

KOMUNIKAZIOAREN Teoriaren Oinarriak

INMA HERNÁEZ RIOJA



ITZULPENA: IGOR FERNÁNDEZ PÉREZ

eman ta zabal zazu



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

CIP. Biblioteca Universitaria

Hernández Rioja, Inma

Komunikazioaren teoriaren oinarriak [Recurso electrónico] / Inma Hernández Rioja ; itzulpena, Igor Fernández Pérez. – Datos. – Bilbao : Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea, Argitalpen Zerbitzua = Servicio Editorial, [2019]. – 1 recurso en línea : PDF (133 p.)

Modo de acceso: World Wide Web.

ISBN: 978-84-9082-979-0

1. Sistemas de telecomunicaciones. 2. Tratamiento de señales. 3. Telecomunicaciones.
I. Fernández Pérez, Igor, trad.

(0.034)621.39

Komunikazioaren Teoriaren Oinarriak

Inma Hernáez Rioja

Itzulpena: Igor Fernández Pérez

Esker onak

Liburu hau Bilboko Ingeniaritza Eskolan (Euskal Herriko Unibertsitatea UPV/EHU) Telekomunikazio Teknologiaren Ingeniaritzako Gradu titulazioan irakasten den **Komunikazioaren Teoria** irakasgaiaren klase magistraletan gidaliburu gisa erabiltzeko idatzi dut. Edukiak, beraz, irakaskuntza plan berria ezarri zenetik klase magistralen irakaslegoak diseinatutakoarekin bat datoz. Ondorioz, liburu hau sortzeko, egileaz gain, **Sofía Ruiz de Gauna Gutiérrez** eta **Igor Fernández Pérez** irakasleek parte hartu dute. Hainbat zuzenketa eta hobekuntza egin dituzte ere textuan eta eskerrak eman nahiko nizkieke. Azkenik, Igorri eskerrak eman nahiko nizkieke berriro ere liburuaren itzulpena euskerara egin izanagatik.

Sarrera

Irakasgai hau telekomunikazio-adarreko modulu komunaren barne dago (02 modulua) eta, horrela izanda, telekomunikazioen oinarritzko kontzeptuak lantzen ditu. Ikasgai honek, ikuspuntu formal eta matematiko batetik abiatuz, telekomunikazio sistema modernoetan informazioaren transmisioa ahalbidetzen dituzten oinarritzko mekanismoak deskribatzen ditu (irradi eta telebista digitala, datu-transmisioa, telefono bidezko komunikazioak, eta abar).

Ikasgai hau titulazioaren bigarren kurtsoko bigarren lauhilabetean ematen da. Honela, seinaleen analisirako tresnak eta seinaleen arteko eragiketak (konboluzioa eta Fourier-en transformatua) menperatzea funtsezkoa izango da, eta gaitasun hauek, bereziki, *Zirkuituen Analisia* eta *Seinaleen Tratamendua* irakasgaietan bereganatzen dira (biak lehenengo kurtsoko oinarritzko hezkuntzako irakasgaiak). Suposatzen da ere analisi estatistikoko oinarritzko teknikak kontrolpean daudela (*Estatistika* irakasgaietan ikasiak, lehenengo kurtsuan) eta baita algebra eta kalkuloko beste oinarritzko tresnak ere (*Algebra*, *Kalkulua I*, *Kalkulua II* eta *Matematiken Gehipena*), esaterako, funtzioen adierazpen grafikoa, oinarritzko integralak, zenbaki konplexuen bidezko eragiketak, funtzio trigonometrikoak, adierazpen bektoriala eta bektoreen bidezko oinarritzko eragiketak. Honez gain, garrantzitsua da energia eta potentziaren kontzeptuak erabat ulertuak izatea, *Fisikaren Gehipena* irakasgaietan landuak.

Kurtsuak 7.5 ECTS kreditu dauzka eta horietatik, 3 ECTS klase magistralei dagozkie, 2.25 gelako praktikei (arikiketen klaseei), 1.5 laborategiko praktikei eta, azkenik, 0.75 *mintegi* motako klaseei. Liburu honen edukia klase magistralen 3 ECTS kredituekin bat dator (30 ordutako azalpen teorikoak).

Gaien Aurkibidea

1. Komunikazio-sistemei sarrera	11
1.1. Komunikazio-sistema baten eredia	11
1.2. Transmisio-bidearen karakterizazioa	12
1.2.1. Ahuldura	13
1.2.2. Distortsioa	15
2. Zorizko seinale eta prozesuak	19
2.1. Zorizko prozesuak	19
2.1.1. Zorizko prozesuei sarrera	19
2.1.2. Definizioak	20
2.1.3. Estatistikaren oinarriko kontzeptuak	22
2.2. Batezbesteko estatistikoak	23
2.2.1. Batez besteko balioa	23
2.2.2. Autokorrelazioa	23
2.2.3. Batez besteko balio koadratikoa	24
2.2.4. Autokobariantza	24
2.2.5. Bariantza	25
2.2.6. Korrelazio gurutzatua	25
2.2.7. Kobariantza gurutzatua	26
2.2.8. Korrelazio gurutzatuaren koefizientea	26
2.2.9. Prozesu inkorrelatuak, ortogonalak eta independenteak	26
2.3. Prozesu geldikorren propietateak	27
2.4. Denbora-eremuko batezbestekoak eta prozesu ergodikoak	29
2.4.1. Batezbesteko estatistikoen eta denbora-eremuko batezbestekoen laburpena	30
2.5. Zorizko seinaleen errepresentazioa frekuentzian	30
2.5.1. Potentziaren dentsitate-espektroa	30
2.5.2. Propietateak	32
2.6. Adibide praktikoak	33
2.6.1. Zorizko fasea daukan kosinua	33
3. Seinaleen transmisioa zaratarekin	35
3.1. Prozesu geldikorrek sistema lineal eta aldagaitzetan zehar	35
3.1.1. Irteerako prozesuaren batez besteko balioa	35
3.1.2. Autokorrelazioa eta korrelazio gurutzatuak	36
3.1.3. Potentziaren dentsitate-espektroak	37
3.2. Prozesu gausstarrak	38
3.2.1. Zorizko aldagai gausstarrak	38

3.2.2.	Prozesu gausstarrak	41
3.2.3.	Prozesu gausstarren propietateak	42
3.3.	Zarata termikoa eta zarata zuria	42
3.4.	Zarata iragazia eta zarataren banda-zabalera baliokidea	43
3.4.1.	Adibidea: RC behe-paseko iragazkia	44
3.5.	Oinarri-bandako transmisio-sistema baten eredu zaratarekin	45
4.	Banda-paseko seinale eta sistemak	49
4.1.	Hilbert-en transformatua	49
4.2.	Seinale analitikoa	51
4.3.	Behe-paseko baliokidea	52
4.4.	Banda-paseko sistemak	55
4.5.	Banda-paseko prozesuak	55
4.5.1.	Hilbert-en transformatzailea	56
4.5.2.	Seinale analitikoa	56
4.5.3.	Behe-paseko baliokidea	57
4.5.4.	Fase- eta koadratura-osagaiak	57
5.	Oinarri-bandako komunikazio digitalak	59
5.1.	Linea-kodeak	59
5.2.	Seinale digitalaren potentziaren dentsitate-espektroa	62
5.2.1.	Linea-seinale digitalaren potentziaren dentsitate-espektroaren kalkulua	62
5.2.2.	Korrelaziorik gabeko sinboloen PDE-a	64
5.2.3.	Espektro-efizientzia	65
5.2.4.	Transmitituriko potentzia	65
5.3.	Adibideak	66
5.3.1.	NRZ kode bitar unipolarra	66
5.3.2.	NRZ kode M-tar unipolarra	68
5.3.3.	NRZ kode bitar polarra	68
5.3.4.	NRZ kode M-tar polarra	70
5.3.5.	RZ kode bitar polarra	70
5.3.6.	RZ kode Mtar polarra	71
5.3.7.	RZ kode bitar unipolarra	72
5.3.8.	RZ kode Mtar unipolarra	74
5.3.9.	Manchester kodea	74
5.4.	Bandan murriztutako kanalak	76
5.4.1.	Sinboloen arteko interferentzia	76
5.4.2.	Nyquist-en edo kosinu altxatuaren pultsuak	78
5.4.3.	Laburpena	81
6.	Modulazio digitalak	83
6.1.	Sarrera	83
6.2.	Banda-paseko prozesu geldikorren PDE-aren adierazpen orokorra	84
6.3.	Anplitude-desplazamenduko modulazioa	84
6.3.1.	Deskribapena	84
6.3.2.	Potentziaren dentsitate-espektroa	85
6.4.	Fase-desplazamenduko modulazioa	87

6.4.1.	Deskribapena	87
6.4.2.	Fase- eta koadratura-osagaiak	88
6.4.3.	Potentziaren dentsitate-espektroa	89
6.4.4.	Kasu partikularrak PSKn	91
6.5.	Frekuentzia-desplazamenduko modulazioa	92
6.5.1.	Sarrera	92
6.5.2.	Potentziaren dentsitate-espektroa	94
7.	Zarata komunikazio digitaletan	97
7.1.	Seinale-espazioa	97
7.1.1.	Definizioak	97
7.1.2.	Korrelatzailea eta iragazki egokitua	99
7.1.3.	Adibideak	100
7.2.	Hartzailerik hoberena: ikuspuntu probabilitikoa	102
7.2.1.	MAP irizpidea	102
7.2.2.	Erabaki-eremuak	104
7.2.3.	Erabaki-eremuak kasu ez-ekiprobablean	105
7.3.	Errore-probabilitatea kalkulatzeko	107
7.3.1.	Dimentsio bakarreko espazioak	107
A.	Seinale eta sistemen oinarrizko kontzeptuak	117
A.1.	Fourier-en transformatua f erabiliz	117
A.2.	Oinarrizko seinaleen Fourier-en transformatuak. Propietateak	118
A.2.1.	Dualtasuna	118
A.2.2.	Delta funtzioa	118
A.2.3.	Atzerapenak, desplazamenduak eta funtzio sinusoidalak	119
A.2.4.	Konboluzioa	120
A.2.5.	Esponentzial erreala	122
A.2.6.	Pultsu errektangularra eta pultsu triangeluarra	122
A.3.	Batez besteko balioa	124
A.4.	Energia eta potentzia	125
A.5.	Korrelazio gurutzatua eta autokorrelazioa	126
A.5.1.	Parseval-en teorema	128
A.6.	Oinarrizko Fourier-en transformatuen taula	129
B.	Gomendatutako liburuak	131

1. gaia

Komunikazio-sistemei sarrera

1.1. Komunikazio-sistema baten eredua

Komunikazio-sistema baten oinarritzko helburua informazio-iturri baten eta hartzaile baten arteko informazioaren transmisioa da (ikusi 1.1. irudia). Informazioa transmititzeko, informazioa bera seinale elektriko baten bidez adierazten da fisikoki (analogikoa edo digitala). Informazioaren jatorrizko formatua seinale elektriko bat ez bada (adibidez, seinale akustiko bat, irudi bat...), transduktoreak erabiliko dira (mikrofonoak edo kamerak) seinale elektriko bat lortzeko; azkeneko horrek sistema zeharkatuko du. Hartzailearen aldean, informazioa bere jatorrizko itxurarekin berreskuratzeko, alderantzizko bihurketa egingo duen transduktore bat ere egon daiteke (bozgorailuak edo pantailak). Zehazki, komunikazio-sisteman jarriko dugu arreta irakasgai honetan; sistema horren sarreran eta irteeran, seinale elektrikoak egongo dira, analogikoak edo digitalak, zeinak transmititu nahi den informazioa edo mezua eramaten baitute. Horregatik, transmitituko den *seinale* edo *mezu*-ari buruz hitzgingo dugu, biok ezberdindu barik, adierazpen baliokidetzat hartuz. Komunikazio-sistemaren funtzioa seinale edo mezu horien transmisioa modu egokian gauzatzea izango da, jatorrizko puntu batetik urrun dagoen helburu batera.



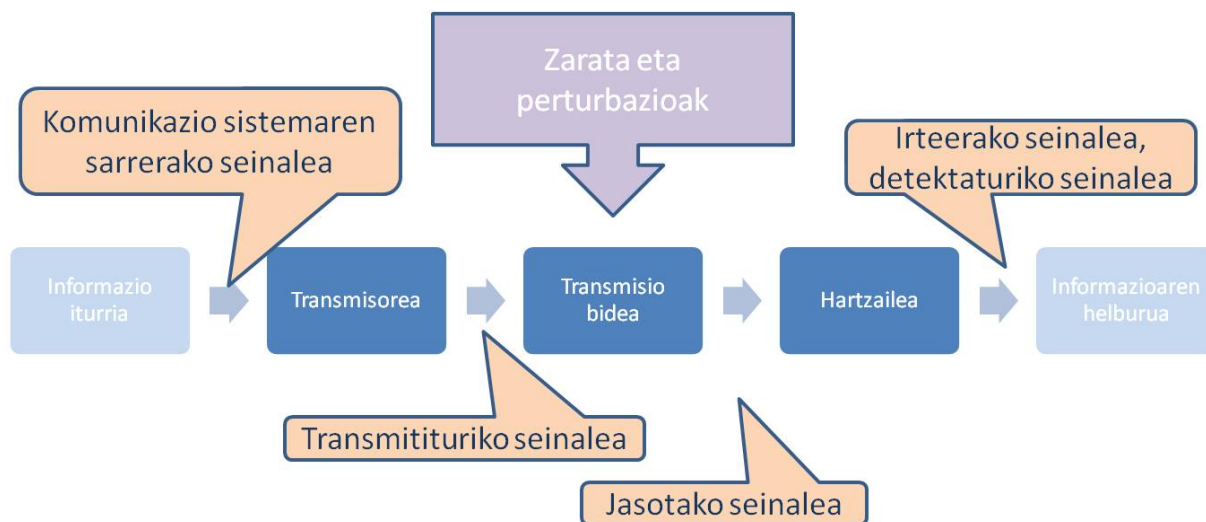
1.1. irudia. Iturri baten eta urrun dagoen helburu baten arteko komunikazio-sistema, informazio-igorle gisa.

Komunikazio-sistemaren helburua igorlearen aldean sortutako mezuaren erreplika bat hartzailearen aldean sortzea da (ikusi 1.2. irudia). Seinaleak transmisio-bide mota askoren bitartez transmititu ahal izango dira (aire bidezko irrati-komunikazioak, zuntz optikoa, hainbat kable metaliko mota...). Komunikazio-bidea zeharkatzean, seinaleak transmisio-baldintzen eragina jasoko du (zarata termikoa eta hainbat jatorritako interferentziak). Horregatik, alde batetik, seinalearen ezaugarriak transmisio-bidearen arabera egokitu beharko dira (kable, zuntz optiko edo irrati-komunikazioen bidezko transmisio baterako modu egokian modulatu), eta, bestetik, seinalea komunikazio-bidean zehar jaso dituen erasoen kontra babestu beharko da (anplifikatu, kode sendoak sartu, erroreen kontra babestu...). Eragiketa horiek transmisorearen ekipoa

egino ditu, zeinak seinale elektrikoaren transdukzioa ere egin beharko duen (irradi-komunikazio bidezko transmisiorako eremu elektromagnetikoa lortu antenna baten bidez, seinale optikoa lortu laser baten bidez zuntz optikoaren bidezko transmisioan, eta abar).

Hartzaileak jatorrizko mezua berreskuratu beharko du jasotako seinaletik abiatuta, zeina ahulduta edo hondatuta hel daitekeen. Seinale elektrikoa berreskuratu eta gero (antena, PIN diodoak edo bestelako transduktoreak erabiliz), hartzaileak orokorrean demodulazio eta detekzio eragiketak egingo ditu.

Komunikazio-sistema batek seinale asko transmititzea ahalbidetzen du, eta transmisioaren barnean dauden ekipo guztiak biltzen ditu; aldiz, *transmisio kanal* izenez ezagutzen dena seinaleak jarraitzen duen bide bakarra da, igorletik hartzaileerako bidaian. Komunikazioaren teoriak transmisio-kanaletan zehar doazen seinaleen transmisioaren oinarri teorikoak aztertzen ditu, seinaleen eta zarataren modelaketatik eta karakterizaziotik abiatuz, zarataren eragina komunikazioan zelakoa den aztertuz eta, aldi berean, *kanalaren transmisio-ahalmenaren* eta haren ezaugarrien analisisa eginez. Komunikazioaren teoriak komunikazio-bidearen perturbazio eta erasoen kontra informazioa babestea ahalbidetuko duten metodo eta teknikak helarazten dizkigu, eta komunikazio-bidea modurik egokienean erabiltzen ere erakutsiko digu, baliabide erabilgarriak modu eraginkorrean partekatzeko. Laburbilduz, esan genezake aukeratutako komunikazio bidean zeharreko komunikazioa modu eraginkorrean gauzatzeko teknikak aztertzen dituela komunikazioaren teoriak.



1.2. irudia. Komunikazio-sistema baten osagaiak.

1.2. Transmisio-bidearen karakterizazioa

Seinaleen transmisioan, euren gain eragina duten gertakaririk garrantzitsuenak ahuldura, distortsioa eta zarata dira. Atal honetan, lehenengo biei buruz arituko gara, eta zarataren eraginei buruzko azterketa beste gai baterako utziko dugu.

$$a = 10^{\frac{\alpha}{10}} \quad (1.3)$$

$$l = \frac{P_T}{P_R} = 10^{\frac{L}{10}} = 10^{\frac{\alpha d}{10}} \quad (1.4)$$

non P_T eta P_R unitate linealetan adierazita egon beharko diren (W edo mW -tan).

l ahuldura linealaren balioak ez dauka unitaterik; 1 baino handiagoa izango da, eta potentziaren galera jakin bat adierazten du. l ahuldura $g = \frac{1}{l}$ irabaziaren alderantzizkoa da; normalean, anplifikazio-sistemetan erabiltzen da kontzeptu hori, eta irteerako potentzia sarre-rakoa baino handiagoa dela adierazten du ($g > 1$).

Potentzia unitate logaritmikotan ere adieraz daiteke. Ohikoenak dBW-a (*debe-batio* irakurtzen da) eta dBm-a (*debe-eme* irakurtzen da) dira. Unitate horiek W-tan (dBW-rako) edo mW-tan (dBm-rako) adierazitako unitateen logaritmoa (10-eko oinarrian) 10ez biderkatuz kalkulatzen dira:

$$P(\text{dBW}) = 10 \log P(W) \quad P(\text{dBm}) = 10 \log P(mW)$$

Potentzia unitate logaritmikotan adierazita baldin badago (normalean dBm-tan), ahuldura dB-etan transmititu eta jasotako potentzien diferentzia izango da, zuzenean:

$$\begin{aligned} L(\text{dB}) &= 10 \cdot \log \frac{P_T(mW)}{P_R(mW)} = 10 \cdot \log P_T(mW) - 10 \cdot \log P_R(mW) \\ &= P_T(\text{dBm}) - P_R(\text{dBm}) \end{aligned}$$

Telekomunikazioetan, ohikoa da unitate logaritmiko hauekin lan egitea, eta, beraz, interesgarria da sarritan suertatzen diren erlazio batzuk ezagutzea ⁵:

Potentzia bikoitza edo erdia Komunikazio-bide batek seinalearen potentzia erdira murrizten badu, bideak sartutako ahuldura 3 dB-ekoa da:

$$\begin{aligned} P_R \text{ (mW)} &= \frac{P_T \text{ (mW)}}{2} \\ L(\text{dB}) &= 10 \cdot \log 2 = 3 \text{ dB} \end{aligned}$$

Horrela, adibidez, sarrerako potentzia 1 mW-ekoa baldin bada (0 dBm), irteerako potentzia (3 dB-eko ahuldura baterako) 0,5 mW-ekoa izango da (-3 dBm).

Modu berean, gailu batek 3 dB-eko potentzia-irabazia sartzen badu, irteerako potentzia unitate linealetan adierazita (W-tan edo mW-tan) sarrerako potentzia halako bi izango da. Adibidez, sarrerako potentzia 1 mW-ekoa baldin bada (0 dBm), irteerakoa 2 mW-ekoa (3 dBm) izango da.

Laburbilduz, potentziaren unitate logaritmikoetan 3 dB gehitzea edo kentzea, eta unitate linealetan potentzia bikoitzea edo erdibitzea baliokideak dira.

⁵Oso komenigarria da honako hau jakitea: $\log 2 \simeq 0,3$, $\log 10 = 1$ eta $\log 1 = 0$.

10-eko irabaziak edo ahuldurak $10 \cdot \log 10 = 10$ denez, 10eko faktore bat potentzien erlazioan eta 10 dB gehitzea (edo kentzea) baliokideak dira. Adibidez, transmitituriko potentzia 1 mW-ekoa baldin bada (0 dBm), eta komunikazio-bidearen ahuldura $L = 10$ dB-ekoa baldin bada, jasotako potentzia 0,1 mW-ekoa izango da (-10 dBm).

Kateko irabaziak edo ahuldurak L_1 dB-eko eta L_2 dB-eko ahuldura daukaten bi komunikazio-bide katean konektatzen badira, sartutako ahuldura osoa $L = L_1 + L_2$ dB-ekoa izango da. Adibidez, bi komunikazio-bide kateatzen badira eta bakoitzaren ahuldura 10 dB-ekoa baldin bada, ahuldura osoa 20 dB-ekoa izango da. Horrela, transmitituriko potentzia 1 mW-ekoa baldin bada (0 dBm), lehenengo komunikazio-bidea pasatu eta gero jasotako potentzia 0,1 mW-ekoa izango da (-10 dBm), eta seinaleak bigarren komunikazio-bidea pasatu eta gerokoa, berriz, 0,01 mW-ekoa (-20 dBm).

Adibidea Izan bedi 5 mW-eko potentzia daukan probako seinale baten transmisioa, $\alpha = 1,2$ dB/km-ko ahuldura daukan lotura ardatzkide batetik zehar. Igorle eta hartzaileen aldeetan kokaturiko konektoreek sartzen duten ahuldura 0,6 dB-ekoa da. Hartzailearen aldean jasotako potentzia kalkulatu nahi dugu, zeina 2 km-ko distantziara dagoen.

Transmitituriko potentzia unitate logaritmikotan adieraziko dugu:

$$P_T \text{ (dBm)} = 10 \cdot \log 5 \text{ mW} \simeq 7 \text{ dBm}$$

Loturak sartutako ahuldura osoa honako hau izango da:

$$L = 1,2 \text{ dB/km} \cdot 2 \text{ km} + 0,6 \text{ dB} = 3 \text{ dB}$$

Eta, azkenik, jasotako potentzia:

$$P_R = P_T - L = 4 \text{ dBm}$$

edo unitate linealetan: $P_R = 10^{4/10} = 2,5 \text{ mW}$.

1.2.2. Distortsioa

Transmisio-sistema batek sartzen duen distortsioa bere transmisio ezaugarriekin erlazionatuta dago, eta, orokorrean, bi motatakoa izan daiteke: *lineala* eta *ez-lineala*. *Distortsio lineala* sistema linealek sor dezaketena da, zeinak transferentzia-funtzioak edo $H(f)$ frekuentzia-erantzunak karakterizatzen dituen. *Distortsio ez-lineala* sistema ez-linealek sartzen dutena da, zeinen erantzuna ezin den transferentzia-funtzio baten bidez karakterizatu; aldiz, $y = f(x)$ sistemaren *funtzio karakteristiko* izenez ezagutzen den funtzioaren bidez karakterizatzen da.

1.2.2.1. Distortsio lineala

Esaten da sistema lineal batek ez duela distortsiorik sartzen $y(t)$ irteera $x(t)$ sarreraren bertsio eskalatu eta atzeratu bat denean:

$$y(t) = K \cdot x(t - t_0) \tag{1.5}$$

non:

- $K > 0$ eskala-faktoreari dagokion balioa den (normalean, $K < 1$ izango da seinaleak komunikazio-bidean ahuldura jasoko duelako).
- $t_0 > 0$ seinaleak transmisio-sistema zeharkatzeko nahitaez jasandako atzerapena den.

Sistema lineal eta aldagaitz bat $h(t)$ *pultsu-erantzunarekin* karakteriza daiteke, zeinaren Fourier-en transformatua sistemaren *frekuentzia-erantzuna* den. Horrek esan nahi du sarrerako edozein $x(t)$ seinalaren $y(t)$ sistemaren erantzuna konboluzioaren ekuazioa erabiliz kalkulatu dezakegula:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Horrela, sistema batek distortsiorik ez sartzeko, (1.5) erabiliz:

$$y(t) = K \cdot x(t - t_0) = K \cdot x(t) * \delta(t - t_0)$$

beraz, distortsiorik gabeko sistema lineal batek honako pultsu-erantzun hau edukiko du:

$$h(t) = K \cdot \delta(t - t_0)$$

Baldintza hau ere frekuentzia-eremuan adieraz dezakegu:

$$H(f) = K e^{-j2\pi f t_0}$$

Hau da, distortsiorik gabeko sistema baten frekuentzia-erantzunak honako hau beteko du:

$$|H(f)| = K \quad \text{modulu konstantea} \quad (1.6)$$

$$\angle H(f) = -2\pi f t_0 \quad \text{fase lineala} \quad (1.7)$$

Horrela, distortsiorik gabeko sistema baten irteeraren frekuentzia-erantzuna honako hau izango da:

$$\begin{aligned} Y(f) &= X(f) \cdot H(f) = X(f) \cdot K e^{-j2\pi f t_0} \\ |Y(f)| &= K \cdot |X(f)| \\ \angle Y(f) &= \angle X(f) - 2\pi f t_0 \end{aligned}$$

Bi baldintzetariko bat betetzen ez bada, orduan, sistemak distortsio lineala duela esango dugu; zehazki, *anplitude-distortsio lineala*, modularen baldintza betetzen ez bada, edo *fase-distortsio lineala*, frekuentzia-erantzunaren fasearen baldintza betetzen ez bada:

$$|H(f)| \neq K \quad \Rightarrow \text{Anplitude-distortsio lineala} \quad (1.8)$$

$$\angle H(f) \neq -2\pi f t_0 \quad \Rightarrow \text{Fase-distortsio lineala} \quad (1.9)$$

Frekuentzia-erantzunaren baldintza horiek sarrerako seinalearen frekuentzia-tartean bete beharko dira. Adibidez, $x(t)$ sarrerako seinalea *behe-pasekoa* baldin bada, $X(f) \neq 0$ izanik $|f| < B$ Hz frekuentzia-tartean, (1.6) eta (1.7) baldintzak frekuentzia-tarte horretan bete beharko dira. Modu berean, *banda-paseko* seinalea baldin bada, haren erantzuna $f_1 < |f| < f_2$ tartean definituta egonik, (1.6) eta (1.7) baldintzak frekuentzia-tarte horretan bete beharko dira.

1.2.2.2. Distortsio ez-lineala

Distortsio ez-lineala sistema ez-linealetan sortzen da. Halako sistemetan, irteera ezin da pulsu-erantzuna eta konboluzio-ekuazioa erabiliz kalkulatu. $x(t)$ sarrerako seinale baterako, irteera funtzio karakteristikoaren bitartez lortzen da, eta honako hurbilketa polinomiko hau erabili ohi da:

$$y(t) = C_0 + C_1 \cdot x(t) + C_2 \cdot x^2(t) + \dots + C_N \cdot x^N(t)$$

Orduan:

$$Y(f) = C_0 + C_1 \cdot X(f) + C_2 \cdot X(f) * X(f) + \dots + C_N \cdot \underbrace{X(f) * \dots * X(f)}_N$$

Aurreko ekuazioen arabera, argi dago irteeran frekuentzia berriak agertuko direla, sarrerako seinalean ez daudenak, ez-linealtasuna sortzen duten gaiak direla eta, hain zuzen (C_0 , C_2 , ..., C_N). Sistemaren distortsioaren neurketa sarreran probako seinale edo tonu bat erabiliz egiten da, $x(t) = \cos 2\pi f_0 t$. Sarrera horrekin, irteeran, probako seinaleaz gain (eskalatua), tonuak aurkituko ditugu frekuentzia bikoitzean ($2f_0$), hirukoitzean ($3f_0$), eta abarretan (f_0 -ren harmonikoetan, hain zuzen). Distortsioak frekuentzia jakin horiek zer kantitatetan agertzen diren neurtzea edukiko du helburutzat. Horrela, harmoniko bakoitzak sartzen duen distortsioa definitzen da, alde batetik, modu honetan:

$$D_n = \frac{A_n}{A_1}$$

non A_n n-garren harmonikoaren irteerako anplitudea den, eta A_1 , f_0 sarrerako frekuentziari dagokion irteerako anplitudea. d_n^2 -ren balioak *n-garrenaren* eta lehenengo harmonikoaren (berreskuratu nahi dena) potentzien arteko erlazioa ematen digu, sistemaren irteeran. Distortsio totala kalkulatzeko, distortsioaren potentzia osoa eta lehenengo harmonikoaren potentziaren arteko erlazioa kalkulatu beharko da. Horretarako, Distortsio Harmoniko Totala definitzen da (*THD%* izendapenez ere ezaguna) modu honetan:

$$THD\% = \sqrt{\sum_{n>1} d_n^2} \cdot 100\%$$

2. gaia

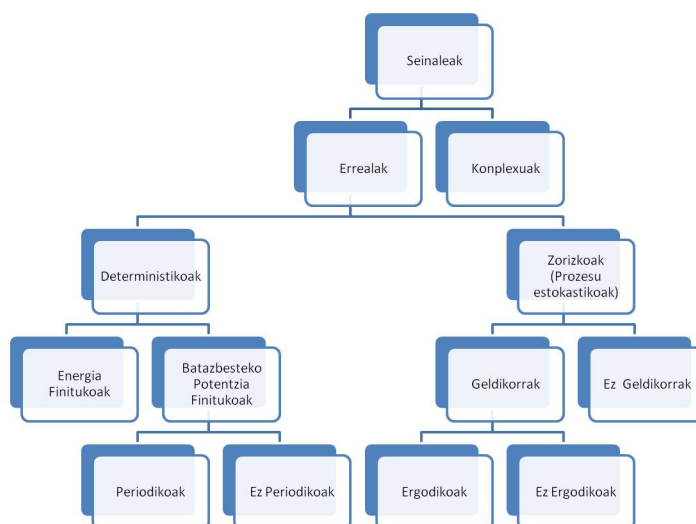
Zorizko seinale eta prozesuak

2.1. Zorizko prozesuak

2.1.1. Zorizko prozesuei sarrera

2.1. irudiko eskeman, seinaleen sailkapen posible bat aurkezten da. Ikus daitekeenez, seinale errealak zorizkoak edo deterministikoak izan daitezke. Seinale konplexuetarako sailkapen bera egin daiteke, ezberdintasun bakarra izanik bi dimentsiotako seinaleak edukiko ditugula.

Seinale deterministikoak adierazpen matematiko jakin baten bidez erabat definiturik geratzen direnak dira, eta jakin daiteke zer balio zehatz daukaten seinaleek edozein unetan. Adibidez, $x(t) = A \sin(2\pi f_0 t + \phi)$ adierazpena kontuan hartzen badugu, A , f_0 eta ϕ anplitudea, maiztasuna eta hasierako fasea konstanteak izanik, $x(t)$ -ren balio zehatza jakin dezakegu t -ren edozein baliotarako.

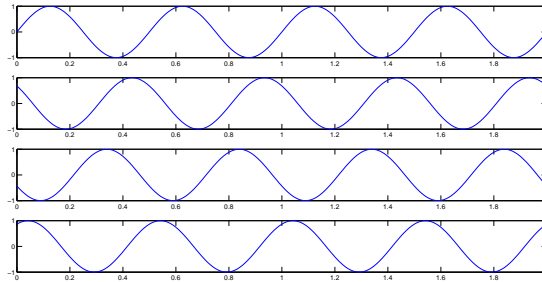


2.1. irudia. Seinaleen sailkapena.

Dena den, komunikazio-sistema batean transmititzen diren mezuak ez dira seinale deterministikoaren taldearen barnekoak, hartzaileak ez baitu alde aurretik mezua ezagutzen, logikoa den moduan. $1v$ eta $0v$ -ko anplitudeko pulsu errektangularren segida baten bidez adierazitako biten bidezko mezu bat adibidetzat hartuz, ez da posible izango une jakin batean pulsuaren anplitudea bata edo bestea den jakitea alde aurretik. Gainera, komunikazio-sistemetan

badaude zorizko nortasuna daukaten perturbazioak, zeinen balioa alde aurretik ezagutzea ere ez den posible. Halako perturbazioen adibideak zarata edo beste komunikazio-sistemetatik jasotako interferentziak dira. Bai kasu batean, bai bestean, zorizko nortasuna daukaten seinale mota horiekin lan egitea ahalbidetuko diguten tresna matematikoak beharko ditugu. Tresna horiek estatistikak ematen dizkigu, seinaleetan edo perturbazioetan dauden erregulartasunak adierazteko gai diren ereduaren bitartez.

Zorizko seinale edo prozesu bat, denbora-eremuko funtzio bat izateaz gain, zorizko aldagai baten edo batzuen menpekoea ere bada. Adibidez, $x(t) = A \sin(2\pi f_0 t + \phi)$ seinalea kontuan har dezagun, non f_0 eta A konstanteak diren (lehengo kasuan bezala), baina orain ϕ zorizko aldagai bat izanik, $[0, 2\pi]$ tartean balioak har ditzakeena probabilitate jakin batekin¹. $x(t)$ -k denboran zehar hartzen dituen balioak ϕ -k hartzen duen (zorizko) balioaren araberrakoak izango dira. $x(t)$ grafikoki irudikatu nahi badugu, ϕ -ri balioak eman beharko zaizkio nahitaez (A eta f_0 -en balioak konstanteak eta, beraz, ezagunak direla aintzat hartzen da). Zorizko aldagaiari balio zehatzak ematetik geratzen den funtzioari $x(t)$ *prozesuaren errealizazio* deritza². Adibidez, 2.2. irudian, zorizko fasea daukan sinuaren lau errealizazio adierazi dira.



2.2. irudia. Zorizko fasea daukan sinu baten lau errealizazio.

Ondorengo ataletan komunikazio-sistemetan ohikoenak diren zorizko prozesuekin (*prozesu estokastiko* izenez ere ezagunak) lan egiteko estatistikoak ikasiko ditugu. 2.1.3. atalean, estatistikari buruzko oinarritzko zenbait kontzeptu errepasatuko dira.

2.1.2. Definizioak

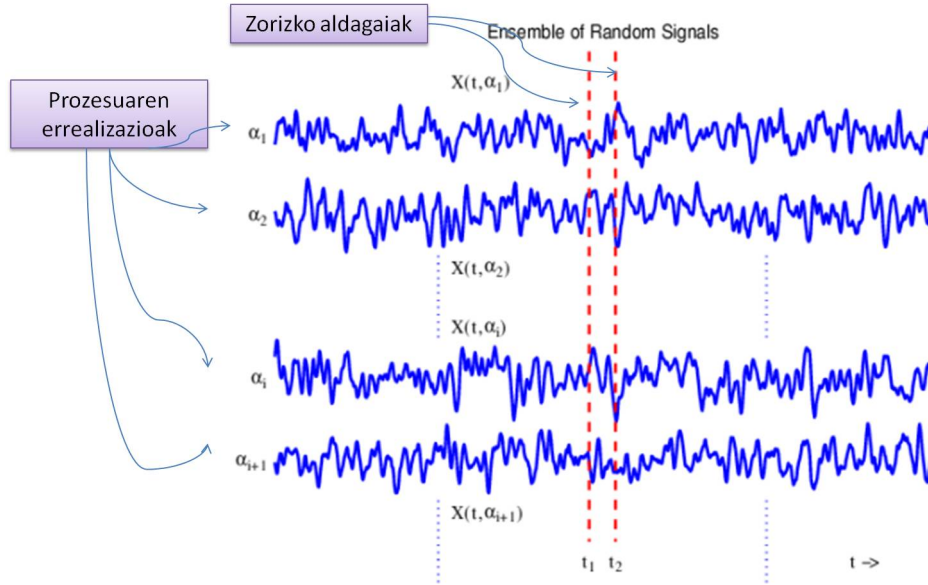
Demagun elementu zaratatsu batek sor ditzakeen seinale zaratatsuen multzo bat daukagula, 2.3. irudikoen modukoak. Irudikatu diren seinale guztiak ezberdinak dira elkarrekiko, baina, prozesu estokastiko berak sortu dituzenez, denek badauzkate karakterizatzen dituzten zenbait elementu. $x(t, \alpha_i)$ seinale bakoitza zarata sortzen duen prozesuaren adierazpen bat da, *prozesuaren errealizazio* edo *probako funtzio* izenez ere ezaguna. Errealizazio edo probako funtzio guztien multzoak (infinitua) $x(t)$ *prozesu estokastikoa* osatzen du.

Orain, prozesu estokastikoan t_1 denbora-unea aukeratzen badugu eta prozesuak hartzen dituen balioak aztertzen baditugu (hau da, $x(t_1, \alpha)$), $x_1 = x(t_1, \alpha)$ zorizko aldagaia lortuko dugu. Beste edozein t_2 une aukeratzen badugu, aztertutako balioek beste $x_2 = x(t_2, \alpha)$ zorizko

¹Funtzio hori *zorizko fasea daukan sinu* izenez ezagutzen da, eta asko erabiltzen da komunikazioetan, hartzaile lera heltzen den frekuentzia ezaguneko eramaile sinusoidal baten fasea ezezaguna izatearen kasua ordezkatzeko delako.

²Zorizko aldagai bati balioak eman ondoren geratzen diren zorizko aldagai beraren errealizazioekiko balioki-dea da.

aldagaia osatzen dute. $x(t_i, \alpha)$ zorizko aldagai guztien multzoak (infinituak) $x(t, \alpha)$ prozesu estokastikoa definituko du. $x_1, x_2 \dots x_n$ zorizko aldagaietarako kalkulaturako batezbesteko edo estatistikoak *batez besteko estatistikoak* deituko diegu. Bestalde, probako funtzioen batezbestekoei, denboran zehar kalkulaturakoei, *denbora-eremuko batezbestekoak* deritze.



2.3. irudia. Zorizko prozesu baten irudikapena.

$x(t)$ seinale baten denbora-eremuko batezbestekoa modu honetan kalkulatu da:

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x(t) dt$$

Zorizko prozesu batean, edozein $x(t, \alpha_i)$ errealizazioren denbora-eremuko batezbestekoa kalkulatu ahal izango dugu modu berean:

$$\langle x(t, \alpha_i) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x(t, \alpha_i) dt$$

Batezbesteko baten kalkulua norabide estatistikoan ($E\{\cdot\}$ Itxaropen eragilearekin adierazten dena), definituta geratzen den zorizko aldagaiaren batez besteko balioa kalkulatzeko datza. Horretarako, zorizko aldagaiaren *probabilitatearen dentsitate-funtzioa* behar dugu, edo, beste modu batera esanda, prozesuaren *probabilitatearen dentsitate-funtzioa*, prozesua bera aukeraturako unean. t_i unerako:

$$E\{x(t_i, \alpha)\} = \int x(t_i, \alpha) f_x(x, t_i) dx$$

non $f_x(x, t_i)$, $x(t_i, \alpha)$ zorizko aldagaiaren probabilitatearen dentsitate-funtzioa den.

Prozesuen eta prozesu horiek definitzen dituzten zorizko aldagaien nomenklatura sinplifikatzeko, ohikoa da α parametroa ezabatzea. Horrela, $x(t)$ prozesuari buruz eta hura definitzen duten $x_i = x(t_i)$ zorizko aldagaiei buruz berba egingo dugu, azken horien probabilitatearen dentsitate-funtzioak $f_{x_i}(x_i) = f_x(x, t_i)$ izanik. $x(t)$ adierazpena seinale deterministiko ala prozesu estokastiko batena den jakingo dugu erabiltzen den testuinguruaren arabera.

2.1.3. Estatistikaren oinarrizko kontzeptuak

Atal honetan, sarritan erabiliko ditugun estatistika-kontzeptu batzuk berrikusiko ditugu.

Probabilitatearen dentsitate-funtzioa (pdf) Funtzio honek zorizko aldagai batek tarte jakin baten barneko balioak zenbateko probabilitatearekin hartzen dituen definitzen du. x zorizko aldagaiaren pdf-a $f_x(x)$ baldin bada, x aldagaiak $[a, b]$ tarteko balioak hartzeko probabilitatea honako hau da:

$$p(x \in [a, b]) = \int_a^b f_x(x) dx$$

Hau da, x aldagaiak $[a, b]$ tarteko balioak hartzeko probabilitatea, beraren pdf-aren azalera da tarte horretan. Beraz, pdf-aren azalera osoak 1 balioa izan beharko du.

$E\{\cdot\}$ Itxaropen eragilea Eragile honek bere argumentuaren batez besteko balioa kalkulatzeko du:

$$E\{x\} = \int x f_x(x) dx$$

$$E\{x^2\} = \int x^2 f_x(x) dx$$

Eragile lineala da, hau da:

$$E\{\alpha x + \beta y\} = \alpha E\{x\} + \beta E\{y\}$$

α eta β konstanteak izanik eta x eta y bi zorizko aldagai.

