00}(X) = \frac{\partial \tilde{X}^\alpha}{\partial \tau} \frac{\partial \tilde{X}^\beta}{\partial \tau} \tilde{g}_{\alpha\beta} \quad (43)$$

Koordenatu espazialak ez direnez denboraren menpekoak, ekarpen bakar bat egongo da;

$$g_{00}(X) = \left( \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial \tau} \right)^2 \tilde{g}_{00}. \quad (44)$$

Hau garatuz,  $\frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial \tau} = \frac{\partial(\tau+T)}{\partial \tau} = 1 + T'$  dela kontuan hartuta,

$$a^2(\tau)(1 + 2A) = (1 + T')^2 a^2(\tau + T)(1 + 2\tilde{A}). \quad (45)$$

$T$  transformazioa infinitesimala dela kontuan hartuta,  $a^2(\tau + T)$ ren Taylorren garapena sartuko dugu,

$$\begin{aligned} a^2(\tau)(1 + 2A) &= (1 + 2T' + \dots)(a^2(\tau) + 2a'(\tau)a(\tau)T + \dots)(1 + 2\tilde{A}), \\ &= a^2(\tau)(1 + 2\tilde{A})(1 + 2\mathcal{H}T + 2T' + \dots). \end{aligned} \quad (46)$$

Perturbazioak bigarren ordenean arbuigarriak izateko definitu ditugunez,  $T'^2$  eta  $T'A$  ekarpenak arbuiatu ahal ditugu.  $\mathcal{H}$  Hubbleren parametro konformea da. Hemendik  $A$  perturbazioa honela transformatzen dela ageri da;

$$\tilde{A} = A - T' - \mathcal{H}T. \quad (47)$$

Gainontzeko perturbazioak [5],

$$\begin{aligned}
\tilde{B} &= B + T - L', \\
\tilde{C} &= C - \mathcal{H}T' - \frac{1}{3}\nabla^2 L, \\
\tilde{E} &= E - L, \\
\tilde{B}_i &= \hat{B}_i - \hat{L}'_i, \\
\tilde{E}_i &= \hat{E}_i - \hat{L}_i, \\
\tilde{E}_{ij} &= E_{ij}.
\end{aligned} \tag{48}$$

Kobariantza orokorrak esaten digunaren arabera, fisikoa den magnitude bat transformazioekiko aldaezin mantendu beharko litzateke, hots, *gauge-aldaezina* izan beharko da. Honela, argi ikusten dugunez, fisikoki esanahia duen perturbazio bakarra,  $\tilde{E}_{ij} = E_{ij}$  perturbazio tentsoriala izango da, berez gauge-aldaezina dena, uhin grabitazionalak adierazten dituen.

Izaera fisikoa duten perturbazioak zeintzuk diren jakiteko, gauge aukeraketa bat egin beharko dugu. SVT perturbazioen transformazio ekuazioak ezagututa, hauen  $\Psi$  konbinazio lineala den aldagai bat bila dezakegu, definizioz  $\tilde{\Psi} = \Psi$  gauge-aldaezina izatea nahiko duguna. Hauek topatzeko aukerak infinitoak direnez, gauge aukeraketa desberdin asko topatu daitezke. Dena den, gauge desberdinan egonda ere, emaitza fisikoak berdinak izango dira guztientzako.

Honela, aukera daitezken gauge sinpleenak bilatzen saiatuko gara, traba matematikoak ahal diren heinean ekiditzeko. Aukera posibleetako bat, *Gauge Newtondarra* izango da, non metrika eskalarra diagonal izango den. Honetarako, *Bardeen* aldaezinak definituko ditugu [5],

$$\Psi = A + \mathcal{H}(B - E') + (B - E)', \tag{49}$$

$$\Phi = -C - \mathcal{H}(B - E') + \frac{1}{3}\nabla^2 E. \tag{50}$$

Aldaezin hauek erabiliz, metrika perturbazioa honela berridatziko dugu;

$$ds^2 = a^2(\tau)[-(1 + 2\Psi)d\tau^2 + (1 - 2\Phi)\delta_{ij}dx^i dx^j] \tag{51}$$

Einsteinen ekuazioan,  $T_{\mu\nu} = 8\pi G_{\mu\nu}$ , definitu dugun metrika perturbatuak  $G_{\mu\nu}$  perturbatzen duenez, energia-momentu tentsorea ere perturbatu egingo da. Honen osagai perturbatuen konbinazio linealekin ere, gauge aldaezinak topa daitezkenez, gauge aukeraketak hartzeko askatasuna are zabalagoa izango da. Hauetako bat adibidez, *gauge espazialki laua* izango da, non metrikaren perturbazio eskalarrak nuluak aukeratzen diren, eta gauge-aldaezinak dentsitate eta presio perturbatuak izango diren.



### 3.1.2 Kurbaduraren perturbazio kohigikorra

Gauge desberdin asko ageri dira literaturan, eta denak emaitza fisiko berdinak ematen dituzte. Hala ere, gauge bakoitzak ikuspuntu desberdin bat ematen du, eta magnitude desberdinen menpe eragiten dute. *Gauge kohigikorra* izena duen gaugean funtsezko magnitude bat definitzen da, *kurbaduraren perturbazio kohigikorra*. Denbora konstanteko gainazal espazialak aukeratzen baditugu, perturbazio eskalar eta tentsorialak (perturbazio bektorialak arbuiatzen ditugu inflazioan aztertzeko) kontuan hartzen dituen metrika espaziala aukera dezakagu [5];

$$\gamma_{ij} = a^2(\tau) [(1 + 2C)\delta_{ij} + 2E_{ij}] \quad (52)$$

Metrika honi dagokion hiru dimentsioko Ricciren eskalarra kalkulatzeko bada,

$$a^2 R_{(3)} = -4\nabla^2 \left( C - \frac{1}{3}\nabla^2 E \right) \quad (53)$$

Hemendik,  $\mathcal{R}$  kurbaduraren perturbazio kohigikorra defini dezakegu, non  $\mathcal{R} = C - \frac{1}{3}\nabla^2 E$  eskalarra den. Hemendik *gauge kohigikorra* egiteko aukera egin dezakegu,  $T_{\mu\nu}$  perturbatu gabe hartuz, eta metrika perturbatua [2, 4];

$$\delta g_{ij} = a^2 (1 - 2\mathcal{R}) \delta_{ij} + a^2 \hat{E}_{ij} \quad (54)$$

$\mathcal{R}$  perturbazio eskalarra funtsezko aldagaia da inflazio garaian Hubbleren erradio kohigikorretik kanpo kontserbatu egiten delako. Hau frogatzeko modu formala erabili beharrean [16], hurrengo atalean garatuko dugun formalisotik zuzenean frogatuko dugu. Magnitude honen bidez, CMBko behaketak eta inflazioan zehar gertatutako fluktuazio kuantikoak konektatu ahalko ditugu.

### 3.1.3 Perturbazio tentsorialak; uhin grabitatorioak

Gauge-aldaezinak diren perturbazio proiektzio bakarrak tentsorialak dira. Hauen atzean uhin-grabitatorioak daudelako da hau. Inflazioan zehar perturbazio hauen agerpena espero dugu. Perturbazio tentsoriala bi traza gabeko  $\epsilon_{ij}^+$  eta  $\epsilon_{ij}^\times$  polarizazioetan deskonposatu daitezke [6],

$$\hat{E}_{ij}(\tau, \mathbf{x}) = E_+ \epsilon_{ij}^+ + E_\times \epsilon_{ij}^\times, \quad (55)$$

non espazio eta denbora menpekotasuna  $E_+$  eta  $E_\times$  koefizienteetan dauden. Inflazio eredu desberdinek polarizazio mota desberdinen existentzia iragartzen dute. Hauen detekzioak inflazioaren froga zuzen bat emango zuen. Alor interesgarria izanik ere, lan honen irismenetik kanpo garatuko dira.

## 3.2 Perturbazioen hasierako baldintzak

Atal honetan  $\phi(t)$  inflatoiaren eredu zabalago bat garatuko dugu, behagariak ditugun datuei buruzko iragarpen-ahalmen handiagoa izan dezagun. Helburu nagusia CMBko anisotropia eta inhomogeneotasunak iragartzea izango da,

eta honen bidez unibertsoaren energia-banaketa egitura azaltzeko erabateko teoria kosmologiko bat izango dugu.

Orain arte garatutakoan, unibertso jaioberriaren inflazio garaia  $\phi(t)$  eremu eskalarrak zehaztuta geratzen da. Honek unibertso goiztiarraren energia-dentsitatea finkatuko du, eta Einsteinen ekuazioen ikuspuntutik, inflazio garaia amaitzeko puztu beharreko zenbatekoa emango digu. Hala ere, lehenago aipatu bezala, CMBak bidaltzen digun informazioaren arabera, tokian tokiko tenperatura alde txikiak ageri zaizkigu. Fluktuazio hauek barnetik azaltzeko gai izateko,  $\phi(t)$  eremuak askatasun berri bat hartu beharko du kontuan,  $\phi(\mathbf{x}, t)$  banaketa espazialarena. Dena den, tenperatura diferentzia horiek oso txikiak direnez,  $10^{-4}$  ordenako aldearekin [5], perturbazio teoria lineal bat erabiltzea guztiz justifikatua egongo da.

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \bar{\phi}(t) + \delta\phi(t, \mathbf{x}), \quad (56)$$

non  $\bar{\phi}(t)$  hondoko inflatoia den, eta  $\delta\phi(t, \mathbf{x})$  perturbazioa.

