

Gradu Amaierako Lana / Trabajo de Fin de Grado

Fisikako eta Ingeniaritza Elektronikoko Gradu Bikoitza (Fisika) /  
Doble Grado en Física y en Ingeniería Electrónica (Física)

---

# Belinskii-Khalatnikov-Lifshitz (BKL) konjetura:

Analisisa eta formalismo hamiltondarra

---

Egilea / Autora:

Sara Fernández Uria

Zuzendaria / Director:

David Brizuela Cieza

Leioa, 2019ko ekaina / Leioa, junio de 2019

## Laburpena

Gradu amaierako lan hau BKL konjetura aztertzeraz bideratu dugu. Proposatutako fisika omenez izendatua (Belinskii, Khalatnikov eta Lifshitz), konjetura honek espazio-motako singularitate orokor baten portaera deskribatzen du, erlatibitate orokor klasikoaren testuinguruan. Lana 4 kapituluatan banatu da. Lehendabizi, singularitateen inguruko sarrera egin da, oinarriko kontzeptuak azalduz eta ibilera historiko laburra eginez. Halaber, fenomeno hauen eta grabitazio kuantikoaren arteko erlazio ez-tribiala plazaratu da. Bigarren kapituluatan konjeturaren analisia jaso da, autoreen formulazio originala erabiliz: lanaren motibazioa, abiapuntua eta deskribapen zehatza. Hirugarren kapituluatan, konjetura berformulatu egin da formulazio hamiltondar bat erabiliz. Honekin, konjetura kuantizatzeko abiapuntu bat eman da, singularitateak erregimen kuantikoan aztertzeraz begira. Azkenik, ondorioekin bukatu da lana, ezaugarri nagusiak laburbilduz eta etorkizuneko ikerketen garrantzia nabarmenduz.

# Gaien Aurkibidea

|          |                                                                        |           |
|----------|------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Sarrera eta helburuak</b>                                           | <b>1</b>  |
| 1.1      | Sarrera . . . . .                                                      | 1         |
| 1.2      | Helburuak . . . . .                                                    | 3         |
| <b>2</b> | <b>BKL konjeturaren analisia</b>                                       | <b>5</b>  |
| 2.1      | Konjeturaren motibazioa eta abiapuntua . . . . .                       | 5         |
| 2.1.1    | Einstein-en eremu-ekuazioak erreferentzia-sistema sinkronoan . . . . . | 6         |
| 2.1.2    | Kasner-en soluzio orokortua . . . . .                                  | 7         |
| 2.2      | Konjeturaren deskribapen zehatza . . . . .                             | 10        |
| <b>3</b> | <b>BKL konjeturaren formalismo hamiltondarra</b>                       | <b>16</b> |
| 3.1      | Erlatibitate orokorraren formulazio hamiltondarra . . . . .            | 17        |
| 3.1.1    | 3+1 deskonposaketa . . . . .                                           | 17        |
| 3.1.2    | Kurbadura estrintsekoa eta triadak . . . . .                           | 18        |
| 3.1.3    | Erlatibitate orokorraren hamiltondarra hutsean . . . . .               | 20        |
| 3.2      | Konjeturaren formulazio hamiltondarra . . . . .                        | 21        |
| 3.2.1    | Konjeturak motibaturiko aldagaiak . . . . .                            | 21        |
| 3.2.2    | Konjetura . . . . .                                                    | 24        |
| <b>4</b> | <b>Ondorioak</b>                                                       | <b>27</b> |
|          | <b>Bibliografia</b>                                                    | <b>29</b> |
|          | <b>Eranskina A Parametro arbitrario kopuruaren kalkulua</b>            | <b>31</b> |
| A.1      | Erreferentzia-sistema sinkronoa . . . . .                              | 31        |
| A.2      | Einstein-en eremu-ekuazioak . . . . .                                  | 31        |
| A.3      | Kasner-en soluzio orokortua . . . . .                                  | 32        |

# Kapitulua 1

## Sarrera eta helburuak

### 1.1 Sarrera

Einstein-ek bere erlatibitatearen teoriak argitara eman zituenean (1905ean erlatibitate berezia [1], 1915ean erlatibitate orokorra [2]) espazio eta denboraren nozio klasikoak eraitsi zituen, ordua arteko fisika kolokan jarritz eta unibertsoa ulertzeko eredu berriei bidea eginez. Teoria iraultzaile honek fisikari askoren ikerkuntza-lerroa norabidez aldatu zuen, erlatibitate orokorrak proposatutako galdera eta problema berriak ebaztera bideratuz. Horrela, XX. mendeko lehenengo erdialdean zenbait aurrerapauso eman ziren kosmosaren misterioak argitzeko bidean, gehienbat Einstein-en eremu-ekuazioen soluzio zehatz batzuen aurkikuntzaren eskutik, Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) [3–10] edo Schwarzschild-en ereduak [11], besteak beste.

Hala ere, erlatibitate orokorraren teoria argiratu zenetik, 50 urte pasatu behar izan ziren funtsezko alor bat jorratzen has zedin: singularitateak. Erlatibitate orokorraren testuinguruan singularitateen definizio zehatza argi ez badago ere<sup>1</sup>, bestelako teoria klasikoekin analogia eginez, kantitate fisiko edo geometriko baten dibergentziarekin lotzea da intuitiboena. Erlatibitate orokorrak horrelako konportamendu “katastrofiko” edo singularren zantzuak zituen, hala nola arestian aipatutako FLRW edo Schwarzschild-en soluzio zehatzetan. Hala ere, Einstein-ek berak eta garai hartako ortodoxiak problema hauek baztertu zituzten, fisikoki bideraezinak ziren produkzio matematikoak zirela argudiatuz, esferikotasuna eta bestelako simetria oso zehatzetan oinarritutakoak, alegia [14]. XX. mendeko bigarren erdialdean, aitzitik, fisikari eta matematikari belaunaldi berriak aurreko pentsamendu lerrotik aldenitu eta singularitateen problematika lantzeari ekin zion [14].