Zorizko aldagai baten funtzioak Y zorizko aldagai baten itxaropena kalkulatu nahi badugu, zeina beste zorizko aldagai baten funtzioan adierazita dagoen ($Y = g(X)$), eta azken horren pdf-a ezagutzen badugu ($f_X(X)$), erregela hau aplikatuko dugu:

$$E\{Y\} = \int Y f_Y(Y) dY = \int g(X) f_X(X) dX$$

Prozesu baten itxaropena $x(t)$ prozesu baten itxaropena kalkulatu nahi badugu, zeina t eta V zorizko aldagaiaren menpeko $g(V, t)$ funtzioaren bidez adierazita dagoen, eta V zorizko aldagaiaren pdf-a ezagutzen badugu ($f_V(V)$), erregela hau aplikatuko dugu:

$$x(t) = g(V, t)$$

$$E\{x(t)\} = E\{g(V, t)\} = \int g(V, t) f_V(V) dV$$

V, W zorizko bi aldagai baldin badaude, $f_{VW}(V, W)$ probabilitatearen dentsitate-funtzio bateratuarekin, eta $x(t) = g(V, W, t)$ baldin bada:

$$x(t) = g(V, W, t)$$

$$E\{x(t)\} = E\{g(V, W, t)\} = \iint g(V, W, t) f_{VW}(V, W) dV dW$$

2.2. Batezbesteko estatistikoak

Honako batezbesteko estatistiko hauek beharko ditugu:

- Prozesu baterako:
 - Batez besteko balioa
 - Autokorrelazioa
 - Batez besteko balio koadratikoa
 - Autokobariantza
 - Bariantza
- Bi prozesutarako
 - Korrelazio gurutzatua
 - Kobariantza gurutzatua
 - Korrelazio-koefizientea

2.2.1. Batez besteko balioa

Prozesu baten batez besteko balioa (edo batezbestekoa, soilik) *lehenengo mailako estatistiko* bat da. Prozesua definitzen duten $x_i = x(t_i, \alpha)$ zorizko aldagai bakoitzaren batezbestekoa ematen du, denbora-eremuko funtzio bat izanik:

$$m_x(t) = E\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) f_x(x, t) dx$$

Prozesu geldikorrak x_i zorizko aldagaien probabilitatearen dentsitate-funtzioa t -ren menpekoea ez denean ($f_x(x, t_i) = f_x(x, t_j), \forall t_i, t_j$), orduan, prozesuaren batezbestekoa ere konstantea eta t -rekiko independentea izango da. Kasu horretan, prozesua **lehen mailako geldikorra** dela esan ohi da, edo **geldikorra batezbestekoan**. Kasu honetan, $E\{x(t)\} = m_x(t) = m_x$.

Prozesu baten batez besteko balioa beraren osagai jarraitu edo DC osagai izenez ere ezagutzen da.

2.2.2. Autokorrelazioa

Prozesu baten autokorrelazioa *bigarren mailako estatistiko* bat da. Prozesuaren t_1 eta t_2 unee-tako bi balioen biderkaduraren batezbestekoa ateraz kalkulatzen da:³

$$R_x(t_1, t_2) = E\{x(t_1)x^*(t_2)\}$$

³Prozesu konplexuetarako adierazpen orokorra hartu da kontuan.

Prozesu geldikorrak Aurreko adierazpenean, zorizko bi aldagaik parte hartzen dute ($x_1 = x(t_1)$ eta $x_2 = x(t_2)$) eta, bion biderkaduraren batezbestekoa kalkulatzeko, zorizko bi aldagaien probabilitatearen dentsitate-funtzio bateratua ezagutu behar da: $f_{x_1 x_2}(x_1, x_2)$. Funtzio hori kontuan hartutako bi uneen distantziaren menpekoea denean, autokorrelazio-funtzioa $\tau = t_1 - t_2$ diferentziaren funtzioan idatz daiteke:

$$R_x(\tau) = E\{x(t + \tau)x^*(t)\} = \left\{ \begin{array}{l} t + \tau = t' \\ t = t' - \tau \end{array} \right\} = E\{x(t')x^*(t' - \tau)\} \quad (2.1)$$

Kasu horretan, $x(t)$ prozesua **bigarren mailako geldikorra** edo **autokorrelazioan geldikorra** dela esan ohi da.

Prozesu bat bigarren mailako geldikorra izateko, lehen mailako geldikorra ere izan beharko da.

Bigarren mailako geldikorra den prozesu bat **zentzu malguan geldikorra** dela esan ohi da, eta bere ingeleseko siglen bidez ezagutzen da: *WSS edo Weak(Wide)-Sense-Stationary*. Prozesu bat *zentzu hertsian geldikorra* izango da geldikortasuna bi maila baino handiagoko estatistikoe-tan betetzen denean. Komunikazio-sistemen barneko prozesu gehienak ulertzeko, aztertze-ko eta modelatzeko, nahikoa izango da bigarren mailako estatistikoak ezagutzea. Gainera, halako prozesuak gehienetan WSS dira.

2.2.3. Batez besteko balio koadratikoa

Prozesu baten batez besteko balio koadratikoa bere autokorrelazio-funtzioaren kasu partikular bat da, $t_1 = t_2 = t$ kasurako:

$$R_x(t, t) = E\{|x(t)|^2\} = P_x(t)$$

Balio hori, gainera, **prozesuaren potentzia** da.

Prozesu geldikorrak Prozesua geldikorra (zentzu malguan) denean, balio hori t -rekiko independentea da, eta autokorrelazio-funtzioak jatorrian daukan balioarekin bat dator:

$$P_x = R_x(0) = E\{|x(t)|^2\}$$

2.2.4. Autokobariantza

Prozesu baten autokobariantza prozesuaren autokorrelazioa da, batezbestekorik gabe:

$$\begin{aligned} C_x(t_1, t_2) &= E\{(x(t_1) - m_x(t_1))(x(t_2) - m_x(t_2))^*\} \\ &= E\{x(t_1)x^*(t_2) - x(t_1)m_x^*(t_2) - m_x(t_1)x^*(t_2) + m_x(t_1)m_x^*(t_2)\} \\ &= R_x(t_1, t_2) - m_x(t_1)m_x^*(t_2) - m_x(t_1)m_x^*(t_2) + m_x(t_1)m_x^*(t_2) \\ &= R_x(t_1, t_2) - m_x(t_1)m_x^*(t_2) \end{aligned}$$

- Prozesua WSS baldin bada:

$$C_x(\tau) = E\{(x(t + \tau) - m_x)(x(t) - m_x)^*\} = R_x(\tau) - |m_x|^2$$

2.2.5. Bariantza

Prozesu baten bariantza prozesu beraren autokobariantzaren kasu partikular bat da, $t_1 = t_2$ kasurako kalkulatzen dena:

$$\sigma_x^2(t, t) = R_x(t, t) - |m_x(t)|^2$$

Hau da, prozesuaren potentzia da, batezbestekorik gabe.

Prozesu geldikorrak WSS prozesu batean, potentzia konstantea eta t -rekiko independentea izango da:

$$\sigma_x^2 = R_x(0) - |m_x|^2 = P_x - |m_x|^2$$

Ikus dezakegunez, $P_x = R_x(0)$ prozesuaren potentzia osoak bi osagai ditu. Alde batetik, $|m_x|^2$, zeina prozesuaren batezbestekoaren potentzia den, m_x prozesuaren batezbestekoa delako. Gainerakoa, σ_x^2 bariantza, prozesuaren potentzia izango da batezbestekorik gabe, hau da, prozesuaren *osagai alterno*-arena. σ_x balioa $x(t)$ prozesuaren *desbiderapen tipiko* edo *desbiderapen estandar* izenez ezagutzen da.

2.2.6. Korrelazio gurutzatua

$x(t)$ eta $y(t)$ prozesuen korrelazio gurutzatua bigarren mailako estatistikoa da, eta bi prozesuen biderkaduraren batezbestekoa ateraz kalkulatzen da:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = E\{x(t_1)y^*(t_2)\}$$

Estatistiko hau kalkulatzeko, $f_{x_1y_2}(x_1, y_2)$ ezagutu beharko dugu, hau da, $x_1 = x(t_1)$ eta $y_2 = y(t_2)$ zorizko aldagaien probabilitatearen dentsitate-funtzio bateratua, $\forall(t_1, t_2)$. Zorizko bi aldagai horiek independenteak direnean, probabilitatearen dentsitate-funtzioa aldagai bakoitzaren probabilitatearen dentsitate-funtzioen biderkadura eginez kalkulatu ahal izango da:

$$f_{x_1y_2}(x_1, y_2) = f_{x_1}(x_1)f_{y_2}(y_2) \quad (2.2)$$

eta, t_1 eta t_2 guztietarako betetzen bada, orduan, $x(t)$ eta $y(t)$ prozesuak independenteak izango dira. Ondorioz:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = E\{x(t_1)\}E\{y^*(t_2)\} = m_x(t_1)m_y^*(t_2) \quad (2.3)$$

Prozesu geldikorrak Bi prozesuak WSS baldin badira, eta, gainera, *batera geldikorrak* baldin badira, orduan, bi prozesuen arteko korrelazio gurutzatua t_1 eta t_2 uneen arteko $\tau = t_1 - t_2$ diferentziaren funtzioa izango da:

$$R_{xy}(\tau) = E\{x(t + \tau)y^*(t)\} = E\{x(t)y^*(t - \tau)\}$$

Jatorriko korrelazio gurutzatuaren balioa *prozesuen potentzia gurutzatu* izenez ezagutzen da:

$$P_{xy} = R_{xy}(0) = E\{x(t)y^*(t)\}$$

Prozesuak batera geldikorrek izateaz gain independenteak baldin badira, 2.2 beteko da:

$$R_{xy}(\tau) = E\{x(t+\tau)y^*(t)\} = E\{x(t+\tau)\}E\{y^*(t)\} = m_x \cdot m_y^* \quad (2.4)$$

2.2.7. Kobariantza gurutzatua

Bi prozesuen arteko kobariantza gurutzatua bi prozesuen arteko korrelazio gurutzatua da, euren batezbestekorik gabe:

$$\begin{aligned} C_{xy}(t_1, t_2) &= E\{x(t_1) - m_x(t_1)(y^*(t_2) - m_y^*(t_2))\} \\ &= E\{x(t_1)y^*(t_2)\} - m_x(t_1)E\{y^*(t_2)\} - m_y^*(t_2)E\{x(t_1)\} + m_x(t_1)m_y^*(t_2) \\ &= R_{xy}(t_1, t_2) - m_x(t_1)m_y^*(t_2) \end{aligned}$$

Prozesu geldikorrek Batera geldikorrek diren prozesuetan, kobariantza gurutzatua t_1 eta t_2 unen diferentziaren menpekoa izango da soilik:

$$\begin{aligned} C_{xy}(\tau) &= E\{(x(t+\tau) - m_x)(y^*(t) - m_y^*)\} \\ &= R_{xy}(\tau) - m_x \cdot m_y^* \end{aligned}$$

2.2.8. Korrelazio gurutzatuaren koefizientea

Bi prozesuren arteko korrelazio gurutzatuaren koefizientea modu honetan definitzen da:

$$\rho_{xy}(t_1, t_2) = \frac{C_{xy}(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_y(t_2)}$$

Prozesu geldikorrek Bi prozesuak batera geldikorrek baldin badira:

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{C_{xy}(\tau)}{\sigma_x\sigma_y}$$

2.2.9. Prozesu inkorrelatuak, ortogonalak eta independenteak

Atal honetan, prozesu geldikorrei eta, hala suertatuz gero, batera geldikorrek diren prozesuei buruz arituko gara, sinplifikatzearen. Definizioak antzekoak izango lirateke geldikorrek ez diren prozesuetarako.

Prozesu inkorrelatuak Bi prozesu inkorrelatuak direla esango dugu, τ -ren balio guztien kobariantza gurutzatua zero denean:

$$\begin{aligned} C_{xy}(\tau) &= 0 \quad \forall \tau \\ R_{xy}(\tau) &= m_x \cdot m_y^* \end{aligned} \quad (2.5)$$

Prozesu ortogonalak Bi prozesu ortogonalak direla esango dugu, τ -ren balio guztien korrelazio gurutzatua zero denean:

$$R_{xy}(\tau) = 0 \quad \forall \tau$$

Gainera, 2.5 adierazpenetik ondoriozta daitekeenez, $x(t)$ eta $y(t)$ prozesuak inkorrelatuta baldin badaude eta bietariko baten batezbestekoa zero baldin bada, orduan, $R_{xy}(\tau) = 0$, hau da, prozesuak ortogonalak izango dira.

Bestalde, $x(t)$ eta $y(t)$ prozesuak estatistikoki independenteak baldin badira (ikusi 2.4), orduan, $R_{xy}(\tau) = m_x \cdot m_y^*$ eta prozesuak inkorrelatuta egongo dira.

Garrantzitsua da kontuan hartzea bi prozesu inkorrelatuta egoteak ez duela zertan esan nahi estatistikoki independenteak izango direnik. Hau da, independentziak berekin inkorrelazioa ekartzen badu ere, alderantzizkoa ez da egia, inkorrelazioak ez du ezinbestez berekin independentzia ekartzen.

Adibidea: prozesuen gainjartzea

Izan bedi $z(t) = x(t) \pm y(t)$ prozesua. $x(t)$ eta $y(t)$ batera geldikorrek direla kontuan hartuz, kalkulatu $R_z(\tau)$ eta $G_z(f)$.

$$\begin{aligned} R_z(\tau) &= \mathbb{E}\{z(t+\tau)z^*(t)\} = \mathbb{E}\{(x(t+\tau) \pm y(t+\tau))(x^*(t) \pm y^*(t))\} \\ &= R_x(\tau) + R_y(\tau) \pm R_{xy}(\tau) \pm R_{yx}(\tau) \\ &= R_x(\tau) + R_y(\tau) \pm (R_{xy}(\tau) + R_{xy}^*(-\tau)) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Fourier-en transformatua eginez:

$$\begin{aligned} G_z(f) &= G_x(f) + G_y(f) \pm (G_{xy}(f) + G_{xy}^*(f)) \\ &= G_x(f) + G_y(f) \pm 2\Re\{G_{xy}(f)\} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Bi prozesuak **inkorrelatuta** baldin badaude:

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= m_x \cdot m_y^* \\ R_{xy}^*(-\tau) &= m_x^* \cdot m_y \\ G_{xy}(f) &= m_x \cdot m_y^* \cdot \delta(f) \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} R_z(\tau) &= R_x(\tau) + R_y(\tau) \pm 2\Re\{m_x \cdot m_y^*\} \\ G_z(f) &= G_x(f) + G_y(f) \pm 2\Re\{m_x \cdot m_y^* \cdot \delta(f)\} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Horrez gain, bietariko baten batezbestekoa zero baldin bada (prozesu **ortogonalak**):

$$\begin{aligned} R_z(\tau) &= R_x(\tau) + R_y(\tau) \\ G_z(f) &= G_x(f) + G_y(f) \end{aligned} \quad (2.10)$$

2.3. Prozesu geldikorren propietateak

Atal honetan WSS prozesuen korrelazio gurutzatuaren eta autokorrelazio-funtzioaren ezaugarri eta propietate garrantzitsuenetariko batzuk azpimarratuko ditugu.

1. Autokorrelazio-funtzioaren simetria hermitikoa

Autokorrelazio-funtzioak simetria hermitikoa dauka, hau da, $R_x(\tau) = R_x^*(-\tau)$:

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= E\{x(t+\tau)x^*(t)\} \\ R_x^*(\tau) &= E\{x^*(t+\tau)x(t)\} \\ R_x^*(-\tau) &= E\{x^*(t-\tau)x(t)\} = R_x(\tau) \end{aligned}$$

Prozesua erreala baldin bada ($x(t) = x^*(t)$), orduan, beraren autokorrelazio-funtzioa ere erreala izango da, eta, beraz, simetria bikoitia edukiko du: $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$.

2. Maximoa jatorrian

Autokorrelazio-funtzioak maximo bat dauka jatorrian ⁴ $|R_x(\tau)| < R_x(0)$. Segidan, prozesu errealean frogatuko dugu propietate hori, modu berean prozesu konplexuetan betetzen bada ere.

Prozesu baten potentzia beti positiboa dela jakinda, propietate hori $y_1(t) = x(t+\tau) + x(t)$ eta $y_2(t) = x(t+\tau) - x(t)$ prozesuekin aplikatuko dugu:

$$\begin{aligned} R_{y_1}(0) &= E\{|y_1(t)|^2\} > 0 \\ E\{(x(t+\tau) \pm x(t))(x(t+\tau) \pm x(t))\} &> 0 \\ E\{|x(t+\tau)|^2\} + E\{|x(t)|^2\} \pm E\{x(t)x(t+\tau)\} \pm E\{x(t+\tau)x(t)\} &> 0 \\ 2(R_x(0) \pm R_x(\tau)) &> 0 \end{aligned}$$

Beraz:

$$\begin{aligned} R_x(0) &> -R_x(\tau) + \text{zeinua kontuan hartuz} \\ R_x(0) &> R_x(\tau) - \text{zeinua kontuan hartuz} \end{aligned}$$

Hau da, $R_x(0) > |R_x(\tau)|$.

3. Prozesu periodikoak batezbesteko koadratikoan

$\tau = \tau_0$ -en balio jakin bat existitzen bada zeinerako $R_x(\tau_0) = R_x(0)$ den (hau da, jatorriko balio maximoa lortzen bada ere τ -ren balio horretarako), orduan, autokorrelazio-funtzioa periodikoa izango da τ_0 periodoarekin ($R_x(\tau) = R_x(\tau + \tau_0)$). Kasu honetan, $x(t)$ prozesua *periodikoa batezbesteko koadratikoan* dela esan ohi da. Prozesu horietan honako hau betetzen da: $E\{|x(t+\tau_0) - x(t)|^2\} = 0$. Hau da, ez dago potentziarik prozesuaren eta prozesu horren periodoaren balioan desplazaturiko bertsioaren arteko diferentzian.

Izan ere, $x(t)$ prozesu erreala izanik⁵:

⁴ikusi 3. propietatea, berdintasunaren kasua kontuan hartzeko.

⁵Simplifikatzearen, prozesu errealean frogatuko dugu soilik.

$$\begin{aligned}
E\{|x(t + \tau_0) - x(t)|^2\} &= 0 \\
E\{|x(t + \tau_0)|^2\} + E\{|x(t)|^2\} - 2E\{x(t + \tau_0)x(t)\} &= 0 \\
2R_x(0) - 2R_x(\tau_0) &= 0 \\
R_x(0) &= R_x(\tau_0)
\end{aligned}$$

4. Korrelazio gurutzatuaren funtzioaren simetria

$x(t)$ eta $y(t)$ prozesuen arteko korrelazio gurutzatuak simetria hau dauka: $R_{xy}(\tau) = R_{yx}^*(-\tau)$

$$\begin{aligned}
R_{xy}(\tau) &= E\{x(t + \tau)y^*(t)\} \\
R_{yx}(\tau) &= E\{y(t + \tau)x^*(t)\} \\
R_{yx}^*(\tau) &= E\{y^*(t + \tau)x(t)\} \\
R_{yx}^*(-\tau) &= E\{y^*(t - \tau)x(t)\} \\
&\quad \left\{ \begin{array}{l} t - \tau = t' \\ t = t' - \tau \end{array} \right\} \\
R_{yx}^*(-\tau) &= E\{y^*(t')x(t' + \tau)\} = R_{xy}(\tau)
\end{aligned}$$

2.4. Denbora-eremuko batezbestekoak eta prozesu ergodikoak

Prozesu baten batezbesteko estatistikoak eta prozesu horren errealizazioen denbora-eremuko batezbestekoak berdinak direnean, prozesu hori ergodikoa dela esan ohi da. Prozesuen ergodikotasuna batezbestekoan eta autokorrelazioan aztertuko dugu soilik, edo baita korrelazio gurutzatuan ere, bi prozesuen baterako ergodikotasuna aztertu nahi dugunean. Prozesu ergodikoetan, prozesuaren estatistikoak (batezbestekoa eta autokorrelazioa) errealizazio bakar batetik lor daitezke, denbora-eremuko batezbestekoak kalkulaturik.

Ergodikotasuna batezbestekoan Prozesu bat batezbestekoan ergodikoa izango da beraren $\langle x_i(t) \rangle$ edozein errealizazioen denbora-eremuko batezbestekoa eta batezbesteko estatistikoa bat datozenean:

$$\langle x_i(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x_i(t) dt = E\{x(t)\} = m_x$$

Prozesu bat batezbestekoan ergodikoa izateko, bigarren mailako geldikorra izan beharko da (edo WSS).

Prozesu bat batezbestekoan ergodikoa baldin bada, autokorrelazio-funtzioaren batez besteko balioak m_x^2 balio du:

$$\begin{aligned}
\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T R_x(\tau) d\tau &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T E\{x(t + \tau)x^*(t)\} d\tau \\
&= E\left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x(t + \tau)x(t) d\tau \right\} \\
&= E\{x(t)\langle x(t) \rangle\} = m_x^2
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Ergodikotasuna autokorrelazioan Prozesu bat autokorrelazioan ergodikoa izango da prozesu horren edozein errealizazioaren denbora-eremuko autokorrelazioa ($\rho_x(\tau)$ adieraziko dugu) prozesuaren autokorrelazioarekin bat datorrenean:

$$\rho_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x_i(t + \tau) x_i^*(t) dt = E\{x(t + \tau) x^*(t)\} = R_x(\tau) \quad (2.12)$$

Autokorrelazioko ergodikotasunak 4. mailako geldikortasuna eskatzen du (frogatu barik).

Adibidea $x(t) = A$ prozesuaren geldikortasuna eta ergodikotasuna aztertuko dugu, A zorizko aldagai uniformearen izanik $[-V, V]$ tartean.

Haren batezbesteko estatistikoa honako hau da: $E\{A\} = 0$

Eta haren autokorrelazioa:

$$E\{A^2\} = \int_{-V}^V A^2 \frac{1}{2V} dA = \frac{V^2}{3} \quad (2.13)$$

Beraz, prozesua WSS da.

Haren denbora-eremuko batezbestekoa:

$$\langle x(t) \rangle = A \quad (2.14)$$

aukeratutako errealizazioaren arabera da eta, beraz, ez da ergodikoa batezbestekotan (eta ondorioz ez du maila altuagoetako ergodikotasunik izango).

2.4.1. Batezbesteko estatistikoen eta denbora-eremuko batezbestekoen laburpena

2.4. taulan, definitutako batezbesteko estatistikoez eta denbora-eremuko batezbestekoez gain, haien interpretazio kontzeptuala ere laburbiltzen da.

2.5. Zorizko seinaleen errepresentazioa frekuentzian

2.5.1. Potentziaren dentsitate-espektroa

Prozesu baten potentziaren dentsitate-espektroa (PDE) hura osatzen duten frekuentzietan potentzia nola sakabanatzen den deskribatzen duen funtzioa da. Autokorrelazio-funtzioaren Fourier-en transformatua eginez kalkula daiteke:

$$R_x(\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G_x(f)$$

Honako adierazpen hau ere lor dezakegu $G_x(f)$ -rako:

$$G_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E\{|X_{T_i}(f)|^2\}}{T}$$

$$X_{T_i}(f) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_i(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

non $x_i(t)$ prozesuaren errealizazio jakin bat izango den eta T , denbora-tarte adierazgarri bat.

Adierazpen honek WSS prozesu baten PDE-a kalkulatzeko moduaren interpretazio bat ematen digu:

Estadistikoa	Adierazpen estatistikoa	Denbora-eremuaren adierazpena	Interpretazioa
Batezbestekoa m_x	$E\{x(t)\} = \int x(t) f_x(x,t) dx$	$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$	Osagai jarraitua
Batezbesteko balio kuadratikoa	$E\{x(t) \cdot x^*(t)\}$	$\langle x(t) \cdot x^*(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot x^*(t) dt$	Potentzia osoa
Bariantza σ_x^2	$E\left\{\left x(t) - E\{x(t)\}\right ^2\right\} = E\{ x(t) ^2\} - E^2\{x(t)\}$	$\left\langle \left(x(t) - \langle x(t) \rangle \right) \left(x(t) - \langle x(t) \rangle \right)^* \right\rangle = \left\langle x(t) ^2 \right\rangle - \left \langle x(t) \rangle \right ^2$	Prozesuaren/seinalearen potentzia batezbestekoa kenduta (osagai alternoaren potentzia)
Desbiderapen tipikoa σ_x	$\sqrt{E\left\{\left x(t) - E\{x(t)\}\right ^2\right\}} = \sqrt{E\{ x(t) ^2\} - E^2\{x(t)\}}$	$\sqrt{\left\langle x(t) ^2 \right\rangle - \left \langle x(t) \rangle \right ^2}$	Balio efikaza
Autokorrelazioa	$R_x(\tau) = E\{x(t+\tau) \cdot x^*(t)\}$	$\rho_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau) \cdot x^*(t) \cdot dt$	$x(t+\tau)$ -ren eta $x(t)$ -ren arteko antzekotasuna
Autokobariantza $C_x(\tau)$	$C_x(\tau) = E\left\{\left(x(t+\tau) - m_x\right) \cdot \left(x(t) - m_x\right)^*\right\} = R_x(\tau) - m_x^2$	$C_x(\tau) = \left\langle \left(x(t+\tau) - m_x \right) \cdot \left(x(t) - m_x \right)^* \right\rangle = \rho_x(\tau) - m_x^2$	$x(t+\tau)$ -ren eta $x(t)$ -ren arteko antzekotasuna, batezbestekorik gabe
Korrelazio gurutzatua $R_{xy}(\tau)$	$R_{xy}(\tau) = E\{x(t+\tau) \cdot y^*(t)\}$	$r_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau) \cdot y^*(t) \cdot dt$	$x(t+\tau)$ -ren eta $y(t)$ -ren arteko antzekotasuna
Kobariantza gurutzatua $C_{xy}(\tau)$	$C_{xy}(\tau) = E\left\{\left(x(t+\tau) - m_x\right) \cdot \left(y(t) - m_y\right)^*\right\} = R_{xy}(\tau) - m_x \cdot m_y$	$C_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left(x(t+\tau) - m_x\right) \cdot \left(y(t) - m_y\right)^* \cdot dt = r_{xy}(\tau) - m_x \cdot m_y$	$x(t+\tau)$ -ren eta $y(t)$ -ren arteko antzekotasuna, batezbestekorik gabe
Korrelazio-koefizientea	$\rho_{xy}(\tau) = \frac{C_{xy}(\tau)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$	$\rho_{xy}(\tau) = \frac{C_{xy}(\tau)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$	$C_{xy}(\tau)$ -ren moduko, baina seinaleen balio efikazetara normalizatuta

2.4. irudia. Batezbesteko estatistiko eta denbora-eremuko batezbestekoen definizioa.

- $X_{T_i}(f)$ prozesuaren errealizazioetariko baten T iraupeneko segmentu baten Fourier-en transformatua da.
- $|X_{T_i}(f)|^2$ iraupen finituko segmentu horren energiaren dentsitate-espektroa (EDE) da.
- $E\{|X_{T_i}(f)|^2\}$ energiaren dentsitate-espektro (EDE) horren batezbestekoa izango da prozesuaren errealizazio guztietan (norabide estatistikoan egindako batezbestekoa).
- Azkeneko urratsean, lortutako balioa (frekuentzia bakoitzeko) segmentuaren iraupenaz zatitzen da potentzia balio bat lortzeko, eta tarte ∞ -ra luzatzen da.

2.5.2. Propietateak

1. $G_x(f)$ beti erreala da. $R_x(\tau)$ autokorrelazio-funtzioaren simetria hermitikotik abiatuz:

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= R_x^*(-\tau) \\ G_x(f) &= G_x^*(f) \Rightarrow G_x(f) \text{ERREALA} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Honako hau erabili da: $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(f) \Rightarrow x^*(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X^*(f)$

2. $G_x(f) \geq 0 \quad \forall f$

Hau da, $G_x(f)$ funtzioa erreala eta positiboa da.

3. $x(t)$ erreala $\Rightarrow G_x(f)$ erreala eta bikoitia

$$\begin{aligned} x(t) \text{erreala} &\Rightarrow R_x(\tau) = R_x(-\tau) \text{(bikoitia)} \\ G_x(f) &= G_x(-f) \text{(bikoitia)} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Kasu honetan, $G_x(f)$ horrela ere adieraz daiteke:

$$\begin{aligned} G_x(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau - j \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \sin(2\pi f\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.17)$$

4. $R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f) df = P_x$

Hau da, prozesuaren potentzia potentziaren dentsitate-espektroaren azalera kalkulatur lor daiteke.

5. Bi WSS prozesuren potentziaren dentsitate-espektro gurutzatua

$$\begin{aligned} \mathbb{F}\{R_{xy}(\tau)\} &= G_{xy}(f) \\ R_{xy}(\tau) &= R_{yx}^*(-\tau) \\ G_{xy}(f) &= G_{yx}^*(f) \end{aligned} \quad (2.18)$$

2.6. Adibide praktikoak

2.6.1. Zorizko fasea daukan kosinua

Aipatu den moduan, komunikazioetan asko erabiltzen den prozesu bat zorizko fasea daukan kosinua (edo sinua) da:

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

non A eta f_0 konstanteak diren, eta ϕ zorizko aldagaia den uniformeki banatuta $[-\pi, \pi]$ tartean. Fasearen balioa zorizkoa denez, banaketa uniformearekin, sinuarekin zein kosinuarekin lan egitean ez dago inolako ezberdintasunik. ϕ zorizko aldagaiaren probabilitatearen dentsitate-funtzioa $f_\phi(\phi)$ honako hau izango da:

$$f_\phi(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \phi \in [-\pi, \pi] \\ 0 & \text{besteak} \end{cases}$$

Hori kalkulatzeko, kontuan hartu da probabilitatearen dentsitate-funtzio guztien azalera unitatea balio behar duela. Gai honen hasieran aurkeztu den 2.2. irudiak prozesu honen zenbait errealizazio erakusten ditu.

Batez besteko balioa Prozesuaren batez besteko balioa, $E\{x(t)\}$, kalkulatu dugu. Horretarako, $E\{\cdot\}$ itxaropen eragilea denboraren menpeko funtzio bati (zeina zorizko aldagai baten edo gehiagoren menpekoa den; ikusi 2.1.3. atala) nola aplikatzen zaion kontuan hartuko dugu:

$$m_x = E\{x(t)\} = E\{A \cos(2\pi f_0 t + \phi)\} = A \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\pi f_0 t + \phi) \frac{1}{2\pi} d\phi = 0$$

Prozesu honen batezbestekoa zero da, eta, beraz, t -rekiko independentea. Ondorioz, prozesua *batezbestekoa* *geldikorra* dela esan dezakegu.

Autokorrelazioa Autokorrelazioaren adierazpen orokorretik abiatuko gara, posible izan daitekeen geldikortasuna aurretik kontuan hartu barik ⁶:

$$\begin{aligned} R_x(t_1, t_2) &= E\{x(t_1)x^*(t_2)\} = E\{A \cos(2\pi f_0 t_1 + \phi)A \cos(2\pi f_0 t_2 + \phi)\} \\ &= \frac{A^2}{2} E\{\cos(2\pi f_0(t_1 + t_2) + 2\phi)\} + E\{\cos(2\pi f_0(t_1 - t_2))\} \\ &= \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0(t_1 - t_2)) \end{aligned}$$

⁶Askotan adierazpen trigonometriko hauek erabiliko ditugu:

$$\begin{aligned} \sin(a \pm b) &= \sin a \cos b \pm \cos a \sin b \\ \cos(a \pm b) &= \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \end{aligned}$$

$E \{ \cos(2\pi f_0(t_1 + t_2) + 2\phi) \} = 0$ da, uniformeki banatutako zorizko fasea daukan kosinu baten batezbestekoa besterik ez delako (aurreko paragrafoan gertatutakoaren antzekoa).

Horrela, $R_x(t_1, t_2) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0(t_1 - t_2))$ da, zeina $(t_1 - t_2)$ -ren funtzioa den, eta, ondorioz, honako hau idatz dezakegu:

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0\tau) \quad (2.19)$$

Beraz, autokorrelazioan geldikorra den prozesua da, eta, modu berean, dagoeneko baieztatu daiteke geldikorra dela zentzu malgutan (WSS).

Ergodikotasuna Zorizko fasea daukan kosinua prozesu ergodikoa den ala ez jakin nahi dugu. Horretarako, haren errealizazioak aztertu eta euren denbora-eremuko batezbestekoak kalkulatu behar ditugu. Prozesuaren errealizazio jakin bat lortuko dugu $\phi = \phi_i$ konstantetzat hartuz eta, orduan, $x_i(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi_i)$ seinalea lortuko dugu. Seinale hori periodikoa da ($\frac{1}{f_0}$ periodoarekin). Beraren batez besteko balioa honako hau izango da:

$$\langle x_i(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x_i(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} A \cos(2\pi f_0 t + \phi_i) dt = 0$$

Ikus dezakegunez, prozesuaren edozein errealizazioaren batezbestekoak zero balio du eta batezbesteko estatistikoarekin bat dator. Orduan, esan dezakegu prozesua batezbestekoan ergodikoa dela.

Kalkula dezagun orain prozesuaren errealizazio baten autokorrelazioa (denbora-eremukoa eta determinista):

$$\begin{aligned} \rho_x(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x_i(t + \tau) x_i^*(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{T} \int_T \cos(2\pi f_0(t + \tau) + \phi_i) \cos(2\pi f_0 t + \phi_i) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2T} \int_T \cos(2\pi f_0(2t + \tau) + 2\phi_i) dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2T} \int_T \cos(2\pi f_0\tau) dt \end{aligned}$$

Aurreko adierazpenean, lehenengo batugaia $2f_0$ -eko frekuentzia edo $T_0/2$ -eko periodoa daukan kosinu baten (denbora-eremuko) batezbesteko balioa da, eta, ondorioz, zero balioa izango du. Bigarren batugaian, $\cos(2\pi f_0\tau)$ ez da t -ren menpekoa, eta, orduan, integraletik kanpo aterako dugu (eta limitetik kanpo ere bai, ez baita T -ren menpekoa ere):

$$\rho_x(\tau) = \cos(2\pi f_0\tau) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2T} \int_T dt = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0\tau) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} T = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0\tau)$$

Emitza hori bat dator 2.19-n autokorrelazio estatistikorako lortutakoarekin, eta, ondorioz, prozesua autokorrelazioan ere ergodikoa dela esan dezakegu.

3. gaia

Seinaleen transmisioa zaratarekin

3.1. Prozesu geldikorak sistema lineal eta aldagaitzetan zehar

Demagun WSS den $x(t)$ prozesuak sistema lineal eta aldagaitz bat zeharkatzen duela, zeinak $h(t)$ pulsu-erantzuna duen.

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) \cdot h(\tau) d\tau \quad (3.1)$$

Behin sarrerako prozesuaren estatistikoak ezagututa (batezbestekoa, autokorrelazio-funtzioa eta abar), irteerako prozesuarenak ezagutzea interesgarria da. Horregatik, irteerako prozesuaren batezbestekoa eta autokorrelazio-funtzioa kalkulatu ditugu, eta baita sistemaren sarrerako eta irteerako prozesuen arteko korrelazio gurutzatuak ere. Kalkulatutako adierazpenetatik irteerako PDE-en funtzioak lortuko ditugu sarrerako PDE-aren eta sistemaren frekuentzia-erantzunaren funtzioan.

3.1.1. Irteerako prozesuaren batez besteko balioa

$x(t)$ sarrerako prozesuaren batezbestekoa m_x baldin bada, $m_y = \mathbb{E}\{y(t)\}$ kalkulatu nahi dugu:

$$\begin{aligned} m_y &= \mathbb{E}\{y(t)\} \\ &= \mathbb{E}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(t - \lambda) \cdot h(\lambda) d\lambda\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}\{x(t - \lambda)\} \cdot h(\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

$x(t)$ prozesu geldikorra izanik, $\mathbb{E}\{x(t - \lambda)\} = \mathbb{E}\{x(t)\} = m_x$ eta ondorioz:

$$\begin{aligned} m_y &= m_x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) d\lambda \\ &= m_x \cdot H(0) \end{aligned}$$

$H(0)$ sistemaren frekuentzia erantzunaren ($H(f)$ -ren) balioa jatorrian ($f = 0$) izanik.

3.1.2. Autokorrelazioa eta korrelazio gurutzatuak

$$R_y(\tau) = \mathbb{E}\{y(t + \tau) \cdot y^*(t)\} \quad (3.2)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \lambda) \cdot h(\lambda) d\lambda$$

$$y(t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau - \lambda) \cdot h(\lambda) d\lambda$$

$$R_y(\tau) = \mathbb{E}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau - \lambda) \cdot h(\lambda) d\lambda \cdot y^*(t)\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau - \lambda) \cdot h(\lambda) d\lambda$$

$$= R_{xy}(\tau) * h(\tau) \quad (3.3)$$

Honako hau kontuan hartuta:

$$R_{xy}^*(-\tau) = R_{yx}(\tau)$$

$$R_y(\tau) = R_{yx}(\tau) * h^*(-\tau) \quad (3.4)$$

$R_{xy}(\tau)$ garatuko dugu:

$$R_{xy}(\tau) = \mathbb{E}\{x(t + \tau) \cdot y^*(t)\}$$

$$= \mathbb{E}\left\{x(t + \tau) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t - \lambda) \cdot h^*(\lambda) d\lambda\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau + \lambda) \cdot h^*(\lambda) d\lambda = \{\mu = -\lambda\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau - \mu) \cdot h^*(-\mu) d\mu =$$

$$= R_x(\tau) * h^*(-\tau)$$

Eta baita hau ere:

$$R_{yx}(\tau) = R_{xy}^*(-\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) \quad (3.5)$$

Ondorioz:

$$R_y(\tau) = R_{yx}(\tau) * h^*(-\tau)$$

$$= R_{xy}(\tau) * h(\tau) \quad (3.6)$$

$$= R_x(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau)$$

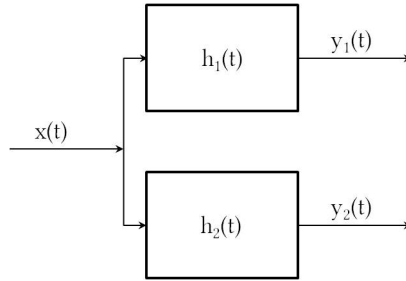
3.1.3. Potentziaren dentsitate-espeketroak

Fourier-en transformatua eginez (3.6)-en:

$$\begin{aligned}
 G_y(f) &= G_x(f) \cdot H^*(f) \cdot H(f) \\
 G_y(f) &= G_x(f) \cdot |H(f)|^2 \\
 &= G_{yx}(f) \cdot H^*(f) \\
 &= G_{xy}(f) \cdot H(f)
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

Adibidea: Prozesu ortogonalak

Demagun $x(t)$ prozesua daukagula, $h_1(t)$ eta $h_2(t)$ sistemak paraleloan zeharkatzen dituen; ondorioz, $y_1(t)$ eta $y_2(t)$ prozesuak sortu dira, hurrenez hurren.



$G_{y_1 y_2}(f)$ lortu nahi dugu, eta jakin zer kasutan izango diren $y_1(t)$ eta $y_2(t)$ ortogonalak. Lehendabizi, $R_{y_1 y_2}(\tau)$ kalkulatu dugu, eta, ondoren, Fourier-en transformatua:

$$\begin{aligned}
 R_{y_1 y_2}(\tau) &= \mathbb{E}\{y_1(t + \tau) \cdot \int x^*(t - \lambda) \cdot h_2^*(\lambda) d\lambda\} \\
 &= \int R_{y_1 x}(\tau + \lambda) \cdot h_2^*(\lambda) d(\lambda) \\
 &= \int R_{y_1 x}(\tau - \mu) \cdot h_2^*(-\mu) d(\mu) \\
 &= R_{y_1 x}(\tau) * h_2^*(-\tau)
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

Eta (3.5) kontuan hartuta:

$$\begin{aligned}
 R_{y_1 y_2}(\tau) &= R_x(\tau) * h_1(\tau) * h_2^*(-\tau) \\
 G_{y_1 y_2}(f) &= G_x(f) \cdot H_1(f) \cdot H_2^*(f)
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

Honako hau ondoriozta dezakegu:

$$H_1(f) \cdot H_2^*(f) = 0 \text{ baldin bada} \Rightarrow R_{y_1 y_2}(\tau) = 0
 \tag{3.10}$$

eta irteerako bi prozesuak ortogonalak izango dira. Azken hori kasu berezi batean beteko da: $H_1(f)$ eta $H_2(f)$ frekuentzian gainjartzen ez direnean, hain zuzen. Bestalde, honako hau betetzen denez:

$$\begin{aligned}
 G_{y_1}(f) &= G_x(f) \cdot |H_1(f)|^2 \\
 \text{eta } G_{y_2}(f) &= G_x(f) \cdot |H_2(f)|^2
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

$H_1(f)$ eta $H_2(f)$ gainjartzen ez badira, $G_{y_1}(f)$ eta $G_{y_2}(f)$ ere ez dira gainjarriko. Ondorioz, bi prozesuen PDE-ak gainjartzen ez badira, **ortogonalak** izango dira.