Perturbazio hauen zergaiti fisikoa bilatzeko, esan genezake inflatoia energia-nerri bat den heinean, Heisenberg-en ziurgabetasun printzipioa jarraituz, denboran zeharreko eboluzio zehatza ematea ezinezkoa izango dela. Honengatik, fluktuazio kuantikoak edonon irtengo dira. Eredu honen arabera, unibertso makroskopikoan ageri zaizkigun galaxia egiturak, izar sistemak, eta beraz gu gu ere, unibertsoaren jatorri kuantiko batetik sortuak ginateke. Ideia honen irismenaren defentsan, esan beharra dago inflatoiaren kuantizazioa historikoki ez zela egin CMBko fluktuazioen sorrera azaltzeko helburuarekin, gerora eta nahigabean lortutako emaitza bat izan zela baizik. [5]

### 3.2.1 Fluktuazioen fisika

Eremuen teoria klasiko eta kuantikoek frogatua izan duten moduan, prozesu fisiko bat hobekien azaltzeko gai izan diren ereduak akzio kontzeptuan oinarritutako formalismo Lagrangean eta Hamiltondarrak izan dira. Beraz printzipioz, bide honetatik abiatzea aukera zentzuzkoena izango dugu.

Izaera grabitazionala duen eremu eskalar baten fisika nahi badugu, akzioa hau definituko dugu, non minimoki akoplatuta dagoela esaten den, eremuaren gainontzeko elkarrekintzak kontuan hartzen ez direlako. [5, 12]

$$S = \int d\tau dx^3 \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right]. \quad (57)$$

$R$  Ricciren eskalarrak eta  $g$  metrikaren determinanteak espaziodenboraren kurbaduraren informazioa biltzen dute. Eremu eskalarra elkarekintza grabitazioaren iturria izango da.

Metrika eta inflatoi eremua perturbatua ordezkatzean, zailtasun ugari ageriko dira. Hala ere, unibertsoaren garai goiztiarrean metrika perturbatuaren bi proiektzio interesgarri daude bakarrik, eskalarrak eta tentsoriala [6]. Eskalarrak dimentsio handiko fluktuazioetatik arduratzen dira, eta tentsorialak uhin grabitatorioetatik. Metrikaren perturbazioen SVT deskonposizioa eginda, proiektzio bakoitzaren eboluzioa independenteki aztertzeko abantaila erabiliz, jarraian perturbazio eskalarren sorrera kuantikoa formalizatu egingo du. Uhin-grabitatorioen garapena ez da askoz konplikatuagoa izango, baina lanaren helburuetatik ateratzen da. [6]

Garatu behar ditugun perturbazioak fisikoak izateko, gauge aukeraketa errazenean egiten saiatuko gara. *Gauge Kohigikorra* aukeratuko bagenu, inflatoi perturbatua nulua hartuko genuke, eta askatasun gradu bakarria  $\mathcal{R}$  kurbadura-ren perturbazio kohigikorrean izango genuke. Garapena luzea denez eta batez ere, azaldu beharreko beste formalismo batean egiten denez, Arnowitt-Denski-Misner formalismoan [2, 4], eskuragarriagoa dugun *gauge espazialki laua* aukeratuko dugu.

Espazialki laua den gaugeak, FRW metrika perturbatu gabea erabiltzen du,  $\tau$  denbora konformean eta koordenatu espazial kohigikorretan. Gauge honetan, *gauge kohigikorrean* ageri den askatasun gradu eskalarra, inflatoiaren bertsio perturbatuan ageri da;

$$\phi(\tau, \mathbf{x}) = \bar{\phi}(\tau) + \frac{f(\tau, \mathbf{x})}{a(\tau)}, \quad (58)$$

non  $f(\tau, \mathbf{x})$  eremuari *kanonikoki normalizatutako Mukhanov* aldagaia deitzen zaion.  $\mathcal{R}$  kurbadura perturbatuarekiko honela erlazionatzen da (honetarako gauge kohigikorreko emaitzekin konparatu behar dugu) [4]

$$f = a \frac{\dot{\phi}}{H} \mathcal{R} \quad (59)$$

Erlazio hau buruan mantentzea garrantzitsua izango da CMBko datuak interpretatzeko  $\mathcal{R}$  aldagaia erabiliko baitugu. Oraingoz, gauge aukeraketa aproposa eginda, (57) akzio orokorrean ordezkatzeko joango gara;

$$S = \int d\tau d^3x \left( \frac{1}{2} a^2 \left( \left( \bar{\phi}' + \frac{(f'a - a'f)}{a^2(\tau)} \right)^2 - \frac{1}{a^2} (\nabla f)^2 \right) - a^4 V(\bar{\phi} + \frac{f}{a}) \right) \quad (60)$$

$f(\tau, \mathbf{x})$  fluktuazioen ekuazio linearizatuak lortzeko, akzioa  $f$ -ren ordena desberdinetan garatuko dugu. Bigarren ordenararte garatuko dugu, ordena handiagoko ekarpenak, gauge kohigikorrean informazio gehiago dakartenak, maila aurreratuago bateko analisisan erabiliko dira, hein handiagoko korrelazioak eta ez-Gaussiartasunak kontuan hartzeko [4, 12].

Energia potentziala  $f$ ren funtzioan emateko, Taylorren garapen bat egingo dugu  $\frac{f}{a}$  inguruan, potentziala batzbesteko  $\bar{\phi}$ ren menpe edukitzeko.

$$V(\bar{\phi} + \frac{f}{a}) = V(\bar{\phi}) + \frac{dV}{d\bar{\phi}} \frac{f}{a} + \frac{1}{2} \frac{d^2V}{d\bar{\phi}^2} \left(\frac{f}{a}\right)^2. \quad (61)$$

(57) osoan ordezkatur;

$$S = \int d\tau d^3x \left\{ \frac{1}{2} a^2 \left( \left[ \bar{\phi}'^2 + \frac{2\bar{\phi}' f' a}{a^2} - \frac{2\bar{\phi}' a' f}{a^2} + \left(\frac{f' a - a f'}{a^2}\right)^2 \right] - \frac{1}{a^2} (\nabla f)^2 \right) - a^4 \left( V(\bar{\phi}) + V_{,\phi} \frac{f}{a} + \frac{1}{2} V_{,\phi\phi} \left(\frac{f}{a}\right)^2 \right) \right\}. \quad (62)$$

Akzioaren lehen ordena aztertuko dugu,  $f$ ren ekarpenak bereiziz,

$$S^{(1)} = \int d\tau d^3x (a f' \bar{\phi}' - a' f \bar{\phi}' - V_{,\phi} f a^3). \quad (63)$$

(63) garatuko ditugu, gure eboluzio ekuazio linealak lortzeko. Lehenengo ordena egiteko,  $f'$  kentzen saiatuko gara,  $f$  soilaren ekarpena izan dadin. Honetarako,  $a\bar{\phi}'f'$  ekarpenean aldaketa hau sartuko dugu;

$$\frac{d(a\bar{\phi}'f)}{d\tau} = \frac{d(a\bar{\phi}')}{d\tau} f + a\bar{\phi}' f', \quad (64)$$

eta akzioan ordezkatur;

$$S^{(1)} = \int d\tau d^3x \left( \left( \frac{d(a\bar{\phi}'f)}{d\tau} - \frac{d(a\bar{\phi}')}{d\tau} f \right) - a f \bar{\phi}' - V_{,\phi} f a^3 \right). \quad (65)$$

Orain  $\frac{d(a\bar{\phi}'f)}{d\tau}$  deribatu totala daukagunez, akzioaren bariantzan ez du ekarpenik emango, eta nulua izango da beraz;

$$S^{(1)} = - \int d\tau d^3x (\partial_t(a\bar{\phi}') + a\bar{\phi}' + V_{,\phi} a^3) f, \quad (66)$$

eta  $\mathcal{H}$  denbora konformeko Hubbleren parametroa ordezkatur,

$$S^{(1)} = - \int d\tau dx^3 a [\bar{\phi}'' + 2\mathcal{H}\bar{\phi}' + a^2 V_{,\phi}] f. \quad (67)$$

$s^{(1)}$  honek  $f$  guztiz biderkatzen daukanez, ez digu  $f$ ren eboluzio-ekuaziorik emango, beraz, nulua egingo dugu.  $S^{(1)} = 0$  eginez, Klein-Gordonen ekuazioa bueltatuko zaigu, [5]

$$\bar{\phi}'' + 2\mathcal{H}\bar{\phi}' + a^2V_{,\phi} = 0. \quad (68)$$

Beraz,  $f$ ren eboluzio-ekuazioa lortzeko, akzioaren bigarren ordena garatu beharko dugu,

$$S^{(2)} = \int d\tau d^3x \frac{1}{2} \left( (f')^2 + \left(\frac{a'}{a}\right)^2 f^2 - \frac{2a'ff'}{a} - (\nabla f)^2 - V_{,\phi\phi} a^2 f^2 \right). \quad (69)$$

Ekarpenak sinplifikatuz;

$$S^{(2)} = \int d\tau d^3x \frac{1}{2} \left( (f')^2 + \mathcal{H}f^2 - 2\mathcal{H}ff' - (\nabla f)^2 - V_{,\phi\phi} a^2 f^2 \right). \quad (70)$$

Lehenengo ordenako akzioarekin egin dugun antzeko garapen bat egingo dugu  $2\mathcal{H}ff'$  kentzeko;

$$\frac{d(\mathcal{H}f^2)}{d\tau} = \mathcal{H}'f^2 + 2\mathcal{H}ff', \quad (71)$$

(64)en erabilitako argumentu berdina erabiliz,

$$S^{(2)} = \int d\tau d^3x \frac{1}{2} \left( (f')^2 - (\nabla f)^2 + (\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 - a^2V_{,\phi\phi}) f^2 \right). \quad (72)$$

Kontuan hartuz,

$$\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 = \frac{a''a - (a')^2}{a^2} + \frac{(a')^2}{a^2}, \quad (73)$$

dela, (72)en ordezkatzuz,

$$S^{(2)} = \int d\tau d^3x \frac{1}{2} \left[ (f')^2 - (\nabla f)^2 + \left( \frac{a''}{a} - a^2V_{,\phi\phi} \right) f^2 \right]. \quad (74)$$

Honi fluktuazioen akzioa edo akzio koadratikoa deituko diogu [5]. Ezagunak ditugun beste sistema fisiko batzuekin konparatzen badugu, denborarekiko menpekotasuna duen osziladore harmoniko baten akzioaren baliokidea da [4].