Garai honen hasiera —post-Einsteiniarra deitu daitekeena [14]— singularitateen lehenengo teorema modernoak ezarri zuen, Penrose matematikari britaniarrak 1965ean argitaratutakoa [15]. Matematikari honek geodesikoen osagabetasuna erabili zuen espazio-denboraren singularitateak ezaugarritzeko; hau da, geodesikoak espazio-denbora osoan modu erregularrean hedatzeko ezintasuna. Izan ere, arrazoizkoa dirudi singularitateen existentzia partikulen ustekabeko agerpen edo desagerpenarekin lotzea, eta erlatibitate orokorrean partikula askeak argi- (masa gabekoak)

---

<sup>1</sup>Honen inguruko eztabaida sakona aurkitu daiteke [12]-ko 9.kapituluan eta [13]-ko 8.kapituluan.

edo denbora-motako (masadunak) geodesikoetan higitzen direnez, singularitate baten presentzian kurba hauek osagabeak izan beharko dira. Irizpide honek singularitate mota guztiak kontuan hartzen ez baditu ere, argi- eta denbora-motako geodesikoen osotasuna gutxieneko baldintza da espazio-denbora jakin bat ez-singularra izateko [13]. Horrela, aipatutako irizpideari jarraituz, Penrose-ren teorema singularitateak baldintza oso orokorretan ematen direla ezarri zuen, simetriaren edo antzeko propietate murriztaileen beharrik gabe<sup>2</sup>. Honen ostera, ildo bera jarraituz, beste hainbat singularitate-teorema garatu ziren 60ko hamarkadan, garrantzitsuenak Hawking eta Penrose-k 1970ean batera argitaratutakoa izanik [16], egun ere singularitate-teorema nagusitzat jotzen dena.

Teorema hauek erabakigarriak izan ziren espazio-denbora singularren baldintzak ulertzeko; gainera, erlatibitate teorikoan eragin zuzena izan duten tresna eta ideia matematiko berriak proposatu zituzten [17]. Ideia berritzaile hauek, ordea, singularitate orokorren natura eta portaera ez zituzten argitu. Izan ere, soluzio zehatzetako singularitateen portaera partikularrak (Schwarzschild, Kasner, FRLW...) dagoeneko ezagunak ziren, baina baldintza berezietan oinarritutakoak zirenez, jokaera bera ezin zitekeen espero singularitate orokorretan. Hala ere, teorema hauen paraleloan, Sobietar Batasuneko Landau taldeko hiru fisikaririk —Khalatnikov, Lifshitz eta Belinskii— singularitate orokor baten portaera eta natura deskribatu zuten 1970ean argitaratutako artikulu batean [18], zeinetan egun BKL konjeturatzat ezaguna den lana aurkeztu zuten.

Fenomeno hau ezaugarritzeko, ordea, geodesikoen osagabetasuna alde batera utzi eta bestelako irizpidea hartu zuten: singularitate kosmologikoak. Hauek denboraren balio jakin batentzat espazioko zonalde batean ematen diren singularitate fisikoak dira, non materia-dentsitatea edo lau dimentsioko kurbaduraren inbariantek dibergenteak diren. Azken hauek espazio-motako (*spacelike*) singularitateetatik ere ezagunak dira, singularitatea espazio-motako gainazal batean ematen delako<sup>3</sup> [18].

Baldintza hauek betetzen dituzten kasuetara mugatuz, singularitatea Einstein-en eremu-ekuazioen soluzio orokor baten propietate intrintsekoa dela postulatu zuten, espazio-denboraren simetriarik inposatu gabe, Hawking-Penrose teoremaren ildotik. Are gehiago, soluzio orokorraren portaera deskribatu zuten honen inguruan: oszilakorra, lokala eta hutsak nagusitua. Hau da, singularitate hurbildu ahala, espazioko puntu bakoitzaren dinamika beste puntuekiko independente bihurtzen da, eta puntu hauetako bakoitzak portaera oszilakorra erakusten du. Gainera, espazio-denboran materia edo erradiazio arrunta dagoenean, honen eragina arbuigarri bihurtzen da singularitate hurbil eta hutseko egoera bera lortzen da [18].

Bestalde, singularitateak teoria beraren limiteen adierazpidea dira, teoria zabalago baten beharrezko seinale. Izan ere, edozein teoria fisikotan singularitate bat ematen denean, limite bat ezartzen zaio teoriari: singularitatean bertan edo ingurune hurbil batean fisikoki esanguragarria izateari uzten dio [19]. Beraz, erlatibitate orokorra teoria klasikoa den heinean, ingurune honetan efektu kuantikoak nabarmenak izatea espero daiteke. Jakina denez, grabitazio eta kuantikaren bateratzea egungo erronka nagusietakoa da fisika teorikoan. Ondorioz, singularitateen portaera

---

<sup>2</sup>Penrose-ren teorema sakonki aztertzeko, artikulu originalaz gain [15], ikusi J.M.M. Senovilla-k eta D. Garfinkle-k idatzitako artikuluaren erlatibitate orokorraren 100. urteurrenaren eta Penrose-ren teoremaren 50. urteurrenaren harira [17].

