eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

ZTF-FCT
Zientzia eta Teknologia Fakultatea
Facultad de Ciencia y Tecnología

Programazio estokastikoa eta energia elektrikoa

Gradu Amaierako Lana
Matematikako Gradua

Ibon Martin Ranero

Larraitz Aranburu
Aitziber Unzueta
Irakasleek zuzendutako lana

Leioa, 2017ko otsailaren 27a

Aurkibidea

Sarrera

Historian zehar Matematikari eman zaizkion erabilpenen artean, lan honetan zehar, garrantzi berezia eman zaio zientzia honek erabakiak hartzeko duen gaitasunari. Adar ezberdinak ezagutzen dira horretarako. Aukeratutakoa, *programazio matematikoaren* barnean dagoen *optimizazio estokastikoa* izan da. Beale [5] eta Dantzig-ek [4] 1955.urtean oinarriak garatu zituztenetik, etengabe hazten joan den adarra izan da eta [1] [2] eta [3] lanetan ikus daitekeen bezala, jada gizarteko arlo ezberdinetara hedatu da.

Programazio Matematikoa aplikatzen den esparruetako bat, *energiaren kudeaketa* da. [6],[7] artikuluetan gertatzen den era berean, optimizazio estokastikoak, era egokian jaso ditzake, *merkatu energetikoak* ordutik ordura jasaten dituen aldaketak. Zehazki, *merkatu elektrikoaren* prezio eta eskariaren aldakortasunak bihurtzen ditu aproposak problema mota hauek, aipatutako matematikaren adarretik lantzeko.

Egun, energia elektrikoa, edonoren esku dagoen ezinbesteko energia-iturri bilakatu da. Horregatik, honi dagokion eskaria, prezioarekin batera, behin eta berriro aldatuz doa. Ezaugarri honi aurre egiteko asmoarekin, [12],[14] artikuluetan aipatzen den moduan, energia elektrikoa modu ezberdinetan baterietan pilatzea mahaigaineratu da urteetan zehar. Batetik, irabaziak handitzeko (eta bide batez kontsumitzaileen kostuak txikitzeko) aukera bat izan daitekeelako, eta bestetik edozein ezbehar gertatzekotan, ahal den neurrian, eskariak betetzen jarraitu ahal izateko. Hori dela eta, hainbat dira adituak egiten ari diren ahaleginak, gero eta era eraginkorrago batean berrerabiltzeko jada sortua den energia elektrikoa, [13] artikulua adibide modura har daiteke.

Bestalde, hain ezegonkorra den finantza testuinguru batean, komenigarria da aldez aurretik aztertzea ekintza bakoitzak gerora ekar ditzakeen ondorioak. Finantza-arrisku neurriak, aipatutako ondorioak kontuan hartzeko ordezkari gisa erabili ohi dira. Nabarmentzekoak dira 90ko hamarkadan defintu ziren, *VaR* eta *CVaR* arrisku neurriak, [8],[9],[10] eta [11] lanetan bilduak, apurka-apurka, optimizazio problema estokastikoetan indarra irabazten joan direnak.

Lan honen helburu nagusia, programazio estokastikoaren gaineko teoria garatuta, finantza-merkatuek dakarten ziurgabetasunen aurrean, erabakiak hartzeko bide bat erakustea da, aukeratutako merkatua, merkatu elektrikoa izanik. Aldi berean, energia elektrikoa pilatzeak eta berrerabiltzeak ekar ditzakeen onuren berri emango da, esan bezala, nahiko gai gaurkotua baita. Horrez gain, bi orduko periodoan merkatu elektrikoak eduki dezakeen jarreraren aurrean, elektrizitatea kudeatzeko eredu matematikoa plazaratuko da, finantza-arriskua aintzat hartuta.

Sarreraz gain, lan honek lau kapitulu, ondorioak eta bibliografia ditu. Lehen kapituluan, programazio matematikotik hasita, optimizazio estokastikoaren helburuak, erabilpenak, notazioak, ezaugarriak, eta oinarrizko azalpenak emango dira, gerora, hurrengo kapituluetan zehar erabilgarriak izango direnak. Bigarren kapitulua finantza-arriskuari dagokio, bertan *VaR* eta *CVaR*-en esangura, bertute eta eragozpenak aipatzeaz gainera, optimizazio ereduetan ematen zaien erabilera azalduko da. Hirugarren Kapitulua, optimizatu beharreko ereduaren eraketan datza. Ereduko aldagai, parametro eta murrizketa guztiak finkatuko dira bertan. Bukatzeko, laugarren kapituluan, zenbaki errealekin jorratuko da problema, ondoren ondorioak ateratzeko.

1. kapitulua

Programazio estokastikoaren oinarri teorikoak

Eguneroko bizitzan hartutako erabaki bakoitzak guztiz baldintzatzen du geroan izango dugun egoera. Beraz, ohikoa da, batez ere enpresa, finantza, industria... eta antzeko testuinguruetan, oro har, negozio munduan, erabaki bakoitzak berarekin dakarrena aztertzea. Programazio Matematikoa, matematika eta konputazioa elkartzen diren esparruetako bat da eta helburutzat, aldagai multzo baten balioak finkatuz, funtzio ezagun bat optimizatzea du. Hortaz, tresna egokia izan daiteke erabaki multzo batek ondorioztatu dezakeena ebaluatzeko. Sarritan, optimizazioa, batik bat, aipaturiko negozio eta enpresa arloetan, erabakiak hartzeko era eraginkorrena suertatzen da.

Optimizatzerako garaian, ahalik eta era errealistenean egitea komeni da. Horretarako, egoera jakin baten itzulpen matematikoa egiterakoan sortuko den eredua, berezko zailtasun, muga, murriztapen eta berezitasunekin islatu beharko da.

Eredua eraikitzeko unean, eta hura ebaztean, erabili diren teknika, baldintza eta berezko bereizgarriak kontuan harturik, mota ezberdineko optimizazio-problema baten aurrean egongo gara.

1.1 Problema lineal determinista

Problema lineal determinista, optimizazio-problema mota bat da, bertan, maximizatu edo minimizatu beharreko funtzioa eta murrizketak adierazten dituen ekuazio multzoa, linealak izan behar dira. Horrez gain, parametro guztiak finkoak eta ezagunak direla onartzen da problema osoan zehar. Era honetako itxura edukiko du orduan ereduak:

$$\begin{aligned} Z &= \min\ c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \\ \text{non, } & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ & \vdots \\ & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n \leq b_n \\ & x_1, x_2, ..., x_n \geq 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Notazio matriziala erabiliz gero, (1.1) sistema era honetan adieraz daiteke:

$$\begin{aligned} Z &= \min\ cx \\ \text{non, } & Ax \leq b \\ & x \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{1.2}$$

x, n dimentsioko aldagaien zutabe-bektorea izango da, c, aldagai bakoitzak helburu funtzioan egindako ekarpena adierazten duen n elementuko errenkada-bektorea, A mxn dimentsioko matrizea da, murrizketen koefizieteak gordeko dituena, eta azkenik b, murrizketen ekuazioen gai askeak adieraziko dituen m elementuko zutabe-bektorea. Esan bezala, c,A, eta b ezagunak eta finkoak dira ebazpen prozesu osoan zehar.

Definizioa 1.1.1. Ezarritako murrizketak betetzen dituen x zutabe-bektore guztien multzoari, *soluzio ebazgarrien multzoa* esango zaio eta modu honetan adieraziko da: $\{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$

Definizioa 1.1.2. Soluzio ebazgarrien multzoko edozein x-rentzat $cx \geq cx^*$ betetzen duen x^* aldagaien zutabe-bektoreari, *soluzio optimoa* deritzo.

Oharra: Definizioan helburu funtzioa minimizatzea onartu da. Helburu funtzioa maximizatu nahi balitz, $cx \leq cx^*$ betetzen duen x^* izango litzateke soluzio optimoa.

Bestalde, aldagaien definizio eremu ezberdinen arabera hainbat problema determinista lineal sailka daitezke:

-**Problema lineal orokorrak**: Erabiltzen diren aldagai guztiek balio errealak dituzte, *PL* siglekin adieraziko dira.

-**Problema lineal osoak**: Erabiltzen diren aldagai guztiek balio osoak ($\mathbb{Z}$) soilik izan ditzakete, *PO* moduan adieraziko dira. Bada *Problema lineal osoen* kasu berezi bat, **0-1 problema lineal osoak**, bertan aldagai guztiek bi balio posible bakarrik har ditzakete, 0 ala 1.

-**Problema lineal mistoak**: Problema mota hauetan, aldagai jakin batzuk errealak, eta beste batzuk, osoak dira. Era berean aldagai batzuk errealak, eta besteak, 0-1 motakoak direnean, **0-1 problema lineal mistoa** izena erabiliko da. Laburtzeko *PM* hizkiak erabiliko dira.

1.2 Problema lineal estokastikoa

Egoera jakin batzuk modelizatzerakoan maiz gerta daiteke A,c eta b osatzeko erabili diren parametroetako batzuk aldakorrak izatea, hau da, ez jakitea ziurtasun osoz matrize eta bektore konkretu horiek erabilita, eredua ondo deskribatuko den.

Ohiko adibideak dira, nekazaritza, garraio, produkzio eta antzeko arloetan gertatzen direnak. Esparru horietan, opmitizazio problema bat aurkezten denean, kontuan eduki beharreko faktoreak dira, esate baterako, eguraldia, erregaiaren prezioa, edota eskaria, guztiz baldintzatuko baitituzte aldagaien balioak. Argi dago parametro horien iragarpena ez dela inoiz guztiz zehatza izango. Hala eta guztiz ere, kontrolagarria izan daiteke euren gauzatzea, aipatutako faktoreen probabilitatearen inguruko informazioa eskura badago.

Hori dela eta, lan guztian zehar, parametro horiek zorizko aldagai moduan adieraz daitezkeela onartuko da eta euren porbabilitate-banaketak, dentsitate funtzioak edota beste barik, probabilitate-neurriak ezagunak direla.

Programazio Lineal Determinista, nahiko labur eta benetako egoeratik urrun geratzen da faktoreak aldakorrak direnean. Horrexegatik, errealitatean sarri agertzen diren oztopo hauei guztiei aurre egiteko, *programazio estokastikoa* erabiltzen da.

Problema lineal estokastikoetan zorizko aldagaien gauzatzeak, problemak dirauen bitartean gertatuko dira, ezarritako denbora-ordena mantenduz. Hots, aldakorrak diren parametroen balio zehatza jakingo da, denbora aurrera doan heinean.

1 Eszenario bidezko adierazpena

Parametroen ziurgabetasuna era egokian jasotzen duen tekniketako bat *eszenario bidezko adierazpena* da. Parametro estokastikoa ordezkatuko duen balio multzo finitu bat aukeratzean datza. Hau da, balio posibleen multzoaren diskretizazio bat burutzen da. Jakina, definitutako zorizko aldagaia ordeztuko duen multzo zehatz bat aukeratzeak eragin zuzena izango du problemaren ebazpenean, baina, ez da lan honen helburua haren aukeraketa ezberdinek dakartzaten ondorioak aztertzea.

Definizioa 1.2.1. Izan bedi $\mathcal{T}$=$\{1, 2, ...T\}$ problema aurkeztu nahi den ikuspegiaren arabera erabiltzen diren denbora-periodoak. Orduan, $\mathcal{T}$ ezagun bateko **etapa** bat, parametro aldakorren gauzatzea gertatzen den denbora-periodo multzoa da.

Baldin $\mathcal{S}$ ={1, 2, ...S} bada problema lineal estokastikoko etapa multzoa, orduan, $S \leq T$ izango da.

Definizioa 1.2.2. $\mathcal{T}$ denbora ikuspegian eta $\mathcal{S}$ etapetan zehar, parametro determinista eta estokastikoen gauzatzeek sortutako egoera bakoitzari, **eszenario** deritzo.

Jarraian, *eszenario bidezko adierazpena* garatzeko beharrezkoa den probabilitate-teoriako notazio eta oinarrizko kontzeptuak aurkeztuko dira:

- Esan bezala, ziurgabetasuna zorizko aldagai diskretuen bidez adieraziko da, $\boldsymbol{\zeta}$. Eta hauen gauzatzea, ω bitartez idatziko da.
- Zorizko aldagaiek har ditzaketen balio posible guztiak Ω-n egongo dira ordezkatuta.
- *Gertaerak*, Ω-ren azpimultzoak izango dira eta oinarrizko ω *gertaera* bakoitzak *eszenario* bat zehaztuko du.
- Eszenario bakoitzak egoera bat zehaztuko du, egoera hori c, A eta b matrize eta bektoreetan islatuko da, horregaitik $\boldsymbol{\zeta}$ zorizko aldagaiaren gauzatzeak ζ^ω=(c^ω, A^ω, b^ω) moduan adieraziko dira.
- Eszenario ezberdinen kopuru finitu bat onartuko da, $P(\boldsymbol{\zeta}=\zeta^\omega)=w^\omega$, ζ^ω gertatzeko probabilitatea eta $\sum_{\omega\in\Omega} w^\omega = 1$ izanik.
- $E[\boldsymbol{\zeta}]=\sum_{\omega\in\Omega} w^\omega \zeta^\omega$, zorizko aldagai diskretuaren *itxarondako balioa* da.
- $Var[\boldsymbol{\zeta}]= E[\boldsymbol{\zeta}-E[\boldsymbol{\zeta}]]^2$ ζ zorizko aldagai diskretuaren *bariantza* da.

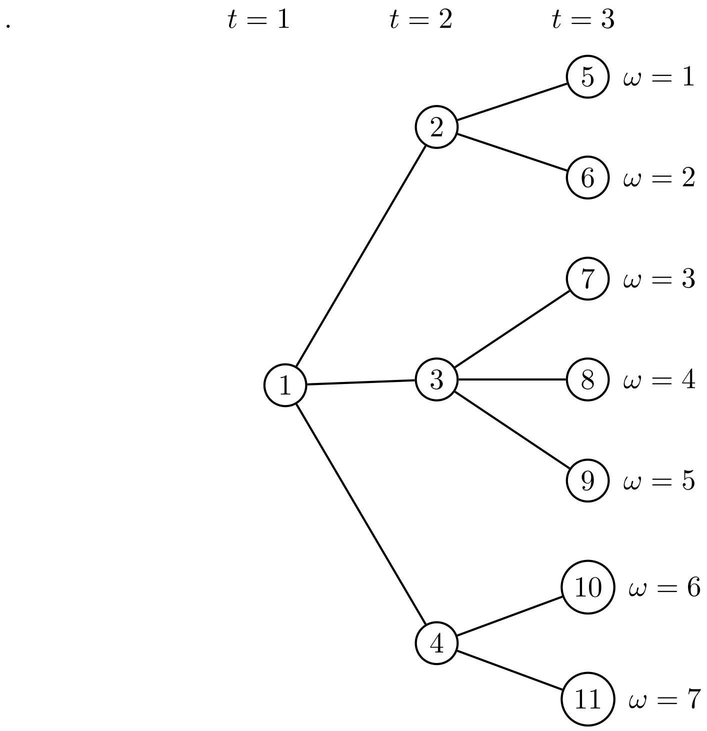
Aurrerantzean notazioa erraztearren eta datozen kontzeptuak era erosoago batean azaltzeko helburuarekin, ω erabiliko da ζ^ω erabili beharrean eta Ω eszenario posible guztien multzoa dela kontsideratuko da.

2 Eszenarioen aurkezpena zuhaitzen bidez

Problema lineal estokastikoetan, eszenario multzoak adierazteko eta modu teoriko batean garatzeko, grafoak erabili ohi dira, *zuhaitzak* hain zuzen. Grafo bateko edozein bi erpin lotzeko bide bakarra badago, orduan zuhaitza dela diogu. Zuhaitzen maila ezberdinek problemaren etapak adierazten dituzte. Bertan, maila bakoitzean, poblemako aldagai batzuen zenbakizko esleipena behartzen da. Hau da, zuhaitzaren maila bakoitzak erabaki-hartze bat dakar berarekin.