Bestalde, inflazioari buruz hitz egiten ari garenez, *slow-roll* baldintzak bete beharko ditu, eta honek hurbilpen bat egiten uzten digu;  $a^2V_{,\phi\phi}$  arbuiaitzeko. Quasi-De Sitter espazioan  $H \simeq konst.$  izango denez,  $\frac{a''}{a} \simeq H^2$  eta (30) erabiliz,

$$\eta_v = M_{pl}^2 \frac{V_{,\phi\phi}}{V} = \frac{V_{,\phi\phi}}{3H^2} \ll 1 \quad (75)$$

Beraz, eta hemendik  $H^2 \gg V_{,\phi\phi}$  denez, arbuia dezakegu [5]. Garapen honetatik geratuko zaigun Lagrangearra beraz;

$$\mathcal{L} = (f')^2 - (\nabla f)^2 + \frac{a''}{a} f^2 \quad (76)$$

Euler-Lagrange ekuazioan zabalduz;

$$f'' - \nabla^2 f - \frac{a''}{a} f = 0, \quad (77)$$

fluktuazioen eboluzio-ekuazioa dugu, bigarren ordenako ekuazio diferentziala. (77) ebazteko, Fourierren transformatuen bidez egin dezakegu;

$$f(\tau, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} f_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \quad (78)$$

(77) ekuazioan ordezkaturaz, denboraren menpeko maiztasuna duen Fourierren moduetarako osziladore harmoniko bat izango dugu, *Mukhanov-Sasaki* izeneko ekuazio;

$$f_{\mathbf{k}}'' + \left( k^2 - \frac{a''}{a} \right) f_{\mathbf{k}} = 0 \quad (79)$$

### 3.3 Mukhanov-Sasaki ekuazioa

Garapen fisiko honen ondorio kualitatibo batzuk lortzeko, komenigarria egingo zaigu zenbait soluzio analitiko aztertzea, eredu hurbildu batean bada ere. Idealki bada ere, De Sitterren espazio-denbora hartzen badugu, non  $H$  konstantea den eta  $a(\tau) = \frac{1}{H\tau}$ , Mukhanov-Sasaki ekuazioa honela berridatz dezakegu;

$$\begin{aligned} a'' &= \frac{-2}{H\tau^3} \\ f_{\mathbf{k}}'' + \left( k^2 - \frac{2}{\tau^2} \right) f_{\mathbf{k}} &= 0 \end{aligned} \quad (80)$$

Ekuazio honek iragartzen dituen izaera fisiko desberdinak azter ditzakegu limite egokiak egiten baditugu. Batetik, moduaren uhin-zenbakia Hubbleren erradio kohigikorra baino askoz txikiagoa den limitean, maiztasun konstanteko osziladore harmoniko baten ekuazioa lortzen dugu;

$$f_{\mathbf{k}}'' + k^2 f_{\mathbf{k}} = 0 \quad (81)$$

Bestetik, horizontea baino uhin-zenbaki handiagoa dutenek, hau da,  $\mathbf{k} \rightarrow 0$  limitean;

$$\frac{f_{\mathbf{k}}''}{f_{\mathbf{k}}} = \frac{2}{\tau^2} \quad (82)$$

Non  $f_{\mathbf{k}} \propto \tau^{-1}$  lortzen den [4]. Honek zera esan nahi du,  $\frac{f_{\mathbf{k}}}{a(\tau)}$  konstantea izango dela, eta kurbaduraren perturbazioarekin zuen (59) erlaziotik, horizontetik kanpo ateratzen diren moduetan  $\mathcal{R}_{\mathbf{k}}$  kontserbatzen dela frogatzen da [4]. Hala ere, inflazioaren benetako kasuan H ez da guztiz konstantea izango, beraz, benetako  $\mathcal{R}$ a balio idealearekiko desbideratua ageriko da.

Emaitza orokorrena lortzeko ordea,  $\omega_k(\tau)$  denborarekiko menpekotasuna duen osziladore harmoniko bat ebatzi beharko da. Ekuazio hauek duten ezaugarri matematikoa aztertzea komenigarria izango denez, fisika alde batera utzita, trata dezagun osziladore harmonikoaren izaera matematiko hutsa;

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0. \quad (83)$$

Ekuazio honek bi dimentsioko soluzio espazio bat du, non linealki independientek diren edozein  $x_1(t)$  eta  $x_2(t)$ k oinarri bat osatzen duten. Wronskiarra izena duen adierazpenak bi funtzio hauek zehazten lagunduko digu, bere ezaugarriak direla eta.

$$W[x_1, x_2] = \dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2. \quad (84)$$

Honela,  $x_1$  eta  $x_2$  (??) ekuazioaren soluzio badira, Wronskiarra denborarekiko independientea izango da definizioz. Bestalde,  $W[x_1, x_2] \neq 0$  bada,  $x_1$  eta  $x_2$  soluzioak independeteki linealak izango dira. Hemendik,  $\{x_1(t), x_2(t)\}$  soluzio espazioaren oinarri bat zehazten badugu,  $v(t) = x_1 + ix_2$  funtzio konplexu bat definitu ahalko dugu, non  $v(t)$  eta  $v^*(t)$  funtzio konjokatua linealki independientek izango diren definizioz, eta beraz, soluzio konplexuen oinarri [15]. Erraz frogatzen da,

$$Im(\dot{v}v^*) = \frac{1}{2i}W[v, v^*] = -W[x_1, x_2] \neq 0. \quad (85)$$

Honetaz gain,  $v(t) \rightarrow \lambda v(t)$  konstantearekin biderkatzen bada,  $W[v, v^*] |\lambda|^2$  faktore batean aldatzen da, eta honek Wronskiarra normalizatzeko aukera emango digu.

$Im(\dot{v}v^*) = 1$  baldin bada,  $v(t)$  modu-funtziora deitzen da. Beraz, (83) ekuazioaren soluzio konplexu orokor bat adierazteko, modu-funtzioen konbinazio lineal bezala adieraz dezakegu. Gure Fourierren moduak (ez nahastu modu-funtzioekin) funtzio konplexuak izango direnez, teknika hau erabiliko dugu Mukhanov-Sasaki ekuazioaren soluziora bilatzeko.

Formalki,  $k = |\mathbf{k}|$  berdina duten Fourierren  $f_{\mathbf{k}}$  moduak, osziladore ekuazio berdinen soluzio konplexueak direnez,  $f_{\mathbf{k}}(\tau)$  modu-funtzio partikular bat aukeratuta,  $f_{\mathbf{k}}$  soluzio orokorra adieraz dezakegu,

$$f_{\mathbf{k}} = a_{\mathbf{k}}^- f_{\mathbf{k}}(\tau) + a_{\mathbf{k}}^+ f_{\mathbf{k}}^*(\tau) \quad (86)$$

Adierazpen honetan modu-funtzioa zehaztugabea badago ere, espero dezakegu baldintzapen fisikoren batek zehaztuko duela. Aurrerago aztertuko dugun moduan, eremuaren kuantizazioaren baldintza izango dugu hau. Hala ere, modu garapena zehazteko,  $a_{\mathbf{k}}^{\pm}$  integrazio konstanteak ere erlazio komenigarriren bat bete beharko dute. Wronskiarraren ezaugarriak erabiliz,  $W[f_{\mathbf{k}}, f_{\mathbf{k}}^*] = -i$  aukera hartzen badugu, aurrera komenigarria egingo zaigun erlazio hauek izango dituzte [4, 15];

$$a_{\mathbf{k}}^- = \frac{W[f_{\mathbf{k}}^*, f_{\mathbf{k}}]}{W[f_{\mathbf{k}}, f_{\mathbf{k}}]} = \frac{f_{\mathbf{k}}'^* f_{\mathbf{k}} - f_{\mathbf{k}}^* f_{\mathbf{k}}'}{f_{\mathbf{k}}'^* f_{\mathbf{k}} - f_{\mathbf{k}}^* f_{\mathbf{k}}'} \quad (87)$$

Eta

$$a_{\mathbf{k}}^+ = (a_{\mathbf{k}}^-)^* \quad (88)$$

Non  $a_{\mathbf{k}}^{\pm}$  konstanteek uhin-zenbakiaren norabidearekiko menpekotasuna duten, modu-funtzioak ez bezala. Bigarren erlazio baldintza  $f(\tau, \mathbf{x})$  erreal izatek dator. Kontsiderazio guzti hauek kontuan hartuta, fluktuazio klasikoaren adierazpen orokorra eman dezakegu, (78) Fourierren garapena (86) modu garapenean ordezkaturik;

$$\begin{aligned} f(\tau, \mathbf{x}) &= \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} [a_{\mathbf{k}}^- f(\tau) + a_{-\mathbf{k}}^+ f^*(\tau)] e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \\ &= \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} [a_{\mathbf{k}}^- f_{\mathbf{k}}(\tau) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} + a_{\mathbf{k}}^+ f_{\mathbf{k}}^*(\tau) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}] \end{aligned} \quad (89)$$

### 3.4 Kuantizazio Kanonikoa

Hemendik aurrera  $f$  eremua kuantizatu egingo dugu. Osziladore harmoniko simple bat kuantizatzearekin izango duen alde bakarra, huts egoeraren aukeraketan egongo da, gure osziladorearen maiztasuna denboraren menpekota izateagatik, desberdina izango delako.