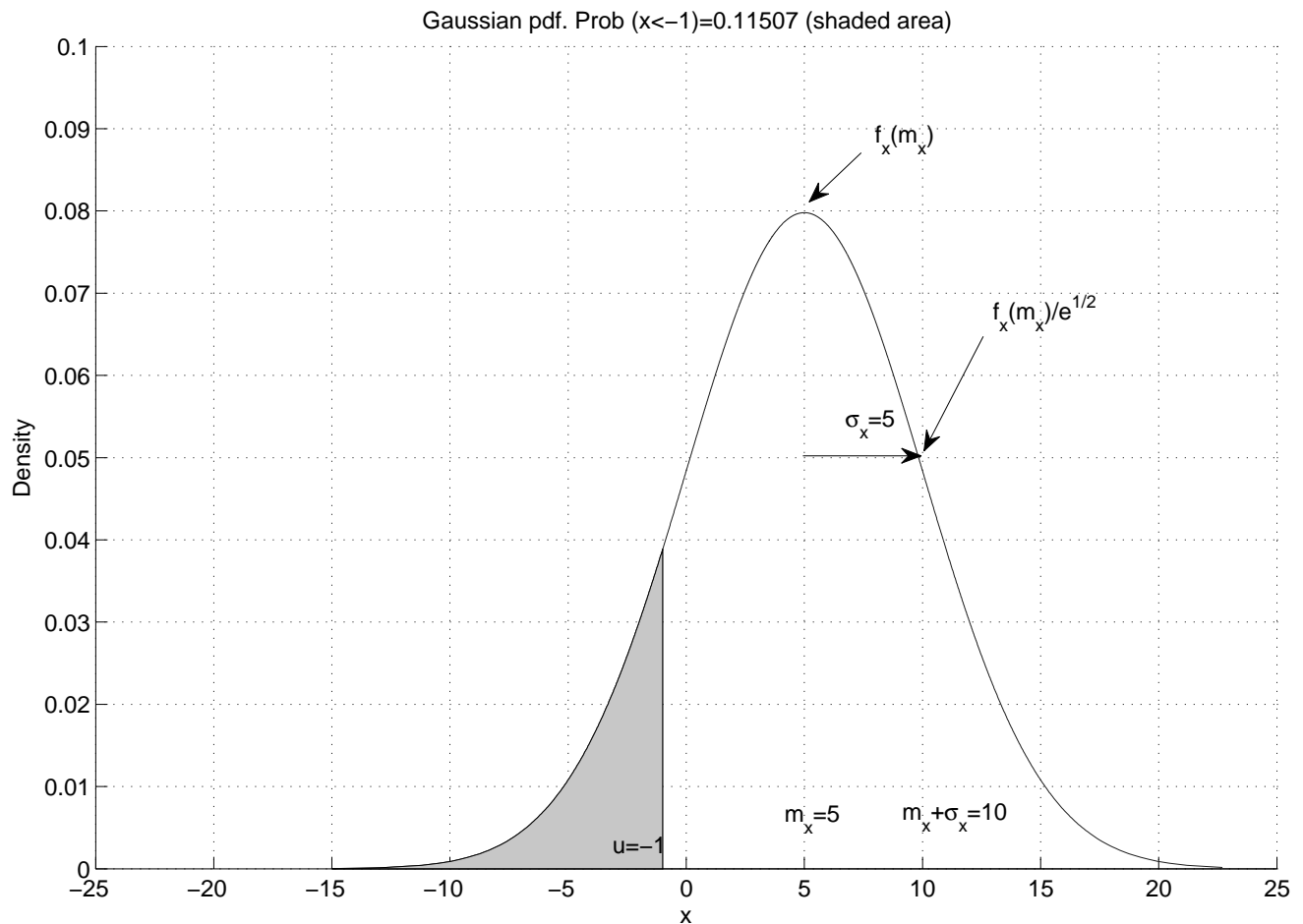
3.2. Prozesu gausstarrak

Prozesu gausstar (edo **normal**) batean, hura definitzen duten zorizko aldagaiak ($x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)$) elkarren artean gausstarrak izango dira edozein $n, t_1 \dots t_n$ -tan. Prozesu gausstarrak aztertu baino lehen, zorizko aldagai gausstarren propietateak errepasatuko ditugu.

3.2.1. Zorizko aldagai gausstarrak

x zorizko aldagaia gausstarra izango da beraren probabilitatearen dentsitate-funtzioa (pdf-a) honako hau baldin bada:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} \quad (3.12)$$



3.1. irudia. Probabilitatearen dentsitate-funtzio gausstarra.

m_x x -ren batezbestekoa da eta σ_x haren desbiderapen tipikoa ($\sigma_x > 0$). 3.1. irudian, pdf horren grafika aurkezten da $m_x = 5$ eta $\sigma_x = 5$ -erako. Zorizko aldagai **normal estandar** batean, batezbestekoak zero balio du eta desbiderapen tipikoak unitatea. z zorizko aldagai normal estandarra baldin bada, orduan, $z \cdot \sigma_x + m_x$ zorizko aldagai normala da m_x batezbestekoarekin

eta σ_x desbiderapen tipikoarekin. Modu berean, x zorizko aldagai gausstarra edo normala baldin bada m_x batezbestekoarekin eta σ_x desbiderapen tipikoarekin, orduan, $z = \frac{x-m_x}{\sigma_x}$ zorizko aldagai normal estandarra izango da.

Jakina, x gausstarra izanda:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{x\} &= m_x \\ \mathbf{E}\{(x - m_x)^2\} &= \sigma_x^2\end{aligned}\quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}f_x(m_x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \\ f_x(m_x \pm \sigma_x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \cdot \frac{1}{\sqrt{e}}\end{aligned}\quad (3.14)$$

Badakigunez, pdf-aren kurbaren tarte jakin bateko beheko azalera x aldagaiak tarte horretako balioak hartzeko zer probabilitate duen ematen du:

$$p(x \in [a, b]) = \int_a^b f_x(x) dx; \quad (3.15)$$

Asko erabiltzen den funtzio bat, tabulatuta ere ematen dena, **Q funtzio** izenez ezagutzen dena da, zeinak kurba gausstarraren beheko azalera kalkulatzeko duen, hau da, kurbaren beheko azalera $-\infty$ -tik $u < m_x$ balio batera arte edo $u > m_x$ balio batetik ∞ -ra arte. Taulak aldagai gausstar estandarretarako kalkulatu daude (batezbestekoa zero eta unitatea balio duen bariantza), eta, ondorioz, gure aldagai gausstarra estandarra ez bada, desnormalizatu egin beharko dugu dagokion balioa lortzeko. Ondoren, Q funtzioa nola erabiltzen den ikusiko dugu.

Zorizko aldagai normal estandar batean ($m_x = 0, \sigma_x = 1$), kurba gausstarraren beheko azalera kalkulatu nahi dugu $u > 0$ balio batetik ∞ -ra bitartean:

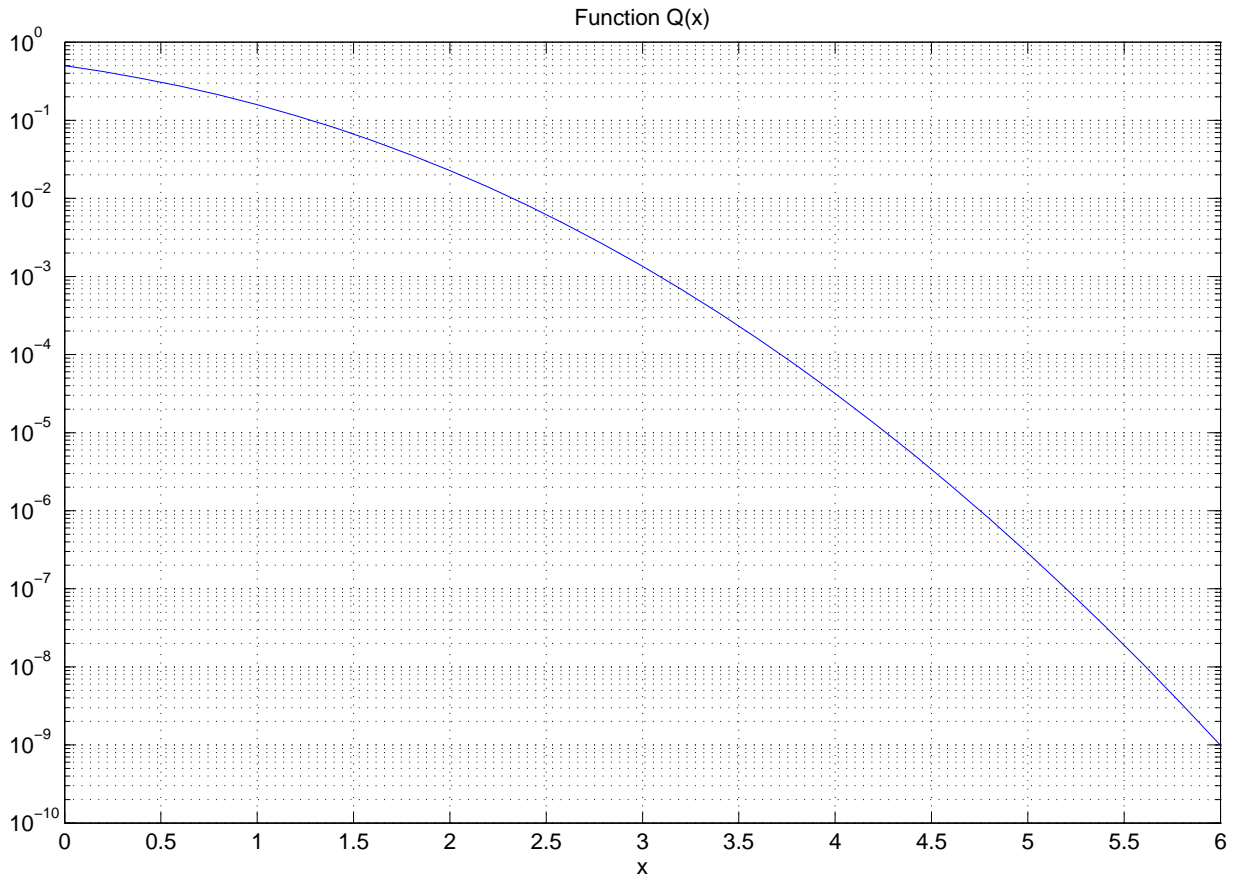
$$Q(u) = p(x \in [u, \infty]) = \int_u^\infty f_x(x) dx = \int_u^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx; \quad (3.16)$$

$u > 0$ balioarekin taulako abzisa-ardatzera joz, bilatzen ari garen balioa lortuko dugu.

Kurba gausstar estandarren azalera $[-\infty, u]$ tartean kalkulatu nahi izango bagenu, $u < 0$ izanik, kurba gausstar estandarra simetrikoa denez jatorriaren inguruan, taulara jo beharko genuke $|u|$ balioarekin (hau da, Q funtzioaren argumentua interesatzen zaigun puntuaren eta jatorriaren arteko distantzia da):

$$Q(|u|) = p(x \in [u, \infty]) = \int_u^\infty f_x(x) dx = \int_u^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx; \quad (3.17)$$

m_x batezbestekoa eta σ_x desbiderapen tipikoa daukan zorizko aldagai gausstar batean, kurba gausstarraren azalera ($u > m_x$ izanik) honako hau izango litzateke:



3.2. irudia. Kurba gausstarraren beheko azalera, $x > m_x$ -tik ∞ -ra bitartean.

$$\begin{aligned}
 p(x \in [u, \infty]) &= \int_u^{\infty} f_x(x) dx = \int_u^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx \\
 &\left\{ z = \frac{x-m_x}{\sigma_x}; \quad x = \sigma_x z + m_x; \quad dx = \sigma_x dz; \quad x = u \rightarrow z = \frac{u-m_x}{\sigma_x} \right\} \\
 &= \int_{\frac{u-m_x}{\sigma_x}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = Q\left(\frac{u-m_x}{\sigma_x}\right)
 \end{aligned}$$

$u < m_x$ baldin bada:

$$p(x \in [-\infty, u]) = \int_{-\infty}^u f_x(x) dx = Q\left(\frac{m_x - u}{\sigma_x}\right)$$

Hau da, m_x batezbestekoa eta σ_x bariantza daukan zorizko aldagai gausstar batean, Q funtzioaren argumentua atariaren balio normalizatua izango da:

$$\begin{aligned}
 Q\left(\frac{|u-m_x|}{\sigma_x}\right) &= p(x \in [-\infty, u]) = \int_{-\infty}^u f_x(x) dx; \quad u < m_x \\
 &= p(x \in [u, \infty]) = \int_u^{\infty} f_x(x) dx; \quad u > m_x
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Garrantzitsua da kontuan hartzea $Q(0) = \frac{1}{2}$ dela eta Q funtzioa balio positiboetarako definituta dagoela soilik (hau da, kurba gausstarraren buztanaren azalera da kalkulatzeko duguna).

Zorizko bi aldagai

x_i eta x_j 2 zorizko aldagaiak elkarren artean gausstarrak direla esaten da honako hau betetzen bada:

$$f_{x_i x_j}(x_i, x_j) = \frac{1}{(2\pi) \cdot \sqrt{|C|}} \cdot e^{-\frac{1}{2}[X] \cdot [C]^{-1} [X]^T} \quad (3.19)$$

non:

$$[X] = [x_i - m_{x_i} \quad x_j - m_{x_j}]$$

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{ii} & C_{ij} \\ C_{ji} & C_{jj} \end{bmatrix}$$

$$C_{ij} = \mathbb{E} \{ (x_i - m_{x_i}) \cdot (x_j - m_{x_j}) \}$$

Zorizko aldagai gausstarren ezaugarri garrantzitsu bat honako hau da: $C_{ij} = 0$ baldin bada $i \neq j$ -rako, orduan:

$$f_{x_i x_j}(x_i, x_j) = f_{x_i}(x_i) \cdot f_{x_j}(x_j)$$

Hau da, zorizko bi aldagai gausstar inkorrelatuta baldin badaude, independenteak izango dira.

3.2.2. Prozesu gausstarrak

Prozesu gausstar batean, hura definitzen duten zorizko aldagai guztiak $x(t_1), x(t_2) \dots x(t_n)$ gausstarrak eta elkarren artean gausstarrak ere badira. Beraz, probabilitatearen dentsitate-funtzio bateratua honako hau da:

$$f_{x_1 x_2 \dots x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \cdot |C|}} \cdot e^{-\frac{1}{2}[X] \cdot [C]^{-1} [X]^T} \quad (3.20)$$

non:

$$[X] = [x_1 - m_{x_1} \quad x_2 - m_{x_2} \quad \dots \quad x_n - m_{x_n}]$$

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

$$C_{ij} = \mathbb{E} \{ (x_i - m_{x_i}) \cdot (x_j - m_{x_j}) \}$$

$x(t)$ eta $y(t)$ bi prozesu gausstar elkarren artean gausstarrak direla esaten da beren $x(t_i)$ eta $y(t_j)$ zorizko aldagaiak elkarren artean gausstarrak baldin badira.

3.2.3. Prozesu gausstarren propietateak

1. Prozesu bat erabat definituta geratzen da m_{x_i} batezbestekoekin eta C_{ij} kobariantzekin, hau da, prozesu beraren $m_x(t)$ batezbestekoarekin eta $R_x(t_1, t_2)$ autokorrelazioarekin. Propietate hau modu zuzenean ondorioztatzen da (3.20) adierazpenetik.
2. Lehenengo propietatea dela eta, prozesu gausstar bat geldikorra baldin bada zentzu malguan (WSS), modu hertsian ere izango da geldikorra (SSS).
3. Bi prozesu elkarren artean gausstarrak baldin badira, eta $C_{xy}(t_1, t_2) = 0 \quad \forall t_1, t_2$ betetzen bada (hau da, inkorrelatuta baldin badaude), orduan, bi prozesuak independenteak izango dira.
4. Zorizko aldagai gausstarren edozein konbinazio linealek zorizko aldagai gausstar bat emango du emaitza gisa. Beraz, prozesu gausstar bat $h(t)$ pultsu-erantzuna daukan sistema lineal eta aldagaitz baten sarrera baldin bada, irteerako $y(t) = x(t) * h(t)$ prozesua ere gausstarra izango da.

3.3. Zarata termikoa eta zarata zuria

Zarata termikoa (Johnson-en zarata edo Nyquist-en zarata izenez ere ezaguna) bide edo euskarri eroaleetan sortzen da, kargen agitazio termikoaren eraginez. Karga horiek zoriz mugitzen dira, eta, ondorioz, anplitudeen banaketa gausstarra daukan $n(t)$ zorizko tentsio elektrikoa sortzen da, zeroko batezbesteko balioarekin. Ohiko lan-frekuentzietan ($|f| < 10^{12} Hz$), PDE-a lautzat har daiteke, eta, horregatik, zarata zuri izenez ezagutzen da:

$$G_n(f) = \frac{\eta}{2} \quad (3.21)$$

η eroalearen tenperaturaren araberrako konstante bat izanik (T °K-etan), dagoen zarata mailaren adierazgarri:

$$\eta = k_B \cdot T$$

$$k_B \text{ Boltzmann-en konstantea da } k_B = 1.37 \cdot 10^{-23} W/Hz/^\circ K \quad (3.22)$$

$$\text{edo unitate logaritmikoetan } 10 \cdot \log(k_B) = -198,6 \text{ dBm/Hz/}^\circ K \quad (3.23)$$

$$T : \text{temperatura } ^\circ K\text{-etan}$$

PDE horrekin, zarataren $n(t_1)$ eta $n(t_2)$ laginak elkarrekiko inkorrelatuta egongo dira:

$$\mathbb{E}\{n(t)\} = 0 \quad (3.24)$$

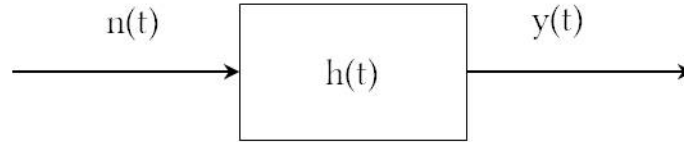
$$\mathbb{E}\{n(t_1) \cdot n(t_2)\} = \begin{cases} \frac{\eta}{2} & t_1 = t_2 \quad \text{baldin bada} \\ 0 & t_1 \neq t_2 \quad \text{denean} \end{cases} \quad (3.25)$$

$$\text{hau da, } R_n(\tau) = \frac{\eta}{2} \cdot \delta(\tau) \quad (3.26)$$

Ohartzekoa da zarataren potentzia totala infinitua izango litzatekeela, baina, benetan, zarata B Hz-eko banda-zabalera mugatua daukan sistema batetik zehar begiratua izango denez, balio finitu bat lortuko da zarataren potentzia kalkulatzeko.

3.4. Zarata iragazia eta zarataren banda-zabalera baliokidea

Zarata beti $h(t)$ pulsu-erantzuna daukan sistema lineal eta aldagaitz batetik zehar begiratu dugu, 3.3. irudian azaltzen den moduan. Irteerako zarataren PDE-a:



$$R_y(\tau) = R_n(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau)$$

3.3. irudia. Zarataren iragazketa sistema lineal eta aldagaitz batean.

$$G_y(f) = G_n(f) \cdot |H(f)|^2$$

$$G_y(f) = \frac{\eta}{2} |H(f)|^2$$

Irteerako zarata gausstarra izango da, eta haren batezbestekoa, zero:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{y(t)\} &= \mathbb{E}\{n(t) * h(t)\} = \mathbb{E}\left\{\int n(t - \tau)h(\tau)d\tau\right\} = \\ &= \int \mathbb{E}\{n(t - \tau)\}h(\tau)d\tau = 0 \end{aligned}$$

Irteeran, zarataren potentzia:

$$P_y = \int_{-\infty}^{\infty} G_n(f)|H(f)|^2 df = \frac{\eta}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = \sigma_y^2$$

Eta irteerako zarataren pdf-a honako hau izango da:

$$f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}}$$

Sistema bat *pasatzen uzten duen zarataren* arabera karakterizatzeko, B_N **zarataren banda-zabalera baliokidea** kontzeptua erabiltzen da. Behe-paseko sistema batean, B_N behe-paseko iragazki ideal baten banda-zabalera da, $K = |H(f)|_{max}$ -eko irabazia daukana eta sistemak pasatzen uzten duen zarataren potentzia bera pasatzen uzten duena, sarreran zarata zuria dagoenean. $H(f)$ frekuentzia-erantzuna daukan sistemaren irteerako zarataren N_0 potentzia, sarreran $\eta/2$ -eko PDE-a daukan zarata zuria dagoenean:

$$N_0 = \frac{\eta}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df$$

Sarreran $\eta/2$ -eko PDE-a daukan zarata zuria dagoenean, B_N Hz-eko banda-zabalera eta $|H_{max}|$ irabazia daukan behe-paseko iragazki ideal baten irteerako zarataren N_0 potentzia honako hau da:

$$N_0 = \frac{\eta}{2} |H_{max}|^2 \cdot 2B_N$$

Beraz:

$$B_N = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df}{2|H_{max}|^2} \quad (3.27)$$

Banda-paseko sistema batean, definizioa berdin-berdina da.

3.4.1. Adibidea: RC behe-paseko iragazkia

Adibide honetan, RC behe-paseko iragazki baten zarataren banda-zabalera baliokidea kalkulatu dugu, eta 3 dB-eko banda-zabalerarekin konparatu dugu. RC behe-paseko iragazki baten frekuentzia-erantzuna honako hau da:

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f RC}$$

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f RC)^2}}$$

3 dB-eko f_c ebaki-frekuentzia kalkulatzeko f -ren balioa topatu behar dugu, zeinaren $|H(f)|^2$ funtzioa bere balio maximoaren ($|H(0)|^2$) erdira jausten den:

$$|H(0)|^2 = 1; \quad |H(f_c)|^2 = \frac{1}{1 + (2\pi f_c RC)^2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad f_c = \frac{1}{2\pi RC}$$

B_N zarataren banda-zabalera baliokidea kalkulatzeko, sistemak sortzen duen potentzia eta B_N Hz-eko banda-zabalera daukan iragazki ideal batekin lortuko litzatekeena berdindu behar ditugu, sarreran $\eta/2$ -ko PDE-a daukan zarata zuria dagoenean:

$$\frac{\eta}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = \frac{\eta}{2} \cdot 2B_N$$

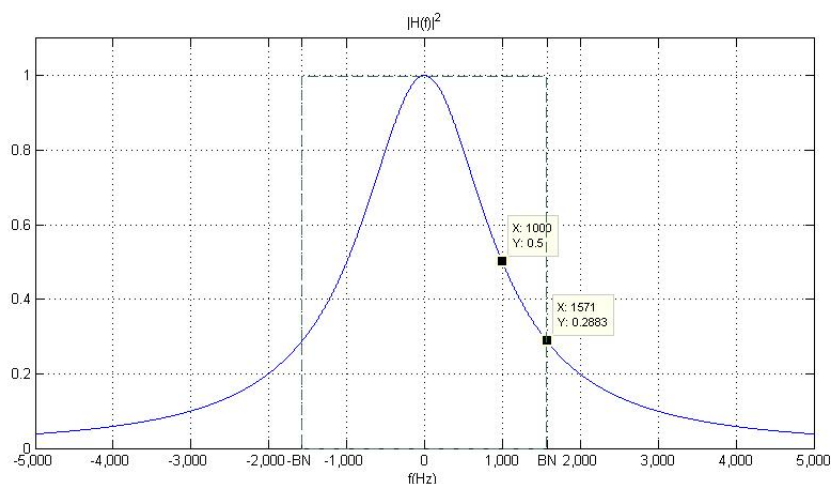
$$B_N = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + (2\pi f RC)^2} df$$

Integrala ebazteko, honako jatorrizko funtzio hau erabiltzen dugu:

$$\int \frac{1}{1 + x^2} dx = \arctan x$$

Eta honako hau lortzen da: $B_N = \frac{1}{4RC} > f_{c3dB} = \frac{1}{2\pi RC}$

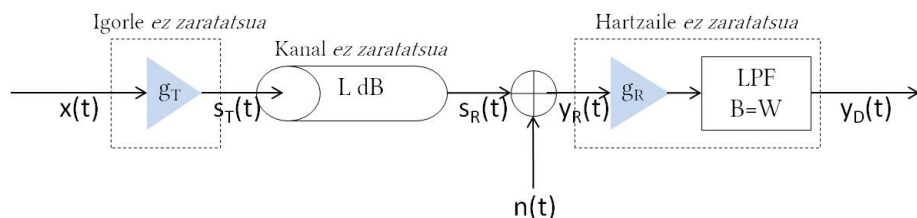
3.4. irudiak $RC = \frac{1}{2000\pi}$ -rako lortutako emaitzak erakusten ditu ($f_{c3dB} = 1000$ eta $B_N = 500\pi = 1571Hz$).



3.4. irudia. RC behe-paseko iragazkiaren eta haren zarataren potentziaren arabera iragazki baliokidearen frekuentzia-erantzunak.

3.5. Oinarri-bandako transmisio-sistema baten eredia zaratarekin

Potentzien arabera, oinarri-bandako transmisio-sistema baten eredia, zaratarekin, 3.5. irudian adierazten den moduan modelatzen da.



3.5. irudia. Oinarri-bandako transmisio-sistema baten eredia zaratarekin.

3.5. irudiko elementuei dagokienez:

- $x(t)$: transmititu nahi den prozesua, behe-pasekoa eta W Hz-eko banda-zabalerakoa. Sarrerako seinalearen potentzia S_x izango da.
- g_T : igorleak potentzian lortzen duen irabazia. Igorlea g_T irabazia potentzian lortzen duen amplifikadore lineal baten modura adieraziko da.
- $s_T(t)$: transmitituriko seinalea, kanalean sartzen dena. Haren PDE-a eta sarrerako seinalearenak berdinak dira, g_T potentziaren irabazia kontuan izan barik:

$$\begin{aligned}
 s_T(t) &= \sqrt{g_T}x(t) \\
 G_{s_T}(f) &= g_T \cdot G_x(f) \\
 P_T &= g_T \cdot P_x
 \end{aligned}$$

- L dB: kanal idealak sartzen duen ahuldura (dB-etan). Dagokion balioa linealean $l = 10^{L/10}$ izango da.
- $s_R(t)$: jasotako seinalea. Sarrerako seinalearen berdina izango da, irabazi/ahuldura faktoreak gehituta eta t_0 atzerapen jakin batekin. Atzerapen horrek ez dauka eraginik potentziak kalkulatzean.

$$\begin{aligned} s_R(t) &= \frac{1}{\sqrt{l}} s_T(t) \\ G_{s_R}(f) &= \frac{1}{l} \cdot G_{s_T}(f) \\ S_R &= \frac{1}{l} \cdot S_T \end{aligned}$$

non S_T eta S_R transmititutako ($s_T(t)$) eta jasotako ($s_R(t)$) seinaleen potentziak diren, hurrenez hurren.

- $n(t)$: sistemaren zarata da, seinalearekin inkorrelatua, $G_n(f) = \frac{\eta}{2}$ PDE-arekin. Ereduan, sistema osoko zarata gehigarri eta zuritzat hartzen da, eta hartzailearen sarreran dago; hala, $s_R(t)$ jasotako seinaleari gehitzen zaio. Eredu horrekin, gainerako osagaiak elementu ez-zaratatsuak izango dira. Horrela, $y_R(t)$ seinaleak seinalearen osagai bat edukiko du hartzailearen sarreran ($s_R(t)$), eta beste osagai bat zaratarena ($n(t)$):

$$y_R(t) = s_R(t) + n(t)$$

- g_R : hartzaileak potentzian lortzen duen irabazia. Hartzaile hori idealtzat hartzen da, $|H_R(f)|^2 = g_R \cdot \Pi\left(\frac{f}{2W}\right)$ izanik eta W Hz-eko banda-zabalerakoa, seinalearen frekuentzia osagai guztiei pasatzen uzten die, eta zarata $x(t)$ -ren banda-zabalerara mugatzen du.
- $y_D(t)$: hartzailearen irteeran detektaturiko seinalea. Bi osagai edukiko ditu: bata seinaleari dagokiona eta bestea zaratari dagokiona:

$$y_D(t) = s_D(t) + n_D(t) = s_R(t) \cdot \sqrt{g_R} + n_D(t)$$

Seinalea eta zarata inkorrelatuta daudela kontuan edukita, $y_D(t)$ -ren potentzia detektaturiko seinalearen potentziaren (S_D) eta detektaturiko zarataren potentziaren (N_D) batura izango da. Horrela sistemaren irteeran detektaturiko seinale/zarata erlazioa kalkulatu dugu:

$$(S/N)_D = \frac{S_D}{N_D} = \frac{\mathbb{E}\{|s_D(t)|^2\}}{\mathbb{E}\{|n_D(t)|^2\}}$$

$$S_D = \int_{-\infty}^{\infty} G_{S_D}(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} g_R \cdot G_{S_R}(f) df = S_R \cdot g_R$$

Irteerako zarata sarrerako zarata iragazia izango da, $H_R(f)$ frekuentzia-erantzuna daukan hartzailetik zehar pasatu eta gero:

$$\begin{aligned} n_D(t) &= n(t) * h_R(t) \\ G_{n_D}(f) &= G_n(f) \cdot |H_R(f)|^2 \\ N_D &= g_R \cdot \frac{\eta}{2} \cdot 2W = g_R \cdot \eta \cdot W \end{aligned}$$

Eta, orduan, seinale/zarata erlazioa detekzioan (sistemaren irteeran):

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{S_R \cdot g_R}{g_R \cdot \eta \cdot W} = \frac{S_T}{l \cdot \eta \cdot W} \quad (3.28)$$

Ikus daitekeenez, transmititu beharreko seinalearen banda-zabalera handitu ahala (kanal berbera eta transmitituriko potentzia berbera kontuan hartuz), seinale/zarata erlazioa txartu egiten da detekzioan. Beste modu batera esanda, detekzioan kalitatea mantentzeko, seinalearen banda-zabalera handiagotzeak transmititu beharreko seinalearen potentzia proportzionalki handiagotzea eskatzen du. Horrela, adibidez, banda-zabalera telefonikoa ($W = 4 \text{ kHz}$) daukan seinale bat transmititzetik kalitate profesionala daukan audio-seinale bat (24 kHz) transmititzera pasatzen bagara eta detekzioan kalitate jakin bat mantendu nahi badugu, transmititu beharreko potentzia 6 biderrez handiagoa izan beharko da (hau da, $7,8 \text{ dB}$ handiagoa). Kalitate jakin hori irudi-seinale batekin mantentzeko, $W = 4 \text{ MHz}$ izanik, transmititu beharreko potentzia 1000 biderrez handiagoa (hau da, 30 dB handiagoa) izan beharko da, seinale telefonikoarenarekin alderatuz.

Adibidea

Oinarri-bandako transmisio-sistema jakin batean kanalak $L = 140 \text{ dB}$ -eko ahuldura sartzen du. Hartzaileak $B_N = W \text{ Hz}$ -eko zarataren banda-zabalera baliokidea dauka, $W = 20 \text{ kHz}$ izanik mezuaren banda-zabalera, eta unitateko irabazia potentzian eta $5 \cdot T_0$ -ko zarataren temperatura baliokidea ($T_0 = 290^\circ \text{K}$). Detekzioan 60 dB baino gehiagoko seinale/zarata erlazioa lortu nahi bada, zein izango da transmititu beharreko seinalearen potentzia minimoa?

$$\begin{aligned} (S/N)_D |_{dBm} &= S_D |_{dBm} - N_D |_{dBm} \geq 60 \text{ dB} \\ S_D |_{dBm} &= S_R |_{dBm} = S_T |_{dBm} - 140 \text{ dB} \\ N_D &= \frac{\eta}{2} \cdot g_R \cdot 2 \cdot B_N = \frac{k_B \cdot T_N}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot W = k_B \cdot 5 \cdot T_0 \cdot W \\ N_D |_{dBm} &= 10 \cdot \log k_B + 10 \log(5 \cdot T_0) + 10 \log W \end{aligned}$$

ordezkatzuz honako hau lortzen da: $N_D = -124 \text{ dBm}$

$$S_T \geq 76 \text{ dBm}$$

4. gaia

Banda-paseko seinale eta sistemak

Komunikazio-sistema asko banda-pasekoak dira: komunikazio-bidetik transmitituriko seinalearen potentzia frekuentzia jakin baten inguruan aurkitzen da (f_0 frekuentzia-eramailearen inguruan, hain zuzen, *carrier* izenez ere ezaguna edo f_c). Gai honetan banda-paseko seinale eta sistemekin lan egiteko egokiak diren tresna matematiko batzuk aurkeztuko ditugu.

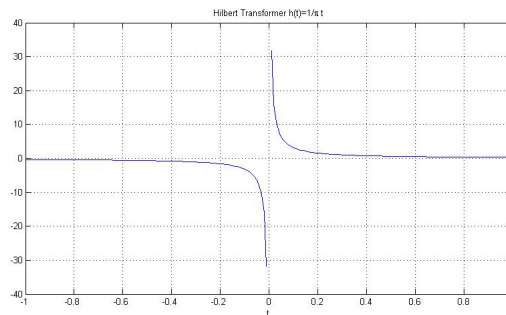
4.1. Hilbert-en transformatua

Hilbert-en transformatzailea pulsu-erantzun hau duen sistema lineal eta aldagaitza da:

$$h(t) = \frac{1}{\pi \cdot t} \quad (4.1)$$

$x(t)$ seinale jakin baten Hilbert-en transformatua honako hau izanik:

$$\mathcal{H}\{x(t)\} = \hat{x}(t) = x(t) * \frac{1}{\pi \cdot t} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \frac{1}{\pi (t - \tau)} d\tau \quad (4.2)$$



Ikus daitekeenez, beste transformazio batzuekin alderatuz (adibidez, Fourier-en transformatuarekin), eremua ez da aldatzen eta, bai seinalea, bai Hilbert-en transformatua, t aldagaiaren funtzioak dira.

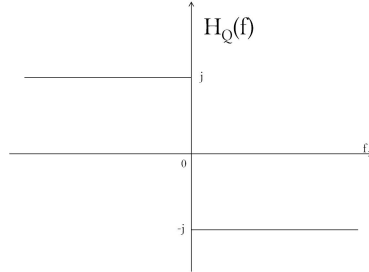
Hilbert-en transformatzaileak sistema lineal eta aldagaitz baten jokaera daukanez, halako sistemen propietate asko erabil daitezke bera aztertzeko. Beraren Fourier-en transformatua kalkulatzeko badugu:

$$\frac{1}{\pi \cdot t} \Leftrightarrow -j \operatorname{sgn}(f) \quad (4.3)$$

non

$$\text{sgn}(f) = \begin{cases} -1 & f < 0 \\ 1 & f > 0 \end{cases}$$

Hilbert-en transformatzailearen frekuentzia-erantzuna lortuko dugu: $H_Q(f) = -j \text{sgn}(f)$



$$|H_Q(f)| = 1 \quad \forall f \quad (4.4)$$

$$\angle H_Q(f) = \begin{cases} \pi/2 & f < 0 \\ -\pi/2 & f > 0 \end{cases}$$

Hau da, sistemak ez du aldatzen sarrerako seinalearen Fourier-en transformatuaren modulu; fasea aldatzen du soilik.

$x(t)$ seinale baten Fourier-en transformatua ezagutzen badugu, $X(f)$, haren Hilbert-en transformatua frekuentzia-eremuan kalkulatu ahal izango dugu honako hau erabiliz:

$$\mathcal{F}\{\hat{x}(t)\} = \hat{X}(f) = X(f) \cdot (-j \text{sgn}(f)) \quad (4.5)$$

Adibidea

$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ kosinuaren Hilbert-en transformatua kalkulatu dugu:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\hat{x}(t)\} &= X(f) \cdot (-j \text{sgn}(f)) \\ &= \frac{1}{2} \{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\} \cdot (-j \text{sgn}(f)) \\ &= \frac{1}{2j} \{\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)\} \end{aligned}$$

eta denbora-eremura bueltatuz:

$$\hat{x}(t) = \sin(2\pi f_0 t)$$

Erraza da hau frogatzea:

$$\mathcal{H}\{\sin(2\pi f_0 t)\} = -\cos(2\pi f_0 t)$$

Eta orokorrean:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\{\cos(2\pi f_0 t + \phi)\} &= \cos(2\pi f_0 t + \phi - \frac{\pi}{2}) \\ &= \sin(2\pi f_0 t + \phi) \end{aligned}$$

Hau da, Hilbert-en transformatuak ziklo baten laurdeneko ($\pi/2$ -eko) desfasea aplikatzen dio f_0 frekuentzia-osagaiari. Seinale batek, frekuentzia-osagai anitzen bidez osatuta badago, Hilbert-en transformatua sistema lineala denez, $\pi/2$ -ko desfase hori aplikatuko die *frekuentzia-osagai horiei guztiei*. Hilbert-en transformatuaren eragina elementu atzeratzaile baten eraginetik desberdintzea garrantzitsua da. Hilbert-en transformatuak *desfase konstantea* eragiten dio frekuentzia-osagai bakoitzari. Aldiz, elementu atzeratzaile batek *atzerapen konstantea* eragiten dio frekuentzia-osagai bakoitzari. Hain zuzen ere, sistema atzeratzaile baten frekuentzia-erantzunaren modulua konstantea da (Hilbert-en tranformatuan gertatzen den bezala) baina haren fase-erantzuna lineala da (beraren malda eragiten duen atzerapenarekiko proportzionala izanik):

$$H(f) = K e^{-j2\pi f_0 t}$$

Horren ondorioz, Hilbert-en transformatua frekuentzia-osagai anitz dauzkan $x(t)$ seinale baten gain aplikatzean, haren uhin-itxura aldatuko da. Aldiz, seinale horren gain atzerapen bat aplikatzean, haren uhin-itxura ez da aldatuko.

4.5 erabiliz, erraza da ondorengo ikustea:

$$\mathcal{H}\{\mathcal{H}\{x(t)\}\} = -x(t)$$

$(-j \cdot \text{sgn}(f))^2 = -1$ delako.

Gainera, Hilbert-en transformatzailea eragile lineala da. Sistemaren sarreran seinale sinusoidalen konbinaketa lineal bat baldin badaukagu, irteerako seinalea sarrerako seinale horien konbinaketa bera izango da, eta seinale sinusoidal bakoitzak $-\frac{\pi}{2}$ -ko desfasea jasoko du. Horregatik esan ohi da transformatzaileak $-\frac{\pi}{2}$ -ko desfasea sartzen duen desfasatzaile baten jokaera duela. Garrantzitsua da ohartzea ezarritako desfasea berdin-berdina dela sarrerako frekuentzia guztietan, sistema atzeratzaile batekin alderatuta; azken honek ezartzen duen desfasea sarrerako frekuentziarekiko proportzionala da.

4.2. Seinale analitikoa

$x(t)$ -ren seinale analitikoa, $x(t)$ erreala izanik, modu honetan sortzen den seinale konplexua da:

$$\mathcal{A}_x(t) = x^+(t) = x(t) + j \hat{x}(t) \quad (4.6)$$

Ondorioz:

$$\begin{aligned} \Re\{x^+(t)\} &= x(t) \\ \Im\{x^+(t)\} &= \hat{x}(t) \end{aligned}$$

Frekuentzia-eremuan, seinale analitikoaren Fourier-en transformatua kalkula dezakegu:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x^+(t)\} &= X^+(f) = X(f) + j(-j \text{sgn}(f)) \cdot X(f) \\ &= X(f) \cdot [1 + \text{sgn}(f)] \\ &= X(f) \cdot 2 \cdot u(f) \end{aligned}$$

Hau da:

$$X^+(f) = \begin{cases} 0 & f < 0 \\ 2 \cdot X(f) & f > 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

Seinale analitiko negatiboa ere definitzen da, zeina seinale analitiko *positiboaren* konjokatua den:

$$\begin{aligned} x^-(t) &= x(t) - j \hat{x}(t) \\ X^-(f) &= X(f) \cdot 2 \cdot u(-f) = \begin{cases} 2 \cdot X(f) & f < 0 \\ 0 & f > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Adibidea

$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ kosinua berriro ere kontuan edukita:

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos(2\pi f_0 t) & X(f) &= \frac{1}{2} \{ \delta(f - f_0) + \delta(f + f_0) \} \\ \hat{x}(t) &= \sin(2\pi f_0 t) & \hat{X}(f) &= \frac{1}{2j} \{ \delta(f - f_0) - \delta(f + f_0) \} \\ x^+(t) &= e^{j2\pi f_0 t} & X^+(f) &= \delta(f - f_0) \\ x^-(t) &= e^{-j2\pi f_0 t} & X^-(f) &= \delta(f + f_0) \end{aligned} \quad (4.8)$$

4.3. Behe-paseko baliokidea

$x(t)$ banda-paseko seinale baten **behe-paseko baliokidea** (**inguratzaile konplexu** izenez ere ezaguna) $x(t)$ aurkitzen den frekuentzia-bandaren f_0 *frekuentzia batekiko* definitzen da modu honetan:

$$\tilde{x}(t) = x^+(t) \cdot e^{-j2\pi f_0 t} \quad (4.9)$$

Haren Fourier-en transformatua:

$$\tilde{X}(f) = X^+(f + f_0) \quad (4.10)$$

Hau da, seinale analitikoaren berdina da frekuentzien jatorrira desplazatuta. (4.9) garatuz:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= x^+(t) \cdot e^{-j2\pi f_0 t} \\ &= (x(t) + j \hat{x}(t)) (\cos 2\pi f_0 t - j \sin 2\pi f_0 t) \\ \Re \{ \tilde{x}(t) \} &= x(t) \cos 2\pi f_0 t + \hat{x}(t) \sin 2\pi f_0 t \\ &= x_F(t) \quad x(t)\text{-ren fase-osagaia} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Im \{ \tilde{x}(t) \} &= \hat{x}(t) \cos 2\pi f_0 t - x(t) \sin 2\pi f_0 t \\ &= x_C(t) \quad x(t)\text{-ren koadratura-osagaia} \end{aligned}$$

$$\tilde{x}(t) = x_F(t) + j x_C(t)$$

Gainera:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \Re\{x^+(t)\} = \Re\{\tilde{x}(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t}\} \\
 &= \Re\{(x_F(t) + jx_C(t))(\cos 2\pi f_0 t + j \sin 2\pi f_0 t)\} \\
 &= x_F(t) \cos 2\pi f_0 t - x_C(t) \sin 2\pi f_0 t
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

eta:

$$\begin{aligned}
 \hat{x}(t) &= \Im\{x^+(t)\} = \Im\{\tilde{x}(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t}\} \\
 &= \Im\{(x_F(t) + jx_C(t))(\cos 2\pi f_0 t + j \sin 2\pi f_0 t)\} \\
 &= x_C(t) \cos 2\pi f_0 t + x_F(t) \sin 2\pi f_0 t
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

$x(t)$ -ren **inguratzaille erreala** modu honetan definitzen da:

$$e_x(t) = |\tilde{x}(t)| = \sqrt{x_F^2(t) + x_C^2(t)} \tag{4.13}$$

Hau da, behe-paseko baliokidearen modulua da. Seinale baten inguratzaillea seinale analitikoaren modulua kalkulatu ere lor daiteke:

$$e_x(t) = |\tilde{x}(t)| = |x^+(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t}| = |x^+(t)| = \sqrt{x^2(t) + \hat{x}^2(t)}$$

$x(t)$ -ren **aldiuneko fasea** behe-paseko baliokidearen fase gisa ere definitzen da:

$$\phi_x(t) = \angle \tilde{x}(t) = \arctan \frac{x_C(t)}{x_F(t)} \tag{4.14}$$

Orduan:

$$\tilde{x}(t) = e_x(t) \cdot e^{j\phi_x(t)} \tag{4.15}$$

$$x^+(t) = \tilde{x}(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t} = e_x(t) \cdot e^{j(2\pi f_0 t + \phi_x(t))} \tag{4.16}$$

Eta, beraz, $x(t)$ honela adieraz daiteke:

$$x(t) = \Re\{x^+(t)\} = e_x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t + \phi_x(t))$$

Baita honela ere:

$$x(t) = e_x(t) \cos 2\pi f_0 t \cos \phi_x(t) - e_x(t) \sin 2\pi f_0 t \sin \phi_x(t)$$

non:

$$x_F(t) = e_x(t) \cos \phi_x(t)$$

$$x_C(t) = e_x(t) \sin \phi_x(t)$$

Garrantzitsua da honetaz ohartzea:

$$\begin{array}{ll}
 x(t) & \text{erreala da, banda-pasekoa} \\
 \hat{x}(t) & \text{erreala da, banda-pasekoa} \\
 \left. \begin{array}{l} x_F(t) \\ x_C(t) \\ e_x(t) \\ \phi_x(t) \end{array} \right\} & \text{erreala da, behe-pasekoa} \\
 \tilde{x}(t) & \text{konplexua da, behe-pasekoa} \\
 x^+(t) & \text{konplexua da, banda-pasekoa}
 \end{array}$$

Ariketa

Ikusi dugunez, banda-paseko seinaleak normalean behe-paseko seinale bat eta banda-paseko beste bat biderkatuz osatzen dira. Ariketa honetan, modu horretan sortu den banda-paseko seinale baten Hilbert-en transformatua kalkulatu dugu.