Maila bakoitzeko *nodoetan*, etapetan zehar dauden parametroen gauzatzeak ordezkatzen dira. Ohar bedi lehen etapan nodo bakar bat dagoela, nodo horri *erroa* deritzo. Errotik azken etapako nodo batera doan ibilbideak, Ω-ren azpimultzo bat osatuko du, hots, aipaturiko ibilbideak zorizko aldagaien gauzatze posible bat adierazten du. Har bedi eredu modura 1.2.1 adibideko zuhaitza:

Adibidea 1.2.1. $|\Omega| = 7$ eszenario, $S = 3$ etapa eta $T = 3$ periodoko problema adierazten da zuhaitz baten bitartez.



Hasiera batean, badirudi logikoena izan daitekeela eszenario bakoitzean sortzen den problema determinista ebaztea:

$$\begin{aligned} Z^\omega &= \min\ c^\omega x^\omega \\ \text{non, } A^\omega x^\omega &\leq b^\omega \\ x^\omega &\geq 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Demagun orduan, x^{ω^*} izango dela eszenario bakoitzeko soluzio optimoa adierazten duen aldagai-bektorea. Problema osoko soluzio egokienaren aukeraketa egitea, ez litzateke lan erraza izango. Nahiz eta egindako hautaketan, eszenario konkretu bateko $A^\omega x^{\omega^*} \leq b^\omega$ bete, suerta daitekeelako beste eszenario batean murrizketak ez betetzea. Eta hasieratik ezarritako baldintzaren bat ez betetzea arazo nahiko larritzat jo daiteke. Esate baterako, aurrerago jorratuko den energia elektrikoaren adibidean, azaldu den bide hau hartuz, baliteke aukeratutako soluzioarekin, energia elektrikoaren eskaria ezin betetzea.

Hori dela eta, aipatutako metodo hau baztertuko da eta, beste metodo ezberdin bat aplikatu beharko da soluzioa gureganatzeko. Baina, kasu honetan, soluzioa eszenario ezberdinetako murrizketa guztien menpean ebazgarria izan beharko da. Teknika honekin, zorizko aldagaien edozein gauzatzeren aurrean, hartutako erabakia balizkoa izatea ziurtatuko da.

3 Eredu Determinista Baliokidea (EDB)

Esan bezala, topatu beharreko soluzioa, ez da eszenario bakar baten menpe egon behar, baizik eta gertaera posible guztietarako soluzio egoki bat bilatzen da, hau da, ziurgabetasunaren aurrean eszenario posible guztien ikuspegi global bat erabiltzen da problema ebazteko. Estrategia hau darabilten optimizazio teknikei *optimizazio sendoa* deritze.

Era berean, helburu funtzioan ere eszenario guztiak begietsi beharko dira. Horretarako teknika ezberdinak ezagutzen dira eta testuinguru edo problemaren helburuaren arabera alda daitezke. Sinpleena, helburu funtzioaren itxarondako balioa optimizatea da, hau da, helburu funtzioaren esperantza matematikoa maximizatu edo minimizatzen dituen aldagaiak aukeratzea. Hala ere, 3. Kapituluan zehar beste helburu funtzio bat proposatuko da. Modu honetako itxura izango luke beraz, itxarondako balioa optimizatzen duen *Eredu Determinasta Baliokideak*:

$$\begin{aligned} Z = \min \sum_{\omega \in \Omega} w^{\omega} c^{\omega} x^{\omega} \\ \text{non, } A^{\omega} x^{\omega} \leq b^{\omega},\ \forall \omega \in \Omega \\ 0 \leq x^{\omega},\ \forall \omega \in \Omega \end{aligned} \tag{1.4}$$

Eredu Determinista Baliokidea osotzeko, etapa ezberdinetako erabakien arteko lotura finkatuko da.

4 Aurrerakortasun ezaren printzipioa

Baldin $\mathcal{S}$ etapa multzotik t etapa aukeratzen bada, beharrezkoa da etapa horren gaineko informazioa ezagutzea, hura erabiliko baita etapa bakoitzeko soluzio optimoa topatzeko. Beraz, denboraren ordena logikoari jarraituz, modu honetan labur dezakegu *EDB* batean etapaka hartzen den erabaki optimoa:

$$\zeta_1 \rightarrow x_1 \rightarrow \zeta_2^w \rightarrow x_2^w ... \rightarrow \zeta_t^w \rightarrow x_t^w ... \zeta_s^w \rightarrow x_s^w$$

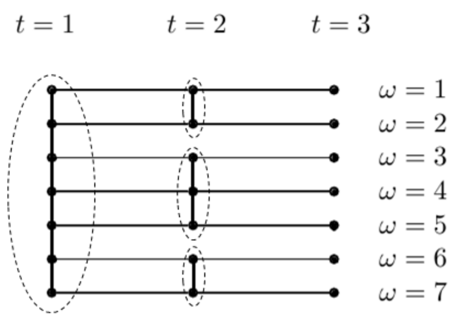
Era berean, zentzuzkoa dirudi t etapan hartutako x_t^w erabakia, aurreko etapetan gertatutakoarekin lotura izatea, hau da, x_t^w finkatzeko, aurreko etapetako gauzatzeak, (ζ_τ^w, $\tau = 1, 2, ..., t$ izanik) kontuan hartzea. Ostera, t etapako x_t^w hautatzeko ez da ondorengo etapetako gauzatzeen daturik erabiliko, hots, $\tau{>}t$ izanik, ez da ζ_τ^w erabiliko x_t^w aldagaiaren balioa finkatzeko. Aurreko baldintza honi, *aurrerakortasun ezaren printzipioa* esaten zaio. Baldintza hau, uneko erabakiak etapetan zehar atzeratu ez daitezen erabiltzen da. Jarraian printzipioak zehazki diona enuntziatuko da:

-***Aurrerakortasun ezaren printzipioa*** (***AE***): Baldin eta bi eszenarioren, ω eta ω', gaineko informazioa berdina bada lehen etapatik t etapara, orduan, t etapa horretara arte hartu beharreko erabaki guztiak berdinak izan beharko dira. Beste era batean idatzita:

$$\begin{aligned} \text{Baldin eta } \zeta_\tau^\omega = \zeta_\tau^{\omega'} \text{ betetzen bada , } \forall \tau = 1, ..., t \text{ orduan,} \\ x_t^\omega = x_t^{\omega'} \text{beteko da, } \forall t \in \mathcal{S} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Ondorengo adibidea erabiliko da, *aurrerakortasun ezaren printzipioa* kasu praktiko batean zer modutan aplika daitekeen erakusteko.

Adibidea 1.2.2. Demagun hurrengo grafoaren bitartez, ebatzi nahi den, $|\Omega| = 7$ eszenario, $S = 3$ etapa eta $T = 3$ periodoko problema modelizatzen dela. (Praktikan 1.2.1. Adibideko kasu bera da)



Lehen nodoak, lehenengo erabakia hartu behar den unea adierazten du. Etapa honetarako definitu diren zorizko aldagaien balioak ezagunak dira, ζ_1. Beraz, irudiari behatuz, eszenario ezberdinetarako lehen etapako informazioa bera da kasu guztietan eta modu honetan adieraz daiteke, ζ_1: $\zeta_1^1 = \zeta_1^2 = \zeta_1^3 = \zeta_1^4 = \zeta_1^5 = \zeta_1^6 = \zeta_1^7$. *Aurrerakortasun ezaren printzipioa* apiklatzen bada, $x_1^1 = x_1^2 = x_1^3 = x_1^4 = x_1^5 = x_1^6 = x_1^7$ ondorioztatuko da.

Bigarren etapa hasi orduko, ezaguna da etapa horretako parametro ziurgabeen gaineko informazioa. Berriz ere, *aurrerakortasun ezaren printzipioa* erabilita, bigarren etapako hiru bertsio ezberdin daudela onar daiteke. Hau da, $\zeta_2^1 = \zeta_2^2$, $\zeta_2^3 = \zeta_2^4 = \zeta_2^5$, $\zeta_2^6 = \zeta_2^7$ eta lehen etapako berdintzak izanik, $x_2^1 = x_2^2$, $x_2^3 = x_2^4 = x_2^5$ eta $x_2^6 = x_2^7$ dugu.

Jarraian, *aurrerakortasun ezaren printzipioaren* baldintzak era formalean ezartzeko, definizio, notazio eta ideia berriak proposatuko dira:

Definizioa 1.2.3. Baldin eta $t \in \mathcal{S}$ etapa jakin baterarte parametro ezezagunen gauzatze berdina badu eszenario multzo batek, **eszenario talde** bat osatzen dutela esango da.

Notazio erabilgarria:

- $t(g)$, g eszenario taldea aurkitzen den periodoa.
- $\mathcal{G}$, eszenario taldeen multzoa.
- $\mathcal{G}_t$, t periodoko eszenario taldeen azpimultzoa. *Aurrerakortasun ezaren printzioan* oinarrituz, ω eta ω'-ren gaineko parametroen gauzatzeak berdinak badira t periodora arte, orduan bi eszenarioak g eszenario talde berdinaren parte dira, $g \in \mathcal{G}_t$ izanik.
- Ω_g, g taldea zehazten duten eszenarioen azpimultzoa. Ohartu $\Omega_{g'} \subseteq \Omega_g$ bada, $t(g') \leq t(g)$.

Orain beste modu honetan adieraz daiteke *aurrerakortasun ezaren printzipioa*:

$$\mathrm{AE} = \{x^\omega : x_t^\omega = x_t^{\omega'}, \forall \omega, \omega' \in \Omega_g, g \in \mathcal{G}_t, t \in \mathcal{T}\} \tag{1.6}$$

Adibidea 1.2.3. Ikus bedi notazio honen erabilpena 1.2.2 Adibideko irudiaren bitartez. $t = 1$ etapari dagokionez; $\mathcal{G}_1$=$\{1\}$ eta Ω_1=$\{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$, $t = 2$ denean; $\mathcal{G}_2$=$\{2, 3, 4\}$, Ω_2=$\{5, 6\}$, Ω_3=$\{7, 8, 9\}$ eta Ω_4=$\{10, 11\}$ eta azkenik $t = 3$ etapan; $\mathcal{G}_3$=$\{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$, Ω_5=$\{5\}$, Ω_6=$\{6\}$, Ω_7=$\{7\}$, Ω_8=$\{8\}$, Ω_9=$\{9\}$, Ω_{10}=$\{10\}$ eta Ω_{11}=$\{11\}$.

Behin *aurrerakortasun ezaren printzipioaren* oinarrizko ideiak eta notazioa enuntziatu direla, *EDB* borobildu daiteke, problemako aldagaiei *AE* printzipioa betetzera behartuz:

$$\begin{aligned} Z = \min \sum_{\omega \in \Omega} w^\omega c^\omega x^\omega \\ \text{non, } A^\omega x^\omega \leq b^\omega, \ \forall \omega \in \Omega \\ 0 \leq x^\omega \in \mathrm{AE}, \ \forall \omega \in \Omega \end{aligned} \tag{1.7}$$

Eredu Deterministaren bi eredu baliokide nagusi kontsidera daitezke, *formulazio trinkoa* edo *formulazio hedatua* darabiltzatena. Bien arteko ezberdintasun nagusia, *aurrerakortasun ezaren baldintza* zuzenean edo inplizituki adieraztean dago.

5 Formulazio trinkoa

Eredua, formulazio trinkoaren bitartez adierazteko, aurretik definitutako eszenario taldearen kontzeptua erabiltzen da. Horrez gain, lagungarriak gerta daitezkeen hurrengo notazio eta definizioak erabiltzen dira.

- x^g, $g \in \mathcal{G}$ eszenario taldea ordezkatuko duen aldagai bektorea, AE baldintzaren arabera.
- w_g, $g \in \mathcal{G}$ eszenario taldeari dagokion pisua da, non $w_g = \sum_{\omega \in \Omega_g} w^\omega$ eta $\forall t \in T$, $\sum_{g \in \mathcal{G}_t} w_g = 1$ diren.
- $\pi(g)$, nodo aurrekariari dagokion eszenario taldea, 1.2.2 Adibidea berriro ere gogora ekarriz. $\pi(5) = \pi(6) = 2$, $\pi(7) = \pi(8) = \pi(9) = 3$, $\pi(10) = \pi(11) = 4$ eta $\pi(2) = \pi(3) = \pi(4) = 1$.

Formulazio Trinkoak daukan abantaila nagusia, AE baldintza erabilita, eszenario talde bakoitza aldagai bakar batekin ordezten dela da. Modu honetan, batetik ez dira AE murriztapenak behar, eta bestekik, aldagaiei dagokienez, tamaina txikitu egiten da. Honako hau da formulazio trinkoko eredua:

$$\begin{aligned} Z = \min \sum_{g \in \mathcal{G}} w^\omega c^\omega x^\omega \\ \text{non, } A'_g x^{\pi(g)} + A_g x^g \leq b^\omega, \forall g \in \mathcal{G} \\ x^\omega \geq 0 \in AE, \forall g \in \mathcal{G} \end{aligned} \tag{1.8}$$

1.1. Taula. Formulazio trinkoa erabilita 1.2.1 Adibidea.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	
A_1											b_1
A'_2	A_2										b_2
A'_3		A_3									b_3
A'_4			A_4								b_4
	A'_5			A_5							b_5
	A'_6				A_6						b_6
		A'_7				A_7					b_7
		A'_8					A_8				b_8
		A'_9						A_9			b_9
			A'_{10}						A_{10}		b_{10}
			A'_{11}							A_{11}	b_{11}

$|\mathcal{G}|$ aldagai-bektore eta $|\mathcal{G}|$ murrizketa dituen eredua da. Ulertzeko erraza gerta daiteke formulazio honen bitartez jasotzea eredua, logikoa baitirudi. 1.1 Taula ikusita, murrizketa matrizeak itxura behe triangeluarra duela antzeman daiteke.

6 Formulazio hedatua

Kasu honetan ere, murriztapen matrizeak itxura behe triangeluarra edukiko du,1.2 Taula, baina aurrekoa baino zabalagoa izango da. Formulazio honen bitartez, era zuzenean eskatzen baitzaie aldagaiei AE printzioa betetzea.

$$
\begin{aligned}
Z = \min \sum_{\omega \in \Omega} w^{\omega} c^{\omega} x^{\omega} \\
\text{non, } A^{\omega} x^{\omega} \leq b^{\omega}, \ \forall \omega \in \Omega \\
x^{\omega} - x^{\omega'} = 0, \ \forall \omega, \omega' \in \Omega_g : \omega \neq \omega', \ g \in \mathcal{G} \\
x^{\omega} \geq 0, \ \forall \omega \in \Omega
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

1.2. Taula. Formulazio trinkoa erabilita 1.2.2 Adibidea.

x_1^1	x_2^1	x_3^1	x_1^2	x_2^2	x_3^2	x_1^3	x_2^3	x_3^3	$\dots$	x_1^7	x_2^7	x_3^7	
A_1^1													b_1^1
$A_2'^1$	A_2^1												b_2^1
	$A_3'^1$	A_3^1											b_3^1
			A_1^2										b_1^2
			$A_2'^2$	A_2^2									b_2^2
				$A_3'^2$	A_3^2								b_3^2
						A_1^3							b_1^3
						$A_2'^3$	A_2^3						b_2^3
							$A_3'^3$	A_3^3					b_3^3
													$\vdots$
										A_1^7			b_1^7
										$A_2'^7$	A_2^7		b_2^7
											$A_3'^3$	A_3^7	b_3^7
I			$-I$										0
						I				$-I$			0
I										$-I$			0
	I			$-I$									0
													$\vdots$
													0

Eredu honetan x^{ω}=($x_t^{\omega} : t \in \mathcal{T}$) izango da. $T|\Omega|$ aldagai-bektore erabiliko dira eta murrizketei dagokienez, $T|\Omega| + |AE|$ egongo dira. Formulazio trinkoa erabiliz, dimentsio txikiagoko matrizeekin ebatziko da problema, hala ere, matrizeak astunagoak izango dira formulazio trinkoa erabiliz.