Kuantizazioarekin ekiteko,  $f$  eremua eta bere momentu kanonikoa,  $\pi \equiv f'$ , eragile mailara igoko ditugu,  $\hat{f}$  eta  $\hat{\pi}$  [4, 15]. Definizioz, trukatzeko erlazio kanonikoa beteko dute, non denbora une berdinerako,

$$[\hat{f}(\tau, \mathbf{x}), \hat{\pi}(\tau, \mathbf{y})] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (90)$$

eta

$$[\hat{f}(\tau, \mathbf{x}), \hat{f}(\tau, \mathbf{y})] = [\hat{\pi}(\tau, \mathbf{x}), \hat{\pi}(\tau, \mathbf{y})] = 0. \quad (91)$$

Hau honela izanik,  $\hat{f}$  ren modu garapenean agertutako integrazio konstanteak ere, eragile bihurtuko ditugu, eta beraz hau izango dugu perturbazioaren eta momentu kanonikoaren eragilearen adierazpena;



$$\hat{f}(\tau, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} [\hat{a}_{\mathbf{k}}^- f_k(\tau) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ f_k^*(\tau) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}] \quad (92)$$

$$\hat{\pi}(\tau, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} [\hat{a}_{\mathbf{k}}^- f_k'(\tau) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ f_k'^*(\tau) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}] \quad (93)$$

Trukatze erlazioetatik  $\hat{a}^\pm$  eragileak beteko duten erlazio zehaztu dezakegu;

$$\begin{aligned} [f(\tau, \mathbf{x}), \hat{\pi}(\tau, \mathbf{x})] &= \hat{f}\hat{\pi} - \hat{\pi}\hat{f} = i \\ &= \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{d^3 \mathbf{k}'}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left( \hat{a}_{\mathbf{k}}^- \hat{a}_{\mathbf{k}'}^- f_k f_{k'}' e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{x}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^- \hat{a}_{\mathbf{k}'}^+ f_k f_{k'}'^* e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{x}} \right. \\ &\quad + \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ \hat{a}_{\mathbf{k}'}^- f_k^* f_{k'}' e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{x}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ \hat{a}_{\mathbf{k}'}^+ f_k^* f_{k'}'^* e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{x}} \\ &\quad - \hat{a}_{\mathbf{k}}^- \hat{a}_{\mathbf{k}'}^- f_k f_{k'}' e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{x}} - \hat{a}_{\mathbf{k}}^- \hat{a}_{\mathbf{k}'}^+ f_k f_{k'}'^* e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{x}} \\ &\quad \left. - \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ \hat{a}_{\mathbf{k}'}^- f_k^* f_{k'}' e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{x}} - \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ \hat{a}_{\mathbf{k}'}^+ f_k^* f_{k'}'^* e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{x}} \right) \quad (94) \end{aligned}$$

Simplifikatzen baditugu errepikatzen diren atalak, azkenean geratzen zaigun adierazpena hau da;

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}'}^+, \hat{a}_{\mathbf{k}}^-] (f_k^* f_{k'}' - f_k f_{k'}'^*) \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{d^3 \mathbf{k}'}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{x}} = i \quad (95)$$

Baina lehen aukeratu dugu baldintza erabiltzen badugu, hots,  $W[f_k, f_k^*] = -i$ , sortze eta suntsitze eragileen trukatzeko erlazioak aurkituko ditugu;

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}'}^+, \hat{a}_{\mathbf{k}}^-] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (96)$$

$\hat{a}_{\mathbf{k}}^\pm$  zehaztuta ditugularik, huts egoera definitzeko aukera izango dugu, non  $|0\rangle$  egoera moduan identifikatuta, suntsitze eragilearen menpe autobalio nulua emango digun sistema izango da, hau da,  $\hat{a}_{\mathbf{k}}^- |0\rangle = 0$  [15]. Bestalde, egoera kuantiko kitzikatua  $|m_{\mathbf{k}_1}, n_{\mathbf{k}_2}, \dots\rangle$  moduan adieraziko dugu, non  $m, n, \dots$  izango diren  $f_{\mathbf{k}_1}, f_{\mathbf{k}_2}, \dots$  moduen okupazio mailak. Sistema kitzikatu orokor bat huts egoeratik abiatuta sor dezakegu, uhin-zenbaki bakoitzeko sortze eragile bat erabiliz;

$$|m_{\mathbf{k}_1}, n_{\mathbf{k}_2}, \dots\rangle = \frac{1}{\sqrt{m_{\mathbf{k}_1}! n_{\mathbf{k}_2}! \dots}} [(\hat{a}_{\mathbf{k}_1}^+)^m (\hat{a}_{\mathbf{k}_2}^+)^n \dots] |0\rangle \quad (97)$$

Beraz, edozein  $|\psi\rangle$  egoera kuantiko oinarri honen konbinazio lineal moduan adierazi ahalko da;

$$|\psi\rangle = \sum_{m, n, \dots} C_{mn\dots} |m_{\mathbf{k}_1}, n_{\mathbf{k}_2}, \dots\rangle \quad (98)$$

Non  $f_{\mathbf{k}_1}$  moduan  $m$ ,  $f_{\mathbf{k}_2}$  moduan  $n, \dots$ , egoteko probabilitatea  $|C_{mn\dots}|^2$  emango duen [15]. Honek ez du esan nahi sortze eta suntsitze eragileak zenbat partikula dauden ematen digutenik, hauek ez baitira hermitikoak. Hauen ordeztan, osziladore harmonikoaren analogia eginez,  $\hat{N} = \hat{a}^+ \hat{a}^-$  behagarria erabiliko da, non  $|m_{\mathbf{k}_1}, n_{\mathbf{k}_2}, \dots\rangle$  autoegoera duen, eta  $m, n, \dots$  autobalioak partikula kopuruen okupazio maila diren.

Honaino iritsi garelarik, modu funtzioaren aukeraketaren anbiguitasuna eta honek duen ondorio fisikoa ulertzea falta zaigu. Garatutako formalismo matematikoa oso zabala da eta honengatik fisikoki behagarriak diren partikulekin bateragarri zaigun modu-funtzioa zehaztea falta zaigu. Anbiguitasun hau explizituki adierazeko, jo dezagun bi modu-funtzio ditugula,  $u_k(\tau)$  eta  $f_k(\tau)$ . Biak ekuazio berdinen soluzioak izango direnez, bata bestearen oinarrian adierazitako konbinazio lineal moduan eman dezakegu;

$$u_k(\tau) = \alpha_k f_k(\tau) + \beta_k f_k^*(\tau) \quad (99)$$

Non soluzio konplexu baten modu garapena dugun. Wronskiarraren definiziotik azkar topatzen da,  $W[u_k, u_k^*] = -i$  aukera hartzeko, erlazio hau bete beharko dutela konbinazio linealeko koefizienteek [4, 15];

$$|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2 = 1 \quad (100)$$

Beraz, baldintza hau betetzen duen edozein konbinaziok, gure hasierako modu funtzioaren funtzio berri guztiz baliokide bat ematen du. Honela, perturbazio eremua modu funtzio berri hauen menpean adierazi dezakegu, honi dagozkion  $b_{\mathbf{k}}^\pm$  sortze eta suntsitze eragileak txertatuz;

$$\hat{f}(\tau, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} [\hat{b}_{\mathbf{k}}^- u_k(\tau) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} + \hat{b}_{\mathbf{k}}^+ u_k^*(\tau) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}] \quad (101)$$

Eragile mota bakoitzak, independenteki tratatuak izan daitezke Hilbert espazio bateko egoeren oinarri izateko, bere huts eta kitzikadura egoera independenteekin;

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\mathbf{k}}^- |0\rangle_a &= 0, \\ \hat{b}_{\mathbf{k}}^- |0\rangle_b &= 0. \end{aligned} \quad (102)$$

Eta

$$\begin{aligned} |m_{\mathbf{k}_1}, n_{\mathbf{k}_2}, \dots\rangle_a &= \frac{1}{\sqrt{m_{\mathbf{k}_1}! n_{\mathbf{k}_2}! \dots}} [(\hat{a}_{\mathbf{k}_1}^+)^m (\hat{a}_{\mathbf{k}_2}^+)^n \dots] |0\rangle_a, \\ |m_{\mathbf{k}_1}, n_{\mathbf{k}_2}, \dots\rangle_b &= \frac{1}{\sqrt{m_{\mathbf{k}_1}! n_{\mathbf{k}_2}! \dots}} [(\hat{b}_{\mathbf{k}_1}^+)^m (\hat{b}_{\mathbf{k}_2}^+)^n \dots] |0\rangle_b. \end{aligned} \quad (103)$$

Hemendik argi geratzen da  $b$  egoerak eta  $a$  egoerak desberdinak direla, eta fisikoki ondorio garrantzitsua du ze,  $b$  hutsean  $a$  partikulak topatuko ditugula esan nahi du. Hala ere, bi egoeren arteko erlazioa lor daiteke, Bogolyubov transformazioen bitartez.

$$\begin{aligned}\hat{a}_{\mathbf{k}}^- &= \alpha_{\mathbf{k}}^* \hat{b}_{\mathbf{k}}^- + \beta_{\mathbf{k}} \hat{b}_{-\mathbf{k}}^+, \\ \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ &= \alpha_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}}^+ + \beta_{\mathbf{k}}^* \hat{b}_{-\mathbf{k}}^-. \end{aligned} \quad (104)$$

Transformazio hauek erabiliz jakin dezakegu zehaztasunez  $b$  hutsean zenbat partikula dauden. Itxarotako balio erraz bat kalkulatzeari besterik ez da;

$$\begin{aligned}{}_b \langle 0 | \hat{N}_{\mathbf{k}}^a | 0 \rangle_b &= {}_b \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ \hat{a}_{\mathbf{k}}^- | 0 \rangle_b \\ &= {}_b \langle 0 | (\alpha_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}}^+ + \beta_{\mathbf{k}}^* \hat{b}_{-\mathbf{k}}^-) (\alpha_{\mathbf{k}}^* \hat{b}_{\mathbf{k}}^- + \beta_{\mathbf{k}} \hat{b}_{-\mathbf{k}}^+) | 0 \rangle_b \\ &= |\beta_{\mathbf{k}}|^2. \end{aligned} \quad (105)$$

Autoegoeren ortogonaltasunarengatik, gainontzeko ekarpenak nuluak izango dira.  $k$  espaziooko partikulen batezbesteko dentsitatea kalkulatu dezakegu hemendik,

$$n = \int d^3 \mathbf{k} n_{\mathbf{k}} = \int d^3 \mathbf{k} |\beta_{\mathbf{k}}|^2. \quad (106)$$

### 3.4.1 Huts Fisikoa

Orain arteko garatu dugun teorian ikusten dugunez, partikulen interpretazio desberdina gure modu-funtzio aukeraketarekiko araberakoa izango da. Fisikoki hutsa den egoerak izan beharreko baldintzaren baten arabera, zentzuzkoa den modu-funtzio bat bilatuko dugu. Printzipioz baldintza bat baino gehiago egon badaiteke ere, ideia intuitibo batek nahikoa ahalmen emango digu hau topatzeko.