Demagun $x(t) = m(t)c(t)$ banda-paseko seinale bat dela, non $m(t)$ W -eko banda-zabalera daukan behe-paseko seinalea den eta $c(t)$ $B = f_2 - f_1$ -ko banda-zabalera daukan banda-paseko seinalea, f_1 espektroaren beheko frekuentzia izanik eta f_2 goikoa. $\hat{x}(t)$ kalkulatu nahi dugu, hau da, $x(t)$ banda-paseko seinalearen (zeina aurreko bien biderkaduratik sortua izan den) Hilbert-en transformatua. Horretarako, frekuentzia-eremuan egingo dugu lan:

$$\hat{X}(f) = M(f) * C(f) \cdot -j \operatorname{sgn} f = \int_{-\infty}^{\infty} M(f - \lambda)C(\lambda)d\lambda \cdot -j \operatorname{sgn} f$$

$c(t)$ banda-paseko seinalea izanik, honako hau idatz dezakegu:

$$C(f) = \frac{1}{2} (C^-(f) + C^+(f))$$

$$\hat{X}(f) = \frac{1}{2} \left(\int_{-f_2}^{-f_1} M(f - \lambda)C^-(\lambda)d\lambda + \int_{f_1}^{f_2} M(f - \lambda)C^+(\lambda)d\lambda \right) \cdot -j \operatorname{sgn} f$$

$f_1 > W$ baldin bada (hau da, $m(t)$ eta $c(t)$ seinaleen espektroak gainjartzen ez badira) orduan lehenengo batugaiaren emaitza zero izango da $f > 0$ denean eta bigarren batugaia, aldiz, zero izango da $f < 0$ denean, eta ondorioz:

$$\begin{aligned} \hat{X}(f) &= \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^0 M(f - \lambda)C^-(\lambda) \cdot (j)d\lambda + \int_0^{\infty} M(f - \lambda)C^+(\lambda) \cdot (-j)d\lambda \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} M(f - \lambda)C(\lambda) \cdot -j \operatorname{sig} \lambda d\lambda \\ &= M(f) * \hat{C}(f) \end{aligned}$$

Beraz:

$$\hat{x}(t) = m(t) \hat{c}(t)$$

Hau da, $x(t)$ -ren Hilbert-en transformatua $m(t)$ behe-paseko seinalearen eta banda-paseko seinalearen $\hat{c}(t)$ Hilbert-en transformatuaren arteko biderkadura da.

Ohiko kasu bat modulazioaren eragiketa da:

$$x(t) = m(t) \cos(2\pi f_0 t) \quad \hat{x}(t) = m(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

Eta orokorrean banda-paseko seinale batean:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_F(t) \cos(2\pi f_0 t) - x_C(t) \sin(2\pi f_0 t) \\ \hat{x}(t) &= x_F(t) \sin(2\pi f_0 t) + x_C(t) \cos(2\pi f_0 t) \end{aligned}$$

4.4. Banda-paseko sistemak

Banda-paseko seinaleak banda-paseko sistemetatik zehar transmitituko direnez, interesgarria da sarreraren, irteeraren eta pultsu-erantzunaren banda-pasearen adierazpenen erlazioak ezagutzea.

Hau da, $x(t)$ eta $h(t)$ biak banda-pasekoak baldin badira, $y(t)$ ere banda-pasekoa izango da, eta honako hau adieraz dezakegu:

$$x(t) = \mathbb{R}\{x^+(t)\} = \frac{1}{2} \{x^+(t) + x^-(t)\} \quad (4.17)$$

$$h(t) = \mathbb{R}\{h^+(t)\} = \frac{1}{2} \{h^+(t) + h^-(t)\} \quad (4.18)$$

$$y(t) = \mathbb{R}\{y^+(t)\} = \frac{1}{2} \{y^+(t) + y^-(t)\} \quad (4.19)$$

Badakigu erlazio hau betetzen dela:

$$\begin{aligned} Y(f) &= X(f) \cdot H(f) = \frac{1}{2} \{X^+(f) + X^-(f)\} \frac{1}{2} \{H^+(f) + H^-(f)\} \\ &= \frac{1}{4} \{X^+(f)H^+(f) + X^-(f)H^-(f)\} \\ X^+(f)H^-(f) &= X^-(f)H^+(f) = 0 \text{ delako.} \end{aligned}$$

Bestalde, (4.17) kontuan hartuta:

$$Y^+(f) = \frac{1}{2} X^+(f)H^+(f) \quad Y^-(f) = \frac{1}{2} X^-(f)H^-(f) \quad (4.20)$$

$$y^+(t) = \frac{1}{2} x^+(t) * h^+(t) \quad y^-(t) = \frac{1}{2} x^-(t) * h^-(t) \quad (4.21)$$

(4.10) kontuan hartuta eta (4.20)-n ordezkaturaz, behe-paseko baliokiderako honako hau adieraz dezakegu:

$$\begin{aligned} Y^+(f) &= \tilde{Y}(f - f_0) = \frac{1}{2} \tilde{X}(f - f_0) \tilde{H}(f - f_0) \\ \tilde{Y}(f) &= \frac{1}{2} \tilde{X}(f) \tilde{H}(f) \\ \tilde{y}(t) &= \frac{1}{2} \tilde{x}(t) * \tilde{h}(t) \end{aligned}$$

4.5. Banda-paseko prozesuak

Aurreko ataletan banda-paseko seinale baten adierazpen analitikoa eta behe-pasekoa lortu ditugu. Landu beharreko seinalea banda-paseko prozesu estokastiko bat denean, banda-paseko prozesuen korrelazio-funtzioaren eta PDE-en adierazpen bereziak ezagutu nahi izango ditugu.

4.5.1. Hilbert-en transformatzailea

Hilbert-en transformatzailea sistema aldagaitz eta linealtzat hartuz $h(t) = \frac{1}{\pi t}$ pultsu-erantzunarekin:

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= x(t) * \frac{1}{\pi t} \\ G_{\hat{x}}(f) &= G_x(f) \cdot |H(f)|^2 = G_x(f) \cdot |-j \operatorname{sgn}(f)|^2 = G_x(f) \\ R_{\hat{x}}(\tau) &= R_x(\tau)\end{aligned}$$

eta bereziki:

$$\begin{aligned}R_{\hat{x}}(0) &= R_x(0) \\ P_{\hat{x}} &= P_x\end{aligned}$$

Gainera:

$$\begin{aligned}R_{\hat{x}x}(\tau) &= R_x(\tau) * \frac{1}{\pi t} = \widehat{R}_x(\tau) \\ G_{\hat{x}x}(f) &= -j \cdot \operatorname{sgn}(f) \cdot G_x(f)\end{aligned}$$

Eta $G_x(f)$ beti funtzio BIKOITIA denez, $G_{\hat{x}x}(f)$ funtzio BAKOITIA izango da eta beraz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_{\hat{x}x}(f) = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{\hat{x}x}(0) = 0 \quad (4.22)$$

Hau da, $x(t)$ eta haren $\hat{x}(t)$ Hilbert-en transformatuaren arteko potentzia gurutzatua zero da (prozesuak ortogonalak dira jatorrian).

Modu berean:

$$R_{x\hat{x}}(\tau) = R_{\hat{x}x}^*(-\tau) = R_x(\tau) * -\frac{1}{\pi\tau} = -R_{\hat{x}x}(\tau) = -\widehat{R}_x(\tau)$$

4.5.2. Seinale analitikoa

4.5.2.1. Korrelazioak

$x(t)$ prozesuaren seinale analitikoaren autokorrelazioa kalkulatu dugu:

$$\begin{aligned}x^+(t) &= x(t) + j\hat{x}(t) \\ R_{x^+}(\tau) &= E\{[x(t+\tau) + j\hat{x}(t+\tau)][x(t) - j\hat{x}(t)]\} \\ &= R_x(\tau) + jR_{\hat{x}x}(\tau) - jR_{x\hat{x}}(\tau) + R_{\hat{x}}(\tau) \\ &= 2\left[R_x(\tau) + j\widehat{R}_x(\tau)\right]\end{aligned} \quad (4.23)$$

Hemendik (4.22) kontuan hartuta) honako hau ondorioztatzen da:

$$P_{x^+} = R_{x^+}(0) = 2R_x(0) = 2P_x \quad (4.24)$$

Modu berean, $x^-(t)$ seinale analitiko negatiboaren autokorrelazioa kalkulatu dezakegu, eta honako hau lortu:

$$R_{x^-}(\tau) = 2\left[R_x(\tau) - j\widehat{R}_x(\tau)\right] \quad (4.25)$$

4.5.2.2. Potentziaren dentsitate-espektroak

(4.23) eta (4.25)-en Fourier-en transformatuak kalkulatzeko ditugu, dagozkien PDE-ak lortzeko:

$$G_{x^+}(f) = 2 \cdot G_x(f) (1 + \text{sgn}(f)) = 4 G_x(f) \cdot u(f) \quad (4.26)$$

$$G_{x^-}(f) = 2 \cdot G_x(f) (1 - \text{sgn}(f)) = 4 G_x(f) \cdot u(-f) \quad (4.27)$$

$G_x(f) = G_x(-f)$ dela kontuan hartuta:

$$G_{x^+}(f) = G_{x^-}(-f)$$

Bestalde, (4.26) eta (4.27) adierazpenekin (4.24) ere betetzen dela egiaztatu dugu.

Azkenik, $G_{x^+}(f)$ eta $G_{x^-}(f)$ gainjartzen ez direnez, $x^+(t)$ eta $x^-(t)$ ortogonalak dira, eta, beraz, $R_{x^+x^-}(\tau) = 0$.

4.5.3. Behe-paseko baliokidea

Behe-paseko prozesu baliokidearen autokorrelazioa eta PDE-a kalkulatzeko ditugu:

$$\begin{aligned} R_{\tilde{x}}(\tau) &= \text{E} \{ \tilde{x}(t + \tau) \cdot \tilde{x}^*(t) \} \\ &= \text{E} \{ x^+(t + \tau) \cdot e^{-j 2\pi f_0(t+\tau)} \cdot (x^+(t))^* \cdot e^{j 2\pi f_0 t} \} \\ &= e^{-j 2\pi f_0 \tau} \cdot R_{x^+}(\tau) \\ G_{\tilde{x}}(f) &= G_{x^+}(f + f_0) \end{aligned}$$

4.5.4. Fase- eta koadratura-osagaiak

Fase-osagaiaren adierazpen honetatik abiatuko gara:

$$\begin{aligned} x_F(t) &= \Re \{ \tilde{x}(t) \} = \frac{1}{2} \{ \tilde{x}(t) + \tilde{x}^*(t) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ x^+(t) \cdot e^{-j 2\pi f_0 t} + x^-(t) \cdot e^{j 2\pi f_0 t} \} \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} R_{x_F}(\tau) &= \text{E} \{ x_F(t + \tau) x_F(t) \} \\ &= \frac{1}{4} \text{E} \{ \{ x^+(t + \tau) \cdot e^{-j 2\pi f_0(t+\tau)} + x^-(t + \tau) \cdot e^{j 2\pi f_0(t+\tau)} \} \\ &\quad \{ x^+(t) \cdot e^{-j 2\pi f_0 t} + x^-(t) \cdot e^{j 2\pi f_0 t} \} \} \\ &= \frac{1}{4} \{ R_{x^+}(\tau) e^{-j 2\pi f_0 \tau} + R_{x^-}(\tau) \cdot e^{j 2\pi f_0 \tau} \} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Interesgarria da honetaz ohartzea:

$$P_{x_F} = R_{x_F}(0) = \frac{1}{4} \{ R_{x^+}(0) + R_{x^-}(0) \} = P_x$$

non (4.24) kontuan eduki dugun.

Modu berean, adierazpen honetatik abiatuta:

$$\begin{aligned} x_C(t) &= \Im \{ \tilde{x}(t) \} = \frac{1}{2j} \{ \tilde{x}(t) - \tilde{x}^*(t) \} \\ &= \frac{1}{2j} \{ x^+(t) \cdot e^{-j2\pi f_0 t} - x^-(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t} \} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Erraza da honako hau ondorioztatzea:

$$R_{x_C}(\tau) = R_{x_F}(\tau)$$

Eta beraz:

$$P_{x_C} = R_{x_C}(0) = P_{x_F} = P_x \quad (4.31)$$

$R_{x_F}(\tau)$ $x(t)$ -ren autokorrelazioaren funtzioan ere adieraz dezakegu. (4.29)-tik abiatuz:

$$\begin{aligned} R_{x_F}(\tau) &= \frac{1}{4} \left\{ R_{x^+}(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} + [R_{x^+}(\tau) \cdot e^{-j2\pi f_0 \tau}]^* \right\} \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2\Re \{ R_{x^+}(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} \} \\ &= \Re \left\{ \left(R_x(\tau) + j\widehat{R}_x(\tau) \right) (\cos 2\pi f_0 \tau - j \sin 2\pi f_0 \tau) \right\} \\ &= R_x(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau + \widehat{R}_x(\tau) \sin 2\pi f_0 \tau \end{aligned} \quad (4.32)$$

non (4.31) ere betetzen dela frogatu daitekeen.

(4.29)-n Fourier-en transformatuak eginez, PDE-ak lortuko ditugu:

$$G_{x_F}(f) = G_{x_C}(f) = \frac{1}{4} \{ G_{x^+}(f + f_0) + G_{x^-}(f - f_0) \}$$

Korrelazio-funtzio gurutzatua lortzeko, (4.28) eta (4.30)-etik abiatuta, modu errazean frogatzen da honako hau:

$$R_{x_F x_C}(\tau) = \frac{j}{4} \{ R_{x^+}(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} - R_{x^-}(\tau) \cdot e^{j2\pi f_0 \tau} \} \quad (4.33)$$

$$G_{x_F x_C}(f) = \frac{j}{4} \{ G_{x^+}(f + f_0) - G_{x^-}(f - f_0) \} \quad (4.34)$$

eta

$$R_{x_C x_F}(\tau) = -R_{x_F x_C}(\tau) \quad G_{x_C x_F}(f) = -G_{x_F x_C}(f)$$

(4.33) adierazpenetik, $\tau = 0$ denean ondorengo betetzen dela ondorioztatzen da:

$$R_{x_F x_C}(0) = 0$$

Hau da, fase- eta koadratura-prozesuen potentzia gurutzatuak zero balioa du (prozesuak ortogonalak dira jatorrian).

(4.34) adierazpenetik, honako hau ondorioztatzen da: $G_x(f)$ -k simetria bikoitia baldin badauka f_0 -rekiko (eta ondorioz $G_{x^+}(f + f_0) = G_{x^-}(f - f_0)$), orduan, $G_{x_F x_C}(f) = 0$ da eta $x_C(t)$ eta $x_F(t)$ prozesuak ortogonalak izango dira τ -ren balio guztietan.

5. gaia

Oinarri-bandako komunikazio digitalak

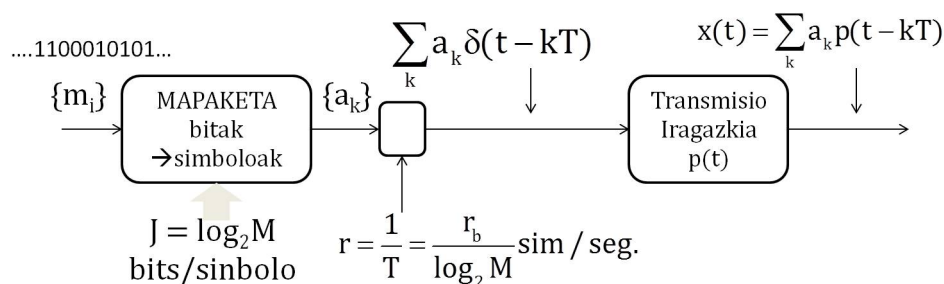
Gai honetan, oinarri-bandako komunikazio digitalen transmisio-sistema baten osagaiak aztertuko ditugu. Helburua informazio digitalaren (edo biten) transmisioa izango da, abiadura bitar jakin batekin (r_b), idealtzat hartuko dugun kanal batetik zehar, zeinak BHz -eko banda-zabalera mugatua edukiko duen. Zaratari dagozkion ezaugarriak beste gai batean aztertuko dira.

5.1. Linea-kodeak

Honako adierazpen hau erabiliko dugu linea-seinale digitalerako:

$$x(t) = \sum_k a_k p(t - kT)$$

a_k sinboloen sekuentziak transmititu nahi den mezu digitala osatzen du. Sinbolo horiek M balio ezberdinen multzo bat osatzen dute ($a_m \in \{a_0 \dots a_{M-1}\}$), alfabeto izenez ere ezaguna. Sinbolo horiek $p(t)$ oinarritzko pulsuaren bitartez transmititzen dira, $r = \frac{1}{T}$ sinbolo segundoko abiadurarekin. r sinbolo-abiadura izenez ezagutzen da, haren unitatea sinbolo/segundo (s^{-1}) edo *baud* izanik, eta, aurrerago ikusiko den moduan, transmisioa egin ahal izateko beharrezkoa den banda-zabalera ezarriko du.



5.1. irudia. Linea-kodifikatzailearen eskema.

Orokorrean, aplikazioak edo informazio-iturriaren ezaugarriek zehazten duten r_b abiadura bitarrarekin transmititu behar den biten sekuentzia batek osatzen du informazio digitala. Adibidez, PCM (30+2) formatua daukan seinale telefoniko jakin baterako, beharrezkoa izango da 2048 *kbps*-eko abiadura bitarra (edo 2 *Mbps*-ekoa). Informazio digital hori transmititu ahal izateko, sekuentzia bitarraren mapaketa $\{a_k\}$ sinboloen sekuentzia diskretura egin beharko da.

$m_i m_j$	a_k
00	-1.5
01	-0.5
11	0.5
10	1.5

5.1. taula. Kode polarraren maila anitzeko mapaketa ($M=4$).

Horretarako, sarrerako bitak J biteko multzotan taldekatuko dira, eta talde bakoitzari sinbolo jakin bat esleituko zaio. Horrela, $M = 2^J$ sinbolo posible egongo dira transmititzeko. Sinboloen multzo hori kodearen alfabeto izenez ezagutzen da.

5.1. irudiak seinale digitala osatzeko prozesuaren eskema erakusten du. Biten r_b abiadura bitarretik abiatuta, J biteko multzoak osatzen dira, zeinei $\{a_0, a_1, \dots, a_{M-1}\}$ M sinboloetariko bat esleituko zaien. Prozesu horri bitetatik sinboloetarako *mapaketa* deritzo. Adibidez, transmisiorako bi sinbolo erabiltzen dituen sistema bitar batean, 0 informazio-bitari 0 V balioa esleitzen diezaiokigu eta 1 informazio-bitari, 1 V balioa. **5.1.** taulan, kode lautar baten mapaketa posiblea erakusten da. Sinboloen unitateak volt-ak izan daitezke, edo anplitudeen beste edozein unitate ere erabil daitezke (adibidez, ampere-ak); beraz, orokorrean ez dugu sinbolorik (V edo A) erabiliko unitatea adierazteko.

Behin mapaketa eginda, sinboloak $r = \frac{r_b}{\log_2 M}$ sinb./seg.-ko abiaduran irten behar dira lineara, iturriko r_b abiadura bitarra mantendu ahal izateko. Seinale digitala osatzeko, $p(t)$ oinarrizko pultsua edo transmisio-pultsua erabiliko da, zeinak kT unean transmitituriko a_k sinboloari dagokion anplitudea eramango duen. Hurrengo ataletan ikusiko den moduan, pultsu horren iraupenak eta itxurak garrantzi handia edukiko dute seinale digitalaren ezaugarriei dagokienez.

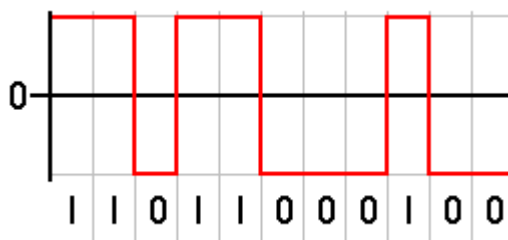
Horrela, mapaketa egin eta gero geratzen diren sinboloek eta $p(t)$ oinarrizko pultsuaren itxurak eta ezaugarriek definitzen dute linea-kode jakin bat. Ondoren, kode ezagun batzuk aztertuko ditugu.

Ezaugarrien arabera, linea-kodeen sailkapen bat baino gehiago egin ditzakegu:

Maila kopurua $M = 2$ duten kodeak kode *bitar* izenez ezagutzen dira, eta informazio-bit bakoitzari sinbolo jakin bat esleitzen zaio. Bitak biko edo gehiagoko multzoetan taldekatzen direnean, kodea maila anitzekoa dela esaten da. Maila anitzeko kodeetan, sinboloei dagozkien mailen arteko distantzia berdina da, hau da, elkarren jarraian dauden bi sinboloen arteko tartea beti berdina da ($\frac{a_{M-1} - a_0}{M-1}$) (**5.1.** taulako adibidean gertatzen den moduan).

Polaritatea Kode bat *unipolarra* dela esaten da haren sinbolo guztiek polaritate bera daukatenean (positiboa edo negatiboa). Aldiz, kode bat *polarra* da sinboloak positiboak edo negatiboak izan daitezkeenean. Sinboloak ekiprobableak direnean ($p(a_k) = \frac{1}{M}$, ohiko kasua), kode polarren batezbestekoa zero da ($\mathbb{E}\{a_k\} = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} a_k = 0$), hau da, sinboloak zeroren inguruan banatuta daude. Kode unipolarretan, aldiz, batezbestekoa ez da zero izango baizik eta $\frac{a_0 + a_{M-1}}{2}$ (beti sinbolo ekiprobabletarako).

Zerorako itzulera Transmisio banda-zabaleran murriztapenik ez daukaten oinarri-bandako sistemetan asko erabiltzen den oinarriko pultsua errektangularra da. Pultsuaren D iraupena eta sinboloen iraupena berdinak direnean, hau da, $D = T = \frac{1}{r}$ denean, kodeari NRZ (Non-Return-to-zero) deritzen (5.2. irudia). Aldiz, RZ (Return-to-Zero) kodeetan, pultsuaren iraupena sinboloaren iraupenaren erdia izan ohi da; $D = \frac{T}{2} = \frac{1}{2r}$ (5.3. irudia).



5.2. irudia. NRZ kode polarrarekin egindako kodifikazioaren adibidea.



5.3. irudia. RZ kode polarrarekin egindako kodifikazioaren adibidea.

Ikusitakoak, noski, ez ditu kode posible guztiak kontuan hartzen. Kode mota ugari daude. Aurreko sailkapenarekin bat ez datozen eta oso ezagunak diren bi kode definituko ditugu orain:

Kode bipolarra Kode honetan, honako mapaketa hau egiten da:

m_i	a_k
0	0
1	+1 aurreko 1-a -1 baldin bazen
	-1 aurreko 1-a +1 baldin bazen

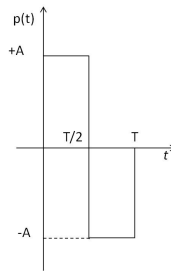
Hona hemen adibide bat:

m_i	0	1	1	0	0	1	0	1	1
a_k	0	-1	+1	0	0	-1	0	+1	-1

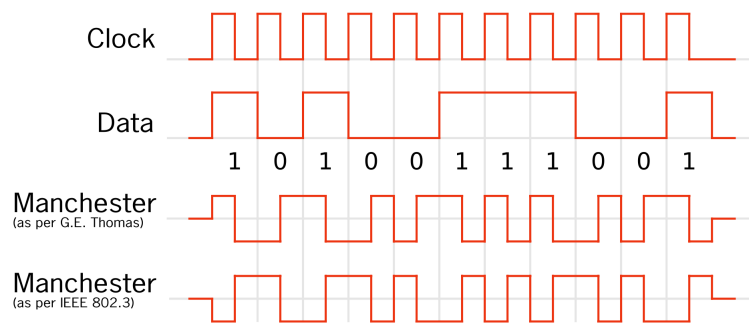
Memoria daukan kode bat da, beraz. Gainera, irteerako sinbolo kopurua $M=3$ da, $r = r_b$ abiadurarekin, eta, beraz, kode erredundantea da. Erredundantzia horrek errore jakin batzuk

detektatzeko aukera emango digu, kodean bertan badaudelako onartzen ez diren kateak $((+1 + 1)$ eta $(-1 - 1))$.

Manchester kodea Kode hau oso ezaguna da, eta IEEE 802.3 (Lan-Ethernet) estandarraren barruan erabiltzen da. Kode honetan, '0' informazio-bitari $+1 \rightarrow -1$ trantsizioa esleitzen zaio (5.4. irudiko $p(t)$ -a), eta '1' informazio-bitari, alderantzizko trantsizioa $(-p(t))$. Esleitutako pultsua, beraz, 5.4. irudikoa da. Horrela, erlojuaren informazioa seinalean bertan gehitzen da. Horrek daukan desabantaila da seinaleak banda-zabalera bikoitza okupatzen duela, NRZ kode bitar batekin alderatuta, hurrengo ataletan ikusiko den moduan. 5.5. irudian kode honen bi inplementazio erakusten dira.



5.4. irudia. Manchester kodearen oinarriko pultsua.



5.5. irudia. Manchester kodearen kodifikazioaren adibidea.

5.2. Seinale digitalaren potentziaren dentsitate-espektroa

5.2.1. Linea-seinale digitalaren potentziaren dentsitate-espektroaren kalkulua

Prozesu geldikor honen PDE-a kalkulatu nahi da:

$$x(t) = \sum_k a_k p(t - kT - t_0)$$

non t_0 zorizko aldagai uniformea den $[0, T]$ bitartean. PDE-aren adierazpen honetatik abiatuko gara:

$$G_x(f) = \lim_{T' \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} \{ |X_{T'}(f)|^2 \}}{T'}$$

non

$$X_{T'}(f) = \mathcal{F} \{ x_{T'}(t) \} \quad x_{T'}(t) = \begin{cases} x(t) & |t| < \frac{T'}{2} \\ 0 & \text{besteak} \end{cases}$$

$T' = (2K + 1)T$ aukeratuz:

$$\begin{aligned} X_{T'}(f) &= \mathcal{F} \left\{ \sum_{k=-K}^K a_k p(t - kT - t_0) \right\} = \sum_{k=-K}^K a_k P(f) e^{-j2\pi f t_0} e^{-j2\pi f kT} \\ |X_{T'}(f)|^2 &= |P(f)|^2 \sum_{k=-K}^K \sum_{l=-K}^K a_k a_l^* e^{-j2\pi f(k-l)T} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \{ |X_{T'}(f)|^2 \} &= |P(f)|^2 \sum_{k=-K}^K \sum_{l=-K}^K \mathbb{E} \{ a_k a_l^* \} e^{-j2\pi f(k-l)T} \\ &= |P(f)|^2 \sum_{k=-K}^K \sum_{l=-K}^K R_a[k-l] e^{-j2\pi f(k-l)T} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=-K}^K \sum_{l=-K}^K R_a[k-l] e^{-j2\pi f(k-l)T} &= \left\{ \begin{array}{l} k-l = n \\ k = n+l \end{array} \right\} = \sum_{l=-K}^K \sum_{n=-K-l}^{K-l} R_a[n] e^{-j2\pi f(n)T} \\ &= \sum_{n=0}^{2K} R_a[n] e^{-j2\pi f n T} + \sum_{n=-1}^{2K-1} R_a[n] e^{-j2\pi f n T} + \dots + \sum_{n=-2K+1}^1 R_a[n] e^{-j2\pi f n T} + \sum_{n=-2K}^0 R_a[n] e^{-j2\pi f n T} = \\ &= (2K+1)R_a[0] + (2K+1-1)R_a[1]e^{-j2\pi f T} + (2K+1-2)R_a[2]e^{-j2\pi f 2T} + \dots \\ &\dots + (2K+1-1)R_a[-1]e^{j2\pi f T} + (2K+1-2)R_a[-2]e^{j2\pi f 2T} + \dots + (2K+1-K)e^{j2\pi f K T} \\ &= \sum_{n=-K}^K ((2K+1) - |n|) R_a[n] e^{-j2\pi f n T} = (2K+1) \sum_{n=-K}^K \left(1 - \frac{|n|}{2K+1} \right) R_a[n] e^{-j2\pi f n T} \end{aligned}$$

$$G_x(f) = \lim_{T' \rightarrow \infty} \frac{1}{T'} \mathbb{E} \{ |X_{T'}(f)|^2 \} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |P(f)|^2 \sum_{n=-K}^K \left(1 - \frac{|n|}{2K+1} \right) R_a[n] e^{-j2\pi f n T}$$

$$G_x(f) = \frac{1}{T} |P(f)|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_a[n] e^{-j2\pi f n T}$$

5.2.2. Korrelaziorik gabeko sinboloen PDE-a

5.2.1. atalean frogatu den moduan, seinale digitalaren PDE-aren adierazpena honako hau da:

$$G_x(f) = \frac{1}{T} |P(f)|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_a[n] e^{-j2\pi f n T} \quad (5.1)$$

non:

$$R_a(n) = \mathbb{E}\{a_{k+n} a_k\}$$

a_k sinboloen sekuentziaren autokorrelazio-funtzioa den (edo $a[k]$ sinboloena, sekuentzia diskretuen nomenklatura erabiliz).

5.1 adierazpenean, bi osagai garrantzitsu bereizi behar ditugu:

- $|P(f)|^2$, $p(t)$ oinarritziko pulsuaren energiaren dentsitate-espektroa.
- $\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_a[n] e^{-j2\pi f n T}$, $R_a(n)$ sekuentziaren Fourier-en transformatu diskretua $\Omega = 2\pi f T$ -rako, hau da, $a[k]$ sinboloen zoritzko sekuentziaren $G_a(f)$ PDE-a.

Oso garrantzitsua eta asko erabiltzen den kasua honako hau da: sinboloen sekuentzian korrelaziorik gabeko sekuentzia bat edukitzea. Kasu honetan, honako hau betetzen da:

$$C[n] = \mathbb{E}\{(a[k+n] - m_a)(a[k] - m_a)^*\} = R_a[n] - |m_a|^2 = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ \sigma_a^2 & n = 0 \end{cases}$$

$$R_a[n] = m_a^2 + \sigma_a^2 \delta[n]$$

Baldintza horietan, sinboloen sekuentziaren PDE-a honako hau izango da:

$$G_a(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_a[n] e^{-j2\pi f n T} = m_a^2 + \sigma_a^2 + \sum_{n \neq 0} m_a^2 e^{-j2\pi f n T} = \sigma_a^2 + m_a^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f n T}$$

eta modu honetan ere adieraz daiteke:

$$G_a(f) = \sigma_a^2 + m_a^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

Eta 5.1-en ordezkaturaz:

$$\begin{aligned} G_x(f) &= \frac{1}{T} |P(f)|^2 G_a(f) = \sigma_a^2 r |P(f)|^2 + (m_a r)^2 |P(f)|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nr) \\ &= \sigma_a^2 r |P(f)|^2 + (m_a r)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |P(nr)|^2 \delta(f - nr) \end{aligned} \quad (5.2)$$

non:

$$m_a = \mathbb{E}\{a_k\} = \sum_{k=0}^{M-1} a_k p(a_k) \quad (5.3)$$

non $p(a_k)$ sinboloen probabilitateak diren. Ohikoa den probabilitate bereko sinboloen kasuan (kasu ekiprobablean), $p(a_k) = \frac{1}{M}$ eta orduan:

$$m_a = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} a_k \quad (5.4)$$

Eta bariantza:

$$\begin{aligned} \sigma_a^2 &= \mathbb{E}\{(a_k - m_a)^2\} = \sum_{k=0}^{M-1} (a_k - m_a)^2 p(a_k) \\ &= \mathbb{E}\{a_k^2\} - m_a^2 = \sum_{k=0}^{M-1} a_k^2 p(a_k) - m_a^2 \end{aligned} \quad (5.5)$$

eta kasu ekiprobablean:

$$\sigma_a^2 = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} a_k^2 - m_a^2 \quad (5.6)$$

5.2.3. Espektro-efizientzia

Komunikazio digitaletan transmisio-sistema definitzen duen parametro garrantzitsu bati η *espektro-efizientzia* deritzo, zeinak okupaturiko banda-zabalera sistemak sar dezakeen informazio kantitatea (*bps*) neurtzen duen:

$$\eta = \frac{r_b}{B_T} \quad (5.7)$$

Garrantzitsua da ohartzea banda-zabalera r -ren arabera dela, eta ez r_b -ren arabera. B_T banda-zabalera bera betez, abiadura bitarra handitu dezakegu, r mantenduz eta M maila kopurua handituz, $r = \frac{r_b}{\log_2 M}$ baita. Antzeko modu batean, r_b abiadura bitar berean transmiti dezakegu, banda-zabalera gutxiago betez (r txikiagotuz), M maila kopurua handitzen badugu.

5.2.4. Transmittituriko potentzia

5.2 adierazpenetik abiatuz, linea-seinale digitalaren potentzia kalkula dezakegu:

$$\begin{aligned} P_x &= \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f) df = \\ &= \sigma_a^2 r \int_{-\infty}^{\infty} |P(f)|^2 df + (m_a r)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |P(nr)|^2 \delta(f - nr) df = \\ &= \sigma_a^2 r E_p + (m_a r)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |P(nr)|^2 = (\sigma_a^2 + m_a^2) \cdot E_p \cdot r \end{aligned} \quad (5.8)$$

Aurrekoa kalkulatzeko, honako hau erabili dugu:

$$r \sum_{n=-\infty}^{\infty} |P(nr)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |p(t)|^2 dt = E_p$$

P_x honako hau erabiliz ere kalkula dezakegu:

$$P_x = E_s \cdot r \quad (5.9)$$

non E_s batez besteko energia sinboloko parametroa den:

$$E_s = \sum_{k=0}^{M-1} E_k \cdot p(a_k) \quad \text{eta} \quad (5.10)$$

$$E_k = \int |s_k(t)|^2 dt = \int |a_k \cdot p(t)|^2 dt = a_k^2 \int |p(t)|^2 dt = a_k^2 \cdot E_p \quad (5.11)$$

E_k a_k sinboloaren transmisioari dagokion energia da, $p(t)$ transmisio-pultsuarekin (zeinaren energia E_p den). 5.10-en ordezkatzuz eta ondoren 5.9-n:

$$P_x = \sum_{k=0}^{M-1} a_k^2 \cdot p(a_k) \cdot E_p \cdot r = (\sigma_a^2 + m_a^2) \cdot E_p \cdot r \quad (5.12)$$

5.3. Adibideak

5.3.1. NRZ kode bitar unipolarra

NRZ kode bitar unipolarren PDE-a kalkulatu dugu, korrelaziorik gabeko sinboloen kasuan. NRZ kode bitar unipolarrean mapaketa 5.2. taularen arabera egiten da.

m_i	a_k
0	0
1	+1

5.2. taula. Kode bitar unipolarren mapaketa.

Pultsu errektangular bat erabiltzen da, A anplitudekoa eta $T = \frac{1}{r} = \frac{1}{r_b}$ iraupenekoa, hau da:

$$p(t) = A\Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

$$P(f) = AT \operatorname{sinc}(fT) e^{-j2\pi f \frac{T}{2}}$$

$$|P(f)|^2 = (AT)^2 \operatorname{sinc}^2(fT)$$

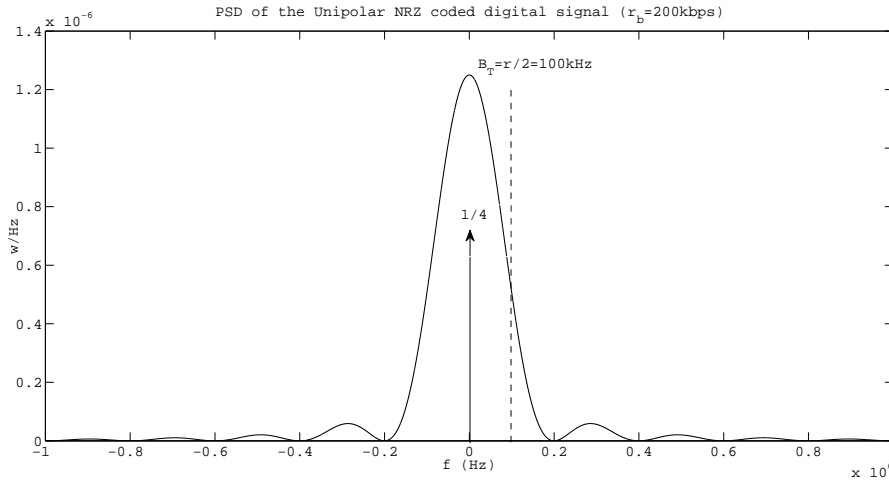
Sinboloen batezbestekoa eta bariantza kalkulatu ditugu, 5.4 eta 5.6 erabiliz:

$$m_a = \mathbb{E}\{a_k\} = \frac{1}{2}(0 + 1) = \frac{1}{2}$$

$$\sigma_a^2 = \mathbb{E}\{a_k^2\} - m_a^2 = \frac{1}{2}(0^2 + 1^2) - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Eta 5.2-n ordezkatzuz:

$$G_x(f) = \frac{A^2}{4r_b} \text{sinc}^2\left(\frac{f}{r_b}\right) + \frac{A^2}{4} \delta(f)$$



5.6. irudia. NRZ seinale digital unipolarraren PDE-a $r_b = 200\text{kbps}$ -erako.

5.6. irudian, aurreko adierazpena irudikatu da 200kbps -eko abiadura bitarrerako eta $A = 1$ -eko anplitudea daukan pultsuarekin. Irudi berean, transmisiorako beharrezkoa izango litzatekeen banda-zabalera estimatua adierazi da, zeina sinc^2 funtzio batean $\frac{B_z}{2}$ den, non B_z sinc funtzioaren lehenengo zeroaren banda-zabalera den. Banda-zabalera horretan sinc funtzioari dagokion potentziaren ia %90 dago. Beraz, kasu honetan, espektro-efizientzia honako hau izango da:

$$\eta^{NRZ} = \frac{r_b}{B_T} = 2 \text{ bps/Hz}$$

Transmitituriko seinalearen potentzia:

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2}{4r_b} \text{sinc}^2\left(\frac{f}{r_b}\right) df + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2}{4} \delta(f) df = \frac{A^2}{4} + \frac{A^2}{4} = \frac{A^2}{2}$$

Espero genezakeen moduan, sinboloek probabilitate bera daukatenez, denboraren erdia A anplitudea daukan pultsua transmititzen arituko gara, zeinaren energia $E_1 = A^2T$ den eta, beraz, batez besteko energia sinboloko $E_s = E_1/2$ da eta $P_x = A^2T \cdot r = A^2/2$.

5.3.2. NRZ kode M-tar unipolarra

5.3.1. atalean lortutako NRZ kode bitar unipolarren adierazpena, erraz orokortu daiteke maila anitzeko kodeetan, kontuan edukita $a_k = \{0, 1, \dots, M - 1\}$ sinbolo ekiprobableekin ($p(a_k) = \frac{1}{M}$), kode Mtar baten batezbestekoa eta bariantza modu honetan kalkulatu daitezkeela¹:

$$m_a = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} a_k = \frac{M-1}{2}$$

$$\sigma_{a_k}^2 = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} a_k^2 - m_a^2 = \frac{M^2-1}{12}$$

Eta PDE-aren adierazpena modu honetan geratuko da:

$$G_x(f) = A^2 \left\{ \sigma_a^2 \frac{1}{r} \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{f}{r} \right) + m_a^2 \delta(f) \right\}$$

$$= A^2 \left\{ \frac{M^2-1}{12r} \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{f}{r} \right) + \left(\frac{M-1}{2} \right)^2 \delta(f) \right\}$$

zeinaren adierazpen grafikoa, konstante batzuk aldera utzita, 5.6. irudian lortutakoaren antzekoa izango den.

