



DOKTORETZA-TESIA

Zurruntasun-Indar metodoaren inplementazioa konpositeen saiakuntza mekanikoetan

Nagore Insausti Irastorza
Donostia - San Sebastián, 2019ko apirilean

ESKERRAK

Lehenik eta behin Faustino Mujika Doktoreari eskerrak eman nahi dizkiot, doktoretza-tesi hau burutzeko aukera eskaintzeagatik eta bidean izandako momentu gazi-gozoetan emandako laguntza eta gomendioengatik.

Gipuzkoako Ingeniaritza Eskolako nire saileko lankideei ere eskertu nahi diet, batez ere Itziar Adarragari, Ainhoa Arreseri, Gustavo Vargasi eta Javier Urruzolari, urte hauetan emandako laguntzagatik.

Aitari eta amari, anaiari, familiakoei eta lagunei, hor egoteagatik eta eskaini didazuen guztiagatik. Landa-Alustiza familiari, zuetako beste bat banitz bezala onartu nauzuelako.

Bereziki etxekoei, Mikeli, zure pazientziagatik eta maitasunagatik, eta nire bi semeei, milesker Amets eta Oihan ama izateko aukera eman didazuelako eta zuekin ikasten ari naizen guztiagatik.

Nire eskerrik beroenak, modu batean edo bestean bidaia honetan bidelagun izan ditudan guztiei.

LABURPENA

Ikerkuntza lan honetan, tentsioetan eta desplazamenduetan oinarritutik elementu finitu en metodoa aplikatu da laminatu konpositeen saiakuntza mekanikoen analisia egiteko. Lehenengo lau nodoko elementu laukizuzen orokoren ekuazioak lortu dira. Ekuazio horiek Matlab-en implementatu dira eta hegala-habe baten analisian eta bi kontrako indarren eraginpean dagoen eratzun zirkular batetan aplikatu dira. Elementu finitu en analisiak zurruntasun metodoa, desplazamenduetan oinarritutikoa, eta zurruntasun-indar metodoa, tentsioetan eta desplazamenduetan oinarritutikoa, erabiliz egin dira. Ondoren emaitza numerikoak hurbilpen analitikoekin alderatu dira. Bi kasu hauetan zurruntasun-indar metodoaren bidez lorturiko emaitzak hurbilago daude emaitza analitikoetatik zurruntasun metodoaren bidez lorturikoak baino. Eratzun zirkularren kasuan metodo bat edo bestea erabiliz errore erlatibo jakin bat lortzeko elementuen arteko ratioa magnitude-ordena bat handiagoa da zurruntasun metodoaren kasuan zurruntasun-indar metodoaren baino.

Zurruntasun-indar metodoarekin problema konplexuagoen analisia egiteko helburuarekin elementu finitu en Abaqus programa komertzialean kalkuluak zurruntasun-indar metodoa erabiliz egin ahal izateko azpirrutinen kodeak idatzi dira. Azpirrutinak erabiliz norabide bakarreko laminatu konposite batez osaturiko eta erdian zulo zirkular bat duen plaka baten analisia egin da, tentsio kontzentrazioak dauden eremuetan ere zurruntasun-indar metodoa zurruntasun metodoa baino egokiagoa den aztertu asmoz. Laminatu konpositeen zuntzaren eta matrizearen arteko itsaspenaren analisia eta sekzio aldakorreko habe batena ere egin dira. Problema desberdin hauetan lorturiko emaitzak ez dira uste bezain onak izan.

Ondoren, hiru-puntuko makurdura saiakuntza birtualak egin dira. Saiakuntza horietan materialaren propietateak sarrera balio moduan sartu dira elementu finitueng analisian eta lorturiko emaitzak modelo analitikoak erabiliz tratatu dira, irteerako materialaren propietateak lortzeko, esperimentalki egiten den moduan. Sarrerako balioen eta irteerako balioen artean adostasun egokia lortu da.

Habe landatu bikoitzeko saiakuntza simulatu da elementu finituak erabiliz eta karga eta desplazamendu datuak erabiliz lortzen den sistemaren malgutasunaren bidez pitzadura luzera determinatu da. Ondoren emaitzak hainbat autorek proposaturiko soluzio analitikoekin alderatu dira. Horrez gain, energia askatze tasa kritikoa numerikoki kalkulatu da hiru metodo desberdin erabiliz: deformazio energiaren aldaketa, bi urratsen hedapen prozedura eta azaleren metodoa. Hiru metodo horien bidez lorturiko emaitzak ere analitikoekin bat datozen.

Azkenik, zuntzez errefortzatutako konpositez eginiko T bikoitza habeen makurdura eta ebakidura modulueng analisian konpresio eta trakzio modulueng arteko desberdintasuna kontuan hartu da. Ardatz neutroaren kokapena analitikoki zehaztu da eta ondoren, kokapen hori kontuan izanda, T bikoitza habeen makurdura modulu analitikoa lortu da. Makurdura hutseko eta hiru-puntuko makurdurako saiakuntza birtualak egin dira elementu finituak erabiliz. Modelo numerikoetan bi zati bereiztu dira, konpresio eta trakzio moduluak kontuan hartzeko. Makurdura eta ebakidura modulu numerikoen zehazteko saiakuntza birtualetan lorturiko datuei modelo analitiko bat aplikatu zaie, datu esperimentalekin egiten den moduan. Bukatzeko, emaitza analitiko eta numerikoen alderatu dira.

AURKIBIDEA

1 SARRERA	1
1.1 MATERIAL KONPOSITEAK	1
1.1.1 DEFINIZIOA ETA EZAUGARRIAK	1
1.1.2 LAMINATU KONPOSITEAK	4
1.2 MATERIAL KONPOSITEEN ANALISIRAKO METODOAK	5
1.2.1 METODO ANALITIKOAK	5
1.2.2 METODO ESPERIMENTALAK	6
1.2.3 ZENBAKIZKO METODOAK	6
1.3 TESIAREN HELBURUAK	6
1.4 BIBLIOGRAFIA	7
2 ELEMENTU FINITUEN METODOA	9
2.1 SARRERA	9
2.2 SM METODOAREN FORMULAZIO OROKORRA	12
2.3 ZURRUNTASUN-INDAR METODOA (SFM)	14
2.3.1 SARRERA	14
2.3.2 INDARREN INTERPOLAZIO FUNTZIOAK	16
2.3.3 FORMULAZIO OROKORRA	17
2.3.4 MALGUTASUN MATRIZEAREN DIAGONALIZAZIOA	21
2.4 ELEMENTU OROKORRAK SFM METODOAN	24
2.4.1 LAU NODOKO ELEMENTU ISOPARAMETRIKOAREN SFM METODOKO EKUAZIOAK	24

2.4.2	EKUAZIOAK ORTOGONALIZAZIOA APLIKATZEAN	27
2.4.3	KONPUTAZIO KOSTUA	29
2.5	SM ETA SFM METODOEN ALDERAKETA MATERIAL ORTOTROPOA DUEN HEGAL-HABE BATEAN	32
2.5.1	MATERIAL ORTOTROPOA	32
2.5.2	HEGAL-HABE BATEN ANALISIA	35
2.6	BIBLIOGRAFIA	40
3	SM ETA SFM METODOEN ALDERAKETA ERAZTUN ZIRKULAR BATEAN	45
3.1	SARRERA	45
3.2	BI INDARREN ERAGINPEAN DAGOEN ERAZTUN ZIRKULARRA: HURBILKETA ANALITIKOA	46
3.2.1	TENTSIO ZIRKUNFERENTZIALAK	46
3.2.2	DESPLAZAMENDUAK	47
3.3	ELEMENTU FINITUEN BIDEZKO KALKULUA	50
3.4	EMAITZA ANALITIKO, NUMERIKO ETA ESPERIMENTALAK	51
3.4.1	DESPLAZAMENDUAK: ERAZTUN MEHEA	51
3.4.2	TENTSIOAK: ERAZTUN MEHEA	56
3.4.3	TENTSIOAK: ERAZTUN LODIA	60
3.5	ONDORIOAK	63
3.6	BIBLIOGRAFIA	63
4	SFM METODOAREN IMPLEMENTAZIOA ABAQUSEN	65
4.1	SARRERA	65
4.2	ABAQUSEN IMPLEMENTATURIKO ELEMENTUAK	66
4.2.1	JARRAITURIKO PAUSOAK	66
4.2.2	BARRA ELEMENTUA	67
4.2.3	HIRU NODOKO ELEMENTU TRIANGELUARRA	69
4.2.4	LAU NODOKO ELEMENTU ISOPARAMETRIKO	72
4.2.5	LAU NODOKO ELEMENTU ISOPARAMETRIKO AXISIMETRIKO	79
4.3	ABAQUSEN SFM METODOAREKIN KALKULATZEKO JARRAITU BEHARREKO PROZEDURA	82
4.4	ADIBIDEAK	83
4.4.1	ERDIAN ZULO ZIRKULARRA DUEN PLAKA BATEN ANALISIA	83
4.4.2	ZUNTZAREN ETA MATRIZEAREN ARTEKO ITSASPENAREN ANALISIA KONPOSITETAN	88

4.4.3	SEKZIO ALDAKORRA DUEN HABEA	95
4.5	ONDORIOAK	97
4.6	BIBLIOGRAFIA	97
5	HIRU-PUNTUKO MAKURDURA SAIAKUNTZA	101
5.1	SARRERA	101
5.2	MAKURDURA ETA EBAKIDURA MODULUAK HIRU-PUNTUKO MAKURDURA SAIAKUNTZAN	102
5.3	BIBLIOGRAFIA	106
6	KONPOSITEEN LAMINARTEKO HAUSTURA I MODUAN ELEMENTU FINITUAK ERABILIZ	107
6.1	SARRERA	107
6.2	MOTIBAZIOA	111
6.3	PROZEDURA ESPERIMENTALAREN OINARRI ANALITIKOA	113
6.4	ANALISI NUMERIKOA ETA EMAITZAK	116
6.4.1	MAKURDURA SAIAKUNTZAK	116
6.4.2	DCB SAIAKUNTZAKO DESPLAZAMENDUAK ETA TENTSIOAK	122
6.4.3	PITZADURA LUZERA	129
6.4.4	ENERGIA ASKATZE TASA	131
6.5	ONDORIOAK	135
6.6	BIBLIOGRAFIA	136
7	KONPRESIO ETA TRAKZIO MODULU DESBERDINTASUNAREN ERAGINA PULTRUSIOZKO T-BIKOITZETAN	143
7.1	SARRERA	143
7.2	HURBILKETA ANALITIKOA	146
7.2.1	TRAKZIO, KONPRESIO ETA MAKURDURA MODULUEN ARTEKO ERLAZIOA	146
7.2.2	MAKURDURA MODULUA ZEHAZTEA MAKURDURA HUTSEAN	151
7.3	ANALISI NUMERIKOA	153
7.3.1	SARRERAKO BALIOAK	153
7.3.2	MAKURDURA HUTSEAN LORTURIKO EMAITZAK	154
7.3.3	HIRU-PUNTUKO MAKURDURAN LORTURIKO EMAITZAK	156
7.4	ONDORIOAK	160
7.5	BIBLIOGRAFIA	161

8 ONDORIO OROKORRAK	165
9 AURRERA BEGIRA	167
ERANSKINAK	169
A. ERAZTUN ZIRKULARREN ANALISIRAKO KODEA.....	169
B. BARRA ELEMENTUAREN KODEA	176
B.1. DIMENTSIO BAKARREKO BARRA ELEMENTUA (SM)	176
B.2. BI DIMENTSIOKO BARRA ELEMENTUA (SM)	178
C. BI DIMENTSIOKO ELEMENTU TRIANGELUARRAREN KODEA ..	180
C.1. SM METODOA	180
C.2. SFM METODOA	184
D. BI DIMENTSIOKO LAU NODOKO ELEMENTU ISOPARAMETRIKOAREN KODEA.....	189
D.1. SM METODOA ETA MATERIAL ISOTROPOA	189
D.2. SFM METODOA ETA MATERIAL ISOTROPOA	194
D.3. SM METODOA ETA MATERIAL ANISOTROPOA	201
D.4. SFM METODOA ETA MATERIAL ANISOTROPOA	206
D.5. SFM METODOA, DEFORMAZIO EGOERA LAUA ETA MATERIAL ANISOTROPOA	213
D.6. SFM METODOA, MATERIAL ISOTROPOA ETA ELEMENTU AXISIMETRIKOA	221
D.7. TENTSIOAK KOORDENATU POLARRETAN	228
E. SARRERAKO DATUEN FITXATEGIAK.....	230
E.1. ERDIAN ZULO ZIRKULARRA DUEN PLAKA NORABIDE BAKARREKO TRAKZIOPEAN	230
E.2. ZUNTZAREN ETA MATRIZEAREN ARTEKO ITSASPENAREN ANALISIA KONPOSITETAN	232
E.3. SEKZIO ALDAKORRA DUEN HABEA	234

IRUDIEN AURKIBIDEA

1.1 irudia. Material konposite baten faseak	2
1.2 irudia. Material konpositeak zuntzen kokapenaren arabera.....	3
2.1 irudia. Diskretizazio prozesua.....	10
2.2 irudia. SFM metodoaren ekuazio nagusia, desplazamenduak, indar independenteak eta tentsioak lortzeko procedura	21
2.3 irudia. Lau nodoko eta lau aldeko elementu isoparametriko bidimentsionala: (a) koordenatu globaletan; (b) koordenatu naturaletan.....	25
2.4 irudia. Zurruntasun matrizea eraikitzeko eragiketa kopuruaren alderaketa	30
2.5 irudia. Elementuaren edozein puntutako tentsioak lortzeko eragiketa kopuruaren alderaketa.....	32
2.6 irudia. Laminatu konpositearen ortotropia norabide nagusiak.....	33
2.7 irudia. Hegal-habearen geometria, ingurune-baldintzak eta karga egoera.....	35
2.8 irudia. Hegal-habearen desplazamendu bertikalak, SFM metoda aplikatzean....	37
2.9 irudia. Hegal-habearen tentsio horizontalak, SFM metoda aplikatzean.....	38
2.10 irudia. Hegal-habearen desplazamendu bertikalen alderaketa	39
2.11 irudia. Hegal-habearen tentsio horizontal maximoen alderaketa	39
3.1 irudia. Eraztun zirkularren eskema	47
3.2 irudia. Modelo analitikoa: (a) geometria eta karga baldintzak; (b) barne indarrak eta momentuak	49
3.3 irudia. Dinamometro zirkularra.....	52
3.4 irudia. 48 elementuz osaturiko eratzun zirkularren elementu finituetaiko modeloaren koordenatu sistema, diskretizazioa, karga eta ingurune-baldintzak	53

3.5 irudia. SFM bidez kalkulaturiko desplazamenduak: a) desplazamendu horizontalak; b) desplazamendu bertikalak.....	54
3.6 irudia. SFM eta SM bidez lorturiko B puntuko desplazamendu bertikala balio analitikoarekiko normalizatua	55
3.7 irudia. B puntuko desplazamendu bertikalaren errore erlatiboak balio analitikoarekiko.....	55
3.8 irudia. A sekzioko tentsioen FEM emaitzak, balio analitikoarekiko normalizatuak: a) barnealdean; b) kanpoaldean.....	57
3.9 irudia. Eraztunaren lodieran zeharreko tentsioen banaketa analitikoa eta FEM bidezkoa, A sekzioan, 48 elementu erabiliz.	58
3.10 irudia. A sekzioko tentsioen errore erlatiboak balio analitikoarekiko: a) barrualdean; b) kanpoaldean.	59
3.11 irudia. 64 elementuz osaturiko eratzun zirkular lodiaren elementu finitueta k modeloaren koordenatu sistema, diskretizazioa, karga eta ingurune-baldintzak.	60
3.12 irudia. Eraztun lodiaren ($\rho = 0,5$) lodieran zeharreko parametrizaturiko tentsioen banaketa analitikoa eta FEM bidezkoa, A sekzioan, 64 elementu erabiliz.	61
3.13 irudia. Eraztun lodiaren ($\rho = 0,5$) A sekzioko parametrizaturiko tentsioen errore erlatiboak balio analitikoarekiko: a) barrualdean; b) kanpoaldean.	62
4.1 irudia. Barra elementua.	67
4.2 irudia. Hiru nodoko elementu triangeluarra.	69
4.3 irudia. Lau nodoko elementu isoparametrikoa.	73
4.4 irudia. SM metodoa erabiliz elementuaren zurruntasun matrizea [K^e] kalkulatzeko fluxu diagrama.	74
4.5 irudia. SFM metodoa erabiliz elementuaren zurruntasun matrizea [K^e] kalkulatzeko fluxu diagrama.	75
4.6 irudia. Norabide bakarreko laminaren tentsio-osagaiak ardatz sistema globaletan eta lokaletan.	76
4.7 irudia. Lau nodoko elementu isoparametrikoko axisimetrikoa.	79
4.8 irudia. Erdian zulo zirkularra duen plaka trakzioean.	84
4.9 irudia. Plakaren modeloa eta ingurune-baldintzak.	84
4.10 irudia. SFM metodoaren bidez lorturiko tentsio zirkunferentzialak σ_θ	86
4.11 irudia. Tentsio zirkunferentzialak σ_θ zuloaren buelta osoan.	87
4.12 irudia. Tentsio kontzentrazio faktorearen aldakuntza, elementu kopurua handitzean.	88
4.13 irudia. Zuntz bakarreko trakzio saiakuntza.	89

4.14 irudia. Modelo axisimetrikoaren ingurune-baldintzak eta kargak.	90
4.15 irudia. Tentsio axialen banaketa zuntzean: a) SM metodoa; b) SFM metodoa...	91
4.16 irudia. Tentsio ebakitzaleen banaketa zuntzean: a) SM metodoa; b) SFM metodoa.....	92
4.17 irudia. Tentsio axialen banaketa zuntzean: a) 144 elementurekin; b) 1296 elementurekin.....	93
4.18 irudia. Tentsio ebakitzaleen banaketa zuntzean: a) 144 elementurekin; b) 1296 elementurekin.....	94
4.19 irudia. Sekzio aldakorreko habeaa.....	95
5.1 irudia. Hiru-puntuko makurdura saiakuntzaren analisirako erabilitako modeloa, deformazio lokalaren eragina kontuan hartuz.....	102
5.2 irudia. Hiru-puntuko makurdura saiakuntzaren analisirako erabilitako modeloa, deformazio lokalaren eragina kontuan hartuz.....	103
5.3 irudia. Elementu finituen modeloaren koordenatu sistema, diskretizazioa, karga eta ingurune-baldintzak.....	103
5.4 irudia. Habearen zeharkako sekzioa: a) laukizuzena; b) T bikoitza.....	105
6.1 irudia. DCB saiakuntza: a) hasieran; b) pitzaduraren hedapen fasean. Argazkiak: J. De Gracia.....	108
6.2 irudia. R erresistentzia kurba.....	111
6.3 irudia. ENF saiakuntzaren eskema.....	112
6.4 irudia. Aurrepitazduraren hedapena ENF saiakuntzan [52].....	113
6.5 irudia. DCB saiakuntzaren eskema.....	114
6.6 irudia. Indar banaketa habean zehar.....	114
6.7 irudia. Koordenatu sistema.....	117
6.8 irudia. ABAQUSeko CPE4, CPE4I eta CPE8 elementuekin eta SFM metodoarekin lorturiko makurdura moduluaren E_f balioen alderaketa.....	120
6.9 irudia. ABAQUSeko CPE4, CPE4I eta CPE8 elementuekin eta SFM metodoarekin lorturiko planoz kanpoko ebakidura moduluaren G_{13} balioen alderaketa.....	120
6.10 irudia. $h = 3$ mm eta $h = 6$ mm-ko lodieren kasuan makurdura moduluaren aldaketa argi luzerarekiko, FEM bidez eta erregresioa eginez.....	121
6.11 irudia. DCB probetaren desplazamendu bertikala: (a) tentsio egoera laua; (b) deformazio egoera laua.....	124
6.12 irudia. DCB probetaren planoz kanpoko tentsioak: (a) tentsio egoera laua; (b) deformazio egoera laua.....	125

6.13 irudia. Planoz kanpoko tentsioen banaketa pitzadura puntatik 1 mm-tara, trakziozkoak direnean: a) 5 mm luze eta 1 mm lodi diren elementuekin; b) 2 mm luze eta 0,5 mm lodi diren elementuekin.....	127
6.14 irudia. Planoz kanpoko tentsioen banaketa pitzadura puntatik 4 mm-tara, konpresiozkoak direnean: a) 5 mm luze eta 1 mm lodi diren elementuekin; b) 2 mm luze eta 0,5 mm lodi diren elementuekin.....	128
6.15 irudia. Elementu finituen modeloko ingurune-baldintzak eta pitzadura puntako diskretizazioaren xehetasuna.....	129
6.16 irudia. Elementu finituen analisia, deformaturiko modeloa.....	130
6.17 irudia. Bi urratsen hedadura prozedura edo TSEM metodoa.....	134
7.1 irudia. (a) T bikoitzaren zeharkako sekzioa eta koordenatu sistema; (b) konpresiopeko eta trakziópeko eremuak; (c) T bikoitzaren zeharkako sekzioaren erdia.....	147
7.2 irudia. Habearen eskema, deformatu aurretik eta ondoren, makurdura hutsean.	152
7.3 irudia. Dimentsioak eta diskretizazioa konpresio eta trakzio modulu desberdinak erabiliz; a) sekzio laukizuzena; b) T bikoitza sekzioa.	154
7.4 irudia. Makurdura hutsa aztertzeko modeloaren eskema.	155
7.5 irudia. E_0 -ren aldakuntza habe luzerarekiko; a) sekzio laukizuzena; b) T bikoitza sekzioa.	158
7.6 irudia. Ebakitzairearen eta eragin lokalen ehunekoa makurduraren eraginezko desplazamenduarekiko; a) sekzio laukizuzena; b) T bikoitza sekzioa.	159

TAULEN AURKIBIDEA

2.1 taula: Lau nodoko elementu isoparametrikoaren zurruntasun matrizearen kalkulurako eragiketa kopuruaren alderaketa	30
2.2 taula: Lau nodoko elementu isoparametrikoaren tentsioak kalkulatzeko eragiketa kopuruaren alderaketa.....	31
2.3 taula: AS4-3501-6 konpositearen propietate mekanikoak	36
3.1 taula: Dinamometroaren zurruntasun konstantea k , N/mm-tan.....	53
4.1 taula: AS4/8552 konpositearen propietate mekanikoak.....	84
4.2 taula: Geometria, kargaren balioa eta propietate elastikoak.	89
4.3 taula: Sekzio aldakorreko habearen desplazamendua eta tentsioak.....	96
6.1 taula: AS4-3501-6 konpositearen propietate mekanikoak	116
6.2 taula: FEM bidezko analisiei erregresio kubikoa eta lineala aplikatuz lorturiko makurdura eta planoz kanpoko ebakidura moduluak eta sistemaren zurruntasuna. .	122
6.3 taula: Pitzadura luzera mm-tan, $h = 1,5$ mm eta $h = 3,0$ mm denean.....	131
6.4 taula: Analitikoki eta numerikoki determinaturiko deformazio energia askatze tasa kritikoa J/m ² -tan.....	135
7.1 taula: GFRP profil pultruituaren propietate mekanikoak.....	153
7.2 taula: FEM modeloetan erabilitako habeen luzerak eta elementu kopuruak.....	155
7.3 taula: Makurdura moduluaren balio analitiko eta numerikoen alderaketa.....	156
7.4 taula: FEM eta erregresio kubikoaren bidez lorturiko makurdura eta ebakidura moduluak.....	160
7.5 taula: Makurdura eta ebakidura moduluuen sarrera balioen eta FEM analisietako balioei erregresio kubikoa aplikatuz lorturikoen arteko desberdintasuna.	160

LABURDURAK

BT	Habeen Teoria Klasikoa
BTBR	Habeen Teoria Makurdura Errotazioekin
CBT	Zuzenduriko habeen teoria
CFRP	Karbono zuntzezko errefortzudun konposite polimerikoak
CLPT	Plaka Laminatuaren Teoria Klasikoa
CZM	Gune kohesiboko modeloa
DCB	Habe landatu bikoitzeko saiakuntza
DIC	Irudien korrelazio digitala
ENF	Hiru-puntuko bukaerako pitzaduradun makurdura saiakuntza
ESLT	Geruza Bakar Baliokideen Teoria
FEM	Elementu finituen metodoa
FLOP	Eragiketa kopurua
FM	Indar metodoa
FRP	Zuntzez Errofortzatutako Plastikoak
FSDT	Lehen Mailako Deformazio Teoria
GFRP	Beira Zuntzez Errofortzatutako Plastikoak
HFEM	Elementu finituen metodo hibridoak
HOT	Goi Mailako Teoriak
IFM	Indar Metodo Integratua
IFMD	Indar Metodo Integratu Duala
LWT	Geruzaz Geruzako Teoriak
PCVW	Lan Birtual Osagarriaren Printzipioa
PVW	Lan Birtualaren Printzipioa

SFM	Zurruntasun-Indar Metodoa
SM	Zurruntasun metodoa
TSEM	Bi urratsen hedapen prozedura
VCCT	Pitzadura birtualaren itxiera metodoa

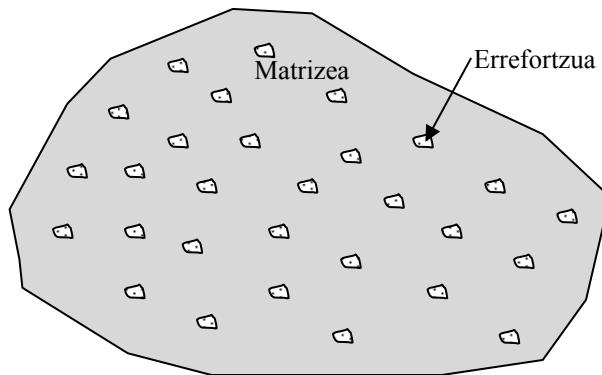
SARRERA

1.1 MATERIAL KONPOSITEAK

1.1.1 DEFINIZIOA ETA EZAUTARIEN

Material konpositeak fase edo osagai desberdinez osatutako materialak dira, bere ezaugarri mekanikoak osagaienak baino hobeak izan ohi direlarik [1]. Beraz, badira konpositeak naturan, hala nola egurra eta hezurak, eta historian zehar gizakiek hainbat konposite sortu izan dituzte material desberdinak konbinatz, beti ere material berrien eta hobeen bila. Adibidez adobeak, buztina lasto-zuntzekin errefortzatuz, eta hormigoia altzairuarekin konbinatzen da, trakzio-esfortzuak jasateko. Azken hamarkadetan etekin handiko konpositeak garatu dira batez ere hegazkingintzan erabiltzeko.

Gehienetan material konpositean bi fase bereizi ohi dira: bata jarraitua, matrizea, eta bestea ez-jarraitua, errefortzua (1.1 irudia). Azken hori zurruna eta erresistentzia altukoa eta aldiz matrizea, malguagoa, zurruntasun eta erresistentzia ahulagokoa izan ohi da.



1.1 irudia. Material konposite baten faseak.

Matrizearen eta errefortzuaren propietateak desberdinak direnez, material konpositeak heterogeneoak dira. Hala eta guztiz ere, ikuspuntu makro-mekanikotik materiala homogeneoa dela suposatzen da, eta osotasunean duen portaera mekanikoa aztertu ohi da [2].

Material konpositearen propietateak bere osagaien propietateen, euren banaketa geometrikoaren eta euren arteko elkarrekintzen menpekoak dira [1]. Bi fase dituzten material konpositeak hiru multzo handitan sailkatzen dira, errefortzua zein motatakoa denaren eta bere geometria eta orientazioa nolakoak direnaren arabera [3]:

1. Partikulekin errefortzaturiko konpositeak

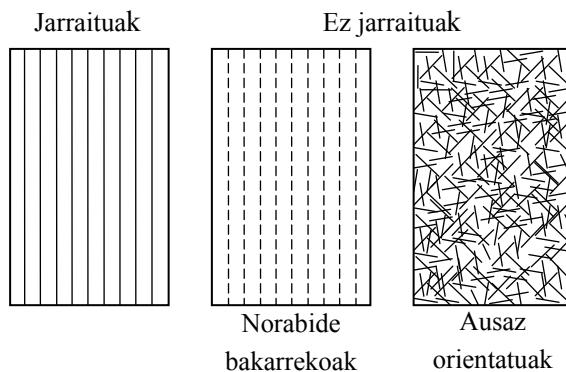
Ausaz orientatutako neurri eta forma desberdineko partikulak matrizean sakabanatzean osaturiko konpositeak dira [1]. Eskala makroskopikoan material kuasi-homogeneo eta kuasi-isotropoak izan ohi dira [3]. Zenbat eta txikiagoa izan partikulen neurria eta zenbat eta sakabanatuago egon horiek matrizean, errefortzuaren eragina orduan eta handiagoa izan ohi da. Partikula edukia handitzean propietate mekanikoak hobetu ohi dira. Oro har, edozein material errefortzatu daiteke partikulak erabiliz, matrize zeramikoa, metalikoa edo polimerikoa duen material konposite bat osatzen delarik.

Partikulaz errefortzatutako konposite ezagunena hormigoia da. Material honetan matrize zeramikoa, zementua, agregakin partikulez indartzen da. Material polimeriko

batzuk ere, gehigarriekin indartzen direnean partikulez errefortzatutako konpositeen moduko portaera dute.

2. Zuntz jarraituz errefortzaturiko konpositeak

Konpositeen artean ezagunenak dira, izan ere zurruntasun eta erresistentzia altuak lortzen dira konposite mota honekin [3]. Euren ezaugarrien artean zuntzen luzera-diametro erlazio oso altua eta anisotropia daude. Oro har, zuntzez errefortzaturiko materialen propietateak anisotropoak izateaz gain, zuntzek matrizean duten kokapenaren arabera oso aldakorrak dira [1]. Matriza poliester edo epoxi erretxina izan ohi da. 1.2 irudian ikus daitekeena zuntz luzez errefortzaturiko norabide bakarreko laminatu konpositea da. Konposite hauetan delaminazioaren edo laminarteko hausturaren ikerketa gai garrantzitsua da [4].



1.2 irudia. Material konpositeak zuntzen kokapenaren arabera.

3. Zuntz ez jarraituz errefortzaturiko konpositeak

Zuntz ez jarraituz osaturiko konpositeetan zuntz motzagoak erabiltzen dira, hala eta guztiz ere, zuntzen luzera-diametro erlazioak handia izaten jarraitzen du [3]. Konposite bolumen handiko aplikazioetan sarritan erabiltzen dira mota honetakoak, euren fabrikazio kostua baxua baita, hala ere, kontuan izan behar da euren propietate mekanikoak zuntz jarraituz errefortzaturiko konpositeenak baino eskasagoak direla [4]. Zuntz ez jarraituak norabide bakarrean edo ausaz orientatuta egon daitezke, 1.2 irudian azaltzen den moduan. Zuntzak norabide bakarrean orientatzen direnean

materialaren propietateak anisotropoak dira. Aldiz, ausaz orientatzen direnean propietate kuasi-isotropoak dituen materiala lortzen da [3].

Material konpositeen propietate fisiko eta kimikoak euren osagaien menpekoak dira. Osagaien ezaugarriak eta portaera ondo ezagutuz gero, diseinurako beharrezko diren propietate mekanikoak dituzten materialak lor daitezke.

Material konpositearekin lortu nahi den helburua propietate mekanikoak hobetzea denean, adibidez, hegazkingintzan, matrizea zuntzez indartzen da. Beraz, zuntzak konpositearen euskarri mekanikoa izango dira eta matrizeak zuntzak babestea eta zuntzak irmoki lotzea izango ditu helburu, zuntzen zurruntasun eta erresistentzia material konpositeari igortzeko.

1.1.2 LAMINATU KONPOSITEAK

Laminatu konpositeak norabide desberdineko zuntzez errefortzaturiko xaflak bata bestearen gainean pilatzean sorturiko materialak dira, euren lodiera laminatuaren planoan dituzten dimentsioak baino askoz ere txikiago delarik.

Zuntz eta matrize mota desberdinak erabiliz, nahiz xaflen kokapena aldatuz, laminatu konposite mota desberdinak ekoitzi daitezke. Hots, portaera mekaniko desberdineko laminatuak lor daitezke zuntzen luzeraren, zuntz edukiaren eta zuntza matrizean nola barneratzen denaren arabera.

Zuntz luzez errefortzaturiko konpositeen propietateak desberdinak dira zuntzaren norabidean eta zuntzarekiko elkarzutak diren norabideetan, hau da, material anisotropoak dira. Xafla bat egiteko zuntz luzez errefortzatutako konpositea erabiltzen denean, xafaren portaera ortotropoa da, hots, materialak puntu bakoitzean euren artean elkarzutak diren hiru simetria-plano ditu: ortotropia plano nagusiak [1,3].

Norabide bakarreko zuntzak erabiltzen badira, xafaren erresistentzia eta elastikotasun modulua altuagoak dira zuntzaren norabidean, zuntzarekiko elkarzut diren norabideetan baino. Beraz, laminatu konpositearen propietateak xafla bakoitzean zuntzaren norabidearen eta pilaketa-sekuentziaren arabera desberdinak dira. Materialaren propietateak neurri batean behintzat definitzeko aukera izatea garrantzitsua da diseinuaren ikuspuntutik.

1.2 MATERIAL KONPOSITEEN ANALISISIRAKO METODOAK

1.2.1 METODO ANALITIKOAK

Laminatu konpositeen azterketa analitikorako desplazamendu eremuaren sinplikazioak barne hartzen dituzten teoriak erabiltzen dira, bi talde nagusitan sailka daitezkeenak [5]:

1. Geruza Bakar Baliokideen Teoria (*Equivalent Single Layer Theories*, ESLT)

ESLT teoriak makurduraren eraginpean dauden plaka laminatu laukizuzenak aztertzeko hurbilpen analitikoak dira [5]. Laminatu konpositeen azterketarako teoriarik simpleenak dira, bi dimentsio soilik kontuan hartzen baitituzte. ESLT teoria desberdinak daude:

- i. Plaka Laminatuaren Teoria Klasikoa (*Classical Laminated Plate Theory*, CLPT)
- ii. Lehen Mailako Deformazio Teoria (*First-order Shear Deformation Theory*, FSDT)
- iii. Goi Mailako Teoriak (*Higher-Order Theories*, HOT)

CLPT teoriaren bidez tentsioak planoan soilik lor daitezke. FSDT teoria hobeturiko CLPT teoria litzateke, izan ere indar ebakitzailaren eragina kontuan hartzen du eta, beraz, planoz kanpoko tentsio ebakitzailak kalkula daitezke. CLPT eta FSDT teoriek laminatuen portaera mekanikoa modu egokian aurreikusten dute ebakiduraren eragina arbuiagarria denean, hau da, laminatu meheen kasuan. HOT teoriak muga hori gainditu asmoz sortu ziren, hipotesi berdinatan oinarrituz baina desplazamendu eremua hurbiltzeko goi mailako polinomioak erabiliz.

2. Geruzaz Geruzako Teoriak (*Layer Wise Theories*, LWT)

LWT teoriak erabiliz, xaflen arteko σ_{zz} , τ_{xz} eta τ_{yz} tentsioen jarraitasuna kontuan hartzen dutenez, emaitza zehatzagoak lortzen dira. Teoria hauek ESLT teoriek dituzten mugak gainditzeko eta emaitza zehatzak lortzeko ahaleginak dira.

1.2.2 METODO ESPERIMENTALAK

Material konpositeen propietate mekanikoak saiakuntza desberdinak erabiliz lor daitezke [3,4]. Horien artean daude trakzio saiakuntzak, konpresio saiakuntzak, plano barneko ebakidura saiakuntzak, laminarteko ebakidura saiakuntzak, makurdura saiakuntzak, laminarteko haustura saiakuntzak eta zuntza eta matrizearen fasearteko saiakuntzak. Saiakuntza horien helburuen artean daude trakzioko eta konpresioko moduluak eta erresistentziak, ebakidura modulua eta erresistentzia eta laminarteko propietateak lortzea.

Laborategiko saiakuntza horiek egiten direnean, lorturiko datuak tratatzen dira, materialen propietateak hurbilketa analitiko batean oinarrituz zehazten direlarik.

1.2.3 ZENBAKIZKO METODOAK

Geometria simpleko problemetan eta portaera elastiko lineala denean soluzio analitiko zehatzak lor daitezke. Problema konplexuagoetan zenbakizko metodoen erabilera asko zabaldu zen, batez ere ordenagailuen garapenarekin lotuta. Material konpositeen portaera aztertzeko gehien erabiltzen den metodo numerikoa Elementu finituen metodoa (*Finite element method*, FEM) da. FEM metodoetan bi formulazio mota bereizten dira: desplazamenduetan oinarritukoak eta tentsioetan oinarritukoak. Material konpositeen portaera simulatzeko erabiltzen diren elementu finituen metodo gehienak desplazamenduetan oinarritzen dira. Izan ere, metodo horren formulazioa programatzeko erraza denez, programa komertzialek erabiltzen dutena da.

FEM bidez dimensio bakarreko, bi dimensioko eta hiru dimensioko modeloak aztertu daitezke. Lan honetan egindako elementu finituen analisietan bi eta hiru dimensioko modeloak eta laminatu konpositeen propietate makroskopikoak erabili dira.

1.3 TESIAREN HELBURUAK

Adarragak bere ikerkuntza lanean [6] SFM metodoaren analisi sakona burutu zuen eta laminatu konpositeen problema batzutan aplikatu [7]. Aplikazio horietan elementu kopuru txikia erabiliz SFM bidez lorturiko emaitzak SM bidez lorturikoak baino

askoz hobeak zirela ikusi zen, desplazamenduetan zein tentsioetan. Ikerkuntza lan honen helburu nagusia orain arte aztertutakotik abiatu eta aurrera jarraitzea da, zehazki:

- SFM metodoan lau aldeko elementu orokorrak, isoparametrikokoak deiturikoak, formulatzea eta Matlab-en implementatzea.
- SFM metodoaren formulazioa Abaqus programa komertzialean implementatzea.
- Laminatu konpositeen tentsio gradiente handiko problemak aztertzea SFM metodoa erabiliz.
- SFM metodoa laminatu konpositeen saiakuntza mekanikoetan aplikatzea: Elementu finituen modeloetan materialaren propietateak sarrera balio moduan sartzea eta makurdura saiakuntza birtualen bidez irteera balio moduan lortzea.
- Habe landatu bikoitzeko saiakuntza numerikoki aztertzea.
- Konpresio eta trakzio modulu desberdintasunaren eta makurdura moduluaren arteko erlazioa aztertzea sekzio laukizuzenetan eta T bikoitza sekzioetan.

1.4 BIBLIOGRAFIA

- [1] Berthelot J. Matériaux composites: comportement mécanique et analyse des structures. 2e ed. Paris: Masson, 1996.
- [2] Pagano NJ, Yuan FG. The significance of effective modulus theory (homogenization) in composite laminate mechanics. Compos Sci Technol 2000; 60: 2471-88.
- [3] Daniel IM, Ishai O. Engineering mechanics of composite materials. Oxford University Press, 2006.
- [4] Gibson RF. Principles of composite material mechanics. New York: McGraw-Hill, 1994.
- [5] Reddy JN. Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis. 2nd ed. Florida: CRC Press, 2003.

- [6] Adarraga Usabiaga I, Mujika Garitano F. Zurruntasun-indar metodoaren analisia eta bere aplikazioa laminatu konpositetan. 2015.
- [7] Adarraga I, Cantera MA, Romera JM, Insausti N, Mujika F. The dual integrated force method applied to unidirectional composites. Int J Numer Meth Eng 2014;98:663-77.

ELEMENTU FINITUEN METODOA

2.1 SARRERA

Problema baten oreka ekuazioak eta horiei dagozkien ingurune-baldintzak analitikoki problema jakin batzuen kasuan ebatz daitezke soilik. Material anisotropoen edota ingurune-baldintzak konplexuak diren kasuetan oso nekeza izan daiteke problemaren ebazpen analitikoa zehaztea, kasu batzuetan ezinezkoa suertatzen delarik. Orduan, zenbakizko analisia erabiltzen duten metodoak tresna oso baliagarriak dira, hots, zenbakizko metodo bat eta ordenagailuaren bidez modelo matematiko bat aztertuz eta prozesuaren ezaugarriak balioetsiz.

Zenbakizko metodoen artean Elementu finituen metodoa oso hedatua dago. Gaur egun, metodo honen bidez talken (auto-istripuen, tximista batek hegazkin bat jotzearen), lurrikaren eta giza gorputzean egindako protesien simulazioak egin daitezke, besteak beste. Ingeniaritzan hainbat arlotan aplikatzen da, hala nola, egituren analisian, jariakinen mekanikan, bero-transferentzian eta elektromagnetismoan.

Elementu finituen metodoaren ideia nagusietako bat diskretizazioa da [1]. Eremu bat zati diskretuetan banatzearen ideia ez da metodo honi soilik dagokiona. Adibidez, matematikariek ideia berdina erabili zuten π zenbakia balioesteko, zirkulu baten perimetroa zirkulu horretan inskribaturiko alde anitzeko poligonoaren perimetroarekin berdinduz. Beraz, elementu finituen metodoaren bidez kalkulu

hurbildua egiten da, hau da, errealtatean daukagun sistema jarraitua baliokidea den sistema diskretu batean bihurtzen da, diskretizazio prozesuaren bidez (ikus 2.1 irudia). Horrela, sorturiko modeloa hainbat nodutan lotuta dauden zenbait elementuz osatua egongo da. Beraz, elementu finituak erabiliz lorturiko emaitzak, sistema jarraituaren hurbilketa dira. Oro har, erabilitako elementu kopurua handitzen doan heinean, lorturiko emaitzak eremu jarraituak izango lituzkeenengana geroz eta gehiago hurbiltzen dira, hots, geroz eta zehatzagoak dira. Elementu horiek dimentsio finituak dituzte.



2.1 irudia. Diskretizazio prozesua.

FEM metodoa oso zabaldua dago solidoen mekanikan eta egituren analisian [2-4]. FEM metodoen artean gehien erabiltzen dena Zurruntasun metodoa (*Stiffness method*, SM) edota desplazamenduetan oinarrituriko elementu finituen metodoa da. Hau da, SM metodoan problemaren ezezagun nagusiak nodoetako desplazamenduak dira. Metodo hau Lan Birtualaren Printzipioan (*Principle of Virtual Work*, PVW) oinarritzen da. SM metodoan elementu bakoitzean desplazamendu eremu jarrai bat suposatzen da eta oreka baldintzak nodoetako desplazamenduen menpe kontsideratzen dira. Elementu finitu bakoitzaren oreka baldintzak ezartzetik lorturiko ekuazio sistema ebatziz nodoetako desplazamenduak lortzen dira.

Analisi estrukturalen erabiltzen den oinarritzko beste hurbilketa Indar metodoa da (*Force method*, FM) [4]. Metodo hau Lan Birtual Osagarriaren Printzipioan (*Principle of Complementary Virtual Work*, PCVW) oinarritzen da. FM metodoko ezezagun nagusiak indarrak dira eta indar erredundanteak, hots, sistema oreka estatikoan mantentzen dartin beharrezko ez direnak, aukeratzen dira. Horretarako orekan dagoen tentsio eremu batetik abiatzen da eta bateragarritasun ekuazioak betearazten dira, desplazamendu bateragarriak sortzen dituzten indar erredundanteak aukeratzen

eta kalkulatzen direlarik. Metodo honetan indar erredundanteen modelo egokia aukeratzea funtsezkoa da [5].

Fraeij s de Veubeke-k [6] SM eta FM metodoen bidez lorturiko balioak emaitza errealaaren beheko eta goiko mugak direla erakutsi zuen, hurrenez hurren. SM bidezko hurbilketan sistemak dituen desplazamendu onargarri guztiak ez dira barneratzen. Hori dela eta, modelaturiko sistemak benetako kasuak baino muga gehiago ditu eta ondorioz, lorturiko emaitza benetakoa baino zurrungoa da, sistemaren energia beheko muga delarik. FM metodoan sistemaren tentsio guztiak ez dira kontuan hartzen, beraz, modelaturiko sistemak benetakoak baino muga gutxiago ditu. Hortaz, sistema malguagoa da, bere energia goiko muga delarik.

Ordenagailuak sortu zirenean, bi metodo horien artean SM metodoa gailendu zen. Izan ere, sistematizatzeko erraza eta konputazio kostu baxukoa zen. Aldiz, FM metodoa programatzeak zituen zaitasunak hasieratik nabarmendu ziren, batez ere hiperestatikotasun gradu altua zuten egituretan.

Gaur egun ezagutzen dugun FEM metodoaren formulazioa Clough-ek [7] proposatu zuen, elementu finitu hitza lehenengo aldiz erabili zuelarik. Przemieniecki-k [8] FEM metodoa egituren analisian aplikatu zuen eta Zienkiewicz-ek [9] metodoa orokortu zuen, edozein motatako problemetan aplika zedin.

Eremu jarraitu baten ebazena SM metodoaren bidez egiteko pauso pauso jarraitu beharreko urratsak honakoak dira:

1. Eremu jarraitua elementu finituetan diskretizatzea. Elementu finituak bata besteari lotuta egongo dira hainbat puntutan, nodo deiturikoetan.
2. Elementuen ekuazioak ezartzeara. Elementuen edozein puntutako desplazamenduen balioak nodoetako balioetatik abiatuz lortzen dira, interpolazio funtzioen bidez. Interpolazio funtzioak gehienetan polinomio erakoak izan ohi dira. Funtzio horiek erabiliz elementuen zurruntasun matrizea eta indar bektorea zehazten dira.
3. Elementu guztien matrizeen eta indar bektoreen muntaketa egitea sistemaren ekuazioak lortzeko.
4. Ingurune-baldintzak inposatzea, hots, ezagunak diren nodoetako indarrak eta desplazamenduak.

5. Ekuazio sistemaren ebazpenaren bidez nodoetako desplazamenduen balioak lortzen dira.
6. Desplazamenduak lortu ondoren, deformazioak, desplazamenduak differentziatuz, eta tentsioak, deformazio-tentsio erlazioetatik, determina daitezke.

2.2 SM METODOAREN FORMULAZIO OROKORRA

Eremu jarraitu bat elementu finituetan diskretizatu dela suposatuz, PVW printzipioaren [10] arabera eta elementu bakoitzak n_e desplazamendu independente dauzkala onartuz, elementu batean kanpo indarrek egindako lana tentsioek egindako lan birtualaren berdina da:

$$\int_V \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \{\delta a^i\}^T \{P^i\} \quad (2.1)$$

V elementuaren bolumena izanik; $\{\delta\varepsilon\}$ eta $\{\delta a^i\}$ deformazio eta nodoetako desplazamendu bektore birtualak izanik; $\{\sigma\}$ tentsio bektorea izanik; $\{P^i\}$ nodoetako kanpo indarren bektorea izanik; eta $i = 1 \dots n_e$ elementuaren desplazamenduen askatasun gradu kopurua izanik.

SM metodoan, desplazamenduen interpolazio funtzioko erabiliz, elementuaren edozein puntutako desplazamenduak honakoak dira:

$$\{u\} = [N] \{a^i\} \quad (2.2)$$

Non $\{a^i\}$ nodoetako desplazamenduen bektorea eta $[N]$ desplazamenduen interpolazio funtzioen matrizea diren.

Bestalde, elementuaren desplazamenduak $\{u\}$ deformazioekin $\{\varepsilon\}$ erlazionaturik daude, $[L]$ eragile differentzialen matrizearen bidez:

$$\{\varepsilon\} = [L] \{u\} \quad (2.3)$$

Beraz, nodoetako desplazamenduak $\{a^i\}$ ezagunak badira, deformazioak $\{\varepsilon\}$ honako ekuazioaren bidez lor daitezke:

$$\{\varepsilon\} = [L][N]\{a^i\} = [B]\{a^i\} \quad (2.4)$$

$[B]$ desplazamendu-deformazio matrizea delarik.

Horrez gain, tentsioak $\{\sigma\}$ eta deformazioak $\{\varepsilon\}$ materialaren zurruntasun koefizienteen matrizearen $[D]$ bidez erlazionatuak daude:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (2.5)$$

(2.4) eta (2.5) ekuazioak PVW printzipioaren ekuazioan, (2.1) ekuazioan, ordezkatuz:

$$\{\delta a^i\}^T \left(\int_V [B]^T [D][B] dV \right) \{a^i\} = \{\delta a^i\}^T \{P^i\} \quad (2.6)$$

$\{\delta a^i\}$ arbitrarioak direla kontuan izanda, (2.6) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$[K^e] \{a^i\} = \{P^i\} \quad (2.7)$$

Non $[K^e]$ elementuaren zurruntasun matrizea den, hurrengo adierazpenaren bidez kalkula daitekeena:

$$[K^e] = \int_V [B]^T [D][B] dV \quad (2.8)$$

Sistemaren zurruntasun matrizea $[K]$ eraikitzeko elementu guztien zurruntasun matrizeen muntaketa egin behar da. Beraz, SM metodoko ekuazio nagusia honakoa da:

$$[K] \{a^i\} = \{P^i\} \quad (2.9)$$

Non $l = 1 \dots n_s$ den, n_s sistema osoaren desplazamenduen askatasun graduak izanik.

Ekuazio sistema ebatziz nodoetako desplazamenduak kalkula daitezke eta horiek ezagunak izanda, elementuaren edozein puntutako desplazamenduak (2.2) ekuaziotik eta deformazioak (2.4) ekuaziotik lor daitezke. Azkenik, tentsioak (2.5) ekuazioko tentsio-deformazio erlazioak erabiliz determina daitezke.

2.3 ZURRUNTASUN-INDAR METODOA (SFM)

2.3.1 SARRERA

Aurrez aipatu den moduan, ordenagailuen garapenarekin batera, FM metodoa desagertzen hasi zen [5]. Hala eta guztiz ere, 1973. urtean Patnaik-ek [11] Indar Metodo Integratua (IFM) garatu zuen, hasiera batean egitura diskretuen analisirako. IFM metodoan oreka ekuazioak eta bateragarritasun baldintzak erabiltzen dira. IFM eta FM analitikoki eta numerikoki alderatuak izan ziren [12]. IFM metodoak badu FM-rekiko abantaila bat, izan ere, IFM metodoan ez da beharrezkoa indar erredundanteak aukeratzea. Honela, IFM metodoaren ekuazio nagusiak zuzenean automatizatu daitezke ordenagailu bidezko analisirako. Ondorengo lanetan [13,14] sistema jarraituak aztertzeko IFM metodoaren ekuazioak garatu ziren. IFM bidez elementu finituen analisia burutzeko elementu berriak ere proposatu dira [15-20].

Patnaik et al.-ek [21] Indar Metodo Integratu Duala (*Dual Integrated Force method*, IFMD) ere garatu zuten. IFMD metodoaren formulazioa IFM metodoaren berdina da baina bere ekuazio nagusien egiturak SM metodoaren egitura dauka, hots, ezezagun nagusiak nodoetako desplazamenduak dira. IFM eta IFMD metodoek formulazio berdina dutenez, lortzen diren emaitzak berberak dira, desplazamenduei nahiz tentsioei dagokienean.

Bestetik, Pian-ek [22] metodo hibridoak (*Hybrid Finite element method*, HFEM) formulatu zituen. Pian eta Chen-ek [23] tentsio elementu hibridoak formulatzeko beste bide batzuk proposatu zituzten. Punch eta Atlurik [24] tentsio elementu hibrido linealen eta kuadratiko serendipitikoen egonkortasuna eta koordenatuengatik bariantza eza aztertu zuten. Pian-ek [25] elementu hibrido eta mistoek eboluzioari buruzko azterketa egin zuen. Wu eta Cheung-ek [26] HFEM metodoen errendimendua hobetzeko bi hurbilketa proposatu zituzten. Pian-ek [27] HFEM metodoen haserako

garapenari buruzko hainbat ohar nabarmendu zituen eta autore desberdinek proposaturiko elementuen arteko baliokidetasuna frogatu zuen.

HFEM metodoak Hellinger-Reissner printzipio bariazionalean oinarrituz formulatu ohi dira. Berriki Adarraga et al.-ek [28] printzipio hori edota PVW eta PCVW printzipioak aplikatzea baliokideak direla erakutsi zuten. Aurretik esan den moduan, PVW eta PCVW printzipioak oreka eta bateragarritasun baldintzen baliokideak dira, hurrenez hurren. Beraz, HFEM formulazioaren bariazionalak oreka ekuazioez gain bateragarritasun baldintzak ere barne hartzen ditu. Patnaik-ek garaturiko IFMD metodoa zuzenean PVW eta PCVW printzipioak aplikatuz lor daitekeela ere erakutsi zuten. Ondorioz, IFMD eta HFEM metodoak baliokideak dira. Metodo horiek oreka ekuazioak betetzean, SM metodoan bezala, eta bateragarritasun baldintzak betetzean, FM metodoan bezala, tentsioetan eta desplazamenduetan oinarritura daudela esan daiteke. Hori adierazi asmoz metodoari Zurruntasun-Indar Metodoa (*Stiffness Force Method*, SFM) deitza egokitzat jo da. Merezi du aipatza bateragarritasun baldintzak desplazamendu eta errotazio eremuak diferentzial zehatzak [29] izatearekin lotuta daudela. Horrek esan nahi du ez soilik desplazamenduak, errotazioak ere balio bakarreko funtzio jarraituak direla. Beraz, ikuspuntu matematikotik, desplazamenduen 3. ordenako deribatuena jarraitutasuna edo C^3 jarraitutasuna eskatzen da [30,31]. Aldiz, SM bidez formulaturiko lau nodoko elementuetan desplazamenduen jarraitutasuna edo C^0 jarraitutasuna eskatzen da.

SFM metodoan gai garrantzitsuetako bat tentsio modu egokienak aukeratzea da [32-36]. Zhang et al.-ek [37] tentsio moduak zehazteko metodo bat proposatu zuten deformazio energia nuluak saiesteko. Metodo hori funtsezko deformazio modu ortogonaletan oinarritzen da. Berriki, tentsio eremu egokiena modu sistematiko eta kuantitatibo batean hautatzeko metodo berri bat garatu dute [38].

Gainera, SFM metodoan zurruntasun matrizea kalkulatzeko beharrezkoa da malgutasun matrizearen alderantzizkoa kalkulatzea, konputazio kostua handiagotzen delarik. Konputazio kostua gutxiagotzeko, Saether-ek [39,40] formulazio esplizitu bat planteatu zuen. Geroago, Zhang et al.-ek [41,42] barne produktu bat definitzean oinarrituriko ortogonalizazio metodo bat proposatu zuten.

2.3.2 INDARREN INTERPOLAZIO FUNTZIOAK

SFM metodoan interpolazio funtzio desberdinak erabiltzen dira desplazamendu eta tentsio eremuak hurbiltzeko. Elementuen oreka eta malgutasun matrizeak eraikitzeko desplazamenduen eta tentsioen interpolazio funtzioak definitzen dira. Elementuaren desplazamendu eremua nodoetako desplazamenduen menpe hurbiltzen da, SM metodoan erabiltzen diren desplazamenduen funtzio berdinak erabiliz. Aldiz, tentsio eremua hurbiltzeko barne indar parametro independente batzuk erabiltzen dira.

Elementuaren edozein puntutako tentsioak tentsio parametroen funtzioan hurbiltzen dira [4], elementuaren tentsioen askatasun gradu kopurua m_e izanik:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = [Y] \{F^j\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 & \dots & \sigma_j \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_3 & \dots & \sigma_{m_e} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_{m_e} \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

Non $[Y]$ tentsioen interpolazio funtzioen matrizea, $\{F^j\}$ barne indar independenteen bektorea eta $j = 1 \dots m_e$ tentsioen askatasun graduak diren. Tentsioen interpolazio funtzioen matrizearen zutabeak $\{\sigma_i\}$ tentsio modu deitzen dira.

Tentsio eremua hurbiltzeko erabiltzen diren funtzioek bete beharreko baldintzak Pian et al.-ek [43] aurkeztu zituzten:

1. Oreka baldintzak betetzea
2. Tentsio osagaiak simetrikoak izatea
3. Sortutako matrizeek transformazio matrizeekiko independenteak izan behar dute
4. Deformazio energia ez du nulua izan behar

Oreka baldintzak betetzeko aukera bat polinomio osoak erabiltzea da. Modu horretan tentsio parametro kopuru altuko interpolazio funtzioak lortzen dira eta Spilker-ek eta Singh-ek [44] ondorioztatu zuten elementu horiek zurrunegiak direla. Hori dela eta, tentsioen interpolazio funtzioak determinatzeko orduan tentsio parametro kopurua murriztea komeni da, beti ere, elementuaren matrizeak bete beharreko propietateak bere horretan mantenduz.

Horrez gain, tentsio parametro kopurua zehazterakoan elementuaren desplazamendu kopurua n_e kontuan izan behar da [45]: tentsio moduen gutxieneko kopurua nodoetako desplazamendu kopuruari oreka ekuazio kopurua kentzean gelditzen dena izan behar du. Hau da, $m_e \geq n_e - r$, r oreka ekuazio kopurua delarik.

2.3.3 FORMULAZIO OROKORRA

SFM metodoa PVW eta PCVW printzipioetan oinarrituz garatzen da. Desplazamenduak eta tentsioak bakoitzaz bere aldetik interpolatzen dira eta ekuazio nagusiaren ezezagunak nodoetako desplazamenduak dira. Tentsioak zuzenean indarren interpolazio funtziotatik lortzen dira. Ez dira desplazamenduak differentziatu eta Hooke-ren lege orokortutik lortzen. SFM bidez emaitza hobeak lortzearen arrazoi moduan argudiatu ohi da desplazamenduen differentiazio eza. Hala eta guztiz ere, PCVW printzipioaren bidez bateragarritasun baldintzak erabili izana formulazioan eragina duen beste faktore garrantzitsu bat da.

PVW printzipioaren arabera eta elementu bakoitzak n_e desplazamendu independente dazkala onartuz, elementu batean kanpo indarrek egindako lana tentsioek egindako lan birtualaren berdina da [10]:

$$\int_V \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \{\delta a^i\}^T \{P^i\} \quad (2.11)$$

V elementuaren bolumena; $\{\delta\varepsilon\}$ eta $\{\delta a^i\}$ deformazio eta nodoetako desplazamendu bektore birtualak, hurrenez hurren; $\{\sigma\}$ tentsio bektorea; $\{P^i\}$ nodoetako kanpo indarren bektorea eta $i = 1 \dots n_e$ elementuaren desplazamenduen askatasun gradu kopurua izanik.

Elementuen desplazamendu eremua $\{u\}$ nodoen desplazamenduetatik abiatuta kalkulatzen da, interpolazio funtziok erabiliz, SM metodoan bezala:

$$\{u\} = [N] \{a^i\} \quad (2.2)\text{bis}$$

Non $\{a^i\}$ nodoetako desplazamenduen bektorea den eta $[N]$ desplazamenduen interpolazio funtzioen matrizea den.

Elementuaren desplazamenduak $\{u\}$ deformazioekin $\{\varepsilon\}$ erlazionatzen dira $[L]$ eragile diferentzialen matrizearen bidez:

$$\{\varepsilon\} = [L]\{u\} \quad (2.3)\text{bis}$$

Beraz, (2.2) ekuazioa (2.3) ekuazioan ordezkatz, deformazioak $\{\varepsilon\}$ zuzenean nodoetako desplazamenduekin $\{a^i\}$ erlaziona daitezke.

$$\{\varepsilon\} = [L][N]\{a^i\} = [B]\{a^i\} \quad (2.4)\text{bis}$$

$[B]$ desplazamendu-deformazio matrizea izanik.

SFM metodoan tentsio eremu independente bat hartzen da. Elementu bakoitzak m_e tentsio modu independente dauzkala suposatuz, elementuaren edozein puntutako tentsioak $\{\sigma\}$ tentsio parametroen $\{F^j\}$ menpe interpolatzen dira [28]:

$$\{\sigma\} = [Y]\{F^j\} \quad (2.12)$$

Non $[Y]$ tentsioen interpolazio funtzioen matrizea den eta $\{F^j\}$ tentsio parametroak diren, $j = 1 \dots m_e$ izanik.

Oreka ekuazioak betetzen dituzten polinomio osoetatik [4] abiatuz tentsio funtzioak lortzen dira eta horiek erabiliz tentsioen interpolazio funtzioak. (2.4) eta (2.12) ekuazioak (2.11) ekuazioan ordezkatz:

$$\{\delta a^i\}^T \left(\int_V [B]^T [Y] dV \right) \{F^j\} = \{\delta a^i\}^T \{P^i\} \quad (2.13)$$

$\{\delta a^i\}$ arbitrarioak direnez, (2.13) ekuazioan datorren oreka ekuazioa honela idatz daiteke:

$$[E]\{F^j\} = \{P^i\} \quad (2.14)$$

Non $[E]$ elementuaren oreka matrizea den, $n_e \times m_e$ ordena duena:

$$[E] = \int_V [B]^T [Y] dV \quad (2.15)$$

Bestalde, PCVW [10] printzipioaren arabera:

$$\int_V \{\delta\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV = \{\delta P^i\}^T \{a^i\} \quad (2.16)$$

Non $\{\delta\sigma\}$ eta $\{\delta P^i\}$ tentsio eta kanpo indarren bektore birtualak diren.

Deformazio $\{\varepsilon\}$ eta tentsioen $\{\sigma\}$ arteko erlaziona kontuan izanik:

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\} \quad (2.17)$$

Non $[S]$ materialaren malgutasun koefizienteen matrizea den. (2.12), (2.14) eta (2.17) ekuazioak (2.16) ekuazioan ordezkatzuz, honako adierazpena lortzen da:

$$\{\delta F^j\}^T \left(\int_V [Y]^T [S][Y] dV \right) \{F^j\} = \{\delta F^j\}^T [E]^T \{a^i\} \quad (2.18)$$

$\{\delta F^j\}$ arbitrarioak direnez, (2.18) ekuazioa hurrengo moduan idatz daiteke:

$$[G]\{F^j\} = [E]^T \{a^i\} \quad (2.19)$$

$[G]$ elementuaren malgutasun matrizea delarik, honela definitzen dena:

$$[G] = \int_V [Y]^T [S][Y] dV \quad (2.20)$$

Elementuaren tentsio parametroak $\{F^j\}$ (2.19) ekuaziotik lor daitezke:

$$\{F^j\} = [G]^{-1} [E]^T \{a^i\} \quad (2.21)$$

(2.21) ekuazioa (2.14) ekuazioan ordezkatzuz:

$$\{P^i\} = \left([E][G]^{-1}[E]^T \right) \{a^i\} \quad (2.22)$$

(2.22) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$[K^e] \{a^i\} = \{P^i\} \quad (2.23)$$

Non $[K^e]$ SFM metodoko elementuaren zurruntasun matrizea den, hurrengo ekuazioaren bidez defini daitekeena:

$$[K^e] = [E][G]^{-1}[E]^T \quad (2.24)$$

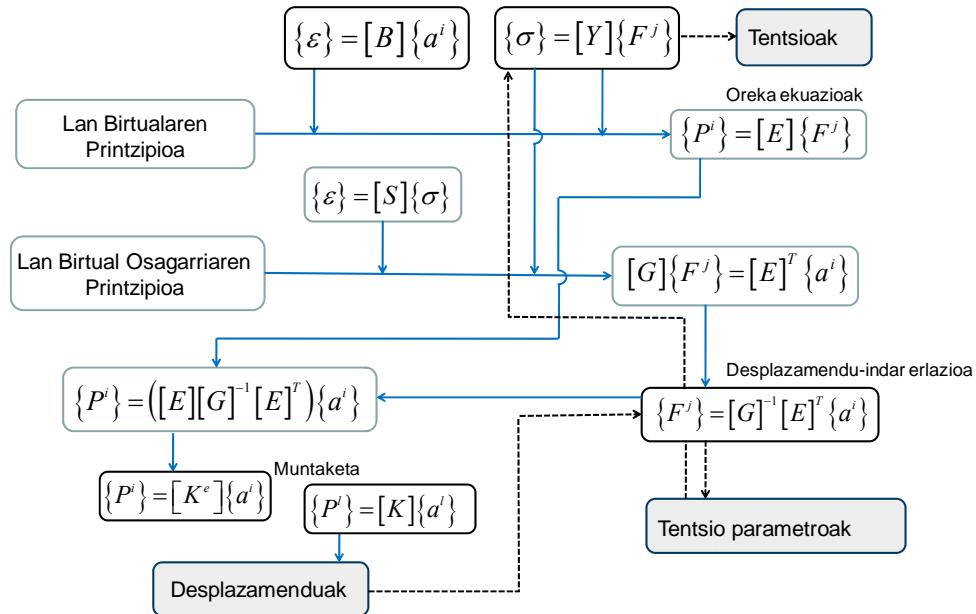
Egituraren zurruntasun matrizea $[K]$ elementuen zurruntasun matrizeak muntatuz lortzen da, SM metodoan egiten den gisan. Beraz, SFM metodoko ekuazio nagusia honakoa da:

$$[K] \{a^l\} = \{P^l\} \quad (2.25)$$

Non $l = 1 \dots n_s$ eta $k = 1 \dots m_s$ diren, n_s eta m_s sistema osoaren desplazamenduen eta indarren askatasun graduak diren, hurrenez hurren.

Behin nodoetako desplazamenduak ezagunak izanda, tentsio parametroak (2.21) ekuaziotik lortzen dira eta elementuaren edozein puntutako tentsioa $\{\sigma\}$ (2.12) ekuazioa erabiliz determina daiteke. Deformazioak $\{\varepsilon\}$ (2.17) ekuazioan datozen deformazio-tentsio erlazioak erabiliz lor daitezke.

2.2 irudian atal honetan deskribaturiko prozedura laburbilduta azaltzen da.



→ PVW eta PCVW aplikatuz desplazamenduak lortu

→ Desplazamenduak ezagututa tentsio parametroak eta tentsioak lortu

2.2 irudia. SFM metodoaren ekuazio nagusia, desplazamenduak, indar independenteak eta tentsioak lortzeko prozedura.

2.3.4 MALGUTASUN MATRIZEAREN DIAGONALIZAZIOA

SFM metodoan, elementuen zurruntasun matrizea kalkulatzerakoan beharrezko da elementuaren malgutasun matrizearen $[G]$ alderantzikoa kalkulatzea. Eragiketa horrek konputazio kostua igotzen du eta ondorioz, SFM metodoaren desabantaila nagusienetako da.

Hortaz jabeturik, hainbat hurbilketa proposatu izan dira SFM metodoaren konputazioa eraginkorragoa izan dadin [39-42].

Zhang et al.-ek [41,42] ortogonalizazio metodo bat proposatu zuten tentsio elementu hibridoen zurruntasun matrizea modu esplizituan lortzeko. Metodo horretan, Gram-

Schmidt-en prozedura jarraituz, tentsio moduen baliokide ortogonalak lortzen dira eta, beraz, elementuaren malgutasun matrize $[G]$ diagonala lortzen da.

$[Y]$ tentsioen interpolazio funtzioen matrizearen zutabeak tentsio modu $\{\sigma_i\}$ gisa definitzen dira, non $i=1,2,\dots, m_e$, hau da, $[Y]=[\{\sigma_1\} \cdots \{\sigma_{m_e}\}]$. $[T]$ matrize ez singular bat baldin badago, honako erlazioa betetzen duena:

$$[Y] = [\bar{Y}] [T] \quad (2.26)$$

Bi tentsio eremuak baliokideak dira eta, beraz, tentsio eremu bat ala bestea erabiliz elementu finitu baliokideak lortuko ditugu, Zhang et al.-ek erakutsi zuten moduan [41,42]. (2.26) ekuazioan oinarrituz, tentsio eremu baliokide bat defini daiteke, Gram-Schmidt-en metodoa erabiliz. Hurrengo biderketa eskalarretik abiatuz:

$$\langle \{\sigma_i\}, \{S\sigma_j\} \rangle = \int_V \{\sigma_i\}^T \{S\sigma_j\} dV \quad (2.27)$$

$$\{S\sigma_i\} = [S]\{\sigma_i\} \text{ izanik.}$$

Tentsio moduen baliokide ortogonalak honela lor daitezke:

$$\begin{aligned} \{\bar{\sigma}_1\} &= \{\sigma_1\} \\ \{\bar{\sigma}_i\} &= \{\sigma_i\} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \{\sigma_i\}, \{S\bar{\sigma}_j\} \rangle}{\langle \{\bar{\sigma}_j\}, \{S\bar{\sigma}_j\} \rangle} \{\bar{\sigma}_j\} \quad (i = 2, \dots, m_e) \end{aligned} \quad (2.28)$$

(2.28) ekuazioan definituriko tentsio modu ortogonalak erabiliz kalkulatzen den elementuaren malgutasun matrizea matrize diagonala da:

$$[\bar{G}] = \int_V [\bar{Y}]^T [S] [\bar{Y}] dV = \begin{bmatrix} \|\{\bar{\sigma}_1\}\|^2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \|\{\bar{\sigma}_{m_e}\}\|^2 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$$\text{Non } \left\| \{\bar{\sigma}_i\} \right\|^2 = \langle \{\bar{\sigma}_i\}, \{S\bar{\sigma}_i\} \rangle.$$

Tentsio modu ortogonal hauetan normalizatuz elementuaren malgutasun matrizea unitate matrize bihurtzen da. Tentsio modu ortonormalak honela zehatz daitezke:

$$\{\bar{\sigma}_i^*\} = \frac{\{\bar{\sigma}_i\}}{\left\| \{\bar{\sigma}_i\} \right\|} \quad (2.30)$$

Eta ondorioz, (2.20) ekuazioaren arabera, malgutasun matrizea unitate matrize bihurtzen da:

$$\begin{bmatrix} \bar{G}^* \end{bmatrix} = \int_V \begin{bmatrix} \bar{Y}^* \end{bmatrix}^T [S] \begin{bmatrix} \bar{Y}^* \end{bmatrix} dV = \begin{bmatrix} I_{m_e} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

$\begin{bmatrix} I_{m_e} \end{bmatrix}$ $m_e \times m_e$ unitate matrizea delarik. Orduan, (2.15) ekuazioaren arabera, oreka matrizea honela kalkula daiteke:

$$\begin{bmatrix} \bar{E}^* \end{bmatrix} = \int_V [B]^T \begin{bmatrix} \bar{Y}^* \end{bmatrix} dV \quad (2.32)$$

Gainera, (2.24) ekuazioaren arabera, elementuaren zurruntasun matrizea zuzenean eraiki daiteke, hots, ez da beharrezko malgutasun matrizea alderantzikatzea:

$$\begin{bmatrix} K^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{E}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{E}^* \end{bmatrix}^T \quad (2.33)$$

Tentsio modu ez ortonormalak erabiliz zehazturiko elementuaren zurruntasun matrizea, hau da, (2.24) ekuazioaren bidez lorturikoa eta tentsio modu ortonormaletatik lorturikoa, hots, (2.33) ekuaziotik eraikitako berdinak dira.

(2.32) ekuazioko oreka matrizea (2.21) ekuazioan ordezkatuz, elementuaren tentsio parametroak honela lor daitezke:

$$\{\bar{F}^{*j}\} = \begin{bmatrix} \bar{E}^* \end{bmatrix}^T \{a^i\} \quad (2.34)$$

(2.34) ekuaziotik lorturiko tentsio parametroak (2.12) ekuazioan ordezkatz, elementuaren edozein puntutako tentsioak honela kalkula daitezke:

$$\{\sigma\} = [\bar{Y}^*] \{\bar{F}^{*j}\} \quad (2.35)$$

Zhang et al.-ek [41,42] orain arteko prozedura tentsio elementu hibridoetan aplikatu zuten. Adarraga et al.-ek [28] metodo hibridoak eta SFM metodoa baliokideak direla ondorioztatu zutenez, aurrez deskribaturiko ortogonalizazio metodoa SFM metodoan aplikagarria da.

2.4 ELEMENTU OROKORRAK SFM METODOAN

2.4.1 LAU NODOKO ELEMENTU ISOPARAMETRIKOAREN SFM METODOKO EKUAZIOAK

Lehenengo azterturiko elementua lau aldeko elementu isoparametrikoa izan da, 2.3 irudian ikus daitekeena.

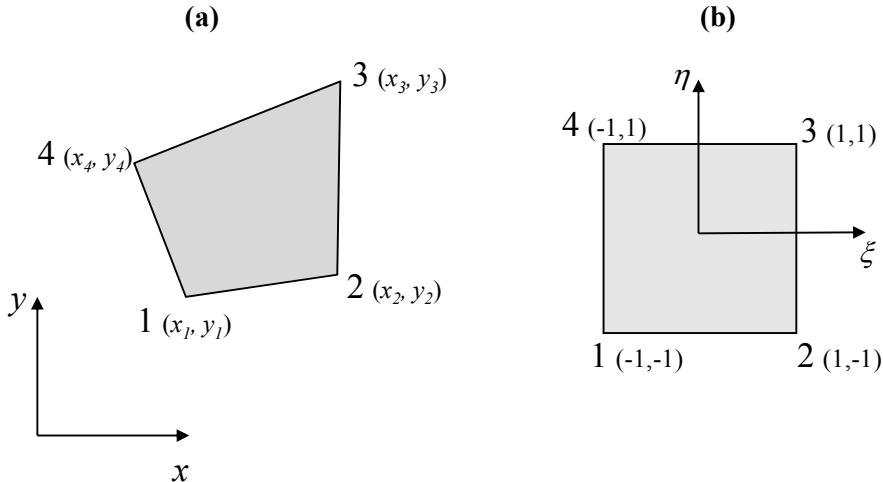
SFM metodoko desplazamenduen interpolazio funtzioak SM metodokoenean berdinak dira [33]:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^4 N_i u_i = \frac{1}{4} \sum (1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i) u_i \\ v &= \sum_{i=1}^4 N_i v_i = \frac{1}{4} \sum (1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i) v_i \end{aligned} \quad (2.36)$$

ξ_i eta η_i nodoetako koordenatu naturalak izanik.