Beste barik, bi formulazioen definizioei eta notazioari begiratuta, baliteke iruditzea formulazio trinkoarekin era sinpleago batean modelizatu eta ebatziko dela problema. Hala ere, honen dimentsioak handitzen doazen heinean, konputagailuak denbora eta operaketa kopuru aldetik arazoak izan ditzake. Formulazio hedatuak, aldiz, era eraginkor batean erantzuten du, soluzio optimoa emateko dauden deskonposizio algortimo ezberdinen aurrean.

1.3 Eredu estokastikoak eta propietateak

1 Bi etapako ereduak

Programazio estokastikoan dauden eredurik sinpleenak dira. Lehen etapan, eszenario guztiekiko informazio bera duen nodo bat agertzen da. Bigarren etapan berriz, nodo bakoitzeko eszenario bat dago. Hala, esan bezala, lehen etapako erabakiak bakarrak, berdinak eta gertatzen denarekiko aldaezinak dira eta bigarren etapako parametroak gauzatu baino lehenago aukeratzen dira. Era honetan adieraz daiteke errekurtso totaleko bi etapako eredu lineal estokastikoa:

$$Z_{PL} = \min\ c_1 x_1 + E_\zeta(c_2^\omega x_2^\omega) \tag{1.10}$$

$$\text{non, } A^1 x_1 \leq b^1 \tag{1.11}$$

$$A_2^{\prime\omega} x_1 + A_2 x_2^\omega \leq b_2^\omega \tag{1.12}$$

$$0 \leq x_1, 0 \leq x_2^\omega \tag{1.13}$$

Lehen etapan hartu beharreko erabakiak x_1-en daude ordezkatuta. Era berean, $c_1 \in \mathbb{R}^{n_1,1}$ eta $b_1 \in \mathbb{R}^{1,m_1}$ bektoreak eta $A_1 \in \mathbb{R}^{m_1,n_1}$ matrizea, lehen etapako datu ezagunak izango dira.

Bestalde, Ω-n bigarren etapako gertaera guztiak daude ordezturik. Horietako ω gertaera bakoitzari, $A_2^{\prime\omega} \in \mathbb{R}^{m_2,n_2}$ matrizea eta $c_2^\omega \in \mathbb{R}^{n_2}$ eta $b_2^\omega \in \mathbb{R}^{m_2}$ bektoreak dagozkio, $A_2 \in \mathbb{R}^{m_2,n_2}$ matrize finkoaz gain. Azken hau, ω guztientzat berdina izango da.

Helburu funtzioa, lehen etapako kostu finkoen eta aldagaien arteko biderketa $c_1 x_1$ eta bigarren etapan itxarondako balioaren arteko gehiketak osatzen dute.

Helburu funtzioaren bigarren batugaian zentratuz, ω gertaera bakoitzari problema lineal bat dagokio non x_2^ω den soluzioa. Izan bitez, ω eta x_1, hurrenez hurren, gertaera bat eta lehen etapan finkaturiko aldagaiak. Orduan notazioa erraztearren defini bedi,

$$Q(x_1, \zeta^\omega) = \min_{x_2} \{c_2^\omega x_2^\omega : A_2^{\prime\omega} x_1 + A_2 x_2^\omega \leq b_2^\omega\ ,\ x_2^\omega \geq 0\} \tag{1.14}$$

Izenda dezagun orain,

$$\mathcal{Q}(x_1) = E[Q(x_1, \zeta^\omega)] \tag{1.15}$$

Honen esangura, $Q(x_1, \zeta^\omega)$-ren ζ-rekiko Esperantza Matematikoa da. Eta honela berridatz daiteke Eredu Determinista Baliokidea:

$$\begin{aligned} Z_{PL} = \min\ c_1 x_1 + \mathcal{Q}(x_1) \\ \text{non, } A^1 x_1 \leq b^1 \\ 0 \leq x_1 \end{aligned} \tag{1.16}$$

Enuntziaturiko bi etapako ereduetan, x_1 erabakiak ζ zorizko gertaeren baldintzapean hartzen dira. Bigarren etapan, ordea, ζ-ren balio zehatza ezaguna da eta horren arabera oinarrituz aukeratuko dira bigarren etapako erabakiak. x_1 erabakiak dakartzan itxarondako ondorioak $\mathcal{Q}(x_1)$ funtzioak neurtzen ditu.
Esan beharra dago, berdintsu planteatzen direla ***0-1** problema lineal estokastikoak*, *problema lineal estokastiko osoak* eta *problema lineal estokastiko mistoak*.

2 Etapa anitzeko ereduak

Eredu hauek hiru etapa edo gehiago dituzten problemak dira. Bi etapako ereduetan, bi aldagai mota ikusi ditugu, parametro estokastikoa gauzatu aurretik hartu direnak eta parametro estokastikoa gauzatu ostean hartu direnak. Etaparen definizioa aintzat hartuta, haietako bakoitzean zorizko aldagaien gauzatze berriak ezagutzen dira. Horrela, $t \in \mathcal{T}$ etapako x_t erabakia, soilik $(x_1, ..., x_{t-1}, \zeta_1, ..., \zeta_t)$ informazioan oinarrituta egongo da (AE), beti ere, ondorengo nodoen ikuspen global bat edukiz. Hau da, kontuan hartuta, parametro ziurgabeek har ditzaketen balio guztiak, edozein gertaeratan problemaren ebazgarritasuna bermatzeko. Modu honetan, era honetako eredu orokorra sortzen da:

$$Z_{PL}{=}\min\{c_1x_1{+}E_{\zeta_2|\zeta_1}[\min\ c_2^\omega x_2^\omega{+}E_{\zeta_3|\zeta_1,\zeta_2}[\min c_3^\omega x_3^\omega{+}E_{\zeta_s|\zeta_1,\zeta_2,...,\zeta_{s-1}}[\min c_s^\omega x_s^\omega]...]\} \tag{1.17}$$

$$\begin{aligned} \text{non, } A_{11}x_1 \leq b_1 \\ A_{21}^\omega x_1 + A_{22}^\omega x_2^\omega \leq b_2^\omega \\ A_{31}^\omega x_1 + A_{32}^\omega x_2^\omega + A_{33}^\omega x_3^\omega \leq b_3^\omega \\ \vdots \\ A_{s1}^\omega x_1 + A_{s2}^\omega x_2^\omega + A_{s3}^\omega x_3^\omega + ... + A_{ss}^\omega x_s^\omega \leq b_s^\omega \\ 0 \leq x_1, x_2^\omega, x_3^\omega, ..., x_s^\omega \in AE \end{aligned} \tag{1.18}$$

Orokorrean, etapa bakoitzeko murrizketetan ondoz-ondoko aldagaiak agertzea da ohikoena, beraz, aurreko *etapa anitzeko* eredu estokastikoa era hedatuan berridatz daiteke. A_t' eta A_t, x_{t-1} eta x_t aldagaien murrizketa matrizeak izanik hurrenez hurren.

$$\begin{aligned} Z_{PL} = & \min \sum_{t \in S} \sum_{\omega \in \Omega} \omega^{\omega} c_t^{\omega} x_t^{\omega} \\ \text{non, } & A_t'^{\omega} x_{t-1}^{\omega} + A_t^{\omega} x_t^{\omega} \leq b_t^{\omega} \text{ , } \forall t \in S \text{ , } \omega \in \Omega \\ & x_t^{\omega} - x_t'^{\omega} = 0 \ \forall \omega, \, \omega' \in \Omega_g : \omega \neq \omega', \, g \in \mathcal{G}_t, \, t \in S \\ & x_t^{\omega} \geq 0 \ \forall t \in S, \, \omega \in \Omega \end{aligned} \tag{1.19}$$

Bi etapako eredu estokastikoan ikusi den moduan, hemen ere, ***0-1** problema lineal estokastikoak*, *problema lineal estokastiko osoak* eta *problema lineal estokastiko mistoak* planteatzeko eredua oso antzerakoa izango da. Eredu bera era trinkoan enuntziatu nahi balitz ostera, (1.8)-ren berdina izango litzateke.

3 Alderaketa

Ohiko zalantza izaten da problemaren etapen egitura zein izango den erabakitzea, edota gure helburuen arabera etapa kopurua zehaztea. Kasuak kasu, beti dago pisuzko arrazoiren bat eredua, etapen harira, itxura zehatz batekin planteatzeko.

Orokorrean, baliabideak izanez gero eta posible bada, etekin handiagoa lortuko da bi etapako eredu estokastikoak erabilita. Hau da, demagun lau etapako problema bat planteatu nahi dela. Orduan, problemaren testuinguruak baimenduz gero, emaitza hobeak ziurta daitezke bi etapako hiru problema ebazten badira. Hobea hitzak, kasu honetan, helburu funtzioaren balio txikiago bat lortu dela (minimizatzen egonez gero) esan nahi du.

Arrazoia nahiko sinplea da. Etapa anitzeko ereduetan, bigarren etapatik aurrera finkatzen diren aldagaiak, gainontzeko etapetan ere ebazgarriak izan behar dira. Honek, bi etapako ereduan baino murrizketa kopuru handiagoa betetzea dakar, beraz, ebazgarriak diren soluzio gutxiago ditugu egoera berdinerako.

Nolanahi ere, praktikan ez da beti bideragarria problema bat bi etapako hainbat problematan deskonposatzea. Adibidez, problema modelizatzeko aukeratu diren periodoak nahiko motzak direnean, batzuetan ez dago denbora fisikorik etapaz-etapa problema berri bat planteatzeko eta hainbat etapetarako erabakita uztea komeni da. Logistika arazoak ekiditeko ere, hauta daiteke etapa anitzeko eredua erabiltzea. Esate baterako, hainbat egunetarako eskaria egin behar denean.

Bestalde, tratatu nahi den denbora ikuspegiaren araberakoa izan daiteke ereduaren etapa kopuruaren esleipena.

2. kapitulua

Finantza-arriskuaren analisia

Lehen kapituluan argudiatu den moduan, ekonomia testuinguru batean, garrantzitsua da ekintza bakoitzak dakarren zenbakizko ondorioa aztertzea. Ondorio multzo horietan ezinbesteko kontzeptua bilakatu da finantza-arriskua. Finantza-arriskuak, gertaera batek ondorio kaltegarriak izateko probabilitatea neurtzen du. Azkenaldian, nahiko sakondu izan da arriskuaren gaineko ikerketetan, batetik, gero eta zorrotzagoak direlako erakunde eta gobernuen araudiak gai honen inguruan, eta bestetik, finantza-arriskuaren kalkulu egokiak nabarmen hobetzen duelako hartu beharreko erabakien eraginkortasuna. Horregatik, gaur egun, finantza munduan aurrera eramaten diren ekintza gehienetan, arriskuaren kudeaketa, neurketa eta kontrolaren inguruko etengabeko informazioa erabiltzen da.

Arriskua kontuan hartzeko beste arrazoi bat, gure sistema eta merkatuek duten ezegonkortasuna da. Etengabeko prezio eta eskarien aldaketek finantza-arriskua handitzeko joera dute. Aipatutakoaz gain, gaurko egunez eskura dauden teknologia berriek, arriskua era azkar eta errazago batean kalkulatzeko aukera ematen dute.

Horrenbestez, finantza-arriskuaren ezagupen egokia edukitzea, guztiz erabakigarria izan daiteke inbertsioak, salerosketak edota operazio ezberdinak egiterako orduan.

Optimizazio problemetan ere, finantza-arriskua, gero eta garrantzi handiagoa bereganatuz joan da. Horrek, arriskua neurtzeko hainbat era eta ikuspuntu ezberdin garatzea ekarri du. Ezaugarri eta helburuen arabera hiru taldetan sailka daiteke: merkatu-arriskua, mailegu-arriskua eta operazio-arriskua. Azter ditzagun bada, merkatu-arriskuen barnean garrantzi handia duten bi finantza-arrisku neurri: *VaR* eta *CVaR*. (*Value-at-Risk* eta *Conditional Value-at-Risk*, ingelesetik hartzen dituzte siglak)
Neurri hauen teorizazioa bi kontzeptu ekonomikoren inguruan egin daiteke:

irabazien ala *galeren* inguruan. Beraz, hasi baino lehen, defini bedi zehazki kontzeptu bakoitzaren esangura.

Definizioa 2.0.1. Ekonomia eta finantzetan, enpresa edo erakunde bateko diru sarrera guztien eta gastu totalaren arteko diferentziari, *irabazia* edo *etekin ekonomikoa* esaten zaio.

Definizioa 2.0.2. Irabazia edo etekin ekonomikoa negatiboa denean, aldiz, *galera* hitza erabiltzen da.

90. hamarkadan zehar garatu zen ordurako berriak ziren finantza-arrisku mota hauen inguruko teoria. Optmizazioren alorrean, azpimarratzekoa da *R.Tyrer Rockefaller* eta *Stanislav Uriasev*-ek egindako ekarpenak. Oinarritzat hartu da *Journal of Risk* aldizkarian 2000. urtean eurek argitaratutako *Optimization of Conditional value-at-Risk* artikulua [5]. Esan beharra dago, bertako definizio, teorema, frogapen eta azalpenak galeraren ikuspuntik eman direla.

Lan honetan, bestalde, etekinen ikuspuntutik landuko dira aipatutako bi finantza-neurriak. Problemaren egileak aukera du, egoera bakoitzean, bata ala bestea aukeratzeko, praktikan, gauza bera aztertzen baita.

2.1 Arrisku-balioa (VaR)

Definizioz, α-*VaR*, α probabilitatearekin, irabaziaren azpitik egongo den zenbakirik handiena da.

Defini bitez jarraian hainbat kontzeptu eta notazio, ikuspuntu matematiko batetik landu ahal izateko bi neurri hauek:

Notazioa:

- $x \in \mathbb{R}^n$, erabaki-bektorea eta $y \in \mathbb{R}^m$ zorizko-bektorea izango dira. $f(x,y)$, bidez x erabakiek eta y zorizko bektoreak dakarten irabazia kalkulatzen da. Hortaz, $f(x,y)$ y-k definituriko $\mathbb{R}$-ko zorizko aldagaia izango da.
- $p(y)$, $f(x,y)$ zorizko-aldagaiaren dentsitate-funtzioa da.
- $f(x,y)$-ren banaketa-funtzioa era honetan adieraziko dugu, $\Psi(x,\xi)=P(f(x,y) \leq \xi)= \int\limits_{f(x,y)\leq\xi} p(y)dy.$

Ψ funtzioak guztiz zehaztuko du irabazia adierazten duen zorizko aldagaiaren jarrera. Salbuespen bitxiak salbu, irabaziaren dentsitate funtzioa, ξ-rekiko funtzio ez-beherakorra da. Bestalde, $\Psi(x,\xi)$ ξ-rekiko nonahi jarraia dela onartuko da azalpen eta frogapenak errazte aldera. Posible da orain, α-*VaR*-ren definizio jasoagoa ematea $VaR_\alpha(x)$-ren bitartez:

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(x) &= max\{\xi \in \mathbb{R} : P(\xi \leq f(x,y)) \geq \alpha\} \\ VaR_\alpha(x) &= max\{\xi \in \mathbb{R} : 1 - \Psi(x,\xi) \geq \alpha\} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Zenbait zentzutan α-*VaR* arrisku neurriak bertute handiak izan ditzake, Zerrenda bitez horietako batzuk:

- α-*VaR*aren minimizazioa edo maximizazioa aplikagarria da optimizazio sistema lineal eta ez-linealetan.
- Finantzetako ia edozein optimizazio problematan erabil daiteke eta posible da beste finantza-arrisku neurriekin batera agertzea.
- Operaketaren arriskuaren ikuspegi global bat ematen du eta probabilitatean oinarritutako neurria da.
- α-*VaR* adierazteko unitatea sinplea eta ulergarria da, irabazitako diru kopurua.