Kasu honetan lortzen den espektro-efizientzia honako hau da:

$$\eta^{NRZ} = \frac{r_b}{B_T} = 2 \log_2 M \text{ bps/Hz}$$

Eta transmitituriko potentzia:

$$P_x = A^2 (\sigma_a^2 + m_a^2)$$

5.3.3. NRZ kode bitar polarra

NRZ kode bitar polarraren PDE-a kalkulatu dugu orain, korrelaziorik gabeko sinboloetan. Kode horretan mapaketa hau egiten da:

m_i	a_k
0	-1
1	+1

5.3. taula. Kode bitar polarraren mapaketa.

¹Bariantza kalkulatzeko batukari hau erabili da: $\sum_{k=1}^M k^2 = \frac{M(M+1)(2M+1)}{6}$.

Eta pulstu errektangular bat erabiltzen da, A anplitudekoa eta $T = \frac{1}{r} = \frac{1}{r_b}$ iraupeneko, hau da:

$$p(t) = A\Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

$$P(f) = AT \operatorname{sinc}(fT) e^{-j2\pi f \frac{T}{2}}$$

$$|P(f)|^2 = (AT)^2 \operatorname{sinc}^2(fT)$$

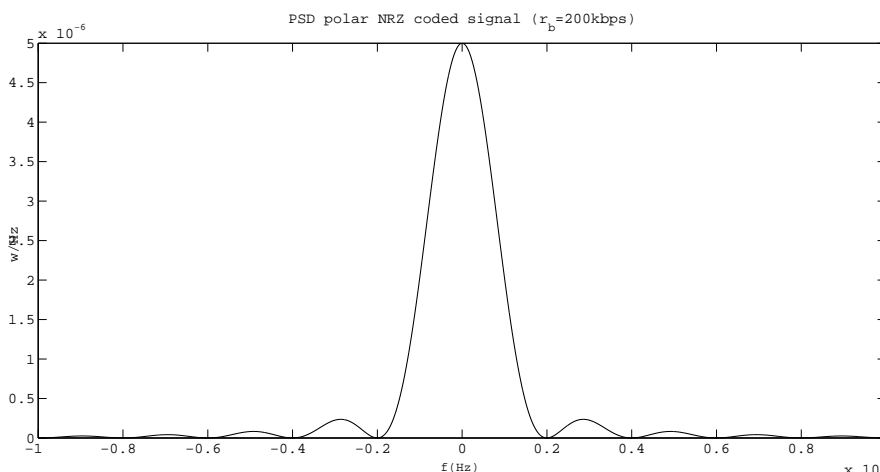
Sinboloen batezbestekoa eta bariantza kalkulatuko ditugu, 5.4 eta 5.6 erabiliz:

$$m_a = \mathbb{E}\{a_k\} = \frac{1}{2}(-1 + 1) = 0$$

$$\sigma_a^2 = \mathbb{E}\{a_k^2\} - m_a^2 = \frac{1}{2}[(-1)^2 + (+1)^2] - 0 = 1$$

Eta 5.2-n ordezkatur:

$$G_x(f) = \frac{A^2}{r_b} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{f}{r_b}\right)$$



5.7. irudia. NRZ seinale digital polarraren PDE-a $r_b = 200\text{kpbs}$ -erako.

Transmitituriko seinalearen potentzia:

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2}{r_b} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{f}{r_b}\right) df = A^2$$

Edo errazago:

$$P_x = E_s \cdot r = E_p \cdot r = A^2$$

Eta espektrio-efizientzia kasu unipolarraren berdina izango da:

$$\eta^{NRZ} = \frac{r_b}{B_T} = 2 \text{ bps/Hz}$$

5.3.4. NRZ kode M-tar polarra

Kode unipolarren kasuan bezala, 5.3.3. adibidea maila anitzeko kodeetan ere orokortu dezakegu, sinboloen batezbestekoa eta bariantza kalkulatu. Kasu honetan, honako sinbolo hauek erabiliko ditugu: $a_k = \left\{ \pm \frac{2K+1}{2} \right\}$ $k = 0 \dots \frac{M}{2} - 1$ -erako. Mapaketa horrekin, maila anitzeko kode unipolarren sinboloen arteko tartea mantenduko dugu (1eko balioa daukan tartea, hain zuzen). Adibidez, $M = 4$ denean, transmitituriko sinboloak $a_k = \left\{ -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\}$ izango lirateke.

Kasu honetan, sinboloen batezbestekoa zero izango da, eta bariantza, sinboloen arteko tartea mantenduenez, kasu unipolarren berdina izango da:

$$\sigma_a^2 = \frac{M^2 - 1}{12}$$

Beraz, kasu honetan, PDE-a honako hau izango da:

$$\begin{aligned} G_x(f) &= \frac{A^2 \sigma_a^2}{r} \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{f}{r} \right) \\ &= A^2 \frac{M^2 - 1}{12r} \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{f}{r} \right) \end{aligned}$$

Transmitituriko seinalearen potentzia:

$$P_x = E_s \cdot r = E_p \cdot \sigma_a^2 \cdot r = A^2 \sigma_a^2$$

Eta espektror-efizientzia kasu unipolarren berdina izango da:

$$\eta^{NRZ(M-tarra)} = \frac{r_b}{B_T} = 2 \log_2 M \text{ bps/Hz}$$

5.3.5. RZ kode bitar polarra

RZ kode bitar polarren PDE-a kalkulatu dugu orain, korrelaziorik gabeko sinboloen kasuan. Kode bitar polarra izanik, mapaketa 5.3. taularen arabera egingo da. Erabilitako pultsua errektangularra da, A anplitudekoa eta $D = \frac{T}{2} = \frac{1}{2r_b}$ iraupeneko, hau da, NRZ pultsuen erdia:

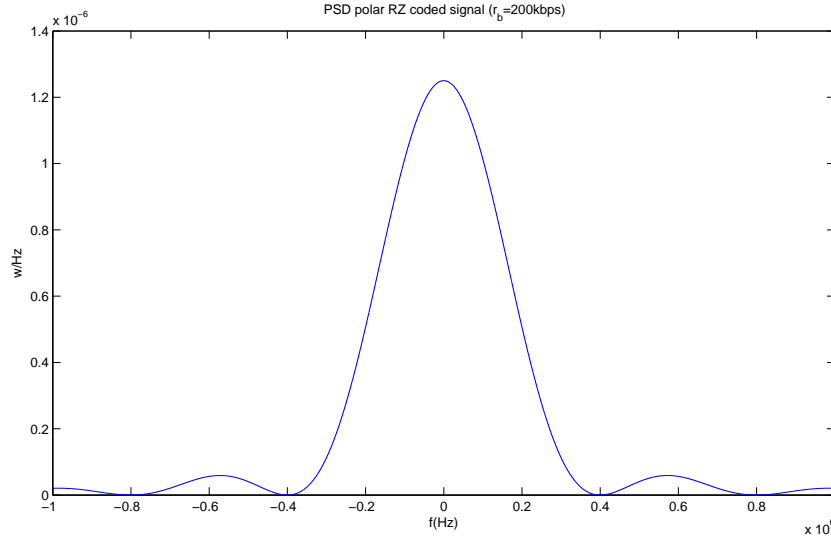
$$\begin{aligned} p(t) &= A \Pi \left(\frac{t - T/4}{T/2} \right) \\ P(f) &= A \frac{T}{2} \operatorname{sinc} f \frac{T}{2} \cdot e^{-j2\pi f \frac{T}{4}} \\ |P(f)|^2 &= \left(A \frac{T}{2} \right)^2 \operatorname{sinc}^2 f \frac{T}{2} \end{aligned}$$

Sinboloen batezbestekoa eta bariantza ez dira aldatzen NRZ kasuarekiko (5.3.3. adibidea):

$$\begin{aligned} m_a &= \mathbb{E}\{a_k\} = \frac{1}{2}(-1 + 1) = 0 \\ \sigma_a^2 &= \mathbb{E}\{a_k^2\} - m_a^2 = \frac{1}{2} [(-1)^2 + (1)^2] - 0^2 = 1 \end{aligned}$$

Eta 5.2-n ordezkatzuz:

$$G_x(f) = \frac{A^2}{4r_b} \text{sinc}^2\left(\frac{f}{2r_b}\right)$$



5.8. irudia. RZ seinale digital polarraren PDE-a $r_b = 200\text{kbps}$ -erako.

Ikus daitekeenez, itxuraz NRZ polarraren berdina da, okupaturiko banda-zabalera orain bikoitza dela kontuan hartuta.

Transmitituriko seinalearen potentzia:

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2}{4r_b} \text{sinc}^2\left(\frac{f}{2r_b}\right) df = \frac{A^2}{2}$$

Edo errazago:

$$P_x = E_s \cdot r = E_p \cdot r = \frac{A^2}{2}$$

Eta espeketro-efizientzia NRZ kasuaren erdia izango da:

$$\eta^{RZ} = \frac{r_b}{B_T} = 1 \text{ bps/Hz}$$

5.3.6. RZ kode Mtar polarra

RZ kode M-tar polarraren PDE-a kalkulatu dugu orain, korrelaziorik gabeko sinboloen kasuan, betiko moduan. Kode bitar polarra izanik, mapaketa 5.3.4.-n egindakoarekin bat dator, $a_k = \left\{ \pm \frac{2K+1}{2} \right\}$ sinboloetarako, $k = 0 \dots \frac{M}{2} - 1$ izanik. Sinboloen batezbestekoa zero izango da, eta bariantza, $\sigma_a^2 = \frac{M^2-1}{12}$. Erabilitako pultsua errektangularra da, A anplitudekoa eta haren iraupena, sinboloaren periodoaren erdia: $D = \frac{T}{2} = \frac{1}{2r_b}$, hau da, NRZ pultsuen erdia:

$$\begin{aligned}
 p(t) &= A\Pi\left(\frac{t - T/4}{T/2}\right) \\
 P(f) &= A\frac{T}{2}\text{sinc}f\frac{T}{2} \cdot e^{-j2\pi f\frac{T}{4}} \\
 |P(f)|^2 &= \left(A\frac{T}{2}\right)^2 \text{sinc}^2 f\frac{T}{2}
 \end{aligned}$$

5.2-n ordezkatur:

$$G_x(f) = \left(\frac{AT}{2}\right)^2 \frac{M^2 - 1}{12} r \text{sinc}^2\left(\frac{f}{2r}\right) = \frac{A^2 M^2 - 1}{4r} \frac{M^2 - 1}{12} \text{sinc}^2\left(\frac{f}{2r}\right)$$

Transmitituriko seinalearen potentzia:

Edo errazago:

$$P_x = E_s \cdot r = E_p \frac{M^2 - 1}{12} \cdot r = \frac{A^2 M^2 - 1}{2} \frac{M^2 - 1}{12}$$

Eta espektror-efizientzia NRZ kasuaren erdia izango da:

$$\eta^{RZ} = \frac{r_b}{B_T} = \log_2 M \text{ bps/Hz}$$

5.3.7. RZ kode bitar unipolarra

RZ kode bitar unipolarren PDE-a kalkulatu dugu, korrelaziorik gabeko sinboloen kasuan. Egin beharreko mapaketa 5.3.1. adibidean egindakoaren berdina da eta beraz:

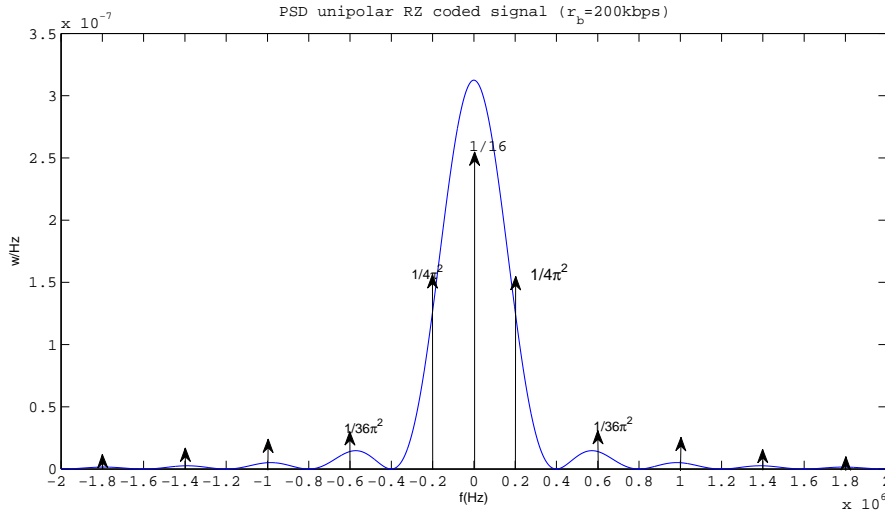
$$\begin{aligned}
 m_a &= \mathbb{E}\{a_k\} = \frac{1}{2}(0 + 1) = \frac{1}{2} \\
 \sigma_a^2 &= \mathbb{E}\{a_k^2\} - m_a^2 = \frac{1}{2}[0^2 + 1^2] - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Eta pulsu errektangularrak erabiltzen da, A anplitudekoa eta $D = \frac{T}{2} = \frac{1}{2r_b}$ iraupeneko, hau da:

$$\begin{aligned}
 p(t) &= A\Pi\left(\frac{t - T/4}{T/2}\right) \\
 P(f) &= A\frac{T}{2}\text{sinc}f\frac{T}{2} \cdot e^{-j2\pi f\frac{T}{4}} \\
 |P(f)|^2 &= \left(A\frac{T}{2}\right)^2 \text{sinc}^2 f\frac{T}{2}
 \end{aligned}$$

Eta 5.2-n ordezkatur:

$$\begin{aligned}
G_x(f) &= \frac{1}{4} r_b \frac{A^2}{4r_b^2} \text{sinc}^2 \frac{f}{2r_b} + \frac{A^2}{4} \text{sinc}^2 \frac{f}{2r_b} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - nr_b) \\
&= \frac{A^2}{16r_b} \text{sinc}^2 \frac{f}{2r_b} + \frac{A^2}{16} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2 \frac{n}{2} \delta(f - nr_b)
\end{aligned} \tag{5.13}$$



5.9. irudia. RZ seinale digital unipolarraren PDE-a $r_b = 200\text{kbps}$ -erako.

5.9. irudian,² aurreko adierazpena marraztu da 200kbps -eko abiadura bitarrerako eta $A = 1$ eko anplitudea daukan pulstu baterako. Ikus daitekeenez, egon beharreko infinitu deltarenetik (5.13 adierazpeneko bigarren batukaritik), jatorrian dagoen deltaz gain, r -ren multiplo bakoitietan dauden deltak geratzen dira soilik, r -ren multiplo bikoitietan egon beharrekoak galdu egiten direlako sinc funtzioaren zero balioak direla eta.

r -ren multiplo bakoitietan geratzen diren osagai sinusoidal indartsuak bitaren sinkronismoa berreskuratzeko erabili ahal izango dira hartzailean. Horrek RZ kodeen erabilera justifikatzen du, kasu honetan espektro-efizientzia honako hau baita:

$$\eta^{RZ} = \frac{r_b}{B_T} = 1 \text{ bps/Hz}$$

Hau da, NRZ kodeetan lortutakoaren erdia.

Transmitituriko seinalearen potentzia errazago kalkulatzeko da oraingoan 5.9 ekuazioa erabiliz:

$$\begin{aligned}
E_0 &= 0 & E_1 &= A^2 \frac{T}{2} & E_s &= \frac{1}{2} A^2 \frac{T}{2} \\
P_x &= A^2 \frac{T}{4} r = \frac{A^2}{4}
\end{aligned}$$

²Delten azaleraren eskala ez da mantentzen irudiko beste guztiarekin.

Espero izatekoa zen; izan ere, kasu honetan, sinboloak ekiprobableak izanda, denboraren erdia A anplitudea daukan pultsua transmititzen ariko gara, zeinak NRZ kasuaren iraupenaren erdia duen.

5.3.8. RZ kode Mtar unipolarra

RZ kode bitar unipolarerako lortutako 5.3.7. adierazpena erraz orokortu daiteke maila anitze-ko kodeetan, kontuan edukita kode Mtar batean, $a_k = \{0, 1, \dots, M-1\}$ sinbolo ekiprobableekin ($p(a_k) = \frac{1}{M}$), batezbestekoa eta bariantza modu honetan kalkula daitezkeela:

$$m_a = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} a_k = \frac{M-1}{2}$$

$$\sigma_a^2 = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} a_k^2 - m_a^2 = \frac{M^2-1}{12}$$

Eta PDE-aren adierazpena modu honetan geratuko da:

$$\frac{M^2-1}{12} \frac{A^2}{4r} \text{sinc}^2 \frac{f}{2r} + (M-1)^2 \frac{A^2}{16} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2 \frac{n}{2} \delta(f-nr) \quad (5.14)$$

Kasu bitarraren kasuan bezala, r -ren multiplo bikoitietako deltarik (jatorrikoa izan ezik) ez da egongo.

P_T transmitituriko potentzia kalkulatzeko, 5.12 erabili dezakegu, $E_p = A^2 \frac{T}{2}$ izanik:

$$P_x = E_s \cdot r = \frac{A^2}{2} (\sigma_a^2 + m_a^2)$$

Kode horren transmisiorako estimaturiko banda-zabalera $B_T \simeq r$ izango da, eta, orduan, espektro-efizientzia honako hau izango da:

$$\eta^{RZ(M\text{-tarra})} = \frac{r_b}{B_T} = \log_2 M \text{ bps/Hz}$$

5.3.9. Manchester kodea

5.1. atalean ikusi den moduan, Manchester kodea kode polarra da (eta, beraz, haren batezbestekoa zero izango da), eta erabilitako pultsuak -1 etik $+1$ erako trantsizioa (edo kontrakoa) dauka pultsuaren iraupenaren erdian, 5.5. irudian aurkezten den moduan.

Kasu honetan, beraz:

$$m_a = 0$$

$$\sigma_a^2 = 1$$

Pultsuaren Fourier-en transformatua kalkulatu dugu (haren modulua):

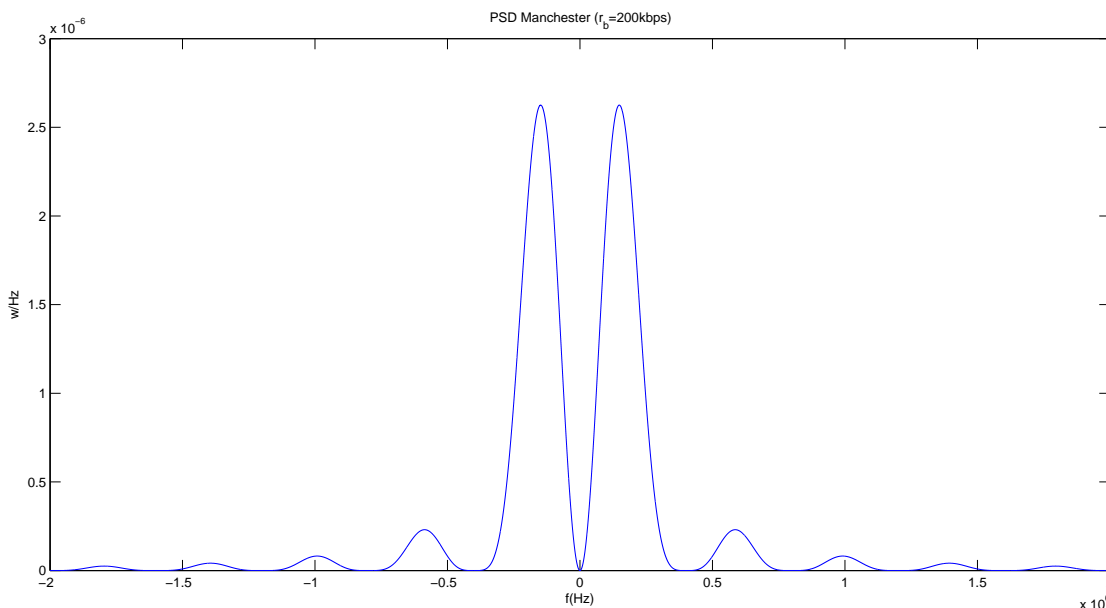
$$\begin{aligned}
p(t) &= A \left\{ \Pi \left(\frac{t - \frac{T}{4}}{\frac{T}{2}} \right) - \Pi \left(\frac{t - \frac{3T}{4}}{\frac{T}{2}} \right) \right\} \\
|P(f)| &= A \left| \frac{T}{2} \operatorname{sinc} f \frac{T}{2} \left\{ e^{-j2\pi f \frac{T}{4}} - e^{-j2\pi f \frac{3T}{4}} \right\} \right| \\
&= A \left| \frac{T}{2} \operatorname{sinc} f \frac{T}{2} e^{-j2\pi f \frac{T}{2}} \left\{ e^{+j2\pi f \frac{T}{4}} - e^{-j2\pi f \frac{T}{4}} \right\} \right| \\
&= AT \operatorname{sinc} f \frac{T}{2} \sin 2\pi f \frac{T}{4}
\end{aligned}$$

Ondorioz:

$$G_x(f) = A^2 T \operatorname{sinc}^2 f \frac{T}{2} \sin^2 2\pi f \frac{T}{4}$$

$T = T_b = \frac{1}{r_b}$ izanik.

Haren adierazpen grafikoa 5.10. irudian ikus daiteke.



5.10. irudia. Manchester kodearen PDE-a.

Irudian ikus daitekeenez, kodeak erantzun ezin hobea ematen du frekuentzia txikietan (huts bat dauka $f=0$ -n). PDE-aren maximoa $f = 0.74r$ -n aurkitzen da eta espektroaren erortzea $\frac{1}{f^2}$ -ekin doa eta horrela, transmisioaren banda-zabalera estimatua $B_T = r$ -koa da. Beraz, bere espektro-efizientzia honako hau izango da:

$$\eta = \frac{r_b}{B_T} = 1 \text{ bps/Hz}$$

Transmitituriko potentzia erraz kalkulatzeko da *batez besteko energia sinboloko* parametrotik abiatuta: bi sinboloek energia bera daukate, $E_1 = E_0 = A^2T$, eta, beraz:

$$P_T = A^2$$

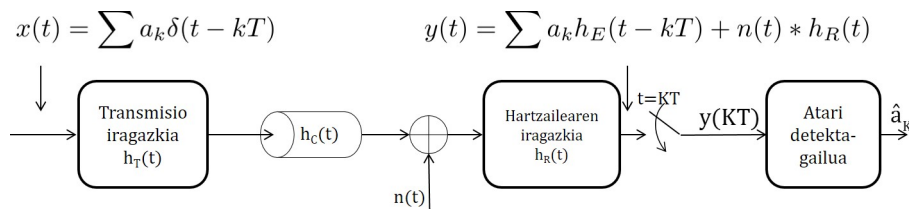
		m_a	σ_a^2	E_p	$P_T = (\sigma_a^2 + m_a^2) E_p r$	η
Unipolarra $a_k = 0, 1 \dots M - 1$	NRZ	$\frac{M - 1}{2}$	$\frac{M^2 - 1}{12}$	$A^2 \cdot T$	$\frac{2M^2 - 3M + 1}{6} \cdot A^2$	$2 \log_2 M$
	RZ	$\frac{M - 1}{2}$	$\frac{M^2 - 1}{12}$	$\frac{A^2 \cdot T}{2}$	$\frac{2M^2 - 3M + 1}{6} \cdot \frac{A^2}{2}$	$\log_2 M$
Polarra $a_k = \pm \frac{1}{2}, \dots \pm \frac{M-1}{2}$	NRZ	0	$\frac{M^2 - 1}{12}$	$A^2 \cdot T$	$\frac{M^2 - 1}{12} \cdot A^2$	$2 \log_2 M$
	RZ	0	$\frac{M^2 - 1}{12}$	$\frac{A^2 \cdot T}{2}$	$\frac{M^2 - 1}{12} \cdot \frac{A^2}{2}$	$\log_2 M$
Manchester $a_k = \pm \frac{1}{2}$		0	$\frac{1}{4}$	$A^2 \cdot T$	$\frac{A^2}{4}$	1

5.4. taula. A anplitudeko pultsuak eta sinboloen arteko distantzia lekoa duten zenbait kode motaren parametroen balioen laburpena.

5.4. Bandan murriztutako kanalak

5.4.1. Sinboloen arteko interferentzia

5.11. irudian, seinale digital baten oinarri-bandako transmisio-sistema bat aurkezten da.



5.11. irudia. Oinarri-bandako transmisio-sistema digitala.

r abiadurako $\{a_k\}$ sinboloen sekuentziak transmisio-iragazkia zeharkatuko du ($h_T(t)$ pultsu-erantzunarekin); ondoren, kanalean injektatuko da, zeinak $h_C(t)$ pultsu-erantzuna duen. Sistemaren $n(t)$ zarata, gausstar eta zuri gisa modelatzen da $h_R(t)$ hartzailearen iragazkiaren sarreran.

Transmitituriko sinboloen balioa estimatzeko, hartzailearen irteerako $y(t)$ seinalearen laginketa egingo da, eta, hartara, haren balioa ebaluatuko da sinbolo bakoitzaren iraupen-tartean, $t_k = kT$ uneetan. Horrela, $t_K = KT$ une jakin batean, une horri dagokion a_K sinboloa jaso nahi izango dugu. Atari-detekttagailuak erabakiko du M sinboloen $\{a_k\}$ alfabetoko zein sinbolori dagokion detektaturiko $y(t_K)$ balioa, \hat{a}_K transmitituriko sinboloa estimatuz. $\hat{a}_K \neq a_K$ baldin bada, sinboloaren detekzioan errorea egon dela esan nahi du.

Hartzailearen irteerako seinalearen adierazpena honako hau izango da:

$$y(t) = \sum a_k h_E(t - kT) + n(t) * h_R(t)$$

non:

$$h_E(t) = h_T(t) * h_C(t) * h_R(t)$$

sistema osoaren erantzun bateratua den, igorlearen edo transmisorearen, transmisio-kanalaren eta hartzailearen iragazkiez osatua.

$t_K = KT$ unean:

$$\begin{aligned} y(KT) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k h_E(KT - kT) + n(t) * h_R(t)|_{t=t_K} \\ &= \underbrace{a_K h_E(0)}_{\text{berreskuratu nahi den sinboloa}} + \underbrace{\sum_{k \neq K, k=-\infty}^{\infty} a_k h_E(KT - kT)}_{\text{Sinboloen arteko interferentzia}} + \underbrace{n(t) * h_R(t)|_{t=t_K}}_{\text{Zarata}} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Beraz, 5.15 ekuazioaren arabera, detektaturiko balioan (zeinetik transmitituriko \hat{a}_K sinboloa estimatuko den) hiru osagai bereiz ditzakegu:

- Transmitituriko sinboloaren balioa, $h_E(0)$ balioak eskalatuta. Hori da interesatzen zaigun osagaia.
- *Sinboloen arteko interferentziaren* osagai bat, ingeleseko siglen bidez ezagunagoa dena: **ISI** (*InterSymbol Interference*)
- Zarataren osagai bat, momentuz kontuan edukiko ez duguna (aurrerago aztertuko dugu), eta, beraz, zerotzat hartuko duguna.

ISIrrik ez egoteko honako hau bete beharko da:

$$h_E((K - k)T) = h_E(nT) = 0 \quad \forall n \neq 0 \quad (5.16)$$

Baldintza hau ere ondoren adierazten den moduan idatz dezakegu:

$$h_E(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = h_E(0) \cdot \delta(t) \quad (5.17)$$

Edo frekuentzia-eremuan:

$$\begin{aligned} H_E(f) * r \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kr) &= h_E(0) \\ r \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_E(f - kr) &= h_E(0) \quad \forall |f| \leq \frac{r}{2} \end{aligned} \quad (5.18)$$

non $H_E(f)$ sistema osoaren frekuentzia-erantzun bateratua den (igorlearen iragazkia, transmisio-kanala eta hartzailearen iragazkia) eta $r = \frac{1}{T}$, sinboloen abiadura. 5.16 eta 5.18 ekuazioek *Nyquist-en Lehenengo Irizpidea* osatzen dute, transmisioa sinboloen arteko interferentziarik gabe egitea dakarrena, denbora eta frekuentzia-eremuan adierazita, hurrenez hurren. 5.18 ekuazioaren lehenengo zatia $H_E(f)$ frekuentzia-erantzunaren luzapen periodikoa da, r periodoarekin. $\sum_{k=-\infty}^{\infty} H_E(f - kr)$, beraz, funtzio periodikoa da, r periodoarekin. Ekuazioaren bigarren zatia $h_E(0)$ konstantea da.

Irizpide horren ondorio bat zera da: **B banda-zabalera daukan kanal batetik zeharreko transmisioan, sinbolo-abiadura maximoa $r_{max} = 2B$ izango da.** Edo, haren baliokide gisa, r abiadurara transmititu ahal izateko banda-zabalera minimoa $B_{min} = \frac{r}{2}$ izango da.

5.4.2. Nyquist-en edo kosinu altxatuaren pultsuak

5.16 baldintza argi eta garbi betetzen duen funtzioa *sinc* funtzioa da:

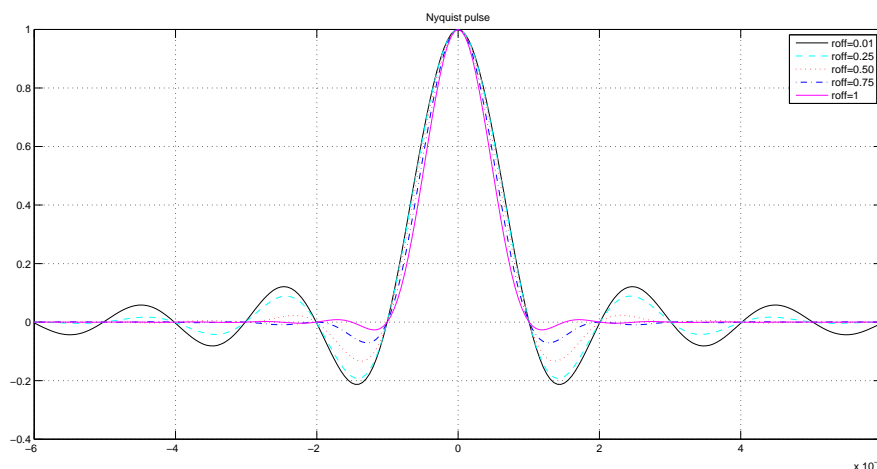
$$h_E(t) = \text{sinc}(rt)$$

Zeinaren Fourier-en transformatua:

$$H_E(f) = \frac{1}{r} \Pi\left(\frac{f}{r}\right)$$

laua den $|f| \leq \frac{r}{2}$ bitartean. Eta erraza da frogatzea frekuentzia-eremuko baldintza betetzen duela (5.18 ekuazioa, hain zuzen). *Sinc* funtzioa, *Nyquist-en pultsu* izenez ezagunak diren funtzioen multzoaren kasu partikular bat da. Halako funtzioen denbora-eremuko adierazpena honako hau da (5.12. irudian marraztu dira):

$$h_E(t) = \frac{\cos 2\pi\beta t}{1 - (4\beta t)^2} \cdot \text{sinc } rt \quad (5.19)$$

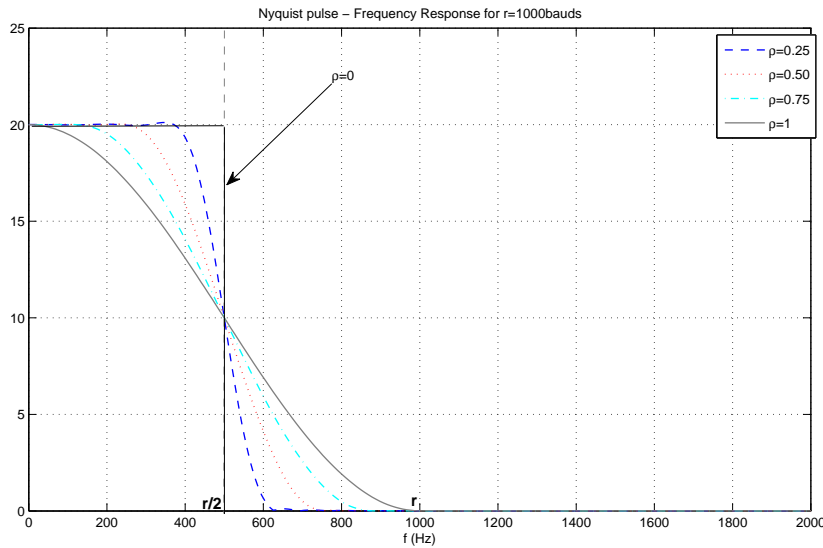


5.12. irudia. Nyquist-en pultsuak.

Eta euren Fourier-en transformatua:

$$H_E(f) = \begin{cases} \frac{1}{r} & 0 < |f| < \frac{r}{2} - \beta \\ \frac{1}{2r} \left(1 + \cos \frac{\pi}{2\beta} \left(|f| + \beta - \frac{r}{2} \right) \right) & \frac{r}{2} - \beta \leq |f| \leq \frac{r}{2} + \beta \\ 0 & |f| \geq \frac{r}{2} + \beta \end{cases} \quad (5.20)$$

β , beharrezkoa den $\frac{r}{2}$ -eko banda-zabalera minimotik gora erabiliko den *gehiegizko banda-zabalera* kontrolatzen duen parametroa izanik. β gehiegizko banda-zabalera $\frac{r}{2}$ -ekiko adierazten denean, $\rho = \frac{\beta}{r/2} = \frac{2\beta}{r}$ erlazioari *roll-off* faktorea deritzo.



5.13. irudia. Kosinu altxatuaren frekuentzia-erantzuna.

5.13. irudian ikus daitekeenez, 3 alde edo tarte bereizten dira frekuentzia-erantzunean:

- Alde lau eta konstante bat, jatorriaren inguruan, $0 < |f| < \frac{r}{2}(1 - \rho)$ bitartean. $\rho = 0$ denean alde hori $r/2$ -raino heltzen da eta $\rho = 1$ denean ez dago holakorik.
- Trantsizio-tarte bat, guztira $2\beta = \rho r$ -ko zabalera daukana. $\rho = 0$ denean, ez dago halako tarterik eta, $\rho = 1$ denean, banda-zabalera osoa betetzen du, r . Alde horrek, zeinak *kosinu altxatu* baten itxura daukan, izena ematen dio transferentzia-funtzio honi: *kosinu altxatuaren frekuentzia-erantzuna*. Bestigiala deritzon simetria aurkezten du $\frac{r}{2}$ -ren inguruan; zehazki, 5.18 ekuazioa betetzeko balio du.
- Ahuldutako tartea, non $H_E(f)=0$ den, $|f| \geq \frac{r}{2}(1 + \rho)$ -rako.

Kosinu altxatuaren ezaugarriak 5.18 betetzea dakar, baina erantzun 'zorrotza' eman gabe, hau da, pasatzen utzi nahi den bandaren eta ahultzen den bandaren arteko trantsizio-tartea emanez. Dena den, erantzun horrekin r abiaduran transmititu ahal izateko, beharrezkoa den banda-zabalera $\rho \frac{r}{2} \text{ Hz}$ handitu behar izan da:

$$B_T = \frac{r}{2}(1 + \rho)$$

ρ -ren balio altuak erabiltzean, r sinbolo-abiadura jakin bat lortzeko beharrezkoa den transmisioaren banda-zabalera handitzen da. Dena den, 5.12. irudiko denbora-eremuko erantzunean ikus daitekeen moduan, gehiegizko banda-zabalera handitu ahala, bigarren mailako lobuluen anplitudea nahiko murrizten da. Jatorritik sinboloaren periodo bat baino gehiago urrunduz, kurbaren zero balioaren inguruko malda lauagoa dela ikus daiteke ρ -ren balio handienetan. Horren ondorioz, sinboloaren detekzio-unean sinkronismo-erorerik egongo balitz (hau da, detekzioa zero balioaren posizio zehatzean egingo ez balitz, baizik eta pixka bat lehenago edo geroago), sinboloen artean are eta interferentzia txikiagoa sortuko litzateke, kurba zenbat eta lauagoa izan zeroren inguruan, hau da, ρ zenbat eta handiagoa izan. Laburbilduz, gehiegizko banda-zabalera erabiltzeak sistemak sinkronismo-erroreekiko daukan sentsibilitatea murrizten du.

Transmisio-sistemetan, ρ -ren ohiko balioak $0,2 < \rho < 0,3$ bitartean aurkitzen dira. r_b abiadura bitar jakin baten transmisioan beharrezkoa den banda-zabalera handitzea kodearen M maila kopurua handituz konpentsa daiteke, $r = \frac{r_b}{\log_2 M}$ baita. Adibidez, $\rho = 0$ -tik $\rho = 1$ erabiltzera pasatzen bagara, banda-zabalera bikoiztu egiten da, eta B izatetik $2B$ izatera pasatu. Kodearen maila kopurua bikoizten badugu, r erdira txikituko dugu, eta, beraz, kanaletik transmitituriko abiadura bitarra r_b izango da oraindik ere. 5.5. taulan $B = 4000$ Hz-eko banda-zabalera daukan kanal telefoniko batean lortuko liratekeen r_b abiadura bitarrak ikus daitezke, M eta ρ -ren zenbait baliotan. Ikus daitekeenez, $(M = 2, \rho = 0)$ zein $(M = 4, \rho = 1)$ konbinazioak erabiliz, abiadura bitar bera lor dezakegu. Noski, abiadura bitar handienak ρ -ren baliorik txikienak eta M -ren baliorik handienak konbinatuz lortuko ditugu.

	$\rho = 0$	$\rho = 0,25$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,75$	$\rho = 1$
M=2	8000	6400	5333	4571	4000
M=4	16000	12800	10666	9142	8000
M=8	24000	19200	16000	13713	12000
M=16	32000	25600	21333	18284	16000

5.5. taula. Kanal telefoniko ($B = 4000$ Hz) batetik zehar lortutako abiadura bitarrak, kosinu altxatuaren iragazkiak erabiliz, ρ eta M -ren zenbait baliotan ($r_b = \frac{2B}{(1 + \rho)} \cdot \log_2 M$).

Badakigunez, kosinu altxatuaren erantzuna transmisioaren eta hartzailearen iragazkiek eta transmisio-kanalaren erantzunak osaturiko multzoan lortu behar da. Transmisio-kanala idealtzat hartuz, eta transmisioaren eta hartzailearen iragazkiak kontuan hartuz soilik:

$$H_T(f) \cdot H_R(f) = H_E(f)$$

eta $H_E(f)$ da, hain zuzen, kosinu altxatuaren itxura izan behar duena. Hurrengo gaietan ikusiko den moduan, sistemaren errore-probabilitatea minimizatzeke, transmisioaren eta hartzailearen iragazkiek honako hau betetzen duen bikote bat osatu beharko dute:

$$h_T(t) = h_R^*(-t)$$

Eta horren ondorioa honako hau da:

$$\begin{aligned}
H_T(f) &= H_R^*(f) \\
H_T(f)H_R(f) &= |H_T(f)|^2 = |H_R(f)|^2 = H_{\cos}(f) \\
|H_T(f)| &= |H_R(f)| = \sqrt{H_{\cos}(f)}
\end{aligned}$$

Non $H_{\cos}(f)$ kosinu altxatuaren ezaugarria duen iragazkia izendatzeko erabili dugun nomenklatura den. Horregatik, transmisorean eta hartzailean erabilitako iragazkiek *kosinu altxatuaren erro karratu* deritzon ezaugarria edo itxura daukate.

5.4.3. Laburpena

Atal honetako ideiarik garrantzitsuenak laburbilduko ditugu:

- r sinbolo-abiadurara transmisioa egin ahal izateko beharrezkoa den banda-zabalera minimoa $B_{min} = \frac{r}{2}$ da.
- Baliokide gisa, B Hz-eko banda-zabalera daukan kanal batetik zeharreko transmisioak sinbolo-abiadura $r_{max} = 2B$ -ra mugatzen du.
- $r = 2B$ abiadura maximoan egindako transmisioak badauzka zenbait arazo:
 - Zaila da transmisorearen eta hartzailearen iragazkiak inplementatzea.
 - Bigarren mailako lobuluek balio altua dute, eta horrek sisteman sinkronismo-erroreak agertzea dakar (ISI asko sortuko litzateke, sinkronismo-erroren bat egongo balitz).
- Komentatutako arazoak *Nyquist-en pultsuen* familiako pultsuak erabiliz konpontzen dira (edo *kosinu altxatuaren iragazkiak*), zero baino handiagoko *roll-off* faktoreak erabiliz.
- Zero baino handiagoak diren ρ -ren balioak erabiliz, B Hz-eko banda-zabalera daukan kanal batetik zeharreko transmisio-abiadura $r_{max} = \frac{2B}{1+\rho}$ -ra murrizten da. Baliokide gisa, transmisioa r abiaduran egin nahi bada, $B_{min} = \frac{r}{2}(1+\rho)$ banda-zabalera minimoa beharko da.
- Sortutako gehiegizko banda-zabalera maila kopurua handituz konpentsa daiteke, transmisio-abiadura bitarra mantendu nahi izanez gero, honako abiadura bitar hau lortuko baiditzateke: $r_b = \frac{2B}{1+\rho} \cdot \log_2 M$.