<sup>3</sup>Singularitate *kosmologikoa* konjeturaren autoreen terminologia originala da.

eta existentzia bera —erregimen kuantikoan— argitu gabeko problemak dira oraindik. Ikerkuntza lerro honetan, ordea, ugariak dira proposamenak, nabariena kiribilen grabitazio kuantikoa (*Loop Quantum Gravity*) izanik, zeinak eredu kosmologiko sinpleetan singularitateak ezabatu daitezkeela ondorioztatu duen [20]. Hortaz, singularitateen eta kuantikaren arteko erlazio eztribiala behin plazaratuta, honetan sakontzea ezinbestekoa izan daiteke grabitatea kuantizatu ahal izateko.

## 1.2 Helburuak

Aurreko atalean azaldu den moduan, espazio-denboraren singularitateak interes handiko ikerkuntza lerroa dira erlatibitate orokorrean eta, oro har, fisika teorikoan. Azken urteetan, metodo numerikoen ekarpena izan da nabariena esparru honetan, gehienbat singularitateen inguruko portaerari dagokionez. Izatez, simulazio eta analisi ugari BKL-ren deskribapenarekin bat egin dute [21–25], konjetura indartuz eta haren garrantzia areagotuz.

Beraz, BKL konjeturaren aldeko ebidentzien gorakada kontuan hartuz, gradu amaierako lan hau konjetura bera aztertzerako bideratuko dugu. Horretarako, bi zatitan banatuko dugu lana. Lehendabizi, konjetura sakonki aztertuko dugu formulazio originala erabiliz, nagusiki Belinskii autoreak konjeturaren arira argitaratutako liburu batez [26] eta artikulu originalaz [18] baliatuz. Ondoren, konjetura berformulatuko dugu formulazio hamiltondar baten bidez, Ashtekar, Henderson eta Sloan-ek [27] artikuluan proposatutakoa. Izan ere, konjeturaren inguruko hainbat literatura aztertu ondoren —eta grabitazio kuantikoaren garrantziaz jabetuta— formulazio hau aukeratu dugu, zehazki, kiribilen grabitazio kuantikoak motibatutakoa delako. Klasikoa bada ere, etorkizuneko ikerketa eta simulazio numeriko askoren abiapuntua izan daiteke.

Orotara, hauek izango dira lan honen helburu nagusiak:

1. Konjeturaren abiapuntua azaltzea.
2. Konjeturaren deskribapen zehatza garatzea, formulazio originalaz baliatuz.
3. Formulazio berriaren abiapuntua aipatzea.
4. Konjeturaren berformulazio hamiltondarra garatzea.
5. Konjeturaren garrantzia eta berformulazioaren indarra nabarmentzea.

### Notazioa:

Hauek izango dira lanean zehar hartuko ditugun hitzarmenak:

- Metrikaren signatura  $(-, +, +, +)$  izango da.
- Indize espazialak adierazteko letra grekoak erabiliko dira:  $\alpha, \beta, \gamma, \dots = 1, 2, 3$ .
- Denbora- zein espazio-indizeak adierazteko  $a, b, c, d, \dots = 0, 1, 2, 3$  letra latindar xeheak erabiliko dira.

- Barne-indizeak adierazteko  $i, j, k, \dots = 1, 2, 3$  letra latindar xeheak erabiliko dira.
- $c = 1$  eta  $8\pi G = 1$  unitateetan lan egingo da.
- Ohiko deribatu partziala adierazteko  $\partial$  eragilea zein koma (,) erabiliko dira.
- Deribatu kobariantea adierazteko  $\nabla$  eragilea zein puntu eta koma (;) erabiliko dira.
- $\tau$  aldagai denboralarekiko deribatua adierazteko (') erabiliko da.

## Kapitulua 2

# BKL konjeturaren analisia

Bigarren kapitulu honetan, BKL konjeturaren analisia egingo dugu artikulu originalaren formulazioari jarraituz. Lehendabizi, Belinskii, Khalatnikov eta Lifshitz-en lanaren motibazioa eta abiapuntua azalduko ditugu, ondoren, konjeturaren deskribapen zehatzari ekiteko.

### 2.1 Konjeturaren motibazioa eta abiapuntua

Landau taldeko fisikariak ziren heinean, lanaren sustraia Landau berak 1959an planteatutako galdera batek ezarri zuen: singularitate kosmologikoa Einstein-en ekuazioen propietate orokorra al da, edo hauen ebazpen zehatza errazten duten suposizio berezien, hala nola, simetrien ondorioa? [18, 26, 28]. Problemari matematikoki heltzeko modua ekuazioen soluzio orokorra aurkitzean oinarritzen da. Izan ere, ekuazio diferentzialen sistema oron, beti definitu daiteke soluzio orokorraren kontzeptua; hau da, hasierako baldintza *arbitrarioen* garapena definitzen duena, inolako murrizketa zehatzen menpean. Posiblea bada, beraz, sistemaren soluzio orokorrak singularitate bat duela frogatzea, singularitate bera hasierako baldintzen independentea dela ondorioztatuta daiteke, suposizio sinplifikatzaileetatik aske.