Problema honek dituen zenbait gako emateko, Mukhanov-Sasaki ekuazioa Minkowskiren espazio-denbora batean ebatziko dugu, non Fourierren moduek denborarekiko independentea den osziladore harmoniko arrunt bat izango den. Irudi honetan, osziladore harmoniko kuantikoaren energia maila minimoa huts maila bezala interpretatuko dugu. Honetara iristeko, gure fluktuazio eragileari dagokion Hamiltondarraren itxarotako balioa minimizatuko duen maila bilatuko dugu.

Gure sistemaren Hamiltondarra, sistemaren Lagrangearekin lotuta dagoena Legendreren transformazio baten bidez [4];

$$\hat{H}(\tau) = \int d^3 \mathbf{x} [\hat{\pi}^2 + (\nabla \hat{f})^2 + m_{eff}^2(\tau) \hat{f}^2] \quad (107)$$

non  $m_{eff}$  de Sitter espazio-denboraren informazio guztia biltzen duen.

Orain modu-funtzioetan garatzen badugu, Hamiltondarra minimizatuko duen  $f_k(\tau)$  modu funtzioa bilatuko dugu. Honetarako Hamiltondarra garatuko dugu;

$$\hat{H}(\tau) = \frac{1}{4} \int d^3 \mathbf{k} [\hat{a}_{\mathbf{k}}^- \hat{a}_{-\mathbf{k}}^- F_k^* + \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ \hat{a}_{-\mathbf{k}}^+ F_k + (2\hat{a}_{\mathbf{k}}^+ \hat{a}_{\mathbf{k}}^- + 1) E_k], \quad (108)$$

non

$$\begin{aligned} E_k &= |f'_k|^2 + k^2 |f_k|^2 \\ F_k &= f_k'^2 + k^2 f_k^2 \end{aligned} \quad (109)$$

Bilatzen ari garen modu funtzio konplexuen konbinazio desberdinak diren.  $\hat{a}_{\mathbf{k}}^- |0\rangle = 0$  denez, eragileak dituzten ekarpen guztiak deuseztatzen dira eta zuzenean;

$${}_f \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle_f = \frac{1}{4} \int d^3 \mathbf{k} E_k \quad (110)$$

Eta hemendik, energia-dentsitate hau geratuko zaigu;

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4} \int d^3 \mathbf{k} E_k \quad (111)$$

Adierazpen hau minimizatzeko modu zuzenena,  $\mathbf{k}$  Fourier moduari dagokion  $E_k$  bakoitza independeteki minimizatzea izango da. Beraz, kontuan hartuz ezarri dugun  $f'_k f_k^* - f_k f_k'^* = -i$  normalizazio baldintza,  $E_k$  minimizatuko dugu.  $f_k$  funtzio konplexua adierazpen polarrean emango dugu;

$$f_k = r_k e^{i\alpha_k} \quad (112)$$

Normalizazio baldintzan sartzen badugu, funtzio erreal hauen arteko erlazioa topatuko dugu;

$$\begin{aligned} (r'_k e^{i\alpha_k} + r_k i e^{i\alpha_k} \alpha') r_k e^{-i\alpha_k} - ((r'_k e^{-i\alpha_k} - r_k i e^{-i\alpha_k} \alpha') r_k e^{i\alpha_k}) &= -i \\ r'_k r_k - r'_k r_k + 2r_k^2 i \alpha' &= -i \\ r_k^2 \alpha' &= \frac{-1}{2} \end{aligned} \quad (113)$$

Normalizazio baldintza hau dugularik, jo dezagun  $E_k$  minimizatzerara;

$$\begin{aligned} E_k &= r_k'^2 + r_k^2 \alpha_k'^2 + k^2 r_k^2 \\ &= r_k'^2 + \frac{1}{4r_k^2} + k^2 r_k^2, \end{aligned} \quad (114)$$

$r_k$  eta  $r'_k$  rekiko minimizatuz, alde batetik;

$$\begin{aligned}\frac{dE_k}{dr'_k} &= 2r'_k = 0 \Rightarrow r'_k = 0 \\ \frac{dE_k}{dr_k} &= \frac{-2}{4r_k^3} + 2k^2 r_k = 0 \\ 2k^2 r_k &= \frac{1}{2r_k^3} \rightarrow r_k^4 = \frac{1}{4k} \\ r_k &= \frac{1}{\sqrt{2k}}.\end{aligned}\tag{115}$$

Beste aldetik;

$$\begin{aligned}\alpha'_k &= -\frac{1}{2r_k^2} \rightarrow \alpha'_k = -k \\ \alpha_k &= -k\tau\end{aligned}\tag{116}$$

Eta honela topatu dugu energia dentsitatea minimizatzen duen modu funtzioa (Minkowskiren espazioan);

$$f_k(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\tau}\tag{117}$$

Topatu dugun huts eredua, denbora menpekoa den espazio-denbora baterako orokorra ez denez, lortutako emaitza marku orokorrago batera hedatu beharko dugu.

Trataera orokor bat egiteko zera eduki beharko genuke kontuan,  $\omega_k(\tau)$  denborarekin aldatzen denez, jada ezingo dugula une guztietarako huts egoera orokor bat definitu, baizik eta aldiune bakoitzean egongo den huts egoera bat. Honela  $|0\rangle_{\tau_0} \neq |0\rangle_{\tau_1}$  izango da.

Anbigutasunak kentzeko, (80) de Sitter espaziorako Mukhanov-Sasaki ekuazioa soluzio zehatza kalkulatu dezakegu [5];

$$f_k(\tau) = \alpha \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\tau}\right) + \beta \frac{e^{ik\tau}}{\sqrt{2k}} \left(1 + \frac{i}{k\tau}\right)\tag{118}$$

Non  $\alpha$  eta  $\beta$  konstanteak zeintzuk diren definitzeko, hasierako baldintza bat topatu beharko dugu. De Sitter ereduaren egitearen abantaila garbia da, uni-bertsoaren lehenengo aldiunetarako, hots,  $\tau \rightarrow -\infty$  den limitean, Mukhanov-Sasaki ekuazio osziladore harmoniko arrunt baten ekuazioan bihurtzen dela. Beraz, lehenago definitu dugun hutsuneari dagokion modu funtzioarekin konparatu dezakegu, limite egokian eginda;

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} f_k = \alpha \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} + \beta \frac{e^{ik\tau}}{\sqrt{2k}}\tag{119}$$

Eta hemendik zuzenean ikusten da gure soluzio zehatza  $\alpha = 1$  eta  $\beta = 0$  izango dela. Beraz hemendik lortzen dugun modu-funtzioa huts fisikoa deskribatzeko beharrezkoa den bakarra izango da, inflazioaren hasieratik amaieraraino.

$$f_k(t) = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \left( 1 - \frac{i}{k\tau} \right) \quad (120)$$

Modu-funtzio hau zehaztuta, perturbazio eta momentu eragileak erabat zehaztuta izango ditugu, eta honela, inflatoi perturbatua deskribatuko duen eredu bat izango dugu.

## 4 Inflazioa eta Behaketa Esperimentalak

Inhomogeneotasunak inflazioan zehar gertatutako fluktuazio kuantikoek sor-tu zituztela ikusi dugu. Irudika dezakegu, elkarrekintza fisiko desberdin guztiak kontuan hartuta, hasierako perturbazio banaketatik birkonbinaketa garaiko perturbazio banaketara iristeko eboluzioa ezagutuko dugula. Inflazioaren iragarpen esperimentalak egiaztatzeke, inflazioaren ondorengo perturbazioen eboluzioa az-tertu beharko dugu, CMBko datuak gaizki ez ulertzeke.

Honetarako, CMBak biltzen duen informazioa deskodetzen jakin beharko du-gu lehenengo. Birkonbinaketa garaiko anisotropiak erradiazio banaketan txer-tatu ziren, eta ia konstante iraun dute guregana iritsi arte. Materia banaketak ordea, erradiazioaren eraginetik askatzean, elkarrekintza grabitatorioak orain-dik jarraitzen duen sare-egitura moduko eboluzio batean murgildu zen. Emaita esperimentalak eta teorikoak konparatzeko, komunean duten eredu matematiko bat garatu beharko dugu.

### 4.1 Inflatoi kuantikoaren iragarpenak

Aurreko atalean garatu genuen inflatoiaren formalismo kuantikoarekin, in-flazioak utziko lukeen ikuspegia iragarri dezakegu. Hutsaren fluktuazio kuan-tikoek energia-dentsitatearen banaketaren batezbesteko bat probestuko digute, (92) eragileen itxarotako balioa eginez.

Fourierren garapena erabiltzen ari garenez,  $f_k$  modu desberdinak adierazte-ko, *espektro-dentsitate* funtzioa erabiliko dugu, non funtsean, harmoniko bakoit-zari dagokion modua, harmoniko bakoitza karakterizatzen duen  $k$ ren funtzioan emango den. Espektro-dentsitatea aurrerantzean egingo dugun eztabaidaren muinean egongo da, edozein perturbazio banaketa, bai CMBkoa eta bai infla-zioak sortutakoa, funtzio honek adierazi egingo dituelako. Honela, espektro-dentsitateak unibertsoaren eboluzioan zehar jasango zituen aldaketak iragar-tzeko gai izanda, unibertsoaren eboluzio bera ezaguna izango genuke.