Kontzeptu isoparametrikoa kontuan izanda, elementuen koordenatuak (2.36) ekuazioan aipaturiko interpolazio funtzioak erabiliz ondorioztatzen dira:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^4 N_i x_i = \frac{1}{4} \sum (1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i) x_i \\ y &= \sum_{i=1}^4 N_i y_i = \frac{1}{4} \sum (1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i) y_i \end{aligned} \quad (2.37)$$



2.3 irudia. Lau nodoko eta lau aldeko elementu isoparametriko bidimentsionala: (a) koordenatu globalaletan; (b) koordenatu naturaletan.

Non x_i eta y_i nodoetako koordenatu globalak diren. Orduan, matrize Jakobiarra honela defini daiteke:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2\eta & b_1 + b_2\eta \\ a_3 + a_2\xi & b_3 + b_2\xi \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Non a_i eta b_i [39,42] erreferentzietan zehazturiko parametro geometrikoak diren, $i = 1, 2, 3$ izanik:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Matrize Jakobiarraren determinantea honela defini daiteke:

$$|J| = J_0 + J_1\xi + J_2\eta \quad (2.40)$$

$J_0 = a_1b_3 - a_3b_1$, $J_1 = a_1b_2 - a_2b_1$, eta $J_2 = a_2b_3 - a_3b_2$ izanik.

Elementuaren edozein puntuak tentsioak (2.12) ekuazioa erabiliz zehaztu daitezke. [33,42] erreferentzietan definituriko tentsioen interpolazio funtzioak erabiliz, (2.12) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix} = \frac{1}{t} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix} = \frac{1}{t} \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1^2\eta & a_3^2\xi \\ 0 & 1 & 0 & b_1^2\eta & b_3^2\xi \\ 0 & 0 & 1 & a_1b_1\eta & a_3b_3\xi \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix} \quad (2.41)$$

Lau nodoko elementu isoparametrikoen kasuan, oreka matrizea koordenatu naturalak erabiliz osatzen da:

$$[E] = \int_V [B]^T [Y] dV = \int_{A_e} [B]^T [Y] t dA_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B(\xi, \eta)]^T [Y(\xi, \eta)] |J| t d\xi d\eta \quad (2.42)$$

(2.42) ekuazioko integrala integrazio numeriko bidez kalkulatzen da bi dimentsiotako Gauss-Legendre koadratura erabiliz [2]:

$$[E] = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \left(\left[[B(\xi_p, \eta_q)] \right]_i^T \left[Y(\xi_p, \eta_q) \right]_j |J| t \right)_{p,q} W_p W_q \quad (2.43)$$

p eta q koordenatu naturalen norabide bakotzean aukeraturiko integrazio puntu kopurua, ξ_p eta η_q p , q integrazio puntuko koordenatu naturalak eta W_p eta W_q integrazio puntu horretan norabide bakotzari dagozkion pisuak izanik.

Malgutasun matrizea ere antzera kalkulatzen da:

$$\begin{aligned} [G] &= \int_V [Y]^T [S] [Y] dV = \int_{A_e} [Y]^T [S] [Y] t dA_e \\ [G] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [Y(\xi, \eta)]^T [S] [Y(\xi, \eta)] |J| t d\xi d\eta \end{aligned} \quad (2.44)$$

Tentsio egoera laua pairatzen duen material isotropo baten malgutasun koefizienteen matrizea $[S]$ [46] honakoa delarik:

$$[S] = \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

(2.44) ekuazioa numerikoki kalkulatzeko Gauss-Legendre koadratura erabiliz:

$$[G] = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \left(\left[\left[Y(\xi_p, \eta_q) \right] \right]_i^T [S] \left[Y(\xi_p, \eta_q) \right]_j |J| t \right)_{p,q} W_p W_q \quad (2.46)$$

Behin oreka eta malgutasun matrizeak kalkulatuta, lau nodoko elementu isoparametrikoen zurruntasun matrizea (2.24) ekuazioaren bidez determinatzen da.

2.4.2 EKUAZIOAK ORTOGONALIZAZIOA APLIKATZEAN

2.3.4 atalean deskribaturiko prozedura elementu honi aplika dakoie. (2.27) ekuazioko biderketa eskalarra koordenatu naturalen sistemara transformatuz gero:

$$\langle \{\sigma_i\}, \{S\sigma_j\} \rangle = \int_V \{\sigma_i\}^T \{S\sigma_j\} dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{\sigma_i\}^T \{S\sigma_j\} |J| d\xi d\eta \quad (2.47)$$

Tentsioen interpolazio funtzio baliokide ortonormalak Zhang et al.-ek [42] definiturikoak dira:

$$[\bar{Y}^*] = \begin{bmatrix} l_1 & \nu l_2 & 0 & l_4 a_1^2 \bar{\eta} & l_5 (a_3^2 \bar{\xi} - m a_1^2 \bar{\eta}) \\ 0 & l_2 & 0 & l_4 b_1^2 \bar{\eta} & l_5 (b_3^2 \bar{\xi} - m b_1^2 \bar{\eta}) \\ 0 & 0 & l_3 & l_4 a_1 b_1 \bar{\eta} & l_5 (a_3 b_3 \bar{\xi} - m a_1 b_1 \bar{\eta}) \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Non $\bar{\xi} = \xi - \alpha_1$, $\bar{\eta} = \eta - \alpha_2$, $\alpha_1 = \frac{J_1}{3J_0}$, $\alpha_2 = \frac{J_2}{3J_0}$ diren eta l_i -ak tentsio moduen normak diren:

$$l_1 = \sqrt{\frac{E}{4J_0}}, \quad l_2 = \frac{l_1}{\sqrt{1-\nu^2}}, \quad l_3 = \frac{l_1}{\sqrt{2(1+\nu)}}, \quad l_4 = \frac{l_1}{(a_1^2 + b_1^2)\sqrt{r_2}}, \quad l_5 = \frac{l_1}{\sqrt{(a_3^2 + b_3^2)^2 r_1 - (a_1^2 + b_1^2)^2 m^2}}$$

non: $r_1 = \frac{1}{3} - \alpha_1^2$, $r_2 = \frac{1}{3} - \alpha_2^2$ eta $m = \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\nu J_0^2 - (a_1 a_3 + b_1 b_3)^2)}{(a_1^2 + b_1^2)^2 r_2}$ diren.

Oreka matrizearen $\begin{bmatrix} \bar{E}^* \end{bmatrix}$ osagaien $\bar{e}_{i,j}^*$ adierazpen esplizituak honakoak dira:

$$\begin{aligned} \bar{e}_{2i-1,1}^* &= l_1 \theta_{1i} & \bar{e}_{2i,1}^* &= 0 \\ \bar{e}_{2i-1,2}^* &= \nu l_2 \theta_{1i} & \bar{e}_{2i,2}^* &= l_2 \theta_{2i} \\ \bar{e}_{2i-1,3}^* &= l_3 \theta_{2i} & \bar{e}_{2i,3}^* &= l_3 \theta_{1i} \\ \bar{e}_{2i-1,4}^* &= l_4 a_1 \theta_{3i} & \bar{e}_{2i,4}^* &= l_4 b_1 \theta_{3i} \\ \bar{e}_{2i-1,5}^* &= l_5 (a_3 \theta_{4i} - m a_1 \theta_{3i}) \\ \bar{e}_{2i,5}^* &= l_5 (b_3 \theta_{4i} - m b_1 \theta_{3i}) \end{aligned} \tag{2.49}$$

Eta θ parametroak hurrengoak:

$$\begin{aligned} \theta_{1i} &= h_{1i}, \quad \theta_{2i} = h_{4i}, \\ \theta_{3i} &= \frac{a_1 h_{3i} + b_1 h_{6i}}{3} - \alpha_2 (a_1 h_{1i} + b_1 h_{4i}), \\ \theta_{4i} &= \frac{a_3 h_{2i} + b_3 h_{5i}}{3} - \alpha_1 (a_3 h_{1i} + b_3 h_{4i}) \end{aligned} \tag{2.50}$$

h_{ij} parametroak Zhang et al.-ek [42] definiturikoak izanik, non h_{ij} parametroak e_{ij} deitu diren.

Lehen aipatu den moduan ekuazio hauek tentsio egoera laua kontsidera daitekeenean eta material isotropoz osaturiko sistema bat aztertzeko balio dute.

2.4.3 KONPUTAZIO KOSTUA

SM eta SFM metodoetan elementu kopuru bera duen sistema bat konsideratzen bada, sistemaren zurruntasun matrizea ordena berdinekoa da bi kasuetan. Izan ere, bi metodoen arteko desberdintasun nagusia elementuen zurruntasun matrizea eraikitzean datza.

Atal honetan, lau nodoko elementu isoparametriko baten zurruntasun matrizea kalkulatzeko eragiketa-kopurua (*Floating point operations per second, FLOP*) [47] zein den kalkulatu da hurrengo hiru kasuetan:

- Oinarrizko SFM metodoa, hau da, diagonalizaziorik gabe eta zenbakizko integrazioarekin.
- Modu esplizituan formulaturiko SFM metodoa, hots, Zhang et al.-ek [42] proposaturiko ortogonalizazio metodoaren arabera.
- SM metodoa zenbakizko integrazioarekin.

2.1 taulan bi dimentsiotako lau nodoko elementu isoparametriko baten konputazio kostua zein den ikus daiteke, aurreko hiru kasu horietan.

2.4 irudian zurruntasun matrizea eraikitzeko beharrezko eragiketa kopuruak, 2.1 taulan zehaztu direnak, sinbolikoki irudikatu dira. SFM formulazio esplizitua erabiliz zurruntasun matrizea eraikitzeko konputazio kostua SM erabiliz baino % 60 txikiagoa da eta oinarrizko SFM erabiliz baino % 75 txikiagoa.

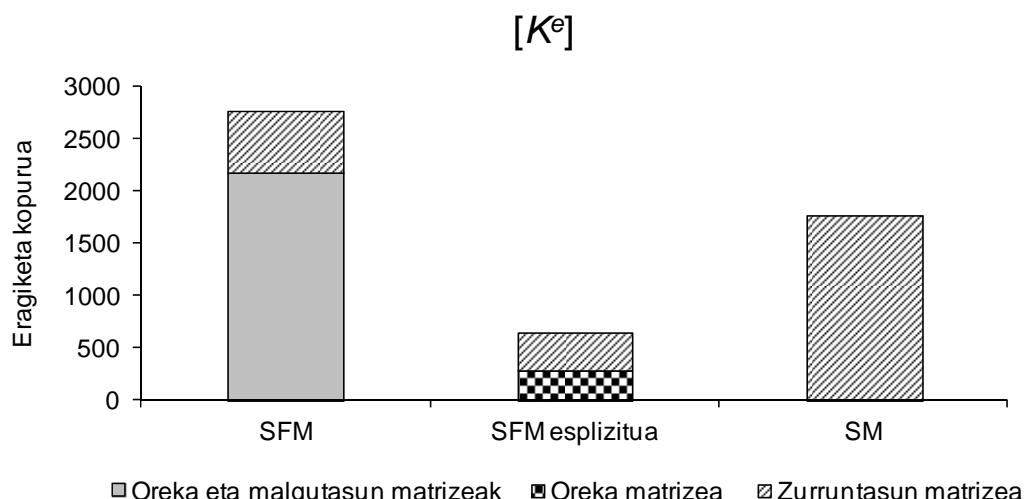
2.1 taula: Lau nodoko elementu isoparametrikoaren zurruntasun matrizearen kalkulurako eragiketa kopuruaren alderaketa.

Pausoa	Oinarrizko SFM	SFM formulazio esplizitua	SM
$[E]$ eta $[G]^a$	2179	-	-
$[\bar{E}^*]^b$	-	289	-
$[K]^c$	579	360	1766
GUZTIRA	2758	649	1766

^aOinarrizko SFM: (2.15) eta (2.20) ekuazioak, integrazioa 4 Gauss punturekin, matrize biderketa (8x3, 3x5), matrize biderketa (5x3, 3x3), matrize biderketa simetrikoa (5x3, 3x5); SFM esplizituan eta SM: ez da aplikatzen.

^bSFM esplizitua: (2.49) eta (2.50) ekuazioak; Oinarrizko SFM eta SM: ez da aplikatzen.

^cOinarrizko SFM: (2.24) ekuazioa, alderantzizkoa Cholesky erabiliz (5x5), atzera ordezpen trianguluarra eta matrize biderketa (5x5, 5x8), matrize biderketa simetrikoa (8x5, 5x8); SFM esplizitua: (2.33) ekuazioa, matrize biderketa simetrikoa (8x5, 5x8); SM: integrazioa 4 Gauss punturekin, matrize biderketa (8x3, 3x3), matrize biderketa simetrikoa (8x3, 3x8).



2.4 irudia. Zurruntasun matriza eraikitzeko eragiketa kopuruaren alderaketa.

Horrez gain, SFM eta SM metodoak erabiltzean elementuko edozein puntutako tentsioak kalkulatzeko modua ere desberdina da. 2.2 taulan bi dimentsiotako lau nodoko elementu isoparametriko batean tentsioak kalkulatzeko konputazio kostua zein den ikus daiteke, 2.1 taulan azterturiko hiru kasuetan.

2.5 irudian 2.2 taulan agertzen diren eragiketa kopuruaren alderaketa grafikoki irudikatu da. SFM formulazio esplizitua erabiliz oinarrizko SFM metodoarekiko lortzen den aurreztea % 70ekoa da. SM metodoaren konputazio kostua SFM esplizituarena baino % 20 txikiagoa da.

Zurruntasun matrizea eta tentsioak kalkulatzerakoan dauden desberdintasunak gehituz, SFM formulazio esplizituaren konputazio kostua SM metodoarena baino % 40 txikiagoa da eta oinarrizko SFM metodoarena baino % 75 txikiagoa.

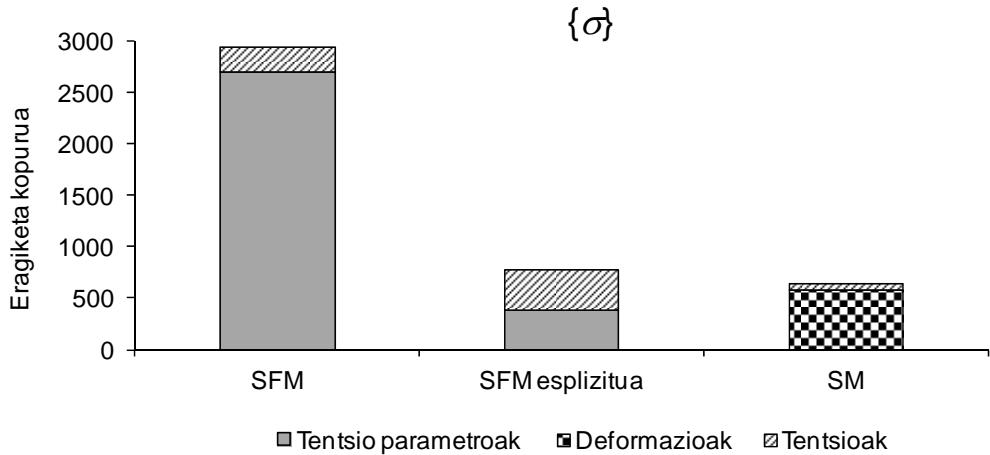
2.2 taula: Lau nodoko elementu isoparametrikoaren tentsioak kalkulatzeko eragiketa kopuruaren alderaketa.

Pausoa	Oinarrizko SFM	SFM formulazio esplizitua	SM
$\{F^j\}$ ^a	2702	369	-
$\{\varepsilon\}$ ^b	-	-	572
$\{\sigma\}$ ^c	240	393	60
GUZTIRA	2942	762	632

^aOinarrizko SFM: (2.21) ekuazioa, $[E]$ eta $[G]$ matrizeen kalkulu errepikatua, alderantzizkoa Cholesky erabiliz (5×5), bi matrize biderketa (5×5 , 5×5 eta 5×5 , 5×8), matrize-bektore biderketa (5×8 , 8); SFM esplizitua: (2.34) ekuazioa, $[\bar{E}^*]$ matrizearen kalkulu errepikatua, matrize-bektore biderketa (5×8 , 8); SM: ez da aplikatzen.

^bSM: matrize-bektore biderketa (3×8 , 8); Oinarrizko SFM eta SFM esplizitua: ez da aplikatzen.

^cOinarrizko SFM eta SFM esplizitua: (2.12) eta (2.35) ekuazioak, matrize-bektore biderketa (3×5 , 5); SM: matrize-bektore biderketa (3×3 , 3).



2.5 irudia. Elementuaren edozein puntutako tentsioak lortzeko eragiketa kopuruaren alderaketa.

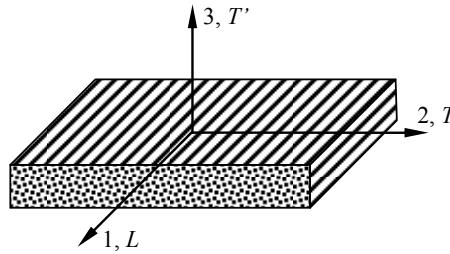
2.5 SM ETA SFM METODOEN ALDERAKETA MATERIAL ORTOTROPOA DUEN HEGAL-HABE BATEAN

2.5.1 MATERIAL ORTOTROPOA

Laminatu konpositeak zuntz luzez erreforzaturiko xaflez osaturik daudenez, xafla bakoitzeko materialak hiru simetria-plano ditu: 13, 12 eta 23; 2.6 irudian ikus daitekeen moduan. Beraz, xafla bakoitzeko materiala ortotropoa da. 2.6 irudian azaltzen diren 1, 2 eta 3 norabideak ortotropia norabide nagusiak dira eta norabide nagusi horiekiko elkarzutak diren planoak, ortotropia plano nagusiak.

Material konpositeak aplikazio estrukturaletan erabiltzen direnean, gehienetan lodiera txikiko laminatuak eta laminatuaren planoan kargaturikoak erabiltzen dira [48]. Kasu horretan laminatu konpositeak tentsio egoera lauean daudela suposa daiteke, hots, planoz kanpoko tentsio osagaiak (3 norabidekoak) nuluak direla:

$$\begin{aligned}\sigma_3 &= 0 \\ \tau_{23} &= \tau_4 = 0 \\ \tau_{13} &= \tau_5 = 0\end{aligned}\tag{2.51}$$



2.6 irudia. Laminatu konpositearen ortotropia norabide nagusiak.

Beraz, material ortotropoaren kasuan, tentsio egoera laua denean, tentsio-deformazio erlazioa honakoa da:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

(2.52) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{13}\varepsilon_3 \\ \sigma_2 &= C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + C_{23}\varepsilon_3 \\ 0 &= C_{13}\varepsilon_1 + C_{23}\varepsilon_2 + C_{33}\varepsilon_3 \\ \gamma_4 &= \gamma_5 = 0 \\ \tau_6 &= C_{66}\gamma_6 \end{aligned} \quad (2.53)$$

(2.53) ekuaziotik ε_3 ezabatuz:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \left(C_{11} - \frac{C_{13}C_{13}}{C_{33}} \right) \varepsilon_1 + \left(C_{12} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}} \right) \varepsilon_2 = Q_{11}\varepsilon_1 + Q_{12}\varepsilon_2 \\ \sigma_2 &= \left(C_{12} - \frac{C_{23}C_{13}}{C_{33}} \right) \varepsilon_1 + \left(C_{22} - \frac{C_{23}C_{23}}{C_{33}} \right) \varepsilon_2 = Q_{12}\varepsilon_1 + Q_{22}\varepsilon_2 \\ \tau_6 &= C_{66}\gamma_6 = Q_{66}\gamma_6 \end{aligned} \quad (2.54)$$

Non Q_{ij} materialaren zurruntasun murriztuaren koefizienteak diren, $i,j = 1, 2, 6$ izanik. (2.54) ekuazioa matrize moduan idatz daiteke:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.55)$$

Deformazio eta tentsioen arteko erlazioa (2.55) ekuazioaren alderantzizkoa kalkulatuz lor daiteke:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} \quad (2.56)$$

S_{ij} materialaren malgutasun koefizienteak izanik.

Materialaren propietate elastikoak ingeniaritzako konstanteak erabiliz definitu ohi dira, hau da, luzetarako eta ebakidura moduluekin eta Poisson-en koefizienteekin. Materialaren malgutasun koefizienteen eta ingeniaritzako konstanteen arteko erlazioak honakoak dira [48]:

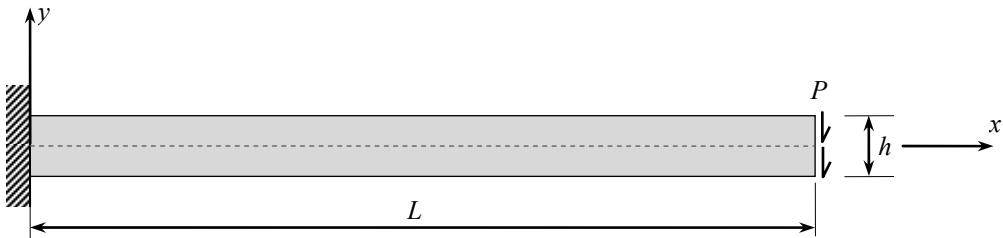
$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_1} \\ S_{22} &= \frac{1}{E_2} \\ S_{12} = S_{21} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \\ S_{66} &= \frac{1}{G_{12}} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Materialaren zurruntasun murriztuen koefizienteen eta ingeniaritzako konstanteen arteko erlazioak [48]:

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\
 Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\
 Q_{12} = Q_{21} &= \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\
 Q_{66} &= G_{12}
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

2.5.2 HEGAL-HABE BATEN ANALISIA

Atal honetan zuntzak luzetarako norabidean dituen laminatu konposite batez, hau da, material ortotropoz, osaturiko hegazkinaren hegazkinaren analisia egin da, SM eta SFM metodoak erabiliz. Habearren geometria, ingurune-baldintzak eta karga egoera 2.7 irudian ikus daitezke.



2.7 irudia. Hegazkinaren geometria, ingurune-baldintzak eta karga egoera.

Analisiaren erabilien materiala Hexcel Composites enpresako AS4-3501-6 norabide bakarreko karbono/epoxi konpositea da eta bere propietate elastikoak 2.3 taulan azaltzen dira [48].

2.3 taula: AS4-3501-6 konpositearen propietate mekanikoak.

E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{12}
147,0	10,3	7,0	0,27

Analisi numerikoa egiteko, SM eta SFM metodoen formulazioak MATLABen [49] implementatu dira. MATLAB programa komertziala eta elementu finituen SM edo desplazamenduen metodoa lotzen dituzten hainbat liburu aurki daitezke [50-52]. Analisi numerikoan lau nodoko elementuak eta diskretizazio maila desberdinak erabili dira. Kasu honetan, tentsio egoera laua eta material ortotropoa konsideratu dira. SM metodoaren kodea idazterakoan oinarriak Ferreiraaren [51] eta Oñateren [53] liburuak izan dira eta SFM metodoaren kodea SM metodoarentzat idatzitakoan oinarrituz garatu da.

Emaitzak numerikoa hurbilketa analitikoaren bidez lorturikoekin alderatu dira. Hurbilketa analitiko hori Timoshenko-ren habeen teorian oinarrituz eta ebakiduraren eragina kontuan hartuz egin da. Beraz, habearren erdiko lerroaren edozein puntutako desplazamendu bertikala hurrengo ekuazioa erabiliz zehaztu daiteke:

$$v = -\frac{6Px^2}{E_1 t h^3} \left(L - \frac{x}{3} \right) - \frac{3}{5} \frac{Px}{G_{12} ht} \quad (2.59)$$

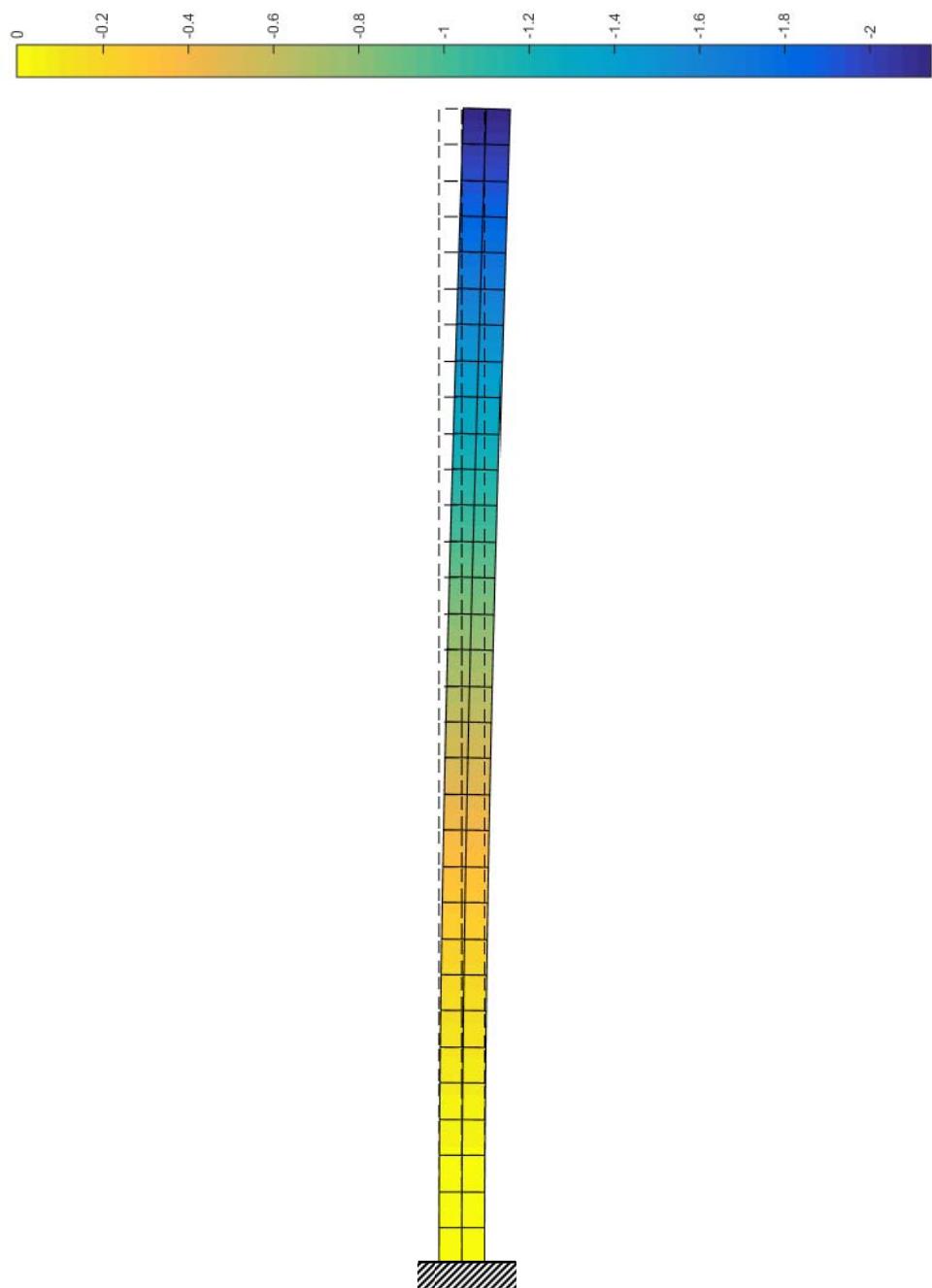
Hurbilketa analitikoaren arabera tentsio maximoak honakoak dira:

$$\sigma_x = \frac{6P}{th^2} (-L + x) \quad (2.60)$$

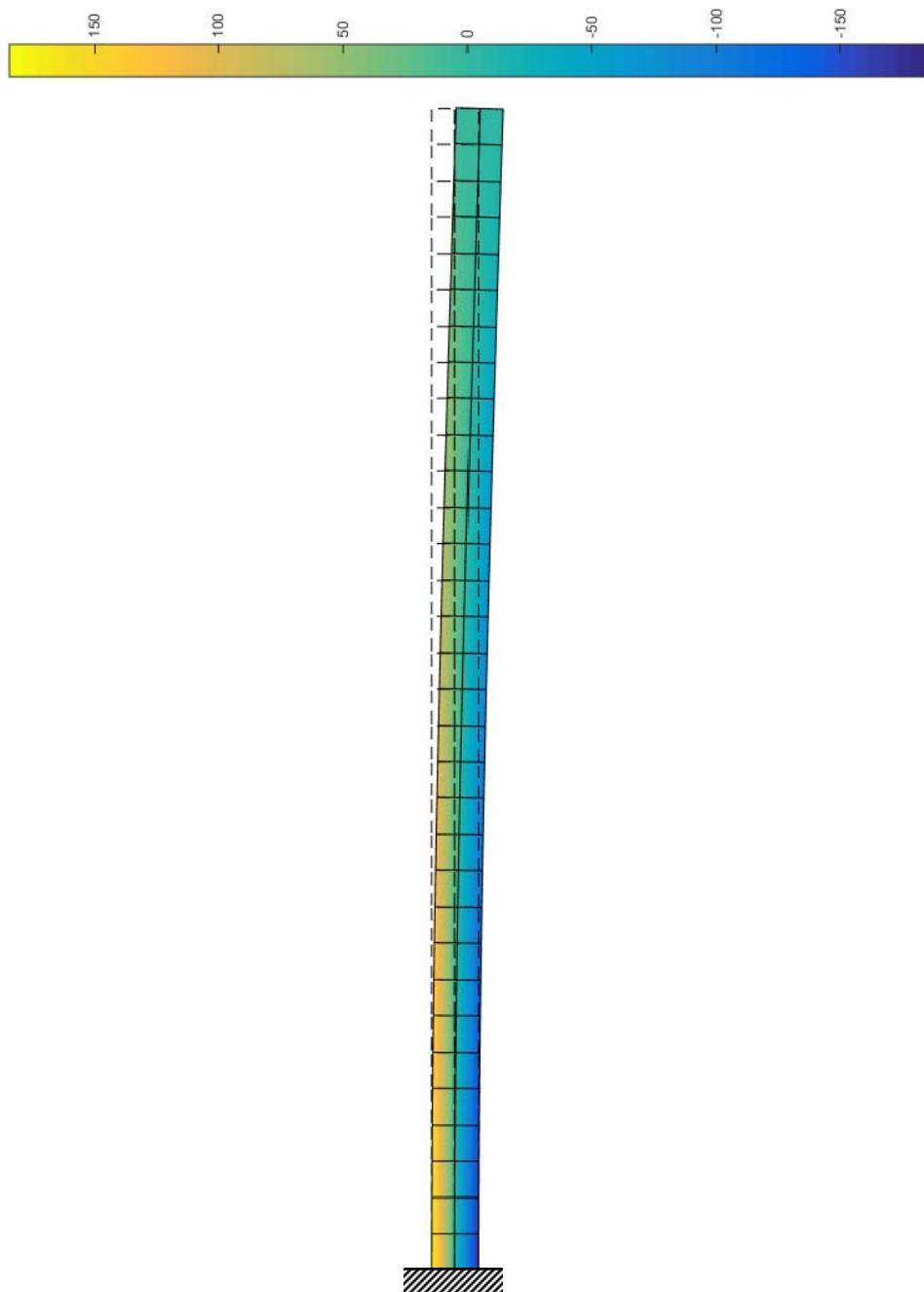
Hegal-habearren analisi numerikoa konsideratu diren dimentsioak honakoak dira: luzera $L = 100$ mm, altuera $h = 4$ mm eta lodiera $t = 2$ mm. Puntan karga berdin banatua konsideratu da $P = 10$ N-ekoa. Hurbilketa analitikoaren bidez lortzen diren desplazamendu bertikal eta tentsio maximoen balioak hauek dira:

$$\begin{aligned} v_{\max} &= 2,137 \text{ mm} \\ \sigma_x &= 187,5 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (2.61)$$

64 elementu erabiliz SFM metodoaren bidez lorturiko hegazkinaren desplazamendu bertikalak 2.8 irudian ikus daitezke eta tentsio horizontalak 2.9 irudian.

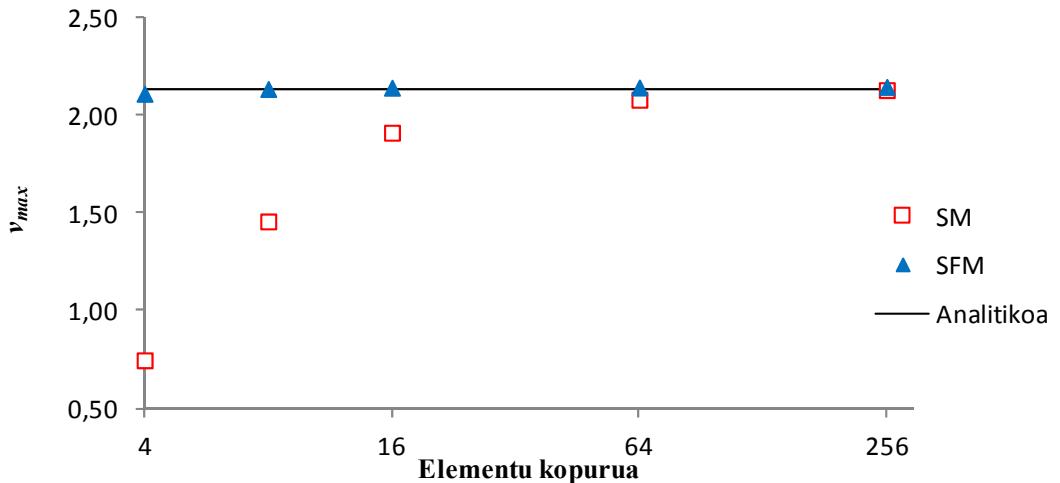


2.8 irudia. Hegal-habearen desplazamendu bertikalak, SFM metodoa aplikatzean.

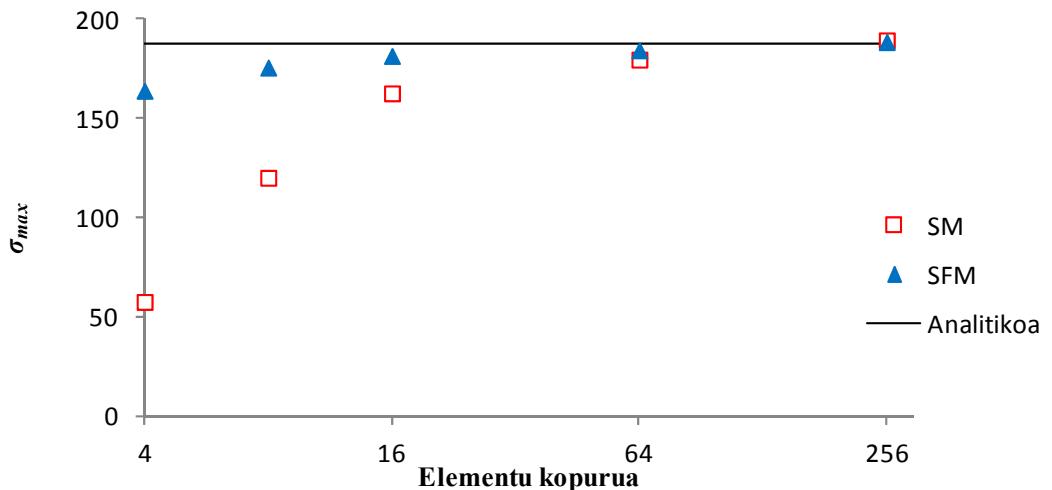


2.9 irudia. Hegal-habearen tentsio horizontalak, SFM metodoa aplikatzean.

Elementu finituen modeloetan elementu kopurua handitzenten den heinean SM eta SFM metodoak erabiliz kalkulaturiko desplazamendu bertikal maximoa 2.10 irudian azaltzen da eta tentsio maximoa 2.11 irudian.



2.10 irudia. Hegal-habearen desplazamendu bertikalen alderaketa.



2.11 irudia. Hegal-habearen tentsio horizontal maximoen alderaketa.

2.10 eta 2.11 irudietan ikus daitekeen moduan, SFM metodoa erabiliz elementu kopuru txikiiekin lortzen diren emaitzek adostasun egokia azaltzen dute hurbilketa analitikoarekin. Aldiz, SM metodoa erabiliz emaitza egokiak lortzeko beharrezko da FEM analisietan elementu kopuru handiagoak erabiltzea.

2.6 BIBLIOGRAFIA

- [1] Reddy JN. An introduction to the finite element method. McGraw-Hill, 1993.
- [2] Oñate E, Zienkiewicz OC. Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos: análisis estático lineal. 2a. ed. Barcelona: Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingenieria, 1995.
- [3] Vázquez M, López E, López E, Vázquez MVF. El método de los elementos finitos aplicado al análisis estructural. Madrid: Noela, 2001.
- [4] Robinson J. Integrated Theory of Finite Element Methods. London: John Wiley & Sons, 1973.
- [5] Felippa CA. A historical outline of matrix structural analysis: a play in three acts. Comput Struct 2001; 79: 1313-24.
- [6] Zienkiewicz OC. Displacement and equilibrium models in the finite element method by B. Fraeijs de Veubeke, Chapter 9, Pages 145–197 of Stress Analysis, Edited by O. C. Zienkiewicz and G. S. Holister, Published by John Wiley & Sons, 1965. Int J Numer Meth Eng 2001; 52: 287-342.
- [7] Clough RW. The Finite Element Method in Plane Stress Analysis. 1960.
- [8] Przemieniecki JS. Theory of matrix structural analysis. New York: Dover, 1985.
- [9] Zienkiewicz OC, Taylor RL. El método de los elementos finitos. V. I. 4a ed. Barcelona: Cimne, 1993.
- [10] Shames IH, Dym CL. Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics. New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1985.

- [11] Patnaik S. An integrated force method for discrete analysis. *Int J Numer Meth Eng* 1973; 6: 237-51.
- [12] Patnaik SN. The integrated force method versus the standard force method. *Comput Struct* 1986; 22: 151-63.
- [13] Patnaik SN, Nagaraj MS. Analysis of continuum by the integrated force method. *Comput Struct* 1987; 26: 899-905.
- [14] Patnaik SN, Satish HG. Analysis of continuum using boundary compatibility conditions of integrated force method. *Comput Struct* 1990; 34: 287-95.
- [15] Dhananjaya HR, Nagabhushanam J, Pandey PC. Bilinear plate bending element for thin and moderately thick plates using Integrated Force Method. *Struct Eng Mech* 2007; 26: 43-68.
- [16] Dhananjaya HR, Nagabhushanam J, Pandey PC. Automatic generation of equilibrium and flexibility matrices for plate bending elements using Integrated Force Method. *Struct Eng Mech* 2008; 30: 387-402.
- [17] Dhananjaya HR, Pandey PC, Nagabhushanam J. New eight node serendipity quadrilateral plate bending element for thin and moderately thick plates using Integrated Force Method. *Struct Eng Mech* 2009; 33: 485-502.
- [18] Dhananjaya HR, Nagabhushanam J, Pandey PC, Jumaat MZ. New twelve node serendipity quadrilateral plate bending element based on Mindlin-Reissner theory using Integrated Force Method. *Struct Eng Mech* 2010; 36: 625-42.
- [19] Dhananjaya HR, Pandey PC, Nagabhushanam J, Othamon I. Closed form solutions for element equilibrium and flexibility matrices of eight node rectangular plate bending element using integrated force method. *Struct Eng Mech* 2011; 40: 121-48.
- [20] Dhananjaya HR, Pandey PC, Nagabhushanam J, Ibrahim Z. New nine-node Lagrangian quadrilateral plate element based on Mindlin-Reissner theory using IFM. *Struct Eng Mech* 2012; 41: 205-29.

- [21] Patnaik SN, Coroneos RM, Hopkins DA. Recent advances in the method of forces: integrated force method of structural analysis. *Adv Eng Software* 1998; 29: 463-74.
- [22] Pian THH. Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Stress Distributions. *AIAA J* 1964; 2: 1333-6.
- [23] Pian THH, Chen D. Alternative ways for formulation of hybrid stress elements. *Int J Numer Meth Eng* 1982; 18: 1679-84.
- [24] Punch EF, Atluri SN. Development and testing of stable, invariant, isoparametric curvilinear 2- and 3-D hybrid-stress elements. *Comput Methods Appl Mech Eng* 1984; 47: 331-56.
- [25] Pian THH. State-of-the-art development of hybrid/mixed finite element method. *Finite Elem Anal Des* 1995; 21: 5-20.
- [26] Wu C, Cheung YK. On optimization approaches of hybrid stress elements. *Finite Elem Anal Des* 1995; 21: 111-28.
- [27] Pian THH. Some notes on the early history of hybrid stress finite element method. *Int J Numer Meth Eng* 2000; 47: 419-25.
- [28] Adarraga I, Cantera MA, Romera JM, Insausti N, Mujika F. The dual integrated force method applied to unidirectional composites. *Int J Numer Meth Eng* 2014; 98: 663-77.
- [29] Love AEH. A treatise on the mathematical theory of elasticity. 4th ed. New York: Dover, 1944.
- [30] Sokolnikoff IS. Mathematical theory of elasticity. New York: McGraw-Hill Book, 1956.
- [31] Muskhelishvili NI. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity: fundamental equations plane theory of elasticity torsion and bending. 4th éd corr y augm. Groningen: Noordhoff, 1977.

- [32] Pian THH, Chen D. On the suppression of zero energy deformation modes. *Int J Numer Meth Eng* 1983; 19: 1741-52.
- [33] Pian THH, Sumihara K. Rational approach for assumed stress finite elements. *Int J Numer Meth Eng* 1984; 20: 1685-95.
- [34] Kaljević I, Patnaik SN, Hopkins DA. Development of finite elements for two-dimensional structural analysis using the integrated force method. *Comput Struct* 1996; 59: 691-706.
- [35] Kaljević I, Patnaik SN, Hopkins DA. Three-dimensional structural analysis by the integrated force method. *Comput Struct* 1996; 58: 869-86.
- [36] Feng W, Hoa SV, Huang Q. Classification of stress modes in assumed stress fields of hybrid finite elements. *Int J Numer Meth Eng* 1997; 40: 4313-39.
- [37] Zhang C, Wang D, Li T. Orthogonal basic deformation mode method for zero-energy mode suppression of hybrid stress elements. *Appl Math Mech-English Ed* 2011; 32: 83-96.
- [38] Zhang C, Hoa SV. A systematic and quantitative method to determine the optimal assumed stress fields for hybrid stress finite elements. *Finite Elem Anal Des* 2014; 80: 41-62.
- [39] Saether E. Explicit determination of element stiffness matrices in the hybrid stress method. *Int J Numer Meth Eng* 1995; 38: 2547-71.
- [40] Saether E. An explicit plane quadrilateral element for nonlinear material analysis. *Comput Struct* 1996; 61: 529-38.
- [41] Zhang CH, Feng W, Huang Q. The stress subspace of hybrid stress element and the diagonalization method for flexibility matrix H. *Appl Math Mech-English Ed* 2002; 23: 1263-73.
- [42] Zhang C, Wang D, Zhang J, Feng W, Huang Q. On the equivalence of various hybrid finite elements and a new orthogonalization method for explicit element stiffness formulation. *Finite Elem Anal Des* 2007; 43: 321-32.

- [43] Pian THH, Chen D, Kang D. A new formulation of hybrid/mixed finite element. *Comput Struct* 1983; 16: 81-7.
- [44] Spilker RL, Singh SP. Three-dimensional hybrid-stress isoparametric quadratic displacement elements. *Int J Numer Meth Eng* 1982; 18: 445-65.
- [45] Hoa SV, Feng W. Hybrid finite element method for stress analysis of laminated composites. Boston: Kluwer Academic, 1998.
- [46] Reddy JN. Energy principles and variational methods in applied mechanics. 2nd ed. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2002.
- [47] Hunger R. Floating point operations in matrix-vector calculus, Techneische universitat Munchen associate institute for signal processing 2007.
- [48] Daniel IM, Ishai O. Engineering mechanics of composite materials. Oxford University Press, 2006.
- [49] The MathWorks I. MATLAB Release 2014b. 2014.
- [50] Kattan PI. MATLAB guide to finite elements : an interactive approach. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 2007.
- [51] Ferreira AJM. MATLAB codes for finite element analysis solids and structures. [Dordrecht]: Springer Science & Business Media, 2009.
- [52] Khennane A. Introduction to finite element analysis using MATLAB and Abaqus. Boca Raton: CRC Press, 2013.
- [53] Oñate E. Structural Analysis with the Finite Element Method. 1st ed. Barcelona: International Center for Numerical Methods in Engineering, 2009.

SM ETA SFM METODOEN ALDERAKETA ERAZTUN ZIRKULAR BATEAN

3.1 SARRERA

Kapitulu honetan aurkako bi indarrek eragindako eraztun zirkularren azterketa eginda, elementu finituengen analisia SM eta SFM metodoak erabiliz. Problema hau aukeratzearen arrazoi nagusia dinamometro komertzial baten zurruntasunari dagozkion datu esperimentalak edukitzea izan da. Horrez gain, tentsioen aurretikoa hurbilketa analitikoak egotea ere bai [1-5].

Bi kasu aztertu dira: alde batetik, dinamometro komertzial bat, eraztun mehea konsidera daitekeena eta bestetik, eraztun lodi bateko tentsio egoera ere aztertu da, aurretikoa elastikotasunaren teorian oinarritutako hurbilketa analitiko batekin lorturiko emaitzak erreferentzia moduan hartuz.

Kurbaturiko barren Winkler-en teoria [6,7] erabili da tentsioak balioztatzeko hurbilketa gisan. Winklerren teoria sekzioak deformatu ondoren lauak izaten jarraitzen duten hipotesian oinarritutako hurbilketa da. Badira beste hurbilketa analitiko batzuk, elastikotasunaren teorian oinarrituak, eraztun lodien kasuan egokiagoak direnak. Timoshenkoko [1] aurkako bi indarren eraginpean dagoen eraztun zirkularren tentsioak lortu zituen, kanpo-diametroa barne-diametroaren bikoitza den kasu partikularrean. Eraztun zirkularren tentsioen kalkulu orokorra Filonek [2] ebatzi zuen. Horrez gain, hainbat autorek egin dute eraztun zirkular lodien tentsio eremuaren

analisia [3-5]. Lan honetan Chianese eta Erdlac-ek [5] proposaturiko adierazpenak erabili dira.

Dinamometroaren kasuan desplazamenduak Engesser-Castiglianoren teorema [6] aplikatuz lortu dira. Amaitzeko, SFM eta SM metodoen bidez lorturiko emaitza numerikoak emaitza esperimental eta analitikoekin alderatu dira.

3.2 BI INDARREN ERAGINPEAN DAGOEN ERAZTUN ZIRKULARRA: HURBILKETA ANALITIKOA

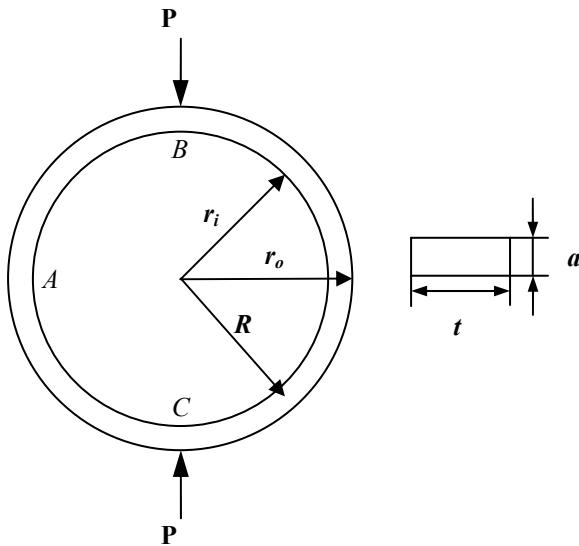
3.2.1 TENTSIO ZIRKUNFERENTZIALAK

Azertuko den eratzun zirkularren eskema 3.1 irudian ikus daiteke. Eraztun zirkularren kanpo erradioa r_o da eta barne erradioa r_i . Eraztunaren zeharkako sekzioa laukizuzena da, a lodiera eta t zabalera dituelarik. Winkler-ek kurbaturiko barren kasurako [6,7] proposaturiko hurbilketaren arabera, tentsio normal zirkunferentzialen banaketa honakoa da:

$$\sigma_\theta = \frac{N}{A} + \frac{M(r - R_e)}{Aer} \quad (3.1)$$

(r, θ) koordenatu polarrak; N indar axiala; A zeharkako sekzioaren azalera; M momentu erresultantea; $R_e = a / (\ln r_o / r_i)$ gainazal neutroaren erradioa; $e = R_a - R_e$ batez besteko erradioaren eta gainazal neutroaren erradioaren arteko desberdintasuna eta $R_a = r_o + a/2$ O puntutik zeharkako sekzioaren zentroidera dagoen distantzia izanik.

Habe kurbatuetan, hasierako kurbadura medio, tentsio erradial handiak garatu daitezke. Tentsio erradial hauek habearen kurbadura erradioarekiko r alderantziz proporzionalak dira [6]. Hala ere, azertuko den eratzun zirkularren kasuan kurbadura erradioa handia da eta, ondorioz, tentsio erradialak σ_r eta tentsio ebakitzaleak $\tau_{r\theta}$ arbuiagarriak dira tentsio zirkunferentzialekin σ_θ alderatuz gero.



3.1 irudia. Eraztun zirkularren eskema.

3.2.2 DESPLAZAMENDUAK

Desplazamenduak Engesser-Castiglianoren teorema erabiliz kalkulatu dira. Teorema honela adieraz daiteke:

$$\frac{\partial U^*}{\partial F_i} = \delta_i \quad (3.2)$$

Non U^* deformazio energia osagarria, aplikaturiko indarren F_i funtzioa den, eta δ_i F_i indarraren aplikazio puntuko desplazamenduaren osagaia den, indarraren norabidean. Bestalde, Winkler-en hurbilketan, (3.1) ekuazioan, zehazturiko tentsio zirkunferentzialen banaketa hiperbolikoa kontuan izanda, tentsio zirkunferentzialei dagokien bolumen unitateko deformazio energia osagarria honakoa da:

$$u^* = \frac{1}{2E} \sigma_\theta^2 = \frac{1}{2E} \left(\frac{N^2}{A^2} + \frac{M^2 (r - R_e)^2}{A^2 e^2 r^2} + 2 \frac{N M (r - R_e)}{A e r} \right) \quad (3.3)$$

Deformazio energia osagarria osoa (3.3) ekuazioa integratuz lor daiteke:

$$U^* = \int_V u dV = \frac{1}{2E} \left[\int_L \frac{N^2}{A^2} dl \int_A dA + \int_L \frac{M^2}{A^2 e^2} dl \int_A \frac{(r - R_e)^2}{r^2} dA + \int_L \frac{2NM}{A^2 e^2} dl \int_A \frac{(r - R_e)}{r} dA \right] \quad (3.4)$$

$$U^* = \int_L \frac{N^2}{2EA} dl + \int_L \frac{M^2}{2EA^2 e^2} (R_e^2 \beta - A) dl$$

Non $\beta = \int_A \frac{dA}{r^2}$ den eta zeharkako sekzio laukizuzenaren kasuan $\beta = \frac{ta}{r_i r_o}$.

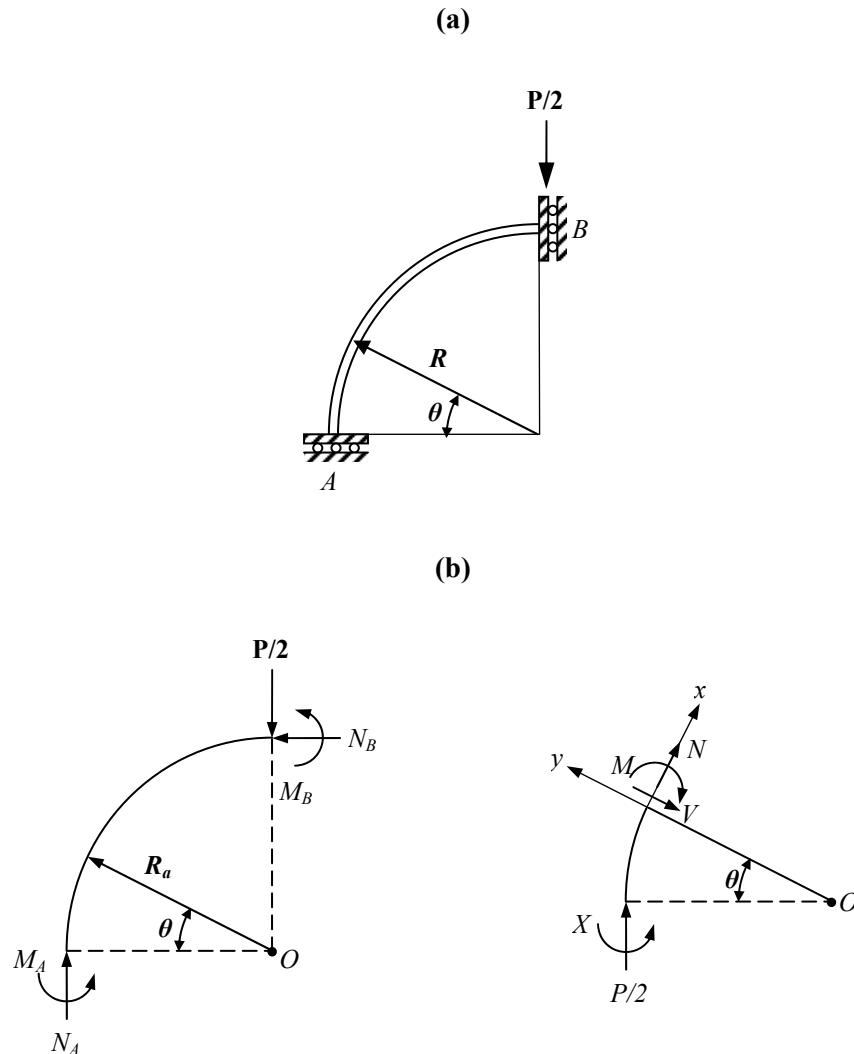
Makurdurari dagokion deformazio energia osagarria hurrengo moduan ere defini daiteke:

$$U_M^* = \int_L \frac{M^2}{2EI^*} ds \quad (3.5)$$

$$I^* = \frac{A^2 e^2}{R_e^2 \beta - A} \text{ izanik.}$$

Aurreko atalean aipatu den moduan, tentsio ebakitzailen eta erradialen eragina tentsio zirkunferentzialena baino txikiagoa da. Beraz, lehenengo hurbilketa moduan, tentsio erradialen eragina ez da kontuan izan eta tentsio ebakitzailen lodieran zehar banaketa parabolikoa dutela konsideratu da. Ondorioz, ebakitzailen faktorearen balio gisa habe zuzenena erabili da, hau da, $6/5$. Beraz, F_i indar batekiko deformazio energia osagarriaren deribatua honakoa da:

$$\frac{\partial U^*}{\partial F_i} = \int_L \frac{MM'}{EI^*} dl + \int_L \frac{NN'}{EA} dl + \frac{6}{5} \int_L \frac{VV'}{GA} dl \quad (3.6)$$



3.2 irudia. Modelo analitikoa: (a) geometria eta karga baldintzak; (b) barne indarrak eta momentua.

Aurkako bi indarren eraginpean dagoen eraztun zirkularrean dauden simetria baldintzak kontuan izanda, eraztun laurdenaren analisia egin daiteke (ikus 3.2 irudia). 3.2 irudian A eta B sekzioetako indar normalak eta momentu makurtzaileak ikus daitezke. Bestalde, $M_A = X$ erredundante ezezagun moduan kontsideratuz, edozein sekziotako indar eta momentua honakoak dira:

$$\begin{aligned} N &= -\frac{P}{2} \cos \theta \\ V &= \frac{P}{2} \sin \theta \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ M &= X + \frac{P}{2} R_a (1 - \cos \theta) \end{aligned} \tag{3.7}$$

X eredundante ezezagunari dagokion desplazamendua 0 denez, (3.6) ekuazioa aplikatuz, A eta B sekzioetako momentu makurtzaileak honakoak dira:

$$\begin{aligned} M_A &= \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} \right) PR_a \\ M_B &= \frac{P}{\pi} R_a \end{aligned} \tag{3.8}$$

Behin barne indarrak eta momentuak determinatu ondoren, B sekzioko desplazamendu bertikala (3.6) ekuazioa berriro erabiliz kalkula daiteke:

$$\delta_B = \frac{\partial U^*}{\partial \left(\frac{P}{2} \right)} = \left(\frac{-1}{\pi} + \frac{\pi}{8} \right) \frac{PR_a^3}{EI^*} + \frac{\pi}{8} \frac{PR_a}{EA} + \frac{3\pi}{20} \frac{PR_a}{GA} \tag{3.9}$$

3.1 irudia. Eraztun zirkularren eskema 3.1 irudiko B eta C puntuen arteko desplazamendu erlatiboa $\delta_{BC} = 2\delta_B$ da.

Antzeko prozedura jarraituz eta karga unitatearen metodoa erabiliz, A sekzioko desplazamendu horizontala lor daiteke:

$$\delta_A = \left(\frac{-1}{\pi} + \frac{1}{4} \right) \frac{PR_a^3}{EI^*} - \frac{PR_a}{4EA} + \frac{3}{10} \frac{PR_a}{GA} \tag{3.10}$$

3.3 ELEMENTU FINITUEN BIDEZKO KALKULUA

Aurkako bi indarren eraginpean dagoen eratzun zirkularren analisi numerikoa elementu finituen bidez egin da, SM eta SFM metodoen formulazioak MATLABen implementatu direlarik.

Aurreko atalean aipatu den moduan, simetria baldintzak kontuan izanda, aurkako bi indarren eraginpean dagoen eraztun zirkularren analisi numerikoan ere eraztun laurdenaren modeloa erabili da. Analisi horretan bi dimentsiotako lau nodoko elementu isoparametrikoko eta diskretizazio maila desberdinak erabili dira. Ferreiraren [8] eta Oñateren [9] liburueta oinarritzu MATLABen implementaturiko kodea A eranskinean ikus daiteke. Kodea garatzerakoan tentsio egoera laua eta material isotropoa konsideratu dira. Jarraitu diren pausoak honakoak dira:

- Materialaren zurruntasun eta malgutasun koefizienteen matrizeak osatu
- Geometria definitu eta maila osatu (*archMesh_90* funtzioa erabiliz).
- Sistemaren zurruntasun matrizea lortu:
 - *formStiffness2D* funtzioa SM metodoaren zurruntasun matrizea eraikitzeko
 - *formStiff2D_SFM* funtzioa SFM metodoaren zurruntasun matrizea eraikitzeko
- Ingurune-baldintzak definitu
- Indar bektorea definitu
- Sistemaren ebazpena, *solution* funtzioa erabiliz
- Nodoetako desplazamenduak lortu
 - *displacements* funtzioa SM metodoaren kasuan
 - *displSFM* funtzioa SFM metodoaren kasuan
- Nodoetako tentsioak lortu
 - *stresses2D* funtzioa SM metodoaren bidez tentsioak lortzeko
 - *stresses2DSFM* funtzioa SFM metodoaren bidez tentsioak lortzeko

3.4 EMAITZA ANALITIKO, NUMERIKO ETA ESPERIMENTALAK

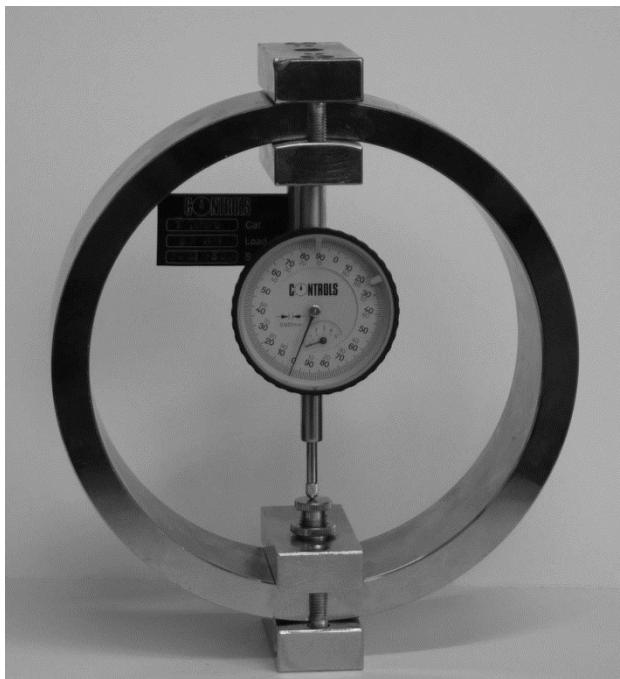
3.4.1 DESPLAZAMENDUAK: ERAZTUN MEHEA

Zeharkako sekzio laukizuzena duen eta 3.3 irudian ikus daitekeen dinamometro zirkularra aztertu da. CONTROLS fabrikatzaleak [10] emaniko karga-desplazamendu datu esperimentalak erabili dira analitikoki eta numerikoki lorturiko emaitzekin alderatzeko. Fabrikatzaleak emandako ezaugarri geometrikoak eta propietate elastikoak honakoak dira:

$$r_o = 91 \text{ mm}, \quad r_i = 78 \text{ mm}, \quad a = 13 \text{ mm} \text{ eta } t = 51 \text{ mm}$$

$$E = 210 \text{ GPa}, \quad G = 80,8 \text{ GPa} \text{ eta } \nu = 0,3.$$

Fabrikatzailearen datuen arabera, karga-desplazamendu erlazioa lineala da. Dinamometroaren zurruntasunaren k balioak esperimentalki, analitikoki eta numerikoki, SM eta SFM erabiliz, zehaztu dira. Lorturiko balioak 3.1 taulan ikus daitezke. Balio numerikoak 48 elementu dituen modeloa erabiliz lortu dira. SFM metodoaren bidez lorturiko balioak esperimentalki eta hurbilketa analitikoaren bidez lorturiko balioetatik gertuago daude, SM metodoa erabiliz lorturikoak baino.



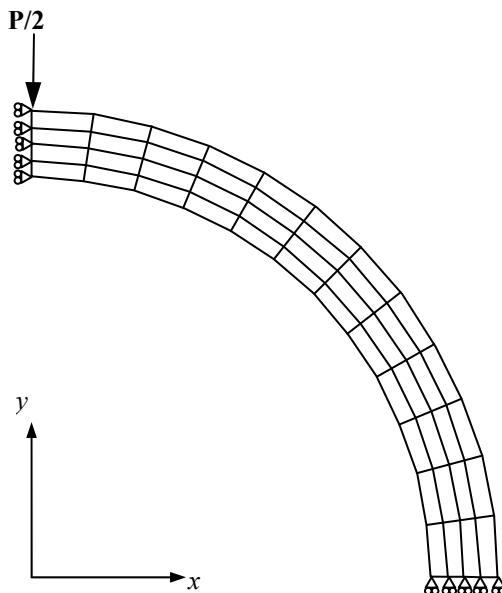
3.3 irudia. Dinamometro zirkularra.

Hurbilpen analitikoari dagokion (3.9) ekuazioa erabiliz lorturiko zurruntasun konstantearen balioa eta esperimentalki lorturikoa bat datozen arteko errore erlatiboa % 0,8 izanik. Beraz, hemendik aurrera emaitza numerikoak eta analitikoak alderatuko dira.

3.1 taula: Dinamometroaren zurruntasun konstantea k , N/mm-tan.

	Esperimentalal	Hurbilketa analitikoa	SFM	SM
k (N/mm)	20756	20914	21385	27223

Aurreko atalean aipatu moduan, dinamometroaren desplazamenduak numerikoki, elementu finituengen bidez, zehaztu dira SM eta SFM metodoak MATLABBen implementatuz. Bi dimentsiotako lau nodoko elementuak eta diskretizazio maila desberdinak erabili dira. 48 elementuz osaturiko modeloa 3.4 irudian ikus daiteke.

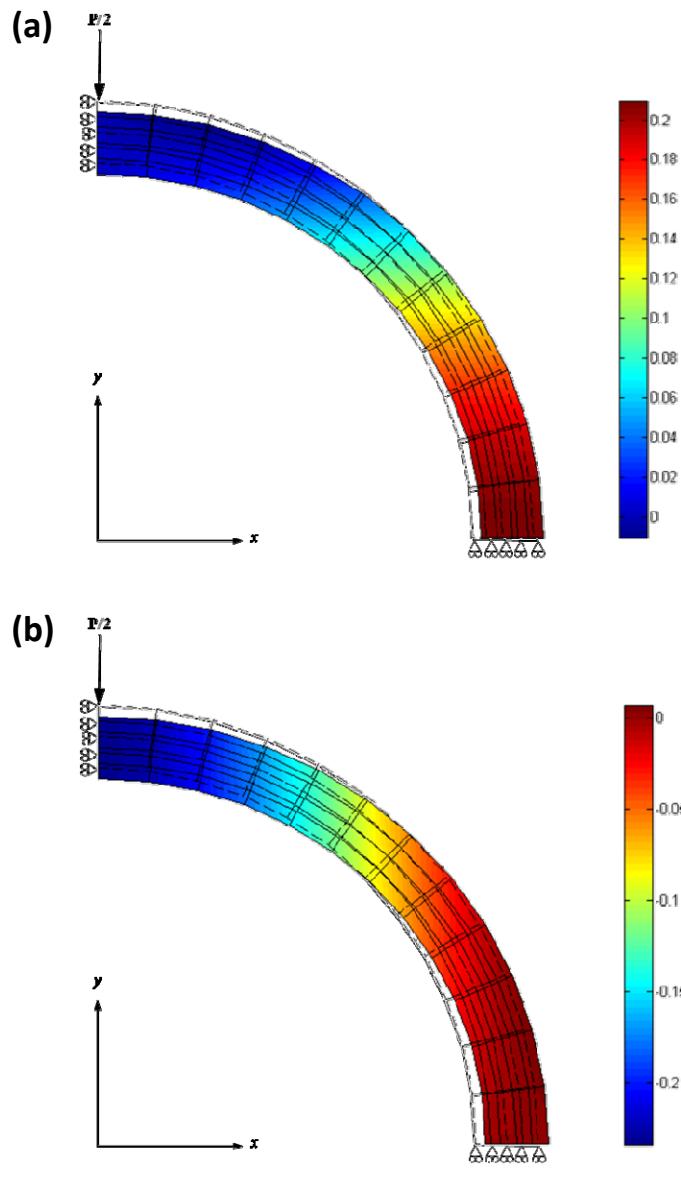


3.4 irudia. 48 elementuz osaturiko eraztun zirkularren elementu finituetako modeloaren koordenatu sistema, diskretizazioa, karga eta ingurune-baldintzak.

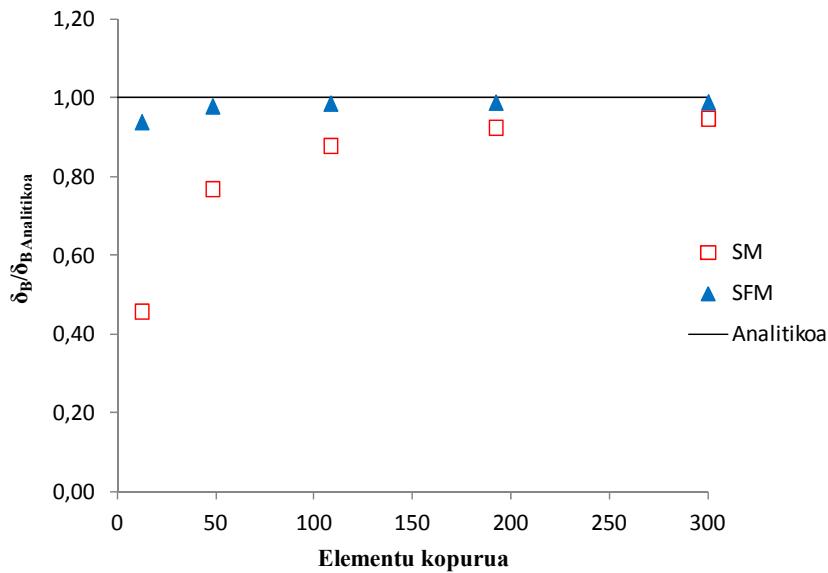
Lorturiko emaitzei dagokienean SFM metodoa eta 48 elementu erabiliz kalkulaturiko desplazamenduen balioak 3.5 irudian ikus daitezke. 3.5a irudian desplazamendu horizontalak agertzen dira, balio handienak gorri eta txikienak urdinez irudikatu direlarik. 3.5b irudian desplazamendu bertikalak ikus daitezke, kasu honetan ere antzerako kolore eskala erabili da. Hala ere, kontuan izan behar da, desplazamendu balio handienak negatiboak direnez, urdinez irudikatuta daudela.

3.6 irudian elementu finituen bidez, SFM eta SM metodoak eta diskretizazio maila desberdinak erabiliz lorturiko B puntuko desplazamendu bertikalaren balioak ikus

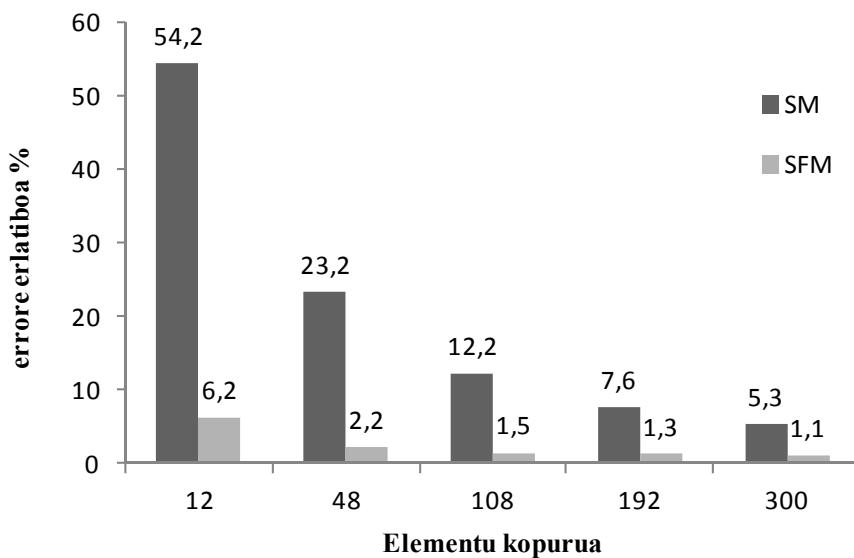
daitezke, balio analitikoarekiko normalizatuta. SFM bidez lorturiko emaitzak azkarago gerturatzenten dira balio analitikora, SM bidezkoak baino.



3.5 irudia. SFM bidez kalkulaturiko desplazamenduak: a) desplazamendu horizontalak; b) desplazamendu bertikalak.



3.6 irudia. SFM eta SM bidez lorturiko B puntuko desplazamendu bertikala balio analitikoarekiko normalizatua.



3.7 irudia. B puntuko desplazamendu bertikalaren errore erlatiboak balio analitikoarekiko.