Singularitate hauek anitzak izan daitezke baina, oro har, honako definizioak singularitate fisiko guztiak hartzen ditu barne (koordinatu-transformazioen bidez ezabatu ezin daitezkeenak): espazio-denborako puntu bat singularra da puntu horretan Einstein-en baliokidetasunaren printzipioa hausten bada [26]. Hau da, koordinatu inertzial lokalen transformazioak eginez, puntu horretan Minkowski-ren metrika laua ezin bada lortu. Hala ere, sarreran aipatu bezala, fisikari hauek singularitate mota jakin bat aztertzea mugatu ziren: singularitate kosmologikoak edo espazio-motakoak. Hauek denboran ematen diren singularitateak dira, denboraren aldiuneak non kurbaduraren inbariantek eta materia-eremuko ezaugarri aldagaitzak dibergenteak diren [26].

Bestalde, Einstein-ena bezalako ekuazio diferentzialen sistema ez-lineal batean, soluzio orokorraren kontzeptua ez da bakarra. Hortaz, argitu beharra dago singularitea duen soluzio orokorraren existentzia bateragarria dela singularitate gabeko —edo bestelako singularitatea duen— beste soluzio orokor bat existitzearekin [18]. Dena dela, orokorra den edozein soluziok, parametro funtzional arbitrario batzuk izan beharko ditu, sistemaren *edozein* hastapen-baldintzekin zehaz-



tu daitezkeenak [26]. Parametro kopuru hau, zehazki, soluzioaren orokortasunaren irizpidea da: erreferentzia-sistema egokia aukeratuta ere ezin daiteke murriztu, eta nahikoa izan behar da edozein hastapen baldintza arbitrariok (hasierako aldiunea edozein delarik) soluzioa guztiz zehaztu dezaten. Hutsean, parametro funtzional arbitrarioen kopurua 4 da (ikusi A.1 eta A.2 eranskinak).

Einstein-en eremu-ekuazioen konplexutasun matematikoa dela eta, ez dago soluzio orokorra analitikoki eraikitzeko modurik. Hala ere, BKL-ren probleman —Landau berak planteatutakoa— ez da zertan soluzio orokorraren forma zehaztu espazio-denbora osorako, nahikoa litzateke singularitatearen hurbiltasunean [18]. Beraz, honakoak izango dira problema ebazteko —galderari erantzuteko— gidalerroak [28]:

1. Espazio-motako singularitate bat existitzen dela suposatu.
2. Soluzio asintotiko orokorrena zehaztu singularitate horretatik hurbil.
3. Parametro funtzional arbitrarioen kopurua zenbatu.
4. Kopuru minimoarekin aldaratu, soluzio orokorra ote den egiaztatzeko.

Erantzuna baiezkoa izatekotan, singularitatea duen soluzio orokor baten existentzia frogatuko da, haren portaera asintotikoa deskribatzearekin batera [28].

Jarraibide hauek, ordea, nahiko lausoak dira: nola lortu soluzio asintotikoa? Honi ekingo diogu hurrengo atalean, Belinskii, Khalatnikov eta Lifshitz-en urratsak pausoz-pauso azalduz. Hala ere, lehendabizi, konjeturaren abiapuntu bera formalizatu beharko dugu.

### 2.1.1 Einstein-en eremu-ekuazioak erreferentzia-sistema sinkronoan

Konjeturaren abiapuntua matematikoki formalizatzeko, Einstein-en eremu-ekuazioak planteatzen hasiko gara. Orokortasunik galdu gabe, erreferentzia-sistema sinkronoa aukeratuko dugu problema lantzeko:

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1, & g_{0\alpha} &= 0, \\ ds^2 &= -dt^2 + g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \end{aligned} \tag{2.1}$$

non  $x^0 = t$  espazio osoan sinkronizatutako denbora koordenatua den eta  $g_{\alpha\beta}$  hiru dimentsioko metrikaren tentsorea.

Izan ere, hau da erreferentzia-sistema egokiena erlatibitate orokorraren aplikazio kosmologikoetarako [26]. Halaber, denboran ematen diren singularitateak aztertu nahi direnez, existitzekotan, hipergainazal singularraren ekuazioa  $t = 0$  dela kontsideratuko dugu; hau da, espazio osoa simultaneoki helduko dela ustezko singularitatera  $t = 0$  aldiunean [26].

(2.1) erreferentzia-sistema sinkronoan, komenigarria da  $\kappa_{\alpha\beta}$  notazioa erabiltzea  $g_{\alpha\beta}$ -ren denborekiko deribatu partziala adierazteko [26]:

$$\kappa_{\alpha\beta} = \partial_t g_{\alpha\beta}, \quad \kappa_\alpha^\beta = g^{\beta\gamma} \kappa_{\gamma\alpha}, \quad \kappa = \kappa_\alpha^\alpha = \partial_t g / g, \quad g = \det(g_{\alpha\beta}). \tag{2.2}$$

Hauk dira orduan Christoffel-en ikurrak,  $\Gamma_{bc}^a$ :

$$\Gamma_{00}^0 = \Gamma_{00}^\alpha = \Gamma_{0\alpha}^0 = 0, \quad \Gamma_{\alpha\beta}^0 = \frac{1}{2}\kappa_{\alpha\beta}, \quad \Gamma_{0\beta}^\alpha = \frac{1}{2}\kappa_\beta^\alpha, \quad \Gamma_{\alpha\beta}^\nu = \gamma_{\alpha\beta}^\nu, \quad (2.3)$$

non  $\gamma_{\alpha\beta}^\nu = \frac{1}{2}g^{\nu\mu}(g_{\mu\alpha,\beta} + g_{\mu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\mu})$  hiru dimentsioko Christoffel-en ikurra den.