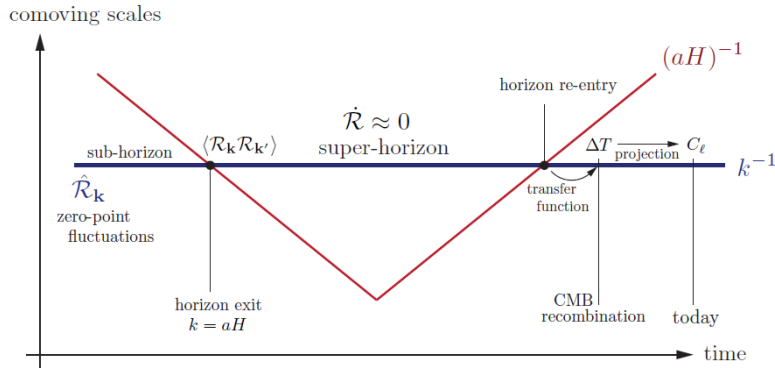
Lehenengo pausoa, hasierako baldintzatzat erabiliko dugun espektro-dentsitatea kalkulatzeko izango da. Honetarako, inflazio hasieran egongo diren (92) hutsaren fluktuazio eragileen Fourierren moduen itxarotako balioa kalkulatuko dugu,

$$\begin{aligned}
\langle f_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}'}^* \rangle &= \langle 0 | f_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}'}^* | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | (f_{\mathbf{k}}^* \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ + f_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^-) (f_{\mathbf{k}'} \hat{a}_{\mathbf{k}'}^- + f_{\mathbf{k}'}^* \hat{a}_{\mathbf{k}'}^+) | 0 \rangle \\
&= f_{\mathbf{k}}(\tau) f_{\mathbf{k}'}^*(\tau) \langle 0 | [\hat{a}_{\mathbf{k}}^-, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^+] | 0 \rangle \\
&\equiv P_f(k) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}').
\end{aligned} \tag{121}$$

Huts fisikoarekin koherentea izango den modu-funtzioa (120) erabiliz,  $P_f(k)$  dentsitate espektralaren adierazpena izango dugu;

$$P_f(k) = \frac{e^{ik\tau} e^{-ik\tau}}{2k} \left(1 - \frac{i}{k\tau}\right) \left(1 + \frac{i}{k\tau}\right) = \frac{1}{2k} \left(1 + \frac{1}{(k\tau)^2}\right). \tag{122}$$

Inflazioan zehar  $\mathcal{R}_{\mathbf{k}}$  perturbazio moduak zuen garrantzia azpimarratu genuenean, horizontetik kanpo kontserbatu egiten zelako izan zen. Jarraian egingo dugun azterketa egiteko, ezinbesteko ezaugarria izango da hau, inflazioan zehar horizontearen barnean gertatuko den energia altuko fisika ezezaguna izanda ere, iragarpenak egiteko aukera ematen digulako. Inflazioan zehar Hubbleren erradio kohigikorra txikitzen joango denez,  $\mathbf{k}$  txikieneko moduak horizontetik ateratzen joango dira. Kanpoan daudenean, kausalki deskonektatuta egongo dira, eta  $\mathcal{R}_{\mathbf{k}}$  perturbazioen amplitudea konstante mantenduko dira. Inflazioa amaitu eta Hubbleren erradio kohigikorra handitzen hasten denean, honen barnean sartuko diren uneren bat egongo da, eta hemendik aurrera, eboluzio ezaguna izango dute (ikus 1 irudia).



Irudia 1: Irudi honetan  $\mathcal{R}_{\mathbf{k}}$  perturbazioaren eboluzioa ikus daiteke.

Honengatik, Hubbleren erradioa zeharkatzen duten moduekin interesatuta egongo gara batez ere. Limite honetan, (120) modu-funtzioa adierazteko beste modu bat bilatuko dugu, Hubbleren erradio kohigikorra zeharkatzen duen moduak  $k = aH$  izango duenez, horizontearen haratagoko moduek,  $k\tau \rightarrow 0$  limitean egongo dira [2];

$$\begin{aligned}\lim_{k\tau \rightarrow 0} f_k(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2k}} \left( \frac{k\tau - i}{k\tau} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} k^{\frac{3}{2}} \tau} (k\tau - i) \\ &= \frac{1}{i\sqrt{2}} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}} \tau}.\end{aligned}\tag{123}$$

Eta espektro-dentsitatean ordezkatzuz;

$$P_f(k) = \frac{1}{2k^3} \frac{1}{\tau^2} = \frac{1}{2k^3} (aH)^2\tag{124}$$

$P_{\mathcal{R}} = \mathcal{R}_{\mathbf{k}} \mathcal{R}_{\mathbf{k}}^*$  kurbaduraren perturbazioaren espektro-dentsitatea erabiltzen badugu, (59) erlazioa gogoan badaukagu, horizontetik haratagoko espektro-dentsitatea defini dezakegu;

$$P_{\mathcal{R}} = \frac{H^2}{a^2 \dot{\phi}^2} P_f(k) = \frac{1}{4k^3} \frac{H^2}{\epsilon}.\tag{125}$$

Hitzarmenez, dimentsio gabeko parametro batean bihurtu dezakegu [2];

$$\begin{aligned}\Delta_s^2(k) &\equiv \frac{k^3}{2\pi^2} P_{\mathcal{R}}, \\ \Delta_s^2(k) &= \frac{1}{8\pi^2} \frac{H^2}{\epsilon}.\end{aligned}\tag{126}$$

Garapen honekin, inflazioak espontaneoki sortzen duen energia-dentsitate banaketa ezaguna dugu. Perturbazio profil honetatik abiatuta, CMBko perturbazioak modu sinesgarrian ondorioztatzeko gai izan beharko gara, eredu kosmologiko estandarreko teoria erabiliz.

Bestalde, Hubbleren erradio kohigikorretik (horizontetik) kanpo dauden perturbazioei buruzko beste ezaugarri bat ere ondorioztatu dezakegu. Kuantizazio kanonikoan definitu genituen eragileek,

$$\begin{aligned}\hat{f}(\tau, \mathbf{x}) &= \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} [f_k(\tau) \hat{a}_{\mathbf{k}}^- + f_k^*(\tau) \hat{a}_{\mathbf{k}}^+] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \\ \hat{\pi}(\tau, \mathbf{x}) &= \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} [f'_k(\tau) \hat{a}_{\mathbf{k}}^- + f'^*_k(\tau) \hat{a}_{\mathbf{k}}^+] e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}},\end{aligned}\tag{127}$$



Eboluzio desberdina erakutsiko dute  $k\tau \rightarrow 0$  horizontea zeharkatzean. Limite honetan, modu-funtzioa (123) eta bere  $f'_k(\tau) = -\frac{1}{i\sqrt{2}} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}} \tau^2} = -\frac{f_k(\tau)}{\tau}$  deribatua momentu kanonikoaren definizioan (127)n ordezkaturaz,

$$\begin{aligned}\hat{\pi}(\tau, \mathbf{x}) &= \frac{-1}{\tau} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} [f_k(\tau) \hat{a}_{\mathbf{k}}^- + f_k^*(\tau) \hat{a}_{\mathbf{k}}^+] e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \\ &= \frac{-1}{\tau} \hat{f}(\tau, \mathbf{x}).\end{aligned}\quad (128)$$

Hau da, momentu kanonikoa fluktuazio eragilearekiko proportzionala izango da, eta beraz, trukatzeko erlazio kanonikoa ez da gehiago beteko. Hau da, Hubble-ren erradio kohigikorra zeharkatzen duten moduek izaera kuantikoa galdu egingo dute, eta perturbazio eremu klasikoaren moduan garatuko dira [5].

Bestalde, iragarpen teorikoak ahal diren onenak izateko, inflazioaren benetakotasun kasuan  $H$  eta  $\epsilon$  denborarekiko menpekotasun txikia duten funtzioak direla kontuan hartu beharko dugu, eta beraz,  $\mathcal{R}_{\mathbf{k}}$  ez da guztiz kontserbatuko. Desbideraketa hau kontatzeko, parametro berri bat definituko dugu. Eskala ( $k$ ) desberdinekiko  $\Delta_s^2(k)$  idealki aldaezina eta konstantea denez, de Sitterren limitetan  $\Delta_s^2(k) \sim k^0$  beteko da. Quasi-de Sitter espazio-denboraren desbideraketa kontatzeko, heuristikoki,

$$\Delta_s^2(k) \equiv A_s \left( \frac{k}{k_*} \right)^{n_s - 1} \quad (129)$$

moduko adierazpen bat espero dezakegu, non  $n_s = 1$  izango zen, kasu idealean.  $k_*$  eta  $A_s$  neurketekin bat egiteko normalizazio konstantea eta proportzionaltasun konstantea izango dira, non  $k_* = 0.05 Mpc^{-1}$  eta  $A_s = (2.196 \pm 0.060) \times 10^{-9}$  dira. Indizea idazteko betse modu bat erabiliz,

$$n_s - 1 \equiv \frac{d \ln \Delta_s^2}{d \ln k}, \quad (130)$$

inflazioko *slow-roll* parametroen menpe idazteko aukera izango dugu. (130) adierazpena garatuz,

$$\frac{d \ln \Delta_k^2}{d \ln k} = \frac{d \ln \Delta_s^2}{dN} \frac{dN}{d \ln k}, \quad (131)$$

non  $N$  *e-fold*ak ditugun. (126)ren  $\ln \Delta_s^2 = \frac{1}{8\pi^2} (2 \ln H - \ln \epsilon)$  logaritmoa eginez,

$$\frac{d \ln \Delta_s^2}{dN} = 2 \frac{d \ln H}{dN} - \frac{d \ln \epsilon}{dN}. \quad (132)$$

Deribatu hauek definizioz  $-2\epsilon - \eta$  dira.  $\frac{dN}{d \ln k}$  kalkulatzeko, horizontea zeharkatze limitetan kalkulatu da.  $k = aH$ , logaritmo barruan emateko,

$$\ln k = N + \ln H. \quad (133)$$

Eta beraz,

$$\frac{dN}{d \ln k} \equiv 1 + \epsilon. \quad (134)$$

*Slow-roll* parametroen baldintzak  $\{\epsilon, |\eta|\} \ll 1$  direnez, bigarren ordenako ekarpenak arbuiatu ahalko ditugu, eta honela,

$$n_s - 1 = -2\epsilon - \eta \quad (135)$$

adierazpena lortzen dugu.