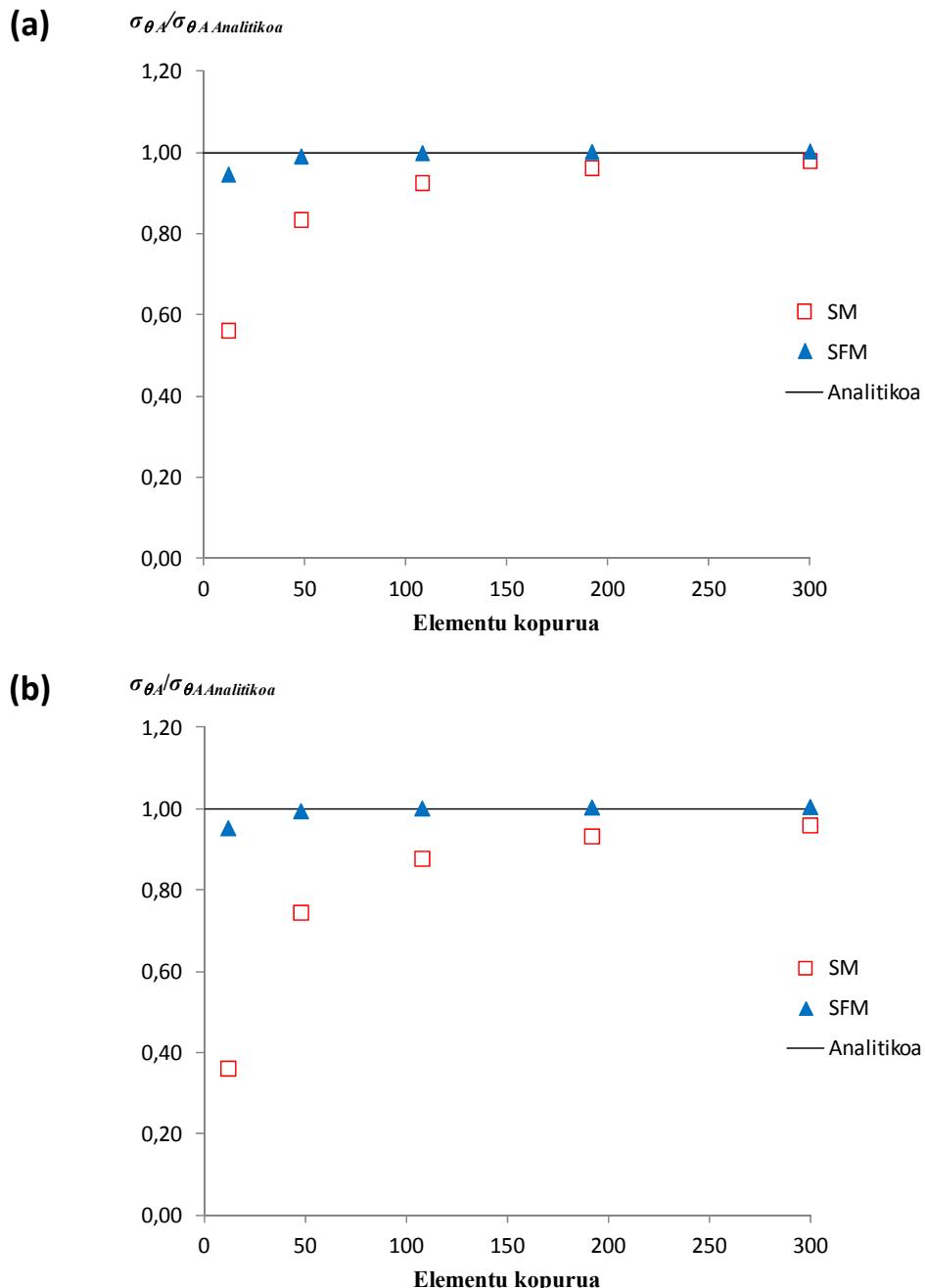
Balio analitikoarekiko errore erlatiboak 3.7 irudian ikus daitezke. 48 elementuz osaturiko modeloaren kasuan, SFM bidez lorturiko desplazamendu bertikalaren errore erlatiboa % 2 ingurukoa da. SM metodoaren bidez errore erlatibo hori lortzeko 1200 elementuko modeloa erabili behar da. Adibide honetan konputazio kostua ez da gakoa, dena den, aurreko kapituluan adierazitako elementu bakoitzeko konputazio kostuan lorturiko aurrezpenaz gain, errore bera lortzeko 25 aldiz gutxiagotzen da SFM bidez erabili beharreko elementu kopurua SM metodoarekin alderatuz gero. Beste modu batean esanda, makurdura nagusi den problema lauen kasuan, konputazio kostu berarentzat sistema handiagoak modelizatu daitezke SFM erabiliz gero.

3.4.2 TENTSIOAK: ERAZTUN MEHEA

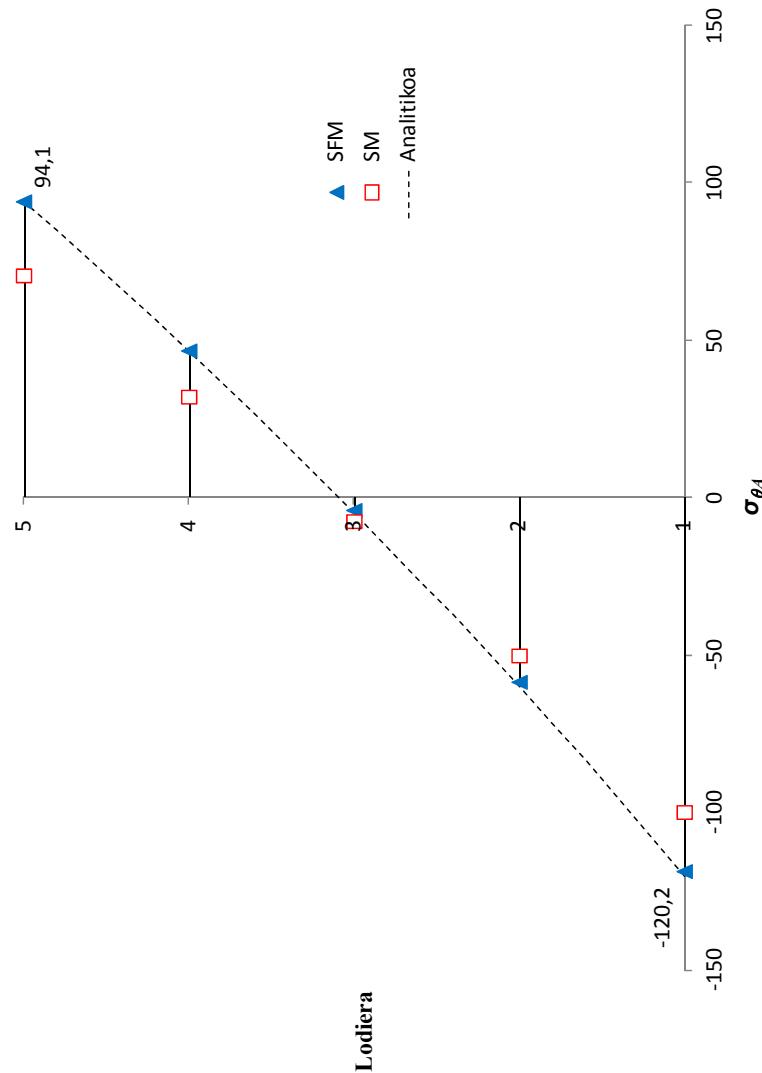
Dinamometroaren zurruntasun konstantearen balio esperimentalala fabrikatzaileak emana izan da eta balio analitikoa deformazio energia osagarriaren bidez lortu da, tentsio banaketan oinarrituz. Gainera, esperimentalki eta analitikoki lorturiko desplazamenduen balioak bat datozi. (3.1) ekuazioko tentsio eremuaren bidez desplazamendu zuzenak lortzen direnez, tentsio banaketa analitikoa ere egokia dela ondorioztatzen da eta elementu finituak bidez lorturiko emaitzak horiekin alderatuko dira.

3.8 irudian *A* sekzioko (ikus 3.1 irudia) barrualdeko eta kanpoaldeko erradioetan SFM eta SM metodoak erabiliz lorturiko tentsio zirkunferentzialak ikus daitezke, elementu kopuru desberdinaren kasuan. SFM metodoaren bidez SM metodoaren bidez baino elementu kopuru txikiagoekin hurbiltzen dira emaitzak balio analitikora. 3.9 irudian 48 elementuko elementu finituak modeloarekin lorturiko *A* sekzioko lodieran zeharreko tentsio zirkunferentzialen banaketa ikus daiteke. SFM bidez lorturiko tentsioen emaitzak hurbilketa analitikotik gertuago daude SM bidez lorturikoak baino.

Elementu finituak erabiliz (3.1) ekuazioarekiko errore erlatiboak 3.10 irudian ikus daitezke. SFM metodoaren kasuan errore erlatibo hori % 2 baino txikiagoa da, eraztunaren barrualdeko erradioan nahiz kanpoaldekoan. SM metodoa erabiliz errore erlatibo hori lortu ahal izateko 600 elementu dituen modeloa behar da. Beraz, tentsioen kasuan, SFM eta SM bidez errore bera lortzeko, SFM metodoan erabili beharreko elementu kopurua 12 aldiz txikiagoa da.

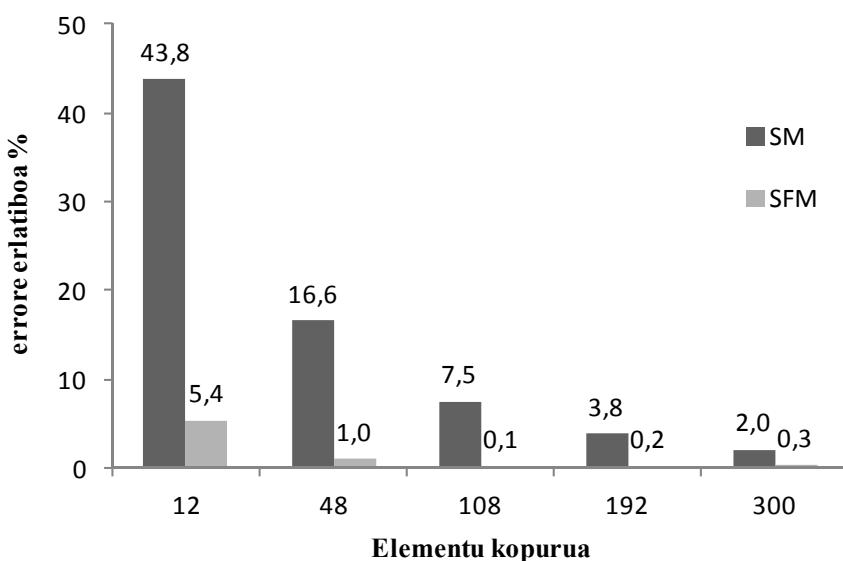


3.8 irudia. A sekzioko tentsioen FEM emaitzak, balio analitikoarekiko normalizatuak: a) barnealdean; b) kanpoaldean.

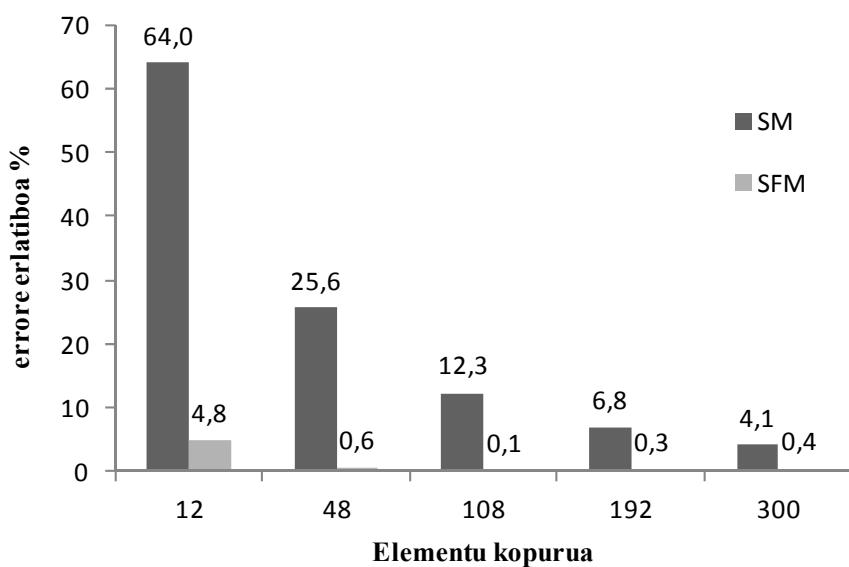


3.9 irudia. Eraztunaren lodieran zeharreko tentsioen banaketa analitikoa eta FEM bidezkoa, A sekzioan, 48 elementu erabiliz.

(a)



(b)



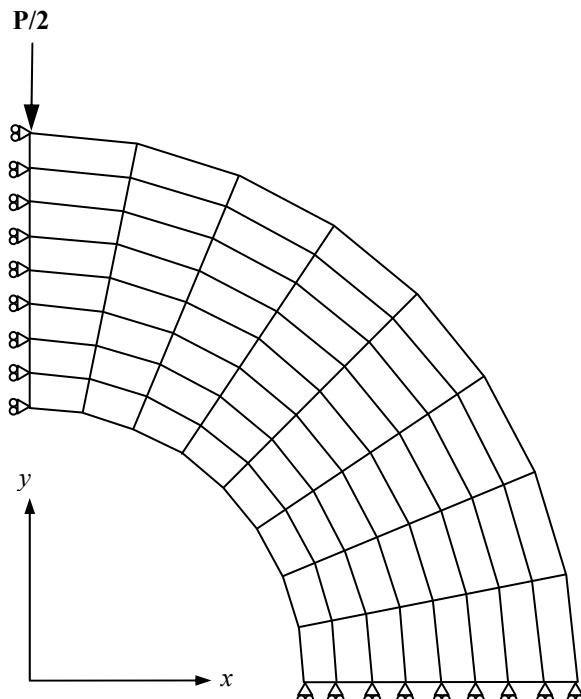
3.10 irudia. A sekzioko tentsioen errore erlatiboak balio analitikoarekiko: a) barrualdean; b) kanpoaldean.

3.4.3 TENTSIOAK: ERAZTUN LODIA

Aurreko analisian, barne-erradioaren eta kanpo-erradioaren arteko erlazioa $\rho = r_i / r_o = 0,857$ zen. [1,4] lanetan ikus daiteke erlazio hori txikituz doan heinean, eraztunaren lodiera handituz doala eta tentsio banaketa Winklerren teoriaren bidez lortutakotik desberdina dela. Adibide moduan, Timoshenkok [1] azterturiko eraztun zirkular lodiaren $\rho = 0,5$ tentsio banaketa determinatu da numerikoki. Analisi horretarako 64 elementu dituen modeloa erabili da, 3.11 irudian ikus daitekeena. Geometria eta propietate elastikoak honakoak izan dira:

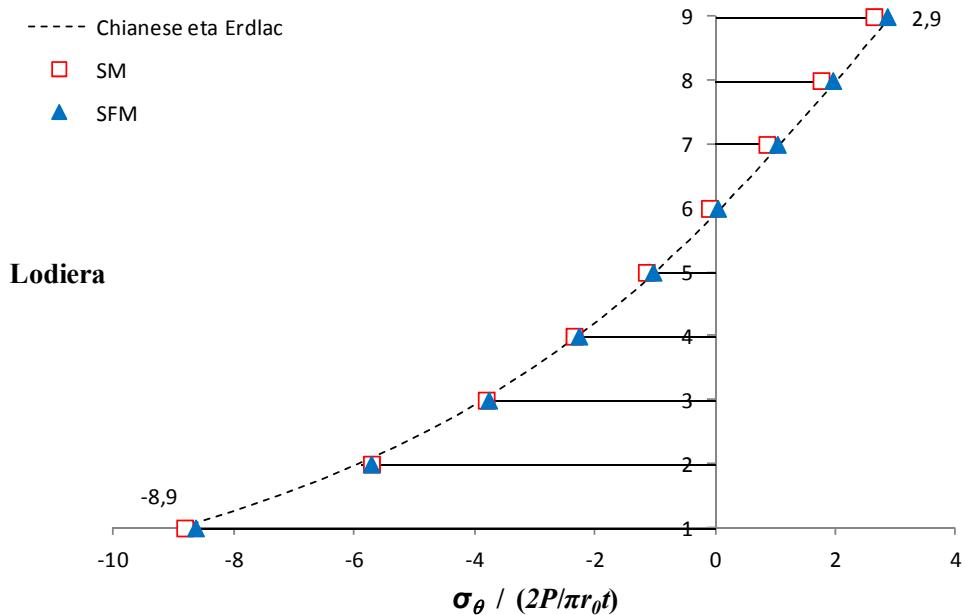
$$r_o = 100 \text{ mm}, \quad r_i = 50 \text{ mm}, \quad a = 50 \text{ mm} \text{ eta } t = 10 \text{ mm}$$

$$E = 210 \text{ GPa}, \quad G = 80,8 \text{ GPa} \text{ eta } \nu = 0,3.$$

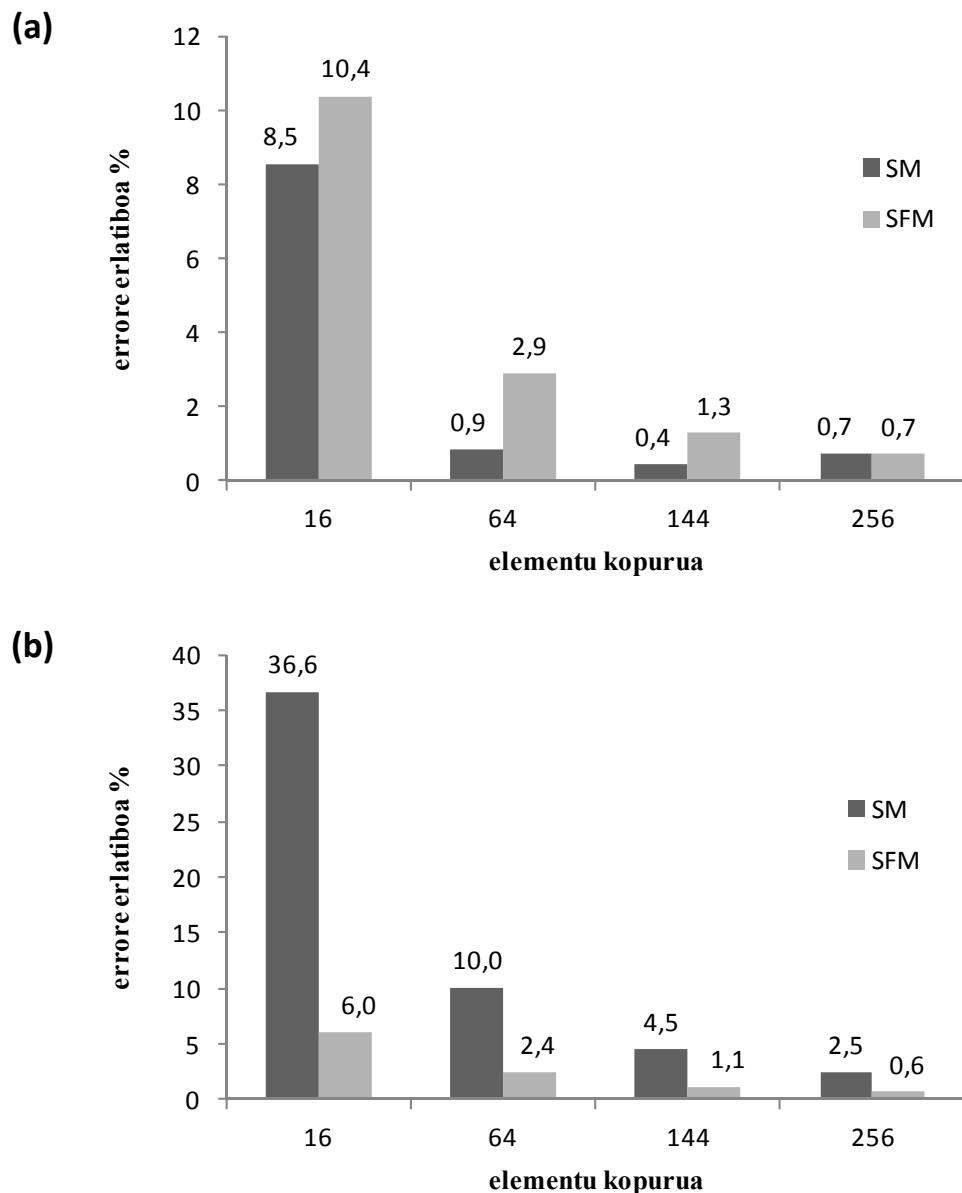


3.11 irudia. 64 elementuz osaturiko eraztun zirkular lodiaren elementu finituetako modeloaren koordenatu sistema, diskretizazioa, karga eta ingurune-baldintzak.

A sekzioko lodieran zeharreko parametrizaturiko tentsioen banaketa $\left(\sigma_\theta / \frac{2P}{\pi r_0 t}\right)$ lortu da, analitikoki Chianeseren eta Erdlacen [5] adierazpenak erabiliz eta elementu finituen bidez SM eta SFM metodoak erabiliz. Emaitzak 3.12 irudian ikus daitezke eta SM eta SFM bidezko emaitzen eta hurbilketa analitikoaren arteko errore erlatiboak 3.13 irudian. Barne-erradioan SM metodoaren bidez lorturiko emaitzak SFM metodoaren bidez lorturikoak baino hobeak dira, baina ez dago alde handirik. Kanpo-erradioan SFM bidez lorturiko emaitzak hurbilketa analitikoaren bidez lorturiko balioetatik gertuago daude SM bidez lorturikoak baino. SM metodoaren bidez lorturiko emaitzak eraztun lodiaren kasuan eraztun mehearen kasuan baino hobeak dira.



3.12 irudia. Eraztun lodiaren ($\rho = 0,5$) lodieran zeharreko parametrizaturiko tentsioen banaketa analitikoa eta FEM bidezkoa, *A* sekzioan, 64 elementu erabiliz.



3.13 irudia. Eraztun lodiaren ($\rho = 0,5$) A sekzioko parametrizaturiko tentsioen errore erlatiboak balio analitikoarekiko: a) barrualdean; b) kanpoaldean.

3.5 ONDORIOAK

Aurkako bi indarren eraginpean dagoen eraztun zirkularra aztertu da analitikoki eta numerikoki, elementu finituen bidez SM eta SFM formulazioak erabiliz. Desplazamenduen kasuan, hurbilketa analitikoa egiazatzeko datu esperimentalekin alderatu da. Elementu finituen emaitzak aztertuz, SFM metodoa erabiliz lorturiko desplazamendu eta tentsioen balioak emaitza analitikotatik SM bidez lorturikoak baino gertuago daudela ikus daiteke. Horrez gain, errore erlatibo jakin bat lortzeko beharrezko elementu kopurua SM metodoaren kasuan SFM metodoarenean baino askoz ere handiagoa dela ikusi da. Zehazki, eraztun mehearen kasuan, 48 elementu dituen modeloan SFM metodoa aplikatuz desplazamenduetan lorturiko errore erlatiboa % 2-koa izan da, SM metodoaren bidez errore erlatibo hori 1200 elementu erabiliz lortzen da, hau da, elementu kopurua 25 aldiz handituz. Tentsioen kasuan, SFM bidez 48 elementu erabiliz lorturiko errore erlatiboa % 2 baino txikiagoa izan da eta SM bidez errore hori 600 elementu erabiliz lortzen da, hots, elementu kopurua 12 aldiz handituz. Beraz, SFM erabiliz, elementu bakoitzeko konputazio kostuaz gain, modelo jakin bat aztertzeraoa beharrezkoan den elementu kopurua nabarmen txikiagoa izan daiteke.

3.6 BIBLIOGRAFIA

- [1] Timoshenko S. XCI. On the distribution of stresses in a circular ring compressed by two forces acting along a diameter. Philos Mag 1922; 44: 1014-9.
- [2] Filon LNG. The stresses in a circular ring. Sel Eng Pap 1924; 1.
- [3] Silverman IK, Moody WT. Displacements in closed circular rings subject to concentrated diametral loads. J Franklin I 1965; 279: 374-86.
- [4] Durelli AJ, Lin YH. Stresses and displacements on the boundaries of circular rings diametrically loaded. J Appl Mech 1986; 53: 213-9.
- [5] Chianese RB, Erdlac RJ. The general solution to the distribution of stresses in a circular ring compressed by two forces acting along a diameter. Q J Mech Appl Math 1988; 41: 239-47.

- [6] Oden JT, Ripperger EA. Mechanics of Elastic Structures. 2nd ed. Washington: Hemisphere Publishing Corporation, 1981.
- [7] Beer FP, Johnston Jr. ER, Dewolf JT, Mazurek DF. Mechanics of materials. 6th ed. New York: McGraw-Hill, 2012.
- [8] Ferreira AJM. MATLAB codes for finite element analysis solids and structures. [Dordrecht]: Springer Science & Business Media, 2009.
- [9] Oñate E. Structural Analysis with the Finite Element Method. 1st ed. Barcelona: International Center for Numerical Methods in Engineering, 2009.
- [10] Controls Group. http://www.controls-group.com/eng/universal-testers_-steel-re_bars-testing-equipment/universal-load-frames-accessories-for-soil-asphalt-concrete-cement-mortar-and-rock-testings.php.

SFM METODOAREN INPLEMENTAZIOA ABAQUSEN

4.1 SARRERA

3. kapituluan azterturiko modeloaren ezaugarriak kontuan izanda, MATLABen elementu finituen SFM metodoaren ekuazioak implementatzea zentzuzkotzat jo zen. Hala ere, problema edota modelo konplexuagoen kasuan elementu finituen kalkulurako programa komertzial batek aukera gehiago eskaintzen ditu. Izan ere, interfaze grafikoa erabiliz geometria konplexuagoak definitzea errazten du, maila modu automatizatu osa daiteke, ingurune-baldintzak interfaze grafikoa erabiliz defini daitezke, etab. Ondorioz, tesiaren hurrengo helburua ABAQUSen [1] SFM metodoaren formulazioa implementatzeko azpirrutinak idaztea izan da.

ABAQUSen azpirrutina desberdinak implementatu daitezke eta, beraz, erabiltzaile bakoitzak dituen analisi beharretara egokitu daiteke. SFM metodoaren ekuazioak SM metodoarenarekin alderatzean, elementuaren zurruntasun matrizea eta tentsioak kalkulatzeko adierazpenak desberdinak direla ikus daiteke. Ondorioz, SFM metodoa ABAQUSen implementatzeko erabili beharreko azpirrutinak UEL eta UVARM motakoak dira, elementuaren formulazioa ABAQUSek dituen elementuetatik desberdina baita. Beraz, azpirrutinaren kodean, batetik, elementuaren zurruntasun matrizea eraikitzeko definitu beharreko matrizeak eta egin beharreko kalkuluak sartu behar dira eta, bestetik, tentsioen kalkulurako ekuazioak.

Lehenengo pausoak ABAQUSen azpirrutinak erabiliz kalkuluak martxan jartzea izan da. Helburu horretarako, programazioko jardunbide egokien printzipioak jarraituz, elementu simpleenetatik hastea eta SM metodoaren ekuazioak erabiltzea erabaki da, horiek balioztatu ondoren SFM metodoarekin jarraituz.

Lehenengo implementaturiko elementua barra elementua izan da. Ondoren hiru nodoko elementu triangeluarra eta azkenik lau nodoko elementu isoparametrikoa. Hurrengo ataletan zehazten dira erabilitako formulazioak eta eranskinean ikus daitezke azpirrutinen kodeak, FORTRANen idatzitakoak.

4.2 ABAQUSEN IMPLEMENTATURIKO ELEMENTUAK

4.2.1 JARRAITURIKO PAUSOAK

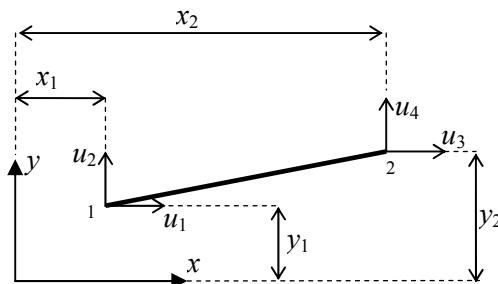
Programazioko jardunbide egokien printzipioak jarraituz, ABAQUSen implementatzeko azpirrutinak elementu simpleenetatik hasita eta SM metodoaren formulazioarekin idatzi dira. Hasteko karga axial baten eraginpean dagoen barra elementuaren azpirrutina prestatu eta balioztatu da, SM metodoko ekuazioak eta elementu bakarra erabiliz. Emaitzak zuzenak direla konprobatu ondoren, bidimentsiotako barra elementuarekin pauso berdinak jarraitu dira. Hurrena definituriko eta konprobaturiko elementua hiru nodoko elementu triangeluarra izan da. Kasu honetan, lehenengo SM metodoa erabiliz eta ondoren SFM metodoa erabiliz. Izan ere, behin azpirrutinak erabiliz ABAQUSen kalkuluak egiteko prozedura martxan jarrita, ez da beharrezkotzat jo SFM metodoarekin barra elementuarekin hastea. Azkenik, lau nodoko elementu isoparametrikoa implementatu da, hasiera batean SM metodoa erabiliz eta ondoren, SFM metodoa erabiliz.

Horrez gain, hasiera batean implementaturiko elementu guztiak kasuan material isotropoa eta tentsio laua kontsideratu dira. Ondoren, lau nodoko elementu isoparametrikoen kasuan, material anisotropoa eta deformazio laua ere implementatu dira. Tentsioak koordenatu polarretan kalkulatzeko azpirrutina ere garatu da.

4.2.2 BARRA ELEMENTUA

Elementu finituen bidezko kalkuluak ABAQUSen azpirrutinak erabiliz egin asmoz, hasteko elementu simpleena implementatu da, hau da, dimentsio bakarreko barra elementua. Elementu honen azpirrutina balioztatu ondoren, bi dimentsioko barra elementuaren azpirrutina prestatu eta balioztatu da. Bi kasuetan material isotropoa kontsideratu da eta SM metodoaren formulazioa erabili da.

Barra elementua 4.1 irudian ikus daiteke, bertan nodoen koordenatuak x_i , y_i eta desplazamenduak u_i definitu direlarik. Elementua balioztatzeko luzapen bat Δ inposatu zaio elementuaren ardatzaren norabidean. Egiaztatze saiakuntzan materialaren modulu elastikoa E , barraren azalera A , inposaturiko luzapena Δ , nodoen koordenatuak x_i , y_i , translazioa R_{trans} eta biraketa angelua θ datuak direla suposatu da.



4.1 irudia. Barra elementua.

Barra elementuaren luzera L , angelua α eta biraketa $\{Rot\}$ honela kalkulatu dira:

$$L = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} \quad (4.1)$$

$$\alpha = \arctan \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) \quad (4.2)$$

$$\{Rot\} = \begin{Bmatrix} -L\theta \sin \alpha \\ L\theta \cos \alpha \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

Nodoen desplazamenduak lortzeko u_i , 1 nodoan translazioa $Rtrans$ kontuan izan behar dugu eta 2 nodoan translazioa $Rtrans$, biraketa $\{Rot\}$ eta luzapena Δ :

$$\begin{aligned}\{u_1\} &= \begin{cases} Rtrans_x \\ Rtrans_y \end{cases} \\ \{u_2\} &= \begin{cases} Rtrans_x \\ Rtrans_y \end{cases} + \begin{cases} -L\theta \sin \alpha \\ L\theta \cos \alpha \end{cases} + \begin{cases} \Delta \cos \alpha \\ \Delta \sin \alpha \end{cases}\end{aligned}\quad (4.4)$$

Nodoetako indarrak koordenatu lokaletan honakoak dira:

$$F_L = \frac{EA}{L} \Delta \quad (4.5)$$

Eta koordenatu globaletan:

$$\{F_0\} = \begin{cases} -F_L \cos \alpha \\ -F_L \sin \alpha \\ F_L \cos \alpha \\ F_L \sin \alpha \end{cases} \quad (4.6)$$

Beraz, tentsioak koordenatu lokaletan:

$$\sigma_0 = \frac{F_L}{A} = \frac{E}{L} \Delta \quad (4.7)$$

Lorturiko emaitzak elementuaren zurruntasun matrizea, deformazioa eta tentsioak izan dira. Elementuaren zurruntasun matriza koordenatu globaletan honakoa da:

$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Deformazioa:

$$\varepsilon = \frac{(u_{2x} - u_{1x})\cos\alpha + (u_{2y} - u_{1y})\sin\alpha}{L} \quad (4.9)$$

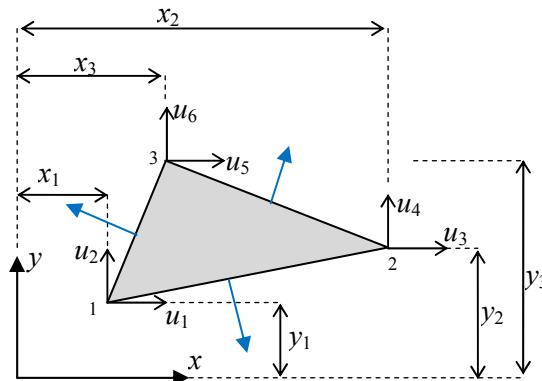
Eta tentsioak:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (4.10)$$

Barra elementuaren ardatzaren norabidean luzapen bat inposatu denez, barra indar axial baten eraginpean dago. FORTRAN kodea erabiliz egindako saiakuntzan, numerikoki lorturiko emaitza inposaturiko indarraren berdina dela egiaztu da, hori lortutakoan azpirrutina baliozkotzat jo delarik. Dimentsio bakarreko barra elementuaren azpirrutina B.1 eranskinean ikus daiteke eta bi dimentsioko barra elementuarena B.2 eranskinean.

4.2.3 HIRU NODOKO ELEMENTU TRIANGELUARRA

Hurrengo pausoa hiru nodoko elementu triangeluarra implementatzea izan da, aurreko atalean azalduriko procedura analogo bat jarraituz. 4.2 irudian elementu honen geometria eta desplazamendu parametroak ikus daitezke.



4.2 irudia. Hiru nodoko elementu triangeluarra.

Balioztatze saiakuntza egiteko tentsio egoera konstantea suposatu da:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

Deformazio eta tentsioen arteko erlazioa kontuan izanik:

$$\{\varepsilon_0\} = [S]\{\sigma_0\} \quad (4.12)$$

Material isotropoa eta tentsio egoera laua konsideratuz, materialaren malgutasun koefizienteen matrizea (2.45) ekuazioan definitu da. Materialaren malgutasun koefizienteen matrizea aintzat hartuz, deformazioak honakoak dira:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\nu & 0 \\ -\nu & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\sigma_0}{E} \\ -\nu\sigma_0 \\ \frac{2(1+\nu)\sigma_0}{E} \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

Balioztatze saiakuntzan 1 nodoa finkoa dela suposatu da, orduan, nodoetako desplazamenduak honakoak dira:

$$\begin{aligned} \{u_1\} &= \{0\} \\ \{u_2\} &= \{\varepsilon_0\}(r_2 - r_1) \\ \{u_3\} &= \{\varepsilon_0\}(r_3 - r_1) \end{aligned} \quad (4.14)$$

r_i aldagaiak $r_2 - r_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ eta $r_3 - r_1 = (x_3 - x_1, y_3 - y_1)$ izanik.

Nodoetako indarrak honakoak dira:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{2}([\sigma_0]\{n_{13}\}A_{13} + [\sigma_0]\{n_{12}\}A_{12}) \\ F_2 &= \frac{1}{2}([\sigma_0]\{n_{12}\}A_{12} + [\sigma_0]\{n_{23}\}A_{23}) \\ F_3 &= \frac{1}{2}([\sigma_0]\{n_{13}\}A_{13} + [\sigma_0]\{n_{23}\}A_{23}) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Non tentsioak $[\sigma_0] = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ eta azalerak $A_{12} = L_{12}t$, $A_{13} = L_{13}t$ eta $A_{23} = L_{23}t$ diren.

Bektore normalak honakoak dira:

$$\begin{aligned}\vec{n}_{12} &= (y_2 - y_1, x_1 - x_2) / \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_1 - x_2)^2} \\ \vec{n}_{23} &= (y_3 - y_2, x_2 - x_3) / \sqrt{(y_3 - y_2)^2 + (x_2 - x_3)^2} \\ \vec{n}_{31} &= (y_1 - y_3, x_3 - x_1) / \sqrt{(y_1 - y_3)^2 + (x_3 - x_1)^2}\end{aligned}\quad (4.16)$$

Elementu triangeluarrean tentsio egoera bat inposatu da eta azpirrutina baliozkotzat jotzeko baldintza FEM bidez lorturiko emaitza inposaturiko tentsio egoera horren berdina izatea izan da. Lehenengo froga tentsio egoera konstantea erabiliz egin da eta, behin hori egiaztatuta, egiaztapena tentsio egoera orokorrera hedatu da. SM metodoa erabiliz idatziriko azpirrutina C.1 eranskinean ikus daiteke eta SFM metodoarena C.2 eranskinean.

SFM metodoa implementatzeko beharrezko da tentsio parametroak zehaztea. Hiru nodoko elementu triangeluarraren kasuan gutxiengo barne indar independente kopurua $m_e \geq n_e - r = 6 - 3 = 3$ da. Eta ondorioz, tentsioen interpolazio funtzioen matrizea unitate matrizea da:

$$[Y] = [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Beraz, oreka eta malgutasun matrizeen eta alderantzizko malgutasun matrizearen ekuazioak honakoak dira:

$$\begin{aligned}[E] &= [B]^T A \\ [G] &= \frac{1}{t} [S] A \\ [G]^{-1} &= \frac{t}{A} [D]\end{aligned}\quad (4.18)$$

Eta elementuaren zurruntasun matrizea, (2.24) ekuazioan zehaztu den moduan, $[K^e] = [E][G]^{-1}[E]^T$ denez, (4.18) ekuazioko adierazpenak ordezkatuz:

$$[K^e] = [B]^T [D] [B] A t \quad (4.19)$$

Beraz, SM eta SFM-ko zurruntasun matrizeak berdinak dira. Ondorioz, lortutako desplazamenduak ere berdinak dira.

SFM metodoaren bidez tentsioak (2.21) ekuazioa erabiliz lortzen dira, hau da, $\{F^j\} = [G]^{-1}[E]^T\{a^i\}$ adierazpena erabiliz. (4.18) ekuazioa ordezkatuz, tentsio parametroak honakoak dira:

$$\{F^j\} = t[D][B]\{a^i\} \quad (4.20)$$

Ondorioz, elementuaren edozein puntuakoko tentsioak:

$$\{\sigma^j\} = [D][B]\{a^i\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (4.21)$$

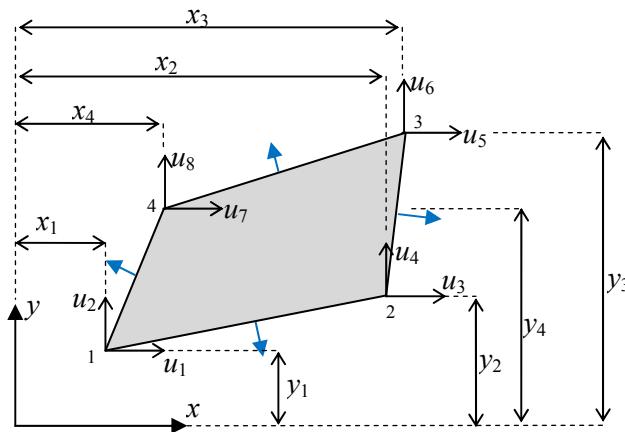
Beraz, hiru nodoko elementu triangeluarretan tentsioak ere eragiketa berdinekin lortzen dira, SM nahiz SFM metodoaren bidez.

4.2.4 LAU NODOKO ELEMENTU ISOPARAMETRIKOA

Behin hiru nodoko elementuaren azpirrutinak balioztatuta, lau nodoko elementu isoparametrikoa implementatu da, 4.3 irudian ikus daitekeena.

Balioztatze saiakuntzan erabilitako ekuazioak, hiru nodoko elementu triangeluarraren berdinak izan dira, ekuazio bat gehituz, elementu honek alde bat gehiago baitu.

4.4 irudian SM metodoa erabiliz elementuaren zurruntasun matrizea kalkulatzeko jarraitu beharreko pausoak irudikatu dira [2].



4.3 irudia. Lau nodoko elementu isoparametrikoa.

4.5 irudian SFM metodoaren bidez elementuaren zurruntasun matrizea kalkulatzeko jarraitu beharreko pausoak fluxu diagrama batean irudikatu dira.

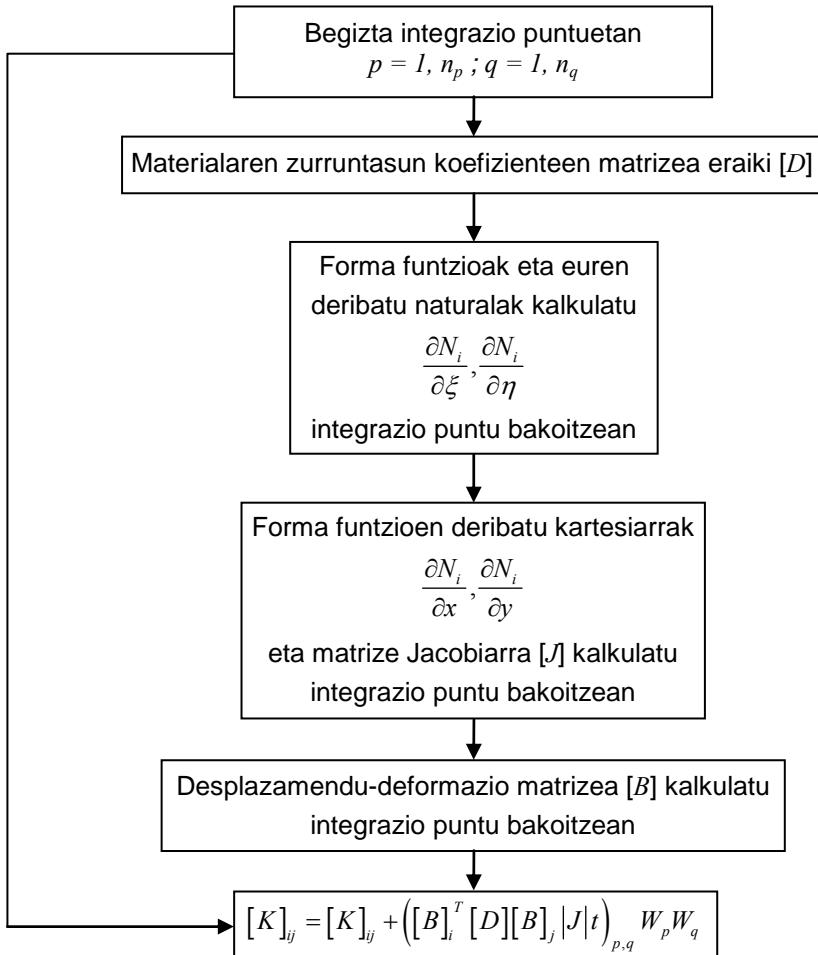
Aztertu beharreko probleman elementu guztiekin materialaren propietate berdinak baditzute, kodeetan, SM metodoan materialaren zurruntasun koefizienteen matrizea eta SFM metodoan materialaren malgutasun koefizienteen matrizea, begiztaren aurretik determina daitezke.

Lau nodoko elementuaren kasuan ere, lehenengo SM metodoaren azpirrutina idatzi eta balioztatu da. Lehenengo prestatu den azpirrutinan material isotropoa konsideratzen da (ikus D.1 eranskina). Aurrekoa balioztatu ondoren SFM metodoaren azpirrutina osatu da, material isotropoaren kasurako, D.2 eranskinean ikus daitekeen moduan.

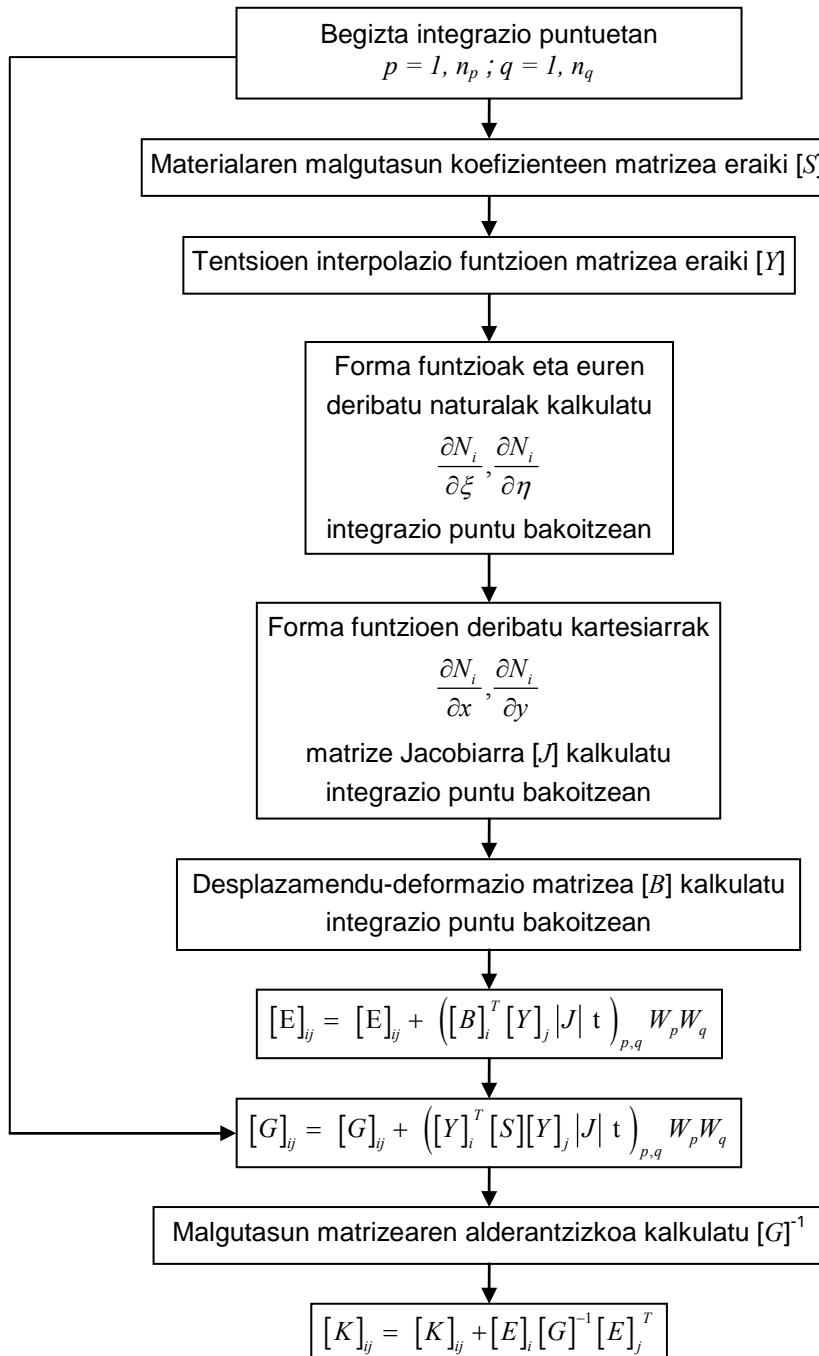
SFM metodoaren bidez laminatu konpositeen problemak ABAQUSen azpirrutinak erabiliz aztertzeko beharrezko da materialaren malgutasun koefizienteen matrizean material anisotropoa kontuan izango duen azpirrutina osatzea.

Bi dimentsioko elementuen kasuan, tentsio egoera laua denean, deformazioen eta tentsioen arteko erlaziona adierazten duen materialaren malgutasun koefizienteen matrizea, kargaren aplikazio ardatzetan edo globaletan (x, y) honakoa da [2]:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xs} \\ S_{xy} & S_{yy} & S_{ys} \\ S_{xs} & S_{ys} & S_{ss} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{pmatrix} \quad (4.22)$$



4.4 irudia. SM metodoa erabiliz elementuaren zurruntasun matrizea $[K^e]$ kalkulatzeko fluxu diagrama.

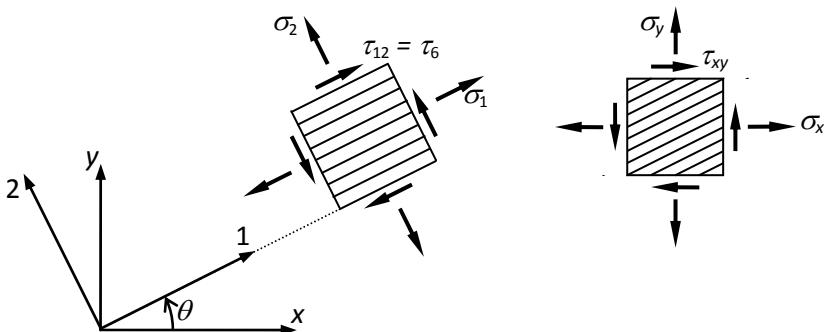


4.5 irudia. SFM metodoa erabiliz elementuaren zurruntasun matrizea $[K^e]$ kalkulatzeko fluxu diagrama.

Malgutasun koefizienteak hurrengoak izanik (ikus 4.6 irudia):

$$\begin{aligned}
 S_{xx} &= S_{11}l^4 + 2S_{12}l^2m^2 + S_{22}m^4 + S_{66}l^2m^2 \\
 S_{xy} &= S_{11}l^2m^2 + S_{12}(l^4 + m^4) + S_{22}l^2m^2 - S_{66}l^2m^2 \\
 S_{xs} &= 2S_{11}l^3m + 2S_{12}(lm^3 - l^3m) - 2S_{22}lm^3 + S_{66}(lm^3 - l^3m) \\
 S_{yy} &= S_{11}m^4 + 2S_{12}l^2m^2 + S_{22}l^4 + S_{66}l^2m^2 \\
 S_{ys} &= 2S_{11}lm^3 + 2S_{12}(l^3m - lm^3) - 2S_{22}l^3m + S_{66}(l^3m - lm^3) \\
 S_{ss} &= 4S_{11}l^2m^2 - 8S_{12}l^2m^2 + 4S_{22}l^2m^2 + S_{66}(l^2 - m^2)^2
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Non $l = \cos\theta$ eta $m = \sin\theta$ diren eta malgutasun koefizienteak materialaren ardatzetan edo lokaletan (ikus 4.6 irudia) (2.57) ekuazioan definitu diren.



4.6 irudia. Norabide bakarreko laminaren tentsio-osagaiak ardatz sistema globaletan eta lokaletan.

Material anisotropoa konsideratuz idatziriko azpirrutinak SM eta SFM metodoak erabiliz D.3 eta D.4 eranskinetan ikus daitezke, hurrenez hurren.

Deformazio egoera laua denean SFM metodoa erabiliz kalkuluak egin ahal izateko, UEL erabiltzaile azpirrutinan deformazio egoera lauari dagokion materialaren malgutasun koefizienteen matrizea txertatu behar da.

Zuntz eduki altuko norabide bakarreko laminatu konpositeetan zeharkako isotropia baldintzak konsidera daitezke, hau da, zuntza 1 norabidean orientatua badago, 2-3

ardatzek osaturiko planoa simetria plano bat da. Beraz, deformazio egoera lau denean honakoa betetzen da:

$$\begin{aligned}\varepsilon_3 &= 0 \\ \gamma_4 &= 0 \\ \gamma_5 &= 0\end{aligned}\tag{4.24}$$

Kasu honetan, Hooke-n lege orokortua abiapuntutzat hartuz eta zeharkako isotropia baldintzak kontuan izanik [2], deformazio eta tentsioen arteko erlazioa honela idatz daiteke:

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma_6 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{22} - S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{array} \right\} \tag{4.25}$$

(4.25) ekuazioan Voigt-en notazioa erabili da, azpiindizeen esanahia honakoa izanik: 1: 11, 2: 22, 3: 33, 4: 23, 5: 31, 6: 12.

S_{11}, S_{12}, S_{22} eta S_{66} (2.57) ekuazioan definitu dira eta $S_{23} = -\frac{\nu_{32}}{E_3}$ da.

(4.25) ekuaziotik honakoa ondoriozta daiteke:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= S_{11}\sigma_1 + S_{12}\sigma_2 + S_{12}\sigma_3 \\ \varepsilon_2 &= S_{12}\sigma_1 + S_{22}\sigma_2 + S_{23}\sigma_3 \\ 0 &= S_{12}\sigma_1 + S_{23}\sigma_2 + S_{22}\sigma_3 \\ \gamma_6 &= S_{66}\tau_6\end{aligned}\tag{4.26}$$

Beraz:

$$\sigma_3 = -\frac{(S_{12}\sigma_1 + S_{23}\sigma_2)}{S_{22}}\tag{4.27}$$

(4.27) ekuazioa (4.26) ekuazioko lehenengo bi adierazpenetan ordezkatuz:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \left(S_{11} - \frac{S_{12}^2}{S_{22}} \right) \sigma_1 + \left(S_{12} - \frac{S_{12}S_{23}}{S_{22}} \right) \sigma_2 \\ \varepsilon_2 &= \left(S_{12} - \frac{S_{12}S_{23}}{S_{22}} \right) \sigma_1 + \left(S_{22} - \frac{S_{23}^2}{S_{22}} \right) \sigma_2\end{aligned}\quad (4.28)$$

(4.28) ekuazioa kontuan hartuz, ardatz lokaletan deformazio egoera lauari dagokion materialaren malgutasun koefizienteen matrizea hurrengoa da:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & 0 \\ R_{12} & R_{22} & 0 \\ 0 & 0 & R_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

Non $R_{11} = S_{11} - \frac{S_{12}^2}{S_{22}}$, $R_{12} = S_{12} - \frac{S_{12}S_{23}}{S_{22}}$, $R_{22} = S_{22} - \frac{S_{23}^2}{S_{22}}$ eta $R_{66} = S_{66}$ diren.

Ondorioz, bi dimentsioko elementuen kasuan, deformazio egoera laua denean, deformazioen eta tentsioen arteko erlaziona kargaren aplikazio ardatzetan (x, y) honela idatz daiteke:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{xx} & R_{xy} & R_{xs} \\ R_{xy} & R_{yy} & R_{ys} \\ R_{xs} & R_{ys} & R_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix} \quad (4.30)$$

4.6 irudia kontuan izanik, malgutasun koefizienteak ardatz globaletan honakoak dira:

$$\begin{aligned}R_{xx} &= R_{11}l^4 + 2R_{12}l^2m^2 + R_{22}m^4 + R_{66}l^2m^2 \\ R_{xy} &= R_{11}l^2m^2 + R_{12}(l^4 + m^4) + R_{22}l^2m^2 - R_{66}l^2m^2 \\ R_{xs} &= 2R_{11}l^3m + 2R_{12}(lm^3 - l^3m) - 2R_{22}lm^3 + R_{66}(lm^3 - l^3m) \\ R_{yy} &= R_{11}m^4 + 2R_{12}l^2m^2 + R_{22}l^4 + R_{66}l^2m^2 \\ R_{ys} &= 2R_{11}lm^3 + 2R_{12}(l^3m - lm^3) - 2R_{22}l^3m + R_{66}(l^3m - lm^3) \\ R_{ss} &= 4R_{11}l^2m^2 - 8R_{12}l^2m^2 + 4R_{22}l^2m^2 + R_{66}(l^2 - m^2)^2\end{aligned}\quad (4.31)$$

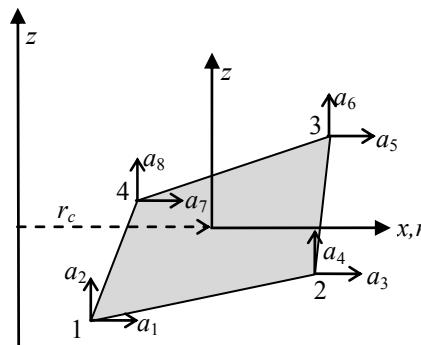
(4.23) ekuazioan bezala, $l = \cos \theta$ eta $m = \sin \theta$ direlarik.

SFM metodoa erabiliz, deformazio egoera laua eta material anisotropoa konsideratuz garaturiko azpirrutina D.5 eranskinean azaltzen da.

4.2.5 LAU NODOKO ELEMENTU ISOPARAMETRIKO AXISIMETRIKOA

Lau nodoko elementu isoparametrikoko axisimetrikoak 4.7 irudian azaltzen da. Elementu honen formulazioan lau nodoko elementu orokorrean erabili diren desplazamenduen interpolazio funtzio lineal berberak erabiltzen dira. Kasu honetan eragile diferentzialen matrizea honako da:

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$



4.7 irudia. Lau nodoko elementu isoparametrikoko axisimetrikoak.

Desplazamendu-deformazio matrizea desplazamenduen interpolazio funtzioak deribatuz lortzen da:

$$[B] = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & B_{13} & 0 & B_{15} & 0 & B_{17} & 0 \\ B_{21} & 0 & B_{23} & 0 & B_{25} & 0 & B_{27} & 0 \\ 0 & B_{32} & 0 & B_{34} & 0 & B_{36} & 0 & B_{38} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} & B_{45} & B_{46} & B_{47} & B_{48} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

[B] matrizearen osagai ez nuluak honakoak dira:

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= -(1-\eta); B_{13} = (1-\eta); B_{15} = (1+\eta); B_{17} = -(1+\eta); \\
 B_{21} &= \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{r_c}; B_{23} = \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{r_c}; \\
 B_{25} &= \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{r_c}; B_{27} = \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{r_c}; \\
 B_{32} &= -(1-\xi); B_{34} = -(1+\xi); B_{36} = (1+\xi); B_{38} = (1-\xi); \\
 B_{41} &= -(1-\xi); B_{42} = -(1-\eta); B_{43} = -(1+\xi); B_{44} = (1-\eta); \\
 B_{45} &= (1+\xi); B_{46} = (1+\eta); B_{47} = (1-\xi); B_{48} = -(1+\eta)
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

Oreka matriza honela kalkulatzen da:

$$[E] = 2\pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B(\xi, \eta)]^T [Y(\xi, \eta)] r_c |J| d\xi d\eta \tag{4.35}$$

(4.35) ekuazioko integrala integrazio numeriko bidez kalkulatzen da, bi dimentsiotako Gauss-Legendre koadratura erabiliz [3]:

$$[E] = 2\pi \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \left(\left[\left[B(\xi_p, \eta_q) \right] \right]_i^T \left[Y(\xi_p, \eta_q) \right]_j r_c |J| \right)_{p,q} W_p W_q \tag{4.36}$$

p eta q koordenatu naturalen norabide bakoitzean aukeraturiko integrazio puntu kopurua, r_c integrazio puntu bakoitzari dagokion koordenatu erradiala, ξ_p eta η_q p, q integrazio puntuko koordenatu naturalak eta W_p eta W_q integrazio puntu horretan norabide bakoitzari dagozkion pisuak izanik.

Kasu axisimetrikoan honako indarren interpolazio funtzioen matriza erabili da [4]:

$$[Y] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & J_{11}^2 \eta & J_{21}^2 \xi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & J_{12}^2 \eta & J_{22}^2 \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & J_{12} \xi + J_{22} \eta \\ 0 & 0 & 1 & J_{11} J_{12} \eta & J_{21} J_{22} \xi & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.37}$$

Non J_{ij} matrize Jakobiarraren osagaiak diren, hau da:

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{12} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Elementuaren malgutasun matrizea:

$$[G] = 2\pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [Y(\xi, \eta)]^T [S] [Y(\xi, \eta)] r_c |J| d\xi d\eta \quad (4.39)$$

(4.39) ekuazioa numerikoki kalkulatzeko Gauss-Legendre koadratura erabiliz:

$$[G] = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \left(\left[[Y(\xi_p, \eta_q)] \right]_i^T [S] \left[Y(\xi_p, \eta_q) \right]_j \right)_{p,q} |J| t W_p W_q \quad (4.40)$$

Kasu axisimetrikoan, materiala isotropoa bada, malgutasun koefizienteen matrizea [4] honakoa da:

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Oreka eta malgutasun matrizeak determinatu direnean zurruntasun matrizea (2.24) ekuazioaren bidez determinatzen da.

SFM metodoa erabiliz, elementu axisimetrikoarentzat eta material isotropoarentzat idatzitako azpirrutina D.6 eranskinean azaltzen da.

4.3 ABAQUSEN SFM METODOAREKIN KALKULATZEKO JARRAITU BEHARREKO PROZEDURA

Lehenengo urratsa aurreko atalean deskribaturikoa da, hots, erabili nahi den elementuari dagokion azpirrutina idaztea eta balioztatzea.

Ondoren, ABAQUSen interfaze grafikoa erabiliz modeloa prestatu behar da. ABAQUSek modelo bakoitzarentzat sarrera fitxategi bat idazten du, hau da, input fitxategia. Kalkuluak UEL azpirrutina erabiliz egitekotan, beharrezko da input fitxategi horretan hainbat aldaketa egitea. Lehenik eta behin beharrezkoa da erabiltzaile-elementua (*user element*) definitzea, zenbat nodo dituen, zein motatakoa den eta elementuaren desplazamenduen askatasun gradu kopurua zein den zehaztuz. Erabiltzaile-elementua definitzerakoan zenbat aldagai esleitu ere zehaztu behar da, hots, elementu bakoitzean gordeko diren tentsio balioen kopurua. Erabiltzaile-elementuak ABAQUSeko interfaze grafikoan ikusezinak direnez, sarrerako fitxategian *dummy* elementuak definitu behar dira, ABAQUSeko elementu-bibliotekan dauden elementu motetako bat aukeratuz, interfaze grafikoan ikusgai izango direnak baina zurruntasun arbuiagarria dutenak. Aurrerago, output moduan behar ditugun erabiltzaile-aldagai kopurua zehaztu behar da. Bukatzeko erabiltzaile-elementuen emaitzak output fitxategian gordetzeko beharrezko sententziak gehitu behar dira, tentsioen *uvarm* aldagai kopurua zehaztuz eta izendatuz.

Hurrengo urratsa, aurrez balioztaturiko elementuaren azpirrutinan prestaturiko modeloari dagozkion datuak barneratzea da. UEL eta UVARM azpirrutinetan adibide jakin horretako elementu kopurua zehaztu behar da eta *dummy* elementuak izendatu behar dira. Horrez gain, adibidean erabili nahi den materialaren propietate elastiko errealak zein diren definitu behar dira, baita elementuaren lodiera zein izango den ere.

Azpirrutina eta input fitxategia prest daudenean, ABAQUSeko interfaze grafikoa erabiliz modelo berri bat sortu behar da. Modelo horretan zuzenean lan bat sortu eta lan hori kalkulatzeko orduan input fitxategia eta azpirrutina zein diren zehaztuz. Bukatzeko, lana exekutatu ondoren emaitzak lortu eta aztertu behar dira, hots, analisia azpirrutarik erabili gabe egiten denean bezala.

4.4 ADIBIDEAK

4.4.1 ERDIAN ZULO ZIRKULARRA DUEN PLAKA BATEN ANALISIA

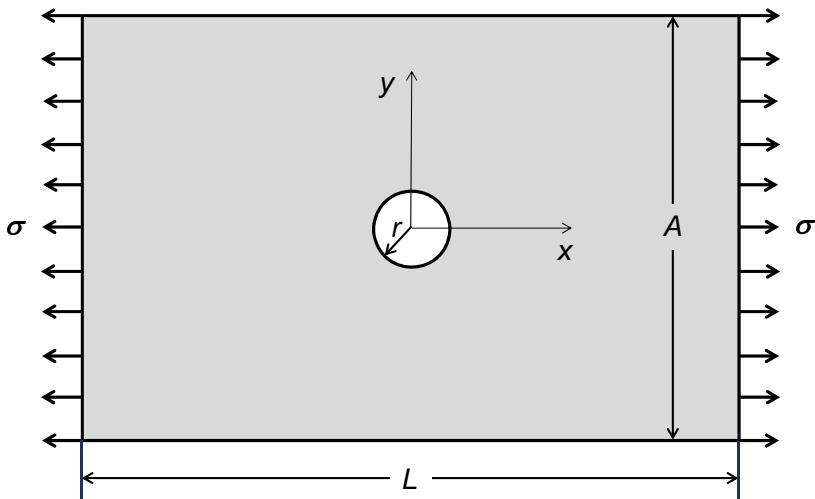
Zuloen inguruko tentsio kontzentrazioek garrantzia praktiko handia dute, hutsegiteen kausa izan ohi direlako. Zulodun plaken analisiak ibilbide luzea izan du, gaur egun ere aztertzen jarraitzen den problema bat delarik. Duela gutxi Melo et al.-ek [5] erdian zulo zirkularra duen eta karbono zuntzez errefortzatutako laminatuz osaturiko plaka baten analisia egin zuten. Lan horretan elementu finituen metodoa aplikatu zuten eta diskretizazio maila definitzeko egindako konbergentzia analisiaren ondoren, zuloaren inguruko tentsio kontzentrazioak direla eta, neurri oso txikiko elementuak erabili zitzuten. Atal honen helburua SFM metodoa erabiliz modeloan neurri handiagoko elementuak erabiliz emaitza hobeak lortzen ote diren aztertzea da.

Erdian zulo zirkular bat duen eta norabide bakarreko trakziopean dagoen plaka infinituaren analisia Kirsch-ek egin zuen lehenengo aldiz [6]. Ondoren, Howland-ek [7] zuloaren inguruko tentsioak lortzerakoan plakaren lodiera finitura kontsideratzten zuen hurbilketa analitiko bat proposatu zuen. Tan-ek [8] lodiera finitura eragina kontuan izateko erabili beharreko zuzenketa-faktoreak definitu zituen.

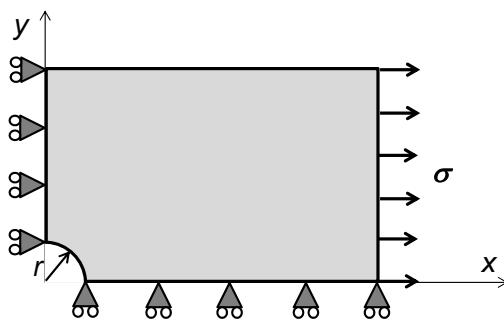
Bibliografian hainbat analisi esperimental [9,10] eta hurbilketa analitiko [5,11-14] erabiliz lorturiko emaitzak eta modelo numerikoen bidezkoak alderatuak izan dira.

4.8 irudian trakzio indarren eraginpean dagoen eta erdian zulo zirkularra duen plaka irudikatu da. Elementu finituen analisirako ABAQUSen definituriko modeloaren eta ingurune-baldintzen eskema 4.9 irudian ikus daitezke. Azterturiko modeloaren geometria, ASTM araua jarraituz [15] honakoa izan da:

$$L = 150 \text{ mm}, A = 36 \text{ mm} \text{ eta } r = 3 \text{ mm}$$



4.8 irudia. Erdian zulo zirkularra duen plaka trakzioean.



4.9 irudia. Plakaren modeloa eta ingurune-baldintzak.

Elementu finituen analisiaren Hexcel Composites enpresako AS4/8552 norabide bakarreko karbono/epoxi konpositea erabili da, bere propietate elastikoak 4.1 taulan ikus daitezke [16].

4.1 taula: AS4/8552 konpositearen propietate mekanikoak.

E_1 (GPa)	E_2, E_3 (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{12}
144,0	10,6	5,36	0,34

Emaitzak SFM metodoa erabiliz lortzeko, kalkuluak UEL erabiltzaile azpirrutinaren bidez egin dira, eta beraz, ABAQUSek sortzen duen sarrera datuen edo input fitxategian hainbat aldaketa egin dira. Input fitxategia E.1 eranskinean ikus daiteke. Fitxategi horretan lerro batzuk ezabatu dira, ingurune-baldintzak zein nodo eta elementu multzotan aplikatzen diren zehazten direnak hain zuzen ere, modeloan erabilitako diskretizazio mailaren arabera aldatzen direlako.

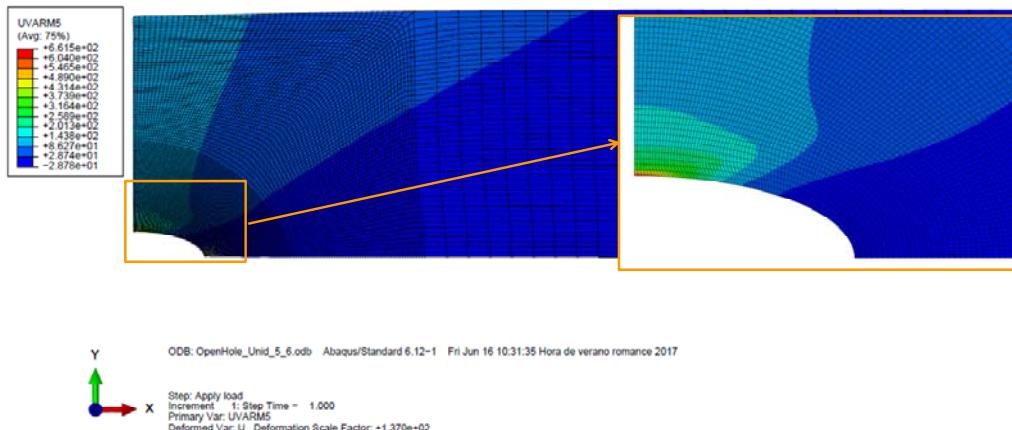
SFM metodoa erabiliz egindako lehenengo analisietan tentsio horizontalak σ_x eta bertikalak σ_y lortu dira. Problema jakin honetan, zuloaren inguruko tentsioak aztertzeko egokiagoa da tentsioen emaitzak koordenatu polarretan lortzea. Hori dela eta, ABAQUSen implementaturiko azpirrutinan hainbat aldaketa egin dira, tentsioen emaitzak koordenatu polarretan ere lortzea ahalbidetzeko. Azpirrutina horretan gehituriko lerroen kodea D.7 eranskinean ikus daiteke.

Tentsioak koordenatu polarretan kalkulatzeko, koordenatu kartesiarretan lorturiko tentsioak transformazio matrizearekin biderkatu behar dira:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l^2 & m^2 & 2lm \\ m^2 & l^2 & -2lm \\ -lm & lm & l^2 - m^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.42)$$

Non $l = \cos \theta$, $m = \sin \theta$ diren eta koordenatu angeluarra edo θ angelua tentsioak kalkulatu nahi ditugun puntuak x ardatzarekiko osatzen duen angelua den.

SFM metodoaren arabera, deformaturiko modeloan zuloaren inguruaren tentsio zirkunferentzialak σ_θ nola aldatzen diren 4.10 irudian ikus daiteke.

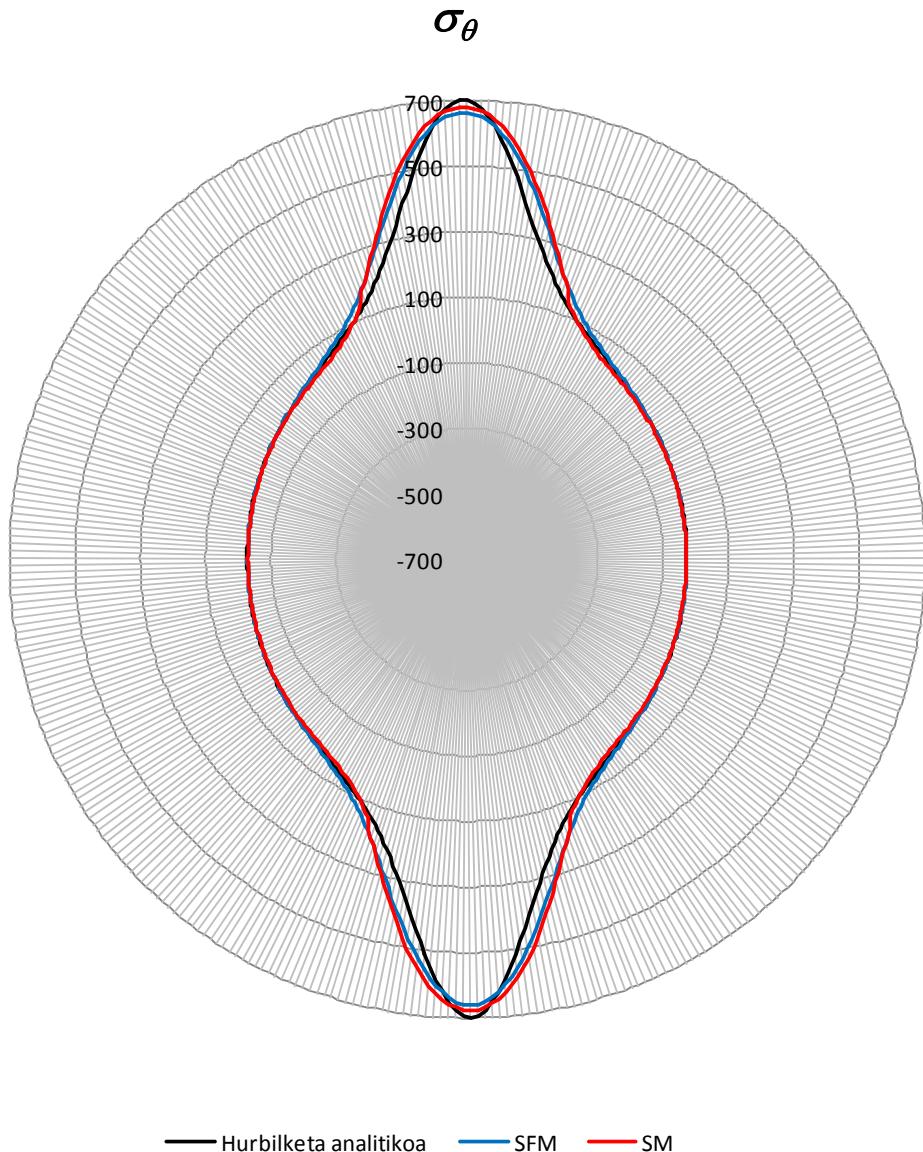


4.10 irudia. SFM metodoaren bidez lorturiko tentsio zirkunferentzialak σ_θ .

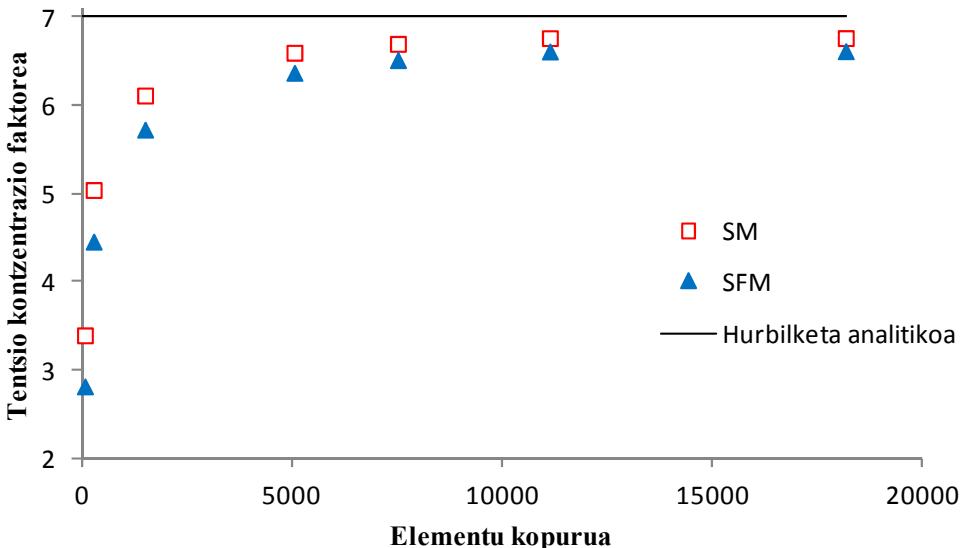
4.11 irudian elementu finituen bidez, SM eta SFM metodoetan 18176 elementu erabiliz, eta Tan-ek [8] proposaturiko hurbilketa analitikoa erabiliz zuloaren inguruau lortzen diren tentsio zirkunferentzialak irudikatu dira. Hurbilketa analitikoa plaka infinitua balitz bezala egiten da eta ondoren zabalera finitura dela kontuan hartzen duen zuzenketa-faktorea aplikatzen da. Elementu finituen bidezko analisiak elementu kopuru desberdinak erabiliz egin dira. 4.12 irudian tentsio kontzentrazio faktorearen aldakuntza irudikatu da, elementu kopurua handitzen den heinean, hau da, euren tamaina geroz eta txikiagoa den neurrian.