(2.3) Christoffel-en ikurrekin Ricci-ren tentsorearen  $R_b^a$  osagaiak honela idatzi daitezke:

$$R_0^0 = \frac{1}{2}\partial_t\kappa + \frac{1}{4}\kappa_\alpha^\beta\kappa_\beta^\alpha, \quad R_\alpha^0 = \frac{1}{2}(\kappa_{,\alpha} - \kappa_{\alpha;\beta}^\beta), \quad R_\alpha^\beta = \frac{1}{2\sqrt{g}}\partial_t(\sqrt{g}\kappa_\alpha^\beta) + \mathcal{R}_\alpha^\beta, \quad (2.4)$$

non deribatu kobariantea hiru dimentsioko  $g_{\alpha\beta}$  metrikarekiko egin den ( $\gamma_{\alpha\beta}^\nu$  erabiliz) eta  $\mathcal{R}_\alpha^\beta$  hiru dimentsioko Ricci-ren tentsorea den (lau dimentsioko Ricci-ren tentsorearen berdina baina  $g_{\alpha\beta}$  eta  $\gamma_{\alpha\beta}^\nu$  erabiliz).

Orduan, (2.4) erabiliz, honakoak dira erreferentzia-sistema sinkronoan Einstein-en ekuazioak,  $R_b^a = T_b^a - \frac{1}{2}T\delta_b^a$ :

$$\frac{1}{2}\partial_t\kappa + \frac{1}{4}\kappa_\beta^\alpha\kappa_\alpha^\beta = T_0^0 - \frac{1}{2}(T_0^0 + T_\alpha^\alpha), \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{2}(\kappa_{,\alpha} - \kappa_{\alpha;\beta}^\beta) = T_\alpha^0, \quad (2.6)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{g}}\partial_t(\sqrt{g}\kappa_\alpha^\beta) + \mathcal{R}_\alpha^\beta = T_\alpha^\beta - \frac{1}{2}\delta_\alpha^\beta(T_0^0 + T_\gamma^\gamma). \quad (2.7)$$

Gainera, hutsean  $T_a^b = 0$  denez, honakoak dira hutseko Einstein-en ekuazioak erreferentzia-sistema sinkronoan:

$$\frac{1}{2}\partial_t\kappa + \frac{1}{4}\kappa_\beta^\alpha\kappa_\alpha^\beta = 0, \quad (2.8)$$

$$\frac{1}{2}(\kappa_{,\alpha} - \kappa_{\alpha;\beta}^\beta) = 0, \quad (2.9)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{g}}\partial_t(\sqrt{g}\kappa_\alpha^\beta) + \mathcal{R}_\alpha^\beta = 0. \quad (2.10)$$

### 2.1.2 Kasner-en soluzio orokortua

Ekuazio orokorrak behin planteatuta, hurrengo urratsa singularitatearen hurbiltasunean ebaztea izango da. Singularitatea existitzen bada, kurbadura dibergentea izango da ingurune honetan, eremu-ekuazioetako zenbait gairekin batera. Gainera, gaiak abiadura ezberdinekin dibergitzen badute, eremu-ekuazioak trunkatu ahal izango dira, gai nagusiak mantenduz [17]. Horrela, ekuazio trunkatuak ebatziz, singularitatearen inguruko deskribapen asintotikoa lortu ahal izango da. Baina nola erabaki zein gai mantendu? Suposizioak eta saiakerak egin beharko dira eta soluzio asintotikoa behin kalkulatu, egindako hurbilketen egokitasuna aztertu.

Helburua denboran ematen diren singularitateak aztertzea bada, lehenengo saiakera metrikaren deribatu espazialak arbuiatzea izan daiteke; hau da, singularitate hurbil  $g_{\alpha\beta}$ -ren menpekotasun denborala espazialarekiko nagusitzen dela [26]. Azterketa errazteko, hutseko kasua kontsideratu daiteke hasiera batean ( $T_a^b = 0$ ) eta ondoren, materiaren eragina gehitu. Suposizio hauek

(2.8)-(2.10) ekuazioetan aplikatuz, hauek izango dira ebatzi beharreko ekuazioak<sup>1</sup>:

$$\frac{1}{2}\partial_t\kappa + \frac{1}{4}\kappa_\beta^\alpha\kappa_\alpha^\beta = 0, \quad (2.11)$$

$$\partial_t(\sqrt{g}\kappa_\alpha^\beta) = 0. \quad (2.12)$$

Singularitatea espazio osoan  $t = 0$ -n simultaneoki ematea aukeratzen bada (2.1.1 azpiatalean kontsideratutakoa, inolako orokortasunik galdu gabe), aldiune honetan hiru dimentsioko metrikaren determinantea espazio osoan deuseztatu beharko da:  $g(t = 0) = 0$ . Orduan, ekuazio sistema honen soluzio orokorra honakoa izango da [26]:

$$g_{\alpha\beta} = q_{ij}l_\alpha^i l_\beta^j, \quad q_{ij} = \text{diag}(t^{2p_1}, t^{2p_2}, t^{2p_3}). \quad (2.13)$$