Parametro hau funtsezkoa izango da, posibleak diren Quasi-de Sitter espazio-denbora desberdinak karakterizatu eta konparatzen dituelako, eta esperimental-ki zentzuzkoak diren ereduak aukeratzeko.

## 4.2 CMBko anisotropiak aztertzeko eredu matematikoa

CMB garaiko azken sakabanatze gainazaletik askatu ziren fotoiak bide bat egin behar izan dute gure planetaren *unibertso-lerroarekin* bat egiteko. Elkarrekintza grabitatoriek fotoien norabide eta energiak aldatzen dituztenez, fotoiek erakusten dituzten anisotropia horiek, askatu ziren uneko dentsitate banaketarekiko desberdinak izan daitezke.

Zentzu honetan, bidean aldatutakoa kontuan hartzeko, birkonbinaketa garaiaren benetan zegoen dentsitate banaketa, eta CMBak erakusten digun banaketa honen *proiektzioa* bereizten dugu. Hala ere, desberdintasun hauen artean azpimarragarriena den Sach-Wolfe efektuak, fotoien pertubazio banaketan %10eko aldaketa eragiten duenez bakarrik [7], birkonbinaketa garaiko pertubazio-banaketa baliokidetzat hartuko dugu. Sach-Wolfe efektua, birkonbinaketa ondorengo masa-menpeko arotik energia ilun arora pasa bitartean, fotoiak potentzial grabitatorio baten menpe hedatu zirelako gertatu zen.

Hau onartuta, CMBak zuzenean bidalitako informazioa matematikoki adierazteko eredu aztertuko dugu. Energia-dentsitate banaketa adierazteko, tenperatura funtzio bat definituko dugu. Batezbesteko tenperatura  $T_0$  izango dugu, banaketa isotropoa eta homogeenoi dagokiona. Tenperatura diferentziak kontatzeko, zeruko  $\mathbf{n}$  norabidearen funtzioan,  $\Delta T(\mathbf{n})$  tenperatura diferentzia erlatiboak definituz, CMBko fluktuazio funtzioa definituko dugu [2];

$$\Theta(\mathbf{n}) = \frac{\Delta T(\mathbf{n})}{T_0}. \quad (136)$$

Funtzio honen garapen multipolarra egin dezakegu, bere domeinua esferikoa dela eta. Fourierren analisisian bezala, harmoniko esferikoek eta hauen koefizienteek informazio osoa gordeko dute. Bestalde, hasierako espektro-dentsitatea

erlazionatzeko bide zuzenena emango digu, espektro-dentsitate angeluarra definitzen badugu. Garapen multipolarra egiteko [9], [2]

$$\Theta(\mathbf{n}) = \sum_{l,m} a_{lm} Y_{lm}(\mathbf{n}), \quad (137)$$

eta

$$a_{lm} = \int d\Omega Y_{lm}(\mathbf{n}) \Theta(\mathbf{n}), \quad (138)$$

moduan garatuko dugu  $\Theta(\mathbf{n})$  funtzioa, non  $l = 0, 1, 2, \dots$  uhin-zenbaki harmonikoa den, eta  $m = -l, -(l-1), \dots, l-1, l$  indizeak osotara  $2l+1$  balioak hartzen dituen.

Hemendik abiatuta, espektro-dentsitate angeluarra definituko dugu;

$$C_l = \frac{1}{2l+1} \sum_{l,m} \langle a_{lm}^* a_{lm} \rangle, \quad (139)$$

non interpretazio fisiko egoki bat edukitzeko,  $\langle a_{lm}^* a_{lm} \rangle$  lrekiko menpekotasuna izango duen bakarrik, eta balioen banaketa funtzioa Gaussiarra izango den.

CMBko temperatura fluktuazioak orokorrean  $\mathcal{R}_{\mathbf{k}}$  moduengatik zehaztuta egongo dira. Hala ere, horizonte (Hubbleren erradio kohigikor) barruan sartzean elkarrekintza desberdinek sortutako eragin fisikoekiko sentikor bihurtuko dira. Eboluzio honen garapen matematikoa konplikatua da eta lan honen helburuetatik urruntzen da. Prozesu fisiko hau Boltzmann-Einsteinen ekuazioekin aztertzen da [7], non kalkulu guztietatik lortzen den ondorioa  $\Delta_{Tl}(k)$  *transferentzia-funtzio* izeneko adierazpen bat den. Funtzio hau numerikoki inplementatzen diren algoritmoen bidez kalkulatu da, non hauen artean, **CMBfast** edo **CAMB** kodeak dira eraginkor eta erabilienak. Garatzen ari garen eredu barnean, honela ageriko zaigu transferentzia-funtzioa; (138) ekuazioan birkonbinaketako fluktuazio funtzioa, hasierako espektro-dentsitatea eta honek jasan duen eboluzioa adieraziko duen transferentzia-funtzioarengatik ordezkatuz;

$$a_{lm} = 4\pi(-i)^l \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \Delta_{Tl}(k) \mathcal{R}_{\mathbf{k}} Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}), \quad (140)$$

eta espektro-dentsitate angeluarraren (139) ekuazioan ordezkatuz,

$$\begin{aligned} C_l &= \frac{1}{2l+1} \sum_{l,m} \langle a_{lm}^* a_{lm} \rangle \\ &= \frac{1}{2l+1} \sum_{l,m} \int \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \Delta_{Tl}(k) \Delta_{Tl}(k') \langle \mathcal{R}_{\mathbf{k}} \mathcal{R}_{\mathbf{k}'}^* \rangle Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}'). \end{aligned} \quad (141)$$

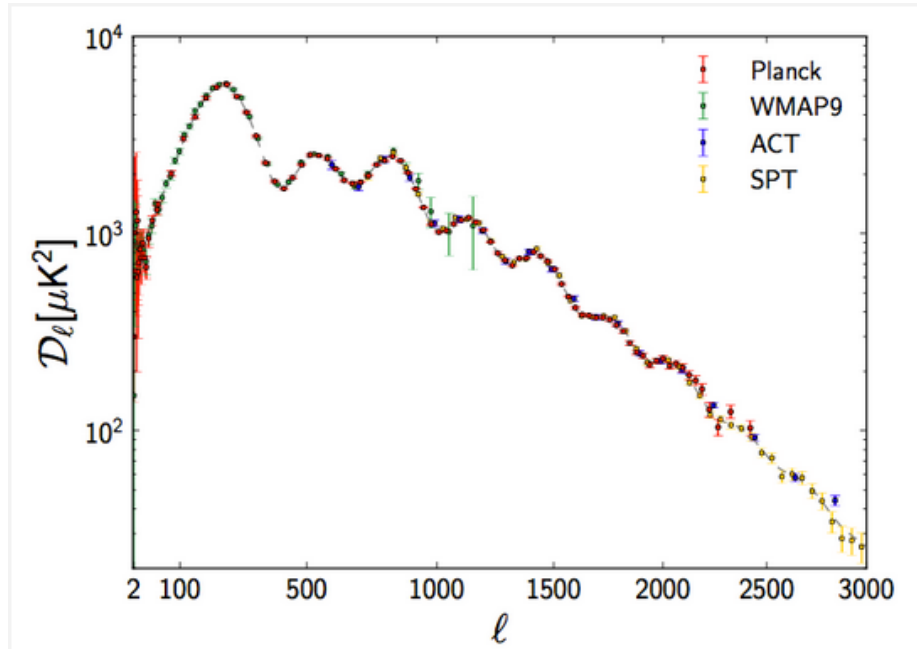
Baina  $P_{\mathcal{R}} = \langle \mathcal{R}_{\mathbf{k}} \mathcal{R}_{\mathbf{k}'}^* \rangle$  dentsitate espektrala dugunez, eta harmoniko esferikoez betetzen duten identitate matematiko honekin;

$$\sum_m Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}') = \frac{2l+1}{4} P_l(\hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{k}}'), \quad (142)$$

honela geratuko da CMBko anisotropien dentsitate espektral angeluarra [2];

$$C_l = \frac{2}{\pi} \int k^2 dk P_{\mathcal{R}} \Delta_{Tl}^2(k) \quad (143)$$

Transferentzia-funtziora kalkulatu behar duten kodeak erabiliz, CMBko espektro-dentsitate angeluarra iragarriko dugu. Tarteko eboluzioak dituen baldintza desberdinek (transferentzia-funtziora parametro kosmologikoez sentikorra da) eboluzio desberdinen anisotropia banaketak emango dizkigu. Honela, benetazko eboluzioa ezagututa, CMBtik zuzenean kalkulatu behar dugun espektro-dentsitate angeluarrarekin konparatuz, inflazioaren iragarpenen zuzentasuna zehaztu dezakegu (ikus 2 irudia).



Irudia 2: Esperimentu desberdinek (Planck, WMAP9, ACT, SPT) neurtutako CMBko espektro-dentsitate angeluarra.

### 4.3 CMBko anisotropien dentsitate espektral angeluarra

Inflazioak zenbateko eragina duen ikusteko, CMBko anisotropien espektrodentsitate angeluarreko informazio fisikoa interpretatuko dugu. Irudian agertzen denez, maximoz eta minimoz betetako espektropotentzia dugu, non harmoniko garrantzitsuena  $l \sim 200$  uhin-zenbaki angeluarraren inguruan dagoen. Eskala handiko (1 txikiko) moduek desbideraketa handiagoa daukate, bariantza kosmikoaren ondorioz. Bariantza hau, neurketa kosmologikoez derrigorrez duten errore estatistiko bat da [9],

$$\frac{\Delta C_l}{C_l} = \sqrt{\frac{2}{2l+1}}, \quad (144)$$

$l$  bakoitzak  $2l+1$  modu multipolarren neurketa egin ahalko ditu definizioz. Beraz,  $l$  txikienekin egiten den  $\langle a_{lm}^* a_{lm} \rangle$  batazbestekoak desbideraketa handiagoa izango du, lagina txikiagoa izateagatik. Hau kontuan hartuta, inflazioak iragartzen duen espektrodentsitate angeluarra CMBkoarekin ia bat dator. Hau inflazioaren teoriaren arrakasta handienetako bat izan da, eta ez bakarrik irudierekin bat etortzen delako. Jarraian azalduko dugun moduan, irudiaren atzean dagoen interpretazio fisikoan beharrezkoa den mekanismoa egiten du inflazioak.