Orokorrean nahiko hedatuta dagoen arrisku neurria da eta enpresa eta finantza-erakundeen artean ohiko bilakatu da. Nolanahi ere, Matematikaren ikuspegitik nahiko eragozpen ditu eta praktikan arazoak eragin ditzake. Horrez gain, era teorikoan eta *neurri teoriaren* definizioekin aztertzen denean finantza-arrisku hau, antzeman daiteke ez direla, hein handi batean, alderdi garrantzitsuenak betetzen. Esate baterako, hurrengo definizioaren bitartez emango den propietatea.

Definizioa 2.1.1. Demagun $\mathbf{X}$ eta $\mathbf{Y}$ edozein bi erabaki-bektore direla. Izan bedi, bestalde $\rho(.)$ arrisku neurri bat. Baldin eta

$$\rho(\mathbf{X}+\mathbf{Y}) \leq \rho(\mathbf{X}) + \rho(\mathbf{Y}) \tag{2.2}$$

betetzen bada, orduan arrisku-neurriak *propietate batukorra* betetzen duela esaten da.

Kontradibide sinple batekin froga daiteke α-*VaR*ak ez duela propietate batukorra betetzen. Propietate honen ukazioak, operazio bateratuek arrisku gehigarri bat sortzen dutela esan nahi du, arrisku neurrien teorian nahiko kontraesankorra dena.

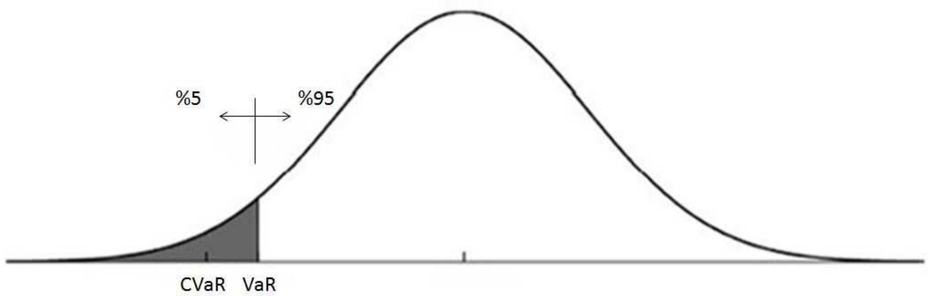
Horrez gain, eragozpen azpimarragarri gehiago ditu: *VaR* ez da funtzio *konbexua* eta hortaz, optimizatzeko astunagoa gerta daiteke. Aipatutako kontradibidea eta konbexutasunaren egiaztapena *P.Artzner*-en *Coherent Measures of Risk* artikuluan aurki daitezke [8].

Bestalde, ez du inolako informaziorik ematen muturreko gertaeren inguruan. Adibidez %95ko konfiantza maila hautatuta, ez da ezagutzen zer gertatuko den 0.05 probabilitatearekin, eta horrek galera kopuru handi bat ekiditeko bide desegokia aukeratzea eragin lezake.

2.2 Arrisku-balio baldintzatua (CVaR)

Aurreko atalean aipatutako arazo eta eragozpen matematikoak, bai teorian bai praktikan, sahiesteko hainbat saiakera egin dira. Kasu batzuetan, *VaR*aren berdefinizioak erabiltzea erabaki da. Beste batzuetan ostera, *VaR*aren arrisku neurri osagarriak planteatzen dira, kasurako *CVaR*. Arrisku-balio baldintzatuak, *VaR*aren azpitik geratzen diren balioen bataz bestekoa adierazten du. Lehenago definitutako notazioa eta $VaR_\alpha(x)$ baliatuz, honela adieraziko dugu arrisku-balio baldintzatua:

$$CVaR_\alpha(x) = (1-\alpha)^{-1} \int_{f(x,y)\leq VaR_\alpha(x)} f(x,y)p(y)dy \tag{2.3}$$



2.1. irudia. $\alpha = 0.95$ izanik.

VaR eta *CVaR* arrisku neurrien esangura grafikoa 2.1 irudian ikus daiteke. Demagun irabazien banaketa funtzioa, 2.1 irudiko kurbaren bitartez deskribatzen dela. Kolore beltz eta zuriaren arteko mugako puntua aintzat hartuta, ikus daiteke, irabaziak, muga puntu hori baino handiago izateko 0.95eko probabilitatea duela. Eta 0.05eko probabilitatea baldin eta muga puntua baino txikiagoa bada. Hori dela eta, muga puntu horri *VaR* esango zaio. Eta *VaR* baino txikiago diren balioen bataz bestekoari, *CVaR*.

Teorema 2.2.1. *Izan bedi,*

$$F_\alpha(x,\xi) = \xi - (1-\alpha)^{-1} \int\limits_{y\in\mathbb{R}^m} [\xi - f(x,y)]^+ p(y)dy \tag{2.4}$$

non

$$[t]^+ = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & bestela \end{cases}$$

orduan $F_\alpha(x,\xi)$ funtzio konbexua eta diferentziagarria da ξ-rekiko. Eta gainera, x-k, eragindako α-CVaR irabazia, era honetan adieraz daiteke:

$$CVaR_\alpha(x) = \max_{\xi\in\mathbb{R}} F_\alpha(x,\xi) \tag{2.5}$$

eta partikularki,

$$CVaR_\alpha(x) = F_\alpha(x, VaR_\alpha(x)) \tag{2.6}$$

Teorema honen frogapena *R.Tyrer Rockefaller* eta *Stanislav Uriasev*-en *Optimization of Conditional value-at-Risk* artikuluko *Appendix1* atalean aurki dezake irakurleak [5]. Esan bezala frogan zehar ere, $f(x,y)$ funtzioak, etekina beharrean, galera adieraziko du.

2.2.1 Teoremaren bitartez, arrisku-balio baldintzatuak, *VaR*-en aurrean duen abantaila nagusia agerian uzten da, diferentziagarri eta konbexua dela. Funtzio mota hauek erraztasun gehiago baitute optimizatzeko. Horrez gain, α-*CVaR* kalkula daiteke, lehenik α-*VaR*ren balioa jakin barik.

2.4 adierazpena are errazago optimizatzeko, jarraian erakutsiko den moduan hurbildu daiteke.

Baldin eta $y = y_1, y_2...y_q$ bada:

$$\tilde{F}_\alpha(x,\xi) = \xi - \frac{1}{q(1-\alpha)} \sum_{k=1}^{q} [\xi - f(x,y_k)]^+ \tag{2.7}$$

Hurbilketa honekin, konbexutasuna mantenduz, ξ-rekiko linealitatea ezarri nahi izan da, oinarrizko programazio linealaren bidez optimizatu ahal izateko.

Teorema 2.2.2. *Balikokidea da α-CVaR maximizatzea x-rekiko eta $(x,\xi) \in X \times \mathbb{R}$ bikoterekiko $F_\alpha(x,\xi)$ maximizatzea, hots:*

$$\max_{x\in X} CVaR_\alpha(x) = \max_{(x,\xi)\in X\times\mathbb{R}} F_\alpha(x,\xi) \tag{2.8}$$

2.2.1. Teorema ikusiz, susma daiteke 2.2.2. Teorema ere beteko dela. Hala eta guztiz, egiaztapen zehatza *R.Tyrer Rockefaller* eta *Stanislav Uriasev*-ren *Optimization of Conditional value-at-Risk* artikuluko *Appendix1* atalean dago [5].

Bestalde, *CVaR*ek ondo erantzuten du, irabaziak normala ez den beste banaketa funtzio bat duenean. Horrez gain, finantza-arrisku neurrien propietate batukorra (2.2) betetzen du.

Oro har, erraztasun gehiago emateen ditu arrisku-balio baldintzatuak eta badirudi erosoago lan egin daitekeela hura erabilita, hala ere, horrek ez du esan nahi, bata bestearen ordezko moduan erabili behar denik. Era egokian uztartzen badira, finantza-arriskuaz ohartzeko bikote eraginkorra osatu dezakete.

2.2.2 Teoremak, programazio estokatikoaren ateak zabaltzen ditu berriz ere, F_α, y zorizko aldagaiaren menpean egin behar baita $X \times \mathbb{R}$ maximoaren bilaketa.

2.3 Aplikazioa optimizazio problemetan

Demagun, x=$(x_1, x_2, ...x_n)$ erabaki bektorea izanik, y=$(y_1, y_2, ..., y_n)$-ren bitartez zorizkotasuna adierazten duen bektorea izendatuko dugu, x-rekiko independentea dena eta $p(y)$ dentsitate funtzioduna.
Irabaziak, orduan, ondorengo funtzioarekin adieraziko dira:

$$f(x, y) = [x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n] = x^T y \tag{2.9}$$

Orain, α-*CVaR*en balio optimoa bilatzeko, (2.7) ekuazioan proposatutako $F_\alpha(x, \beta)$-ren hurbilpenari (2.10) berdintza gehi dakioke. Bi urratsetan:

$$\tilde{F}_\alpha(x, \xi) = \xi - \frac{1}{q(1-\alpha)} \sum_{k=1}^{q} [\xi - x^T y]^+ \tag{2.10}$$

$$\begin{gathered} \tilde{F}_\alpha(x, \xi) = \xi - \frac{1}{q(1-\alpha)} \sum_{k=1}^{q} u_k \\ u_k \geq 0 \quad \text{eta} \quad x^T y - \xi + u_k \geq 0,\ k = 1, ..., q. \end{gathered} \tag{2.11}$$

Azken adierazpen honek, erosoago lan egiteko aukera ematen du garatu den programazio estokastikoaren esparruan.

3. kapitulua

Energiaren kudeaketa eta finantzak lotzen dituen adibidea

Atal honetan, industria eta finantza munduak, programazio estokastikoaren bitartez lotzen diren problema klasiko bat aurkeztu nahi da: energiaren kudeaketa.

Energiaren kudeaketa, adibide on bat izan daiteke programazio estokastikoak dituen abantailak era argi batean ikusteko, energia merkatuen berezitasunetako bat, salerosketen prezioaren eta eskariaren une batetik besterako etengabeko aldaketa baita.

Hamaika egoera ezberdinetan, eta energia iturri ezberdinekin azter daitekeen problema da hau, bakoitza bere helburu eta murrizketa konkretuekin. Murrizketei dagokienez, energia iturri bakoitzak bereak ditu eta kasu gehienetan sorgailuaren gaitasun fisikoa, legeria, baliabideak, lan-itunak, eskaria eta antzekoen araberakoak izaten dira.

Beste aldaera garrantzitsu bat, denbora da. Denbora-periodoak, problema analizatu nahi den ikuspegiaren araberakoak dira. Hau da, epe luze, epe ertain edo epe laburrera aztertu nahi izanak guztiz baldintzatzen du planteatu beharreko problemaren egitura.

3.1 Energia elektrikoa eta eperako salmenta.

Energia elektrikoa, eguneroko bizitzan ezinbestekoa bilakatu den energia mota bat dela onar daiteke. Hura sortzeko hainbat teknika eta metodo ezberdin ezagutzen dira, esaterako, ur-jauzi baten energia potentziala baliatuz, airearen energia zinetikoa erabilita edo fisio nuklearra edo erregai fosilak erreta lortzen den energia termikoari esker.

Denbora unitateko sortu edo xahutzen den energia elektrikoaren kopuruari potentzia elektriko deitzen zaio, eta Wattetan (W) neurtzen da. Megawatta (MW), beraz, miloi bat Watt neurtzen dituen unitatea izango da.

Aurretiaz aipatu dugun legez, energiaren merkatuaren eta bereziki merkatu elektrikoaren ezaugarrietako bat, aldagai eta parametro batzuen (eskaria, prezioa, arriskua...) ordutik ordurako aldaketa da, eta lege estatistiko eta probilistikoekin, euren portaera ezagutu ahal bada ere, ezinezkoa da datu hauen balio zehatza ezagutzea.

Salerosketari dagokionez, erosleak aukera ezberdinak ditu gehien komeni zaion maiztasunarekin kontsumitzeko. Batetik, eguneko merkatuak orduro prezioz aldatzen den energia erosteko aukera ematen du eta bestetik, epe ertain edo luzerako salerosketak onartzen ditu. Esan beharra dago, azken kasu hauetan prezioa ez dela eguneko merkatuetan bezain aldakorra eta nolabaiteko egonkortasuna mantentzen duela periodo jakin batzuetan zehar.

Energiaren inguruko optimizazio problemak ebaztean, aipatutako ezaugarriei gabezi edo eragozpen bat gehitzen zaie, erabiltzen ez den energiaren pilaketa. Salbuespenak salbuespen, elektrizitate moduan kontsumitzen den energia unean bertan sortutakoa da. Ekoizlearentzat eta orokorrean guztiontzat, onuragarria izango litzateke momentuan erabiltzen ez den energia gorde eta berrerabili ahal izatea, baina, gaur egun ekintza hau, ez da guztiz bideragarria energia kantitate handiekin. Nahiz eta energia elektrikoak garraiorako eta transformaziorako abantaila handiak dituen, oraindik ez da lortu era eraginkor bat hura gordetzeko. Batetik sortzea baino garestiagoa delako eta bestetik, berrerabili ahal izateko portzentaia handi bat galtzen delako.

3.2 Problema konkretuaren azalpena.

Jatorrizko problema *A.J.Cornejo*, *R.García Bertrand* eta *R.Mínguez* ikerlarien *"Contratación a plazo para productores eléctricos"* [4] artikulutik atera da. Ondorengo ataletan sakonkiago azalduko diren berezitasun batzuk gehitu zaizkio, nabarmentzekoak: energia gordetzeko aukera eta behar izanez gero, beste enpresa batzuetatik energia erosteko aukera. Jarraian, problema osotuaren helburua eta berezitasunak laburki azalduko dira.

Energia elektrikoa produzitzen duen enpresa edo erakundearen ikuspuntutik planteatu da problema. Honen helburu nagusia, ekoizleak dituen baliabideak erabilita, etekina maximizatzea da. Beti ere, beharrezko baldintza eta murrizketa batzuk beteta.

Bi orduko epean zer nolako erabakiak komeni den hartzea erakusten du problemaren ebazpenak, kontuan hartuta, hurrengo orduetako salmenta-prezioa eta eskaria, aurretik kalkulatutako balio jakin batzuen artean egongo dela, baina esan bezala, ez dena zehazki ezagutuko. Jakingo duguna, gertaera posible bakoitzaren probabilitatea izango da. Prezioaren eta eskariaren aldakortasuna eta ziurgabetasuna eszenarioen bitartez adieraziko da. Hala eta guztiz ere, era orokorrean garatu da eredua eta ordu gehiagoko ikuspegia eman dakioke.

Ekoizleak aukera du energia ordu bakar baterako saltzeko edota eperako salmenta burutzeko. Eperako salmenta gauzatzeko, aldez aurretik ezagunak diren kontratu ezberdinak erabil ditzake.

Horrez gain, saldu ez den energia, baterietan pilatzeko aukera dago. Horregatik, etapa bakoitzean hartu beharreko erabakia, zenbat eta nola saltzeaz gain, baterietan zenbat pilatuko den izango da. Finean, ekoiztutakoari emango zaion erabilera eta kantitate zehatza erabaki beharko dira. Eta esan bezala, hau guztiau, eskariaren eta prezioaren orduz orduko aldaketa testuinguru batean planteatuko da. Gainera, beranduago aurkeztuko diren murrizketak ere bete beharko dira, problema, ahal den heinean, errealitatera hurbiltzeko.

Sarritan, errealitatean gertatzen den bezala, baliteke enpresa batek eman beharreko gutxieneko zerbitzuak ez betetzea, arazo puntual batengatik, aurreikusi ez duen gertaera batengatik edota beste barik, gaitasun fisikorik ez duelako. Horrelako kasuetan, soluzio posible bat, beste enpresa batetik produktuak erostea da.

3.3 Parametro eta aldagaien aurkezpena.

Ondoren, probleman zehar parte hartuko duten parametro eta aldagaien inguruko azalpenak emango dira. Horrela, era argiago batean ulertuko dira problemari erantsiko zaizkion murriztapen eta mugak.