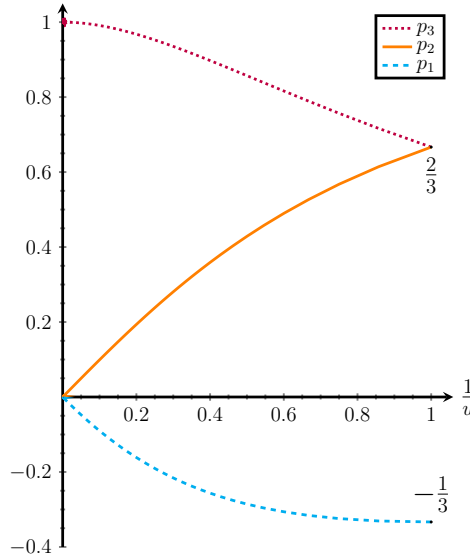
$l_\alpha^i$  bektoreek triada bat osatzen dute —  $l_\alpha^i l_j^\alpha = \delta_j^i$ ,  $l_i^\alpha l_\beta^\alpha = \delta_\beta^i$  — eta egoera orokorra aztertzen ari garenez, koordenatu espazialen menpekoak izan daitezke.  $p_i$  berretzaileak ere koordenatu espazialen menpekoak izan daitezke eta bestalde, honako baldintzak betetzen dituzte [26]:

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 &= 1, \\ p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 &= 1. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Hiru berretzaileak goiko bi ekuazioen bidez erlazionatuta daudenez, bakarra izango da independentea. Hortaz,  $u$  parametro bakarraren bidez parametrizatu daitezke.  $p_1 < p_2 < p_3$  aukera eginez [18]:

$$p_1(u) = \frac{-u}{1+u+u^2}, \quad p_2(u) = \frac{1+u}{1+u+u^2}, \quad p_3(u) = \frac{u(1+u)}{1+u+u^2}, \quad (2.15)$$

non  $u$  parametro funtzional bat den,  $u \geq 1$  tarteko balioak hartzen dituen.



Irudia 2.1: Kasner-en  $p_i$  berretzaileak  $u$  parametroaren funtzioan,  $p_1 < p_2 < p_3$  izanik.

<sup>1</sup>(2.9) ekuazioa tribial geratzen da,  $0 = 0$ .

Ohartu  $u < 1$  bada, parametroa tarte egokira bideratu daitekeela  $u \rightarrow 1/u$  aldaketa eginez eta honako erlazioak aplikatuz:

$$p_1(1/u) = p_1(u), \quad p_2(1/u) = p_3(u), \quad p_3(1/u) = p_2(u). \quad (2.16)$$

2.1 iruditik ondorioztatu egiten da espazioko puntu bakoitzean  $p_i$  berretzaileetako bat negatiboa dela. Beraz, (2.13) metrikari erreparatuz,  $t \rightarrow 0$  limitean espazioa zabaldu egingo da berretzaile negatiboari dagokion norabidean eta uzurtu beste bietan [26]. Gainera, berretzaileen ordena bat zehaztuz  $u \geq 1$  parametro jakin batentzat ( $p_1 < p_2 < p_3$ , adibidez), mantendu egingo da edozein  $u \in [1, \infty)$  parametro baliotarako.

Esan bezala,  $l_\alpha^i$  triadako bektoreak zein  $p_i$  berretzaileak aldagai espazialen menpekoak izan daitezke. Konstanteak diren kasu partikularrean, (2.13)-(2.14) metrika (2.8)-(2.10) ekuazioen soluzio zehatza da (espazio-denbora osorako, hurbilketarik egin gabe). Metrika hori, izatez, *Kasner*-en soluzioa da [29], soluzio homogeneo baina anisotropoa. Koordinatu espazialen menpekoak direnean, ordea, Kasner soluzioaren orokorpen inhomogeneoa dugu eta (2.13)-(2.14) metrikari “Kasner asintotikoa” deritzo [26].

Halaber, metrika honi erreparatuz, argi ikusten da singularitate fisiko bat duela  $t = 0$ -n, kurbaduraren inbariante guztiak dibergenteak direlako limite horretan. Beraz, gure hasierako aukera bete egiten da. Haatik, arestian aurrean bezala, egindako hurbilketen egokitasuna frogatu beharko da; hau da,  $t \rightarrow 0$  limitean (2.13)-ren deribatu espazialak arbuiagarriak direnez.

Kasner-en soluzioa dugunean  $-p_i$  eta  $l_\alpha^i$  koordinatu espazialen independenteak direnean— zuzenean ikusten da deribatu espazialekin loturiko gai guztiak nuluak direla espazio-denbora osoan. Hortaz, argi dago hurbilketa zuzena dela. Hala ere, soluzio homogeneo honek parametro arbitrario bakarra dauka [29] eta ondorioz, ez da soluzio orokorra, esan bezala hutsean 4 direlako beharrezkoak.