6. gaia

Modulazio digitalak

Gai honetan, aurreko gaian aztertutako oinarri-bandako seinaleen modulazioa sortzeko erabiltzen diren oinarritzko teknikak aztertuko ditugu. Teknika horien helburua banda-paseko kanalen bidezko transmisioa ahalbidetzea da.

6.1. Sarrera

Edozein modulazio egitean, honako seinale hauek bereizten dira:

- Seinale modulatzailea: transmititu nahi den informazioa daukan seinalea da. Oinarri-bandako seinale bat izango da (analogikoa edo digitala).
- Seinale eramailea: informazioa garraiatzeko erabiliko den seinalea da. Bera definitzen duten parametroetariko baten aldaketaren bitartez egiten da.
- Seinale modulatuak: modulazioaren prozesutik sortzen den banda-paseko seinalea da, modulatzailearen informazioa eramango duena.

Seinale eramailezat sinusoide bat daukaten modulazioei *uhin jarraituko modulazio* deritze, edo baita, ingeleseko siglak erabilita, *CW - Continuous Wave- modulazio* ere. Halako modulazioak, orokorrean, honela adierazten dira:

$$y(t) = e(t) \cos(2\pi f_c t + \phi(t)) \quad (6.1)$$

non $y(t)$ seinale modulatu den eta f_c frekuentzia daukan seinale sinusoidala ($A_c \cos 2\pi f_c t$), seinale eramailea. $e(t)$ eta $\phi(t)$ seinaleak izango dira transmititu beharreko informazioa edukiko dutenak. Seinalearen $e(t)$ inguratzailea baldin bada informazioa daramana, **anplitude-modulazio** bat sortuko da, eta, seinale modulatzailea (edo informazioa) digitala denean, *anplitude-desplazamenduko modulazio* bat dela esaten da, ingeleseko siglen bidez (*ASK - Amplitude Shift Keying*) ezagutzen dena. $\phi(t)$ aldiuneko fasea modulatu bada, **fase-modulazio** edo **frekuentzia-modulazio** bat edukiko dugu, *PSK - Phase Modulation Keying* eta *FSK - Frequency Shift Keying* izenez ezagutzen direnak, hurrenez hurren.

Ondorengo ataletan, halako modulazioen oinarritzko ezaugarriak aztertuko ditugu.

6.2. Banda-paseko prozesu geldikorren PDE-aren adierazpen orokorra

Banda-paseko prozesu digital geldikorren PDE-a kalkulatzeko, banda-paseko prozesu geldikorren adierazpen orokor honetatik abiatuko gara:

$$y(t) = A_c (a(t)(\cos(2\pi f_c t + \phi) - b(t) \sin(2\pi f_c t + \phi)) \quad (6.2)$$

non A_c eramailearen anplitudea den, eramailearen frekuentzia f_c izanik eta ϕ zorizko aldagai uniforme (0, 2π) bitartean.

$a(t)$ eta $b(t)$ prozesuak oinarri-bandako seinale digitalak dira, eta bat datoz adierazpen hauekin:

$$a(t) = \sum_k a_k p(t - kT) \quad (6.3)$$

$$b(t) = \sum_k b_k p(t - kT) \quad (6.4)$$

Biak prozesu geldikortzat har ditzakegu, eta euren PDE-ak $G_a(f)$ eta $G_b(f)$ izango dira, hurrenez hurren. Gainera, orokorrean, bi prozesu horiek inkorrelatuta egongo dira, eta honako hau beteko da: $R_{ab}(\tau) = 0$.

Horrela, banda-paseko $y(t)$ prozesuaren autokorrelazioa honako hau izango da:

$$R_y(\tau) = \frac{A_c^2}{2} \{R_a(\tau)\cos(2\pi f_c \tau) + R_b(\tau)\cos(2\pi f_c \tau)\} \quad (6.5)$$

Eta, beraz, seinale digital modulatuaren PDE-aren adierazpen orokorra honako hau izango da:

$$G_y(f) = \frac{A_c^2}{4} \{G_a(f - f_c) + G_a(f + f_c) + G_b(f - f_c) + G_b(f + f_c)\} \quad (6.6)$$

Ondorengo ataletan, modulazio mota bakoitzeko $a(t)$ eta $b(t)$ seinaleen adierazpen zehatzak aztertuko dira.

6.3. Anplitude-desplazamenduko modulazioa

6.3.1. Deskribapena

ASK (Amplitude Shift Keying) seinale batean, 6.1 adierazpeneko $e(t)$ inguratzaila oinarri-bandako seinale digital **unipolarra** da, eta aldiuneko fasea konstantea izango da t-rekin:

$$y^{ASK}(t) = A_c \left[\sum_k a_k p(t - kT) \right] \cos(2\pi f_c t + \phi) \quad (6.7)$$

a_k sinboloen balioak beti positiboak izan beharko dira (seinale unipolar bati dagokion moduan), $a_k = 0, +1, +2, \dots, +(M-1)$, $e(t)$ beti positiboa izanik. $a_k = \{0, 1\}$ kasu bitarrari **OOK - On Off Keying** modulazioa deritza, 1 bit edo 0 bit jaso, *pizten* edo *amatatzen* den eramaile bat besterik ez delako.

Halako modulazioetan, bi kasu bereizten dira: *sinkronoa*, sinboloaren T periodoan eramailearen periodo kopuru oso bat sartzen denean ($T = \frac{N}{f_c}$, $N \gg 1$ izanik orokorrean), eta *asinkronoa*, aurreko erlazioa nahitaez betetzen ez duena, eramailearen osziladorearen eta sinboloaren erlojua ez daudelako sinkronizatuta.

Kasu sinkronorako (hemendik aurrera kontuan hartuko dugun kasua), honako hau idatz dezakegu (sinplifikatzearen, $\phi = 0$ kasua hartuko dugu):

$$\begin{aligned} y^{ASK}(t) &= A_c \sum_k a_k p(t - kT) \cos(2\pi f_c t) = A_c \sum_k a_k p(t - kT) \cos(2\pi f_c (t - kT)) \\ &= A_c \sum_k a_k p'(t - kT) \end{aligned} \quad (6.8)$$

Adierazpen hori seinale digital baten adierazpentzat har dezakegu, zeinaren oinarritzko pultsua $p'(t) = p(t) \cos 2\pi f_c t$ den. Transmitturiko M seinaleak, orduan, honako hauek izango dira:

$$\begin{aligned} s_k(t) &= A_c a_k p'(t) = A_c a_k p(t) \cos 2\pi f_c t \\ k &= 0, 1 \dots M-1 \quad a_k = 0, 1 \dots M-1 \end{aligned}$$

6.3.2. Potentziaren dentsitate-espektra

Atal honetan, ASK seinalearen PDE-a kalkulatu dugu, 6.6 adierazpenetik abiatuz. 6.2-ko banda-paseko prozesu baten adierazpen orokorra 6.7-ko adierazpenarekin konparatuz:

$$\begin{aligned} a(t) &= \sum_k a_k p(t - kT) \\ b(t) &= 0 \\ y^{ASK}(t) &= A_c a(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) \end{aligned}$$

Ondorioz, PDE-a modu honetan geratuko da (6.6-n ordezkatur):

$$G_y(f) = \frac{A_c^2}{4} \{G_a(f - f_c) + G_a(f + f_c)\}$$

eta $G_a(f)$ oinarri-bandako seinale digital unipolarraren PDE-a da:

$$G_a(f) = \sigma_a^2 r |P(f)|^2 + (m_a r)^2 \sum_n |P(nr)|^2 \delta(f - nr)$$

non $m_a = \frac{M-1}{2}$ den eta $\sigma_a^2 = \frac{M^2-1}{12}$. Gainera, NRZ pultsuak baldin badauzkagu, orduan $|P(f)|^2 = T^2 \text{sinc}^2 fT$ da eta:

$$G_a(f) = \frac{\sigma_a^2}{r} \text{sinc}^2 \frac{f}{r} + m_a^2 \delta(f)$$

eta ordezkatur:

$$G_y^{ASK}(f) = \frac{A_c^2 \sigma_a^2}{4 r} \left\{ \operatorname{sinc}^2 \frac{f - f_c}{r} + \operatorname{sinc}^2 \frac{f + f_c}{r} \right\} + \frac{A_c^2}{4} m_a^2 \{ \delta(f - f_c) + \delta(f + f_c) \} \quad (6.9)$$

6.3.2.1. Espekto-efizientzia

Noski, espekto-efizientiaren balioa oinarri-bandako seinale modulatzailea sortzeko erabili den $p(t)$ pultsuaren arabera izango da. Hasteko, kontuan har dezagun ASK Mtarraren kasua NRZ pultsuekin, zeinaren PDE-a 6.9 adierazpenarekin bat datorren. sinc^2 funtzioa daukagula kontuan hartuta, transmisioaren banda-zabalera estimatua $B_T \simeq r$ izango da, eta, orduan, espekto-efizientzia $\eta = \frac{r_b}{B_T} \simeq \frac{r_b}{r} = \log_2 M$ izango da.

RZ pultsua erabiltzen bada, okupaturako banda-zabalera NRZ kasuarenarena halako bi izango da, eta, ondorioz, espekto-efizientzia erdira txikituko da.

Beste aukera bat Nyquist-en pultsuak erabiltzea da, zeinen itxurak ISiA (sinboloen arteko interferentzia) minimizatzen duen. Kasu honetan, badakigu oinarri-bandan okupaturako banda-zabalera $\frac{r}{2}(1 + \rho)$ dela. Orduan, banda-paseko ASK seinalean $B_T = r(1 + \rho)$ izango da, eta espekto-efizientzia: $\eta = \frac{r_b}{r(1 + \rho)} = \frac{\log_2 M}{1 + \rho}$. Horrela, espekto-efizientzia $(1 + \rho)$ faktorearekin txikitzen da pultsu errektangularen sistemarekin alderatuz, baina banda-zabalera $r(1 + \rho)$ balioan mugatuta egongo da modu hertsian (pulstu errektangularekin, espektoaren dispersio handia edo bigarren mailako lobuluetan energia-galera bat dagoen bitartean).

6.3.2.2. Transmitturiko potentzia

Transmitturiko potentzia kalkulatzeko, 5.9 adierazpena erabil dezakegu, batez besteko energia sinboloko parametroa (E_s) kalkulatur:

$$P_T = E_s r = r \sum_{k=0}^{M-1} E_k p(a_k) = r \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} E_k$$

E_k , a_k sinbolo bakoitzari esleitutako $s_k(t)$ seinalearen energia izanik. Kasu honetan, 6.8 adierazpenetik abiatuta, transmitturiko ASK seinalean:

$$s_k(t) = A_c a_k p'(t) = A_c a_k \cos 2\pi f_c t p(t)$$

$$E_k = \int s_k^2(t) dt = A_c^2 a_k^2 \int \cos^2 2\pi f_c t p^2(t) dt = A_c^2 a_k^2 \frac{E_p}{2}$$

$$E_s = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} E_k = A_c^2 \frac{E_p}{2} \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} a_k^2 = A_c^2 \frac{E_p}{2} (\sigma_a^2 + m_a^2)$$

$$P_T = \frac{A_c^2}{2} (E_p r) (\sigma_a^2 + m_a^2)$$

Eta $p(t)$ T iraupena daukan pulstu errektangular bat baldin bada, orduan, $E_p = T$ eta $P_T = \frac{A_c^2}{2} (\sigma_a^2 + m_a^2)$. Noski, P_T -ren adierazpen berera helduko ginateke 6.9 adierazpenaren PDE-aren azalera kalkulatur.

6.4. Fase-desplazamenduko modulazioa

6.4.1. Deskribapena

PSK (Phase Shift Keying) modulazio batean, eramailearen fasean sartzen da informazioa, moduhonetan:

$$y^{PSK}(t) = A_c \sum_k p(t - kT) \cos(2\pi f_c t + \phi_k + \phi) \quad (6.10)$$

$p(t)$ oinarrizko pultsua izanik, errektangulartzat hartuko duguna, $p(t) = \Pi\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right)$. Sinboloen kT periodo bakoitzean, eramailearen fasearen balioa jasotako sinboloaren arabera aldatzen da:

$$\phi_k = \frac{\pi}{M}(2a_k + N), \quad a_k = \{0, 1 \dots M - 1\} \text{ izanik eta } N = \{0, 1\}. \quad (6.11)$$

Aurreko adierazpenaren arabera, zirkulua ϕ_k M sektoretan zatituta geratzen da, eta bakoitza a_k sinbolo jakin bati dagokio. N ren balioak 0 fasea egongo den ($N = 0$) ala ez ($N = 1$) ezartzen du, edo, beste modu batera esanda, a_0 sinboloari esleitzen zaion balioa zein den adierazten du.

Ikus ditzagun adibide batzuk.

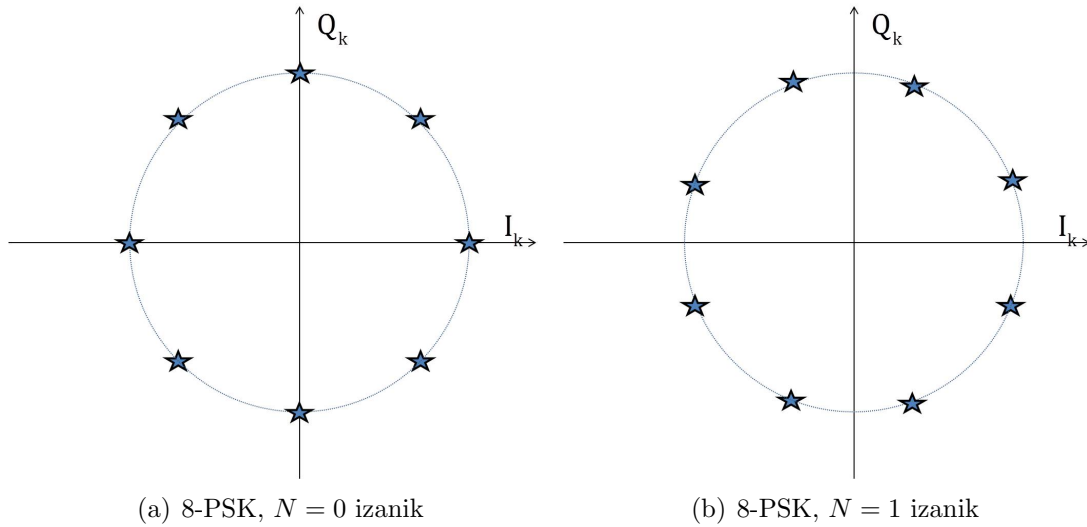
$$M = 4 \quad N = 0 \quad \phi_k = \frac{2\pi}{4}a_k = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$$

$$M = 4 \quad N = 1 \quad \phi_k = \frac{2\pi}{4}a_k + \frac{\pi}{4} = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$$

$$M = 8 \quad N = 0 \quad \phi_k = \frac{2\pi}{8}a_k = \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right\}$$

$$M = 8 \quad N = 1 \quad \phi_k = \frac{2\pi}{8}a_k + \frac{\pi}{8} = \left\{\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}\right\}$$

6.1.(a) irudiak 8-PSK batean transmitituriko faseen balioak adierazten ditu. Jarraian, grafiko horretako puntuek transmitituriko sinboloak adierazten dituztela ikusiko dugu, behe-paseko baliokidearen adierazpenean, sinbolo konplexu modura. Adierazpen horri transmitituriko sinboloen *konstelazio* deritzo.



6.1. irudia. 8-PSK modulazio baten sinboloen konstelazioa.

6.4.2. Fase- eta koadratura-osagaiak

6.10 adierazpenetik abiatuta, 6.2 adierazpeneko $a(t)$ eta $b(t)$ osagaiak lor ditzakegu PSK seinalean:

$$y^{PSK}(t) = A_c \sum_k p(t - kT) \cos(2\pi f_c t + \phi) \cos \phi_k - A_c \sum_k p(t - kT) \sin(2\pi f_c t + \phi) \sin \phi_k \quad (6.12)$$

$$a(t) = \sum_k p(t - kT) \cos \phi_k$$

$$b(t) = \sum_k p(t - kT) \sin \phi_k$$

Adierazpen horiek honela ere adieraz daitezke:

$$a(t) = \sum_k p(t - kT) \cos \phi_k = \sum_k \cos \phi_k p(t - kT) = \sum_k I_k p(t - kT) \quad (6.13)$$

$$b(t) = \sum_k p(t - kT) \sin \phi_k = \sum_k \sin \phi_k p(t - kT) = \sum_k Q_k p(t - kT) \quad (6.14)$$

Ikus daitekeenez, $a(t)$ -k eta $b(t)$ -k oinarri-bandako seinale digitalen adierazpenak dauzkate, $p(t)$ oinarrizko pulsuarekin, $I_k = \cos \phi_k$ eta $Q_k = \sin \phi_k$ sinboloekin, sinbolo-abiadura $r = \frac{1}{T}$ izanik. $a(t)$ eta $b(t)$ seinaleak prozesuaren fase- eta koadratura-osagaiak izango dira (A_c eskala-faktorea alde batera utzita), f_c frekuentzia eta ϕ fasea dauzkan eramaile batekiko. Orokorrean, PDE-a kalkulatzeko izan ezik, kontuan hartu ahal izango dugu $\phi = 0$ kasua, orokortasunik galdu barik.

Orduan, PSK seinalearen behe-paseko baliokidea honako hau izango da:

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) &= y_F(t) + j y_C(t) = A_c(a(t) + jb(t)) = A_c \sum_k (I_k + j Q_k) p(t - kT) \\ &= A_c \sum_k \vec{C}_k p(t - kT) \end{aligned}$$

$$\sigma_I^2 = E\{I_k^2\} = E\{\cos^2 \phi_k\} = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \cos^2 \phi_m = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1 + \cos 2\phi_m}{2} = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\sigma_Q^2 = E\{Q_k^2\} = E\{\sin^2 \phi_k\} = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \sin^2 \phi_m = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1 - \cos 2\phi_m}{2} = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Ondorioz:

$$G_a(f) = G_b(f) = \frac{r}{2} |P(f)|^2 \quad (6.15)$$

Beraz, 6.6 erabiliz, PSK seinalearen PDE-a lortuko dugu:

$$G_y^{PSK}(f) = \frac{A_c^2}{4} r \{ |P(f - f_c)|^2 + |P(f + f_c)|^2 \} \quad (6.16)$$

Erabilitako oinarriko pultsua $T = \frac{1}{r}$ iraupena daukan pultsu errektangularra baldin bada, orduan, $B_T \simeq r$ eta $\eta \simeq \frac{r_b}{r} = \log_2 M$. Nyquist-en pultsuak erabiltzen badira, orduan, banda-zabalera $B_T = r(1 + \rho)$ balioan mugatuta egongo da, eta $\eta = \frac{\log_2 M}{1 + \rho}$.

6.4.3.1. Transmittituriko potentzia

5.9 adierazpena erabil dezakegu transmittituriko potentzia kalkulatzeko:

$$P_T = E_s r = r \sum_{k=0}^{M-1} E_k p(a_k) = r \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} E_k$$

E_k , a_k sinbolo bakoitzari esleitutako $s_k(t)$ seinalearen energia izanik. Kasu honetan, $\phi = 0$ hartuz 6.10-en, transmittituriko seinaleak honako hauek izango dira:

$$s_k(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \phi_k) p(t)$$

$$E_k = \int s_k^2(t) dt = A_c^2 \int p^2(t) \cos^2(2\pi f_c t + \phi_k) dt = \frac{A_c^2}{2} E_p$$

Hau da, sinbolo guztiak $\left(\frac{A_c^2}{2} E_p\right)$ energia berarekin transmititzen dira, eta, orduan, batez besteko energia sinboloko $E_s = \frac{A_c^2}{2} E_p$ izango da. Ondorioz:

$$P_T = \frac{A_c^2}{2} E_p r$$

Eta $T = \frac{1}{r}$ iraupena daukan pultsu errektangularrerako, $P_T = \frac{A_c^2}{2}$ balioa lortuko dugu.

Noski, P_T -ren adierazpen berera helduko ginateke 6.16 adierazpenaren PDE-aren azalera kalkulatu.

6.4.4. Kasu partikularrak PSK_N

6.4.4.1. Kasu bitarra, BPSK

Kasu bitarrak PSK_N (M=2) ezagunak diren bi modulazio ematen ditu, $N = 0$ ala $N = 1$ den arabera, 6.11 adierazpenean.

M=2, N=0 Transmittituriko faseak $\phi_k = \{0, \pi\}$ izango dira, eta transmittituriko seinaleak:

$$\begin{aligned} s_0(t) &= A_c \cos 2\pi f_c t & 0 < t < T \\ s_1(t) &= -A_c \cos 2\pi f_c t & 0 < t < T \end{aligned}$$

Modulazio horri PRK (Phase Reversal Keying) ere esaten zaio. Ikus daitekeenez, kasu honetan, 6.12 adierazpenean $b(t)$ (6.14) zero izango da, eta konstelazioa dimentsio bakarrekoa izatera pasatuko da, bi sinbolo hauekin: $I_k = -1, +1$, eramailearekin fasean daudenak.

M=2, N=1 Transmittituriko faseak $\phi_k = \{\frac{\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\}$ izango dira, eta transmittituriko seinaleak:

$$\begin{aligned} s_0(t) &= A_c \sin 2\pi f_c t & 0 < t < T \\ s_1(t) &= -A_c \sin 2\pi f_c t & 0 < t < T \end{aligned}$$

Kasu honetan, 6.12 adierazpenean $a(t)$ osagaia (6.13) da zero izango dena, eta konstelazioa ere dimentsioa bakarrekoa izango da, sinbolo hauekin: $Q_k = -1, +1$. Sinbolo horiek eramailearekin koadraturan daude. Egia esan, PSKren kasu bitar horiek bi dimentsioko PSK orokorraren kasu degeneratuak (dimentsio bakarrekook) dira.

PSKren bi kasu horien PDE-a kasu orokorrean (6.16) lortu denaren berdina izango da. Hori frogatzeko, PSK seinalearen adierazpen orokorretik abiatu gaitzke, PRKren kasura egokituz (M=2, N=0):

$$\begin{aligned} y^{PRK}(t) &= A_c \sum_k p(t - kT) \cos \phi_k \cos(2\pi f_c t + \phi) \\ &= A_c a(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) \end{aligned}$$

Non:

$$G_y^{PRK}(f) = \frac{A_c^2}{4} \{G_a(f - f_c) + G_a(f + f_c)\}$$

eta

$$G_a(f) = \left\{ \sigma_I^2 r |P(f)|^2 + (m_I \cdot r)^2 \sum_n |P(nr)|^2 \delta(f - nr) \right\}$$

$I_k = \{-1, +1\}$ sinboloen batezbestekoa eta bariantza kalkulatu ditugu:

$$m_I = E\{I_k\} = E\{\cos \phi_k\} = \frac{1}{2}((-1) + (+1)) = 0$$

$$\sigma_I^2 = E\{I_k^2\} = E\{\cos^2 \phi_k\} = \frac{1}{2}((-1)^2 + (+1)^2) = 1$$

eta orduan:

$$G_a(f) = r|P(f)|^2$$

$$G_y^{PRK}(f) = \frac{A_c^2}{4} r \{|P(f - f_c)|^2 + |P(f + f_c)|^2\}$$

Ikasleak frogatuko du PSK bitarraren beste kasua ($M=2$, $N=1$).

6.4.4.2. QPSK kasu lautarra eta M-QAM modulazioak

QPSK modulazioak $M = 4$ denerako ematen dira. $N = 0$ baldin bada, transmitituriko faseak $\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$ izango dira. Aldiz, $N = 1$ denean, transmitituriko faseak $\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$ izango dira, eta modulazio horri QAM (Quadrature Amplitude Modulation) deritzo. Modulazio hori bi BPSK modulaziotzat har daiteke, PRK bat fase-osagaian ($I_k = \{-1, +1\}$) eta bestea koadratura-osagaian ($Q_k = \{-1, +1\}$).

4-QAM eta $N = 1$ modulazioan maila kopurua handitzen badugu I_k zein Q_k sinboloetan, lauki itxurako konstelazioak lortzen dira; M-QAM deritze. 6.3. irudian, haietariko batzuk adierazi dira. Adibidez, 4 maila baldin badauzkagu osagai bakoitzean, $I_k = Q_k = \{-3, -1, +1, +3\}$, sareta laukidun bat osatuko duten 16 \vec{C}_k sinbolo konplexuen multzoa lortuko dugu, 16-QAM modulazioari dagokiona, hain zuzen.

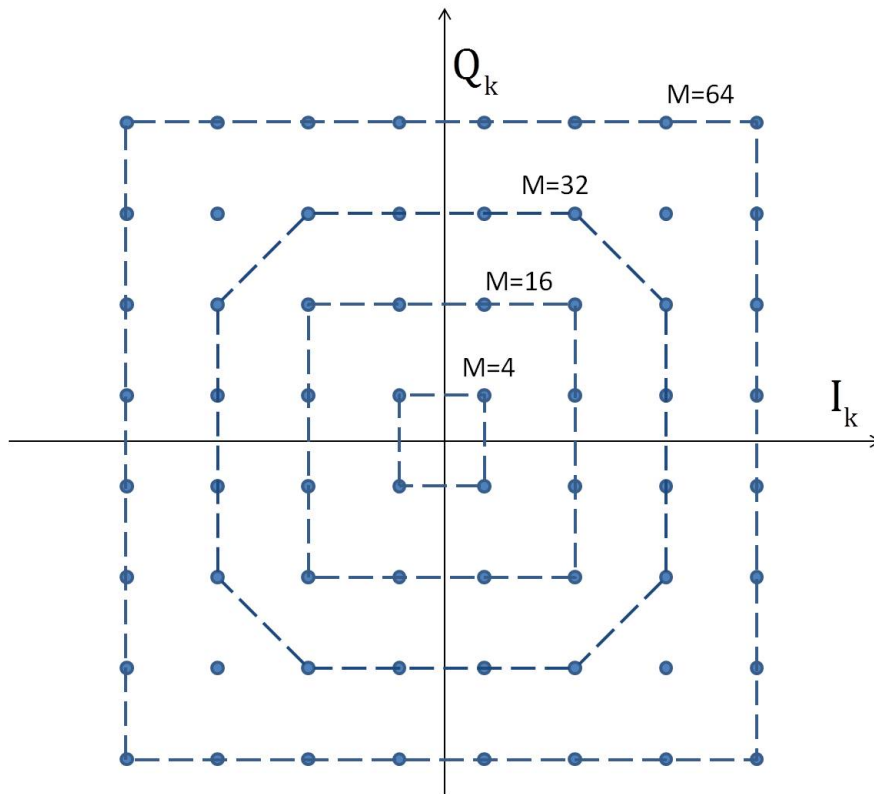
Halako modulazioak oso ezagunak dira, erraz inplementatzen direlako. 6.4. irudian, QAM konstelazio jakin bat sortzeko prozesua adierazi da, modu eskematikoan (oinarrizko kontzeptua bi dimentsioko edozein konstelaziori aplikatu badakioke ere). Sarrerako fluxu bitarrean, $\log_2 M$ biteko multzoak osatzen dira, eta, horien arabera, konstelazioaren sinboloa aukeratu da. Konstelazio horren I eta Q osagaiek banda-paseko seinalearen fase- eta koadratura-osagaiei dagozkien oinarri-bandako seinale digitalak sortuko dituzte.

6.5. Frekuentzia-desplazamenduko modulazioa

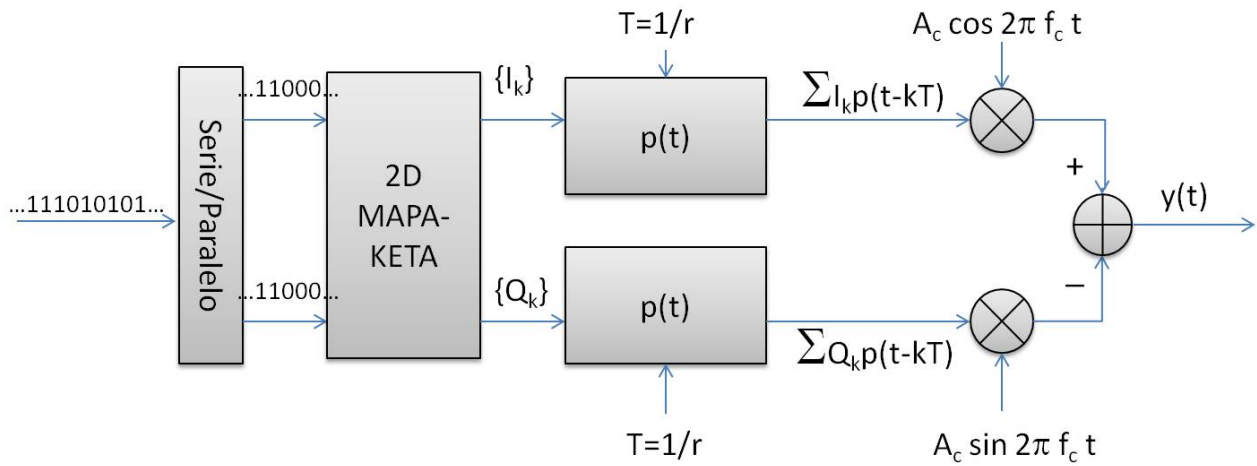
6.5.1. Sarrera

FSK (Frequency Shift Keying) modulazioetan, transmititu beharreko sinboloari dagokion informazioa transmitituriko eramailearen frekuentzian dago. Halako modulazioen azterketa konplexua da, eta, atal honetan, analisi errazeko kasuren bat aurkeztuko dugu soilik.

Orokorrean, FSK modulazio batean, $\{a_k\}_M$ sinbolo multzo bati egokituta transmitituriko seinaleak $\{f_k\}_M$ frekuentziak dauzkaten seinale sinusoidalak dira:



6.3. irudia. Sinboloen konstelazioak QAM modulazioetan.



6.4. irudia. QAM modulatzailer baten eskema.

$$s_k(t) = A_c \cos(2\pi f_k t) p(t)$$

eta seinale modulatuak:

$$s^{FSK}(t) = A_c \sum_k p(t - kT) \cos 2\pi f_k t$$

Badaude oinarriko bi FSK modulazio mota:

- Kasurik errazenean, a_k sinboloaren transmisiorako, f_k frekuentzia daukan osziladore bat aukeratzen da. M osziladore independente izango ditugu erabilgarri, eta, orokorrean, elkarren jarraian doazen sinboloen arteko trantsizioak ez-jarraituak izango dira.
- Bertsio landuago batean, osziladoreak sinkronizatuta daude, edo, beste modu batera esanda, beharrezkoak diren frekuentziak modu sinkronoan sortzen dira fase-jarraitasunarekin. Halako modulazioei *fase jarraituko modulazio* deritze, eta badago CPFASK (Continuous Phase FSK) familia oso bat.

6.5.2. Potentziaren dentsitate-espektra

FSKren kasu orokorra M ASK modulazioaren konbinaketa modura azter daiteke. Hemen, kasu bitarra landuko dugu, $M=2$, eta, beraz, bi sinboloei dagozkien bi eramaileen transmisioa aztertu behar da:

$$y(t) = y_1^{ASK}(t) + y_2^{ASK}(t)$$

non

$$\begin{aligned} y_1^{ASK}(t) &= A_c \sum_k a_k p(t - kT) \cos 2\pi f_1 t \\ y_2^{ASK}(t) &= A_c \sum_k b_k p(t - kT) \cos 2\pi f_2 t \end{aligned} \quad (6.17)$$

$b_k = \overline{a_k}$ izanik eta $a_k = \{0, 1\}$. Bi seinaleak ortogonalak izanik (argi ikusten da $E\{a_k \cdot b_k\} = 0$ dela), $y(t)$ -ren PDE-a ASK seinale bakoitzaren PDE-en batura izango da:

$$G_y(f) = G_{y_1}(f) + G_{y_2}(f)$$

$$\begin{aligned} G_{y_1}(f) &= \frac{A_c^2}{4} \{G_{x_1}(f - f_1) + G_{x_1}(f + f_1)\} \\ G_{y_2}(f) &= \frac{A_c^2}{4} \{G_{x_2}(f - f_2) + G_{x_2}(f + f_2)\} \end{aligned}$$

non $x_1(t) = \sum_k a_k p(t - kT)$ eta $x_2(t) = \sum_k b_k p(t - kT)$, 6.17-eko ASK seinaleak sortzen dituzten oinarri-bandako bi seinale digital unipolarrak diren.

$$\begin{aligned} G_{x_1}(f) &= \sigma_a^2 r |P(f)|^2 + (m_a r)^2 \sum_n |P(nr)|^2 \delta(f - nr) \\ G_{x_2}(f) &= \sigma_b^2 r |P(f)|^2 + (m_b r)^2 \sum_n |P(nr)|^2 \delta(f - nr) \end{aligned}$$

non $m_a = m_b = \frac{1}{2}$ den, $\sigma_a^2 = \sigma_b^2 = \frac{1}{4}$ eta $|P(f)|^2 = T^2 \text{sinc}^2 fT$. Beraz:

$$G_{x_1}(f) = G_{x_2}(f) = \frac{1}{4} T \text{sinc}^2 fT + \frac{1}{4} \delta(f)$$

$$G_y(f) = \frac{A_c^2}{16} \left\{ T \text{sinc}^2(f - f_1)T + \delta(f - f_1) + T \text{sinc}^2(f - f_2)T + \delta(f - f_2) + T \text{sinc}^2(f + f_1)T + \delta(f + f_1) + T \text{sinc}^2(f + f_2)T + \delta(f + f_2) \right\} \quad (6.18)$$

Modulazio horretan, noski, transmitituriko potentzia konstantea da: $\frac{A_c^2}{2}$.

6.5.2.1. Shunde-ren FSKa

FSK bitarraren kasu partikular bat da, zeinean f_1 eta f_2 bi eramaileen arteko tartek fase jarraituko seinale modulatu sortzen duen:

$$f_1 = f_0 + \frac{r_b}{2}$$

$$f_2 = f_0 - \frac{r_b}{2}$$

Balio horiekin 6.18-ko adierazpeneko bi sinc funtzioen arteko tartek (eta baita bi deltena ere) $f_1 - f_2 = r_b$ balioa edukiko du, eta transmisioaren banda-zabalera $B_T = r_b$ balioan estimatuko dugu. Ondorioz, $\eta = 1$ bps/Hz-ko espektro-efizientzia lortuko dugu.

7. gaia

Zarata komunikazio digitaletan

7.1. Seinale-espazioa

7.1.1. Definizioak

Seinale-espazioak seinaleen interpretazio bektoriala egiten du. Transmisio M tar batean, $\{s_1(t), \dots, s_k(t), \dots, s_M(t)\}$ M seinaleak kontuan hartuko ditugu, zeinak $\{a_1, \dots, a_k, \dots, a_M\}$ M sinbolo diskretuekin modu zuzenean erlazionatuta dauden. $s_k(t)$ seinaleak $[0, T]$ tartean definituta daude. Interpretazio bektorialean, $s_k(t)$ seinaleak \vec{s}_k bektoreak dira. Bektore horien gain, eragiketa hauek definitzen ditugu, zeinek $N \leq M$ dimentsioko azpiespazio bektoriala definitzen duten:

Biderketa eskalarra

$$\langle \vec{s}_i, \vec{s}_j \rangle = \int_0^T s_i(t)s_j(t)dt$$
$$\langle \vec{s}_i, \vec{s}_j \rangle = 0 \text{ baldin bada} \Rightarrow \vec{s}_i \perp \vec{s}_j \text{ (ortogonalak dira)}$$

Bektore baten norma

$$\|\vec{s}_i\| = \sqrt{\langle \vec{s}_i, \vec{s}_i \rangle}$$
$$\|\vec{s}_i\|^2 = \langle \vec{s}_i, \vec{s}_i \rangle = \int_0^T |s_i(t)|^2 dt = E_i$$

non E_i $s_i(t)$ seinalearen energia den.

Korrelazio-koefizientea

$$\rho_{ij} = \frac{\langle \vec{s}_i, \vec{s}_j \rangle}{\|\vec{s}_i\| \|\vec{s}_j\|}$$

Ikus daitekeenez, korrelazio-koefizientea bi seinalaren arteko korrelazio gurutzatuaren emaitza da, jatorrian ebaluatuta, eta euren energiaren erro karratuen biderkadurarekin normalizata. Ohartzekoa da hau betetzen dela: $-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$.

7.1.1.1. Oinarri ortonormala

$\{\vec{s}_k\}_M$ M bektoreek definituriko espazio bektorialean, espazioaren norabideak $\{\vec{\phi}_k\}_N$ N bektore ortonormalek (edo $\{\phi_k(t)\}_N$ funtzioek) ematen dizkigute ($N \leq M$ izanik). Funtzio edo bektore ortonormalek honako hau betetzen dute:

$$\langle \vec{\phi}_k, \vec{\phi}_l \rangle = \int_0^T \phi_k(t)\phi_l(t)dt = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$

Ohartzekoa da honako hau bete behar dela:

$$\|\vec{\phi}_k\| = 1$$

Hau da, $\vec{\phi}_k$ bektoreak ortonormalak dira: elkarrekiko ortogonalak eta unitateko norma.

7.1.1.2. Seinale-espazioko deskonposaketa: seinaleen konstelazioa

Azpiespazioko \vec{s}_i edozein bektore, $\{\vec{\phi}_k\}_N$ N bektoreen konbinaketa lineala eginez lor daiteke:

$$\vec{s}_i = \sum_{k=1}^N s_{ik} \vec{\phi}_k$$

Edo modu baliokidean:

$$s_i(t) = \sum_{k=1}^N s_{ik} \phi_k(t)$$

s_{ik} koefizienteak \vec{s}_i bektoreen proiektzioak dira, $\{\vec{\phi}_k\}_N$ espazioaren k norabideen gain:

$$s_{ik} = \langle \vec{s}_i, \vec{\phi}_k \rangle = \int_0^T s_i(t)\phi_k(t)dt$$

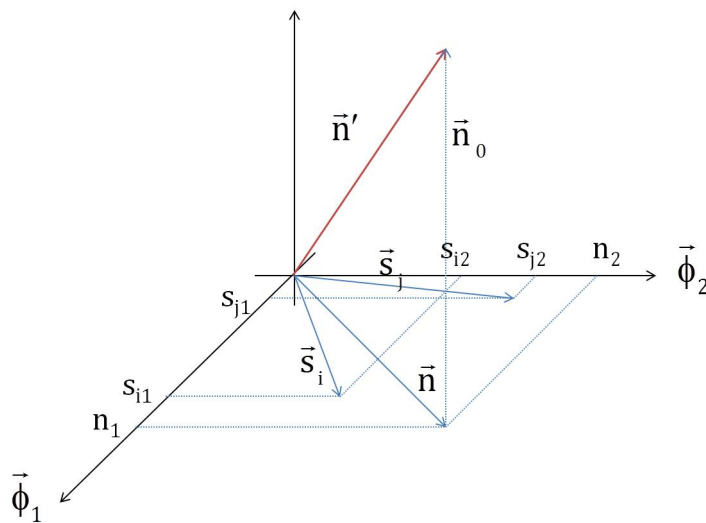
7.1. irudian, bi dimentsioko azpiespazioa marraztu da ($\{\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2\}$ bektoreek osatzen duten plano) eta azpiespazioko $\{\vec{s}_i, \vec{s}_j\}$ edozein bi seinale. Transmittituriko seinaleen osagaien irudikapen grafiko horri espazioko **seinaleen konstelazioa** deritzo.

M seinaleek (edo oinarri ortonormalaren N funtzioek) definitzen duten espazioaren barnekoa ez den bektore bat ($n'(t)$ seinale zaratsua edo \vec{n}' zarataren bektorea) bi bektoreen batura gisa adieraz daiteke: azpiespazioaren gaineko proiektiotik lorturiko \vec{n} bektorearen eta \vec{n}_0 osagaiaren batura gisa, hain zuzen (azkeneko hori azpiespazioarekiko ortogonal da).

$$\vec{n}' = \sum_{k=1}^N n_k \vec{\phi}_k + \vec{n}_0$$

\vec{n}_0 osagaia, seinaleen azpiespazioaren barnekoa ez den seinalearen zatia da. Gure hartzailera ez da osagai horretaz jabetuko (zeina $\{\vec{\phi}_k\}_N$ bektoreen azpiespaziorako diseinatuta egongo

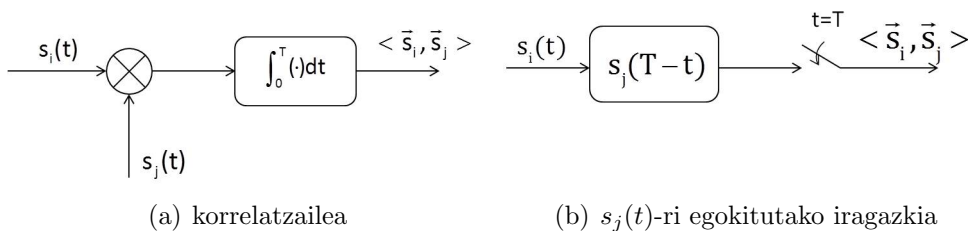
den eta proiektaturiko \vec{n} bektorearen osagaiak ikusteko gai izango den soilik), eta beraz, ez da kontuan edukiko (ikusi 7.1. irudia).



7.1. irudia. \vec{n}' zarataren bektorea, $\vec{\phi}_1 - k$ eta $\vec{\phi}_2 - k$ definituriko seinaleen espazioan proiektatuta.

7.1.2. Korrelatzailea eta iragazki egokitua

$s_k(t)$ seinaleen iraupena T denez, \vec{s}_i eta \vec{s}_j bektoreen arteko biderketa eskalarra $s_i(t)$ eta $s_j(t)$ seinaleen arteko korrelazio gurutzatua da, jatorrian ebaluatuta (hau da, bi seinaleen biderkaduraren beheko azalera). Horregatik, 7.2.(a) irudiko eskemarekin egindako biderketa eskalarraren implementazioari *korrelatzailearekin egindako implementazio* deritzo.