Multzoak:

- t $\in \mathcal{T}$, non $\mathcal{T}$ problemako etapa guztien multzoa den.
- g $\in \mathcal{G}$, non $\mathcal{G}$ eszenario taldeen multzoa den.
- g $\in \mathcal{G}_t$, non $\mathcal{G}_t$, t etapako eszenario taldeen multzoa den.
- k $\in K$, non K eperako salmenta-kontratuen multzoa den.
- $\Pi(g)$, g nodoa eta bere nodo aurrekarien multzoa da.
- $\pi(g)$, g nodoaren nodo aurrekaria da.

Oharra: Problema zenbakiz ebazteko orduan, formulazio trinkoa erabiltzea aukeratu da, tamaina aldetik ez baita handiegia izan. Horregatik, ondorengo azalpenetan nodo hitza erabili da, eszenario taldea adierazteko.

Parametroak:

- λ_k, epeka saldutako k kontratuaren prezioa, €$/MWh$-tan adierazita. Kasu honetan epeka saldutako produktuaren prezioa finkoa eta ezaguna dela onartu da periodo eta nodo ezberdinetan zehar.
- λ_g^s, aurreko parametroaren unitate berdinarekin, g nodoan merkatuak ezarritako energiaren prezioa adierazten du honek.
- C, ekoizleak sortutako MWh-ko kostua €-tan.
- κ, saldu ez den energia gordetzearen kostua €$/MWh$-tan.
- G_{max}, bateriak gorde dezakeen energia kopuru maximoa MW-tan neurtuta. Bateriaren gaitasun fisikoa deritzona.
- D_g, g nodoari dagokion eskaria MW-tan.
- P_{max}, Sorgailuak ordu bakoitzean ekoiztu dezakeen energia kopuru maximoa MW-tan neurtuta. Sorgailuaren gaitasun fisikoa adierazten du.
- P_{min}, sorgailuak ordu bakoitzean ekoiztu beharreko energia kopuru minimoa MW-tan neurtuta. Sarritan, komenigarria da sorgailua eta antzeko makinak etengabe martxan edukitzea. Batetik, denbora luzea behar dutelako berriz ere martxan jartzeko. Bestetik, gelditzetik atzera ere pizterako prozesua garestia izan daitekeelako. Horrez gain, mantentze kostua epe luzean garestiago izateko probabilitate handiagoa dago, errazago hondatzen baitira. Hori guztia dela eta, sorgailua etengabe energia ekoizten mantenduko da.
- P_k^{max}, k kontratupean, eperako sal daitekeen energia kopuru maximoa MW-tan neurtuta.
- ρ, baterietan pilatutako energiaren gutxitze koefizientea. Biltzen den energiak duen erabilgarritasunaren proportzioa.
- γ, elektrizitatea behar izatekotan, ekoizleak beste enpresa batean eros dezakeela onartu da. Horren salerosketa prezioa eguneko merkatuko prezioa dela suposa daiteke, λ_g^s. Baina γ kudeaketa kostu batzuk edukiko ditu MW-ko.
- SE^{max}, Gabeziak betetzeko beste enpresa batetik eros daitekeena mugatu egingo da.
- ω_g, g nodoari esleitutako probabilitatea.

Aldagaiak:

- p_k, eperako salementaren bidez, k kontratupean saldutako energia kantitatea MW-tan. Esan bezala, hasieratik ezarriko da kopurua eta finkoa eta aldaezina izango da etapa guztietan zehar.
- e_g^s, g nodoan salduko den energia kopurua MW-tan, ez dago bertan barne eperako salmentaren bidez saldu dena ezta beste lantegietatik lortutakoa.
- e_g^e, g nodoan ekoiztutako energia kopurua MW-tan.
- e_g^{se}, g nodoan beste lantegi batetik erosi eta saldutako energia kopurua MW-tan.
- s_g, g nodoan baterietan pilatzen den energia kopurua MW-tan.

3.4 Murrizketak.

Planteatu den problemaren berezko ezaugarriak adierazteko eta prozesu logiko bat jarraitzeko, bete beharreko gutxieneko baldintza batzuk aurkeztu beharko dira. Baldintza-multzo horiek murrizketa izenarekin ezagutzen dira. Horietako asko gaitasun eta baldintza fisikoei lotuta egongo dira. Bestalde, badira estrategia zehatz bat jarraitzeko beharrezkoak izango direnak, edota besterik gabe, helburu jakin baterako aldagai eta paramatroei eskatu diezazkienak.

Maiz, ezberdin planteatu behar izaten dira etapa ezberdinetako murriztapenak, hala eta guztiz ere, badira etapa guztietan zehar berdintsuak diren baldintzak.

Edozein $t \in \mathcal{T}$:

$$P_{min} \leq e_g^e \quad , g \in \mathcal{G} \tag{3.1}$$

$$e_g^e \leq P_{max} \quad , g \in \mathcal{G} \tag{3.2}$$

$$s_g \leq G_{max} \quad , g \in \mathcal{G} \tag{3.3}$$

$$p_k \leq P_k^{max} \quad , k \in K \tag{3.4}$$

$$e_g^{se} \leq SE^{max} \quad , g \in \mathcal{G} \tag{3.5}$$

Gaitasun fisikoei dagozkien murriztapenak dira hauek eta logikoa denez, berdinak izango dira etapa guztietan zehar. Ekoiztu dezakeguna, ekoizpen minimo eta maximoaren artean egongo da (3.1),(3.2). Baterietan pilatzen dugun MW kopurua ez da bateriaren kapazitatea baino altuagoa izango (3.3), epeka saldutakoa aurretik baimendutakoa izan beharko da (3.4) eta (3.5)-k, beste enpresa batetik ezin dela baimendutakoa baino gehiago erosi adierazten du.

$t = 1$ denean:

$$e_1^s + \sum_{k \in K} p_k + e_1^{se} = D_1 \tag{3.6}$$

$$e_1^e = e_1^s + \sum_{k \in K} p_c + s_1 \tag{3.7}$$

Helburu nagusietako bat eskaria betetzea da, derrigor bete behar den baldintza da. Hau da, nahiz eta ekoizleak nahi beste etekin ez lortu saldutako energia elektrikoarekin, behartuta dago gutxienez, eroslea energiaz asetzeko. (3.6).

Bestalde, ekoitzi beharreko energia lehen unean, hiru aukera ezberdinetarako erabili daitekeenaren berdina izan beharko da. Hau da, zuzenean edo epeka saltzen denaren eta gordetzen denaren MW batura, izango da une honetan ekoitziko dena (3.7).

$t>1$ denean:

$$e_g^s + \sum_{k \in K} p_k + e_g^{se} = D_g \quad , g \in \mathcal{G} - \mathcal{G}_1 \tag{3.8}$$

$$e_g^e + \rho s_{\pi(g)} = e_g^s + \sum_{k \in K} p_k + s_g \quad , g \in \mathcal{G} - \mathcal{G}_1 \tag{3.9}$$

Antzeko baldintzak ezarri beharko dira ondorengo etapetan ere, kontuan harturik aurreko etapatik gordetako energia erabilgarri dagoela. Berriro ere, ordu jakin batean dagoen prezioa dagoela, eskaria bete beharko da halabeharrez, eskaria edozein izanda ere. (3.8). Esan bezala, aurreko etapan energia gordetzea erabaki bada, MW kopurua ρ koefizientearekin txikitu bada ere, orain saldu edo gordetzen jarraitzeko eskuragarri dago. Hots, edozein eratan saldutakoa eta orain gordeta geratuko denaren batura, ekoiztu eta erabilgarri dagoenaren berdina izan beharko da (3.9).

Problemako aldagai guztiek balio erreal positibo edo nuluak har ditzakete, beraz aurreko baldintzei ondokoak gehituko zaizkie:

$$e_g^e, e_g^s, e_g^{se}, p_k, s_g \geq 0 \quad , \forall g \in \mathcal{G} \tag{3.10}$$

3.5 Helburu funtzioa.

Helburua ekoizlearen etekina maximizatzea denez, nodo bakoitzean esperotako irabazia maximizatzen duen funtzioa beharko da. Etapa jakin bateko nodoan, irabazia, guztira saldutakoa (epeka eta egunekoa) eta kostuen arteko diferentzia da. Bestalde, problema jakin honetan kostua ez da bakarrik ekoizterakoan sortzen, energia gordetzerakoan eta beste lantegi batetik salerostean ere, hortaz, helburu funtzioan konstante negatiboarekin ageri beharko dira, ekoiztearen kostua, energia pilatzearena baita salerosketa kudeatzearena.

Egoera bakoitzean esperotako etekina adierazteko, nodo bakoitzean irabaziko duguna eta hura gertatzeko probabilitatea biderkatu beharra dago. Helburu funtzio honek eta 3.4 atalean aipatutako murrizketek sistema determinista baliokidea osatzen dute (*S.D.B.*).

$$Z = max \sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{k \in K} \lambda_k p_k + \sum_{g \in G} \omega_g \lambda_g^s e_g^s - C \sum_{g \in G} \omega_g e_g^e - \kappa \sum_{g \in G} \omega_g s_g - \gamma \sum_{g \in G} \omega_g e_g^{se} \tag{3.11}$$

$$e_1^s + \sum_{k \in K} p_k + e_1^{se} = D_1$$

$$e_1^e = e_1^s + \sum_{k \in K} p_k + s_1$$

$$e_g^s + \sum_{k \in K} p_k + e_g^{se} = D_g \quad , \forall g \in \mathcal{G} - \mathcal{G}_1$$

$$e_g^e + \rho s_{\pi(g)} = e_g^s + \sum_{k \in K} p_k + s_g \quad , \forall g \in \mathcal{G} - \mathcal{G}_1$$

$$P_{min} \leq e_g^e \quad , \forall g \in \mathcal{G}$$

$$e_g^{se} \leq SE^{max} \quad , \forall g \in \mathcal{G}$$

$$e_g^e \leq P_{max} \quad , \forall g \in \mathcal{G}$$

$$s_g \leq G_{max} \quad , \forall g \in \mathcal{G}$$

$$p_k \leq P_k^{max} \quad , \forall k \in K$$

$$e_g^e, e_g^s, e_g^{se}, p_k, s_g \geq 0 \quad , \forall g \in \mathcal{G}$$

3.6 Finantza-arriskuaren agerpena.

Bigarren kapituluan zehar finantza-arrisku neurriek, optimizazio problemetan duten garrantzia azpimarratu da, erabakiak hartzeko kontuan hartu behar den ezinbesteko faktore bilakatu baita. Bi finantza-neurriren inguruan sakondu da: *VaR* eta *CVaR*.
Aztergai den probleman, arrisku-balio eta arrisku-balio baldintzatuak, etekinen inguruan definitu dira, eta ez galera-funtzioa erabilita. Finka eta berridatz bitez erabiliko diren aldagaien notazio eta esangurak.

- α-VaR^E $\equiv$ "α probabilitatearekin, etekinek edukiko duten baliorik txikiena." ξ hizkia erabiliko da murrizketetan eta helburu funtzioan.
- α-$CVaR^E$ $\equiv$ "ξ-ren azpitik geratu diren balioen bataz bestekoa"

Problema honetan, ez zaio etapa bakoitzeko etekin ekonomikoari behatuko, baizik eta ekintza multzo bakoitzak amaieran utzitakoa. Beraz, etapa guztietan zehar, gauzatzeek eta hartutako erabakiek sortutako diru mozkinari deituko diogu *etekina*, adostutako notazioa erabilita:

$$\forall g \in \mathcal{G}_T,\ T \text{ azken periodoa izanik:}$$

$$E_g = \sum_{t\in\mathcal{T}}\sum_{k\in K}\lambda_k p_k + \sum_{g'\in\Pi(g)}\lambda^s_{g'}e^s_g - C\sum_{g'\in\Pi(g)}e^e_{g'} - \kappa\sum_{g'\in\Pi(g)}s_{g'} - \gamma\sum_{g'\in\Pi(g)}e^{se}_{g'} \tag{3.12}$$

Definizioz, α probabilitatearekin beteko da $\xi \leq E_g$. Horrek esan nahi du $1-\alpha$ probabilitatea dagoela $E_g<\xi$ izateko. Defini bedi orduan honako aldagai berri hau:

- η_g aldagaiak, $E_g<\xi$ denean, zenbateko diferentziagatik izan den adierazten du. Hau da, *VaR* eta irabazien arteko aldea erakusten duen aldagaia izango da.

Aldagai berri hauekin, aurretik definitutako α-$CVaR^E$ edozein azken nodorako berdefini dezakegu, optimizazio probleman era egokian erantsi ahal izateko:

$$\forall g \in \mathcal{G}_T,\ T \text{ azken periodoa izanik:}$$

$$\alpha\text{-}CVaR^E_g = \xi - \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)\sum_{g\in\mathcal{G}_T}\omega_g\eta_g \tag{3.13}$$

Arrisku-balio baldintzatua zenbat eta handiagoa izan, orduan eta etekin handiagoa lortzeko probabilitatea egongo da, hortaz, helburua aldagai hau

maximizatzen duen erabakiak hartzea izango da.
Ohartu, 3.13 maximizatzean, errentagarritasun minimoa ere maximizatzen dela. Bestalde, η_g, koefiziente negatiboarekin agertzen da, beraz, ξ eta E_g-ren arteko diferentzia minimizatzen da.

Murriztapenei dagokienez, $\xi \leq E_g + \eta_g$ izatera behartuko da. Ebazpenak berak bultzatuko baitu α probabilitaearekin $\eta_g = 0$ izatera. Azken ezberdintza hau garatuz:

$$\sum_{t\in\mathcal{T}}\sum_{k\in K}\lambda_k p_k + \sum_{g'\in\Pi(g)}\lambda^s_{g'}e^s_g - C\sum_{g'\in\Pi(g)}e^e_{g'} - \kappa\sum_{g'\in\Pi(g)}s_{g'} - \gamma\sum_{g'\in\Pi(g)}e^{se}_{g'} + \eta_g - \xi \geq 0 \quad , \forall g \in \mathcal{G}_T \tag{3.14}$$

3.7 Eredu Orokorra.

Maximizatu beharreko bi helburu funtzio planteatu dira 3. atal honetan zehar. Horietako bakoitza murrizketa propioekin aurkeztu da. Batetik 3.11-ko helburu funtzioak, etekina maximizatzeko erabili da. Eta bestetik, 3.13 funtzioan finantza-arrisku neurriak erabili dira maximizazio baten bitartez, arriskua txikitzeko.