Metrika koordinatu espazialen menpekoa denean, ordea, deribatu espazialak ez dira nuluak. Beraz, hurbilketen egokitasuna aztertzea ez da hain triviala. Hasteko, dinamika zehazten duten ekuazioak aztertzen hasiko gara: ekuazio osoa (2.10) da eta trunkatutakoa (2.12),  $t \rightarrow 0$  limiteko hurbilketa [26]. Bi hauei erreparatuz, honakoa bete beharko da egindako hurbilketa egokia izan dadin:

$$\mathcal{R}_\alpha^\beta \approx 0 \quad (t \rightarrow 0). \quad (2.17)$$

Triaden oinarria erabiliz:

$$\mathcal{R}_i^j \approx 0 \quad (t \rightarrow 0). \quad (2.18)$$

Ondorioz, baldintza hau frogatzeko,  $\mathcal{R}_i^j$  hiru dimentsioko Ricci-ren tentsoreak kalkulatu beharko dira  $t \rightarrow 0$  limitean. Horretarako,  $p_i$  berretzaileen ordena bat zehaztu beharko da,  $p_1 < p_2 < p_3$  adibidez (inolako orokortasunik galdu gabe). Beraz,  $p_1$  izango da berretzaile negatiboa eta  $t \rightarrow 0$  limitean,  $t^{p_1} \rightarrow \infty$ ,  $t^{p_2} \rightarrow 0$  eta  $t^{p_3} \rightarrow 0$  beteko da. Orduan, honako forma hartuko dute  $\mathcal{R}_j^i$  osagaiek limite honetan [26]:

$$\mathcal{R}_1^1 \approx \frac{1}{2}(\sigma_{23}^1)^2, \quad \mathcal{R}_2^2 \approx \frac{1}{2}(\sigma_{23}^1)^2, \quad \mathcal{R}_3^3 \approx \frac{1}{2}(\sigma_{23}^1)^2, \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_1^2 &\approx -t^{p_1-p_2} \left[ \sigma_{23}^1 \sigma_{13}^1 + \frac{1}{2} (\sigma_{23}^1)_{,\nu} l_3^\nu t^{-p_3} \right], \\
\mathcal{R}_2^1 &\approx -t^{p_2-p_1} \left[ \sigma_{23}^1 \sigma_{13}^1 + \frac{1}{2} (\sigma_{23}^1)_{,\nu} l_3^\nu t^{-p_3} \right], \\
\mathcal{R}_1^3 &\approx t^{p_1-p_3} \left[ \sigma_{23}^1 \sigma_{12}^1 - \frac{1}{2} (\sigma_{23}^1)_{,\nu} l_2^\nu t^{-p_2} \right], \\
\mathcal{R}_3^1 &\approx t^{p_3-p_1} \left[ \sigma_{23}^1 \sigma_{12}^1 - \frac{1}{2} (\sigma_{23}^1)_{,\nu} l_2^\nu t^{-p_2} \right], \\
\mathcal{R}_2^3 &\approx 0, \quad \mathcal{R}_3^2 \approx 0,
\end{aligned} \tag{2.20}$$

non  $\sigma$  koefizienteak hauek diren:

$$\begin{aligned}
\sigma_{23}^1 &= (l_{\mu,\nu}^1 - l_{\nu,\mu}^1) l_2^\mu l_3^\nu t^{p_1-p_2-p_3}, \\
\sigma_{12}^1 &= (l_{\mu,\nu}^1 - l_{\nu,\mu}^1) l_1^\mu l_2^\nu t^{-p_2}, \\
\sigma_{13}^1 &= (l_{\mu,\nu}^1 - l_{\nu,\mu}^1) l_1^\mu l_3^\nu t^{-p_3}.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Berretzaileen zeinua kontuan hartuz ( $p_1 < 0$  eta  $p_2, p_3 > 0$ ), (2.21) koefizienteak dibergenteak izango dira  $t \rightarrow 0$  limitean. Hortaz, (2.19) adierazpeneko Ricci-ren tentsorearen osagaiek infinitura joko dute eta (2.18) baldintza ez da beteko. Izatez, baldintza hau betetzeko (eta hasierako suposizioa egokia izateko) aukera bakarra honako erlazioa inposatzea izango da:

$$(l_{\mu,\nu}^1 - l_{\nu,\mu}^1) l_2^\mu l_3^\nu = 0. \tag{2.22}$$

Baldintza hau betetzen denean — $p_1 < p_2 < p_3$  izanik— (2.13)-(2.14) metrika (2.8)-(2.10) ekuazioen soluzioa da  $t \rightarrow 0$  limitean. Honi, *Kasner-en soluzio orokortua* deritzo, Kasner-en soluzioaren orokorpen inhomogeneoa delako [28]. Soluzio honek  $t = 0$  singularitatearen inguruko deskribapen asintotikoa ematen du, baina ez da soluzio orokorra. Izan ere, 3 parametro arbitrario baino ez ditu, orokorra izateko gutxiengoa 4 delarik, (2.22) baldintzak parametro arbitrario bat kentzen diolako (ikusi A.3 eranskina). Hortaz, frogatu egiten da singularitate kosmologikoa duen berreturazko soluzio orokorrik ez dela existitzen hutsean<sup>2</sup>. Materiaren presentzian, garapen berdina jarraitu daiteke eta parametro arbitrarioen kopurua soluzioaren orokortasuna bermatzeko nahikoa ez dela ondorioztatzen da [28].

Hala ere, arazo honi aurre egiteko modu naturalena Kasner-en soluzio orokortua hartu eta (2.22) baldintza inposatzeari utziz,  $t \rightarrow 0$  limiterantz nola eboluzionatzen duen aztertzea izan daiteke [26]. Hauxe da Belinskii, Khalatnikov eta Lifshitz-en konjeturaren abiapuntu zehatza eta hurrengo atalean aztertuko duguna.

## 2.2 Konjeturaren deskribapen zehatza

Konjeturaren abiapuntu zehatza behin planteatuta, matematikoki garatuko dugu konjeturaren muina.

---

<sup>2</sup>Honek ez du baztertzen bestelako singularitatea duen soluzio orokor baten existentzia.