#### 4.3.1 Perturbazio Moduen Faseak

Hasierako espektrodentsitatean, eskala handiko moduak ( $k$  txikikoak) izan ziren Hubblen erradio kohigikorra (horizontea) gurutzatu zuten lehenengo moduak. Beraz, birkonbinaketan garaian oraindik horizontean sartu ez diren moduak, hasierako perturbazio moduak izango dira zuzenean. Eskala txikiagoko moduak ordea, birkonbinaketa gertatu baino lehenago sartuko dira horizontean, eta beraz, elkarrekintzek hauen eboluzioan eragingo dute.

Eboluzio hau transferentzia-funtzioko fisikan zehaztuta egongo da. Honek atzean duen interpretazio fisiko aztertuko dugu orain, kualitatiboki. Moduak horizonte barnean sartzen hasten direnean, barioi-fotoi fluido batez osatuta hartzen da unibertsoa, Thomson sakabanaketaren bitartez lotuta dagoena. Horizonte barruan, perturbazioen eboluzio akustikoa hasten da, eta grabitateak lotzen dituen presio-uhin moduan eboluzionatzen hasiko da. Beraz, grabitateak perturbazioak handitzea eragingo du, fluidoa gune dentsoenen inguruan konzentratuz. Bestalde, geroz eta dentsoago egiten den guneetan, presioa handiagotuz doa, fotoien ekarpenarengatik batez ere. Uneren batean, erakarpen grabitatorioa gaintu egingo du, eta perturbazioa txikiagotu egingo da berriz. Hala ere, presioaren alderatze indarra ahulegia bihurtzen denean, grabitatea gailendu egingo da. Prozesu hau printzipioz behin eta berriro errepikatuko litzateke. Hauei *barioien oszilazio akustikoak* deitzen zaie [7].

Honela, CMBko espektro-dentsitate angeluarrari buruzko zenbait propietate iragarri ditzakegu. Perturbazio modu bat horizontean sartzen denean, anplitudea handituz joango da, lehen esan bezala, maximo batera iritsi arte. Moduak banaka sartzen direnez horizontean, une desberdin bakoitzean modu desberdin baten maximoa izango da. Birkonbinaketa garaian ere, perturbazio modu bat bere une dentsoenean dagoenez, CMBko anisotropiak maximoan dagoen modu bat emango du.

Modu hau baino lehenago sartu diren moduak ordea, lehenago iritsi zirenez maximora, perturbazioen anplitudea ahultzen erakutsiko dute. Honela, birkonbinaketa garaian minimoa izango den modurenbat egongo da. Honek espektro-dentsitate angeluarreko minimo bat deskribatuko digu. Bestalde, minimo hau baino lehenago sartu ziren moduren batek, oszilazio osoa jasateko denbora izango zuenez birkonbinaketarako, bigarren maximo bat agertuko da moduren batentzat.

Interpretazio honek anisotropien atzean dagoen eboluzio prozesuaren azalpen fisiko sinplea ematen badu ere, zentzuzko azalpena izateko, funtsezko baldintza bat gaineratu pasatu dugu. Moduen eboluzioko etapak desberdintzeko, horizontean fase berdinarekin sartu behar zirela onartu behar dugu. Honela izango ez balitz, birkonbinaketara iritsiko ziren eboluzioko etapa zorizkoa izango zen, eta gure irudiaren orde, espektro-dentsitate angeluar *lau* bat izango genuke, hots, *zarata zuria* [8]. Fenomeno hau azalduko duen mekanismo fisiko sinesgarriena inflazioa izango da, naturalki azaltzen duelako faseen arteko koherentzia, eta unibertso primitiboaren eredu orokorra osatzeko hautagai onena delako.

## 5 Ondorioak

Eredu kosmologiko estandarraren laburpen baten ondoren eta honen mugak zeintzuk diren zehaztuta, eredu orokorrago bat osatuko duen inflazio hipotesia aztertu dugu. Inflazio garaia adierazteko onartu ditugun hipotesiak  $\ddot{a} > 0$  eta  $H \approx konst.$  direla ikusi dugu. Hauek honela definituta, unibertsoaren hedapen exponentzial batean sartuta, horizontearen arazoa ebazteko  $N > 60$  *e-fold*eko inflazio minimoa beharko dugula ikusi dugu.

Bestalde, Erlatibitate Orokorrak ematen digun ikuspuntutik, inflazio mekanismoa emateko hutseko energia-dentsitate bat definitu daiteke, eremu eskalar baten moduan. FRW metrika erabiliz, hondoko unibertsoaren inflazioan eremuak bete behar zuen eboluzio-ekuazioa kalkulatu dugu;

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V' = 0. \quad (145)$$

Gero, potentzialaren  $\{\epsilon_v, \eta_v\}$  *slow-roll* parametroak definituta, inflazio eredu desberdinak eraikitzeke baldintza definitu ditugu. Lan zabalago batean, zein

potenzial diren posible aztertzea geldituko litzateke.

Honen ondoren, hondoko inflatoia perturbatu egin dugu, anisotropia eta inhomogeneotasunak azaltzeko gai izateko. Perturbazio fisikoak gauge aldaezinak izan behar dutenez, gauge aukeraketa desberdin batzuk aztertu ditugu. Hautetik errazena zena, *gauge espazialki laua* aukeratu dugu perturbazioen eboluzio-ekuazioa lortzeko (77). Perturbazio eremu kuantizatuta, huts fisikoari dagokion modu-funtzioa topatu dugu,

$$f_k(\tau) = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \left( 1 - \frac{i}{k\tau} \right), \quad (146)$$

eta honekin hasierako perturbazioen espektro-potentzia kalkulatzeko gai izan gara. Gehiago sakontzeko, eremu eskalar anitzeko inflazio ereduak aztertzea geratuko zen. Hala ere, **Planck** sateliteak erakutsi dituen behaketen arabera, hasierako espektro-dentsitateak ez ditu ez-Gaussiartasunak erakusten, eta honek eremu eskalar bakarraren ereduaren aldeko argumentuak ematen ditu [14].

Azkenik, zeharkako frogen bitartez bada ere, inflazioan sinesteko arrazoi desberdinak daudela ikusi dugu. Hasierako espektro-dentsitatea eta CMBkoa, perturbazio moduen eboluzioaren interpretazio kualitatibo batekin erlazionatu dugu. Lana gehiago sakontzeko, transferentzia-funtzioa kalkulatu zuen kode bat diseinatzea geratuko zen. Hala ere, erabilera libreko **CMBfast** eta **CAMB** kodeen bitartez, CMBko anisotropien espektro-dentsitate angeluarra zehaztasun handiz iragarri dezakegu, inflazioak perturbazio moduak koherenteke antolatzen dituen mekanismoa dela onartzen badugu. Aipatu ez ditugun beste egiaztatze esperimentalen artean, inflazioak iragartzen duen argiaren polarizazioaren espektro-dentsitatea banaketa [8], eta oraindik behatu ez diren uhin-grabitatorio primitiboen modu desberdinen existentzia, izango genuke.

Honekin guztiarekin, ikerkuntza adar zabal bat irekita dagoela ikusi dugu, non teoria eta teknika esperimentalek gehiago sakontzeko aukera dagoen. Teoria egiaztatuko duen behin betiko frogak eduki gabe ere, aurkitu diren ebidentzia desberdinek inflazioaren teoria babesteko argumentu sendoez probesten gaituzte. Honela, unibertsoaren eboluzio osoa emango duen erabateko eredu kosmologiko batera iristeko hurbilago egongo gara.

## Erreferentziak

- [1] JUAN M. AGUIRREGABIRIA *Graibazioa eta Kosmologia*
- [2] DANIEL BAUMANN *The physics of Inflation: a course for graduate students in particle physics*, 2011.
- [3] DANIEL BAUMANN, *TASI lectures of inflation*, 2012.

- [4] DANIEL BAUMANN, *Quantum Field Theory in de Sitter Space*,  
School of Natural Sciences, Institute for Advanced Study, Princeton.
- [5] DANIEL BAUMANN, *Cosmology; Part III Mathematical Tripos*,
- [6] ROBERT H. BRANDENBERGER eta JEROME MARTIN, *On Signatures of  
Short Distance Physics in the Cosmic Microwave Background*, 2002.
- [7] SCOTT DODELSON, *Modern Cosmology*, 2003
- [8] SCOTT DODELSON, *Coherent Phase Argument for Inflation*, 2003
- [9] WAYNE HU eta SCOTT DODELSON *Cosmic Microwave Background Anisotropies*
- [10] PATRICK PETER *Cosmological perturbation theory*, 2013
- [11] WILLIAM H. KINNEY *TASI lectures of inflation*, 2009.
- [12] DAVID LANGLOIS, *Lectures on inflation and cosmological perturbations*,  
2010
- [13] ANDREW LIDDLE, *An introduction to Modern Cosmology*, second ed. 2003
- [14] ANDREI LINDE, *Inflationary Cosmology after Planck 2013*, 2014
- [15] V.F. MUKHANOV eta S. WINITZKI *Introduction to Quantum Fields in  
Classical Backgrounds*, 2004.
- [16] STEVEN WEINBERG, *Adiabatic Modes in Cosmology*, 2003
- [17] STEVEN WEINBERG, *Cosmology*, 2008.
- [18] CHARLES H. LINEWEAVER *Inflationary solutions to the flatness and horizon problem*,  
<http://ned.ipac.caltech.edu/level5/March03/Lineweaver/Lineweaver4.html>