7.2. irudia. Biderketa eskalarraren implementazioak.

Bi seinaleren arteko biderketa eskalarra modu honetan ere garatu daiteke:

$$s_i(t) * s_j(T - t)|_{t=T} = \int_0^T s_i(\lambda) s_j(T - (t - \lambda)) d\lambda \Big|_{t=T} = \int_0^T s_i(\lambda) s_j(\lambda) d\lambda$$

7.2.(b) irudian adierazten den biderketa eskalarraren implementazioari *iragazki egokitua*ren bidezko implementazio deritzo, hartzailea kasu horretan $s_j(t)$ seinaleari egokituta egongo litzateelako eta irteeran balio maximoa lortuko lukeelako $s_i(t) = s_j(t)$ denean.

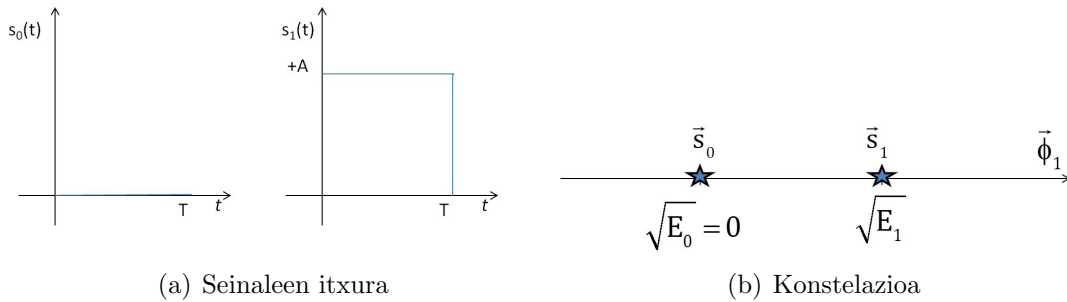
7.1.3. Adibideak

7.1.3.1. Seinale unipolarra

Izan bedi $x(t) = \sum a_k p(t - kT)$ NRZ seinale digital bitar unipolarra, $a_k = \{0, A\}$ izanik. Sinboloei dagozkien seinale transmitituak honako hauek dira (ikusi 7.3.(a) irudia):

$$s_0(t) = 0 \quad 0 \leq t \leq T$$

$$s_1(t) = A p(t) = A \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$



7.3. irudia. Transmitturiko seinaleak oinarri-bandako NRZ seinale digital unipolar batean.

Bi seinale horiek ($M = 2$) dimentsio bakarreko espazioan adieraz daitezke ($N = 1$). Oinarri ortonormaleko $\phi(t)$ seinalea kalkulatzeko, $s_1(t)$ -ren norabide bereko bektore bat lortu behar dugu, baina unitateko norma daukana:

$$\phi(t) = \frac{\vec{s}_1}{\|\vec{s}_1\|} = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_1}} = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

$$s_0(t) = 0$$

$$s_1(t) = \sqrt{E_1} \phi(t)$$

Adibide horren seinalearen espazioa 7.3.(b) irudian adierazi da.

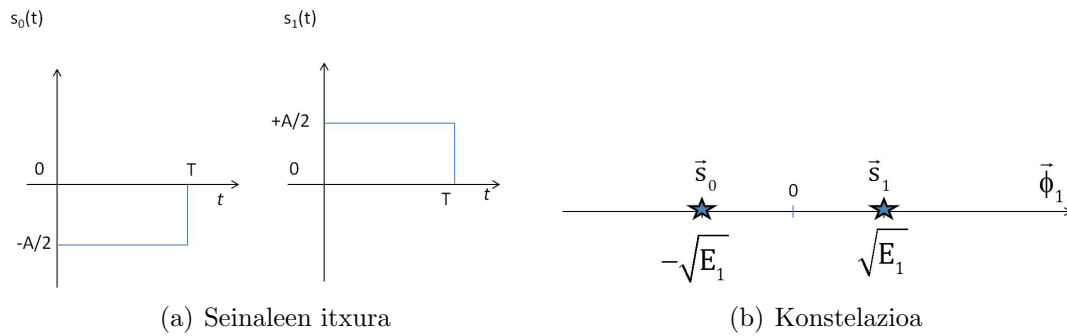
Adibide honetan pulsu errektangularra erabili bada ere transmititu beharreko seinale gisa, garrantzitsua da ikustea 7.3.(b) irudiko adierazpen bera lortuko genukeela $p(t)$ pultsuak beste edozein itxura edukiko balu: RZ pultsuekin edo errektangularrak ez diren pultsuekin, eta baita banda-paseko itxurekin ere. Desberdintasuna E_1 energiaren balioan egongo litzateke. Horrela, adibidez, adierazpen hau baliagarria da OOK modulaziorako, non:

$$s_0(t) = 0$$

$$s_1(t) = A \cos 2\pi f_0 t p(t)$$

desberdintasun bakarra kasu honetan honako hau izanik:

$$E_1 = \frac{A^2}{2} T$$



7.5. irudia. Transmittituriko seinaleak oinarri-bandako NRZ seinale digital polar batean.

Fasearen balio posibleak honako hauek izango dira:

$$\varphi_i = \frac{\pi}{M}(2i + N) \quad i = 0, 1 \dots M - 1$$

$N = (0, 1)$ izanik.

f_0 eramailea sinboloen abiaduraren multiplo osoa baldin bada ($f_0 = \frac{n}{T}$) transmittituriko M seinaleak honako hauek izango dira:

$$\begin{aligned} s_i(t) &= A_c \cos(2\pi f_0 t + \varphi_i) p(t) \\ &= A_c (\cos \varphi_i \cos 2\pi f_0 t - \sin \varphi_i \sin 2\pi f_0 t) p(t) \\ &= A_c (I_i \cos 2\pi f_0 t - Q_i \sin 2\pi f_0 t) p(t) \end{aligned}$$

non I_i eta Q_i oinarri-bandako fase- eta koardatura-osagai digitalen sinboloak diren.

$\cos 2\pi f_0 t$ eta $\sin 2\pi f_0 t$ seinaleak ortogonalak direnez, erraza da ikustea $\{s_i(t)\}$ seinaleek bi dimentsioko espazioa osatzen dutela. Oinarri ortonormala osatzeko, bi seinale hauek aukeratuko ditugu:

$$\phi_1(t) = \frac{\cos 2\pi f_0 t}{\sqrt{\frac{T}{2}}} p(t) \quad \phi_2(t) = -\frac{\sin 2\pi f_0 t}{\sqrt{\frac{T}{2}}} p(t)$$

Aukera honekin:

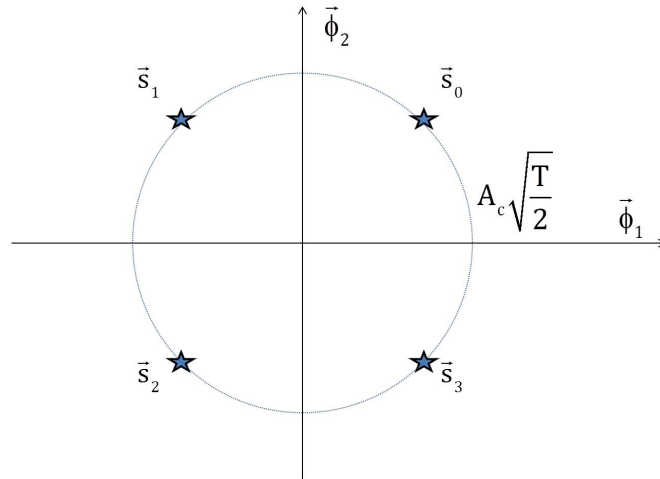
$$s_i(t) = A_c \sqrt{\frac{T}{2}} (I_i \phi_1(t) + Q_i \phi_2(t)) \quad i = 1 \dots M$$

Berehala ikusten da transmittituriko seinale guztiek $E_i = \frac{A_c^2}{2} T$ energia bera daukatela. 7.6. irudian seinaleen konstelazioa adierazi da $M = 4$ (QAM) eta $N = 1$ kasuan.

7.2. Hartzailerik hoberena: ikuspuntu probabilitikoa

7.2.1. MAP irizpidea

Demagun $\{a_i\}_M$ M sinbolo transmittitzen direla $p(a_i) = p_i$ a prioriko probabilitatearekin. A prioriko probabilitateak sinboloak transmittitzeko probabilitateak dira, eta orokorrean $p_i = \frac{1}{M}$



7.6. irudia. QAM kasuaren seinale-espazioaren adierazpena.

balioko dute, hau da, sinboloak probabilitate berekoak edo ekiprobableak izango dira. a_i sinboloa bidali nahi denean, $s_i(t)$ seinalea transmitituko da, p_i probabilitatearekin. Transmitituriko seinaleari sistemaren $n'(t)$ zarata gehituko zaio. $r(t)|a_i$ jasotako seinalea izango da a_i sinboloa transmititzen denean (edo $\vec{r}|a_i$ bektore-interpretazioan):

$$\begin{aligned} \vec{r}|a_i = r(t)|a_i &= s_i(t) + n'(t) = \sum_{k=1}^N s_{ik} \phi_k(t) + \sum_{k=1}^N n_k \phi_k(t) + n_0(t) \\ &= \sum_{k=1}^N (s_{ik} + n_k) \phi_k(t) + n_0(t) = \sum_{k=1}^N r_k |a_i \phi_k(t) + n_0(t) \end{aligned}$$

7.1. atalean ikusi den moduan, zarataren $n_0(t)$ osagaia ez da seinaleen azpiespazioaren barnekoa eta beraz, hartzaileak ezin izango du detektatu eta ez dugu kontuan edukiko.

Jasotako seinalea erabiliz, hartzaileak erabaki beharko du zein izan den M sinbolo posibleetatik transmititu dena. Ikuspuntu estatistikoa batetik, MAP (Maximum A Posteriori) irizpideak ezartzen du zein den \hat{a}_i transmitituriko sinbolo estimatua, zeinak $p(a_i|\vec{r})$ a posterioriko probabilitatea maximizatuko duen. Azken hori modu honetan kalkulatu daiteke, Bayes-en erregela aplikatuz:

$$p(a_i|\vec{r}) = \frac{p(\vec{r}|a_i)p(a_i)}{p(\vec{r})}$$

Eta transmitituriko sinboloaren \hat{a}_i estimazioa aurreko adierazpena maximizatzen duen sinboloa bilatuz egiten da:

$$\hat{a}_i = \max_i \{p(a_i|\vec{r})\} = \max_i \left\{ \frac{p(\vec{r}|a_i)p(a_i)}{p(\vec{r})} \right\}$$

$p(\vec{r})$ transmitituriko sinboloaren araberakoa ez denez, aurreko adierazpena maximizatzea eta honako hau maximizatzea baliokideak dira:

$$\hat{a}_i = \max_i \{p(\vec{r}|a_i)p(a_i)\} \quad (7.2)$$

eta hori da, hain zuzen, *MAP irizpidea*.

Gainera, sinboloak ekiprobableak baldin badira, orduan:

$$\hat{a}_i = \max_i \{p(a_i|\vec{r})\} = \max_i \{p(\vec{r}|a_i)\}$$

Eta horixe hartzen da egiantz handieneko irizpidetzat (*ML* edo *Maximum Likelihood* irizpidea).

7.2.2. Erabaki-eremuak

7.2 ekuazioan $p(\vec{r}|a_i)$ kalkulatzeko, badakigu honako hau betetzen dela:

$$\begin{aligned} \vec{r}|a_i &= \vec{s}_i + \vec{n} = \sum_{k=1}^N (s_{ik} + n_k) \vec{\phi}_k \\ p(\vec{r}|a_i) &= p(\vec{s}_i + \vec{n}) = \prod_{k=1}^N p(s_{ik} + n_k) = \prod_{k=1}^N p(r_k|a_i) \end{aligned} \quad (7.3)$$

$r_k|a_i = s_{ik} + n_k$ zorizko aldagaia gausstarra izango da, n_k gausstarra baita. Haren batezbestekoa eta bariantza honako hauek izango dira:

$$\begin{aligned} m_{r_k|a_i} &= E\{s_{ik} + n_k\} = s_{ik} + E\{n_k\} \\ E\{n_k\} &= E\left\{\int_0^T n(t)\phi_k(t)dt\right\} = \int_0^T E\{n(t)\}\phi_k(t)dt = 0 \\ m_{r_k|a_i} &= s_{ik} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r_k}^2 &= E\{(r_{ik}|a_i - m_{r_k|a_i})^2\} = E\{n_k^2\} = E\left\{\int_0^T n(t)\phi_k(t)dt \int_0^T n(\lambda)\phi_k(\lambda)d\lambda\right\} \\ &= \int_0^T \phi_k(\lambda) \int_0^T E\{n(t)n(\lambda)\}\phi_k(t)dt d\lambda = \int_0^T \phi_k(\lambda) \int_0^T R_n(t-\lambda)\phi_k(t)dt d\lambda \\ &= \int_0^T \phi_k(\lambda) \int_0^T \frac{\eta}{2}\delta(t-\lambda)\phi_k(t)dt d\lambda = \frac{\eta}{2} \int_0^T \phi_k(\lambda) \int_0^T \delta(t-\lambda)\phi_k(t)dt d\lambda \\ &= \frac{\eta}{2} \int_0^T \phi_k^2(\lambda) \int_0^T \delta(t-\lambda)dt d\lambda = \frac{\eta}{2} \int_0^T \phi_k^2(\lambda)d\lambda = \frac{\eta}{2} E_\phi = \frac{\eta}{2} \end{aligned} \quad (7.4)$$

Eta orduan, 7.3 ekuazioan ordezkatur:

$$p(\vec{r}|a_i) = \prod_{k=1}^N p(r_k|a_i) = \prod_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{\eta\pi}} e^{-\frac{(r_k|a_i - s_{ik})^2}{\eta}} = \frac{1}{(\eta\pi)^{\frac{N}{2}}} e^{-\sum_{k=1}^N \frac{(r_k|a_i - s_{ik})^2}{\eta}}$$

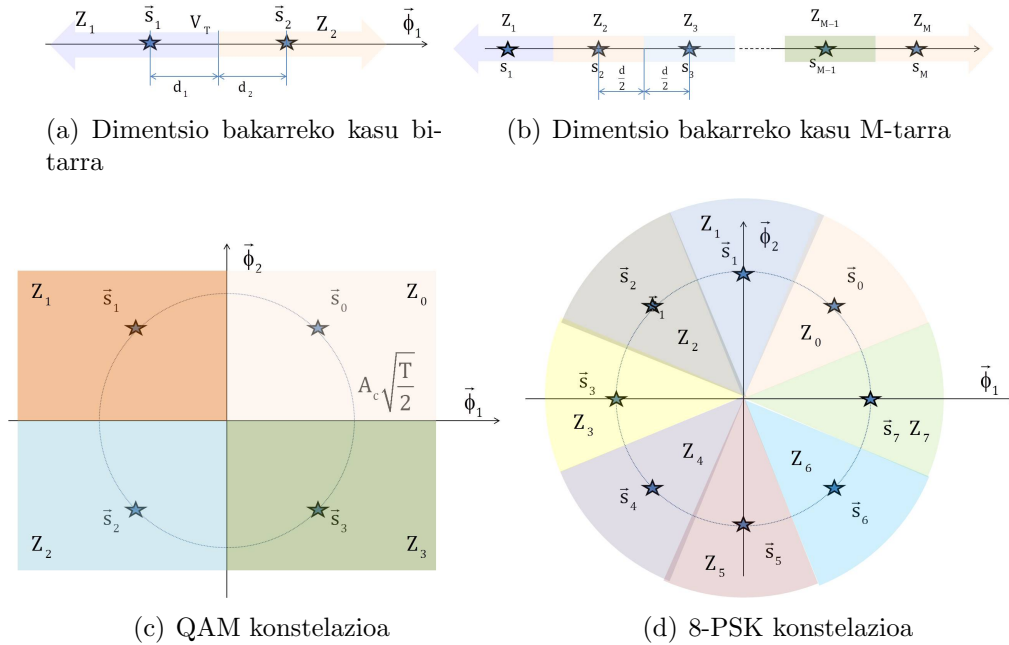
Eta, orain, MAP irizpidea (7.2 ekuazioa) aplikatuz:

$$\begin{aligned}
 \hat{a}_i &= \max_i \{p(\vec{r}|a_i) p(a_i)\} \\
 &= \max_i \left\{ \frac{p(a_i)}{(\eta\pi)^{\frac{N}{2}}} e^{-\sum_{k=1}^N \frac{(r_k|a_i - s_{ik})^2}{\eta}} \right\} = \max_i \left\{ p(a_i) e^{-\sum_{k=1}^N \frac{(r_k|a_i - s_{ik})^2}{\eta}} \right\} \\
 &= \max_i \left\{ \ln p(a_i) - \sum_{k=1}^N \frac{(r_k|a_i - s_{ik})^2}{\eta} \right\} = \min_i \left\{ \sum_{k=1}^N (r_k|a_i - s_{ik})^2 - \eta \ln p(a_i) \right\} \\
 &= \min_i \left\{ \sum_{k=1}^N (r_k|a_i - s_{ik})^2 - \eta \ln p(a_i) \right\} = \min_i \{d_i^2 - \eta \ln p(a_i)\} \tag{7.5}
 \end{aligned}$$

Sinbolo ekiprobableen kasuan, $\eta \ln p(a_i)$ batugaiaren eragina berdina izango da sinbolo guztietan eta orduan, erabakia, jasotako seinalearen eta konstelazioaren sinbolo bakoitzaren arteko distantzia euklidearrean soilik egongo da oinarrituta, ML irizpidearekin bat etorrituz:

$$\hat{a}_i = \max_i \{p(\vec{r}|a_i)\} = \min_i \{d_i^2\} \tag{7.6}$$

7.6 ekuazioan ikus daitekeenez, aukeratutako sinboloa seinale-espazioan hurbilen dagoena izango da. Horrela, konstelazioaren puntu bakoitzari edo a_i sinbolo bakoitzari planoaren Z_i eremu jakin bat dagokio (**erabaki-eremua**). 7.7. irudian, dimentsio bakarreko kasu bitarren (7.7.(a)) eta Mtarren (7.7.(b)) erabaki-eremuak adierazi dira, eta, bi dimentsiokoan, M=4 (7.7.(c)) eta M=8 (7.7.(d)).



7.7. irudia. Erabaki-eremuak.

7.2.3. Erabaki-eremuak kasu ez-ekiprobablean

Orokorrean, sinbolo guztien a prioriko probabilitateak berdinak dira iturriko bitak sasizarata-sekuentziak erabiliz zoriz antolatzen direlako, sinbolo guztien transmisio probabilitateak ber-

dinak izan daitezzen. Horregatik, MAP irizpidea erabiliko dugu distantzia euklidear minimoa soilik kontuan hartuz, transmitituriko sinboloa zein izan den erabakitzeko (ML irizpidea). Atal honetan, sinboloak ekiprobableak ez izateak erabaki-eremuen gain zer eragin duen aztertuko dugu, dimentsio bakarreko sistema bitar batean.

Jasotako \vec{r} seinaletik abiatuta, *a priori*ko $p(a_i) = p_i$ transmisio-probabilitateekin, MAP irizpideak honako hau betetzen duen \hat{a}_i sinboloa aukeratzen du:

$$\sum_{k=1}^N (r_k - s_{ik})^2 - \eta \ln p_i \longrightarrow \text{Minimoa}$$

$$d^2(\vec{r}, \vec{s}_i) - \eta \ln p_i \longrightarrow \text{Minimoa}$$

Ikus daitekeenez, sinbolo bakoitzaren transmisioaren probabilitateak eragina dauka, eta, bide batez, sinbolo bakoitzarekiko distantzia zuzentzen du formulatan; zehazki, distantzia hori txikitzen du sinboloaren probabilitatea handitu ahala (funtzio logaritmikoa hazten den funtzioa da).

Dimentsio bakarreko kasu bitarrean aplikatuz, p_1 eta p_2 transmisio-probabilitateekin, konparatu beharreko bi kantitateak honako hauek izango lirarteke:

$$(r - s_1)^2 - \eta \ln p_1 \leq (r - s_2)^2 - \eta \ln p_2$$

Erabaki-eremuaren muga $r = V_T$ balioan egongo da, berdintasun hau betetzen den balioan:

$$(V_T - s_1)^2 - \eta \ln p_1 = (V_T - s_2)^2 - \eta \ln p_2$$

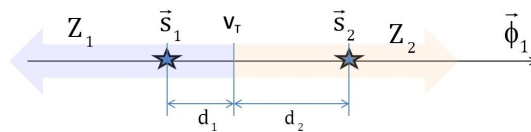
$$(V_T - s_1)^2 - (V_T - s_2)^2 = \eta \ln \frac{p_1}{p_2}$$

$$d_1^2 - d_2^2 = \eta \ln \frac{p_1}{p_2} \quad (7.7)$$

Non d_1 eta d_2 sinbolo bakoitzaren eta erabaki-eremuaren mugaren (erabaki-atari izenez ere ezaguna) arteko distantziak diren, hurrenez hurren.

7.7 ekuaziotik ondoriozta daitekeenez, transmititzeko probabilitaterik handiena daukan sinboloak distantziarik handiena edukiko du atarira, eta, orduan, haren erabaki-eremua handitu egingo da (ikusi 7.8. irudia):

- $p_1 = p_2$ baldin bada $\Rightarrow d_1 = d_2$ eta muga edo ataritik sinboloetarako distantzia berdina izango da
- $p_1 > p_2$ baldin bada $\Rightarrow d_1 > d_2$ eta a_1 sinboloaren erabaki-eremua handitu egiten da
- $p_1 < p_2$ baldin bada $\Rightarrow d_1 < d_2$ eta a_2 sinboloaren erabaki-eremua handitu egiten da



7.8. irudia. V_T erabaki-ataria eta Z_i erabaki-eremuak $p_2 > p_1$ kasuan.

7.3. Errore-probabilitatea kalkulatzeko

Atal honetan, sinbolo baten detekzioan errorea egoteko zer probabilitate dagoen kalkulatu dugu. Transmitturiko a_i M sinboloetan, sinbolo batean errorea egoteko $p(e)$ probabilitatea modu honetan kalkulatu daiteke:

$$p(e) = \sum_{i=1}^M p(e|a_i)p(a_i)$$

non $p(e|a_i)$ errore-probabilitate baldintzatua den, baldintza a_i sinboloa transmititu dela izanik, eta $p(a_i)$ sinboloaren transmisio-probabilitatea den (a prioriko probabilitatea).

$p(e|a_i)$ kalkulatzeko MAP irizpidea aplikatu dugu (7.5 ekuazioa):

$$\sum_{k=1}^N (r_k - s_{ik})^2 - \eta \ln p(a_i) \rightarrow \text{Minimoa}$$

$$d_i^2 - \eta \ln p(a_i) \rightarrow \text{Minimoa}$$

d_i jasotako seinalearen eta a_i sinboloaren arteko distantzia euklidearra izanik, eta $\frac{\eta}{2}$ zarataren bariantza. Irizpide horren arabera, sinbolo bakoitzari Z_i erabaki-eremu jakin bat dagokio. a_i sinboloa transmititzen denean, errorea egongo da jasotako seinalea a_i sinboloari dagokion erabaki-eremutik kanpo dagoenean:

$$p(e|a_i) = p(\vec{r} \notin Z_i)$$

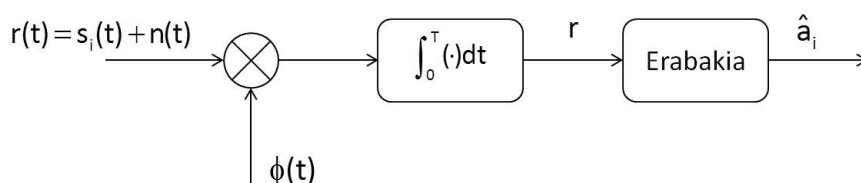
Hurrengo ataletan, horren balioa kalkulatu dugu zenbait konstelaziotan, sinboloak ekuiprobabetzat hartuz.

7.3.1. Dimentsio bakarreko espazioak

7.7.(b) irudiak kasu honen seinale-espazioa adierazten du. Transmitturiko seinaleak honako hauek izango dira:

$$s_i(t) = s_i \phi(t) \quad i = 1 \dots M \quad (7.8)$$

non $s_i = \langle \vec{s}_i, \vec{\phi} \rangle$ den.



7.9. irudia. Dimentsio bakarreko seinale-espaziorako hartzaile hoberena.

Hartzaile hoberenak korrelatzaile bakarra erabiliko du, zeinak jasotako $r(t)$ seinalea $\phi(t)$ bektorearen gain proiektatu duen, 7.9. irudian adierazi den moduan. a_i sinboloa transmititu

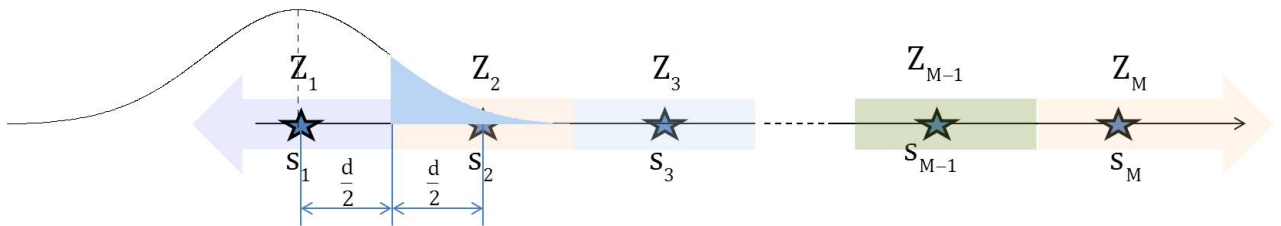
dela kontuan hartuz, jasotako seinalea $s_i(t) + n(t)$ izango da, eta haren r proiektzioa 7.7.(b) irudiko Z_i erabaki-eremuren batean eroriko da. Erabakia hartzeko, orduan, erabaki-atarien balioak edo erabaki-eremuen mugak ezagutu behar dira, eta, r proiektzio hori, a_i sinboloari dagokion Z_i tartetik kanpo erortzen denean, errorea egongo da. a_1 sinboloa kontuan hartuz:

$$p(e|a_1) = p(r|a_1 \notin Z_1) = p(s_1 + n \notin Z_1) = p(n > d/2)$$

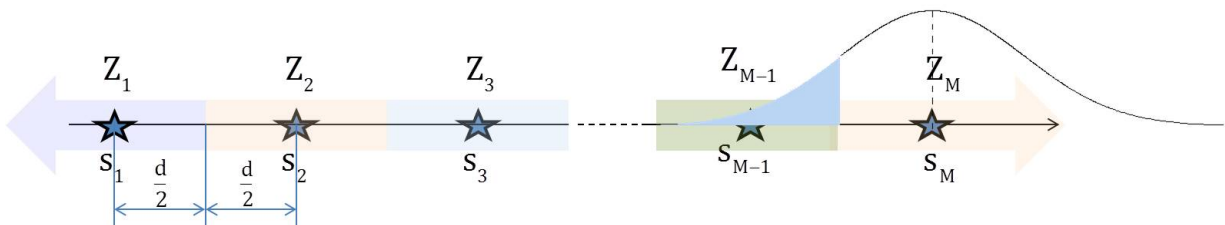
n zorizko aldagai gausstarra da, batezbestekoa zero eta bariantza $\frac{\eta}{2}$ dela, 7.4-ren formularen garapenean ikusi dugun moduan. Horregatik:

$$p(n > d/2) = \int_{d/2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi\eta}} e^{-\frac{n^2}{\eta}} dn = Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{\eta/2}}\right)$$

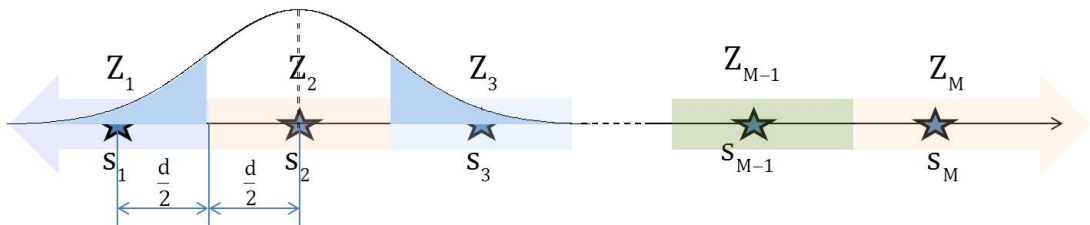
Balio hori 7.10.(a) irudiko kurba gausstarreko azalera ilunduari dagokio.



(a) $p(e|s_1)$



(b) $p(e|s_M)$



(c) $p(e|s_i), i \neq 1, M$

7.10. irudia. Erabaki-eremuak eta errore-probabilitate baldintzatuak dimentsio bakarreko espazio batean.

Modu guztiz simetriko batean, beste muturreko s_M sinboloan:

$$\begin{aligned}
p(e|a_M) &= p(r|a_M \notin Z_M) = p(s_M + n \notin Z_M) \\
&= p(n < -d/2) = \int_{-\infty}^{-d/2} \frac{1}{\sqrt{\pi\eta}} e^{-\frac{n^2}{\eta}} dn = Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{\eta/2}}\right) \\
&= p(e|a_1)
\end{aligned}$$

Barneko sinboloetan, erabaki-eremua bi aldeetatik mugatuta dago $(-d/2, d/2)$ tartean, eta, orduan, orain:

$$\begin{aligned}
p(e|a_i) &= p(r|a_i \notin Z_i) = p(s_i + n \notin Z_i) + p(s_i - n \notin Z_i) \\
&= 2Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{\eta/2}}\right)
\end{aligned}$$

Beraz:

$$\begin{aligned}
p(e) &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M p(e|a_i) = \frac{1}{M} \left(2Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{\eta/2}}\right) + (M-2)2Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{\eta/2}}\right) \right) \\
&= \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{\eta/2}}\right)
\end{aligned}$$

Aurreko gaietan ikusi den moduan, kurba gausstarraren azalera tabulatuta dago (Q funtzioa), eta, hura kalkulatzeko gai honen bukaeran erantsi den irudia erabiliko dugu (7.14. irudia, hain zuzen).

7.3.1.1. Seinale bitarra

Kasu bitarra ($M = 2$) eta dimentsio bakarrekoa ($N = 1$) kontuan hartuz, kasu unipolar eta polarren errore-probabilitatea kalkulatu dugu.

Kasu unipolarra Kasu unipolarrean, honako balio hauek dauzkagu 7.8 ekuazioko koefizienteetan:

$$s_1 = 0, \quad s_2 = \sqrt{E_2}$$

Eta, orduan, batez besteko energia sinboloko $E_s = \frac{1}{2}E_2 = E_b$ izango da, non $E_b = \frac{E_s}{\log_2 M}$ batez besteko energia biteko den ($M = 2$ izanik kasu bitarrean). Bi sinboloen arteko distantzia $d = \sqrt{E_2} = \sqrt{2E_s}$ izango da, eta errore-probabilitatea honako hau izango da:

$$p(e) = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{\eta}}\right) = Q(\sqrt{\gamma_b}) \quad (7.9)$$

non $\gamma_b = \frac{E_b}{\eta}$ parametroak sisteman dagoen seinale/zarata erlazioa adierazten duen. Seinale/zarata erlazioa zenbait modulazio teknikaren arteko konparaketa egiteko erabiliko dugu.

7.9 adierazpena baliozkoa izango da dimentsio bakarreko espazio bitar eta unipolarretan, bai oinarri-bandan, bai banda-paseko sistemetan (adibidez, OOK seinalea). Azkenik, 7.9. iru-diko konfigurazioaren arabera hartzailerik hoherenaren diseinuan, erabaki-sistemak ataria $V_T = \frac{\sqrt{2E_b}}{2}$ balioan edukiko du, eta irizpide honi jarraituko dio erabakia hartzeko:

$$r \underset{a_2}{\overset{a_1}{\leq}} V_T$$

Kasu polarra Kasu polarra kontuan hartuz, 7.8 ekuazioko koefizienteetan honako balio hauek dauzkagu:

$$s_1 = -\sqrt{E_1}, \quad s_2 = \sqrt{E_2} \quad E_1 = E_2 = E_s = E_b$$

Kasu honetan bi sinboloen arteko distantzia $d = 2\sqrt{E_s}$ izango da eta ataria jatorrian egongo da ($V_T = 0$). Errore-probabilitatea:

$$p(e) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{2\gamma_b}\right) \quad (7.10)$$

7.9 eta 7.10 adierazpenak konparatuz ikus daitekeenez, batez besteko energia biteko berdinerako, errore-probabilitatea handiagoa da kasu unipolarrean, kasu polarrean baino, Q funtzioa beherakorra delako. 7.11. irudiak errore-probabilitatea adierazten du bi kasuetan. Baliokide gisa, esan dezakegu seinaleari potentzia handiagoa eman behar zaiola kasu unipolarrean kasu polarrean baino, errore-probabilitate bera lortzeko. Sistema polar batean $p(e)$ jakin bat lortzeko beharrezkoa den batez besteko energia biteko E_b^p baldin bada, kasu unipolarrean $p(e)$ berdina mantentzeko beharrezkoa izango litzatekeen E_b^u batez besteko energia biteko modu honetan kalkula daiteke:

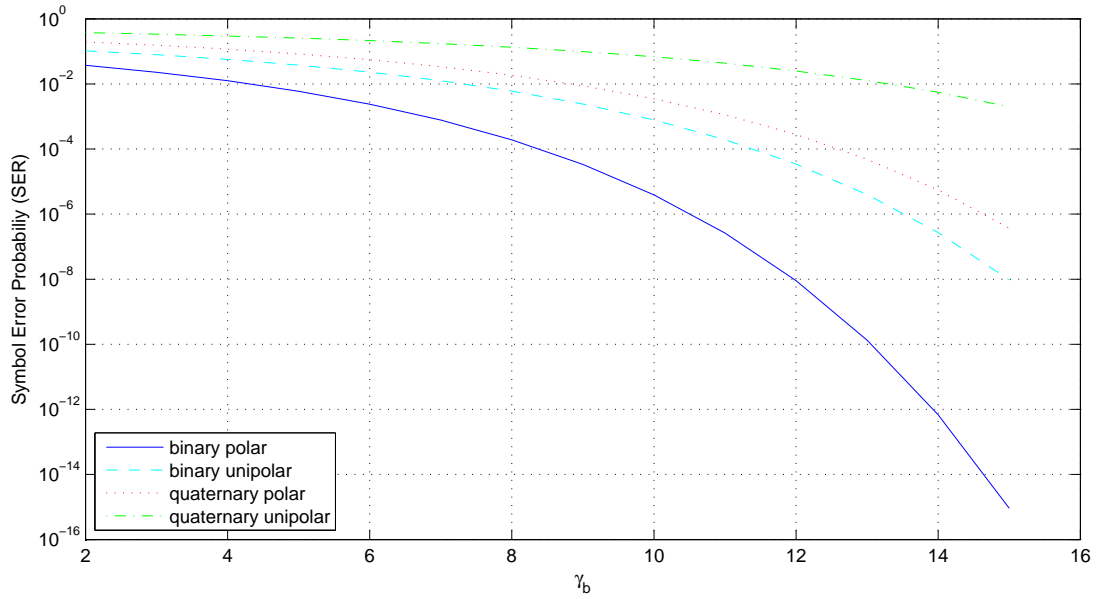
$$\begin{aligned} \frac{E_b^u}{\eta} &= \frac{2E_b^p}{\eta} \\ E_b^u &= 2E_b^p \\ 10 \log E_b^u &= 10 \log E_b^p + 3dB \end{aligned}$$

Hau da, seinale unipolarren potentzia 3 dB handitu behar da kasu polarrean lortzen den errore-probabilitate bera lortzeko.

7.3.1.2. Seinale lautarra

Sistema lautar bat ($M = 4$) kontuan hartuz, kasu unipolar eta polarren errore-probabilitatea kalkulatu dugu .

Kasu unipolarra 7.1 adierazpeneko seinaleen multzoa kontuan har dezagun, $M = 4$ eta $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{E_p}}p(t)$ izanik, zeinaren konstelazioa 7.4. irudian adierazi den. Irudian ikus daitekeenez, aldameneko sinboloen arteko distantzia $d = A\sqrt{E_p}$ da eta batez besteko energia sinboloko honako hau izango da:



7.11. irudia. Kasu bitar eta lautarren eta unipolar eta polarren errore-probabilitatea sinboloko.

$$E_s = \frac{1}{4} A^2 E_p (0 + 1 + 4 + 9) = \frac{7}{2} d^2 = 2E_b$$

non $E_b = \frac{E_s}{\log_2 M}$ batez besteko energia biteko den. Ondoren, sinbolo bakoitzeko errore-probabilitate baldintzatuak kalkulatu ditugu:

$$p(e|a_1) = p(e|a_4) = Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{\eta/2}}\right) \quad \text{muturretako sinboloetan}$$

$$p(e|a_2) = p(e|a_3) = 2Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{\eta/2}}\right) \quad \text{barneko sinboloetan}$$

Horrela, errore-probabilitatea:

$$\begin{aligned} p(e) &= \frac{1}{4} \left(2Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{\eta/2}}\right) + 4Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{\eta/2}}\right) \right) = \frac{3}{2} Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2\eta}}\right) \\ &= \frac{3}{2} Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{7\eta}}\right) = \frac{3}{2} Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{7\eta}}\right) = \frac{3}{2} Q\left(\sqrt{\frac{2}{7}\gamma_b}\right) \end{aligned} \quad (7.11)$$

7.9. irudiko konfigurazioaren arabera hartzailerik hoberenaren diseinuan, erabaki-sistemak

sinboloen bitarteko tarteen erdiko puntuetan edukiko ditu atariak :

$$\begin{aligned} r < \frac{d}{2} &\Rightarrow \hat{a}_1 \\ \frac{d}{2} < r < \frac{3d}{2} &\Rightarrow \hat{a}_2 \\ \frac{3d}{2} < r < \frac{5d}{2} &\Rightarrow \hat{a}_3 \\ r > \frac{5d}{2} &\Rightarrow \hat{a}_4 \end{aligned}$$

$$\text{non } d = \sqrt{\frac{4E_b}{7}} \text{ den.}$$

Kasu polarra Kasu polarra kontuan hartuz, transmitituriko seinaleak honako hauek dira:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= +\frac{A}{2}p(t) & s_3(t) &= -\frac{A}{2}p(t) \\ s_2(t) &= +\frac{3A}{2}p(t) & s_4(t) &= -\frac{3A}{2}p(t) \end{aligned}$$

Eta, orduan, dimentsio bakarreko espazioko proiektzioak (7.8 ekuazioaren arabera) honako hauek izango dira:

$$\begin{aligned} s_1 &= +\frac{A}{2}\sqrt{E_p} & s_3 &= -\frac{A}{2}\sqrt{E_p} \\ s_2 &= +\frac{3A}{2}\sqrt{E_p} & s_4 &= -\frac{3A}{2}\sqrt{E_p} \end{aligned}$$

Bestalde, $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{E_p}}p(t)$ da, kasu unipolarren berdina.

Kasu honetan, sinboloen arteko distantzia $d = A\sqrt{E_p}$ da eta batez besteko energia sinboloko $E_s = \frac{1}{4}A^2E_p \left(2\frac{9}{4} + 2\frac{1}{4}\right) = A^2E_p\frac{5}{4} = \frac{5}{4}d^2 = 2E_b$, non $E_b = \frac{E_s}{\log_2 M}$ batez besteko energia biteko den.

Kasu unipolarrean egin diren urratsak errepikatuz, errore-probabilitatea sinboloko kalkulatu dugu, eta honako hau lortu:

$$\begin{aligned} p(e) &= \frac{1}{4} \left(2Q \left(\frac{d/2}{\sqrt{\eta/2}} \right) + 4Q \left(\frac{d/2}{\sqrt{\eta/2}} \right) \right) = \frac{3}{2}Q \left(\sqrt{\frac{d^2}{2\eta}} \right) \\ &= \frac{3}{2}Q \left(\sqrt{\frac{2E_s}{5\eta}} \right) = \frac{3}{2}Q \left(\sqrt{\frac{4E_b}{5\eta}} \right) = \frac{3}{2}Q \left(\sqrt{\frac{4}{5}\gamma_b} \right) \end{aligned} \quad (7.12)$$

7.11 eta 7.12 adierazpenak konparatuz ikus daitekeenez, batez besteko energia biteko bera lortzeko, errore-probabilitatea handiagoa da kasu unipolarrean kasu polarrean baino, kasu bitarrean gertatzen zen moduan. Oraingoan ere, errore-probabilitate bera mantentzeko, seinale

unipolarraren energiak jaso behar duen gehikuntza kalkulatu dezakegu, kasu polarrekin alderatuta:

$$\begin{aligned}\frac{2E_b^u}{7\eta} &= \frac{4E_b^p}{5\eta} \\ E_b^u &= 2,8E_b^p \\ 10 \log E_b^u &= 10 \log E_b^p + 4,47dB\end{aligned}$$

Hau da, seinale unipolarraren potentzia $4,47dB$ handitu behar da kasu polarrean lortzen den errore-probabilitate bera lortzeko, sistema lautarrean.

7.11. irudiak sinboloko errore-probabilitate horiek adierazten ditu (SER - *Symbol Error Rate*), kasu horietan.