Oro har, 4.11 eta 4.12 irudietan datozen emaitzak aztertzean, SFM bidez lortutako balioak SM bidez lortutakoak baino txikiagoak direla ikus daiteke. Hala eta guztiz ere, tentsio kontzentrazioak dauden eremuetan balio teorikoetara hurbiltzeko diskretizazio maila oso altuak erabiltzea beharrezkoa dela ikusi da. FEM bidezko analisian elementu kopurua altua denean bi metodoen arteko desberdintasuna ez da horren nabarmena.

SFM metodoa erabiliz egindako analisietan elementu kopuru txikia erabiliz desplazamenduen balio egokiak lortzen dira. Ondorioz, tentsio gradiente altuko eremuetan metodo honek SM metodoaren aurrean abantailak izango zituela uste zen. Hala ere, erdian zulo zirkularra duen plakarekin egindako analisiaren ondoren, tentsio gradiente altuko eremuetan SFM metodoa erabiliz ere elementu kopuru altua erabiltzea beharrezkoa dela ondorioztatu da.



4.11 irudia. Tentsio zirkunferentzialak σ_θ zuloaren buelta osoan.



4.12 irudia. Tentsio kontzentrazio faktorearen aldakuntza, elementu kopurua handitzean.

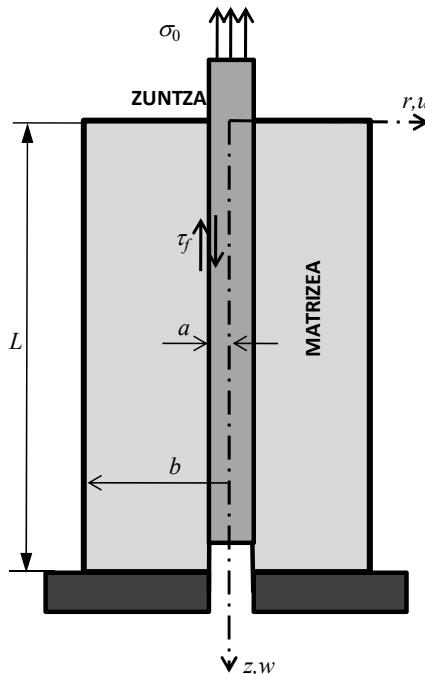
4.4.2 ZUNTZAREN ETA MATRIZEAREN ARTEKO ITSASPENAREN ANALISIA KONPOSITETAN

Zuntz bakarreko trakzio saiakuntza material konpositetan zuntzaren eta matrizearen faseartearren propietateak ezagutzeko sarritan erabiltzen den teknika esperimentalda da [17]. Badira bibliografian oreka baldintzak betetzen dituzten tentsio funtzietan oinarritutiko hurbilketa analitikoak [18,19], baita hurbilketa numerikoak ere [20-22], elementu mota desberdinak eta diskretizazio maila altuak erabiliz, zuntzko eta matrizeko tentsio banaketa lortzen dutenak.

Zuntz bakarreko trakzio saiakuntzaren eskema 4.13 irudian ikus daiteke. Egindako analisian zuntza eta matrizearen arteko itsaspena oraindik osoa den egoera konsideratu da, hau da, bien arteko askatza gertatu aurrekooa. Analisian erabilitako dimentsioak eta propietate elastikoak Yang et al.-en lanean [21] definiturikoak izan dira (ikus 4.2 taula). Zuntzari dagozkion propietateak adierazteko f azpiindizea erabili da eta matrizeari dagozkionak izendatzeko m azpiindizea.

4.2 taula: Geometria, kargaren balioa eta propietate elastikoak.

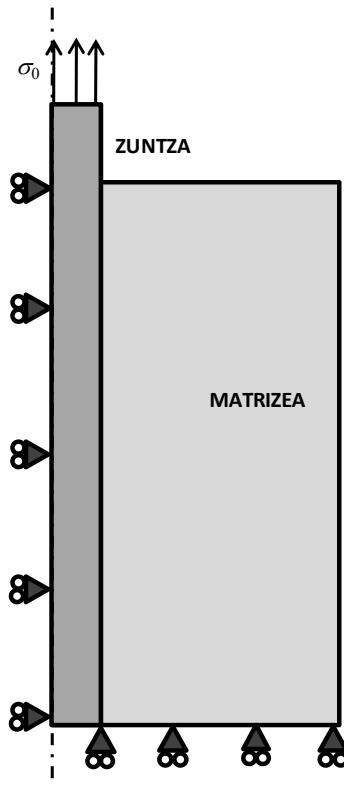
L (mm)	a (mm)	b (mm)	σ_0 (MPa)	E_f (GPa)	ν_f	E_m (GPa)	ν_m
0,050	0,005	0,050	120,0	64,0	0,2	3,0	0,35



4.13 irudia. Zuntz bakarreko trakzio saiakuntza.

ABAQUS-en egin den modelo axisimetrikoaren ingurune-baldintzak eta karga egoera 4.14 irudian azaltzen dira. ABAQUS-en egin diren bi modeloetan 144 eta 1296 elementu erabili dira, hurrenez hurren.

SFM metodoarekin kalkuluak egiteko prestaturiko input fitxategia E.2 eranskinean ikus daiteke. Kasu honetan bi material desberdin erabili dira, matrizeari eta zuntzari dagozkionak, hurrenez hurren, sarrerako datuen fitxategian ikus daitekeen moduan.



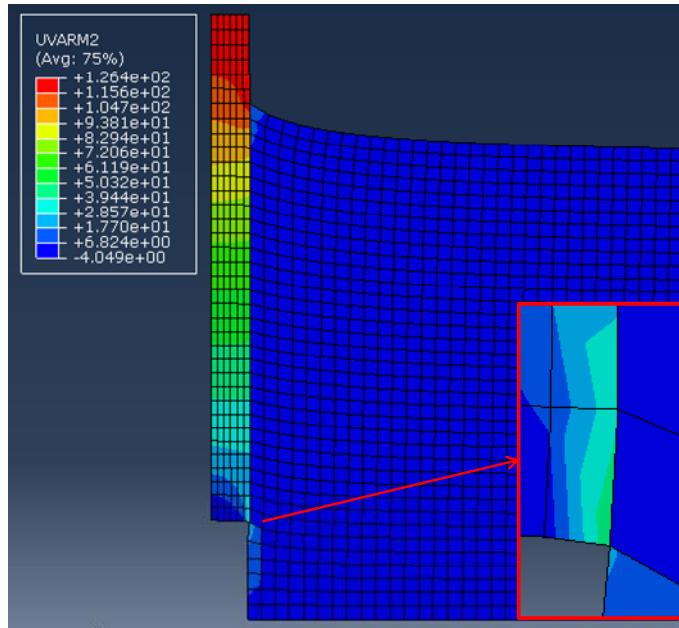
4.14 irudia. Modelo axisimetricoaren ingurune-baldintzak eta kargak.

SM eta SFM metodoak erabiliz, elementu kopurua 1296 denean lorturiko tentsio axialen σ_z^f banaketa 4.15 irudian azaltzen da eta tentsio ebakitzaleen τ_{rz}^f banaketa 4.16 irudian.

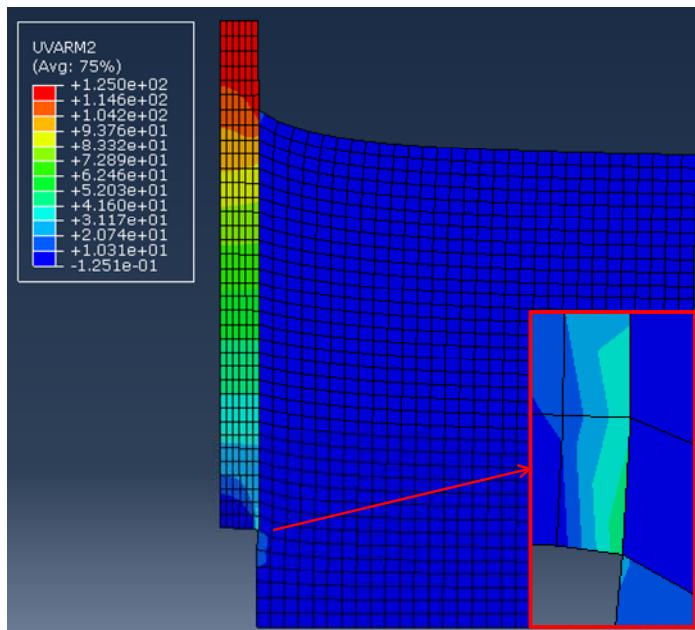
SM eta SFM metodoak erabiliz zuntza eta matrizea elkartzen diren planoan lorturiko emaitza numerikoak Quek-ek eta Yue-k [18] proposaturiko hurbilketa analitikoarekin alderatu dira. Zuntzean lorturiko tentsio axialen σ_z^f alderaketa 4.17 irudian azaltzen da eta tentsio ebakitzaleen τ_{rz}^f alderaketa 4.18 irudian.

Elementu kopurua handitzen den heinean bi metodoen arteko aldea txikitzen dela ikus daiteke. Egin den analisian SFM metodoak SM metodoarekiko duen abantaila ez da makurdura nagusi zen problemetan ikusitakoa bezainbestekoa.

(a)

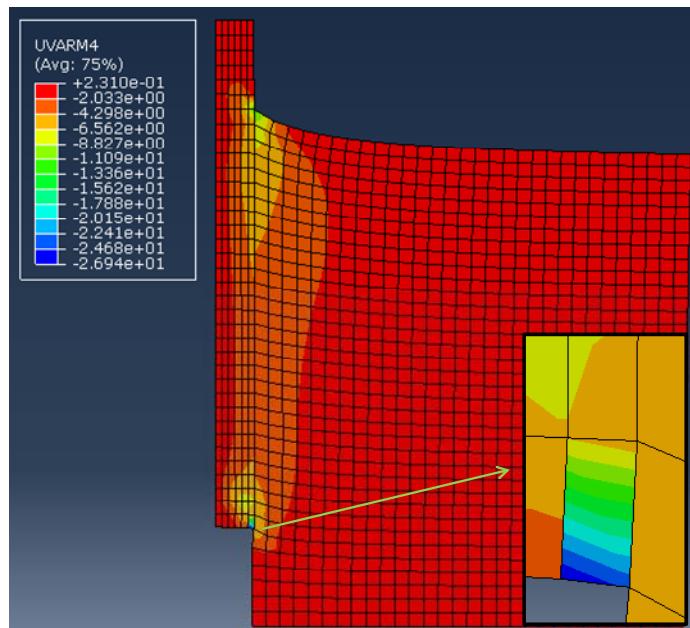


(b)

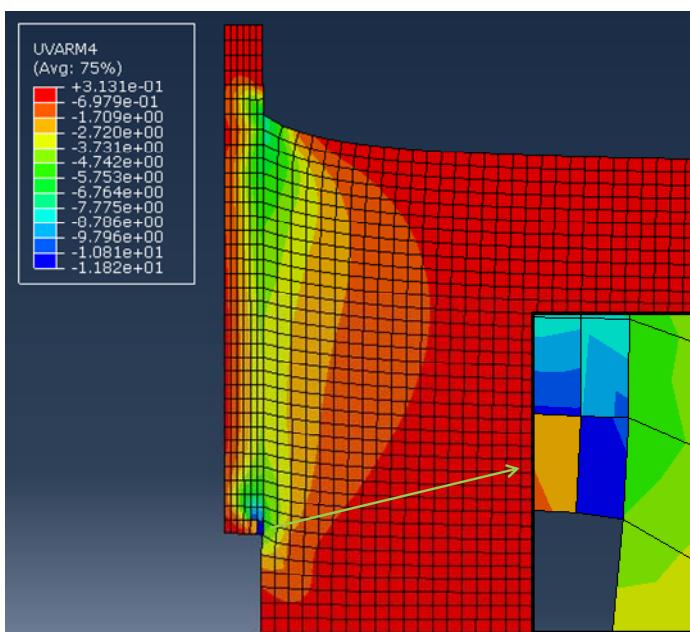


4.15 irudia. Tentsio axialen banaketa zuntzean: a) SM metodoa; b) SFM metodoa.

(a)

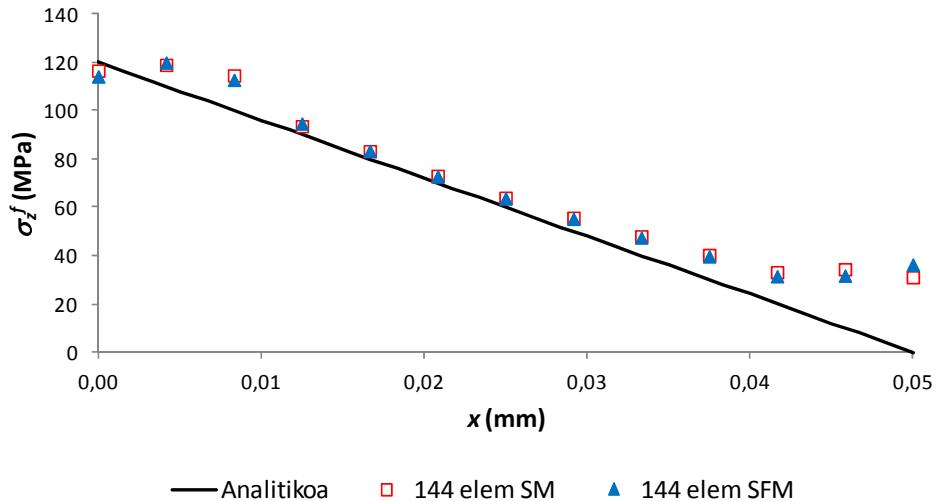


(b)

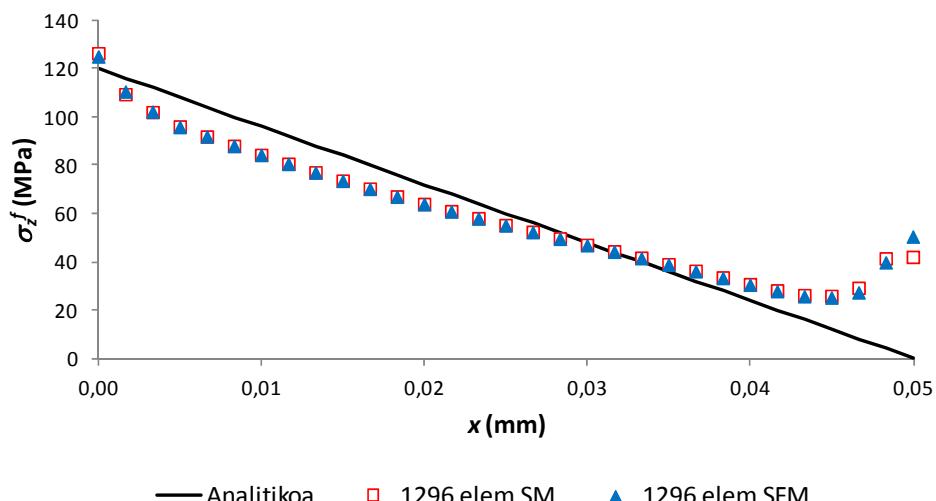


4.16 irudia. Tentsio ebakitzaleen banaketa zuntzean: a) SM metodoa; b) SFM metodoa.

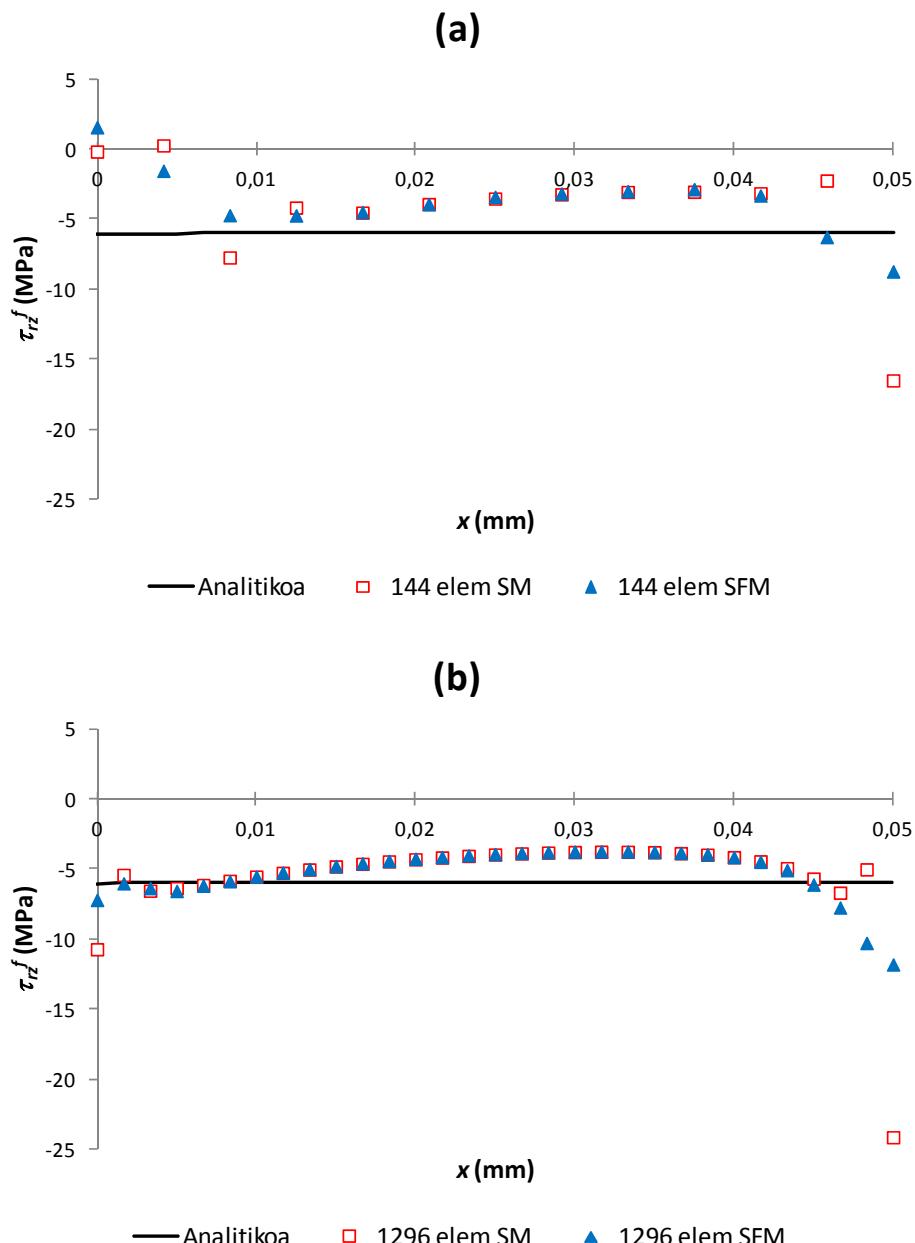
(a)



(b)



4.17 irudia. Tentsio axialen banaketa zuntzean: a) 144 elementurekin; b) 1296 elementurekin.

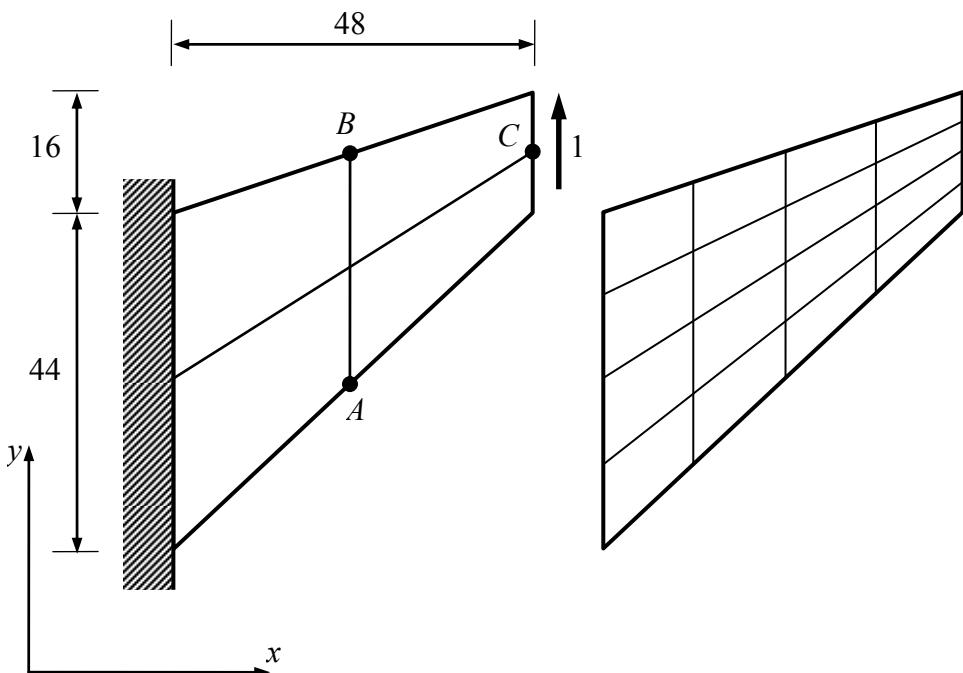


4.18 irudia. Tentsio ebakitzaleen banaketa zuntzean: a) 144 elementurekin; b) 1296 elementurekin.

4.4.3 SEKZIO ALDAKORRA DUEN HABEA

Puntan uniformeke banaturiko karga unitariopean dagoen sekzio aldakorreko habea Cook et al.-ek proposatu zuten [23] eta sarritan *Cook's membrane problem* izenarekin azaltzen da. Problema honen analisia FEM metodoari buruzko hainbat artikulutan egin da, hala nola bibliografiako [24-30] erreferentzietai, gehienetan aztergai diren elementuek distortsioarekiko duten portaera aztertu asmoz.

4.19 irudian habearen geometria eta elementu finituen analisian erabilitako bi diskretizazioak ikus daitezke, lehenengo hurbilketa lau elementu erabiliz egin da eta bigarrena hamasei elementurekin. Analisietan bibliografian konsideraturiko propietateak erabili dira, hau da, tentsio egoera laua eta material isotropoa: modulu elastikoa $E = 1 \text{ MPa}$, Poisson-en modulua $\nu = 1/3$ eta habearen lodiera 1 mm.



4.19 irudia. Sekzio aldakorreko habea.

Aurreko adibidean bezala, SFM metodoaren bidez kalkuluak egiteko, UEL erabiltzaileazpirrutina erabili da, eta ondorioz, ABAQUSek sortzen duen sarrera

datuen fitxategian aldaketak egin dira. Lau elementu erabiliz egindako analisiaren input fitxategia E.3 eranskinean azaltzen da.

Adibide honetan SFM metodoa erabiliz lorturiko balioak ABAQUSeko elementu bibliotekakoak erabiliz lorturiko emaitzakin alderatu dira, hots, SM metodoa jarraitzen duten elementuekin lortzen direnekin. CPS4 elementua lau nodoko elementu isoparametrikoa da, CPS4I elementua ere lau nodokoa da, modu bateraezinak (*incompatible modes*) barne hartzen dituena. CPS8 elementua zortzi nodoko elementua da.

Modu bateraezinak barneratzen dituzten elementuak Wilson et al.-ek [31] eta Taylor et al.-ek [24] proposatu zituzten lehenengoz. Elementu hauek desplazamenduetan askatasun gradu gehigarriak dituzte, hau da, elementuaren barnealdean deformazio modu bateraezinak gehitzen zaizkie. Aurrerago modu bateraezinen metodoak *Enhanced strain method* [32,33] izena hartu zuen. ABAQUSek [34] erabiltzen duen formulazioa Simo-k eta Rifai-ek [32] aurkeztu zutena da.

Lorturiko emaitzak A puntuko tentsio nagusi maximoa, B puntuko tentsio nagusi minimoa eta C puntuko desplazamendu bertikala dira. Ezagutzen den emaitzarik onena hiru nodoko 64×64 elementu erabiliz Long-ek eta Xu-k lorturikoa da [26]. ABAQUSeko elementu bibliotekakoekin eta SFM metodoaren UEL erabiltzaile azpirrutinarekin lorturiko emaitzak Long-ek eta Xu-k lorturikoekin [26] alderatu dira 4.3 taulan.

4.3 taula: Sekzio aldakorreko habearren desplazamendua eta tentsioak.

Elementu mota	v_C (mm)		σ_{Amax} (MPa)		σ_{Bmin} (MPa)	
	2x2	4x4	2x2	4x4	2x2	4x4
CPS4	11,85	18,30	0,1219	0,1874	-0,0965	-0,1526
CPS4I	21,05	23,02	0,1730	0,2217	-0,1658	-0,1849
SFM	21,13	23,02	0,1854	0,2241	-0,1550	-0,1856
CPS8	22,72	23,71	0,2465	0,2420	-0,2279	-0,2007
[26]	23,96	23,96	0,2362	0,2362	-0,2023	-0,2023

Azterturiko modeloetan elementu gutxi erabili direnez, nabarmena da CPS4I, CPS8 eta SFM metodoarekin lorturiko emaitzak CPS4 elementuarekin lorturikoak baino gehiago hurbiltzen direla [26] erreferentziako emaitzara. Horrez gain, CPS4I

elementua erabiliz edo modu bateraezinak konsideratuz eta SFM metodoaren bidez lorturiko emaitzak oso antzezoak direla ikus daiteke.

4.5 ONDORIOAK

SFM metodoa erabiliz egindako lehenengo adibideetako emaitzak SM metodoaren bidez lorturikoak baino hobeak izan dira. SFM metodoa ABAQUS-en implementatu ondoren azterturiko problemetan aldiz, SFM metodoa erabiliz lorturiko emaitzak ez dira uste bezain onak izan.

SFM metodoan tentsioak zuzenean indarren interpolazio funtzioak erabiliz determinatzen direnez, badirudi tentsioetan emaitza hobeak lortzeak zentzua duela. Hala ere, tentsio kontzentrazioak daudenean, lorturiko emaitzak ez dira horren onak izan.

4.6 BIBLIOGRAFIA

- [1] Dassault Systèmes Simulia Corp. Commercial software ABAQUS Standard, version 6.12. 2012.
- [2] Daniel IM, Ishai O. Engineering mechanics of composite materials. Oxford University Press, 2006.
- [3] Oñate E, Zienkiewicz OC. Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos: análisis estático lineal. 2a. ed. Barcelona: Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, 1995.
- [4] Jogi CS, Annabattula R. The development of hybrid axisymmetric elements based on the Hellinger–Reissner variational principle. Int J Numer Meth Eng 2006; 65: 2279-91.
- [5] Melo JDD, Bi J, Tsai SW. A novel invariant-based design approach to carbon fiber reinforced laminates. Compos Struct 2017; 159: 44-52.
- [6] Timoshenko SP, Goodier JN. Teoría de la elasticidad. 2nd ed. Bilbao: Urmo, 1968.

- [7] Howland RCJ. On the stresses in the neighbourhood of a circular hole in a strip under tension. *Philos Trans R Soc Lond A* 1930; 229: 49-86.
- [8] Tan SC. Finite-width correction factors for anisotropic plate containing a central opening. *J Compos Mater* 1988; 22: 1080-97.
- [9] Camanho PP, Maimí P, Dávila CG. Prediction of size effects in notched laminates using continuum damage mechanics. *Compos Sci Technol* 2007; 67: 2715-27.
- [10] O'Higgins RM, McCarthy MA, McCarthy CT. Comparison of open hole tension characteristics of high strength glass and carbon fibre-reinforced composite materials. *Compos Sci Technol* 2008; 68: 2770-8.
- [11] Wu H, Mu B. On stress concentrations for isotropic/orthotropic plates and cylinders with a circular hole. *Compos Part B:-Eng* 2003; 34: 127-34.
- [12] Camanho PP, Erçin GH, Catalanotti G, Mahdi S, Linde P. A finite fracture mechanics model for the prediction of the open-hole strength of composite laminates. *Compos Part A-Appl S* 2012; 43: 1219-25.
- [13] Martin E, Leguillon D, Carrère N. A coupled strength and toughness criterion for the prediction of the open hole tensile strength of a composite plate. *Int J Solids Struct* 2012; 49: 3915-22.
- [14] Frizzell RM, McCarthy MA, McCarthy CT. Numerical method to control high levels of damage growth using an implicit finite element solver applied to notched cross-ply laminates. *Compos Struct* 2014; 110: 51-61.
- [15] ASTM D5766 / D5766M-11(2018), Standard Test Method for Open-Hole Tensile Strength of Polymer Matrix Composite Laminates, ASTM International, West Conshohocken, PA, 2018, www.astm.org. 2018.
- [16] Mollón V, Bonhomme J, Elmarakbi AM, Argüelles A, Viña J. Finite element modelling of mode I delamination specimens by means of implicit and explicit solvers. *Polym Test* 2012; 31: 404-10.

- [17] Graciani E, Mantič V, París F, Varna J. Numerical analysis of debond propagation in the single fibre fragmentation test. Compos Sci Technol 2009; 69: 2514-20.
- [18] Quek MY, Yue CY. Axisymmetric stress distribution in the single filament pull-out test. Mat Sci Eng A-Struct 1994; 189: 105-16.
- [19] Wang Y, Zhou L, Wang Z, Huang H, Ye L. Stress distributions in single shape memory alloy fiber composites. Mater Design 2011; 32: 3783-9.
- [20] Sun W, Lin F. Computer modeling and FEA simulation for composite single fiber pull-out. J Thermoplast Compos 2001; 14: 327-43.
- [21] Yang Q, Qin Q, Peng X. Size effects in the fiber pullout test. Compos Struct 2003; 61: 193-8.
- [22] Bheemreddy V, Chandrashekara K, Dharani LR, Hilmas GE. Modeling of fiber pull-out in continuous fiber reinforced ceramic composites using finite element method and artificial neural networks. Comp Mater Sci 2013; 79: 663-73.
- [23] Cook RD. Concepts and applications of finite element analysis. 2nd. ed. New York: John Wiley & Sons, 1981.
- [24] Taylor RL, Beresford PJ, Wilson EL. A non-conforming element for stress analysis. Int J Numer Meth Eng 1976; 10: 1211-9.
- [25] Pian THH, Sumihara K. Rational approach for assumed stress finite elements. Int J Numer Meth Eng 1984; 20: 1685-95.
- [26] Yuqiu L, Yin X. Generalized conforming triangular membrane element with vertex rigid rotational freedoms. Finite Elem Anal Des 1994; 17: 259-71.
- [27] Chen X, Cen S, Long Y, Yao Z. Membrane elements insensitive to distortion using the quadrilateral area coordinate method. Comput Struct 2004; 82: 35-54.

- [28] Cen S, Zhou M, Fu X. A 4-node hybrid stress-function (HS-F) plane element with drilling degrees of freedom less sensitive to severe mesh distortions. *Comput Struct* 2011; 89: 517-28.
- [29] Zhang C, Hoa SV. A systematic and quantitative method to determine the optimal assumed stress fields for hybrid stress finite elements. *Finite Elem Anal Des* 2014; 80: 41-62.
- [30] Boutagouga D. A new enhanced assumed strain quadrilateral membrane element with drilling degree of freedom and modified shape functions. *Int J Numer Meth Eng* 2017; 110: 573-600.
- [31] Wilson EL, Taylor RL, Doherty WP, Ghaboussi J. Incompatible Displacement Models. 1973: 43-57.
- [32] Simo JC, Rifai MS. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *Int J Numer Meth Eng* 1990; 29: 1595-638.
- [33] Simo JC, Armero F. Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes. *Int J Numer Meth Eng* 1992; 33: 1413-49.
- [34] Dassault Systèmes Simulia Corp. ABAQUS Theory Manual, 6.12. 2012.

HIRU-PUNTUKO MAKURDURA SAIAKUNTZA

5.1 SARRERA

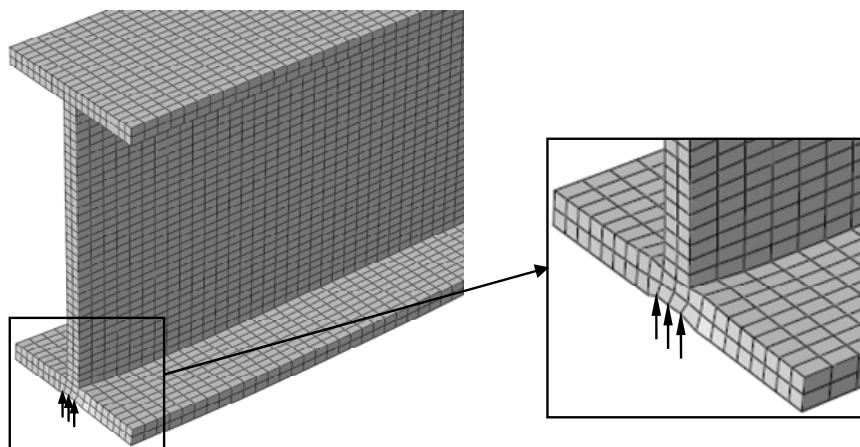
Laborategiko saiakuntzak egiten direnean, materialen propietateak aurretiko hurbilketa analitiko batean oinarrituz zehazten dira. Baldintza esperimental desberdinetan emaitzak bat baldin badatoz, propietatea eta hurbilketa analitikoa zuzenak direla ondorioztatzen da.

Ikerketa lan honetan, analisi numerikoek saiakuntzak ordezkatuko dituzte. Kasu honetan, materialaren propietateak modelo numerikoan sarrera gisa erabiliko ditugun balioak izango dira. Analisi numerikoa burutu ondoren, irteera balioak desplazamenduak izango dira. Desplazamendu horiei modelo analitiko bat aplikatz, materialaren propietateen irteerako balioak lortuko direlarik. Beraz, modu honetan, sarrerako eta irteerako materialaren propietateen arteko alderaketa zuzen bat erdiesten da. Emaitzak bat baldin badatoz, materialaren irteera propietateak lortzeko erabilitako hurbilketa analitikoa ontzat hartuko da. Eta ondorioz, esperimentuak egiterakoan datuak tratatzeko metodo moduan erabil daiteke.

5.2 MAKURDURA ETA EBAKIDURA MODULUAK HIRU-PUNTUKO MAKURDURA SAIAKUNTZAN

Mujikak [1] erregresio kubikoa aplikatuz makurdurako eta planoz kanpoko ebakidura modulua zehazteko prozedura bat proposatu zuen. Lan horretan erregresio kubikoa beharrezkoa zen saiakuntza makinan neurituriko desplazamendu esperimentalak erabili zelako eta, beraz, desplazamendu horiek deformazio lokalaren eragina barne hartzen zutelako. Eragin horiek lodieran zeharreko probetaren deformazioa eta saiakuntza sistemaren zurruntasuna barneratzen dituzte. Eragin handiena zelula-kargaren zurruntasunarekin erlazionaturikoa dela ikusi da [2]. Desplazamendua kanpoko gailu bat erabiliz zuzenean probetan neurten denean, deformazio lokalak ez dauka eraginik eta erregresio lineala erabil daiteke [3].

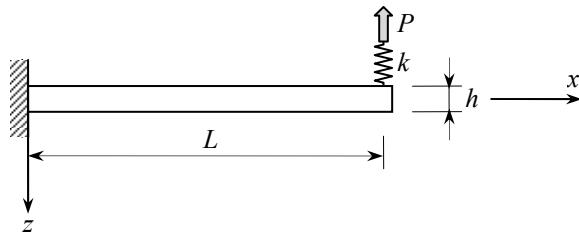
Lan honetako saiakuntza birtualetan erabilitako indarrak puntualak izan dira eta, ondorioz, karga aplikazio puntuaren inguruan, lodieraren norabidean, deformazio lokal bat gertatzen da, saiakuntzetan gertatzen den antzeria (ikus 5.1 irudia). Elementu finituen modeloaren kasuan, deformazio lokalaren eragina diskretizazio mailaren arabera aldatzen da.



5.1 irudia. Hiru-puntuko makurdura saiakuntzaren analisirako erabilitako modeloa, deformazio lokalaren eragina kontuan hartuz.

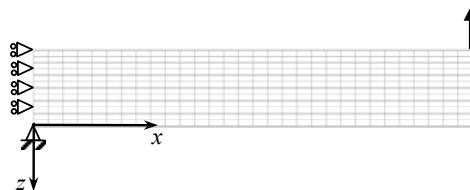
Lan honetan hiru-puntuko makurdura saiakuntzak simulatu dira elementu finituen metodoa erabiliz. Hiru-puntuko makurdura saiakuntzan simetria baldintzak kontuan

izanik, analisietan habearen erdia modelizatu da. Ondorioz, modeloa amaiera puntuaren indar puntual bat aplikatua duen hegazkin bati dagokio, 5.2 irudian ikusten den moduan. Karga aplikazio puntuaren malgukia konsideratu da 5.1 irudian azaltzen diren deformazio lokalak kontuan hartu asmoz.



5.2 irudia. Hiru-puntuko makurdura saiakuntzaren analisirako erabilitako modeloa, deformazio lokalaren eragina kontuan hartuz.

Elementu finituen metodoan erabilitako modeloetariko baten koordenatu sistema, diskretizazioa, karga eta ingurune-baldintzak 5.3 irudian ikus daitezke.



5.3 irudia. Elementu finituen modeloaren koordenatu sistema, diskretizazioa, karga eta ingurune-baldintzak.

Mujikak [1] deskribaturiko prozedura jarraitu da E_f makurdura modulua eta planoz kanpoko G_{13} ebakidura modulua lortzeko. Lorturiko ekuazioak desberdinak dira, kasu honetan, arrabolarik ez delako kontuan izan, simetria dela eta analisietan habe erdia kontuan izan delako eta sekzio laukizuzenaz gain T bikoitzeko sekzioak ere barne hartzen dituztelako.

Makurdura, ebakidura eta malgukia kontuan izanda, deformazio energia osagarria U^* zehazteko ekuazioa honakoa da:

$$U^* = \int_L \frac{M^2}{2E_f I_y} dl + \chi \int_L \frac{V^2}{2G_{13} A} dl + \frac{P^2}{2k} \quad (5.1)$$

Non M makurdura momentua, V indar ebakitzalea, P aplikatutako indarra, E_f makurdura modulua, G_{13} planoz kanpoko ebakidura modulua, I_y inertzia momentua, A sekzioaren azalera, χ ebakidura faktorea eta k malgukiaren zurruntasun konstantea diren. Tentsio ebakitzalea lodieran zehar uniformea ez denez, ebakidura faktorea erabiltzen da. Faktore hau [4] honako ekuazioaren bidez zehaztu daiteke:

$$\chi = \frac{A}{I_y^2} \int_A \frac{Q_y^2}{w^2} dA \quad (5.2)$$

Q_y momentu estatikoa eta w zabalera izanik.

Engesser-Castiglianoren teoremaren [5] arabera, karga aplikazio puntuaren desplazamendua δ honakoa da:

$$\delta = \frac{\partial U^*}{\partial P} = \int_L \frac{MM'}{E_f I_y} dl + \chi \int_L \frac{VV'}{G_{13} A} dl + \frac{FF'}{k} = \frac{4PL^3}{E_f \lambda_I h^3} + \chi \frac{PL}{G_{13} \lambda_A h} + \frac{P}{k} \quad (5.3)$$

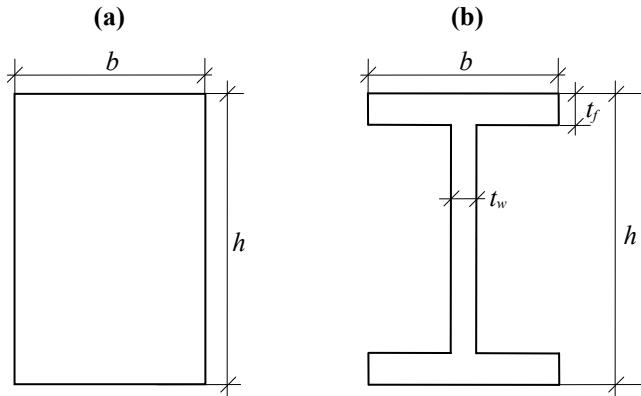
Lorturiko ekuazioak T bikoitza sekzioko zein sekzio laukizuzeneko habeentzat erabilgarriak izan daitezen, (5.3) ekuazioan agertzen diren parametroak honakoak dira:

$$\begin{aligned} \lambda_A &= 2b\lambda_f + t_w(1 - 2\lambda_f) \Rightarrow A = \lambda_A h \\ \lambda_I &= b - (b - t_w)(1 - 2\lambda_f)^3 \Rightarrow I_y = \frac{1}{12} \lambda_I h^3 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Non A sekzioaren azalera, I_y inertzi momentua, $\lambda_f = t_f/h$, b hegalen zabalera, h sekzioaren altuera eta t_f eta t_w hegalen eta arimaren lodierak diren, hurrenez hurren, 5.4 irudian ikus daitekeen bezala. Sekzio laukizuzen baten kasuan, $\lambda_f = 1 \Rightarrow \lambda_A = \lambda_I = b$ eta $\chi = 6/5$.

(5.3) ekuazioko gaiak berrantolatuz:

$$\delta = \frac{4PL^3}{E_f \lambda_I h^3} \left[1 + \frac{\chi}{4} \frac{\lambda_I}{\lambda_A} \frac{E_f}{G_{13}} \left(\frac{h}{L} \right)^2 + \frac{E_f \lambda_I}{4k} \left(\frac{h}{L} \right)^3 \right] \quad (5.5)$$



5.4 irudia. Habearen zeharkako sekzioa: a) laukizuzena; b) T bikoitza.

(5.5) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$E_f = \frac{4mL^3}{\lambda_I h^3} \left[1 + \frac{\chi}{4} \frac{\lambda_I}{\lambda_A} \frac{E_f}{G_{13}} \left(\frac{h}{L} \right)^2 + \frac{E_f \lambda_I}{4k} \left(\frac{h}{L} \right)^3 \right] \quad (5.6)$$

Non $m = P/\delta$ karga-desplazamendu kurbaren malda den. (5.6) ekuazioan parentesi karratua biderkatzen duen gaia honela izendatuz:

$$E_0 = \frac{4mL^3}{\lambda_I h^3} \quad (5.7)$$

(5.6) ekuazioa honela geratzen da:

$$E_0^{-1} = E_f^{-1} \left[1 + \frac{\chi}{4} \frac{\lambda_I}{\lambda_A} \frac{E_f}{G_{13}} \left(\frac{h}{L} \right)^2 + \frac{E_f \lambda_I}{4k} \left(\frac{h}{L} \right)^3 \right] \quad (5.8)$$

(5.8) adierazpena ekuazio kubiko baten baliokidea da:

$$y = A_R + B_R x^2 + C_R x^3 \quad (5.9)$$

Non:

$$y = E_0^{-1}, \quad x = \frac{h}{L}, \quad A_R = E_f^{-1}, \quad B_R = \frac{\chi}{4} \frac{\lambda_I}{\lambda_A} G_{13}^{-1}, \quad C_R = \frac{\lambda_I}{4} k^{-1} \quad (5.10)$$

(5.9) eta (5.10) ekuazioetan erregresio bidez lortuko diren A , B eta C koefizienteetan R azpiindizea erabili da, izendapen nahasmenak ekidite aldera.

Horrela, n habe luzera desberdini dagozkien n balio numeriko lortzean, minimo karratuen metodoa erabil daiteke (5.9) ekuazioko A_R , B_R and C_R koefizienteak determinatzeko, Mujikak [1] adierazi zuen moduan. Koefiziente horiek lortu ondoren, E_f , G_{13} eta k honakoak dira:

$$E_f = A_R^{-1}, \quad G_{13} = \frac{\chi}{4} \frac{\lambda_I}{\lambda_A} B_R^{-1}, \quad k = \frac{\lambda_I}{4} C_R^{-1} \quad (5.11)$$

Orain arteko analisian azaltzen den k zurruntasunaren balioa ez da modelo numerikoetan zuzenean sartzen. Hain zuzen ere, elementu finituen metodoan indar puntuak erabiltzearen emaitza da, 5.1 irudian ikus daitekeen moduan.

5.3 BIBLIOGRAFIA

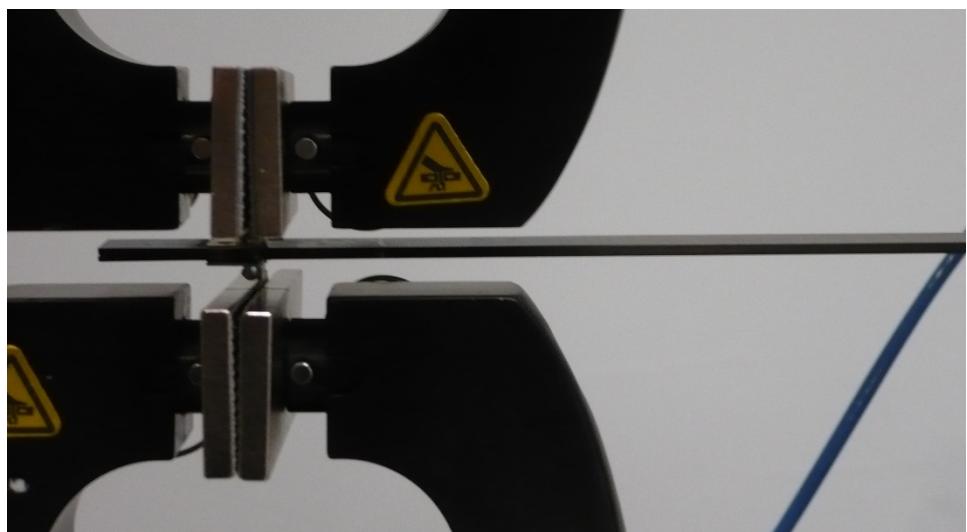
- [1] Mujika F. On the effect of shear and local deformation in three-point bending tests. Polym Test 2007; 26: 869-77.
- [2] Mujika F, Arrese A, Adarraga I, Osés U. New correction terms concerning three-point and four-point bending tests. Polym Test 2016; 55: 25-37.
- [3] Bank L. Flexural and shear moduli of full-section fiber reinforced plastic (FRP) pultruded beams. J Test Eval 1989; 17: 40-5.
- [4] Vazquez M. Resistencia de materiales. 3^a ed. Madrid, 1994.
- [5] Oden JT, Ripperger EA. Mechanics of Elastic Structures. 2nd ed. Washington: Hemisphere Publishing Corporation, 1981.

KONPOSITEEN LAMINARTEKO HAUSTURA I MODUAN ELEMENTU FINITUAK ERABILIZ

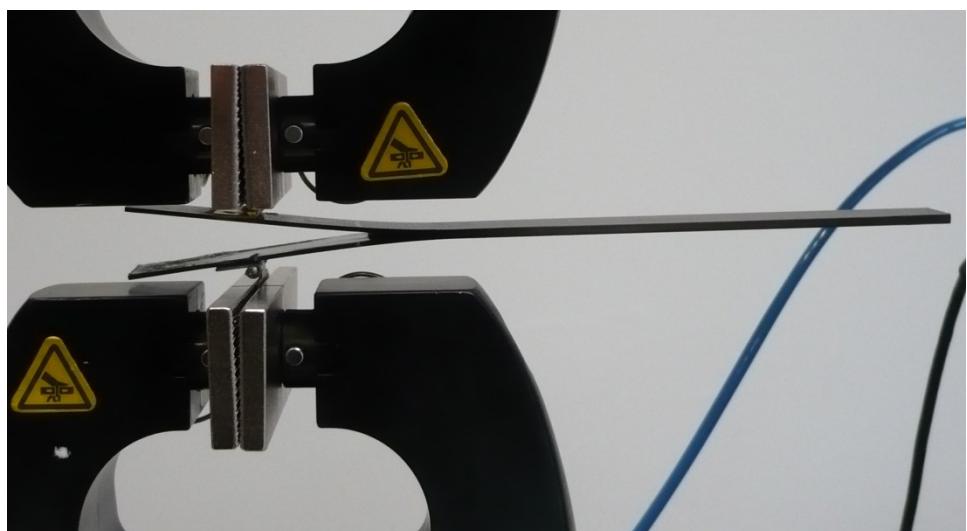
6.1 SARRERA

Karbono zuntzezko errefortzudun konposite polimerikoak (*Carbon Fibre Reinforced Polymers*, CFRP) interesgarriak dira zurruntasun eta erresistentzia espezifiko altuak dituztelako. Hala eta guztiz ere, laminarteko hausturak azaltzen direnean euren zurruntasuna eta erresistentzia asko gutxitu daitezke. Laminarteko haustura edo delaminazioa laminatu konpositeetan sarrien gertatzen den hutsegite mekanismoa da, eta ondorioz, laminarteko hausturaren ikerketa gai garrantzitsua da CFRP konpositeetan [1]. Habe landatu bikoitzeko (*Double Cantilever Beam*, DCB) saiakuntza I moduko haustura neurtzeko gehien erabiltzen den saiakuntza da eta arautua dago errefortzudun konposite polimerikoetan [2,3]. American Society for Testing and Materials (ASTM)k 1994an argitaraturiko saiakuntza metoda [3] eta 2001eko ISO nazioarteko araua [2] teknikoki baliokideak dira. DCB saiakuntzaren hasierako eta pitzaduraren hedapen faseko argazkiak ikus daitezke 6.1 irudian.

(a)



(b)



6.1 irudia. DCB saiakuntza: a) hasieran; b) pitzaduraren hedapen fasean. Argazkiak: J. De Gracia.

Hasera batean habearen besoetako bakoitza pitzadura puntan finkatua eta makurdura hutsaren eraginpean dagoen habe landatu bat izango balitz bezala aztertu zen. Agerikoa da hori ez dela benetako kasua, izan ere, pitzadura puntatik aurreranzko

habearen zatia ez da infinituki zurruna eta ondorioz, habeak ebakiduragatiko deformazioa eta errotazioa jasango ditu pitzadura puntan. Hurbilketa hori bi besoen arteko elkarrekintza kontuan izanda hobe daiteke, bi besoen artean fundazio elastiko bat konsideratz. Pitzadura puntaren malgutasuna aztertzen lehenengoa Kanninen [4,5] izan zen, aurreko analisiarekiko hobekuntza proposatu zuen probeta isotropoen kasuan. Ondoren, Whitney-k [6] eta Williams-ek [7] analisia material ortotropoen kasura hedatu zuten.

DCB saiakuntzari buruzko arauetan [2,3] pitzadura luzera baliokidea definitzen da, pitzadura puntako errotazio ez nulua kontuan hartu asmoz. Beraz, probetaren ertzean optikoki neurituriko pitzadura luzera zuzendu egiten da. Energia askatze tasa kritikoa lortzeko datuak tratatzeko hainbat metodoren arteko alderaketa egin zuten Hashemi et al.-ek [8]. Ikerkuntza lan horretan habeen teorian oinarritutako metodoetan pitzadura luzera zuzentzea beharrezkoa dela ondorioztatu zuten, habea ez baitago guztiz landatua. Pitzadura luzera zuzentzeko metodo hori malgutasunaren kalibrazioan oinarritutako da eta zuzenduriko habeen teoria (*Corrected Beam Theory*, CBT) deitu zuten. Williams-ek [9] desplazamendu handien kasua barne hartzeko malguki lineal elastikoen fundazio bat konsideratu zuen.

Olsson-ek [10] malgutasun osoa kalkulatzea proposatu zuen, habeen teoria klasikoan oinarrituz, ebakiduragatiko deformazioa zuzentzeaz gain, pitzatu gabeko zatian zeharkako malgutasuna eta pitzadura puntatik aurrera Saint Venant-en eragina kontuan hartuz. Lan horretan emaitza analitikoak eta elementu finituen metodoa erabiliz lorturikoak alderatu zituen. Horrez gain, analisi teoriko eta esperimental ugari argitaratu dira [11-24] eta Shokrieh-k eta Heidari-Rarani-k [25] fundazio elastiko desberdinaren arteko konparaketa analisia egin zuten.

Pitzadura birtualaren itxiera metodoa (*Virtual Crack Closure Technique*, VCCT) eta gune kohesiboko modeloa (*Cohesive Zone Model*, CZM) laminarteko haustura FEM bidez aztertzeko gehien erabiltzen diren metodoak dira. VCCT Rybicki-k eta Kanninen-ek [26] proposatu zuten eta egokia da energia askatze tasa zehazteko [27-37]. Pitzaduren hedapena aztertzeko CZM erabili ohi da [38-45].

Duela gutxi Huang et al.-ek [46] DCB probeten lege kohesibo bilineal elastiko-plastikoa aztertzeko adierazpen analitiko bat proposatu zuten. Shahani-k eta Abolfathitabar-ek [47] DCB probeten luzera mugatua kontuan hartzen duen

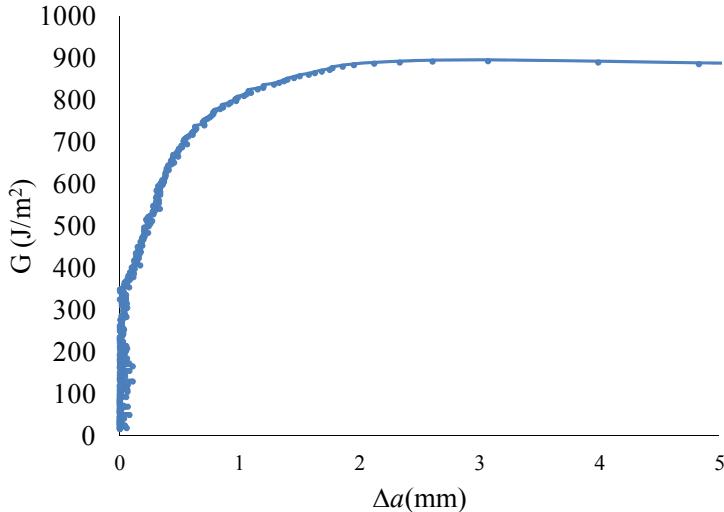
ikerkuntza lan bat egin zuten. Xu-k eta Guo-k [48] malgutasun bikoitzen metodoa proposatu zuten. Lehenengo malgutasuna karga-desplazamendu kurbaren haserako maldatik lortzen da eta bigarrena deskarga saiakuntzatik. Malgutasun horiek haserako eta bukaerako pitzadura luzerarekin lotzen dira, hurrenez hurren. Balio horiek malgutasunaren ekuazioan ordezkatzuz lortzen den adierazpenetik pitzadura luzera zehazten delarik. Eta ondorioz, energia askatze tasa ere kalkula daiteke.

DCB saiakuntzan laminarteko haustura pitzadura luzera optikoki neurtu gabe lortzeko metodo bat aurkeztu da berriki [49]. De Gracia et al.-en lan horretan, hiru zati lineal dituen fundazio elastiko bat proposatu da, fundazioaren ezaugarriak Engesser-Castiglianoren teorema erabiliz kalkulatzen direlarik. Haserako zati linealak fundazio elastiko linealaren ebazpenaren antzekotasunean oinarrituz zehaztu dira. Hurbilketa horretan habean konpresioko tentsioak azaltzen diren luzera materialaren propietateen menpekoa dela eta trakzioko tentsioek eragiten duten luzera aurrekoen eta probetaren lodieraren baitakoa dela ikus daiteke.

Lan horren oinarria pitzadura luzera zehazteko malgutasunean oinarrituriko prozedura esperimental bat da. Prozedura hori jarraituz lortzen den pitzadura luzerak malgutasunaren aldaketa iturri guztiak barne hartzen ditu eta sistemaren malgutasuna kentzen da. Saiakuntza aparatuak emandako karga eta desplazamendu balio pare esperimental bakoitzaren pitzadura luzera zehaztu ondoren energia askatze tasa determina daiteke, puntuz puntu, saiakuntzaren *R*-kurba lortzen delarik (ikusi 6.2 irudia).

Kapitulu honetan buruturiko saiakuntza numerikoaren nondik norakoak azalduko dira. Saiakuntza numerikoan planoz kanpoko ebakidura eta makurdura moduluak zehaztu dira esperimentalki jarraitzen den prozedura berbera erabiliz. Prozedura hori Mujikaren [50] ikerkuntza lanean oinarritua dago eta makurdura, ebakidura eta eragin lokalak kontuan hartzen ditu. Hiru parametro horiek, erabilitako materialaren makurdura modulu, modulu ebakitzalea eta sistemaren zurruntasuna, lortzeko erregresio kubikoa aplikatu da. De Gracia et al.-ek [49] proposaturiko prozedura esperimentala numerikoki balioztatzeko, pitzadura luzera zehaztu da, sistemaren malgutasunean oinarrituz eta aurrez elementu finituen bidez kalkulaturiko makurdura eta planoz kanpoko ebakidura moduluak erabiliz. Horrez gain, deformazio energia askatze tasa G_I zehaztu da elementu finituen metodoa erabiliz, sistema osoaren deformazio energiaren aldaketa konsideratzuz, bi urratsen hedapen prozedura

(*Two-step extension method*, TSEM) aplikatuz eta azaleren metodoaren bidez. Bukatzeko, emaitza numerikoak analitikoki lorturikoekin alderatu dira.



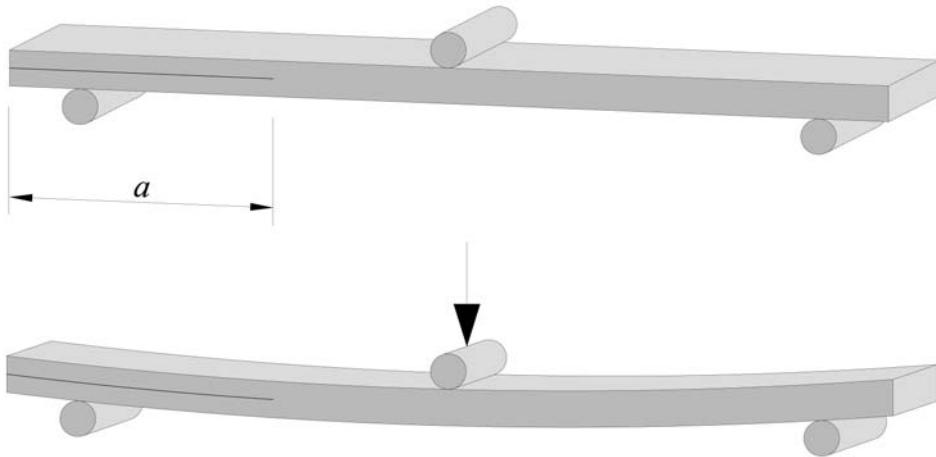
6.2 irudia. R erresistentzia kurba.

6.2 MOTIBAZIOA

De Gracia et al.-en [49] metodoan, pitzadura luzeraren neurketaren egokitasuna aztertzeko hiru-puntuko bukaerako pitzaduradun makurdura saiakuntzarako (*Three-point End Notched Flexure test*, ENF) proposaturiko prozedura bat erabili da, Habeen Teoria Makurdura Errrotazioekin deitua (*Beam Theory including Bending Rotation effects*, BTBR) [51].

Lan horretan, pitzadura hedapenik gabeko DCB saiakuntzak egin ziren eta lorturiko pitzadura luzerak probeta bera II moduko saiakuntza eginez lorturikoekin alderatu ziren. Prozesu hori pitzadura hedapenaren ondoren errepikatu zen, I eta II moduetan egindako neurketen artean adostasun egokia lortu zelarik.

II moduko edo ENF saiakuntzaren eskema 6.3 irudian ikus daiteke eta saiakuntza horretako aurrepitzaduraren hedapenaren argazki bat 6.4 irudian.

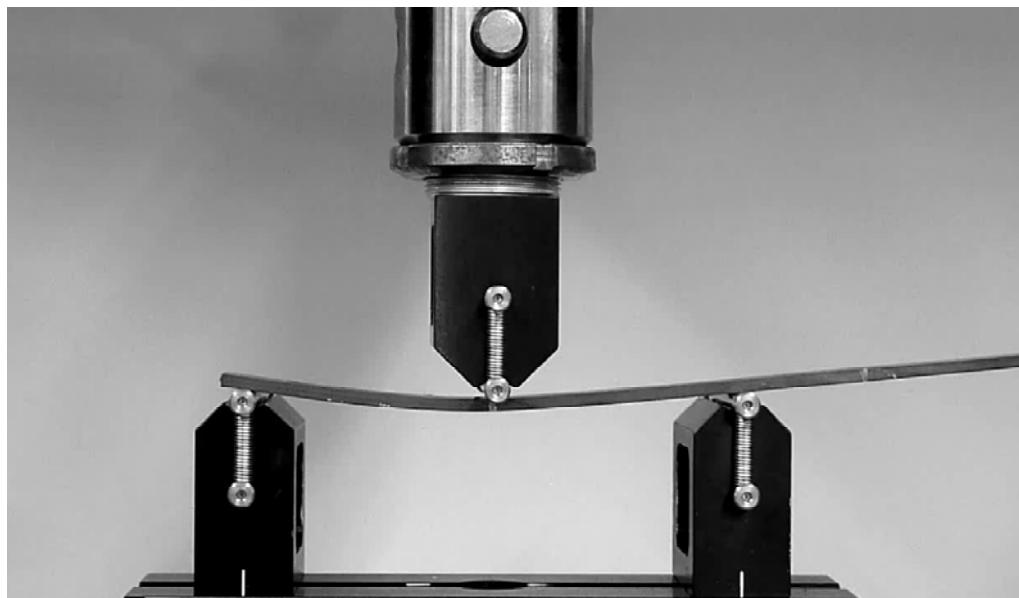


6.3 irudia. ENF saiakuntzaren eskema.

BTBR metodoan pitzadura luzera eredu zehatz bat erabiliz determinatu zen. Izan ere, probeta deformatzean euskarrieta biraketa gertatzen da eta ondorioz, euskarri arteko argia murrizten da, probeta eta euskarrien zein probeta eta indar aplikatzailearen arteko ukipen-zona aldatzen delarik. BTBR metodoan erabilitako eredu zehatzak, beste faktore batzuen artean, biraketaren eraginez gertatzen den argi luzeraren murrizpena barneratzen du. Metodo honetan determinaturiko pitzadura luzeraren egokitasuna I moduan saiatutako probeta eskuz irekiz eta II moduko eta I moduko haustura gainazalen arteko desberdintasuna behatuz aztertu zen, bi urratsetan, hedapenaren aurretik eta hedapenaren ondoren.

Ondorioz, DCB saiakuntzetako pitzadura luzeraren zehaztapenaren doitasuna ENF saiakuntzetako pitzadura luzeraren zehaztapenaren doitasunean oinarritua dago.

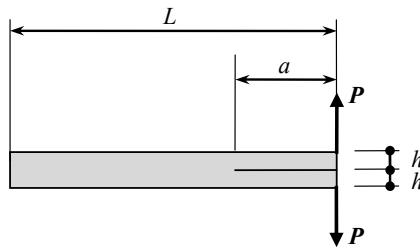
Metodo optikoek eta irudien korrelazio digital (*Digital Image Correlation*, DIC) bidezkoek pitzadura luzera probetaren ertzean determinatzen dute. Haustura saiakuntza batean pitzadura puntaren kokalekua definitzea oso zaila da. Malgutasunaren aldaketan oinarrituz zehazturiko pitzadura luzera, pitzadura luzeraren baliokidea da. Horregatik, prozedura esperimentalala numerikoki implementatu da, [49] erreferentzian aurkezturiko metodo analitiko eta esperimentalala balioztatu asmoz.



6.4 irudia. Aurrepitaduraren hedapena ENF saiakuntzan [52].

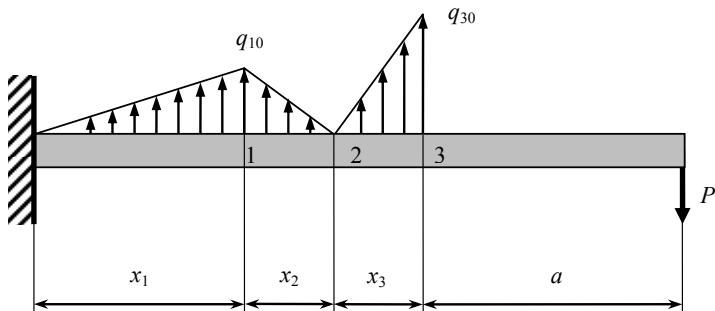
6.3 PROZEDURA EXPERIMENTALAREN OINARRI ANALITIKOA

I moduan laminarteko hausturaren erresistentzia neurtzeko gehien erabiltzen den metoda DCB saiakuntza da (ikus 6.5 irudia). Saiakuntza honetan aurrez pitzaturiko probeta bat kargatzen da ertz batean, hau da, pitzadura aldeko bi habeek trakzio indarra jasaten dute. Arauturiko prozedurak saiakuntza egiten den bitartean, hots, karga aplikatzen den heinean, karga eta desplazamendu balioez gain, delaminazio luzera α neurtzea eskatzen du. Ondoren, arauaren arabera, neurituriko pitzadura luzera zuzendu egiten da, energia askatze tasa determinatzeko. Prozedura horren desabantaila nagusiena saiakuntzan zehar pitzadura luzera neurtzea da. Izan ere, pitzadura luzera optikoki neurtzea ez da batere erraza. Neurketa karga-desplazamendu balioekin batera egin behar da eta, gainera, pitzaduraren aurrealdearen itxura kurbatua da.



6.5 irudia. DCB sajakuntzaren eskema.

Horregatik, berriki malgutasunean oinarrituriko metodo bat proposatu da [49], neurketa optikorik egin gabe pitzadura luzera zein den zehazteko. Hurbilketa analitikoaren oinarria pitzatu gabeko zatiko tentsio banaketaren eredu sinplifikatua da, 6.6 irudian ikus daitekeen moduan. Probetaren propietate elastikoak lortu ondoren, pitzadura luzera neurketa optikorik gabe determinatzen da, malgutasunean oinarrituz.



6.6 irudia. Indar banaketa habean zehar.

Beraz, metodo hori hiru zati linealeko fundazio elastiko batean oinarritzen da. Hori kontuan izanik, Engesser-Castiglianoren teorema aplikatuz [49,53,54], probeta erdiaren desplazamendua karga puntuan honakoa da:

$$\delta = \delta_3 + \theta_3 a + \frac{Pa^3}{3E_f I} + \frac{6Pa}{5G_{13} A} \quad (6.1)$$

P probetaren ertzean aplikaturiko karga, a pitzadura luzera, E_f makurdura modulua, G_{13} planoz kanpoko ebakidura modulua, I inertzia momentua, A zeharkako sekzioaren

azalera, δ_3 pitzadura puntari dagokion desplazamendua eta θ_3 pitzadura puntako makurdura angelua direlarik. Azken bi gaiak hurrengoak dira:

$$\begin{aligned}\delta_3 &= \frac{hP}{E_3 b} (\beta_4 + \beta_2 a) \\ \theta_3 &= \frac{P}{12E_f I} (\beta_3 + 3\beta_1 a)\end{aligned}\quad (6.2)$$

E_3 planoz kanpoko modulu elastikoa, b probetaren zabalera eta h beso bakoitzaren lodiera izanik. β_i parametroak fundazio elastikoaren hiru zatien luzeraren menpekoak dira, hots, x_1 , x_2 eta x_3 distantzien menpekoak. Distantzia horiek [49,54] lanetan zehaztuak izan dira:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{x_1^2 + 3x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 + 8x_2x_3 + 5x_3^2}{x_1 + 2x_2 + 2x_3} \\ \beta_2 &= \frac{3}{x_3(x_1 + 2x_2 + 2x_3)} \\ \beta_3 &= \frac{x_1^2x_3 + 3x_1x_3^2 + 3x_1x_2x_3 + 3x_2^2x_3 + 6x_2x_3^2 + 3x_3^3}{x_1 + 2x_2 + 2x_3} \\ \beta_4 &= \frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3}{x_3(x_1 + 2x_2 + 2x_3)}\end{aligned}\quad (6.3)$$

(6.1) ekuazioa kontuan izanda eta malgutasuna karga puntuari bi besoen arteko irekitzearen 2δ eta aplikaturiko kargaren P arteko erlazioa dela jakinda, DCB probetaren malgutasuna hurrengo adierazpena erabiliz kalkula daiteke:

$$C = \frac{2\delta}{P} = \frac{2a^3}{3E_f I} + \frac{2\beta_1 a^2}{4E_f I} + 2 \left(\frac{6}{5G_{13}A} + \frac{\beta_2 h}{bE_3} + \frac{\beta_3}{12E_f I} \right) a + \frac{2\beta_4 h}{bE_3} \quad (6.4)$$

Deformazio energia askatze tasa G_I , laminarteko hausturarekiko erresistentziaren neurri bat dena, malgutasuna pitzadura luzerarekiko differentziatuz lortzen da [55]. Portaera elastiko lineala bada:

$$G_I = \frac{P^2}{2b} \frac{\partial C}{\partial a} \quad (6.5)$$

(6.4) ekuazioa (6.5) ekuazioan ordezkatzuz, G_I honela determina daiteke:

$$G_I = \frac{P^2 a^2}{b E_f I} + \frac{\beta_1 P^2 a}{2 b E_f I} + \frac{6 P^2}{5 b^2 h G_{13}} + \frac{\beta_2 h P^2}{b^2 E_3} + \frac{\beta_3 P^2}{12 b E_f I} \quad (6.6)$$

Pitzadura luzera neurtzeko (6.4) erabiliko da eta deformazio energia askatze tasa lortzeko (6.6) ekuazioa. Ekuazio horietan makurdura modulua eta planoz kanpoko ebakidura moduluak agertzen dira. Modulu horien balioak lortzeko, esperimentalki jarraitzen den prozedura FEM bidez egin da, 5.2 atalean azaldu den moduan.

6.4 ANALISI NUMERIKOA ETA EMAITZAK

6.4.1 MAKURDURA SAIAKUNTZAK

Aztertutako materiala Hexcel Composites enpresako AS4-3501-6 norabide bakarreko karbono/epoxi konpositea da, bere propietate elastikoak 6.1 taulan ikus daitezke [56].

6.1 taula: AS4-3501-6 konpositearen propietate mekanikoak.

E_1 (GPa)	E_2, E_3 (GPa)	G_{12}, G_{13} (GPa)	G_{23} (GPa)	ν_{12}, ν_{13}	ν_{23}
147,0	10,3	7,0	3,7	0,27	0,54

Elementu finituen analisian erabilitako probeten zabalera $b = 15$ mm-koa izan da. Numerikoki simulaturiko saiakuntzetan $h = 3$ mm eta $h = 6$ mm lodierak finkatu dira, lodieraren eragina aztertu asmoz, eta lodiera bakoitzaren kasuan lau argi luzera desberdin erabili dira (L mm-tan): 30, 40, 60, 80. Kasu honetan desplazamendu bat inposatu da kargaren aplikazio puntuari, δ/L balioa konstante mantenduz. Aurrez aipatu den moduan, 6.1 taulan adierazitako propietate mekanikoak erabili dira sarrera balio gisa. Elementu finituen modeloak ABAQUS programan implementatu dira, bi dimentsioko elementuak eta deformazio egoera laua kontsideratu direlarik.

Elementu finituen bidez simulaturiko makurdura saiakuntzen irteera balioa karga aplikazio puntuko erreakzioa P izan da, argi luzera bakoitzarentzat. Lau argi luzera erabili direnez, bakoitzari dagokion karga-desplazamendu kurbako malda m zehaztu da. Malda hori determinatu ondoren, E_0 gaia ezaguna da eta, beraz, materialaren

makurdura E_f eta planoz kanpoko ebakidura G_{13} moduluak eta sistemaren zurruntasuna k lortu dira 5.2 atalean azaldutako erregresio kubikoaren bidez. Zurruntasunaren balioa ez da modelo numerikoetan sarturiko balio bat, elementu finituen metodoan indar puntualak erabiltzearen ondorioa da.

FEM simulazio hauetan ez da kontuan hartu luzetarako konpresio eta trakzio moduluen artean egon daitekeen desberdintasuna. Ondorioz, $E_{cl} = E_{rl} = E_1 = E_f$, hots, 6.1 taulan adierazitako luzetarako moduluaren balioa E_1 eta makurdura moduluarena E_f berdinak dira.

Deformazio laua konsideratzen denean erregresio kubikotik lortzen den makurdura modulua E_f' , $(1-v_{13}v_{31})$ gaiarekin biderkatu behar da, modulu erreala determinatzeko. Izan ere, 6.7 irudian definituriko koordenatu sistema kontuan hartuz, tentsio egoera laua denean, $\sigma_y = 0$, ondorioz x ardatzeko deformazioak soilik x ardatzeko tentsioekin erlazionatuta daude:

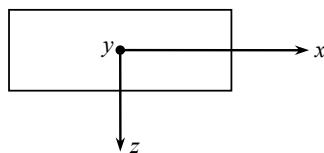
$$\varepsilon_x = S_{xx} \sigma_x \quad (6.7)$$

Eta beraz:

$$\sigma_x = S_{xx}^{-1} \varepsilon_x \quad (6.8)$$

Edo:

$$\sigma_x = E_x \varepsilon_x \quad (6.9)$$



6.7 irudia. Koordenatu sistema.

Deformazio egoera laua den kasuan, $\varepsilon_y = 0$, x eta y ardatzetako deformazioak tentsioekin erlazionatuz:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= S_{xx}\sigma_x + S_{xy}\sigma_y \\ \varepsilon_y &= S_{xy}\sigma_x + S_{yy}\sigma_y\end{aligned}\tag{6.10}$$

Kasu honetan y ardatzko deformazioa nulua denez, $\varepsilon_y = 0$, y ardatzko tentsioa x ardatzeakoaren baitan defini daiteke:

$$\sigma_y = -\frac{S_{xy}}{S_{yy}}\sigma_x\tag{6.11}$$

(6.11) ekuazioa (6.10) ekuazioan ordezkatzuz, x ardatzko deformazioa honakoa da:

$$\varepsilon_x = S_{xx}\sigma_x - \frac{S_{xy}^2}{S_{yy}}\sigma_x = \sigma_x \left(S_{xx} - \frac{S_{xy}^2}{S_{yy}} \right)\tag{6.12}$$

Kasu honetan parte hartzen duten materialaren malgutasun koefizienteen eta modulu elastikoen arteko erlazioak [57] hurrengoak dira:

$$\begin{aligned}S_{xx} &= \frac{1}{E_x} \\ S_{xy} &= -\frac{\nu_{xy}}{E_x} = -\frac{\nu_{yx}}{E_y} \\ S_{yy} &= \frac{1}{E_y}\end{aligned}\tag{6.13}$$

(6.13) ekuazioa (6.12) ekuazioan ordezkatzuz:

$$\varepsilon_x = \sigma_x \left(S_{xx} - \frac{S_{xy}^2}{S_{yy}} \right) = \sigma_x \left(\frac{1}{E_x} - E_y \frac{\nu_{xy}\nu_{yx}}{E_x E_y} \right) = \frac{\sigma_x}{E_x} \left(1 - \nu_{xy}\nu_{yx} \right)\tag{6.14}$$

Eta ondorioz:

$$\sigma_x = \frac{E_x}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} \varepsilon_x\tag{6.15}$$

Hau da:

$$E'_x = \frac{E_x}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} \Rightarrow E_x = E'_x (1 - \nu_{xy}\nu_{yx}) \quad (6.16)$$

Aurrekoan aztertzen ari garen kasurako zehaztuz:

$$E_f = E'_f (1 - \nu_{13}\nu_{31}) \quad (6.17)$$

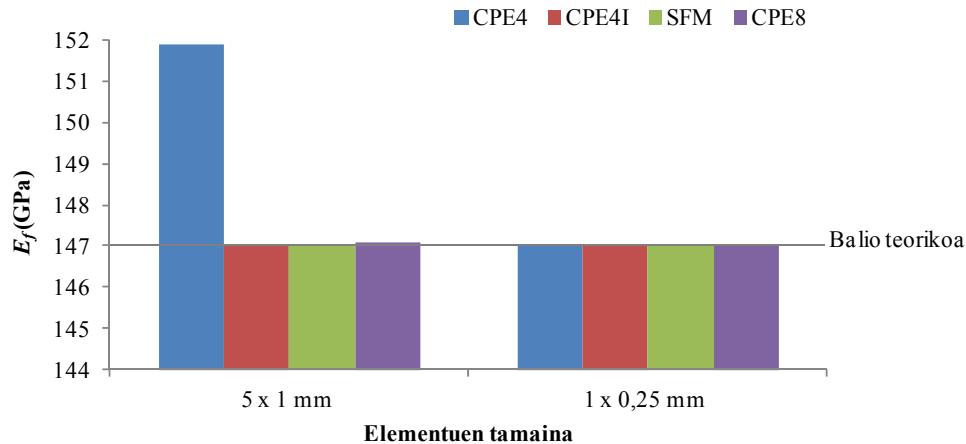
Lehenengo analisiak 6 mm-ko habe lodierarekin egin dira. Kasu honetan ABAQUSeko elementu-bibliotekako bi dimentsioko hiru elementu mota desberdin erabili dira: CPE4 edo lau nodoko elementu bilineal laukizuzenak, CPE4I edo modu ez bateragarriak barneratzen dituzten lau nodoko elementu bilineal laukizuzenak eta CPE8 zortzi nodoko elementu koادرatiko laukizuzenak, guztietaן deformazio egoera laua konsideratu delarik. Horrez gain, SFM metodoa ere erabili da. Habeen diskretizazioan bi elementu tamaina desberdin erabili dira, 5 mm luze eta 1 mm lodi batetik eta 1 mm luze eta 0,25 mm lodi bestetik.

Elementu mota desberdinak eta tamaina desberdinak erabiliz lorturiko emaitzen alderaketa 6.8 eta 6.9 irudietan ikus daiteke. Makurdurako moduluaren E_f -kasuan (6.8 irudia) 5 mm luze diren elementuekin lorturiko balioei erreparatzen badiegu, horiek egokiak dira SFM metodoaren, modu ez bateragarriak barne hartzen dituzten lau nodoko elementuen, CPE4I, eta zortzi nodoko elementuen, CPE8, kasuan. Lau nodoko CPE4 elementuak erabiliz emaitza egokiak lortzeko beharrezkoa da 1 mm luze diren elementuetara jotzea.

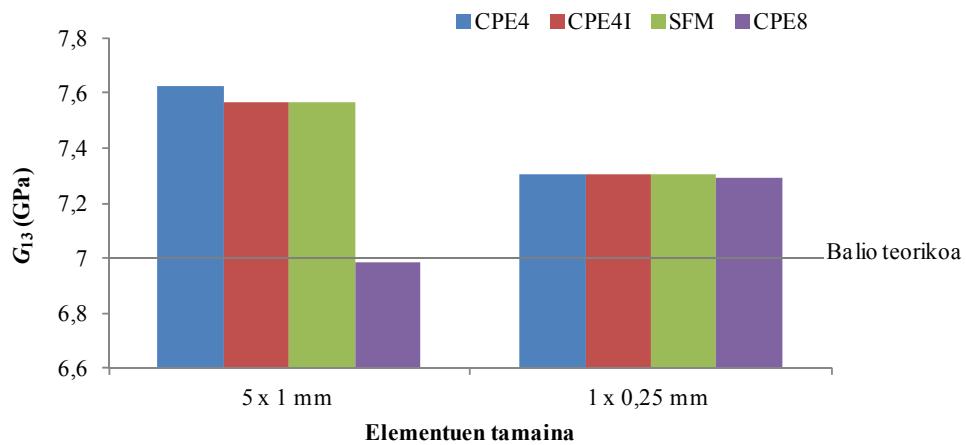
Planoz kanpoko ebakidura moduluaren G_{13} kasuan (6.9 irudia) hurbilketa onena zortzi nodoko elementuekin lortzen da. Elementu hauek erabiltzeko orduan kontuan izan behar da kostu konputazionala asko igotzen dela. Aldiz, lau nodoko elementuak eta tamaina txikiagokoak erabiliz lorturiko emaitzak egokiak dira.

6.10 irudian 5.2 atalean deskribaturiko prozedura jarraituz lorturiko makurdura moduluaren balioak ikus daitezke, habearren lodiera $h = 3$ mm eta $h = 6$ mm den kasuetan. Habeen diskretizazioan erabilitako elementuen tamaina 1 mm luze eta 0,25 mm lodi izan da eta ABAQUSeko elementu-bibliotekako CPE4I elementuak erabili dira. Hau da, modu ez bateragarriak barneratzen dituzten lau nodoko elementu bilineal laukizuzenak erabili dira, makurdura nagusi den problemetan euren portaera

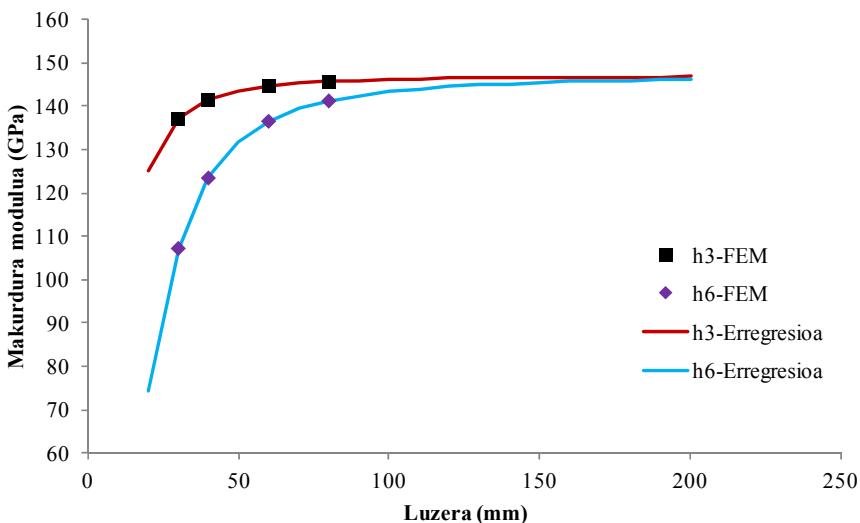
hobea baita [58]. Gainera, aurreko analisietan SFM metodoaren bidez eta CPE4I elementuak erabiliz lorturiko emaitzak berdinak izan dira.



6.8 irudia. ABAQUSeko CPE4, CPE4I eta CPE8 elementuekin eta SFM metodoarekin lorturiko makurdura moduluaren E_f balioen alderaketa.



6.9 irudia. ABAQUSeko CPE4, CPE4I eta CPE8 elementuekin eta SFM metodoarekin lorturiko planoz kanpoko ebakidura moduluaren G_{13} balioen alderaketa.



6.10 irudia. $h = 3$ mm eta $h = 6$ mm-ko lodieren kasuan makurdura moduluaren aldaketa argi luzerarekiko, FEM bidez eta erregresioa eginez.

Analisi numerikoetatik lorturiko makurdura E_f eta planoz kanpoko ebakidura G_{13} moduluuen eta sistemaren zurruntasunaren k balioak 6.2 taulan ikus daitezke, habearen lodiera $h = 3$ mm-koa eta $h = 6$ mm-koa denean. Elementu finituengen bidezko analisietan sarrera gisa sartu diren materialaren propietateen balioak 6.1 taulan agertzen direnak dira. 6.2 taulan FEM analisietatik lorturiko irteera balioei erregresio lineala eta erregresio kubikoa aplikatuz lorturiko propietate elastikoak agertzen dira. Erregresio kubikoaren bidez lorturiko emaitzek balio teorikoekiko adostasun egokia azaltzen dute. Makurdura moduluaren E_f kasuan, erregresio kubikoaren bidez kalkulaturikoak balio teorikoengen berdinak dira eta planoz kanpoko ebakidura G_{13} moduluaren kasuan errore erlatiboa % 4-koa da habearen lodiera $h = 6$ mm-koa denean eta % 5-ekoa lodiera $h = 3$ mm-koa denean. Aldiz, propietate elastikoak kalkulatzeko erregresio lineala aplikatzen bada, errore erlatiboa handiagoak dira. Makurdura moduluaren E_f kasuan % 2-koa da habearen lodiera $h = 6$ mm-koa denean eta % 1-ekoa lodiera $h = 3$ mm-koa denean eta planoz kanpoko ebakidura G_{13} moduluaren kasuan % 34-koa da lodiera $h = 6$ mm-koa denean eta % 13-ekoa lodiera $h = 3$ mm-koa denean. Beraz, elementu finituengen bidez materialaren propietate elastikoak zehazteko erregresio kubikoa aplikatzea beharrezko dela ondoriozta daiteke. Jarraian egin diren FEM bidezko DCB saiakuntzaren analisietan atal honetan

egindako saiakuntza numerikoetan lorturiko sistemaren zurruntasunak erabili dira, esperimentalki egiten den moduan.

6.2 taula: FEM bidezko analisiei erregresio kubikoa eta lineala aplikatuz lorturiko makurdura eta planoz kanpoko ebakidura moduluak eta sistemaren zurruntasuna.

FEMeko sarrera	Erregresio kubikoa		Erregresio lineala	
	h (mm)		h (mm)	
	3	6	3	6
$E_i = E_f$ (MPa)	147000	147000	147000	147246
E_3 (MPa)	10300			
G_{13} (MPa)	7000	7363	7307	6056
v_{13}	0,27			
k (N/mm)		47424	34386	

6.4.2 DCB SAIAKUNTZAKO DESPLAZAMENDUAK ETA TENTSIOAK

Makurdura eta planoz kanpoko ebakidura moduluak eta sistemaren zurruntasuna determinatu ondoren, elementu finituen bidez DCB saiakuntza aztertu da ABAQUS programa erabiliz. Lehenengo analisi numerikoetan DCB saiakuntzako probetaren desplazamendu bertikalak eta planoz kanpoko tentsioak determinatu dira.

FEM modeloko DCB probetaren luzera osoa $L = 150$ mm-koa izan da, pitzadura luzera $a = 50$ mm-koa, zabalera $b = 15$ mm-koa eta lodiera $h = 1,5$ mm-koa. Materialari dagokionez, 6.1 taulan azaltzen diren AS4-3501-6 norabide bakarreko karbono/epoxi konpositearen propietate elastikoak erabili dira.

Lehenengo analisietan helburua ABAQUSeko elementu-bibliotekako lau nodoko elementuak SFM metodoarekin alderatzea izan da. Hori dela eta, DCB saiakuntzaren simulazioan tamaina handiko elementuak erabili dira.

Hasteko, DCB probetan karga bat ezartzean elementu finituen bidez lorturiko desplazamendu bertikalen balioak zehaztu dira, pitzaduran zehar. Lehenengo analisietan tentsio egoera laua konsideratu da. Batetik, ABAQUSeko lau nodoko elementuak, CPS4 eta CPS4I, erabili dira eta bestetik, SFM metoda implementatzeko garaturiko azpirrutinak. Karga aplikazio puntuan 20 N-eko karga puntuala ezarri da

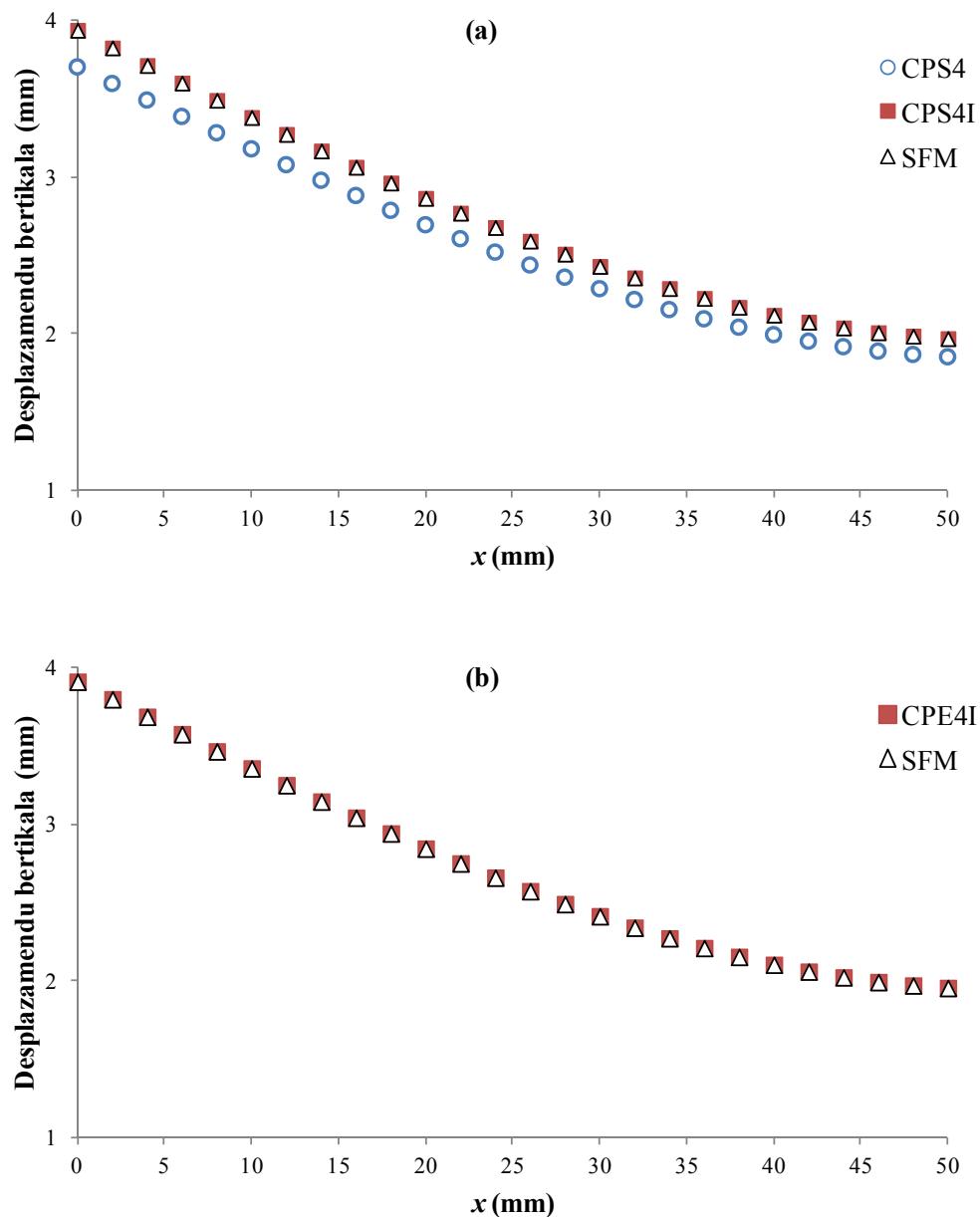
eta FEM modeloan 2 mm-ko luzera eta 1,5 mm-ko altuera duten elementuak erabili dira.

Lorturiko emaitzak 6.11 irudian azaltzen dira. Bertan CPS4I elementuarekin eta SFM metodoarekin lorturiko desplazamendu bertikalaren balioak berdinak direla ikus daiteke. Aldiz, CPS4 elementuarekin lortzen diren desplazamendu bertikalak zertxobait baxuagoak direla ere ikus daiteke.

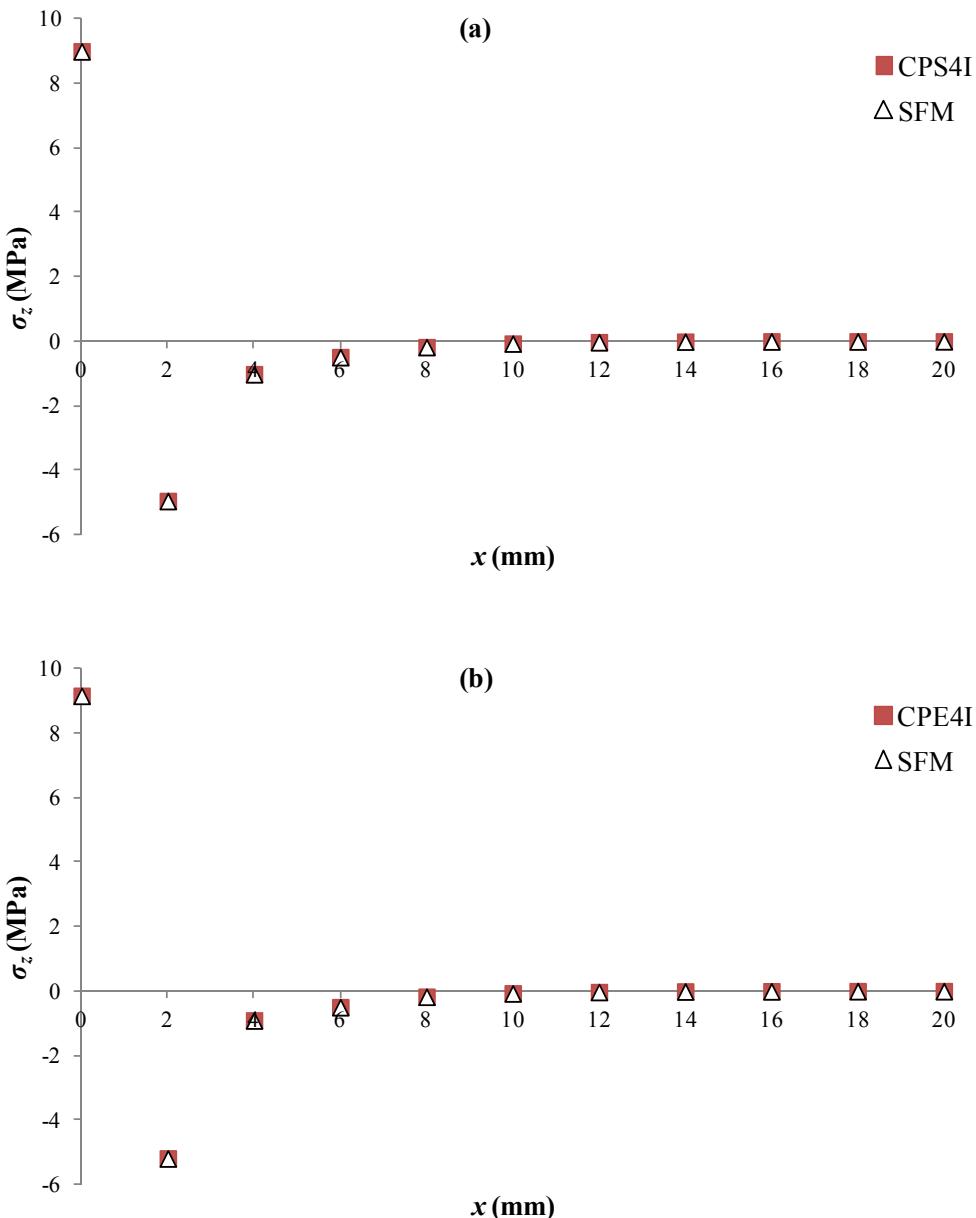
Aurreko analisietan tentsio egoera laua ordez deformazio egoera laua konsideratz, ABAQUSeko elementu bibliotekako CPE4I elementua erabiliz eta SFM metodoa erabiliz lorturiko desplazamendu bertikalak 6.11 irudian ikus daitezke. Kasu honetan ere lorturiko emaitzak berdinak direla ondorioztatu da.

Pitzadura puntatik hasita, pitzadura ibilbidean zehar 20 mm-ko luzeran, planoz kanpoko tentsioak σ_z determinatu dira elementu finituen metodoaren bidez. Kasu honetan zuzenean ABAQUSeko elementu bibliotekako modu bateraezinak barne hartzen dituzten elementuekin lorturiko emaitzak eta SFM metodoarekin lorturikoak alderatu dira, batetik, tentsio egoera laua denean eta, bestetik, deformazio egoera laua denean, 6.12 irudian azaltzen den moduan. Aurreko alderaketan gertatu moduan, bi metodoekin lortu diren planoz kanpoko tentsioen balioak σ_z berberak dira.

Lau nodoko elementuak erabiliz ABAQUSen SFM metodoaren bidez kalkuluak egiteko azpirrutinak implementatu ondoren, DCB saiakuntzan SFM metodoaren bidez lorturiko desplazamendu eta tentsioen emaitzak ABAQUSeko elementu bibliotekan erabilgarri dauden elementu mota desberdinekin alderatu dira. Kasu honetan diskretizazioa elementu laukizuzenak erabiliz egin da. Tentsio egoera laua konsideratu denean, ABAQUSeko CPS4I elementuekin, hots, modu bateraezinak (*incompatible modes*) barneratzen dituzten elementuekin eta SFM metodoarekin emaitza berdinak lortzen direla ikusi da, nodoetako desplazamenduetan zein tentsioetan. Deformazio lauaren kasuan ere, ABAQUSeko CPE4I elementuekin eta SFM metodoarekin emaitza berdinak lortzen direla frogatu da.



6.11 irudia. DCB probetaren desplazamendu bertikala: (a) tentsio egoera laua; (b) deformazio egoera laua.



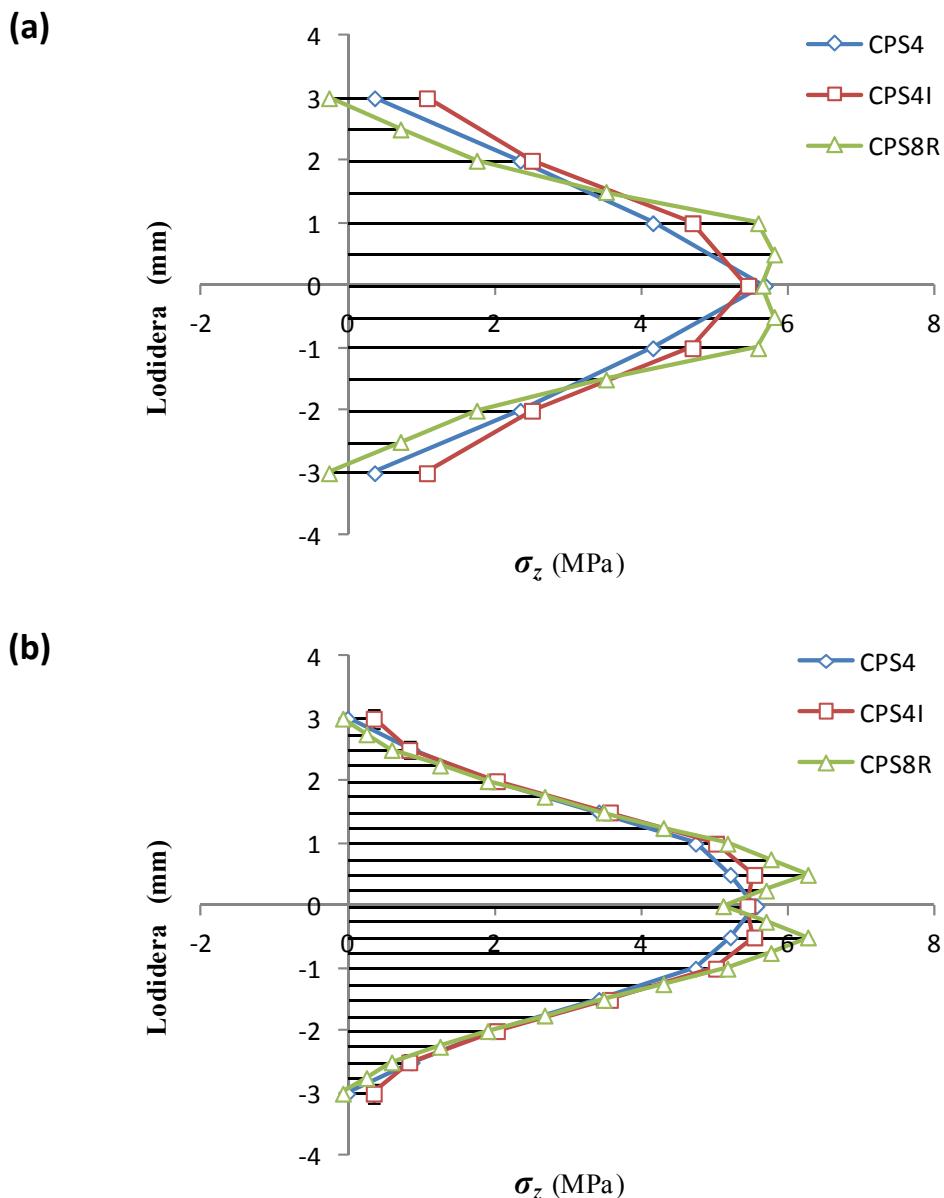
6.12 irudia. DCB probetaren planoz kanpoko tentsioak: (a) tentsio egoera laua; (b) deformazio egoera laua.

4.4.2 atalean egindako alderaketan, seko aldakorreko habearen analisian, beharrezko zen elementu isoparametriko orokorrak erabiltzea. Kasu horretan ABAQUSen elementu bibliotekako modu bateraezinak barne hartzen dituzten elementuekin CPS4I eta SFM metodoarekin lorturiko emaitzak desberdinak izan dira. Beraz, bi metodo horien artean badira desberdintasunak. Dena den, diskretizazioan elementu laukizuzenak erabiltzen badira, bi metodoekin emaitza berdinak lortzen dira. Ondorioz, SFM metodoa laminatuen saiakuntza mekanikoetan aplikatzerakoan, probeten diskretizazioa elementu laukizuzenekin egin denez, zuzenean ABAQUSeko modu bateraezinak barne hartzen dituzten elementuak erabili dira.

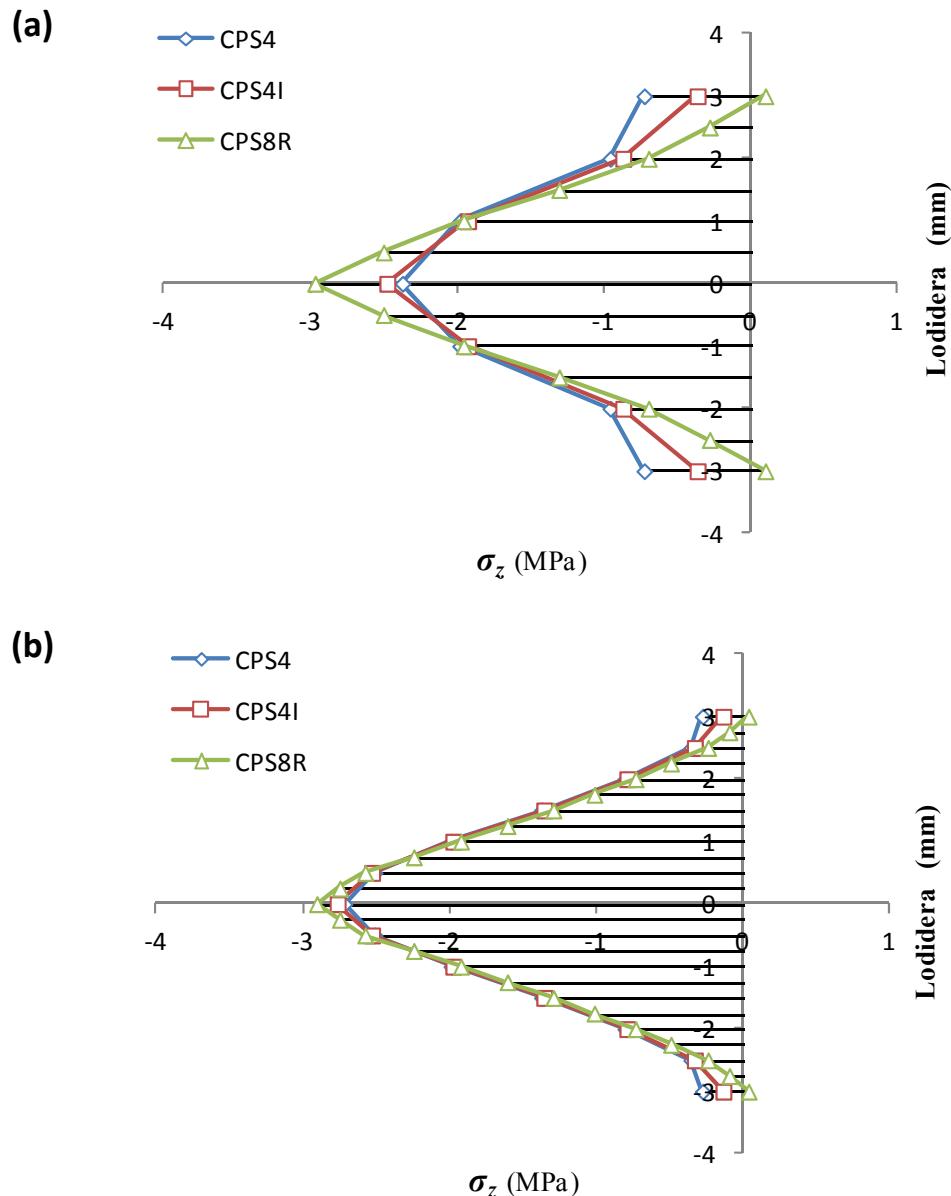
Pitzadura puntaren inguruau planoz kanpoko tentsioek z ardatzean duten profila aztertu da, DCB probetaren lodiera osoa 3 mm-koa den kasuan, hau da, beso bakoitzak 1,5 mm-ko lodiera duenean. Horretarako, ABAQUSeko elementu-bibliotekako bi dimentsioko hiru elementu mota desberdin erabili dira: CPS4 edo lau nodoko elementu bilineal laukizuzenak, CPS4I edo modu ez bateragarriak barneratzen dituzten lau nodoko elementu bilineal laukizuzenak eta CPS8R zortzi nodoko elementu koadratiko laukizuzenak integrazio murriztuarekin, guztietan tentsio egoera laua konsideratu delarik. Horrez gain, habeen diskretizazioan bi elementu tamaina desberdin erabili dira, 5 mm luze eta 1 mm lodi batetik eta 2 mm luze eta 0,5 mm lodi bestetik.

6.13 irudian pitzadura puntatik 1 mm aldentzean, hots, pitzadura lerroan tentsioak trakziozkoak direnean, lorturiko planoz kanpoko tentsioak ikus daitezke, aipaturiko bi elementu tamaina desberdinak kasuan. 6.14 irudian pitzadura puntatik 4 mm-tara dagoen sekzioko tentsioak ikus daitezke, hau da, tentsioak konpresiozkoak direnean.

Habeen teoriaren arabera $\sigma_z = 0$ da. Elementu finituen analisitik ondorioztatu daiteke errealitatean tentsio horiek ez direla nuluak.



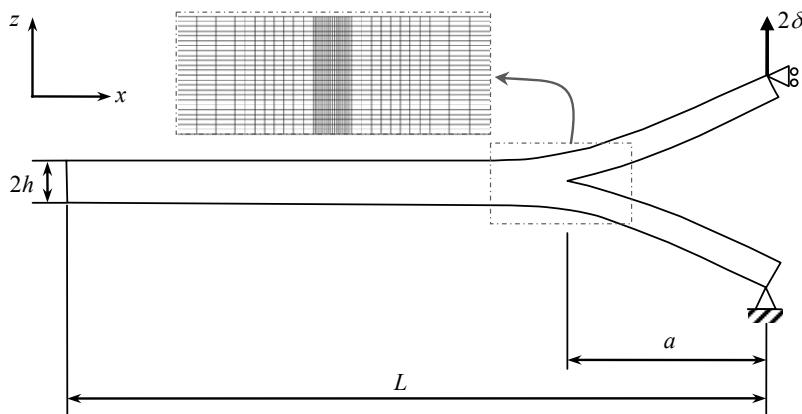
6.13 irudia. Planoz kanpoko tentsioen banaketa pitzadura puntatik 1 mm-tara, trakziozkoak direnean: a) 5 mm luze eta 1 mm lodi diren elementuekin; b) 2 mm luze eta 0,5 mm lodi diren elementuekin.



6.14 irudia. Planoz kanpoko tentsioen banaketa pitzadura puntatik 4 mm-tara, konpresiozkoak direnean: a) 5 mm luze eta 1 mm lodi diren elementuekin; b) 2 mm luze eta 0,5 mm lodi diren elementuekin.

6.4.3 PITZADURA LUZERA

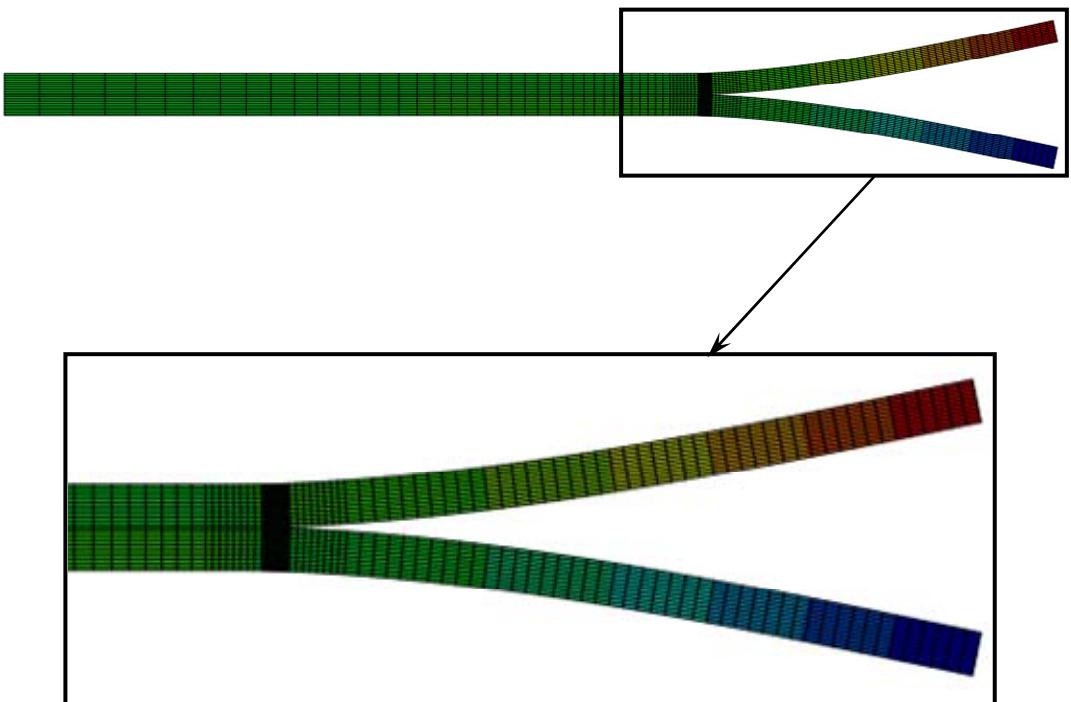
Atal honetan, elementu finituen bidez DCB saiakuntza (ikusi 6.15 irudia) simulatu eta pitzadura luzera zehazteko jarraituriko procedura azaltzen da. DCB saiakuntza aztertzerako orduan, FEM analisietan modu ez bateragarriak barne hartzen dituzten bi dimentsioko elementuak eta deformazio egoera laua kontsideratu dira.



6.15 irudia. Elementu finituen modeloko ingurune-baldintzak eta pitzadura puntako diskretizazioaren xehetasuna.

Aurreko elementu finituen modeloan bezala, probetaren luzera osoa $L = 150$ mm-koa izan da, zabalera $b = 15$ mm-koa eta pitzadura luzera $a = 50$ mm-koa. Kasu honetan bi lodiera desberdin erabili dira: $h = 1,5$ mm eta $h = 3$ mm. 6.2 taulako *Erregresio kubikoa* zutabeko E_f eta G_{I3} balioak erabili dira elementu finituen analisian sarrera parametro gisa.

Habeak elementu laukizuzenak erabiliz diskretizatu dira, luzeran 1 mm eta lodieran 0,25 mm neurria dutenan, aurrez egindako makurdura saiakuntzako modeloetan bezala. Pitzadura puntaren inguru elementu txikiagoak erabili dira, bertako tentsio kontzentrazioa dela eta, 6.16 irudian ikus daitekeen moduan. Karga puntuau 1 mm-ko desplazamendu bertikala ezarri da.



6.16 irudia. Elementu finituen analisia, deformaturiko modeloa.

Elementu finituen bidezko analisitik karga puntuak lorturiko erreakzioak erabili dira pitzadura luzera zehazteko. Pitzadura luzera iterazio-metodo baten bidez eta DCB probetaren malgutasuna lortzeko hurbilketa desberdinak erabiliz kalkulatu da. Lehenengo hurbilketa moduan [10,49] lanetako hasierako adierazpena erabili da, hau da, habeen teoriari dagokion malgutasunaren ekuazio hurbildua, ebakidura eta makurdura barne hartuz:

$$C = \frac{2a^3}{3E_f I} + \frac{12a}{5G_{13} A} \quad (6.18)$$

Malgutasuna zehazteko bigarren hurbilketan (6.4) ekuazioa erabili da [49,54]. Bi kasuetan, malgutasuna kalkulatzeko 6.4.1 atalean lorturiko sistemaren zurruntasuna k , 6.2 taulan aurkeztua, erabili da. Beraz, probetaren malgutasuna, malgutasun numerikoari $C_{num}=2\delta/P$ sistemaren malgutasuna $C_{sys}=I/k$ kenduz zehaztu da:

$$C = C_{\text{num}} - C_{\text{sys}} = \frac{2\delta}{P} - \frac{1}{k} \quad (6.19)$$

Ikerkuntza lan honetan azterturiko kasuetan pitzadura luzera kalkulatzerakoan sistemaren malgutasuna kontuan hartzeak edo ez hartzeak ez du lorturiko balioan funtsezko eraginik. Hala eta guztiz ere, merezi du aipatzea planoz kanpoko ebakidura moduluaren G_{13} balio egokiak lortzeko sistemaren malgutasuna kontsideratzea beharrezkoa dela, 6.2 taulan ikus daitekeen moduan.

(6.18) eta (6.4) ekuazioak erabiliz lorturiko emaitzak [6,7,10] erreferentzietaen datozen adierazpenetatik lorturiko balioekin alderatu dira. Emaitza horiek 6.3 taulan ikus daitezke.

6.3 taula: Pitzadura luzera mm-tan, $h = 1,5$ mm eta $h = 3,0$ mm denean.

a (mm)	h (mm)	1,5	3,0
(6.18) ekuazioa		52,2	54,5
(6.4) ekuazioa		49,5	49,1
Whitney		49,7	49,5
Williams		50,2	50,5
Olsson		49,5	49,3

(6.4) ekuazioa erabiliz lorturiko pitzadura luzeraren balioak bat datozen elementu finituengen modeloetan erabilitako 50 mm-ko pitzadura luzera teorikoarekin. Emaitzak hobeak dira habearen lodiera txikiagoa den kasuan. Beraz, elementu finituengen bidezko analisi numerikoek eta emaitzek [49,54] lanetan DCB saiakuntzetan pitzadura luzera neurketa optikorik egin gabe lortzeko proposaturiko hurbilketa analitikoa balioztatzen dute.

6.4.4 ENERGIA ASKATZE TASA

Atal honetan energia askatze tasa G_I bide desberdinak erabiliz kalkulatu da. Alde batetik, bibliografian topa daitezkeen hainbat hurbilketa analitiko erabiliz. Bestetik, bi urrats desberdinetan egindako elementu finituengen bidezko analisiaren bidez.

Coronado et al.-en [22] arabera, AS4-3501-6 norabide bakarreko karbono/epoxi konpositearen deformazio energia askatze tasa kritikoa $G_{lc} = 130 \text{ J/m}^2$ -ekoa da. Balio hori kontuan izanda, ASTM araua [3] erabiliz karga balio maximoa P_c kalkula daiteke, habeen teorian oinarrituz eta habea pitzadura puntan finkatua dagoela konsideratz. G_{lc} malgutasuna pitzadura luzerarekiko diferentziatuz lor daitekeenez [55], ebakidura eta makurduraren eragina kontuan hartzen dituen habeen teoriaren hurbilketatik ere, (6.18) ekuaziotik, lor daiteke karga kritikoa P_c . Bi ekuazio horien bidez balio oso antzekoak lortzen dira. De Gracia et al.-ek [49] proposaturiko hurbilketa analitikoa erabiliz, (6.6) ekuazioa, zehazturiko karga kritikoa P_c handiagoa da. Ondorioz, kargaren aplikazio puntuaren estimaturiko desplazamendua δ_c desberdina da erabilitako ekuazioaren arabera. Hiru estimazio horietatik lorturiko P_c kritikoak elementu finituengin lorturikoekin alderatu dira. De Gracia et al.-ek [49] proposaturiko hurbilketa analitikoa erabiliz determinaturiko karga – desplazamendu kritikoak ($P_c - \delta_c$) hobeto egokitzen dira elementu finituengin bidez lorturikoekin, habeen teoria erabiliz lorturikoak baino. Hori dela eta, hurrengo analisietan De Gracia et al.-ek [49] proposaturiko hurbilketa analitikoaren bidez zehazturiko balioa erabili da, hau da, karga aplikazio puntuaren deformazio energia askatze tasa kritikoari G_{lc} dagokion desplazamendu hurbildua $2\delta = 3,24 \text{ mm}$ da $h = 1,5 \text{ mm}$ denean eta $2\delta = 1,25 \text{ mm}$ $h = 3 \text{ mm}$ denean.

Balio horiek finkatu dira karga puntuaren desplazamendu gisa elementu finituengin bidezko analisietan. FEM analisi horietatik karga puntuaren lorturiko erreakzioen balioak sartu dira (6.6) ekuazioan. 6.2 taulako *Erregresio kubikoa* zutabeko E_f eta G_{l3} balioak eta (6.4) ekuazioa erabiliz kalkulaturiko pitzadura luzera ere, 6.3 taulan datorrena, (6.6) ekuazioan ordezkatu dira eta, amaitzeko, deformazio energia askatze tasa kritikoaren G_{lc} balio analitikoa zehaztu da.

Horrez gain, bi urrats desberdin modelizatu dira elementu finituengin analisia burutzeko. Lehenengoa hasierako pitzadura luzerari eta karga puntuaren ezarritako desplazamenduari dagokio. Bigarren urratsean probetari ezarririko desplazamendua mantendu da eta pitzadura puntuaren nodoak askatu dira.

Energia askatze tasa delaminazio luzeraren handiagotze infinitesimal baten ondorioz probetan zabalera unitateko galdurik energiaren neurria dela eta bi urrats horiei dagokien sistemaren deformazio energia osoa FEM analisietan emaitza moduan

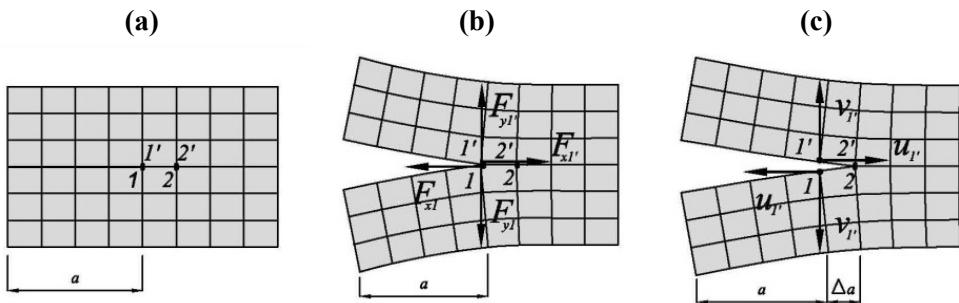
lortzen dela kontuan izanik, energia askatze tasa kritikoa G_{lc} determinatu da, honako ekuazioaren bidez [59]:

$$G_{lc} = -\frac{1}{b} \left(\frac{\partial U}{\partial a} \right)_{\delta} \quad (6.20)$$

U deformazio energia osoa, b zabalera eta a pitzadura luzera izanik eta δ -k desplazamendu konstanteen eraginpean esan nahi duelarik. (6.20) ekuazioa erabiliz lorturiko balioak 6.4 taulan ikus daitezke.

Aurrez aipatu den moduan, VCCT lehenengo aldiz Rybickik eta Kanninenek [26] formulatu zuten. Metodo honen bidez energia askatze tasaren balioa lortzen da konputazio urrats bakarra erabiliz. Metodo honetan askaturiko energia pitzadura ixteko behar den energiaren berdina dela suposatzen da eta pitzaduraren hedapena nahikoa txikia bada, pitzadura puntako tentsioak ez direla nabarmenki aldatzen. Energia askatze tasa determinatzeko beste hurbilketa bat bi urratsen hedapen prozedura TSEM da, metodo honetan pitzaduraren hedapena kontuan hartzeko bi urrats desberdin erabiltzen dira eta kointzidente diren bi nodo pare pitzadura-ibilbidea modelizatzeko. Lehenengo urratsean analisia hasierako pitzadura luzerarekin a egiten da eta bigarren urratsean pitzadura-hedapen infinitesimal bat Δa gertatu dela konsideratzen da. Beraz, pitzadura luzera $a + \Delta a$ da eta karga puntuaren aplikaturiko karga konstante mantentzen da. VCCT eta TSEM metodoak Bonhomme et al.-ek [60] alderatu zituzten I moduko haustura aztertzeko DCB probetetan. Lan horretan I moduaren kasuan VCCT metodoa erabiliz lorturiko energia askatze tasaren balioak TSEM bidez lorturikoak baino zertxobait baxuagoak direla ikusi zuten. Hori dela eta, ikerkuntza lan honetan TSEM prozedura aplikatu da energia askatze tasa kritikoa determinatzeko simulaturiko saiakuntza numerikoetan.

TSEM metodoan erabiltzen den prozedura 6.17 irudian azaltzen da. Pitzadura-ibilbidea modelizatzean kointzidenteak diren nodo pare bat elkarrekin akoplatura konsideratzen dira. Lehenengo urratsean, ezarritako karga edota desplazamendua balio kritikora iritsi diren unean, pitzadura puntako indarrak determinatzen dira (6.17b irudia). Bigarrenean, probetaren desplazamendu kritikoa mantentzen da eta pitzadura puntako 1-1' nodoen akoplaturako askatasun mailak askatzen dira, 6.17c irudian azaltzen den moduan. Urrats honetan desplazamenduak zehazten dira.



6.17 irudia. Bi urratsen hedadura prozedura edo TSEM metodoa.

Kasu honetan, elementu finituen analisia bi dimentsiotan egin denez, 1-1' nodo pare berean lehenengo urratsean lortutako indar bertikalak eta bigarren urratsean askaturiko nodo pare horretako desplazamendu bertikalak kontutan hartuz, hurrengo adierazpena erabili da energia askatze tasa kritikoa G_{lc} kalkulatzeko:

$$G_{lc} = \frac{1}{2b\Delta a} F_{yl} (v_l - v_{l'}) \quad (6.21)$$

Non F_{yl} lehenengo urratseko pitzadura puntako indar bertikala den eta $v_l, v_{l'}$ bigarren urratsean askaturiko nodoen, hau da, hasierako pitzadura puntari zegozkion nodo parearen, desplazamendu bertikalak diren.

Energia askatze tasa kritikoa G_{lc} determinatzeko beste bide bat azaleren metodoa aplikatzea da. Beraz, G_{lc} honako ekuazioaren bidez zehaztu daiteke:

$$G_{lc} = \frac{1}{2b\Delta a} (P_1 - P_2) 2\delta \quad (6.22)$$

Non P_1, P_2 karga puntuko lehenengo eta bigarren urratsetako erreakzio indarrak diren, hurrenez hurren.

Pitzadura-hedapen infinitesimal Δa balio desberdinak erabiliz, numerikoki eta analitikoki lorturiko energia askatze tasa kritikoaren G_{lc} balioak 6.4 taulan ikus daitezke.

6.4 taula: Analitikoki eta numerikoki determinaturiko deformazio energia askatze tasa kritikoa J/m^2 -tan.

G_{lc} (J/m^2)	Ekuazio analitikoak			FEM		
	Habeeen teoria	(6.18) ekuazioa	De Gracia	U -ren aldaketa	TSEM	Azaleren metodoa
$h = 1,5 \text{ mm}$						
$\Delta a = 0,1 \text{ mm}$	130,2	130,0	130,3	129,3	129,3	129,3
$\Delta a = 0,2 \text{ mm}$	130,3	130,2	130,4	129,0	129,0	129,0
$\Delta a = 0,5 \text{ mm}$	130,6	130,8	130,8	128,1	128,1	128,1
$h = 3,0 \text{ mm}$						
$\Delta a = 0,1 \text{ mm}$	128,8	127,8	128,8	127,7	127,7	127,7
$\Delta a = 0,2 \text{ mm}$	128,9	128,0	129,0	127,4	127,4	127,4
$\Delta a = 0,5 \text{ mm}$	129,2	128,6	129,4	126,6	126,6	126,6

Numerikoki lorturiko G_{lc} -ren balioak bata bestearengandik oso antzekoak dira, deformazio energiaren aldaketaren bidez, TSEM prozedura aplikatuz ala azaleren metodoa erabiliz. (6.6) ekuazioa [49,54] erabiliz lorturiko balio analitikoak bat datozen emaitza analitiko horiekin. Pitzadura luzeraren kasuan habeen teoriaren eta (6.18) ekuazioaren bidez lorturiko balioek konplexutasun handiagoko soluzio analitikoekin alderatuz emaitzen arteko aldea handiagoa bada ere, energia askatze tasa kritikoaren G_{lc} kasuan alde hori txikiagoa da, elementu finituen metodoaren bidez lorturiko emaitzeken adostasun egokia azaltzen dutelarik.

6.5 ONDORIOAK

Kapitulu honetan egindako lanaren ondorio nagusiak honako biak dira:

- DCB saiakuntza birtualean SFM metodoarekin lorturiko emaitzak Abaqus programa komertzialean erabilgarri dauden modu ez bateragarriak barneratzenten dituzten elementuekin lortzen diren berdinak dira. Elementu laukizuzenen kasuan SFM metodoaren eta Abaqus-eko modu ez bateragarriak erabiltzen dituzten elementuekin desplazamendu eta tentsio balio berdinak lortzen dira, tentsio nahiz deformazio egoera lauean.

2. DCB sajakuntza birtualaren bidez pitzadura luzera eta energia askatze tasa kritikoa determinatu dira numerikoki. Elementu finituen bidez lorturiko emaitzek adostasun egokia dute De Gracia et al.-ek proposaturiko prozedura analitiko eta esperimentalarekin. Ondorioz, prozedura analitiko eta esperimental hori numerikoki balioztatu da.

6.6 BIBLIOGRAFIA

- [1] Gibson RF. Principles of composite material mechanics. New York: McGraw-Hill, 1994.
- [2] ISO. "15024, Fiber-reinforced plastic composites - determination of mode I interlaminar fracture toughness, GIC, for unidirectionally reinforced materials". 2001: Philadelphia.
- [3] ASTM. "Standard D5528-94a, Standard Test Method for Mode I Interlaminar Fracture Toughness of Unidirectional Fiber-Reinforced Polymer Matrix Composites". 1994: Philadelphia.
- [4] Kanninen MF. An augmented double cantilever beam model for studying crack propagation and arrest. Int J Fract 1973; 9: 83-92.
- [5] Kanninen MF. A dynamic analysis of unstable crack propagation and arrest in the DCB test specimen. Int J Fract 1974; 10: 415-30.
- [6] Whitney JM. Stress analysis of the double cantilever beam specimen. Compos Sci Technol 1985; 23: 201-19.
- [7] Williams JG. End corrections for orthotropic DCB specimens. Compos Sci Technol 1989; 35: 367-76.
- [8] Hashemi S, Kinloch AJ, Williams JG. Corrections needed in double-cantilever beam tests for assessing the interlaminar failure of fibre-composites. J Mater Sci Lett 1989; 8: 125-9.
- [9] Williams JG. Large Displacement and End Block Effects in the 'DCB' Interlaminar Test in Modes I and II. J Compos Mater 1987; 21: 330-47.

- [10] Olsson R. A simplified improved beam analysis of the DCB specimen. Compos Sci Technol 1992; 43: 329-38.
- [11] Kondo K. Analysis of double cantilever beam specimen. Adv Compos Mater 1995; 4: 355-66.
- [12] Nageswara Rao B, Acharya AR. Evaluation of fracture energy GIC using a double cantilever beam fibre composite specimen. Eng Fract Mech 1995; 51: 317-22.
- [13] Ozdil F, Carlsson LA. Beam analysis of angle-ply laminate DCB specimens. Compos Sci Technol 1999; 59: 305-15.
- [14] Bruno D, Greco F. Mixed mode delamination in plates: a refined approach. Int J Solids Struct 2001; 38: 9149-77.
- [15] Yoshihara H, Kawamura T. Mode I fracture toughness estimation of wood by DCB test. Compos Part A-Appl S 2006; 37: 2105-13.
- [16] Hamed MA, Nosier A, Farrahi GH. Separation of delamination modes in composite beams with symmetric delaminations. Mater Design 2006; 27: 900-10.
- [17] Gunderson JD, Brueck JF, Paris AJ. Alternative test method for interlaminar fracture toughness of composites. Int J Fract 2007; 143: 273-6.
- [18] Pavan Kumar DVTG, Raghu Prasad BK. Analysis of unidirectional (0°) fiber-reinforced laminated composite double cantilever beam specimen using higher order beam theories. Eng Fract Mech 2008; 75: 2156-74.
- [19] Shokrieh MM, Heidari-Rarani M, Ayatollahi MR. Interlaminar fracture toughness of unidirectional DCB specimens: A novel theoretical approach. Polym Test 2012; 31: 68-75.
- [20] Franklin VA, Christopher T. Fracture energy estimation of DCB specimens made of glass/epoxy: an experimental study. Adv Mater Sci Eng 2013: 412601.
- [21] Szekrényes A, Uj J. Advanced beam model for fiber-bridging in unidirectional composite double-cantilever beam specimens. Eng Fract Mech 2005; 72: 2686-702.

- [22] Coronado P, Argüelles A, Viña J, Mollón V, Viña I. Influence of temperature on a carbon-fibre epoxy composite subjected to static and fatigue loading under mode-I delamination. *Int J Solids Struct* 2012; 49: 2934-40.
- [23] Coronado P, Argüelles A, Viña J, Bonhomme J, Mollón V. Influence on the delamination phenomenon of matrix type and thermal variations in unidirectional carbon-fiber epoxy composites. *Polym Compos* 2014; 36: 747-55.
- [24] Argüelles A, Viña J, Canteli AF, Coronado P, Mollón V. Influence of temperature on the delamination process under mode I fracture and dynamic loading of two carbon-epoxy composites. *Compos Part B-Eng* 2015; 68: 207-14.
- [25] Shokrieh MM, Heidari-Rarani M. A comparative study for beams on elastic foundation models to analysis of mode-I delamination in DCB specimens. *Struct Eng Mech* 2011; 37: 149-62.
- [26] Rybicki EF, Kanninen MF. A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral. *Eng Fract Mech* 1977; 9: 931-8.
- [27] Bennati S, Colleluori M, Corigliano D, Valvo PS. An enhanced beam-theory model of the asymmetric double cantilever beam (ADCB) test for composite laminates. *Compos Sci Technol* 2009; 69: 1735-45.
- [28] Mollón V, Bonhomme J, Viña J, Argüelles A. Mixed mode fracture toughness: An empirical formulation for GI/GII determination in asymmetric DCB specimens. *Eng Struct* 2010; 32: 3699-703.
- [29] Shokrieh MM, Heidari-Rarani M, Rahimi S. Influence of curved delamination front on toughness of multidirectional DCB specimens. *Compos Struct* 2012; 94: 1359-65.
- [30] Shokrieh MM, Zeinedini A. A novel method for calculation of strain energy release rate of asymmetric double cantilever laminated composite beams. *Appl Compos Mater* 2014; 21: 399-415.
- [31] Valvo PS. A revised virtual crack closure technique for physically consistent fracture mode partitioning. *Int J Fract* 2012; 173: 1-20.

- [32] Valvo PS. A further step towards a physically consistent virtual crack closure technique. *Int J Fract* 2015; 192: 235-44.
- [33] Kravchenko OG, Kravchenko SG, Sun C. Thickness dependence of mode I interlaminar fracture toughness in a carbon fiber thermosetting composite. *Compos Struct* 2017; 160: 538-46.
- [34] Szekrényes A, Uj J. Comparison of some improved solutions for mixed-mode composite delamination coupons. *Compos Struct* 2006; 72: 321-9.
- [35] Szekrényes A. Improved analysis of unidirectional composite delamination specimens. *Mech Mater* 2007; 39: 953-74.
- [36] Szekrényes A. Semi-layerwise analysis of laminated plates with nonsingular delamination—The theorem of autocontinuity. *Appl Math Model* 2016; 40: 1344-71.
- [37] Szekrényes A. Nonsingular crack modelling in orthotropic plates by four equivalent single layers. *Eur J Mech A-Solid* 2016; 55: 73-99.
- [38] Turon A, Dávila CG, Camanho PP, Costa J. An engineering solution for mesh size effects in the simulation of delamination using cohesive zone models. *Eng Fract Mech* 2007; 74: 1665-82.
- [39] de Moura MFSF, Campilho RDSG, Gonçalves JPM. Crack equivalent concept applied to the fracture characterization of bonded joints under pure mode I loading. *Compos Sci Technol* 2008; 68: 2224-30.
- [40] de Moura MFSF, Morais JJL, Dourado N. A new data reduction scheme for mode I wood fracture characterization using the double cantilever beam test. *Eng Fract Mech* 2008; 75: 3852-65.
- [41] de Moura MFSF, Campilho RDSG, Amaro AM, Reis PNB. Interlaminar and intralaminar fracture characterization of composites under mode I loading. *Compos Struct* 2010; 92: 144-9.

- [42] Morais JJL, de Moura MFSF, Pereira FAM, Xavier J, Dourado N, Dias MIR et al. The double cantilever beam test applied to mode I fracture characterization of cortical bone tissue. *J Mech Behav Biomed* 2010; 3: 446-53.
- [43] Sebaey TA, Blanco N, Lopes CS, Costa J. Numerical investigation to prevent crack jumping in Double Cantilever Beam tests of multidirectional composite laminates. *Compos Sci Technol* 2011; 71: 1587-92.
- [44] de Morais AB. Mode I cohesive zone model for delamination in composite beams. *Eng Fract Mech* 2013; 109: 236-45.
- [45] Mollón V, Bonhomme J, Elmarakbi AM, Argüelles A, Viña J. Finite element modelling of mode I delamination specimens by means of implicit and explicit solvers. *Polym Test* 2012; 31: 404-10.
- [46] Huang D, Sheng B, Shen Y, Chui Y. An analytical solution for double cantilever beam based on elastic–plastic bilinear cohesive law: Analysis for mode I fracture of fibrous composites. *Eng Fract Mech* 2018; 193: 66-76.
- [47] Shahani AR, Abolfathitabar R. Fracture analysis of finite length angle-ply composite double cantilever beam specimens. *P I Mech Eng C-J Mec* 2019; 233: 967-976.
- [48] Xu W, Guo ZZ. A simple method for determining the mode I interlaminar fracture toughness of composite without measuring the growing crack length. *Eng Fract Mech* 2018; 191: 476-85.
- [49] De Gracia J, Boyano A, Arrese A, Mujika F. A new approach for determining the R-curve in DCB tests without optical measurements. *Eng Fract Mech* 2015; 135: 274-85.
- [50] Mujika F. On the effect of shear and local deformation in three-point bending tests. *Polym Test* 2007; 26: 869-77.
- [51] Arrese A, Carbajal N, Vargas G, Mujika F. A new method for determining mode II R-curve by the End-Notched Flexure test. *Eng Fract Mech* 2010; 77: 51-70.

- [52] Boyano Murillo AI. Laminarteko hausturaren I/II modu mistoa aztertzeko saiakuntza konfigurazio berri baten analisia. 2016.
- [53] Oden JT, Ripperger EA. Mechanics of Elastic Structures. 2nd ed. Washington: Hemisphere Publishing Corporation, 1981.
- [54] Arrese A, Boyano A, De Gracia J, Mujika F. A novel procedure to determine the cohesive law in DCB tests. Compos Sci Technol 2017; 152: 76-84.
- [55] Irwin GR, Kies JA. Critical energy rate analysis of fracture strength. Weld Res Suppl 1954; 33: 193-8.
- [56] Daniel IM, Ishai O. Engineering mechanics of composite materials. Oxford University Press, 2006.
- [57] Shames IH, Cozzarelli FA. Elastic and inelastic stress analysis. Washington: Taylor & Francis, 1997.
- [58] Dassault Systèmes Simulia Corp. ABAQUS Theory Manual, 6.12. 2012.
- [59] Boyano A, Mollón V, Bonhomme J, De Gracia J, Arrese A, Mujika F. Analytical and numerical approach of an End Notched Flexure test configuration with an inserted roller for promoting mixed mode I/II. Eng Fract Mech 2015; 143: 63-79.
- [60] Bonhomme J, Argüelles A, Castrillo MA, Viña J. Computational models for mode I composite fracture failure: the virtual crack closure technique versus the two-step extension method. Meccanica 2010; 45: 297-304.

KONPRESIO ETA TRAKZIO MODULU DESBERDINTASUNAREN ERAGINA PULTRUSIOZKO T-BIKOITZETAN

7.1 SARRERA

Norabide bakarreko zuntzez errefortzatutako konpositeetan, luzetarako norabidean konpresio eta trakzio moduluak desberdinak dira. Zehazki, trakzio moduluak konpresio modulu baino handiagoa da eta makurdura moduluak trakzio eta konpresio moduluen tarteko balio bat du [1-5].

Azken urteetan Karbono Zuntzez Errefortzatutako Plastikoek (*Carbon Fibre Reinforced Plastic, CFRP*) konpresioan eta trakzioan duten portaera desberdina aztertu da [6-9]. Meng et al.-en [6] arabera, CFRP konpositeen konpresio eta trakzio modulu desberdintasunaren eragina laminatuen lodierarekin erlazionatua dago, hau da, lodiera handitzearekin eragina handitzen da. Gainera, lan horren arabera, bi modulu horiek desberdinak direnean, hutsegite aurreikuspen zehatzenak deformazio hutsegite irizpidea jarraituz lortzen dira. Serna-Moreno et al.-ek [7,8] CFRPeko norabide bakarreko laminatuen eta laminatu gurutzatuen hiru-puntuko makurdura saiakuntza aztertu zuten, hurrenez hurren. Azterlan horietan sekzio homogeneizatuaren teknika aplikatu zuten, materialaren konpresio eta trakzio modulu desberdinak kontuan izanik erabili beharreko adierazpen analitikoak lortzeko. Horrez gain, mikroskopio optiko bidezko behaketa esperimentalak emaitza analitikoekin

alderatu zituzten. Aurreko ikerketak $\pm 45^\circ$ laminatu angeluar simetrikoetara hedatu zituzten eta deformazio eremuak lortu zituzten [9] Irudien Korrelazio Digitalen (*Digital Image Correlation*, DIC) bidez.

Lee et al.-ek [10] FR4 substratuen makurdura eta trakzio moduluen arteko desberdintasuna ikertu zuten. FR4 substratuak beirazko ehunez eta epoxi erretxinezko aglutinatzalez osatuak daude. Ikerketa lan horretan FR4 substratu malguen makurdura modulua determinatu zen hiru-puntuko makurdura saiakuntzen bidez, hainbat luzera-sakonera erlazio erabili zituzten eta temperaturaren eragina ere aztertu zuten. FR4 substratuen trakzio modulua neurteko trakzio-saiakuntzak burutu zituzten eta DIC teknika erabili zuten. Trakzio modulua makurdura modulua baino handiagoa zen.

Hala eta guztiz ere, Zuntzez Errofortzatutako Plastikoen (*Fibre Reinforced Plastics*, FRP) makurdura portaera aztertzerakoan gutxitan hartu izan da kontuan konpresio eta trakzio moduluen arteko desberdintasuna. Pultrusio bidez egindako FRP profilen makurdura eta ebakidura portaeraren azterketa zabala egin izan da, konpresio eta trakzio moduluen desberdintasunak izan dezakeen eragina kontuan izan gabe [11-19].

Bank-ek [11] pultrusio bidez eginiko Beira Zuntzez Errofortzatutako Plastikozko (*Glass Fibre Reinforced Plastic*, GFRP) H eta T bikoitzak sekziodun habeen makurdura eta ebakidura moduluak aztertu zituen. Lan horretan sekzio osoaren makurdura eta ebakidura modulu baliokideak definitu zituen eta ebakidura faktorea sekzio osoaren ebakidura modulu baliokidean barneratu zuen. Ondoren, bi modulu baliokide horiek esperimentalki lortu zituen, hiru-puntuko makurdura saiakuntzetatik, erregresio lineala aplikatuz. Lan horretan GFRP-zko H eta T bikoitzak sekziodun habeen diseinurako Timoshenkoren habeen teoria proposatu zuen, habeen geziak zehaztasun handiagoz kalkulatzeko eta euren kostuan aurreztekotzat helburuarekin. Horrez gain, Neto-k eta La Rovere-k [12] GFRPzko pultrusio bidez eginiko H sekziodun habeen makurdura zurruntasuna ikertzeko azterketa esperimentalak, analitikoak eta numerikoak aurrera eraman zituzten. Baldintza horietan, habe mota horien diseinurako, hots, habeen zurruntasuna ebaluatzea eta zerbitzuko kargen ondorioz izango dituzten geziak egiaztatzeko, Timoshenkoren habeen teoria aplika daitekeela ondorioztatu zuten, propietate mekanikoak kalkulatzeko Laminatuen Teoria Klasikoa (*Classical Lamination Theory*, CLT) erabiliz. Mottram-ek [13] hainbat ikerketa lanetan lorturiko pultrusio bidez eginiko FRP materialen eta profilen

ebakidura moduluen berrikuspena egin zuen. Gainera, eredu mikromekaniko teoriko bat garatu zuen, ebakidura moduluen balioetan behaturiko dispersio zabalaren aurrean azalpen bat aurkeztu asmoz. Zhou-k eta Hood-ek [14] CFRP laminatuaren T bikoitza sekziodun habeen makurdura portaera aztertu zuten. Ikerketa honetan arimaren plano barneko ebakidurak sekzioaren ebakidura moduluaren esperimentalki zuen lortzea mugatzen zuela ondorioztatu zuten. Hayes-ek eta Lesko-k [15,16] saiakuntza esperimental eta numerikoak egin zitzuten, habe solido simple baten eta pultruitutako arima bikoitzeko habe baten Timoshenkoren ebakidura zurruntasuna neurterakoan kopaduraren eta zeharkako konprimagarritasunaren eragina aztertu asmoz. Ebakidura kopaduraren eragina arbuiagarria zela ikusi zuten; aldiz, karga- eta ingurune-baldintzek ebakidura zurruntasunean eragin handia izan dezaketela erakutsi zuten; izan ere, habe luzera motzetan ebakidura zurruntasun eraginkorra gutxiten zela ondorioztatu zuten.

Aurrez aipaturiko ikerketa lanetan [11-16] bao bakarreko GFRP habeen hiru- eta laupuntuko makurdura saiakuntza simetrikoak aztertu ziren. Duela gutxi, Turvey-k [17] pultruituriko GFRP materialez osaturiko habe jarraituen makurdura portaera aztertu zuen. Lan horretan bi baoko habe jarraituetan indarren eta desplazamenduen ebakidura deformazioaren ekuazioak determinatu zituen, bao erdiko geziak, bermapuntuetako biraketak eta gainazaleko tentsioak aurreikusteko. Gainera, aurreikusitako balioak esperimentalki lorturikoekin alderatu zituen.

Berriki, Singh-ek eta Chawla-k [18] FRPzko H eta T bikoitza sekziodun habeen materialaren propietateak kalkulatu zitzuten, analitikoki zein esperimentalki. Ondoren, propietate elastiko horiek erabili zitzuten elementu finitu bidezko analisi numerikoetan, alderaketak egin asmoz.

Aurrekoez gain, Berube et al.-ek [19] FRPzko habe konpositeen ebakidura deformazioa ezaugarritzeko DIC sistema erabili zuten. Lan horren helburua makurdura saiakuntzek zirauten bitartean FRPzko habeen makurdura eta ebakidura moduluak batera neurtea zen. Bereziki, beirazko ehunez erreforzatutako FRP itsas konpositeak erabili zitzuten, saiakuntza horietan hainbat luzera-lodiera ratio eta zabalera-lodiera ratio erabili zituztelarik.

Aurrez aipaturiko hainbat ikerlanetan ebakidura moduluaren neurterakoan dispersioa handia izan dela azpimarratzen da. Agerikoa da ebakidurarekiko zurruntasunak eragin

handia duela FRPzko konpositez osaturiko habeen makurdura portaeran. Horrez gain, luzetarako konpresio eta trakzio moduluak desberdinak izateak ere makurduran eragina izan dezake.

Kapitulu honetan konpresio eta trakzio moduluak desberdinak izateak pultrusio bidez fabrikaturiko GFRPzko T bikoitza sekzioa duten habeen makurdura eta ebakidura portaeran duen eragina aztertzen da. Horretarako T bikoitza sekzioan zuntz neutroaren kokapena eta makurdura modulua kalkulatzeko ekuazioak analitikoki garatu dira. Ondoren, zuntz neutroak banatzen dituen konpresiopean dagoen azalera eta trakziopean dagoen azalera kontuan izan dira elementu finituak bidezko analisi numerikoetan; hau da, konpresio modulua erabili da sekzioaren goiko aldean eta trakzio modulua beheko aldean. Bi zati horietan ebakidura modulu berdina sartu da elementu finituak modeloan. Materialaren propietateak modeloan definitu ondoren, makurdura hutsa eta hiru-puntuko makurdura saiakuntzak simulatu dira, habe luzera desberdinak erabiliz, makurdura modulua numerikoki lortu asmoz. Hiru-puntuko makurdura saiakuntzak aztertzeraoan, Mujikak [20] proposaturiko prozedura jarraitu da, 5.2 atalean deskribatu den moduan. Prozedura horretan karga aplikatzerakoan deformazio lokalek duten eragina barne hartzen da. Bukatzeko emaitza analitikoak eta numerikoki lorturiko makurdura moduluaren balioak alderatu dira.

7.2 HURBILKETA ANALITIKOA

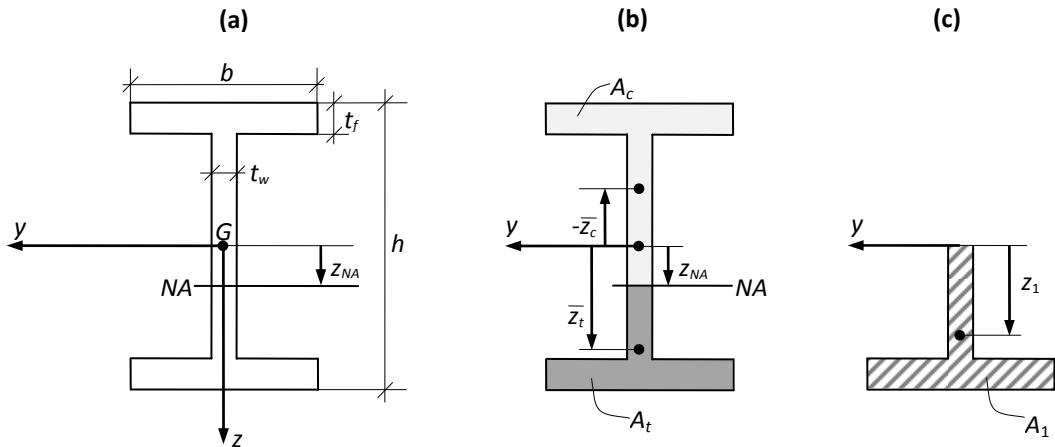
7.2.1 TRAKZIO, KONPRESIO ETA MAKURDURA MODULUEN ARTEKO ERLAZIOA

Mujika et al.-ek [5] sekzio laukizuzeneko habeen makurdura, trakzio eta konpresio moduluak arteko erlazioa aztertu zuen analitikoki eta esperimentalki. Atal honetan antzeko prozedura jarraitu da, T bikoitza sekziodun habeetan hiru modulu horien arteko erlazioa zehazteko.

T bikoitza sekzio baten kasuan, 7.1 irudian ikus daitekeen moduan, luzetarako deformazio normala ε_x , grabitate zentrotik z distantziara, honela determina daiteke:

$$\varepsilon_x = \kappa(z - z_{NA}) \quad (7.1)$$

Non κ kurbadura den, z koordenatua den, grabitate zentrotik neurtuta, eta z_{NA} zuntz neutroaren koordenatua den. Biak positiboak dira beherantz, 7.1 irudian ikus daitekeen moduan.



7.1 irudia. (a) T bikoitzen zeharkako sekzioa eta koordenatu sistema; (b) konpresiopeko eta trakziopako eremuak; (c) T bikoitzen zeharkako sekzioaren erdia.

Ondorioz, luzetarako tentsio normalak honela zehaztu daitezke:

$$\sigma_x = E_i \varepsilon_x \quad i = c, t \quad (7.2)$$

Non E_i luzetarako modulua den, konpresiokoa $i = c$ denean eta trakziokoa $i = t$ denean.

Makurdura hutsean indar axialen erresultantea zero denez, (7.2) ekuaziotik tentsioen eta deformazioen arteko erlazioak ordezkatuz:

$$0 = \int_A \sigma_x dA = \kappa E_c \int_{A_c} (z - z_{NA}) dA_c + \kappa E_t \int_{A_t} (z - z_{NA}) dA_t \quad (7.3)$$

Non A_c eta A_t konpresioko eta trakzioko eremuak diren, hurrenez hurren.

Trakzio eta konpresio moduluen arteko erlazioa $\lambda = E_t / E_c$ bezala definituz, (7.3) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$\int_{A_c} (z - z_{NA}) dA_c + \lambda \int_{A_t} (z - z_{NA}) dA_t = 0 \quad (7.4)$$

(7.4) ekuazioko integralen barneko funtziak konpresio eta trakzio eremuen ardatz neutroarekiko momentu estatikoak dira.

Beraz, (7.4) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$A_c \overline{z_c} + A_t \overline{z_t} = 0 \quad (7.5)$$

Non $\overline{z_c}$ eta $\overline{z_t}$ konpresio eta trakzio eremuen grabitate zentroen koordenatuak diren, hurrenez hurren, 7.1 irudian adierazitako erreferentzi sistemana.

Momentu estatikoak honela defini daitezke:

$$\begin{aligned} A_c \overline{z_c} &= -A_l z_1 + \frac{b}{2} z_{NA}^2 \\ A_t \overline{z_t} &= A_l z_1 - \frac{b}{2} z_{NA}^2 \end{aligned} \quad (7.6)$$

A_l zeharkako sekzioaren azaleraren erdia eta z_1 T bikoitza sekzio erdiaren grabitate zentroaren koordenatua izanik, 7.1c irudian ikus daitekeen moduan.

Konpresio eta trakzio eremuen azalerak honela kalkula daitezke:

$$\begin{aligned} A_c &= A_l + bz_{NA} \\ A_t &= A_l - bz_{NA} \end{aligned} \quad (7.7)$$

(7.5)-(7.7) ekuazioak kontuan hartuz, (7.4) ekuazioa honela adieraz daiteke:

$$\frac{1}{2}b(\lambda - 1)z_{NA}^2 - z_{NA}A_l(\lambda + 1) + (\lambda - 1)A_l z_1 = 0 \quad (7.8)$$

(7.8) ekuaziotik z_{NA} ebatziz:

$$z_{NA} = \frac{1}{2} \left[\frac{2A_l}{b} \frac{\lambda+1}{\lambda-1} \pm \sqrt{\frac{4A_l^2}{b^2} \frac{(\lambda+1)^2}{(\lambda-1)^2} - \frac{8A_l}{b} z_1} \right] \quad (7.9)$$

$\lambda \rightarrow 1$ denean, lehenengo batugaiak ∞ -ranzko joera du. Beraz, zeinu negatiboak soilik dauka zentzua. Ondorioz, zuntz neutroaren koordenatua honako adierazpenetik zehaztu daiteke:

$$z_{NA} = \frac{A_l}{b} \frac{\lambda+1}{\lambda-1} - \sqrt{\frac{A_l}{b} \left(\frac{A_l}{b} \left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1} \right)^2 - 2z_1 \right)} \quad (7.10)$$

(7.10) ekuazioaren arabera, $\lim_{\lambda \rightarrow 1} z_{NA} = 0$, hots, zentzu fisikoa daukan emaitza lortzen da.

(7.10) ekuazioa zeharkako sekzio laukizuzena daukan habe baten kasu partikularrera aplika daiteke:

$$\begin{aligned} A_l &= \frac{1}{2} bh \\ z_1 &= \frac{h}{4} \end{aligned} \quad (7.11)$$

(7.11) ekuazioa (7.10) ekuazioan ordezkatz:

$$z_{NA} = \frac{h}{2} \frac{\sqrt{\lambda} - 1}{\sqrt{\lambda} + 1} \quad (7.12)$$

(7.12) ekuazioaren emaitza [5] lanean lorturikoaren berdina da.

Bestalde, tentsio normalen momentu erresultantea momentu makurtzailea M dela kontuan izanik:

$$M = \int_A \sigma_x z dA = \int_{A_c} \sigma_x z dA_c + \int_{A_t} \sigma_x z dA_t \quad (7.13)$$

(7.2) ekuazioko tentsio-deformazio erlazioak (7.13) ekuazioan ordezkatz:

$$M = \kappa E_c \int_{A_c} (z - z_{NA}) z dA_c + \kappa E_t \int_{A_t} (z - z_{NA}) z dA_t \quad (7.14)$$

(7.14) ekuazioan gaiak berrordenatuz, honela idatz daiteke:

$$\frac{M}{\kappa E_c} = \int_{A_c} z^2 dA_c - z_{NA} \int_{A_c} z dA_c + \lambda \left[\int_{A_t} z^2 dA_t - z_{NA} \int_{A_t} z dA_t \right] \quad (7.15)$$

(7.15) ekuazioko integralen barneko funtziokon presio eta trakzio eremuen ardatz neutroarekiko inertzia momentua eta momentu estatikoa direnez, (7.15) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$\frac{M}{\kappa E_c} = I_y^c - z_{NA} A_c \bar{z}_c + \lambda \left[I_y^t - z_{NA} A_t \bar{z}_t \right] \quad (7.16)$$

Non

$$\begin{aligned} I_y^c &= I_{y1} + \frac{1}{3} b z_{NA}^3 \\ I_y^t &= I_{y1} - \frac{1}{3} b z_{NA}^3 \end{aligned} \quad (7.17)$$

I_y^c eta I_y^t konpresio eta trakzio eremuen inertzia momentuak diren, hurrenez hurren.

$$I_{y1} = \frac{1}{2} I_y \quad (7.18)$$

I_y sekzio osoaren inertzia momentua delarik.

Habeen Teoria Klasikoaren (*Classical Beam Theory*, BT) arabera, kurbadura honako ekuazioaren bidez determina daiteke:

$$\frac{M}{E_f I_y} = \kappa \quad (7.19)$$

Non E_f makurdura modulua den.

(7.16) eta (7.19) ekuazioak alderatuz:

$$\frac{M}{E_c B} = \frac{M}{E_f I_y} \quad (7.20)$$

$$\text{Non } B = I_y^c - z_{NA} A_c \bar{z}_c + \lambda \left[I_y^t - z_{NA} A_t \bar{z}_t \right].$$

Beraz, trakzio eta konpresio moduluak desberdinak direnean, makurdura modulua E_f (7.20) ekuaziotik lor daiteke analitikoki:

$$E_f = \frac{E_c B}{I_y} \quad (7.21)$$

(7.21) ekuazioko adierazpena sekzio laukizuzeneko habeen kasuan ere baliozkoa da, espero zitekeen moduan:

$$E_f = \frac{4\lambda}{(1 + \sqrt{\lambda})^2} E_c \quad (7.22)$$

(7.22) ekuazioan azaltzen den moduan, makurdura modulua ez da sekzio laukizuzenaren dimentsioen araberakoa. T bikoitza sekzioko habeen kasuan, analisi parametriko bat egin ondoren, makurdura modulua 7.1 irudian agertzen diren dimentsioak aldatzean ez dela nabarmenki aldatzen ondorioztatu da. Gainera, makurdura moduluaren balio horiek sekzio laukizuzenean lorturikoetatik oso hurbil daude.

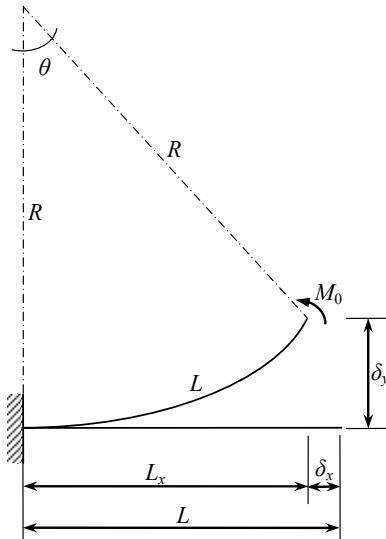
7.2.2 MAKURDURA MODULUA ZEHAZTEA MAKURDURA HUTSEAN

Atal honetan makurdura hutsean makurdura modulua zehazteko jarraituriko prozedura deskribatzen da.

Makurdura hutsean, 7.2 irudian adierazitako baldintza geometrikoak kontuan hartuz, habearren desplazamendu horizontala δ_x eta bertikala δ_y , honela defini daitezke:

$$\begin{aligned}\delta_x &= L - R \sin \theta \\ \delta_y &= R(1 - \cos \theta)\end{aligned}\quad (7.23)$$

Non L habearen luzera, R kurbadura-erradioa eta θ biraketa-angelua diren.



7.2 irudia. Habearen eskema, deformatu aurretik eta ondoren, makurdura hutsean.

Habearen desplazamendu horizontala δ_x eta bertikala δ_y ezagunak badira, kurbadura-erradioa eta biraketa-angelua kalkula daitezke (7.23) ekuazioa ebatziz. Kurbadura kurbadura-erradioaren alderantzizkoa dela kontuan izanik, hurrengo adierazpena betetzen da:

$$E_f = \frac{M_0 R}{I_y} \quad (7.24)$$

Makurdura simplearen kasuan, makurdura modulua E_f eta planoz kanpoko ebakidura modulua G_{13} 5.2 atalean deskribaturiko prozedura jarraituz lor daitezke.

7.3 ANALISI NUMERIKOA

7.3.1 SARRERAKO BALIOAK

Elementu finituen modeloetan sekzio laukizuzeneko eta T bikoitza sekzioko habeak modelizatu dira, 7.3 irudian ikus daitezkeen ezaugarri geometrikoak erabiliz. T bikoitza sekzioaren altuera osoa 120 mm-koa da, hegalen zabalera 60 mm-koa eta hegalen nahiz arimaren lodiera 6 mm-koa. Sekzio laukizuzena duen habearen kasuan, zabalera 10 mm-koa da eta altuera 6 mm-koa.

Elementu finituen analisietan sarrera gisan konsideratu diren propietate mekanikoak, 7.1 taulan azaltzen direnak, pultrusio bidez fabrikaturiko GFRP habe bati dagozkionak dira [21].

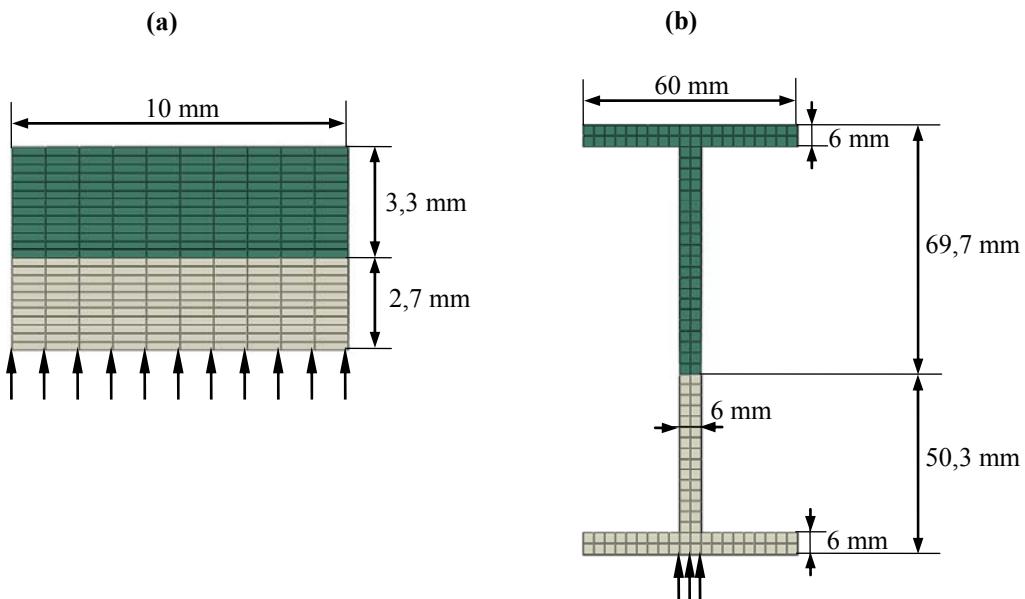
7.1 taula: GFRP profil pultruituaren propietate mekanikoak.

E_t (GPa)	E_c (GPa)	E_2, E_3 (GPa)	G_{12}, G_{13} (GPa)	G_{23} (GPa)	ν_{12}, ν_{13}	ν_{23}
39,9	25,3	8,3	3,6	3,7	0,27	0,11

Zuntz neutroaren kokapena analitikoki kalkulatu da (7.10) ekuazioaren bidez eta balio hori kontuan izan da elementu finituen modeloan habearen zeharkako sekzioa definitzerakoan. Ondorioz, habeen zeharkako sekzioan bi zati bereizi dira: goiko aldean edo konpresio eremuan konpresio moduluaren balioa E_c eta beheko aldean edo trakzio eremuan trakzio moduluaren balioa E_t . Bi eremu horiek 7.3 irudian ikus daitezke.

Elementu finituen bidez ABAQUS Standard programarekin eginiko analisiak aurrera eramaterakoan modu bateraezinak barne hartzen dituzten zortzi nodoko elementu solido linealak (C3D8I) erabili dira. Elementu hauek aukeratu dira ebakitzalearen eragina garrantzitsua den kasuetan horiek erabiliz emaitza hobeak lortzen direlako [22]. Elementuen tamaina 1 x 0,25 x 1 mm ingurukoa izan da sekzio laukizuzeneko habean eta 3 x 3 x 5 mm-koa T bikoitza sekzioa duenean. Makurdura hutsean egindako saiakuntza birtualetan, C3D8I motako 96000 elementu erabili dira sekzio

laukizuzena duen modeloan eta 63720 elementu T bikoitza sekzioa duenean. Hiru-puntuko makurdura saiakuntza birtualen kasuan, sekzio laukizuzenaren kasuan C3D8I motako gutxieneko elementu kopurua 4800 izan da eta gehienekoa 14400, erabilitako habe luzerak motzagoak izan baitira. T bikoitza sekzioari dagokionean, C3D8I motako gutxieneko elementu kopurua 18240 izan da eta gehienekoa 66576. Makurdura hutsean elementu gutxiago erabiliz ere konbergentzia lortu da, aldiz, ebakidura moduluaren balio egokiak lortzeko beharrezkoia izan da aipaturiko elementu tamainak erabiltzea.



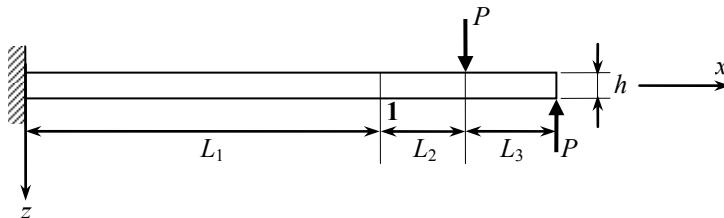
7.3 irudia. Dimentsoak eta diskretizazioa konpresio eta trakzio modulu desberdinak erabiliz;
a) sekzio laukizuzena; b) T bikoitza sekzioa.

7.3.2 MAKURDURA HUTSEAN LORTURIKO EMAITZAK

Makurdura hutsean sekzio laukizuzeneko eta T bikoitza sekzioko habea aztertu dira elementu finituen bidez, analisi numerikoa horietan lorturiko makurdura moduluak analitikoki lorturikoekin alderatzeko helburuarekin.

Batetik, makurdura modulu analitikoki lortu da, (7.21) ekuaziotik. Bestetik, makurdura hutseko saiakuntza bat simulatu da numerikoki, 7.4 irudian ikus daitekeen moduan. Modeloa erabilitako C3D8I motako elementu kopurua eta luzera

dimentsioak 7.2 taulan azaltzen dira. T bikoitza sekzioaren kasuan elementuen luzera 1 sekziotik landapenerantz progresiboki handitu da 5 mm-tik 20 mm-tara.



7.4 irudia. Makurdura hutsa aztertzeko modeloaren eskema.

7.2 taula: FEM modeloetan erabilitako habeen luzerak eta elementu kopuruak.

	L_1 (mm)	L_2 (mm)	L_3 (mm)	Elementu kopurua
Sekzio laukizuzena	250	100	50	96000
T bikoitza sekzioa	2500	1000	500	63720

FEM analisietan numerikoki lorturiko 1 sekzioko desplazamendu horizontalarekin δ_x eta bertikalarekin δ_y kurbadura-erradioa R eta biraketa-angelua θ determinatu dira (7.2 irudia). Ondoren, makurdura modulua (7.24) ekuaziotik lortu da.

Sekzio laukizuzeneko eta T bikoitza sekzioko habeekin eginiko analisietan lorturiko makurdura moduluenei balioak 7.3 taulan azaltzen dira, ikus daitekeen moduan, analitikoki aurreikusitako eta numerikoki kalkulaturiko balioak oso antzekoak dira. Balio analitikoen eta numerikoen arteko errore erlatiboa % 1 baino txikiagoa da. Horrez gain, lan honetan deskribaturiko procedura analitikoa jarraituz zehazturiko makurdura modulua, (7.21) ekuazioa erabiliz, zuzenean sarrera balio gisa sartu da elementu finituen analisian eta irteerako makurdura modulua sarrera balioaren berdina izan da.

7.3 taula: Makurdura moduluaren balio analitiko eta numerikoen alderaketa.

	E_f (MPa)		
	Analitikoa	Numerikoa	Aldea (%)
Sekzio laukizuzena	31364	31465	0,27
T bikoitza sekzioa	31213	31231	-0,16

7.3.3 HIRU-PUNTUKO MAKURDURAN LORTURIKO EMAITZAK

Sekzio laukizuzeneko eta T bikoitza sekzioko hiru dimentsioko modeloak implementatu dira ABAQUS Standard programan. Simetria kontuan izan ondoren, habe erdiaren eredu egin da, eta ondorioz, hegal-habe bat aztertu da. Konpresio eta trakzio moduluen desberdintasuna kontuan hartu asmoz implementaturiko modeloek aurrez aipaturiko bi zatiak barne hartu dituzte, goikoa konpresioko modulu elastikoarekin eta behekoa trakzioko modulu elastikoarekin.

Geometriari dagokionean, makurdura hutsean aipaturiko ezaugarriak mantendu dira, hots, 7.3 irudian adierazten direnak. Kasu honetan bost habe luzera desberdin aztertu dira. Zeharkako sekzio laukizuzena duen habearren modeloak egiterakoan honako luzerak erabili dira: $L = 20, 24, 30, 40$ eta 60 mm. Horiek simulaturiko saiakuntzetako habearren euskarrien arteko distantziaren edo argiaren erdiak dira, izan ere, simetria dela eta, modeloetan habearren erdia hartu da kontuan. Luzera horiek aukeratu dira erregresioko aldagai independenteen arteko aldea (h/L) konstante mantenduz. T bikoitza sekziodun habearren kasuan, honako bost luzerak erabili dira elementu finituen bidezko analisietan: $L = 600, 750, 1000, 1500$ eta 3000 mm. Habeen luzera aldakorra denez, FEM modeloetan erabilitako C3D8I motako elementu kopurua desberdina izan da habe luzera bakoitzaren eta bi sekzio moten kasuan. Analisiak sekzio laukizuzeneko habekin egin direnean, erabilitako gutxieneko elementu kopurua 4800 izan da eta gehienekoa 14400. T bikoitzaren kasuan, gutxieneko eta gehieneko elementu kopuruak 18240 eta 66576 izan dira, hurrenez hurren.

T bikoitza sekziodun habearren ebakidura faktorea (5.2) ekuazioaren bidez kalkulatu da:

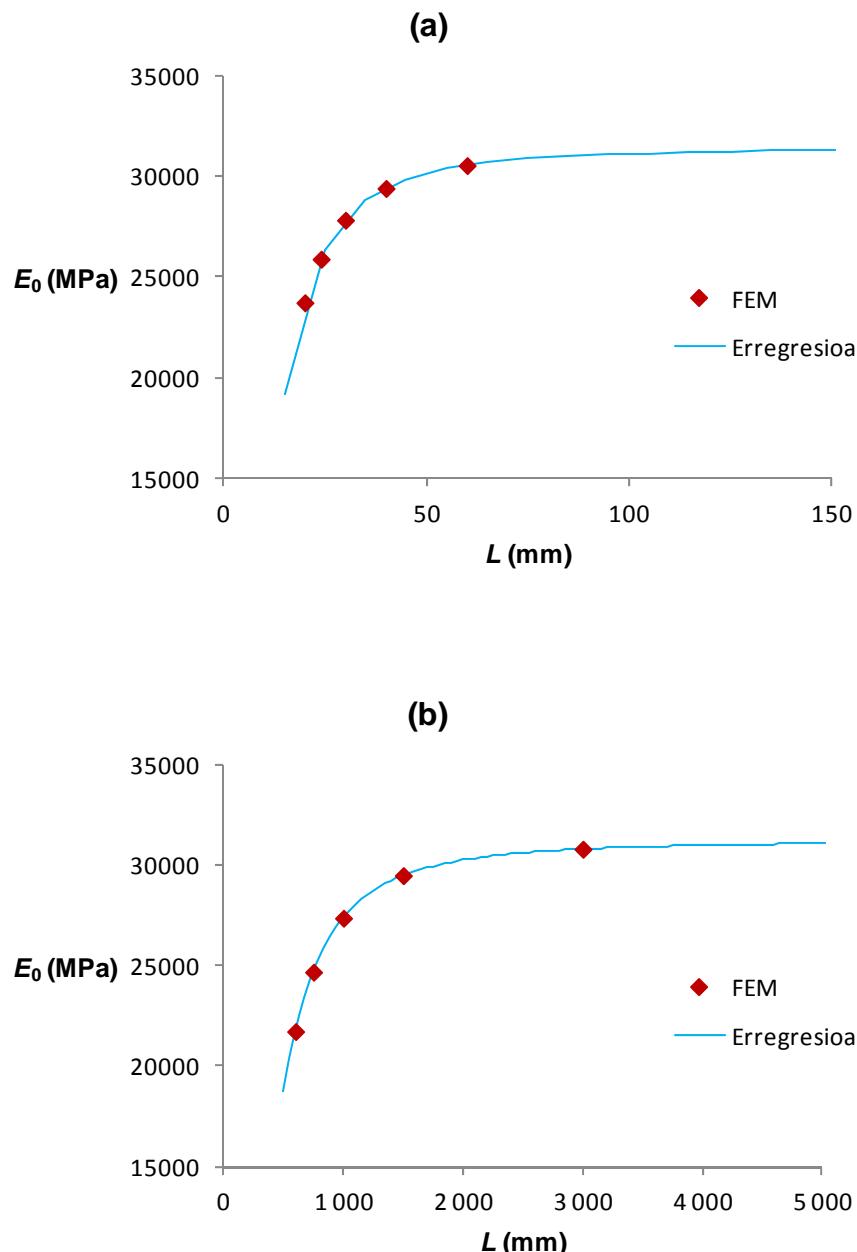
$$\chi = \chi_{arima} + \chi_{hegalak} = 1,96 + 0,08 = 2,04 \quad (7.25)$$

(7.25) ekuazioaren arabera, ebakidura faktorean kontribuzio nagusia arimatik dator. Gehienetan ebakidura faktorea ebakidura moduluaren barneratu ohi da, modu horretan lorturiko modulu “sekzio modulu” bezala izendatzen delarik [11]. Lan honetan, ebakidura moduluaren modeloaren materialaren propietate moduan sartzen denez, ebakidura faktorearen egokitasuna ere frogatu da.

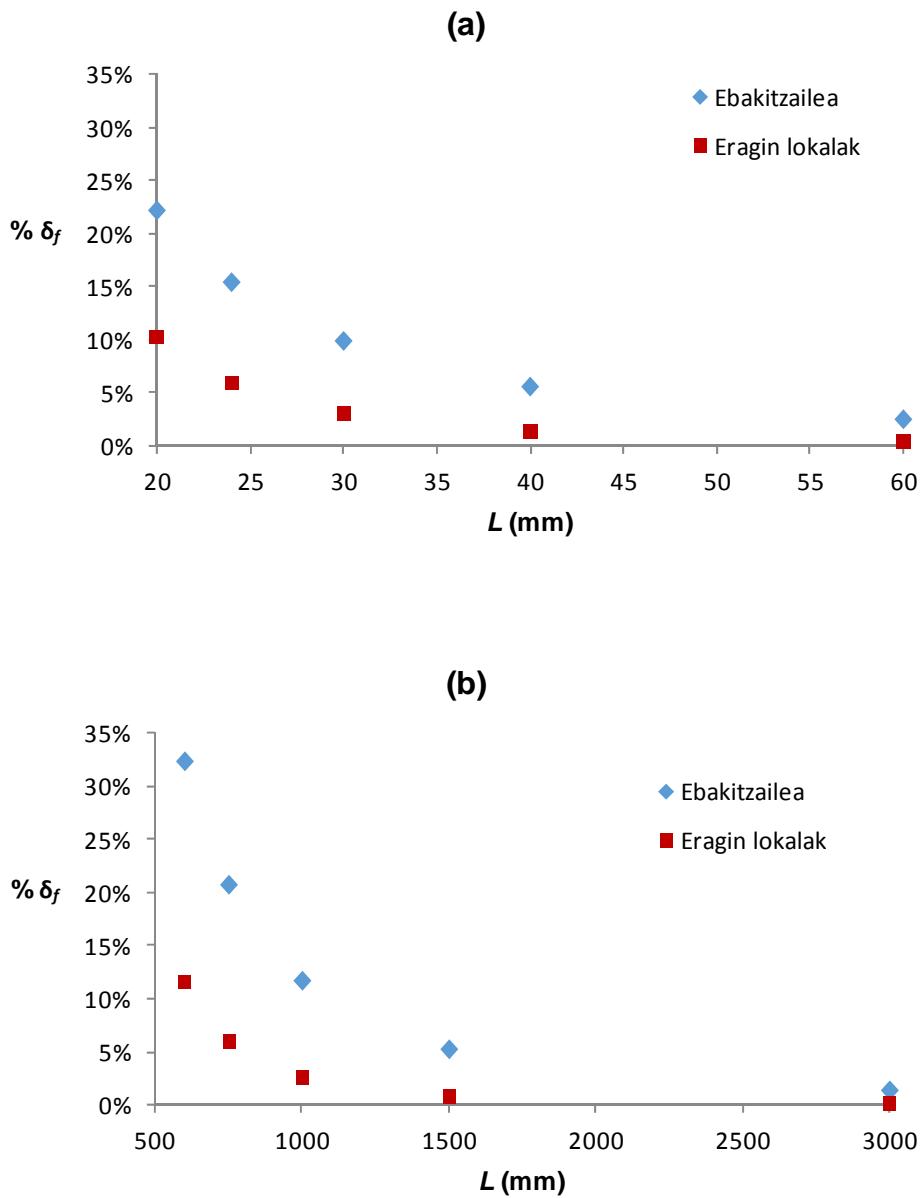
Elementu finituen modeloetan $L/50$ balioko desplazamendu finkoa ezarri da habearen bukaerako sekzioan. Luzera desberdin bakoitzarekin egindako analisietan karga-desplazamendu kurbaren malda zehaztu da, aurrez aipaturiko desplazamendu finkoari dagokion erreakzio indarra desplazamendu finko horrekin zatituz. Ondoren E_0 lortu da, (5.7) ekuazioko adierazpenaren arabera eta bost balio pareei erregresio kubikoa aplikatu zaie.

Hurrengo orrialdean, 7.5 irudian elementu finituen analisien bidez lorturiko E_0 balioak eta erregresio kurbak irudikatu dira, bi sekzioentzat. (5.5) ekuazioaren arabera, habearen bukaerako sekzioko desplazamendu osoa makurduraren, ebakitzairearen eta deformazio lokalaren eraginezkoa da. 7.6 irudian ebakitzairearen eta eragin lokalen desplazamenduen ehunekoa, makurduraren eraginez gertatzen den desplazamenduarekiko irudikatu da, analisian erabilitako bost habe luzerentzat.

7.4 taulan elementu finituen analisietan eta erregresio kubikoa eginez lorturiko makurdura eta ebakidura moduluaren eta sistemaren zurruntasunen balioak datoz, sekzio laukizuzenaren nahiz T bikoitza sekzioaren kasuan. Taula horretan elementu finituen analisietan sarrera gisan erabili diren luzetarako trakzio eta konpresio moduluaren eta planoz kanpoko ebakidura moduluaren balioak ere aurkezten dira. Horrez gain, erregresio kubiko bidez analitikoki, (7.21) ekuazioaren arabera, lorturiko makurdura modulu ere azaltzen da.



7.5 irudia. E_0 -ren aldakuntza habe luzerarekiko; a) sekzio laukizuzena; b) T bikoitza sekzioa.



7.6 irudia. Ebakitzairearen eta eragin lokalaren ehuneko makurduraren eraginezko desplazamenduarekiko; a) sekzio laukizuzena; b) T bikoitza sekzioa.

Sarrerako balioaren eta numerikoki lorturikoaren arteko aldea txikiagoa da T bikoitzak sekzioa duen habearen kasuan, sekzio laukizuzena duenarenean baino. Ziur aski, kasu horretan ebakitzailaren eragina handiagoa delako, 7.6 irudian ikus daitekeen moduan.

7.4 taula: FEM eta erregresio kubikoaren bidez lorturiko makurdura eta ebakidura moduluak.

	Sarrerako balioak FEM			Analitikoa		Saiakuntza birtualak	
	E_t	E_c	G_{13}	E_f		E_f	G_{13}
	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)		(MPa)	(N/mm)
Sekzio laukizuzena	39900	25300	3600	31364	31412	3836	20762
T bikoitza sekzioa	39900	25300	3600	31213	31222	3567	11208

Ondoren analitikoki determinaturiko makurdura modulu modelo numerikoetan sartu da, konpresio eta trakzio moduluak bi zatitan konsideratu ordez, saiakuntza birtualak zati bakar bat erabiliz egin asmoz. Makurdura eta ebakidura moduluaren balio analitikoaren eta saiakuntza birtualetatik lorturikoen alde erlatiboa 7.5 taulan ikus daiteke. Desberdintasun hori handiagoa da planoz kanpoko ebakidura moduluaren kasuan makurdura moduluaren kasuan baino, alderik handiena sekzio laukizuzenean delarik. T bikoitza sekzioaren kasuan emaitza analitiko eta numerikoak bat datoz.

7.5 taula: Makurdura eta ebakidura moduluaren sarrera balioen eta FEM analisietako balioei erregresio kubikoa aplikatz lorturikoen arteko desberdintasuna.

	Sarrera	Numerikoa	Aldea	Sarrera	Numerikoa	Aldea
	E_f	E_f		G_{13}	G_{13}	
	(MPa)	(MPa)	(%)	(MPa)	(MPa)	(%)
Sekzio laukizuzena	31364	31411	0,15	3600	3828	6,33
T bikoitza sekzioa	31213	31223	0,03	3600	3566	-0,94

7.4 ONDORIOAK

Saiakuntza birtualetan lorturiko datuei prozedura analitikoa aplikatz makurdura eta ebakidura modulu numerikoak determinatu dira. Lorturiko emaitzak aztertuz, analitikoki eta numerikoki determinaturiko makurdura moduluak bat datozena ikus daiteke, makurdura hutsean zein hiru-puntuko makurduran. Argi luzera desberdinak

erabiliz hiru-puntuko makurdura saiakuntza birtualetatik lorturiko ebakidura moduluaren eta sarrera gisan sarturikoaren arteko adostasuna ere egokia da.

Horrez gain, analitikoki lorturiko makurdura modulua sarrerako propietate elastiko moduan sekzio osoan aplikatuz ere egin dira hiru-puntuko makurdura saiakuntza birtualak. Modu honetan lorturiko emaitzak bat datozen konpresio eta trakzio moduluak bereiztuta lorturikoekin.

Beraz, trakzio eta konpresio moduluak ezagunak badira, makurdura nagusi den problemetan, elementu finituen analisirako, kapitulu honetan deskribaturiko prozedura analitikoa jarraituz kalkulaturiko makurdura modulua elementu finituen modeloan zuzenean materialaren propietate moduan sar daitekeela ondoriozta daiteke.

7.5 BIBLIOGRAFIA

- [1] Jones RM. Apparent flexural modulus and strength of multimodulus materials. *J Compos Mater* 1976; 10: 342-54.
- [2] Zhou G, Davies GAO. Characterization of thick glass woven roving/polyester laminates: 2. Flexure and statistical considerations. *Composites* 1995; 26: 587-96.
- [3] Paolinelis SG, Paipetis SA, Theocaris PS. 3-point bending at large deflections of beams with different moduli of elasticity in tension and compression. *J Test Eval* 1979; 7: 177-82.
- [4] Gere JM, Timoshenko SP. Mechanics of materials. 4th ed. Pws, 1997.
- [5] Mujika F, Carbajal N, Arrese A, Mondragon I. Determination of tensile and compressive moduli by flexural tests. *Polym Test* 2006; 25: 766-71.
- [6] Meng M, Le HR, Rizvi MJ, Grove SM. The effects of unequal compressive/tensile moduli of composites. *Compos Struct* 2015; 126: 207-15.
- [7] Serna Moreno MC, Romero Gutiérrez A, Martínez Vicente JL. Different response under tension and compression of unidirectional carbon fibre laminates in a three-point bending test. *Compos Struct* 2016; 136: 706-11.

- [8] Serna Moreno MC, Romero Gutiérrez A, Martínez Vicente JL. First flexural and interlaminar shear failure in symmetric cross-ply carbon-fibre laminates with different response under tension and compression. *Compos Struct* 2016; 146: 62-8.
- [9] Serna Moreno MC, Horta Muñoz S, Romero Gutiérrez A, Rappold C, Martínez Vicente JL, Morales-Rodríguez PA et al. Pseudo-ductility in flexural testing of symmetric $\pm 45^\circ$ angle-ply CFRP laminates. *Compos Sci Technol* 2018; 156: 8-18.
- [10] Lee T, Kim C, Kim MS, Kim T. Flexural and tensile moduli of flexible FR4 substrates. *Polym Test* 2016; 53: 70-6.
- [11] Bank L. Flexural and shear moduli of full-section fiber reinforced plastic (FRP) pultruded beams. *J Test Eval* 1989; 17: 40-5.
- [12] Neto ABSS, La Rovere HL. Flexural stiffness characterization of fiber reinforced plastic (FRP) pultruded beams. *Compos Struct* 2007; 81: 274-82.
- [13] Mottram JT. Shear modulus of standard pultruded fiber reinforced plastic material. *J Compos Constr* 2004; 8: 141-7.
- [14] Zhou G, Hood J. Design, manufacture and evaluation of laminated carbon/epoxy I-beams in bending. *Compos Part A-Appl S* 2006; 37: 506-17.
- [15] Hayes MD, Lesko JJ. Measurement of the Timoshenko shear stiffness. I: Effect of warping. *J Compos Constr* 2007; 11: 336-42.
- [16] Hayes MD, Lesko JJ. Measurement of the Timoshenko shear stiffness. II: Effect of transverse compressibility. *J Compos Constr* 2007; 11: 343-9.
- [17] Turvey GJ. Testing and analysis of pultruded GFRP continuous beams for the deflection serviceability limit state. *Compos Struct* 2016; 141: 213-20.
- [18] Singh SB, Chawla H. An investigation of material characterization of pultruded FRP H- and I-beams. *Mech Adv Mater Struct* 2018; 25: 124-42.

- [19] Berube KA, Lopez-Anido RA, Goupee AJ. Determining the flexural and shear moduli of fiber-reinforced polymer composites using three-dimensional digital image correlation. *Exp Techniques* 2016; 40: 1263-73.
- [20] Mujika F. On the effect of shear and local deformation in three-point bending tests. *Polym Test* 2007; 26: 869-77.
- [21] Morgado T, Silvestre N, Correia JR. Simulation of fire resistance behaviour of pultruded GFRP beams – Part I: Models description and kinematic issues. *Compos Struct* 2018; 187: 269-80.
- [22] Dassault Systèmes Simulia Corp. ABAQUS Theory Manual, 6.12. 2012.

ONDORIO OROKORRAK

Hauek dira ikerkuntza lan honetatik aipa daitezkeen ondorio nagusiak:

3. Makurdura nagusi den problemetan, SFM metodoaren ekuazioak erabiliz SM metodoaren bidez baino emaitza hobeak lortzen dira. Elementu finituen bidezko kalkulurako prestaturiko modeloan elementu kopurua handitzen den neurrian, bi metodoen arteko aldea txikituz doa.
4. SFM metodoa bi dimensioko elementuetan implementatu da. Hiru nodoko elementu triangeluarraren kasuan, SM metodoaren eta SFM metodoaren ekuazioak berdinak direla ondorioztatu da.
5. Abaqus programa komertzialak dituen elementuak erabiliz lortzen diren emaitzak SFM metodoa erabiliz lortzen diren emaitzekin alderatu dira, bi dimensioko lau nodoko elementu isoparametrikoaren kasuan. Alderaketa horretatik ondorioztatu da Abaqus-en modu ez bateragarriak erabiltzen dituzten elementuekin eta SFM metodoko elementuekin emaitza berdinak lortzen direla, elementuak laukizuzenak diren kasuan.
6. DCB saiakuntza elementu finituak erabiliz simulatu eta pitzadura luzera determinatu da, lorturiko emaitzak bat datoaz De Gracia et al.-ek proposaturiko prozedura analitiko eta esperimentalarekin, beraz, prozedura hori baliozkoa dela ondorioztatu da.

7. Sekzio laukizuzena eta T bikoitzak sekzioa duten habeetan elementu finitu bidezko analisiak egin dira, konpresio eta trakzio modulu desberdinak kontuan hartuz. Analitikoki eta numerikoki lorturiko makurdura moduluek adostasun egokia azaltzen dute. Ondorioz, makurdura nagusi den problemetan, konpresio eta trakzio moduluak ezagunak direnean, elementu finituen analisia egiteko lan honetan proposaturiko prozedura analitikoarekin determinaturiko makurdura modulua erabiltzea egokia da.

AURRERA BEGIRA

Ikerkuntza lan honetan azterturikotik, aurrera begira, hurrengoak dira irekita geratu diren ikerkuntza ildoak:

- SFM metodoaren formulazioa jarraituz eta indarren interpolazio funtzi desberdinak erabiliz beste elementu batzuk garatzea. Lan honetan erabilitako elementuen eta elementu horien arteko desberdintasunak zein diren aztertzea. Distorsionaturiko elementuak dauden modeloetan indarren interpolazio funtzi desberdinak erabiltzeak duen eragina aztertzea.
- Modu ez bateragariak erabiltzen dituzten metodoen eta SFM metodoaren arteko erlazioan sakontzen jarraitzea. Antzekotasunak eta desberdintasunak zein diren zehaztu asmoz, hau da, elementu laukizuzenetan emaitza berdinak lortzearen eta elementu orokorretan emaitza desberdinak lortzearen zergatia zein den aztertzea.
- Azpirrutinak hiru dimensioko elementuetara hedatzea. Hau da, zortzi nodoko hexaedroari dagokion azpirrutinaren kodea garatzea eta Abaqusen implementatzea.
- Abaqusen hainbat materialen portaera daude erabilgarri. Analisi numerikoak portaera horietatik desberdinak direnekin egin ahal izateko UMAT azpirrutinak idaztea.

- Lan horretan garaturiko azpirrutinekin elementu finituen analisia urrats bakarrean egin daiteke. Azpirrutinak analisi numerikoak urrats bat baino gehiago erabiliz egin ahal izateko moldatzea, saiakuntza mekaniko birtualak egitean karga-desplazamendu kurbak urratsez urrats lortzeko.
- Laminatuengen saiakuntza mekanikoen analisian sakontzen jarraitzea. Saiakuntza mekaniko desberdinen FEM bidezko analisiak egin eta hurbilketa analitiko zein emaitza esperimentalekin konparatzea.

ERANSKINAK

Hurrengo orrialdeetan datozen lan honetarako erabilitako azpirrutinenen kodeak.

A. ERAZTUN ZIRKULARREN ANALISIRAKO KODEA

Eraztun zirkularra aztertzeko Matlab® programa komertzialean implementaturiko kidea honakoa da:

Programa nagusia:

```
% Circular_5kN_trans_alis.m
% Zuzentzaile zirkularra duen arkua
% Memoria garbitu
clear all;colordf white;clf

% Materialak
E = 210000.;           % Elastikotasun modulua, MPa-eten
vu = 0.3;              % Poisson koefizientea
rho=1;
thickness=51.;

% Materialaren zurruntasun eta malgutasun koefizienteen matrizeak osatu
% Tentsio egoera laua
C=E./(1-vu.^2).*[1 vu 0;vu 1 0;0 0 (1-vu)./2];
Compliance=1./E.*[1 -vu 0;-vu 1 0;0 0 2.*(1+vu)];

% Kargaren balioa
P = 5000.;

% Eraztun zirkularren diskretizazioa
Rint=78.;
AA=13.;
Rext=Rint+AA;
numElemL=12;
numElemAA=4;
```

```

numberElements=numElemL*numElemAA;
[nodeCoordinates, elementNodes] = ...
    archMesh_90(Rint,AA,numElemL,numElemAA);
xx=nodeCoordinates(:,1);
yy=nodeCoordinates(:,2);
drawingMesh(nodeCoordinates,elementNodes,'Q4','k-');
numberNodes=size(xx,1);

% GDof: askatasun gradu kopuru orokorra
GDof=2*numberNodes;

% Sistemaren zurruntasun matrizearen kalkulua
stiffness=formStiffness2D(GDof,numberElements, ...
    elementNodes,numberNodes,nodeCoordinates,C,rho,thickness);
stiffnessSFM=formStiff2D_SFM(GDof,numberElements, ...
    elementNodes,numberNodes,nodeCoordinates,Compliance,thickness);

% Ingurune-baldintzak
fixedNodeX=find(nodeCoordinates(:,1)<0.000001); % x ardatzean finkatuak
fixedNodeY=find(nodeCoordinates(:,2)<0.000001); % y ardatzean finkatuak
prescribedDof=[fixedNodeX; fixedNodeY+numberNodes];

% Indar bektorea (xx=0 eta xx=Lx-n aplikaturiko karga kontzentratuak)
force=sparse(GDof,1);
forceNode=find(and(nodeCoordinates(:,1)<0.000001, ...
    nodeCoordinates(:,2)==Rext));
force(forceNode+numberNodes)=-P;

% Ebazpena
displacements=solution(GDof,prescribedDof,stiffness,force);
displsSFM=solution(GDof,prescribedDof,stiffnessSFM,force);

% Desplazamenduak
UX=displacements(1:numberNodes);
UY=displacements(numberNodes+1:GDof);
UXSFM=displsSFM(1:numberNodes);
UYSFM=displsSFM(numberNodes+1:GDof);

% Tentsioak nodoetan (SM metodoa)
nodalStress=stresses2D(GDof,numberElements,elementNodes,numberNodes, ...
    nodeCoordinates,displacements,UX,UYSFM,C,scaleFactor);
SigmaX=nodalStress(:,:,1);
SigmaY=nodalStress(:,:,2);
Tau=nodalStress(:,:,3);

% Tentsioak nodoetan (SFM metodoa)
nodalStressSFM=stresses2DSFM(numberElements,elementNodes, ...
    numberNodes,nodeCoordinates,displsSFM,UXSFM,UYSFM, ...
    Compliance,thickness,scaleFactor);
SigmaXSFM=nodalStressSFM(:,:,1);

```

Diskretizorako archMesh_90 funtzioa:

```

function [nodeCoordinates,elementNodes]=archMesh_90(Rint,AA, ...
    numElemL,numElemAA)
% Modulu honek lau aldeko elementu linealak erabiliz eratzun zirkularren
laurdena diskretizatzen du
node=0;
elem=0;
k=0;

```

```

for ang=0:pi/(2*numElemL):pi/2
    for i=1:numElemAA+1
        node=node+1;
        Rnode=Rint+AA/numElemAA*(i-1);
        nodeCoordinates(node,:)=[Rnode*cos(ang) Rnode*sin(ang)];
    end
end
for i=1:numElemL
    k=k+1;
    for j=1:numElemAA
        elem=elem+1;
        k=k+1;
        n1=k;
        n2=n1+numElemAA+1;
        n3=n2-1;
        n4=n1-1;
        elementNodes(elem,:)=[n1 n2 n3 n4];
    end
end

```

Zurruntasun matrizearen kalkulua, SM metodoa erabiliz:

```

function [stiffness]=formStiffness2D(GDof,numberElements, ...
    elementNodes,numberNodes,nodeCoordinates,C,rho,thickness)
stiffness=zeros(GDof);
% Gauss-en koadratura osoa (2x2)
[gaussWeights,gaussLocations]=gaussQuadrature('complete');

for e=1:numberElements
    indice=elementNodes(e,:);
    elementDof=[ indice indice+numberNodes ];
    ndof=length(indice);

    % Gauss puntu bakoitzarentzat errepikatzen den zikloa
    for q=1:size(gaussWeights,1)
        GaussPoint=gaussLocations(q,:);
        xi=GaussPoint(1);
        eta=GaussPoint(2);

        % Desplazamenduen interpolazio funtzioak eta euren deribatuak
        [shapeFunction,naturalDerivatives]=shapeFunctionQ4(xi,eta);

        % Matrize jakobiarra, jakobiarraren alderantzizkoa,
        % desplazamenduen interpolazio funtzioen deribatuak x,y-rekiko
        [Jacob,invJacobian,XYderivatives]=...
            Jacobian(nodeCoordinates(indice,:),naturalDerivatives);

        % Desplazamendu-deformazio matrizea, [B]
        B=zeros(3,2*ndof);
        B(1,1:ndof) = XYderivatives(:,1)';
        B(2,ndof+1:2*ndof) = XYderivatives(:,2)';
        B(3,1:ndof) = XYderivatives(:,2)';
        B(3,ndof+1:2*ndof) = XYderivatives(:,1)';

        % Zurruntasun matrizea, [K]SM
        stiffness(elementDof,elementDof)=...
            stiffness(elementDof,elementDof)+...
            B'*C*thickness*B*gaussWeights(q)*det(Jacob);
    end
end

```

Zurruntasun matrizearen kalkulua, SFM metodoa eta diagonalizazioa erabiliz:

```
function [stiffnessSFM]=formStiff2D_SFM(GDof,numberElements, ...
    elementNodes,numberNodes,nodeCoordinates,thickness,E,vu)

stiffnessSFM=sparse(GDof,GDof);

for e=1:numberElements
    indice=elementNodes(e,:);
    elementDof=[ indice indice+numberNodes ];

% Oreka matrizearen kalkulua, [E]
[equilibrium]=formEq2D_SFM(E,vu,nodeCoordinates,indice);

% Zurruntasun matriza, [K]_SFM
stiffnessSFM(elementDof,elementDof)=...
    stiffnessSFM(elementDof,elementDof)+...
    thickness.*equilibrium*equilibrium';
end
```

Nodoetako desplazamenduak globaletan lortzeko ekuazio sistemaren ebazpena:

```
function displacements=solution(GDof,prescribedDof,stiffness,force)
activeDof=setdiff([1:GDof]', ...
    [prescribedDof]);
U=stiffness(activeDof,activeDof)\force(activeDof);
displacements=zeros(GDof,1);
displacements(activeDof)=U;
```

Nodoetako tentsioak lortzeko funtzioa, SM metodoa erabiliz:

```
function [nodalStress]=stresses2D(GDof,numberElements, ...
    elementNodes,numberNodes,nodeCoordinates, ...
    displacements,UX,UY,C,scaleFactor)

% Gauss-en koadratura osoa (2x2)
[gaussWeights,gaussLocations]=gaussQuadrature('complete');

% Tentsioak nodoetan
stressGaussPoints=zeros(numberElements,size(elementNodes,2),3);
nodalStress=zeros(numberElements,size(elementNodes,2),3);
stressPoints=[-1 -1;1 -1;1 1;-1 1];

for e=1:numberElements
    indice=elementNodes(e,:);
    elementDof=[ indice indice+numberNodes ];
    nn=length(indice);
    for q=1:size(gaussWeights,1)
        pt=gaussLocations(q,:);
        wt=gaussWeights(q);
        xi=pt(1);
        eta=pt(2);
        a=1/pt(1);
        b=1/pt(2);
    % Desplazamenduen interpolazio funtzioak eta euren deribatuak
        [shapeFunction,naturalDerivatives]=shapeFunctionQ4(xi,eta);
        [shapeNodal]=shapeFunctionQ4(a,b);
        extrap(:,q)=shapeNodal;
```

```
% Matrize jakobiarra, jakobiarraren alderantzizkoa,
% desplazamenduen interpolazio funtzioen deribatuak x,y-rekiko
[Jacob,invJacobian,XYderivatives]=...
Jacobian(nodeCoordinates(indice,:),naturalDerivatives);

% Desplazamendu-deformazio matrizea, [B]
B=zeros(3,2*nn);
B(1,1:nn) = XYderivatives(:,1)';
B(2,nn+1:2*nn) = XYderivatives(:,2)';
B(3,1:nn) = XYderivatives(:,2)';
B(3,nn+1:2*nn) = XYderivatives(:,1)';

% Elementuen deformazioa
strain=B*displacements(elementDof);
stressGaussPoints(e,q,:)=C*strain;
end
end
for i=1:3
nodalStress(:,:,i) = transpose(extrap*...
transpose(stressGaussPoints(:,:,i)));
end
```

Nodoetako tentsioak lortzeko funtzioa, SFM metodoa eta diagonalizazioa erabiliz:

```
function [nodalStressSFM]=stresses2DSFMDiag(numberElements,elementNodes, ...
numberNodes,nodeCoordinates,displsFM,UXSFM,UYSFM, ...
E,vu,Compliance,thickness,scaleFactor)

% Tentsioak nodoetan
stressInterpol=zeros(3,5);
nodalStressSFM=zeros(numberElements,size(elementNodes,2),3);

for e=1:numberElements
indice=elementNodes(e,:);
elementDof=[ indice indice+numberNodes ];
stressPoints=[-1 -1;1 -1;1 1;-1 1];

% Orea matrizearen kalkulua, [E]
[equilibrium]=formEq2D_SFM(E,vu,nodeCoordinates,indice);

% Indar independenteen kalkulua
stressParam=thickness*equilibrium'*displsFM(elementDof);

% Aldagai auxiliarrak
ab_xy=1/4*[1 1 1 -1;1 -1 1 -1;-1 -1 1 1]*nodeCoordinates(indice,:);
a1=ab_xy(1,1);
a2=ab_xy(2,1);
a3=ab_xy(3,1);
b1=ab_xy(1,2);
b2=ab_xy(2,2);
b3=ab_xy(3,2);

J0=a1*b3-a3*b1;
J1=a1*b2-a2*b1;
J2=a2*b3-a3*b2;

alfa1=J1/(3*J0);
alfa2=J2/(3*J0);
```

```

r1=1/3-alfa1^2;
r2=1/3-alfa2^2;

m=alfa1*alfa2*(vu*J0^2-(a1*a3+b1*b3)^2)/(a1^2+b1^2)^2/r2;

l1=(E/4/J0)^0.5;
l2=l1/(1-vu^2)^0.5;
l3=l1/(2+2*vu)^0.5;
l4=l1/r2^0.5/(a1^2+b1^2);
l5=l1/((a3^2+b3^2)^2*r1-(a1^2+b1^2)^2*m^2*r2)^0.5;

for q=1:size(stressPoints,1)
    pt=stressPoints(q,:);
    xi=pt(1);
    eta=pt(2);

% Indarren interpolazio funtzioen kalkulua
    xi_=xi-alfa1;
    eta_=eta-alfa2;

    stressInterpol=[l1,vu*l2,0,l4*a1^2*eta_,l5*(a3^2*xi_-m*a1^2*eta_);...
        0,l2,0,l4*b1^2*eta_,l5*(b3^2*xi_-m*b1^2*eta_);...
        0,0,l3,l4*a1*b1*eta_,l5*(a3*b3*xi_-m*a1*b1*eta_)]./thickness;

% Tentsioak nodoetan
    nodalStressSFM(e,q,:)=stressInterpol*stressParam;
    auxStress=stressInterpol*stressParam;

% Elementuen deformazioa
    strainSFM(e,q,:)=Compliance*auxStress;
end
end

```

Oreka matrizearen kalkulua, SFM metodoa eta diagonalizazioa erabiliz:

```

function [equilibrium]=formEq2D_SFM(E,vu,nodeCoordinates,indice)

equilibrium=zeros(8,5);

% Aldagai auxiliarrak
ab_xy=1/4*[-1 1 1 -1;1 -1 1 -1;-1 -1 1 1]*nodeCoordinates(indice,:);
a1=ab_xy(1,1);
a2=ab_xy(2,1);
a3=ab_xy(3,1);
b1=ab_xy(1,2);
b2=ab_xy(2,2);
b3=ab_xy(3,2);

J0=a1*b3-a3*b1;
J1=a1*b2-a2*b1;
J2=a2*b3-a3*b2;

e11=-b3+b1;
e12=b3+b1;
e13=b3-b1;
e14=-b3-b1;
e21=-b2-b1;
e22=b2+b1;
e23=b2-b1;
e24=-b2+b1;

```

```

e31=b2+b3;
e32=b2-b3;
e33=-b2+b3;
e34=-b2-b3;
e41=a3-a1;
e42=-a3-a1;
e43=-a3+a1;
e44=a3+a1;
e51=a2+a1;
e52=-a2-a1;
e53=-a2+a1;
e54=a2-a1;
e61=-a2-a3;
e62=-a2+a3;
e63=a2-a3;
e64=a2+a3;

alfa1=J1/(3*J0);
alfa2=J2/(3*J0);

r1=1/3-alfa1^2;
r2=1/3-alfa2^2;

m=alfa1*alfa2*(vu*J0^2-(a1*a3+b1*b3)^2)/(a1^2+b1^2)^2/r2;

l1=(E/4/J0)^0.5;
l2=l1/(1-vu^2)^0.5;
l3=l1/(2+2*vu)^0.5;
l4=l1/r2^0.5/(a1^2+b1^2);
l5=l1/((a3^2+b3^2)^2*r1-(a1^2+b1^2)^2*m^2*r2)^0.5;

t11=e11;
t12=e12;
t13=e13;
t14=e14;
t21=e41;
t22=e42;
t23=e43;
t24=e44;
t31=(a1*e31+b1*e61)/3-alfa2*(a1*e11+b1*e41);
t32=(a1*e32+b1*e62)/3-alfa2*(a1*e12+b1*e42);
t33=(a1*e33+b1*e63)/3-alfa2*(a1*e13+b1*e43);
t34=(a1*e34+b1*e64)/3-alfa2*(a1*e14+b1*e44);
t41=(a3*e21+b3*e51)/3-alfa1*(a3*e11+b3*e41);
t42=(a3*e22+b3*e52)/3-alfa1*(a3*e12+b3*e42);
t43=(a3*e23+b3*e53)/3-alfa1*(a3*e13+b3*e43);
t44=(a3*e24+b3*e54)/3-alfa1*(a3*e14+b3*e44);

equilibrium=[11*t11,vu*t12*t11,13*t21,14*a1*t31,15*(a3*t41-m*a1*t31);...
11*t12,vu*t12*t12,13*t22,14*a1*t32,15*(a3*t42-m*a1*t32);...
11*t13,vu*t12*t13,13*t23,14*a1*t33,15*(a3*t43-m*a1*t33);...
11*t14,vu*t12*t14,13*t24,14*a1*t34,15*(a3*t44-m*a1*t34);...
0,12*t21,13*t11,14*b1*t31,15*(b3*t41-m*b1*t31);...
0,12*t22,13*t12,14*b1*t32,15*(b3*t42-m*b1*t32);...
0,12*t23,13*t13,14*b1*t33,15*(b3*t43-m*b1*t33);...
0,12*t24,13*t14,14*b1*t34,15*(b3*t44-m*b1*t34)];
end

```

Gauss-en koadratura 4 nodoko elementuentzat:

```
function [weights,locations]=gaussQuadrature(option)
% 'complete' aukera (2x2)
% 'reduced' aukera (1x1)
% locations: Gauss puntuen kokalekua
% weights: Gauss puntuen pisuak
switch option
    case 'complete'
        locations=...
            [-0.577350269189626 -0.577350269189626;
             0.577350269189626 -0.577350269189626;
             0.577350269189626 0.577350269189626;
             -0.577350269189626 0.577350269189626];
        weights=[ 1;1;1;1];
    case 'reduced'
        locations=[0 0];
        weights=[4];
end
end
```

Desplazamenduen interpolazio funtziok eta euren deribatuak lau nodoko elementuentzat:

```
function [shape,naturalDerivatives]=shapeFunctionQ4(xi,eta)
% shape: desplazamenduen interpolazio funtziok
% naturalDerivatives: deribatuak ξ eta η-rekiko
% xi, eta: koordenatu naturalak (-1 ... +1)
shape=1/4*[ (1-xi)*(1-eta);(1+xi)*(1-eta);
            (1+xi)*(1+eta);(1-xi)*(1+eta)];
naturalDerivatives=...
    1/4*[-(1-eta), -(1-xi);1-eta, -(1+xi);
          1+eta, 1+xi;-(1+eta), 1-xi];
end
```

Matrize jakobiarraren kalkulua:

```
function [JacobianMatrix,invJacobian,XYDerivatives]=...
    Jacobian(nodeCoordinates,naturalDerivatives)
% JacobianMatrix: matrize jakobiarra
% invJacobian: matrize jakobiarraren alderantzizkoa
% XYDerivatives: deribatuak x eta y-rekiko
% naturalDerivatives: deribatuak ξ eta η-rekiko
% nodeCoordinates: elementuaren nodoen koordenatuak
JacobianMatrix=nodeCoordinates'*naturalDerivatives;
invJacobian=inv(JacobianMatrix);
XYDerivatives=naturalDerivatives*invJacobian;
end
```

B. BARRA ELEMENTUAREN KODEA

B.1. DIMENTSIO BAKARREKO BARRA ELEMENTUA (SM)

```
SUBROUTINE UEL(RHS,AMATRX,SVARS,ENERGY,NDOFEL,NRHS,NSVARS,
1      PROPS,NPROPS,COORDS,MCRD,NNODE,U,DU,V,A,JTYPE,TIME,DTIME,
2      KSTEP,KINC,JELEM,PARAMS,NDLOAD,JDLTYP,ADLMAG,PREDEF,
3      NPREDF,LFLAGS,MLVARX,DDLMAG,MDLOAD,PNEWDT,JPROPS,NJPROP,
```

```

4      PERIOD)
C
C INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
C DIMENSION RHS(MLVARX,*),AMATRX(NDOFEL,NDOFEL),
1   SVARS(NSVARS),ENERGY(8),PROPS(*),COORDS(MCRD,NNODE),
2   U(NDOFEL),DU(MLVARX,*),V(NDOFEL),A(NDOFEL),TIME(2),
3   PARAMS(3),JDLTYP(MDLOAD,*),ADLMAG(MDLOAD,*),
4   DDLMAG(MDLOAD,*),PREDEF(2,NPREFN,NNODE),LFLAGS(*),
5   JPROPS(*)
C
C EN EL SIGUIENTE CODIGO TENEMOS QUE DAR VALOR A LAS SIGUIENTES VARIABLES:
C NELEM: NO. DE ELEMENTOS DE NUESTRO EJEMPLO
C NINPT: NO. DE PTOS. DE INTEGRACION DEL ELEMENTO FINITO
C NSVINT: NO. DE TENSIONES QUE VAMOS A VISUALIZAR
C
C THE FOLLOWING COMMON BLOCK IS USED TO STORE NSVINT VARIABLES,
C AT THE NINPT INTEGRATION POINTS OF NELEM ELEMENTS
      PARAMETER (NELEM=1, NINPT=1, NSVINT=1)
      COMMON/KUSER/UVAR_ARRAY(NELEM,NSVINT,NINPT)
C
C EN EL SIGUIENTE CODIGO CALCULAMOS LA MATRIZ DE RIGIDEZ AMATRX
C Y EL RESIDUO RHS
C EN ESTE CASO, EL MODULO ELASTICO ES E Y EL AREA DE LA BARRA, ATRUSS
C
      E=1E11
      ATRUSS=1E-2
      RL=ABS(COORDS(1,2)-COORDS(1,1))
      RLSIGNED=COORDS(1,2)-COORDS(1,1)
      SK=E*ATRUSS/RL
C
      DO I=1, NDOFEL
        RHS(I, 1)= ZERO
        DO J=1, NDOFEL
          AMATRX(I, J)= ZERO
        END DO
      END DO
C
      AMATRX(1,1)=SK
      AMATRX(1,3)=-SK
      AMATRX(3,1)=-SK
      AMATRX(3,3)=SK
C
C RHS SERA EL PRODUCTO AMATRX*DU CON SIGNO MENOS
C
      RHS(1,1)=-SK*(DU(1,1)-DU(3,1))
      RHS(3,1)=-SK*(DU(3,1)-DU(1,1))
C
C CALCULAREMOS LAS TENSIONES Y LAS GUARDAMOS EN EL VECTOR SVARS
C Y EN LA VARIABLE UVAR_ARRAY
C
      SVARS(1)=SVARS(1)+E*(DU(3,1)-DU(1,1))/RLSIGNED
      UVAR_ARRAY(JELEM,1,1)=SVARS(1)
C
      RETURN
    END
C
C
      SUBROUTINE UVARM(UVAR,DIRECT,T,TIME,DTIME,CMNAME,ORNAME,
1   NUVAR,NOEL,NPT,LAYER,KSPT,KSTEP,KINC,NDI,NSHR,COORD,
2   JMPC,JMATYP,MATLAYO,LACCFLA)

```

```

INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
C ESTA SENTENCIA DEBE SER IGUAL QUE LA QUE TENIAMOS EN LA FUNCION UEL
C
PARAMETER (NELEM=1, NINPT=1, NSVINT=1)
C
C LOS ELEMENTOS DUMMY TIENEN INDICES IGUALES A LOS DE LOS ELEMENTOS REALES
C SUMANDO 1000
C EN EJEMPLOS GRANDES PODRIAMOS SUMAR OTRA CANTIDAD, POR EJEMPLO 10000
C
PARAMETER (IELEMOFFSET = 1000)
C
CHARACTER*80 CMNAME,ORNAME
CHARACTER*3 FLGRAY(15)
DIMENSION UVAR(NUVARM),DIRECT(3,3),T(3,3),TIME(2)
DIMENSION ARRAY(15),JARRAY(15),JMAC(*),JMATTYP(*),COORD(*)
C
C THE DIMENSIONS OF THE VARIABLES FLGRAY, ARRAY AND JARRAY
C MUST BE SET EQUAL TO OR GREATER THAN 15.
C
COMMON/KUSER/UVAR_ARRAY(NELEM,NSVINT,NINPT)
C
C DAMOS VALOR A LAS VARIABLES UVAR
C
UVAR(1:NSVINT) = UVAR_ARRAY(NELEM-IELEMOFFSET,1:NSVINT,NPT)
C
RETURN
END

```

B.2. BI DIMENTSIOKO BARRA ELEMENTUA (SM)

```

SUBROUTINE UEL(RHS,AMATRX,SVARS,ENERGY,NDOFEL,NRHS,NSVARS,
1   PROPS,NPROPS,COORDS,MCRD,NNODE,U,DU,V,A,JTYPE,TIME,DTIME,
2   KSTEP,KINC,JELEM,PARAMS,NDLOAD,JDLTYP,ADLMAG,PREDEF,
3   NPREFL,LFLAGS,MLVARX,DDLMAG,MDLOAD,PNEWDT,JPROPS,NJPROP,
4   PERIOD)
C
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
PARAMETER(ZERO=0.D0)
C
DIMENSION RHS(MLVARX,*),AMATRX(NDOFEL,NDOFEL),
1   SVARS(NSVARS),ENERGY(8),PROPS(*),COORDS(MCRD,NNODE),
2   U(NDOFEL),DU(MLVARX,*),DUB(NDOFEL,NRHS),V(NDOFEL),A(NDOFEL),
3   TIME(2),PARAMS(3),JDLTYP(MDLOAD,*),ADLMAG(MDLOAD,*),
4   DDLMAG(MDLOAD,*),PREDEF(2,NPREFL,NNODE),LFLAGS(*),
5   JPROPS(*)
C
C EN EL SIGUIENTE CODIGO TENEMOS QUE DAR VALOR A LAS SIGUIENTES VARIABLES:
C   NELEM: NO. DE ELEMENTOS DE NUESTRO EJEMPLO
C   NINPT: NO. DE PTOS. DE INTEGRACION DEL ELEMENTO FINITO
C   NSVINT: NO. DE TENSIONES QUE VAMOS A VISUALIZAR
C
C THE FOLLOWING COMMON BLOCK IS USED TO STORE NSVINT VARIABLES,
C AT THE NINPT INTEGRATION POINTS OF NELEM ELEMENTS
PARAMETER (NELEM=1, NINPT=1, NSVINT=1)
COMMON/KUSER/UVAR_ARRAY(NELEM,NSVINT,NINPT)
C

```

```

C EN EL SIGUIENTE CODIGO CALCULAMOS LA MATRIZ DE RIGIDEZ AMATRX
C Y EL RESIDUO RHS
C EN ESTE CASO, EL MODULO ELASTICO ES E Y EL AREA DE LA BARRA, ATRUSS
C
E=150000
ATRUSS=0.5
C LENGTH AND ANGLE
RL = (COORDS(1,2)-COORDS(1,1))**2+(COORDS(2,2)-COORDS(2,1))**2
RL = SQRT(RL)
ALFA = ATAN((COORDS(2,2)-COORDS(2,1))/(COORDS(1,2)-COORDS(1,1)))
C
DO I=1, NDOFEL
RHS(I, 1)= ZERO
DO J=1, NDOFEL
AMATRX(I, J)= ZERO
END DO
END DO
C
AMATRX(1,1)=E*ATRUSS/RL*(COS(ALFA))**2
AMATRX(1,2)=E*ATRUSS/RL*SIN(ALFA)*COS(ALFA)
AMATRX(1,3)=-E*ATRUSS/RL*(COS(ALFA))**2
AMATRX(1,4)=-E*ATRUSS/RL*SIN(ALFA)*COS(ALFA)
AMATRX(2,1)=E*ATRUSS/RL*SIN(ALFA)*COS(ALFA)
AMATRX(2,2)=E*ATRUSS/RL*(SIN(ALFA))**2
AMATRX(2,3)=-E*ATRUSS/RL*SIN(ALFA)*COS(ALFA)
AMATRX(2,4)=-E*ATRUSS/RL*(SIN(ALFA))**2
AMATRX(3,1)=-E*ATRUSS/RL*(COS(ALFA))**2
AMATRX(3,2)=-E*ATRUSS/RL*SIN(ALFA)*COS(ALFA)
AMATRX(3,3)=E*ATRUSS/RL*(COS(ALFA))**2
AMATRX(3,4)=E*ATRUSS/RL*SIN(ALFA)*COS(ALFA)
AMATRX(4,1)=-E*ATRUSS/RL*SIN(ALFA)*COS(ALFA)
AMATRX(4,2)=-E*ATRUSS/RL*(SIN(ALFA))**2
AMATRX(4,3)=E*ATRUSS/RL*SIN(ALFA)*COS(ALFA)
AMATRX(4,4)=E*ATRUSS/RL*(SIN(ALFA))**2
C
DO I=1,NDOFEL
DO J=1,NRHS
DUB(I,J)=DU(I,J)
END DO
END DO
C
C RHS SERA EL PRODUCTO AMATRX*DU CON SIGNO MENOS
C
CALL MATMATPROD(RHS,AMATRX,DUB,NDOFEL,NDOFEL,NRHS)
C
DO I=1, NDOFEL
RHS(I,1)=-RHS(I,1)
END DO
C
C CALCULAREMOS LAS TENSIONES Y LAS GUARDAMOS EN EL VECTOR SVARS
C Y EN LA VARIABLE UVAR_ARRAY
C
EPS=((DU(3,1)-DU(1,1))*COS(ALFA)+(DU(4,1)-DU(2,1))*SIN(ALFA))/RL
SVARS(1)=SVARS(1)+E*EPS
UVAR_ARRAY(JELEM,1,1)=SVARS(1)
C
RETURN
END
C
SUBROUTINE UVARM(UVAR,DIRECT,T,TIME,DTIME,CMNAME,ORNAME,
1 NUVARM,NOEL,NPT,LAYER,KSPT,KSTEP,KINC,NDI,NSHR,COORD,

```

```

2 JMAC ,JMATTYP ,MATLAYO ,LACCFLA )
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'

C
C ESTA SENTENCIA DEBE SER IGUAL QUE LA QUE TENIAMOS EN LA FUNCION UEL
C
PARAMETER (NELEM=1, NINPT=1, NSVINT=1)
C
C LOS ELEMENTOS DUMMY TIENEN INDICES IGUALES A LOS DE LOS ELEMENTOS REALES
C SUMANDO 1000
C EN EJEMPLOS GRANDES PODRIAMOS SUMAR OTRA CANTIDAD, POR EJEMPLO 10000
C
PARAMETER (IELEMOFFSET = 1000)
C
CHARACTER*80 CMNAME,ORNAME
CHARACTER*3 FLGRAY(15)
DIMENSION UVAR(NUVARM),DIRECT(3,3),T(3,3),TIME(2)
DIMENSION ARRAY(15),JARRAY(15),JMAC(*),JMATTYP(*),COORD(*)

C
C THE DIMENSIONS OF THE VARIABLES FLGRAY, ARRAY AND JARRAY
C MUST BE SET EQUAL TO OR GREATER THAN 15.
C
COMMON/KUSER/UVAR_ARRAY(NELEM,NSVINT,NINPT)
C
C DAMOS VALOR A LAS VARIABLES UVAR
C
UVAR(1:NSVINT) = UVAR_ARRAY(NELEM-IELEMOFFSET,1:NSVINT,NINPT)
C
RETURN
END

C
C MATRIX MATRIX PRODUCT
SUBROUTINE MATMATPROD(AXB,RMAT1,RMAT2,M1,N1,N2)
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
DIMENSION AXB(M1,N2), RMAT1(M1,N1), RMAT2(N1,N2)
C
DO I=1,M1
  DO J=1,N2
    DO K=1,N1
      AXB(I,J)=AXB(I,J)+RMAT1(I,K)*RMAT2(K,J)
    END DO
  END DO
END DO
C
RETURN
END

```

C. BI DIMENTSIOKO ELEMENTU TRIANGELUARRAREN KODEA

C.1. SM METODOA

```

SUBROUTINE UEL(RHS,AMATRX,SVARS,ENERGY,NDOFEL,NRHS,NSVARS,
1   PROPS,NPROPS,COORDS,MCRD,NNODE,U,DU,V,A,JTYPE,TIME,DTIME,
2   KSTEP,KINC,JELEM,PARAMS,NDLOAD,JDLTYP,ADLMAG,PREDEF,
3   NPREDLF,LFLAGS,MLVARX,DDLMAG,MDLOAD,PNEWDT,JPROPS,NJPROP,
4   PERIOD)

```

```

C
C      INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
C      PARAMETER(ZERO=0.D0)
C
C      DIMENSION RHS(MLVARX,*),AMATRX(NDOFEL,NDOFEL),
1        SVARS(NSVARS),ENERGY(8),PROPS(*),COORDS(MCRD,NNODE),
2        U(NDOFEL),DU(MLVARX,*),DUB(NDOFEL,NRHS),V(NDOFEL),A(NDOFEL),
3        TIME(2),PARAMS(3),JDLTYP(MDLOAD,*),ADLMAG(MDLOAD,*),
4        DDLMAG(MDLOAD,*),PREDEF(2,NPREFD,NNODE),LFLAGS(*),
5        JPROPS(*),BMATRX(3,NDOFEL),DMATRX(3,3),DB(3,NDOFEL),
6        BT(NDOFEL,3),BTDB(NDOFEL,NDOFEL),ABTDB(NDOFEL,NDOFEL),
7        DUBV(NDOFEL),EPS(3)
C
C EN EL SIGUIENTE CODIGO TENEMOS QUE DAR VALOR A LAS SIGUIENTES VARIABLES:
C NELEM: NO. DE ELEMENTOS DE NUESTRO EJEMPLO
C NINPT: NO. DE PTOS. DE INTEGRACION DEL ELEMENTO FINITO
C NSVINT: NO. DE TENSIONES QUE VAMOS A VISUALIZAR
C
C THE FOLLOWING COMMON BLOCK IS USED TO STORE NSVINT VARIABLES,
C AT THE NINPT INTEGRATION POINTS OF NELEM ELEMENTS
      PARAMETER (NELEM=1, NINPT=1, NSVINT=3)
      COMMON/KUSER/UVAR_ARRAY(NELEM,NSVINT,NINPT)
C
C EN EL SIGUIENTE CODIGO CALCULAMOS LA MATRIZ DE RIGIDEZ AMATRX
C Y EL RESIDUO RHS
C EN ESTE CASO, EL MODULO ELASTICO ES E, COEF. DE POISSON ES RNU,
C EL ESPESOR DEL ELEMENTO ES THICK, Y EL AREA DEL ELEMENTO ES ATRI
C
      E      = 150000
      RNU    = 0.27
      THICK = 0.5
C ELEMENT AREA
      ATRI = (COORDS(1,1)*(COORDS(2,2)-COORDS(2,3))+COORDS(1,2)*
&          (COORDS(2,3)-COORDS(2,1))+COORDS(1,3)*(COORDS(2,1)
&          -COORDS(2,2)))/2
C
      DO I=1, NDOFEL
        RHS(I,1)= ZERO
        DO J=1, NDOFEL
          AMATRX(I,J)= ZERO
        END DO
      END DO
C
C DISPLACEMENT-STRAIN MATRIX
      BMATRX(1,1)=(COORDS(2,2)-COORDS(2,3))/2/ATRI
      BMATRX(1,2)=0
      BMATRX(1,3)=(COORDS(2,3)-COORDS(2,1))/2/ATRI
      BMATRX(1,4)=0
      BMATRX(1,5)=(COORDS(2,1)-COORDS(2,2))/2/ATRI
      BMATRX(1,6)=0
      BMATRX(2,1)=0
      BMATRX(2,2)=(COORDS(1,3)-COORDS(1,2))/2/ATRI
      BMATRX(2,3)=0
      BMATRX(2,4)=(COORDS(1,1)-COORDS(1,3))/2/ATRI
      BMATRX(2,5)=0
      BMATRX(2,6)=(COORDS(1,2)-COORDS(1,1))/2/ATRI
      BMATRX(3,1)=(COORDS(1,3)-COORDS(1,2))/2/ATRI
      BMATRX(3,2)=(COORDS(2,2)-COORDS(2,3))/2/ATRI
      BMATRX(3,3)=(COORDS(1,1)-COORDS(1,3))/2/ATRI
      BMATRX(3,4)=(COORDS(2,3)-COORDS(2,1))/2/ATRI

```

```

BMATRX(3,5)=(COORDS(1,2)-COORDS(1,1))/2/ATRI
BMATRX(3,6)=(COORDS(2,1)-COORDS(2,2))/2/ATRI
C
C MATERIAL STIFFNESS MATRIX
DMATRX(1,1)=E/(1-RNU**2)
DMATRX(1,2)=RNU*E/(1-RNU**2)
DMATRX(1,3)=0
DMATRX(2,1)=RNU*E/(1-RNU**2)
DMATRX(2,2)=E/(1-RNU**2)
DMATRX(2,3)=0
DMATRX(3,1)=0
DMATRX(3,2)=0
DMATRX(3,3)=E/(2*(1+RNU))
C
C ELEMENT STIFFNESS MATRIX K=THICK*A*B'*D*B
CALL MATMATPROD(DB,DMATRX,BMATRX,3,3,NDOFEL)
C
DO J = 1,3
  DO I = 1,NDOFEL
    BT(I,J)=BMATRX(J,I)
  END DO
END DO
C
CALL MATMATPROD(BTDB,BT,DB,NDOFEL,3,NDOFEL)
C
DO J = 1,NDOFEL
  DO I = 1,NDOFEL
    ABTDB(I,J)=ATRI*BTDB(I,J)
  END DO
END DO
C
DO J = 1,NDOFEL
  DO I = 1,NDOFEL
    AMATRX(I,J)=THICK*ABTDB(I,J)
  END DO
END DO
C
DO I=1,NDOFEL
  DO J=1,NRHS
    DUB(I,J)=DU(I,J)
  END DO
END DO
C
C RHS SERA EL PRODUCTO AMATRX*DU CON SIGNO MENOS
CALL MATMATPROD(RHS,AMATRX,DUB,NDOFEL,NDOFEL,NRHS)
C
DO I=1, NDOFEL
  RHS(I,1)=-RHS(I,1)
END DO
C
C CALCULAREMOS LAS TENSIONES Y LAS GUARDAMOS EN EL VECTOR SVARS
C Y EN LA VARIABLE UVAR_ARRAY
C
DO I=1,NDOFEL
  DUBV(I)=DU(I,1)
END DO
CALL MATVECPROD(EPS,BMATRX,DUBV,3,NDOFEL)
CALL MATVECPROD(SVARS,DMATRX,EPS,3,3)
DO I=1,NSVINT
  UVAR_ARRAY(JELEM,I,1)=SVARS(I)
END DO

```

```

C
    RETURN
END

C
    SUBROUTINE UVARM(UVAR,DIRECT,T,TIME,DTIME,CMNAME,ORNAME,
1  NUVARM,NOEL,NPT,LAYER,KSPT,KSTEP,KINC,NDI,NSHR,COORD,
2  JMAC,JMATYP,MATLAYO,LACCFLA)
    INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'

C ESTA SENTENCIA DEBE SER IGUAL QUE LA QUE TENIAMOS EN LA FUNCION UEL
C
    PARAMETER (NELEM=1, NINPT=1, NSVINT=3)

C LOS ELEMENTOS DUMMY TIENEN INDICES IGUALES A LOS DE LOS ELEMENTOS
C REALES SUMANDO 1000
C EN EJEMPLOS GRANDES PODRIAMOS SUMAR OTRA CANTIDAD, POR EJEMPLO 10000
C
    PARAMETER (IELEMOFFSET = 1000)

C
    CHARACTER*80 CMNAME,ORNAME
    CHARACTER*3 FLGRAY(15)
    DIMENSION UVAR(NUVARM),DIRECT(3,3),T(3,3),TIME(2)
    DIMENSION ARRAY(15),JARRAY(15),JMAC(*),JMATYP(*),COORD(*)

C
    THE DIMENSIONS OF THE VARIABLES FLGRAY, ARRAY AND JARRAY
C MUST BE SET EQUAL TO OR GREATER THAN 15.

C
    COMMON/KUSER/UVAR_ARRAY(NELEM,NSVINT,NINPT)

C DAMOS VALOR A LAS VARIABLES UVAR
C
    UVAR(1:NSVINT) = UVAR_ARRAY(NOEL-IELEMOFFSET,1:NSVINT,NPT)
C
    RETURN
END

C MATRIX MATRIX PRODUCT
SUBROUTINE MATMATPROD(AXB,RMAT1,RMAT2,M1,N1,N2)
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'

C
    DIMENSION AXB(M1,N2), RMAT1(M1,N1), RMAT2(N1,N2)

C
    DO I=1,M1
        DO J=1,N2
            AXB(I,J)=0.0D0
            DO K=1,N1
                AXB(I,J)=AXB(I,J)+RMAT1(I,K)*RMAT2(K,J)
            END DO
        END DO
    END DO

C
    RETURN
END

C MATRIX VECTOR PRODUCT
SUBROUTINE MATVECPROD(RES,RMAT,VEC,M,N)
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'

C
    DIMENSION RES(M), RMAT(M,N), VEC(N)

C
    DO I=1,M

```

```

RES(I)=0.0D0
DO J=1,N
    RES(I)=RES(I)+RMAT(I,J)*VEC(J)
END DO
END DO

C
RETURN
END

```

C.2. SFM METODOA

```

SUBROUTINE UEL(RHS,AMATRX,SVARS,ENERGY,NDOFEL,NRHS,NSVARS,
1   PROPS,NPROPS,COORDS,MCRD,NNODE,U,DU,V,A,JTYPE,TIME,DTIME,
2   KSTEP,KINC,JELEM,PARAMS,NDLOAD,JDLTYP,ADLMAG,PREDEF,
3   NPREFL,LFLAGS,MLVARX,DDLMMAG,MDLOAD,PNEWDT,JPROPS,NJPROP,
4   PERIOD)

C
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'

C
PARAMETER(ZERO=0.D0)

C N° DE FUERZAS INDEPENDIENTES O N° DE PARAMETROS EN LAS FUNCIONES DE
INTERPOLACIÓN DE FUERZAS
PARAMETER(NFJ=3)

C
DIMENSION RHS(MLVARX,*),AMATRX(NDOFEL,NDOFEL),
1   SVARS(NSVARS),ENERGY(8),PROPS(*),COORDS(MCRD,NNODE),
2   U(NDOFEL),DU(MLVARX,*),DUB(NDOFEL,NRHS),V(NDOFEL),A(NDOFEL),
3   TIME(2),PARAMS(3),JDLTYP(MDLOAD,*),ADLMAG(MDLOAD,*),
4   DDLMMAG(MDLOAD,*),PREDEF(2,NPREFL,NNODE),LFLAGS(*),
5   JPROPS(*),BMATRX(3,NDOFEL),SMATRX(3,3),YMATRX(3,NFJ),
6   BT(NDOFEL,3),EMATRX(NDOFEL,NFJ),GMATRX(NFJ,NFJ),
7   BTY(NDOFEL,NFJ),DUBV(NDOFEL),YT(NFJ,3),YTS(NFJ,3),
8   YTSY(NFJ,NFJ),AYTSY(NFJ,NFJ),ET(NFJ,NDOFEL),GINV(NFJ,NFJ),
9   EGI(NDOFEL,NFJ),GIET(NFJ,NDOFEL),FJ(NFJ),YFJ(3,NFJ)

C
C EN EL SIGUIENTE CODIGO TENEMOS QUE DAR VALOR A LAS SIGUIENTES VARIABLES:
C   NELEM: NO. DE ELEMENTOS DE NUESTRO EJEMPLO
C   NINPT: NO. DE PTOS. DE INTEGRACION DEL ELEMENTO FINITO
C   NSVINT: NO. DE TENSIONES QUE VAMOS A VISUALIZAR
C
C THE FOLLOWING COMMON BLOCK IS USED TO STORE NSVINT VARIABLES,
C AT THE NINPT INTEGRATION POINTS OF NELEM ELEMENTS
PARAMETER(NELEM=1, NINPT=1, NSVINT=3)
COMMON/KUSER/UVAR ARRAY(NELEM,NSVINT,NINPT)

C
C EN EL SIGUIENTE CODIGO CALCULAMOS LA MATRIZ DE RIGIDEZ AMATRX
C Y EL RESIDUO RHS
C EN ESTE CASO, EL MODULO ELASTICO ES E, COEF. DE POISSON ES RNU,
C EL ESPESOR DEL ELEMENTO ES THICK, Y EL AREA DEL ELEMENTO ES ATRI
C
E      = 150000
RNU   = 0.27
THICK = 0.5

C
C ELEMENT AREA
ATRI = (COORDS(1,1)*(COORDS(2,2)-COORDS(2,3))+COORDS(1,2)*
&           (COORDS(2,3)-COORDS(2,1))+COORDS(1,3)*(COORDS(2,1)

```

```

&      -COORDS(2,2)))/2
C
DO I=1, NDOFEL
  RHS(I,1)= ZERO
  DO J=1, NDOFEL
    AMATRX(I,J)= ZERO
  END DO
END DO

C FORCES INTERPOLATION FUNCTIONS [Y]
DO I=1,NFJ
  DO J=1,NFJ
    YMATRIX(I,J)=ZERO
  END DO
END DO
YMATRIX(1,1)=1
YMATRIX(2,2)=1
YMATRIX(3,3)=1

C DISPLACEMENT-STRAIN MATRIX
BMATRIX(1,1)=(COORDS(2,2)-COORDS(2,3))/2/ATRI
BMATRIX(1,2)=0
BMATRIX(1,3)=(COORDS(2,3)-COORDS(2,1))/2/ATRI
BMATRIX(1,4)=0
BMATRIX(1,5)=(COORDS(2,1)-COORDS(2,2))/2/ATRI
BMATRIX(1,6)=0
BMATRIX(2,1)=0
BMATRIX(2,2)=(COORDS(1,3)-COORDS(1,2))/2/ATRI
BMATRIX(2,3)=0
BMATRIX(2,4)=(COORDS(1,1)-COORDS(1,3))/2/ATRI
BMATRIX(2,5)=0
BMATRIX(2,6)=(COORDS(1,2)-COORDS(1,1))/2/ATRI
BMATRIX(3,1)=(COORDS(1,3)-COORDS(1,2))/2/ATRI
BMATRIX(3,2)=(COORDS(2,2)-COORDS(2,3))/2/ATRI
BMATRIX(3,3)=(COORDS(1,1)-COORDS(1,3))/2/ATRI
BMATRIX(3,4)=(COORDS(2,3)-COORDS(2,1))/2/ATRI
BMATRIX(3,5)=(COORDS(1,2)-COORDS(1,1))/2/ATRI
BMATRIX(3,6)=(COORDS(2,1)-COORDS(2,2))/2/ATRI

C MATERIAL COMPLIANCE MATRIX
SMATRIX(1,1)=1/E
SMATRIX(1,2)=-RNU/E
SMATRIX(1,3)=0
SMATRIX(2,1)=-RNU/E
SMATRIX(2,2)=1/E
SMATRIX(2,3)=0
SMATRIX(3,1)=0
SMATRIX(3,2)=0
SMATRIX(3,3)=(2*(1+RNU))/E

C TRANPOSE B MATRIX
CALL TRANSMAT(BT,BMATRIX,3,NDOFEL)
C ELEMENT EQUILIBRIUM MATRIX [E]
CALL MATMATPROD(BTY,BT,YMATRIX,NDOFEL,3,NFJ)
DO J = 1,NFJ
  DO I = 1,NDOFEL
    EMATRIX(I,J)=ATRI*BTY(I,J)
  END DO
END DO

C TRANPOSE Y MATRIX

```

```

      CALL TRANSMAT(YT,YMATTRX,3,NFJ)
C ELEMENT FLEXIBILITY MATRIX [G]
      CALL MATMATPROD(YTS,YT,SMATTRX,NFJ,3,3)
      CALL MATMATPROD(YTSY,YTS,YMATTRX,NFJ,3,NFJ)
      DO J = 1,NFJ
        DO I = 1,NFJ
          AYTSY(I,J)=ATRI*YTSY(I,J)
        END DO
      END DO
      DO J = 1,NFJ
        DO I = 1,NFJ
          GMATTRX(I,J)=AYTSY(I,J)/THICK
        END DO
      END DO
    END DO

C
C TRANSPOSE EQUILIBRIUM MATRIX
      CALL TRANSMAT(ET,EMATTRX,NDOFEL,NFJ)
C INVERSION OF FLEXIBILITY MATRIX
      CALL INVERSE3(GINV,GMATTRX,NFJ)
C ELEMENT STIFFNESS MATRIX K=E*INV(G)*E'
      CALL MATMATPROD(EGI,EMATTRX,GINV,NDOFEL,NFJ,NFJ)
      CALL MATMATPROD(AMATTRX,EGI,ET,NDOFEL,NFJ,NDOFEL)

C
      DO I=1,NDOFEL
        DO J=1,NRHS
          DUB(I,J)=DU(I,J)
        END DO
      END DO
      DO I=1,NDOFEL
        DUBV(I)=DU(I,1)
      END DO

C INDEPENDENT FORCES FJ
      CALL MATMATPROD(GIET,GINV,ET,NFJ,NFJ,NDOFEL)
      CALL MATVECPROD(FJ,GIET,DUBV,NFJ,NDOFEL)

C
C RHS SERA EL PRODUCTO AMATTRX*DU CON SIGNO MENOS
      CALL MATMATPROD(RHS,AMATTRX,DUB,NDOFEL,NDOFEL,NRHS)

C
      DO I=1, NDOFEL
        RHS(I,1)=-RHS(I,1)
      END DO

C
C CALCULAREMOS LAS TENSIONES Y LAS GUARDAMOS EN EL VECTOR SVARS
C Y EN LA VARIABLE UVAR_ARRAY
      DO I=1,NSVINT
        SVARS(I)=ZERO
      END DO
      CALL MATVECPROD(YFJ,YMATTRX,FJ,3,NFJ)
      DO I = 1,NSVINT
        SVARS(I)=SVARS(I)+YFJ(I,1)/THICK
      END DO
      DO I=1,NSVINT
        UVAR_ARRAY(JELEM,I,1)=SVARS(I)
      END DO

C
      RETURN
    END

C
      SUBROUTINE UVARM(UVAR,DIRECT,T,TIME,DTIME,CMNAME,ORNAME,

```

```

1 NUVARM,NOEL,NPT,LAYER,KSPT,KSTEP,KINC,NDI,NSHR,COORD,
2 JMAC,JMATYP,MATLATO,LACCFLA)
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'

C
C ESTA SENTENCIA DEBE SER IGUAL QUE LA QUE TENIAMOS EN LA FUNCION UEL
C
PARAMETER (NELEM=1, NINPT=1, NSVINT=3)

C LOS ELEMENTOS DUMMY TIENEN INDICES IGUALES A LOS DE LOS ELEMENTOS
C REALES SUMANDO 1000
C EN EJEMPLOS GRANDES PODRIAMOS SUMAR OTRA CANTIDAD, POR EJEMPLO 10000
C
PARAMETER (IELEMOFFSET = 1000)

C
CHARACTER*80 CMNAME,ORNAME
CHARACTER*3 FLGRAY(15)
DIMENSION UVAR(NUVARM),DIRECT(3,3),T(3,3),TIME(2)
DIMENSION ARRAY(15),JARRAY(15),JMAC(*),JMATYP(*),COORD(*)

C
C THE DIMENSIONS OF THE VARIABLES FLGRAY, ARRAY AND JARRAY
C MUST BE SET EQUAL TO OR GREATER THAN 15.
C
COMMON/KUSER/UVAR_ARRAY(NELEM,NSVINT,NINPT)

C DAMOS VALOR A LAS VARIABLES UVAR
C
UVAR(1:NSVINT) = UVAR_ARRAY(NOEL-IELEMOFFSET,1:NSVINT,NPT)

C
RETURN
END

C INVERSION OF 3X3 MATRIX
SUBROUTINE INVERSE3 (RINV,RMATRX,N)

C
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'

C
DIMENSION RINV(N,N),RMATRX(N,N)
DIMENSION TRADJ(N,N)

C
DETR=RMATRX(1,1)*RMATRX(2,2)*RMATRX(3,3)+RMATRX(1,2)*RMATRX(2,3)*
2 RMATRX(3,1)+RMATRX(2,1)*RMATRX(3,2)*RMATRX(1,3)-RMATRX(1,3)*
3 RMATRX(2,2)*RMATRX(3,1)-RMATRX(1,1)*RMATRX(2,3)*RMATRX(3,2)-
4 RMATRX(3,3)*RMATRX(1,2)*RMATRX(2,1)

C
TRADJ(1,1)=      RMATRX(2,2)*RMATRX(3,3)-RMATRX(2,3)*RMATRX(3,2)
TRADJ(1,2)= -1*(RMATRX(1,2)*RMATRX(3,3)-RMATRX(1,3)*RMATRX(3,2))
TRADJ(1,3)=      RMATRX(1,2)*RMATRX(2,3)-RMATRX(1,3)*RMATRX(2,2)
TRADJ(2,1)= -1*(RMATRX(2,1)*RMATRX(3,3)-RMATRX(2,3)*RMATRX(3,1))
TRADJ(2,2)=      RMATRX(1,1)*RMATRX(3,3)-RMATRX(1,3)*RMATRX(3,1)
TRADJ(2,3)= -1*(RMATRX(1,1)*RMATRX(2,3)-RMATRX(1,3)*RMATRX(2,1))
TRADJ(3,1)=      RMATRX(2,1)*RMATRX(3,2)-RMATRX(2,2)*RMATRX(3,1)
TRADJ(3,2)= -1*(RMATRX(1,1)*RMATRX(3,2)-RMATRX(1,2)*RMATRX(3,1))
TRADJ(3,3)=      RMATRX(1,1)*RMATRX(2,2)-RMATRX(1,2)*RMATRX(2,1)

C
DO J = 1,N
  DO I = 1,N
    RINV(I,J)=TRADJ(I,J)/DETR
  END DO
END DO

C
RETURN

```

```
END
C
C      MATRIX MATRIX PRODUCT
SUBROUTINE MATMATPROD(AXB,RMAT1,RMAT2,M1,N1,N2)
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
DIMENSION AXB(M1,N2), RMAT1(M1,N1), RMAT2(N1,N2)
C
DO I=1,M1
  DO J=1,N2
    AXB(I,J)=0.0D0
    DO K=1,N1
      AXB(I,J)=AXB(I,J)+RMAT1(I,K)*RMAT2(K,J)
    END DO
  END DO
END DO
C
RETURN
END
C
C      MATRIX VECTOR PRODUCT
SUBROUTINE MATVECPROD(RES,RMAT,VEC,M,N)
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
DIMENSION RES(M), RMAT(M,N), VEC(N)
C
DO I=1,M
  RES(I)=0.0D0
  DO J=1,N
    RES(I)=RES(I)+RMAT(I,J)*VEC(J)
  END DO
END DO
C
RETURN
END
C
C      TRANSPOSE MATRIX
SUBROUTINE TRANSMAT (TRMAT,RMAT,M,N)
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
DIMENSION TRMAT(N,M), RMAT(M,N)
C
DO I=1,N
  DO J=1,M
    TRMAT(I,J)=0.0D0
  END DO
END DO
C
DO J = 1,M
  DO I = 1,N
    TRMAT(I,J)=RMAT(J,I)
  END DO
END DO
C
RETURN
END
```

D. BI DIMENTSIOKO LAU NODOKO ELEMENTU ISOPARAMETRIKOAREN KODEA

D.1. SM METODOA ETA MATERIAL ISOTROPOA

```

SUBROUTINE UEL(RHS,AMATRX,SVARS,ENERGY,NDOFEL,NRHS,NSVARS,
1   PROPS,NPROPS,COORDS,MCRD,NNODE,U,DU,V,A,JTYPE,TIME,DTIME,
2   KSTEP,KINC,JELEM,PARAMS,NDLOAD,JDLTYP,ADLMAG,PREDEF,
3   NPREFD,LFLAGS,MLVARX,DDLMAg,MDLOAD,PNEWDT,JPROPS,NJPROP,
4   PERIOD)
C
C INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
PARAMETER(ZERO=0.D0)
C
DIMENSION RHS(MLVARX,*),AMATRX(NDOFEL,NDOFEL),
1   SVARS(NSVARS),ENERGY(8),PROPS(*),COORDS(MCRD,NNODE),
2   U(NDOFEL),DU(MLVARX,*),DUB(NDOFEL,NRHS),V(NDOFEL),A(NDOFEL),
3   TIME(2),PARAMS(3),JDLTYP(MDLOAD,*),ADLMAG(MDLOAD,*),
4   DDLMAg(MDLOAD,*),PREDEF(2,NPREFD,NNODE),LFLAGS(*),
5   JPROPS(*),BMATRX(3,NDOFEL),DMATRX(3,3),DB(3,NDOFEL),
6   BT(NDOFEL,3),BTDB(NDOFEL,NDOFEL),RJBTDB(NDOFEL,NDOFEL),
7   TJBTDB(NDOFEL,NDOFEL),GPOINTS(2,4),GWEIGHTS(4),DUBV(NDOFEL)
8   EPS(3)
C
C EN EL SIGUIENTE CODIGO TENEMOS QUE DAR VALOR A LAS SIGUIENTES VARIABLES:
C NELEM: NO. DE ELEMENTOS DE NUESTRO EJEMPLO
C NINPT: NO. DE PTOS. DE INTEGRACION DEL ELEMENTO FINITO
C NSVINT: NO. DE TENSIONES QUE VAMOS A VISUALIZAR
C
C THE FOLLOWING COMMON BLOCK IS USED TO STORE NSVINT VARIABLES,
C AT THE NINPT INTEGRATION POINTS OF NELEM ELEMENTS
PARAMETER (NELEM=1, NINPT=4, NSVINT=3)
COMMON/KUSER/UVAR ARRAY(NELEM,NSVINT,NINPT)
C
C EN EL SIGUIENTE CODIGO CALCULAMOS LA MATRIZ DE RIGIDEZ AMATRX
C Y EL RESIDUO RHS
C EN ESTE CASO, EL MODULO ELASTICO ES E, COEF. DE POISSON ES RNU,
C EL ESPESOR DEL ELEMENTO ES THICK
C
E      = 2000000
RNU    = 0.2
THICK  = 0.1
C
C GAUSS POINTS AND WEIGHTS, COMPLETE GAUSS QUADRATURE 2X2
DATA GPOINTS /-0.577350269189626D0, -0.577350269189626D0,
2   0.577350269189626D0, -0.577350269189626D0,
3   -0.577350269189626D0, 0.577350269189626D0,
4   0.577350269189626D0, 0.577350269189626D0/
C
DATA GWEIGHTS /1.0D0, 1.0D0, 1.0D0, 1.0D0/
C
C INITIALIZE STIFFNESS MATRIX (AMATRX) AND RESIDUE (RHS)
DO I=1, NDOFEL
  RHS(I,1)= ZERO
  DO J=1, NDOFEL

```

```

        AMATRX(I,J)= ZERO
      END DO
    END DO
C
C CYCLE FOR GAUSS POINT
  DO K=1,NINPT
    XI = GPOINTS(1,K)
    ETA = GPOINTS(2,K)
  C
C DISPLACEMENT-STRAIN MATRIX AND DETERMINANT OF JACOBIAN MATRIX
  CALL BMATRIX (BMATRIX,RJACDET,XI,ETA,COORDS,NDOFEL,MCRD,NNODE)
C
C MATERIAL STIFFNESS MATRIX
  DMATRX(1,1)=E/(1-RNU**2)
  DMATRX(1,2)=RNU*E/(1-RNU**2)
  DMATRX(1,3)=0
  DMATRX(2,1)=RNU*E/(1-RNU**2)
  DMATRX(2,2)=E/(1-RNU**2)
  DMATRX(2,3)=0
  DMATRX(3,1)=0
  DMATRX(3,2)=0
  DMATRX(3,3)=E/(2*(1+RNU))
C
C ELEMENT STIFFNESS MATRIX K=THICK*B'*D*B*RJACDET*GWEIGHTS
  CALL MATMATPROD(DB,DMATRX,BMATRIX,3,3,NDOFEL)
C TRANPOSE B MATRIX
  CALL TRANSMAT(BT,BMATRIX,3,NDOFEL)
C
  CALL MATMATPROD(BTDB,BT,DB,NDOFEL,3,NDOFEL)
C
  DO J = 1,NDOFEL
    DO I = 1,NDOFEL
      RJBTD(I,J)=RJACDET*BTDB(I,J)
    END DO
  END DO
C
  DO J = 1,NDOFEL
    DO I = 1,NDOFEL
      TJBTD(I,J)=THICK*RJBTD(I,J)
    END DO
  END DO
C
  DO J = 1,NDOFEL
    DO I = 1,NDOFEL
      AMATRX(I,J)=AMATRX(I,J)+GWEIGHTS(K)*TJBTD(I,J)
    END DO
  END DO
C
  DO I=1,NDOFEL
    DO J=1,NRHS
      DUB(I,J)=DU(I,J)
    END DO
  END DO
C RHS SERA EL PRODUCTO AMATRX*DU CON SIGNO MENOS
  CALL MATMATPROD(RHS,AMATRX,DUB,NDOFEL,NRHS)
C
  DO I=1, NDOFEL
    RHS(I,1)=-RHS(I,1)
  END DO
C
C CALCULAREMOS LAS TENSIONES Y LAS GUARDAMOS EN EL VECTOR SVARS

```

```

C Y EN LA VARIABLE UVAR_ARRAY
C
DO I=1,NDOFEL
  DUBV(I)=DU(I,1)
END DO
C GAUSS POINT STRAIN VECTOR
CALL MATVECPROD(EPS,BMATRIX,DUBV,3,NDOFEL)
C GAUSS POINT STRESS VECTOR
CALL MATVECPROD(SVARS,DMATRIX,EPS,3,3)
C GUARDAMOS LOS VALORES DE LAS TENSIONES EN LOS PUNTOS DE GAUSS EN UVAR_ARRAY
DO I=1,NSVINT
  UVAR_ARRAY(JELEM,I,K)=SVARS(I)
END DO
END DO
C
RETURN
END
C
SUBROUTINE UVARM(UVAR,DIRECT,T,TIME,CMNAME,ORNAME,
1 NUVARM,NOEL,NPT,LAYER,KSPT,KSTEP,KINC,NDI,NSHR,COORD,
2 JMAC,JMATYP,MATLAYO,LACCFLA)
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
C ESTA SENTENCIA DEBE SER IGUAL QUE LA QUE TENIAMOS EN LA FUNCION UEL
C
PARAMETER (NELEM=1, NINPT=4, NSVINT=3)
C
C LOS ELEMENTOS DUMMY TIENEN INDICES IGUALES A LOS DE LOS ELEMENTOS
C REALES SUMANDO 1000
C EN EJEMPLOS GRANDES PODRIAMOS SUMAR OTRA CANTIDAD, POR EJEMPLO 10000
C
PARAMETER (IELEMOFFSET = 1000)
C
CHARACTER*80 CMNAME,ORNAME
CHARACTER*3 FLGRAY(15)
DIMENSION UVAR(NUVARM),DIRECT(3,3),T(3,3),TIME(2)
DIMENSION ARRAY(15),JARRAY(15),JMAC(*),JMATYP(*),COORD(*)
C
C THE DIMENSIONS OF THE VARIABLES FLGRAY, ARRAY AND JARRAY
C MUST BE SET EQUAL TO OR GREATER THAN 15.
C
COMMON/KUSER/UVAR_ARRAY(NELEM,NSVINT,NINPT)
C
C DAMOS VALOR A LAS VARIABLES UVAR
C
UVAR(1:NSVINT) = UVAR_ARRAY(NOEL-IELEMOFFSET,1:NSVINT,NPT)
C
RETURN
END
C
C DISPLACEMENT-STRAIN MATRIX
SUBROUTINE BMATRIX(BMATRIX,RJACDET,XI,ETA,COORDS,NDOFEL,MCRD,NNODE)
C
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
DIMENSION BMATRIX(3,NDOFEL), COORDS(MCRD,NNODE)
DIMENSION DERINAT(MCRD,NNODE), RJACINV(MCRD,MCRD)
DIMENSION DERIXY(MCRD,NNODE)
C
C INITIALIZE DISPLACEMENT-STRAIN MATRIX B
DO I=1,3

```

```

      DO J=1,NDOFEL
        BMATRX(I,J)=0.0D0
      END DO
    END DO
C
C DERIVATIVES OF SHAPE FUNCTIONS WITH RESPECT TO XI,ETA
    CALL SHAPEQ4 (DERINAT,XI,ETA,MCRD,NNODE)
C
C INVERSE OF JACOBIAN, DETERMINANT OF JACOBIAN
    CALL JACOBIAN (RJACINV,RJACDET,COORDS,DERINAT,MCRD,NNODE)
C
C DERIVATIVES OF SHAPE FUNCTIONS WITH RESPECT TO X,Y
    CALL MATMATPROD (DERIXY,RJACINV,DERINAT,MCRD,MCRD,NNODE)
C
C DISPLACEMENT-STRAIN MATRIX 3X8
    BMATRX(1,1) = DERIXY(1,1)
    BMATRX(1,3) = DERIXY(1,2)
    BMATRX(1,5) = DERIXY(1,3)
    BMATRX(1,7) = DERIXY(1,4)
    BMATRX(2,2) = DERIXY(2,1)
    BMATRX(2,4) = DERIXY(2,2)
    BMATRX(2,6) = DERIXY(2,3)
    BMATRX(2,8) = DERIXY(2,4)
    BMATRX(3,1) = DERIXY(2,1)
    BMATRX(3,2) = DERIXY(1,1)
    BMATRX(3,3) = DERIXY(2,2)
    BMATRX(3,4) = DERIXY(1,2)
    BMATRX(3,5) = DERIXY(2,3)
    BMATRX(3,6) = DERIXY(1,3)
    BMATRX(3,7) = DERIXY(2,4)
    BMATRX(3,8) = DERIXY(1,4)
C
C RETURN
END
C
SUBROUTINE SHAPEQ4 (DERINAT,XI,ETA,MCRD,NNODE)
C
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
DIMENSION DERINAT(MCRD,NNODE)
C
DERINAT(1,1)=-(1-ETA)/4
DERINAT(2,1)=-(1-XI)/4
DERINAT(1,2)= (1-ETA)/4
DERINAT(2,2)=-(1+XI)/4
DERINAT(1,3)= (1+ETA)/4
DERINAT(2,3)= (1+XI)/4
DERINAT(1,4)=-(1+ETA)/4
DERINAT(2,4)= (1-XI)/4
C
RETURN
END
C
JACOBIAN MATRIX, COMPUTES INVERSE OF JACOBIAN MATRIX AND
C
DETERMINANT OF JACOBIAN MATRIX
SUBROUTINE JACOBIAN (RJACINV,RJACDET,COORDS,DERINAT,MCRD,NNODE)
C
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
DIMENSION RJACINV(MCRD,MCRD),COORDS(MCRD,NNODE)
DIMENSION DERINAT(MCRD,NNODE),TR(NNODE,MCRD)

```

```

      DIMENSION TJACADJ(MCRD,MCRD),RJACOB(MCRD,MCRD)
C
C      TRANSPOSE COORDINATES MATRIX COORDS
      CALL TRANSMAT (TR,COORDS,MCRD,NNODE)
C
      CALL MATMATPROD(RJACOB,DERINAT,TR,MCRD,NNODE,MCRD)
C
      TJACADJ(1,1) =      RJACOB(2,2)
      TJACADJ(1,2) = -1*RJACOB(1,2)
      TJACADJ(2,1) = -1*RJACOB(2,1)
      TJACADJ(2,2) =      RJACOB(1,1)
C
      RJCACDET=RJACOB(1,1)*RJACOB(2,2)-RJACOB(1,2)*RJACOB(2,1)
C
      DO J = 1,MCRD
        DO I = 1,MCRD
          RJACINV(I,J)=TJACADJ(I,J)/RJCACDET
        END DO
      END DO
C
      RETURN
      END

C MATRIX MATRIX PRODUCT
      SUBROUTINE MATMATPROD(AXB,RMAT1,RMAT2,M1,N1,N2)
      INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
      DIMENSION AXB(M1,N2), RMAT1(M1,N1), RMAT2(N1,N2)
C
      DO I=1,M1
        DO J=1,N2
          AXB(I,J)=0.0D0
          DO K=1,N1
            AXB(I,J)=AXB(I,J)+RMAT1(I,K)*RMAT2(K,J)
          END DO
        END DO
      END DO
C
      RETURN
      END

C MATRIX VECTOR PRODUCT
      SUBROUTINE MATVECPROD(RES,RMAT,VEC,M,N)
      INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
      DIMENSION RES(M), RMAT(M,N), VEC(N)
C
      DO I=1,M
        RES(I)=0.0D0
        DO J=1,N
          RES(I)=RES(I)+RMAT(I,J)*VEC(J)
        END DO
      END DO
C
      RETURN
      END

C TRANSPOSE MATRIX
      SUBROUTINE TRANSMAT (TRMAT,RMAT,M,N)
      INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C

```

```

      DIMENSION TRMAT(N,M), RMAT(M,N)
C
      DO I=1,N
        DO J=1,M
          TRMAT(I,J)=0.0D0
        END DO
      END DO
C
      DO J = 1,M
        DO I = 1,N
          TRMAT(I,J)=RMAT(J,I)
        END DO
      END DO
C
      RETURN
END

```

D.2. SFM METODOA ETA MATERIAL ISOTROPOA

```

SUBROUTINE UEL(RHS,AMATRX,SVARS,ENERGY,NDOFEL,NRHS,NSVARS,
1   PROPS,NPROPS,COORDS,MCRD,NNODE,U,DU,V,A,JTYPE,TIME,DTIME,
2   KSTEP,KINC,JELEM,PARAMS,NDLOAD,JDLTYP,ADLMAG,PREDEF,
3   NPREFL,LFLAGS,MLVARX,DDLMAG,MDLOAD,PNEWDT,JPROPS,NJPROP,
4   PERIOD)
C
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
PARAMETER(ZERO=0.0D0)
C
C N° DE FUERZAS INDEPENDIENTES O N° DE PARAMETROS EN LAS FUNCIONES DE
INTERPOLACIÓN DE FUERZAS
PARAMETER (NFJ=5)
C
DIMENSION RHS(MLVARX,*),AMATRX(NDOFEL,NDOFEL),
1   SVARS(NSVARS),ENERGY(8),PROPS(*),COORDS(MCRD,NNODE),
2   U(NDOFEL),DU(MLVARX,*),DUB(NDOFEL,NRHS),V(NDOFEL),A(NDOFEL),
3   TIME(2),PARAMS(3),JDLTYP(MDLOAD,*),ADLMAG(MDLOAD,*),
4   DDLMAG(MDLOAD,*),PREDEF(2,NPREFL,NNODE),LFLAGS(*),
5   JPROPS(*)
C
DIMENSION GPOINTS(2,4),GWEIGHTS(4), BMATRX(3,NDOFEL),SMATRX(3,3),
1   YMATRX(3,NFJ),EMATRX(NDOFEL,NFJ),GMATRX(NFJ,NFJ),
2   BT(NDOFEL,3),BTY(NDOFEL,NFJ),BTYJ(NDOFEL,NFJ),DUBV(NDOFEL),
3   TBTYJ(NDOFEL,NFJ),YT(NFJ,3),YTS(NFJ,3),YTSY(NFJ,NFJ),
4   YTSYJ(NFJ,NFJ),TYTSYJ(NFJ,NFJ),ET(NFJ,NDOFEL),GINV(NFJ,NFJ),
5   EGI(NDOFEL,NFJ),GIET(NFJ,NDOFEL),FJ(NFJ),YFJ(3,NFJ)
C
C EN EL SIGUIENTE CODIGO TENEMOS QUE DAR VALOR A LAS SIGUIENTES VARIABLES:
C   NELEM: NO. DE ELEMENTOS DE NUESTRO EJEMPLO
C   NINPT: NO. DE PTOS. DE INTEGRACION DEL ELEMENTO FINITO
C   NSVINT: NO. DE TENSIONES QUE VAMOS A VISUALIZAR
C
C THE FOLLOWING COMMON BLOCK IS USED TO STORE NSVINT VARIABLES,
C AT THE NINPT INTEGRATION POINTS OF NELEM ELEMENTS
PARAMETER (NELEM=1, NINPT=4, NSVINT=3)
COMMON/KUSER/UVAR_ARRAY(NELEM,NSVINT,NINPT)
C
C EN EL SIGUIENTE CODIGO CALCULAMOS LA MATRIZ DE RIGIDEZ AMATRX

```

```

C Y EL RESIDUO RHS
C EN ESTE CASO, EL MODULO ELASTICO ES E, COEF. DE POISSON ES RNU,
C EL ESPESOR DEL ELEMENTO ES THICK
C
E      = 2000000
RNU   = 0.2
THICK = 0.1
C
C GAUSS POINTS AND WEIGHTS, COMPLETE GAUSS QUADRATURE 2X2
  DATA GPOINTS /-0.577350269189626D0, -0.577350269189626D0,
2       0.577350269189626D0, -0.577350269189626D0,
3       -0.577350269189626D0, 0.577350269189626D0,
4       0.577350269189626D0, 0.577350269189626D0/
C
  DATA GWEIGHTS /1.0D0, 1.0D0, 1.0D0, 1.0D0/
C
C INITIALIZE EQUILIBRIUM MATRIX [E]
  DO I=1,NDOFEL
    DO J=1,NFJ
      EMATRX(I,J)= ZERO
    END DO
  END DO
C INITIALIZE FLEXIBILITY MATRIX [G]
  DO I=1,NFJ
    DO J=1,NFJ
      GMATRX(I,J)= ZERO
    END DO
  END DO
C INITIALIZE STIFFNESS MATRIX (AMATRX) AND RESIDUE (RHS)
  DO I=1, NDOFEL
    RHS(I,1)= ZERO
    DO J=1, NDOFEL
      AMATRX(I,J)= ZERO
    END DO
  END DO
C
C MATERIAL COMPLIANCE MATRIX
  SMATRX(1,1)=1/E
  SMATRX(1,2)=-RNU/E
  SMATRX(1,3)=0
  SMATRX(2,1)=-RNU/E
  SMATRX(2,2)=1/E
  SMATRX(2,3)=0
  SMATRX(3,1)=0
  SMATRX(3,2)=0
  SMATRX(3,3)=(2*(1+RNU))/E
C
C AUXILIAR PARAMETERS FOR GENERAL QUADRILATERAL INTERPOLATION FUNCTIONS
  A1=1./4.*(-COORDS(1,1)+COORDS(1,2)+COORDS(1,3)-COORDS(1,4))
  A3=1./4.*(-COORDS(1,1)-COORDS(1,2)+COORDS(1,3)+COORDS(1,4))
  B1=1./4.*(-COORDS(2,1)+COORDS(2,2)+COORDS(2,3)-COORDS(2,4))
  B3=1./4.*(-COORDS(2,1)-COORDS(2,2)+COORDS(2,3)+COORDS(2,4))
  write(7,*) '***A,B:', A1, A3, B1, B3
C
C CYCLE FOR GAUSS POINT
  DO K=1,NINPT
    XI = GPOINTS(1,K)
    ETA = GPOINTS(2,K)
C
C FORCES INTERPOLATION FUNCTIONS [Y]
  DO I=1,3

```

```

      DO J=1,NFJ
        YMATRIX(I,J)=ZERO
      END DO
    END DO
    YMATRIX(1,1)=1/THICK
    YMATRIX(1,4)=(A1**2)*ETA/THICK
    YMATRIX(1,5)=(A3**2)*XI/THICK
    YMATRIX(2,2)=1/THICK
    YMATRIX(2,4)=(B1**2)*ETA/THICK
    YMATRIX(2,5)=(B3**2)*XI/THICK
    YMATRIX(3,3)=1/THICK
    YMATRIX(3,4)=A1*B1*ETA/THICK
    YMATRIX(3,5)=A3*B3*XI/THICK
C
C DISPLACEMENT-STRAIN MATRIX AND DETERMINANT OF JACOBIAN MATRIX
    CALL BMATRIX (BMATRIX,RJACDET,XI,ETA,COORDS,NDOFEL,MCRD,NNODE)
C
C TRANSPOSE B MATRIX
    CALL TRANSMAT(BT,BMATRIX,3,NDOFEL)
C ELEMENT EQUILIBRIUM MATRIX [E]
    CALL MATMATPROD(BTY,BT,YMATRIX,NDOFEL,3,NFJ)
    DO J = 1,NFJ
      DO I = 1,NDOFEL
        BTYJ(I,J)=RJACDET*BTY(I,J)
      END DO
    END DO
    DO J = 1,NFJ
      DO I = 1,NDOFEL
        TBTYJ(I,J)=THICK*BTYJ(I,J)
      END DO
    END DO
    DO J = 1,NFJ
      DO I = 1,NDOFEL
        EMATRIX(I,J)=EMATRIX(I,J)+GWEIGHTS(K)*TBTYJ(I,J)
      END DO
    END DO
C
C TRANSPOSE Y MATRIX
    CALL TRANSMAT(YT,YMATRIX,3,NFJ)
C ELEMENT FLEXIBILITY MATRIX [G]
    CALL MATMATPROD(YTS,YT,SMATRIX,NFJ,3,3)
    CALL MATMATPROD(YTSY,YTS,YMATRIX,NFJ,3,NFJ)
    DO J = 1,NFJ
      DO I = 1,NFJ
        YTSYJ(I,J)=RJACDET*YTSY(I,J)
      END DO
    END DO
    DO J = 1,NFJ
      DO I = 1,NFJ
        TYTSYJ(I,J)=THICK*YTSYJ(I,J)
      END DO
    END DO
    DO J = 1,NFJ
      DO I = 1,NFJ
        GMATRIX(I,J)=GMATRIX(I,J)+GWEIGHTS(K)*TYTSYJ(I,J)
      END DO
    END DO
    END DO
C
C TRANSPOSE EQUILIBRIUM MATRIX
    CALL TRANSMAT(ET,EMATRIX,NDOFEL,NFJ)

```

```

C INVERSION OF FLEXIBILITY MATRIX
  CALL MATINV(1,NFJ,GMATRX,GINV)
C ELEMENT STIFFNESS MATRIX K=E*INV(G)*E'
  CALL MATMATPROD(EGI,EMATRX,GINV,NDOFEL,NFJ,NFJ)
  CALL MATMATPROD(AMATRX,EGI,ET,NDOFEL,NFJ,NDOFEL)
C
  DO I=1,NDOFEL
    DO J=1,NRHS
      DUB(I,J)=DU(I,J)
    END DO
  END DO
  DO I=1,NDOFEL
    DUBV(I)=DU(I,1)
  END DO
C
C INDEPENDENT FORCES FJ
  CALL MATMATPROD(GIET,GINV,ET,NFJ,NFJ,NDOFEL)
  CALL MATVECPROD(FJ,GIET,DUBV,NFJ,NDOFEL)
C
C RHS SERA EL PRODUCTO AMATRX*DU CON SIGNO MENOS
  CALL MATMATPROD(RHS,AMATRX,DUB,NDOFEL,NDOFEL,NRHS)
C
  DO I=1, NDOFEL
    RHS(I,1)=-RHS(I,1)
  END DO
C
C CYCLE FOR GAUSS POINT
  DO K=1,NINPT
    XI = GPOINTS(1,K)
    ETA = GPOINTS(2,K)
C
C FORCES INTERPOLATION FUNCTIONS [Y]
  DO I=1,3
    DO J=1,NFJ
      YMATRIX(I,J)=ZERO
    END DO
  END DO
  YMATRIX(1,1)=1/THICK
  YMATRIX(1,4)=A1**2*ETA/THICK
  YMATRIX(1,5)=A3**2*XI/THICK
  YMATRIX(2,2)=1/THICK
  YMATRIX(2,4)=B1**2*ETA/THICK
  YMATRIX(2,5)=B3**2*XI/THICK
  YMATRIX(3,3)=1/THICK
  YMATRIX(3,4)=A1*B1*ETA/THICK
  YMATRIX(3,5)=A3*B3*XI/THICK
C
C CALCULAREMOS LAS TENSIONES Y LAS GUARDAMOS EN EL VECTOR SVARS
C Y EN LA VARIABLE UVAR_ARRAY
C
  DO I=1,NSVINT
    SVARS(I)=ZERO
  END DO
  CALL MATVECPROD(YFJ,YMATRIX,FJ,3,NFJ)
  DO I = 1,NSVINT
    SVARS(I)=SVARS(I)+YFJ(I,1)
  END DO
  DO I=1,NSVINT
    UVAR_ARRAY(JELEM,I,K)=SVARS(I)
  END DO
END DO

```

```

C
      RETURN
      END

C
      SUBROUTINE UVARM(UVAR,DIRECT,T,TIME,DTIME,CMNAME,ORNAME,
1  NUVARM,NOEL,NPT,LAYER,KSPT,KSTEP,KINC,NDI,NSHR,COORD,
2  JMAC,JMATYP,MATLAYO,LACCFLA)
      INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'

C ESTA SENTENCIA DEBE SER IGUAL QUE LA QUE TENIAMOS EN LA FUNCION UEL
C
      PARAMETER (NELEM=1, NINPT=4, NSVINT=3)

C LOS ELEMENTOS DUMMY TIENEN INDICES IGUALES A LOS DE LOS ELEMENTOS
C REALES SUMANDO 1000
C EN EJEMPLOS GRANDES PODRIAMOS SUMAR OTRA CANTIDAD, POR EJEMPLO 10000
C
      PARAMETER (IELEMOFFSET = 1000)

C
      CHARACTER*80 CMNAME,ORNAME
      CHARACTER*3 FLGRAY(15)
      DIMENSION UVAR(NUVARM),DIRECT(3,3),T(3,3),TIME(2)
      DIMENSION ARRAY(15),JARRAY(15),JMAC(*),JMATTYP(*),COORD(*)

C
      THE DIMENSIONS OF THE VARIABLES FLGRAY, ARRAY AND JARRAY
      MUST BE SET EQUAL TO OR GREATER THAN 15.

C
      COMMON/KUSER/UVAR_ARRAY(NELEM,NSVINT,NINPT)

C DAMOS VALOR A LAS VARIABLES UVAR
C
      UVAR(1:NSVINT) = UVAR_ARRAY(NOEL-IELEMOFFSET,1:NSVINT,NPT)

C
      RETURN
      END

C
C DISPLACEMENT-STRAIN MATRIX
      SUBROUTINE BMATRIX(BMATRX,RJACDET,XI,ETA,COORDS,NDOFEL,MCRD,NNODE)
C
      INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'

C
      DIMENSION BMATRX(3,NDOFEL), COORDS(NDOFEL)
      DIMENSION DERINAT(MCRD,NNODE), RJACINV(MCRD,MCRD)
      DIMENSION DERIXY(MCRD,NNODE)

C
C INITIALIZE DISPLACEMENT-STRAIN MATRIX B
      DO I=1,3
        DO J=1,NDOFEL
          BMATRX(I,J)=0.0D0
        END DO
      END DO

C
C DERIVATIVES OF SHAPE FUNCTIONS WITH RESPECT TO XI,ETA
      CALL SHAPEQ4 (DERINAT,XI,ETA,MCRD,NNODE)

C
C INVERSE OF JACOBIAN, DETERMINANT OF JACOBIAN
      CALL JACOBIAN (RJACINV,RJACDET,COORDS,DERINAT,MCRD,NNODE)

C
C DERIVATIVES OF SHAPE FUNCTIONS WITH RESPECT TO X,Y
      CALL MATMATPROD (DERIXY,RJACINV,DERINAT,MCRD,MCRD,NNODE)

```

```

C DISPLACEMENT-STRAIN MATRIX 3X8
  BMATRX(1,1) = DERIXY(1,1)
  BMATRX(1,3) = DERIXY(1,2)
  BMATRX(1,5) = DERIXY(1,3)
  BMATRX(1,7) = DERIXY(1,4)
  BMATRX(2,2) = DERIXY(2,1)
  BMATRX(2,4) = DERIXY(2,2)
  BMATRX(2,6) = DERIXY(2,3)
  BMATRX(2,8) = DERIXY(2,4)
  BMATRX(3,1) = DERIXY(2,1)
  BMATRX(3,2) = DERIXY(1,1)
  BMATRX(3,3) = DERIXY(2,2)
  BMATRX(3,4) = DERIXY(1,2)
  BMATRX(3,5) = DERIXY(2,3)
  BMATRX(3,6) = DERIXY(1,3)
  BMATRX(3,7) = DERIXY(2,4)
  BMATRX(3,8) = DERIXY(1,4)

C
  RETURN
END

C
SUBROUTINE SHAPEQ4 (DERINAT,XI,ETA,MCRD,NNODE)
C
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
DIMENSION DERINAT(MCRD,NNODE)
C
  DERINAT(1,1)=-(1-ETA)/4
  DERINAT(2,1)=-(1-XI)/4
  DERINAT(1,2)=(1-ETA)/4
  DERINAT(2,2)=-(1+XI)/4
  DERINAT(1,3)=(1+ETA)/4
  DERINAT(2,3)=(1+XI)/4
  DERINAT(1,4)=-(1+ETA)/4
  DERINAT(2,4)=(1-XI)/4

C
  RETURN
END

C
C JACOBIAN MATRIX, COMPUTES INVERSE OF JACOBIAN MATRIX AND
C DETERMINANT OF JACOBIAN MATRIX
SUBROUTINE JACOBIAN (RJACINV,RJACDET,COORDS,DERINAT,MCRD,NNODE)
C
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
DIMENSION RJACINV(MCRD,MCRD),COORDS(MCRD,NNODE)
DIMENSION DERINAT(MCRD,NNODE),TR(NNODE,MCRD)
DIMENSION TJACADJ(MCRD,MCRD),RJACOB(MCRD,MCRD)
C
TRANSPPOSE COORDINATES MATRIX COORDS
CALL TRANSMAT (TR,COORDS,MCRD,NNODE)
C
CALL MATMATPROD(RJACOB,DERINAT,TR,MCRD,NNODE,MCRD)
C
  TJACADJ(1,1) =      RJACOB(2,2)
  TJACADJ(1,2) = -1*RJACOB(1,2)
  TJACADJ(2,1) = -1*RJACOB(2,1)
  TJACADJ(2,2) =      RJACOB(1,1)

C
  RJACDET=RJACOB(1,1)*RJACOB(2,2)-RJACOB(1,2)*RJACOB(2,1)
C

```

```
DO J = 1,MCRD
  DO I = 1,MCRD
    RJACINV(I,J)=TJACADJ(I,J)/RJACDET
  END DO
END DO

C
RETURN
END

C
MATRIX MATRIX PRODUCT
SUBROUTINE MATMATPROD(AXB,RMAT1,RMAT2,M1,N1,N2)
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'

C
DIMENSION AXB(M1,N2), RMAT1(M1,N1), RMAT2(N1,N2)

C
DO I=1,M1
  DO J=1,N2
    AXB(I,J)=0.0D0
    DO K=1,N1
      AXB(I,J)=AXB(I,J)+RMAT1(I,K)*RMAT2(K,J)
    END DO
  END DO
END DO

C
RETURN
END

C
MATRIX VECTOR PRODUCT
SUBROUTINE MATVECPROD(RES,RMAT,VEC,M,N)
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'

C
DIMENSION RES(M), RMAT(M,N), VEC(N)

C
DO I=1,M
  RES(I)=0.0D0
  DO J=1,N
    RES(I)=RES(I)+RMAT(I,J)*VEC(J)
  END DO
END DO

C
RETURN
END

C
TRANSPOSE MATRIX
SUBROUTINE TRANSMAT (TRMAT,RMAT,M,N)
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'

C
DIMENSION TRMAT(N,M), RMAT(M,N)

C
DO I=1,N
  DO J=1,M
    TRMAT(I,J)=0.0D0
  END DO
END DO

C
DO J = 1,M
  DO I = 1,N
    TRMAT(I,J)=RMAT(J,I)
  END DO
END DO
```

C

```
RETURN
END
```

D.3. SM METODOA ETA MATERIAL ANISOTROPOA

```
SUBROUTINE UEL(RHS,AMATRX,SVARS,ENERGY,NDOFEL,NRHS,NSVARS,
1   PROPS,NPROPS,COORDS,MCRD,NNODE,U,DU,V,A,JTYPE,TIME,DTIME,
2   KSTEP,KINC,JELEM,PARAMS,NDLOAD,JDLTYP,ADLMAG,PREDEF,
3   NPREFD,LFLAGS,MLVARX,DDLMAG,MDLOAD,PNEWDT,JPROPS,NJPROP,
4   PERIOD)
C
C INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
C PARAMETER(ZERO=0.D0)
C
C DIMENSION RHS(MLVARX,*),AMATRX(NDOFEL,NDOFEL),
1   SVARS(NSVARS),ENERGY(8),PROPS(*),COORDS(MCRD,NNODE),
2   U(NDOFEL),DU(MLVARX,*),DUB(NDOFEL,NRHS),V(NDOFEL),A(NDOFEL),
3   TIME(2),PARAMS(3),JDLTYP(MDLOAD,*),ADLMAG(MDLOAD,*),
4   DDLMAG(MDLOAD,*),PREDEF(2,NPREFD,NNODE),LFLAGS(*),
5   JPROPS(*),BMATRIX(3,NDOFEL),DMATRIX(3,3),DB(3,NDOFEL),
6   BT(NDOFEL,3),BTDB(NDOFEL,NDOFEL),RJBTDB(NDOFEL,NDOFEL),
7   TJBTD(NDOFEL,NDOFEL),GPOINTS(2,4),GWEIGHTS(4),DUBV(NDOFEL),
8   EPS(3)
C
C EN EL SIGUIENTE CODIGO TENEMOS QUE DAR VALOR A LAS SIGUIENTES VARIABLES:
C NELEM: NO. DE ELEMENTOS DE NUESTRO EJEMPLO
C NINPT: NO. DE PTOS. DE INTEGRACION DEL ELEMENTO FINITO
C NSVINT: NO. DE TENSIONES QUE VAMOS A VISUALIZAR
C
C THE FOLLOWING COMMON BLOCK IS USED TO STORE NSVINT VARIABLES,
C AT THE NINPT INTEGRATION POINTS OF NELEM ELEMENTS
      PARAMETER (NELEM=1, NINPT=4, NSVINT=3)
      COMMON/KUSER/UVAR_ARRAY(NELEM,NSVINT,NINPT)
C
C EN EL SIGUIENTE CODIGO CALCULAMOS LA MATRIZ DE RIGIDEZ AMATRX
C Y EL RESIDUO RHS
C EL ESPESOR DEL ELEMENTO ES THICK
C
      PI=4.D0*DATAN(1.D0)
C
      E1      = 142000.
      E2      = 8900.
      G12     = 4800.
      RNU12   = 0.28
      RNU21   = E2/E1*RNU12
      ANG     = 20.
      RANG    = ANG*PI/180
      THICK   = 2.
C
C GAUSS POINTS AND WEIGHTS, COMPLETE GAUSS QUADRATURE 2X2
      DATA GPOINTS /-0.577350269189626D0, -0.577350269189626D0,
2                   0.577350269189626D0, -0.577350269189626D0,
3                   -0.577350269189626D0, 0.577350269189626D0,
4                   0.577350269189626D0, 0.577350269189626D0/
C
      DATA GWEIGHTS /1.0D0, 1.0D0, 1.0D0, 1.0D0/
C
```

```

C INITIALIZE STIFFNESS MATRIX (AMATRX) AND RESIDUE (RHS)
DO I=1, NDOFEL
  RHS(I,1)= ZERO
  DO J=1, NDOFEL
    AMATRX(I,J)= ZERO
  END DO
END DO
C
C CYCLE FOR GAUSS POINT
DO K=1,NINPT
  XI = GPOINTS(1,K)
  ETA = GPOINTS(2,K)
C
C DISPLACEMENT-STRAIN MATRIX AND DETERMINANT OF JACOBIAN MATRIX
CALL BMATRIX (BMATRIX,RJACDET,XI,ETA,COORDS,NDOFEL,MCRD,NNODE)
C
C MATERIAL STIFFNESS MATRIX
RL = COS(RANG)
RM = SIN(RANG)
C
Q11 = E1/(1-RNU12*RNU21)
Q12 = RNU21*E1/(1-RNU12*RNU21)
Q22 = E2/(1-RNU12*RNU21)
Q66 = G12
QXX = Q11*RL**4+2*Q12*RL**2*RM**2+Q22*RM**4+4*Q66*RL**2*RM**2
QXY = Q11*RL**2*RM**2+Q12*(RL**4+RM**4)+Q22*RL**2*RM**2-
  4*Q66*RL**2*RM**2
QXS = Q11*RL**3*RM+Q12*(RL*RM**3-RL**3*RM)-Q22*RL*RM**3+2*Q66*
  (RL*RM**3-RL**3*RM)
QYY = Q11*RM**4+2*Q12*RL**2*RM**2+Q22*RL**4+4*Q66*RL**2*RM**2
QYS = Q11*RL*RM**3+Q12*(RL**3*RM-RL*RM**3)-Q22*RL**3*RM+2*Q66*
  (RL**3*RM-RL*RM**3)
QSS = Q11*RL**2*RM**2-2*Q12*RL**2*RM**2+Q22*RL**2*RM**2+Q66*
  (RL**2-RM**2)**2
C
DMATRX(1,1)=QXX
DMATRX(1,2)=QXY
DMATRX(1,3)=QXS
DMATRX(2,1)=QXY
DMATRX(2,2)=QYY
DMATRX(2,3)=QYS
DMATRX(3,1)=QXS
DMATRX(3,2)=QYS
DMATRX(3,3)=QSS
C
C ELEMENT STIFFNESS MATRIX K=THICK*B'*D*B*RJACDET*GWEIGHTS
CALL MATMATPROD(DB,DMATRX,BMATRIX,3,3,NDOFEL)
C TRANPOSE B MATRIX
CALL TRANSMAT(BT,BMATRIX,3,NDOFEL)
C
CALL MATMATPROD(BTDB,BT,DB,NDOFEL,3,NDOFEL)
C
DO J = 1,NDOFEL
  DO I = 1,NDOFEL
    RJBTDB(I,J)=RJACDET*BTDB(I,J)
  END DO
END DO
C
DO J = 1,NDOFEL
  DO I = 1,NDOFEL
    TJBTDB(I,J)=THICK*RJBTDB(I,J)
  END DO
END DO

```

```

        END DO
    END DO
C
    DO J = 1,NDOFEL
        DO I = 1,NDOFEL
            AMATRX(I,J)=AMATRX(I,J)+GWEIGHTS(K)*TJBTDB(I,J)
        END DO
    END DO
C
    DO I=1,NDOFEL
        DO J=1,NRHS
            DUB(I,J)=DU(I,J)
        END DO
    END DO
C RHS SERA EL PRODUCTO AMATRX*DU CON SIGNO MENOS
    CALL MATMATPROD(RHS,AMATRX,DUB,NDOFEL,NDOFEL,NRHS)
C
    DO I=1, NDOFEL
        RHS(I,1)=-RHS(I,1)
    END DO
C
C CALCULAREMOS LAS TENSIONES Y LAS GUARDAMOS EN EL VECTOR SVARS
C Y EN LA VARIABLE UVAR_ARRAY
C
    DO I=1,NDOFEL
        DUBV(I)=DU(I,1)
    END DO
C GAUSS POINT STRAIN VECTOR
    CALL MATVECPROD(EPS,BMATRX,DUBV,3,NDOFEL)
C GAUSS POINT STRESS VECTOR
    CALL MATVECPROD(SVARS,DMATRX,EPS,3,3)
C GUARDAMOS LOS VALORES DE LAS TENSIONES EN LOS PUNTOS DE GAUSS EN UVAR_ARRAY
    DO I=1,NSVINT
        UVAR_ARRAY(JELEM,I,K)=SVARS(I)
    END DO
    END DO
C
    RETURN
END
C
SUBROUTINE UVARM(UVAR,DIRECT,T,TIME,DTIME,CMNAME,ORNAME,
1 NUVARM,NOEL,NPT,LAYER,KSPT,KSTEP,KINC,NDI,NSHR,COORD,
2 JMAC,JMATYP,MATLAYO,LACCFLA)
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'

C ESTA SENTENCIA DEBE SER IGUAL QUE LA QUE TENIAMOS EN LA FUNCION UEL
C
PARAMETER (NELEM=1, NINPT=4, NSVINT=3)

C LOS ELEMENTOS DUMMY TIENEN INDICES IGUALES A LOS DE LOS ELEMENTOS REALES
C SUMANDO 1000
C EN EJEMPLOS GRANDES PODRIAMOS SUMAR OTRA CANTIDAD, POR EJEMPLO 10000

PARAMETER (IELEMOFFSET = 1000)
C
CHARACTER*80 CMNAME,ORNAME
CHARACTER*3 FLGRAY(15)
DIMENSION UVAR(NUVARM),DIRECT(3,3),T(3,3),TIME(2)
DIMENSION ARRAY(15),JARRAY(15),JMAC(*),JMATYP(*),COORD(*)
C
C THE DIMENSIONS OF THE VARIABLES FLGRAY, ARRAY AND JARRAY

```

```
C      MUST BE SET EQUAL TO OR GREATER THAN 15.
C
C      COMMON/KUSER/UVAR_ARRAY(NELEM,NSVINT,NINPT)
C
C DAMOS VALOR A LAS VARIABLES UVAR
C      UVAR(1:NSVINT) = UVAR_ARRAY(NOEL-IELEMOFFSET,1:NSVINT,NPT)
C
C      RETURN
C      END
C
C DISPLACEMENT-STRAIN MATRIX
C      SUBROUTINE BMATRIX(BMATRX,RJACDET,XI,ETA,COORDS,NDOFEL,MCRD,NNODE)
C
C      INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
C      DIMENSION BMATRX(3,NDOFEL), COORDS(NDOFEL)
C      DIMENSION DERINAT(MCRD,NNODE), RJACINV(MCRD,MCRD)
C      DIMENSION DERIXY(MCRD,NNODE)
C
C INITIALIZE DISPLACEMENT-STRAIN MATRIX B
C      DO I=1,3
C          DO J=1,NDOFEL
C              BMATRX(I,J)=0.0D0
C          END DO
C      END DO
C
C DERIVATIVES OF SHAPE FUNCTIONS WITH RESPECT TO XI,ETA
C      CALL SHAPEQ4 (DERINAT,XI,ETA,MCRD,NNODE)
C
C INVERSE OF JACOBIAN, DETERMINANT OF JACOBIAN
C      CALL JACOBIAN (RJACINV,RJACDET,COORDS,DERINAT,MCRD,NNODE)
C
C DERIVATIVES OF SHAPE FUNCTIONS WITH RESPECT TO X,Y
C      CALL MATMATPROD (DERIXY,RJACINV,DERINAT,MCRD,MCRD,NNODE)
C
C DISPLACEMENT-STRAIN MATRIX 3X8
C      BMATRX(1,1) = DERIXY(1,1)
C      BMATRX(1,3) = DERIXY(1,2)
C      BMATRX(1,5) = DERIXY(1,3)
C      BMATRX(1,7) = DERIXY(1,4)
C      BMATRX(2,2) = DERIXY(2,1)
C      BMATRX(2,4) = DERIXY(2,2)
C      BMATRX(2,6) = DERIXY(2,3)
C      BMATRX(2,8) = DERIXY(2,4)
C      BMATRX(3,1) = DERIXY(2,1)
C      BMATRX(3,2) = DERIXY(1,1)
C      BMATRX(3,3) = DERIXY(2,2)
C      BMATRX(3,4) = DERIXY(1,2)
C      BMATRX(3,5) = DERIXY(2,3)
C      BMATRX(3,6) = DERIXY(1,3)
C      BMATRX(3,7) = DERIXY(2,4)
C      BMATRX(3,8) = DERIXY(1,4)
C
C      RETURN
C      END
C
C      SUBROUTINE SHAPEQ4 (DERINAT,XI,ETA,MCRD,NNODE)
C
C      INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
C      DIMENSION DERINAT(MCRD,NNODE)
```

```

C
      DERINAT(1,1)=-(1-ETA)/4
      DERINAT(2,1)=-(1-XI)/4
      DERINAT(1,2)=(1-ETA)/4
      DERINAT(2,2)=-(1+XI)/4
      DERINAT(1,3)=(1+ETA)/4
      DERINAT(2,3)=(1+XI)/4
      DERINAT(1,4)=-(1+ETA)/4
      DERINAT(2,4)=(1-XI)/4
C
      RETURN
      END
C
C JACOBIAN MATRIX, COMPUTES INVERSE OF JACOBIAN MATRIX AND
C DETERMINANT OF JACOBIAN MATRIX
      SUBROUTINE JACOBIAN (RJACINV,RJACDET,COORDS,DERINAT,MCRD,NNODE)
C
      INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
      DIMENSION RJACINV(MCRD,MCRD), COORDS(MCRD,NNODE)
      DIMENSION DERINAT(MCRD,NNODE), TR(NNODE,MCRD)
      DIMENSION TJACADJ(MCRD,MCRD), RJACOB(MCRD,MCRD)
C
      TRANSPOSE COORDINATES MATRIX COORDS
      CALL TRANSMAT (TR,COORDS,MCRD,NNODE)
C
      CALL MATMATPROD(RJACOB,DERINAT,TR,MCRD,NNODE,MCRD)
C
      TJACADJ(1,1) = RJACOB(2,2)
      TJACADJ(1,2) = -1*RJACOB(1,2)
      TJACADJ(2,1) = -1*RJACOB(2,1)
      TJACADJ(2,2) = RJACOB(1,1)
C
      RJACDET=RJACOB(1,1)*RJACOB(2,2)-RJACOB(1,2)*RJACOB(2,1)
C
      DO J = 1,MCRD
        DO I = 1,MCRD
          RJACINV(I,J)=TJACADJ(I,J)/RJACDET
        END DO
      END DO
C
      RETURN
      END
C MATRIX MATRIX PRODUCT
      SUBROUTINE MATMATPROD(AXB,RMAT1,RMAT2,M1,N1,N2)
      INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
      DIMENSION AXB(M1,N2), RMAT1(M1,N1), RMAT2(N1,N2)
C
      DO I=1,M1
        DO J=1,N2
          AXB(I,J)=0.0D0
          DO K=1,N1
            AXB(I,J)=AXB(I,J)+RMAT1(I,K)*RMAT2(K,J)
          END DO
        END DO
      END DO
C
      RETURN
      END

```

```

C
C MATRIX VECTOR PRODUCT
  SUBROUTINE MATVECPROD(RES,RMAT,VEC,M,N)
    INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
C      DIMENSION RES(M), RMAT(M,N), VEC(N)
C
C      DO I=1,M
C         RES(I)=0.0D0
C         DO J=1,N
C            RES(I)=RES(I)+RMAT(I,J)*VEC(J)
C         END DO
C      END DO
C
C      RETURN
C
C
C TRANSPOSE MATRIX
  SUBROUTINE TRANSMAT (TRMAT,RMAT,M,N)
    INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
C      DIMENSION TRMAT(N,M), RMAT(M,N)
C
C      DO I=1,N
C         DO J=1,M
C            TRMAT(I,J)=0.0D0
C         END DO
C      END DO
C
C      DO J = 1,M
C         DO I = 1,N
C            TRMAT(I,J)=RMAT(J,I)
C         END DO
C      END DO
C
C      RETURN
C

```

D.4. SFM METODOA ETA MATERIAL ANISOTROPOA

```

SUBROUTINE UEL(RHS,AMATRX,SVARS,ENERGY,NDOFEL,NRHS,NSVARS,
1   PROPS,NPROPS,COORDS,MCRD,NNODE,U,DU,V,A,JTYPE,TIME,DTIME,
2   KSTEP,KINC,JELEM,PARAMS,NDLOAD,JDLTYP,ADLMAG,PREDEF,
3   NPREFL,LFLAGS,MLVARX,DLMAG,MDLOAD,PNEWDT,JPROPS,NJPROP,
4   PERIOD)
C
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
PARAMETER(ZERO=0.D0)
C
C N° DE FUERZAS INDEPENDIENTES O N° DE PARAMETROS EN LAS FUNCIONES DE
C INTERPOLACIÓN DE FUERZAS
PARAMETER (NFI=5)
C
DIMENSION RHS(MLVARX,*),AMATRX(NDOFEL,NDOFEL),
1   SVARS(NSVARS),ENERGY(8),PROPS(*),COORDS(MCRD,NNODE),
2   U(NDOFEL),DU(MLVARX,*),DUB(NDOFEL,NRHS),V(NDOFEL),A(NDOFEL),
3   TIME(2),PARAMS(3),JDLTYP(MDLOAD,*),ADLMAG(MDLOAD,*),

```

```

4      DDLMAG(MDLOAD,*),PREDEF(2,NPREF,NNODE),LFLAGS(*),
5      JPROPS(*)
C
1      DIMENSION GPOINTS(2,4),GWEIGHTS(4), BMATRX(3,NDOFEL),SMATRX(3,3),
2      YMATRX(3,NFJ),EMATRX(NDOFEL,NFJ),GMATRX(NFJ,NFJ),
3      BT(NDOFEL,3),BTY(NDOFEL,NFJ),BTYJ(NDOFEL,NFJ),DUBV(NDOFEL),
4      TBTYJ(NDOFEL,NFJ),YT(NFJ,3),YTS(NFJ,3),YTSY(NFJ,NFJ),
5      YTSYJ(NFJ,NFJ),TYTSYJ(NFJ,NFJ),ET(NFJ,NDOFEL),GINV(NFJ,NFJ),
5      EGI(NDOFEL,NFJ),GIET(NFJ,NDOFEL),FJ(NFJ),YFJ(3,NFJ)
C
C EN EL SIGUIENTE CODIGO TENEMOS QUE DAR VALOR A LAS SIGUIENTES VARIABLES:
C NELEM: NO. DE ELEMENTOS DE NUESTRO EJEMPLO
C NINPT: NO. DE PTOS. DE INTEGRACION DEL ELEMENTO FINITO
C NSVINT: NO. DE TENSIONES QUE VAMOS A VISUALIZAR
C
C THE FOLLOWING COMMON BLOCK IS USED TO STORE NSVINT VARIABLES,
C AT THE NINPT INTEGRATION POINTS OF NELEM ELEMENTS
      PARAMETER (NELEM=1, NINPT=4, NSVINT=3)
      COMMON/KUSER/UVAR_ARRAY(NELEM,NSVINT,NINPT)
C
C EN EL SIGUIENTE CODIGO CALCULAMOS LA MATRIZ DE RIGIDEZ AMATRX Y
C EL RESIDUO RHS
C EL ESPESOR DEL ELEMENTO ES THICK
C
      PI=4.0*Datan(1.00)
C
      E1     = 142000.
      E2     = 8900.
      G12    = 4800.
      RNU12  = 0.28
      RNU21  = 0.0175
      ANG    = 20.
      RANG   = ANG*PI/180
      THICK  = 2.
C
C GAUSS POINTS AND WEIGHTS, COMPLETE GAUSS QUADRATURE 2X2
      DATA GPOINTS /-0.577350269189626D0, -0.577350269189626D0,
2          0.577350269189626D0, -0.577350269189626D0,
3          -0.577350269189626D0, 0.577350269189626D0,
4          0.577350269189626D0, 0.577350269189626D0/
C
      DATA GWEIGHTS /1.0D0, 1.0D0, 1.0D0, 1.0D0/
C
C INITIALIZE EQUILIBRIUM MATRIX [E]
      DO I=1,NDOFEL
        DO J=1,NFJ
          EMATRX(I,J)= ZERO
        END DO
      END DO
C INITIALIZE FLEXIBILITY MATRIX [G]
      DO I=1,NFJ
        DO J=1,NFJ
          GMATRX(I,J)= ZERO
        END DO
      END DO
C INITIALIZE STIFFNESS MATRIX (AMATRX) AND RESIDUE (RHS)
      DO I=1, NDOFEL
        RHS(I,1)= ZERO
        DO J=1, NDOFEL
          AMATRX(I,J)= ZERO
        END DO
      END DO

```

```

END DO
C
C MATERIAL COMPLIANCE MATRIX
RL = COS(RANG)
RM = SIN(RANG)
C
S11 = 1/E1
S12 = -RNU12/E1
S22 = 1/E2
S66 = 1/G12
SXX = S11*RL**4+2*S12*RL**2*RM**2+S22*RM**4+S66*RL**2*RM**2
SXY = S11*RL**2*RM**2+S12*(RL**4+RM**4)+S22*RL**2*RM**2-
1 S66*RL**2*RM**2
SXS = 2*S11*RL**3*RM+2*S12*(RL*RM**3-RL**3*RM)-2*S22*RL*RM**3
1 +S66*(RL*RM**3-RL**3*RM)
SYX = S11*RM**4+2*S12*RL**2*RM**2+S22*RL**4+S66*RL**2*RM**2
SYS = 2*S11*RL*RM**3+2*S12*(RL**3*RM-RL*RM**3)-2*S22*RL**3*RM
1 +S66*(RL**3*RM-RL*RM**3)
SSS = 4*S11*RL**2*RM**2-8*S12*RL**2*RM**2+4*S22*RL**2*RM**2+S66*
1 (RL**2-RM**2)**2
C
SMATRX(1,1)=SXX
SMATRX(1,2)=SXY
SMATRX(1,3)=SXS
SMATRX(2,1)=SXY
SMATRX(2,2)=SYY
SMATRX(2,3)=SYS
SMATRX(3,1)=SXS
SMATRX(3,2)=SYS
SMATRX(3,3)=SSS
C AUXILIAR PARAMETERS FOR GENERAL QUADRILATERAL INTERPOLATION FUNCTIONS
A1=1./4.*(-COORDS(1,1)+COORDS(1,2)+COORDS(1,3)-COORDS(1,4))
A3=1./4.*(-COORDS(1,1)-COORDS(1,2)+COORDS(1,3)+COORDS(1,4))
B1=1./4.*(-COORDS(2,1)+COORDS(2,2)+COORDS(2,3)-COORDS(2,4))
B3=1./4.*(-COORDS(2,1)-COORDS(2,2)+COORDS(2,3)+COORDS(2,4))
C CYCLE FOR GAUSS POINT
DO K=1,NINPT
    XI = GPOINTS(1,K)
    ETA = GPOINTS(2,K)
C FORCES INTERPOLATION FUNCTIONS [Y]
DO I=1,3
    DO J=1,NFJ
        YMATRIX(I,J)=ZERO
    END DO
END DO
YMATRIX(1,1)=1/THICK
YMATRIX(1,4)=(A1**2)*ETA/THICK
YMATRIX(1,5)=(A3**2)*XI/THICK
YMATRIX(2,2)=1/THICK
YMATRIX(2,4)=(B1**2)*ETA/THICK
YMATRIX(2,5)=(B3**2)*XI/THICK
YMATRIX(3,3)=1/THICK
YMATRIX(3,4)=A1*B1*ETA/THICK
YMATRIX(3,5)=A3*B3*XI/THICK
C
C DISPLACEMENT-STRAIN MATRIX AND DETERMINANT OF JACOBIAN MATRIX
CALL BMATRIX (BMATRIX,RJACDET,XI,ETA,COORDS,NDOFEL,MCRD,NNODE)
C

```

```

C TRANSPOSE B MATRIX
  CALL TRANSMAT(BT,BMATRIX,3,NDOFEL)
C ELEMENT EQUILIBRIUM MATRIX [E]
  CALL MATMATPROD(BTY,BT,YMATRIX,NDOFEL,3,NFJ)
  DO J = 1,NFJ
    DO I = 1,NDOFEL
      BTYJ(I,J)=RJACDET*BTY(I,J)
    END DO
  END DO
  DO J = 1,NFJ
    DO I = 1,NDOFEL
      TBTYJ(I,J)=THICK*BTYJ(I,J)
    END DO
  END DO
  DO J = 1,NFJ
    DO I = 1,NDOFEL
      EMATRIX(I,J)=EMATRIX(I,J)+GWEIGHTS(K)*TBTYJ(I,J)
    END DO
  END DO
C
C TRANSPOSE Y MATRIX
  CALL TRANSMAT(YT,YMATRIX,3,NFJ)
C ELEMENT FLEXIBILITY MATRIX [G]
  CALL MATMATPROD(YTS,YT,SMATRIX,NFJ,3,3)
  CALL MATMATPROD(YTSY,YTS,YMATRIX,NFJ,3,NFJ)
  DO J = 1,NFJ
    DO I = 1,NFJ
      YTSYJ(I,J)=RJACDET*YTSY(I,J)
    END DO
  END DO
  DO J = 1,NFJ
    DO I = 1,NFJ
      TYTSYJ(I,J)=THICK*YTSYJ(I,J)
    END DO
  END DO
  DO J = 1,NFJ
    DO I = 1,NFJ
      GMATRIX(I,J)=GMATRIX(I,J)+GWEIGHTS(K)*TYTSYJ(I,J)
    END DO
  END DO
  END DO
C
C TRANSPOSE EQUILIBRIUM MATRIX
  CALL TRANSMAT(ET,EMATRIX,NDOFEL,NFJ)
C INVERSION OF FLEXIBILITY MATRIX
  CALL MATINV(1,NFJ,GMATRIX,GINV)
C ELEMENT STIFFNESS MATRIX K=E*INV(G)*E'
  CALL MATMATPROD(EGI,EMATRIX,GINV,NDOFEL,NFJ,NFJ)
  CALL MATMATPROD(AMATRIX,EGI,ET,NDOFEL,NFJ,NDOFEL)
C
  DO I=1,NDOFEL
    DO J=1,NRHS
      DUB(I,J)=DU(I,J)
    END DO
  END DO
  DO I=1,NDOFEL
    DUBV(I)=DU(I,1)
  END DO
C
C INDEPENDENT FORCES FJ
  CALL MATMATPROD(GIET,GINV,ET,NFJ,NFJ,NDOFEL)

```

```

C
      CALL MATVECPROD(FJ,GIET,DUBV,NFJ,NDOFEL)
C
C RHS SERA EL PRODUCTO AMATRX*DU CON SIGNO MENOS
      CALL MATMATPROD(RHS,AMATRX,DUB,NDOFEL,NDOFEL,NRHS)
C
      DO I=1, NDOFEL
        RHS(I,1)=-RHS(I,1)
      END DO
C
C CYCLE FOR GAUSS POINT
      DO K=1,NINPT
        XI = GPOINTS(1,K)
        ETA = GPOINTS(2,K)
C
C FORCES INTERPOLATION FUNCTIONS [Y]
      DO I=1,3
        DO J=1,NFJ
          YMATRIX(I,J)=ZERO
        END DO
      END DO
      YMATRIX(1,1)=1/THICK
      YMATRIX(1,4)=A1**2*ETA/THICK
      YMATRIX(1,5)=A3**2*XI/THICK
      YMATRIX(2,2)=1/THICK
      YMATRIX(2,4)=B1**2*ETA/THICK
      YMATRIX(2,5)=B3**2*XI/THICK
      YMATRIX(3,3)=1/THICK
      YMATRIX(3,4)=A1*B1*ETA/THICK
      YMATRIX(3,5)=A3*B3*XI/THICK
C
C CALCULAREMOS LAS TENSIONES Y LAS GUARDAMOS EN EL VECTOR SVARS Y
C EN LA VARIABLE UVAR_ARRAY
C
      DO I=1,NSVINT
        SVARS(I)=ZERO
      END DO
      CALL MATVECPROD(YFJ,YMATRIX,FJ,3,NFJ)
      DO I = 1,NSVINT
        SVARS(I)=SVARS(I)+YFJ(I,1)
      END DO
      DO I=1,NSVINT
        UVAR_ARRAY(JELEM,I,K)=SVARS(I)
      END DO
      END DO
C
      RETURN
    END
C
      SUBROUTINE UVARM(UVAR,DIRECT,T,TIME,DTIME,CNAME,ORNAME,
1 NUVARM,NOEL,NPT,LAYER,KSPT,KSTEP,KINC,NDI,NSHR,COORD,
2 JMAC,JMATYP,MATLAYO,LACCFLA)
      INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
C ESTA SENTENCIA DEBE SER IGUAL QUE LA QUE TENIAMOS EN LA FUNCION UEL
C
      PARAMETER (NELEM=1, NINPT=4, NSVINT=3)
C
C LOS ELEMENTOS DUMMY TIENEN INDICES IGUALES A LOS DE LOS ELEMENTOS REALES
C SUMANDO 1000
C EN EJEMPLOS GRANDES PODRIAMOS SUMAR OTRA CANTIDAD, POR EJEMPLO 10000

```

```

C
C      PARAMETER (IELEMOFFSET = 1000)
C
C      CHARACTER*80 CMNAME,ORNAME
C      CHARACTER*3 FLGRAY(15)
C      DIMENSION UVAR(NUVARM),DIRECT(3,3),T(3,3),TIME(2)
C      DIMENSION ARRAY(15),JARRAY(15),JMAC(*),JMATTYP(*),COORD(*)
C
C      THE DIMENSIONS OF THE VARIABLES FLGRAY, ARRAY AND JARRAY
C      MUST BE SET EQUAL TO OR GREATER THAN 15.
C
C      COMMON/KUSER/UVAR_ARRAY(NELEM,NSVINT,NINPT)
C
C      DAMOS VALOR A LAS VARIABLES UVAR
C          UVAR(1:NSVINT) = UVAR_ARRAY(NOEL-IELEMOFFSET,1:NSVINT,NPT)
C
C      RETURN
C      END
C
C      DISPLACEMENT-STRAIN MATRIX
C      SUBROUTINE BMATRIX(BMATRX,RJACDET,XI,ETA,COORDS,NDOFEL,MCRD,NNODE)
C
C      INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
C      DIMENSION BMATRX(3,NDOFEL), COORDS(NDOFEL)
C      DIMENSION DERINAT(MCRD,NNODE), RJACINV(MCRD,MCRD)
C      DIMENSION DERIXY(MCRD,NNODE)
C
C      INITIALIZE DISPLACEMENT-STRAIN MATRIX B
C          DO I=1,3
C              DO J=1,NDOFEL
C                  BMATRX(I,J)=0.0D0
C              END DO
C          END DO
C
C      DERIVATIVES OF SHAPE FUNCTIONS WITH RESPECT TO XI,ETA
C          CALL SHAPEQ4 (DERINAT,XI,ETA,MCRD,NNODE)
C
C      INVERSE OF JACOBIAN, DETERMINANT OF JACOBIAN
C          CALL JACOBIAN (RJACINV,RJACDET,COORDS,DERINAT,MCRD,NNODE)
C
C      DERIVATIVES OF SHAPE FUNCTIONS WITH RESPECT TO X,Y
C          CALL MATMATPROD (DERIXY,RJACINV,DERINAT,MCRD,MCRD,NNODE)
C
C      DISPLACEMENT-STRAIN MATRIX 3X8
C          BMATRX(1,1) = DERIXY(1,1)
C          BMATRX(1,3) = DERIXY(1,2)
C          BMATRX(1,5) = DERIXY(1,3)
C          BMATRX(1,7) = DERIXY(1,4)
C          BMATRX(2,2) = DERIXY(2,1)
C          BMATRX(2,4) = DERIXY(2,2)
C          BMATRX(2,6) = DERIXY(2,3)
C          BMATRX(2,8) = DERIXY(2,4)
C          BMATRX(3,1) = DERIXY(2,1)
C          BMATRX(3,2) = DERIXY(1,1)
C          BMATRX(3,3) = DERIXY(2,2)
C          BMATRX(3,4) = DERIXY(1,2)
C          BMATRX(3,5) = DERIXY(2,3)
C          BMATRX(3,6) = DERIXY(1,3)
C          BMATRX(3,7) = DERIXY(2,4)
C          BMATRX(3,8) = DERIXY(1,4)

```

```

C
      RETURN
      END

C
      SUBROUTINE SHAPEQ4 ( DERINAT , XI , ETA , MCRD , NNODE )
C
      INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'

C
      DIMENSION DERINAT(MCRD,NNODE)

C
      DERINAT(1,1)=-(1-ETA)/4
      DERINAT(2,1)=-(1-XI)/4
      DERINAT(1,2)=(1-ETA)/4
      DERINAT(2,2)=-(1+XI)/4
      DERINAT(1,3)=(1+ETA)/4
      DERINAT(2,3)=(1+XI)/4
      DERINAT(1,4)=-(1+ETA)/4
      DERINAT(2,4)=(1-XI)/4

C
      RETURN
      END

C
C JACOBIAN MATRIX, COMPUTES INVERSE OF JACOBIAN MATRIX AND
C DETERMINANT OF JACOBIAN MATRIX
      SUBROUTINE JACOBIAN ( RJACINV , RJACDET , COORDS , DERINAT , MCRD , NNODE )
C
      INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'

C
      DIMENSION RJACINV(MCRD,MCRD),COORDS(MCRD,NNODE)
      DIMENSION DERINAT(MCRD,NNODE),TR(NNODE,MCRD)
      DIMENSION TJACADJ(MCRD,MCRD),RJACOB(MCRD,MCRD)

C
      TRANSPOSE COORDINATES MATRIX COORDS
      CALL TRANSMAT ( TR,COORDS,MCRD,NNODE )

C
      CALL MATMATPROD(RJACOB,DERINAT,TR,MCRD,NNODE,MCRD)

C
      TJACADJ(1,1) =      RJACOB(2,2)
      TJACADJ(1,2) = -1*RJACOB(1,2)
      TJACADJ(2,1) = -1*RJACOB(2,1)
      TJACADJ(2,2) =      RJACOB(1,1)

C
      RJACDET=RJACOB(1,1)*RJACOB(2,2)-RJACOB(1,2)*RJACOB(2,1)

C
      DO J = 1,MCRD
        DO I = 1,MCRD
          RJACINV(I,J)=TJACADJ(I,J)/RJACDET
        END DO
      END DO

C
      RETURN
      END

C
C MATRIX MATRIX PRODUCT
      SUBROUTINE MATMATPROD(AXB,RMAT1,RMAT2,M1,N1,N2)
      INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'

C
      DIMENSION AXB(M1,N2), RMAT1(M1,N1), RMAT2(N1,N2)

C
      DO I=1,M1
        DO J=1,N2

```

```

      AXB(I,J)=0.0D0
      DO K=1,N1
        AXB(I,J)=AXB(I,J)+RMAT1(I,K)*RMAT2(K,J)
      END DO
    END DO
  END DO
C
  RETURN
END

C
C MATRIX VECTOR PRODUCT
SUBROUTINE MATVECPROD(RES,RMAT,VEC,M,N)
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
DIMENSION RES(M), RMAT(M,N), VEC(N)
C
DO I=1,M
  RES(I)=0.0D0
  DO J=1,N
    RES(I)=RES(I)+RMAT(I,J)*VEC(J)
  END DO
END DO
C
RETURN
END

C
C TRANSPOSE MATRIX
SUBROUTINE TRANSMAT (TRMAT,RMAT,M,N)
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
DIMENSION TRMAT(N,M), RMAT(M,N)
C
DO I=1,N
  DO J=1,M
    TRMAT(I,J)=0.0D0
  END DO
END DO
C
DO J = 1,M
  DO I = 1,N
    TRMAT(I,J)=RMAT(J,I)
  END DO
END DO
C
RETURN
END

```

D.5. SFM METODOA, DEFORMAZIO EGOERA LAUA ETA MATERIAL ANISOTROPOA

```

1  SUBROUTINE UEL(RHS,AMATRX,SVARS,ENERGY,NDOFEL,NRHS,NSVARS,
2   PROPS,NPROPS,COORDS,MCRD,NNODE,U,DU,V,A,UTYPE,TIME,DTIME,
3   KSTEP,KINC,JELEM,PARAMS,NDLOAD,JDLTYP,ADLMAG,PREDEF,
4   NPREFD,LFLAGS,MLVARX,DDLMAG,MDLOAD,PNEWDT,JPROPS,NJPROP,
PERIOD)

C
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C

```

```

PARAMETER (ZERO=0.D0)
C
C N° DE FUERZAS INDEPENDIENTES O N° DE PARAMETROS EN LAS FUNCIONES DE
C INTERPOLACIÓN DE FUERZAS
    PARAMETER (NFJ=5)
C
DIMENSION RHS(MLVARX,*),AMATRX(NDOFEL,NDOFEL),
1    SVARS(NSVARS),ENERGY(8),PROPS(*),COORDS(MCRD,NNODE),
2    U(NDOFEL),DU(MLVARX,*),DUB(NDOFEL,NRHS),V(NDOFEL),A(NDOFEL),
3    TIME(2),PARAMS(3),JDLTYP(MDLOAD,*),ADLMAG(MDLOAD,*),
4    DDLMAG(MDLOAD,*),PREDEF(2,NPREFD,NNODE),LFLAGS(*),
5    JPROPS(*)
C
DIMENSION GPOINTS(2,4),GWEIGHTS(4),BMATRX(3,NDOFEL),SMATRX(3,3),
1    YMATRIX(3,NFJ),EMATRX(NDOFEL,NFJ),GMATRIX(NFJ,NFJ),
2    BT(NDOFEL,3),BTY(NDOFEL,NFJ),BTYJ(NDOFEL,NFJ),DUBV(NDOFEL),
3    TBTYJ(NDOFEL,NFJ),YT(NFJ,3),YTS(NFJ,3),YTSY(NFJ,NFJ),
4    YTSYJ(NFJ,NFJ),TYTSYJ(NFJ,NFJ),ET(NFJ,NDOFEL),GINV(NFJ,NFJ),
5    EGI(NDOFEL,NFJ),GIET(NFJ,NDOFEL),FJ(NFJ),YFJ(3,NFJ)
C
C EN EL SIGUIENTE CODIGO TENEMOS QUE DAR VALOR A LAS SIGUIENTES VARIABLES:
C NELEM: NO. DE ELEMENTOS DE NUESTRO EJEMPLO
C NINPT: NO. DE PTOS. DE INTEGRACION DEL ELEMENTO FINITO
C NSVINT: NO. DE TENSIONES QUE VAMOS A VISUALIZAR
C
C THE FOLLOWING COMMON BLOCK IS USED TO STORE NSVINT VARIABLES,
C AT THE NINPT INTEGRATION POINTS OF NELEM ELEMENTS
    PARAMETER (NELEM=1, NINPT=4, NSVINT=3)
    COMMON/KUSER/UVAR_ARRAY(NELEM,NSVINT,NINPT)
C
C EN EL SIGUIENTE CODIGO CALCULAMOS LA MATRIZ DE RIGIDEZ AMATRX Y
C EL RESIDUO RHS
C
PI=4.D0*DATAN(1.D0)
C
E1      = 142000.
E2      = 7800.
E3      = E2
G12     = 4000.
RNU12   = 0.34
RNU23   = 0.4
RNU32   = E3/E2*RNU23
ANG     = 20.
RANG   = ANG*PI/180
THICK   = 2.
C
C GAUSS POINTS AND WEIGHTS, COMPLETE GAUSS QUADRATURE 2X2
    DATA GPOINTS /-0.577350269189626D0, -0.577350269189626D0,
2        0.577350269189626D0, -0.577350269189626D0,
3        -0.577350269189626D0, 0.577350269189626D0,
4        0.577350269189626D0, 0.577350269189626D0/
C
    DATA GWEIGHTS /1.0D0, 1.0D0, 1.0D0, 1.0D0/
C
C INITIALIZE EQUILIBRIUM MATRIX [E]
    DO I=1,NDOFEL
        DO J=1,NFJ
            EMATRX(I,J)= ZERO
        END DO
    END DO
C
C INITIALIZE FLEXIBILITY MATRIX [G]

```

```

      DO I=1,NFJ
        DO J=1,NFJ
          GMATRX(I,J)= ZERO
        END DO
      END DO
C INITIALIZE STIFFNESS MATRIX (AMATRX) AND RESIDUE (RHS)
      DO I=1, NDOFEL
        RHS(I,1)= ZERO
        DO J=1, NDOFEL
          AMATRX(I,J)= ZERO
        END DO
      END DO
C
C MATERIAL COMPLIANCE MATRIX
      RL = COS(RANG)
      RM = SIN(RANG)
C
      S11 = 1/E1
      S12 = -RNU12/E1
      S22 = 1/E2
      S23 = -RNU32/E3
      S66 = 1/G12
      R11 = S11-S12**2/S22
      R12 = S12-S12*S23/S22
      R22 = S22-S23**2/S22
      R66 = S66
      RXX = R11*RL**4+2*R12*RL**2*RM**2+R22*RM**4+R66*RL**2*RM**2
      RXY = R11*RL**2*RM**2+R12*(RL**4+RM**4)+R22*RL**2*RM**2-
1   R66*RL**2*RM**2
      RXS = 2*R11*RL**3*RM+2*R12*(RL*RM**3-RL**3*RM)-2*R22*RL*RM**3
1   +R66*(RL*RM**3-RL**3*RM)
      RYY = R11*RM**4+2*R12*RL**2*RM**2+R22*RL**4+R66*RL**2*RM**2
      RYS = 2*R11*RL*RM**3+2*R12*(RL**3*RM-RL*RM**3)-2*R22*RL**3*RM
1   +R66*(RL**3*RM-RL*RM**3)
      RSS = 4*R11*RL**2*RM**2-8*R12*RL**2*RM**2+4*R22*RL**2*RM**2+R66*
1   (RL**2-RM**2)**2
C
      SMATRX(1,1)=RXX
      SMATRX(1,2)=RXY
      SMATRX(1,3)=RXS
      SMATRX(2,1)=RXY
      SMATRX(2,2)=RYY
      SMATRX(2,3)=RYS
      SMATRX(3,1)=RXS
      SMATRX(3,2)=RYS
      SMATRX(3,3)=RSS
C
C AUXILIAR PARAMETERS FOR GENERAL QUADRILATERAL INTERPOLATION FUNCTIONS
      A1=1./4.*(-COORDS(1,1)+COORDS(1,2)+COORDS(1,3)-COORDS(1,4))
      A3=1./4.*(-COORDS(1,1)-COORDS(1,2)+COORDS(1,3)+COORDS(1,4))
      B1=1./4.*(-COORDS(2,1)+COORDS(2,2)+COORDS(2,3)-COORDS(2,4))
      B3=1./4.*(-COORDS(2,1)-COORDS(2,2)+COORDS(2,3)+COORDS(2,4))
C
C CYCLE FOR GAUSS POINT
      DO K=1,NINPT
        XI = GPOINTS(1,K)
        ETA = GPOINTS(2,K)
      C
C FORCES INTERPOLATION FUNCTIONS [Y]
      DO I=1,3
        DO J=1,NFJ

```

```

        YMATRIX(I,J)=ZERO
    END DO
END DO
YMATRIX(1,1)=1/THICK
YMATRIX(1,4)=(A1**2)*ETA/THICK
YMATRIX(1,5)=(A3**2)*XI/THICK
YMATRIX(2,2)=1/THICK
YMATRIX(2,4)=(B1**2)*ETA/THICK
YMATRIX(2,5)=(B3**2)*XI/THICK
YMATRIX(3,3)=1/THICK
YMATRIX(3,4)=A1*B1*ETA/THICK
YMATRIX(3,5)=A3*B3*XI/THICK
C
C DISPLACEMENT-STRAIN MATRIX AND DETERMINANT OF JACOBIAN MATRIX
    CALL BMATRIX (BMATRIX,RJACDET,XI,ETA,COORDS,NDOFEL,MCRD,NNODE)
C
C TRANPOSE B MATRIX
    CALL TRANSMAT(BT,BMATRIX,3,NDOFEL)
C ELEMENT EQUILIBRIUM MATRIX [E]
    CALL MATMATPROD(BTY,BT,YMATRIX,NDOFEL,3,NFJ)
    DO J = 1,NFJ
        DO I = 1,NDOFEL
            BTYJ(I,J)=RJACDET*BTY(I,J)
        END DO
    END DO
    DO J = 1,NFJ
        DO I = 1,NDOFEL
            TBTYJ(I,J)=THICK*BTYJ(I,J)
        END DO
    END DO
    DO J = 1,NFJ
        DO I = 1,NDOFEL
            EMATRIX(I,J)=EMATRIX(I,J)+GWEIGHTS(K)*TBTYJ(I,J)
        END DO
    END DO
C
C TRANPOSE Y MATRIX
    CALL TRANSMAT(YT,YMATRIX,3,NFJ)
C ELEMENT FLEXIBILITY MATRIX [G]
    CALL MATMATPROD(YTS,YT,SMATRIX,NFJ,3,3)
    CALL MATMATPROD(YTSY,YTS,YMATRIX,NFJ,3,NFJ)
    DO J = 1,NFJ
        DO I = 1,NFJ
            YTSYJ(I,J)=RJACDET*YTSY(I,J)
        END DO
    END DO
    DO J = 1,NFJ
        DO I = 1,NFJ
            TYTSYJ(I,J)=THICK*YTSYJ(I,J)
        END DO
    END DO
    DO J = 1,NFJ
        DO I = 1,NFJ
            GMATRIX(I,J)=GMATRIX(I,J)+GWEIGHTS(K)*TYTSYJ(I,J)
        END DO
    END DO
C
C TRANPOSE EQUILIBRIUM MATRIX
    CALL TRANSMAT(ET,EMATRIX,NDOFEL,NFJ)
C INVERSION OF FLEXIBILITY MATRIX

```

```

CALL MATINV(1,NFJ,GMATRX,GINV)
C
C ELEMENT STIFFNESS MATRIX K=E*INV(G)*E'
CALL MATMATPROD(EGI,EMATRX,GINV,NDOFEL,NFJ,NFJ)
CALL MATMATPROD(AMATRX,EGI,ET,NDOFEL,NFJ,NDOFEL)
C
DO I=1,NDOFEL
  DO J=1,NRHS
    DUB(I,J)=DU(I,J)
  END DO
END DO
DO I=1,NDOFEL
  DUBV(I)=DU(I,1)
END DO
C
C INDEPENDENT FORCES FJ
CALL MATMATPROD(GIET,GINV,ET,NFJ,NFJ,NDOFEL)
C
CALL MATVECPROD(FJ,GIET,DUBV,NFJ,NDOFEL)
C
C RHS SERA EL PRODUCTO AMATRX*DU CON SIGNO MENOS
CALL MATMATPROD(RHS,AMATRX,DUB,NDOFEL,NDOFEL,NRHS)
C
DO I=1, NDOFEL
  RHS(I,1)=-RHS(I,1)
END DO
C
C CYCLE FOR GAUSS POINT
DO K=1,NINPT
  XI = GPOINTS(1,K)
  ETA = GPOINTS(2,K)
C
C FORCES INTERPOLATION FUNCTIONS [Y]
DO I=1,3
  DO J=1,NFJ
    YMATRIX(I,J)=ZERO
  END DO
END DO
YMATRIX(1,1)=1/THICK
YMATRIX(1,4)=A1**2*ETA/THICK
YMATRIX(1,5)=A3**2*XI/THICK
YMATRIX(2,2)=1/THICK
YMATRIX(2,4)=B1**2*ETA/THICK
YMATRIX(2,5)=B3**2*XI/THICK
YMATRIX(3,3)=1/THICK
YMATRIX(3,4)=A1*B1*ETA/THICK
YMATRIX(3,5)=A3*B3*XI/THICK
C
C CALCULAREMOS LAS TENSIONES Y LAS GUARDAMOS EN EL VECTOR SVARS Y EN LA
VARIABLE UVAR_ARRAY
C
DO I=1,NSVINT
  SVARS(I)=ZERO
END DO
CALL MATVECPROD(YFJ,YMATRIX,FJ,3,NFJ)
DO I = 1,NSVINT
  SVARS(I)=SVARS(I)+YFJ(I,1)
END DO
DO I=1,NSVINT
  UVAR_ARRAY(JELEM,I,K)=SVARS(I)
END DO

```

```

    END DO
C
C AL FINAL DE LA SUBRUTINA PONEMOS RETURN Y END
C
    RETURN
END
C
C EN ESTA FUNCION NO CAMBIAREMOS NADA SALVO TAL VEZ IELEMOFFSET
C O TAL VEZ ESCRIBIR MAS O MENOS VALORES INFORMATIVOS AL FICHERO MSG
C
SUBROUTINE UVARM(UVAR,DIRECT,T,TIME,CMNAME,ORNAME,
1 NUVARM,NOEL,NPT,LAYER,KSPT,KSTEP,KINC,NDI,NSHR,COORD,
2 JMAC,JMATYP,MATLAYO,LACCFLA)
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
C ESTA SENTENCIA DEBE SER IGUAL QUE LA QUE TENIAMOS EN LA FUNCION UEL
C
PARAMETER (NELEM=1, NINPT=4, NSVINT=3)
C
C LOS ELEMENTOS DUMMY TIENEN INDICES IGUALES A LOS DE LOS ELEMENTOS REALES
SUMANDO 1000
C EN EJEMPLOS GRANDES PODRIAMOS SUMAR OTRA CANTIDAD, POR EJEMPLO 10000
C
PARAMETER (IELEMOFFSET = 1000)
C
C ESTAS LINEAS SIEMPRE IGUAL
C
CHARACTER*80 CMNAME,ORNAME
CHARACTER*3 FLGRAY(15)
DIMENSION UVAR(NUVARM),DIRECT(3,3),T(3,3),TIME(2)
DIMENSION ARRAY(15),JARRAY(15),JMAC(*),JMATYP(*),COORD(*)
C
C THE DIMENSIONS OF THE VARIABLES FLGRAY, ARRAY AND JARRAY
C MUST BE SET EQUAL TO OR GREATER THAN 15.
C
COMMON/KUSER/UVAR_ARRAY(NELEM,NSVINT,NINPT)
C
C DAMOS VALOR A LAS VARIABLES UVAR
C
UVAR(1:NSVINT) = UVAR_ARRAY(NOEL-IELEMOFFSET,1:NSVINT,NPT)
C
RETURN
END
C
C DISPLACEMENT-STRAIN MATRIX
SUBROUTINE BMATRIX(BMATRIX,RJACDET,XI,ETA,COORDS,NDOFEL,MCRD,NNODE)
C
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
DIMENSION BMATRIX(3,NDOFEL), COORDS(NDOFEL)
DIMENSION DERINAT(MCRD,NNODE), RJACINV(MCRD,MCRD)
DIMENSION DERIXY(MCRD,NNODE)
C
C INITIALIZE DISPLACEMENT-STRAIN MATRIX B
DO I=1,3
    DO J=1,NDOFEL
        BMATRIX(I,J)=0.0D0
    END DO
END DO
C
C DERIVATIVES OF SHAPE FUNCTIONS WITH RESPECT TO XI,ETA

```

```

      CALL SHAPEQ4 ( DERINAT,XI,ETA,MCRD,NNODE )
C
C INVERSE OF JACOBIAN, DETERMINANT OF JACOBIAN
      CALL JACOBIAN ( RJACINV,RJACDET,COORDS,DERINAT,MCRD,NNODE )
C
C DERIVATIVES OF SHAPE FUNCTIONS WITH RESPECT TO X,Y
      CALL MATMATPROD ( DERIXY,RJACINV,DERINAT,MCRD,MCRD,NNODE )
C
C DISPLACEMENT-STRAIN MATRIX 3X8
      BMATRX(1,1) = DERIXY(1,1)
      BMATRX(1,3) = DERIXY(1,2)
      BMATRX(1,5) = DERIXY(1,3)
      BMATRX(1,7) = DERIXY(1,4)
      BMATRX(2,2) = DERIXY(2,1)
      BMATRX(2,4) = DERIXY(2,2)
      BMATRX(2,6) = DERIXY(2,3)
      BMATRX(2,8) = DERIXY(2,4)
      BMATRX(3,1) = DERIXY(2,1)
      BMATRX(3,2) = DERIXY(1,1)
      BMATRX(3,3) = DERIXY(2,2)
      BMATRX(3,4) = DERIXY(1,2)
      BMATRX(3,5) = DERIXY(2,3)
      BMATRX(3,6) = DERIXY(1,3)
      BMATRX(3,7) = DERIXY(2,4)
      BMATRX(3,8) = DERIXY(1,4)

C
      RETURN
      END

C
      SUBROUTINE SHAPEQ4 ( DERINAT,XI,ETA,MCRD,NNODE )
C
      INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
      DIMENSION DERINAT(MCRD,NNODE)
C
      DERINAT(1,1)=-(1-ETA)/4
      DERINAT(2,1)=-(1-XI)/4
      DERINAT(1,2)=(1-ETA)/4
      DERINAT(2,2)=-(1+XI)/4
      DERINAT(1,3)=(1+ETA)/4
      DERINAT(2,3)=(1+XI)/4
      DERINAT(1,4)=-(1+ETA)/4
      DERINAT(2,4)=(1-XI)/4

C
      RETURN
      END

C
C JACOBIAN MATRIX, COMPUTES INVERSE OF JACOBIAN MATRIX AND
C DETERMINANT OF JACOBIAN MATRIX
      SUBROUTINE JACOBIAN ( RJACINV,RJACDET,COORDS,DERINAT,MCRD,NNODE )
C
      INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
      DIMENSION RJACINV(MCRD,MCRD),COORDS(MCRD,NNODE)
      DIMENSION DERINAT(MCRD,NNODE),TR(NNODE,MCRD)
      DIMENSION TJACADJ(MCRD,MCRD),RJACOB(MCRD,MCRD)
C
C TRANSPOSE COORDINATES MATRIX COORDS
      CALL TRANSMAT ( TR,COORDS,MCRD,NNODE )
C
      CALL MATMATPROD(RJACOB,DERINAT,TR,MCRD,NNODE,MCRD)

```

```

C
      TJACADJ(1,1) =      RJACOB(2,2)
      TJACADJ(1,2) = -1*RJACOB(1,2)
      TJACADJ(2,1) = -1*RJACOB(2,1)
      TJACADJ(2,2) =      RJACOB(1,1)
C
      RJACDET=RJACOB(1,1)*RJACOB(2,2)-RJACOB(1,2)*RJACOB(2,1)
C
      DO J = 1,MCRD
        DO I = 1,MCRD
          RJACINV(I,J)=TJACADJ(I,J)/RJACDET
        END DO
      END DO
C
      RETURN
    END
C
C      MATRIX MATRIX PRODUCT
      SUBROUTINE MATMATPROD(AXB,RMAT1,RMAT2,M1,N1,N2)
      INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
      DIMENSION AXB(M1,N2), RMAT1(M1,N1), RMAT2(N1,N2)
C
      DO I=1,M1
        DO J=1,N2
          AXB(I,J)=0.0D0
          DO K=1,N1
            AXB(I,J)=AXB(I,J)+RMAT1(I,K)*RMAT2(K,J)
          END DO
        END DO
      END DO
C
      RETURN
    END
C
C      MATRIX VECTOR PRODUCT
      SUBROUTINE MATVECPROD(RES,RMAT,VEC,M,N)
      INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
      DIMENSION RES(M), RMAT(M,N), VEC(N)
C
      DO I=1,M
        RES(I)=0.0D0
        DO J=1,N
          RES(I)=RES(I)+RMAT(I,J)*VEC(J)
        END DO
      END DO
C
      RETURN
    END
C
C      TRANSPOSE MATRIX
      SUBROUTINE TRANSMAT (TRMAT,RMAT,M,N)
      INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
      DIMENSION TRMAT(N,M), RMAT(M,N)
C
      DO I=1,N
        DO J=1,M
          TRMAT(I,J)=0.0D0
        END DO
      END DO

```

```

        END DO
C
DO J = 1,M
    DO I = 1,N
        TRMAT(I,J)=RMAT(J,I)
    END DO
END DO
C
RETURN
END

```

D.6. SFM METODOA, MATERIAL ISOTROPOA ETA ELEMENTU AXISIMETRIKOA

```

SUBROUTINE UEL(RHS,AMATRX,SVARS,ENERGY,NDOFEL,NRHS,NSVARS,
1   PROPS,NPROPS,COORDS,MCRD,NNODE,U,DU,V,A,JTYPE,TIME,DTIME,
2   KSTEP,KINC,JELEM,PARAMS,NDLOAD,JDLTYP,ADLMAG,PREDEF,
3   NPREF,LFLAGS,MLVARX,DDLMAg,MDLOAD,PNEWDT,JPROPS,NJPROP,
4   PERIOD)
C
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
PARAMETER(ZERO=0.D0)
C
C N° DE FUERZAS INDEPENDIENTES O N° DE PARAMETROS EN LAS FUNCIONES DE
INTERPOLACIÓN DE FUERZAS
PARAMETER (NFJ=7)
C
DIMENSION RHS(MLVARX,*),AMATRX(NDOFEL,NDOFEL),
1   SVARS(NSVARS),ENERGY(8),PROPS(*),COORDS(MCRD,NNODE),
2   U(NDOFEL),DU(MLVARX,*),DUB(NDOFEL,NRHS),V(NDOFEL),A(NDOFEL),
3   TIME(2),PARAMS(3),JDLTYP(MDLOAD,*),ADLMAG(MDLOAD,*),
4   DDLMAg(MDLOAD,*),PREDEF(2,NPREF,NNODE),LFLAGS(*),
5   JPROPS(*)
C
DIMENSION GPOINTS(2,4),GWEIGHTS(4), BMATRX(4,NDOFEL),SMATRX(4,4),
1   YMATRX(4,NFJ),EMATRX(NDOFEL,NFJ),GMATRX(NFJ,NFJ),
2   BT(NDOFEL,4),BTY(NDOFEL,NFJ),BTYJ(NDOFEL,NFJ),DUBV(NDOFEL),
3   RBTYJ(NDOFEL,NFJ),YT(NFJ,4),YTS(NFJ,4),YTSY(NFJ,NFJ),
4   YTSYJ(NFJ,NFJ),RYTSYJ(NFJ,NFJ),ET(NFJ,NDOFEL),GINV(NFJ,NFJ),
5   EGI(NDOFEL,NFJ),GIET(NFJ,NDOFEL),FJ(NFJ),YFJ(4,NFJ),
6   RJACOB(MCRD,MCRD),RJACINV(MCRD,MCRD),DERINAT(MCRD,NNODE),
7   SHAPEFUN(NNODE)
C
C EN EL SIGUIENTE CODIGO TENEMOS QUE DAR VALOR A LAS SIGUIENTES VARIABLES:
C   NELEM: NO. DE ELEMENTOS DE NUESTRO EJEMPLO
C   NINPT: NO. DE PTOS. DE INTEGRACION DEL ELEMENTO FINITO
C   NSVINT: NO. DE TENSIONES QUE VAMOS A VISUALIZAR
C
C THE FOLLOWING COMMON BLOCK IS USED TO STORE NSVINT VARIABLES,
C AT THE NINPT INTEGRATION POINTS OF NELEM ELEMENTS
PARAMETER (NELEM=1, NINPT=4, NSVINT=4)
COMMON/KUSER/UVAR_ARRAY(NELEM,NSVINT,NINPT)
C
C EN EL SIGUIENTE CODIGO CALCULAMOS LA MATRIZ DE RIGIDEZ AMATRX Y EL RESIDUO
C   RHS
C EN ESTE CASO, EL MODULO ELASTICO ES E, COEF. DE POISSON ES RNU,
C

```

```

PI=4.00*DATAN(1.00)
C
      E      = PROPS(1)
      RNU    = PROPS(2)
C
C GAUSS POINTS AND WEIGHTS, COMPLETE GAUSS QUADRATURE 2X2
      DATA GPOINTS /-0.577350269189626D0, -0.577350269189626D0,
2           0.577350269189626D0, -0.577350269189626D0,
3           -0.577350269189626D0, 0.577350269189626D0,
4           0.577350269189626D0, 0.577350269189626D0/
C
      DATA GWEIGHTS /1.0D0, 1.0D0, 1.0D0, 1.0D0/
C
C INITIALIZE EQUILIBRIUM MATRIX [E]
      DO I=1,NDOFEL
        DO J=1,NFJ
          EMATRX(I,J)= ZERO
        END DO
      END DO
C INITIALIZE FLEXIBILITY MATRIX [G]
      DO I=1,NFJ
        DO J=1,NFJ
          GMATRX(I,J)= ZERO
        END DO
      END DO
C INITIALIZE STIFFNESS MATRIX (AMATRX) AND RESIDUE (RHS)
      DO I=1, NDOFEL
        RHS(I,1)= ZERO
        DO J=1, NDOFEL
          AMATRX(I,J)= ZERO
        END DO
      END DO
C
C MATERIAL COMPLIANCE MATRIX (AXISYMMETRIC)
      SMATRX(1,1)=1/E
      SMATRX(1,2)=-RNU/E
      SMATRX(1,3)=-RNU/E
      SMATRX(1,4)=0
      SMATRX(2,1)=-RNU/E
      SMATRX(2,2)=1/E
      SMATRX(2,3)=-RNU/E
      SMATRX(2,4)=0
      SMATRX(3,1)=-RNU/E
      SMATRX(3,2)=-RNU/E
      SMATRX(3,3)=1/E
      SMATRX(3,4)=0
      SMATRX(4,1)=0
      SMATRX(4,2)=0
      SMATRX(4,3)=0
      SMATRX(4,4)=(2*(1+RNU))/E
C
C CYCLE FOR GAUSS POINT
      DO K=1,NINPT
        XI  = GPOINTS(1,K)
        ETA = GPOINTS(2,K)
C
C DISPLACEMENT-STRAIN MATRIX AND DETERMINANT OF JACOBIAN MATRIX
        CALL BMATRIX (BMATRX,RJACOB,RJACDET,RADCOORD,XI,ETA,COORDS,NDOFEL,
1             MCRD,NNODE)
C
      RJ11=RJACOB(1,1)

```

```

RJ12=RJACOB(1,2)
RJ21=RJACOB(2,1)
RJ22=RJACOB(2,2)
C FORCES INTERPOLATION FUNCTIONS [Y]
DO I=1,4
  DO J=1,NFJ
    YMATRIX(I,J)=ZERO
  END DO
END DO
YMATRIX(1,1)=1
YMATRIX(1,4)=(RJ11**2)*ETA
YMATRIX(1,5)=(RJ21**2)*XI
YMATRIX(2,2)=1
YMATRIX(2,4)=(RJ12**2)*ETA
YMATRIX(2,5)=(RJ22**2)*XI
YMATRIX(3,6)=1
YMATRIX(3,7)=RJ12*XII+RJ22*ETA
YMATRIX(4,3)=1
YMATRIX(4,4)=RJ11*RJ12*ETA
YMATRIX(4,5)=RJ21*RJ22*XII
C
C TRANSPOSE B MATRIX
CALL TRANSMAT(BT,BMATRIX,4,NDOFEL)
CALL MATMATPROD(BTY,BT,YMATRIX,NDOFEL,4,NFJ)
DO J = 1,NFJ
  DO I = 1,NDOFEL
    BTYJ(I,J)=RJACDET*BTY(I,J)
  END DO
END DO
RPI=2*PI*RADCOORD
DO J = 1,NFJ
  DO I = 1,NDOFEL
    RBTYJ(I,J)=RPI*BTYJ(I,J)
  END DO
END DO
DO J = 1,NFJ
  DO I = 1,NDOFEL
    EMATRIX(I,J)=EMATRIX(I,J)+GWEIGHTS(K)*RBTYJ(I,J)
  END DO
END DO
C
C TRANSPOSE Y MATRIX
CALL TRANSMAT(YT,YMATRIX,4,NFJ)
C ELEMENT FLEXIBILITY MATRIX [G]
CALL MATMATPROD(YTS,YT,SMATRIX,NFJ,4,4)
CALL MATMATPROD(YTSY,YTS,YMATRIX,NFJ,4,NFJ)
DO J = 1,NFJ
  DO I = 1,NFJ
    YTSYJ(I,J)=RJACDET*YTSY(I,J)
  END DO
END DO
DO J = 1,NFJ
  DO I = 1,NFJ
    RYTSYJ(I,J)=RPI*YTSYJ(I,J)
  END DO
END DO
DO J = 1,NFJ
  DO I = 1,NFJ
    GMATRIX(I,J)=GMATRIX(I,J)+GWEIGHTS(K)*RYTSYJ(I,J)
  END DO
END DO
END DO

```

```

      END DO
C
C TRANSPOSE EQUILIBRIUM MATRIX
  CALL TRANSMAT(ET,EMATRX,NDOFEL,NFJ)
C INVERSION OF FLEXIBILITY MATRIX
  CALL MATINV(1,NFJ,GMATRX,GINV)
C ELEMENT STIFFNESS MATRIX K=E*INV(G)*E'
  CALL MATMATPROD(EGI,EMATRX,GINV,NDOFEL,NFJ,NFJ)
  CALL MATMATPROD(AMATRX,EGI,ET,NDOFEL,NFJ,NDOFEL)
C
DO I=1,NDOFEL
  DO J=1,NRHS
    DUB(I,J)=DU(I,J)
  END DO
END DO
DO I=1,NDOFEL
  DUBV(I)=DU(I,1)
END DO
C
C INDEPENDENT FORCES FJ
  CALL MATMATPROD(GIET,GINV,ET,NFJ,NFJ,NDOFEL)
C
  CALL MATVECPROD(FJ,GIET,DUBV,NFJ,NDOFEL)
C
C RHS SERA EL PRODUCTO AMATRX*DU CON SIGNO MENOS
  CALL MATMATPROD(RHS,AMATRX,DUB,NDOFEL,NDOFEL,NRHS)
C
DO I=1, NDOFEL
  RHS(I,1)=-RHS(I,1)
END DO
C
C CYCLE FOR GAUSS POINT
  DO K=1,NINPT
    XI = GPOINTS(1,K)
    ETA = GPOINTS(2,K)
  C
C DERIVATIVES OF SHAPE FUNCTIONS WITH RESPECT TO XI,ETA
    CALL SHAPEQ4 (SHAPEFUN,DERINAT,XI,ETA,MCRD,NNODE)
  C
C JACOBIAN, INVERSE OF JACOBIAN, DETERMINANT OF JACOBIAN
    CALL JACOBIAN (RJACOB,RJACINV,RJACDET,COORDS,DERINAT,MCRD,NNODE)
  C
    RJ11=RJACOB(1,1)
    RJ12=RJACOB(1,2)
    RJ21=RJACOB(2,1)
    RJ22=RJACOB(2,2)
  C
C FORCES INTERPOLATION FUNCTIONS [Y]
    DO I=1,4
      DO J=1,NFJ
        YMATRIX(I,J)=ZERO
      END DO
    END DO
    YMATRIX(1,1)=1
    YMATRIX(1,4)=(RJ11**2)*ETA
    YMATRIX(1,5)=(RJ21**2)*XI
    YMATRIX(2,2)=1
    YMATRIX(2,4)=(RJ12**2)*ETA
    YMATRIX(2,5)=(RJ22**2)*XI
    YMATRIX(3,6)=1
    YMATRIX(3,7)=RJ12*X1+RJ22*ETA
  
```

```

YMATRX(4,3)=1
YMATRX(4,4)=RJ11*RJ12*ETA
YMATRX(4,5)=RJ21*RJ22*XI
C
C CALCULAREMOS LAS TENSIONES Y LAS GUARDAMOS EN EL VECTOR SVARS Y EN LA
VARIABLE UVAR_ARRAY
C
DO I=1,NSVINT
  SVARS(I)=ZERO
END DO
CALL MATVECPROD(YFJ,YMATRX,FJ,4,NFJ)
DO I = 1,NSVINT
  SVARS(I)=SVARS(I)+YFJ(I,1)
END DO
DO I=1,NSVINT
  UVAR_ARRAY(JELEM,I,K)=SVARS(I)
END DO
END DO

C
RETURN
END

C
SUBROUTINE UVARM(UVAR,DIRECT,T,TIME,DTIME,CMNAME,ORNAME,
1 NUVARM,NOEL,NPT,LAYER,KSPT,KSTEP,KINC,NDI,NSHR,COORD,
2 JMAC,JMATYP,MATLayo,LACCFLA)
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'

C
C ESTA SENTENCIA DEBE SER IGUAL QUE LA QUE TENIAMOS EN LA FUNCION UEL
C
PARAMETER (NELEM=1, NINPT=4, NSVINT=4)

C
C LOS ELEMENTOS DUMMY TIENEN INDICES IGUALES A LOS DE LOS ELEMENTOS REALES
C SUMANDO 1000
C EN EJEMPLOS GRANDES PODRIAMOS SUMAR OTRA CANTIDAD, POR EJEMPLO 10000
C
PARAMETER (IELEMOFFSET = 1000)

C
CHARACTER*80 CMNAME,ORNAME
CHARACTER*3 FLGRAY(15)
DIMENSION UVAR(NUVARM),DIRECT(3,3),T(3,3),TIME(2)
DIMENSION ARRAY(15),JARRAY(15),JMAC(*),JMATTYP(*),COORD(*)

C
C THE DIMENSIONS OF THE VARIABLES FLGRAY, ARRAY AND JARRAY
C MUST BE SET EQUAL TO OR GREATER THAN 15.
C
COMMON/KUSER/UVAR_ARRAY(NELEM,NSVINT,NINPT)
C
UVAR(1:NSVINT) = UVAR_ARRAY(NOEL-IELEMOFFSET,1:NSVINT,NPT)
C
RETURN
END

C
C DISPLACEMENT-STRAIN MATRIX
SUBROUTINE BMATRIX(BMATRIX,RJACOB,RJACDET,RADCOORD,XI,ETA,COORDS,
1 NDOFEL,MCRD,NNODE)
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'

DIMENSION BMATRIX(4,NDOFEL), COORDS(MCRD,NNODE)
DIMENSION DERINAT(MCRD,NNODE), RJACINV(MCRD,MCRD)
DIMENSION DERIXY(MCRD,NNODE), RJACOB(MCRD,MCRD)

```

```

      DIMENSION SHAPEFUN(NNODE)
C
C INITIALIZE DISPLACEMENT-STRAIN MATRIX B
      DO I=1,4
        DO J=1,NDOFEL
          BMATRX(I,J)=0.0D0
        END DO
      END DO
C
C DERIVATIVES OF SHAPE FUNCTIONS WITH RESPECT TO XI,ETA
      CALL SHAPEQ4 ( SHAPEFUN,DERINAT,XI,ETA,MCRD,NNODE )
C
C INVERSE OF JACOBIAN, DETERMINANT OF JACOBIAN
      CALL JACOBIAN ( RJACOB,RJACINV,RJACDET,COORDS,DERINAT,MCRD,NNODE )
C
C DERIVATIVES OF SHAPE FUNCTIONS WITH RESPECT TO X,Y
      CALL MATMATPROD ( DERIXY,RJACINV,DERINAT,MCRD,MCRD,NNODE )
C
C RADIAL COORDINATE r=Sum(Ni*(xi,eta))
      RADCOORD=COORDS(1,1)*SHAPEFUN(1)+COORDS(1,2)*SHAPEFUN(2)
      RADCOORD=RADCOORD+COORDS(1,3)*SHAPEFUN(3)
      RADCOORD=RADCOORD+COORDS(1,4)*SHAPEFUN(4)
C
C DISPLACEMENT-STRAIN MATRIX 4X8
      BMATRX(1,1) = DERIXY(1,1)
      BMATRX(1,3) = DERIXY(1,2)
      BMATRX(1,5) = DERIXY(1,3)
      BMATRX(1,7) = DERIXY(1,4)
      BMATRX(2,2) = DERIXY(2,1)
      BMATRX(2,4) = DERIXY(2,2)
      BMATRX(2,6) = DERIXY(2,3)
      BMATRX(2,8) = DERIXY(2,4)
      BMATRX(3,1) = SHAPEFUN(1)/RADCOORD
      BMATRX(3,3) = SHAPEFUN(2)/RADCOORD
      BMATRX(3,5) = SHAPEFUN(3)/RADCOORD
      BMATRX(3,7) = SHAPEFUN(4)/RADCOORD
      BMATRX(4,1) = DERIXY(2,1)
      BMATRX(4,2) = DERIXY(1,1)
      BMATRX(4,3) = DERIXY(2,2)
      BMATRX(4,4) = DERIXY(1,2)
      BMATRX(4,5) = DERIXY(2,3)
      BMATRX(4,6) = DERIXY(1,3)
      BMATRX(4,7) = DERIXY(2,4)
      BMATRX(4,8) = DERIXY(1,4)
C
      RETURN
    END
C
C SUBROUTINE SHAPEQ4 ( SHAPEFUN,DERINAT,XI,ETA,MCRD,NNODE )
C
      INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
      DIMENSION DERINAT(MCRD,NNODE), SHAPEFUN(NNODE)
C
      SHAPEFUN(1)=(1-XI)*(1-ETA)/4
      SHAPEFUN(2)=(1+XI)*(1-ETA)/4
      SHAPEFUN(3)=(1+XI)*(1+ETA)/4
      SHAPEFUN(4)=(1-XI)*(1+ETA)/4
C
      DERINAT(1,1)=-(1-ETA)/4
      DERINAT(2,1)=-(1-XI)/4

```

```

DERINAT(1,2)= (1-ETA)/4
DERINAT(2,2)=- (1+XI)/4
DERINAT(1,3)= (1+ETA)/4
DERINAT(2,3)= (1+XI)/4
DERINAT(1,4)=- (1+ETA)/4
DERINAT(2,4)= (1-XI)/4
C
RETURN
END
C
C JACOBIAN MATRIX, COMPUTES INVERSE OF JACOBIAN MATRIX AND
C DETERMINANT OF JACOBIAN MATRIX
SUBROUTINE JACOBIAN (RJACOB,RJACINV,RJACDET,COORDS,DERINAT,MCRD,
1 NNODE)
C
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
DIMENSION RJACINV(MCRD,MCRD),COORDS(MCRD,NNODE)
DIMENSION DERINAT(MCRD,NNODE),TR(NNODE,MCRD)
DIMENSION TJACADJ(MCRD,MCRD),RJACOB(MCRD,MCRD)
C
TRANSPOSE COORDINATES MATRIX COORDS
CALL TRANSMAT (TR,COORDS,MCRD,NNODE)
C
CALL MATMATPROD(RJACOB,DERINAT,TR,MCRD,NNODE,MCRD)
C
TJACADJ(1,1) = RJACOB(2,2)
TJACADJ(1,2) = -1*RJACOB(1,2)
TJACADJ(2,1) = -1*RJACOB(2,1)
TJACADJ(2,2) = RJACOB(1,1)
C
RJACDET=RJACOB(1,1)*RJACOB(2,2)-RJACOB(1,2)*RJACOB(2,1)
C
DO J = 1,MCRD
  DO I = 1,MCRD
    RJACINV(I,J)=TJACADJ(I,J)/RJACDET
  END DO
END DO
C
RETURN
END
C
MATRIX MATRIX PRODUCT
SUBROUTINE MATMATPROD(AXB,RMAT1,RMAT2,M1,N1,N2)
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
DIMENSION AXB(M1,N2), RMAT1(M1,N1), RMAT2(N1,N2)
C
DO I=1,M1
  DO J=1,N2
    AXB(I,J)=0.0D0
    DO K=1,N1
      AXB(I,J)=AXB(I,J)+RMAT1(I,K)*RMAT2(K,J)
    END DO
  END DO
END DO
C
RETURN
END
C
MATRIX VECTOR PRODUCT

```

```
SUBROUTINE MATVECPROD(RES,RMAT,VEC,M,N)
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
DIMENSION RES(M), RMAT(M,N), VEC(N)
C
DO I=1,M
  RES(I)=0.0D0
  DO J=1,N
    RES(I)=RES(I)+RMAT(I,J)*VEC(J)
  END DO
END DO
C
RETURN
END
C
C TRANSPOSE MATRIX
SUBROUTINE TRANSMAT (TRMAT,RMAT,M,N)
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
DIMENSION TRMAT(N,M), RMAT(M,N)
C
DO I=1,N
  DO J=1,M
    TRMAT(I,J)=0.0D0
  END DO
END DO
C
DO J = 1,M
  DO I = 1,N
    TRMAT(I,J)=RMAT(J,I)
  END DO
END DO
C
RETURN
END
```

D.7. TENTSIOAK KOORDENATU POLARRETAN

Tentsioen emaitzak koordenatu polarretan lortzeko beharrezko da x , y erreferentzia sisteman lorturiko tentsioak transformazio matrizearekin biderkatzea. Horretarako azpirrutinan hainbat aldagai berri gehitzea beharrezkoa da. Atal honetan D.4 eranskinako azpirrutinari tentsioen emaitzak koordenatu polarretan ere lortzeko gehituriko lerroak daude.

```
SUBROUTINE UVARM
.
.
.
C CALCULAREMOS LAS TENSIONES Y LAS GUARDAMOS EN EL VECTOR SVARS Y EN LA
VARIABLE UVAR_ARRAY
C
DO I=1,NSVINT
  SVARS(I)=ZERO
END DO
```

```

DO I=1,3
  SCART(I)=ZERO
  SPOLAR(I)=ZERO
END DO
CALL MATVECPROD(YFJ,YMATRIX,FJ,3,NFJ)
DO I = 1,NSVINT
  SVARS(I)=SVARS(I)+YFJ(I,1)
END DO
C
C GUARDAMOS LAS TENSIONES EN COORD. CARTESIANAS EN LA VARIABLE SCART
DO I=1,3
  SCART(I)=SVARS(I)
END DO
C
C SHAPE FUNCTIONS AND THEIR DERIVATIVES WITH RESPECT TO XI,ETA
CALL SHAPEQ4 (DERINAT,SHAPEFUN,XI,ETA,MCRD,NNODE)
C
C CARTESIAN COORDINATES OF INTEGRATION (GAUSS) POINTS
  XINPT=COORDS(1,1)*SHAPEFUN(1)+COORDS(1,2)*SHAPEFUN(2)
  XINPT=XINPT+COORDS(1,3)*SHAPEFUN(3)+COORDS(1,4)*SHAPEFUN(4)
  YINPT=COORDS(2,1)*SHAPEFUN(1)+COORDS(2,2)*SHAPEFUN(2)
  YINPT=YINPT+COORDS(2,3)*SHAPEFUN(3)+COORDS(2,4)*SHAPEFUN(4)
C
C ANGLE THETA IN POLAR COORDINATES OF THE INTEGRATION POINT
  ANGRAD=ATAN2(YINPT,XINPT)
C
C STRESSES IN POLAR COORDINATES
  CALL POLARSTRESS(SPOLAR,SCART,ANGRAD)
C
C GUARDAMOS LOS VALORES DE LAS TENSIONES EN POLARES DETRAS DE LOS VALORES EN
CARTESIANAS
DO I=4,NSVINT
  SVARS(I)=SPOLAR(I-3)
END DO
C GUARDAMOS LOS VALORES DE LAS TENSIONES EN LOS PUNTOS DE GAUSS EN UVAR_ARRAY
DO I=1,NSVINT
  UVAR_ARRAY(JELEM,I,K)=SVARS(I)
END DO
END DO

C TRANSFORMATION OF STRESS VALUES FROM X,Y COORDINATES TO POLAR COORDINATES
SUBROUTINE POLARSTRESS(SPOLAR,SCART,ANGRAD)
  INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
  DIMENSION SPOLAR(3), SCART(3), TRMTRX(3,3)
C
C DEFINE TRANSFORMATION MATRIX
  TRMTRX(1,1)=COS(ANGRAD)**2
  TRMTRX(1,2)=SIN(ANGRAD)**2
  TRMTRX(1,3)=2.*COS(ANGRAD)*SIN(ANGRAD)
  TRMTRX(2,1)=SIN(ANGRAD)**2
  TRMTRX(2,2)=COS(ANGRAD)**2
  TRMTRX(2,3)=-2.*COS(ANGRAD)*SIN(ANGRAD)
  TRMTRX(3,1)=-COS(ANGRAD)*SIN(ANGRAD)
  TRMTRX(3,2)=COS(ANGRAD)*SIN(ANGRAD)
  TRMTRX(3,3)=COS(ANGRAD)**2-SIN(ANGRAD)**2
C
  CALL MATVECPROD(SPOLAR,TRMTRX,SCART,3,3)
RETURN
END

```

E. SARRERAKO DATUEN FITXATEGIAK

E.1. ERDIAN ZULO ZIRKULARRA DUEN PLAKA NORABIDE BAKARREKO TRAKZIOPEAN

```
*Heading
** Job name: OpenHole Unid 5_6 Model name: Model-5_6
** Generated by: Abaqus/CAE 6.12-1
*Preprint, echo=NO, model=NO, history=NO, contact=NO
** -----
**
** PART INSTANCE: Part-1-1
**
*Node, input=Nodos_5_6.inp
** BEGIN SUBROUTINE ELEMENT
*USER ELEMENT,NODES=4,TYPE=U1001,COORDINATES=2,VARIABLES=24
1,2
** END SUBROUTINE ELEMENT
**
** BEGIN NEW REAL ELSET
*include, input=Elements_5_6.inp
*Element, type=U1001
*Nset, nset=Part-1-1 PickedSet2, generate
  1, 11369,      1
*Elset, elset=Part-1-1 PickedSet2, generate
  1, 11136,      1
*UEL PROPERTY,ELSET=Part-1-1_PickedSet2
** END NEW REAL ELSET
**
** BEGIN DUMMY ELSET (dummy indices= indices+100000)
*include, input=Dummy_5_6.inp
** END DUMMY ELSET
**
*System
*Nset, nset=_PickedSet5
  2353, 2354, 2355, 2356, 2357, 2358, 2359, 2360, 2361, 2362, 2363, 2364, 2365,
.
.
.
4887,
*Elset, elset=_PickedSet5
  2257, 2258, 2259, 2260, 2261, 2262, 2263, 2264, 2265, 2266, 2267, 2268, 2269,
.
.
.
6910, 6911, 6912
*Nset, nset=_PickedSet6
  2402, 2403, 2404, 2405, 2441, 2443, 2444, 2445, 2447, 2451, 2452, 2453, 2454,
.
.
.
9505, 9511, 9514, 9518, 9519, 9526, 9527, 9529, 9534
*Elset, elset=_PickedSet6
  4561, 4562, 4563, 4564, 4565, 4566, 4567, 4568, 4569, 4570, 4571,
```

```
10800, 10848, 10896, 10944, 10992, 11040, 11088, 11136
*Nset, nset=lim
    1,    50,    99,   148,   197,   246,   295,   344,   393,   442,   491,   540,   589,
.
.
.
    638,   687,   736
2544,
*Elset, elset=lim
    1,    49,    97,   145,   193,   241,   289,   337,   385,   433,   481,   529,   577,
.
.
.
4512, 4560, 4608
*Nset, nset=lim 2
    2353, 2354, 2355, 2356, 2357, 2358, 2359, 2360, 2361, 2362, 2363, 2364, 2365,
.
.
.
4887,
*Elset, elset=lim 2
    2257, 2258, 2259, 2260, 2261, 2262, 2263, 2264, 2265, 2266, 2267, 2268, 2269,
.
.
.
6910, 6911, 6912
**BEGIN FORCE ELEMENT SETS
*Elset, elset= PickedSurf4_S3, generate
    111089, 111136,      1
*Surface, type=ELEMENT, name=_PickedSurf4
    PickedSurf4 S3, S3
**END FORCE ELEMENT SETS
**
**
** MATERIALS
**
*Material, name=Material-1
*Elastic, type=LAMINA
1e-20,1e-20, 0.34,1e-20,1e-20,1e-20
**
** BEGIN USER OUTPUT VARIABLES
*user output variables
6,
** END USER OUTPUT VARIABLES
** BOUNDARY CONDITIONS
**
** Name: BC-bottom Type: Displacement/Rotation
*Boundary
    PickedSet6, 2, 2
** Name: BC-left Type: Displacement/Rotation
*Boundary
    PickedSet5, 1, 1
** -----
**
** STEP: Apply load
**
** BEGIN ANALYSIS TYPE
*Step, name="Apply load"
*Static
1., 1., 1e-05, 1.
** END ANALYSIS TYPE
```

```
**
** LOADS
**
** Name: CargaDistribuida Type: Surface traction
*Dload, constant resultant=YES
 PickedSurf4, TRVEC, 100., 1., 0., 0.
**
** BEGIN KEYWORD OUTPUT DEFINITION
** OUTPUT REQUESTS
**
*Restart, write, frequency=0
**
** FIELD OUTPUT: F-Output-1
**
*Output, field, variable=PRESELECT
*element output, elset=dummy
uvarm,
**
** HISTORY OUTPUT: H-Output-1
**
*Output, history, variable=PRESELECT
*EL PRINT,ELSET=dummy
UVARM1,UVARM2,UVARM3,UVARM4,UVARM5,UVARM6
*NODE PRINT
RF,U
** END KEYWORD OUTPUT DEFINITION
*End Step
```

E.2. ZUNTZAREN ETA MATRIZEAREN ARTEKO ITSASPENAREN ANALISIA KONPOSITETAN

```
*Heading
** Job name: Job-2 Imp 144el Model name: Model-2_Imp_144el
** Generated by: Abaqus/CAE 6.12-1
*Preprint, echo=NO, model=NO, history=NO, contact=NO
** -----
**
** PART INSTANCE: Part-1-1
**
*Node,input=Nodos2.inp
** BEGIN SUBROUTINE ELEMENT
*USER ELEMENT,NODES=4,TYPE=U1001,COORDINATES=2,PROPERTIES=2,VARIABLES=16
1,2
*USER ELEMENT,NODES=4,TYPE=U1002,COORDINATES=2,PROPERTIES=2,VARIABLES=16
1,2
** END SUBROUTINE ELEMENT
**
** BEGIN NEW REAL ELSET
*include, input=MatrizeEl2.inp
*include, input=ZuntzaEl2.inp
*Nset, nset=Part-1-1 Zuntza
*include, input=ZuntzaN2.inp
*Elset, elset=Part-1-1_Zuntza, generate
 121, 144, 1
*Nset, nset=Part-1-1 Matrizea
*include, input=MatrizeN2.inp
*Elset, elset=Part-1-1_Matrizea, generate
 1, 120, 1
```

```

*UEL PROPERTY,ELSET=Part-1-1_Zuntza
64000,0.2
*UEL PROPERTY,ELSET=Part-1-1_Matrisea
3000,0.35
** END NEW REAL ELSET
**
** BEGIN DUMMY ELSET (dummy indices= indices+1000)
*include, input=Dummy_1.inp
*include, input=Dummy_2.inp
** END DUMMY ELSET
**
*System
*Nset, nset=Bottom
 3, 4, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27
*Elset, elset=Bottom, generate
 12, 120, 12
*Nset, nset=Axis
 7, 8, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60
*Elset, elset=Axis, generate
 133, 144, 1
*Nset, nset=Imp
 6, 7, 49
*Elset, elset=Imp
 132, 144
*Elset, elset=LIM, generate
 1121, 1132, 1
*Elset, elset=_Traction_S2
 1132, 1144
*Surface, type=ELEMENT, name=Traction
 _Traction_S2, S2
**
** MATERIALS
**
*Material, name=Matrisea
*Elastic
1e-20, 0.35
** BEGIN USER OUTPUT VARIABLES
*user output variables
 4
*Material, name=Zuntza
*Elastic
1e-20, 0.2
*user output variables
 4,
** END USER OUTPUT VARIABLES
**
** BOUNDARY CONDITIONS
**
** Name: BC-Axis Type: Displacement/Rotation
*Boundary
Axis, 1, 1
** Name: Bottom Type: Displacement/Rotation
*Boundary
Bottom, 2, 2
** -----
**
** STEP: Apply load
**
*Step, name="Apply load"
*Static
1., 1., 1e-05, 1.

```

```
**
** BOUNDARY CONDITIONS
**
** Name: BC-Imp Type: Displacement/Rotation
*Boundary
Imp, 2, 2, 9.555e-05
**
** OUTPUT REQUESTS
**
*Restart, write, frequency=0
**
** FIELD OUTPUT: F-Output-1
**
*Output, field, variable=PRESELECT
*element output, elset=dummy_1
uvarm,
*element output, elset=dummy_2
uvarm,
**
** HISTORY OUTPUT: H-Output-1
**
*Output, history, variable=PRESELECT
*EL PRINT,ELSET=dummy_1
UVARM1,UVARM2,UVARM3,UVARM4
*EL PRINT,ELSET=dummy_2
UVARM1,UVARM2,UVARM3,UVARM4
*NODE PRINT
RF,U
** END KEYWORD OUTPUT DEFINITION
*End Step
```

E.3. SEKZIO ALDAKORRA DUEN HABEA

```
*Heading
** Job name: Job-1_4el_CPS4 Model name: Model-1
** Generated by: Abaqus/CAE 6.12-1
*Preprint, echo=NO, model=NO, history=NO, contact=NO
** -----
**
** PART INSTANCE: Part-1-1
**
*Node
    1,          0.,          44.
    2,          0.,          22.
    3,          0.,          0.
    4,         24.,          52.
    5,         24.,          37.
    6,         24.,          22.
    7,         48.,          60.
    8,         48.,          52.
    9,         48.,          44.
**
** BEGIN SUBROUTINE ELEMENT
*USER ELEMENT,NODES=4,TYPE=U1001,COORDINATES=2,VARIABLES=12
1,2
**
** END SUBROUTINE ELEMENT
** BEGIN NEW REAL ELSET
*Element, type=U1001
1, 1, 2, 5, 4
```

```

2, 2, 3, 6, 5
3, 4, 5, 8, 7
4, 5, 6, 9, 8
*Nset, nset=Part-1-1__PickedSet2, generate
1, 9, 1
*Elset, elset=Part-1-1__PickedSet2, generate
1, 4, 1
*UEL PROPERTY,ELSET=Part-1-1__PickedSet2
** END NEW REAL ELSET
**
** BEGIN DUMMY ELSET (dummy indices= indices+1000)
*Element, type=CPS4, elset=dummy
1001, 1, 2, 5, 4
1002, 2, 3, 6, 5
1003, 4, 5, 8, 7
1004, 5, 6, 9, 8
** Section: Section-1
*Solid Section, elset=dummy, material=Isotr_material
1.,
** END DUMMY ELSET
**
*System
*Nset, nset=_PickedSet16, generate
1, 3, 1
*Elset, elset=_PickedSet16
1, 2
**BEGIN FORCE ELEMENT SETS
*Elset, elset=_PickedSurf5_S3
1003, 1004
*Surface, type=ELEMENT, name=_PickedSurf5
    PickedSurf5 S3, S3
**END ELEMENT SETS
**
** MATERIALS
**
*Material, name=Isotr_material
*Elastic
1e-20, 0.333333
** BEGIN USER OUTPUT VARIABLES
*user output variables
3
** END USER OUTPUT VARIABLES
**
** BOUNDARY CONDITIONS
**
** Name: BC-left Type: Displacement/Rotation
*Boundary
    PickedSet16, 1, 1
    PickedSet16, 2, 2
** -----
**
** STEP: Apply-load
**
*Step, name=Apply-load
*Static
1., 1., 1e-05, 1.
**
** LOADS
**
** Name: Load-1 Type: Surface traction
*Dload, constant resultant=YES

```

```
_PickedSurf5, TRSHR, 0.0625, 0., 1., 0.  
**  
** OUTPUT REQUESTS  
**  
*Restart, write, frequency=0  
**  
** FIELD OUTPUT: F-Output-1  
**  
*Output, field, variable=PRESELECT  
*element output, elset=dummy  
uvarm,  
**  
** HISTORY OUTPUT: H-Output-1  
**  
*Output, history, variable=PRESELECT  
*EL PRINT,ELSET=dummy  
UVARM1,UVARM2,UVARM3  
*NODE PRINT  
RF,U  
** END KEYWORD OUTPUT DEFINITION  
*End Step
```