β parametroaren bitartez optimizatu nahi diren bi funtzioak uztartuko dira eredu bakar batean, etekinari β pisua eta arriskuari $1-\beta$ pisua emanez, $\beta \in [0,1]$ izanik. Jakina 3.11-ko murrizketak eta 3.12 murrizketa bertan agertu beharko dira. Era honetan, β=0 denean, etekina soilik azertzen da. Ostera, β=1 denean helburu funtzioaren pisu guztia arriskuak darama. Eta esaterako, β=0.5 denean, erdibanatzen da etekinaren eta finantza-arriskuaren garrantzia helburu funtzioan.

$$\begin{aligned} Z = max\ (1-\beta)(\sum_{t\in\mathcal{T}}\sum_{k\in K}\lambda_k p_k + \sum_{g\in G}\omega_g\lambda^s_g e^s_g - C\sum_{g\in G}\omega_g e^e_g - \kappa\sum_{g\in G}\omega_g s_g - \gamma\sum_{g\in G}\omega_g e^{se}_g) + \\ +\beta(\xi - (\frac{1}{1-\alpha})\sum_{g\in\mathcal{G}_T}\omega_g\eta_g) \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$e^s_1 + \sum_{k\in K} p_k + e^{se}_1 = D_1$$

$$e^e_1 = e^s_1 + \sum_{k\in K} p_k + s_1$$

$$e^s_g + \sum_{k\in K} p_k + e^{se}_g = D_g \quad , \forall g \in \mathcal{G} - \mathcal{G}_1$$

$$e_g^e + \rho s_{\pi(g)} = e_g^s + \sum_{k\in K} p_k + s_g \quad , \forall g \in \mathcal{G} - \mathcal{G}_1$$

$$\sum_{t\in\mathcal{T}} \sum_{k\in K} \lambda_k p_k + \sum_{g'\in\Pi(g)} \lambda_{g'}^s e_g^s - C \sum_{g'\in\Pi(g)} e_{g'}^e - \kappa \sum_{g'\in\Pi(g)} s_{g'} - \gamma \sum_{g'\in\Pi(g)} e_{g'}^{se} + \eta_g - \xi \geq 0 \quad , \forall g \in \mathcal{G}_T$$

$$P_{min} \leq e_g^e \quad , \forall g \in \mathcal{G}$$

$$e_g^{se} \leq SE^{max} \quad , \forall g \in \mathcal{G}$$

$$e_g^e \leq P_{max} \quad , \forall g \in \mathcal{G}$$

$$s_g \leq G_{max} \quad , \forall g \in \mathcal{G}$$

$$p_k \leq P_k^{max} \quad , \forall k \in K$$

$$e_g^e, e_g^s, e_g^{se}, p_k, s_g, \xi, \geq 0 \quad , \forall g \in \mathcal{G}$$

$$\eta_g \geq 0, \ , \forall g \in \mathcal{G}_T$$

$$\alpha, \beta, \in [0,1]$$

4. kapitulua

Zenbaki Errealekin Adibidea

4.1 Datuen aurkezpena

Behin 3.7 atalean, azken eredua zehaztuta, datu errealekin aztertzera joko da problema, hasiera batean finkatu diren helburuak betetzeko.

Bi orduko denbora-periododun eta hiru etapako optimizazio problema estokastiko gisa aurkeztu da. Hasierako egoera batetik hasita, bigarren etapan bost gertaera posible suertatzen dira €/MWh prezioaren arabera. Azken etapan beste bost gertaera posible sailkatu dira, horrek esan nahi du, bigarren etapako gertaera bakoitzak gertaera posible bat soilik dakarrela. Beraz, t=1 etapan nodo bakarra dago, t=2 etapan bost nodo eta t=3 dagokionean beste bost, hau da, amaierarako 5 eszenario posible hartu dira kontuan. Ikus beza irakurleak 4.1 irudiko zuhaitzaren egitura.

Gertaera guztiak ekiprobableak direla onartu da, orduan hasierako egoerak 1 probablitatea du eta bigarren eta hirugarren etapetako gauzatze bakoitzak 1/5 probabilitatea. Ondoko tauletan, [5] artikulua oinarritzat hartuz, problema ebazteko bildu den informazioa ageri da. Hasierako egoera gisa, t=1, 49€/MWh prezioa kontsideratu da.

Eguneroko merkatuko prezioa: λ^s					
Etapa	ω=1	ω=2	ω=3	ω=4	ω=5
2	55	39	60	53	60
3	59	42	64	57	62

4.1. Taula. Eguneroko merkatuko prezioaren unitatea €/MWh da.

Eperako kontratuen prezioa		
Aldagaia	λ_k	P_k^{max}
p_1	49	75
p_2	53	90
p_3	47	30

4.2. Taula. Epekako kontratuen prezioaren unitatea €/MWh da.

Aldagaia	P^{max}	P^{min}	Kostua(C)
e^e	450MW	50MW	46 €/MWh

4.3. Taula. Ekoizte datuak.

Datuok erabilita, hainbat parametro eta aldagai berri erantsi zaizkio jatorrizko problemari. Lanean zehar aipatu bezala, energia-eskariak problema mota hauen alderdi esanguratsuenetarikoa betetzen du. Gainera, energia pilatzearen auziari era egokian heltzeko, ezinbesteko datua da.

Eskaria, prezioaren antzera guztiz aldakorra da. Gehiegi ez zailtzearren, eskariaren aldakortasuna prezioarekin batera adierazi da, hau da, 4.1 taulan agertzen den etapa ezberdinetako prezio bakoitzari eskari bat esleitu zaio. Beraz, hasierako problemako zuhaitz berdina ageriko da orain ere.

Argi dago eskariak guztiz baldintzatuko duela erabaki optimoaren ebazpena eta hasieratik helburutzat finkatu den energia pilaketaren kantitatea. Horregatik, bi egoera nagusiren menpean aztertuko da problema, bata eskaria nahiko erregularra denean, eta bestea, eskariak gertaera batzuetan muturreko balioak hartzen dituenean. Ikus bitez aipatutako bi egoerak ondorengo taulen bitartez. Bi kasuetan, t=1 denean, 400MWko eskaria bete beharko da.

Ordu bakoitzeko eskariak					
Etapa	ω=1	ω=2	ω=3	ω=4	ω=5
2	460	475	430	400	350
3	450	375	430	530	430

4.4. Taula. Eskariak portaera nahiko erregularra dueneko kasua. Unitatea: MW.

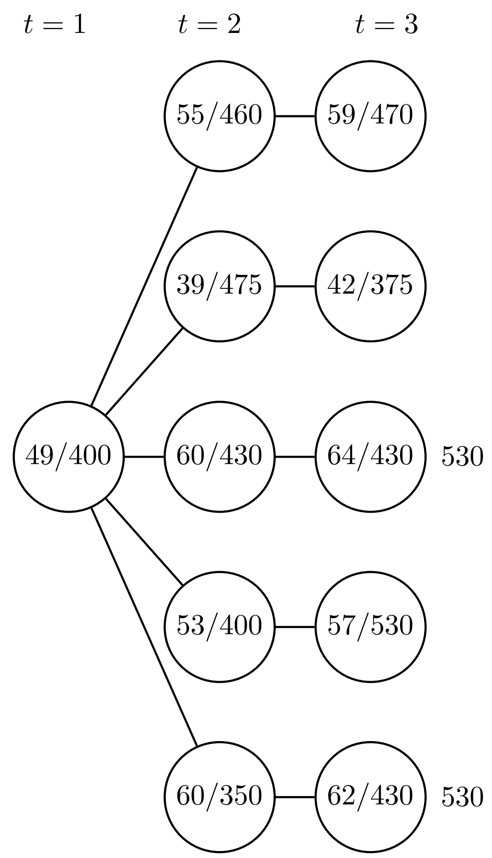
Ordu bakoitzeko eskariak					
Etapa	ω=1	ω=2	ω=3	ω=4	ω=5
2	460	475	430	400	350
3	450	375	530	530	530

4.5. Taula. Eskariak muturreko balio aldakorragoak hartzen ditueneko kasua. Unitatea: *MW*.

Problemaren estokastizitatea grafoen ikuspuntutik erakusteko, honako zuhaitza erabili da. 4.1 irudian, 4.4 taulako eta 4.5 taulako eskariak zuhaitz berean adierazi dira.

4.1. irudia. Nodo bakoitzean ageri den lehen zenbakia €/*MWh*-ri dagokio, bigarrena berriz, eskariari *MWh*-tan neurtuta. Hirugarren etapako nodoetatik kanpo dauden bi balioak, 4.5 taulako eskari ezberdin bakarrei dagokie.

.



Egoera bakoitzean zenbat energia gorde behar den adierazten duen aldagaiaz aparte (s_g), e_g^{se} sortu da, energia behar izatekotan, beste konpainia batetik erosi beharreko kantitatea adierazten duena. 3.Kapituluan finkatutako notazio bera erabiliz, problema ebazteko erabili diren parametro eta aldagaien balio eta goi eta behe-mugak adieraziko dira beheko taulen bitartez:

Aldagaia	G^{max}	Kostua(κ)
s_g	$100MW$	$€/MWh$

4.6. Taula. Energia baterietan pilatzeko datuak. ρ=0.7-ko erabilgarritasuna erabiliko da hasiera batean.

Aldagaia	SE^{max}	Kostua(γ)
e_g^{se}	$200MW$	$€/MWh$

4.7. Taula. Energia kanpotik salerosteko datuak.

4.2 Emaitzen azterketa

Berrikuntzak eta teknologia berriak garatzeaz arduratzen diren enpresa eta erakundeek, oro har, ezkutuan mantentzen dituzte sorkuntzen inguruko prozesu, kostu, etekin eta antzeko informazioak, interes ekonomiko handiak egoten baitira jokoan. Beraz, tauletako datuekin uztartuz, ρ eta κ, erabilgarritasun-koefiziente eta gordetze-kostuaren balio ezberdinak neurtuta burutuko da azterketa.

Finantza-arriskuaren eragina eta balioak ere aztertuko dira, β=1, β=0 eta β=0.5 ezarrita. Arriskuaren analisia egiterakoan behin eta berriro α=0.95 erabiliko da.

Emaitzen azterketa aurrera eramateko, lehenik 4.4 taulako eskariekin ebatziko da problema. Eskari hauen balioak nahiko kontrolagarriak dira ekoiztu eta kanpotik erositako energiarekin hornitzeko. Eta energia faltan izatekotan, kanpotik erostea lehenesten du energia gordetzearen aurretik. Energia pilatzeko erabakia, soilik honen kostua κ=0 denean eta erabilgarritasuna ia %100 denean hartzen da, baina, oraingoz behintzat, baldintza nahiko irrealak dira. Irakurleak eskura ditu *A Eranskinean* ondorio hau ateratzeko erabili diren datuak taula modura.

Sakonago analizatu dira 4.5 taulako datuak. Errealitatean, nahi baino sarriago gertatzen da muturreko balioen agerpena eta garrantzitsua da prest egotea gertakari horiei aurre egiteko. Lanaren helburu nagusietako bati eutsiz, kasu berezi hauetan energia gorde ahal izateak duen eragina aztertuko da:

1 $\beta = 0$ denean:

Lehenik, arriskua baztertuz, etekinean duen eragina aztertuko da. Orain aurkeztuko diren tauletan, ρ eta κ-ren araberako etekin ekonomikoa eta hasierako eta lehen etapan gorde beharreko kantitateak ageriko dira. Berriz ere, jakinarazten zaio irakurleari, problemako aldagai guztien balioa jakiteko, *Eranskineko* tauletara jo dezakeela. Bertako tauletan irakurleak antzeman dezake, ρ eta κ-ren edozein baliotarako, azken etapan, logikoki ez dela energiarik baterian pilatuko, lortzen den bakarra modu horretan gastua areagotzea baita.

κ	ρ	$I.Irabazia$	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
10	0.7	9449	0	0	0	0	0	0
7	0.85	9451.2	0	0	0	20	0	0
6	0.85	9458	0	0	0	20	0	20
5	0.85	9478.6	0	0	0	20	0	94,12
4	0.85	9501.42	0	0	0	20	0	94,12
4	0.9	9579.51	0	0	0	20	50	88.90
2	0.9	9643.07	0	0	0	20	50	88.90
0	1	10195	50	20	100	80	100	100

4.8. Taula. $\beta = 0$, $\alpha = 0.95$

Hasieran finkatu diren parametroen balioak erabalita, oraindik ere, ez da lortzen energiarik gordetzea eta 4.4 taulako balioekin gertatzen den moduan, muturreko eskari guztiak hornitzeko, eperako kontratuez eta e^{se} aldagaiaz baliatzen da ekoizlea. Beraz, susma daiteke hartutako hasierako parametroen balioak ez direla batere eraginkorrak eta bai kostua, bai erabilgarritasuna hobetu behar dela probetxuzko emaitzak lortzeko.

Baldin eta gordetako MW-ko kostua 7€-tik beherakoa eta berrerabilpenaren eraginkortasuna %85tik gorakoa bada, orduan zentzua izango du egoeraren batean energia pilatzeak hurrengo etapan saldu ahal izateko. Finkatu den muga hori erabilita, soilik bi euroko etekin handiago lortuko da. Baina MW-ko kostua 2€ jaisteak, %90ko errendimenduarekin, ia 200€ itxarondako irabazi gehigarria suposatuko luke bi orduko periodoan.

Amaitzeko, azpimarratu, baldintza idealetan etapa guztietan erabiltzen direla gordailuak eta itxarondako etekin gehigarria are nabarmenagoa dela.

2 $\beta = 1$ denean:

Kasu honetan, landutako bi arrisku neurriak optimizatu dira, hau da, gutxiengo etekina maximizatzen dituen erabakiak hartuko dira. Logikoa denez, aurrerago gertatu den modu berean, azken etapan, ez da ezer baterietan geratuko, ρ eta κ parametroak edozein direlarik. Azter bitez emaitzak taula bidez:

κ	ρ	$CVaR$	VaR	$I.Irabazia$	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
10	0.7	2710	2710	5070	0	0	0	0	0	0
7	0.85	2710	2710	4790	0	0	0	0	0	0
6	0.85	2710	2710	4790	0	0	0	0	0	0
5	0.85	2710	2710	4790	0	0	0	0	0	0
4	0.85	2710	2710	5070	0	0	0	0	0	0
4	0.9	2710	2710	5070	0	0	0	0	0	0
2	0.9	2710	2710	5070	0	0	0	0	0	0
1	0.9	2710	2710	4790	0	0	0	0	0	0
0.5	0.9	2710	2710	4678	0	0	0	0	0	100
0.5	0.95	2710	2710	4658	0	0	0	100	0	100
0	1	2710	2710	7470	50	20	100	80	80	80

4.9. Taula. $\beta = 1$, $\alpha = 0.95$

Antzeman daitekeen lehen gauza, $CVaR$-en balioa gordetze-parametroekiko askea dela da. $CVaR$-ek, definizioz, 0.95ko probabilitatearekin irabazi kantitaterik txikiena adieraziko du. Baina, ρ eta κ-ren edozein baliotarako, irabazirik txikiena, energia ez gordetzea erabakitzen denean gertatzen da. Hori dela eta, esan daiteke, finantza-arrisku honen gutxitzea ez dela ρ eta κ-ren balioen menpekoa.

Problema gehiegi ez korapilatzeko, eszenario kopuru txikia aukeratu da. Berriro ere, $CVaR$-en esangura erabilita, gutxienez, eszenarioen %95ean nahi da, $CVaR$ balioa, etekin minimoaren azpitik egotea. Ohartu, 4 eszenariotan bakarrik beteko balitz aipatutako baldintza, %80ko konfiantza maila soilik lortuko litzatekeela. Beraz, eszenario guztietan bete beharko da esandakoa. Horregatik, ez dago kasurik, etekin minimoa $CVaR$en azpitik geratzen denik. Eta horren ondorioz, $CVaR$ eta VaR, berdinak izango dira beti.

Arriskua soilik kontuan hartzen denean, energia pilatzen hasteko balio eraginkorragoak behar direla ikus daiteke. Etekina soilik aztertu denean, ρ=7 eta κ=0.85 balioak nahikoa ziren energia gordetzea erabakitzeko. Baina, helburua etekin minimoa maximizatzea denez, erarik seguruena bilatzen da irabazia handitzeko. Horregatik, epeka saltzen den energia kopuru maximoaz baliatzen da eskariak betetzeko eta energia pilatzeko erabakiari aukera gutxiago uzten zaizkio. Baldintza ia perfektuetan bakarrik metatuko da energia.

Itxarondako irabaziari dagokionez, emaitza bitxiak lortzen dira, bataz besteko etekin txikiena, baldintza ia perfektuetan erdiesten baita. Hala ere, ez zaio jaramon larregirik egin behar ρ eta κ parametroekiko lortzen diren itxarondako irabazi ezberdinei, esan bezala, ez baita problema balio honen arabera optimizatzen. Logikoki, β=0, kasuan lortuko litzatekeen baino, *CVaR* balio altuagoa lortuko da orain eta itxarondako irabaziak berriz, nabarmen txikiagoak.