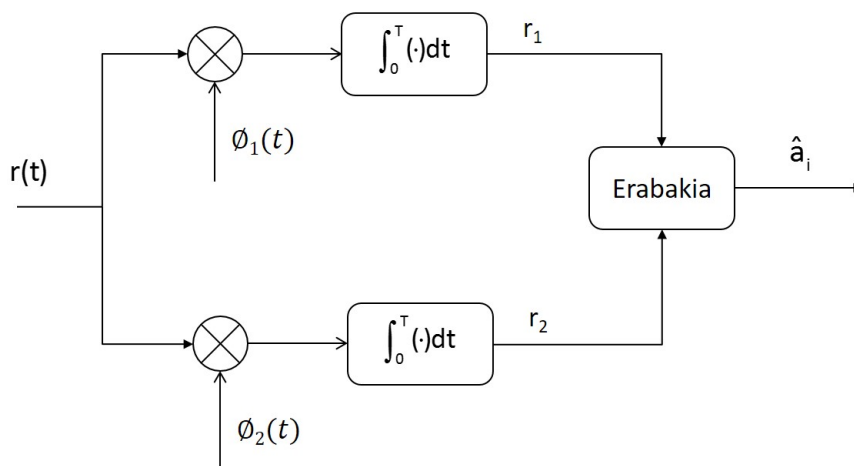
7.3.1.3. Bi dimentsioko espazioak

Bi dimentsioko espazio batean, transmitituriko seinaleak honako hauek izango dira:

$$s_i(t) = s_{i1}\phi_1(t) + s_{i2}\phi_2(t) \quad i = 1 \dots M \quad (7.13)$$

$s_{i1} = \langle \vec{s}_i, \vec{\phi}_1 \rangle$ eta $s_{i2} = \langle \vec{s}_i, \vec{\phi}_2 \rangle$ \vec{s}_i seinaleen proiektzioak izanik $\vec{\phi}_1$ eta $\vec{\phi}_2$ norabideetan.

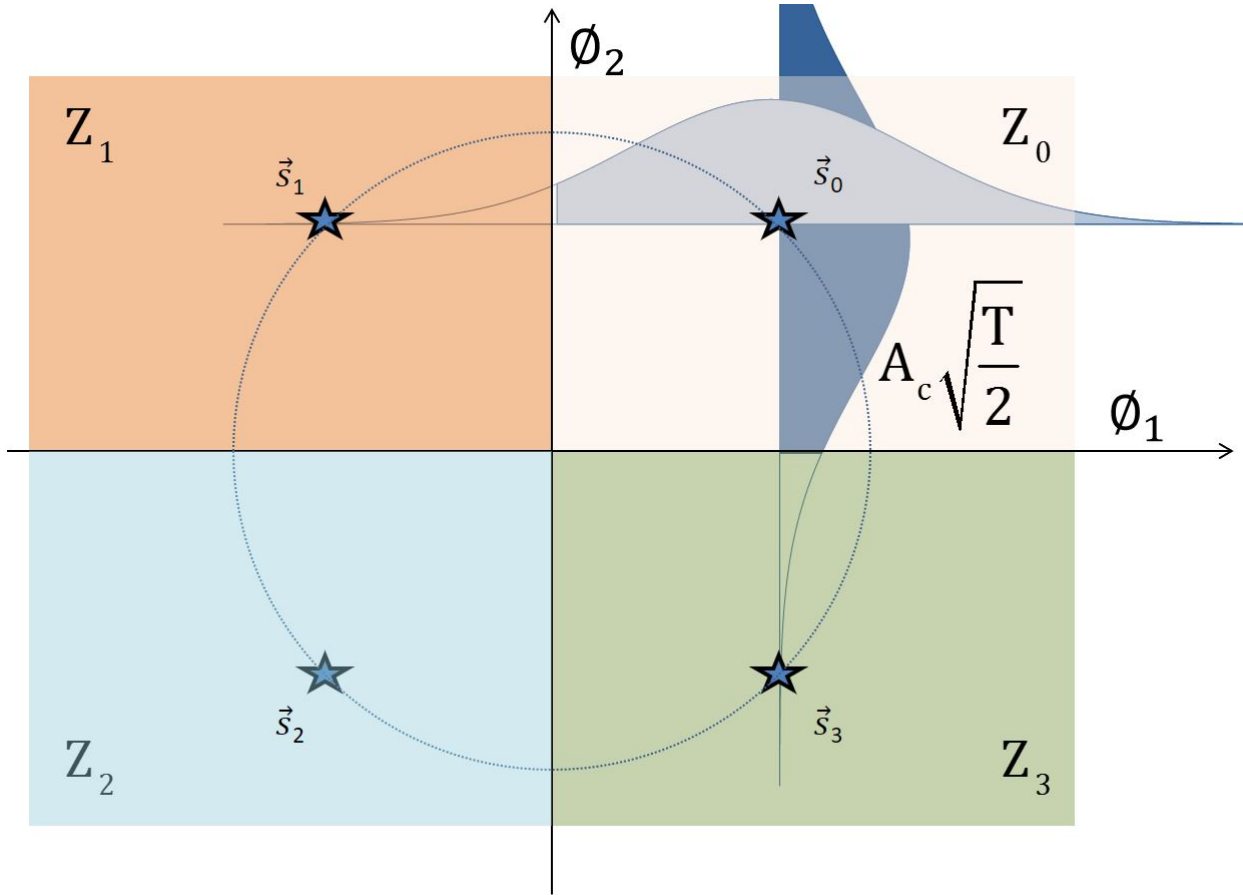
Hartzailerik hoberenak bi korrelatzaile erabiliko ditu kasu honetan, bi dimentsioko espazioaren gaineko r_1 eta r_2 proiektzioak lortzeko (7.12. irudia). Erabakia hartuko duen sistemak erabaki-eremuak (kasu honetan, azalerak) ezagutu beharko ditu eta jasotako seinalea transmitituriko sinboloaren erabaki-eremutik kanpo geratzen denean errorea egongo da. $M=4$ kasuaren errore-probabilitatea kalkulatu dugu.



7.12. irudia. Bi dimentsioko hartzailerik hoberenaren eskema. Erabaki-sistemak sinbolo bakoitzari dagokion erabaki-eremua ezagutu beharko du.

$M=4$ Demagun 7.7.(c) irudiko konstelazioa daukagula.

Demagun \vec{s}_1 sinboloa transmititzen dela. Jasotako seinalea dagokion sinboloaren koadrantetik kanpo (Z_0 eremutik kanpo) aurkitzen denean errorea egongo da. Kasu honetan, errore-probabilitatea kalkulatzeko, errazagoa da lehenbizi erabaki zuzenaren probabilitatea kalkulatzea, zeina $r_1 > 0$ denean eta, aldi berean, $r_2 > 0$ denean agertuko den, 7.13. irudian adierazi den bezala:



7.13. irudia. Errore-probabilitatearen kalkulua bi dimentsioko espazio batean. Detekzio zuzenaren probabilitatea marraztu da norabide bakoitzean.

$$\begin{aligned}
 p(e/s_0) &= 1 - p(c/s_0) = 1 - (p(r_1 > 0)p(r_2 > 0)) \\
 &= 1 - (p(n_1 > -d/2)p(n_2 > -d/2)) \\
 &= 1 - \left(1 - Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{\eta/2}}\right)\right)^2 \\
 &= 2Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{\eta/2}}\right) - \left(Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{\eta/2}}\right)\right)^2
 \end{aligned}$$

$Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{\eta/2}}\right) \ll 1$ dela kontuan edukita, aurreko adierazpena modu honetan idatziko dugu:

$$p(e/s_0) \simeq 2Q \left(\frac{d/2}{\sqrt{\eta/2}} \right)$$

Eta kontuan edukita sinbolo guztiak probabilitate berekoak direla eta seinale-espazioa simetrikoa dela:

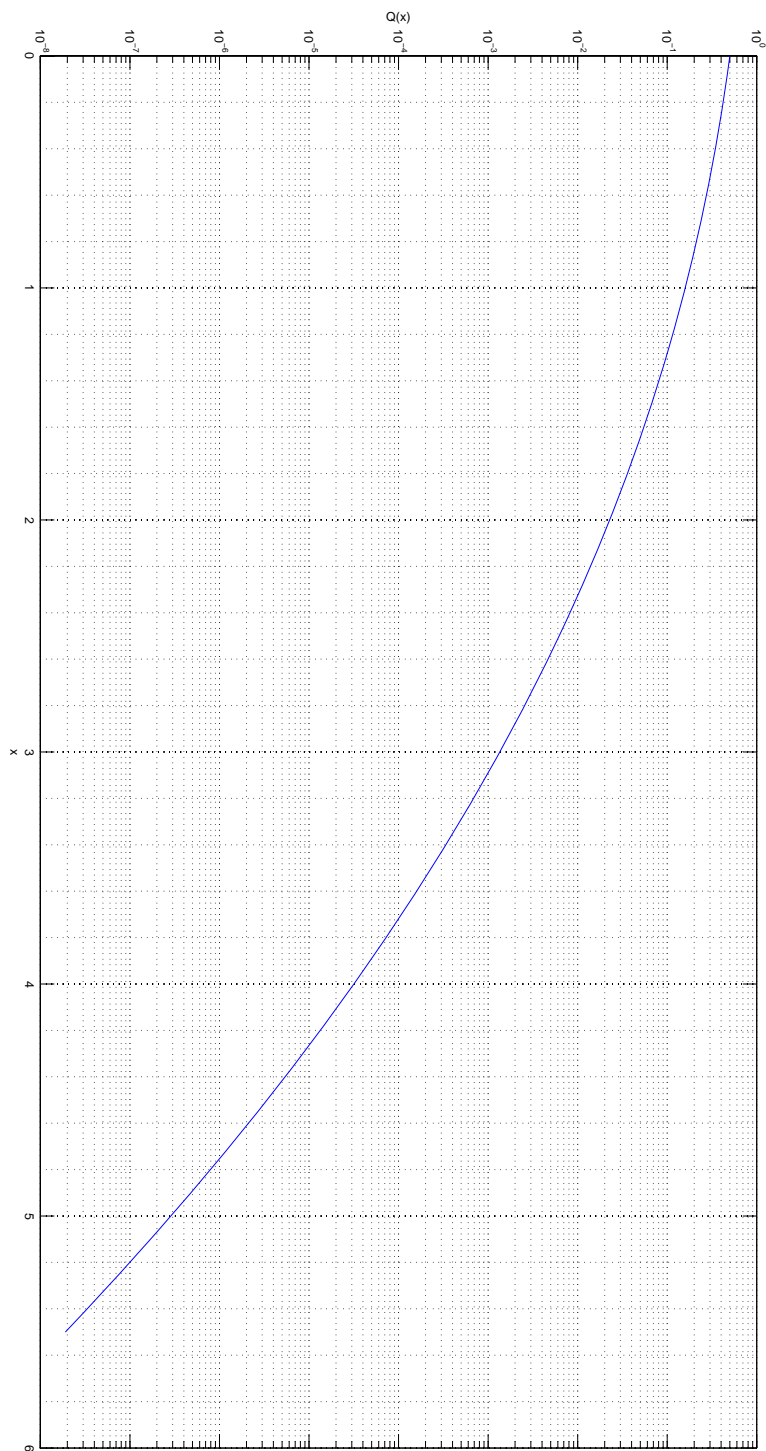
$$p(e) \simeq 2Q \left(\frac{d/2}{\sqrt{\eta/2}} \right)$$

Horrela, adibidez QAM edo QPSK kasuan, seinaleen arteko d distantzia honako hau izanik:

$$d = 2A_c \sqrt{T/2} \cos(\pi/4) = 2\sqrt{E_s} \cos(\pi/4) = \sqrt{2E_s}$$

Errore-probabilitatea sinboloko honako hau izango da:

$$p(e) \simeq 2Q \left(\sqrt{\frac{E_s}{\eta}} \right) = 2Q \left(\sqrt{\frac{2E_s}{\eta}} \right) = 2Q \left(\sqrt{2\gamma_b} \right)$$



7.14. irudia. $Q(x)$ funtzioa: kurba gausstarraren buztanaren azalera.

A. Eranskina

Seinale eta sistemen oinarriko kontzeptuak

A.1. Fourier-en transformatua f erabiliz

Aurreko ikasturteetan, $x(t)$ seinale baten Fourier-en transformatua modu honetan definitu da:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \quad (\text{A.1})$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (\text{A.2})$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (\text{A.3})$$

Definizio honetan, ω aldagaiaren unitatea radian/segundoko da. Komunikazioetan, aldiz, frekuentziaren unitateekin lan egin ohi da (**hertzak**=Hz edo **ziklo segundoko**=s⁻¹), eta, ziklo bat 2 π radianekin bat datorrenez, $\omega = 2\pi f$ da, eta Fourier-en tranformatuaren (zuzenaren eta alderantzizkoaren) adierazpena modu honetan geratzen da:

$$X(f) = X(\omega)|_{\omega=2\pi f} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt = \mathcal{F}\{x(t)\} \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega|_{\omega=2\pi f} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} 2\pi df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

A.4-n ikus daitekeenez, f erabiliz lorturiko transformatuen adierazpenak ω -ren funtzioan dauden (eta aldeztu aurretik ezagunak diren) adierazpenetatik lor ditzakegu, soilik $\omega = 2\pi f$ aldagai-aldaketa eginez. Dena den, kasu berezi batzutan (batez ere δ funtzioa agertzen denean), kontu handiz ibili beharko dugu aldaketa egiteko orduan. Horregatik, tranformatu batzuen eta transformatuaren beraren propietaterik garrantzitsuenen errepaso egingo dugu orain.

A.2. Oinarrizko seinaleen Fourier-en transformatuak. Propietateak

Atal honetan, oinarrizko transformatuetariko batzuk eta, aldi berean, ikasturtean sarritan erabiliko ditugun Fourier-en transformatuaren propietateak errepasatuko ditugu.

A.2.1. Dualtasuna

(A.4) eta (A.5) adierazpenetan ikus daitekeenez, Fourier-en zuzeneko eta alderantzizko transformatuen ezberdintasun bakarra esponentzialaren zeinua da, eta, beraz, honako hau idatz daiteke:

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt = |\lambda = t| = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)e^{-j2\pi f\lambda} d\lambda \\ X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)e^{-j2\pi t\lambda} d\lambda = |\mu = -\lambda| = \int_{-\infty}^{\infty} x(-\mu)e^{j2\pi t\mu} d\mu = \\ &= |\mu = f| = \int_{-\infty}^{\infty} x(-f)e^{j2\pi tf} df = \mathcal{F}^{-1}\{x(-f)\} \end{aligned}$$

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(f)$$

$$X(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} x(-f)$$

A.2.2. Delta funtzioa

$\delta(x)$ Dirac-en delta funtzioa: funtzio berezi bat da, zeinak balio infinitua daukan $x = 0$ -n eta zero balioa duen x -ren beste balioetan. Gainera, haren azalera unitatea balio du:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

Horregatik:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) d\omega &= 1 \\ &= |\omega = 2\pi f| = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(2\pi f) 2\pi df = 1 \end{aligned}$$

Eta, bestalde, hau betetzen denez:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f) df = 1$$

Honako hau ondorioztatzen da:

$$\delta(f) = 2\pi\delta(\omega)|_{\omega=2\pi f}$$

Gogoratuko dugu $x(t)$ funtzio bat delta batez biderkatuz beste delta bat lortuko dugula posizio berean, eta haren azalera, funtzio horrek delta kokatuta dagoen t -ren balioan daukan balioa izango dela:

$$x(t) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$$

Horrela, delta funtzioaren Fourier-en transformatua kalkulatu dugu:

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\begin{aligned} \delta(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} 1 \\ 1 &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \delta(f) \end{aligned}$$

A.2.3. Atzerapenak, desplazamenduak eta funtzio sinusoidalak

Funtzio bati t_0 atzerapen konstantea eragiten bazaio, frekuentzia-eremuan fase lineal bat gehituko diogu transformatuari, hau da, haren transformatua esponentzial konplexuaz biderkatuta geratzen da. Kasurik errazenean:

$$\begin{aligned} \delta(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} 1 \\ \delta(t - t_0) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega t_0} = e^{-j2\pi f t_0} \end{aligned}$$

Eta $x(t)$ seinale baterako:

$$\begin{aligned} x(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \\ x(t - t_0) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)e^{-j\omega t_0} = X(f)e^{-j2\pi f t_0} \end{aligned}$$

Frekuentzia-eremuan desplazamendu bat aplikatzen badugu, esponentzial konplexua denbora-eremuan aurkituko dugu:

$$\begin{aligned} 1 &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \delta(f) \\ e^{j2\pi f_0 t} &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \delta(f - f_0) \end{aligned}$$

Azkeneko horretatik, beraz, honako hau ondoriozta dezakegu:

$$\begin{aligned} \cos(2\pi f_0 t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2} \{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\} \\ \sin 2\pi f_0 t &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2j} \{\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)\} \end{aligned}$$

Frekuentzia-desplazamendua $x(t)$ seinale bati aplikatuz:

$$\begin{aligned} x(t) &\stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(f) \\ x(t)e^{j2\pi f_0 t} &\stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(f - f_0) \end{aligned}$$

Eta aurreko adierazpenetik, honako hau ondoriozta dezakegu:

$$\begin{aligned} x(t) &\stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(f) \\ x(t)e^{j2\pi f_0 t} &\stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(f - f_0) \\ x(t)e^{-j2\pi f_0 t} &\stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(f + f_0) \\ x(t) \cos 2\pi f_0 t &\stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}\{X(f - f_0) + X(f + f_0)\} \\ x(t) \sin 2\pi f_0 t &\stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2j}\{X(f - f_0) - X(f + f_0)\} \end{aligned}$$

Propietate horri *modulazioaren propietate* deritzo, $x(t)$ seinalea behe-pasekoa baldin bada, $X(f) \neq 0$ izanik $|f| < B$ Hz frekuentzia-bandan, sinuaz edo kosinuaz biderkatuz gero banda-paseko seinale bat geratuko zaigulako, $2B$ Hz-eko zabalera daukan frekuentzia-bandan definituta, f_0 balioaren inguruan.

A.2.4. Konboluzioa

$x(t)$ eta $h(t)$ bi seinalaren arteko konboluzioaren eragiketa, $*$ ikurrarekin sinbolikoki adierazten dena, honako adierazpen honen bitartez kalkulatzen da:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)h(\tau)d\tau \quad (\text{A.6})$$

$h(t)$ sistemaren pulsu-erantzuna baldin bada eta $x(t)$ sistemaren sarrera, $y(t)$ sistemaren irteeran lortzen den seinalea izango da.

Denbora-atzerapena Badakigenez, sistema lineal eta aldagaitz batean, sarrera atzeratu baten erantzuna jatorrizko seinalearen erantzun bera izango da, baina kantitate berean atzeratuta. Hau da, $h(t)$ sistemaren sarrera $x(t - t_0)$ baldin bada, orduan:

$$x(t - t_0) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0 - \tau)h(\tau)d\tau = y(t - t_0)$$

Gainera, irteera bera lortuko genuke atzerapena $h(t)$ -ren gain aplikatuko bagenu:

$$\begin{aligned} x(t) * h(t - t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)h(\tau - t_0)d\tau = \{\tau - t_0 = \mu\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - (\mu + t_0))h(\mu)d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0 - \mu)h(\mu)d\mu \\ &= x(t - t_0) * h(t) = y(t - t_0) \end{aligned}$$

Denbora-inbertsioa Demagun orain sistemaren irteera $y(-t)$ dela. Gure helburua orain $x(t)$ edota $h(t)$ -ren gain egin beharreko eragiketak zein diren jakitea izango da, $y(-t)$ konboluzioaren bidez lortzeko:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)h(\tau)d\tau \\ y(-t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(-t - \tau)h(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{A.7}$$

Zein dira A.7-n konboluzionatzen ari diren bi seinaleak? Galdera horri erantzuteko, $x(t) * h(t)$ konboluzioa egiteko beharrezkoak diren eragiketak aztertuko ditugu:

1. t aldagaia τ -z aldatu, eta $x(\tau)$ eta $h(\tau)$ lortu.
2. $x(\tau)$ tenporalki inbertitu: τ aldagaia $-\tau$ -z aldatu, eta $x(-\tau)$ lortu.
3. $x(-\tau)$ $\tau = t$ -n kokatu: τ aldagaia $\tau - t$ -z aldatu, eta $x(-(\tau - t)) = x(t - \tau)$ lortu.
4. $x(t - \tau)h(\tau)$ biderkaduraren beheko azalera kalkulatu.

A.1. taulan, aurreko eragiketak eta zenbait kasutan lortutako adierazpenak laburbiltzen dira.

	1. pausoa $t \rightarrow \tau$	2. pausoa $\tau \rightarrow -\tau$	3. pausoa $\tau \rightarrow \tau - t$	4. pausoa $\int_{-\infty}^{\infty} (\cdot) d\tau$
$x(t) * h(t)$	$x(\tau)$	$x(-\tau)$	$x(t - \tau)$	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)h(\tau)d\tau$
$x(-t) * h(t)$	$x(-\tau)$	$x(\tau)$	$x(\tau - t)$	$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau - t)h(\tau)d\tau$
$x(t) * h(-t)$	$x(\tau)$	$x(-\tau)$	$x(t - \tau)$	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)h(-\tau)d\tau$
$x(-t) * h(-t)$	$x(-\tau)$	$x(\tau)$	$x(\tau - t)$	$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau - t)h(-\tau)d\tau$

A.1. taula. Konboluzioa kalkulatzeko pausoak.

Beraz:

$$x(-t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau - t)h(\tau)d\tau$$

Zeina ez datorren bat bilatutako A.7 adierazpenean lortutakoarekin.

A.7 adierazpenean $\mu = -\tau$ aldagai aldaketa egiten badugu:

$$\begin{aligned} y(-t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(-t + \mu)h(-\mu)d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x(\mu - t)h(-\mu)d\mu \\ &= x(-t) * h(-t) \end{aligned}$$

Hau da, irteera inbertitua lortzeko, bai $x(t)$ bai $h(t)$ inbertitu beharko dira.

A.2.5. Esponentzial erreala

Asko erabiltzen den seinale bat $x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$ esponentzial kausal beherakorra da, non $u(t)$ unitate-eskaloi funtzioa den:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ \frac{1}{2} & t = 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t > 0 \\ \frac{1}{2} & t = 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$x(t)$ seinale mugatua izateko, hau da, funtzio beherakorra izateko, $\alpha > 0$ izan behar da. α -ren balioak esponentzialaren beheranzko abiadura definitzen du, eta, zenbat eta handiagoa izan, hainbat eta azkarrako txikituko da $x(t)$ -ren balioa zerorantz. Haren alderantzizko balioa, $\tau = \frac{1}{\alpha}$, esponentzialaren *denbora-konstante* izenez ezagutzen da, eta balio hori t -ren balioa da zeinerako $x(t)$ seinalea $\frac{1}{e}$ faktorean txikitzen den, jatorrian daukan balioarekiko.

Fourier-en transformatua honako hau da:

$$X(f) = \frac{1}{\alpha + j2\pi f}$$

Transformatu hori irudikatzeko, funtzio konplexu bat denez, lehenbizi transformatuaren modulu eta fasea lortu behar ditugu¹:

$$|X(f)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + (2\pi f)^2}}$$

$$\angle X(f) = -\arctan \frac{2\pi f}{\alpha}$$

A.2.6. Pulsu errektangularra eta pulsu triangeluarra

Pulso errektangularra: pulso errektangularra komunikazioetan asko erabiltzen den iraupen finituko funtzio bat da; alde batetik, iraupen infinituko seinale batean iraupen finituko tarte bat aukeratzen uzten digulako, eta, bestetik, pulsuaren tren baten oinarrizko funtzioa delako, zeina komunikazio digitaletan erabili ohi den seinalerik sinpleena den.

$p(t)$ oinarrizko pulso errektangularra modu honetan definitzen da:

$$p(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

¹Bere alde erreala eta irudikaria ere irudika genezake, baina ez da ohikoena Fourier-en transformatua irudikatzerako orduan.

Eta haren transformatua ω erabiliz:

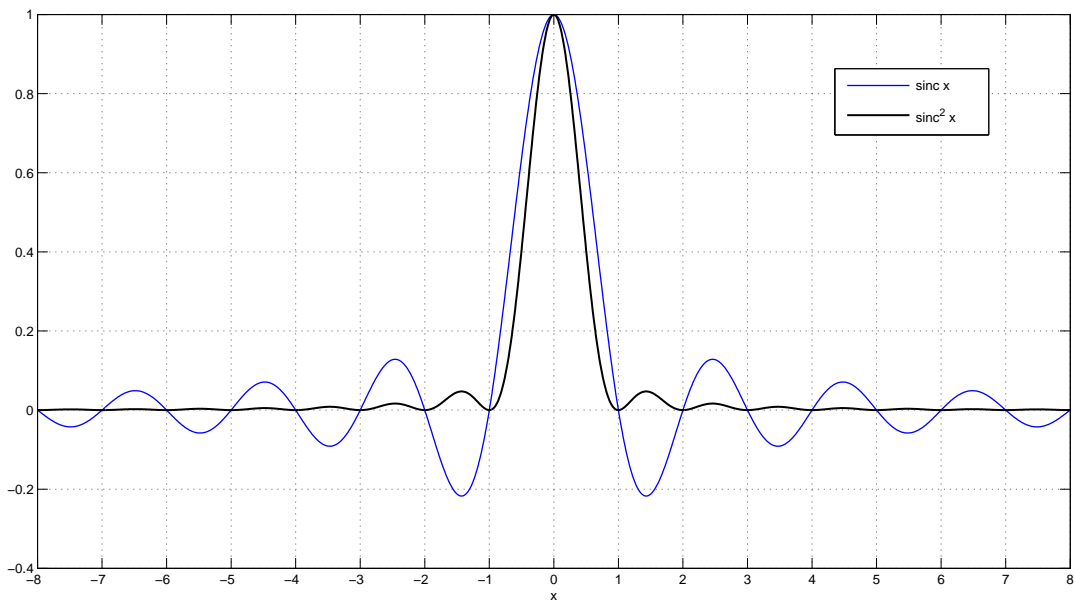
$$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2 \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega}$$

$\omega = 2\pi f$ ordezkatur, Fourier-en transformatua *sinc* funtzioaren bitartez adieraziko dugu f erabiliz:

$$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} T \frac{\sin \pi f T}{\pi f T} = T \operatorname{sinc} fT$$

A.1. irudian adierazitako $\operatorname{sinc} x$ funtzioa asko erabiltzen da, eta modu honetan definitzen da:

$$\operatorname{sinc} x = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$



A.1. irudia. $\operatorname{sinc} x$ eta $\operatorname{sinc}^2 x$ funtzioen adierazpena.

Ikus daitekeenez, sinc funtzioak ($x_i = \pm 1, \pm 2, \dots$) zero periodikoak dauzka zenbaki osoen multzoan (jatorrian izan ezik). T iraupeneko pulstu errektangularraren Fourier-en transformatuak ere zero periodikoak izango ditu baina $\frac{1}{T}$ -ren multiplo osoetan, hau da, frekuentziaren $f_i = \pm \frac{1}{T}, \pm \frac{2}{T}, \pm \frac{3}{T} \dots$ balioetan. Horrela, adibidez, 1 ms -ko iraupena daukan pulstu baten transformatuak 1 kHz -en multiploetan izango ditu zeroak.

Pultsu triangeluarra: pultsu triangeluarra ere iraupen finitukoa da, eta oinarriko pultsu triangeluarra $2T$ iraupenekoa izan ohi da:

$$\Delta\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 + \frac{t}{T} & -T < t < 0 \\ 0 & |t| > T \\ 1 - \frac{t}{T} & 0 < t < T \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} & |t| < T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$

Pultsu triangeluarra bi pultsu errektangularren konboluzioa eginez lor daiteke, bakoitzaren iraupena lortzen den pultsu triangeluarrenaren erdia izanik (triangelu *isoszele* baten kasuan, hau da, jatorriarekiko simetria bikoitia denean):

$$\Delta\left(\frac{t}{T}\right) = \frac{1}{T} \Pi\left(\frac{1}{T}\right) * \Pi\left(\frac{1}{T}\right)$$

Adierazpen horretatik abiatuz eta konboluzioa eremu batean egiteak beste eremuan biderkatzea dakarrela jakinda:

$$\Delta\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} T \operatorname{sinc}^2 fT$$

$\operatorname{sinc}^2 x$ funtzioa [A.1.](#) irudian adierazi da.

Noski, funtzio horrek ere zeroak ditu zenbaki osoen multzoan ($x_i = \pm 1, \pm 2, \dots$), jatorrian izan ezik. $2T$ iraupeneko pultsu triangeluarrenaren transformatuan, zeroak ere agertuko dira $\frac{1}{T}$ -ren multiplo osoetan (f -ren eremuan). Horregatik, 1 ms -ko iraupena daukan pultsu triangeluar batean (hau da, $T = 0,5 \text{ ms}$ baldin bada), Fourier-en transformatuak 2 kHz -ean izango du bere lehenengo zeroa.

Beste alde batetik, funtzioak balio positiboak hartzen ditu soilik eta bigarren mailako lobuluaren anplitudea sinc funtzioaren lobuluena baino txikiagoa da. Horrela, funtzioak zerorantz azkarrago egiten du aldagai independentea hazi ahala.

A.3. Batez besteko balioa

$[a, b]$ bitartean definituta dagoen $x(t)$ funtzio jarraitu baten batez besteko balioa modu honetan definitzen da:

$$x_m = \frac{1}{|a - b|} \int_a^b x(t) dt$$

Hau da, funtzioaren azalera da tarte horretan, tarte horren iraupenaz zatikatuta.

Hala ere, adierazpen hori ezin da zuzenean aplikatu iraupen infinituko seinaleetan.

$x(t)$ seinale baten batez besteko balioa edo denbora-eremuaren batezbestekoa modu honetan definitzen da:

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x(t) dt$$

Seinale periodikoen kasuan, erraza da honako hau frogatzea:

$$\langle x(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt$$

non T seinalearen periodoa den.

A.4. Energia eta potentzia

$x(t)$ seinalearen energia adierazpen honen bidez definitzen da:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

E_x energiaren balioa kantitate finitua duten seinaleei *energia finituko seinale* deritze. Iraupen finitua daukaten seinale guztiak, T tartean mugatuak, energia finitukoak dira. Dena den, baldintza hori ez da beharrezkoa, iraupen infinitua daukaten seinale askok baitaukate energia kantitate finitua. Adibidez, $x(t) = Ae^{-\alpha t}u(t)$ esponentzial erreal beherakorrerako:

$$E_x = \int_0^{+\infty} A^2 e^{-2\alpha t} dt = \frac{A^2}{2\alpha} \quad (\text{A.8})$$

Bestalde, $x(t)$ seinalearen potentzia adierazpen honen bitartez definitzen da:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt \quad (\text{A.9})$$

P_x potentziaren balioa kantitate finitua duten seinaleei *batez besteko potentzia finituko seinale* deritze.

Berehala ikusten da energia finituko seinale baten potentzia zero izango dela ($P_x = 0$).

Batez besteko potentzia finituko seinaleen kasu partikular oso garrantzitsu bat seinale periodikoa da. [A.9](#) adierazpenetik abiatuta, eta $T = NT_0$ ordezkatuz (T_0 seinalearen periodoa izanik):

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT_0} \int_T |x(t)|^2 dt \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT_0} N \int_{T_0} |x(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

A.5. Korrelazio gurutzatua eta autokorrelazioa

Demagun $x(t)$ eta $y(t)$ energia finituko seinale bi dauzkagula. Bi seinale horien arteko ezberdintasuna ebaluatzeko, euren arteko diferentziaren energia kalkulatzeko estrategia ona izan daiteke:

$$\begin{aligned} d^2(x(t), y(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - y(t)|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt + \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt - 2 \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t) dt \\ &= E_x + E_y - 2 \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t) dt \end{aligned}$$

Horrela, bi seinalaren biderkaduraren beheko azalera bi seinale horien arteko antzekotasunaren neurri on bat izan daiteke. Dena den, neurketa horrek bi seinaleak lerrokatuta egotea eskatzen du. Hau da, ez du kontuan hartzen bi seinalaren itxuren arteko antzekotasuna alda daitekeela seinale bati desplazamendu jakin bat aplikatzen bazaio. Hori da, hain zuzen, korrelazio gurutzatuaren funtzioak egiten duena:

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t - \tau) dt = \{t - \tau = t'\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t' + \tau)y(t') dt' \end{aligned}$$

Seinale konplexuetan, energia finituko bi seinalaren arteko korrelazio gurutzatuaren funtzioaren definizioa honako hau da:

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t - \tau) dt = \{t - \tau = t'\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t' + \tau)y^*(t') dt' \end{aligned}$$

Batez besteko potentzia finituko seinaleetan, definizioa antzekoa da:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x(t + \tau)y^*(t) dt$$

Eta seinaleak periodikoak baldin badira:

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_T x(t + \tau)y^*(t) dt$$

non T , $x(t)$ eta $y(t)$ seinale periodikoen T_x eta T_y periodoen multiplo komuna den.

Autokorrelazio-funtzioa $x(t)$ seinale baten korrelazio-funtzioa da, seinale berarekin. Energia finituko seinaleetan:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau)x^*(t) dt$$

Batez besteko potentzia finituko seinaleetan, definizioa antzekoa da:

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x(t + \tau)x^*(t)dt$$

Eta seinalea periodikoa baldin bada:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_T x(t + \tau)x^*(t)dt$$

non T , seinalearen periodoa edo periodoaren multiplo bat den.

Funtzio horrek seinale baten antzekotasuna τ -n desplazaturiko bertsio batekin neurtuko du.

Autokorrelazio-funtzioaren propietateak

- Autokorrelazio-funtzioaren jatorriko balioa seinalearen energia da:

$$R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = E_x$$

Batez besteko potentzia finituko seinaleetan:

$$R_x(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt$$

Eta seinale periodikoetan:

$$R_x(0) = \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt$$

Batez besteko potentzia finituko seinaleetan, autokorrelazioaren jatorriko balioa seinalearen potentzia da:

$$R_x(0) = P_x$$

- Autokorrelazio-funtzioak simetria hermitikoa dauka:

$$R_x(\tau) = R_x^*(-\tau)$$

Seinalea erreala baldin bada, orduan autokorrelazio-funtzioa ere erreala izango da, eta simetria bikoitua edukiko du:

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau)$$

- Autokorrelazio-funtzioak maximo absolutua dauka jatorrian:

$$R_x(0) \geq |R_x(\tau)|$$

Berdintasuna, $\tau = \tau_0$ -ren balio jakin batean, autokorrelazio-funtzioa periodikoa denean gerta daiteke soilik (hau da, jatorriko maximoa $\tau = \tau_0$ balio jakin batean lortzen bada ere, orduan, τ_0 -en multiploetan ere lortuko da).

- Autokorrelazio-funtzioaren Fourier-en transformatuari **energiaren dentsitate-espektroa** deritzo (energia finituko seinaleetan) edo **potentziaren dentsitate-espektroa** (batez besteko potentzia finituko seinaleetan):

Energia finituko seinaleetan:

$$R_x(\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S_x(f) = |X(f)|^2$$

Batez besteko potentzia finituko seinaleetan:

$$R_x(\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2$$

A.5.1. Parseval-en teorema

Energiari aplikaturiko Parseval-en teorema honako hau ezartzen du (energia finituko seinaleetan):

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

Izan ere:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f) e^{-j2\pi ft} df \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \right) df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \end{aligned}$$

A.6. Oinarrizko Fourier-en transformatuen taula

Fourier-en transformatuen taula	
$x(t)$	$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$
$x(t - t_0)$	$X(f)e^{-j2\pi ft_0}$
$x(t)e^{j2\pi f_0 t}$	$X(f - f_0)$
$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{f}{a}\right)$
$X(t)$	$x(-f)$
$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$(j2\pi f)^n X(f)$
$(j2\pi t)^n x(t)$	$\frac{d^n X(f)}{df^n}$
$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2} X(0)\delta(f)$
$\delta(t)$	1
1	$\delta(f)$
$\frac{1}{\pi t}$	$-j \operatorname{sign}(f)$
$u(t)$	$\frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k\frac{1}{T})$
$\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$	$T \operatorname{sinc}(fT)$
$2B \operatorname{sinc}(2Bt)$	$\Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$
$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$	$T \operatorname{sinc}^2 fT$
$B \operatorname{sinc}^2(Bt)$	$\Lambda\left(\frac{f}{B}\right)$
$\cos 2\pi f_0 t$	$\frac{1}{2} \{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\}$
$\sin 2\pi f_0 t$	$\frac{1}{2j} \{\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)\}$
$e^{-\alpha t} u(t)$	$\frac{1}{\alpha + j2\pi f}$
$e^{-\alpha t }$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$

B. Eranskina

Gomendatutako liburuak

Liburu honetan landutako oinarritzko kontzeptuak sakonkiago aztertzen dituen bibliografia ugaria da komunikazioen arloan, ikasleren batek interesik baleuka. *Komunikazioaren Teoria* terminoaren bilaketa bat eginenez gero, liburu eta dokumentu gehienak zentzu soziologiko edo psikologikoaren ingurukoak izango dira eta nahiko arraroa izango da interesatzen zaigun ingeniari-za ingurukoak aurkitzea. Behar ditugun liburuak aurkitzeko, bilaketan hobe da *komunikazio sistemak*, *komunikazio digitalak* edo *transmisioa* terminoak sartzea.

Liburu honen lehenengo gaia komunikazioaren oinarriari buruzkoa da eta proposaturiko edozein libururen sarrera-gaia izan ohi da. [1]-en (ingelesez) edo [2]-en (gaztelaraz) komunikazioaren sistemaren eredia testuinguruan jartzen da, telekomunikazioen esparru orokorrean. Horrez gain, telekomunikazioen historian XIX. eta XX. mendeetan emandako gertakaririk azpimagarrienak deskribatzen ditu. Bestalde, [3]-ren 2. gaian dezibel, ahuldura eta distortsio kontzeptuak aurkituko ditugu, hainbat adibideen bidez azalduta. Gainera, gai honek Señale eta Sistemen errepeaso barne hartzen du (liburu honen A. eranskinean).

2. Zoritzko seinale eta prozesuak gairako, zeinean prozesu estokastikoak aurkezten diren, [4] liburuak estatistikaren oinarritzko kontzeptuak errepeasatzeko eta prozesu geldikorak eta euren propietateak lantzeko beharrezkoa den guztia dauka. Gainera, liburu honek Matlab kodea erabiltzen duten adibideak dauka. [5]-ren 4. gaia osoa da eta liburu honetan lantzen den gai-zerrendarekin erlazio estuagoa dauka. 4. gai honek 3. Seinaleen transmisioa zaratarekin gai osoa barne hartzen du ere.

[1]-en komunikazio sistemen zaratare buruz aritzen da (3. Seinaleen transmisioa zaratarekin), liburu honetan aritzen garen antzeko modu batean. Ikasleren batek interesik baleuka, bere ezaguerak osa ditzake zarataren analisiagaz pulsu baten transmisioan, arlo hau liburuan ez baita lantzen. Zarataren inguruko beste ariketa erraz batzuk ikas daitezke ere [6]-en.

Hilbert-en transformatua eta banda-paseko seinale eta sistemen tratamendua [5]-en 2. gaian egiten da modu errazean eta liburu honetan egiten dugun antzeko modu batean. Gainera, bertan zenbait modulazio analogiko azaltzen dira. Azkeneko hauek tresna hauen bitartez modu egokian definituta geratzen dira. Banda-paseko prozesuei dagokien atala liburu horren 4. gaian lantzen da.

5. Oinarri-bandako komunikazio digitalak gaia [1]-en 11. gaian ikas daiteke, azkeneko honetan zarataren eta erroreen tratamendua egiten bada ere, gure liburuan azkeneko gaian egiten den bitartean. Gai hau [1]-en osatu egiten da sistema berdintzaileen (edo ekualizadoreen) diseinuagaz, sinboloen arteko hondakin-interferentzia deusestatzeko. Azkeneko hau oinarritzko teknika garrantzitsu bat da eta ez da liburu honetan lantzen. [1]-en hurbilketa jarraitzen dugu ere (14. gaiko lehenengo atalean) digitalki modulaturako banda-paseko seinaleen deskribapena

eta espektro-analisia egiteko (6. Modulazio digitalak gaia).

Azkenik, 7. Zarata komunikazio digitaletan gaia [5]-en 7. gaian ikas daiteke, bereziki seinale-espazioaren deskribapena eta hartzailerik hoberenaren diseinua, baina baita errore-probabilitatearen kalkulua ere.

Bibliografía

- [1] Paul B. Crilly A. Bruce Carlson, *Communication Systems. An Introduction to Signals and Noise in Electrical Communication.*, McGraw-Hill, 2010.
- [2] Janet C. Rutledge A. Bruce Carlson, Paul B. Crilly, *Sistemas de comunicación. Una introducción a las señales y el ruidos en las comunicaciones eléctricas.*, McGraw-Hill, 2007.
- [3] Leon W. Couch, *Sistemas de comunicación digitales y analógicos*, Pearson, Prentice Hall, 2008.
- [4] John A. Gubner, *Probability and Random Processes for Electrical and Computer Engineers.*, Cambridge University Press, 2006.
- [5] Simon Haykin, *Digital Communication Systems*, Wiley, 2014.
- [6] Ferrer G. Stremler, *Introduction to Communication Systems*, Addison Wesley, 1990.

UNIBERTSITATEKO ESKULIBURUAK
MANUALES UNIVERSITARIOS

INFORMAZIOA ETA ESKARIAK • INFORMACIÓN Y PEDIDOS

UPV/EHUko Argitalpen Zerbitzua • Servicio Editorial de la UPV/EHU
argialetxea@ehu.eus • editorial@ehu.eus
1397 Posta Kutxatila - 48080 Bilbo • Apartado 1397 - 48080 Bilbao
Tfn.: 94 601 2227 • www.ehu.eus/argitalpenak

eman ta zabal zazu



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea