

eman ta zabal zazu



Universidad Euskal Herriko
del País Vasco Unibertsitatea

Escuela de Ingeniería de Bilbao
Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

CONTROL PREDICTIVO BASADO EN MODELO PARA CONTROL LATERAL DE VEHÍCULOS

Sara Mata Cantón

**Tesis dirigida por
Dr. Asier Zubizarreta Pico
Dr. Charles Pinto**

Marzo 2018

Índice general	a
1 Introducción	1
1.1. Motivación del trabajo	1
1.2. Objetivos de la tesis	5
1.3. Estructura de la tesis	6
2 Modelado dinámico de vehículos	9
2.1. Introducción: El modelado vehicular	9
2.2. Modelado de la dinámica vehicular: Trabajos relacionados	11
2.2.1. Finalidad de los modelos	13
2.2.2. Alcance de los modelos	15
2.2.3. Métodos de modelado	18
2.3. Metodología de modelado para control lateral	24
2.3.1. Consideraciones previas	25
2.3.2. Modelo para control: Modelo bicicleta	27
2.4. Validación del modelo de control	33
2.4.1. Entorno de simulación y definición de experimentos	33
2.4.2. Resultados	37
2.5. Conclusiones	48
3 Control lateral de vehículos: Estado del Arte	53
3.1. Introducción	53
3.2. Controladores no predictivos	56
3.2.1. Controladores no robustos	56
3.2.2. Control Robusto	60
3.2.3. Resumen controladores no predictivos	63
3.3. Control Predictivo	64
3.3.1. Modelos no lineales	66
3.3.2. Modelos no lineales linealizados	68

3.3.3. Modelos lineales	70
3.4. Conclusiones	71
4 Control Predictivo basado en Modelo	75
4.1. Introducción	75
4.2. Introducción al Control Predictivo basado en Modelo	76
4.2.1. Estrategia del MPC	77
4.2.2. Componentes MPC	78
4.2.3. Comparativa con otros esquemas de control	81
4.3. Control Predictivo basado en Modelo en Espacio de Estados	82
4.3.1. Fundamentos matemáticos	83
4.3.2. Modelo de predicción en Espacio de Estados	86
4.3.3. Función de coste	90
4.3.4. Restricciones	92
4.3.5. Optimizador	96
4.4. Aplicación: MPC basado en modelo LTV al control lateral de un vehículo utilitario	97
4.4.1. Modelo LTV para control	97
4.4.2. Función de coste	99
4.4.3. Cálculo de la referencia	100
4.4.4. Restricciones	102
4.4.5. Cálculo de la ley de control	105
4.4.6. Resumen	105
4.5. Validación	106
4.5.1. Entorno de simulación y definición de experimentos	106
4.5.2. Resultados	112
4.6. Conclusiones	114
5 MPC con Estabilidad Garantizada	119
5.1. Introducción	119
5.2. La estabilidad en el MPC	121
5.2.1. Consideraciones previas: Conjuntos Invariantes	121
5.2.2. Estabilidad en MPC	122
5.2.3. Estabilidad para MPC basado en LTV	123
5.3. Formulación de MPC estable para modelos LTV	125
5.3.1. Ley de control	125
5.3.2. Inclusión del coste terminal y la región terminal en la función de coste	126
5.4. Aplicación: MPC con estabilidad garantizada al control lateral de un vehículo	129
5.4.1. Modelo LTV para control	129
5.4.2. Ecuación de predicción	130
5.4.3. Ley de control local asociado al invariante	132
5.4.4. Función de coste	133

5.4.5. Restricciones	134
5.4.6. Ley de control	136
5.4.7. Resumen	137
5.5. Validación	137
5.5.1. Entorno de simulación y definición de experimentos	137
5.5.2. Resultados	141
5.6. Conclusiones	146
6 MPC Robusto con Estabilidad Garantizada	149
6.1. Introducción	149
6.2. MPC robusto con estabilidad garantizada	150
6.2.1. Descripción del problema	151
6.2.2. Tubo de trayectorias	151
6.2.3. Consideraciones de estabilidad	154
6.2.4. MPC robusto basado en tubos de trayectorias	155
6.3. Aplicación: MPC Robusto para control lateral de vehículo utilitario	156
6.3.1. Modelo de predicción	156
6.3.2. Parámetros del controlador	159
6.3.3. Restricciones	159
6.3.4. Función de coste	163
6.3.5. Ley de Control	164
6.4. Validación	165
6.4.1. Entorno de simulación	165
6.4.2. Resultados	171
6.5. Conclusiones	174
7 Conclusiones	181
7.1. Conclusiones	181
7.2. Líneas futuras	184
Índice de tablas	185
Índice de figuras	187
Referencias en la Tesis	191

1.1. Motivación del trabajo

Históricamente la seguridad de los pasajeros en los vehículos a motor controlados por humanos ha estado enfocada a sistemas de seguridad pasiva. El enfoque de este tipo de sistemas se centra principalmente en minimizar el daño a los ocupantes y peatones una vez se ha producido un accidente o la colisión. El sistema de seguridad pasiva por excelencia es el cinturón de seguridad. Inventado en la década de los 30 para su uso en aeronaves, su incorporación en automóviles comerciales no se produjo hasta mediados de los 50 por Ford. Actualmente, es el sistema de seguridad pasiva más extendido, siendo su uso obligatorio en muchos países, y se considera como el sistema de seguridad pasiva más efectivo jamás inventado. Posteriormente se diseñaron nuevos sistemas de seguridad pasiva, como el Airbag, consistente en una bolsa de aire que se hincha mediante una reacción química al detectar una colisión, consiguiendo amortiguar el impacto de los pasajeros del vehículo contra el volante,

panel de instrumentos o ventanillas; o por ejemplo, la carrocería deformable, que consigue absorber el impacto y reducir la energía del mismo, así como deformarse de un modo que maximice la seguridad de los ocupantes.

Sin embargo, el enfoque de estos sistemas de seguridad en vehículos ha evolucionado con los años pasando de simplemente tratar de minimizar el daño causado por las colisiones a directamente evitarlas [4], surgiendo así los denominados sistemas de seguridad activa. Durante las últimas décadas, el desarrollo tecnológico ha conllevado el incremento del número de dispositivos electrónicos en los automóviles [55]. Hoy en día, los vehículos incluyen sofisticados sistemas de seguridad activa con el fin de evitar accidentes y al mismo tiempo ayudar al conductor con la controlabilidad y estabilidad del vehículo, especialmente en situaciones de emergencia [8].

Los primeros trabajos en sistemas de seguridad activa datan de la década de los 80 y estaban enfocados principalmente a la mejora del comportamiento longitudinal del vehículo. Ejemplos de estos sistemas son el Sistema Antibloqueo de Ruedas o Frenos Antibloqueo (ABS) que mejora la eficiencia de la frenada evitando el bloqueo de las ruedas al frenar; o el Control de Tracción (TC) que previene el deslizamiento de las ruedas y mejora la estabilidad del vehículo y la maniobrabilidad maximizando la tracción y las fuerzas laterales entre los neumáticos y la carretera. Estos sistemas han sido mejorados durante estos años, proponiendo diferentes sistemas de Control de Tracción, como el Programa de Estabilidad Electrónica (ESP), entre otros.

Por lo tanto, analizando los progresos de los sistemas de seguridad en automoción, se comprueba que la tendencia se centra en la investigación y desarrollo de los sistemas de seguridad activa, debido al amplio abanico de posibilidades que ofrecen gracias a las nuevas tecnologías.

Sistemas de Seguridad Activa Avanzados

Recientes progresos en la tecnología sensorica, como la visión por ordenador, la geolocalización y la reconstrucción de entornos 3D han impulsado las posibilidades en los sistemas de seguridad activa. Estos sistemas aportan múltiples ventajas en la estabilidad, seguridad, ergonomía de los vehículos y consumo de energía. Dichos sistemas de seguridad activa adquieren el nombre de Sistemas Avanzados de Asistencia a la Conducción o ADAS, *Advanced Driving Assistance Systems* [32]. A continuación se recogen los sistemas ADAS más empleados en vehículos comerciales:

- **Luces autoadaptables.** La conducción nocturna suele ser muy delicada porque la visibilidad en carreteras no iluminadas se reduce considerablemente. Para solventarlo, las luces autoadaptables gestionan la capacidad lumínica del vehículo ajustándolo a un patrón de iluminación en función de la velocidad, el entorno y las condiciones.
- **Detección de ángulo muerto.** Con el fin de evitar accidente durante las maniobras por objetos, peatones o vehículos situados en los ángulos muertos del

vehículo, este sistema indica al conductor que probablemente haya un objeto no visible en esa zona.

- **Sistema de alerta del estado del conductor.** Este tipo de sistemas detectan que el conductor no se encuentra en plenas facultades para la conducción, no permitiéndole en cierto nivel, proseguir con la tarea. Estos sistemas pueden detectar por ejemplo el cansancio del conductor, la poca atención a la carretera o un estado de embriaguez.
- **Control para arranque en pendiente.** Este sistema de seguridad activa está enfocado a evitar pequeñas colisiones ayudando al conductor a iniciar la marcha en trazados con pendientes.
- **Control de Velocidad Adaptativo.** Partiendo del ya clásico control de cruce, que mantiene el vehículo a una velocidad de consigna fijada por el conductor, incorpora la detección de la posición de otros vehículos. Así, si se sobrepasa una distancia mínima con el vehículo delantero, el sistema adapta la consigna de velocidad anteriormente impuesta por el conductor para evitar una colisión.
- **Asistente Inteligente de Velocidad.** Es una evolución del Control de Velocidad Adaptativo que además reconoce las señales de tráfico y detecta automáticamente el límite de velocidad correspondiente.
- **Asistente de Precolisión con Detección de Peatones.** El Asistente de Precolisión con Detección de Peatones de Ford se encarga de detectar la presencia de un peatón, animal o niño en ciudad que puedan cruzarse por delante del vehículo. El sistema actúa de forma inmediata mejorando la respuesta del frenado al reducir de forma brusca la brecha entre las pastillas de freno y los discos siempre y cuando el conductor no responda a los potentes avisos acústicos y visuales mediante una franja de luces LED rojas que se proyectan en el cristal delantero. Esta tecnología se nutre de la información recopilada por una cámara instalada en el parabrisas y un radar instalado en el parachoques, y la cruza con una base de datos de anatomía de personas para distinguir a la gente de los típicos objetos y elementos presentes en la carretera.

Además, estos sistemas han promovido la base para el diseño de sistemas de guiado avanzados para vehículos autónomos y semiautónomos [6], [99]. Estos sistemas más complejos que los anteriores actúan directamente sobre la condición y las acciones ejercidas por el conductor. Entre los más destables se encuentran:

- **Sistema de Permanencia en Carril.** Estos sistemas ayudan al conductor a mantener el vehículo dentro de su carril y evitar así salidas de calzada. Así, el sistema de seguridad detecta que la tendencia del vehículo dadas ciertas condiciones es salirse de su carril, por lo que actúa corrigiendo la posición del vehículo y garantizar la permanencia en el carril.

- **Sistemas de Cambio de Carril.** Al contrario que el sistema anterior, este detecta la intención del conductor de realizar una maniobra de cambio de carril voluntaria y le asiste para realizar esta maniobra de forma segura.
- **Sistemas Anticolisión.** Durante la conducción normal, el sistema anticolisión o de evitación de obstáculos detecta en que en la trayectoria del vehículo existe un objeto contra el que chocaría, por lo que el sistema efectúa una maniobra para evitar el accidente.

Estructura

Los sistemas de ayuda a la conducción enfocados a sistemas de guiado avanzados comparten una misma problemática: el seguimiento de una trayectoria calculada en función del entorno. Al compartir una misma problemática básica, también comparten una misma estructura general de control que se ilustra en la Figura 1.1. Al tratarse de un problema complejo que requiere la consideración de muchos aspectos, éste se tiende a dividir en diferentes problemas más simples que interactúan [4].

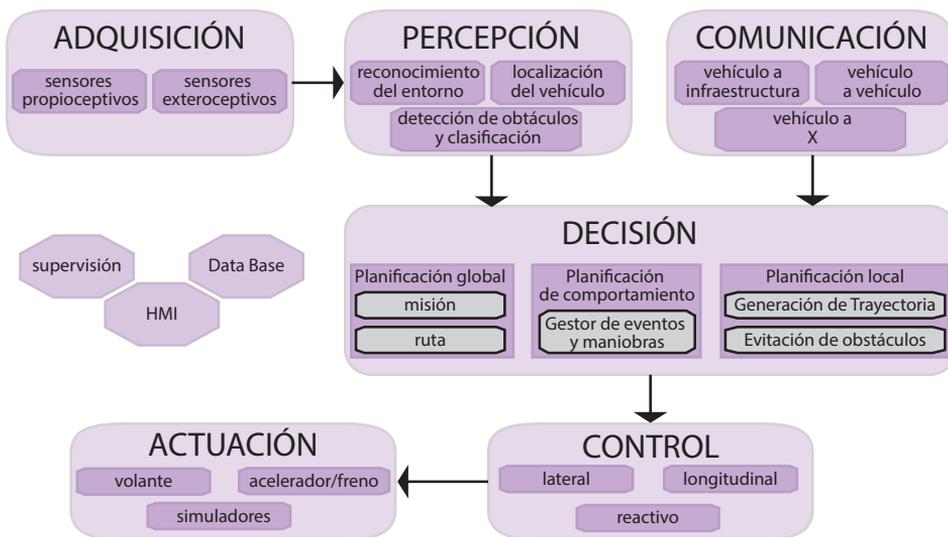


Figura 1.1: Arquitectura de control para vehículos semiautónomos y autónomos [32]

Mediante esta figura se pueden comprobar los diferentes y diversos problemas que componen, en su conjunto, los sistemas de guiado avanzados [32].

Por un lado los sistemas de percepción, mediante diferentes y diversos sistemas sensoricos, son los encargados de recopilar información del entorno del vehículo para poder así analizarlo. Por ejemplo, la información del GPS ubicará el vehículo en una posición global o sistemas de visión y sensores reconocerán el entorno y buscarán

obstáculos. Toda la información recabada y procesada por estos sistemas serán de utilidad para el sistema de decisión.

Otro sistema que también aporta información de interés al sistema de guiado es el de comunicaciones. Hoy en día aun no muy extendido, recopila información proveniente de determinados puntos, como infraestructuras u otros vehículos.

Haciendo uso de toda la información facilitada por los sistemas de percepción y de comunicación, está el bloque de decisión. Este bloque define, por un lado, la trayectoria que debe seguir el vehículo, esto es, si no hay obstáculos, se seguirá una trayectoria predeterminada, mientras que si existe, se recalculará redefiniendo la misma o decidiendo ejecutar una maniobra concreta. También comprobará el comportamiento del conductor para determinar estados de riesgo y reconducir el vehículo a una trayectoria segura [60], [91]. Este algoritmo debe estar apropiadamente ajustado como para que sus acciones no sean invasivas para el conductor en circunstancias normales.

Por último el sistema de control es el encargado de calcular la acción de control que se debe ejercer sobre el vehículo para que éste cumpla con la planificación propuesta por el sistema de decisión, tanto lo relacionado con la trayectoria que el vehículo debe seguir como con el comportamiento del vehículo que el conductor quiere que siga. Además, el control de un vehículo para un sistema de guiado debe considerar numerosos aspectos además de cumplir estrictas condiciones para garantizar la seguridad y comodidad de los pasajeros. Es en este último módulo en el que se enmarca la presente tesis doctoral. Es en este último módulo en el que se enmarca la presente tesis doctoral.

1.2. **Objetivos de la tesis**

El principal objetivo de la presente tesis doctoral es desarrollar un control predictivo basado en modelo para control lateral de vehículos, de forma que el vehículo sea capaz de seguir una trayectoria de referencia conocida de forma segura y confortable para todos los pasajeros, garantizando la permanencia dentro del carril y evitando giros bruscos de volante.

En base a estas observaciones y con el fin de lograr el objetivo principal, se plantean tres objetivos parciales,

- **Definir un modelo de vehículos adecuado para su uso como modelo de predicción.** Las diferentes estrategias de control propuestas se basan en controladores predictivos, por lo que será necesario la definición de un modelo de control adecuado, adaptado a los requerimientos tanto del propio controlador como de la propia problemática del seguimiento lateral de trayectoria de vehículos. Además, con el fin de ampliar la capacidad predictiva del modelo manteniendo un error acotado, se plantea el uso de un modelo de predicción linealmente variable en el tiempo en función de la velocidad longitudinal del mismo.

- **Formular un controlador predictivo basado en un modelo linealmente variable en el tiempo y estabilidad garantizada.** Los controladores predictivos están basados en horizontes de predicción finitos y deslizantes, por lo que la estabilidad en futuros instantes no está garantizada. Por esta razón, se diseñará un controlador predictivo basado en un modelo variable que pueda ser empleado en un amplio rango de velocidades y diferentes tipos de trazados en el que además su estabilidad esté garantizada.
- **Formular un control predictivo robusto y con estabilidad garantizada.** Con el fin de hacer frente a las incertidumbres del modelo, y además poder considerar un modelo nominal en vez de uno variable, se diseñará un control predictivo y robusto en el que la estabilidad del sistema también esté garantizada. La metodología de control predictivo y robusto que se aplicará será el basado en tubos de trayectorias, en el que el controlador garantiza que el sistema evoluciona en lo que se denomina un tubo de trayectorias alrededor de la trayectoria nominal, garantizando así su convergencia.

1.3. Estructura de la tesis

Con el fin de alcanzar los objetivos previamente indicados, la presente tesis se estructura en siete capítulos, siendo el primero de ellos el capítulo actual de introducción a la problemática del control de seguimiento de trayectoria.

El segundo capítulo analiza las diferentes soluciones de modelado de vehículos que se pueden encontrar en la literatura, para a continuación desarrollar una metodología de modelado enfocada al caso de estudio abordado en la tesis: el control lateral de seguimiento de trayectoria de vehículos. La validación del modelo se realiza mediante cosimulación con un software comercial de dinámica vehicular, enfocando dicha validación para su uso en las metodologías de control propuestas en los siguientes capítulos.

A continuación, el tercer capítulo de la tesis aborda el estado del arte del control de seguimiento de trayectoria de vehículos y se analizan las diferentes formulaciones y metodologías de control existentes. En base a este estudio, en el cuarto capítulo se plantea una metodología de control predictivo basado en modelo linealmente variable en el tiempo en función de la velocidad del vehículo para abordar la problemática estudiada en la presente tesis. Se propone el uso de un modelo variable, ya que el enfoque del controlador es para ser usado en diferentes tipos de trazado y a diferentes velocidades.

El quinto capítulo parte del controlador introducido en el capítulo cuarto, extendiéndolo al incorporar consideraciones de estabilidad en el control predictivo basado en modelos linealmente variables. Posteriormente en el capítulo seis, de nuevo partiendo de los dos controladores propuestos en los capítulos anteriores, se introduce una metodología de control predictivo robusto basado en tubos de trayectorias y con estabilidad garantizada. Así, en este capítulo se considera un modelo para una velo-

cidad nominal y las incertidumbres del modelo se gestionan mediante el controlador robusto.

Por último, en el capítulo final se resumen las conclusiones principales del trabajo y se proponen una serie de líneas futuras de investigación.

2.1. Introducción: El modelado vehicular

La dinámica de vehículos estudia el comportamiento dinámico del vehículo, esto es, su respuesta durante la conducción. El objetivo del estudio de la dinámica del vehículo es mantener el comportamiento del vehículo dentro de los límites que pueden ser comprendidos y controlados por el conductor. Para dicho fin, es necesario el planteamiento de un modelo matemático de un vehículo, que consta de un conjunto de ecuaciones que define con mayor o menor precisión el comportamiento de dicho vehículo. Gracias al uso de las leyes de la física y la geometría, estas ecuaciones permiten conocer las relaciones cinemáticas y dinámicas de los elementos del mismo.

Si se considera el chasis del vehículo como un sólido rígido, la descripción de su movimiento representa el movimiento del vehículo completo. Así, si se considera un sistema de referencia asociado al vehículo y con origen en el centro de gravedad del mismo, el vehículo presenta seis grados de libertad (GDL) (Figura 2.1):

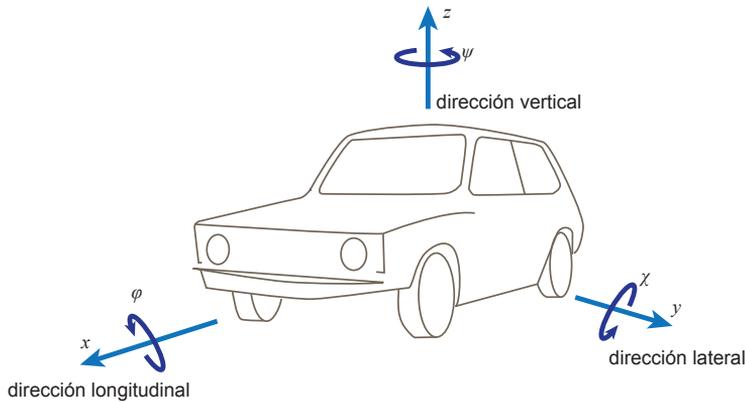


Figura 2.1: Grados de libertad de un vehículo

1. Movimiento longitudinal en la dirección x .
2. Movimiento lateral en la dirección y .
3. Movimiento vertical en la dirección z .
4. Giro alrededor del eje x , giro roll φ .
5. Giro alrededor del eje y , giro pitch χ .
6. Giro alrededor del eje z , giro yaw ψ .

Los 6 GDL planteados definen cómo se mueve el vehículo y a la hora de plantear un modelo matemático constituirán las salidas del mismo. Sin embargo, para la definición de un modelo vehicular no es un requisito la consideración de los 6 GDL, ya que el modelo se debe plantear en función de la aplicación en la que se quiera implementar. Esto es, un simulador de dinámica vehicular requerirá un modelo con un elevado grado de precisión que puede incluso considerar más GDL en el vehículo, y en el que el coste computacional no será un punto crítico; mientras que un modelo para su uso en aplicaciones de control se deberán cumplir ciertos requisitos de precisión pero con un coste computacional limitado, con lo que considerará simplificaciones e incluso puede presentar un menor número de GDLs.

El objetivo de este capítulo está ligado a la necesidad de definir modelos adecuados para control que combinen una precisión adecuada y una ágil ejecución. Así, en el presente capítulo se presenta una metodología de modelado para control, que será utilizada en capítulos posteriores para el desarrollo de controladores avanzados que usen la información ofrecida por este modelo para garantizar las especificaciones de control.

De este modo, el resto del capítulo se divide de la siguiente forma. A continuación se realiza una introducción al modelado de vehículos, describiendo los trabajos relacionados. Posteriormente se definirá la metodología de modelado para control lateral

propuesta, validando la misma y evaluando su precisión mediante su comparación con un simulador comercial. Por último, se plantean las conclusiones más destacables.

2.2. Modelado de la dinámica vehicular: Trabajos relacionados

Durante los últimos veinte años la simulación de la dinámica vehicular se ha utilizado ampliamente en la industria de la automoción, ya que los fabricantes de automóviles tienen que diseñar y construir sus vehículos más rápido que nunca para satisfacer las necesidades de los clientes. Un vehículo con un comportamiento no predecible en su diseño, puede presentar una dinámica de conducción en curva inapropiada y realizar maniobras peligrosas resultantes en el vuelco del mismo. Por estas razones, se estima necesario el emplear modelos matemáticos para la simulación de la dinámica vehicular para investigar el comportamiento dinámico y la seguridad del vehículo sin la necesidad de construir y testear un prototipo, ahorrando, de este modo, tiempo y dinero [92].

Puesto que los vehículos responden ante fuerzas y momentos que provienen de fuentes externas al propio vehículo, el estudio de su comportamiento dinámico debe involucrar el estudio de cómo y por qué se producen estas fuerzas. La respuesta de un vehículo ante las numerosas variables de entrada de su entorno es un factor importante para la seguridad y la comodidad. Las entradas sobre las cuales el conductor tiene control directo son la dirección, a través del volante, y la velocidad del vehículo usando el acelerador, los frenos y el cambio de marchas. Otras entradas, sobre las que el conductor no tiene control, incluyen los efectos de las fuerzas de fricción de los neumáticos, las fuerzas aerodinámicas y los vientos. De este modo, el comportamiento de los vehículos de carretera generalmente se clasifica en dos áreas: conducción y maniobrabilidad.

Las características de conducción y maniobrabilidad resultan de la compleja interacción de los diversos componentes y sistemas que componen el vehículo. Por un lado, las características de conducción se emplean para definir y medir cómo de bien el vehículo aísla a sus ocupantes de las irregularidades de la superficie de la carretera, como baches y resaltes. Por otro lado, las características de maniobrabilidad se usan para definir y medir la respuesta del vehículo ante la dirección y otras entradas. En resumen, si un vehículo exhibe buenas características de conducción, esto significa que será cómodo viajar en él; si muestra buenas características de maniobrabilidad, entonces se comportará de manera segura y predecible bajo todas las condiciones de conducción.

Dos de las características de maniobrabilidad más analizadas son las de subviraje y sobreviraje (Figura 3.2), que dan una indicación de la estabilidad del vehículo en curva. En un vehículo estable que exhibe buenas características de maniobrabilidad, a la hora de tomar un giro, el ángulo del volante se incrementará gradualmente con la velocidad, ya que supone un radio de giro constante en estado estacionario. En cambio si un vehículo subvira, el giro real del vehículo es menor al que teóricamente debería inducir la posición de las ruedas delanteras. De este modo, la parte delantera del vehículo

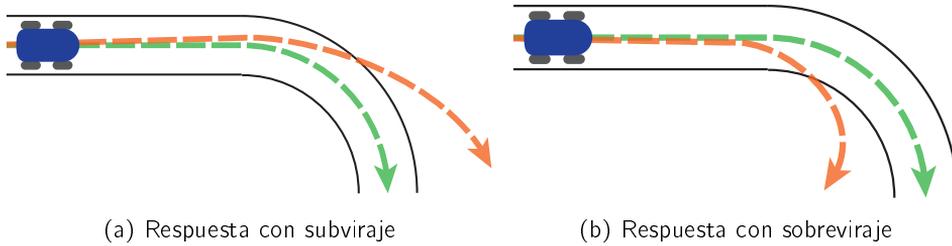


Figura 2.2: Estudio de la estabilidad en curva de vehículos

tiende a salirse hacia el exterior de la curva. Por el contrario, si un vehículo sobrevirara, las ruedas traseras no siguen el mismo recorrido que el de las ruedas delanteras, sino que se deslizan hacia el exterior de la curva. El exceso de sobreviraje puede hacer que el vehículo haga un trompo.

Otro aspecto que también suscita interés investigador es el rendimiento dinámico del vehículo para así comprender el denominado comportamiento característico. El objetivo de este tipo de pruebas es garantizar que el vehículo sea controlable y cumpla con ciertas especificaciones requeridas por el fabricante. La elección de los neumáticos, el diseño de la suspensión, el mecanismo de la dirección, el diseño del tren de transmisión, la distribución del peso o diferentes sistemas y estrategias de control contribuyen a definir las características del vehículo. Algunos de estos factores pueden alterarse para mejorar el comportamiento, mientras que otros son criterios fijos de las especificaciones del vehículo. En muchos casos hay conflictos entre estos importantes requisitos, por lo que encontrar el mejor compromiso entre ellos es un ejercicio complicado y que requiere mucho tiempo.

Actualmente, este compromiso se logra mediante una combinación de experiencia y pruebas objetivas y subjetivas llevadas a cabo por el equipo de diseño. Estas pruebas intentan recrear las condiciones de operación que el vehículo podría encontrar durante su uso. Al medir los parámetros apropiados, se puede obtener una evaluación objetiva de cómo de bien se comporta un vehículo y se puede comparar con la información obtenida de otros vehículos. La naturaleza de algunas de estas pruebas, sin embargo, implica que los vehículos deben conducirse hasta los límites de estabilidad y control. Así, si un vehículo presenta cierta inestabilidad durante una maniobra de prueba, puede volverse incontrolable y posiblemente peligroso. Por lo tanto, una forma de reducir la peligrosidad de las pruebas es primeramente simular el modelo de dicho vehículo e investigar su comportamiento dinámico.

Además de las citadas previamente, el empleo de la simulación para el análisis dinámico de los sistemas permite describir el sistema mediante ecuaciones de movimiento que permitan analizar así mecanismos o sistemas complejos. De este modo, se pueden analizar diferentes configuraciones fácilmente, realizar análisis frecuenciales, evaluar modos de fallo o comportamientos complejos difíciles de realizar mediante un prototipo. Así, el uso de la simulación permite reducir el coste de los análisis, el tiempo requerido para investigar los sistemas, reduce riesgos asociados al testeo de

prototipos y mejora la confianza en un diseño.

Por estas razones, es importante desarrollar un modelo matemático del vehículo que describa su dinámica, para que éste pueda ser empleado para su estudio. El estudio de la dinámica vehicular es considerado un problema muy complejo, y a lo largo de los años son numerosos los autores que han publicado diferentes propuestas, desde el análisis de aspectos más sencillos como el comportamiento de maniobrabilidad introducido previamente o aspectos más complejos como pueden ser el efecto aerodinámico. Algunas de estas aproximaciones se recogen en [70], [7], [19], [76], [79]. Sin embargo, dada la complejidad de la problemática y los numerosos enfoques que existen en la literatura sobre la misma, ante el planteamiento del desarrollo de un modelo matemático de un vehículo conviene determinar una serie de fundamentos o consideraciones, como es la finalidad del modelo, esto es, para qué tipo de aplicación se quiere emplear el modelo, y el alcance o qué es lo que se quiere analizar.

2.2.1. Finalidad de los modelos

Uno de los primeros fundamentos que conviene determinar a la hora de desarrollar o seleccionar un modelo dinámico de vehículo es la finalidad para la que se quiere emplear dicho modelo. El concepto de dinámica vehicular es muy extenso y abarca numerosos aspectos, por lo que si se fija una determinada finalidad, es posible enfocar o concretar el modelo. Como cita Mastinu en [63]: *“Determinar el modelo adecuado para cada aplicación es un compromiso entre lo que se quiere investigar y qué restricciones o simplificaciones van a determinar los detalles del modelo de vehículo”*.

A continuación se describen las tres principales finalidades que se han considerado: los modelos para simuladores, para el estudio de la dinámica o comportamiento del vehículo y los modelos destinados a aplicaciones de control.

Modelos destinados a implementación de Simuladores

La finalidad de estos modelos es la más completa, la descripción precisa y general de la dinámica vehicular considerando los diferentes componentes que lo conforman y también, factores externos que le afectan. Por esta razón, estos modelos son los más complejos, ya que engloban la definición de cada componente del vehículo que tiene un efecto sobre la dinámica general y su interacción, como por ejemplo la dinámica de los neumáticos, la suspensión, el sistema de tracción, la dirección, el sistema de frenado o la aerodinámica, entre otros.

Este tipo de modelos permite simular el comportamiento dinámico del vehículo, obteniendo respuestas dinámicas que pueden ser utilizadas en bancos de ensayo como señales de entrada para los diferentes componentes a ensayar. Una plataforma basada en estos modelos permite ensayar sistemas o subsistemas de un vehículo en condiciones muy cercanas a la realidad, lo que disminuye los tiempos de ensayo y ayuda a la detección temprana de fallos de diseño [7].

Además, gracias a la mejora del rendimiento de los ordenadores y el crecimiento de la potencia de cálculo de los equipos industriales se ha producido un incremento

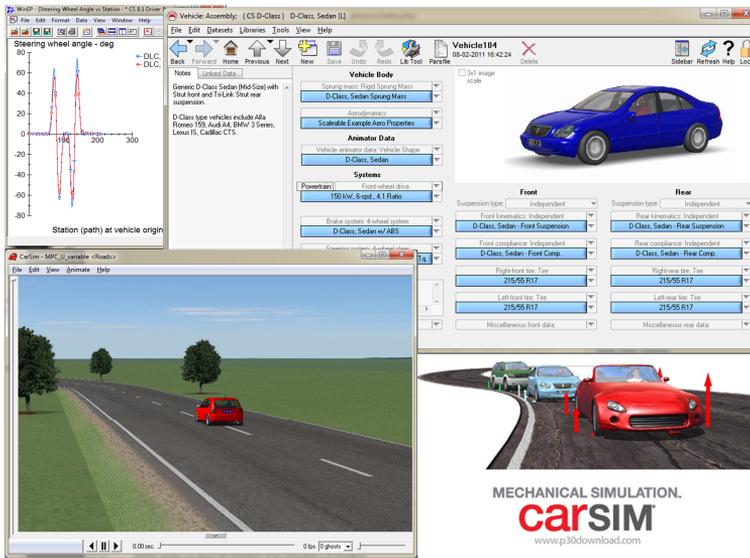


Figura 2.3: Ejemplo de software comercial de simulador, CarSim [95]

del uso de aplicaciones de dinámica vehicular con la técnica de simulación *Hardware-in-the-Loop* [74], que permite simular la interacción con el hardware real del vehículo, especialmente las Unidades Electrónicas de Control (ECU, *Electronic Control Unit*), o para la creación de simuladores de conducción [44], más destinados al entrenamiento de pilotos en competiciones de motorsport. Este es el tipo de modelos comúnmente encontrado en paquetes comerciales como Carsim [95], Carmaker [46] o veDYNA [103].

Modelos destinados al estudio de la dinámica

Uno de los campos de aplicación de los modelos de dinámica vehicular es el destinado al propio estudio de la dinámica, esto es, modelos que permitan conocer cual es la respuesta del vehículo ante ciertas entradas o modelos que permiten estudiar determinados comportamientos. Estos modelos son comúnmente usados para la comprensión de los fundamentos de la dinámica de vehículos y para analizar el comportamiento del vehículo en un amplio rango de condiciones de conducción y testeo, como el estado estable en curva, la estabilidad del vehículo, el subviraje y sobreviraje, entre otros. Estos estudios de los fundamentos de la dinámica de vehículos se recogen en libros de texto y referencia, [19, 30, 70, 76, 84], habitualmente, para conocer el comportamiento de cada sistema.

Adicionalmente, en ocasiones los modelos desarrollados para el estudio de la dinámica presentan características interesantes para ser empleados en otras aplicaciones, más allá del sólo estudio de la dinámica. Así, en función del alcance del modelo y de

las consideraciones y simplificaciones empleadas en el planteamiento del modelo, se pueden emplear para el desarrollo de simuladores o aplicaciones de control.

Modelos para aplicaciones de control

En la última década, el creciente aumento de la electrónica en los vehículos, ha dado pie al notable incremento del número de aplicaciones de control en los vehículos, principalmente destinadas a garantizar un mayor confort y seguridad de sus ocupantes. La particularidad de este tipo de modelos es la necesidad de que tengan un coste computacional limitado manteniendo un rendimiento adecuado para garantizar su correcto funcionamiento, a diferencia de las otras dos finalidades propuestas, en las que el coste computacional no implicaba una característica esencial en el modelo. Por esta razón, tradicionalmente en este tipo de modelos se divide la dinámica vehicular, tanto en dinámica longitudinal como lateral, de modo que se pueda abordar cada problema por separado.

La tendencia en el modelado para aplicaciones de control es la simplificación de términos, acoplamientos y no linealidades para poder ajustarse a los requisitos de tiempo real. Así, por ejemplo modelos sencillos de dinámica longitudinal se emplean en aplicaciones de control de sistemas de frenos [112, 54, 111] o eficiencia energética [5], mientras que los modelos de dinámica lateral se emplean en aplicaciones de análisis de la estabilidad [19] o control de suspensión [26].

2.2.2. Alcance de los modelos

Otro aspecto a determinar para el desarrollo de un modelo dinámico de un vehículo es el alcance del mismo, esto es, qué es lo que se quiere obtener del modelo. Tradicionalmente, a la hora de modelar el movimiento del cuerpo de un vehículo (chasis), se considera éste un cuerpo rígido presentando, de esta forma, 6 Grados de Libertad (GDL) (Figura 2.1): la traslación longitudinal, la lateral, y la vertical y los giros alrededor de cada eje, giro en el eje longitudinal, roll; giro en el eje lateral, pitch; y giro en el eje vertical, yaw. En ocasiones, además, el modelo puede incluir más grados de libertad, si considera los diferentes movimientos de la dirección, la suspensión, los diferentes ángulos de la rueda (camber, caster,...), etcétera. Por lo tanto, determinar el alcance del modelo supone determinar qué grados de libertad interesa analizar.

Esto sugiere que en función de la aplicación a la que se vaya a destinar el modelo se ha de escoger el comportamiento a modelar, esto es, se delimita el modelo a ciertos GDL. De esta forma, es habitual hablar de modelos de dinámica longitudinal, lateral, vertical y, los que se denominarán completos. Esta diferenciación se debe a que dependiendo del caso de aplicación del modelo, es pertinente realizar simplificaciones que permitan analizar la dinámica de interés, despreciando el resto. En [63] se presenta esta diferenciación, analizando exhaustivamente los casos de dinámica longitudinal y lateral.

Dinámica longitudinal

El estudio del comportamiento de la dinámica longitudinal consiste en el análisis del comportamiento del vehículo cuando éste viaja en línea recta o en una curva de gran radio, con un ángulo de giro de la dirección pequeño o nulo. En este tipo de trayectorias la aceleración lateral y los esfuerzos laterales son despreciables. Además, también se desprecia la diferencia de carga entre los neumáticos izquierdos y derechos. Por lo tanto, para este estudio se consideran, generalmente, los grados de libertad del desplazamiento longitudinal y el giro pitch (Figura 2.1).

Algunos de los casos de aplicación, tal y como se cita en [63] son:

- Conducción, aceleración y frenada en carreteras con grado de inclinación arbitrario [89].
- Efecto de diferentes configuraciones de trenes motrices, rendimiento del motor, efectos de la transmisión (automática), embrague, convertidor y otros componentes del sistema motriz [77].
- Diseño de sistemas de frenado y de sistemas de control [112], sistemas antibloqueo (ABS, *Anti-Blockier System*) [54] o sistemas *brake-by-wire* [111], entre otros.
- Interacción del conductor-vehículo-carretera (tráfico) [5].
- Análisis de diferentes propiedades de superficie de la carretera [108].
- Consumo de combustible, conducción eficiente [5].

Dinámica lateral

El estudio del comportamiento de la dinámica lateral consiste en el análisis del comportamiento del vehículo cuando éste viaja en curva. En este caso, la velocidad longitudinal se considera constante, no una variable a tratar en el modelo. Para el estudio del comportamiento de la dinámica lateral se consideran el desplazamiento en el eje lateral además de los giros roll y yaw (Figura 2.1). Cabe destacar que en algunos casos el giro roll se desprecia, ya que alcanza valores muy pequeños, como en los sistemas de control para el guiado de vehículos.

Algunos de los casos de aplicación, tal y como se cita en [63] son:

- Estudio de la respuesta de los vehículos, tanto el estado estable en curvas y comportamiento de la dirección, así como el análisis de estabilidad, subviraje y sobreviraje del vehículo [19, 70, 30].
- Respuesta frecuencial del giro yaw debido a cambios de dirección y la influencia básica entre el vehículo y la suspensión [26].

- Modelo de control para el diseño de sistemas de asistencia al conductor [21] o modelos de conductor [59].
- Identificación de parámetros esenciales del vehículo basados en medidas [85].

Las características de la conducción en recto y en curva, fundamentos principales en el estudio de la dinámica vehicular, resultan de la compleja interacción entre los diferentes subsistemas que constituyen el vehículo. Las características de la dinámica de conducción en recto o longitudinal se usan para definir y medir cómo de bien aísla el vehículo a sus ocupantes de las irregularidades de la calzada. Las características de la dinámica de conducción en curva o lateral se usan para definir y medir la respuesta del vehículo a un giro en la dirección. Por tanto, si un vehículo muestra buenas características de conducción en recto significa que es confortable viajar en él y si muestra buenas características de conducción en curva, se debería comportar de forma predecible y segura bajo cualquier condición de conducción [37].

La dinámica longitudinal y la lateral son los dos movimientos direccionales más estudiados en cuanto a la dinámica vehicular. Esto se debe a que, como se verá a continuación, la dinámica vertical tiene un alcance más limitado y enfocado al estudio de la suspensión.

Dinámica vertical

El estudio de la dinámica vertical considera los GDL del desplazamiento vertical y la rotación pitch. En la literatura, estos modelos se emplean para el estudio del aislamiento de la cabina frente a las vibraciones y golpes debido al perfil de la carretera a través de la suspensión del vehículo [56, 115]. También son empleados para el estudio de diferentes modelos de suspensión, como por ejemplo para los estudios de suspensiones semiactivas [31] o activas [2].

Es estudio de la dinámica vertical de forma independiente no es muy habitual, ya que suele estudiarse la dinámica completa del vehículo, la dinámica vertical junto con la longitudinal y lateral, tal y como se verá a continuación.

Dinámica completa

Se considera el estudio de la dinámica completa cuando no se aísla el comportamiento direccional del vehículo, esto es, cuando se considera de forma simultánea el movimiento longitudinal, lateral y vertical y los giros alrededor de los tres ejes. Considerar sólo un tipo de movimiento conlleva el planteamiento de modelos con grandes simplificaciones y delimitaciones, por lo que los autores en sus estudios tienden a considerar la dinámica completa del vehículo para obtener un modelo más preciso. Esto es necesario, por ejemplo, en estudios de accidentes de vehículos [68] o simuladores de vehículos [44].

De esta forma, la elección del alcance del modelo depende del comportamiento que se quiera analizar, pero sin comprometer la precisión del mismo. La precisión y detalle con el que se formule el modelo se trata de un compromiso, dado que modelos demasiado detallados tienen costes computacionales elevados. Por el contrario, modelos con un nivel de detalle insuficiente, pueden producir modelos más fácilmente ejecutables, pero con un mayor error respecto al comportamiento real.

Una vez definida la finalidad y alcance del modelo, se procederá a detallar brevemente los diferentes métodos de modelado que pueden encontrarse en la literatura, y que serán analizados en la siguiente sección.

2.2.3. Métodos de modelado

Independientemente de la finalidad y alcance de los modelos, en la literatura se pueden encontrar dos corrientes a la hora de definir las ecuaciones de movimiento que rigen la dinámica vehicular: métodos analíticos o modelos *multibody*.

2.2.3.1. Modelos Analíticos

Los modelos analíticos se derivan a partir de los fundamentos físicos a los que está sujeto el vehículo. Estos modelos han sido empleados desde el inicio del estudio de la dinámica vehicular, partiendo de modelos más básicos, y obteniendo modelos más complejos y precisos conforme se avanzaba en la comprensión y el estudio de los diferentes elementos del vehículo. Por lo tanto, el análisis de los modelos analíticos y sus formulaciones requiere analizar su evolución a lo largo de los años.

Primeros trabajos: estudio de la dinámica lateral

La dinámica de vehículos tiene sus orígenes en la década de los cincuenta. Entre los precursores del análisis de la dinámica vehicular se encuentra Milliken, ingeniero aeronáutico y conductor de coches de carreras, que constató la necesidad de conocer la maniobrabilidad de los vehículos [70]. Sin embargo, la carencia de documentación bibliográfica sobre el tema, le llevó junto con su compañero de trabajo Whitcomb a visitar varias compañías automovilísticas, entre ellas, General Motors. De su reunión con General Motors surgió la creación de una división para el estudio de la dinámica del automóvil en el Departamento de Investigación de Vuelo del Cornell Aeronautical Laboratory (CAL), donde ambos trabajaban. Así, estudiarían la estabilidad y el control de los automóviles usando tecnología y conocimientos sobre aviónica.

Una introducción general a sus investigaciones se recoge en el conjunto de artículos [69], publicados en el año 1956 y consideradas de las primeras publicaciones en el campo de la dinámica de vehículos. En estos primeros trabajos destaca el análisis lineal de la respuesta de los automóviles ante un cambio en la dirección realizado por Segel [90] y el análisis lineal de un modelo de 2 GDL enfocado al diseño de Whitcomb [109]. El primero presenta un modelo lineal de 3 GDL, considerando el desplazamiento lateral y giros roll y yaw, así como su validación experimental y un

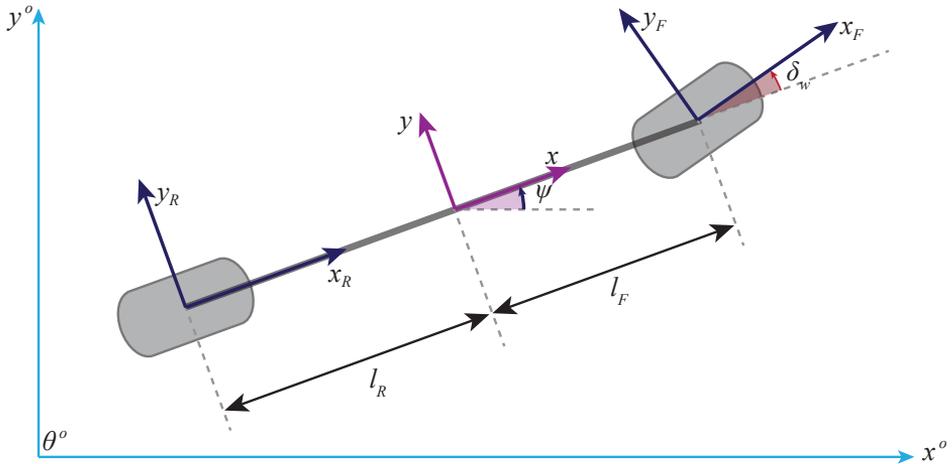


Figura 2.4: Modelo bicicleta de 2 GDL: desplazamiento lateral y giro yaw ψ

estudio de la manera en la que el automóvil responde al control de la dirección. En el segundo, hace uso del reconocido y aun hoy en día ampliamente usado, modelo bicicleta, que sólo considera 2 GDL (Figura 2.4), el movimiento lateral y el giro yaw, para hacer un completo estudio de la estabilidad y el control de los vehículos.

Tal y como cita Segel [90], los estudios iniciales fueron restringidos a considerar el cambio del ángulo de giro del volante como única fuerza y momento de entrada. Así, estos estudios consideran la velocidad longitudinal constante durante cualquier maniobra lateral, de modo que los movimientos de conducción en recto del coche no ejercen ninguna influencia en los movimientos laterales, por lo que el movimiento vertical y el pitch se pueden despreciar para formular un modelo matemático para describir el comportamiento lateral del vehículo.

Dinámica longitudinal y vertical

Los estudios de la dinámica longitudinal y vertical se comenzaron a abordar después de realizar los primeros estudios en dinámica lateral. La incorporación de esta dinámica, sin embargo, se ha realizado de forma simplificada mediante un modelo simple de masa en la que se consideran las leyes de tracción y de resistencia del vehículo (Segunda Ley de Newton). Este es el caso de Gillespie [30], que analiza ampliamente este estudio de la dinámica, presentando un modelo de conducción en recto para la simulación de las fuerzas dinámicas.

La introducción de modelos longitudinales permitió abordar aproximaciones más completas de la dinámica vehicular, que consideraran la lateral y la longitudinal en una única representación analítica. Smith [96] hace una recopilación de diferentes modelos de vehículos analíticos empleados tradicionalmente y realiza una comparativa

entre ellos. Considera tres modelos: un modelo bicicleta de 2 GDL, el desplazamiento lateral y el giro yaw; un modelo de doble vía de 5 GDL, desplazamiento lateral, giro yaw, aceleración longitudinal y la rotación de las ruedas delanteras y traseras; y un modelo también de doble vía de 8 GDL que se diferencia en el de 5 GDL en que trata la rotación de cada rueda por separado. Además, también considera dos casos para el cálculo de las fuerzas generadas por los neumáticos, un modelo lineal y un modelo no lineal mediante Dugoff [18]. Los resultados que muestra Smith es que para aceleraciones bajas, la respuesta es muy similar en los tres modelos planteados. Aunque cuando las aceleraciones incrementan, la dinámica se vuelve más no lineal por lo que los modelos más simples pueden llegar a producir resultados inesperados.

Por otro lado, la dinámica vertical del vehículo se dedica principalmente al campo del estudio de la suspensión de los vehículos. Por consiguiente, de forma paralela a los estudios de la dinámica longitudinal, se presentaron modelos verticales como es el conocido *quarter car model* [56], de 1 GDL, el movimiento vertical. Otros modelos similares, pero más complejos son los denominados *half car model* [80], que considera dos suspensiones unidas a un cuerpo rígido, y *full vehicle model* [115], que considera las cuatro suspensiones unidas a un cuerpo rígido. Así, además de analizar los desplazamientos verticales, se consideran los giros roll y/o pitch.

Introducción de las no linealidades

Los anteriores modelos del vehículo están basados en aproximaciones lineales, y presentan buenos resultados para maniobras de conducción en curva en el caso de aceleraciones laterales bajas. Sin embargo, hoy en día los vehículos se testean bajo aceleraciones laterales elevadas, dado que el objetivo muchas veces es garantizar la estabilidad y seguridad en estas situaciones, por lo que son necesarios modelos no lineales y más complejos. Esta deducción es clara al considerar que realmente existen muchas fuentes de no linealidad en la dinámica de un vehículo, como puede ser en la suspensión, en las características de la dirección, en las propiedades de los neumáticos o en la dinámica inercial de los movimientos roll pitch y yaw del vehículo [39].

Uno de los precursores de este modelado más complejo y no lineal es McHenry, quien se unió a la división de estudio de la dinámica del automóvil en CAL, donde centró su estudio en las maniobras bruscas de los vehículos y pruebas de choque en 1961. Uno de sus primeros trabajos [68], publicado en 1968, justifica la necesidad del uso de modelos no lineales para el análisis de la dinámica de vehículos durante los movimientos simultáneos de conducción y maniobrabilidad, por lo que hace uso de un modelo tridimensional con 11 GDL. El autor trata el vehículo como la unión de cuatro cuerpos rígidos y en el cual se simulan las interacciones inerciales.

Actualidad: Modelos completos

Con la finalidad de formular modelos matemáticos más complejos, la tendencia en las últimas décadas es la de incluir en un modelo global los submodelos fundamentales

de diferentes partes del vehículo con el fin completar y asegurar el cálculo correcto del comportamiento dinámico longitudinal, lateral y vertical. Entre estos submodelos destacan los neumáticos, el sistema de tracción y el sistema de dirección, siendo el bastidor del vehículo el núcleo del modelo. De esta forma, los sistemas físicos que forman parte de estos submodelos se modelan matemáticamente mediante sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias que determinan el comportamiento del sistema y representan las leyes físicas subyacentes.

Esta tendencia está enfatizada por Rauh, en [81], que propone el uso de modelos completos, que abarquen los submodelos que sean necesarios para cada caso de uso en función de las necesidades de precisión y complejidad. Este tipo de modelos, basados en subsistemas, pueden ser fácilmente adaptados a las particularidades de cada vehículo, reduciendo así la complejidad del sistema y aportando flexibilidad [105].

En la literatura reciente es posible encontrar numerosos trabajos que hacen uso de este enfoque. Por ejemplo Saglam [86] presenta un modelo dinámico basado en el modelo bicicleta al que, con el fin de ser más preciso, se le añade el movimiento roll y las no linealidades de los neumáticos, modeladas con la Magic Formula de Pacejka [38]. Por su parte, Setiawan [92], separa el problema del estudio de la dinámica en la parte del comportamiento dinámico de conducción en recto, con sus correspondientes ecuaciones y modelos, y la parte de comportamiento dinámico de conducción en curva, también con sus correspondientes ecuaciones. Andry [44] desarrolla un simulador de bajo coste computacional que puede imitar los movimientos de un vehículo en carretera. En su trabajo, partiendo de un modelo bicicleta de 2 GDL, incorpora los subsistemas de los neumáticos, dirección y suspensión. En [105] el autor modela independientemente los componentes fundamentales del vehículo como los neumáticos y la suspensión y también las fuerzas externas como el viento, la resistencia a la rodadura y la gravedad. A continuación, estudia el efecto que cada elemento ejerce sobre el chasis del vehículo. Por último, Aguinada [45] desarrolla un macro-modelo que agrupa los modelos fundamentales para asegurar el cálculo correcto del vehículo. Por modelos fundamentales se considera aquellos que afectan directamente al comportamiento dinámico del vehículo al definir su interacción con el entorno.

Como se ha podido comprobar, el modelado de vehículos es un campo ampliamente estudiado por numerosos autores, desarrollando diferentes metodologías de modelado a lo largo de los años. Estas metodologías, partiendo desde las más simples que simplifican considerablemente el problema, aunque aun sigan empleándose, han evolucionado hacia metodologías más complejas que contemplan más efectos sobre la dinámica vehicular. Sin embargo, su alcance se ve limitado para modelar los sistemas con alta precisión, por lo que los modelos *multibody* son cada vez más usados en la literatura.

2.2.3.2. Modelos Multibody

A raíz de la necesidad de modelos más complejos y gracias al avance tecnológico, hoy en día se ha extendido el uso de modelos *multibody*. Tradicionalmente, en

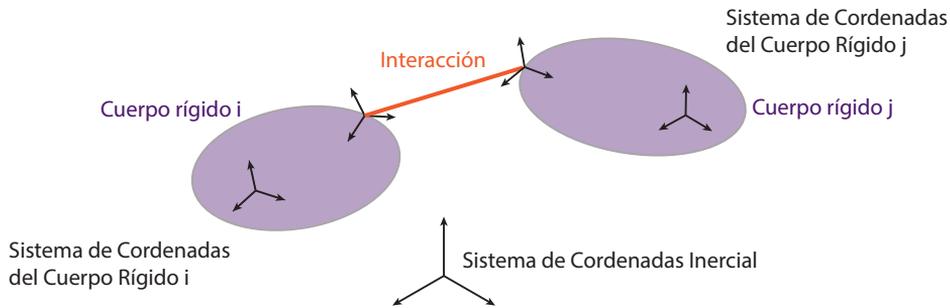


Figura 2.5: Representación de un Sistema *multibody*

el desarrollo de modelos dinámicos la derivación de las ecuaciones dinámicas para sistemas mecánicos se conseguía manualmente, mediante la aplicación de los principios básicos en sus varias formas. Sin embargo, la no linealidad y el acoplamiento de las ecuaciones de movimiento de sistemas complejos hace que la resolución de los mismos mediante técnicas clásicas sea compleja. Con el fin de abordar problemáticas de mayor complejidad, sobre todo asociadas a modelos complejos y no lineales, nació una nueva metodología de modelado dinámico: los modelos *multibody* [14].

¿Qué son los sistemas *multibody*?

La dinámica de los sistemas *multibody* se basa en la mecánica clásica [88]. Para realizar un modelo *multibody* se deben seguir las siguientes suposiciones:

- Un modelo *multibody* consiste en un número finito de cuerpos rígidos unidos por articulaciones ideales. Un cuerpo puede degenerar en una partícula o un cuerpo sin inercia. Las articulaciones ideales incluyen la articulación rígida, la articulación con movimiento completamente dado y la articulación que se desvanece (movimiento libre).
- La topología del sistema *multibody* es arbitraria: cadenas, árboles o circuitos cerrados.
- Las articulaciones y los actuadores se resumen en bibliotecas abiertas de elementos estándar.
- Se pueden añadir subsistemas a un componente del sistema *multibody*.

Un sistema *multibody* tal como se define se caracteriza sobre la base de un número arbitrario de cuerpos rígidos e interacciones. Los cuerpos rígidos se caracterizan, a su vez, por al menos un sistema de referencia fijo y puede poseer masa, un centro de masa y un tensor de inercia. Por su parte, las interacciones se producen entre dos sistemas de referencia de dos cuerpos rígidos y se puede realizar por una articulación,

un actuador de fuerza o un sensor. Así, la composición del modelo se puede realizar fácilmente, como se ilustra en la Figura 2.5.

Un sistema *multibody* se debe describir matemáticamente mediante ecuaciones de movimiento para el análisis dinámico. Entre los algoritmos para la generación de las ecuaciones de movimiento más usados hoy en día destacan el método sintético de Newton-Euler [82] y el método analítico de Lagrange [39].

Aplicación al modelado de vehículos

En la literatura se pueden encontrar numerosos modelos *multibody* para la descripción de la dinámica vehicular. Hegazy [39] presenta un modelo complejo con 94 GDL que considera todas las fuentes de elasticidad, rigidez y amortiguamiento, todos con características no lineales. Este modelo lo emplea para el estudio de maniobrabilidad y valida su eficiencia analizando los resultados obtenidos para una maniobra de doble cambio de carril. Por su parte, Rill [83] desarrolla un modelo *multibody* por subsistemas, de forma que cada elemento se puede estudiar, testear y modificar de forma independiente. Sayers [87] enfoca el modelo en su trabajo para su fácil reproducción. Desarrolla un modelo que captura el comportamiento esencial de frenada y maniobrabilidad de un vehículo. Cho [13], por otra parte, deriva las ecuaciones para ser empleadas en el análisis de sistemas no lineales y para control. Por último, Shii-ba [94] desarrolla un modelo *multibody* de 91 GDL que emplea para controlar un simulador de conducción.

El principal inconveniente de los modelos *multibody* aplicados al modelado de dinámica vehicular es el elevado coste computacional que conllevan. Por esta razón, diversos autores centran sus trabajos en métodos de resolución optimizados para poder ampliar su campo de aplicación. Así, Rill [82] dicta que si se adopta un algoritmo de Euler implícito para los problemas específicos en la dinámica del vehículo, se puede lograr una solución numérica muy efectiva. Kim [51], por otro lado, propone un método de síntesis por subsistemas para el análisis dinámico de un sistema *multibody* de un vehículo. Verifica que esta propuesta es más eficiente que un método tradicional cuando hay más de dos subsistemas, ya que para la simulación de un modelo de medio vehículo, este método es 2,36 veces más rápido.

Implementación mediante software específico

A diferencia de los modelos analíticos, la implementación de este tipo de modelos se puede realizar mediante el uso de paquetes específicos para el modelado *multibody*. Por ejemplo, existen una serie de paquetes informáticos comerciales que se pueden utilizar para resolver problemas en el análisis de sistemas *multibody*, como MSC.Adams [97] o Simpack [100]. Además de los paquetes comerciales también hay programas desarrollados por instituciones académicas que pueden estar disponibles, aunque sin el nivel de desarrollo y el apoyo que se podía esperar al comprar el softwa-

re desde un desarrollador de programa establecido, como por ejemplo MBS3D [15], desarrollado en [107], o Hotint [73].

Los diferentes softwares de simulación de modelos *multibody* en general son capaces de hacer frente a una amplia gama de aplicaciones de ingeniería industrial, no limitando su uso a la dinámica de vehículos. Tomando como ejemplo el software multidisciplinar MSC.ADAMS, cuyo uso está extendido en campos como el aeroespacial, productos de consumo y la energía, entre otros [97]. El uso principal de MSC.ADAMS dentro de la industria de la automoción es el de simular el rendimiento de los subsistemas y de los vehículos completos. Los modelos están siendo usados cada vez más en problemas de vibraciones de gran amplitud, como las oscilaciones del tren motriz o del tren de dirección [7].

Desde una perspectiva global, la principal ventaja que presentan los modelos *multibody* es su precisión, ya que considera el movimiento de cada componente más simple del vehículo. Sin embargo, esta ventaja también supone un gran inconveniente, y es la complejidad y elevado coste computacional de estos modelos, lo que limita su uso. Además, la dinámica de sistemas *multibody* se determina por parámetros como la masa y momentos de inercia del cuerpo del material, datos geométricos, de rigidez y amortiguamiento coeficientes o parámetros de control de actuadores. Además de las ecuaciones de movimiento, para simulaciones *multibody* los datos que determinan el modelo no sólo tienen que ser tratados, sino que tienen que ser determinados con precisión. Para dicho fin, la identificación de parámetros es una parte esencial y compleja de la dinámica de sistemas *multibody* que requiere un profundo estudio [88].

Desde otro punto de vista, este tipo de modelos, que están enfocados a su uso con paquetes software específicos, aísla al usuario de la necesidad de derivar las ecuaciones de la dinámica vehicular, que para modelos complejos, puede suponer un importante esfuerzo. Del mismo modo que esto puede considerarse una ventaja, también supone una desventaja, porque deriva en que el usuario se desvincule del conocimiento más básico del comportamiento dinámico de un vehículo [7], [87]. Por estas razones, los métodos analíticos anteriormente descritos, asociados a técnicas más tradicionales, siguen siendo herramientas muy usadas en las diferentes investigaciones.

2.3. Metodología de modelado para control lateral

A la hora del planteamiento de una metodología de modelado y tal como se describe en la sección previa, es importante fijar dos factores: cual es la finalidad del modelo o para qué se va a emplear y el alcance, esto es, qué se quiere obtener de él. Por lo tanto,

- **Finalidad del modelo: Modelo para control.** El objetivo del modelo será ser implementado en un controlador predictivo, que hará uso del mismo para predecir el comportamiento dinámico lateral del vehículo en un intervalo acotado de tiempo o horizonte. Así, el modelo deberá ser lo suficientemente preciso durante el tiempo de predicción o instantes futuros como para no comprometer

el funcionamiento del controlador y, a su vez, lo suficientemente sencillo como para no suponer un elevado coste computacional. Por consiguiente, deberá existir un compromiso entre ambas consideraciones.

- **Alcance del modelo: La dinámica lateral.** Tal y como se ha detallado en el Capítulo 1 de introducción, el objetivo de la siguiente tesis es una propuesta de control lateral para el seguimiento de trayectoria para un vehículo, cuya metodología de control se expondrá en capítulos posteriores. Por esta razón, el alcance del modelo deberá estar enfocado al análisis de la dinámica lateral. Así, las variables de mayor relevancia en la descripción de esta dinámica serán las implicadas en el control.

Partiendo de estas dos premisas, en primer lugar se realizarán una serie de consideraciones previas a tener en cuenta en el desarrollo del modelo del vehículo, que permitirán acotar éste teniendo en cuenta la aplicación del mismo. Una vez abordadas estas consideraciones, se detallará la metodología de modelado planteada. Finalmente, se validará esta metodología de modelado, comparando las salidas con las de un software comercial de simulación. Además, sabiendo que será un modelo empleado para la predicción, se determinará el grado de precisión del modelo en relación al tiempo de predicción, esto es, el rango de validez del modelo en el caso de aplicación objeto de la tesis.

2.3.1. Consideraciones previas

Tal y como se ha mencionado anteriormente, la finalidad del modelo es su uso en una aplicación de control enfocado a la dinámica lateral del vehículo. Por lo tanto, la metodología de modelado debe estar enfocada a las particularidades del caso de aplicación. Por esta razón, se han de realizar una serie de consideraciones relacionadas a la problemática que se quiere abordar. Estas son:

- El modelo se desarrollará para un vehículo utilitario, y su rango de aplicación será un régimen de conducción que garantice el confort de los usuarios, con aceleraciones laterales y longitudinales no elevadas.
- La dinámica de vehículos se considera una dinámica relativamente rápida que además está sujeta a numerosas perturbaciones no controlables ni medibles. Por esta razón, el tiempo de predicción que se considerará en la aplicación de control será pequeño $t_p \downarrow$, del orden de segundos. De esta forma, el modelo propuesto no se empleará para simular las salidas del sistema en lazo abierto durante un periodo prolongado.
- Se considerará un caso de vehículo utilitario, en el que en un régimen de conducción normal, las aceleraciones longitudinales sean pequeñas para favorecer el confort de los ocupantes. Esto permitirá considerar la velocidad longitudinal a la que viaja el vehículo \dot{x} prácticamente constante durante el Horizonte de predicción H_p o Tiempo de predicción t_p .

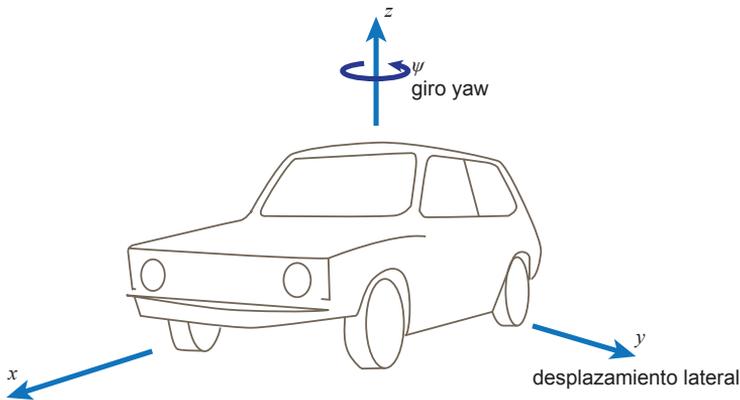


Figura 2.6: Grados de libertad del problema planar de dinámica lateral

- Se considerará que los ángulos de giro de las ruedas delanteras son pequeños $\delta_w \ll$, ya que los escenarios que se plantearán no conllevarán que el vehículo deba realizar giros bruscos, sino cambios suaves de dirección, tal y como sucede en las vías y carreteras diseñadas para vehículos utilitarios. Además, esta consideración supondrá que las aceleraciones laterales también sean reducidas $\ddot{y} \ll$
- Se considera la dinámica del vehículo un problema planar, así, se desprecian los sistemas de suspensión del vehículo y se considera que el centro de gravedad del vehículo está a la altura de la carretera. Esta consideración es apropiada en el caso en el que la superficie por la que viaja el vehículo no tenga grandes desniveles, baches ni peraltes; y en el caso en el que las aceleraciones longitudinales \ddot{x} y laterales \ddot{y} son pequeñas en base a las restricciones de confort anteriormente mencionadas.

Bajo las consideraciones previamente citadas, se concluye que al considerar un problema planar se despreciarán los desplazamientos verticales en z , los giros roll φ y pitch χ . Además, el hecho de considerar que la aceleración longitudinal es despreciable, el grado de libertad correspondiente al desplazamiento longitudinal en el eje x también queda restringido. Por lo que, en la metodología de modelado se considerarán 2 GDL del vehículo (Figura 2.6):

1. Movimiento a la derecha e izquierda en la dirección y .
2. Giro alrededor del eje z , el giro yaw ψ .

Por lo tanto, el modelo planteado es el ilustrado en la Figura 2.7. Como salidas del modelo se deberán obtener la posición lateral y del centro de gravedad del vehículo y el ángulo de giro yaw ψ . Como entrada al sistema se considerará el ángulo de giro

de las ruedas delanteras δ_w , ya que es el elemento principal a la hora de generar un giro en un vehículo. La velocidad longitudinal del vehículo x , no será una variable manipulada, con lo que en el caso del modelo lateral, se considerará conocido.



Figura 2.7: Modelo del vehículo para control

2.3.2. Modelo para control: Modelo bicicleta

En base a las consideraciones realizadas anteriormente, el modelo más adecuado para implementar la dinámica lateral de un vehículo es el modelo bicicleta. El mencionado modelo bicicleta, como ya se analiza en la Sección 2.2, es un modelo ampliamente usado en la literatura debido a su buen rendimiento con un coste computacional muy reducido. En su trabajo, Smith [96] demuestra que el modelo bicicleta es adecuado para casos con maniobras de aceleraciones bajas, como es el caso de estudio que se pretende abordar. El modelo bicicleta empleado se describirá a continuación.

El modelo bicicleta está considerada como la aproximación más sencilla a la dinámica de un coche ya que consiste simplificar la estructura de un coche a una bicicleta. De esta forma, este modelo representa las dos ruedas de un eje como una única rueda situada en el centro del eje longitudinal (Figura 2.8).

Considérese el sistema planar de la Figura 2.8, donde θ^o representa el sistema de referencia inercial y fijo, θ^{cg} es el asociado al centro de gravedad del vehículo y θ_F^w y θ_R^w son los asociados a las ruedas delanteras y traseras y situados a una distancia l_F y l_R respecto al centro de gravedad respectivamente. El sistema de referencia del centro de gravedad θ^{cg} está rotado un ángulo yaw ψ respecto del inercial. El sistema de referencia de las ruedas delanteras θ_F^w gira según el ángulo de giro δ_w mientras que el de las traseras θ_R^w tiene la misma orientación que el de gravedad, permaneciendo fijo respecto de éste.

Las ecuaciones de movimiento de este modelo se plantean respecto del sistema de referencia local, esto es, el del centro de gravedad θ^{cg} . Así, aplicando la segunda ley de Newton para las fuerzas en el eje y^{cg} y los momentos alrededor del eje z^{cg} ,

$$\begin{aligned} m_{cg} a_y &= \sum F_{y_i}^{cg} \\ l_z \dot{\omega}_z &= \sum M_{z_i}^{cg} \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde m_{cg} es la masa del vehículo, a_y es la aceleración lateral inercial del vehículo en el centro de gravedad y en la dirección lateral del vehículo y^{cg} , $F_{y_i}^{cg}$ son las fuerzas laterales de los neumáticos delanteros y traseros, l_z es el momento inercial alrededor

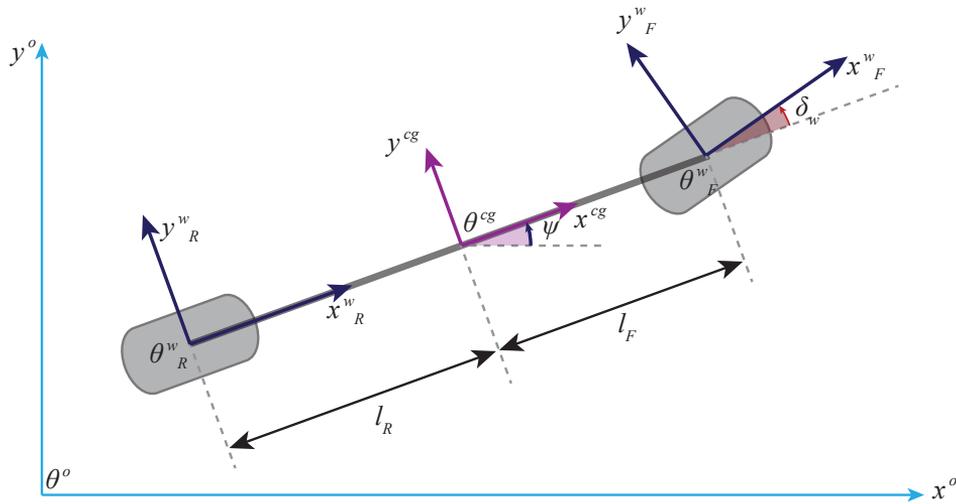


Figura 2.8: Diagrama del modelo bicicleta de dos grados de libertad

del eje x^{cg} , ω_z es la aceleración de giro alrededor del eje z^{cg} y $M_{z_i}^{cg}$ son los momentos de fuerza producidos por las fuerzas laterales.

Las aceleraciones de la Ecuación (2.1) están referenciadas al sistema de referencia inercial θ^o . Sin embargo, estas aceleraciones se quieren representar respecto al sistema de referencia local asociado al centro de gravedad del vehículo θ^{cg} . En el caso de la aceleración ω_z , definida alrededor del eje z^{cg} , ésta es igual que la aceleración yaw del vehículo $\dot{\psi}$, ya que se considera un sistema planar. Sin embargo, la aceleración lateral a_y debe considerar la aceleración centripeta, por lo que,

$$\omega_z = \frac{d(\psi)}{dt} = \dot{\psi} \quad (2.2)$$

$$a_y = \frac{d(\dot{y})}{dt} + \dot{x} \omega_z = \ddot{y} + \dot{x} \dot{\psi}$$

Por lo tanto, sustituyendo la Ecuación (2.2) en la Ecuación (2.1) se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones,

$$\begin{aligned} m(\ddot{y} + \dot{x} \dot{\psi}) &= \sum F_{y_i}^{cg} \\ l_z \ddot{\psi} &= \sum M_{z_i}^{cg} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Las fuerzas que se generan en los neumáticos (la fuerza longitudinal $F_{x_i}^w$ y la fuerza lateral $F_{y_i}^w$) se representan en el sistema de referencia asociado a la rueda correspondiente, en θ_F^w para la rueda delantera y θ_R^w en la trasera. Sin embargo, estas fuerzas se deben proyectar sobre el sistema de referencia del centro de gravedad θ^{cg} ,

ya que en el caso de las ruedas delanteras dependen del ángulo de giro δ_w , obteniendo las siguientes aproximaciones para las fuerzas laterales,

$$\begin{aligned} F_{y_F}^{cg} &= F_{x_F}^w \sin(\delta_w) + F_{y_F}^w \cos(\delta_w) \\ F_{y_R}^{cg} &= F_{y_F}^w \end{aligned} \quad (2.4)$$

Como ya se ha mencionado previamente, los ángulos de giro de las ruedas delanteras se suponen muy pequeños $\delta_w \downarrow\downarrow$, por lo que se puede tener en cuenta la siguiente aproximación para ángulos pequeños. Siendo en este caso α un ángulo cualquiera, se tiene que:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &\approx 0 \\ \cos(\alpha) &\approx 1 \\ \tan(\alpha) &\approx \alpha \end{aligned} \quad (2.5)$$

Aplicando esta simplificación de ángulos pequeños en la Ecuación (2.4) para el ángulo de giro de las ruedas delanteras δ_w , se obtiene que,

$$\begin{aligned} F_{y_F}^{cg} &\approx F_{y_F}^w \\ F_{y_R}^{cg} &\approx F_{y_F}^w \end{aligned} \quad (2.6)$$

Por su parte, el momento generado por una fuerza F sobre un punto P respecto de un punto O viene dado por el producto vectorial del vector \vec{OP} por el vector de fuerza, esto es,

$$\mathbf{M}_o = \vec{OP} \times \mathbf{F}$$

De forma que el momento generado por una fuerza lateral $F_{y_i}^{cg}$ sobre el centro de gravedad se obtiene mediante el producto de la distancia del centro de gravedad a la rueda delantera l_F y trasera l_R por la fuerza correspondiente. De forma que,

$$\begin{aligned} M_{z_F}^{cg} &= l_F F_{y_F}^w \\ M_{z_R}^{cg} &= -l_R F_{y_R}^w \end{aligned} \quad (2.7)$$

Así, sustituyendo las Ecuaciones (2.6) y (2.7) en la Ecuación (2.3) y considerando que en cada eje hay dos ruedas,

$$\begin{aligned} m(\ddot{y} + \dot{x}\dot{\psi}) &= 2 F_{y_F}^w + 2 F_{y_R}^w \\ I_z \ddot{\psi} &= 2 l_F F_{y_F}^w - 2 l_R F_{y_R}^w \end{aligned} \quad (2.8)$$

La fuerza lateral $F_{y_i}^w$, en la dirección y , es la fuerza que hace girar al coche y que se produce debido a la existencia de un ángulo de deriva α_i del neumático distinto a cero. El ángulo de deriva es la diferencia entre la dirección en la que viaja la rueda \mathbf{v}_w y la que apunta x . Estas fuerzas de los neumáticos dependen de una serie de factores y su valor se puede representar por una serie de curvas características. Los parámetros más influyentes en estas curvas son la carga que soporta el neumático F_z y el ángulo de deriva α_i .

$$F_{y_i}^w = f_y(F_z, \alpha_i) \quad (2.9)$$

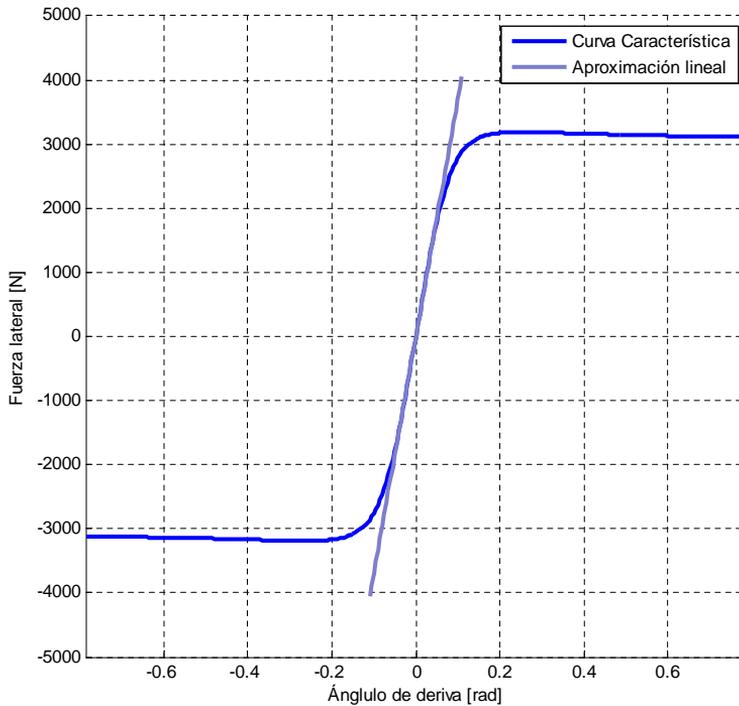


Figura 2.9: Curva característica de la fuerza de los neumáticos

Al considerar un sistema planar no existe transferencia de masas entre las diferentes ruedas, por lo que se puede determinar que cada neumático soporta una fuerza vertical F_z de una cuarta parte de la masa suspendida m_s .

$$F_z = \frac{m_s g}{4} \quad (2.10)$$

Bajo esta condición, la fuerza lateral de los neumáticos se puede describir mediante una única curva característica (Figura 2.9). Resultados experimentales presentados en [79] demuestran que la fuerza lateral del neumático es proporcional al ángulo de deslizamiento, para pequeños ángulos de deslizamiento, como es el caso propuesto. De este modo, el cálculo de las fuerzas laterales de los neumáticos se puede simplificar obteniendo una relación lineal.

$$\begin{aligned} F_{F_y}^W &= C_{\alpha_F} \alpha_F \\ F_{R_y}^W &= C_{\alpha_R} \alpha_R \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde $F_{F_y}^W$ y $F_{R_y}^W$ son la suma de las fuerzas asociadas a los neumáticos derecho e izquierdo en cada eje, C_{α_F} y C_{α_R} son la rigidez en curva para los neumáticos delanteros y traseros respectivamente y α_F y α_R son los ángulos de deriva.

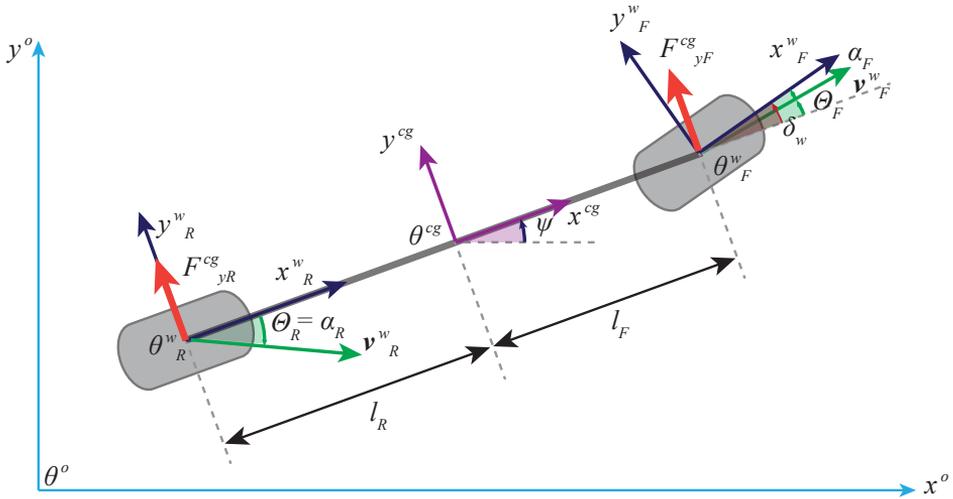


Figura 2.10: Fuerzas del modelo

El ángulo de deriva α_i es el ángulo formado por la dirección en la que apunta la rueda y aquella en la que verdaderamente se está desplazando, esto es, el ángulo entre la velocidad equivalente de la rueda \mathbf{v}_i^w y la dirección del sistema de referencia del neumático (x_i^w) (Figura 2.10). En este caso, los ángulos se pueden obtener trigonométricamente de forma que,

$$\begin{aligned}\alpha_F &= \delta_w - \Theta_F \\ \alpha_R &= \Theta_R\end{aligned}\quad (2.12)$$

donde δ_w es el ángulo de giro de las ruedas delanteras y Θ_F y Θ_R son los ángulos de los vectores de la velocidad respecto al eje longitudinal del vehículo para la rueda delantera y trasera respectivamente. Estos ángulos dependen del vector de velocidad en el centro de gravedad \mathbf{v}^{cg} llevado al sistema de referencia de cada rueda. Estas velocidades equivalentes se calculan mediante el teorema del campo de velocidades del sólido rígido que define que la velocidad de un punto B de un sólido rígido se calcula como la superposición del movimiento traslatorio de la velocidad de otro punto de referencia A y el movimiento rotatorio entorno a dicho punto A .

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{r}_{B-A}$$

Por lo tanto, las velocidades equivalentes en cada rueda \mathbf{v}_i^w se obtienen de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_F^w &= \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \dot{\psi} \times \begin{bmatrix} l_F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} + l_F \dot{\psi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{v}_R^w &= \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \dot{\psi} \times \begin{bmatrix} -l_R \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} - l_R \dot{\psi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Conociendo los componentes de los vectores de velocidad equivalentes en cada rueda \mathbf{v}_i^w , se pueden deducir trigonométricamente los ángulos Θ_F y Θ_R ,

$$\begin{aligned} \tan \Theta_F &= \frac{\dot{y} + l_F \dot{\psi}}{\dot{x}} \\ \tan \Theta_R &= \frac{\dot{y} - l_R \dot{\psi}}{\dot{x}} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Si se tienen en cuenta las simplificaciones para ángulos pequeños descritas en la Ecuación (2.5), el cálculo de los ángulos Θ_i se puede simplificar de forma que,

$$\begin{aligned} \Theta_F &\approx \frac{\dot{y} + l_F \dot{\psi}}{\dot{x}} \\ \Theta_R &\approx \frac{\dot{y} - l_R \dot{\psi}}{\dot{x}} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Reorganizando las Ecuaciones (2.8), (2.11), (2.12) y (2.15) se obtiene el sistema de Ecuaciones del denominado modelo bicicleta:

$$\begin{aligned} m(\ddot{y} + \dot{x} \dot{\psi}) &= 2 C_{\alpha_F} (\delta_w - \frac{\dot{y} + l_F \dot{\psi}}{\dot{x}}) + 2 C_{\alpha_R} (\frac{\dot{y} - l_R \dot{\psi}}{\dot{x}}) \\ m \ddot{\psi} &= 2 l_F C_{\alpha_F} (\delta_w - \frac{\dot{y} + l_F \dot{\psi}}{\dot{x}}) - 2 l_R C_{\alpha_R} (\frac{\dot{y} - l_R \dot{\psi}}{\dot{x}}) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Por último, para una mejor comprensión, se reorganiza este sistema de ecuaciones en función de la señal de entrada, el ángulo de giro de las ruedas δ_w , y de la velocidad lateral \dot{y} y la velocidad yaw $\dot{\psi}$.

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= -\frac{2(C_{\alpha_F} + C_{\alpha_R})}{m \dot{x}} \dot{y} - \left[\frac{2(l_F C_{\alpha_F} - l_R C_{\alpha_R})}{m \dot{x}} + \dot{x} \right] \dot{\psi} + \frac{2 C_{\alpha_F}}{m} \delta \\ \ddot{\psi} &= -\frac{2(l_F C_{\alpha_F} - l_R C_{\alpha_R})}{l_z \dot{x}} \dot{y} - \frac{2(l_F^2 C_{\alpha_F} + l_R^2 C_{\alpha_R})}{l_z \dot{x}} \dot{\psi} + \frac{2 l_F C_{\alpha_F}}{l_z} \delta \end{aligned} \quad (2.17)$$

Recuérdese que las ecuaciones de movimiento para la definición del modelo bicicleta están descritas en el sistema de referencia local θ^{cg} . Sin embargo, para su uso en la metodología de control que se introducirá en posteriormente, interesa conocer

la relación respecto del sistema de referencia inercial o fijo θ^o . Esta relación consiste en la rotación yaw ψ , de forma que,

$$\begin{bmatrix} x^o \\ y^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{cg} \\ y^{cg} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

2.4. Validación del modelo de control

Una vez definida la metodología de modelado se procede a su validación. En esta sección se comparará, para un caso de estudio concreto, el comportamiento del modelo dinámico propuesto anteriormente con los resultados ofrecidos por un software de simulación comercial, CarSim [95]. El modelo desarrollado se ha implementado mediante la herramienta matemática Matlab/Simulink [64]. Así, primero se definirán el entorno de simulación y los escenarios a considerar en el estudio, y posteriormente, se analizarán los resultados obtenidos.

2.4.1. Entorno de simulación y definición de experimentos

La metodología de modelado presentada en este capítulo se emplea para definir un modelo de vehículo utilitario mediante la herramienta matemática Matlab/Simulink [64]. Los parámetros que definen el vehículo para control que se pretende simular se obtendrán del software de simulación comercial CarSim [95].

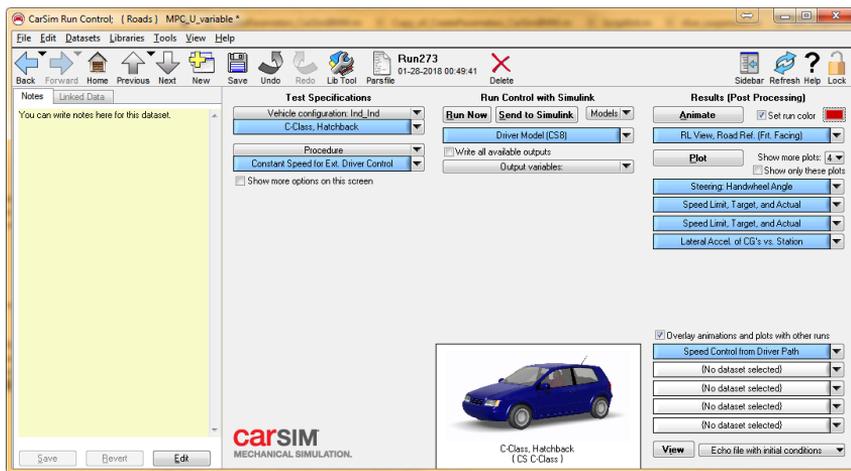


Figura 2.11: CarSim

CarSim [95] es un software para la simulación y análisis del comportamiento de vehículos de cuatro ruedas ante la respuesta de las entradas de la dirección, frenado y aceleración. Este software está ampliamente validado a nivel comercial, con más de 20 años de experiencia (Figura 2.11).

La metodología consistirá en ejecutar una serie de simulaciones en Carsim para un vehículo definido, recogiendo los datos de entrada (ángulo de giro del volante y velocidad de las ruedas) y salida (posición del vehículo) de este software. Los datos de entrada serán posteriormente introducidos en el modelo desarrollado, con el fin de comparar las salidas, esto es, posiciones del vehículo.

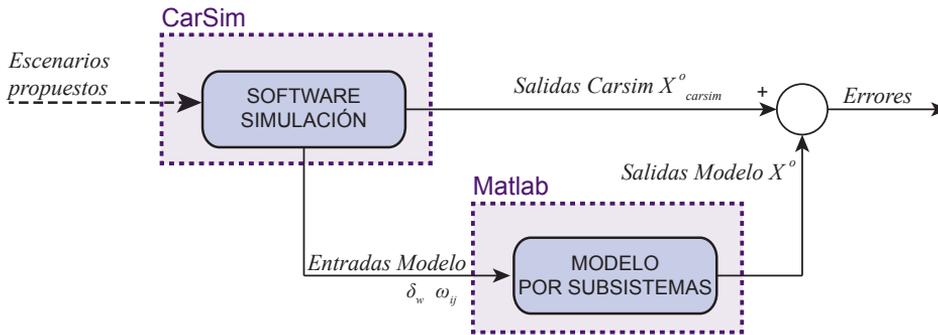


Figura 2.12: Comparación de resultados entre CarSim y el modelo bicicleta

Parámetros del vehículo

De la base de datos de CarSim, se ha optado por el uso de un vehículo utilitario de clase C, que incluye vehículos como el Audi A3, Fiat Bravo, Opel Astra, Ford Focus o el Chevrolet Cruze. Una vez seleccionado el ejemplo de vehículo con el que se desea hacer la validación, se extraen los valores de los parámetros necesarios para la definición del modelo propuesto. Estos parámetros se muestran en la Tabla 2.1.

Tabla 2.1: Parámetros principales del modelo del vehículo

	Parámetro	Valor
m_{cg}	masa del vehículo	1412 kg
m_s	masa suspendida	1270 kg
$m_{u_{ij}}$	masa no suspendida	35.5 kg
l_F	distancia del CoG al eje delantero	1.016 m
l_R	distancia del CoG al eje trasero	1.564 m
I_z	inerencia del ángulo yaw	1536.7 kg m ²
$C_{\alpha F}$	rigidez en curva del eje delantero	36960 N/rad
$C_{\alpha R}$	rigidez en curva del eje trasero	36960 N/rad

2.4.1.1. Escenarios de simulación

A continuación se plantean los diferentes escenarios empleados para la validación del modelo, según los requerimientos de CarSim. Estos escenarios consisten en la

definición de una trayectoria definida en el sistema de referencia global θ° y un perfil de velocidad. Así, según estos dos perfiles CarSim realiza la simulación obteniendo por un lado el valor de la variable de entrada del modelo bicicleta, el ángulo de giro de las ruedas δ_w , y por otro las variables de salida, el desplazamiento lateral y y el ángulo yaw ψ .

Escenario 1: Curvas abiertas

Con el fin de validar el modelo propuesto se considera una trazada que excite la dinámica lateral del vehículo. A tal fin, se considera como primera trayectoria de validación dos curvas abiertas (Figura 2.13), que serán tomadas a diferentes velocidades para verificar la validez del modelo en todo el rango de velocidades de un utilitario (0 – 120 km/h). Se propone la realización de cinco ensayos diferentes, en los que la misma trayectoria se tomará con un perfil de velocidad diferente: 30 km/h, 50 km/h, 80 km/h, 100 km/h y 120 km/h y en los que el ángulo de giro de las ruedas δ_w aplicado para la misma trayectoria variará en función de la velocidad longitudinal.

Escenario 2: Curvas abiertas y Horizontes de predicción

En este segundo escenario se va a considerar el mismo perfil de trayectoria y los perfiles de velocidad de velocidad para 30 km/h, 80 km/h y 120 km/h introducidos para el escenario 1 y recogidos en la Figura 2.13 pero considerando determinados tiempos de predicción t_p , esto es, en vez de simular todo el periodo que dura el ensayo, se simula hasta determinado tiempo de predicción t_p .

El objetivo del modelo desarrollado es el de ser implementado en un control lateral predictivo. Por ello, el modelo deberá ser capaz de predecir con precisión el comportamiento de la dinámica lateral en un determinado horizonte. La definición del horizonte, sin embargo, no es trivial, dado que al haber desarrollado un modelo simplificado, será necesario verificar el error máximo de predicción del modelo en diferentes horizontes. Con el fin de realizar dicho procedimiento, la verificación se ha de realizar considerando una predicción lanzada desde cada punto de la trayectoria, durante un tiempo t_p . Esto es, para cada instante el modelo bicicleta propuesto se inicializa en el punto dado por el modelo de CarSim, y se realizará una predicción a partir de dicho punto, comparando la diferencia entre la predicción y los datos de CarSim. Así, por ejemplo, desde el instante inicial t_0 se realizará simulación hasta un instante t_p , obteniendo un error e_p entre la señal simulada y la real. A continuación, se realiza la simulación desde un instante t_1 (realimentando el modelo con los valores reales) y realiza la simulación hasta un instante t_{p+1} . Y así sucesivamente.

Para cada velocidad valor de la velocidad longitudinal considerado en el escenario anteriormente descrito se van a considerar 6 valores diferentes de Horizontes de predicción H_p . Habiéndose establecido, mediante sintonización experimental al obtener resultados considerados adecuados, un periodo de muestreo de $T_s = 0,075$ s, en la

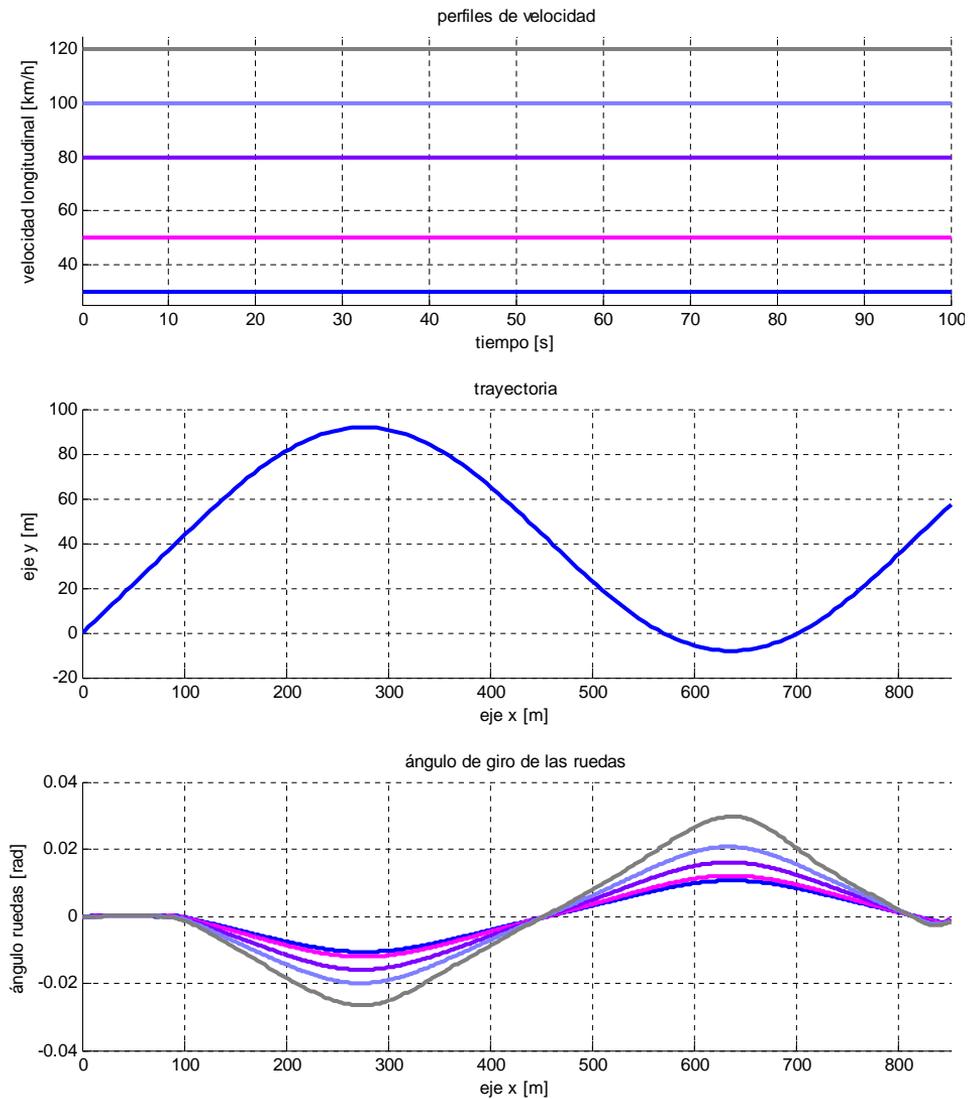


Figura 2.13: **Escenario 1:** Perfiles de velocidad longitudinal \dot{x}^{cg} , trayectoria xy^o y ángulo de giro de las ruedas δ_w aplicado para dos curvas abiertas

siguiente tabla se recogen los tiempos de predicción t_p a considerar a partir de los Horizontes de predicción H_p .

Escenario 3: Curvas cerradas y Horizontes de predicción

En los escenarios previos se ha considerado un perfil de velocidad constante. Sin

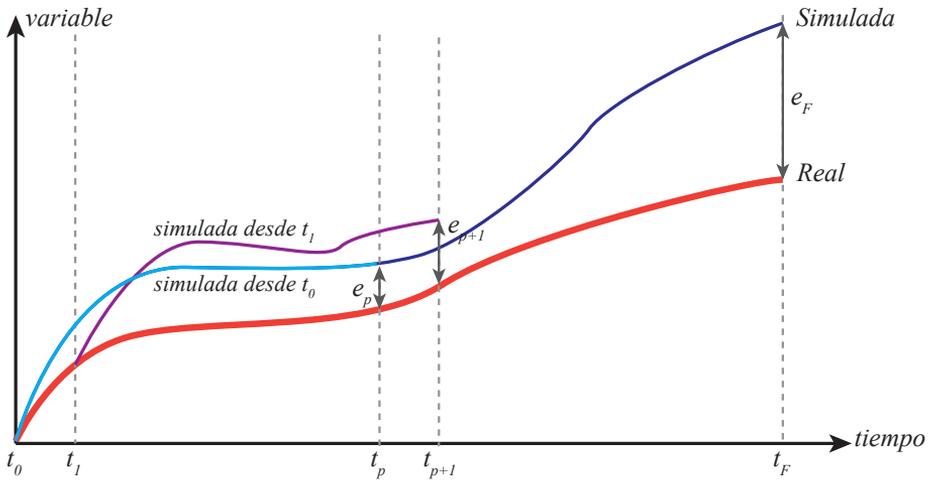


Figura 2.14: Horizonte de predicción

Horizonte de predicción	Tiempo de predicción
$H_p = 1$	$t_p = 0,075 \text{ s}$
$H_p = 5$	$t_p = 0,325 \text{ s}$
$H_p = 10$	$t_p = 0,75 \text{ s}$
$H_p = 30$	$t_p = 2,25 \text{ s}$
$H_p = 50$	$t_p = 3,75 \text{ s}$
$H_p = 70$	$t_p = 5,75 \text{ s}$

embargo, en el caso habitual la velocidad longitudinal será variable. Con el fin de validar el modelo en estas condiciones se ha propuesto la validación del mismo contemplando su funcionamiento como un modelo Linealmente Variable en el Tiempo (LTV, *Linear Time Varying*) para la predicción de las variables de salida: el desplazamiento lateral y^{cg} y el ángulo de giro yaw ψ . De este modo, al inicio de cada instante de predicción, además de realimentar el modelo con las variables de salida de CarSim y el ángulo de giro de las ruedas δ_w correspondiente a dicho instante, el modelo se recalcula en función de la velocidad longitudinal \dot{x}^{cg} .

Con el fin de valorar este escenario se contemplará una trayectoria con dos curvas cerradas consecutivas con diferente dirección y un perfil de velocidad variable desde los 70 km/h hasta los 120 km/h (Figura 2.15). Estos dos perfiles generan un escenario exigente para el modelo propuesto.

2.4.2. Resultados

En la presente sección se detallan y discuten los resultados para los escenarios planteados anteriormente.

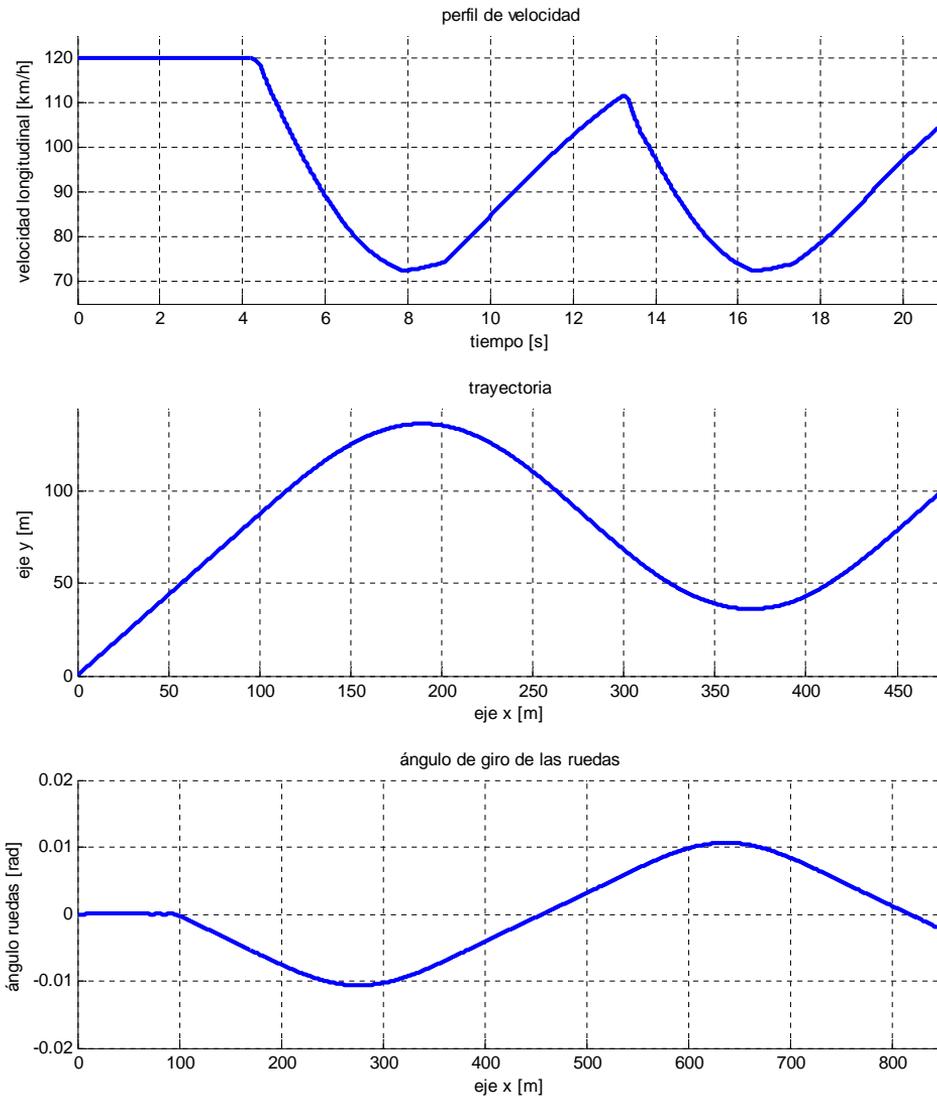


Figura 2.15: **Escenario 3:** Perfil de velocidad longitudinal \dot{x}^{cg} , trayectoria xy^o y ángulo de giro de las ruedas δ_w aplicado para dos curvas cerradas

Escenario 1: Curvas abiertas

Tal y como se ha detallado en la sección precedente, se han realizado 5 ensayos para el primer escenario propuesto, donde en cada ensayo se considera una velocidad longitudinal constante. En este primer escenario se ha simulado toda la trayectoria en ambos modelos: CarSim y el modelo bicicleta propuesto.

Los resultados de las simulaciones de este primer escenario se muestran en las Figuras 2.16 y 2.17, donde cada fila se corresponde con una de las velocidades longitudinales propuestas: 30 km/h , 50 km/h , 80 km/h , 100 km/h y 120 km/h . En la Figura 2.16 se muestran la posición lateral y^{cg} en la primera columna y la velocidad lateral \dot{y}^{cg} en la segunda columna y en la Figura 2.17 la posición angular yaw ψ se muestra en la primera columna y velocidad yaw $\dot{\psi}$ en la segunda.

En ambas figuras se observa cómo el modelo sigue de forma adecuada, con un error acotado, las referencias de posición lateral y^{cg} y orientación yaw ψ marcadas por el software de simulación CarSim en todo el rango de velocidad, produciéndose los máximos errores en los valores que se corresponden con los momentos de los giros. Los errores en la posición y velocidad yaw ψ y $\dot{\psi}$ y la diferencia entre las velocidades laterales \dot{y}^{cg} generan un error de posición lateral. Este error aumenta con la progresión de la simulación y también se ve afectado por la velocidad longitudinal \dot{x} del vehículo. Esto es esperable, dado que se está realizando una simulación en lazo abierto, y existe una notable diferencia entre la precisión del modelo bicicleta propuesto, que tiene simplificaciones, y el CarSim, más cercano a la realidad.

Los errores absolutos máximos se representan en la Figura 2.18, donde cada gráfico de barras representa los errores para una de las variables analizadas. Nótese que con el aumento de la velocidad del ensayo el valor máximo de los errores también aumenta, produciéndose este máximo en la segunda curva del escenario. Los errores de orientación, tanto el ángulo yaw ψ como la velocidad yaw $\dot{\psi}$, así como la velocidad lateral \dot{y} mantienen errores pequeños aun para velocidades elevadas. Sin embargo, debido a la validación en lazo abierto, el error de posición aumenta hasta valores considerables. A velocidades bajas de 30 km/h el error lateral máximo es de un 14 % respecto a la amplitud del seno de la trayectoria, mientras que el error máximo que se produce a 100 km/h asciende al 68 %. Sin embargo, nótese que estos ensayos se han realizado para las simulaciones completas, esto es, un tiempo de predicción igual a la duración de la simulación y éste no será el caso de aplicación. En la aplicación de control, el modelo se empleará como modelo de predicción para un tiempo de predicción delimitado, generando errores laterales más pequeños como se verá en las simulaciones realizadas en el Escenario 2.

Escenario 2: Curvas abiertas y Horizontes de predicción

Una vez se ha validado el modelo bicicleta se determinarán los errores generados por el modelo para diferentes tiempos de predicción t_p , que tendrán influencia directa en los Horizontes de predicción H_p definidos en función de un periodo de muestreo de $T_s = 0,075$ s. De esta forma, se podrá determinar un Horizonte de predicción seguro en el que se garantice que el error del modelado está acotado dentro de unos límites aceptables y que podrá emplearse en la formulación de control propuesta en el Capítulo 4 y posteriores de la tesis. Tal y como se ha definido anteriormente, se propone la realización de 3 ensayos, cada uno a una velocidad constante de 30 km/h , 80 km/h y 120 km/h respectivamente. Además, para cada ensayo se analizará la respuesta con

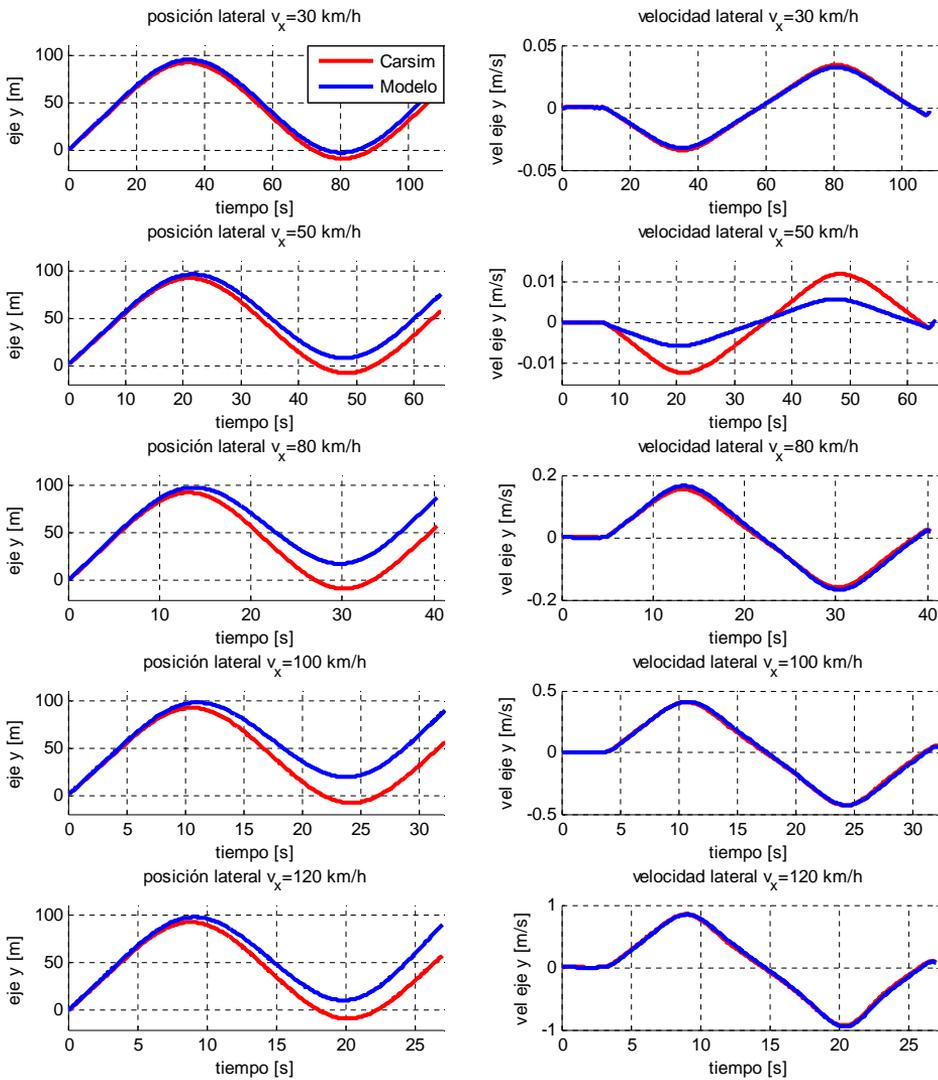


Figura 2.16: **Escenario 1:** Posición y velocidad lateral para dos curvas abiertas

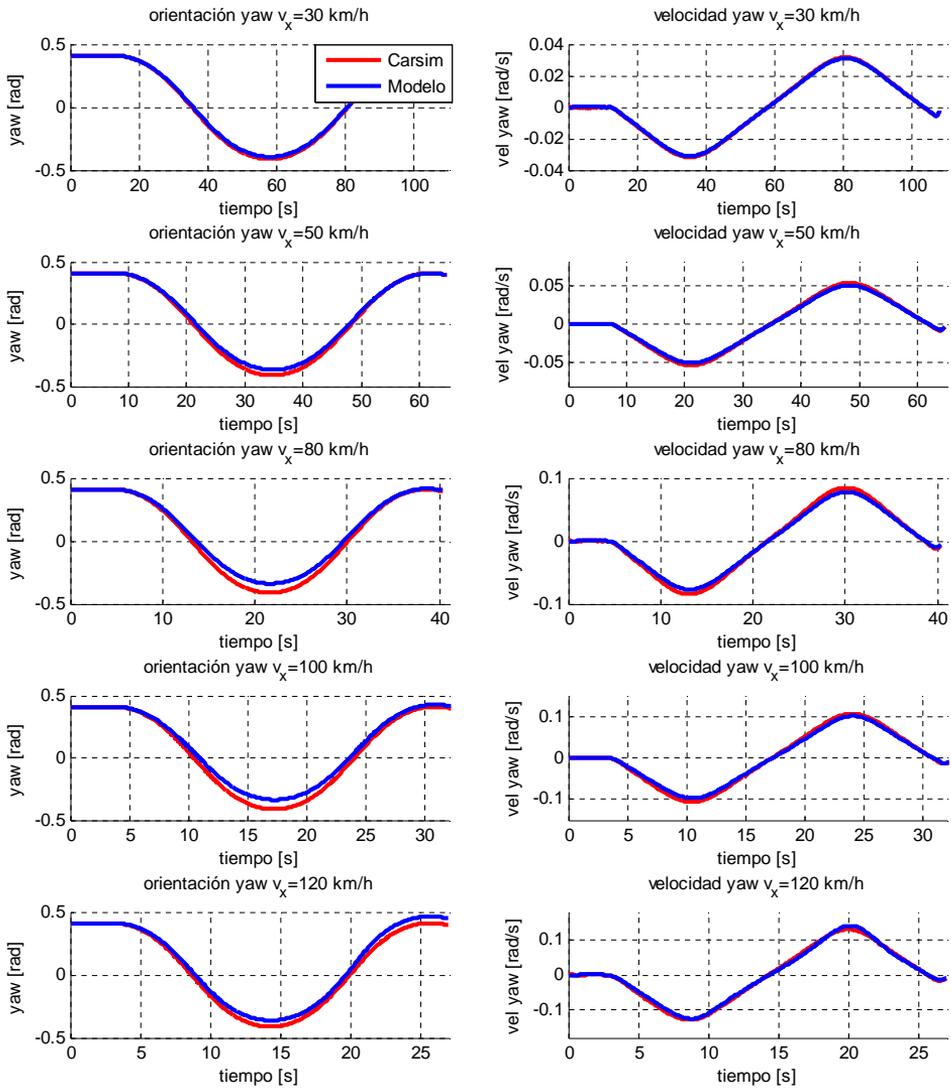


Figura 2.17: **Escenario 1**: Orientación y velocidad yaw para dos curvas abiertas

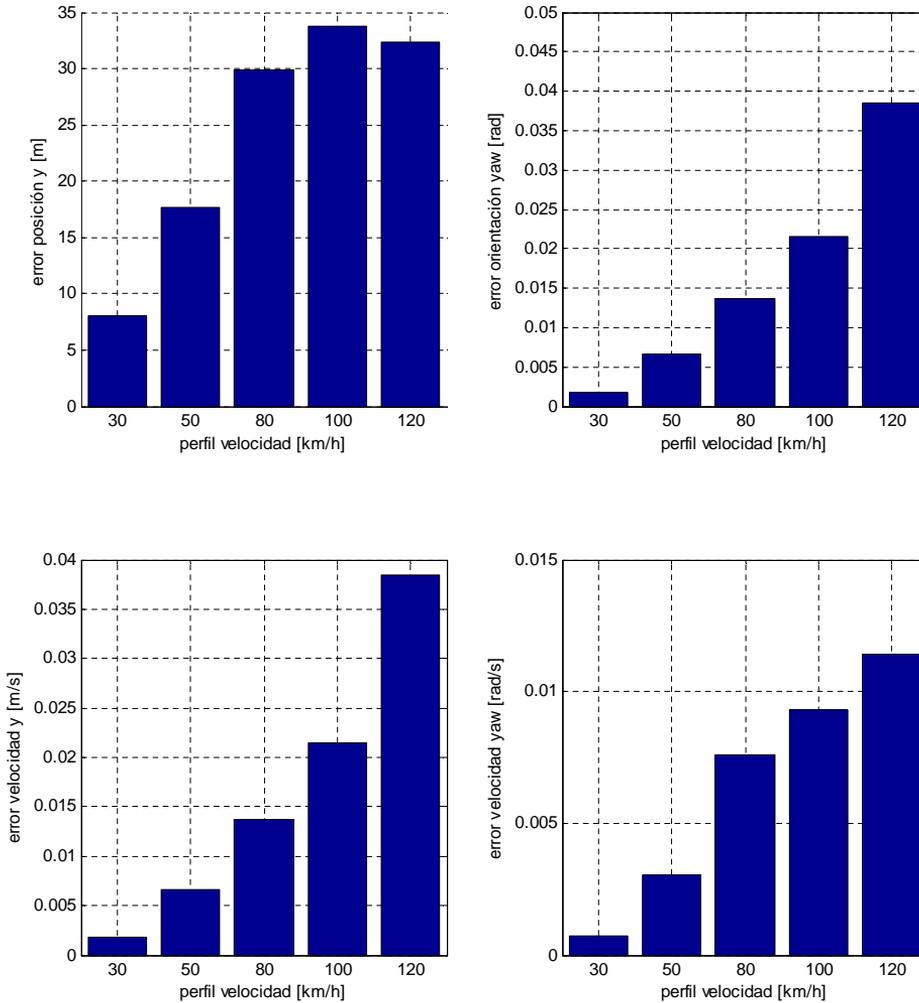


Figura 2.18: **Escenario 1**: Errores máximos comprobando cada variable (desplazamiento lateral y^{cg} , velocidad lateral \dot{y}^{cg} , orientación yaw ψ y velocidad yaw $\dot{\psi}$) para dos curvas abiertas

un Horizonte de predicción de $H_p = 1$, $H_p = 5$, $H_p = 10$, $H_p = 30$, $H_p = 50$ y $H_p = 70$, que se corresponden con un tiempo de predicción desde $t_p = 0,075$ s a $t_p = 5,75$ s.

En la Figura 2.19 se ilustran los resultados de la simulación a $\dot{x} = 30$ km/h. En la primera columna se muestran los resultados del desplazamiento lateral y^{cg} , velocidad lateral \dot{y}^{cg} , orientación yaw ψ y velocidad yaw $\dot{\psi}$ obtenidos mediante Car-Sim; mientras que en la segunda columna se muestran los errores absolutos obtenidos mediante el modelo propuesto para los diferentes Horizontes de predicción H_p . A su vez, en la Figura 2.20 se exponen los resultados de la simulación a $\dot{x} = 80$ km/h y en la Figura 2.21 para $\dot{x} = 120$ km/h.

Para el primer ensayo a una velocidad de 30 km/h (Figura 2.19), tal y como ocurría en el Escenario 1, los errores se mantienen acotados para todos los Horizontes de predicción H_p . Sin embargo, al aumentar la velocidad a 80 km/h (Figura 2.20), el valor de los errores aumenta considerablemente. El error de desplazamiento lateral y^{cg} para un Horizonte de predicción de $H_p = 70$ es muy superior a los otros Horizontes de predicción, desde un 240 % superior al caso con $H_p = 50$. Del mismo modo, el error de las otras variables también es notablemente más elevado para dicho Horizonte de predicción. Por último, para el ensayo a una velocidad de 120 km/h (Figura 2.21) se observa la misma tendencia con los errores. Aunque el error de la velocidad lateral \dot{y}^{cg} , orientación yaw ψ y velocidad yaw $\dot{\psi}$ ha aumentado al aumentar la velocidad, éste se mantiene en valores del mismo rango. Sin embargo, el error lateral y^{cg} aumenta considerablemente y se observa como para un Horizonte de predicción $H_p = 50$, el error es notablemente más elevado que para Horizontes de predicción H_p más pequeños.

El efecto del Horizonte de predicción H_p seleccionado en la precisión del modelo para las trayectorias de referencia y velocidades planteadas es analizado en la Figura 2.22, en esta figura se muestran por filas los errores máximos y mínimos para cada variable analizada: desplazamiento lateral y^{cg} , velocidad lateral \dot{y}^{cg} , orientación yaw ψ y velocidad yaw $\dot{\psi}$; por columnas, las tres velocidades longitudinales propuestas \dot{x} : 30 km/h, 80 km/h y 120 km/h, y para los diferentes Horizontes de predicción H_p . En ellas se puede observar que, para todos los Horizontes de Predicción H_p y la misma velocidad, los errores de velocidad lateral \dot{y}^{cg} y yaw $\dot{\psi}$ se mantienen en valores del mismo rango, con un error ligeramente inferior con $H_p = 1$, un Horizonte de predicción muy reducido. Sin embargo, los errores de posición aumentan considerablemente al aumentar el Horizonte de predicción debido a la necesidad de integración del modelo. Aunque los errores del ángulo yaw ψ alcanzan valores pequeños y no apreciables durante la conducción, los errores laterales y^{cg} a altas velocidades, sí que alcanzan valores no despreciables. En estos gráficos se puede observar, como tanto a en el ensayo de velocidad longitudinal a 80 km/h y como a 120 km/h, el error lateral con un Horizonte de predicción $H_p = 70$ es 10 veces superior que el error con $H_p = 10$, mientras que para un $H_p = 30$ es aproximadamente el doble.

Por estas razones, el rendimiento del modelo bicicleta propuesto es dependiente de la velocidad longitudinal a la que circula el vehículo, decrementando su eficiencia en función del incremento de la velocidad. Analizando los errores máximos para los

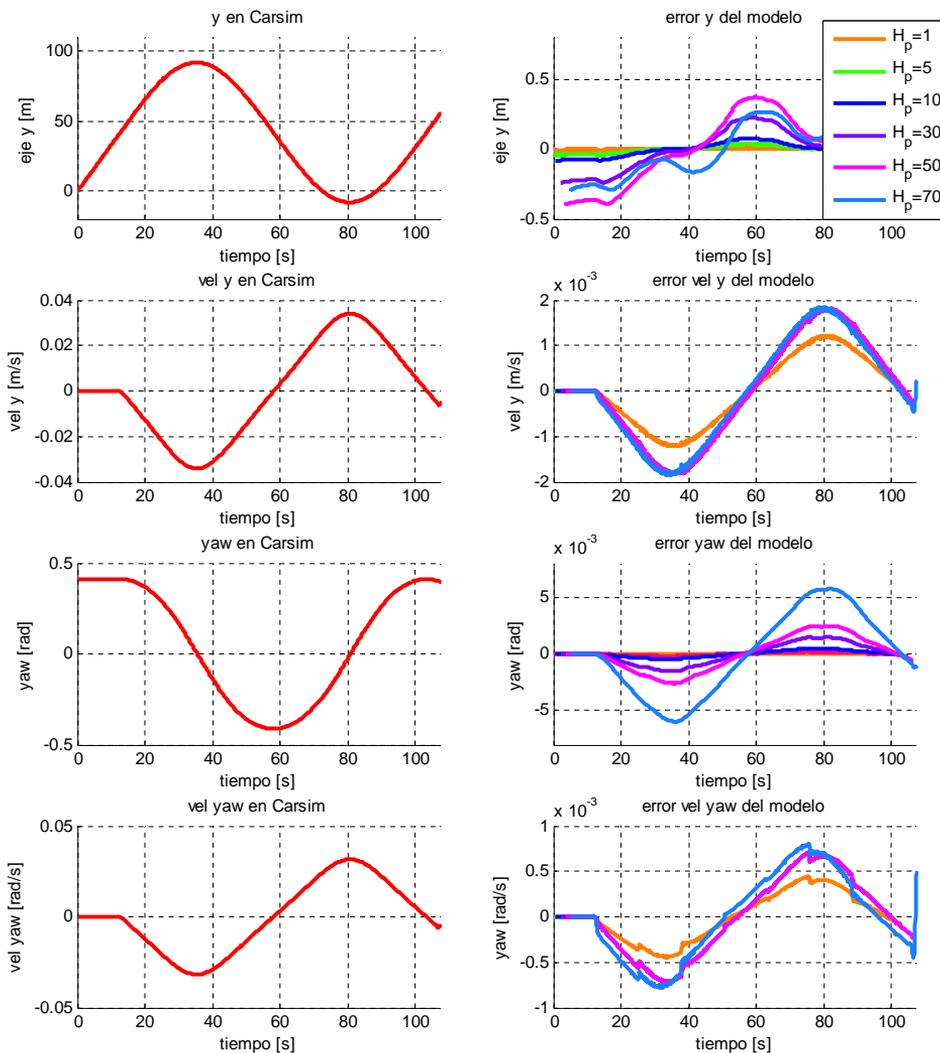


Figura 2.19: **Escenario 2:** Resultados a una velocidad de $\dot{x} = 30 \text{ km/h}$ para dos curvas abiertas

diferentes Horizontes de Predicción se concluye que no es recomendable el uso de un $H_p \geq 30$, debido que a partir de ese valor los errores aumentan de forma considerable. Además, teniendo en cuenta que se trata de un modelo de predicción para un control lateral de un vehículo, se recomienda un $H_p \geq 10$ que equivale a un tiempo de predicción $t_p = 0,75 \text{ s}$ ya que con un valor inferior la predicción será muy reducida no pudiendo adaptarse correctamente a la trayectoria futura.

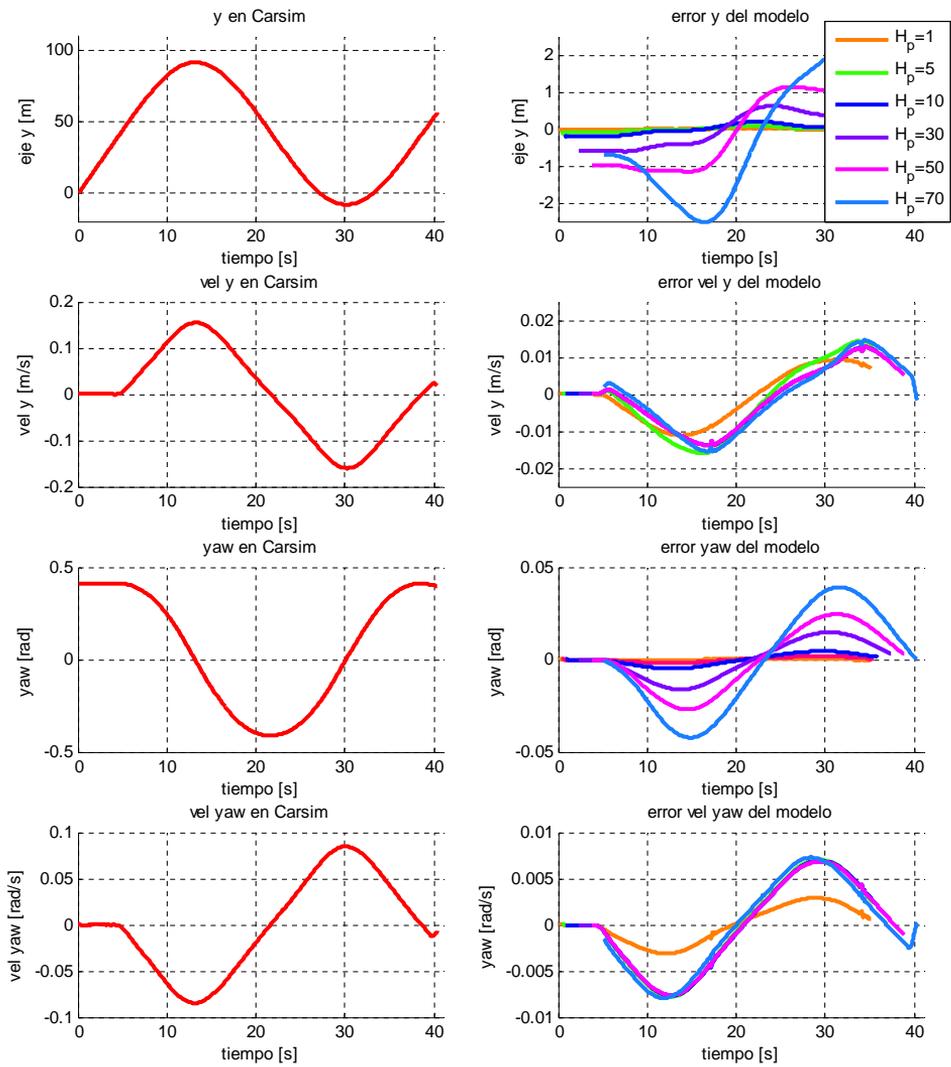


Figura 2.20: **Escenario 2**: Resultados a una velocidad de $\dot{x} = 80\text{km/h}$ para dos curvas abiertas

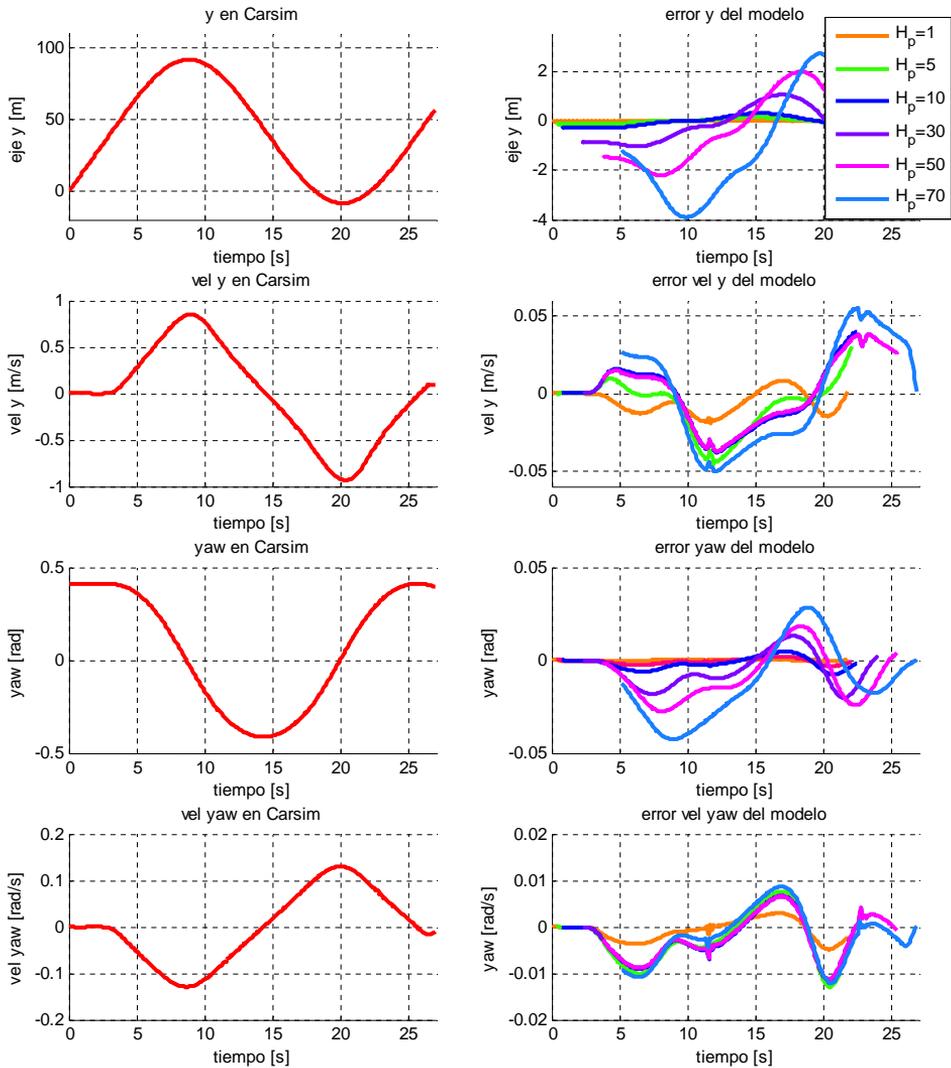


Figura 2.21: **Escenario 2:** Resultados a una velocidad de $\dot{x} = 120\text{km/h}$ para dos curvas abiertas

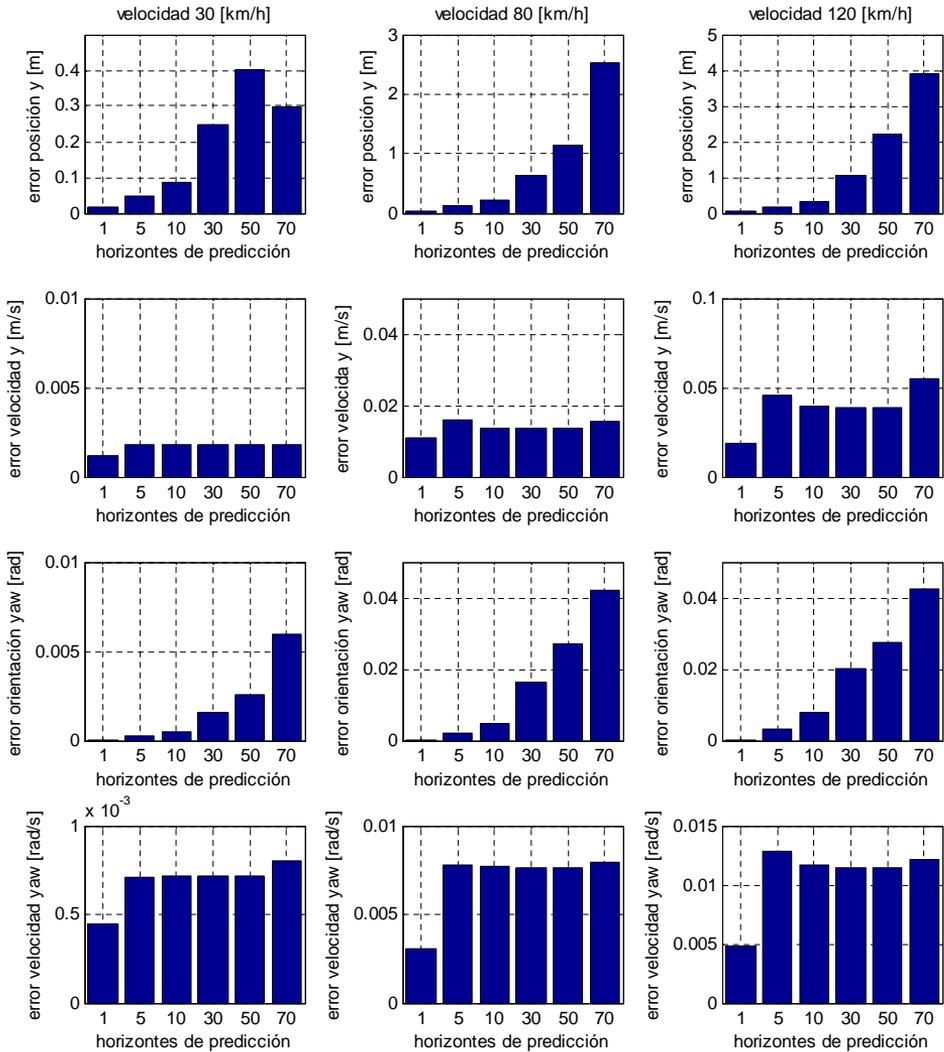


Figura 2.22: **Escenario 2:** Errores máximos y mínimos, comprobando cada variable (desplazamiento lateral y^{cg} , velocidad lateral \dot{y}^{cg} , orientación yaw ψ y velocidad yaw $\dot{\psi}$) para los tres ensayos propuestos (30 km/h, 80 km/h y 120 km/h) y diferentes Horizontes de predicción H_p para dos curvas abiertas

Escenario 3: Curvas cerradas y Horizontes de predicción

En el Escenario 1 el modelo ha sido validado para su uso para diferentes perfiles de velocidad constante, y posteriormente, en el Escenario 2 se ha analizado el modelo para diferentes Horizontes de predicción, concluyendo que el Horizonte de predicción recomendado debe tener un valor $10 \leq H_p \leq 30$ o tiempo de predicción $0,75 s \leq t_p \leq 3,75 s$, considerando un compromiso entre el error máximo aceptable y el tiempo mínimo de previsualización de la trayectoria.

En el Escenario 3 se pretende validar un modelo LTV para perfiles de velocidad variables y para tres Horizontes de predicción: $H_p = 10$, $H_p = 20$ y $H_p = 30$.

En la Figura 2.23 se muestran los resultados para este escenario, donde la primera columna son los resultados obtenidos mediante CarSim para las cuatro variables analizadas y la segunda columna muestra los errores absolutos obtenidos para los tres Horizontes de predicción propuestos. En este escenario, los errores de las variables de velocidad lateral \dot{y}^{cg} , orientación yaw ψ y velocidad yaw $\dot{\psi}$ estimadas mediante el modelo LTV alcanzan valores del mismo rango que para el Escenario 1. Sin embargo, debido a la consideración de una velocidad longitudinal constante durante todo el Horizonte de predicción, el error lateral alcanza valores elevados superiores a $10 m$ para un $H_p = 30$. Este valor elevado se alcanza debido a que además del error lateral generado por el modelo considerado, la velocidad longitudinal varía bruscamente durante la curva (de $90 km/h$ a $72 km/h$ en $2 s$). Debido a esta variación, no considerada durante la predicción del modelo, ya que sólo se considera la velocidad longitudinal del inicio de la predicción, las posiciones en el instante final de la predicción $t = t + H_p$ para el sistema real y el modelo de predicción estarán muy distanciadas. Pero estos valores máximos son puntuales y se producen en los puntos críticos de las curvas, por lo que no ponen en compromiso el rendimiento general del modelo ya que se tomarán medidas para su compensación en las aplicaciones de control.

Tras analizar los resultados, se puede concluir que los errores obtenidos considerando un modelo LTV en un escenario exigente, con una trayectoria compleja y en los límites superiores de velocidad longitudinal, los resultados son satisfactorios y el modelo LTV es válido.

2.5. Conclusiones

En este primer capítulo se ha analizado la necesidad de desarrollar de modelos de vehículos, para a continuación proponer una metodología de modelado cuya finalidad es su uso en aplicaciones de control, concretamente enfocado a la dinámica lateral en aplicaciones de seguimiento lateral de trayectoria.

El uso de modelos, así como de su uso en simulación, es una herramienta muy útil para comprender y estudiar la dinámica de vehículos. Además, hoy en día, gracias al avance tecnológico su uso se puede ampliar, sobre todo en la industria automovilística, para validar sistemas mecánicos o de control de forma segura y rápida, sin tener que construir prototipos o poner en riesgo a personas.

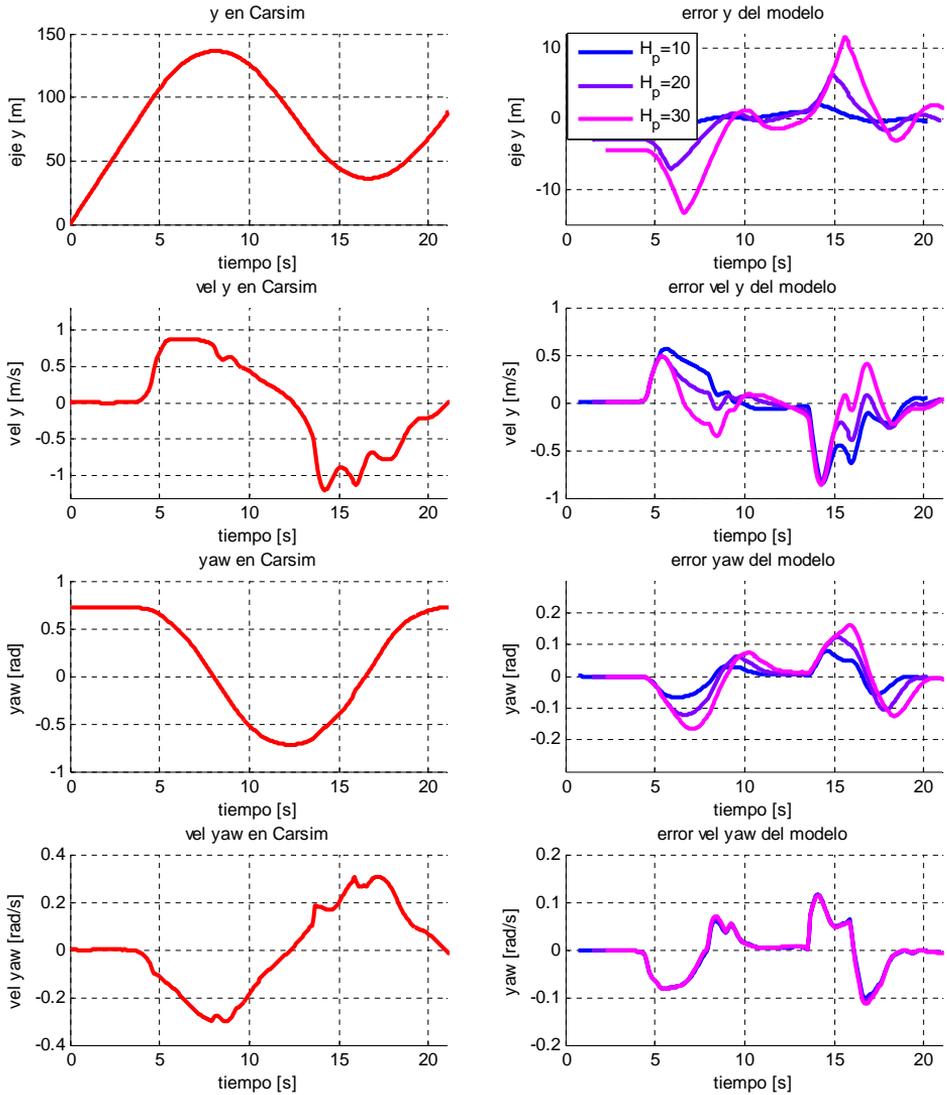


Figura 2.23: **Escenario 3**: Dos curvas cerradas con un modelo LTV y considerando tres Horizontes de predicción: $H_p = 10$, $H_p = 20$ y $H_p = 30$ para dos curvas cerradas

El modelado de vehículos es un campo muy amplio, siendo además la problemática compleja de abordar. Por esta razón, a la hora de desarrollar un modelo es habitual verificar si se puede delimitar el problema para simplificarlo. Se han propuesto dos fundamentos a considerar: la finalidad del modelo y el alcance del mismo. La finalidad del modelo hace referencia a cual va a ser su propósito, de modo que, por ejemplo, un modelo de control deberá ser lo más simple posible mientras que un modelo de simulación deberá primar la precisión. En cuanto al alcance del modelo, éste define el objetivo del mismo. Por ejemplo, para un problema de seguimiento lateral de trayectoria se puede considerar sólo el desplazamiento lateral del vehículo y/o el giro yaw, pero para un sistema de control de crucero, el problema se enfocaría únicamente a la dinámica longitudinal, despreciando la lateral.

A su vez, a la hora de plantear una metodología de modelado se pueden encontrar dos grandes tendencias: los modelos analíticos y los denominados modelos *multibody*. El modelado por métodos analíticos es el más empleado en la literatura y define las ecuaciones de movimiento del sistema a partir de los fundamentos físicos a los que está sujeto. Éste método permite definir desde modelos muy simples, como el denominado Bicicleta, así como modelos más complejos. Los modelos *multibody*, por otro lado, se componen de un número finito de cuerpos rígidos unidos entre sí por articulaciones y en los que se analiza el movimiento de cada elemento. Este enfoque permite abstraer al usuario de la derivación de las ecuaciones globales que definen el propio comportamiento del vehículo, centrándose en cada elemento, así como en la interacción entre los mismos. Aunque este enfoque permite obtener modelos modulares y de mayor precisión, su coste computacional es más elevado que los métodos analíticos, lo que dificulta su uso en ciertas aplicaciones, como las aplicaciones de control.

Una vez definidos los fundamentos previos al planteamiento de una metodología de modelado, se estima necesario el desarrollo de una metodología de modelado cuya finalidad es su uso en aplicaciones de control, concretamente enfocado a la dinámica lateral en aplicaciones de seguimiento lateral de trayectoria. Este modelo considera la dinámica lateral de los vehículos, por lo que se considerarán los GDL del desplazamiento lateral y el ángulo yaw. Una de las premisas más importantes a la hora del modelado para control es que debe existir un compromiso entre el coste computacional que conlleve la ejecución del modelo y la precisión del mismo. Por esta razón, para el desarrollo del modelo se deben realizar una serie de simplificaciones. Así, se desarrolla una metodología de modelado en el que la entrada del modelo sea el ángulo de giro de las ruedas y la salida del mismo el desplazamiento lateral y el ángulo yaw, y donde además, la velocidad longitudinal del vehículo es un parámetro del que depende el modelo.

En primer lugar se valida el modelo con una trayectoria y varios perfiles de velocidad constante y que abarcan un amplio rango, desde los 30 *km/h* hasta los 120 *km/h*. Se puede observar en los resultados obtenidos cómo a raíz del incremento de la velocidad la precisión del modelo disminuye, sin embargo, se considera un modelo válido para su uso en aplicaciones de control con un tiempo de predicción delimitado, ya que el error aumenta con los instantes de simulación.

En segundo lugar, dado que el modelo se empleará como modelo de predicción, se plantea un escenario para validar el rango de tiempo de predicción en el que el modelo pueda ser empleado. Los resultados obtenidos concluyen que para un tiempo de predicción comprendido entre los 0,75 s y los 3,75 s los errores son muy similares, siendo la precisión del modelo simplificado adecuada para aplicaciones de control.

Por último, tal y como se ha mencionado, la velocidad longitudinal es un parámetro del que depende el modelo bicicleta propuesto. En los anteriores planteamientos se ha considerado un perfil de velocidad longitudinal constante. Sin embargo, en un escenario realista de velocidad longitudinal variable, se plantea el uso de un modelo LTV, esto es, que para un tiempo de predicción determinado el modelo se considere constante, tomando la velocidad al inicio de este periodo como valor para la definición del modelo, pero que este modelo varíe en cada iteración. Esta propuesta se ha validado con un perfil de velocidad y trayectoria exigente, a altas velocidades y con curvas cerradas. Los resultados obtenidos son satisfactorios, ya que los errores máximos alcanzados son puntuales y la tendencia del modelo es adecuada para la aplicación.

De este modo, la metodología de modelado propuesta en este capítulo queda validada para su uso en el desarrollo de modelos para control.



3.1. Introducción

En la actualidad, la incorporación de sistemas de seguridad activa en los vehículos se presenta como un requisito indispensable, dado que permite mejorar notablemente la seguridad de los pasajeros. Entre estos dispositivos, se encuentran los sistemas avanzados de ayuda a la conducción (ADAS, *Advanced Driver Assistance Systems*), que evalúan el entorno (la carretera, las señales, el ambiente...), las acciones del conductor sobre el vehículo (uso del freno, acelerador y giro del volante) y actúan para ayudar, en una o otra forma, al conductor. Algunos ejemplos de estos sistemas de ayuda a la conducción son el encendido automático de las luces o de los limpiaparabrisas, el control de presión de los neumáticos, la ayuda al arranque en pendiente, etcétera.

Entre estos ejemplos de sistemas de ayuda a la conducción también se pueden encontrar los denominados sistemas de guiado avanzados. Estos sistemas evalúan la

hipotética trayectoria que seguiría el vehículo en un futuro próximo y las acciones del conductor sobre el vehículo, y en función de estos datos y de la acción que se pretenda hacer, actúan ayudando al conductor a realizar dicha acción de forma segura. Estos sistemas aportan múltiples ventajas en la estabilidad, seguridad y ergonomía de los vehículos. Como ejemplo están los Sistemas de Mantenimiento en Carril, que ayudan al conductor a mantener su vehículo dentro del carril y evitar salidas de calzada; los Sistemas de Cambio de Carril, para ayudar al conductor a hacer un adelantamiento de forma segura; o los Sistemas Anticolisión, que detectan un obstáculo en la calzada y ayudan al conductor a evitarlo con una nueva trazada de forma segura.

Al hablar del problema de guiado avanzado de vehículos, éste se puede dividir en tres subproblemas independientes (Figura 3.1). Así, cada subproblema tendría su propio módulo o mecanismo encargado de buscar la solución y los tres, en conjunto, resuelven el problema del guiado de vehículo. Estos tres módulos considerados son: definición de la trayectoria, seguimiento de la trayectoria y la toma de decisión.

- **Definición de la trayectoria:** es el módulo encargado de definir la trayectoria de referencia que el vehículo debe seguir. Mediante diferentes mecanismos (visión, sensores, GPS,...) evalúa el entorno del vehículo y en función de la tarea que se desea realizar, adapta la trayectoria de referencia. Así, si se trata de un sistema mantenimiento en carril buscará una trayectoria por el centro del carril y para un sistema de adelantamiento calculará una trayectoria segura para hacer el doble cambio de carril.
- **Seguimiento de la trayectoria:** es el módulo de control, el que calcula la o las acciones de control que se deberían aplicar sobre el vehículo (posición del volante, freno y acelerador) para que siga la trayectoria de referencia.
- **Toma de decisión:** es el módulo de evaluación que decide si la acción del conductor es segura o no. En caso de no ser segura, su acción no se aplicaría y sería desbancada por la calculada por el módulo de seguimiento de la trayectoria.

Cada módulo puede ser independiente uno del otro, con un objetivo o finalidad concreto, pero en su conjunto resuelven el problema del guiado avanzado de vehículos. Por ejemplo, en un problema para evitar de obstáculos, el módulo de definición de trayectoria detecta que en la trayectoria del vehículo hay un obstáculo y calcula la trayectoria de referencia que el vehículo debería seguir para evitarlo. Con esa información, el módulo de seguimiento de trayectoria calcula la acción de control óptima para seguir la referencia de forma segura. Por último, el módulo de toma de decisión evalúa el comportamiento del conductor y si considera que su acción de control es demasiado agresiva y peligrosa, o que por el contrario, no es suficiente para evitar el obstáculo, se aplica la acción calculada por el control de seguimiento de trayectoria y se ignora su acción.

En la práctica, también se pueden encontrar casos en los que estos tres módulos no son completamente independientes, existiendo así soluciones que abarcan dos de los módulos planteados (Figura 3.1). Este es el caso de los sistemas denominados como



Figura 3.1: Sistemas de guiado avanzado

copilotos. En este tipo de sistemas, el módulo de seguimiento de trayectoria calcula la acción de control a aplicar sobre el volante para seguir determinada trayectoria de referencia, de forma que, esta acción de control sería la ideal. En paralelo, se predice la acción de control que efectuaría el conductor bajo las condiciones dadas. En base a estos dos cálculos, se determina una acción de control correctiva que acercaría el valor de la acción de control real al valor de la acción de control ideal.

De los tres módulos citados anteriormente, la presente tesis se enmarca en el asociado al módulo de seguimiento de la trayectoria, considerando que la toma de decisiones y la generación de trayectoria están provistas por sus respectivos módulos. En concreto, la presente tesis abarcará una problemática concreta del control de seguimiento de trayectoria, el control lateral del vehículo, de mayor complejidad que el control longitudinal, ampliamente implementado en los vehículos actuales (*Cruise Control*). Así, se desea diseñar un controlador cuya acción de control sea el ángulo de giro de la dirección delantera (a partir de ahora, se considerará siempre dirección delantera con un ángulo $\delta_w(t)$), que minimice el error de desplazamiento lateral $e_y(t)$ respecto de una trayectoria de referencia.

En la actualidad, existe una creciente tendencia a incorporar un mayor número de elementos en este tipo de controles, de modo que la definición del controlador de seguimiento de trayectoria lateral suele ser complementada con términos adicionales que garanticen la estabilidad en situaciones límite con poco agarre del neumático, aspectos de confort, aspectos de seguridad, . . . Con el fin de incorporar estos elementos a la ley de control, el problema de control lateral se ve ampliado, considerando referencias no sólo de la posición, sino también de la velocidad o la orientación, se incorporan también elementos de control longitudinal o modelos de mayor complejidad que consideran el modelo del propio neumático. Siendo la automatización del vehículo un área de máxima interés en actualidad, el control lateral es un campo de investigación diverso y abierto.

Desde una perspectiva general, y centrándose en la finalidad más básica del control lateral, los trabajos se pueden dividir en dos grandes categorías: técnicas de control predictivas y técnicas no predictivas. Aunque la mayoría de los autores tiende al uso del control predictivo para abordar este problema, debido a las ventajas que supone este

tipo de controlador, como se analizará posteriormente, aún existen muchos autores que utilizan controladores no predictivos para abordar la problemática del control lateral. A continuación se procederá a detallar estas aproximaciones.

3.2. Controladores no predictivos

Definir un grupo de estrategias de control no predictivas engloba muchos tipos de control de diferentes familias: control clásico, técnicas modernas... y es que en la literatura se pueden encontrar propuestas muy diversas para una misma problemática. En la presente sección se detallan las más relevantes.

3.2.1. Controladores no robustos

Se podría considerar que los controladores PID (Proporcional Integrativo Derivativo) son el mecanismo de control más genérico sobre una realimentación de bucle cerrado, ampliamente usado en la industria para el control de sistemas. El PID es un sistema al que le entra un error calculado como la resta entre la salida deseada, o referencia, y la medida y su salida, la acción de control, es utilizada como entrada en el sistema que queremos controlar. Nótese que el cálculo de esta acción de control se realiza en base al error actual, con lo que ha de existir error para que el PID pueda reaccionar. Aun así, el PID es un controlador fácilmente implementable, de bajo coste computacional y que permite una respuesta rápida.

Así, en el caso del control de seguimiento de un vehículo, el controlador intentará reducir la acción de control, el error en un punto determinado ajustando la entrada del sistema, el ángulo de giro del volante, y las ganancias del PID se sintonizarán de acuerdo a la situación.

El controlador PID viene determinado por tres ganancias: la proporcional, la integral y la derivativa. Cada una de estas ganancias influye en mayor medida sobre alguna característica de la salida (tiempo de establecimiento, sobreoscilación,...). Sin embargo, al ser el vehículo un sistema altamente no lineal, la sintonización del PID para cumplir unas determinadas especificaciones suele tener que realizarse bien basándose en un modelo linealizado en torno a uno o varios puntos de operación, o bien mediante prueba y error.

Un ejemplo del uso de controladores PID para el seguimiento de trayectoria es el propuesto por Naranjo [72], presentando una arquitectura de control en cascada de dos capas. La capa más baja es un PID clásico que procura alcanzar la referencia de posición angular de la dirección. Pero por sí solo, este controlador no es autónomo, ya que necesita un mecanismo que determine la posición angular de referencia que se debe seguir para alcanzar un error lateral y de orientación nulo. Esta referencia se calcula en la capa más alta mediante un controlador Fuzzy, que se encarga de adquirir la información de los sensores y compararla con la trayectoria de referencia para generar una nueva referencia adaptada para la posición del volante.

Naranjo [72] sintoniza primero el PID mediante el método de Ziegler-Nichols y lo resintoniza experimentalmente para obtener una respuesta sobreamortiguada y

evitar así los efectos negativos de los sobreimpulsos y las oscilaciones. El tiempo de establecimiento para giros establecido es de 1,2 s para un giro de sólo 15° en el volante y de 2,3 s para un giro de 156°, que son ángulos típicos para conducción en curva y recta, obteniendo un sistema de respuesta relativamente lenta.

Otro ejemplo de aplicación, en este caso para un problema de permanencia en el carril, es el que presenta Marino [61] en el que introduce un esquema de control con dos controladores PID anidados. El primer controlador es un PI que calcula la posición angular de la dirección y que procura el seguimiento de una referencia de velocidad yaw a pesar de las perturbaciones e incertidumbres de los parámetros, llevando el vehículo hacia una posición de error lateral nula. El segundo controlador, un PID, es el encargado de generar la referencia de velocidad yaw a partir del error lateral existente. Por su parte, Marino sintoniza analíticamente los controladores escogiendo valores para las ganancias con el objetivo de evitar inestabilidad y chattering.

En ambos trabajos los controladores PID se sintonizan para un sistema nominal concreto, pero el sistema que representa un vehículo es altamente variable, esto es, el sistema que representa la dinámica de un vehículo depende de variables como la velocidad longitudinal a la que se mueve o la rigidez de los neumáticos. De modo que la variabilidad del sistema puede acarrear que el controlador PID no actúe de la forma planteada o incluso que inestabilice el sistema. En base a esto, Marino [61] analiza la robustez de su propuesta respecto a la variación de la velocidad longitudinal. En los resultados se observa cómo la robustez de la propuesta decrece al incrementar la velocidad de un 43 % a un 13 % al variar la velocidad de los 2 m/s a los 36 m/s.

Ante esta problemática y con el fin de ampliar el rango de aplicación de los controladores PID, se plantea el uso de PID con ganancias variables cuyo valor se ajusta en función de la situación, con el fin de obtener una respuesta deseada en un rango mayor de situaciones.

Así, Mashadi [62] calcula las ganancias óptimas de un PID para diferentes escenarios de actuación mediante algoritmos genéticos. El controlador PID para una aplicación de seguimiento de trayectoria, considera el desvío lateral y de orientación para aplicar una acción correctiva al ángulo de giro de las ruedas, consiguiendo así que el vehículo siga la trayectoria deseada. El autor compara la respuesta del algoritmo propuesto con un PID con ganancias constantes tradicional, en el caso de una maniobra de doble cambio de carril, demostrando que el sistema propuesto presenta una mejor respuesta sin oscilaciones ni sobreimpulsos con un error máximo un 50 % inferior que con un PID de ganancias constantes.

Mientras que el controlador propuesto por Mashadi precalcula las ganancias para diferentes escenarios, la propuesta de Zhao [114] es un PID adaptativo que recalcula online nuevas ganancias del controlador mediante la estrategia de control de varianza mínima, un método generalizado. Su aplicación está destinada a un vehículo autónomo que controla el ángulo de giro de las ruedas delanteras. Valida y compara su propuesta contra un PID tradicional, en el que las ganancias son constantes, obteniendo un decremento de error del 50 % sobre el error lateral máximo obtenido en el PID tradicional.

En resumen, aunque los controladores PID son ampliamente usados dada su sen-

cillez, también conllevan una serie de desventajas. Por un lado, y como ya se ha mencionado, para poder afrontar variaciones del sistema y mantener la respuesta deseada, se contempla el uso de mecanismos para recalcular las ganancias más adecuadas en cada instante. Por otro lado, se observa cómo son necesarios más mecanismos, como aquellos encargados de adaptar el calculo de la referencia que debe seguir el vehículo para cumplir los requisitos, ya que el módulo encargado de ello calculará una trayectoria objetivo, y no, por ejemplo, una referencia de ángulo de giro del volante. Por estas razones, se puede considerar que los controladores PID no son válidos por si solos para una aplicación de control lateral de un vehículo, sino que son herramientas a emplear junto con otras técnicas de control.

3.2.1.1. Controladores por realimentación del estado

Mientras que los controladores PID actúan sobre la señal a controlar, los controladores por realimentación de estado incorporan una ganancia en la realimentación (Figura 3.2). El objetivo de dicha ganancia es, partiendo del comportamiento del sistema original, modificarlo para que cumpla ciertas especificaciones. Este tipo de controladores se sintonizan mediante asignación de valores propios o por asignación de polos. Un ejemplo explicativo de su uso para la problemática planteada en este capítulo se recoge en [79].

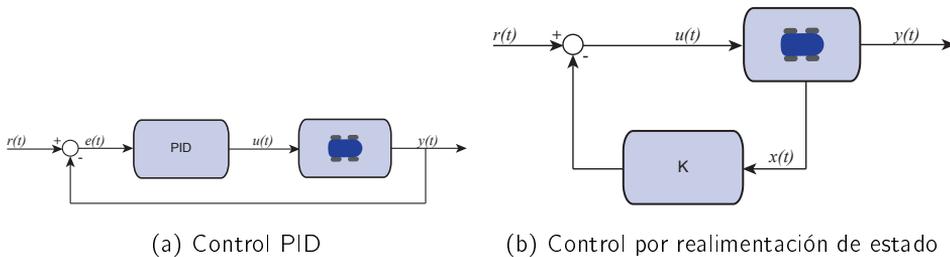


Figura 3.2: Diferencia entre las estructuras de los controladores PID y por realimentación de estado

Este enfoque es el que propone Mammar [60] para desarrollar un sistema de ayuda o copiloto que garantice, corrigiendo el ángulo de la dirección a un valor admisible, que el vehículo no se sale de su carril cuando las condiciones de conducción están en el límite de la estabilidad. Para modelar la no linealidad de la respuesta de las fuerzas de los neumáticos en los límites de la estabilidad emplea un modelo Fuzzy Takagi-Sugeno y sobre éste aplica un control por realimentación de estado estructurado. Compara los resultados obtenidos por el controlador propuesto con una conducción en curva en la que el conductor ejerce una conducción pobre, en el que el vehículo alcanza un error de desplazamiento lateral máximo de $0,9\text{ m}$. Al aplicar la propuesta de Mammar en la misma situación el error lateral es despreciable y el giro yaw más suave.

Seop Son [98] propone de igual modo el uso de un controlador por realimentación de estado multivelocidad como complemento al sistema de visión de un sistema de permanencia en el carril. En este trabajo se sintoniza la ganancia del controlador minimizando una ecuación de Ricatti para garantizar su estabilidad. El controlador tratará de mantener el vehículo en el carril procurando que el vehículo siga una referencia de posición lateral y de velocidad yaw y minimice la velocidad lateral y el error en la orientación. Hace una comparativa entre tres casos de estudio: uno control de velocidad única sin integrador, un control multivelocidad sin integrador y un control multivelocidad con integrador. Los tres casos se validan para una trayectoria con dos curvas unidas por una recta. Los dos primeros casos resultan similares, con un error lateral despreciable en la línea recta pero de 1 m en las dos zonas curvas. Sin embargo, para la misma trayectoria el último controlador propuesto obtiene un error medio prácticamente nulo.

Pero los controladores por realimentación de estados tienen una problemática similar a la que presentan los PID, y es su sensibilidad a variaciones de los parámetros del sistema. Para solventarlo, se tiende a la adaptación de las ganancias durante la ejecución, que es el método que propone Wu [110], que desarrolla un controlador Fuzzy para autoajustar las ganancias de forma iterativa para garantizar la estabilidad en lazo cerrado. Este controlador Fuzzy lo emplea en un controlador por realimentación de estado para que el vehículo permanezca en su carril mediante el seguimiento de referencia de posición y orientación, obteniendo un error lateral máximo de $0,7\text{ m}$ en la curva más exigente con un giro brusco en el volante de 5° .

Recapitulando, las propiedades de los controladores por realimentación de estado se encuentran numerosas similitudes con los controladores PID, ya que su principal característica es su sencillez y amplio uso en la literatura. Sin embargo, conllevan una serie de desventajas como la necesidad de mecanismos adicionales para adaptar las ganancias y garantizar así la estabilidad del sistema. Además, su implementación tiende a no ser directa, ya que los estados no siempre son accesibles y se necesitan observadores que complican el problema.

3.2.1.2. Controladores Fuzzy

Una alternativa al uso de controladores más tradicionales para el seguimiento de trayectoria son los controladores basados en lógica Fuzzy, conocida también como lógica difusa o borrosa, y que intentan adaptarse mejor al mundo real. En la lógica clásica o digital se emplean valores discretos, 0 ó 1, falso o verdadero. Sin embargo, la lógica difusa trata las señales como analógicas, como señales continuas, donde existen valores intermedios entre el 0 y el 1.

Aplicando esta lógica, un conjunto difuso permite a sus elementos tener un grado de pertenencia. Si el valor 1 se asigna a los elementos que están completamente en un conjunto, y 0 a los que están completamente fuera, entonces los objetos que están parcialmente en el conjunto tendrán un valor de pertenencia estrictamente entre 0 y 1. Por ejemplo, si un vaso completamente lleno tiene un grado de pertenencia de valor 1, y un vaso completamente vacío un grado de pertenencia de valor 0, entonces

al añadir una gota a este último, su grado de pertenencia a los vasos llenos sería ligeramente superior a 0.

Una propuesta de un controlador basado en lógica Fuzzy es el presentado por Hajjaji en [36]. El objetivo de éste es que partiendo de una posición inicial aleatoria, dentro de unos límites de proximidad a la posición inicial ideal, el vehículo complete una trayectoria predefinida y fija. Para dicho fin, desarrolla un modelo Fuzzy Takagi-Sugeno a partir de un modelo de vehículo no lineal y basado en este modelo, un controlador Fuzzy para un problema de seguimiento de trayectoria en el que controla el ángulo de giro de las ruedas y la fuerza de frenada. Los resultados demuestran que el controlador consigue corregir los errores de posición lateral y de orientación yaw en menos de 2 s y mantenerlos nulos hasta completar la trayectoria circular y para una velocidad de 20 m/s.

Otro autor que emplea esta técnica es Naranjo en [71]. En este trabajo, el autor desarrolla un algoritmo para detectar la intención del conductor del vehículo de realizar un cambio de carril. Cuando la intención es detectada, el controlador Fuzzy se encarga de controlar la dirección para realizar dicha acción de forma segura verificando el mínimo error lateral y de orientación. En un trabajo posterior [75] amplía la capacidad del controlador Fuzzy para el guiado de vehículos autónomos.

De nuevo Naranjo, partiendo de [72], la desarrolla y añade algoritmos genéticos que modifican iterativamente las funciones de pertenencia y reglas base que definen un controlador Fuzzy para conducir un vehículo autónomo [75]. Para poder conseguirlo, emplea algoritmos genéticos que aprenden cuando el conductor conduce el vehículo para ajustar las reglas y funciones de pertenencia del controlador. En ambos trabajos, [71, 75] las propuestas consiguen guiar el vehículo para realizar la maniobra planteada de forma segura y permaneciendo en los carriles considerados de 3 m de ancho.

Los controladores Fuzzy son capaces de acercar la problemática del control lateral a las experiencias de conducción reales, dando una nueva perspectiva. Pero el principal inconveniente de estos controladores es que están enfocados a operaciones muy concretas y sobre las que se han tenido que realizar pruebas para ajustar las reglas del control. Y al igual que éste, los controladores presentados hasta ahora no son insensibles o robustos ante la variación de los parámetros del modelo de un vehículo, como es la velocidad del vehículo, masa, adherencia, etcétera.

3.2.2. Control Robusto

En la formulación de cualquier problema de control práctico, siempre habrá una discrepancia entre el sistema real y el modelo matemático usado para el diseño del control. Estas discrepancias surgen por perturbaciones externas desconocidas, parámetros del sistema y dinámicas no modeladas. El diseño de leyes de control que proporcionen el rendimiento deseado al sistema de lazo cerrado en presencia de estas perturbaciones o incertidumbres es una tarea muy desafiante. Esto ha llevado a un intenso interés en el desarrollo de los llamados métodos de control robusto que se

supone que resuelven este problema. A continuación se analizan dos técnicas robustas empleadas para la problemática tratada.

3.2.2.1. Controladores robustos con norma H_∞

Entre las numerosas técnicas de control robusto, las técnicas H_∞ son algunas de las más usadas. En estas técnicas el problema de control se debe representar como un problema de optimización, tal y como se ilustra en la Figura 3.3, donde el sistema tiene dos entradas: w que incluye la señal de referencia y las perturbaciones, y la variable manipulada u ; y dos salidas: la señal de error z que se quiere minimizar, y las variables medidas v , que se emplean para controlar el sistema.

La variable v es usada en K para calcular la acción de control u , por lo que se debe encontrar el controlador K que resuelva dicha optimización. Esto es, el objetivo de este controlador es encontrar una ganancia que estabiliza todo el conjunto de planta perturbada bajo cierto margen de estabilidad. Estos controladores tienen la ventaja frente a controladores más clásicos que permiten su aplicación en problemas multivariables acoplados fácilmente.

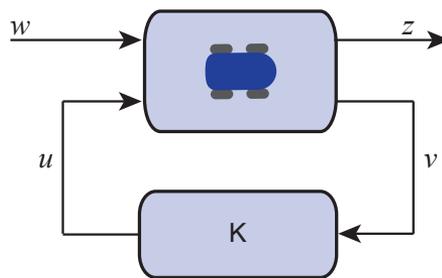


Figura 3.3: Controlador H_∞

Como ejemplo de aplicación de esta técnica de control robusta, Alirezai [1] presenta un copiloto para evitar salidas de carril. Mediante un modelo del conductor predice cual será la acción del conductor sobre el volante para un punto futuro y el controlador diseñado se encarga de calcular una acción correctiva, con el fin de que la acción de control total sea segura. El autor valida su propuesta experimentalmente con 30 individuos para un doble cambio de carril de emergencia. Sin ayuda del copiloto en el 52,9 % de los casos al menos una rueda circulaba fuera de la carretera durante la maniobra, mientras que con la ayuda del copiloto sólo el 0,48 %.

Por su parte, Hima [40] emplea la técnica H_∞ para una aplicación de seguimiento de una trayectoria planeada y generada por un módulo copiloto, de forma segura a pesar de la presencia de incertidumbres y también garantizando el confort de los pasajeros al generar acciones en la dirección y de aceleración suaves. El control lateral actúa sobre el ángulo de la dirección mediante esta técnica robusta. Los errores máximos se obtienen en una de las curvas más cerrada, con un error de posición

lateral de hasta 2 m y de 20° de orientación yaw. El trabajo también propone un control longitudinal para un perfil de velocidad que se controla mediante un PID que actúa sobre el acelerador del vehículo, para garantizar que el vehículo no entre en curva a velocidades demasiado elevadas. Esta propuesta con control longitudinal y lateral se valida para un doble cambio de carril con un error máximo de orientación en yaw de 3°.

Haciendo una recopilación de los diferentes tipos de controladores empleados para resolver el mismo problema de seguimiento de trayectoria lateral en el que la variable manipulable es el giro del volante, Chaib [11] presenta cuatro casos de estudio: un controlador H_∞ , otro PID, otro Fuzzy y un último mediante realimentación de estados adaptativo, que modifica las ganancias mediante una reducción de parámetros. El autor concluye que, al valorar conjuntamente los datos obtenidos, los mejores resultados se obtienen con el último controlador, los peores con el PID y los otros dos controladores tienen resultados similares. Sin embargo, indica que el controlador adaptativo requiere un gran coste computacional, lo que lo hace difícil de implementar en la práctica, siendo así el controlador H_∞ el más adecuado desde el punto de vista de la eficiencia computacional y el rendimiento.

Los controladores robustos de norma H_∞ garantizan la estabilidad del sistema frente a perturbaciones y son ampliamente usados en la literatura, pero entre sus desventajas se incluyen el nivel de comprensión matemática necesaria para aplicarlo correctamente y la necesidad de un modelo razonablemente bueno del sistema a controlar. También es importante considerar que el controlador resultante sólo es óptimo respecto a la función de coste prescrita y que no necesariamente representa el mejor controlador en términos usuales para evaluar el rendimiento de los controladores como el tiempo de establecimiento, energía gastada, etc. Además, las restricciones no lineales, como la saturación, generalmente no se manejan bien.

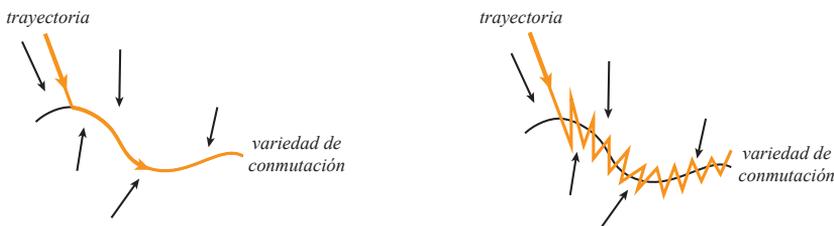
3.2.2.2. Control en Modo Deslizante

Otra técnica robusta que ha suscitado el interés de varios autores es el control en modo deslizante. Ésta es una técnica de control no lineal que se aplica sobre un controlador por realimentación de estados. Los controladores por modo deslizante se diseñan para llevar los estados del sistema a una superficie particular del espacio de estados, denominada superficie deslizante. Una vez se alcanza esta superficie, mediante conmutaciones a frecuencia muy elevada, idealmente infinita, se fuerza a las trayectorias del sistema a evolucionar sobre la superficie deslizante determinada por la restricción planteada, en el espacio de estados. Este tipo de control se caracteriza por ser altamente robusto o invariante ante cierto tipo de perturbaciones externas y variaciones en los parámetros del sistema. Además, la operación en modo deslizante es de orden reducido, quedando fijada a la dinámica por la función de restricción diseñada.

Un ejemplo de aplicación de esta técnica a la problemática del seguimiento de trayectoria es la propuesta por Tagne [101] y [102]. En este trabajo se asegura que el control deslizante se adapta a las necesidades de este tipo de aplicaciones, demos-

trando además que se obtienen errores laterales pequeños y constantes mientras la velocidad incrementa y que también permite obtener experimentalmente resultados comparables a controladores lineales adaptativos. En ambos trabajos el controlador que se propone minimiza el error lateral de un vehículo autónomo respecto a una trayectoria dada mediante el control del ángulo del volante, obteniendo errores de desplazamiento lateral muy pequeños, inferiores a $0,1\text{ m}$. Además, también estudia su robustez ante tanto las variaciones de los parámetros del sistema como la rigidez en curva de los neumáticos y la masa del vehículo. Al variar la rigidez de los neumáticos en un $\pm 30\%$ el error lateral se mantiene inferior a $0,1\text{ m}$, aunque al aumentar la masa del vehículo un $\pm 5\%$ el error lateral aumenta hasta los $0,15\text{ m}$.

Otro autor que aplica esta técnica robusta es Hingwe [41] que presenta un controlador lateral para que el vehículo siga el centro de su carril controlando el volante. Aunque consigue buenos errores de desplazamiento lateral medio menor a $\pm 0,1\text{ m}$, el comfort de los pasajeros se ve comprometido por un aumento del chattering. Hingwe presenta un especial interés en la problemática del chattering, principal e importante inconveniente de este tipo de control. El chattering se da debido a que la frecuencia de conmutación no es infinita, como sucede en cualquier implementación práctica, o en el caso de que existan dinámicas no modeladas, las conmutaciones generan oscilaciones de amplitud finita y alta frecuencia en las trayectorias al evolucionar sobre la variedad de deslizamiento (Figura 3.4).



(a) Conmutaciones a frecuencia infinita, operación en modo deslizante ideal

(b) Conmutaciones a frecuencia finita

Figura 3.4: Trayectorias en modo deslizante

Del mismo modo que ocurre con la técnica H_∞ , el control en modo deslizante es empleado por su capacidad de invariabilidad ante perturbaciones externas o de parámetros del sistema. Pero su complejidad matemática y principalmente los problemas derivados del chattering, una vibración no deseada en el vehículo, hacen que ésta no sea una técnica dilatadamente usada en la literatura.

3.2.3. Resumen controladores no predictivos

Hasta este punto se han evaluado las estrategias de control para el seguimiento de trayectoria de técnicas de control no predictivas. Entre estas técnicas por una parte, hay autores que optan por los controladores más simples que cumplen satis-

factoriamente con su objetivo, como son los controladores PID y la realimentación de estados. Pero el principal inconveniente de estos trabajos es su poca capacidad de adaptación ante variaciones en los parámetros del sistema, lo que lleva a los autores a tener que complicar sus propuestas anidando diferentes controladores o teniendo que recalcular iterativamente las ganancias de los controladores.

Por otro lado, otros autores para no tener que lidiar con la necesidad de tantos mecanismos, proponen el uso de controladores robustos, capacitados para manejar las incertidumbres del sistema. Sin embargo, estos controladores también tienen sus problemas debido a la complejidad matemática y de diseño que adquiere el problema de control, sumado a los propios inconvenientes de cada estrategia.

Sin embargo, desde una perspectiva más global, todas estas estrategias de control carecen de una serie de ventajas que el control predictivo presenta y que lo hace una técnica muy atractiva para los investigadores, por ejemplo la capacidad predictiva de este tipo de control. Los controladores no predictivos basan su cálculo de la acción de control en el error actual. Sin embargo, los controladores predictivos calculan la acción de control en base a errores futuros predichos mediante un modelo de predicción. En la siguiente sección se presenta y define el control predictivo y se analizan las diferentes propuestas existentes en el área abordada.

3.3. Control Predictivo

El control predictivo basado en un modelo (MPC, Model Predictive Control) emplea un modelo del sistema a controlar para predecir las futuras salidas. En base a esta predicción se calcula la acción de control óptima, minimizando una determinada función de coste sobre la que además, se pueden aplicar restricciones (Figura 3.5). Este tipo de control ha tenido un constante desarrollo en la literatura académica así como en la industria de procesos, donde ha probado ser gratamente exitosa en comparación con otros controles multivariables.

Esta formulación, de carácter abierto, admite fácilmente la inclusión de nuevas consideraciones, por lo que es una técnica sobre la que se sigue estudiando y desarrollando, lo que permite cubrir las desventajas de los otros controladores [65]. Su mayor y principal desventaja es el elevado coste computacional que conlleva la resolución del problema de optimización que plantea.

Sin embargo, en los últimos años, el aumento en la velocidad y memoria de los procesadores y el desarrollo de nuevos algoritmos ha permitido la aplicación del MPC para problemas de control automovilístico, robótica [116] o en procesos industriales [78], entre otros. Para tales aplicaciones, el MPC tiene varias características atractivas. En primer lugar, el MPC permite el diseño de controladores de realimentación multivariables con una complejidad de procedimiento similar a los de variable única. Además, el MPC permite la especificación en la fase de diseño de las restricciones en las entradas, estados y salidas del sistema, que luego son aplicadas por el controlador. También, el MPC permite la especificación de una función objetivo optimizada por el controlador. Otras características ventajosas del MPC son la capacidad de lidiar con

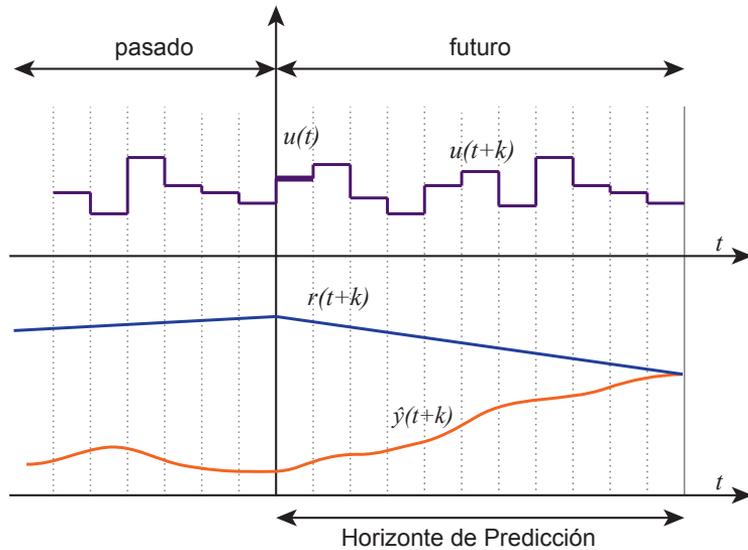


Figura 3.5: Control predictivo

retrasos, rechazar perturbaciones medibles y no medibles y aprovechar la información futura. Finalmente, hay un atractivo filosófico para el MPC como es que incorpora tanto la optimización en el horizonte deslizante como el ajuste de la retroalimentación, imitando así muchos procesos en la naturaleza que parecen operar inherentemente de esta manera [42].

Aunque el MPC tiene cabida en diversos ámbitos, y ya dice Mayne que el cielo es el límite [65], durante la última década, han desarrollado varias aplicaciones de MPC en vehículos prototipo totalmente operables en Ford [43], con especificaciones de controlador en algunos casos muy similares a las de los vehículos de producción. Los ejemplos incluyen control de tracción, vehículo autónomo y control de estabilidad, control de velocidad en vacío, y gestión de energía serie HEV. Si bien estos controladores MPC aún requieren importantes recursos computacionales, el uso combinado de la programación multiparamétrica, un adecuado diseño permite una carga computacional al alcance de los microcontroladores automotrices [42].

A pesar de ser una técnica en auge desde hace pocos años, la problemática del seguimiento de trayectoria de un vehículo mediante técnicas predictivas es un campo en continuo avance. El denominador común en todas las propuestas es el desarrollo con precisión del modelo de predicción. La mayoría de las ventajas del MPC dependen del modelo, siendo éste su cuello de botella. Por esta razón, al ser tan importante el modelo de vehículo empleado, su ajuste y adecuación es fundamental [16].

3.3.1. Modelos no lineales

Dado que la precisión de los modelos es una de las claves en el rendimiento del control predictivo, numerosos autores optan por emplear modelos no lineales y complejos en sus propuestas. El uso de modelos no lineales aumenta el límite de estabilidad del sistema controlado en comparación con los controladores lineales, aunque por otra parte aumenta notablemente la complejidad del control.

Algunos autores emplean estos modelos para representar la dinámica altamente no lineal que presentan los vehículos ante ciertas situaciones límite de conducción. Este es el caso del trabajo presentado por Borrelli [8], que propone un control de dirección para desarrollar un vehículo autónomo. Su propuesta está enfocada a seguir una referencia de posición lateral y de orientación y controlar la posición angular de la dirección para seguirla de forma segura en superficies con poca fricción y a velocidades de entrada elevadas. Su propuesta la valida al correlar los resultados con datos experimentales y además, demuestra que al limitar las restricciones en el controlador, el vehículo suaviza los giros en el volante (de $\pm 30^\circ$ a sólo $\pm 2^\circ$) aunque el error lateral aumenta en 1 m . Posteriormente en [49] amplía este trabajo analizando más situaciones de validación, como por ejemplo, el efecto del viento lateral sobre el vehículo obteniendo un error de -5° en yaw y $0,1\text{ m}$ de desplazamiento lateral.

Del mismo modo, Yoshida [113] introduce elementos de saturación en las fuerzas de los neumáticos en un problema de cambio de carril automático. En su trabajo, demuestra que para el mismo problema un controlador lineal basado en realimentación de estado no es capaz de compensar efectivamente el elemento de saturación, mientras que el control predictivo propuesto lo posibilita para un rango de velocidades de 30 km/h hasta 150 km/h . Con el control por realimentación de estado el error es de 15 m en el eje lateral a 30 km/h y de hasta 35 m a la máxima velocidad, mientras que con el control propuesto por Yoshida el error es del orden de $0,1\text{ m}$.

Por otro lado, Shia [93] presenta un controlador lateral copiloto para un vehículo semiautónomo que compensa la acción que ejerce el conductor real sobre el volante para que el vehículo permanezca en su carril. El autor justifica la necesidad de un modelo preciso del vehículo porque las maniobras más complicadas se dan a altas velocidades. En este caso valida experimentalmente su propuesta empleando 24 individuos para conocer sus sensaciones sobre la eficiencia del copiloto. El 79 % de los individuos aseguró que la acción del controlador mejoró la conducción y el 75 % que era efectivo previniendo colisiones.

Por su parte, Gao amplía la problemática del vehículo autónomo incluyendo además del control lateral del vehículo para seguir una determinada trayectoria, el control longitudinal para ajustarse a una velocidad de referencia. En su trabajo [29] desarrolla dos propuestas para que el vehículo siga una determinada referencia de posición, orientación y perfil de velocidad longitudinal y, además, evite ciertos obstáculos en la calzada, todo mediante el control del ángulo de giro de la dirección y la fuerza de los neumáticos, que se distribuyen a los cuatro neumáticos como pares de frenado. En la primera propuesta introduce un control predictivo de un nivel, en la que desarrolla el control predictivo para seguir determinada referencia y en la que incluye un

parámetro denominado coste de evitación de obstáculos. La segunda propuesta es un controlador predictivo de dos niveles. El nivel más alto calcula con precisión la trayectoria que debería seguir el vehículo considerando los obstáculos que haya y el nivel más bajo calcula la acción de control para seguir dicha referencia. De estas dos propuestas obtiene mejores resultados el controlador de dos niveles, ya que es capaz de evitar el obstáculo a mayores velocidades. Además, el coste computacional es un 39 % menor por la descomposición del problema.

Posteriormente en [33] desarrolla otra propuesta para la misma problemática, incluyendo la condición de que el vehículo no debe salirse de su carril mediante la incorporación de ciertas restricciones. En esta propuesta, incluye un modelo de conductor que predice cual sería su respuesta y calcula una acción de control correctiva que además no viole ciertas restricciones de seguridad. Su propuesta la valida mediante simulaciones que demuestran que el vehículo realiza la maniobra de forma segura.

Las anteriores propuestas demuestran que el uso de modelos no lineales permite obtener unos resultados adecuados y aceptables para la implementación de controladores. Sin embargo, el uso de modelos no lineales no está exento del problema derivado de la precisión del mismo, siendo éste uno de los aspectos fundamentales del MPC. Por esta razón, los autores incorporan técnicas de robustez sobre el control predictivo.

Así, Gao [28] desarrolla un controlador predictivo robusto basado en tubo de trayectorias para la problemática de permanencia en el carril y evitación de obstáculos. El mismo grupo de investigación, partiendo de [33], incorpora técnicas de robustez al controlador al considerar que su modelo de conductor no es ideal y que se deberían considerar perturbaciones para hacer más real su comportamiento. Así, en [34] incorporan las incertidumbres en el modelo del conductor mediante el cálculo de un conjunto invariante robusto que captura la dispersión de las futuras trayectorias del vehículo dada la incertidumbre en el modelo del conductor. Mediante un gráfico demuestra la validez de su propuesta, ya que realiza un doble cambio de carril de forma segura y que la trayectoria perturbada está contenida dentro del conjunto invariante robusto alrededor de la trayectoria nominal. Por otro lado, en [35], consideran perturbaciones estocásticas sobre el modelo del conductor que hacen más real su comportamiento.

Mediante la misma técnica de robustez de perturbaciones estocásticas, Liu [58] presenta un control para un vehículo semiautónomo en el que calcula la acción de corrección del giro del volante ante una posible acción del conductor. En este caso, calcula la propagación de las perturbaciones sobre los estados a lo largo del horizonte de predicción. En este caso también valida su propuesta gráficamente, demostrando que el vehículo evita un obstáculo corrigiendo la acción de control de conductor.

En resumen, en la literatura se pueden encontrar numerosos trabajos de aplicaciones de seguimiento de trayectoria mediante control predictivo que emplean modelos no lineales para la predicción de la respuesta del vehículo, pero ya sean aplicaciones más sencillas o más complejas la problemática del coste computacional persiste. A pesar del incremento del poder computacional de los sistemas de hoy en día, la complejidad asociada a la solución de un problema de optimización no lineal restringido

es muy elevado. Adicionalmente, garantizar la estabilidad de los controladores es una tarea más compleja y en ocasiones difícil de demostrar con las técnicas actuales. Por esta razón, algunos autores buscan formas de resolución del problema de forma más óptima, como en [17], mediante algoritmos genéticos. Pero la mayoría de los autores han buscado formas de simplificar el problema mediante el uso de modelos más simples [8].

3.3.2. Modelos no lineales linealizados

Partiendo de la premisa de que emplear modelos de predicción no lineales conlleva el uso de métodos de resolución no lineales con un notable coste computacional, la tendencia es el uso de modelos de predicción lineales que pueden ser resueltos mediante programación cuadrática (QP, *Quadratic Programming*), con un coste computacional menor. Para poder emplear este método más eficiente que se aplica a modelos lineales, pero manteniendo la mayor parte de la precisión de los modelos no lineales, la tendencia es el uso de linealizaciones sucesivas sobre un modelo no lineal. Esto es, partiendo del modelo no lineal complejo, en cada instante de muestreo, se linealiza el modelo para cada instante del horizonte de predicción en torno al correspondiente punto de referencia. De esta forma, la precisión que se pierde mediante esta simplificación es asumible en relación al ahorro de coste computacional.

Partiendo de esta premisa, Falcone [21] aplica esta técnica sobre un trabajo anterior detallado en [8], ya que considera que la implementación del trabajo inicial en tiempo real no es viable. Los errores obtenidos mediante el uso de este modelo son del mismo orden que con un modelo no lineal. Posteriormente en [23] se validan y comparan los resultados de ambos trabajos tanto en simulación como experimentalmente, considerando las limitaciones derivadas por la complejidad computacional del solucionador de programación no lineal y del hardware empleado. El controlador con modelo no lineal sólo puede ser validado experimentalmente a bajas velocidades de 7 m/s , debido a la limitación computacional, obteniendo un error máximo de $0,38\text{ m}$ para evitar un obstáculo. Sin embargo, el controlador con modelo con linealizaciones sucesivas es validado para velocidades de hasta $21,5\text{ m/s}$ y un error máximo de $2,11\text{ m}$. Aunque el caso en el que el modelo no lineal del vehículo es linealizado obtiene resultados aceptables y un mucho menor coste computacional, concluye que aun el tiempo computacional es demasiado elevado. En [24], un trabajo posterior a éste, considera la problemática de la estabilidad en los controladores predictivos, y en particular cuando se emplea un modelo variable. Como solución a este problema, propone reforzar la estabilidad mediante restricciones *ad hoc*.

En una aplicación de copiloto, Erlien [20] considera que la medida en que el controlador puede ejercer de sistema de seguridad activa esta limitada por la capacidad del controlador para evitar colisiones y prevenir la pérdida de control con el fin de intervenir adecuadamente y conducir el vehículo de forma segura. Para poder predecir de forma precisa situaciones extremas, considera un modelo no lineal del vehículo y restricciones en las variables de los estados, en la saturación de los neumáticos y en la trayectoria. Emplea las linealizaciones sucesivas del modelo aportando una

aproximación más real al comportamiento no lineal de los neumáticos durante todo el horizonte de predicción como forma más eficiente para la resolución del problema. En sus simulaciones, demuestra gráficamente cómo con su propuesta el vehículo completa el doble cambio de carril sin violar las restricciones, mientras que con un modelo lineal sí se violarían y se producirían colisiones.

Gao, partiendo de su propuesta de un control de dos capas detallada en [29], la mejora en [27] transformando el modelo dinámico del vehículo dependiente del tiempo en un modelo dinámico dependiente del espacio como modelo de predicción del controlador que genera la trayectoria libre de obstáculos en la capa de alto nivel. En la capa de bajo nivel, el control de seguimiento de trayectoria emplea un modelo no lineal con linealizaciones sucesivas. Comparando ambas propuestas, demuestra que el nuevo modelo empleado en la capa de mayor nivel mejora la precisión en el seguimiento de trayectoria.

Por su parte, Falcone también parte de trabajos anteriores [8] y [23] y los reformula como un problema de control predictivo donde las señales de control son la dirección delantera y los ángulos de deriva de las cuatro ruedas para el seguimiento de una trayectoria determinada mientras que la velocidad longitudinal se mantiene lo más igual posible a una referencia. Para poder calcular de forma precisa el comportamiento del vehículo y de los neumáticos, emplea un modelo no lineal sobre el que realiza linealizaciones sucesivas [22]. Más tarde, a raíz de estos trabajos, realiza un análisis de la eficiencia entre el uso de modelos no lineales más y menos complejos y de un modelo complejo linealizado. El modelo no lineal más complejo obtiene los mejores resultados tanto a velocidades bajas como elevadas, pero debido al elevado coste computacional las simulaciones son excesivamente lentas. En cambio, el modelo no lineal menos complejo no es capaz de estabilizar el vehículo a altas velocidades. Finalmente, el modelo no lineal con linealizaciones sucesivas del modelo más complejo reduce considerablemente el coste computacional y se obtienen buenos resultados [25].

Katriniok [48] propone un trabajo similar al de Falcone pero más enfocado a la evitación de obstáculos, en el que el problema de optimización calcula tanto el ángulo de la dirección como la deceleración longitudinal óptimos, mientras minimiza el error lateral respecto de una referencia y procura seguir una referencia de velocidad. El error lateral se mantiene entre los valores mínimos y máximos de $-0,2\text{ m}$ y $0,25\text{ m}$ y la referencia de velocidad longitudinal la sigue con un error máximo de 2 m/s , además que la deriva lateral se mantiene dentro de los límites impuestos por diseño de $\pm 7^\circ$.

Otro autor que también opta por la simplificación del problema mediante el uso de las linealizaciones sucesivas es Liu, que lo aplica en [57] sobre los resultados iniciales obtenidos en [58]. En este trabajo, emplea un controlador robusto mediante la técnica de control predictivo estocástico para un vehículo semiautónomo en el que calcula la acción de corrección del giro del volante ante una posible acción del conductor. En este caso, calcula la propagación de las perturbaciones sobre los estados a lo largo del horizonte de predicción. Para un caso en el que sin intervención el vehículo colisionaría, con su propuesta Liu consigue que el vehículo siga una trayectoria segura

y con un error lateral que no viola la restricción impuesta de $0,7\text{ m}$ respecto a la trayectoria ideal.

Mientras que en los trabajos citados previamente las linealizaciones son sucesivas durante todo el horizonte de predicción, Katrinok compara esta solución con otra más sencilla. Katrinok [47] desarrolla un controlador para la dirección del vehículo enfocado a la evitación de obstáculos, por lo que tiene que cumplir los requisitos de control apropiados en los límites de la dinámica del vehículo. Para lograr este objetivo, el enfoque introducido emplea estimaciones del ángulo de dirección aplicado, así como la trayectoria variable de estado que se utilizará para la linealización sucesiva del modelo de predicción no lineal en el horizonte de predicción. Para evaluar el rendimiento del control, el controlador propuesto se compara con un controlador LTV-MPC que utiliza linealizaciones del modelo de predicción no lineal que permanecen sin cambios durante el horizonte de predicción. Los resultados de la simulación muestran que se puede lograr un rendimiento de control mejorado mediante el enfoque basado en las linealizaciones sucesivas, concluyendo que para 14 m/s el error lateral máximo se reduce en un $36,7\%$ mediante las linealizaciones sucesivas y un $16,3\%$ a 18 m/s . Si bien obtiene mejores resultados mediante las linealizaciones sucesivas, no considera la diferencia del coste computacional entre cada propuesta.

3.3.3. Modelos lineales

Los trabajos de control predictivos citados previamente emplean modelos no lineales para la definición de la dinámica vehicular ya que pretenden reflejar situaciones límite en las que la dinámica es altamente no lineal. Por ejemplo, conducción al límite de la estabilidad, giros muy bruscos a altas velocidades, superficies con poco agarre, etcétera. Sin embargo, no siempre los escenarios son tan extremos, pudiendo simplificar el problema y emplear modelos lineales. Porque, si bien el uso de modelos no lineales linealizados suponen un ahorro de coste computacional, el proceso de linealización también conlleva un coste.

Aun así, el uso de modelos lineales puros es aislado, la tendencia es el uso de modelos lineales variables, que se recalculan para cada instante de operación. Esto se debe a que aun en modelos simples, parámetros del modelo tienen un gran efecto, como puede ser la velocidad longitudinal del vehículo o la rigidez de los neumáticos.

Partiendo del supuesto en el que los vehículos circulan por vías con un amplio radio de curvatura, Turri [104] propone un control longitudinal y lateral para la permanencia de carril y la evitación de obstáculos. A partir de un modelo bicicleta extendido, desarrolla dos modelos que denomina: conservador, que subestima la capacidad de giro de los neumáticos, y sobreaccionador, que sobrestima su capacidad. El controlador predictivo predice los estados del vehículo empleando ambos modelos. Las predicciones mediante el modelo conservador juegan el papel principal, empleándose tanto en la función de coste como en las restricciones. Las predicciones mediante el modelo sobreaccionador, tienen un papel más auxiliar, empleándose para una predicción de menos instantes para la definición de las restricciones. Gracias a que se emplea un

modelo y restricciones lineales, el coste computacional más reducido permite definir una serie de problemas cuadráticos cada uno bajo un perfil longitudinal diferente.

En lo que respecta a Chen [12] propone un sistema de permanencia en el carril para calcular el ángulo de giro de la dirección minimizando el error lateral y de orientación. Compara el resultado obtenido en tres casos de estudio mediante tres modelos de predicción diferentes: un modelo lineal constante, un modelo lineal que mantiene sus parámetros constantes para cada instante durante todo el horizonte de predicción, o modelo LTV (*Linear Time Varying*) y un último caso en el que emplea parámetros adaptativos que recalcula para cada instante del horizonte de predicción. Los errores medios obtenidos en cada uno de los controladores son de $0,36\text{ m}$ para el primer caso, $0,23\text{ m}$ para el caso de modelo LTV y $0,12\text{ m}$ para el último caso. Así, los mejores resultados son los obtenidos mediante el último modelo, aunque no se analiza el coste computacional.

Carvalho [10] emplea un modelo lineal variable (LTV) en función de la velocidad para el control lateral de un vehículo autónomo. Para suplir los errores debidos a desajustes del modelo y errores de linealización, emplea control robusto e incorpora una perturbación estocástica. La propuesta se valida analizando un elemento importante en los problemas MPC estocásticos, como es el factor de riesgo, definido como la probabilidad de violar las restricciones, concluyendo que para un mismo escenario considerando una situación menos arriesgada en 20 s el vehículo cubre 193 m de distancia mientras que en una situación con factor de riesgo más elevado llegaría a cubrir 278 m .

Haciendo una vista global del control predictivo, los grupos de investigación tienden a la búsqueda de la simplificación del modelo manteniendo buenos resultados. Parten de modelos no lineales complejos sobre el que han ido buscando formas de simplificar para reducir la complejidad y el coste computacional y sobre los que han buscado mecanismos para mantener la precisión.

3.4. Conclusiones

Del análisis realizado en las secciones anteriores se concluye que la problemática del seguimiento de trayectoria de un vehículo ha suscitado un gran interés a lo largo de los años, así como del problema en conjunto de los sistemas de guiado avanzados. Los avances tecnológicos y la electrificación de los vehículos han promovido el creciente desarrollo e investigación de este tipo de sistemas, llegando a desarrollar e implementar complejos sistemas de guiado de vehículos que incorporan elementos de visión, geolocalización y diversos sensores.

Con el fin de lograr este objetivo, las propuestas de los diferentes autores se podrían catalogar en dos grandes grupos: las técnicas no predictivas y las técnicas predictivas, siendo estas segundas las que la mayoría de los autores han empleado debido a su gran potencial y constante desarrollo.

En los trabajos asociados a técnicas no predictivas, por un lado está el uso de controladores más tradicionales, como PID o realimentación de estado. Pero su in-

sensibilidad ante incertidumbres y perturbaciones, generalmente los relega a un plano paralelo junto con otra técnica de control o mecanismo que solventa sus problemas. Por otro lado, para hacer frente a esta problemática, se contempla el uso de estrategias de control robustas capacitadas para manejar las incertidumbres del sistema. Sin embargo, estos controladores también tienen sus problemas debido a la complejidad matemática y de diseño que adquiere el problema de control, sumado a los propios inconvenientes de cada estrategia.

Por esta razón, el control predictivo es la técnica que se está generalizando para solventar el problema del seguimiento de trayectoria, ya que se adapta intuitivamente al problema de la conducción de un vehículo. El control predictivo calcula las acciones de control óptimas para un horizonte de predicción, mientras que estas estrategias se fijan en un único punto, aunque sea en un punto futuro, y no se adaptan a lo que pueda venir después. Además, gracias a la versatilidad del control predictivo, se puede ajustar fácilmente la respuesta del controlador mediante la modificación de ponderaciones, sin tener que resintonizar el controlador con el coste que supone. Otra ventaja de la que carecen estos controladores es la capacidad de incorporar implícitamente restricciones, muy propias en cualquier problema de seguimiento de trayectoria. El concepto abierto del control predictivo, junto con las razones expuestas, han llevado a que las técnicas de control no predictivo queden en un segundo plano.

Sin embargo, una de las mayores desventajas que conlleva el uso de este tipo de técnicas de control es el coste computacional que conlleva la resolución del problema de optimización. Este aspecto tiene un efecto directo sobre uno de los pilares de esta técnica de control, la precisión del modelo de predicción que se emplea. Un modelo complejo y no lineal será más preciso pero complicará notablemente el problema mientras que un modelo más simple y lineal, sobre el que se apliquen simplificaciones asumibles, tendrá un menor coste computacional. Por consiguiente, la tendencia es el uso de modelos lo más simple posibles en relación a las condiciones de conducción sobre las que se plantee el problema. Esto es, si se quiere garantizar la estabilidad del vehículo sobre una superficie con poco agarre, el modelo debe ser lo suficientemente preciso como para simular esa condición al límite de la estabilidad. Mientras que en un problema de permanencia en el carril, el modelo puede adquirir un nivel menos complejo, ya que la conducción esa situación no es tan extrema.

En conclusión, se puede considerar que para el seguimiento de una trayectoria para un vehículo en condiciones de conducción normales, puede desarrollarse mediante un control predictivo. Por ello, en los siguientes capítulos se presenta un MPC para el seguimiento de trayectoria de un vehículo utilitario por carreteras interurbanas de tipo autopista. Con el fin de simplificar el problema y reducir el coste computacional, el modelo de predicción empleado puede ser lineal. Aunque para hacer frente a la variabilidad de parámetros debidos al amplio rango de velocidades que se pueden alcanzar durante una conducción por carretera, el modelo debe ser variable en función de la velocidad longitudinal. Además, para garantizar la conducción confortable y segura, de forma que el vehículo permanezca siempre dentro de su carril, se aplicarán restricciones en la acción de control y en el error de desplazamiento lateral.

Es por esto por lo que en las siguientes secciones se propondrá una formulación

de MPC que considere las especificaciones de estabilidad y robustez necesarias para abordar el problema de seguimiento lateral de trayectoria. Para garantizar su implementabilidad, se propondrá el uso de un modelo lineal variable en el tiempo (LTV), basado en un modelo bicicleta extendido dependiente de la velocidad longitudinal, que permitirá un equilibrio entre precisión y coste computacional.



4.1. Introducción

Las técnicas de Control Predictivo utilizan la información de instantes anteriores para predecir el comportamiento futuro del sistema y actuar en base a éste. Es más, las predicciones obtenidas se utilizan para optimizar el control en un determinado horizonte de forma que se pueda minimizar una función de coste en la que, adicionalmente, se pueden incluir restricciones. Este enfoque hace del control predictivo basado en modelo (MPC, *Model Predictive Control*) una de las aproximaciones más interesantes para el control de seguimiento de trayectoria de un vehículo. Por una parte, un horizonte de predicción permite anticiparse a los cambios en la trayectoria de referencia sin generar giros bruscos en el vehículo. Por otra parte, el control predictivo permite la inclusión de restricciones explícitamente en el controlador, lo que resulta muy práctico para definir límites de confort y seguridad.

Por lo tanto, el objetivo de este capítulo es definir una novedosa formulación de

Control Predictivo para su aplicación a un problema de seguimiento de trayectoria en el marco del vehículo autónomo. Esta metodología propuesta, a diferencia de otros trabajos, puede ser aplicada para diferentes trazados y en un amplio rango de velocidades.

Así, el presente capítulo se divide en cuatro secciones. Primero, se realizará una introducción al Control Predictivo, presentando sus características más destacadas así como los diferentes componentes que conforman las estrategias de Control Predictivo. En un segundo apartado, conociendo la visión general del Control Predictivo, se utilizarán dichos conceptos generales para introducir una formulación concreta de MPC. A continuación, esta formulación general se particularizará para la problemática abarcada en la presente tesis, un control de seguimiento trayectoria lateral para un vehículo utilitario. Por último, esta formulación se validará mediante simulaciones en un entorno de cosimulación con un software de simulación de dinámica vehicular.

4.2. Introducción al Control Predictivo basado en Modelo

El Control Predictivo o Control Predictivo basado en Modelo (MPC) se originó a finales de la década de los setenta, sufriendo un desarrollo considerable tanto en la industria como a nivel teórico y académico. Una de las áreas de mayor impacto ha sido la industria de procesos, donde ha demostrado ser muy exitoso en comparación con otras alternativas de métodos de control multivariables, gracias a su simplicidad conceptual y su habilidad para manejar de forma sencilla y efectiva complejos sistemas de control con restricciones duras [65]. Gracias a los avances tecnológicos su uso se ha visto extendido a otras áreas como la electrónica de potencia [106] o la automoción [42].

El término de Control Predictivo no hace referencia a una estrategia de control específica, sino a un conjunto de formulaciones que comparten una serie de características comunes. Entre estas características destacan las tres ideas principales que conforman la base de su funcionamiento:

- Todas las estrategias hacen uso explícito de un modelo de sistema a controlar para predecir su evolución en instantes futuros.
- Todas se basan en técnicas de optimización para minimizar una determinada función objetivo dependiente de la evolución futura calculada.
- La ley de control se aplica en base a un horizonte de control deslizante, según el cual, tras lograr la secuencia de control óptima a aplicar en el horizonte de predicción, únicamente se aplica el primer instante, desechando el resto y rehaciendo el cálculo para la nueva situación.

Tomando como base estas características, a lo largo de los años se han desarrollado numerosas estrategias que se pueden agrupar en lo que se denomina Control Predictivo. Debido a su eficacia, muchas han sido aplicadas en la industria antes de que existieran estudios teóricos en cuanto a su estabilidad y robustez. Por ello, el MPC

se considera actualmente una técnica consolidada de control para sistemas lineales de dinámica lenta, como aquellos que se encuentran en la industria de procesos. Pero su concepto abierto, permite que el MPC sea una estrategia en constante desarrollo y sus campos de aplicación sean diversos [65].

En la presente sección se presentará de forma breve los fundamentos básicos comunes a todas las estrategias de Control Predictivo basado en Modelo. Para un análisis pormenorizado de las más importantes, se recomienda la lectura de [9].

4.2.1. Estrategia del MPC

El funcionamiento del Control Predictivo basado en Modelo es muy intuitivo y su metodología se caracteriza por la siguiente estrategia representada en la Figura 4.1.

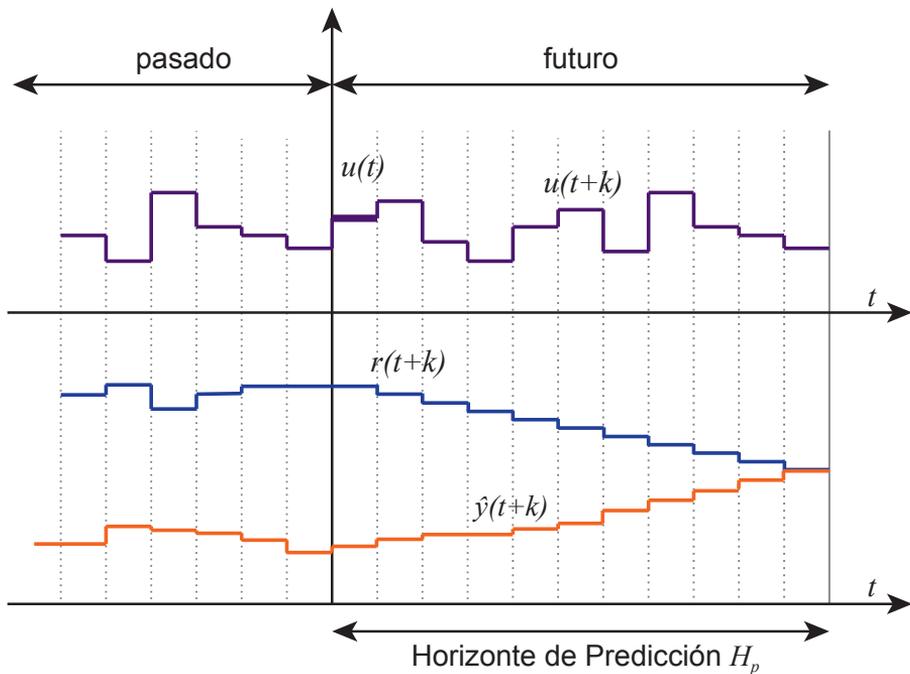


Figura 4.1: Estrategia MPC

La evolución del sistema, las señales de salida futuras $\hat{y}(t+k)$, se predicen para un determinado Horizonte de predicción H_p mediante el uso de un modelo del sistema. El Horizonte deslizante H_p es la ventana de predicción de tamaño constante que se desliza en el tiempo junto con la planta. Estas señales de salida futuras dependen de valores pasados de las señales de entrada o de salida y de las futuras señales de control.

Las futuras señales de control $u(t+k)$ se calculan optimizando una función de coste, de forma que la señal de salida predicha $\hat{y}(t+k)$ sea lo más próxima posible

a una trayectoria de referencia $\mathbf{r}(t + k)$, que deberá ser conocida en dicho horizonte. Esta optimización requiere, en el caso general un método iterativo, salvo en casos concretos como cuando el modelo es lineal y no hay restricciones.

Adicionalmente, de la secuencia de futuras señales de control óptimas calculadas se aplica sólo la correspondiente al primer instante $\mathbf{u}(t)$ y el resto se deshecha. Por ello el coste computacional es uno de los aspectos críticos del MPC.

Este proceso se repite para el instante $t + 1$, tras realimentar el estado actual del sistema y deslizando el Horizonte de predicción H_p sobre el instante actual.

4.2.2. Componentes MPC

Existen una serie de elementos comunes para todos los controladores: en todos se emplea un modelo para predecir las futuras salidas de la planta, basándose en valores pasados y actuales y en las futuras acciones de control óptimas calculadas. Adicionalmente, estas acciones se calculan optimizando una función de coste, donde se considera el error de seguimiento y también una serie de restricciones. La Figura 4.2 resume, de forma general, los bloques que componen un controlador MPC.

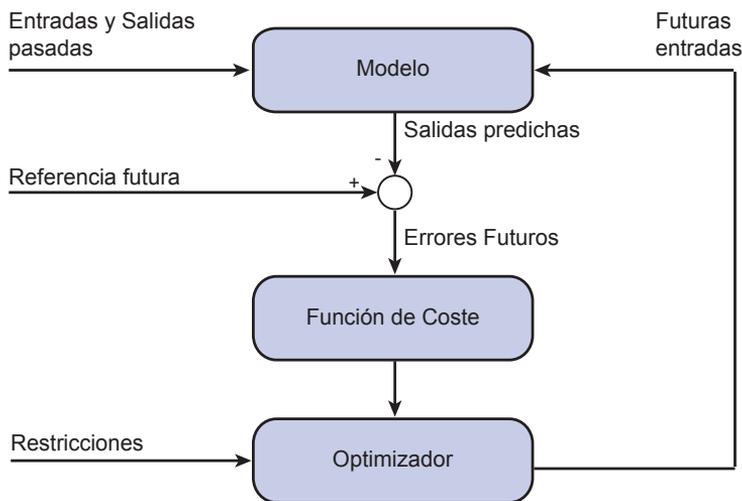


Figura 4.2: Estructura básica del MPC

A continuación se describen, de forma general, los componentes comunes.

4.2.2.1. Modelo

El modelo es una de de las partes más importantes de cualquier estrategia MPC que se plantee, ya que éste contiene el conjunto de ecuaciones que describen el sistema físico a controlar y permite predecir su salida en instantes futuros. Un diseño completo debe incluir todos los mecanismos necesarios para obtener el mejor modelo

posible, que debe ser suficientemente completo como para capturar toda la dinámica del sistema y que permita calcular las predicciones de forma precisa. Al mismo tiempo, debe ser intuitivo, fácil de implementar y permitir un análisis teórico.

Como el MPC no es una técnica única sino un conjunto de diferentes metodologías, hay numerosos tipos de modelos usados en varias formulaciones. En el ámbito industrial, el tipo de modelo más empleado es la Respuesta Escalón (*Step Response Model*). Este modelo se obtiene de forma muy sencilla al medir la señal de salida cuando el proceso se excita con una señal de un escalón en la entrada. Su gran aceptación en la industria viene dada porque es muy intuitivo y se puede emplear en procesos multivariables, aunque su mayor inconveniente es el gran número de parámetros necesarios para describir un sistema mediante este modelo.

El modelo en Espacio de Estados (*State Space Model*) es posiblemente el tipo de modelo más empleado en el ámbito académico debido a su carácter abierto. Este tipo de modelos puede ser fácilmente adaptado de un sistema monovariable a uno multivariable y además, es un tipo de modelo fácilmente extensible para considerar perturbaciones medibles, ruidos... La definición de un controlador para un modelo en Espacio de Estados es simple y directa, incluso para sistemas multivariables, y además, permite incorporar criterios de estabilidad y robustez de forma sencilla. Además, el uso de modelos en Espacio de Estados permite la definición del MPC de diversas formas, por ejemplo en base a valores absolutos de control o en base a incrementos.

Otro tipo de modelo también usado bastante en el ámbito académico es el modelo por Función de Transferencia (*Transfer Function Model*) y aunque el desarrollo del controlador es más complicado, requiere menos parámetros. En la industria este tipo de modelos se entiende mejor que el Espacio de Estados porque se puede trabajar fácilmente con elementos habitualmente usados en la industria, como son el tiempo muerto, ganancia y constantes de tiempo.

4.2.2.2. Función de Coste

Del mismo modo que ocurre con los modelos, las diferentes estrategias de MPC proponen diferentes funciones de coste para obtener la ley de control. El objetivo general de todas las estrategias es que la futura salida $\hat{\mathbf{y}}(t+k|t)$ en el horizonte considerado siga una determinada señal de referencia $\mathbf{r}(t+k|t)$ y al mismo tiempo, se penalice el esfuerzo de la acción de control para hacerlo $\mathbf{u}(t+k-1|t)$, esto es, la energía requerida para ello.

La expresión general para dicha función objetivo es una función cuadrática que toma la forma,

$$J(H_p, H_c) = (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{r})^T \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{r}) + \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}$$

donde es posible definir los siguientes conceptos.

Horizontes de predicción y control

El Horizonte de predicción H_p representa el número de instantes futuros de la salida a predecir y el Horizonte de control H_c es el número de instantes en los que se desea calcular la acción de control, siendo siempre $H_c \leq H_p$. Idealmente, cuanto mayor sea el horizonte, mejor comportamiento tendrá el controlador, dado que dispondrá de mayor información de lo que el sistema hará en el futuro. Es más, el controlador incrementará su dominio de atracción y, por lo tanto, abarcará más estados. Sin embargo, el coste computacional aumenta, de modo que hay que encontrar un equilibrio entre eficiencia y coste.

Si el Horizonte de predicción y el Horizonte de control tienen el mismo valor $H_p = H_c$, para cada instante en el Horizonte de predicción H_p se calculará la acción de control óptima. Sin embargo, en términos de coste computacional, se puede asignar un Horizonte de control menor que el Horizonte de predicción $H_c < H_p$ y, por tanto, se calculará la acción de control óptima para los primeros H_c instantes y se mantendrá constante para el resto de instantes.

Matrices de ponderación

Las matrices **Q** y **R** son las matrices de ponderación del error de seguimiento y del esfuerzo de control, respectivamente. La sintonización del controlador se hace modificando los valores de las ponderaciones, de forma que se pueda ajustar si se quiere un menor error de seguimiento de trayectoria o un menor esfuerzo en la acción de control. Es decir, si se pondera más los estados que la señal de control, entonces el controlador intentará mantener el estado cerca del punto estacionario cuanto antes, sin importar el comportamiento del controlador.

Por ello, en algunos métodos, el segundo término, que considera el esfuerzo de control, no se tiene en cuenta, mientras que en otros se trabaja con los valores absolutos $\mathbf{u}(t + k - 1|t)$ en vez de con la variación de la acción de control $\Delta\mathbf{u}(t + k - 1|t)$.

Restricciones

En la práctica, todos los procesos están sujetos a restricciones. En el diseño de controladores tradicionales, las restricciones son consideradas no linealidades que dificultan su sintonización. Sin embargo, las estrategias de control predictivo permiten introducir directamente las restricciones en el algoritmo de control. Aunque con su inclusión, la minimización se vuelve más compleja y la solución no se puede obtener de forma explícita como en el caso no restringido.

Las restricciones más comunes son en la acción de control, en la variación de la acción de control y restricciones en la salida.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{min} &\leq \mathbf{u}(t) \leq \mathbf{u}_{max} \\ \Delta\mathbf{u}_{min} &\leq \Delta\mathbf{u}(t) \leq \Delta\mathbf{u}_{max} \\ \mathbf{y}_{min} &\leq \mathbf{y}(t) \leq \mathbf{y}_{max} \end{aligned}$$

4.2.2.3. Optimizador

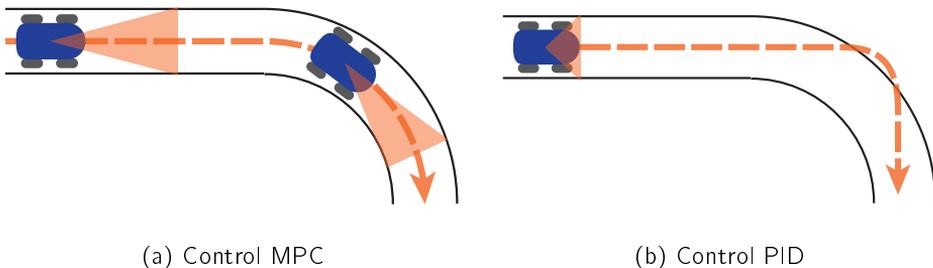
El optimizador es otra parte fundamental de la estrategia ya que proporciona las acciones de control. Si la función de coste es cuadrática, se puede obtener una solución analítica si el modelo es lineal y no existen restricciones. En presencia de restricciones de desigualdad, la solución tiene que ser obtenida mediante un método iterativo de optimización, definiendo un problema de programación cuadrática con más peso computacional.

El tamaño de los problemas de optimización depende del número de variables y de los Horizontes de predicción H_p y control H_c utilizados, y suele resultar ser un problema de optimización relativamente modesto que no requiere la resolución de sofisticados códigos informáticos. Sin embargo, la cantidad de tiempo necesario para los casos restringidos y robustos puede ser de varios órdenes de magnitud mayor que la necesaria para el caso sin restricciones y el ancho de banda del proceso al que se puede aplicar la formulación de MPC restringida se reduce considerablemente.

4.2.3. Comparativa con otros esquemas de control

El particular enfoque del MPC hace que éste presente ciertas ventajas respecto a otros sistemas de control, como es el PID tradicional.

Nótese que la estrategia del MPC es muy similar a la estrategia de control que se sigue al conducir un coche. El conductor conoce la trayectoria de referencia que tiene como objetivo para un Horizonte de control finito. Teniendo en cuenta las características del coche, ya que el conductor conoce el comportamiento que sigue el coche, esto es, tiene un modelo mental del mismo, decide qué acciones de control debe aplicar para seguir dicha referencia (giro del volante, acelerador...). Entonces, el conductor sólo aplicará la primera acción de control en cada instante y el proceso lo repite para la siguiente decisión de control en un horizonte deslizante (Figura 4.3a). En cambio, al usar una estrategia de control clásico, como puede ser un PID, las acciones de control se toman en base a errores pasados, que en la analogía de la conducción de un vehículo sería como conducir teniendo en cuenta la posición anterior del vehículo en la carretera (Figura 4.3b).



(a) Control MPC

(b) Control PID

Figura 4.3: Diferencia entre controladores PID y MPC

De forma teneral, el Control Predictivo basado en Modelo presenta una serie de ventajas sobre otros métodos, entre las que cabe destacar:

- El esquema de control MPC se puede implementar fácilmente y, además, su sintonización es intuitiva y no requiere conocimientos avanzados de control.
- Puede ser empleado para controlar una gran variedad de procesos debido a su carácter predictivo, permitiendo compensar tiempos muertos y perturbaciones medibles.
- El caso multivariable se puede tratar fácilmente.
- Permite implementar directamente restricciones en el controlador, de forma que se pueden abordar las limitaciones de la planta y de los actuadores de forma directa.
- Adecuado para sistemas en los que la referencia futura es conocida, como es el caso del seguimiento de trayectoria de un vehículo.
- Es una metodología abierta basada en ciertos principios básicos, lo que permite futuras extensiones, como han sido la incorporación de consideraciones de estabilidad y robustez que se analizarán en próximos capítulos.

Sin embargo, no todo son ventajas, y es que una de las limitaciones más importantes de este tipo de control es su escasa eficiencia computacional debido a la utilización de un horizonte deslizante. Aunque ello permite al sistema reaccionar ante perturbaciones no consideradas en la predicción, produce un sobrecoste debido a que obliga al controlador a calcular toda la secuencia de control asociada al horizonte, para sólo aplicar la primera acción calculada. Además, si se consideran restricciones, el coste computacional requerido es incluso mayor. Esta limitación, aunque cada vez presenta menos peso debido al avance de los procesadores, ha sido la principal razón por la que éste tipo de controlador se haya implementado sobre todo en procesos de dinámica lenta.

Por otro lado, uno de los mayores problemas que presenta el MPC en su implementación es la necesidad de un modelo preciso del sistema que proporcione una predicción suficientemente buena para lograr un buen rendimiento del control. Esta problemática sin embargo, puede ser en parte compensada utilizando aproximaciones robustas que garanticen el correcto funcionamiento del sistema incluso en presencia de errores de modelado.

4.3. Control Predictivo basado en Modelo en Espacio de Estados

En la sección anterior se ha hecho una introducción a las formulaciones MPC, en las que la estrategia de control actúa en base a la predicción del comportamiento en instantes futuros a partir de la información de instantes anteriores. Tras una primera

aproximación al MPC, en la que se han expuesto la estrategia general y los diferentes elementos comunes, el objetivo de este capítulo es la particularización de una formulación MPC para ser aplicada en el caso de estudio de seguimiento de trayectoria de un vehículo utilitario.

4.3.1. Fundamentos matemáticos

Con el fin de facilitar la lectura de éste y próximos capítulos, se introducen a continuación una serie de conceptos matemáticos relacionados con la teoría de control y que se mencionarán a lo largo del texto.

4.3.1.1. Conjunto convexo

Se denomina conjunto convexo a aquel en el que se verifica que cualquier par de puntos ubicados en su interior determinan un segmento de recta también interior. Es decir, que entre cualquier par de puntos pertenecientes al conjunto de puntos se puede trazar una recta que está, a su vez, incluida dentro del conjunto (Figura 4.4).

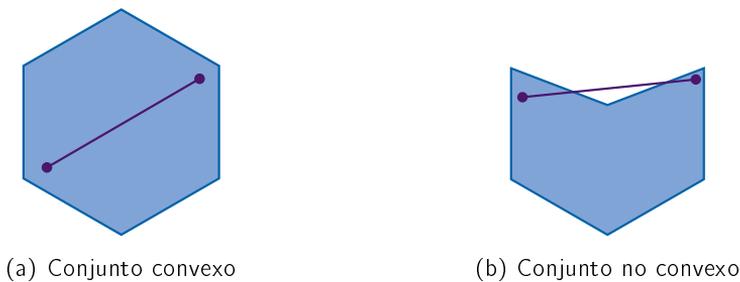


Figura 4.4: Conjuntos convexos y no convexos

Adicionalmente se cumple que:

- El conjunto vacío y los conjuntos con un sólo punto son conjuntos convexos.
- La intersección de conjuntos convexos es un conjunto convexo.
- La unión de conjuntos convexos no tiene por qué ser un conjunto convexo.
- La combinación lineal de conjuntos convexos es un conjunto convexo.

4.3.1.2. Hiperplanos y semiespacios

Los hiperplanos son conjuntos convexos que permiten dividir un espacio de dimensión n en varias regiones. Esto es, cuando el espacio es de dimensión 1 se trata de una recta, así que el hiperplano es un punto cualquiera de dicha recta. Cuando el espacio es de dimensión 2, esto es, un plano, entonces el hiperplano es una recta

contenida en dicho plano. Cuando el espacio es de dimensión 3, el hiperplano está formado por un plano.

Matemáticamente un hiperplano se expresa como un conjunto convexo \mathcal{H} tal que,

$$\mathcal{H} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / \mathbf{p}^T \mathbf{x} = \alpha\}$$

donde \mathbf{p} es un vector no nulo de \mathbb{R}^n y α un escalar.

Por su parte, los semiespacios son el resultado de dividir un espacio mediante un hiperplano, y siendo en consecuencia, conjuntos convexos.

Matemáticamente se define un semiespacio superior cerrado al conjunto \mathcal{S} ,

$$\mathcal{S}_{sup} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / \mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \alpha : \alpha \in \mathbb{R}^n\}$$

que define la parte "superior" del espacio dividido por el hiperplano $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \alpha$, mientras que el semiespacio inferior cerrado al conjunto \mathcal{S} se define como,

$$\mathcal{S}_{inf} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / \mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \alpha : \alpha \in \mathbb{R}^n\}$$

El hiperplano y los semiespacios se representan en la Figura 4.5.

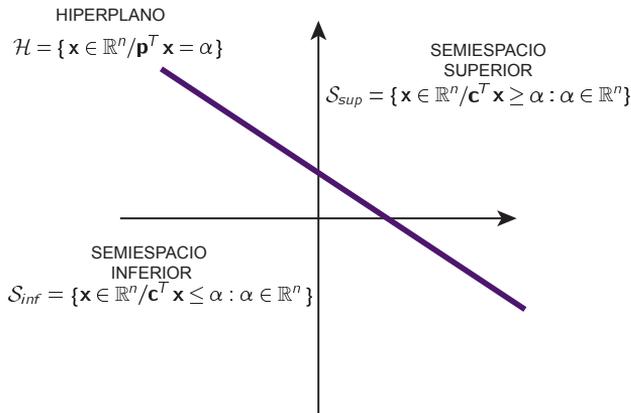


Figura 4.5: Hiperplanos y Semiespacios

4.3.1.3. Politopos

Un politopo es la generalización del concepto de polígono a n dimensiones. Cuando la dimensión es 2, entonces se le denomina polígono, cuando la dimensión es 3 poliedro, y por tanto, cuando la dimensión es 4 o superior se le denomina politopo. Al igual que en los polígonos, un politopo está compuesto por vértices y caras, delimitadas por cada conjunto de vértices.

Un conjunto especial de los polítopos son aquellos polítopos que son convexos. Éstos pueden ser representados como la intersección de un número finito de semiespacios cerrados. Dado que los semiespacios son convexos, el resultado es un conjunto convexo que, además, puede describirse mediante la siguiente desigualdad, denominada *representación en semiespacios* o representación-H,

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$$

donde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ siendo n el número de semiespacios que define el polítopo convexo y m la dimensión del polítopo convexo. Los coeficientes de cada fila de \mathbf{A} y \mathbf{b} , por lo tanto, se corresponden con los coeficientes del hiperplano a partir del cual se define la desigualdad que da origen al semiplano asociado.

Además, si el polítopo es convexo, cualquier punto puede ser representado como la combinación lineal convexa de los vértices del polítopo,

$$\mathcal{P} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / \sum_{i=1}^p \lambda_i \mathbf{v}_i, \forall \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1 \right\}$$

donde p es el número de vértices \mathbf{v}_i del polítopo. Esta representación se denomina *representación-V*.

La utilización de polítopos convexos es muy común a la hora de trabajar con restricciones lineales, dado que cada restricción es un semiespacio cerrado en el plano, y, por lo tanto, el conjunto de restricciones conforma un polítopo convexo de la forma $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ (Figura 4.6).

Por simplicidad, en la presente Sección y a lo largo de toda la tesis, se referirá al polítopo convexo como polítopo.

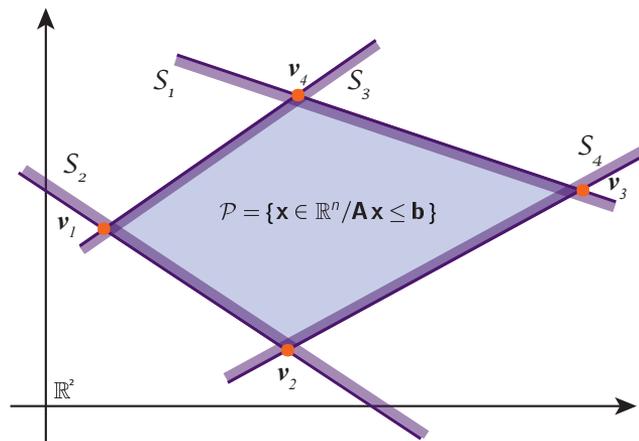


Figura 4.6: Polítopo

4.3.1.4. Operaciones con Politopos

Los politopos son conjuntos convexos a los que se pueden aplicar las operaciones básicas asociadas a los conjuntos:

- Suma de Minkowski: Dados dos politopos $\mathcal{P}_1 \subset \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{P}_2 \subset \mathbb{R}^n$, la suma de Minkowski se define como,

$$\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2 = \{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 : \mathbf{p}_1 \in \mathcal{P}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathcal{P}_2\}$$

- Resta de Pontryagin: Dados dos politopos $\mathcal{P}_1 \subset \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{P}_2 \subset \mathbb{R}^n$, la resta de Pontryagin se define como,

$$\mathcal{P}_1 \ominus \mathcal{P}_2 = \{\mathbf{p}_1 : \mathbf{p}_1 \oplus \mathcal{P}_2 \subseteq \mathcal{P}_1\}$$

- Transformación afín: Dados un politopo $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$, una matriz \mathbf{A} y un vector \mathbf{b} , se define su transformación afín como

$$\mathbf{A}\mathcal{P} \oplus \mathbf{b} = \{\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{p} + \mathbf{b}, \mathbf{p} \in \mathcal{P}\}$$

4.3.2. Modelo de predicción en Espacio de Estados

El modelo es la pieza clave de un controlador MPC, ya que es el mecanismo empleado para predecir la salida del sistema ante determinadas señales de entrada. Un modelo preciso permitirá predecir las salidas del sistema más cercanas a la realidad pudiendo así optimizar la acción de control calculada por el MPC.

Para el objetivo del análisis en esta tesis, el control de vehículos autónomos, se ha escogido la definición del modelo en Espacio de Estados, debido principalmente a las múltiples ventajas que ya se han presentado en la Sección 4.2.2. Además, el uso de este tipo de modelo permite la adaptación sencilla e intuitiva de las ecuaciones del caso a estudiar, como se comprobará en la Sección 4.4, y aplicar la Teoría de Control a la formulación MPC descrita en esta sección, permitiendo abordar la estabilidad y robustez de las mismas en capítulos posteriores.

El uso de modelos en Espacio de Estados permite la definición del MPC de diversas formas, por ejemplo en base a valores absolutos de control o en base a incrementos. En esta sección, se analizará en base a incrementos de control Δu dado que permite incorporar un término integrar implícito en la formulación, así como limitar el ratio de cambio de la acción de control, esto es, el giro de las ruedas δ_w .

Un modelo lineal definido en Espacio de Estados para un sistema de Entradas y Salidas Múltiples (MIMO en inglés, *Multiple Input Multiple Output*) viene determinado por el siguiente conjunto de ecuaciones,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t+1) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t+1) \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ representa el vector de estados del sistema, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ el vector de señales de entrada o control, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ el vector de señales salida y $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ y $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ son las matrices que definen el modelo.

Antes de la definición del modelo de predicción a partir del modelo en Espacio de Estados, se van a introducir los conceptos de respuesta libre y forzada para una mejor comprensión de la formulación.

Respuesta libre y forzada

Una característica típica en los MPC es el uso de los conceptos de respuesta libre y forzada. La idea es expresar la secuencia de control como la suma de dos señales:

$$u(t) = u_f(t) + u_l(t)$$

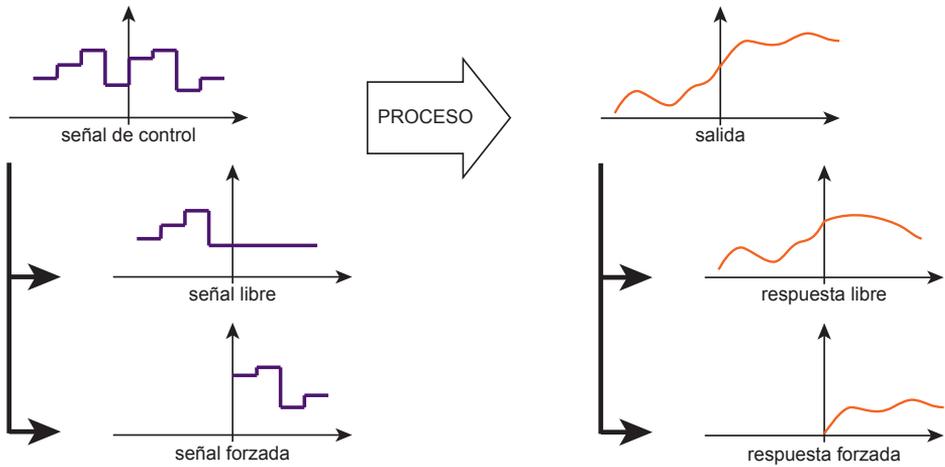


Figura 4.7: Respuesta libre y forzada

La señal forzada $u_f(t)$ corresponde a los valores pasados y se mantiene constante en el futuro e igual al último valor. La señal libre $u_l(t)$ corresponde a los valores futuros, a las futuras acciones de control, y es nula para valores pasados.

A partir de esta definición, las salidas futuras también se pueden dividir en dos partes, tal y como se muestra en la Figura 4.7. La respuesta libre $y_l(t)$ corresponde a la predicción de la salida ante la entrada libre $u_l(t)$ y la respuesta forzada $y_f(t)$ corresponde a la predicción de las salidas con la acción de control forzada $u_f(t)$. Así, la respuesta libre es la evolución del sistema debido al estado presente mientras que la respuesta forzada es la respuesta del sistema debido a futuras acciones de control.

Modelo de predicción

El modelo de la Ecuación (4.1) se emplea para calcular la salida del sistema en el instante siguiente $\mathbf{y}(t + 1)$ a partir de la acción de control $\mathbf{u}(t)$ y estado actual $\mathbf{x}(t)$. Interesa, por lo tanto, desarrollar un modelo de predicción para predecir todas las salidas del sistema para todos los instantes del Horizonte de predicción H_p . En el desarrollo de este modelo se debe tener en cuenta también el concepto de Horizonte de control H_c y que éste puede ser menor que el Horizonte de predicción H_p . En este caso, a partir del instante H_c , la acción de control se considera constante ($t > H_c \rightarrow u(t) = u(t - 1)$).

De este modo, se desarrolla la ley de control para los instantes $\mathbf{u}(t + k)$ para los instantes $k = 0, 1, \dots, H_c$.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}(t) &= \Delta \mathbf{u}(t) + \mathbf{u}(t - 1) \\
 \mathbf{u}(t + 1) &= \Delta \mathbf{u}(t + 1) + \mathbf{u}(t) \\
 &= \Delta \mathbf{u}(t + 1) + \Delta \mathbf{u}(t) + \mathbf{u}(t - 1) \\
 &\vdots \\
 \mathbf{u}(t + H_c - 1) &= \Delta \mathbf{u}(t + H_c - 1) + \mathbf{u}(t + H_c - 2) \\
 &= \Delta \mathbf{u}(t + H_c - 1) + \Delta \mathbf{u}(t + H_c - 2) + \dots + \Delta \mathbf{u}(t) + \mathbf{u}(t - 1) \\
 \mathbf{u}(t + H_c) &= \mathbf{u}(t + H_c - 1)
 \end{aligned}$$

Y una vez conocida la ley de control, se pueden desarrollar las predicciones $\hat{\mathbf{y}}(t + k|t)$, para $k = 1, 2, \dots, H_c, \dots, H_p$.

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{y}}(t + 1|t) &= \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\
 &= \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{C} \mathbf{B} (\Delta \mathbf{u}(t) + \mathbf{u}(t - 1)) \\
 &= \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{C} \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}(t) + \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{u}(t - 1) \\
 \hat{\mathbf{y}}(t + 2|t) &= \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{x}(t + 1) + \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{u}(t + 1) \\
 &= \mathbf{C} \mathbf{A}^2 \mathbf{x}(t) + \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{u}(t) + \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{u}(t - 1) \\
 &= \mathbf{C} \mathbf{A}^2 \mathbf{x}(t) + \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}(t) + \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{u}(t - 1) + \mathbf{C} \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}(t + 1) + \mathbf{C} \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}(t) \\
 &\quad + \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{u}(t - 1) \\
 &= \mathbf{C} \mathbf{A}^2 \mathbf{x}(t) + \mathbf{C} \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}(t + 1) + [\mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{B} + \mathbf{C} \mathbf{B}] \Delta \mathbf{u}(t) + [\mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{B} + \mathbf{C} \mathbf{B}] \mathbf{u}(t - 1) \\
 &\vdots \\
 \hat{\mathbf{y}}(t + H_c|t) &= \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{x}(t + H_c - 1) + \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{u}(t + H_c - 1) \\
 &= \mathbf{C} \mathbf{A}^{H_c - 1} \mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^{H_c} \mathbf{C} \mathbf{A}^{H_c - i + 1} \mathbf{B} \mathbf{u}(t + i - 1) \\
 &= \mathbf{C} \mathbf{A}^{H_c} \mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^{H_c} \mathbf{C} \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}(t) + \sum_{i=1}^{H_c - 1} \mathbf{C} \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}(t + 1) + \dots + \\
 &\quad \mathbf{C} \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}(t + H_c - 1) + \sum_{i=1}^{H_c} \mathbf{C} \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{B} \mathbf{u}(t - 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{y}}(t + H_c + 1|t) &= \mathbf{CAx}(t + H_c) + \mathbf{CBu}(t + H_c) \\
 &= \mathbf{CA}^{H_c+1} \mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^{H_c} \mathbf{CA}^{H_c+1-i+1} \mathbf{Bu}(t + i - 1) + \mathbf{CBu}(t + H_c - 1) \\
 &= \mathbf{CA}^{H_c+1} \mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^{H_c+1} \mathbf{CA}^{i-1} \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}(t) + \sum_{i=1}^{H_c} \mathbf{CA}^{i-1} \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}(t + 1) + \dots \\
 &\quad + [\mathbf{CAB} + \mathbf{CB}] \Delta \mathbf{u}(t + H_c - 1) + \sum_{i=1}^{H_c+1} \mathbf{CA}^{i-1} \mathbf{Bu}(t - 1) \\
 &\vdots \\
 \hat{\mathbf{y}}(t + H_p|t) &= \mathbf{CAx}(t + H_p - 1) + \mathbf{CBu}(t + H_p - 1) \\
 &= \mathbf{CA}^{H_p} \mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^{H_c} \mathbf{CA}^{H_p-i+1} \mathbf{Bu}(t + i - 1) \\
 &\quad + \sum_{i=H_c+1}^{H_p} \mathbf{CA}^{H_p-i+1} \mathbf{Bu}(t + H_c - 1) \\
 &= \mathbf{CA}^{H_p} \mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^{H_p} \mathbf{CA}^{i-1} \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}(t) + \sum_{i=1}^{H_p-1} \mathbf{CA}^{i-1} \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}(t + 1) + \dots \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{H_p-H_c+1} \mathbf{CA}^{i-1} \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}(t + H_c - 1) + \sum_{i=1}^{H_p} \mathbf{CA}^{i-1} \mathbf{Bu}(t - 1)
 \end{aligned}$$

Analizando el desarrollo de las predicciones, se puede concluir que la predicción de salida se puede reformular como la suma de su respuesta libre y respuesta forzada. De forma matricial,

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{G} \Delta \mathbf{u}^+ + \mathbf{F} \mathbf{x}(t) + \mathbf{G}' \mathbf{u}(t - 1) = \mathbf{G} \Delta \mathbf{u}^+ + \mathbf{f} \quad (4.2)$$

donde $\mathbf{G} \Delta \mathbf{u}^+$ es la respuesta forzada y $\mathbf{f} = \mathbf{F} \mathbf{x}(t) + \mathbf{G}' \mathbf{u}(t - 1)$ es la respuesta libre, siendo $\Delta \mathbf{u}^+ = [\Delta \mathbf{u}(t), \Delta \mathbf{u}(t + 1), \dots, \Delta \mathbf{u}(t + H_c - 1)]^T$ la secuencia de control. Así, se pueden definir las matrices que conforman el modelo de predicción,

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{CB} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CAB} + \mathbf{CB} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_c-1} \mathbf{CA}^i \mathbf{B} & \dots & \mathbf{CB} \\ \sum_{i=0}^{H_c} \mathbf{CA}^i \mathbf{B} & \dots & \mathbf{CAB} + \mathbf{CB} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_p-1} \mathbf{CA}^i \mathbf{B} & \dots & \sum_{i=0}^{H_p-H_c} \mathbf{CA}^i \mathbf{B} \end{bmatrix}_{H_p \ n_y \times H_c \ n_u} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{H_c} \\ \mathbf{CA}^{H_c+1} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{H_p} \end{bmatrix}_{H_p \ n_y \times n_x} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{G}' = \begin{bmatrix} \mathbf{CB} \\ \mathbf{CAB} + \mathbf{CB} \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_c-1} \mathbf{CA}^i \mathbf{B} \\ \sum_{i=0}^{H_c} \mathbf{CA}^i \mathbf{B} \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_p-1} \mathbf{CA}^i \mathbf{B} \end{bmatrix}_{H_p n_y \times n_u} \quad (4.5)$$

4.3.3. Función de coste

Cada formulación MPC define su propia función de coste, aunque hay dos términos que se suelen incorporar en todas las ecuaciones de coste y que serán los que definan la función de coste que se va a emplear: el error de seguimiento del sistema respecto de la referencia y el esfuerzo de control. La forma general se corresponde con la siguiente función de coste cuadrática,

$$J(H_p, H_c) = (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{r})^T \mathbf{Q}_p (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{r}) + \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{R}_p \Delta \mathbf{u} \quad (4.6)$$

donde la función de coste se debe minimizar para obtener el $\Delta \mathbf{u}$ óptimo ($\Delta \mathbf{u}^*$). La salida predicha del sistema $\hat{\mathbf{y}}$ se obtiene mediante el modelo de predicción definido en la Sección 4.3.2 y la referencia \mathbf{r} es una referencia utilizada en el proceso de minimización y que marcará la referencia que el sistema debe seguir durante el Horizonte de predicción H_p . Para componer esta señal, se debe tener en cuenta que es necesario definir las referencias de todas las variables de salida $\mathbf{r}_i(t+k)$, siendo $i = 1, 2, \dots, n_y$ y para todos los instantes $k = 1, 2, \dots, H_p$. Considerando esto, la señal de referencia se define de la siguiente forma,

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1(t+1) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{n_y}(t+1) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1(t+2) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{n_y}(t+2) \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1(t+H_p) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{n_y}(t+H_p) \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{H_p \times n_y \times 1} \quad (4.7)$$

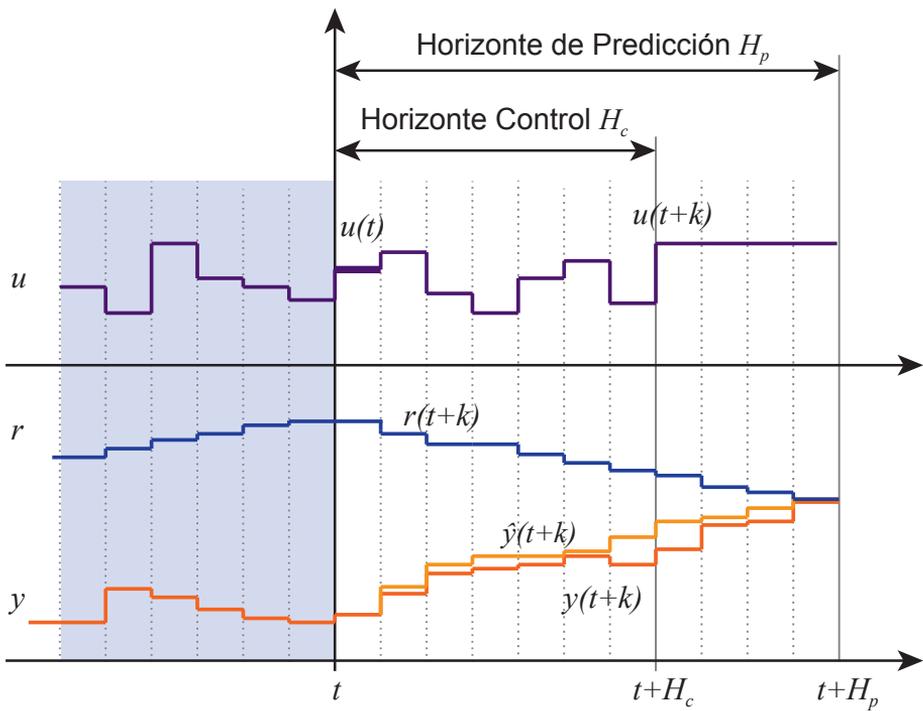


Figura 4.8: Estrategia MPC, horizonte de predicción H_p y horizonte de control H_c

El Horizonte de predicción H_p define el número de instantes futuros en los que se desea calcular el error de seguimiento de la trayectoria, mientras que el Horizonte de control H_c define los instantes futuros en los que se desea calcular la variación de la acción de control óptima $\Delta \mathbf{u}^+$. Si los dos tienen el mismo valor $H_c = H_p$, para cada instante en el que se calcula el error de seguimiento se calculará la salida

óptima $\Delta \mathbf{u}^+ = [\Delta \mathbf{u}(t)_1, \dots, \Delta \mathbf{u}(t + H_p)_{H_p}]^T$. Sin embargo, como anteriormente se ha indicado, por términos de coste computacional, en algunas ocasiones se plantea un Horizonte de control menor que el horizonte de predicción $H_c < H_p$. De esta forma, la acción de control se calcula para los primeros H_c instantes y se mantiene constante durante el resto de instantes $\Delta \mathbf{u}^+ = [\Delta \mathbf{u}(t)_1, \dots, \Delta \mathbf{u}(t + H_c)_{H_c}, \dots, \Delta \mathbf{u}(t + H_c)_{H_p}]^T$ (Figura 4.8).

La matriz diagonal y definida positiva \mathbf{Q} pondera el error de seguimiento de la trayectoria, mientras que la matriz \mathbf{R} , también diagonal y definida positiva, pondera el esfuerzo de control. Estas matrices definen los pesos relativos con los que se realizará la optimización de la función de coste J , permitiendo una sintonización intuitiva.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{q}_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{q}_{n_x} \end{bmatrix}_{n_x \times n_x} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{r}_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{r}_{n_u} \end{bmatrix}_{n_u \times n_u} \quad (4.8)$$

Si definimos estas matrices para todo el horizonte de predicción,

$$\mathbf{Q}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{t+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_{t+2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{Q}_{t+H_p} \end{bmatrix}_{n_x H_p \times n_x H_p} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{R}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_{t+1} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{R}_{t+H_p-1} \end{bmatrix}_{n_u H_p \times n_u H_p}$$

4.3.4. Restricciones

Todos los sistemas físicos están sometidos a restricciones, como los límites físicos, consideraciones de seguridad o incluso razones económicas. Las estrategias de Control Predictivo permiten introducir directamente las restricciones en el algoritmo de control. Aunque con su inclusión, la minimización de la función de coste se vuelve más compleja y la solución no se puede obtener de forma explícita como en el caso no restringido. La resolución del problema de minimización presenta problemáticas como la infactibilidad o un mayor coste computacional.

Las restricciones más habituales son las que afectan a las señales de entrada y a las señales de salida y obligan a que estas señales no superen unos valores máximos y mínimos impuestos. Por un lado, las restricciones a la entrada son las que afectan a la acción de control \mathbf{u} y a la variación de la acción de control $\Delta \mathbf{u}$. Estas señales, al ser directamente manipulables, el MPC las cumple siempre. Por otro lado, las restricciones a la salida $\hat{\mathbf{y}}$ afectan a las señales del vector de salidas, con el fin de cumplir estas restricciones el modelo ha de ser exacto dado que perturbaciones no consideradas pueden violar las restricciones, desviando la predicción de la realidad.

$$\begin{array}{lll}
 \text{Acción de control} & \mathbf{u}_{min} \leq & \mathbf{u}(t+k) \leq \mathbf{u}_{max} \\
 \text{Variación de la acción de control} & \Delta \mathbf{u}_{min} \leq & \Delta \mathbf{u}(t+k) \leq \Delta \mathbf{u}_{max} \\
 \text{Salida} & \mathbf{y}_{min} \leq & \mathbf{y}(t+k) \leq \mathbf{y}_{max}
 \end{array}$$

Aunque las restricciones de entrada y salida sean las más habituales, se pueden incorporar términos adicionales de restricciones, por ejemplo incorporar consideraciones de estabilidad o robustez en el problema, tal y como se comprobará en los capítulos posteriores. En cualquier caso, las restricciones duras no son recomendables dado que pueden generar problemas de infactibilidad y se sugiere el uso de desigualdades.

En el caso del MPC, las restricciones han de escribirse siempre en función de las variables a calcular, que en el caso particular a analizar será $\Delta \mathbf{u}$. Si las restricciones son lineales se pueden describir como la intersección de semiespacios,

$$\mathbf{A}_c \Delta \mathbf{u} \leq \mathbf{b}_c$$

Así, se procede a definir las restricciones más habituales consideradas para todo el Horizonte de predicción H_p ,

4.3.4.1. Restricción $\Delta \mathbf{u}$

Considérese que la variación de la acción de control $\Delta \mathbf{u}$ tiene que estar contenida entre un valor mínimo $\Delta \mathbf{u}_{min}$ y un valor máximo $\Delta \mathbf{u}_{max}$ para todos los instantes en el Horizonte de control H_c .

$$\Delta \mathbf{u}_{min} \leq \Delta \mathbf{u} \leq \Delta \mathbf{u}_{max} \quad (4.10)$$

Esta restricción se puede reescribir considerando cada instante del Horizonte de control H_c , de forma que

$$\begin{array}{ll}
 \Delta \mathbf{u}(t+k) \leq \Delta \mathbf{u}_{max i} & \Delta \mathbf{u}(t+k) \leq \Delta \mathbf{u}_{max i} \\
 \Delta \mathbf{u}(t+k) \geq \Delta \mathbf{u}_{min i} & -\Delta \mathbf{u}(t+k) \leq -\Delta \mathbf{u}_{min i} \\
 \text{s.a. } k = 0, \dots, H_c - 1 & \Leftrightarrow \text{s.a. } k = 0, \dots, H_c - 1 \\
 i = 1, \dots, H_c & i = 1, \dots, H_c
 \end{array}$$

Si esta restricción se formula como la intersección de semiespacios para todos los instantes del Horizonte de control H_c ,

$$\mathbf{A}_{\Delta u} \Delta \mathbf{u} \leq \mathbf{b}_{\Delta u} \quad (4.11)$$

donde,

$$\mathbf{A}_{\Delta u} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{H_c} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_1 \\ -\mathbf{I}_2 \\ \vdots \\ -\mathbf{I}_{H_c} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{matrix} H_c n_u \times n_u \\ H_c n_u \times n_u \end{matrix} \quad (4.12)$$

$$\mathbf{b}_{\Delta u} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{max 1} \\ \Delta \mathbf{u}_{max 2} \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{u}_{max H_c} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -\Delta \mathbf{u}_{mi n 1} \\ -\Delta \mathbf{u}_{mi n 2} \\ \vdots \\ -\Delta \mathbf{u}_{mi n H_c} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{matrix} H_c n_u \times 1 \\ H_c n_u \times 1 \end{matrix} \quad (4.13)$$

4.3.4.2. Restricción \mathbf{u}

Del mismo modo que se ha definido la restricción para la variación de la acción de control, se pretende que la acción de control \mathbf{u} esté contenida entre un valor mínimo \mathbf{u}_{min} y un valor máximo \mathbf{u}_{max} para todos los instantes en el horizonte de control H_c .

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t+k) &\leq \mathbf{u}_{max i} \\ -\mathbf{u}(t+k) &\leq -\mathbf{u}_{mi ni} \\ \text{s.a. } k &= 0, \dots, H_c - 1 \\ i &= 1, \dots, H_c \end{aligned} \quad (4.14)$$

Pero esta restricción se debe representar en función de la señal que se optimiza, que en este caso es la variación de la acción de control $\Delta \mathbf{u}(t)$. Si se desarrolla la ley de control,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= \Delta \mathbf{u}(t) + \mathbf{u}(t-1) \\ \mathbf{u}(t+1) &= \Delta \mathbf{u}(t+1) + \mathbf{u}(t) = \Delta \mathbf{u}(t+1) + \Delta \mathbf{u}(t) + \mathbf{u}(t-1) \\ &\vdots \\ \mathbf{u}(t+H_c-1) &= \Delta \mathbf{u}(t+H_c-1) + \mathbf{u}(t+H_c-2) \\ &= \Delta \mathbf{u}(t+H_c-1) + \dots + \Delta \mathbf{u}(t) + \mathbf{u}(t-1) \end{aligned}$$

donde $\mathbf{u}(t-1)$ es conocido.

Teniendo en cuenta este desarrollo, se puede representar esta restricción como intersección de semiespacios,

$$\mathbf{A}_u \Delta \mathbf{u} \leq \mathbf{b}_u \quad (4.15)$$

donde,

$$\mathbf{A}_u = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{H_c n_u \times n_u} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 \end{bmatrix}_{H_c n_u \times n_u} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$\mathbf{b}_u = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{max1} - \mathbf{u}(t-1) \\ \mathbf{u}_{max2} - \mathbf{u}(t-1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{maxH_c} - \mathbf{u}(t-1) \end{bmatrix}_{H_c n_u \times 1} \\ \begin{bmatrix} -(\mathbf{u}_{min1} - \mathbf{u}(t-1)) \\ -(\mathbf{u}_{min2} - \mathbf{u}(t-1)) \\ \vdots \\ -(\mathbf{u}_{minH_c} - \mathbf{u}(t-1)) \end{bmatrix}_{H_c n_u \times 1} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

4.3.4.3. Restricción y

Por último, se definen las restricciones a la salida, que permiten acotar los límites de funcionamiento del sistema. Siguiendo la misma nomenclatura de los casos anteriores, pero teniendo en cuenta que los límites son para todo el Horizonte de predicción H_p ,

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t+k) &\leq \mathbf{y}_{max_i} \\ -\mathbf{y}(t+k) &\leq -\mathbf{y}_{min_i} \\ \text{s.a. } &k = 1, \dots, H_p \\ &i = 1, \dots, H_p \end{aligned} \quad (4.18)$$

Estos límites están representados en función del vector de salidas, pero se deben representar en función de la variación de la acción de control $\Delta \mathbf{u}$, que es la variable a optimizar.

Si se considera la Ecuación (4.2) del modelo de predicción vectorial, se obtiene una relación entre las salidas y la acción de control.

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{G} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (4.19)$$

Con lo que,

$$\mathbf{A}_y \Delta \mathbf{u} \leq \mathbf{b}_y \quad (4.20)$$

$$\mathbf{A}_y = \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ -\mathbf{G} \end{bmatrix}_{2 H_p n_y \times H_c n_u} \quad (4.21)$$

$$\mathbf{b}_y = \begin{bmatrix} (\mathbf{y}_{max} - \mathbf{f}) \\ -(\mathbf{y}_{min} - \mathbf{f}) \end{bmatrix}_{2 H_p n_y \times 1} \quad (4.22)$$

siendo los vectores \mathbf{y}_{max} y \mathbf{y}_{min} los siguientes vectores con los límites de las salidas.

$$\mathbf{y}_{max} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{max 1} \\ \mathbf{y}_{max 2} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{max H_p} \end{bmatrix}_{H_p n_y \times 1} \quad \mathbf{y}_{min} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{min 1} \\ \mathbf{y}_{min 2} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{min H_p} \end{bmatrix}_{H_p n_y \times 1} \quad (4.23)$$

4.3.5. Optimizador

La obtención de la ley de control $\Delta \mathbf{u}(t)$, requiere resolver el siguiente problema de minimización,

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}^*(k) &= \min_{s.a} J(\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{r}, \Delta \mathbf{u}) \\ &\mathbf{u}_{min} \leq \mathbf{u}(t) \leq \mathbf{u}_{max} \\ &\Delta \mathbf{u}_{min} \leq \Delta \mathbf{u}(t) \leq \Delta \mathbf{u}_{max} \\ &\mathbf{y}_{min} \leq \mathbf{y}(t) \leq \mathbf{y}_{max} \end{aligned} \quad (4.24)$$

donde $J = (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{r})^T \mathbf{Q}_p (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{r}) + \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{R}_p \Delta \mathbf{u}$, es la función de coste para todo el Horizonte de predicción H_p definida en la Sección 4.3.3.

Siendo J una función cuadrática, es posible usar un optimizador cuadrático para resolver la Ecuación (4.24) reescribiendo J como,

$$J = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}^{+T} \mathbf{H} \Delta \mathbf{u}^+ + \mathbf{f}_h^T \Delta \mathbf{u}^+ \quad \begin{cases} \mathbf{H} = \mathbf{G}^T \mathbf{Q} \mathbf{G} + \mathbf{R} \\ \mathbf{f}_h = \mathbf{G}^T \mathbf{Q} (\mathbf{f} - \mathbf{r}) \end{cases} \quad (4.25)$$

En caso de no existir restricciones, la secuencia óptima se puede calcular analíticamente

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}^+ &= (\mathbf{G}^T \mathbf{Q} \mathbf{G} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{Q} (\mathbf{f} - \mathbf{r}) = \mathbf{K} (\mathbf{f} - \mathbf{r}) \\ \Delta \mathbf{u}(t) &= [\mathbf{K}]_{1, \dots, n_u} (\mathbf{f} - \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (4.26)$$

4.4. Aplicación: MPC basado en modelo LTV al control lateral de un vehículo utilitario

En la Sección 4.3 se ha definido la formulación de control MPC mediante un modelo de predicción definido en Espacio de Estados, que se emplea para predecir las salidas del sistema. El control minimiza una función de coste que considera el error de seguimiento de trayectoria y el esfuerzo de control y que, además, está sujeto a restricciones de entrada y salida. En base a dicha formulación, en la presente sección se detallará su aplicación al control lateral de un vehículo utilitario.

El objetivo principal del control lateral propuesto es minimizar tanto el error lateral del seguimiento de trayectoria como la desviación de la orientación del vehículo respecto de la referencia. Para dicho fin, el controlador optimiza la señal de la variación de la acción de control, que se corresponde con el ángulo de giro de las ruedas. Además, se consideran restricciones físicas en la acción de control, en la variación de la acción de control y de seguridad en el error lateral. Las consideraciones en la optimización de la función de coste y las restricciones impuestas garantizan una conducción segura y confortable.

Un componente fundamental en la formulación MPC es el modelo de predicción empleado. La dinámica vehicular es compleja y no lineal, por lo que los modelos matemáticos son complejos y con un elevado coste computacional. Por esta razón, la tendencia es el uso de modelos más simples, como es en este caso, que se plantea el uso del denominado modelo bicicleta para control que cumple con el compromiso entre coste computacional y precisión. Sin embargo, su precisión está ligada a los parámetros del modelo, entre los que se encuentra la velocidad longitudinal a la que circula el vehículo, por lo que lo hace altamente dependiente de las condiciones de conducción. Para solventar esta desventaja y que el modelo de predicción se pueda emplear para un amplio rango de velocidades, tal y como se propone, se plantea el uso de un modelo linealmente variable en el tiempo (LTV, en inglés *Linear Time Varying*) en función de la velocidad longitudinal. De este modo, en cada iteración, se calcula el modelo del vehículo en función de la velocidad longitudinal en ese instante y se considera constante para todo el horizonte de predicción.

Partiendo de la formulación general de MPC de la Sección 4.3, a continuación se presenta su adaptación para el caso de estudio que se plantea, el seguimiento lateral de trayectoria de un vehículo utilitario.

4.4.1. Modelo LTV para control

Con el fin de implementar el controlador propuesto, se requiere de un modelo adecuado. Tal y como se ha visto en el Capítulo 2, es posible simplificar el modelo lateral de un vehículo y obtener la siguiente formulación en Espacio de Estados (Figura 4.9).

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_c(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c(t)u(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_c(t)\mathbf{x}(t)\end{aligned}\tag{4.27}$$

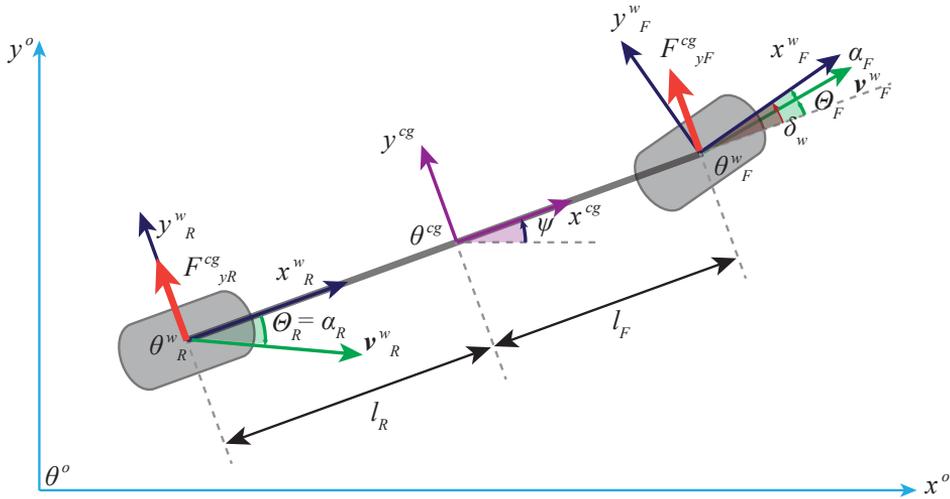


Figura 4.9: Modelo bicicleta de un vehículo

donde el vector de estados $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^4$ es $\mathbf{x}(t) = [y(t) \ \dot{y}(t) \ \psi(t) \ \dot{\psi}(t)]^T$ y representa las variables de posición y y velocidad lateral \dot{y} y la orientación yaw ψ y velocidad del ángulo yaw $\dot{\psi}$; la variable de control $u(t) \in \mathbb{R}^1$ se corresponde con el ángulo de giro de las ruedas $u(t) = \delta(t)$; y el vector de salidas $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ incluye el desplazamiento lateral y el giro en yaw $\mathbf{y}(t) = [y(t) \ \psi(t)]^T$. Las matrices $\mathbf{A}_c(t)$, $\mathbf{B}_c(t)$ y $\mathbf{C}_c(t)$ describen el modelo del vehículo tal y como se ha visto en la Sección 4.3.2, se puede definir como,

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2C_{\alpha F} + 2C_{\alpha R}}{m\dot{x}} & 0 & -\frac{2l_F C_{\alpha F} - 2l_R C_{\alpha R}}{m\dot{x}} - \dot{x} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2l_F C_{\alpha F} - 2l_R C_{\alpha R}}{l_z \dot{x}} & 0 & -\frac{2l_F^2 C_{\alpha F} + 2l_R^2 C_{\alpha R}}{l_z \dot{x}} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2C_{\alpha F}}{m} \\ 0 \\ \frac{2l_F C_{\alpha F}}{l_z} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

$$\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

donde $C_{\alpha F}$ y $C_{\alpha R}$ es la rigidez en curva de los neumáticos delantero y trasero respectivamente, m es la masa total del vehículo, l_z es la inercia del vehículo en el eje z ,

\dot{x} es la velocidad longitudinal del vehículo en el sistema de referencia local y l_F y l_R es la distancia desde el Centro de Gravedad (CoG, en inglés *Center of Gravity*) del vehículo al eje delantero y trasero respectivamente.

Nótese que el modelo depende de la velocidad longitudinal \dot{x} . Por ello, con el fin de mejorar en precisión en la predicción de la trayectoria, el modelo se formula como un modelo LTV. Así, la velocidad longitudinal \dot{x} medida en cada instante se asume constante durante el Horizonte de predicción H_p , por razones de eficiencia computacional. Así, las matrices $\mathbf{A}_c(t)$, $\mathbf{B}_c(t)$ y $\mathbf{C}_c(t)$ varían de un instante de control al siguiente pero son constantes durante el Horizonte de predicción H_p asociado a un instante.

Los controladores MPC están basados en tiempo discreto. Por esta razón, el modelo de vehículo LTV descrito en la Ecuación (4.27) se discretiza con el método de Retenedor de Orden Cero y se representa, de nuevo, con la siguiente formulación en Espacio de Estados en tiempo discreto como,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}_d(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_d(t)u(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_d(t)\mathbf{x}(t+1) \end{aligned} \quad (4.31)$$

donde $\mathbf{x}(k)$, $u(k)$ y $\mathbf{y}(k)$ son el vector de estados del vehículo, la señal de entrada y el vector de salidas del vehículo, respectivamente y las matrices $\mathbf{A}_d(t)$, $\mathbf{B}_d(t)$, $\mathbf{C}_d(t)$, son las matrices discretizadas del Espacio de Estados de las Ecuaciones (4.28), (4.29) y (4.30) respectivamente.

Mediante este modelo discretizado se puede definir el modelo de predicción (Sección 4.3.2) que será empleado en la ley de control.

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{G}\Delta\mathbf{u}^+ + \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}'u(t-1) \quad (4.32)$$

donde $\mathbf{G}\Delta\mathbf{u}^+$ es la respuesta forzada y $\mathbf{f} = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}'u(t-1)$ es la respuesta libre. Las matrices \mathbf{G} , \mathbf{G}' y \mathbf{F} están definidas en las Ecuaciones 4.3, 4.5 y 4.4 respectivamente; $u(t-1)$ es el valor anterior de la acción de control, esto es, el ángulo de giro de las ruedas $\delta(t)$, en el instante anterior; $\mathbf{x}(t)$ es el vector de estados correspondiente al instante actual, que se supone medible, y $\Delta\mathbf{u}^+ = [\Delta u(t), \Delta u(t+1), \dots, \Delta u(t+H_c-1)]^T$ la secuencia de control, calculada como la variación de la acción de control, esto es, la variación del ángulo de giro de las ruedas $\Delta\delta_w$. Se ha definido el problema MPC en función de la variación de la acción de control para conseguir así una conducción más suave y confortable.

Por lo tanto, mediante este modelo de predicción, se puede predepredecir la trayectoria futura $\hat{\mathbf{y}}$ que seguiría el vehículo durante un Horizonte de predicción H_p .

4.4.2. Función de coste

La función de coste propuesta en la Ecuación 4.6 se adapta a la formulación escogida y se penaliza tanto el esfuerzo de control Δu , como las desviaciones respecto a la referencia deseada y el ángulo yaw deseado ($\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{r}$).

$$J(H_p, H_c) = (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{r})^T \mathbf{Q}_p (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{r}) + \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{R}_p \Delta \mathbf{u} \quad (4.33)$$

donde $\hat{\mathbf{y}}$ se obtiene mediante el modelo de predicción de la Ecuación (4.32), \mathbf{r} define la referencia futura para cada instante de muestreo en el horizonte de predicción H_p , cuyo cálculo se detallará en la Sección 4.4.3 y $\Delta \mathbf{u}$ el señal de variación de la acción de control óptima que se calcula para todo el Horizonte de predicción H_p .

Por otro lado, \mathbf{Q}_p y \mathbf{R}_p son las matrices de ponderación para el seguimiento de trayectoria y esfuerzo de control respectivamente, definidas para todo el Horizonte de predicción H_p (Ecuación (4.9)).

4.4.3. Cálculo de la referencia

Como ya se ha mencionado, el controlador MPC requiere de una trayectoria de referencia conocida en el Horizonte de predicción H_p . En este trabajo, la trayectoria de referencia se define como una serie de coordenadas en el sistema de referencia inercial (fijo) (X_i, Y_i) . Esta trayectoria define la posición central del vehículo y se supone que es conocida, dado que se podrá definir como la carretera a seguir.

Con el fin de definir la carretera a seguir y deducir la trayectoria, se define una nueva variable, *Station* S_i , que representa la distancia longitudinal cubierta a lo largo de la trayectoria deseada y se calcula para cada par de coordenadas (Figura 4.10). Esta variable permite definir únivocamente cualquier posición de la carretera, ya que para cada valor de esta variable sólo existe un par de coordenadas (X_i, Y_i) que define esta posición en el sistema de referencia global. El *Station* S_i es, por tanto, una variable que siempre se incrementará.

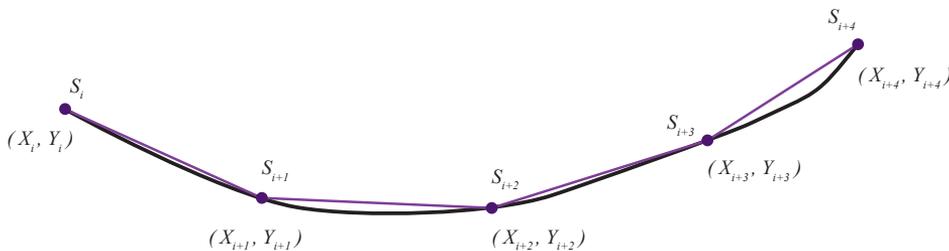


Figura 4.10: Trayectoria de referencia

El valor actual de *Station* se calcula como la suma de su valor anterior y la distancia recorrida hasta el nuevo punto. Con el fin de simplificar su cálculo, se emplea una interpolación lineal (Figura 4.10). De esta forma, todos los puntos situados en la perpendicular a la trayectoria tienen el mismo valor de *Station* (S_i),

$$S_i = S_{i-1} + \sqrt{(X_i - X_{i-1})^2 + (Y_i - Y_{i-1})^2} \quad (4.34)$$

Así, el procedimiento para calcular la trayectoria de referencia \mathbf{r} o trayectoria objetivo se resume en la Figura 4.11. Para una posición dada del CoG (X_{CG}, Y_{CG}) en

un determinado instante, se calcula el punto en la trayectoria de referencia que está a la mínima distancia (X_{min}, Y_{min}) . Este punto está en la normal a la trayectoria y que cruza el CoG. Así, se puede obtener el valor correspondiente de Station (S_{min}) . A partir de dicho punto, se calculan los siguientes valores del *Station*, que son necesarios para la ley de control del MPC.

$$\mathbf{S}_t = [S_{min} + T_s \dot{x}, S_{min} + 2 T_s \dot{x}, \dots, S_{min} + H_p T_s \dot{x}] \quad (4.35)$$

donde \dot{x} es la velocidad longitudinal del vehículo y que se considera conocida y dada por un control longitudinal, H_p es el horizonte de predicción y T_s es el tiempo de muestreo. Dados los siguientes valores \mathbf{S}_t , se pueden obtener las coordenadas X e Y de los puntos objetivo $(\mathbf{X}_t, \mathbf{Y}_t)$ donde

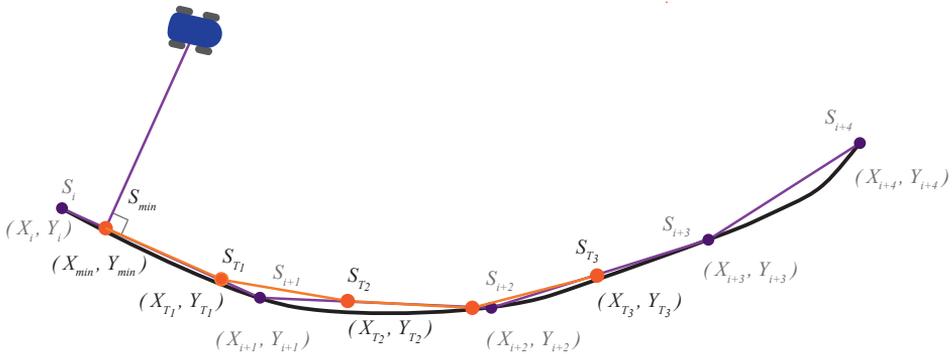


Figura 4.11: Definición de los puntos objetivo de la trayectoria de referencia

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_T &= [X_{T_1}, X_{T_2}, \dots, X_{T_{H_p}}] \\ \mathbf{Y}_T &= [Y_{T_1}, Y_{T_2}, \dots, Y_{T_{H_p}}] \end{aligned} \quad (4.36)$$

Nótese que \mathbf{X}_T y \mathbf{Y}_T están definidos en el sistema de referencia fijo o inercial mientras que la referencia \mathbf{r} para el MPC ha de estar definida en el sistema de referencia local asociado al instante $t = t$.

Por ello, es necesario trasladar las referencias \mathbf{X}_T y \mathbf{Y}_T del sistema de referencia global al local y definiendo \mathbf{r}_y y \mathbf{r}_ψ .

Así, la referencia \mathbf{r}_y representa el desplazamiento lateral transformado del sistema global al local y la referencia \mathbf{r}_ψ la orientación respecto a la trayectoria de referencia, que se calcula como la diferencia de pendiente entre dos puntos consecutivos $(m_1, m_2, \dots, m_{H_p})$ respecto de la orientación del vehículo ψ .

$$\mathbf{r}_y = \begin{bmatrix} (X_{T_1} - X_{cg}) \cos(\psi) - (Y_{T_1} - Y_{cg}) \sin(\psi) \\ (X_{T_2} - X_{cg}) \cos(\psi) - (Y_{T_2} - Y_{cg}) \sin(\psi) \\ \vdots \\ (X_{T_{H_p}} - X_{cg}) \cos(\psi) - (Y_{T_{H_p}} - Y_{cg}) \sin(\psi) \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

$$\mathbf{r}_\psi = \begin{bmatrix} \arctan[m_1] - \phi \\ \arctan[m_2] - \phi \\ \vdots \\ \arctan[m_{H_p}] - \phi \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

En la Figura 4.12 se ilustran las transformaciones a realizar para el cálculo de la referencia \mathbf{r}_y y \mathbf{r}_ψ .

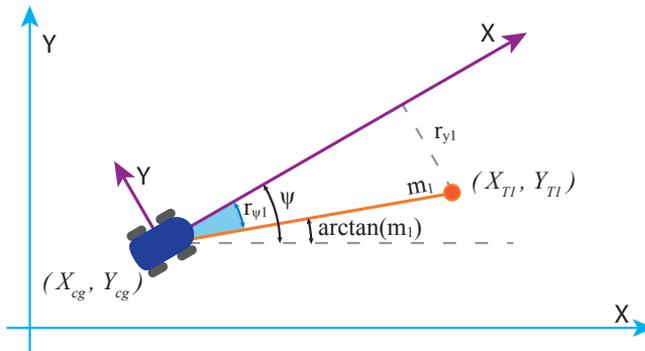


Figura 4.12: Definición de la trayectoria de referencia

Y la referencia \mathbf{r} queda definida como,

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{y1} \\ \mathbf{r}_{\psi1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{y2} \\ \mathbf{r}_{\psi2} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{y H_p} \\ \mathbf{r}_{\psi1 H_p} \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{2 H_p \times 1} \quad (4.39)$$

donde \mathbf{r}_y es el vector para la referencia del desplazamiento lateral y \mathbf{r}_ψ para el ángulo yaw.

4.4.4. Restricciones

Una vez definida la función de coste, se procede a definir las restricciones que vienen definidas tanto por el propio vehículo como por el problema de seguimiento de trayectoria. Las restricciones se integrarán en la ley de control, de modo que la ley de control $\Delta \mathbf{u}$ calculada las garantice.

Restricciones de entrada: restricciones del vehículo

Las restricciones de entrada son las que afectan a la variación de la acción de control $\Delta \mathbf{u}$ y al valor absoluto de la acción de control \mathbf{u} . Estas restricciones afectan directamente al vehículo, ya que estas señales hacen referencia al ángulo de giro de las ruedas $\delta_w(t)$.

Por un lado, limitar la variación de la acción de control $\Delta u(t) = \Delta \delta_w(t)$ conlleva limitar la velocidad con la que el controlador variará el ángulo de giro de las ruedas, evitando así giros bruscos del vehículo y garantizando así el confort. Por otro lado, la limitación del valor absoluto de la acción de control, esto es, el ángulo de giro de las ruedas $u(t) = \delta_w(t)$, viene dada por la limitación constructiva del vehículo, ya que las ruedas no pueden girar más de un ángulo máximo.

$$\begin{aligned} \text{Acción de control } \delta_w(t) : & \quad u_{min} \leq u(t+k) \leq u_{max} \\ \text{Variación de la acción de control } \Delta \delta_w(t) : & \quad \Delta u_{min} \leq \Delta u(t+k) \leq \Delta u_{max} \end{aligned}$$

Ambas restricciones, tanto el ángulo de giro de las ruedas como la variación, no superarán unos valores mínimos o máximos durante todo el Horizonte de de control H_c . Por lo tanto, se pueden definir los semiespacios tal y como se detalla en la Sección 4.3.4.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\Delta u(2 H_c \times 1)} \Delta u & \leq \mathbf{b}_{\Delta u(2 H_c \times 1)} \\ \mathbf{A}_{u(2 H_c \times 1)} u & \leq \mathbf{b}_{u(2 H_c \times 1)} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Restricciones de salida: seguimiento de trayectoria

Las restricciones de salida son las que afectan a las dos señales de salida del problema, el desplazamiento lateral $y(t)$ y el ángulo yaw $\psi(t)$.

Limitando el desplazamiento lateral $y(t)$ se consigue garantizar que el vehículo permanezca dentro del carril durante todo el Horizonte de predicción H_p , cumpliendo así con las condiciones de seguridad impuestas en el problema de seguimiento de trayectoria.

$$\text{Salida } [y_{min}(y) \ y_{min}(\psi)]^T \leq \mathbf{y}(t+k) \leq [y_{max}(y) \ y_{max}(\psi)]^T$$

A diferencia del caso de las restricciones de entrada, la restricción que afecta al desplazamiento lateral $y(t)$ depende de las posiciones objetivo que debe alcanzar el vehículo. Por lo tanto, los límites en cada instante del Horizonte de predicción H_p no serán constantes y dependerán de la trayectoria objetivo \mathbf{r} .

Así, para cada instante en el horizonte de predicción, el vehículo tratará de alcanzar ciertas posiciones objetivo $\mathbf{y}_T = [y_{T1}, y_{T2}, \dots, y_{TH_p}]^T$, por lo que los valores máximos y mínimos de desvío dependerán dichas posiciones (Figura 4.13). De este modo, las restricciones se formulan como en la Sección 4.3.4.

$$\mathbf{A}_{y(4 H_p \times H_c)} \Delta u \leq \mathbf{b}_{y(4 H_p \times 1)} \quad (4.41)$$

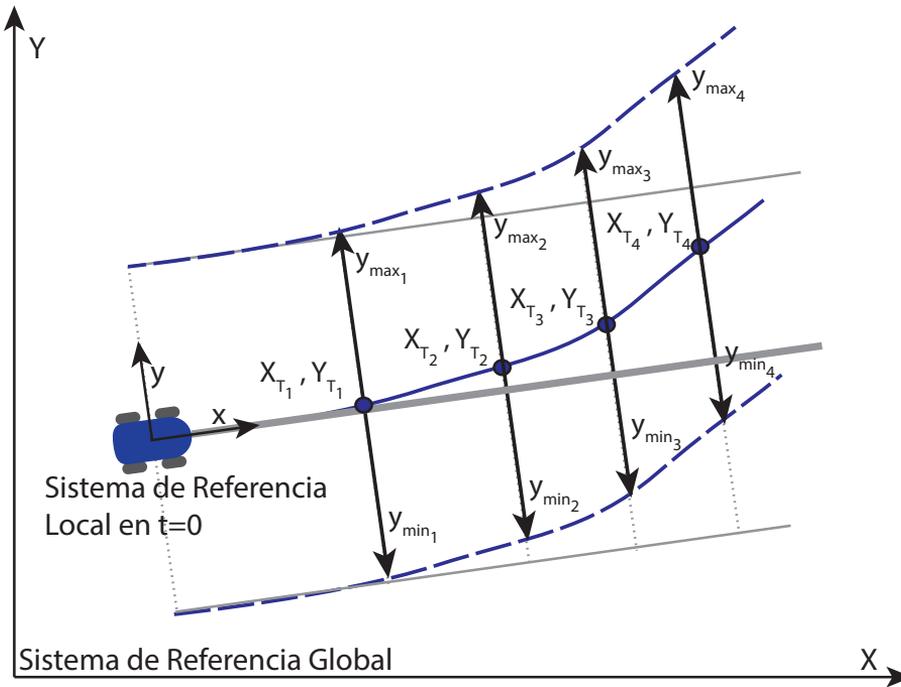


Figura 4.13: Restricciones de salida: error lateral

donde $\mathbf{y}_{max_i} = [\mathbf{y}_{max_i}(y) + y_{T_i} \mathbf{y}_{max_i}(\psi)]^T$.

$$\mathbf{y}_{max} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{max_1} \\ \mathbf{y}_{max_2} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{max_{H_p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{max_1}(y) + y_{T1} \\ \mathbf{y}_{max_1}(\psi) \\ \mathbf{y}_{max_2}(y) + y_{T2} \\ \mathbf{y}_{max_2}(\psi) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{max_{H_p}}(y) + y_{T H_p} \\ \mathbf{y}_{max_{H_p}}(\psi) \end{bmatrix}_{H_p \times n_y \times 1} \quad (4.42)$$

$$\mathbf{y}_{min} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{min_1} \\ \mathbf{y}_{min_2} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{min_{H_p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{min_1}(y) + y_{T1} \\ \mathbf{y}_{min_1}(\psi) \\ \mathbf{y}_{min_2}(y) + y_{T2} \\ \mathbf{y}_{min_2}(\psi) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{min_{H_p}}(y) + y_{T H_p} \\ \mathbf{y}_{min_{H_p}}(\psi) \end{bmatrix}_{H_p \times n_y \times 1} \quad (4.43)$$

4.4.5. Cálculo de la ley de control

La ley de control del MPC se deriva de la minimización de la función de coste de la Ecuación (4.33), que incluye el modelo de predicción y considerando las restricciones. Así, es necesario minimizar función de coste $J(H_p, H_c)$ para obtener los valores óptimos de la señal futura de incrementos de la acción de control $\Delta \mathbf{u}^*$ que permite al vehículo minimizar el error de seguimiento de trayectoria. La ley de control, por tanto,

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}^*(t) &= \min J(\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{r}, \Delta \mathbf{u}) \\ \text{s.t.} & \\ & u_{min} \leq u(t) \leq u_{max} \\ & \Delta u_{min} \leq \Delta u(t) \leq \Delta u_{max} \\ & y_{min} \leq \mathbf{y}(t) \leq y_{max} \end{aligned} \quad (4.44)$$

donde se consideran las restricciones en el ángulo de giro de las ruedas $\delta_w(t) = u(t)$, en su variación $\Delta \delta_w(t) = \Delta u(t)$ y en el error lateral de la salida $\mathbf{y}(t)$ para mantener un comportamiento más realista del vehículo.

Una vez la secuencia de la variación de la acción de control óptima $\Delta \mathbf{u}^*$ es calculada, sólo el primer valor, el correspondiente al instante actual se aplica, de modo que,

$$u(t) = \Delta u(t) + u(t-1) \quad (4.45)$$

4.4.6. Resumen

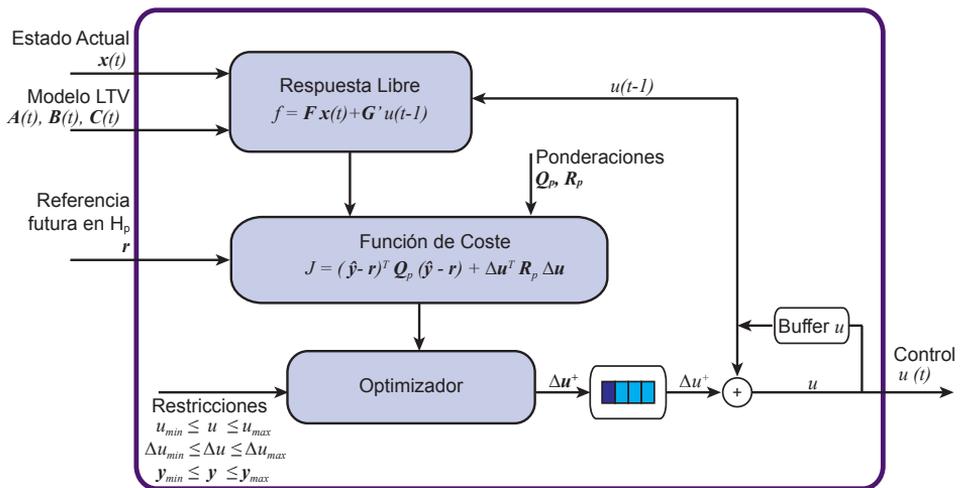


Figura 4.14: Resumen de la estrategia MPC propuesta

El controlador MPC propuesto se resume en la Figura 4.14 para el instante t . El estado actual del vehículo $\mathbf{x}(t)$, las matrices del Espacio de Estados que describen el modelo LTV del vehículo $\mathbf{A}_d(t)$, $\mathbf{B}_d(t)$, $\mathbf{C}_d(t)$ y el valor previo de la acción de control $u(t-1)$ se emplean para calcular la respuesta libre del vehículo \mathbf{f} en base a datos medibles. Mediante esta respuesta libre \mathbf{f} , las matrices de ponderación \mathbf{Q}_p y \mathbf{R}_p y la señal de referencia \mathbf{r} se compone la función de coste J , que se minimiza con un optimizador cuadrático considerando las restricciones impuestas para conseguir una secuencia de la señal de control incremental $\Delta\mathbf{u}^*$. De esta secuencia $\Delta\mathbf{u}^*$, sólo se considera el primer valor $\Delta u(t)$ que se emplea para calcular la señal de control $u(t)$.

4.5. Validación

Una vez definida la formulación del control MPC para una aplicación de seguimiento de trayectoria lateral para diferentes velocidades y tipos de carretera, se procede a su validación. En primer lugar se definirá el entorno de simulación y las pruebas a realizar y posteriormente se validarán los resultados obtenidos.

4.5.1. Entorno de simulación y definición de experimentos

Para el diseño e implementación del controlador detallado en el presente capítulo se ha definido un entorno de cosimulación entre el entorno Matlab/Simulink [64] y el software de simulación de la dinámica del vehículo CarSim [95], ya introducido en la Sección 2.4.1. La herramienta software Matlab/Simulink permite de forma sencilla diseñar diferentes controladores y analizar los resultados. Además, esta herramienta posibilita la cosimulación del controlador a diseñar con un modelo de vehículo virtual procedente de otros software comerciales, como es el caso de CarSim, que se empleará en este trabajo.

Considerando el entorno de simulación descrito, el esquema seguido se ilustra en la Figura 4.15. El generador de referencia provee al controlador MPC de las futuras posiciones y orientaciones que debe alcanzar \mathbf{r} para cada iteración. A su vez, también se recalculan las matrices del Espacio de Estados cada iteración $\mathbf{A}_d(t)$, $\mathbf{B}_d(t)$ y $\mathbf{C}_d(t)$, teniendo en cuenta la velocidad a la que circula el vehículo al inicio del horizonte de predicción. Dada la referencia, el modelo actual del vehículo y considerando el estado actual, el MPC calcula la señal de control, el ángulo de giro de las ruedas $u(t) = \delta_w(t)$, para que se aplique al vehículo simulado mediante CarSim. Este software de simulación aportará la posición y orientación del CoG del vehículo y su velocidad longitudinal (\mathbf{x} y $\dot{\mathbf{x}}$) para cada iteración.

Así, CarSim simulará la dinámica del vehículo real del vehículo mientras que en Matlab/Simulink se implementará la formulación propuesta.

Modelo del vehículo

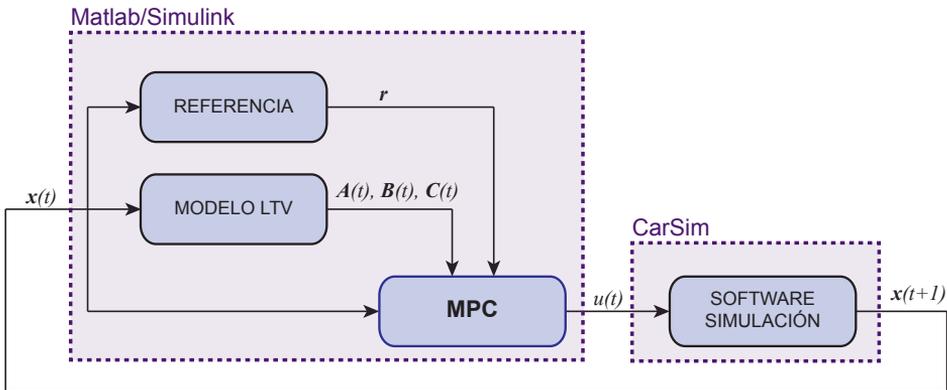


Figura 4.15: Diagrama de la propuesta de MPC

El modelo de vehículo empleado para la validación de la formulación MPC propuesta en el presente capítulo se ha introducido previamente en la Sección 2.4.1. Los parámetros asociados a dicho modelo se resumen en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1: Parámetros principales del modelo del vehículo

	Parámetro	Valor
m	masa del vehículo	1412 kg
l_F	distancia del CoG al eje delantero	1.016 m
l_R	distancia del CoG al eje trasero	1.564 m
I_z	inercia del ángulo yaw	1536.7 kg m ²
$c_{\alpha F}$	rigidez en curva del eje delantero	956.08 N/grados
$c_{\alpha R}$	rigidez en curva del eje trasero	956.08 N/grados

Configuración del conductor virtual

Una vez definido el vehículo que se va a emplear en las simulaciones, CarSim requiere la configuración del conductor virtual. Por un lado se definen lo que CarSim denomina los Driver Controls, y que se corresponden a las señales que controlaría un conductor (acelerador, freno y ángulo de giro del volante). En el presente trabajo, el controlador que se plantea es el encargado de calcular la señal óptima de ángulo de giro de las ruedas (control lateral), por lo que se asigna que no actúe sobre esta señal.

Lo que sí interesa es que los Driver Controls gestionen la velocidad longitudinal del vehículo. Así se establece una velocidad o un perfil de velocidad y se le permite a CarSim que ajuste este valor en función de la trayectoria de forma que no supere una aceleración longitudinal y lateral máxima de $0,3 g$ ($\approx 2,94 m/s^2$), que es el

límite de una conducción confortable. Así, estableciendo estos Driver Controls, el controlador MPC propuesto gestionará el control lateral del vehículo y CarSim el control longitudinal.

4.5.1.1. Restricciones

Por otro lado, y tal como ya se ha mencionado en la sección anterior, el controlador MPC diseñado considera restricciones tanto en las señales de entrada como en las de salida. Los valores de las restricciones de las señales de salida también están asociadas a la estructura del vehículo, por lo que sus valores máximos y mínimos vienen definidos en la base de datos del vehículo escogido. Los valores máximos y mínimos que afectan al ángulo de giro de las ruedas son límites físicos del diseño del vehículo y es un valor recogido en CarSim.

En cuanto a las restricciones de salida los valores límites están asociados a la trayectoria que se desea que siga el vehículo, y cubre el desplazamiento lateral, que corresponde al error lateral, y al ángulo *yaw*. Así, considerando que el vehículo va a circular por una carretera de ancho estándar de 3,5 m y que el vehículo tiene un ancho aproximado de 2 m, se establece una distancia máxima de 0,6 m de desvío lateral respecto al centro de su carril, que garantiza que el vehículo no se sale del mismo.

De igual modo no se imponen restricciones en el ángulo de giro *yaw* ψ para no restringir el giro del vehículo.

Las restricciones descritas se recogen en la Tabla 4.2

Tabla 4.2: Parámetros principales de las restricciones

Parámetro	Valor	
$\bar{\delta}_{W_{max}}$	giro máximo de las ruedas	± 41 grados
$\Delta\delta_{W_{max}}$	variación máximo del giro de las ruedas	± 5 grados/s
y_{max}	error lateral máximo	$\pm 0,6$ m
ψ_{max}	límite yaw	± 180 grados

4.5.1.2. Sintonización MPC

En esta sección se procede a la definición de los diferentes parámetros que se emplean para la sintonización del MPC detallado en la Sección 4.4.

En primer lugar se pretende establecer los Horizontes de predicción H_p y de control H_c . En la Sección 2.4, mediante las simulaciones del Escenario 2 se concluyó que para el uso de un modelo bicicleta como modelo de predicción los valores recomendados de Horizonte de predicción H_p deben estar comprendidos entre $10 \leq H_p \leq 30$ con un periodo de muestreo de $T_s = 0,075$ s. El límite inferior se estableció por términos de alcance de la predicción y el límite superior por precisión del modelo. Para el control MPC propuesto se establece un Horizonte de predicción de $H_p = 20$, lo que supone un tiempo de previsualización de $t_p = 1,5$ s el valor intermedio recomendado para alcanzar un compromiso entre precisión del modelo y alcance de la predicción. Así,

para una velocidad de travesía de 30 km/h cubre 12,5 m de predicción en el futuro y para una velocidad de 120 km/h 50 m . Por consideraciones de coste computacional, experimentalmente se ha establecido un Horizonte de control $H_c = 15$, inferior al Horizonte de predicción H_p pero con el que se garantiza el correcto control lateral del vehículo.

Por su parte, los valores de las matrices de ponderación se han definido experimentalmente tras una serie de simulaciones. Se han escogido unos valores que incentiven la suavidad de la señal de la acción de control, esto es, el ángulo de giro de las ruedas $\delta_w(t)$, para generar una conducción más confortable y sin cambios bruscos en la dirección. Al procurar una señal más suave en el control, los errores de seguimiento de trayectoria son mayores que con una señal más agresiva, pero la diferencia es aceptable, dado que el objetivo es que el vehículo permanezca en su carril.

Los parámetros para la sintonización del MPC se recogen en la Tabla 4.3,

Tabla 4.3: Parámetros de sintonización del MPC

	Parámetro	Valor
t_p	Tiempo de previsualización	1,5 s
H_p	Horizonte de predicción	20
H_c	Horizonte de control	15
Q	Ponderación estado	$diag(1, 1, 1, 1)$
R	Ponderación control	100

4.5.1.3. Escenarios

A continuación se plantean los diferentes escenarios propuestos para la validación de la metodología de control MPC para el seguimiento lateral de una trayectoria. Los diferentes escenarios proponen una trayectoria de referencia que el vehículo seguirá y los perfiles de velocidad del vehículo, habiendo impuesto un rango de velocidades comprendido entre los 30 km/h y los 120 km/h .

Escenario 1: Curvas abiertas

El primer escenario propuesto son dos curvas abiertas que el vehículo puede tomar a altas velocidades sin superar la aceleración lateral máxima de 0,3 g . Con este escenario se pretende validar el funcionamiento del controlador para todo el rango de velocidades admisibles, sin requerir de un gran esfuerzo de control ya que se trata de una trayectoria poco exigente (Figura 4.16).

En este primer escenario se van a llevar a cabo cinco ensayos, cada uno con una velocidad máxima diferente y que cubren todo el rango admisible: 30 km/h , 50 km/h , 80 km/h , 100 km/h y 120 km/h . Nótese que velocidad longitudinal puede variar a lo largo de la simulación, ya que el conductor virtual de CarSim adapta la velocidad

longitudinal en función de la trayectoria para cumplir los términos de confort, aunque siempre será inferior al máximo definido.

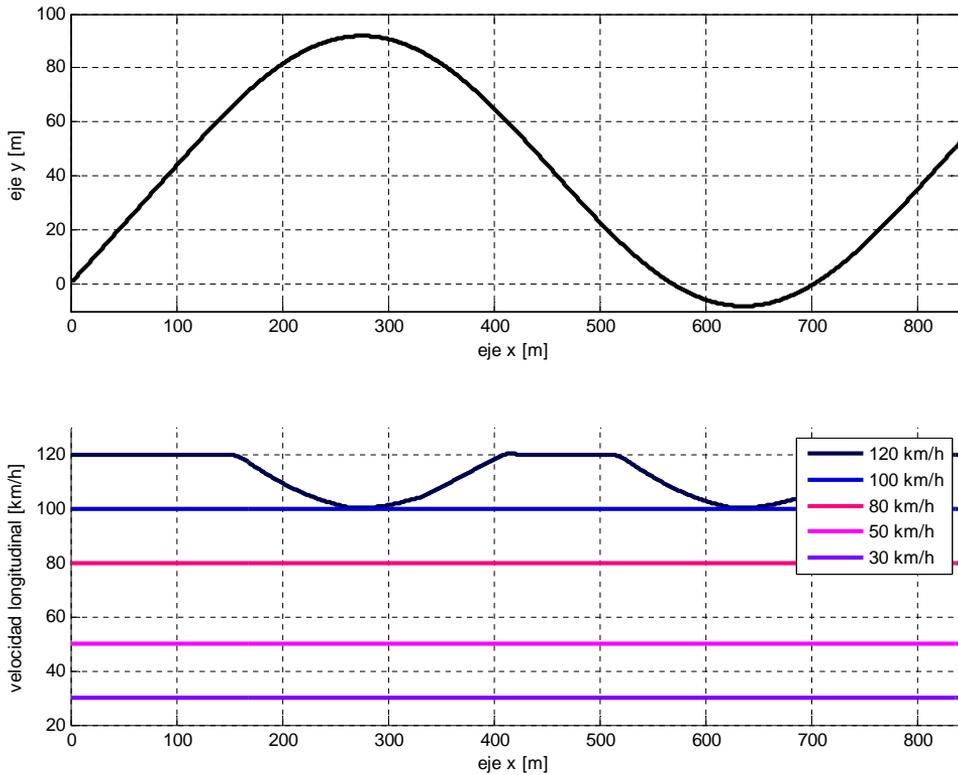


Figura 4.16: **Escenario 1:** Perfiles de velocidad longitudinal \dot{x} y trayectoria para dos curvas abiertas

Escenario 2: curvas cerradas

El segundo escenario propuesto es similar al anterior, pero en este caso las curvas son más cerradas. Así, se pretende validar nuevamente el funcionamiento del controlador para todo el rango de velocidades admisibles pero con una trayectoria con unos giros más exigentes, requiriendo un mayor esfuerzo de control (Figura 4.17).

Nuevamente, en este escenario se van a llevar a cabo cinco simulaciones, cada una con una velocidad objetivo diferente y que cubren todo el rango admisible: 30 *km/h*, 50 *km/h*, 80 *km/h*, 100 *km/h* y 120 *km/h*. Al tratarse de unos giros más bruscos, la velocidad longitudinal objetivo se verá muy afectada por el controlador virtual de CarSim, para no generar aceleraciones superiores a los 0,3 *g* y que puedan molestar a los pasajeros.

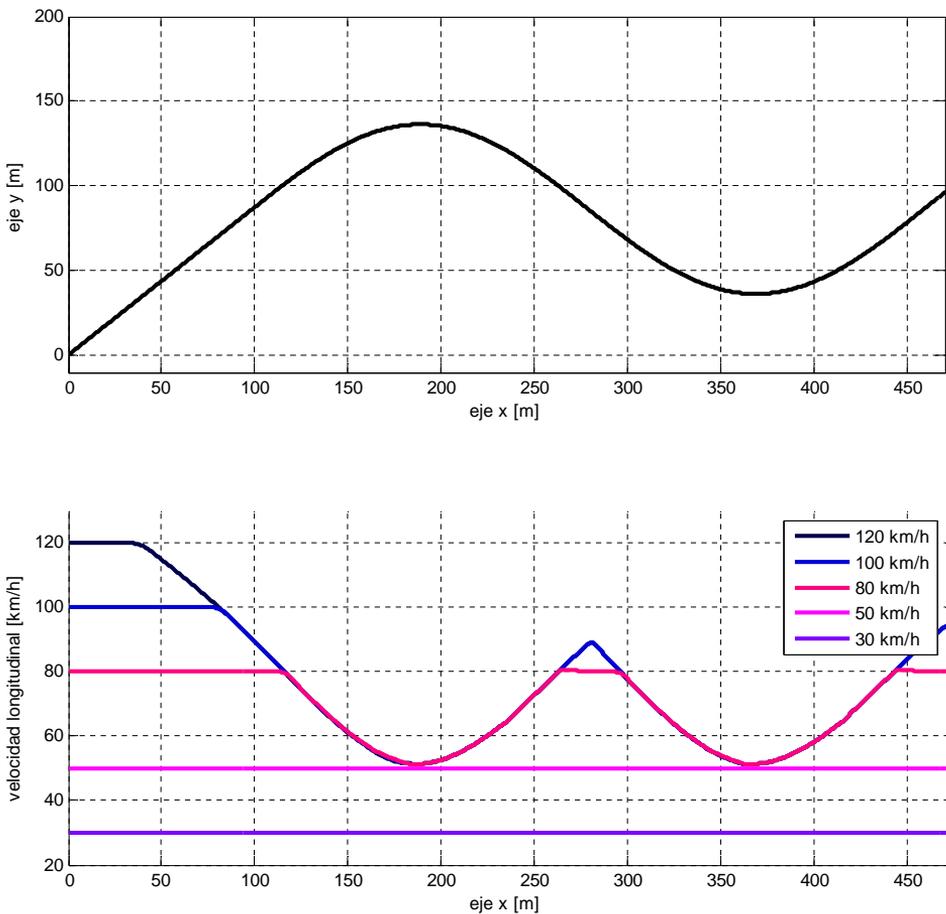


Figura 4.17: **Escenario 2:** Perfiles de velocidad longitudinal \dot{x} y trayectoria para dos curvas cerradas

Escenario 3: circuito

El tercer y último escenario que se plantea consiste en un circuito que combina diferentes tipos de curvas, desde muy cerradas o zig-zags hasta trazados rectos. Una vez validado el controlador para diferentes velocidades y tipos de curva, se pretende validar su funcionamiento en una trayectoria más real con un perfil de velocidad muy variable para todo el amplio rango de 30 km/h a 120 km/h y una combinación de trazados, hasta curvas cerradas que son muy exigentes para el controlador. El perfil de la velocidad longitudinal muestra cómo la velocidad del vehículo decrece al entrar en una curva y crece al salir de la misma (Figura 4.18). En este escenario se resaltan 3 zonas del circuito (a, b y c), que posteriormente se analizarán. La velocidad máxima de 113 km/h se alcanza en la parte recta del circuito (b) y la mínima de 32 km/h en

la curva cerrada (a).

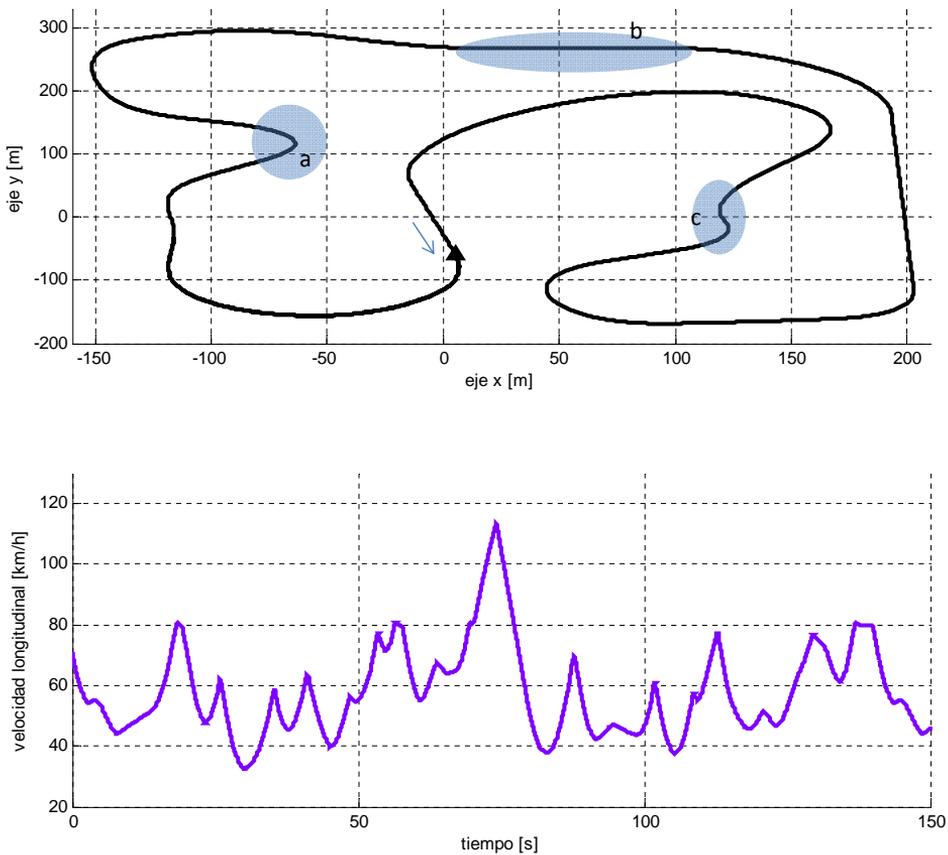


Figura 4.18: **Escenario 3**: Perfil de velocidad longitudinal \dot{x} y trayectoria para un circuito

4.5.2. Resultados

Con el fin de validar el controlador de seguimiento de trayectoria para un vehículo utilitario propuesto, se han llevado a cabo una serie de simulaciones en los tres escenarios introducidos previamente.

Escenario 1: curvas abiertas

Los resultados para este primer escenario consistente en dos curvas abiertas se muestran en la Figura 4.19. En esta figura, en primer lugar se muestra el error lateral $y(t)$ producido en el seguimiento de la trayectoria para los cinco ensayos realizados;

en segundo lugar, la acción de control correspondiente con el ángulo de giro de las ruedas $u(t) = \delta_w(t)$; y por último, la variación de la acción de control calculada en cada iteración $\Delta u(t) = \Delta \delta_w(t)$.

Como se observa, la trayectoria se sigue adecuadamente para el rango de velocidades de 30 km/h a 100 km/h con un error lateral máximo de $0,0495 \text{ m}$ que se produce en las curvas. Para generar esta trayectoria, el controlador MPC propuesto calcula variaciones de la acción de control $\Delta u(t) = \Delta \delta_w(t)$ de valores muy pequeños, generando acciones de control $u(t) = \delta_w(t)$ que permiten una condición suave y confortable con valores máximos de $\delta_w(t) = 0,024 \text{ rad}$. En el ensayo a 120 km/h , se puede observar como la variación de la acción de control varía de forma más irregular y brusca debido a que en este ensayo se produce variación en la velocidad longitudinal y el trazado es más complejo a elevadas velocidades. Aun siendo el caso más crítico en este escenario, se puede apreciar como los valores de la acción de control varían de forma suave sin generar giros bruscos y el error lateral se mantiene acotado con un error máximo de $0,056 \text{ m}$.

Escenario 2: curvas cerradas

Los resultados del Escenario 2 para dos curvas cerradas se muestran en la Figura 4.20, ilustrando las variables del mismo modo que el anterior: el error lateral, la acción de control, que consiste en el ángulo de giro de las ruedas $u(t) = \delta_w(t)$, y la variación de la acción de control $\Delta u(t) = \Delta \delta_w(t)$.

En este escenario, al tratarse de una trayectoria muy exigente, la velocidad longitudinal se reduce para los diferentes ensayos hasta los 50 km/h , con el fin de no superar las condiciones de conducción impuestas. Así, aun al tratarse de una trayectoria más compleja los errores laterales máximos son de $0,0495 \text{ m}$, más pequeños que en el caso anterior. Sin embargo, para alcanzar estos valores, la variación de la acción de control alcanza valores más grandes que en el caso anterior, aunque estos valores siguen siendo de un $0,15 \%$ del valor de la restricción. Como consecuencia, la acción de control, el giro de las ruedas, también alcanza valores más grandes cercanos a $0,052 \text{ rad}$ generando un mayor giro.

Escenario 3: Circuito

La Figura 4.21 muestra los resultados para una vuelta al circuito, donde la flecha indica el punto de inicio de la vuelta y el sentido. A diferencia de los escenarios anteriores, al tratarse ésta de una trayectoria compuesta por trazados muy diferentes, el perfil de velocidad es muy variable para cumplir la condición de aceleraciones máximas de $0,3g$. Además, la variación de la acción de control y, por lo tanto, la magnitud de la acción de control, varían de forma más notable para seguir la trayectoria satisfactoriamente y con errores laterales reducidos. En los resultados se observa como ninguna de las variables analizada supera las restricciones impuestas.

En este escenario, para su análisis, se han resaltado tres zonas: la zona *a* donde se produce una curva muy cerrada, el punto más crítico del circuito; la zona *b* la zona de recta y la zona *c*, donde se produce un zig-zag en la trayectoria.

La primera zona destacada, la zona *a*, es donde se produce el giro más cerrado del circuito. Para poder tomar la curva de forma adecuada, el control MPC basado en modelo LTV es capaz de predecir la necesidad de una acción de control elevada, que alcanza un valor máximo de un 18,42 % del ángulo de giro de las ruedas máximo aceptable. Para alcanzar dicho valor, la variación de la acción de control mantiene valores elevados durante varios segundos. Gracias a esta predicción, el error lateral obtenido durante esta curva está limitado a 0,04 *m*, un valor despreciable.

En la segunda zona, la *b*, es la zona recta donde el MPC es capaz de corregir el error lateral y anularlo y mantener una acción de control nula durante toda la recta. El controlador alcanza la situación de error lateral nulo gracias a la predicción de esta trayectoria, generando una acción correctiva al inicio de la zona recta.

La última zona más destacable, la *c*, es la correspondiente al zig-zag donde bruscamente el vehículo debe realizar dos curvas muy cerradas. Debido a que las dos curvas son muy seguidas, aunque el MPC pueda predecirlas, no puede anteponerse a la situación. Por esta razón, para tomar la segunda de las curvas tiene que generar una variación de la acción de control elevada, aunque este valor sólo es del 2,6 % del valor máximo fijado, que genere un cambio brusco en la acción de control y poder seguir la trayectoria. Justo antes del inicio de esta zona es donde se produce el error lateral máximo del circuito, que tiene un valor reducido de 0,07 *m*, debido a que el controlador compromete el error lateral en dicho instante para tomar las curvas de forma satisfactoria.

4.6. Conclusiones

En este capítulo se ha introducido el concepto de control predictivo. El objetivo ha sido el de presentar las generalidades de las formulaciones MPC y posteriormente particularizar una formulación para su aplicación en un control de seguimiento de trayectoria lateral de un vehículo. El uso del control MPC para el seguimiento de trayectoria resulta muy intuitivo, dada su similitud de concepto con lo que supone la conducción de un vehículo.

Así, la formulación propuesta considera un modelo en Espacio de Estados LTV, con el que se define un modelo de predicción con el que se podrá calcular la salida para cada instante del horizonte de predicción. También se define una función de coste que minimiza tanto el desvío en la predicción respecto de una referencia como el esfuerzo de control y sobre la que se consideran una serie de restricciones en las señales de entrada y salida. Por último, se define el optimizador que minimizará la función de coste planteada.

La formulación de MPC básica propuesta se ha validado en un entorno de co-simulación entre Matlab/Simulink y el software de simulación de dinámica vehicular CarSim. Los resultados demuestran que el control propuesto se puede aplicar para

un amplio rango de velocidades de 30 *km/h* a 120 *km/h* y para diferentes tipos de trazados. El enfoque propuesto optimiza tanto el desplazamiento lateral como el ángulo yaw obteniendo así un mejor seguimiento de trayectoria. El modelo de predicción LTV es dependiente de la velocidad longitudinal de forma que se recalcula para cada instante en función de la velocidad longitudinal y se mantiene constante durante el Horizonte de predicción. El uso de un modelo de predicción LTV ofrece un mayor rango operacional para la aplicación. Los requerimientos de confort están impuestos por restricciones en el ángulo de giro de las ruedas y en su variación y por la consideración de la orientación en el MPC. Además, las restricciones de salida están consideradas en el error lateral para garantizar un correcto seguimiento de la trayectoria sin salirse de la calzada.

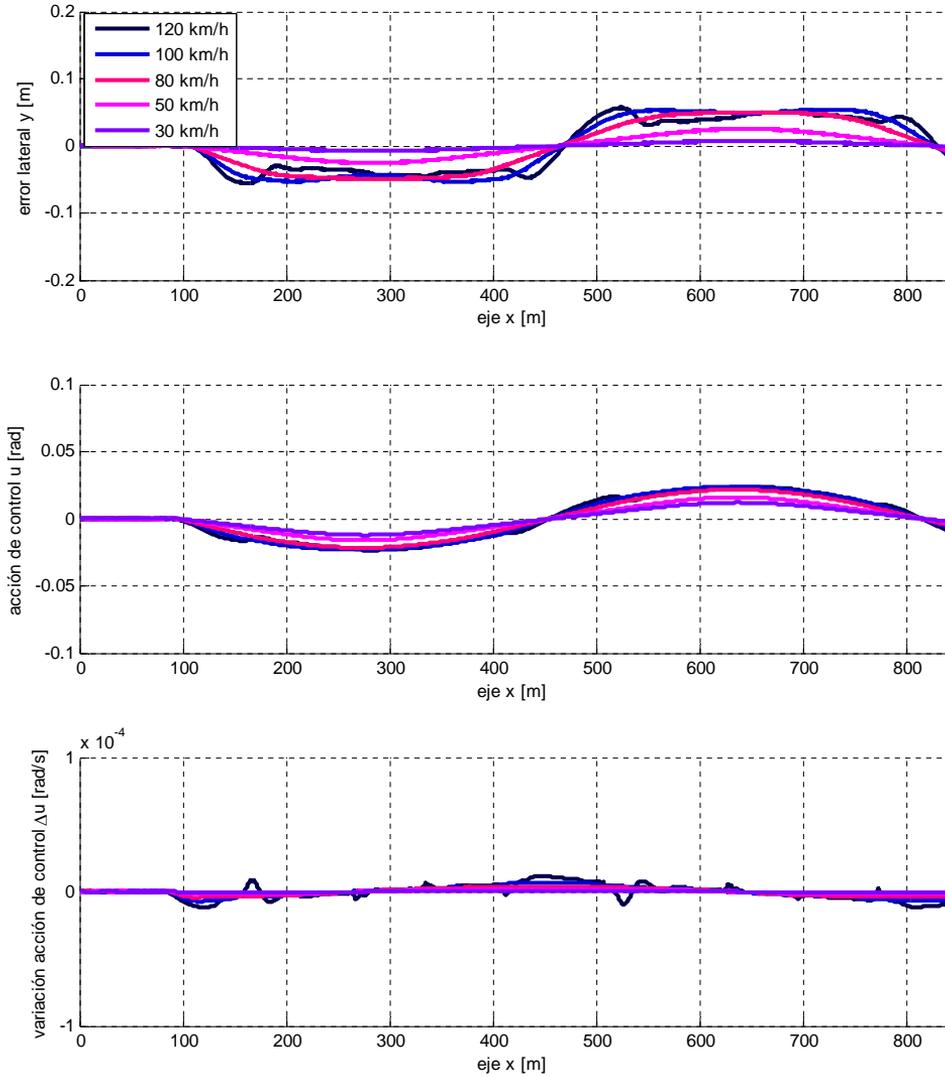


Figura 4.19: **Escenario 1:** Resultados para dos curvas abiertas

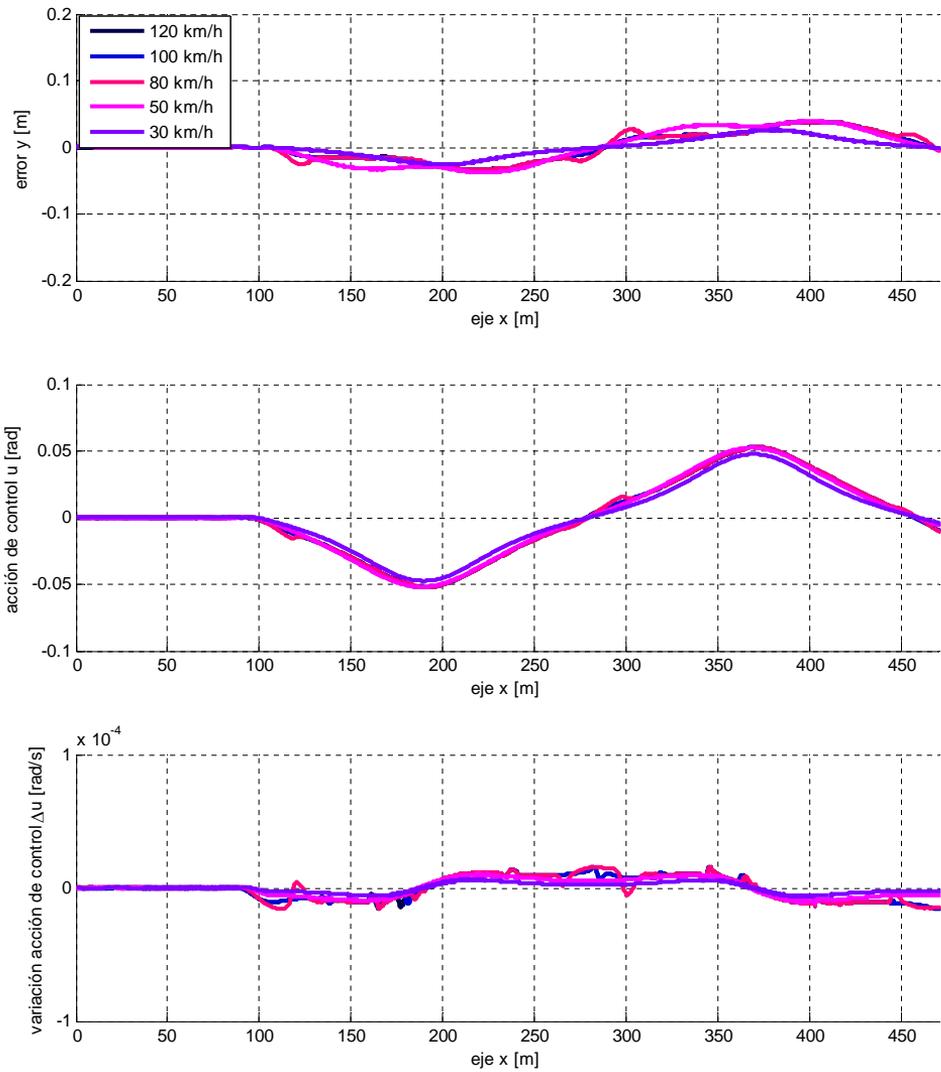


Figura 4.20: **Escenario 2**: Resultados para dos curvas cerradas

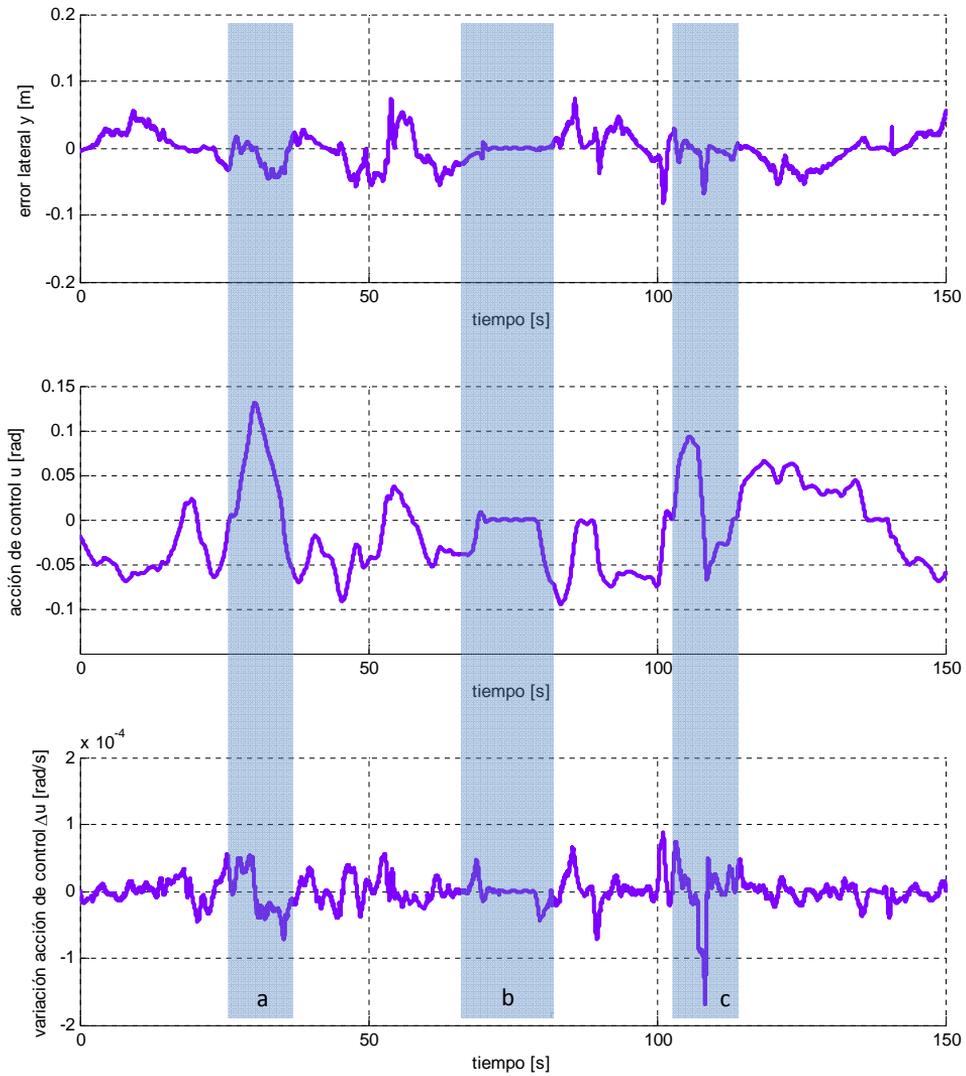


Figura 4.21: **Escenario 3:** Resultados para una vuelta al circuito



5.1. Introducción

Anteriormente se ha comprobado cómo los controladores predictivos son la tendencia más notoria en el diseño de aplicaciones de seguimiento de trayectoria. Pero, a pesar de lo que intuitivamente pueda parecer, la optimalidad de un controlador predictivo no implica que éste sea estable ni que se alcance el punto de operación tal y como se desea. Este problema deriva directamente del propio funcionamiento del Control Predictivo y de la utilización del horizonte finito y deslizante.

Nótese que las bases del Control Predictivo son las estrategias de Control Óptimo, en los que se pretende calcular una ley de control que minimice el coste a lo largo de un horizonte infinito de tiempo. Al ser el horizonte infinito, bajo ciertas condiciones es posible calcular un controlador que estabilice el sistema de forma asintótica. Sin embargo, la solución analítica para un horizonte infinito presenta gran complejidad, siendo en ocasiones imposible de obtener. Por ello, la implementación práctica de

estas estrategias se ha realizado bien utilizando un horizonte finito y fijo, que facilita la resolución del sistema mediante métodos de programación matemática, o bien utilizando un horizonte deslizante, que dota de realimentación al sistema.

Cuando se aplica una estrategia de horizonte finito y fijo, se supone que el controlador es capaz de conducir el sistema desde un estado inicial x_0 a un estado final x_N en N pasos. Aplicando el controlador $u_0 = K_N(x_0)$ se evoluciona a x_1 , donde la respuesta óptima se calcula mediante un controlador de horizonte $N - 1$, que hará evolucionar el sistema a x_2 y así sucesivamente hasta que $x_N \in \Omega$, siendo Ω una determinada región terminal en la que el controlador óptimo no está definido, por lo que habrá que utilizar un controlador local alternativo para llevar el sistema a la referencia deseada $x_r \in \Omega$. Como se puede observar, en cada instante de tiempo, el horizonte va disminuyendo, y el sistema converge a la región terminal Ω (Figura 5.1a).

Cuando se utiliza un horizonte deslizante y fijo, sin embargo, el horizonte no disminuye conforme avanza el tiempo, sino que es siempre constante. Esto hace que la convergencia de la que disponía el controlador de horizonte finito y fijo se pierda, dado que no se asegura que el sistema converja hacia una región terminal Ω y, por lo tanto, no se asegura la estabilidad del sistema bajo las condiciones impuestas (Figura 5.1b).

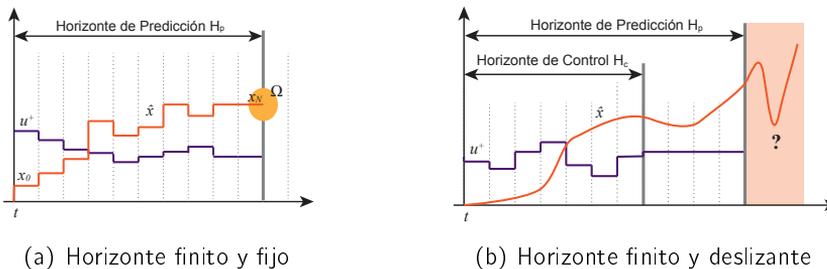


Figura 5.1: Comparativa entre horizontes fijos y deslizantes

El estudio teórico de la estabilidad en las estrategias de control predictivo no se abordó hasta la década de los 90, cuando su uso ya estaba implantado en la industria. Dar un soporte teórico bajo el cual se garantizase la estabilidad en los controladores predictivos supuso un reto en la comunidad investigadora, lo que favoreció el rápido desarrollo de los controladores predictivos.

Por lo tanto, el objetivo de este capítulo es ampliar la formulación de control predictivo que se ha introducido en el capítulo anterior con consideraciones que garanticen la estabilidad del controlador. Sin embargo, al tratarse de un controlador en el que se considera un modelo dependiente del tiempo, será necesario presentar un nuevo enfoque para abordar la variabilidad del modelo y de los elementos que garanticen la estabilidad.

Con el objetivo de facilitar la lectura y comprensión de este tema, el capítulo se divide en cuatro secciones. En una primera sección se abarcará el problema de la

estabilidad, explicando las consideraciones que se van a tomar para garantizar la estabilidad de un controlador MPC y el nuevo enfoque para garantizar la estabilidad al emplearse un modelo LTV. A continuación se presenta la formulación de MPC desarrollada en el capítulo anterior al que se le han incorporado las consideraciones de la primera sección. En tercer lugar se particulariza la formulación MPC con modelo LTV y estabilidad garantizada para el caso de estudio de control lateral de seguimiento de trayectoria y se valida en último lugar.

5.2. La estabilidad en el MPC

En el Capítulo 4 se ha presentado una formulación de MPC para modelos LTV. Sin embargo, en esta propuesta la estabilidad del controlador no está garantizada, por lo que es necesario la incorporación de una serie de consideraciones que doten al controlador de estabilidad. Además, el uso de un modelo LTV requiere mecanismos adicionales para garantizar la estabilidad.

Muchos de los conceptos de estabilidad formulados en la presente sección están ligados a conjuntos invariantes. Por ello en esta sección se hace una breve introducción a los mismos.

5.2.1. Consideraciones previas: Conjuntos Invariantes

Supóngase un sistema en lazo cerrado descrito por la siguiente ecuación de estado autónoma,

$$x(k+1) = A_a x(k) \quad (5.1)$$

Nótese que $A_a = [A - BK]$ abarca un determinado controlador K y la dinámica de la siguiente planta,

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + By(k) \\ u(k) &= Kx(k) \end{aligned}$$

Conceptualmente, un Conjunto Invariante Ω asociado al sistema de la Ecuación (5.1) es aquel conjunto de estados $x(k) \in \Omega$ cuyo estado siguiente $x(k+1) = A_a x(k)$ está contenido dentro del Conjunto Invariante Ω . Esto es, es un Conjunto Invariante o invariante con respecto a la Ecuación (5.1) es si

$$x(k) \in \Omega \Rightarrow x(k+1) = A_a x(k), \forall x(k) \in \Omega$$

La utilización de invariantes es muy útil para asegurar la estabilidad en el ámbito del control predictivo, dado que si se logra hacer evolucionar un sistema a un punto contenido dentro del invariante asociado a una determinada ley de control local $u(k) = Kx(k)$, se garantiza que la evolución del sistema esté acotada en dicho invariante.

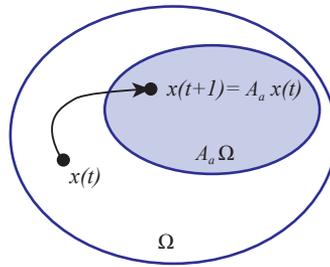


Figura 5.2: Conjunto Invariante

5.2.2. Estabilidad en MPC

La estabilidad es un tema predominante en la literatura de MPC, buscando condiciones suficientes para garantizarla. Así, se han desarrollado una serie de formulaciones con estabilidad garantizada basadas en la teoría de estabilidad de Lyapunov [50]. Todas ellas tienen una serie de factores comunes que son recogidos y resumidos en [66]. Este trabajo constituye una piedra angular del control predictivo y es una referencia obligada para futuros desarrollos en este campo.

En este trabajo se analizan las formulaciones existentes de controladores predictivos con estabilidad garantizada y se establece que el control predictivo con coste terminal y restricción terminal, puede, bajo ciertas condiciones, estabilizar asintóticamente un sistema sujeto a restricciones. Además, se establecen condiciones suficientes sobre la función de coste terminal y la región terminal para garantizar dicha estabilidad. Estas condiciones son las siguientes:

- La inclusión de una región terminal invariante Ω : es decir, el controlador predictivo ha de ser capaz de llevar al sistema a una región del espacio de los estados que es un conjunto positivo invariante del sistema. Esto es, si el control predictivo logra llevar al sistema a esta región, existe un controlador local $u = h(x)$ que estabiliza el sistema en esta región, siendo la evolución del sistema y las actuaciones necesarias para ello admisibles, es decir, dentro de las restricciones impuestas.
- La inclusión de un coste terminal γ en la función de coste J : esto es, se ha de incluir un término para ponderar que el estado terminal, es decir, el estado final del sistema en el Horizonte de predicción H_p , esté lo más cerca posible de la referencia deseada. Este coste terminal se define como una función de Lyapunov que garantiza que el sistema sea estable en bucle cerrado y con restricciones.

$$\gamma = [(\hat{x}_{H_p} - x_s)^T P (\hat{x}_{H_p} - x_s)]$$

Es importante destacar que, aun en el caso de que el controlador garantice la estabilidad en bucle cerrado del sistema, la trayectoria seguida por el mismo no es

óptima, en el sentido de que puede existir otra cuyo coste total a lo largo de la misma sea inferior. Esto deriva del horizonte finito considerado en la formulación del problema. Así, la trayectoria total del sistema diferirá de la trayectoria resultante de la secuencia óptima calculada en un instante.

5.2.3. Estabilidad para MPC basado en LTV

Las consideraciones de estabilidad anteriores son fácilmente implementables en modelos lineales invariantes en el tiempo [66], sin embargo, no son directamente aplicables cuando el modelo de predicción es LTV, como es el del caso de estudio analizado en esta tesis. Esto se debe a que el modelo empleado es dependiente del tiempo, esto es, el modelo se redefine para cada instante de muestreo con la velocidad longitudinal actual \dot{x} . Dado que el Conjunto Invariante Ω asociado a la región terminal depende de dicho modelo, éste también será variable en el tiempo, lo que puede suponer problemas de estabilidad dado que puede ser complejo el encontrar un único Conjunto Invariante Ω que agrupe todos los casos. Por ello, en esta tesis se ha propuesto un nuevo método que permite extender fácilmente las condiciones anteriores a los casos LTV.

El método propuesto se basa en considerar un conjunto de Conjuntos Invariantes Ω solapados en el rango de velocidades longitudinales efectivas, dividiendo dicho rango en varios intervalos. Los límites de estos intervalos se calcularán dependiendo de la capacidad de aceleración y frenado del vehículo, de esta forma, en cada intervalo se cubrirían todas las posibles velocidades que pudiera alcanzar el vehículo en el Horizonte de predicción H_p .

Una vez dividido el rango de velocidades longitudinal efectivas, se puede calcular offline un único Conjunto Invariante Ω_i para cada intervalo de velocidad. Estos conjuntos invariantes se calculan como la intersección entre el Conjunto Invariante para el sistema de los límites superior e inferior. Así, para cada instante de muestreo, se comprobaría la velocidad longitudinal del vehículo, y la aceleración si corresponde, y se aplica el intervalo correspondiente.

A continuación se ilustra con un ejemplo el cálculo del Conjunto Invariante Ω_i en la Figura 5.3. Para un rango de velocidades comprendido entre v_{min} y v_{max} se divide éste en dos intervalos; el intervalo 1 abarca el rango de v_{min} a v_b y el intervalo 2 abarca el rango de velocidades comprendido entre v_a a v_{max} , de forma que el rango de velocidades de v_a a v_b conforma la zona de solape. De esta forma, cada intervalo tendrá asociado un Conjunto Invariante, siendo Ω_1 el del intervalo 1 y Ω_2 el correspondiente al intervalo 2.

Por consiguiente, dada una velocidad longitudinal se selecciona el intervalo al que corresponde. Así, se selecciona el primer intervalo si dicha velocidad está comprendido entre las velocidades v_{max} y v_a para aceleraciones positivas, ya que se estima que durante el Horizonte de predicción H_p la velocidad crecería y entonces la velocidad que alcanzaría no estaría comprendida dentro del intervalo; y entre las velocidades v_{max} y v_b para aceleraciones negativas.

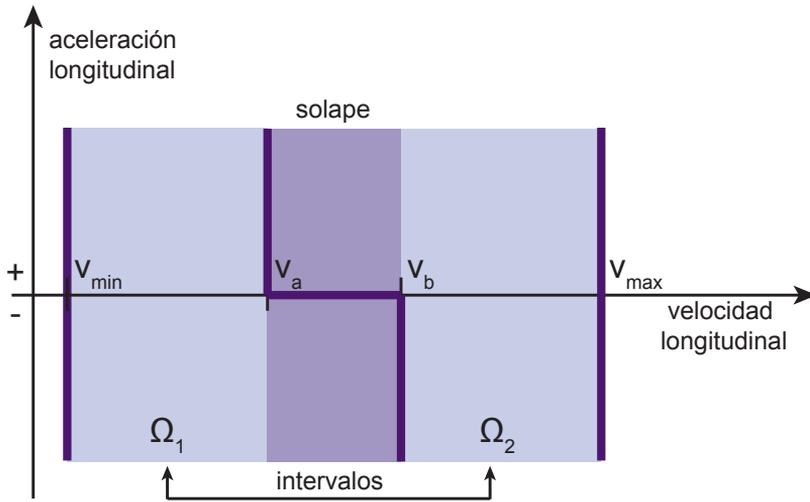


Figura 5.3: Intervalos definidos para todo el rango de velocidades

Una vez definido el rango de velocidades y los intervalos, se definen los Conjuntos Invariantes. El Conjunto Invariante Ω_1 asociado al intervalo 1 se calcularía como la intersección del Conjunto Invariante asociado al modelo calculado con velocidad longitudinal $\Omega_{v_{max}}$ y el Conjunto Invariante con velocidad Ω_{v_b} . Además, cualquier Conjunto Invariante asociado a cualquier velocidad comprendida dentro del intervalo contendrá el Conjunto Invariante resultante Ω_1 (Figura 5.4).

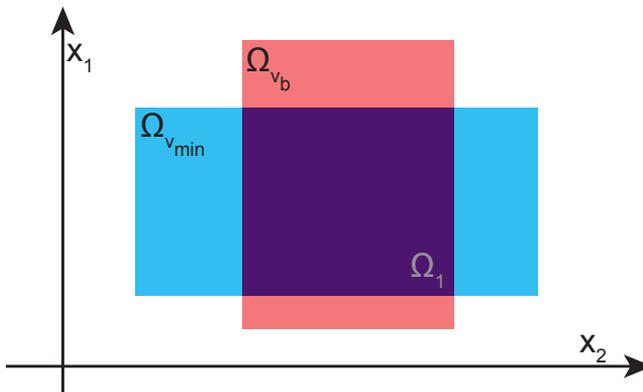


Figura 5.4: Conjuntos Invariantes de los intervalos

5.3. Formulación de MPC estable para modelos LTV

Como se ha mostrado anteriormente, las formulaciones de control predictivo con garantía de estabilidad han ido evolucionando hasta llegar a la necesidad de la región terminal y del coste terminal. La primera consideración garantiza que el sistema evoluciona hacia una región terminal donde su estabilidad está garantizada. La segunda consideración, la inclusión de un coste terminal en la función de coste, para procurar que el estado final sea lo más próximo posible al estado estable de referencia. Adicionalmente, dado que el controlador propuesto está basado en un modelo LTV, se tendrán que incorporar las consideraciones asociadas a los invariantes, seleccionando aquel que corresponda a la velocidad asociada. A continuación se detallará la formulación que incorpora las condiciones de estabilidad, definiendo la ley de control propuesta.

5.3.1. Ley de control

La ley de control asociada a la formulación MPC con estabilidad garantizada se deriva directamente de la metodología introducida en la Sección 4.3, a la que se le incluyen las consideraciones de estabilidad detalladas previamente en la Sección 5.2.2. De esta forma, es necesario minimizar la función de coste $J(H_p, H_c)$ para obtener los valores óptimos de la señal futura de control \mathbf{u}^* que permita al vehículo seguir la trayectoria de referencia considerando las restricciones físicas y las consideraciones de estabilidad. Esta función de coste incluirá los términos de seguimiento de trayectoria $\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_s$, el esfuerzo de control \mathbf{u} y el coste terminal $\hat{\mathbf{x}}(H_p) - \mathbf{x}_s(H_p)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^*(t) &= \min_{s.a} J(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_s, \mathbf{u}, \hat{\mathbf{x}}(H_p) - \mathbf{x}_s(H_p)) \\ &\mathbf{u}(t) \in \mathcal{U} \\ &\mathbf{x}(t) \in \mathcal{X} \\ &\mathbf{x}(t + H_p) \in \Omega_{s_i} \end{aligned} \quad (5.2)$$

donde $\hat{\mathbf{x}}$ es el vector de estados predicho y \mathbf{x}_s la trayectoria de referencia para todos los estados, \mathbf{u} es el vector de acciones de control a minimizar, $\hat{\mathbf{x}}(H_p) - \mathbf{x}_s(H_p)$ es el error entre el estado final predicho y el estado final de referencia en el instante $t = t + H_p$, y que se corresponde con la consideración de estabilidad del coste terminal.

Además, en la minimización de la función de coste $J(H_p, H_c)$ se consideran tres restricciones, siendo $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{U}$ la restricción de la acción de control, $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{X}$ es la restricción del vector de estados y $\mathbf{x}(t + H_p) \in \Omega_{s_i}$ corresponde a la restricción de región terminal, que dirige el sistema a una región terminal en un Horizonte de predicción H_p . Recuérdese que esta región terminal Ω_{s_i} estará asociada al modelo LTV, ya que depende del modelo del sistema y éste depende de la velocidad longitudinal del vehículo en el instante inicial de predicción.

Nótese que a diferencia del MPC propuesto en el Capítulo 4 el error se calcula respecto al vector de estados y no al vector de salida, de forma que la formulación MPC

se simplifica quedando más compacta. Por consiguiente, esta formulación requiere que todos los estados sean accesibles.

La ley de control para el controlador MPC con estabilidad garantizada en esta sección se define de igual forma que el introducido en la Sección 4.3 a excepción de la función de coste, a la que se la incorporado un término de coste terminal y la nueva restricción de la región terminal. Estos dos términos se detallan a continuación.

5.3.2. Inclusión del coste terminal y la región terminal en la función de coste

El problema de la estabilidad viene dado porque el MPC presenta un horizonte finito y deslizante. Para poder garantizar la estabilidad es necesario incorporar elementos que garanticen la evaluación del sistema con un horizonte infinito, manteniendo el número de variables. La solución es implementar implícitamente en la formulación del MPC un controlador de modo dual, de forma que el MPC gestiona los primeros instantes hasta el Horizonte de predicción H_p y un controlador local por realimentación gestiona los instantes posteriores hasta equiparar un horizonte infinito. Así, la inclusión de la predicción dual es equivalente a resolver un problema de optimización con horizonte infinito.

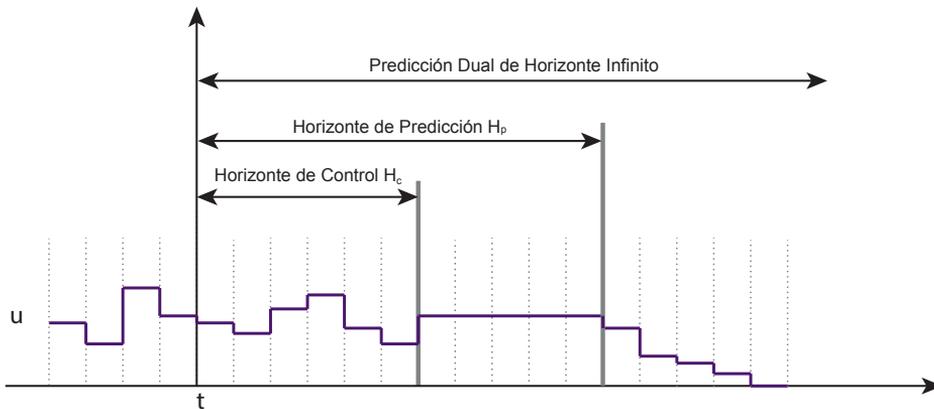


Figura 5.5: Predicción dual de horizonte infinito

El controlador local empleado es un Linear Quadratic Regulator (LQR), un regulador óptimo con horizonte infinito que toma la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y}(t+1) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t+1) \end{aligned} \quad \text{con } u^* = \mathbf{K}\mathbf{x} \quad (5.3)$$

y que minimiza la siguiente función cuadrática,

$$J = \sum_{k=1}^{\infty} [\mathbf{x}(k)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) + u^T \mathbf{R} u] \quad (5.4)$$

La ganancia del controlador se sintoniza siguiendo la siguiente ecuación de Ricatti,

$$\mathbf{R} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} = 0 \quad (5.5)$$

con lo que $\mathbf{K} = -\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}$.

Esta ganancia \mathbf{K} del controlador local está asociada al Conjunto Invariante de la restricción terminal Ω , mientras que la la matriz de ponderación \mathbf{P} se asocia al coste terminal. Ambos elementos se analizarán a continuación.

Región terminal

El Conjunto Invariante Ω asegura que una vez el estado está en él, el controlador local LQR garantiza su convergencia hacia el origen, esto es,

$$\mathbf{x}(k) \in \Omega \Rightarrow \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_a \mathbf{x}(k) \in \Omega, \forall \mathbf{x}(k) \in \Omega \quad (5.6)$$

donde $\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}_a \mathbf{x}(t)$ es la ecuación del estado autónomo asociado al sistema controlado por el controlador LQR, donde $\mathbf{A}_a = [\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{K}]$.

Como el sistema está sometido a restricciones, se puede definir un politopo convexo que acote el estado $\mathbf{x}(t)$ en la región restringida.

$$\mathcal{X} = \mathbf{x} \in \mathcal{R}^{n_x} : \mathbf{A}_x \mathbf{x} \leq \mathbf{b}_x$$

Interesa, por lo tanto, que el invariante sea el máximo posible, dado que todos los estados pertenecientes a esta región evolucionan dentro de la misma, y por lo tanto, su evolución está acotada desde el punto de vista de la estabilidad. Así, la tarea del controlador será la de llevar el sistema a esta región, donde se asegura la estabilidad, pudiendo así demostrar la estabilidad del controlador.

El máximo Conjunto Invariante admisible se denota como,

$$\mathcal{O}_{\infty} = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}_a^i \mathbf{x} \in \mathcal{X}, i \geq 0\}$$

que es el conjunto de todos los estados y sus posibles evoluciones que están contenidos en el invariante máximo. En general, este invariante no se puede calcular de forma analítica mediante un conjunto finito de restricciones. Por ello, a efectos prácticos se considera el máximo invariante como,

$$\mathcal{O}_{\infty \lambda} = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}_a^i \mathbf{x} \in \mathcal{X}_{\lambda}, i \geq 0\}$$

que es un subconjunto finitamente determinado de \mathcal{O}_{∞} , por lo que puede ser representado como un politopo convexo, facilitando su implementación en la ley de control. Este conjunto depende de un valor $\lambda = (0, 1)$, de modo que si λ es muy cercano a

1 se aproximará al máximo invariante real. De esta forma, una vez seleccionado un valor para λ , es posible calcular el invariante asociado al sistema $\Omega = \mathcal{O}_{\infty\lambda}$ [53].

Por lo tanto, si el sistema es lineal y el punto de equilibrio \mathbf{x}_s es conocido, la restricción terminal se define,

$$\mathbf{x}(t + H_p) \in \Omega_s = \Omega \oplus \mathbf{x}_s(t + H_p) \quad (5.7)$$

donde $\mathbf{x}(t + H_p)$ es el estado asociado al último instante que debe tomar y Ω_s es el Conjunto Invariante del sistema en el punto de equilibrio $\mathbf{x}_s(t + H_p)$ (Figura 5.6).

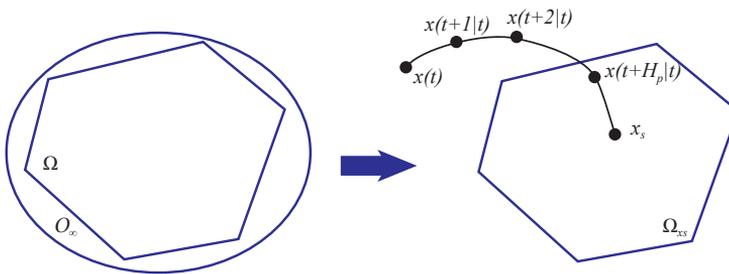


Figura 5.6: Evolución al Conjunto Invariante

En la propuesta de control MPC con estabilidad garantizada se considera que el modelo de predicción es variable linealmente en función del tiempo LTV según la velocidad longitudinal del sistema en el modelo inicial de la predicción. Según cómo se ha definido el Conjunto Invariante Ω , este también lo hará. Para solventar la problemática que esto conlleva, se propone el cálculo del Conjunto Invariante asociado al sistema según ciertos intervalos de velocidad Ω_i , tal y como se ha detallado en la Sección 5.2.3.

Coste terminal

El coste terminal considera la inclusión del siguiente término γ en la función de coste,

$$\gamma = (\hat{\mathbf{x}}(t + H_p) - \mathbf{x}_s(t + H_p))^T \mathbf{P} (\hat{\mathbf{x}}(t + H_p) - \mathbf{x}_s(t + H_p))$$

donde la matriz de ponderación de coste terminal \mathbf{P} introducida en la función de coste se sintoniza considerando la ecuación de Riccati 5.5 asociada al LQR. La inclusión del coste terminal fuerza que el estado predicho $\hat{\mathbf{x}}(t + H_p)$ sea lo más cercano posible al estado final de referencia $\mathbf{x}_s(t + H_p)$.

5.4. Aplicación: MPC con estabilidad garantizada al control lateral de un vehículo

En esta sección se detallará la aplicación de la formulación MPC estable para modelos LTV para el caso de aplicación de un control lateral de seguimiento de trayectoria de un vehículo utilitario. El controlador propuesto en esta sección toma como base el controlador propuesto en el Capítulo 4 al que se le incorporan las consideraciones de estabilidad que se han planteado previamente.

5.4.1. Modelo LTV para control

El modelo LTV de la dinámica lateral del vehículo, es el detallado en el Capítulo 2, que se reproduce a continuación con el fin de facilitar la lectura,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)u(t) \quad (5.8)$$

donde el vector de estados $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ es $\mathbf{x}(t) = [y(t) \quad \dot{y}(t) \quad \psi(t) \quad \dot{\psi}(t)]^T$, siendo $y(t)$ el desplazamiento lateral del vehículo respecto del sistema de referencia móvil asociado al instante $t = 0$ de la predicción, y ψ la orientación del vehículo respecto de dicho sistema de referencia. La variable de control $u \in \mathbb{R}^1$ se corresponde con el ángulo de giro de las ruedas $u(t) = \delta_w(t)$. Las matrices $\mathbf{A}(t)$ y $\mathbf{B}(t)$ describen el modelo LTV del vehículo y están representadas por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2C_{\alpha F} + 2C_{\alpha R}}{m\dot{x}} & 0 & -\frac{2l_F C_{\alpha F} - 2l_R C_{\alpha R}}{m\dot{x}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2l_F C_{\alpha F} - 2l_R C_{\alpha R}}{l_z\dot{x}} & 0 & -\frac{2l_F^2 C_{\alpha F} + 2l_R^2 C_{\alpha R}}{l_z\dot{x}} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2C_{\alpha F}}{m} \\ 0 \\ \frac{2l_F C_{\alpha F}}{l_z} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

donde $C_{\alpha F}$ y $C_{\alpha R}$ es la rigidez en curva de los neumáticos delantero y trasero respectivamente, m es la masa total del vehículo, l_z es la inercia del vehículo en el eje z , \dot{x} es la velocidad longitudinal del vehículo en el sistema de referencia local y l_F y l_R es la distancia desde el Centro de Gravedad (CoG, *Center of Gravity*) del vehículo al eje delantero y trasero respectivamente.

Nótese que para mejorar la precisión de la predicción de la trayectoria, el modelo de predicción se formula como un modelo LTV. La velocidad longitudinal \dot{x} medida en cada instante se asume constante durante el Horizonte de predicción H_p , por términos de eficiencia computacional. Así, las matrices $\mathbf{A}(t)$ y $\mathbf{B}(t)$ varían de una predicción

a otra pero son constantes durante una predicción, y por tanto, también lo hará el modelo de predicción.

Los controladores MPC están basados en tiempo discreto. Por esta razón, el modelo de vehículo descrito en la Ecuación (5.8) se discretiza con el método de Retenedor de Orden Cero y se representa, de nuevo, con la siguiente formulación en Espacio de Estados.

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}_d(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_d(t)u(t) \quad (5.11)$$

donde $\mathbf{x}(t)$ y $u(t)$ son el vector de estados del vehículo y la señal de entrada. Las matrices $\mathbf{A}_d(t)$ y $\mathbf{B}_d(t)$ son las matrices discretizadas del Espacio de Estados de las Ecuaciones (5.9) y (5.10) respectivamente.

Al igual que el controlador definido en el Capítulo 4 se requiere incluir un término integrativo en el controlador, aunque para ello se plantea un método diferente.

Con el fin de facilitar la formulación del MPC estable, se considerará un nuevo sistema a controlar que incorpore la acción integral, esto es, se considerará el integrador como parte de la planta a controlar,

$$u(t) = u(t-1) + \Delta u(t-1)$$

definiendo el sistema extendido,

$$\mathbf{x}_e(t+1) = \mathbf{A}_e(t)\mathbf{x}_e(t) + \mathbf{B}_e(t)u_e(t) \quad (5.12)$$

donde el vector de estados extendido $\mathbf{x}_e \in \mathbb{R}^5$ es $\mathbf{x}_e(t) = [\mathbf{x} \quad u]^T$, la nueva variable de control $u_e \in \mathbb{R}^1$ se corresponde con la variación del ángulo de giro de las ruedas $u_e = \Delta u$ y las matrices $\mathbf{A}_d(t)$ y $\mathbf{B}_d(t)$ se reorganizan para definir las matrices $\mathbf{A}_e(t)$ and $\mathbf{B}_e(t)$.

$$\mathbf{A}_e(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d(t) & \mathbf{B}_d(t) \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

$$\mathbf{B}_e(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_d(t) \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

5.4.2. Ecuación de predicción

Mediante el modelo discretizado en Espacio de Estados extendido descrito en la Ecuación (5.12), se puede definir el modelo de predicción que será empleado en la ley de control. Nótese que a diferencia del caso anterior presentado en el Capítulo 4 en el que se definía el modelo de predicción en función del vector de salidas, en esta ocasión el modelo de predicción se va a definir en función del vector estado \mathbf{x}_e .

Dado que las consideraciones de estabilidad descritas anteriormente se basan en la medición del vector de estados, que es factible en el caso de estudio analizado, se pueden desarrollar las predicciones $\hat{\mathbf{x}}_e(t+k|t)$, para $k = 1, 2, \dots, H_c, \dots, H_p$, considerando que el Horizonte de control puede ser menor que el Horizonte de predicción

$H_c < H_p$ y que, por lo tanto, a partir del instante H_c , la acción de control se considera constante ($t > H_c \rightarrow u_e(t) = u_e(t - 1)$).

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{x}}_e(t+1|t) &= \mathbf{A}_e \mathbf{x}_e(t) + \mathbf{B}_e u_e(t) \\
 \hat{\mathbf{x}}_e(t+2|t) &= \mathbf{A}_e \mathbf{x}_e(t+1) + \mathbf{B}_e u_e(t+1) \\
 &= \mathbf{A}_e(\mathbf{A}_e \mathbf{x}_e(t) + \mathbf{B}_e u_e(t)) + \mathbf{B}_e u_e(t+1) \\
 &= \mathbf{A}_e^2 \mathbf{x}_e(t) + \mathbf{A}_e \mathbf{B}_e u_e(t) + \mathbf{B}_e u_e(t+1) \\
 &\dots \\
 \hat{\mathbf{x}}_e(t+H_c|t) &= \mathbf{A}_e \mathbf{x}_e(t+H_c-1) + \mathbf{B}_e u_e(t+H_c-1) \\
 &= \mathbf{A}_e^{H_c} \mathbf{x}_e(t) + \mathbf{A}_e^{H_c-1} \mathbf{B}_e u_e(t) + \mathbf{A}_e^{H_c-2} \mathbf{B}_e u_e(t+1) + \dots + \\
 &\quad \mathbf{B}_e u_e(t+H_c-1) \\
 \hat{\mathbf{x}}_e(t+H_c+1|t) &= \mathbf{A}_e \mathbf{x}_e(t+H_c) + \mathbf{B}_e u_e(t+H_c) \\
 &= \mathbf{A}_e^{H_c+1} \mathbf{x}_e(t) + \mathbf{A}_e^{H_c} \mathbf{B}_e u_e(t) + \mathbf{A}_e^{H_c-1} \mathbf{B}_e u_e(t+1) + \dots + \\
 &\quad \mathbf{A}_e \mathbf{B}_e u_e(t+H_c-1) + \mathbf{B}_e u_e(t+H_c) \\
 &\quad \underset{u_e(t+H_c)=u_e(t+H_c-1)}{\rightarrow} \\
 &= \mathbf{A}_e^{H_c+1} \mathbf{x}_e(t) + \mathbf{A}_e^{H_c} \mathbf{B}_e u_e(t) + \mathbf{A}_e^{H_c-1} \mathbf{B}_e u_e(t+1) + \dots + \\
 &\quad (\mathbf{A}_e \mathbf{B}_e + \mathbf{B}_e) u_e(t+H_c-1) \\
 &\dots \\
 \hat{\mathbf{x}}_e(t+H_p|t) &= \mathbf{A}_e \mathbf{x}_e(t+H_p-1) + \mathbf{B}_e u_e(t+H_p-1) \\
 &\quad \underset{u_e(t+H_p-1)=u_e(t+H_c-1)}{\rightarrow} \\
 &= \mathbf{A}_e^{H_p} \mathbf{x}_e(t) + \mathbf{A}_e^{H_p-1} \mathbf{B}_e u_e(t) + \mathbf{A}_e^{H_p-2} \mathbf{B}_e u_e(t+1) + \dots + \\
 &\quad \sum_{i=H_c+1}^{H_p} \mathbf{A}_e^{H_p-i+1} \mathbf{B}_e u_e(t+H_c-1)
 \end{aligned}$$

De esta secuencia, se puede extraer que la salida se puede predecir como la suma de su respuesta libre y forzada,

$$\hat{\mathbf{x}}_e = \mathbf{G} \mathbf{u}_e^+ + \mathbf{F} \mathbf{x}_e(t) = \mathbf{G} \mathbf{u}_e^+ + \mathbf{f} \quad (5.15)$$

donde el producto $\mathbf{G} \mathbf{u}_e^+$ calcula la respuesta forzada, que se calcula la predicción de la planta a partir de las acciones de control futuras a optimizar, y $\mathbf{f} = \mathbf{F} \mathbf{x}_e(t)$ la respuesta libre.

Las matrices \mathbf{G} y \mathbf{F} tienen la forma,

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_e & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_e \mathbf{B}_e & \mathbf{B}_e & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_e^{H_c-1} \mathbf{B}_e & \mathbf{A}_e^{H_c-2} \mathbf{B}_e & \ddots & \mathbf{B}_e \\ \mathbf{A}_e^{H_c} \mathbf{B}_e & \mathbf{A}_e^{H_c-1} \mathbf{B}_e & \ddots & \mathbf{A}_e \mathbf{B}_e + \mathbf{B}_e \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_e^{H_p-1} \mathbf{B}_e & \mathbf{A}_e^{H_p-2} \mathbf{B}_e & \dots & \sum_{i=H_c+1}^{H_p} \mathbf{A}_e^{H_p-i+1} \mathbf{B}_e \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_e \\ \mathbf{A}_e^2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_e^{H_p} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Además, nótese que una de las condición de estabilidad presentadas en la Sección 5.3.2 es la inclusión de un coste terminal. Para poder aplicar dicha condición es necesaria la predicción del estado en el instante terminal ($t = H_p$) que se define de la siguiente forma,

$$\hat{\mathbf{x}}_e(H_p) = \mathbf{G}_{H_p} \mathbf{u}_e^+ + \mathbf{F}_{H_p} \mathbf{x}_e(t) \quad (5.18)$$

donde,

$$\mathbf{G}_{H_p} = \left[\mathbf{A}_e^{H_p-1} \mathbf{B}_e \quad \mathbf{A}_e^{H_p-2} \mathbf{B}_e \quad \dots \quad \sum_{i=H_c+1}^{H_p} \mathbf{A}_e^{H_p-i+1} \mathbf{B} \right]^T \quad (5.19)$$

$$\mathbf{F}_{H_p} = \left[\mathbf{A}_e^{H_p} \right]^T \quad (5.20)$$

5.4.3. Ley de control local asociado al invariante

Tal y como se ha mencionado previamente a lo largo del presente capítulo, se propone un LTV MPC con estabilidad garantizada, para lo que se debe incorporar una región terminal y un coste terminal. Para dicho fin, es necesario el cálculo de la matriz de ponderación del coste terminal \mathbf{P} y la ganancia \mathbf{K} del controlador local LQR asociado. Además, esta sintonización se hace de forma que el sistema autónomo $\mathbf{A}_a = \mathbf{A}_e - \mathbf{B}_e \mathbf{K}$ sea estable. El proceso para este cálculo se describe en la Sección 5.3.2.

Al tratarse de un modelo LTV, el del Conjunto Invariante Ω asociado a la región terminal se ha propuesto realizarlo en función Sección 5.2.3, de forma que el Conjunto Invariante Ω_i empleado depende del intervalo de velocidad seleccionado en cada instante. A continuación se procede al cálculo del Máximo Conjunto Invariante Admisibles de forma general y que se define de la siguiente forma,

$$\Omega = \{ \mathbf{x}_e : \mathbf{A}_a^i \mathbf{x}_e \in \mathcal{X}_e, i \geq 0 \}$$

donde \mathbf{A}_a es el sistema autónomo definido para el controlador local \mathbf{K} y que ya se conoce, $\mathbf{x}_e \in \mathbb{R}^5$ es el estado extendido y \mathcal{X}_e es el conjunto de restricciones asociado a los estados del sistema. Recuérdese que el estado extendido contiene el estado y la acción de control $\mathbf{x}_e = [\mathbf{x} \quad u]^T$, así que el conjunto de restricciones se representan como intersección de semiespacios en función del estado extendido \mathbf{x}_e de la siguiente forma.

Por un lado se representan las restricciones de estado mediante,

$$\mathbf{A}_{x_e} \mathbf{x}_e \leq \mathbf{b}_{x_e}$$

donde

$$\mathbf{A}_{x_e} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix}_{10 \times 5}$$

$$\mathbf{b}_{x_e} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{e_{max}} \\ -\mathbf{x}_{e_{min}} \end{bmatrix}_{10 \times 1}$$

donde $\mathbf{x}_{e_{max}}$ y $\mathbf{x}_{e_{min}}$ representan los valores máximos y mínimos de las restricciones asociadas a las variables de estado extendido.

Por otro lado, también se debe incorporar la restricción de la acción de control extendida que se define como,

$$\mathbf{A}_{u_e} \mathbf{u}_e \leq \mathbf{b}_{u_e}$$

donde

$$\mathbf{A}_{u_e} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

$$\mathbf{b}_{u_e} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{e_{max}} \\ -\mathbf{u}_{e_{min}} \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

Pero esta restricción también se debe definir en función del vector de estados extendido \mathbf{x}_e . Se sabe que $\mathbf{u}_e = \mathbf{K} \mathbf{x}_e$, por lo que se puede definir el politopo de las restricciones en función de \mathbf{x}_e de la siguiente forma.

$$\mathbf{x}_e \in \mathcal{X}_e = \left[\begin{array}{c} \mathbf{A}_{x_e} \\ \mathbf{A}_{u_e} \mathbf{K} \end{array} \right] \mathbf{x}_e \leq \left[\begin{array}{c} \mathbf{b}_{x_e} \\ \mathbf{b}_{u_e} \end{array} \right]$$

5.4.4. Función de coste

La función de coste propuesta en esta ocasión parte de la función de coste clásica presentada en la Sección 4.4.2 y se aumenta con la consideración de estabilidad de coste terminal. De esta forma, esta nueva formulación penaliza el desvío respecto de la trayectoria de referencia, la distancia lateral y el ángulo yaw y el esfuerzo de control para modificar el ángulo de giro de las ruedas $\delta_w(t)$. Además, la función de coste se aumenta con la inclusión de un término de coste terminal para garantizar que el estado final predicho del sistema $\hat{\mathbf{x}}_e(t + H_p)$ es lo más cercano posible al de referencia $\mathbf{x}_s(t + H_p)$, que a su vez estaría contenida en un invariante dependiente del intervalo Ω_i .

$$J = (\hat{\mathbf{x}}_e - \mathbf{r}_e)^T \mathbf{Q}_p (\hat{\mathbf{x}}_e - \mathbf{r}_e) + \mathbf{u}_e^T \mathbf{R}_p \mathbf{u}_e + (\hat{\mathbf{x}}_e(H_p) - \mathbf{r}_e(H_p))^T \mathbf{P} (\hat{\mathbf{x}}_e(H_p) - \mathbf{r}_e(H_p)) \quad (5.21)$$

donde \mathbf{Q}_p , \mathbf{R}_p y \mathbf{P} son las matrices de ponderación correspondientes al error de seguimiento de trayectoria, de la señal de control y de coste terminal, siendo las dos primeras para todo el Horizonte de predicción H_p ; $\hat{\mathbf{x}}_e$ es el vector de estados predicho, $\hat{\mathbf{x}}_e(H_p)$ es el estado final predicho para el instante $(t + H_p)$, \mathbf{u}_e es la señal de control óptima que se debe calcular (la variación de la acción de control), \mathbf{r}_e agrupa las futuras referencias que debe seguir el sistema y $\mathbf{r}_e(H_p)$ es el punto de estabilidad que debe alcanzar el sistema.

La referencia futura \mathbf{r}_e , para el estado extendido, se debe calcular para cada instante para todo el Horizonte de predicción H_p . Las referencias para la posición lateral \mathbf{r}_y y para el ángulo yaw \mathbf{r}_ψ se calculan del mismo modo que en la Sección 4.4.3. Las referencias para la velocidad lateral, \dot{y} , la velocidad en yaw $\dot{\psi}$ y la señal de control, el ángulo de giro, $u_d = \delta_w$ se suponen nulas con el fin de minimizar la variación de estas señales.

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_y(1) \\ 0 \\ \mathbf{r}_{\psi 1}(1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{r}_y(2) \\ 0 \\ \mathbf{r}_\psi(2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} \mathbf{r}_y(H_p) \\ 0 \\ \mathbf{r}_\psi(H_p) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

5.4.5. Restricciones

Tal y como se planteaba en el Capítulo 4, en este caso de estudio también se van a considerar restricciones en el MPC. Por un lado se van a plantear restricciones en las señales del vector de estados extendido \mathbf{x}_e y en el vector de la acción de control extendida \mathbf{u}_e de forma que se puedan acotar. Por otro lado, también se va a considerar la restricción asociada a la región terminal para garantizar la convergencia del controlador.

Restricción de la acción de control extendida

Se considera que la acción de control extendida \mathbf{u}_e debe estar contenida dentro del polítopo \mathcal{U}_e , que considera los límites de variación el ángulo de giro del volante.

$$u_e \in \mathcal{U}_e$$

Así, se puede definir dicho politopo como la intersección de semiespacios mediante para todos los instantes del Horizonte de control H_c ,

$$\mathbf{A}_u u_e \leq \mathbf{b}_u$$

Este es el mismo caso que el descrito en la Sección 4.3.4.1, por lo que la matriz \mathbf{A}_u se define del mismo modo que la Ecuación (4.12) y el vector \mathbf{b}_u como la Ecuación (4.13).

Restricción del estado extendido

Se considera que el estado extendido \mathbf{x}_e debe estar contenido dentro del politopo \mathcal{X}_e

$$\mathbf{x}_e \in \mathcal{X}_e$$

Nuevamente, dicho politopo puede expresarse como la intersección de semiespacios mediante para todos los instantes del Horizonte de predicción H_p , y expresado en función de la variable que se optimiza, la señal de control extendida,

$$\mathbf{A}_x u_e \leq \mathbf{b}_x$$

Este es el mismo caso que el descrito en la Sección 4.3.4.3, por lo que la matriz \mathbf{A}_x se define del mismo modo que la Ecuación (4.21) y el vector \mathbf{b}_x como la Ecuación (4.22).

Restricción de la región terminal

Para incorporar esta restricción se debe considerar que el estado final de la predicción debe estar contenido dentro del Conjunto Invariante Ω_i , tal y como se ha detallado anteriormente.

$$\mathbf{r}_e(H_p) \in \Omega_{si}$$

El Máximo Conjunto Invariante Admisibles de un rango Ω_i es conocido, ya que es posible calcularlo offline. Pero dicho Conjunto Invariante debe llevarse al punto de equilibrio, obteniendo un Conjunto Invariante alrededor del punto de equilibrio Ω_{si} (Figura 5.7).

$$\Omega_{si} = \Omega_i \oplus \mathbf{r}_e(H_p)$$

donde $\mathbf{r}_e(H_p)$ es el estado de equilibrio que el sistema debe alcanzar para garantizar la estabilidad del controlador.

Dado que

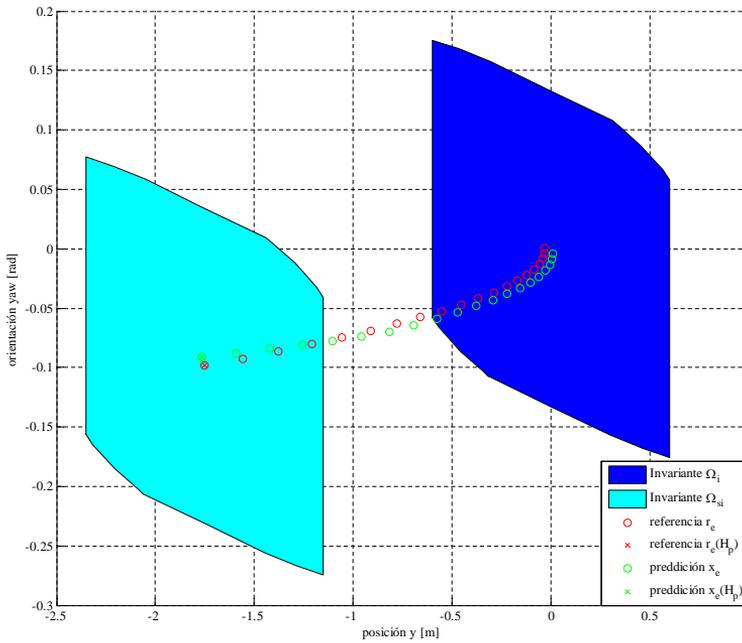


Figura 5.7: Conjunto Invariante entorno al punto $\hat{\mathbf{x}}_e(H_p)$

$$\hat{\mathbf{x}}_e(H_p) = \mathbf{G}_{H_p} \mathbf{u}_e^+ + \mathbf{f}_{H_p} / \{ \Omega_{si} = \mathbf{A}_{\Omega_s} \mathbf{x}_e \leq \mathbf{b}_{\Omega_s} \}$$

La restricción queda

$$\mathbf{A}_{x_s} \mathbf{u}_e \leq \mathbf{b}_{x_s}$$

siendo

$$\mathbf{A}_{x_s} = \mathbf{A}_{\Omega_s} \mathbf{G}_{H_p}$$

$$\mathbf{b}_{x_s} = \mathbf{b}_{\Omega_s} \mathbf{f}_{H_p}$$

5.4.6. Ley de control

La ley de control del MPC con estabilidad garantizada mediante un modelo LTV es la siguiente,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_e^*(t) = & \min J(\hat{\mathbf{x}}_e - \mathbf{r}_e, \mathbf{u}_e, \hat{\mathbf{x}}_e(H_p) - \mathbf{r}_e(H_p)) \\ & s.t. \\ & \mathbf{u}_e(t) \in \mathcal{U}_e \\ & \mathbf{x}_e(t) \in \mathcal{X}_e \\ & \mathbf{x}_e(t + H_p) \in \Omega_{si} \end{aligned} \quad (5.23)$$

donde $\hat{\mathbf{x}}_e$ es el vector de estados extendido y $\hat{\mathbf{x}}_e(\mathbf{H}_p)$ el estado extendido para el instante final $t = t + H_p$, \mathbf{r}_e es la trayectoria de referencia y $\mathbf{r}_e(H_p)$ es el estado de referencia para el instante final $t = t + H_p$ y \mathbf{u}_e es la acción de control extendida, que se corresponde con la variación de la acción de control $u_e = \Delta\delta_w$.

Nótese que se consideran restricciones en el estado extendido $\mathbf{x}_e(t)$, en la señal de control extendida $\mathbf{u}_e(t)$ y en el estado terminal $\mathbf{x}_e(t + H_p) \in \Omega_{s_i}$ para garantizar la convergencia del controlador.

Una vez se calcula la secuencia óptima de control $\Delta\mathbf{u}^*$, sólo se aplica la primera acción de control correspondiente al instante actual y el resto se deshecha.

$$u(k) = \Delta u(k) + u(k - 1) \quad (5.24)$$

5.4.7. Resumen

El controlador MPC con estabilidad garantizada para modelos LTV propuesto se resume en la Figura 5.8 para el instante t . El estado actual del vehículo $\mathbf{x}_e(t)$, las matrices del Espacio de Estados que describen el modelo LTV del vehículo $\mathbf{A}_e(t)$, $\mathbf{B}_e(t)$ y el valor previo de la acción de control $u(t - 1)$ se emplean para calcular la respuesta libre del vehículo \mathbf{f} . Mediante esta respuesta libre \mathbf{f} , las matrices de ponderación \mathbf{Q}_p , \mathbf{R}_p y \mathbf{P} y la señal de referencia \mathbf{r} se compone la función de coste J , que se minimiza con un optimizador cuadrático y considerando las restricciones impuestas para conseguir una secuencia de la señal de control incremental $\mathbf{u}_e^* = \Delta\mathbf{u}^*$. Además, se selecciona el Conjunto Invariante Ω_i en función de la velocidad y aceleración longitudinal del vehículo, y que se emplea para el cálculo de la región terminal Ω_{s_i} . De esta secuencia $\Delta\mathbf{u}^*$, sólo se considera el primer valor $\Delta u(t)$ que se emplea para calcular la señal de control $u(t)$.

5.5. Validación

Una vez descrita la problemática que plantea el uso de un modelo variable en el tiempo para garantizar la estabilidad del controlador MPC y la solución propuesta, se procede a su validación. En primer lugar se definirá el entorno de simulación y las pruebas a realizar y posteriormente se validarán los resultados obtenidos.

5.5.1. Entorno de simulación y definición de experimentos

El entorno de simulación planteado para la validación del control propuesto en el presente capítulo es el mismo que se ha introducido en el capítulo previo en la Sección 4.5.1. Así, el MPC LTV con estabilidad garantizada se ha validado mediante una cosimulación en el entorno Matlab/Simulink [64] y el software de simulación de la dinámica del vehículo CarSim [95], presentado en el Capítulo 2.

En la Figura 5.9 se ilustra el esquema empleado para la validación del controlador propuesto. El generador de referencia provee al controlador MPC de las futuras posiciones y orientaciones que debe alcanzar \mathbf{r} para cada iteración. A su vez, también se

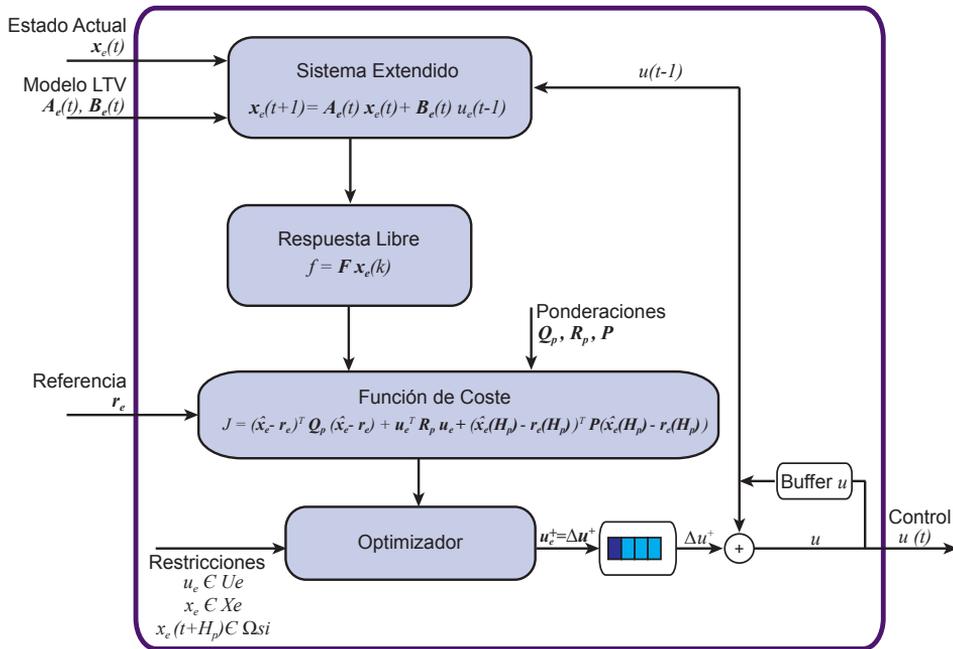


Figura 5.8: Resumen de la estrategia MPC con estabilidad propuesta

recalculan las matrices del Espacio de Estados cada iteración $\mathbf{A}_e(t)$ y $\mathbf{B}_e(t)$, teniendo en cuenta la velocidad a la que circula el vehículo al inicio del Horizonte de predicción H_p . Además, en función de la velocidad y aceleración longitudinal del vehículo (\dot{x} y \ddot{x}), el selector calculará el intervalo que corresponde y seleccionará el Conjunto Invariante Ω_i asociado a éste. Dada la referencia \mathbf{r} , el modelo actual del vehículo $\mathbf{A}_e(t)$ y $\mathbf{B}_e(t)$, el Conjunto Invariante Ω_i y considerando el estado actual $\mathbf{x}_e(t)$, el MPC calcula la señal de control, el ángulo de giro de las ruedas $u(t) = \delta_w(t)$, para que se aplique al vehículo.

5.5.1.1. Sintonización MPC

En esta sección se procede a la definición de los diferentes parámetros que se emplean para la sintonización del MPC detallado en la Sección 5.4.

Los parámetros asociados al Horizonte de predicción H_p y al Horizonte de control H_c , así como las matrices de ponderación son los mismos que los seleccionados en la Sección 4.5.1.2. Estos parámetros se para la sintonización del MPC con estabilidad garantizada se recogen en la Tabla 5.1.

Por otra parte también es necesario sintonizar el controlador local \mathbf{K} y la matriz de ponderación \mathbf{P} asociada al mismo y que se calculan mediante un optimizador cuadrático LQR para el sistema extendido asociado a cada instante $\mathbf{A}_e(t)$ y $\mathbf{B}_e(t)$. Su cálculo se recoge en la Sección 5.3.2.

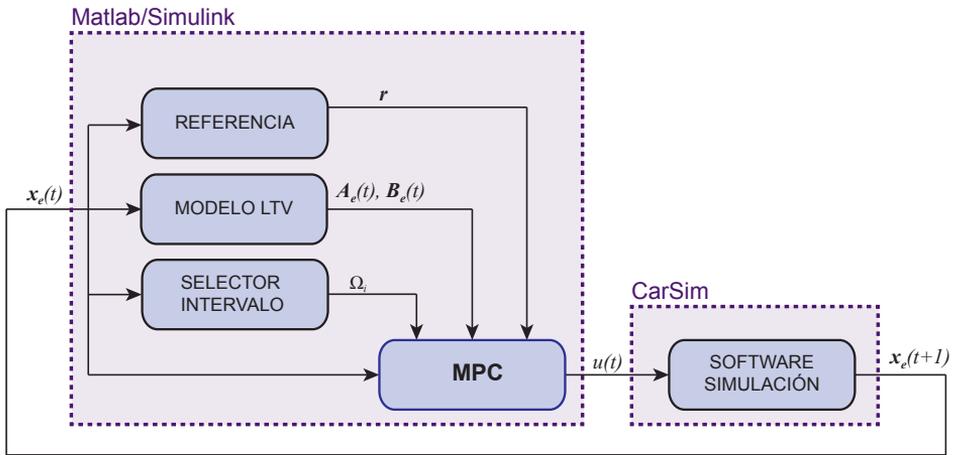


Figura 5.9: Diagrama de bloques del MPC con estabilidad

Tabla 5.1: Parámetros de sintonización del MPC

Parámetro	Valor
t_p	Tiempo de previsualización 1,5 s
H_p	Horizonte de predicción 20
H_c	Horizonte de control 15
\mathbf{Q}	Ponderación estado $diag(1, 1, 1, 1, 1)$
R	Ponderación control 100

Sin embargo, la metodología propuesta para solventar la problemática del uso de un modelo LTV (Sección 5.2.3) también requiere el cálculo previo de los controladores locales \mathbf{K} asociados a los sistemas $\mathbf{A}_e(t)$ y $\mathbf{B}_e(t)$ para el cálculo de los Conjuntos Invariantes para los diferentes intervalos, como se describirá a continuación.

5.5.1.2. Sintonización de los Conjuntos Invariantes por intervalos

Los Conjuntos Invariantes Ω_i se calculan offline para los diferentes intervalos fijados. Éstos se calculan en función del sistema $\mathbf{A}_e(t)$ y $\mathbf{B}_e(t)$ que a su vez, depende de la velocidad longitudinal $\dot{x}(t)$ en cada instante. El cálculo de un Conjunto Invariante concreto Ω_i se detalla en la Sección 5.4.3.

El rango operacional de velocidades longitudinales que se ha seleccionado comprende desde los 30 km/h hasta los 120 km/h . Con el fin de cubrir todo el rango admisible de velocidades, se han definido 6 intervalos. Cada intervalo considera un rango de 20 km/h y dos intervalos consecutivos tienen un solape de 5 km/h . Este solape se define para garantizar la estabilidad al cambiar de un intervalo a otro. El valor de 5 km/h se ha seleccionado ya que considera la máxima variación de la velocidad en el periodo de muestreo impuesto T_s .

Así, para cada iteración, se analiza la velocidad longitudinal del vehículo para comprobar a qué intervalo corresponde y, entonces, se aplica el Conjunto Invariante correspondiente a dicho intervalo. Si la velocidad longitudinal del vehículo en ese instante pertenece a una zona de solape, se comprueba la aceleración longitudinal. Si la aceleración es positiva, se escoge el intervalo superior, ya que la velocidad se supone creciente, y viceversa. Los intervalos se representan en la Figura 5.10.

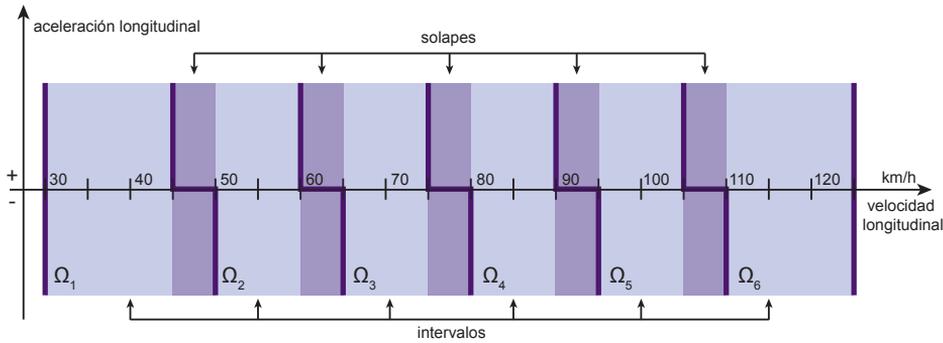


Figura 5.10: Intervalos definidos para todo el rango de velocidades

Una vez definidos los intervalos, se calculan los conjuntos invariantes correspondientes. Para cada intervalo, el Conjunto Invariante correspondiente se calcula como la intersección entre el Conjunto Invariante para el sistema considerando el límite superior e inferior. Por ejemplo, como se ilustra en la Figura 5.11, el Conjunto Invariante para el primer intervalo Ω_1 se define como la intersección entre el Conjunto Invariante para el sistema con la velocidad 30 km/h , Ω_{v30} , y el sistema con la velocidad 50 km/h , Ω_{v50} ,

$$\Omega_1 = \Omega_{v30} \cap \Omega_{v50} \quad (5.25)$$

Además, este Conjunto Invariante resultante está contenido en cualquier Conjunto Invariante calculado para el sistema con cualquier velocidad dentro del intervalo. Por ejemplo, el Conjunto Invariante para el primer intervalo Ω_1 está contenido en el Conjunto Invariante calculado para el sistema con una velocidad de 40 km/h , Ω_{v40} (Figura 5.11).

$$\Omega_1 \subset \Omega_{v40} \quad (5.26)$$

Esto garantiza la estabilidad del sistema.

5.5.1.3. Restricciones

Las restricciones consideradas son las mismas que se recogen en la Sección 4.5.1.1 y afectan al desplazamiento lateral y y al ángulo yaw ψ , al ángulo de giro de las ruedas $\delta_w(t)$ y a su variación $\Delta\delta_w(t)$.

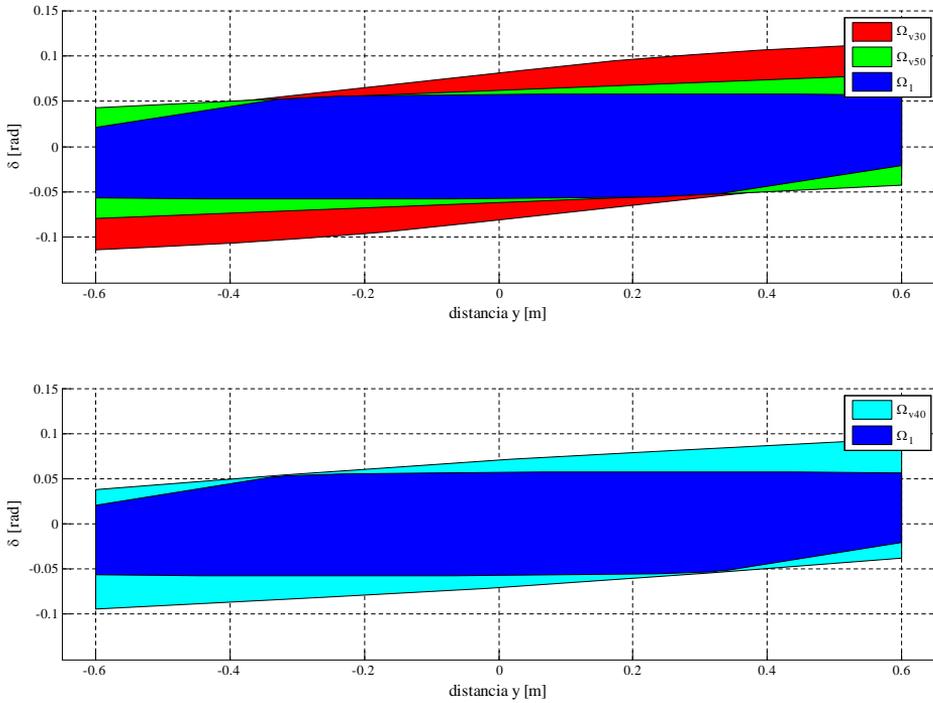


Figura 5.11: Conjuntos Invariantes de los intervalos

5.5.1.4. Escenarios

Los escenarios propuestos para la validación del controlador MPC con modelo LTV con estabilidad garantizada se presentan a continuación, que serán los mismos que en la Sección 4.5.1.3: El escenario 1 con dos curvas abiertas en el que se realizan ensayos a diferentes velocidades máximas, el Escenario 2 consistente en dos curvas más cerradas que las del escenario anterior en las que también se realizan diferentes ensayos a diferentes velocidades máximas y el Escenario 3 que se corresponde con un circuito con diferentes tipos de trazados y en la que la velocidad es variable.

De esta forma, se pretende validar el controlador para un amplio rango de velocidades de 30 a 120 km/h y para diferentes tipos de trazado, siempre cumpliendo las restricciones de seguridad y confort y consideraciones de estabilidad.

5.5.2. Resultados

A continuación se presentan los resultados obtenidos en cada uno de los escenarios propuestos.

Escenario 1: curvas abiertas

Los resultados para el Escenario 1 se muestran en la Figura 5.12, que consiste en dos curvas abiertas en la que se realizan 5 ensayos, cada uno con una velocidad longitudinal máxima: 30 *km/h*, 50 *km/h*, 80 *km/h*, 100 *km/h* y 120 *km/h*. En esta figura se muestra el error lateral y , la acción de control $u(t) = \delta_w(t)$ que corresponde con el ángulo de giro de las ruedas, la variación de la acción de control $\Delta u(t) = \Delta \delta_w(t)$ y el número de intervalo aplicado.

Se puede observar que la trayectoria se sigue adecuadamente para todo el rango de velocidades de 30 *km/h* a 120 *km/h* con error lateral acotado inferior a 0,0636 *m*, que para un carril de 3,5 *m* es un valor despreciable. El error lateral para velocidades inferiores a 50 *km/h* es prácticamente nulo. Para alcanzar estos valores de error lateral, los valores de variación de la acción de control calculados por el $\Delta u(t) = \Delta \delta_w(t)$ son muy reducidos generando una señal de acción de control que varía de forma muy suave hasta un máximo de 0,014 *rad* que se da a 120 *km/h* mientras que a 30 *km/h* es de 0,01 *rad*. Estos valores tan reducidos generan giros muy suaves en el vehículo y una conducción suave y confortable.

En último lugar se muestra el número de intervalo seleccionado para cada instante, donde el número de intervalo y rango de velocidades sobre el que se aplica se ilustra en la Figura fig706. Para los ensayos de 30 *km/h*, 50 *km/h*, 80 *km/h* y 100 *km/h* la velocidad longitudinal se mantiene constante durante toda la simulación, pero el número de intervalo aplicado cambia en función de la aceleración del sistema en cada instante. Por esta razón, en los ensayos a 50 *km/h* y 80 *km/h* el número de intervalo seleccionado varía durante la conducción, creando varios cambios al inicio de la simulación y durante los giros. En el ensayo de 120 *km/h* como la velocidad longitudinal se reduce durante los giros para poder tomarlos de forma segura, el intervalo aplicado también cambia.

Escenario 2: curvas cerradas

Los resultados para el Escenario 2 se muestran en la Figura 5.13, que consiste en dos curvas cerradas en la que se realizan 5 ensayos, cada uno con una velocidad longitudinal máxima: 30 *km/h*, 50 *km/h*, 80 *km/h*, 100 *km/h* y 120 *km/h*. Los resultados que se muestran son los mismos que en el caso anterior, el error lateral y ; la acción de control $u(t) = \delta_w(t)$, el ángulo de giro de las ruedas; la variación de la acción de control $\Delta u(t) = \Delta \delta_w(t)$; y el número de intervalo seleccionado, que indicará el Conjunto Invariante Ω_i aplicado en cada instante.

Este escenario, al tratarse de una trayectoria más exigente, requiere que la velocidad longitudinal del vehículo decrezca para los ensayos de velocidades máximas de 50 *km/h*, 80 *km/h*, 100 *km/h* y 120 *km/h* hasta valores inferiores a 50 *km/h*. Esto se ve reflejado en la aplicación de los intervalos, ya que durante los giros estos cuatro ensayos aplican el Conjunto Invariante Ω_1 durante ciertos instantes. Así, en este escenario el único ensayo que no varía de intervalo aplicado es de velocidad máxima

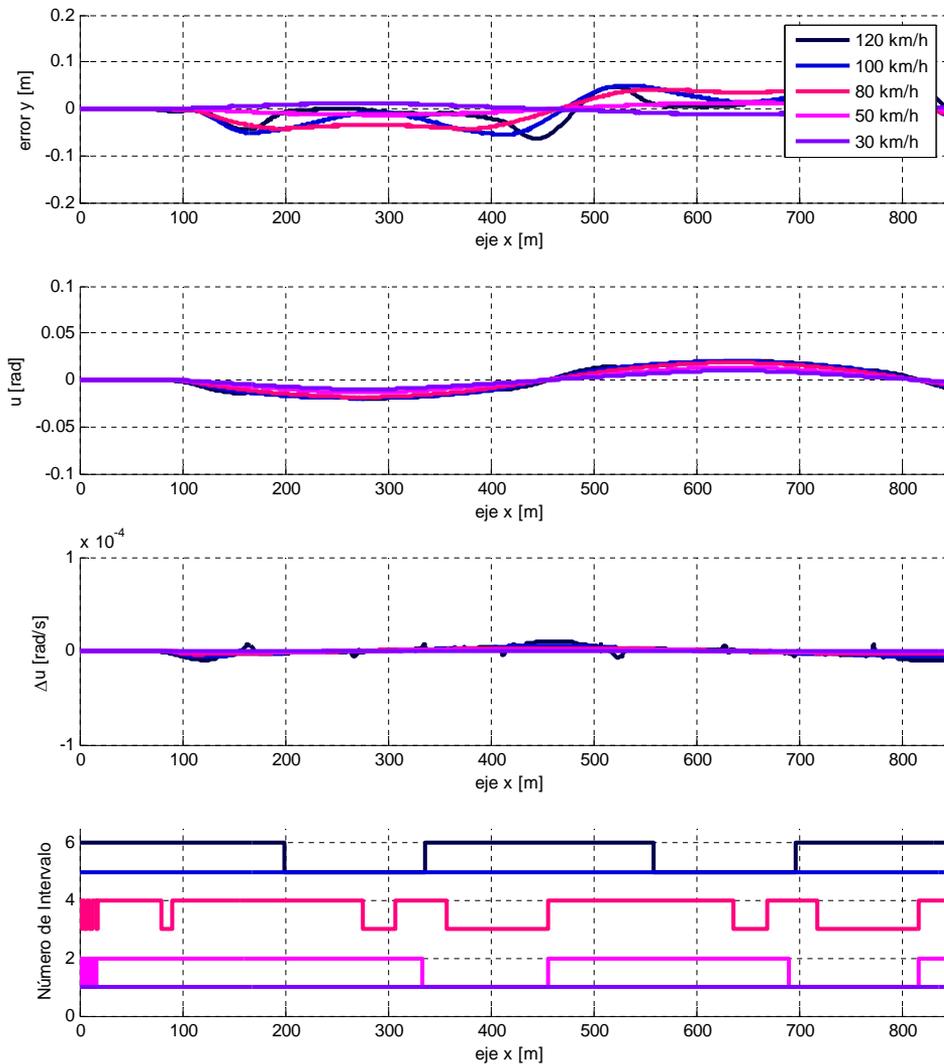


Figura 5.12: **Escenario 1**: Resultados para dos curvas abiertas

de 30 *km/h*.

El ensayo a 30 *km/h*, a pesar de ser el de menor velocidad y el que se estima que tenga menores errores laterales, por la aplicación de las consideraciones de estabilidad es el que en cada instante más se aleja de la trayectoria de referencia. Aun así, los errores laterales se mantienen acotados, con un error lateral máximo de 0,0559 *m* y la conducción se produce de manera suave, con una variación de la acción de control con niveles máximos muy reducidos.

En los demás ensayos, la variación de la acción de control, y por tanto la acción de

control, varían de forma suave y progresiva durante toda la simulación, de forma que el controlador consigue conducir el vehículo de forma segura y confortable durante toda la trayectoria. Aunque también puede observarse en la variación de control dos picos en los instantes $t = 140\text{ s}$ y $t = 325\text{ s}$ para los ensayos a una velocidad de 80 km/h , 100 km/h y 120 km/h . Estos picos, se producen por la transición entre Conjuntos Invariantes, aunque nótese que los valores de estos picos no superan los límites de las restricciones y no generan un efecto notorio en la acción de control. Se puede observar también que el error lateral no supera el máximo de $0,0559\text{ m}$, lo que supone un error despreciable, pero debido a las variaciones de la acción de control, el error lateral es más irregular.

Escenario 3: circuito

Por último el controlador MPC con estabilidad garantizada se valida en un circuito con diferentes tipos de trazados. Los resultados se muestran en las Figuras 5.14 y 5.15 para una vuelta.

La Figura 5.14 muestra el circuito y las tres variables restringidas: la acción de control, la variación de la acción de control y el error lateral. Las líneas punteadas indican los valores límite de cada variable. Como se puede observar, debido a los límites impuestos en la variación de la acción de control y los valores de ponderación, la señal de control varía de forma suave sin generar grandes giros. Además, el error lateral varía a lo largo del circuito manteniendo valores de un orden reducido y que no son apreciables durante la conducción del vehículo.

En estas gráficas se puede observar que puntualmente la variación de la acción de control, que a lo largo de la trayectoria adquiere valores muy reducidos, alcanza valores destacados $-0,0035\text{ rad/s}$ en el instante $t = 45\text{ s}$ o $0,0023\text{ rad/s}$ en el instante $t = 104\text{ s}$, que se producen en momentos de deceleración bruscos hasta a velocidades muy reducidas para que el coche tome giros de forma segura. A pesar de ser valores elevados en comparación con la tendencia general de la variación de la acción de control, se puede observar que no generan giros bruscos en la dirección, ya la señal mantiene una variación suave y el error se mantiene acotado.

Sin embargo, en la trayectoria se puede apreciar el punto más crítico en el instante $t = 35\text{ s}$. En este instante, tras circular por un pequeño zigzag, el vehículo circula por la curva más cerrada y la variación de la acción de control alcanza los límites impuestos por las restricciones para tomar la curva. Aun en la situación más crítica, se consigue mantener el error dentro de las restricciones impuestas de $0,6\text{ m}$ para que el vehículo no se salga de su carril y la estabilidad del sistema está garantizada.

En la Figura 5.15 se muestran los perfiles de velocidad y aceleración longitudinales y el número de intervalo aplicado. Para cada instante de muestreo, el sistema chequea la velocidad longitudinal del vehículo y su aceleración para decidir el intervalo correspondiente. Entonces, el Conjunto Invariante calculado offline para el intervalo seleccionado se aplica. Así, según la velocidad incrementa así lo hace el número del intervalo y vice versa. Por ejemplo, cuando la velocidad longitudinal alcanza el valor

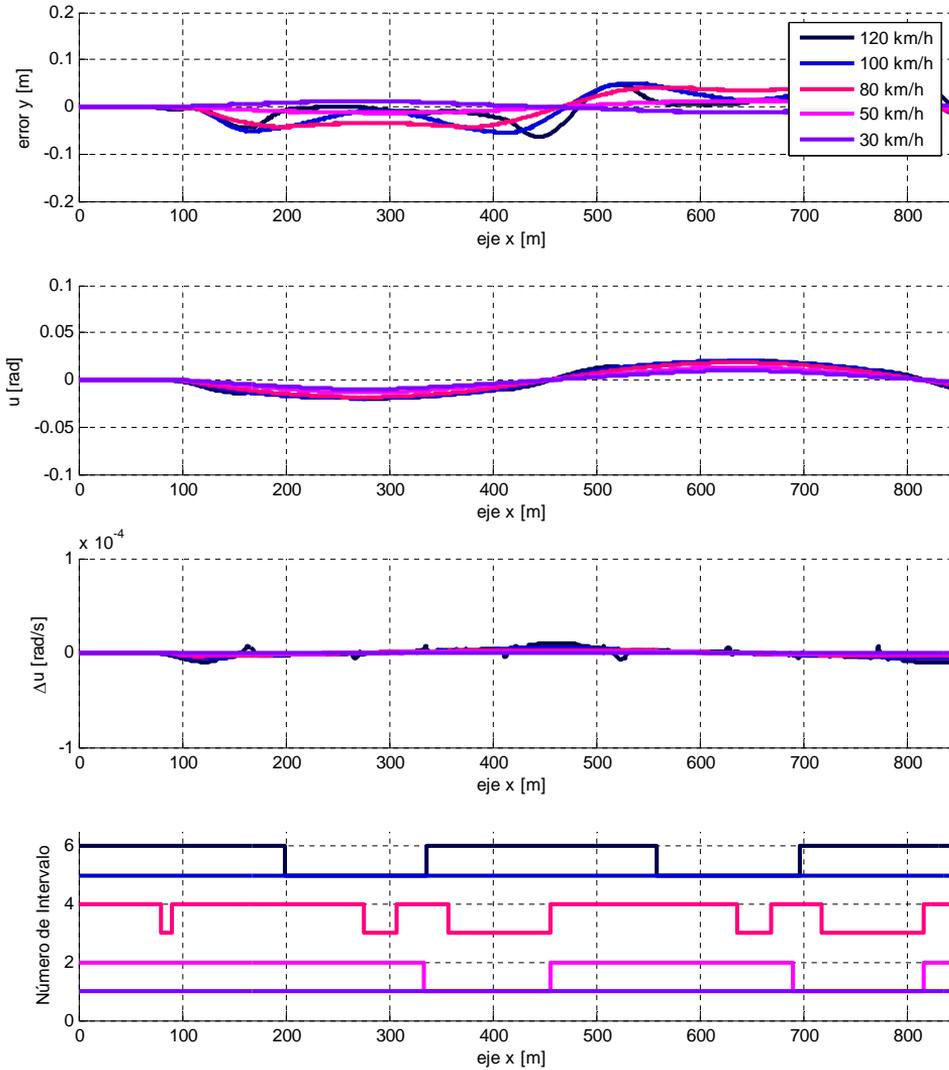


Figura 5.13: **Escenario 2:** Resultados para dos curvas cerradas

máximo de 113 km/h , el intervalo que se aplica es el número 6, Ω_6 , que está definido para un rango de velocidades comprendidas entre $105 - 125 \text{ km/h}$.

Por lo tanto, el MPC desarrollado es capaz de predecir la salida del vehículo y limitar su movimiento lateral, para que el vehículo se mantenga dentro de su carril cumpliendo las restricciones impuestas y condiciones de estabilidad. Estos resultados demuestran la efectividad de la propuesta.

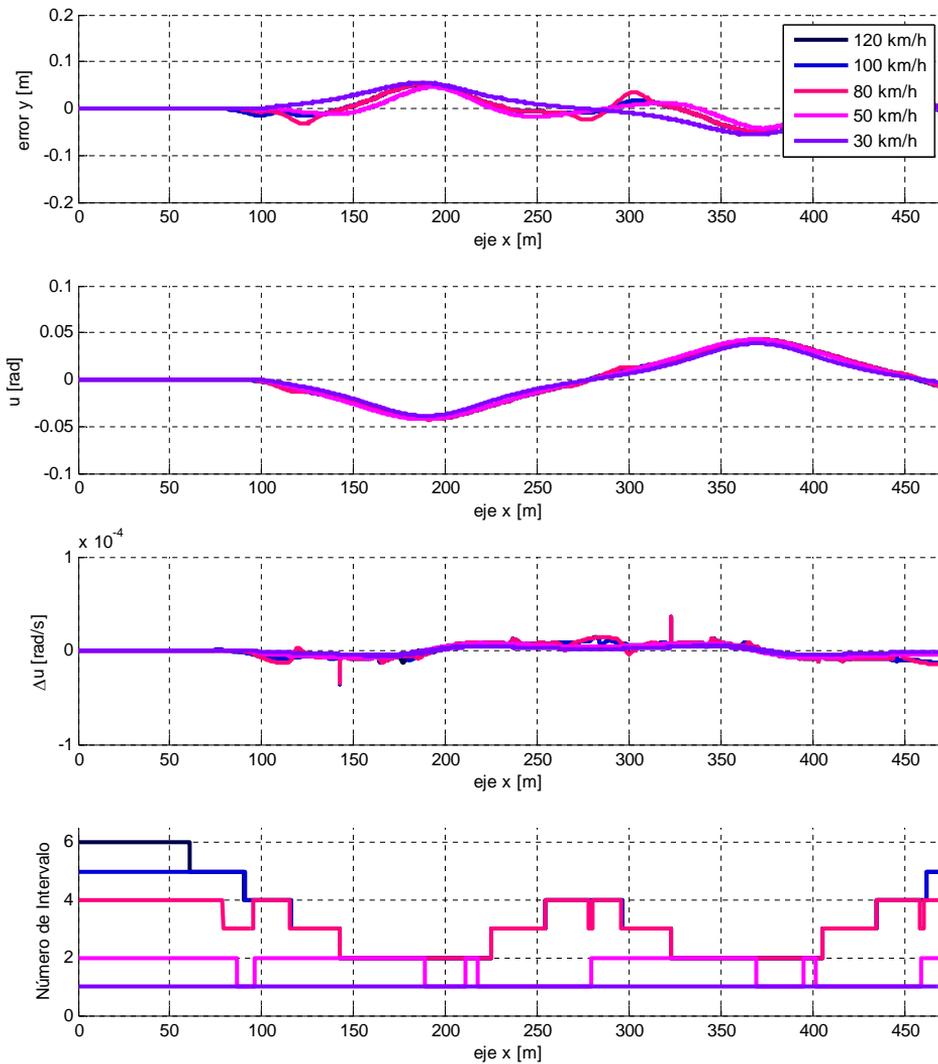


Figura 5.14: **Escenario 3**: Resultados para un circuito

5.6. Conclusiones

En este capítulo se ha introducido la problemática de la estabilidad en los controladores predictivos debido al uso de un horizonte finito y deslizante. Para solventar dicho problema, el objetivo ha sido el de presentar las condiciones para garantizar la estabilidad teórica de los MPC para así, poder ser aplicado en el problema de seguimiento de trayectoria introducido en el capítulo anterior.

Primero se han explicado las condiciones suficientes para garantizar la estabilidad

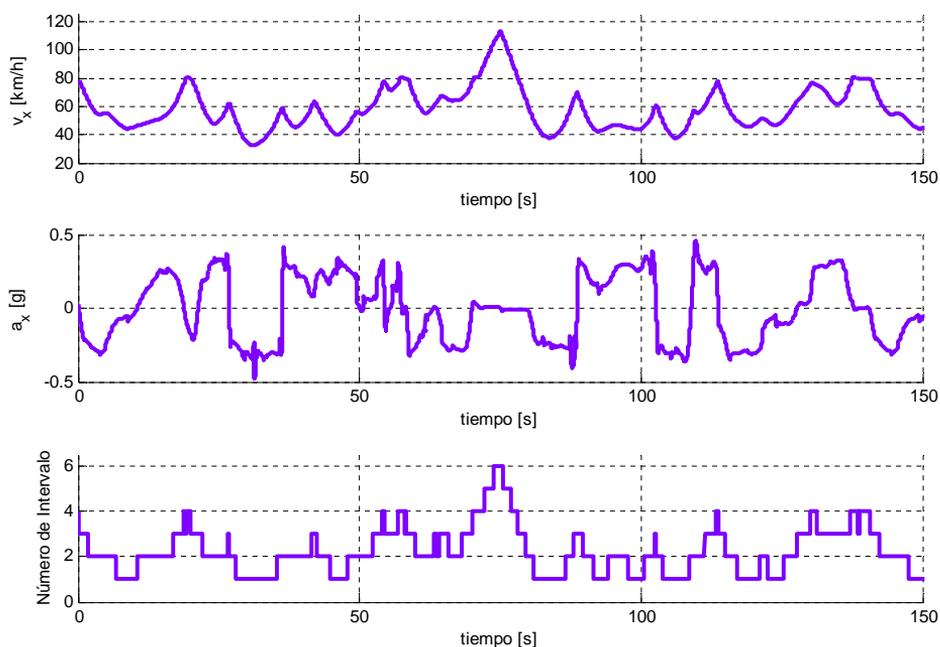


Figura 5.15: **Escenario 3:** Variación del intervalo

de un controlador. Para garantizar la estabilidad del controlador se introducen un coste terminal en la función de coste, de forma que se penalice el desvío de la última posición predicha respecto a una referencia; y una restricción terminal, de forma que si el controlador lleva al sistema a esta región, un controlador local estabiliza el sistema en esta región.

Sin embargo, debido al uso de un modelo variable en el tiempo, y dado que el Conjunto Invariante depende de dicho modelo, éste también será variable en el tiempo, lo que puede presentar inconvenientes en la estabilidad del controlador. Para solventar dicho problema, se propone una simple solución. El rango de velocidades efectivas del vehículo se divide en varios intervalos. Los límites de dichos intervalos se calculan dependiendo de la capacidad de aceleración y frenado del vehículo, de forma que para una velocidad dada, su intervalo considera todas las posibles velocidades del vehículo durante todo el Horizonte de predicción H_p .

Así, un sólo Conjunto Invariante es calculado para cada intervalo. Este nuevo Conjunto Invariante se calcula como la intersección entre el Conjunto Invariante calculado con el límite inferior y superior de velocidades del intervalo. Nótese que todos estos intervalos se calculan offline y que para cada instante, la velocidad del vehículo se debe comprobar y seleccionar el intervalo correspondiente.

Esta propuesta de MPC con estabilidad garantizada se presenta y se valida para el caso de estudio de seguimiento de trayectoria de un vehículo mediante diferentes

escenarios. En los dos primeros escenarios compuestos por dos curvas consecutivas, el controlador es capaz de conducir el sistema siguiendo la trayectoria con un error acotado y sin generar grandes giros en la dirección. Sin embargo, en el tercer escenario, que considera una vuelta a un circuito, se puede observar como existe una exigente curva en el circuito en la que el sistema alcanza el límite del error lateral impuesto por las restricciones. Aun así, el sistema conserva la estabilidad y el controlador reconduce el vehículo reduciendo el error.



6.1. Introducción

La estabilidad de los controladores predictivos se garantiza bajo la hipótesis de que el modelo de predicción coincide con el modelo del sistema a controlar. Sin embargo, todo sistema tiene asociado un error con el modelo que representa su dinámica. Por ello, para que un controlador sea aplicable debe poseer ciertas características de robustez.

En el caso en que no hubiese incertidumbres, si se aplica la secuencia de las actuaciones obtenida en bucle abierto, el sistema evoluciona de una manera admisible hasta alcanzar el conjunto terminal. Sin embargo, las posibles discrepancias existentes entre el modelo de predicción y el sistema real pueden hacer que su evolución viole las restricciones o bien que el controlador deje de ser factible e incluso que se pierda la convergencia del sistema en bucle cerrado. El hecho de que el MPC se aplique mediante la estrategia de horizonte deslizante hace que la actuación se recalculen en

cada periodo de muestreo, lo que dota de realimentación al sistema y por lo tanto de cierta robustez.

En los controladores introducidos previamente, la incertidumbre existente entre el modelo empleado y el sistema real se mantenía acotada gracias al uso de un modelo variable en el tiempo y dependiente de la velocidad a la que circula el vehículo. Sin embargo, si se quiere diseñar un controlador predictivo empleando un único modelo nominal, aquel calculado mediante una velocidad nominal, el valor de las incertidumbres crecería de forma notable pudiendo violar las condiciones, por lo que el controlador no sería aplicable. Por lo tanto, para el diseño de un controlador predictivo mediante el uso de un modelo nominal y garantizando las condiciones de estabilidad y factibilidad, se deberán incorporar condiciones de robustez a la aplicación.

Por esta razón, el objetivo de este capítulo es el de introducir una formulación de controlador de MPC robusta basada en tubos de trayectorias con estabilidad garantizada para ser aplicado en el problema de seguimiento de trayectoria de un vehículo utilitario. El uso de un controlador robusto, permitirá definir un modelo nominal del vehículo, aquel para una determinada velocidad nominal, que se empleará para todo el rango de velocidades de la aplicación. Así la diferencia existente entre el real y las predicciones se solventará mediante el uso del control robusto.

Por lo tanto, en el presente capítulo en primer lugar se presentará dicha formulación robusta basada en tubos de trayectorias y con estabilidad garantizada, un controlador capaz de llevar al sistema a cualquier referencia robustamente admisible cumpliendo las restricciones y ante las incertidumbres que presente el sistema. A continuación, se particulariza la formulación para el caso de estudio propuesto en esta tesis, el seguimiento de trayectoria lateral de un vehículo. Finalmente se valida la propuesta mediante simulaciones bajo diferentes condiciones y trayectorias.

6.2. MPC robusto con estabilidad garantizada

La formulación básica de MPC introducida en el Capítulo 4, así como la formulación de MPC con consideraciones de estabilidad del Capítulo 5, consideran el caso ideal, en el que se supone que el modelo utilizado modela con precisión el sistema real. Cabe recordar que esta suposición se basa en el uso de un modelo linealmente variable en el tiempo (LTV) en función de la velocidad longitudinal del vehículo, de forma que el error entre el modelo y la realidad se ve acotado ya que éste se recalcula para cada instante.

Sin embargo, es posible evaluar la idoneidad de tener un único modelo nominal, definido para un caso concreto (por ejemplo, una velocidad determinada), y modelar como perturbaciones aditivas las variaciones debidas a errores de modelado y a la modificación de la velocidad lineal del vehículo. A tal fin, en este capítulo se detalla una formulación de MPC robusta con estabilidad garantizada, basada en los trabajos presentados por Alvarado [3] y Zubizarreta [116].

6.2.1. Descripción del problema

Supongase el siguiente sistema lineal en tiempo discreto,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{w} \\ \mathbf{y}(t+1) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (6.1)$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ es el estado del sistema, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_u}$ la entrada de control del sistema, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_y}$ su salida y $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n_x}$ puede representar tanto perturbaciones externas no modeladas como incertidumbres en los parámetros del sistema. Además, se asumirá que el sistema es controlable y el estado es accesible y medible.

A su vez, el sistema está sometido a restricciones de entrada y estado, que se tipifican mediante los siguientes politopos,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \mathcal{X} &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x} : \mathbf{A}_x \mathbf{x} \leq \mathbf{b}_x\} \\ \mathbf{u} \in \mathcal{U} &= \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_u} : \mathbf{A}_u \mathbf{u} \leq \mathbf{b}_u\} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Si se define $\mathbf{z} = [\mathbf{x}^T \mathbf{u}^T]^T$, estas restricciones pueden representarse como,

$$\mathcal{Z} = \{\mathbf{z} = [\mathbf{x}^T \mathbf{u}^T]^T \in \mathbb{R}^{n_x+n_u} : \mathbf{A}_z \mathbf{z} \leq \mathbf{b}_z\} \quad (6.3)$$

Al igual que las variables del sistema, con el fin de poder garantizar la estabilidad y factibilidad, las incertidumbres modeladas por \mathbf{w} se suponen acotadas y las restricciones se representan mediante el politopo \mathcal{W} .

$$\mathcal{W} = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n_x} : \mathbf{A}_w \mathbf{w} \leq \mathbf{b}_w\} \quad (6.4)$$

Por lo tanto, dadas esas restricciones, se puede definir el problema de control. El objetivo es calcular la ley control óptima \mathbf{u}^* que sea capaz de conducir al sistema a un estado de equilibrio $\mathbf{z}_s = [\mathbf{x}_s^T \mathbf{u}_s^T]^T$ mientras se cumplen las restricciones $\mathbf{A}_z \mathbf{z} \leq \mathbf{b}_z$ bajo cualquier perturbación $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$.

6.2.2. Tubo de trayectorias

La consideración de incertidumbres \mathbf{w} en la evolución del estado del sistema \mathbf{x} requiere definir un sistema nominal, que se calcula sin considerar las incertidumbres, esto es, siendo $\mathbf{w} = \mathbf{0}$.

$$\bar{\mathbf{x}}(t+1) = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}(t) \quad (6.5)$$

Si el sistema nominal está en un estado inicial nominal $\bar{\mathbf{x}}(t)$ y se aplica la secuencia nominal de control $\bar{\mathbf{u}}$, se obtiene una trayectoria nominal predicha $\bar{\mathbf{x}}(t+k) = \bar{\phi}_k(\bar{\mathbf{x}}(t), \bar{\mathbf{u}})$. Sin embargo, el sistema nominal no es perfecto, porque el estado está sometido al efecto de la perturbación aditiva \mathbf{w} , que no es conocida, y que hará que la trayectoria nominal predicha se aleje de la trayectoria real.

Así, la diferencia entre el sistema real y el nominal se puede calcular como,

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}} \quad (6.6)$$

donde $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{n_x}$ es el error de seguimiento de la trayectoria nominal.

El objetivo del control es compensar la diferencia entre el estado real y el nominal $\tilde{\mathbf{x}}$ y llevar el sistema nominal tan próximo como sea posible a la referencia sin violar las restricciones. Para ello, se define una ley de control local,

$$\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}(\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t)) = \bar{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}(t) \quad (6.7)$$

que hace evolucionar el sistema para que la diferencia entre el sistema nominal y el real sea mínima.

La dinámica del error de predicción del estado se puede calcular, siendo ésta dependiente de las incertidumbres \mathbf{w} ,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(t+j) &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{w} \\ &= \mathbf{A}_a\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{w} \end{aligned} \quad (6.8)$$

donde, si \mathbf{K} está correctamente sintonizado, \mathbf{A}_a es Hurwitz, es decir, tiene todos sus valores propios con parte real negativa, y por tanto, representa un sistema estable.

Dado que \mathbf{A}_K es Hurwitz y \mathbf{w} está acotado, en base a la Ecuación (6.8), es posible acotar también la evolución del error $\tilde{\mathbf{x}}$, para lo que se utilizará la noción de Conjunto Invariante Robusto Positivo (RPI, *Robust Positive Invariant set*). El conjunto RPI ϕ_K es la extensión del concepto de Conjunto Invariante a un sistema sometido a perturbaciones acotadas. De este modo, se dice que ϕ_K es un RPI para el sistema definido en la Ecuación (6.8) si se cumple que $\mathbf{A}_a\phi_K \oplus \mathcal{W} \subseteq \phi_K$. Esto es, que para cualquier error de seguimiento $\tilde{\mathbf{x}} \in \phi_K$, su evolución definida por la Ecuación (6.8) está contenida en ϕ para cualquier $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$.

Esto es, se sabe que utilizando la ley de control de la Ecuación (6.7), se asegura que existe un entorno ϕ_K en el que la evolución del error $\tilde{\mathbf{x}}$ considerando cualquier perturbación está acotado, es decir, que cualquier punto de dicho entorno al que se le aplique la ley de control (6.7) y ante cualquier perturbación $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ evoluciona a otro punto del mismo entorno.

El RPI caracteriza la incertidumbre a la que está sometido el sistema de control, es decir, regula el efecto de las perturbaciones \mathbf{w} , por lo que, evidentemente, interesa que sea el mínimo posible. En principio, en un sistema estable, existe siempre un RPI mínimo F_∞ tal que cualquier $\phi_K \subseteq F_\infty$. Su calculo teórico se realiza mediante la serie infinita [52],

$$F_\infty = \bigoplus_{K=0}^{\infty} \mathbf{A}_K^k \mathcal{W}$$

que, salvo contadas excepciones (por ejemplo, cuando \mathbf{A}_a es nulpotente), no es posible utilizar en la práctica, por lo que se han de realizar aproximaciones externas de este conjunto. Nótese que F_∞ dependerá del valor de \mathbf{K} de la Ecuación (6.7).

Por lo tanto, si se considera un Conjunto Invariante Robusto Positivo ϕ_K del error de predicción del estado de la Ecuación (6.8), de forma que $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}} \in \phi_K$. Entonces, dado el valor nominal del estado en el instante $\bar{\mathbf{x}}(t)$, el valor real del estado $\mathbf{x}(t)$ está acotado por ϕ_K ,

$$\mathbf{x}(t) \in \bar{\mathbf{x}}(t) \oplus \phi_K \quad (6.9)$$

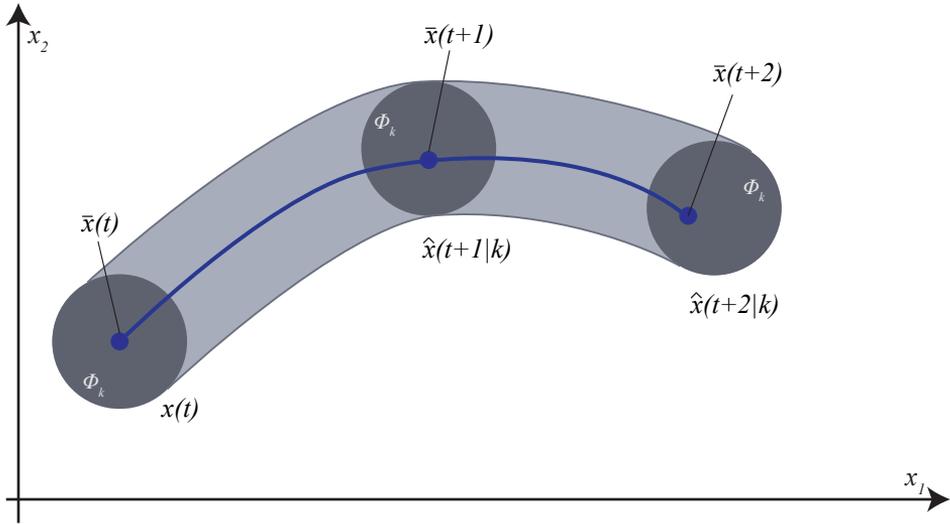


Figura 6.1: Tubo de trayectorias

Así, conforme t va incrementándose en el tiempo, las regiones que acotan el estado $\mathbf{x}(t)$ van generando lo que se define como un tubo de trayectorias [67]. De forma que aplicando la ley de control de la Ecuación 6.7, existe un conjunto ϕ_K entorno a $\bar{\mathbf{x}}(t)$ donde la evolución del error $\tilde{\mathbf{x}}$ considerando cualquier perturbación está acotada. Esto es, en cualquier punto del conjunto ϕ_K la ley de control 6.7 se aplica y, bajo cualquier perturbación $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$, el sistema evoluciona a otro punto dentro de ese mismo conjunto ϕ_K (Figura 6.1).

Como consecuencia, si la secuencia de control nominal $\bar{\mathbf{u}}$ asociada al estado nominal $\bar{\mathbf{x}}$ es $\bar{\mathbf{z}} = [\bar{\mathbf{x}}^T \bar{\mathbf{u}}^T]^T \in \bar{\mathbf{Z}}$ y $\mathbf{x} \in \bar{\mathbf{x}} \oplus \phi_K$, entonces se pueden definir los siguientes conjuntos,

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{X}} &= \mathcal{X} \ominus \phi_K \\ \bar{\mathcal{U}} &= \mathcal{U} \ominus \phi_K \\ \bar{\mathcal{Z}} &= \mathcal{Z} \ominus (\phi_K \times \mathbf{K} \phi_K) \end{aligned} \quad (6.10)$$

Así, si el estado extendido nominal satisface $\bar{\mathbf{z}} \in \bar{\mathcal{Z}}$, entonces la trayectoria real también satisface las restricciones impuestas $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$. Para dicho fin, se fuerza la trayectoria nominal a ser un conjunto más restrictivo $\bar{\mathcal{Z}}$, para que ante cualquier perturbación $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$, la trayectoria real siempre cumpla las restricciones del sistema \mathcal{Z} . Para tal efecto, el estado actual $\mathbf{x}(t) \in \bar{\mathbf{x}}(t)$ debe estar dentro del tubo de trayectorias, para que la predicción de los estados futuros $\hat{\mathbf{x}}$ realizados a partir del estado actual también estén contenidos del tubo de trayectorias (Figura 6.1). Esto

implica que en el instante $t = t$, el estado nominal inicial del sistema $\bar{\mathbf{x}}(t)$ tenga que ser una variable de decisión que debe tener el valor correspondiente para garantizar esta propiedad.

6.2.3. Consideraciones de estabilidad

Mediante la inclusión de la ley de control de la Ecuación (6.7) se consigue que la trayectoria real del sistema sometido a perturbaciones (6.1) esté contenido en un tubo de trayectorias que modeliza todas las posibles trayectorias del sistema a partir de un determinado estado. Esto posibilita trabajar con el sistema nominal, es decir, el no perturbado, dado que el controlador de la Ecuación (6.7) se asegura que la trayectoria real esté contenida en el tubo de trayectorias.

Por lo tanto, el siguiente paso es definir las consideraciones de estabilidad asociadas al sistema nominal, dado que luego la ley de control robusta se encargará de asegurar que la diferencia entre la trayectoria nominal y la real sea mínima y acotada. Así, las consideraciones de estabilidad serán las mismas condiciones descritas en la Sección 5.2.2.

Inclusión de un coste terminal γ en la función de coste para evaluar el estado terminal $\bar{\mathbf{x}}(t + H_p)$.

De esta forma, el estado final del sistema en el horizonte de predicción será lo más próximo posible al valor deseado $\mathbf{x}_s(H_p)$. Este coste terminal se define como una función de Lyapunov que garantiza que el sistema es estable en bucle cerrado y con restricciones. Este término se define como

$$\gamma = (\bar{\mathbf{x}}(t + H_p) - \bar{\mathbf{x}}_s(H_p))^T \mathbf{P} (\bar{\mathbf{x}}(t + H_p) - \bar{\mathbf{x}}_s(H_p)) \quad (6.11)$$

donde $\bar{\mathbf{x}}(t + H_p)$ el estado nominal final predicho, $\bar{\mathbf{x}}_s$ el punto de estabilidad que se debe alcanzar y \mathbf{P} es la matriz de ponderación.

Inclusión de una región terminal Ω como restricción en el problema de optimización.

El control predictivo debe llevar el sistema a una región del espacio de estados, que es un Conjunto Invariante positivo del sistema Ω . Esto es, si el controlador predictivo consigue llevar el sistema a esta región, un controlador local se encargará de estabilizar el sistema. Para este caso particular, este controlador local está asociado al sistema nominal y se define de la siguiente forma,

$$\bar{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{u}_s + \bar{\mathbf{K}}(\bar{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}_s) \quad (6.12)$$

donde \mathbf{u}_s y \mathbf{x}_s son las entradas de control y estados correspondientes asociados a una referencia de salida \mathbf{r} y $\bar{\mathbf{K}}$ es tal que el sistema nominal sea estable.

Esto es, el controlador de la Ecuación (6.12), para valores adecuados de $\bar{\mathbf{K}}$, hace que el sistema nominal evolucione al estado deseado una vez el sistema esté dentro de la región Ω , que es un conjunto invariante (Sección 5.3.2).

6.2.4. MPC robusto basado en tubos de trayectorias

Tras haber descrito el problema y haber definido los dos controladores locales que se requieren para la implementación del MPC robusto y estable (Ecuaciones (6.7) y (6.12)), en esta sección se detalla la formulación del MPC robusto y estable basado en tubos de trayectorias. Así, a la formulación tradicional detallada en el Capítulo 4, se le introducen las consideración de estabilidad y de control robusto de tubo de trayectorias consideradas.

Para ello se considera que la referencia es conocida, el estado actual real $\mathbf{x}(t)$ es conocido, dado que es medible en todo instante. El resto de variables que requiere el controlador serán variables de decisión y por lo tanto tendrán que ser calculados. Este es el caso del estado inicial del sistema nominal $\bar{\mathbf{x}}(t)$, que tiene que ser calculado de modo que se cumpla que la evolución real $\mathbf{x}(t+k)$ esté acotada en tubos de trayectorias, y la secuencia de control nominal a calcular $\bar{\mathbf{u}}^+ = [\bar{\mathbf{x}}(t), \bar{\mathbf{x}}(t+1), \dots, \bar{\mathbf{x}}(t+H_c-1)]^T$ a partir de la cual se calculará la secuencia real \mathbf{u} .

Así, la función de coste se define como

$$\begin{aligned}
 J = & \sum_{k=0}^{H_p-1} (\bar{\mathbf{x}}(t+k) - \bar{\mathbf{x}}_s(k))^T \mathbf{Q} (\bar{\mathbf{x}}(t+k) - \bar{\mathbf{x}}_s(k)) \\
 & + \sum_{k=0}^{H_p-1} (\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_s(k))^T \mathbf{R} (\bar{\mathbf{u}}(t+k) - \bar{\mathbf{u}}_s(k)) \\
 & + (\bar{\mathbf{x}}(t+H_p) - \bar{\mathbf{x}}_s(H_p))^T \mathbf{P} (\bar{\mathbf{x}}(t+H_p) - \bar{\mathbf{x}}_s(H_p))
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

donde \mathbf{Q} , \mathbf{R} y \mathbf{P} son las correspondientes matrices de ponderación del error de seguimiento, de control y de coste terminal; $\bar{\mathbf{x}}(t+k)$ es el estado nominal predicho y $\bar{\mathbf{x}}(t+H_p)$ es el estado final predicho; $\bar{\mathbf{x}}_s(k)$ es la trayectoria de referencia y $\bar{\mathbf{x}}_s(H_p)$ es el estado estable final asociado a la referencia de trayectoria; $\bar{\mathbf{u}}(t+k)$ es la señal de control óptima para el sistema nominal y $\bar{\mathbf{u}}_s(k)$ es el valor de la acción de control para los sucesivos puntos de estabilidad definidos por la referencia $\bar{\mathbf{x}}_s$.

La señal de control se obtiene resolviendo el siguiente problema de minimización,

$$\begin{aligned}
 J^* = & \min J \\
 & \text{s. t.} \\
 & \bar{\mathbf{x}}(t) \in \mathbf{x}(t) \oplus (-\phi_K) \\
 & [\bar{\mathbf{x}}(t+k)^T \bar{\mathbf{u}}(t+k)^T]^T \in \bar{\mathbf{Z}} \\
 & \bar{\mathbf{x}}(t+H_p) \in \Omega
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

donde ϕ_K es el RPI asociado a la ley de control (6.7) y Ω es el invariante asociado a la ley de control (6.12).

De la resolución del problema de minimización se obtienen la secuencia óptima de control nominal $\bar{\mathbf{u}}^*(k)$ y el estado inicial nominal $\bar{\mathbf{x}}(k)$. De forma que la acción de control óptima se calcula aplicando la Ecuación (6.7),

$$\mathbf{u}^*(k) = \bar{\mathbf{u}}^*(k) + \mathbf{K}(\mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{x}}^*(k)) \quad (6.15)$$

6.3. Aplicación: MPC Robusto para control lateral de vehículo utilitario

A lo largo del presente capítulo se ha desarrollado un controlador robusto MPC basado en tubos de trayectorias, lo que permite garantizar la estabilidad del controlador a pesar de las incertidumbres existentes respecto del sistema real. A continuación se va a detallar la aplicación de dicho controlador al seguimiento de trayectoria de un vehículo utilitario.

Así, el objetivo principal del controlador propuesto es minimizar tanto el error lateral del seguimiento de trayectoria como la desviación de la orientación del vehículo respecto de la referencia. Para dicho fin, el controlador optimizará la señal de la acción de control, que se corresponderá con el ángulo de giro de las ruedas δ_w . Además, se consideran restricciones físicas en la acción de control y de seguridad en el error lateral.

6.3.1. Modelo de predicción

El modelo en espacio de estados a usar para la implementación del MPC se basa en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales, obtenidas en el Capítulo 2.

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B} \bar{\mathbf{u}}(t) \quad (6.16)$$

donde el vector de estados $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ es $\mathbf{x}(t) = [y(t) \quad \dot{y}(t) \quad \psi(t) \quad \dot{\psi}(t)]^T$ siendo $y(t)$ el desplazamiento lateral y $\psi(t)$ el giro yaw y la variable de control $u \in \mathbb{R}^1$ se corresponde con el ángulo de giro de las ruedas $u(t) = \delta_w(t)$. Las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} describen el modelo del vehículo y están representadas por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2C_{\alpha F} + 2C_{\alpha R}}{m \dot{x}_{nom}} & 0 & -\frac{2l_F C_{\alpha F} - 2l_R C_{\alpha R}}{m \dot{x}_{nom}} - \dot{x}_{nom} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2l_F C_{\alpha F} - 2l_R C_{\alpha R}}{l_z \dot{x}_{nom}} & 0 & -\frac{2l_F^2 C_{\alpha F} + 2l_R^2 C_{\alpha R}}{l_z \dot{x}_{nom}} \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2 C_{\alpha F}}{m} \\ 0 \\ \frac{2 l_F C_{\alpha F}}{I_z} \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

donde $C_{\alpha F}$ y $C_{\alpha R}$ representan la rigidez en curva de los neumáticos delantero y trasero respectivamente, m es la masa total del vehículo, I_z es la inercia del vehículo en el eje z , \dot{x} es la velocidad longitudinal del vehículo en el sistema de referencia local y l_F y l_R es la distancia desde el CoG del vehículo al eje delantero y trasero respectivamente.

A diferencia de los modelos propuestos en los Capítulos 4 y 5, donde se definían modelos de predicción LTV para mejorar la precisión de la predicción de la trayectoria en función de la velocidad longitudinal del vehículo \dot{x} , el modelo propuesto en el presente Capítulo será un modelo de parámetros constantes. Este modelo se calculará para una velocidad nominal \dot{x}_{nom} no nula (Ecuación (6.17)), que habrá que seleccionar entre el rango de velocidades del vehículo. Las diferencias entre la predicción dada por este modelo y el comportamiento real del vehículo se modelarán como perturbaciones aditivas, que habrá que identificar y acotar en el rango de operación del vehículo, de modo que el controlador MPC robusto propuesto sea capaz de considerarlas.

A continuación, el modelo de vehículo descrito en la Ecuación (6.16) se discretiza con el método de Retenedor de Orden Cero y se representa, de nuevo, con la siguiente formulación en Espacio de Estados.

$$\bar{\mathbf{x}}(t+1) = \mathbf{A}_d \bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}_d \bar{u}(t) \quad (6.19)$$

donde $\bar{\mathbf{x}}(t)$ y $\bar{u}(t)$ son el vector de estados del vehículo y la señal de entrada nominales. Las matrices \mathbf{A}_d y \mathbf{B}_d son las matrices discretizadas del Espacio de Estados de las Ecuaciones (6.17) y (6.18) respectivamente.

Mediante el modelo discretizado en Espacio de Estados descrito en la Ecuación (6.19), se puede definir el modelo de predicción que será empleado en la ley de control. El modelo de predicción se define en función del vector estado, de forma que se pueden desarrollar las predicciones $\hat{\mathbf{x}}(t+k|t)$, para $k = 1, 2, \dots, H_p$, considerando en este caso un mismo horizonte de predicción y control $H_p = H_c$, por consideraciones de coste computacional.

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{x}}(t|t) &= \bar{\mathbf{x}}(t) \\
 \hat{\mathbf{x}}(t+1|t) &= \mathbf{A}_d \bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}_d \bar{u}(t) \\
 \hat{\mathbf{x}}(t+2|t) &= \mathbf{A}_d \bar{\mathbf{x}}(t+1) + \mathbf{B}_d \bar{u}(t+1) \\
 &= \mathbf{A}_d (\mathbf{A}_d \bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}_d \bar{u}(t)) + \mathbf{B}_d \bar{u}(t+1) \\
 &= \mathbf{A}_d^2 \bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d \bar{u}(t) + \mathbf{B}_d \bar{u}(t+1) \\
 &\dots \\
 \hat{\mathbf{x}}(t+H_p|t) &= \mathbf{A}_d \bar{\mathbf{x}}(t+H_p-1) + \mathbf{B}_d \bar{u}(t+H_p-1) \\
 &= \mathbf{A}_d^{H_p} \bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{A}_d^{H_p-1} \mathbf{B}_d \bar{u}(t) + \dots + \mathbf{B}_d \bar{u}(t+H_p-1)
 \end{aligned}$$

De esta secuencia, se puede extraer que el estado se puede predecir como la suma de su respuesta libre y forzada, tal y como se ha visto en Capítulos anteriores.

$$\bar{\mathbf{x}}^+ = \mathbf{G} \bar{\mathbf{u}}^+ + \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{G} \bar{\mathbf{u}}^+ + \mathbf{f} \quad (6.20)$$

donde el producto $\mathbf{G} \bar{\mathbf{u}}^+$ calcula la respuesta forzada, que define la evolución de la planta a partir de las acciones de control futuras, y $\mathbf{f} = \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(t)$ la respuesta libre.

Las matrices \mathbf{G} y \mathbf{F} son,

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_d & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d & \mathbf{B}_d & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_d^{H_p-2} \mathbf{B}_d & \mathbf{A}_d^{H_p-3} \mathbf{B}_d & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d \\ \mathbf{A}_d^2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_d^{H_p-1} \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

Además, como sucede en el controlador MPC estable del Capítulo 5, una de las condiciones de estabilidad es la inclusión de un coste terminal en la función de coste. Para poder aplicar dicha condición es necesaria la predicción del estado en el instante terminal ($t = H_p$) y se define de la siguiente forma,

$$\hat{\mathbf{x}}(t+H_p) = \mathbf{G}_{H_p} \bar{\mathbf{u}}^+ + \mathbf{F}_{H_p} \bar{\mathbf{x}}(t) \quad (6.23)$$

donde,

$$\mathbf{G}_{H_p} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d^{H_p-1} \mathbf{B}_d & \mathbf{A}_d^{H_p-2} \mathbf{B}_d & \dots & \mathbf{B}_d \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

$$\mathbf{F}_{H_p} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d^{H_p} \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

6.3.2. Parámetros del controlador

Esta sección resume las pautas propuestas para una adecuada síntesis del MPC robusto propuesto.

Sintonización de la respuesta ante incertidumbres

La matriz \mathbf{K} define la respuesta del controlador ante las incertidumbres o perturbaciones, intentando que la trayectoria nominal se acerque a la real. Por ello, interesa sintonizar esta ganancia de forma que el sistema sea robusto ante perturbaciones, es decir, interesa que el RPI ϕ_K (Ecuación (6.9)) sea lo mínimo posible. Sin embargo, esto puede llevar a que el conjunto $\bar{\mathcal{Z}}$ (Ecuación (6.10)) esté vacío, por lo que se debe calcular un valor óptimo de \mathbf{K} .

De esta forma, \mathbf{K} ha de sintonizarse para que $\mathbf{A}_a = \mathbf{A}_d + \mathbf{B}_d \mathbf{K}$ sea estable y exista un RPI ϕ_K asociado a este sistema en lazo cerrado y a las restricciones \mathcal{W} .

Sintonización de la región terminal

Una de las ganancias que definen el MPC propuesto es la ganancia $\bar{\mathbf{K}}$, que define tanto el controlador local para estabilizar el sistema en torno a la región terminal Ω , que es un invariante que depende de esta matriz, como la ponderación \mathbf{P} de la función de coste terminal.

Esta ganancia ha de sintonizarse de forma que el controlador sea lo más eficiente posible y el dominio de atracción de la región terminal Ω sea el mayor posible. Dado que en general Ω es grande, el dominio de atracción suele ser grande incluso para horizontes pequeños. Por ello, se propone sintonizar $\bar{\mathbf{K}}$ como la ganancia de un Controlador Lineal Cuadrático (LQR), siendo \mathbf{P} la solución de la ecuación de Riccati asociada a dicho controlador,

$$\mathbf{P} - (\mathbf{A}_d + \mathbf{B}_d \bar{\mathbf{K}})^T \mathbf{P} (\mathbf{A}_d + \mathbf{B}_d \bar{\mathbf{K}}) = \mathbf{Q} + \bar{\mathbf{K}}^T \mathbf{R} \bar{\mathbf{K}}$$

siendo $\bar{\mathbf{K}}$ tal que $\mathbf{A}_d + \mathbf{B}_d \bar{\mathbf{K}}$ es estable y \mathbf{P} es una matriz simétrica definida positiva.

Cabe recordar que el problema de control se define respecto al vector $\mathbf{z} = [\mathbf{x}^T \ u]$, por lo que el sistema autónomo nominal se define mediante la siguiente ecuación,

$$\bar{\mathbf{z}}(t+1) = \bar{\mathbf{A}}_a \bar{\mathbf{z}}(t) / \bar{\mathbf{A}}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d + \mathbf{B}_d \bar{\mathbf{K}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

Y por lo tanto, el Conjunto Invariante Ω es el asociado a este sistema autónomo nominal y al conjunto de restricciones $\bar{\mathcal{Z}}$.

6.3.3. Restricciones

La incorporación de consideraciones de robustez y de estabilidad en el controlador MPC conlleva la definición de una serie de restricciones en el problema de optimización. Se considerarán restricciones en los vectores de estado nominal $\bar{\mathbf{x}}$ y en la acción

de control nominal \bar{u} , de forma que sus valores queden acotados. También se tendrá en cuenta la restricción de la región terminal Ω , que es una consideración necesaria para garantizar la estabilidad del sistema. Además, se considerará la restricción que delimite el vector de estados a una región acotada y que conformará el denominado tubo de trayectorias \bar{z} .

Para el mejor entendimiento de la definición de las restricciones, se debe recordar que el resultado de la ley de control asociada al MPC robusto definido en la Ecuación (6.14) toma la forma,

$$\mathbf{v} = [\bar{u}^+ \bar{\mathbf{x}}(t)]^T \rightarrow \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{H_p 1+4} \quad (6.27)$$

Donde en adición a la secuencia de acción de control, esto es, el ángulo de giro δ_w de las ruedas, el valor del estado nominal (esto es, la posición lateral del vehículo y y el ángulo yaw ψ) es también una variable de decisión, dado que se ajusta para que el tubo de trayectorias garantice el cumplimiento de las restricciones.

Por ello, las restricciones que se detallarán a continuación, en su representación como intersección de semiespacios, se deben definir respecto de este vector.

Restricciones del vector de estados nominal y la acción de control nominal

La evolución del sistema nominal descrito en las Ecuaciones (6.17) y (6.18) está definido por el estado nominal del sistema $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{y} \ \dot{\bar{y}} \ \bar{\psi} \ \dot{\bar{\psi}}]^T$, donde \bar{y} es el desplazamiento lateral, $\dot{\bar{y}}$ la velocidad lateral, $\bar{\psi}$ define la orientación del vehículo y $\dot{\bar{\psi}}$ su velocidad. La acción de control $\bar{u} = \delta_w$ es el ángulo de giro nominal de las ruedas.

Si ambas se combinan en la variable $\bar{\mathbf{z}}$, tal que $\bar{\mathbf{z}} = [\bar{\mathbf{x}}^T \bar{u}]^T$, las restricciones asociadas a los estados y a la acción de control (definidas mediante restricciones físicas o de confort tal y como se ha visto en capítulos anteriores), pueden representarse por el siguiente politopo,

$$\bar{\mathbf{z}} \in \bar{\mathcal{Z}}, \bar{\mathbf{z}} \in \left\{ \mathbf{A}_{\bar{\mathbf{z}}} \bar{\mathbf{z}} \leq \mathbf{b}_{\bar{\mathbf{z}}} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_{\bar{\mathbf{x}}} \bar{\mathbf{x}} \leq \mathbf{b}_{\bar{\mathbf{x}}} \\ \mathbf{A}_{\bar{u}} \bar{u} \leq \mathbf{b}_{\bar{u}} \end{array} \right\} \right\} \quad (6.28)$$

Donde las restricciones del estado nominal definirán los límites de desplazamiento lateral nominal admisibles, delimitados normalmente por restricciones de seguridad, como la anchura del carril, y los límites de la acción de control vendrán impuestos por restricciones físicas o de construcción del vehículo, esto es, el máximo ángulo de giro de las ruedas directrices.

La restricción de la Ecuación (6.28) está definida en función del vector $\bar{\mathbf{z}}$, y para poder aplicarlo en el controlador, esta restricción se debe representar en función del vector de optimización \mathbf{v} . Para esta adaptación, se sigue el mismo procedimiento que el explicado en la Sección 4.3.4.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\bar{\mathbf{x}}p} \mathbf{v} &\leq \mathbf{b}_{\bar{\mathbf{x}}p} \\ \mathbf{A}_{\bar{u}p} \mathbf{v} &\leq \mathbf{b}_{\bar{u}p} \end{aligned} \quad (6.29)$$

Así, la restricción asociada a la acción de control.

$$\mathbf{A}_{\bar{u}p} = \begin{bmatrix} [diag(\mathbf{A}_{\bar{u}})_{H_p, 1 \times 1} \mathbf{0}_{H_p, 1 \times 4}] \\ -[diag(\mathbf{A}_{\bar{u}})_{H_p, 1 \times 1} \mathbf{0}_{H_p, 1 \times 4}] \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

$$\mathbf{b}_{\bar{u}p} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{H_p, 1} \mathbf{b}_u(1) \\ \mathbf{1}_{H_p, 1} \mathbf{b}_u(2) \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

La restricción para el estado, por otro lado, está representada en función del vector de estado nominal $\bar{\mathbf{x}}$ y para poder representarlo en función del vector de optimización \mathbf{v} , se emplea el modelo de predicción de la Ecuación (6.20).

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{G} \bar{\mathbf{u}}^+ + \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{M} \mathbf{v}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{F} \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

Una vez definido el modelo de predicción, las restricciones correspondientes al vector de estados nominal $\bar{\mathbf{x}}$ se pueden representar en función del vector de optimización \mathbf{v} de la siguiente forma,

$$\mathbf{A}_{\bar{x}p} = \begin{bmatrix} diag(\mathbf{A}_{\bar{x}})_{H_p, 4 \times 4} \\ -diag(\mathbf{A}_{\bar{x}})_{H_p, 4 \times 4} \end{bmatrix} \mathbf{M} \quad (6.33)$$

$$\mathbf{b}_{\bar{x}p} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{H_p, 4} \mathbf{b}_u(1 \dots 4) \\ \mathbf{1}_{H_p, 4} \mathbf{b}_u(5 \dots 8) \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

Restricción para generar el tubo de trayectorias

El tubo de trayectorias está ligado a una ley de control local (Ecuación (6.7)), que se encarga de acotar el efecto de las desviaciones entre la predicción basada en el modelo nominal $\bar{\mathbf{x}}$ y la evolución real del sistema \mathbf{x} . Este controlador tiene asociado un invariante ϕ_K , que define el “grosor” del tubo de trayectorias, y que garantiza que si el error (Ecuación (6.6)) está contenido en este invariante, su evolución queda acotada al mismo.

De este modo, la relación entre el estado real del sistema $\mathbf{x}(t)$ y el estado nominal $\bar{\mathbf{x}}(t)$,

$$\bar{\mathbf{x}}(t+k) = \mathbf{x}(t) + (-\phi_K) \quad (6.35)$$

Con el fin de definir la restricción asociada al tubo de trayectorias, primero se ha de colocar el invariante ϕ_K sobre el estado medido en el instante $t = t$, $\mathbf{x}(t)$, con el fin de definir un entorno ϕ_{K0} en el que tiene que estar contenido el estado nominal $\bar{\mathbf{x}}(t)$, para que se cumpla la Ecuación (6.6).

$$\phi_{K0} = \mathbf{x}(t) + (-\phi_K) \quad (6.36)$$

El entorno ϕ_{K0} acota los posibles valores de $\bar{\mathbf{x}}(t)$ en $t = t$, pero dado que la variable a minimizar es \mathbf{v} , ha de proyectarse este politopo en el espacio definido por este último,

$$\phi_{K0}^v = \text{proj}_v(\phi_{K0}) \quad (6.37)$$

Así, se puede representar la restricción para generar el tubo de trayectorias en función del vector de optimización,

$$\phi_{K0}^v = \{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{H_p \cdot 1 + 4} : \mathbf{A}_{\phi_K} \mathbf{v} \leq \mathbf{b}_{\phi_K} \} \quad (6.38)$$

Restricción terminal

La restricción terminal asegura que el controlador MPC lleva el sistema a un estado terminal nominal $\bar{\mathbf{x}}(H_p)$ que está contenido dentro de un invariante Ω , asociado al controlador local de la Ecuación (6.12) que garantiza la estabilidad del sistema nominal en este entorno.

$$\bar{\mathbf{x}}(H_p) \in \Omega \quad (6.39)$$

El cálculo de este invariante Ω depende de la ganancia del controlador local $\bar{\mathbf{K}}$ (Sección 5.3.2, y se puede representar como intersección de semiespacios.

$$\mathbf{A}_{\Omega} \bar{\mathbf{x}}(H_p) \leq \mathbf{b}_{\Omega} \quad (6.40)$$

Con el fin de definir esta restricción en términos del vector optimizado \mathbf{v} , se ha de reformular la anterior restricción en términos de este último. Así, esta restricción asegura que el sistema se lleva a la región del espacio de estados Ω , que es la región en la que el controlador local estabiliza el sistema (Ecuación 6.39).

Previamente se ha definido el modelo de predicción para el estado final, que se corresponde con

$$\hat{\mathbf{x}}(H_p) = \mathbf{G}_{H_p} \mathbf{u}^+ + \mathbf{F}_{H_p} \mathbf{x}(t) \quad (6.41)$$

Reescribiendo el cálculo de $\hat{\mathbf{x}}$ en términos de $\bar{\mathbf{z}}(H_p)$ y posteriormente del vector a optimizar \mathbf{v} ,

$$\bar{\mathbf{z}}(H_p) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{H_p} & \mathbf{G}_{H_p} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{H_p} \mathbf{v} \quad (6.42)$$

Con lo que se puede definir la restricción terminal de la siguiente forma,

$$\mathbf{A}_{\Omega} \mathbf{M}_{H_p} \mathbf{v} \leq \mathbf{b}_{\Omega} \quad (6.43)$$

6.3.4. Función de coste

La función de coste propuesta junto con las restricciones descritas anteriormente, penaliza el desvío respecto de la trayectoria de referencia, la distancia lateral y el ángulo yaw del sistema nominal y el esfuerzo de control garantizando la estabilidad del problema.

Así, la función de coste se define como

$$\begin{aligned}
 J = & \sum_{k=0}^{H_p-1} (\bar{\mathbf{x}}(t+k) - \mathbf{x}_s(k))^T \mathbf{Q} (\bar{\mathbf{x}}(t+k) - \mathbf{x}_s(k)) \\
 & + \sum_{k=0}^{H_p-1} (\bar{u}(t+k) - u_s(k))^T \mathbf{R} (\bar{u}(t+k) - u_s(k)) \\
 & + (\bar{\mathbf{x}}(t+H_p) - \mathbf{x}_s(H_p))^T \mathbf{P} (\bar{\mathbf{x}}(t+H_p) - \mathbf{x}_s(H_p))
 \end{aligned} \tag{6.44}$$

donde \mathbf{Q} , \mathbf{R} y \mathbf{P} son las correspondientes matrices de ponderación del error de seguimiento, de control y de coste terminal; $\bar{\mathbf{x}}(k+j) = [y(t) \quad \dot{y}(t) \quad \psi(t) \quad \dot{\psi}(t)]^T$ es el estado nominal predicho, donde los variables de estado son la posición lateral, la velocidad lateral, la orientación yaw y la velocidad yaw respectivamente; $\bar{\mathbf{x}}(t+H_p)$ es el estado final predicho; $\mathbf{x}_s(k)$ son los estados estables asociados a la trayectoria de referencia \mathbf{r} y $\mathbf{x}_s(H_p)$ es el estado estable final asociado a la referencia de trayectoria $\mathbf{r}(H_p)$; $\bar{u} = \delta_w$ es la señal de control óptima para el sistema nominal y \bar{u}_s es el valor de la acción de control para los sucesivos puntos de estabilidad definidos por la referencia \mathbf{x}_s .

Los futuros valores de la acción de control \bar{u}_s para los sucesivos puntos de estabilidad se establecen nulos, con el fin de minimizar la variación de las acciones de control y garantizar una conducción más suave. En cuanto a los estados estables \mathbf{x}_s , éstos están asociados a la trayectoria de referencia para los futuros instantes \mathbf{r} . Esta referencia se calcula según lo descrito en la Sección 4.4.3 para todos los instantes del Horizonte de predicción H_p desde el instante actual. Las referencias para la posición lateral \mathbf{r}_y y para el ángulo yaw \mathbf{r}_ψ se calculan del mismo modo que en la Sección 4.4.3. Las referencias para la velocidad lateral, \dot{y} , la velocidad en yaw $\dot{\psi}$ se suponen nulas con el fin de minimizar la variación de estas señales. Así, el vector \mathbf{r} para las trayectoria de referencia se calcula de forma que,

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{y0} \\ 0 \\ \mathbf{r}_{\psi0} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{y1} \\ 0 \\ \mathbf{r}_{\psi1} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{y2} \\ 0 \\ \mathbf{r}_{\psi2} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{y H_p} \\ 0 \\ \mathbf{r}_{\psi H_p} \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{(H_p+1)4 \times 1} \quad (6.45)$$

Así, de este vector de trayectoria de referencia se extrae el vector de estados estables para los instantes $t = 0, 1, \dots, H_p - 1$

$$\mathbf{x}_s(t+j) = \mathbf{r}[1 \dots 4 H_p \times 1]$$

Y el estado estable final para el instante $t = H_p$

$$\mathbf{x}_s(t + H_p) = \mathbf{r}[4 H_p + 1 \dots 4(H_p + 1) \times 1]$$

6.3.5. Ley de Control

La señal de control se obtiene resolviendo el siguiente problema de minimización, tal y como se ha visto en la Sección 6.2.4,

$$\begin{aligned} J^* &= \min J \\ &s. t. \\ &\bar{\mathbf{x}}(t+k) \in \mathbf{x}(t) \oplus (-\phi_K) \\ &\bar{\mathbf{z}}(t+k) \in \bar{\mathbf{Z}} \\ &\bar{\mathbf{x}}(t+H_p) \in \Omega \end{aligned} \quad (6.46)$$

De la resolución del problema de minimización se obtienen el vector de optimización \mathbf{v} , de donde se extrae la secuencia óptima de control nominal $\bar{\mathbf{u}}^*(t)$ y el estado inicial nominal $\bar{\mathbf{x}}(t)$. Usando ambas se calcula la secuencia de control óptima $\mathbf{u}^*(t)$

$$\mathbf{u}^*(t) = \bar{\mathbf{u}}^*(t) + \mathbf{K}(\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}^*(t)) \quad (6.47)$$

de la que se aplica sólo el primer instante.

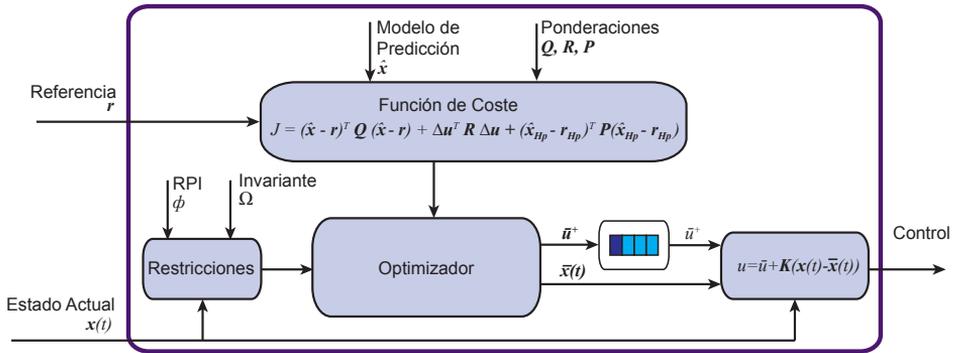


Figura 6.2: Resumen del controlador robusto

Esta ley de control se resume en la Figura 6.2 para el instante t . La función de coste J se compone mediante el modelo de predicción $\hat{\mathbf{x}}$, las matrices de ponderación \mathbf{Q} , \mathbf{R} y \mathbf{P} y la señal de referencia \mathbf{r} , que se minimiza con un optimizador cuadrático y considerando las restricciones impuestas para conseguir el vector de optimización \mathbf{v} . Se imponen restricciones en el vector de estados y en la acción de control, así como restricciones para garantizar la estabilidad y robustez del sistema, mediante el RPI ϕ y del conjunto invariante Ω . De este vector de optimización se obtiene la secuencia de control nominal óptima \mathbf{u}^* , de donde sólo se considera el primer valor $\bar{\mathbf{u}}^*(t)$, y el estado nominal inicial óptimo $\bar{\mathbf{x}}^*(t)$. Estos datos se emplean para calcular la señal de control $u(t)^*$ que se debe aplicar.

6.4. Validación

Tras el desarrollo del MPC robusto basado en tubos de trayectorias con estabilidad garantizada se procede a su validación. En primer lugar se definirá el entorno de simulación y las pruebas a realizar y posteriormente se validarán los resultados obtenidos.

6.4.1. Entorno de simulación

Para el diseño e implementación de este controlador se selecciona la herramienta Matlab/Simulink [64] que permite de forma sencilla diseñar diferentes controladores y analizar los resultados. Además, esta herramienta posibilita la cosimulación del controlador a diseñar con un modelo de vehículo virtual procedente de otros software comerciales, como es el caso de CarSim, que se empleará en este trabajo [95].

De este modo, el entorno de simulación propuesto es el representado en la Figura 6.3. El generador de referencia provee al controlador MPC de las futuras posiciones y orientaciones que debe alcanzar \mathbf{r} para cada iteración. El controlador robusto MPC

basado en tubos de trayectorias y estabilidad garantizada calcula la acción de control óptima que cumpla todas las consideraciones y aplica dicha señal de control, el ángulo de giro de las ruedas, sobre el vehículo, que estará representado por el software CarSim. Este software de simulación aportará la posición y orientación del CoG del vehículo y su velocidad (\mathbf{x} and $\dot{\mathbf{x}}$) para cada iteración.

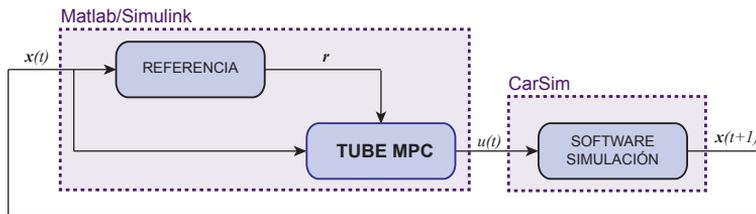


Figura 6.3: Diagrama de la propuesta de MPC con estabilidad

La configuración y parámetros seleccionados en el software de simulación CarSim se pueden encontrar en la Sección 4.5.1.

Además, a diferencia de los capítulos anteriores donde se proponen modelos de predicción LTV dependientes de la velocidad longitudinal del vehículo, en el presente capítulo se propone el uso de un modelo nominal calculado para una velocidad nominal \dot{x}_{nom} . Esta velocidad se ha establecido en $\dot{x}_{nom} = 80 \text{ km/h}$, ya que experimentalmente se ha comprobado que al ser un valor medio en el rango de velocidades efectivas, el modelo se desvía menos que al considerar otras velocidades nominales de los extremos del rango de velocidades efectivas.

6.4.1.1. Sintonización MPC

En esta sección se procede a la definición de los diferentes parámetros que se emplean para la sintonización del MPC detallado en la Sección 6.3.

En el controlador propuesto en el presente capítulo se ha establecido el mismo valor de Horizonte de predicción y control $H_p = H_c = 15$. Esto se debe a que en la Sección 2.4 se comprobó que el error de predicción del modelo incrementa al aumentar el Horizonte de predicción. Dado que se va a emplear un modelo mismo modelo nominal para todo el rango de velocidades efectivas, se disminuye el Horizonte de predicción para reducir las incertidumbres del modelo. Además, se comprobó en la Sección 2.4, que este nuevo Horizonte de predicción H_p obtiene buenos resultados. Los parámetros se para la sintonización del MPC robusto con estabilidad garantizada se recogen en la Tabla 6.1.

Por su parte, los valores de las matrices de ponderación se han escogido experimentalmente tras una serie de simulaciones. Se han escogido unos valores que incentiven la suavidad de la señal de la acción de control, esto es, el ángulo de giro de las ruedas, para generar una conducción más confortable y sin cambios bruscos en la dirección. Al procurar una señal más suave en el control, los errores de seguimien-

Tabla 6.1: Parámetros de sintonización del MPC

Parámetro		Valor
t_p	Tiempo de previsualización	1,125 s
H_p	Horizonte de predicción	15
H_c	Horizonte de control	15
\mathbf{Q}	Ponderación estado	$diag(1, 1, 1, 1)$
R	Ponderación control	100

to de trayectoria son mayores que con una señal más agresiva, pero la diferencia es aceptable.

6.4.1.2. Identificación de perturbaciones

Con el fin de acotar el valor máximo de la perturbación del vector estado $\mathbf{w}(k)$, se ha planteado una trayectoria representativa. Esta trayectoria se ha escogido buscando las situaciones más críticas, abarcando todo el rango de velocidades operacionales propuestas (de 120 a 30 km/h) y generando giros exigentes para la ley de control (Figura 6.4)

Con el fin de obtener los diferentes valores de $\mathbf{w}(t)$ se ha simulado la planta en lazo cerrado, utilizando una formulación MPC. Con el fin de determinar los valores máximos de las perturbaciones del estado $\mathbf{w}(t)$, se han capturado los valores de la señal de entrada a la planta y el estado considerando el desvío en un tiempo de muestreo respecto del modelo nominal ($\dot{x} = 80 \text{ km/h}$). De este modo $\mathbf{w}(k)$ se calcula como la diferencia entre el modelo nominal y las salidas obtenidas de la planta real, a partir de un estado, es decir,

$$\mathbf{w}(k+1) = \hat{\mathbf{x}}'(k+1) - [\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}'(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}] \quad (6.48)$$

donde $\hat{\mathbf{x}}'(k)$ y \mathbf{u} son los datos capturados de la planta real, que en este caso ha sido el vehículo simulado en CarSim.

Los resultados se muestran en la Figura 6.5. Tal y como se puede observar, el valor de $\mathbf{w}(k) = [w_y \ w_{\dot{y}} \ w_{\psi} \ w_{\dot{\psi}}]^T$ a lo largo de la trayectoria propuesta puede ser acotado de tal forma que,

$$\begin{aligned} w_y &\in [-0,0129, 0,0130] \quad (m) \\ w_{\dot{y}} &\in [-0,3258, 0,3253] \quad (m/s) \\ w_{\psi} &\in [-0,0107, 0,0111] \quad (rad) \\ w_{\dot{\psi}} &\in [-0,1706, 0,1769] \quad (rad/s) \end{aligned} \quad (6.49)$$

Nótese que los valores mínimos y máximos definidos en la Ecuación (6.49) permiten la definición de un politopo convexo \mathcal{W} tal que cualquier perturbación $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$

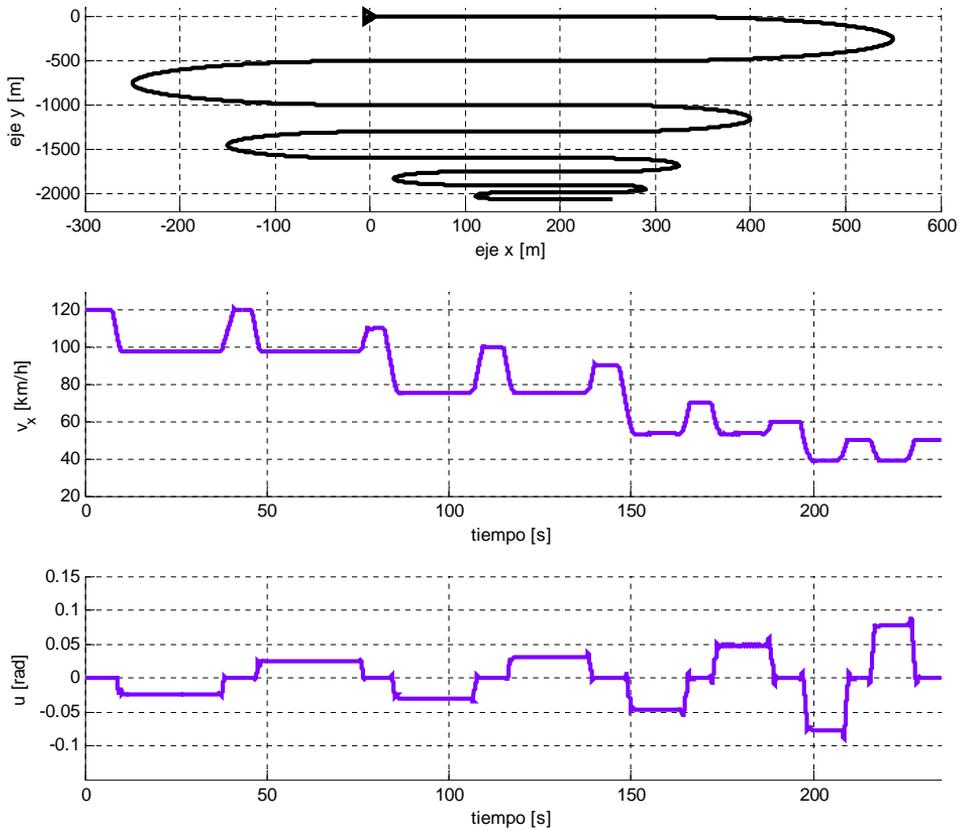


Figura 6.4: Trayectoria propuesta para el cálculo de $\mathbf{w}(t)$

6.4.1.3. Restricciones

Las restricciones consideradas son las mismas que se recogen en la Sección 4.5.1.1 y afectan al desplazamiento lateral y y al ángulo yaw ψ .

6.4.1.4. Sintonización de los controladores locales

En primer lugar se deben sintonizar los dos controladores locales, el controlador local \mathbf{K} que hace evolucionar al sistema para que la diferencia entre el sistema nominal y el real sea mínima; y el controlador local $\bar{\mathbf{K}}$, para el sistema nominal, que garantiza la estabilidad del sistema llevándolo a una región terminal junto con la matriz de ponderación \mathbf{P} , que pondera el coste terminal.

Así, el controlador local \mathbf{K} se aproxima mediante el método deathbeat para que la respuesta sea rápida y se valida experimentalmente, obteniendo el siguiente valor.

$$\mathbf{K} = [-0,6625 \quad -0,0806 \quad -5,0762 \quad -0,0501]$$

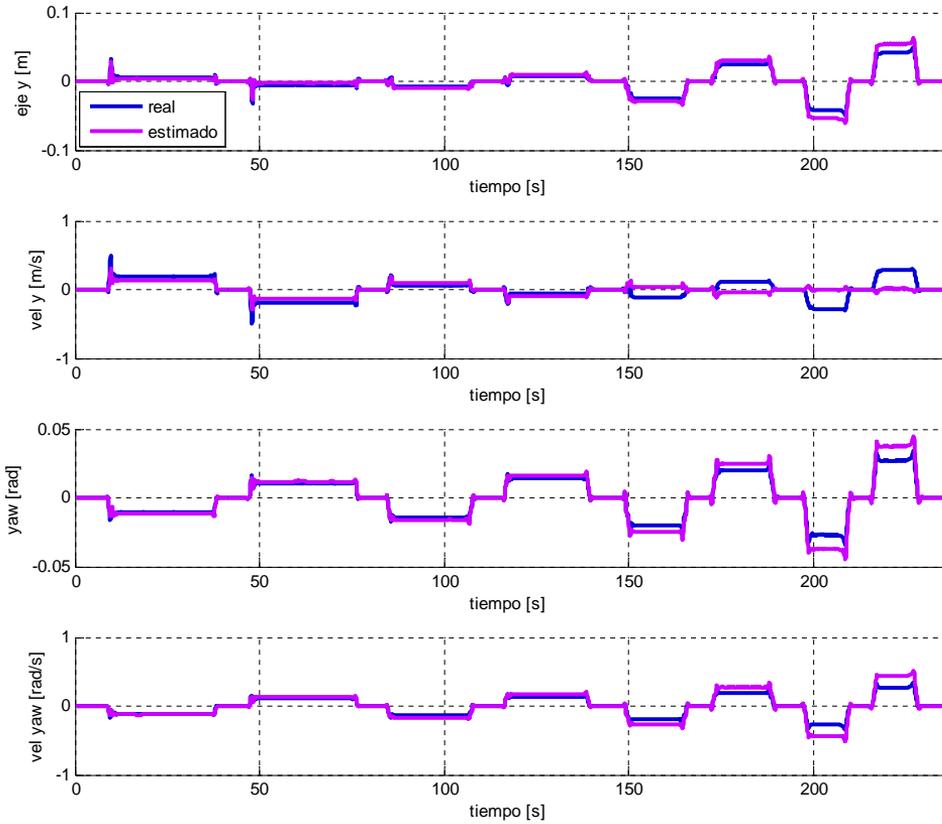


Figura 6.5: Evolución de $\mathbf{w}(t)$ para la trayectorias propuestas

El controlador nominal $\bar{\mathbf{K}}$ y la matriz de ponderación \mathbf{P} asociada al mismo se sintonizan mediante un optimizador cuadrático para el sistema nominal. Su cálculo se recoge en 5.3.2. Los valores obtenidos son los siguientes.

$$\bar{\mathbf{K}} = [-0,1257 \quad -0,02813 \quad -1,2918 \quad -0,0907]$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 4,6258 & 0,3727 & 18,4109 & 0,1968 \\ 0,3727 & 1,2341 & 2,2642 & -0,3776 \\ 18,4109 & 2,2642 & 154,9563 & 2,9141 \\ 0,1968 & -0,3776 & 2,9141 & 1,9461 \end{bmatrix}$$

Una vez conocido el controlador local \mathbf{K} se puede sintonizar el RPI ϕ_K (Figura 6.6). Además, se conocen las restricciones del sistema $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$ (Sección 6.4.1.3), por lo que se puede definir el Conjunto Invariante $\bar{\mathbf{z}} \in \bar{\mathcal{Z}}$, que genera el denominado tubo de trayectorias (Figura 6.7). Obsérvese que $\bar{\mathcal{Z}}$ está contenido en \mathcal{Z} , para formar un

conjunto más restrictivo y que ante cualquier perturbación del sistema \mathcal{W} se satisfagan las restricciones.

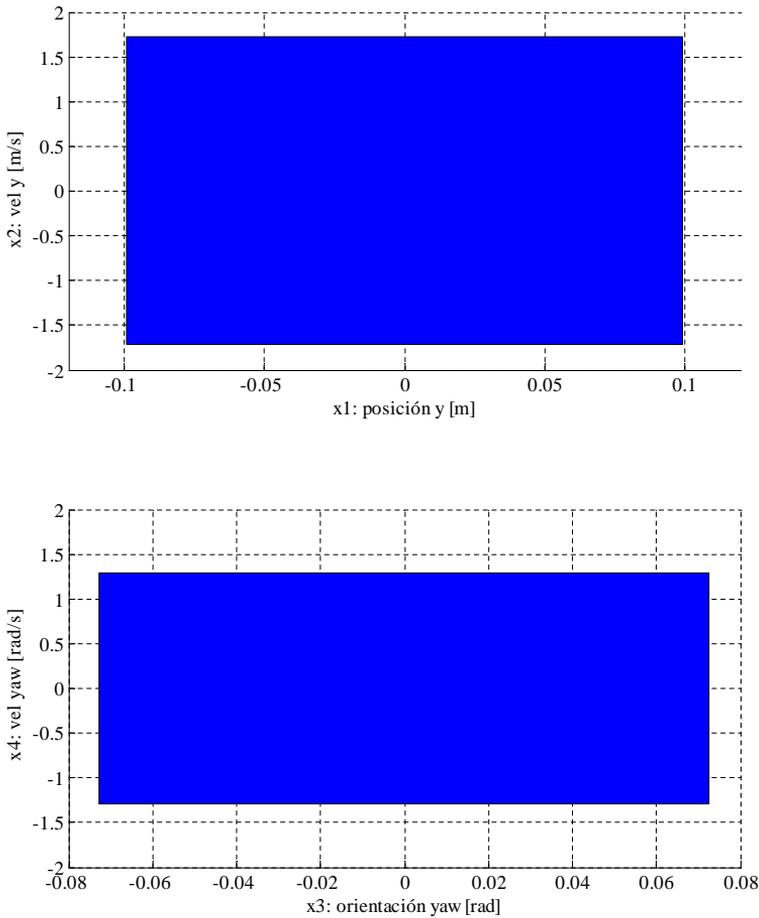


Figura 6.6: Representación de RPI ϕ_K

Asociado al controlador local nominal $\bar{\mathbf{K}}$ se calcula el conjunto terminal Ω (Figura 6.8), que adquiere la representación de la Figura 6.8 y calculado según el método indicado en la Sección 6.3.2.

6.4.1.5. Escenarios de simulación

Los escenarios propuestos para la validación del controlador MPC con modelo LTV con estabilidad garantizada se presentan a continuación, que serán los mismos que en la Sección 4.5.1.3: El escenario 1 con dos curvas abiertas en el que se realizan ensayos a diferentes velocidades máximas, el Escenario 2 consistente en dos curvas más cerradas que las del escenario anterior en las que también se realizan diferentes

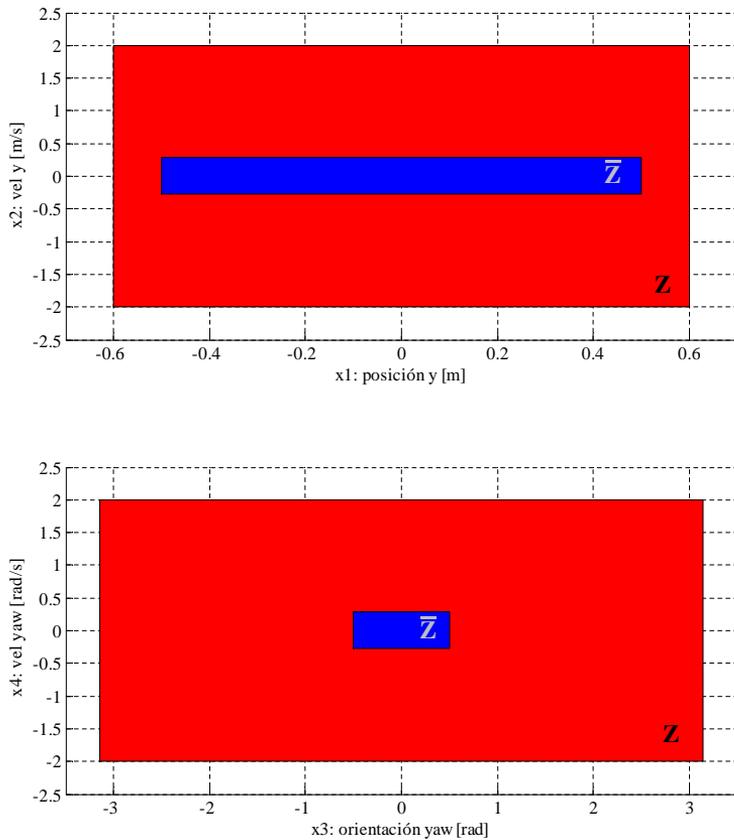


Figura 6.7: Representación de los conjuntos \bar{Z} y Z

ensayos a diferentes velocidades máximas y el Escenario 3 que se corresponde con un circuito con diferentes tipos de trazados y en la que la velocidad es variable.

De esta forma, se pretende validar el controlador para un amplio rango de velocidades de 30 a 120 km/h y para diferentes tipos de trazado, siempre cumpliendo las restricciones de seguridad y confort y de robustez y estabilidad mediante la formulación introducida en el presente capítulo.

6.4.2. Resultados

Con el fin de validar el controlador de seguimiento de trayectoria para un vehículo utilitario propuesto, se han llevado a cabo una serie de simulaciones en tres escenarios diferentes. De esta forma, se pretende validar el controlador para un amplio rango de velocidades de 30 a 120 km/h y para diferentes tipos de trazado, siempre cumpliendo las restricciones de seguridad y confort.

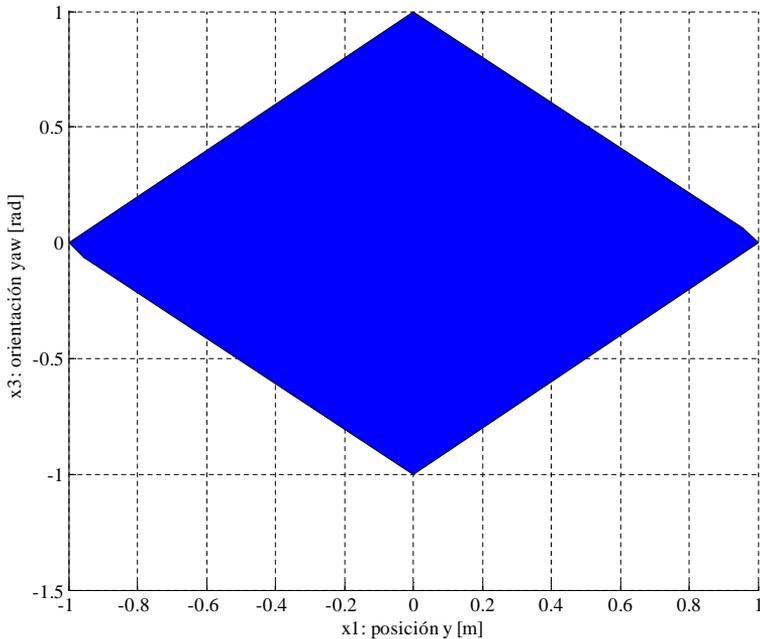


Figura 6.8: Representación de la región terminal Ω

Escenario 1: Curvas abiertas

Los resultados para el primer escenario se muestran en la Figura 6.9, donde la trayectoria son dos curvas abiertas que se toman a diferentes velocidades para cubrir todo el rango efectivo. Se han realizado cinco ensayos, cada uno con una velocidad longitudinal máxima de: 30 *km/h*, 50 *km/h*, 80 *km/h*, 100 *km/h* y 120 *km/h*. En el caso del ensayo a 120 *km/h*, con el fin de no superar los límites de confort impuestos en el conductor virtual de CarSim, la velocidad se reduce a los 100 *km/h* durante las curvas.

En primer lugar se observa la variación del error lateral *y* para las diferentes velocidades. A velocidades bajas, el error es muy reducido; a 30 *km/h* el error es prácticamente nulo mientras que a 50 *km/h* el error máximo es de 0,08 *m*, lo que supone un 13,3% del error máximo admisible. Por el contrario, cuando la velocidad es elevada, siendo 100 *km/h* la velocidad máxima en curva en este escenario, el error alcanza un valor de 0,34 *m*, lo que supone un 56,6% del error lateral máximo. Por lo tanto, a pesar una trayectoria poco exigente, el error que se alcanza es elevado, aunque el vehículo permanece satisfactoriamente en el carril cumpliendo las restricciones impuestas.

En cuando a la acción de control, se puede observar que aunque se trabaje directamente con la acción de control y no con la variación de la acción de control como en casos anteriores, ésta varía de forma suave y sin generar cambios bruscos

en la dirección. El valor máximo se alcanza a velocidades elevadas y es de $0,02 \text{ rad}$, un valor reducido, por lo que a pesar de existir un error lateral superior al 50 %, el vehículo circula de forma segura y confortable por el carril.

Escenario 2: Curvas cerradas

Los resultados para el segundo escenario se ilustran en la Figura 6.10. Del mismo modo que el escenario anterior, se plantea una trayectoria con dos curvas, aunque éstas son más cerradas, y se analiza el comportamiento del vehículo mediante cinco ensayos a diferentes velocidades longitudinales de 30 km/h , 50 km/h , 80 km/h , 100 km/h y 120 km/h . Sin embargo, debido a la exigencia de la trayectoria, para tomar la curva, las velocidades longitudinales se reducen en cada ensayo.

En este escenario se observa como nuevamente, para velocidades reducidas el error lateral es pequeño, siendo su valor máximo $0,13 \text{ m}$ a 30 km/h . Sin embargo, para los ensayos para el resto de velocidades longitudinales máximas, el error lateral alcanza los $0,37 \text{ m}$ lo que supone un error del 61,6 %. Por lo tanto, en este escenario más exigente, aun para velocidades relativamente bajas, como 50 km/h , el error lateral es considerable.

Al comprobar la acción de control aplicada, nuevamente ésta varía de forma suave, aunque alcanza valores superiores de $0,05 \text{ rad}$, más del doble que el caso anterior. Nótese que este valor es prácticamente el mismo para los 5 ensayos propuestos. Por lo tanto, mediante los dos primeros escenarios se valida el funcionamiento correcto del controlador propuesto, ya que el vehículo es capaz de circular por trayectorias exigente cumpliendo las restricciones impuestas de forma robusta y con estabilidad garantizada.

Escenario 3: Circuito

Los resultados de la simulación para una vuelta se muestran en la Figura 6.11, donde el punto de inicio y el sentido de giro se muestran mediante una flecha. En este recorrido, la velocidad varía notablemente en función del punto de la trayectoria donde se encuentre el vehículo, generando una velocidad variable desde $38,7 \text{ km/h}$ hasta la velocidad máxima de 120 km/h .

En esta figura se puede comprobar la evolución del error lateral a lo largo de la vuelta al circuito, que varía desde valores pequeños hasta valores elevados de hasta $\pm 0,43 \text{ m}$ durante todo el recorrido. Este error máximo se da en momentos puntuales del trazado, en curvas cerradas, pero no es un valor que se mantenga constante a lo largo de varios metros del recorrido ya que el controlador es capaz de redirigir el vehículo y reducir este error.

En cuando al análisis de la acción de control, se observa como es una señal más agresiva que en casos anteriores, alcanzando valores máximos de hasta $0,1363 \text{ rad}$, aunque se trate de un valor considerablemente menor que el valor máximo. A pesar de

tratarse de una conducción más agresiva con ángulos de giro de las ruedas elevados, la variación de esta señal se comprueba que no es muy brusca .

Por lo tanto, el control robusto MPC basado en tubos de trayectorias desarrollado, basado en un modelo lineal nominal de un vehículo a 80 km/h , es capaz de predecir la salida del vehículo y limitar su movimiento lateral, de forma que el vehículo se mantiene en su carril cumpliendo las restricciones impuestas y para un amplio rango de velocidades. Los resultados demuestran la efectividad de la propuesta.

Comparativa de los tres controladores propuestos para el Escenario 3

En último lugar se analizan los tres resultados de los tres controladores propuestos en la presente tesis: el MPC con modelo LTV, el MPC con modelo LTV y estabilidad garantizada y el MPC robusto basado en tubos de trayectorias y con estabilidad garantizada. La comparativa de los resultados para el Escenario 3 se ilustra en la Figura 6.12.

Claramente se puede apreciar en el error lateral cómo para el caso robusto los errores laterales son mucho más elevados que para el resto de los casos anteriores. Esto se debe a que este controlador garantiza que el sistema evoluciona hacia estados robustamente admisibles considerando las restricciones impuestas y garantizando su estabilidad. Por esta razón, el primer caso planteado es el que en cuanto a error lateral mejores resultados obtiene en simulación. En el caso del controlador MPC con estabilidad garantizada genera también errores laterales reducidos, a excepción de la curva cerrada tomada en el instante $t = 35 \text{ s}$, donde alcanza el límite de la restricción impuesta. Nótese que el controlador robusto es capaz de evitar ese estado crítico.

En cuanto a la señal de control, se puede observar como en los tres casos tiene la misma tendencia, aunque la acción de control para el controlador MPC robusto es ligeramente más agresiva que en los casos anteriores.

6.5. Conclusiones

A la hora de modelar un sistema, se debe asumir que existirá una discrepancia entre el sistema real y el modelo. Esta diferencia puede tener un valor relativamente pequeño y estar acotado, de forma que no comprometa la eficiencia del controlador. Sin embargo, se pueden dar ocasiones en las que esas incertidumbres no son despreciables y se debe incorporar en el diseño del sistema de control, por lo que se debe plantear el uso de controladores robustos. El controlador MPC robusto planteado en el presente capítulo se trata de un MPC basado en tubos de trayectorias y con estabilidad garantizada. Este controlador, es capaz de llevar al sistema a cualquier referencia robustamente admisible cumpliendo las restricciones y ante las incertidumbres que presente el sistema.

De esta forma, el controlador MPC robusto planteado considera un modelo de vehículo nominal para una determinada velocidad de 80 km/h , por lo que se asume que existirá un error no despreciable entre el modelo y el sistema, ya que se quiere

emplear en el control del sistema en un rango de velocidades de entre 30 y 120 km/h . Así, el controlador robusto planteado fuerza a que la evolución del error esté acotado, formando lo que se denomina el tubo de trayectorias.

Este controlador MPC robusto propuesto en el presente capítulo se ha validado para los tres escenarios propuestos a lo largo de la tesis, abordando su validez para un amplio rango de velocidades y diferentes tipos de trazado. Los dos primeros escenarios consisten en dos trazados con curvas más y menos abiertas sobre las que se realizan diferentes ensayos a diferentes velocidades máximas. En estos ensayos, el controlador es capaz de conducir el vehículo de forma segura, con una acción de control, correspondiente al ángulo de giro de las ruedas $u = \delta_w$ que varía suavemente y con un error lateral máximo de 0,37 m , que es inferior a las restricciones impuestas de 0,6 m . En el último escenario, el más exigente de los planteados ya que se trata de un circuito con giros muy cerrados, además de validar el controlador, se realiza una comparativa con las propuestas presentadas en los Capítulos 4 y 5. Se puede observar en esta comparativa que el error lateral es más grande a lo largo de toda la vuelta del circuito, alcanzando un error máximo de $\pm 0,43 m$. Sin embargo, esto se debe a que este controlador garantiza que el sistema evoluciona hacia estados robustamente admisibles considerando las restricciones impuestas y garantizando su estabilidad. Así, la el controlador robusto MPC basado en tubos de trayectorias y estabilidad garantizada queda validado.

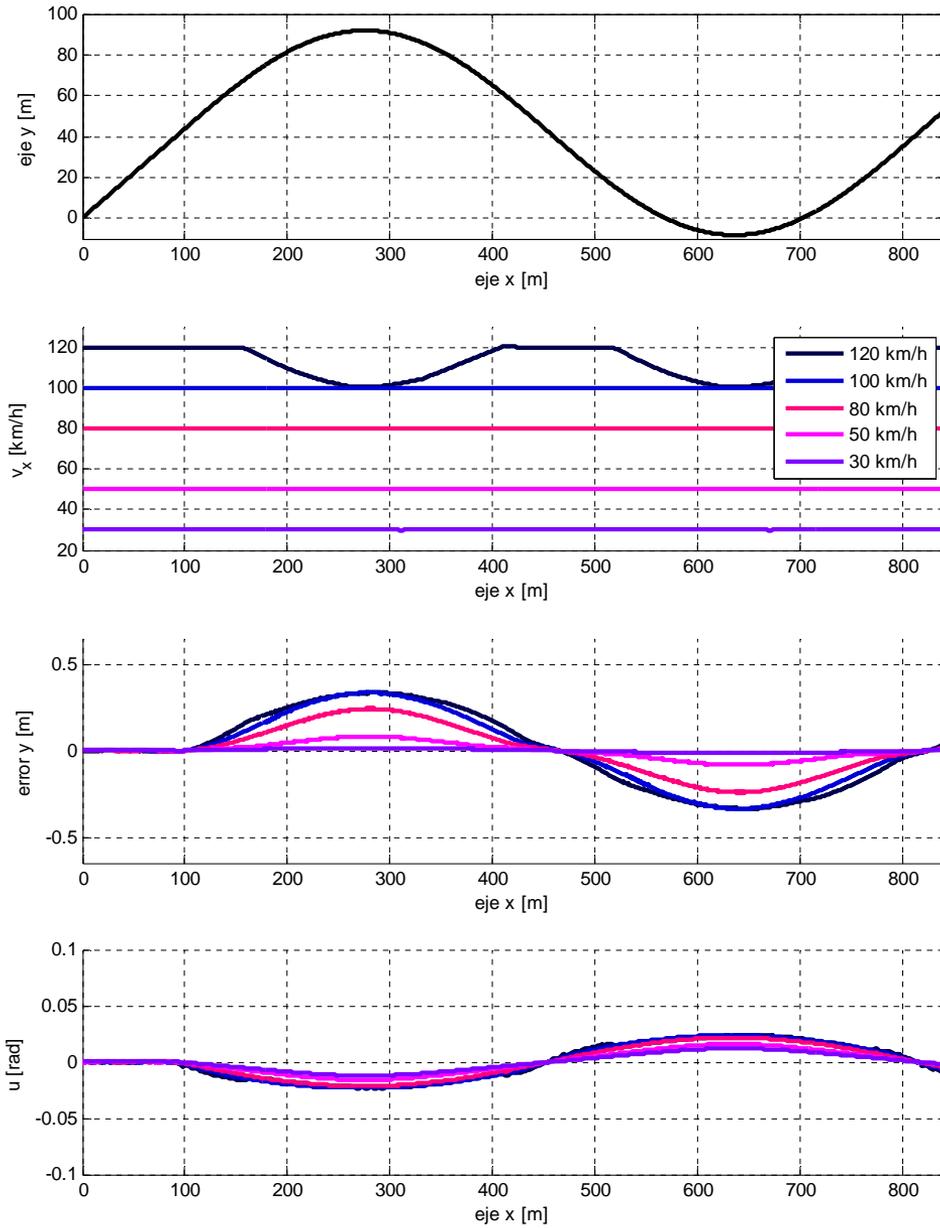


Figura 6.9: **Escenario 1:** Resultados para dos curvas abiertas

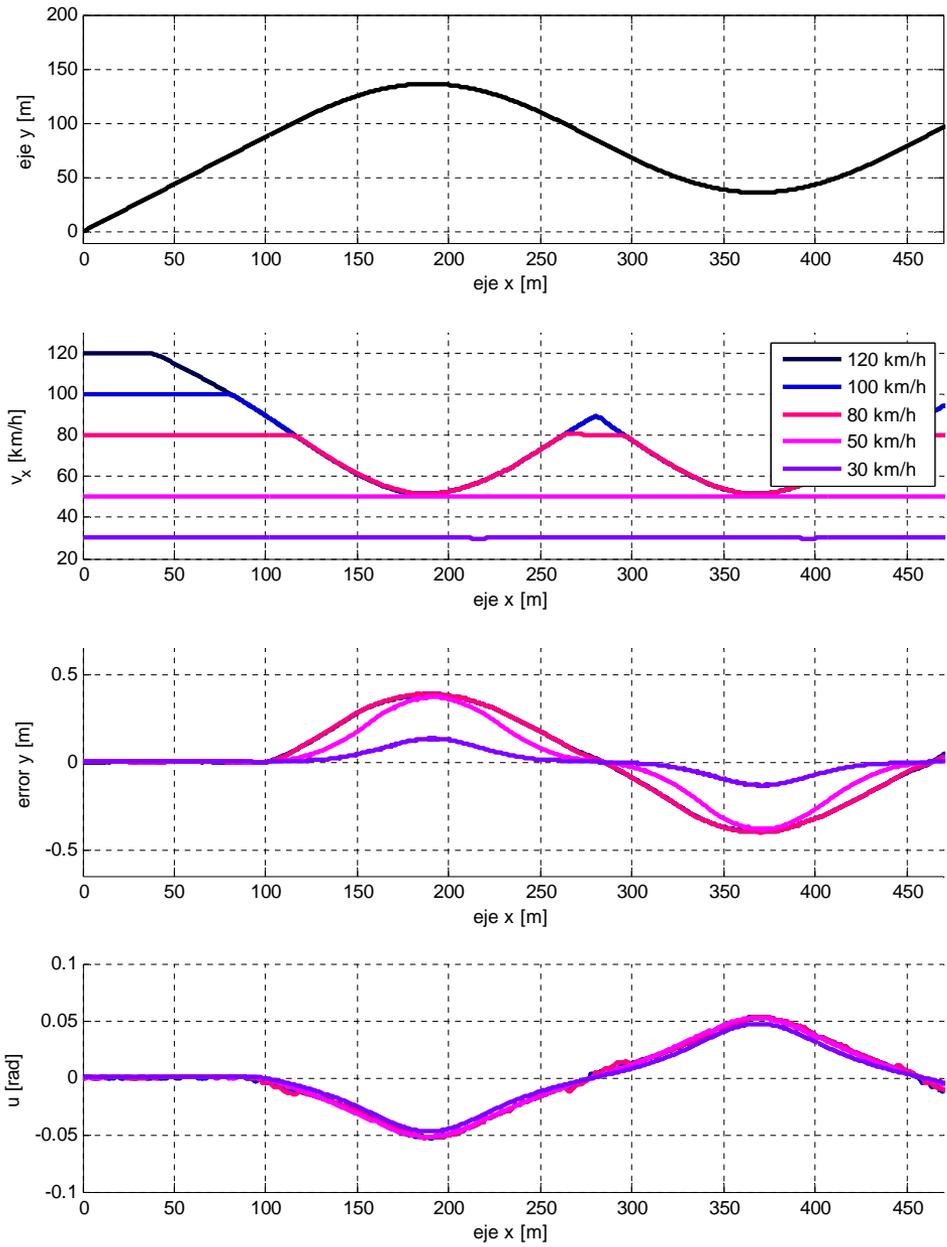


Figura 6.10: **Escenario 2**: Resultados para dos curvas cerradas

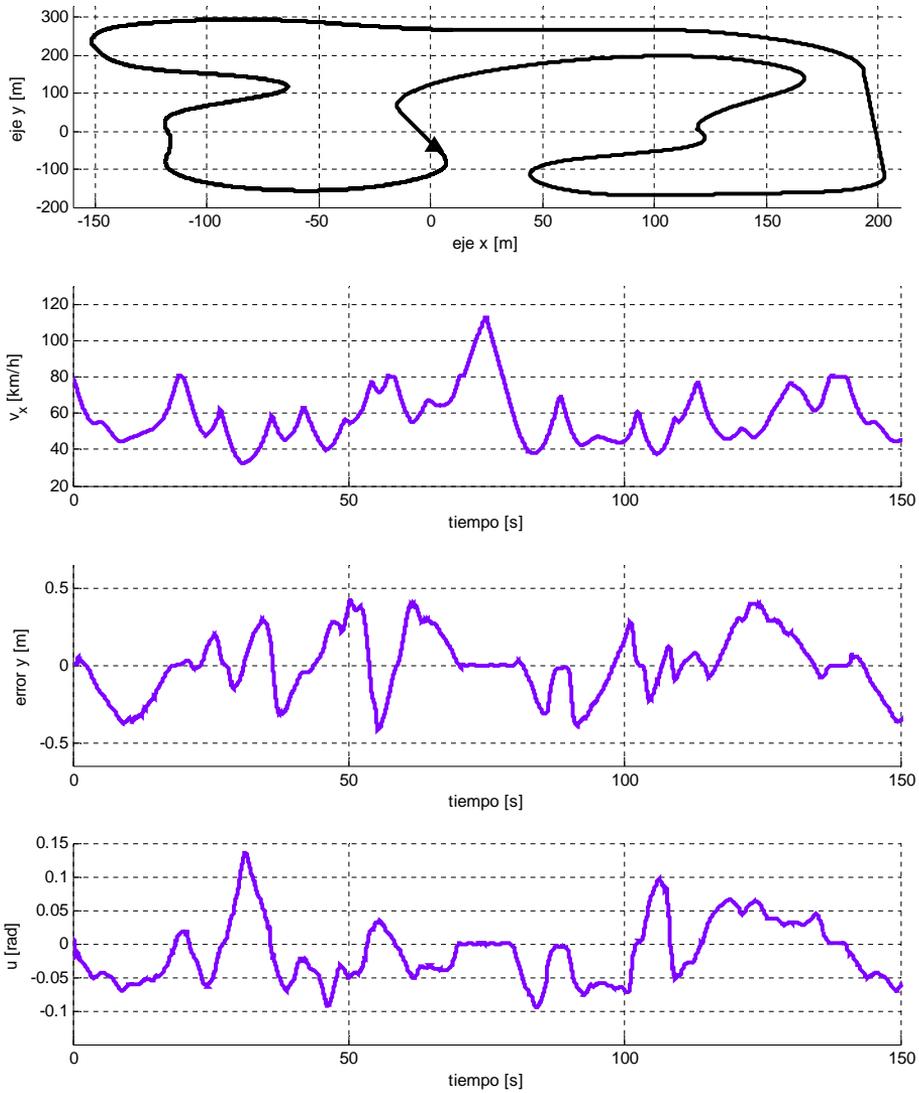


Figura 6.11: **Escenario 3**: Resultados para un circuito

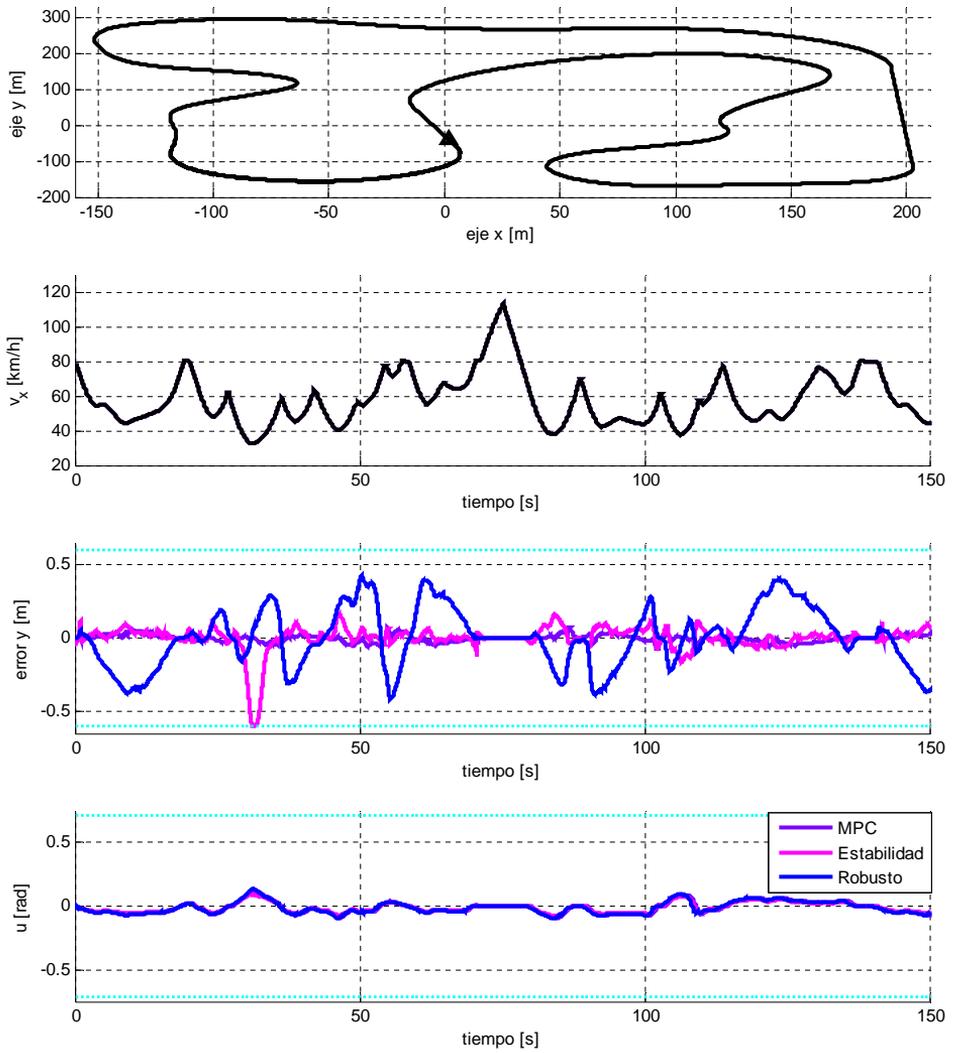


Figura 6.12: **Escenario 3:** Comparativa de los tres controladores



7.1. Conclusiones

En las últimas décadas la constante mejora de la tecnología ha supuesto la incorporación de complejos sistemas de seguridad activa en los vehículos, siendo de especial interés los sistemas de asistencia al conductor comúnmente denominados ADAS (*Advanced Driver Assistance Systems*). Dentro de esta categoría de sistemas de seguridad activa, los sistemas de guiado avanzados para vehículos autónomos y semiautónomos abarcan un gran interés; como por ejemplo los sistemas de evitación de obstáculos o permanencia en el carril.

De forma general, este tipo de sistemas de guiado se basan en la resolución de diferentes subproblemas independientes y que, en conjunto, resuelven el problema principal del guiado del vehículo. En base a la literatura, se han definido tres subproblemas generales: la definición de la trayectoria que el sistema de guiado debe seguir en base a diferentes análisis del entorno, el control encargado de gestionar las acciones

de control que conduzcan el vehículo según la trayectoria definida y, por último, el módulo que evalúa el comportamiento del conductor y decide si el sistema de guiado debe intervenir o no. De estos tres módulos, la presente tesis abarca el relacionado con el control.

Para dicho fin, se plantea el desarrollo de un control predictivo para control de seguimiento lateral de trayectoria de un vehículo, de forma que éste sea capaz de seguir una trayectoria de referencia conocida de forma segura y confortable para todos los pasajeros, cumpliendo las restricciones impuestas y garantizando así la permanencia dentro del carril y evitando giros bruscos de volante. Además, esta metodología propuesta, a diferencia de otros trabajos, puede ser aplicada para diferentes trazados y en un amplio rango de velocidades.

Para lograr este objetivo, la tesis se ha estructurado en siete capítulos. En el primer capítulo se aborda la introducción y el contexto de la tesis, así como sus objetivos. Posteriormente, se plantea la formulación del elemento fundamental y con mayor importancia de los controladores predictivos: la definición del modelo de predicción empleado. Tras analizar las diferentes soluciones existentes en la literatura, se opta por el uso de un modelo que sólo considere la dinámica lateral de los vehículos, el desplazamiento lateral y la orientación. Una de las condiciones más importantes a la hora del modelado para control es que debe existir un compromiso entre el coste computacional que conlleve la ejecución del modelo y la precisión del mismo, por lo que la formulación de modelo de predicción empleado es el modelo bicicleta, un modelo con buen rendimiento y un reducido coste computacional. Además, para ampliar su rango de aplicación de velocidades longitudinales manteniendo un error reducido, dicho modelo se define como LTV (*Linear Time Varying*), esto es, linealmente variable en el tiempo en función de la velocidad longitudinal al inicio de cada instante de predicción.

Una vez definido el modelo, en el siguiente capítulo se estudia la problemática de control asociada al seguimiento de trayectoria, deduciendo la necesidad de implementar controles predictivos. Las técnicas no predictivas, aplicadas en menor medida para esta problemática, comparten la carencia de adaptación intuitiva al problema de conducción de un vehículo que sí aporta el control predictivo. El control predictivo calcula las acciones de control óptimas para un horizonte de predicción, mientras que las estrategias no predictivas se fijan en un único punto ya pasado.

Los siguientes tres capítulos abarcan diferentes estrategias de control predictivo que abordan la problemática de control planteada, el seguimiento lateral de trayectoria de un vehículo. De estos tres capítulos, el primero hace una introducción al **control predictivo basado en modelo (MPC)**, presentando todas las generalidades que esta formulación ofrece y posteriormente particularizando su aplicación para la problemática planteada, aplicando un **modelo de predicción LTV**.

Así, la formulación propuesta considera un modelo en Espacio de Estados LTV, con el que se define un modelo de predicción con el que se podrá calcular la salida para cada instante del horizonte de predicción. También se define una función de coste que minimiza tanto el desvío en la predicción respecto de una referencia como el esfuerzo de control y sobre la que se consideran una serie de restricciones en las

señales de entrada y salida. Por último, se define el optimizador que minimizará la función de coste planteada.

El siguiente capítulo amplía la formulación MPC al considerar un **MPC con estabilidad del controlador garantizada**, condición que no se garantizaba en el caso previo ya que el controlador debido al horizonte de predicción finito y deslizante. Para garantizar la estabilidad del controlador se introducen el concepto de coste terminal, que penaliza el desvío de la última posición predicha respecto a una referencia; y una restricción terminal, de forma que si el controlador lleva al sistema a esta región, que es un Conjunto Invariante, un controlador local estabiliza el sistema en esta región.

Sin embargo, debido al uso de un modelo variable en el tiempo, y dado que el Conjunto Invariante depende de dicho modelo, éste también será variable en el tiempo, lo que puede presentar inconvenientes en la estabilidad del controlador. Para solventar dicho problema, se propone la división del rango de velocidades efectivas del vehículo en varios intervalos, de forma que en función de la velocidad longitudinal del vehículo en cada instante se selecciona el intervalo correspondiente. Cada intervalo tendrá un único Conjunto Invariante, calculado como la intersección entre el Conjunto Invariante calculado con el límite inferior y superior de velocidades del intervalo. Nótese que todos estos intervalos se calculan offline y que para cada instante, eliminando el coste computacional añadido que conllevaría el cálculo del Conjunto Invariante en cada iteración.

Por último, se introduce un control **MPC robusto basado en tubos de trayectorias y con estabilidad garantizada** para el seguimiento lateral de un vehículo, en el que se consideran perturbaciones aditivas al emplear un modelo de predicción simple para una velocidad nominal, en contraposición al modelo LTV de las propuestas previas. El hecho de considerar este modelo nominal reduce significativamente el coste computacional, que es la característica más crítica del control predictivo. Además, también se consideran restricciones en el sistema, de forma que se garantice la seguridad del vehículo y sus ocupantes y el comfort.

El control MPC basado en tubos de trayectorias consiste en la definición de una región en la que el error esté acotado, de forma que un controlador local mantenga la evolución del error siempre dentro de esta región y formando el denominado tubo de trayectorias. Además, también se consideran las condiciones de estabilidad, al incorporar un coste terminal en la función de coste y una región terminal, en la que otro controlador local, garantiza la evolución del sistema hacia un estado de equilibrio.

Los tres controladores propuestos en la presente tesis se han validado mediante cosimulación, comparando los resultados obtenidos con el software comercial CarSim. Los resultados para los tres controladores han sido satisfactorios, ya que el vehículo sigue de forma adecuada la trayectoria de referencia lateral considerada, cumpliendo las restricciones de seguridad de error lateral y de comfort impuestas.

7.2. Líneas futuras

El trabajo realizado a lo largo de esta tesis ha permitido detectar una serie de líneas de interés para futuros trabajos de investigación,

- **Validación experimental.** En la presente tesis las validaciones tanto del modelo como de los diferentes controladores propuestos se han llevado a cabo mediante simulaciones. En estas simulaciones se empleaba un software comercial para representar la dinámica de un vehículo real. Por lo tanto, una de las líneas futuras es la implementación de los controladores para su validación en un vehículo real.
- **Extensión al control longitudinal.** Ampliar la formulación MPC introducida en la presente tesis incorporando el control de la dinámica longitudinal, esto es, la velocidad longitudinal a la que circula el vehículo. Acoplar el control longitudinal junto con el control lateral ya propuesto, permitiría optimizar la conducción del vehículo, tanto a nivel de seguridad y confort como de eficiencia.
- **Ampliación de las consideraciones de optimización.** En la presente tesis en la optimización de la acción de control sólo se considera el error lateral y el error de orientación. Sin embargo, es posible ampliar las variables de decisión, aportando así más factores al controlador. Por ejemplo, ampliar la seguridad del control al considerar el ángulo de deriva del vehículo o el confort al analizar la velocidad yaw del vehículo.
- **Horizonte variable en función de la velocidad.** Al considerar una velocidad constante durante el horizonte de predicción, el tiempo de predicción se mantiene constante, pero la distancia predicha no. Para un horizonte de predicción dado, a velocidades reducidas la distancia será elevada, calculando la acción de control para más instantes de los necesarios. Sin embargo, para velocidades elevadas, ese mismo horizonte de predicción podría ser insuficiente, empeorando el rendimiento del controlador.

2.1. Parámetros principales del modelo del vehículo	34
4.1. Parámetros principales del modelo del vehículo	107
4.2. Parámetros principales de las restricciones	108
4.3. Parámetros de sintonización del MPC	109
5.1. Parámetros de sintonización del MPC	139
6.1. Parámetros de sintonización del MPC	167

1.1. Arquitectura de control para vehículos semiautónomos y autónomos [32]	4
2.1. Grados de libertad de un vehículo	10
2.2. Estudio de la estabilidad en curva de vehículos	12
2.3. Ejemplo de software comercial de simulador, CarSim [95]	14
2.4. Modelo bicicleta de 2 GDL: desplazamiento lateral y y giro yaw ψ	19
2.5. Representación de un Sistema <i>multibody</i>	22
2.6. Grados de libertad del problema planar de dinámica lateral	26
2.7. Modelo del vehículo para control	27
2.8. Diagrama del modelo bicicleta de dos grados de libertad	28
2.9. Curva característica de la fuerza de los neumáticos	30
2.10. Fuerzas del modelo	31
2.11. CarSim	33
2.12. Comparación de resultados entre CarSim y el modelo bicicleta	34
2.13. Escenario 1: Perfiles de velocidad longitudinal \dot{x}^{cg} , trayectoria xy^o y ángulo de giro de las ruedas δ_w aplicado para dos curvas abiertas	36
2.14. Horizonte de predicción	37
2.15. Escenario 3: Perfil de velocidad longitudinal \dot{x}^{cg} , trayectoria xy^o y ángulo de giro de las ruedas δ_w aplicado para dos curvas cerradas	38
2.16. Escenario 1: Posición y velocidad lateral para dos curvas abiertas	40
2.17. Escenario 1: Orientación y velocidad yaw para dos curvas abiertas	41
2.18. Escenario 1: Errores máximos comprobando cada variable (desplazamiento lateral y^{cg} , velocidad lateral \dot{y}^{cg} , orientación yaw ψ y velocidad yaw $\dot{\psi}$) para dos curvas abiertas	42
2.19. Escenario 2: Resultados a una velocidad de $\dot{x} = 30km/h$ para dos curvas abiertas	44
2.20. Escenario 2: Resultados a una velocidad de $\dot{x} = 80km/h$ para dos curvas abiertas	45
2.21. Escenario 2: Resultados a una velocidad de $\dot{x} = 120km/h$ para dos curvas abiertas	46

2.22. Escenario 2: Errores máximos y mínimos, comprobando cada variable (desplazamiento lateral y^{cg} , velocidad lateral \dot{y}^{cg} , orientación yaw ψ y velocidad yaw $\dot{\psi}$) para los tres ensayos propuestos (30 km/h, 80 km/h y 120 km/h) y diferentes Horizontes de predicción H_p para dos curvas abiertas	47
2.23. Escenario 3: Dos curvas cerradas con un modelo LTV y considerando tres Horizontes de predicción: $H_p = 10$, $H_p = 20$ y $H_p = 30$ para dos curvas cerradas	49
3.1. Sistemas de guiado avanzado	55
3.2. Diferencia entre las estructuras de los controladores PID y por realimentación de estado	58
3.3. Controlador H_∞	61
3.4. Trayectorias en modo deslizante	63
3.5. Control predictivo	65
4.1. Estrategia MPC	77
4.2. Estructura básica del MPC	78
4.3. Diferencia entre controladores PID y MPC	81
4.4. Conjuntos convexos y no convexos	83
4.5. Hiperplanos y Semiespacios	84
4.6. Politopo	85
4.7. Respuesta libre y forzada	87
4.8. Estrategia MPC, horizonte de predicción H_p y horizonte de control H_c	91
4.9. Modelo bicicleta de un vehículo	98
4.10. Trayectoria de referencia	100
4.11. Definición de los puntos objetivo de la trayectoria de referencia	101
4.12. Definición de la trayectoria de referencia	102
4.13. Restricciones de salida: error lateral	104
4.14. Resumen del la estrategia MPC propuesta	105
4.15. Diagrama de la propuesta de MPC	107
4.16. Escenario 1: Perfiles de velocidad longitudinal \dot{x} y trayectoria para dos curvas abiertas	110
4.17. Escenario 2: Perfiles de velocidad longitudinal \dot{x} y trayectoria para dos curvas cerradas	111
4.18. Escenario 3: Perfil de velocidad longitudinal \dot{x} y trayectoria para un circuito	112
4.19. Escenario 1: Resultados para dos curvas abiertas	116
4.20. Escenario 2: Resultados para dos curvas cerradas	117
4.21. Escenario 3: Resultados para una vuelta al circuito	118
5.1. Comparativa entre horizontes fijos y deslizantes	120
5.2. Conjunto Invariante	122
5.3. Intervalos definidos para todo el rango de velocidades	124
5.4. Conjuntos Invariantes de los intervalos	124

5.5. Predicción dual de horizonte infinito	126
5.6. Evolución al Conjunto Invariante	128
5.7. Conjunto Invariante entorno al punto $\hat{\mathbf{x}}_e(H_p)$	136
5.8. Resumen de la estrategia MPC con estabilidad propuesta	138
5.9. Diagrama de bloques del MPC con estabilidad	139
5.10. Intervalos definidos para todo el rango de velocidades	140
5.11. Conjuntos Invariantes de los intervalos	141
5.12. Escenario 1: Resultados para dos curvas abiertas	143
5.13. Escenario 2: Resultados para dos curvas cerradas	145
5.14. Escenario 3: Resultados para un circuito	146
5.15. Escenario 3: Variación del intervalo	147
6.1. Tubo de trayectorias	153
6.2. Resumen del controlador robusto	165
6.3. Diagrama de la propuesta de MPC con estabilidad	166
6.4. Trayectoria propuesta para el cálculo de $\mathbf{w}(t)$	168
6.5. Evolución de $\mathbf{w}(t)$ para la trayectorias propuestas	169
6.6. Representación de RPI ϕ_K	170
6.7. Representación de los conjuntos $\bar{\mathcal{Z}}$ y \mathcal{Z}	171
6.8. Representación de la región terminal Ω	172
6.9. Escenario 1: Resultados para dos curvas abiertas	176
6.10. Escenario 2: Resultados para dos curvas cerradas	177
6.11. Escenario 3: Resultados para un circuito	178
6.12. Escenario 3: Comparativa de los tres controladores	179

- [1] Mohsen Alirezaei, Matteo Corno, D Katzourakis, A Ghaffari, and R Kazemi. A robust steering assistance system for road departure avoidance. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 61(5):1953–1960, 2012. 61
- [2] A. Alleyne and J.K. Hedrick. Nonlinear adaptive control of active suspensions. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 3(1):94–101, 1995. 17
- [3] I. Alvarado. *Model Predictive Control for Tracking Constrained Linear Systems*. PhD thesis, Escuela Técnica Superior de Ingenieros. Universidad de Sevilla, 2007. 150
- [4] Sterling J Anderson, Steven C Peters, Tom E Pilutti, and Karl Iagnemma. An optimal-control-based framework for trajectory planning, threat assessment, and semi-autonomous control of passenger vehicles in hazard avoidance scenarios. *International Journal of Vehicle Autonomous Systems*, 8(2-4):190–216, 2010. 2, 4
- [5] B. Asadi and A. Vahidi. Predictive cruise control: Utilizing upcoming traffic signal information for improving fuel economy and reducing trip time. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 19(3):707–714, 2011. 15, 16
- [6] Massimo Bertozzi, Alberto Broggi, and Alessandra Fascioli. Vision-based intelligent vehicles: State of the art and perspectives. *Robotics and Autonomous Systems*, 32(1):1 – 16, 2000. 3
- [7] Michael Blundell and Damian Harty. *The Multibody Systems Approach to Vehicle Dynamics*. Butterworth-Heinemann, 2004. 13, 24
- [8] Francesco Borrelli, Paolo Falcone, Tamas Keviczky, Jahan Asgari, and Davor Hrovat. MPC-based approach to active steering for autonomous vehicle systems. *International Journal of Vehicle Autonomous Systems*, 3(2-4):265–291, 2005. 2, 66, 68, 69

- [9] Eduardo F Camacho and Carlos Bordons. *Model predictive control in the process industry*. Springer Science & Business Media, 2012. 77
- [10] Ashwin Carvalho, Yiqi Gao, Stéphanie Lefevre, and Francesco Borrelli. Stochastic predictive control of autonomous vehicles in uncertain environments. *12th International Symposium on Advanced Vehicle Control*, 2014. 71
- [11] Salim Chaib, Mariana S Netto, and Said Mammar. H_∞ , adaptive, PID and fuzzy control: a comparison of controllers for vehicle lane keeping. *Intelligent Vehicles Symposium*, pages 139–144, 2004. 62
- [12] Bo-Chiuan Chen, Bi-Cheng Luan, and Kangwon Lee. Design of lane keeping system using adaptive model predictive control. *IEEE International Conference on Automation Science and Engineering*, pages 922–926, 2014. 71
- [13] Sangbum Cho, N Harris McClamroch, and Mahmut Reyhanoglu. Dynamics of multibody vehicles and their formulation as nonlinear control systems. *American Control Conference*, 6:3908–3912, 2000. 23
- [14] A. N. Costa. Application of multibody systems techniques to vehicle modelling. *IEEE Colloquium on Model Building Aids for Dynamic System Simulation*, pages 4–1, 1991. 22
- [15] F. J. García de Jalón De la Fuente. MBS3D. <http://www.upm.es/observatorio/vi/index.jsp>, January 2018. 24
- [16] Luigi Del Re, Frank Allgöwer, Luigi Glielmo, Carlos Guardiola, and Ilya Kolmanovskiy. *Automotive model predictive control: Models, Methods and Applications*. Springer, 2010. 65
- [17] Xinxin Du and Kok Kiong Tan. Autonomous vehicle velocity and steering control through nonlinear model predictive control scheme. *IEEE Conference and Expo of Transportation Electrification Asia-Pacific*, pages 001–006, 2016. 68
- [18] H. Dugoff, P. S. Fancher, and L. Segel. Tire performance characteristics affecting vehicle response to steering and braking control inputs. Technical report, Highway Safety Research Institute, Ann Arbor, Michigan, 1969. 20
- [19] John Ronaine Ellis. *Vehicle handling dynamics: theory and application*. Butterworth-Heinemann, 1994. 13, 14, 15, 16
- [20] Stephen M Ertien, Joseph Funke, and J Christian Gerdes. Incorporating nonlinear tire dynamics into a convex approach to shared steering control. *American Control Conference*, pages 3468–3473, 2014. 68
- [21] Paolo Falcone, Francesco Borrelli, Jahan Asgari, H Eric Tseng, and Davor Hrovat. A real-time model predictive control approach for autonomous active steering. *Nonlinear Model Predictive Control for Fast Systems*, 2006. 17, 68

- [22] Paolo Falcone, Francesco Borrelli, Jahan Asgari, H Eric Tseng, and Davor Hrovat. A model predictive control approach for combined braking and steering in autonomous vehicles. *Mediterranean Conference on Control & Automation.*, pages 1–6, 2007. 69
- [23] Paolo Falcone, Francesco Borrelli, Jahan Asgari, Hongtei Eric Tseng, and Davor Hrovat. Predictive active steering control for autonomous vehicle systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 15(3):566–580, 2007. 68, 69
- [24] Paolo Falcone, Francesco Borrelli, H Eric Tseng, Jahan Asgari, and Davor Hrovat. Linear time-varying model predictive control and its application to active steering systems: Stability analysis and experimental validation. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 18(8):862–875, 2008. 68
- [25] Paolo Falcone, H Eric Tseng, Francesco Borrelli, Jahan Asgari, and Davor Hrovat. Mpc-based yaw and lateral stabilisation via active front steering and braking. *Vehicle System Dynamics*, 46(S1):611–628, 2008. 69
- [26] Kai-Ten Feng, Han-Shue Tan, and Masayoshi Tomizuka. Automatic steering control of vehicle lateral motion with the effect of roll dynamics. In *American Control Conference*, volume 4, pages 2248–2252. IEEE, 1998. 15, 16
- [27] Yiqi Gao, Andrew Gray, Janick V Frasch, Theresa Lin, Eric Tseng, J Karl Hedrick, and Francesco Borrelli. Spatial predictive control for agile semi-autonomous ground vehicles. *International Symposium on Advanced Vehicle Control*, 2012. 69
- [28] Yiqi Gao, Andrew Gray, H Eric Tseng, and Francesco Borrelli. A tube-based robust nonlinear predictive control approach to semiautonomous ground vehicles. *Vehicle System Dynamics*, 52(6):802–823, 2014. 67
- [29] Yiqi Gao, Theresa Lin, Francesco Borrelli, Eric Tseng, and Davor Hrovat. Predictive control of autonomous ground vehicles with obstacle avoidance on slippery roads. *ASME Dynamic Systems and Control Conference*, 1:265–272, 2010. 66, 69
- [30] T.D. Gillespie. *Fundamentals of Vehicle Dynamics*. Society of Automotive Engineers, 1992. 14, 16, 19
- [31] Alessanro Giua, Mauro Melas, Carla Seatzu, and Giampaolo Usai. Design of a predictive semiactive suspension system. *Vehicle System Dynamics*, 41(4):277–300, 2004. 17
- [32] David González, Joshué Pérez, Vicente Milanés, and Fawzi Nashashibi. A review of motion planning techniques for automated vehicles. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 17(4):1135–1145, 2016. 2, 4, 187

- [33] Andrew Gray, Mohammad Ali, Yiqi Gao, J Hedrick, and Francesco Borrelli. Semi-autonomous vehicle control for road departure and obstacle avoidance. *IFAC control of transportation systems*, pages 1–6, 2012. 67
- [34] Andrew Gray, Yiqi Gao, J Karl Hedrick, and Francesco Borrelli. Robust predictive control for semi-autonomous vehicles with an uncertain driver model. *Intelligent Vehicles Symposium*, pages 208–213, 2013. 67
- [35] Andrew Gray, Yiqi Gao, Theresa Lin, J Karl Hedrick, and Francesco Borrelli. Stochastic predictive control for semi-autonomous vehicles with an uncertain driver model. *16th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems*, pages 2329–2334, 2013. 67
- [36] A. El Hajjaji and S. Bentalba. Fuzzy path tracking control for automatic steering of vehicles. *Robotics and Autonomous Systems*, 2003. 60
- [37] B Hale-Heighway, C Murray, S Douglas, and M Gilmartin. Multi-body dynamic modelling of commercial vehicles. *Computing & Control Engineering Journal*, 13(1):11–15, 2002. 17
- [38] Lars Nyborg Hans B. Pacejka, Egbert Bakker. Tyre modelling for use in vehicle dynamics studies. *SAE Technical Paper 870421*, 1987. 21
- [39] S Hegazy, H Rahnejat, and K Hussain. Multi-body dynamics in full-vehicle handling analysis under transient manoeuvre. *Vehicle System Dynamics*, 34(1):1–24, 2000. 20, 23
- [40] Salim Hima, Benoit Lusseti, Benoit Vanholme, Sebastien Glaser, and Said Mammar. Trajectory tracking for highly automated passenger vehicles. *International Federation of Automatic Control World Congress*, pages 12958–12963, 2011. 61
- [41] Pushkar Hingwe and Masayoshi Tomizuka. Experimental evaluation of a chatter free sliding mode control for lateral control in AHS. *American Control Conference*, 5:3365–3369, 1997. 63
- [42] Davor Hrovat, Stefano Di Cairano, H Eric Tseng, and Ilya V Kolmanovsky. The development of model predictive control in automotive industry: A survey. *International Conference on Control Applications*, pages 295–302, 2012. 65, 76
- [43] Davor Hrovat, Stefano Di Cairano, H Eric Tseng, and Ilya V Kolmanovsky. The development of model predictive control in automotive industry: A survey. In *Control Applications (CCA), 2012 IEEE International Conference on*, pages 295–302. IEEE, 2012. 65
- [44] A.R.W. Huang and Chihsieh Chen. A low-cost driving simulator for full vehicle dynamics simulation. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 52(1):162–172, Jan 2003. 14, 17, 21

- [45] Iñaki Iglesias, Adrián Martín, and Alberto Peña Peña. Modelado de vehículo para aplicación en sistemas de tiempo real: El chasis rodante virtual. *DYNA*, 88(2):206–215, 2013. 21
- [46] IPG Automotive. CarMaker. <http://ipg.de/>, January 2018. 14
- [47] Alexander Katriniok and Dirk Abel. LTV-MPC approach for lateral vehicle guidance by front steering at the limits of vehicle dynamics. *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, pages 6828–6833, 2011. 70
- [48] Alexander Katriniok, Jan P Maschuw, Frédéric Christen, Lutz Eckstein, and Dirk Abel. Optimal vehicle dynamics control for combined longitudinal and lateral autonomous vehicle guidance. *European Control Conference*, pages 974–979, 2013. 69
- [49] Tamás Keviczky, Paolo Falcone, Francesco Borrelli, Jahan Asgari, and Davor Hrovat. Predictive control approach to autonomous vehicle steering. *American Control Conference*, 2006. 66
- [50] Hassan Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, 1996. 122
- [51] Sung-Soo Kim. A subsystem synthesis method for efficient vehicle multibody dynamics. *Multibody System Dynamics*, 7(2):189–207, 2002. 23
- [52] I. Kolmanovsky and E. G. Gilbert. Theory and computation of disturbance invariant sets for discrete-time linear systems. *Mathematical Problems in Engineering: Theory, Methods and Applications*, 4:317–367, 1998. 152
- [53] Ilya Kolmanovsky and Elmer G Gilbert. Theory and computation of disturbance invariant sets for discrete-time linear systems. *Mathematical problems in engineering*, 4(4):317–367, 1998. 128
- [54] Yonggon Lee and S.H. Zak. Designing a genetic neural fuzzy antilock-brake-system controller. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 6(2):198–211, Apr 2002. 15, 16
- [55] Gabriel Leen and Donal Heffernan. Expanding automotive electronic systems. *Computer*, 35(1):88–93, 2002. 2
- [56] Grzegorz Litak, Marek Borowiec, Michael I. Friswell, and Kazimierz Szabelski. Chaotic vibration of a quarter-car model excited by the road surface profile. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 13(7):1373 – 1383, 2008. 17, 20
- [57] Changchun Liu, Ashwin Carvalho, Georg Schildbach, and J Karl Hedrick. Stochastic predictive control for lane keeping assistance systems using a linear time-varying model. *American Control Conference*, pages 3355–3360, 2015. 69

- [58] Changchun Liu, Andrew Gray, Chankyu Lee, J Karl Hedrick, and Jiluan Pan. Nonlinear stochastic predictive control with unscented transformation for semi-autonomous vehicles. *American Control Conference*, pages 5574–5579, 2014. 67, 69
- [59] Charles C MacAdam. Application of an optimal preview control for simulation of closed-loop automobile driving. *IEEE Transaction on Systems, Man, and Cybernetics*, 1981. 17
- [60] S. Mammari. Driver co-pilote for vehicle lateral control at handling limits. *IEEE 12th International Conference on Networking, Sensing and Control*, pages 474–479, 2015. 5, 58
- [61] R. Marino, S. Scalzi, G. Orlando, and M. Netto. A nested PID steering control for lane keeping in vision based autonomous vehicles. *American Control Conference (ACC)*, pages 2885–2890, 2009. 57
- [62] Behrooz Mashadi, Mehdi Mahmoudi-Kaleybar, Pouyan Ahmadizadeh, and Atta Oveisi. A path-following driver/vehicle model with optimized lateral dynamic controller. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 11:613 – 630, 2014. 57
- [63] Gianpiero Mastinu and Manfred Ploechl. *Road and off-road vehicle system dynamics handbook*. CRC Press, 2014. 13, 15, 16
- [64] MathWorks. Matlab/Simulink. <http://es.mathworks.com/>, January 2018. 33, 106, 137, 165
- [65] David Q Mayne. Model predictive control: Recent developments and future promise. *Automatica*, 50(12):2967–2986, 2014. 64, 65, 76, 77
- [66] D.Q. Mayne, J.B. Rawlings, C.V. Rao, and P.O.M. Scokaert. Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica*, 36(6):789 – 814, 2000. 122, 123
- [67] D.Q. Mayne, M.M. Seron, and S.V. Rakovic. Robust model predictive control of constrained linear systems with bounded disturbances. *Automatica*, 41(2):219 – 224, 2005. 153
- [68] RR McHenry. An analysis of the dynamics of automobiles during simultaneous cornering and ride motions. *Computer-Aided Design*, 1(3):19–32, 1969. 17, 20
- [69] W. F. Milliken, A. G. Fonda, C. L. Muzzey, W. Close, L. Segel, and D. W. Whitcomb. *Research in Automobile Stability and Control and in Tyre Performance*. The Institute of Mechanical Engineers, 1956. 18
- [70] William F Milliken, Douglas L Milliken, et al. *Race car vehicle dynamics*, volume 400. Society of Automotive Engineers Warrendale, 1995. 13, 14, 16, 18

- [71] J. Naranjo, C. González, R. García, and T. De Pedro. Lane-change fuzzy control in autonomous vehicles for the overtaking maneuver. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 9(3):438–450, Sept 2008. 60
- [72] J. E. Naranjo, C. Gonzalez, R. Garcia, T. de Pedro, and R. E. Haber. Power-steering control architecture for automatic driving. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 6(4):406–415, Dec 2005. 56, 60
- [73] Linz Center of Mechatronics GMBH. Hotint. <http://www.hotint.org/>, January 2018. 24
- [74] Bart De Schutter Olaf Gietelink, Jeroen Ploeg and Michel Verhaegen. Development of advanced driver assistance systems with vehicle hardware-in-the-loop simulations. *Vehicle System Dynamics*, 44(7):569–590, 2006. 14
- [75] Enrique Onieva, José Eugenio Naranjo, Vicente Milanés, Javier Alonso, Ricardo García, and Joshué Pérez. Automatic lateral control for unmanned vehicles via genetic algorithms. *Applied Soft Computing*, 11(1):1303–1309, 2011. 60
- [76] H. Pacejka. *Tire and Vehicle Dynamics*. Butterworth-Heinemann, 2012. 13, 14
- [77] B.K. Powell, K.E. Bailey, and S.R. Cikanek. Dynamic modeling and control of hybrid electric vehicle powertrain systems. *IEEE Control Systems*, 18(5):17–33, Oct 1998. 16
- [78] S Joe Qin and Thomas A Badgwell. A survey of industrial model predictive control technology. *Control engineering practice*, 11(7):733–764, 2003. 64
- [79] Rajesh Rajamani. *Vehicle Dynamics and Control*. Springer, 2012. 13, 30, 58
- [80] L.V.V. Gopala Rao and S. Narayanan. Preview control of random response of a half-car vehicle model traversing rough road. *Journal of Sound and Vibration*, 310:352 – 365, 2008. 20
- [81] Jochen Rauh. Virtual development of ride and handling characteristics for advanced passenger cars. *Vehicle System Dynamics*, 40(1-3):135–155, 2003. 21
- [82] Georg Rill. A modified implicit euler algorithm for solving vehicle dynamic equations. *Multibody System Dynamics*, 15(1):1–24, 2006. 23
- [83] Georg Rill. Vehicle modeling by subsystems. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 28:430 – 442, 12 2006. 23
- [84] Georg Rill. *Road vehicle dynamics: fundamentals and modeling*. CRC Press, 2011. 14

- [85] Jihan Ryu and J Christian Gerdes. Integrating inertial sensors with global positioning system (gps) for vehicle dynamics control. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 126(2):243–254, 2004. 17
- [86] Ferhat Saglam and Y Samim Unlusoy. Identification of low order vehicle handling models from multibody vehicle dynamics models. *IEEE International Conference on Mechatronics*, pages 96–101, 2011. 21
- [87] Michael W Sayers and Dongsuk Han. A generic multibody vehicle model for simulating handling and braking. *Vehicle system dynamics*, 25(S1):599–613, 1996. 23, 24
- [88] Werner Schiehlen. Multibody system dynamics: roots and perspectives. *Multibody system dynamics*, 1(2):149–188, 1997. 22, 24
- [89] T. Schwickart, H. Voos, J.-R. Hadji-Minaglou, and M. Darouach. An efficient nonlinear model-predictive eco-cruise control for electric vehicles. In *IEEE International Conference on Industrial Informatics*, pages 311–316, 2013. 16
- [90] Leonard Segel. Theoretical prediction and experimental substantiation of the response of the automobile to steering control. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers: Automobile Division*, 10(1):310–330, 1956. 18, 19
- [91] C. Sentouh, B. Soualmi, J. C. Popieul, and S. Debernard. Cooperative steering assist control system. *IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, pages 941–946, 2013. 5
- [92] Joga Dharma Setiawan, Mochamad Safarudin, and Amrik Singh. Modeling, simulation and validation of 14 dof full vehicle model. *International Conference on Instrumentation, Communications, Information Technology, and Biomedical Engineering*, pages 1–6, 2009. 11, 21
- [93] Victor A Shia, Yiqi Gao, Ramanarayan Vasudevan, Katherine Driggs Campbell, Theresa Lin, Francesco Borrelli, and Ruzena Bajcsy. Semiautonomous vehicular control using driver modeling. *Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 15(6):2696–2709, 2014. 66
- [94] Taichi Shiiba and Yoshihiro Suda. Development of driving simulator with full vehicle model of multibody dynamics. *JSAE review*, 23(2):223–230, 2002. 23
- [95] Mechanical Simulation. Carsim. <https://www.carsim.com/>, January 2018. 14, 33, 106, 137, 165, 187
- [96] Dirk E Smith and John M Starkey. Effects of model complexity on the performance of automated vehicle steering controllers: Model development, validation and comparison. *Vehicle System Dynamics*, 24(2):163–181, 1995. 19, 27
- [97] MSC Software. Adams. <http://www.mscsoftware.com/product/adams>, January 2018. 23, 24

- [98] Young Seop Son, Wonhee Kim, Seung-Hi Lee, and Chung Choo Chung. Robust multirate control scheme with predictive virtual lanes for lane-keeping system of autonomous highway driving. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 64(8):3378–3391, 2015. 59
- [99] ZH Sun, G Bebis, and R Miller. On-road vehicle detection: A review. *IEEE Transactions on Patter*, 28(5):694–711, May 2006. 3
- [100] Dassault Systèmes. Simpack. <http://www.simpack.com/>, January 2018. 23
- [101] Gilles Tagne, Reine Talj, and Ali Charara. Higher-order sliding mode control for lateral dynamics of autonomous vehicles, with experimental validation. *IEEE Intelligent Vehicles Symposium*, pages 678–683, 2013. 62
- [102] Gilles Tagne, Reine Talj, and Ali Charara. Immersion and Invariance vs Sliding Mode Control for reference trajectory tracking of autonomous vehicles. *European Control Conference*, pages 2888–2893, 2014. 62
- [103] TESIS DYNAware. veDYNA. <https://www.thesis-dynaware.com>, January 2018. 14
- [104] V. Turri, A. Carvalho, H. E. Tseng, K. H. Johansson, and F. Borrelli. Linear model predictive control for lane keeping and obstacle avoidance on low curvature roads. *16th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems*, pages 378–383, 2013. 70
- [105] Lars Nielsen Uwe Kiencke. *Automotive Control Systems for Engine, Driveline, and Vehicle*. Springer, 2005. 21
- [106] S. Vazquez, J. I. Leon, L. G. Franquelo, J. Rodriguez, H. A. Young, A. Marquez, and P. Zanchetta. Model predictive control: A review of its applications in power electronics. *IEEE Industrial Electronics Magazine*, 8(1):16–31, March 2014. 76
- [107] Jesus Vidal. *Un método general, sencillo y eficiente, para la definición y simulación numérica de sistemas multicuerpo*. PhD thesis, E.T.S.I. Industriales (UPM), 2006. 24
- [108] Junmin Wang, Lee Alexander, and Rajesh Rajamani. Friction estimation on highway vehicles using longitudinal measurements. *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, 126(2):265–275, 2004. 16
- [109] David W. Whitcomb and David W. Milliken. Design implications of a general theory of automobile stability and control. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers: Automobile Division*, 10(1):367–425, 1956. 18
- [110] Shing-Jen Wu, Hsin-Han Chiang, Jau-Woei Perng, Chao-Jung Chen, Bing-Fei Wu, and Tsu-Tian Lee. The heterogeneous systems integration design and implementation for lane keeping on a vehicle. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 9(2):246–263, 2008. 59

- [111] Weidong Xiang, P.C. Richardson, Chenming Zhao, and S. Mohammad. Automobile brake-by-wire control system design and analysis. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 57(1):138–145, Jan 2008. 15, 16
- [112] Kyongsu Yi and Jintai Chung. Nonlinear brake control for vehicle cw/ca systems. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 6(1):17–25, Mar 2001. 15, 16
- [113] Hidehisa Yoshida, Shuntaro Shinohara, and Masao Nagai. Lane change steering manoeuvre using model predictive control theory. *Vehicle System Dynamics*, 46(S1):669–681, 2008. 66
- [114] Pan Zhao, Jiajia Chen, Yan Song, Xiang Tao, Tiejuan Xu, and Tao Mei. Design of a control system for an autonomous vehicle based on adaptive-PID. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 9:1, 2012. 57
- [115] Qin Zhu and Mitsuaki Ishitobi. Chaotic vibration of a nonlinear full-vehicle model. *International Journal of Solids and Structures*, 43:747 – 759, 2006. 17, 20
- [116] Asier Zubizarreta. *Estrategias de control avanzado para robots paralelos*. PhD thesis, Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Bilbao. UPV/EHU, 2010. 64, 150