3 $\beta = 0.5$ denean:

Aurreko bi ataletan, arriskua eta etekin ekonomikoa, bakoitza bere aldetik optimizatu dira. Baina, 3.7 ereduak, β pisu jakin bat ezarriz, biak batera maximizatzeko aukera ere ematen du. Pisu horri balio ezberdinak emanez interpreta daiteke behin eta berriro ebazpena, hala ere, bitarteko β=0.5 aukeratu da. Balio horrekin, etekina eta arriskuaren pisua erdibanatzen da helburu funtzioan. β=1 eta β=0 finkatu denean bezala, azken periodoko eszenarioetan energiarik ez gordetzea erabaki da.

κ	ρ	*CVaR*	*VaR*	*I.Irabazia*	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
10	0.7	2460	2460	8516	0	0	0	0	0	0
7	0.85	2460	2460	8521.6	0	0	0	20	0	0
6	0.85	2460	2460	8538,8	0	0	0	20	0	94.11
5	0.85	2460	2460	8561,6	0	0	0	20	0	94.11
4	0.85	2460	2460	8584.42	0	0	0	20	0	94.11
4	0.9	2460	2460	8662.52	0	0	0	20	50	88.89
2	0.9	2460	2460	8726.02	0	0	0	20	50	88.89
2	0.9	2460	2460	8726.02	0	0	0	20	50	88.89
0	1	2460	2460	9278	50	20	0	80	100	100

4.10. Taula. $\beta = 0.5$, $\alpha = 0.95$

Aurretik eman den arrazoi berdinagatik da oraingoan ere *VaR*, κ eta ρ-rekiko independentea eta *CVaR* balioaren berdina.

Nahiz eta arriskua bakarrik aztertu denean, honen joera energia ez gordetzearena izan den, etekinak markatu duen muga bera ageri da orain ere. Hots, gordetako MW-ko kostua 7€tik beherakoa eta berrerabilpenaren eragin-kortasuna %85tik gorakoa denean, orduan errentagarria izango da energia gordetzea.

Pentsa daitekeenez, itxarondako irabazia β=0 denean baino txikiagoa izango da kasu guztietan, bertan helburua soilik itxarondako irabazia maximizatzea baita. Aldiz, *CVaR* eta *VaR*, β=1 kasuan baino txikiagoak dira, hortaz, kasurik txarrenetan etekin gutxiago dago bermatuta. Hala ere, etekinak bakarrik aztertzean lortuko litzatekeen, arrisku-balio eta arrisku-balio baldintzatu altuagoak lortuko dira eta finantza-arriskua soilik aztertzean baino itxarondako balio hobeak. Beraz, β=0.5 izanik, gutxieneko irabazien eta itxarondako irabazien arteko oreka zentzudun bat berma daiteke.

Ondorioak

Orokorrean, lan honek *programazio estokasikoa* eta haren aplikazio zehatz bat izan du zutabe. Energia elektrikoaren testuinguruan murgilduta, *optimizazio estokastikoa*, itxura honetako problemak ebazteko tresna egoki bat dela ikusi da.

Elektrizitate ekoizle baten ikuspuntutik, hainbat orduren buruan, salerosketak kudeatzeko eredu orokor bat plazaratu da, errealitatean parte hartzen duten ahalik eta faktore gehien aintzat hartuz.

Bestalde, era xumean bada ere, gero eta ohikoagoak diren finantza-arrisku neurriek, *VaR* eta *CVaR* neurriek konkretuki, programazio estokastikoarekin elkarlanean duten balioa erakutsi da, erabakiak hartzeko orduan duten inportantzia goraipatuz.

Nahiz eta proposatutako datuekin informazio asko falta izan egoera erreal bati aurre egiteko, lan honen helburu nagusienetakoari eutsi ahal izan zaio. Kantitate handietan energia baterietan gorde ahal izateak dituen abantailak aurkeztu zaizkio irakurleari, arreta berezia jarriz, itxarondako irabazian edukiko lukeen inpaktuari.

Lantzean behin, eskarien inguruan, ekoizlearen esku ez dauden egoera bereziak sortzen dira. Kasu horietan, energia pilatuta, itxarondako irabaziaren hazkuntza ahalbidetu daitekeela ondorioztatu da.

Pilatzearen parametroei dagokienez, jorratu den kasuan behintzat, argi ikusi da, zein izan beharko litzatekeen euren balio konkretua, aipatutako bateriak eraginkorrak eta erabilgarriak izan daitezen.

Orain arte ez da lortu kantitate handietan, era bideragarri batean, energia berrerabiltzea, baina jakina da, etengabeko ikerketa eta artikuluak ari direla argitaratzen, energia gorde eta berrerabiltzea aurrerapen handia izan daitekeelako orokorrean gizarte osoarentzat.

Bibliografia

[1] J. R. Birge and F. Loveaux, Introduction to Stochastic Programming, *Springer Series Operations Research*, **13**, 59-69, 1997.

[2] M. Merino Maestre, Algoritmos de descomposición para problemas estocásticos multietapa mixtos 0-1, Facultad de Ciencias Empresariales y Económicas de la Universidad del País Vasco, Departamento de Economía Aplicada III, Bilbao, 2005.

[3] J. Dupacova, J. Hurt and J. Sthepan, Stochastic Modeling in Economics and Financing, *Kluwer Academic Publishers*, Volume 13, Department of Probability and Mathematical Stochastic, Charles University, Prague, 2002.

[4] G. B. Dantzig. Linear programming under uncertainty. *Management Science*, 1:197-206, 1955.

[5] E. M. L. Beale. On minimizing a convex function subject to linear inequalities. *Journal of the Royal Statistical Society*, Series 17b:173-184., 1955.

[6] J. Garcia-Gonzalez, J M. Latorre, S. Cerisola y A. Ramos, Planificacion a medio plazo de la generacion electrica, *Optimizacion bajo incertidumbre*, pgs. 177-185, Capitulo 8, ReTOBI, 2008.

[7] A. J. Conejo, R. Garcia Bertrand, y R. Minguez, Planificacion a medio plazo de la generacion electrica, *Optimizacion bajo incertidumbre*, ReTOBI, , pgs. 177-185, Capitulo 9, 2008.

[8] R. Tyrell Rockafellar and S. Uryasev, Optimization of conditional value-at-risk, *Journal of Risk*, Volume 2, Number 3, 2000.

[9] R. Tyrell Rockafellar and S. Uryasev, Conditional value-at-risk for general loss distributions , *Elsevier Science, Journal of Banking and Finance* 26, 2002.

[10] F. Arbelaez, L. Ceferino, F. Ceballos, L. Eduardo, El valor en riesgo condicional CVaR como medida coherente de Riesgo, *Revista Inge-*

nierias Universidad de Medellin, vol.4, num. 6,43-54, Universidad de Medellin, Medellin, Colombia, 2005.

[11] P. Artzner, F. Delbaen, J-M. Eber, D. Heath, Coherent Measures of Risk, *Mathematical Finance*, 1998.

[12] B. Dunn, H Kamath, J.M. Tarascon, Electrical Energy Storage for the Grid: A battery of choices, *Science*, Vo.334, Issue 6058, pp.928-935, 2011.

[13] F. Li, L. Chi, Wang Xi Bo, L. Xuan, J. Wei Tao, Overview on the Liquid Metal Battery for Grid-Level Large-Scale Energy Storage, *Key Engineering Materials*. Vol. 723, p572-578, 2017.

[14] Developement of decentralised energy and storage systems in the UK. A report for the Renewable Energy Association, KPMG LLP, 2016.

A. eranskina

Parametroen araberako taulak

Nahiz eta lanean barrena A (eskarien balio erregularra) eta C (muturreko egoeren agerpena) kasuak soilik aipatu, hirugarren kasu bat ere, C, zenbakiz aztertu da.

1 Eskariak A

Nodo bakoitzeko eskariak MW-tan hurrenez hurren: 400 460 475 430 400 350 470 375 430 530 430

Helburu funtzioa=9313											
Etapa	$t=1$	$t=2$					$t=3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
p_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
p_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^e	400	450	275	430	400	350	450	175	430	450	430
e_g^s	400	450	275	430	400	350	450	175	430	450	430
s_g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	10	200	0	0	0	20	200	0	80	0
η_g											
ξ											

A.1. Taula. $\beta = 0$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 10$, $\rho = 0.7$

Helburu funtzioa=9313											
Etapa	$t=1$	$t=2$					$t=3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
p_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
p_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^e	400	450	275	430	400	350	450	175	430	450	430
e_g^s	400	450	275	430	400	350	450	175	430	450	430
s_g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	10	200	0	0	0	20	200	0	80	0
η_g											
ξ											

A.2. Taula. $\beta = 0$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 8$, $\rho = 0.7$

Helburu funtzioa=9313											
Etapa	$t=1$	$t=2$					$t=3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
p_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
p_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^e	400	450	275	430	400	350	450	175	430	450	430
e_g^s	400	450	275	430	400	350	450	175	430	450	430
s_g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	10	200	0	0	0	20	200	0	80	0
η_g											
ξ											

A.3. Taula. $\beta = 0$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 6$, $\rho = 0.7$

Helburu funtzioa=9313											
Etapa	$t=1$	$t=2$					$t=3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
p_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
p_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^e	400	450	275	430	400	350	450	175	430	450	430
e_g^s	400	450	275	430	400	350	450	175	430	450	430
s_g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	10	200	0	0	0	20	200	0	80	0
η_g											
ξ											

A.4. Taula. $\beta = 0$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 4$, $\rho = 0.7$

Helburu funtzioa=9313											
Etapa	$t = 1$	$t = 2$					$t = 3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
p_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
p_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^e	400	450	275	430	400	350	450	175	430	450	430
e_g^s	400	450	275	430	400	350	450	175	430	450	430
s_g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	10	200	0	0	0	20	200	0	80	0
η_g											
ξ											

A.5. Taula. $\beta = 0$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 2$, $\rho = 0.7$

Helburu funtzioa=9313											
Etapa	$t = 1$	$t = 2$					$t = 3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
p_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
p_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^e	400	450	275	430	400	350	450	175	430	450	430
e_g^s	400	450	275	430	400	350	450	175	430	450	430
s_g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	10	200	0	0	0	20	200	0	80	0
η_g											
ξ											

A.6. Taula. $\beta = 0$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 0$, $\rho = 0.7$

Helburu funtzioa=9543											
Etapa	$t = 1$	$t = 2$					$t = 3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
p_2	80	80	80	80	80	80	80	80	80	80	80
p_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^e	450	450	325	380	450	400	430	75	430	430	330
e_g^s	320	380	195	350	320	270	390	95	350	450	350
s_g	50	40	100	0	100	100	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	0	200	0	0	0	0	200	0	0	0
η_g											
ξ											

A.7. Taula. $\beta = 0$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 0$, $\rho = 1$

Helburu funtzioa=9357											
Etapa	$t=1$	$t=2$					$t=3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
p_2	45	45	45	45	45	45	45	45	45	45	45
p_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^e	400	450	275	430	450	350	450	175	430	450	430
e_g^s	355	405	230	385	355	305	405	130	385	450	385
s_g	0	0	0	0	50	0	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	10	200	0	0	0	20	200	0	35	0
η_g											
ξ											

A.8. Taula. $\beta = 0$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 0$, $\rho = 0.9$

Helburu funtzioa=9313											
Etapa	$t=1$	$t=2$					$t=3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
p_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
p_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^e	400	450	275	430	400	350	450	175	430	450	430
e_g^s	400	450	275	430	400	350	450	175	430	450	430
s_g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	10	200	0	0	0	20	200	0	80	0
η_g											
ξ											

A.9. Taula. $\beta = 0$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 0$, $\rho = 0.8$

Helburu funtzioa=2710											
Etapa	$t=1$	$t=2$					$t=3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75
p_2	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
p_3	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
e_g^e	400	260	275	230	400	195	270	195	230	330	230
e_g^s	205	65	80	35	205	0	75	0	35	135	35
s_g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	200	200	200	0	155	200	180	200	200	200
η_g							0	0	0	0	0
ξ							2170	2170	2170	2710	2710

A.10. Taula. $\beta = 1$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 10$, $\rho = 0.7$

Helburu funtzioa=2710											
Etapa	$t = 1$	$t = 2$					$t = 3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75
p_2	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
p_3	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
e_g^e	400	260	275	230	400	195	270	195	230	330	230
e_g^s	205	65	80	35	205	0	75	0	35	135	35
s_g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	200	200	200	0	155	200	180	200	200	200
η_g							0	0	0	0	0
ξ							2170	2170	2170	2710	2710

A.11. Taula. $\beta = 1$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 8$, $\rho = 0.7$

Helburu funtzioa=2710											
Etapa	$t = 1$	$t = 2$					$t = 3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75
p_2	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
p_3	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
e_g^e	400	260	275	230	400	195	270	195	230	330	230
e_g^s	205	65	80	35	205	0	75	0	35	135	35
s_g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	200	200	200	0	155	200	180	200	200	200
η_g							0	0	0	0	0
ξ							2170	2170	2170	2710	2710

A.12. Taula. $\beta = 1$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 6$, $\rho = 0.7$

Helburu funtzioa=2710											
Etapa	$t = 1$	$t = 2$					$t = 3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75
p_2	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
p_3	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
e_g^e	400	260	275	230	400	195	270	195	230	330	230
e_g^s	205	65	80	35	205	0	75	0	35	135	35
s_g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	200	200	200	0	155	200	180	200	200	200
η_g							0	0	0	0	0
ξ							2170	2170	2170	2710	2710

A.13. Taula. $\beta = 1$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 4$, $\rho = 0.7$

Helburu funtzioa=2710											
Etapa	$t=1$	$t=2$					$t=3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75
p_2	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
p_3	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
e_g^e	400	260	275	230	400	195	270	195	230	330	230
e_g^s	205	65	80	35	205	0	75	0	35	135	35
s_g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	200	200	200	0	155	200	180	200	200	200
η_g							0	0	0	0	0
ξ							2170	2170	2170	2710	2710

A.14. Taula. $\beta = 1$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 2$, $\rho = 0.7$

Helburu funtzioa=2710											
Etapa	$t=1$	$t=2$					$t=3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75
p_2	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
p_3	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
e_g^e	400	260	275	230	400	195	270	195	230	330	230
e_g^s	205	65	80	35	205	0	75	0	35	135	35
s_g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	200	200	200	0	155	200	180	200	200	200
η_g							0	0	0	0	0
ξ							2170	2170	2170	2710	2710

A.15. Taula. $\beta = 1$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 0$, $\rho = 0.7$

Helburu funtzioa=2710											
Etapa	$t=1$	$t=2$					$t=3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75
p_2	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
p_3	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
e_g^e	400	260	275	230	400	195	270	195	230	330	230
e_g^s	205	65	80	35	205	0	75	0	35	135	35
s_g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	200	200	200	0	155	200	180	200	200	200
η_g							0	0	0	0	0
ξ							2170	2170	2170	2710	2710

A.16. Taula. $\beta = 1$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 0$, $\rho = 0.8$

Helburu funtzioa=2710											
Etapa	$t=1$	$t=2$					$t=3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75
p_2	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
p_3	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
e_g^e	450	430	325	180	230	145	450	95	430	450	430
e_g^s	205	265	80	35	5	0	275	0	235	335	235
s_g	50	20	100	0	80	0	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	0	200	200	200	155	0	180	0	0	0
η_g							0	0	0	0	0
ξ							2170	2170	2170	2710	2710

A.17. Taula. $\beta = 1$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 0$, $\rho = 1$

Helburu funtzioa=5543											
Etapa	$t=1$	$t=2$					$t=3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75
p_2	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
p_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^e	430	450	245	400	450	420	450	175	430	450	330
e_g^s	235	295	110	265	235	185	305	10	265	365	265
s_g	30	20	0	0	80	100	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	0	200	0	0	0	0	200	0	0	0
η_g							0	0	0	0	0
ξ							2460	2460	2460	2460	2460

A.18. Taula. $\beta = 0.5$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 0$, $\rho = 1$

Helburu funtzioa=5420											
Etapa	$t=1$	$t=2$					$t=3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75
p_2	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
p_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^e	400	450	275	430	400	350	450	175	430	450	430
e_g^s	235	285	110	265	235	185	285	10	265	285	265
s_g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	10	200	0	0	0	20	200	0	80	0
η_g							0	0	0	0	0
ξ							2460	2460	2460	2460	2460

A.19. Taula. $\beta = 0.5$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 10$, $\rho = 0.7$

Helburu funtzioa=5420											
Etapa	$t=1$	$t=2$					$t=3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75
p_2	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
p_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^e	400	450	275	430	400	350	450	175	430	450	430
e_g^s	235	285	110	265	235	185	285	10	265	285	265
s_g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	10	200	0	0	0	20	200	0	80	0
η_g						0	0	0	0	0	0
ξ							2460	2460	2460	2460	2460

A.20. Taula. $\beta = 0.5$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 0$, $\rho = 0.7$

Helburu funtzioa=5441.5											
Etapa	$t=1$	$t=2$					$t=3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75
p_2	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
p_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^e	400	450	275	430	450	350	450	175	430	450	430
e_g^s	235	285	110	265	235	185	285	10	265	330	265
s_g	0	0	0	0	50	0	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	10	200	0	0	0	20	200	0	35	0
η_g						0	0	0	0	0	0
ξ							2460	2460	2460	2460	2460

A.21. Taula. $\beta = 0.5$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 1$, $\rho = 0.9$

Helburu funtzioa=9347											
Etapa	$t=1$	$t=2$					$t=3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
p_2	45	45	45	45	45	45	45	45	45	45	45
p_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^e	400	450	275	430	450	350	450	175	430	450	430
e_g^s	355	405	230	385	355	305	405	130	385	450	385
s_g	0	0	0	0	50	0	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	10	200	0	0	0	20	200	0	35	0
η_g											
ξ											

A.22. Taula. $\beta = 0$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 1$, $\rho = 0.9$

Helburu funtzioa=9352											
Etapa	$t = 1$	$t = 2$					$t = 3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
p_2	45	45	45	45	45	45	45	45	45	45	45
p_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^e	400	450	275	430	450	350	450	175	430	450	430
e_g^s	355	405	230	385	355	305	405	130	385	450	385
s_g	0	0	0	0	50	0	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	10	200	0	0	0	20	200	0	35	0
η_g											
ξ											

A.23. Taula. $\beta = 0$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 0.5$, $\rho = 0.9$

2 Eskariak B

Nodo bakoitzeko eskariak MW-tan hurrenez hurren: 300 460 475 570 520 350 470 375 430 530 430

Helburu funtzioa=9139											
Etapa	$t = 1$	$t = 2$					$t = 3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
p_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
p_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^e	300	450	275	450	450	350	450	175	430	450	430
e_g^s	300	450	275	450	450	350	450	175	430	450	430
s_g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	10	200	120	70	0	20	200	0	80	0
η_g											
ξ											

A.24. Taula. $\beta = 0$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 10$, $\rho = 0.7$

Helburu funtzioa=8103.63											
Etapa	$t = 1$	$t = 2$					$t = 3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
p_2	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25
p_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^e	327.8	450	450	450	450	325	450	375	430	450	430
e_g^s	275	435	450	450	450	325	438.5	350	405	425	405
s_g	27.8	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	0	0	95	45	0	6.5	0	0	80	0
η_g											
ξ											

A.25. Taula. $\beta = 0$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 5$, $\rho = 0.9$, $\lambda = 10$

Helburu funtzioa=9140.33											
Etapa	$t = 1$	$t = 2$					$t = 3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
p_2	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
p_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^e	311.111	450	265	450	450	340	450	175	430	450	430
e_g^s	290	450	265	450	450	340	440	165	420	440	420
s_g	11.11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	0	200	110	60	0	20	200	0	80	0
η_g											
ξ											

A.26. Taula. $\beta = 0$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 0.5$, $\rho = 0.9$, $\lambda = 0$

Helburu funtzioa=9587											
Etapa	$t = 1$	$t = 2$					$t = 3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
p_2	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
p_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^e	400	380	175	440	450	250	450	175	430	450	430
e_g^s	210	370	185	450	380	260	380	85	340	440	340
s_g	100	20	0	0	80	0	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	0	200	30	50	0	0	200	0	0	0
η_g											
ξ											

A.27. Taula. $\beta = 0$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 0.5$, $\rho = 1$, $\lambda = 0$

Helburu funtzioa=9647											
Etapa	$t = 1$	$t = 2$					$t = 3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
p_2	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
p_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^e	400	380	275	440	450	350	450	75	430	450	330
e_g^s	210	370	185	450	380	260	380	85	340	440	340
s_g	100	20	100	0	80	100	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	0	200	30	50	0	0	200	0	0	0
η_g											
ξ											

A.28. Taula. $\beta = 0$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 0$, $\rho = 1$, $\lambda = 0$

Helburu funtzioa=2410											
Etapa	$t = 1$	$t = 2$					$t = 3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75
p_2	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
p_3	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
e_g^e	300	260	275	450	320	195	270	195	174	330	230
e_g^s	105	65	80	175	125	0	75	0	35	135	35
s_g	0	0	0	0	80	0	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	200	200	200	200	155	200	180	200	200	200
η_g						0	0	0	0	0	0
ξ							2410	2410	2410	2410	2410

A.29. Taula. $\beta = 1$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 10$, $\rho = 0.7$, $\lambda = 0$

Helburu funtzioa=2410											
Etapa	$t = 1$	$t = 2$					$t = 3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75
p_2	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
p_3	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
e_g^e	300	260	275	450	420	195	270	195	174	260	430
e_g^s	105	65	80	175	125	0	75	0	35	135	235
s_g	0	0	0	80	100	0	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	200	200	200	200	155	200	180	200	200	0
η_g						0	0	0	0	0	0
ξ							2410	2410	2410	2410	2410

A.30. Taula. $\beta = 1$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 8$, $\rho = 0.7$, $\lambda = 0$

Helburu funtzioa=2410											
Etapa	$t = 1$	$t = 2$					$t = 3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75
p_2	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
p_3	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
e_g^e	300	360	275	450	420	195	200	195	174	260	430
e_g^s	105	65	80	175	125	0	75	0	35	135	235
s_g	0	100	0	80	100	0	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	200	200	200	200	155	200	180	200	200	0
η_g						0	0	0	0	0	0
ξ							2410	2410	2410	2410	2410

A.31. Taula. $\beta = 1$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 6$, $\rho = 0.7$, $\lambda = 0$

Helburu funtzioa=2410											
Etapa	$t = 1$	$t = 2$					$t = 3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75
p_2	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
p_3	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
e_g^e	300	360	275	450	420	195	200	195	174	260	230
e_g^s	105	65	80	175	125	0	75	0	35	135	35
s_g	0	100	0	80	100	0	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	200	200	200	200	155	200	180	200	200	200
η_g						0	0	0	0	0	0
ξ							2410	2410	2410	2410	2410

A.32. Taula. $\beta = 1$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 4$, $\rho = 0.7$, $\lambda = 0$

Helburu funtzioa=2410											
Etapa	$t = 1$	$t = 2$					$t = 3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75
p_2	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
p_3	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
e_g^e	300	360	275	450	420	195	200	195	174	260	230
e_g^s	105	65	80	175	125	0	75	0	35	135	35
s_g	0	100	0	80	100	0	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	200	200	200	200	155	200	180	200	200	200
η_g						0	0	0	0	0	0
ξ							2410	2410	2410	2410	2410

A.33. Taula. $\beta = 1$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 4$, $\rho = 0.7$, $\lambda = 0$

Itxarondako Irabazia=2410											
Etapa	$t = 1$	$t = 2$					$t = 3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75
p_2	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
p_3	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
e_g^e	300	360	275	450	420	195	190	195	166	250	230
e_g^s	105	65	80	175	125	0	75	0	35	135	35
s_g	0	100	0	80	100	0	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	200	200	200	200	155	200	180	200	200	200
η_g						0	0	0	0	0	0
ξ							2410	2410	2410	2410	2410

A.34. Taula. $\beta = 1$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 5$, $\rho = 0.8$, $\lambda = 0$

Helburu funtzioa=5183											
Etapa	$t = 1$	$t = 2$					$t = 3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75
p_2	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
p_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^e	300	450	275	450	450	350	450	175	430	450	430
e_g^s	135	285	110	285	285	185	285	10	265	285	265
s_g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	10	200	120	70	0	20	200	0	80	0
η_g						0	0	0	0	0	0
ξ							2160	2160	2160	2160	2160

A.35. Taula. $\beta = 0.5$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 10$, $\rho = 0.7$, $\lambda = 0$

Helburu funtzioa=5460											
Etapa	$t = 1$	$t = 2$					$t = 3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75
p_2	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
p_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^e	400	380	175	450	450	350	450	175	430	450	330
e_g^s	135	295	110	385	305	185	305	10	265	365	265
s_g	100	20	0	0	80	100	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	0	200	20	50	0	0	200	0	0	0
η_g						0	0	0	0	0	0
ξ							2160	2160	2160	2160	2160

A.36. Taula. $\beta = 0.5$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 0$, $\rho = 1$, $\lambda = 0$

Helburu funtzioa=3953											
Etapa	$t=1$	$t=2$					$t=3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75
p_2	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
p_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^e	300	450	275	450	450	350	450	375	430	450	430
e_g^s	135	285	110	285	285	185	285	210	265	285	265
s_g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	10	200	120	70	0	20	0	0	80	0
η_g						0	0	0	0	0	0
ξ							360	360	360	360	360

A.37. Taula. $\beta = 0.5$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 0$, $\rho = 0.9$, $\lambda = 0$

3 Eskariak C

Nodo bakoitzeko eskariak MW-tan hurrenez hurren: 400 460 475 430 400 350 470 375 530 530 530

Helburu funtzioa=9449											
Etapa	$t=1$	$t=2$					$t=3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75
p_2	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
p_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^e	400	450	275	430	400	350	450	175	450	450	450
e_g^s	400	450	275	430	400	350	450	175	450	450	450
s_g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	10	200	0	0	0	20	200	80	80	80
η_g											
ξ											

A.38. Taula. $\beta = 0$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 10$, $\rho = 0.7$, $\lambda = 0$

Helburu funtzioa=9579.51											
Etapa	$t=1$	$t=2$					$t=3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
p_2	80	80	80	80	80	80	80	80	80	80	80
p_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^e	400	450	275	450	450	438.9	450	175	450	450	450
e_g^s	320	370	195	350	320	270	370	95	388	415	450
s_g	0	0	0	20	50	88.9	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	10	200	0	0	0	20	200	62	35	0
η_g											
ξ											

A.39. Taula. $\beta=0$, $\alpha=0.95$, $\kappa=4$, $\rho=0.9$, $\lambda=0$

Helburu funtzioa=9643.07											
Etapa	$t=1$	$t=2$					$t=3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
p_2	80	80	80	80	80	80	80	80	80	80	80
p_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^e	400	450	275	450	450	438.9	450	175	450	450	450
e_g^s	320	370	195	350	320	270	370	95	388	415	450
s_g	0	0	0	20	50	88.9	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	10	200	0	0	0	20	200	62	35	0
η_g											
ξ											

A.40. Taula. $\beta=0$, $\alpha=0.95$, $\kappa=2$, $\rho=0.9$, $\lambda=0$

Helburu funtzioa=10195											
Etapa	$t=1$	$t=2$					$t=3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
p_2	80	80	80	80	80	80	80	80	80	80	80
p_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^e	450	430	325	450	450	400	450	75	450	430	430
e_g^s	320	380	195	340	320	270	390	95	450	450	450
s_g	50	20	100	80	100	100	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	0	200	10	0	0	0	200	0	0	0
η_g											
ξ											

A.41. Taula. $\beta=0$, $\alpha=0.95$, $\kappa=0$, $\rho=1$, $\lambda=0$

Helburu funtzioa=2710											
Etapa	$t=1$	$t=2$					$t=3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75
p_2	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
p_3	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
e_g^e	400	260	275	230	400	195	270	195	330	330	330
e_g^s	205	65	80	35	205	0	75	0	135	135	135
s_g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	200	200	200	0	155	200	180	200	200	200
η_g							0	0	0	0	0
ξ							2710	2710	2710	2710	2710

A.42. Taula. $\beta = 1$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 10$, $\rho = 0.7$, $\lambda = 0$

Helburu funtzioa=2710											
Etapa	$t=1$	$t=2$					$t=3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75
p_2	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
p_3	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
e_g^e	400	260	275	330	300	195	270	195	230	230	330
e_g^s	205	65	80	35	5	0	75	0	135	135	135
s_g	0	0	0	100	100	0	0	0	0	0	0
e_g^{se}	200	200	200	200	155	200	180	200	200	200	
η_g							0	0	0	0	0
ξ							2710	2710	2710	2710	2710

A.43. Taula. $\beta = 1$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 2$, $\rho = 1$, $\lambda = 0$

Helburu funtzioa=2710											
Etapa	$t=1$	$t=2$					$t=3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75
p_2	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
p_3	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
e_g^e	450	430	325	260	230	225	450	95	450	450	450
e_g^s	205	265	80	35	5	0	275	0	335	335	335
s_g	50	20	100	80	80	80	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	0	200	200	200	155	0	180	0	0	0
η_g							0	0	0	0	0
ξ							2710	2710	2710	2710	2710

A.44. Taula. $\beta = 1$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 0$, $\rho = 1$, $\lambda = 0$

Helburu funtzioa=2710											
Etapa	$t=1$	$t=2$					$t=3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75
p_2	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
p_3	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
e_g^e	400	260	275	230	400	195	270	195	330	330	330
e_g^s	205	65	80	35	205	0	75	0	135	135	135
s_g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	200	200	200	0	155	200	180	200	200	200
η_g							0	0	0	0	0
ξ							2710	2710	2710	2710	2710

A.45. Taula. $\beta = 1$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 2$, $\rho = 0.9$, $\lambda = 0$

Helburu funtzioa=5488											
Etapa	$t=1$	$t=2$					$t=3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75
p_2	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
p_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^e	400	450	275	430	400	350	450	175	450	450	450
e_g^s	235	285	110	265	235	185	285	10	285	285	285
s_g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	10	200	0	0	0	20	200	80	80	80
η_g							0	0	0	0	0
ξ							2460	2460	2460	2460	2460

A.46. Taula. $\beta = 0.5$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 0$, $\rho = 0.7$, $\lambda = 0$

Helburu funtzioa=5510.8											
Etapa	$t=1$	$t=2$					$t=3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75
p_2	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
p_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^e	400	450	275	450	400	444.12	450	175	450	450	450
e_g^s	235	285	110	265	235	185	285	10	302	285	365
s_g	0	0	0	20	0	94.1	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	10	200	0	0	0	20	200	63	80	0
η_g							0	0	0	0	0
ξ							2460	2460	24600	2460	2460

A.47. Taula. $\beta = 0.5$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 5$, $\rho = 0.85$, $\lambda = 0$

Helburu funtzioa=5593.03											
Etapa	$t=1$	$t=2$					$t=3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75
p_2	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
p_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^e	400	450	275	450	450	438.9	450	175	450	450	450
e_g^s	235	285	110	265	235	185	285	10	303	330	365
s_g	0	0	0	20	50	88.9	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	10	200	0	0	0	20	200	62	35	0
η_g							0	0	0	0	0
ξ							2460	2460	24600	2460	2460

A.48. Taula. $\beta = 0.5$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 2$, $\rho = 0.9$, $\lambda = 0$

Helburu funtzioa=5869											
Etapa	$t=1$	$t=2$					$t=3$				.
nodoa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_1	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75
p_2	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
p_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_g^e	450	430	225	450	450	400	450	175	450	430	430
e_g^s	235	295	110	255	235	185	305	10	365	365	365
s_g	50	20	0	80	100	100	0	0	0	0	0
e_g^{se}	0	0	200	10	0	0	0	200	0	0	0
η_g							0	0	0	0	0
ξ							2460	2460	2460	2460	2460

A.49. Taula. $\beta = 0.5$, $\alpha = 0.95$, $\kappa = 0$, $\rho = 1$, $\lambda = 0$