Aurrean bezala, abiapuntua Kasner-en soluzio orokortua hasierako egoeratzat hartu —singularitatearen hurbiltasunean— eta (2.22) inposaketa kenduz,  $t \rightarrow 0$  limiteranzko eboluzioa aztertzea izango da. Hauxe perturbazio problema moduan ikus daiteke, perturbaziotzat deribatu espazialekin loturiko (2.8)-(2.10) ekuazioetako gaiak hartuz [18]. Izan ere, frogatu dugun moduan, gai hauek ezin dira arbuiatu (2.22) baldintza betetzen ez denean. Ondorioz, Kasner-en dinamika perturbatuko dute eta beste egoera bati egingo zaio bide. Aipatu beharra dago, ordea, perturbazio hauek ez direla txikiak, sistema erregimenez aldatzea eragingo dutelako.

Beste behin, Einstein-en ekuazioak planteatuko ditugu ideia hau formalizatzeko. Horretarako, (2.13) metrika orokortuko dugu lehendabizi, denborarekiko menpekotasuna esplizituki zehaztu gabe:

$$g_{\alpha\beta} = q_{ij} l_{\alpha}^i l_{\beta}^j, \quad q_{ij} = \text{diag}(a^2, b^2, c^2), \quad (2.23)$$

non  $a, b, c$  eskala faktoreak diren, denboraren menpeko funtzio positiboak [26]. Halaber,  $l_{\alpha}^i$  bektoreen osagaiak unitatearen ordenakoak izatea aukeratuko da, inolako orokortasunik galdu gabe. Metrika hau (2.8) eta (2.10) ekuazioetan ordezkatu eta triaden oinarrian proiektatzen bada, honako ekuazio-sistema lortzen da  $t \rightarrow 0$  limiterako<sup>3</sup> [18]:

$$\frac{1}{a} \frac{d^2 a}{dt^2} + \frac{1}{b} \frac{d^2 b}{dt^2} + \frac{1}{c} \frac{d^2 c}{dt^2} = 0, \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{abc} \frac{d}{dt} \left( \frac{da}{dt} bc \right) &= -\frac{1}{2a^2 b^2 c^2} \left[ \lambda^2 a^4 - (\mu b^2 - \nu c^2)^2 \right], \\ \frac{1}{abc} \frac{d}{dt} \left( a \frac{db}{dt} c \right) &= -\frac{1}{2a^2 b^2 c^2} \left[ \mu^2 b^4 - (\nu c^2 - \lambda a^2)^2 \right], \\ \frac{1}{abc} \frac{d}{dt} \left( ab \frac{dc}{dt} \right) &= -\frac{1}{2a^2 b^2 c^2} \left[ \nu^2 c^4 - (\lambda a^2 - \mu b^2)^2 \right], \end{aligned} \quad (2.25)$$

non  $\lambda, \mu, \nu$  honako koefizienteak diren:

$$\lambda = (l_{\alpha,\beta}^1 - l_{\beta,\alpha}^1) l_2^{\alpha} l_3^{\beta}, \quad \mu = (l_{\alpha,\beta}^2 - l_{\beta,\alpha}^2) l_3^{\alpha} l_1^{\beta}, \quad \nu = (l_{\alpha,\beta}^3 - l_{\beta,\alpha}^3) l_1^{\alpha} l_2^{\beta}. \quad (2.26)$$

Bestalde,  $a = e^{-\alpha}$ ,  $b = e^{-\beta}$ ,  $c = e^{-\gamma}$  aldagai-aldaketa eginez eta  $\tau$  aldagai denborala definituz  $dt = -(abc)d\tau$  ekuazioaren bidez, (2.24) eta (2.25) ekuazioak honela sinplifikatzen dira:

$$(\alpha'' + \beta'' + \gamma'') = -2(\alpha' \beta' + \alpha' \gamma' + \beta' \gamma'), \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} 2\alpha'' &= \lambda^2 a^4 - (\mu b^2 - \nu c^2)^2, \\ 2\beta'' &= \mu^2 b^4 - (\lambda a^2 - \nu c^2)^2, \\ 2\gamma'' &= \nu^2 c^4 - (\lambda a^2 - \mu b^2)^2. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Hasierako egoera Kasner-en soluzio orokortuak definitutakoa bada, honakoak dira hasierako<sup>4</sup>  $t_0 > 0$  aldiunean  $a$ ,  $b$  eta  $c$  eskala fakoreak:

$$a = a_0 t^{p_1}, \quad b = b_0 t^{p_2}, \quad c = c_0 t^{p_3}, \quad (2.29)$$

<sup>3</sup>Kasner itxurako dinamikak daudenean,  $abc \sim t$  kontsideratu daiteke; orduan,  $\mathcal{R}_i^j$  osagaietako gaien artean, (2.25) ekuazioetako eskuinekoak izango dira nagusiak  $t \rightarrow 0$  limitean.

<sup>4</sup>Sistemaren eboluzioa aztertzen ari garen  $t \rightarrow 0$  norabidean, denboran atzera ari gara egiten. Beraz, “hasierako” egoera hau singularitatearen ondorengo  $t_0 > 0$  aldiune bati dagokio, ez aurreko bati.

non  $a_0$ ,  $b_0$  eta  $c_0$  konstante positiboak diren eta  $p_i$  berretzaileek (2.14) baldintzak betetzen dituzten. Beraz,  $dt = -(abc)d\tau$  ekuazioaz baliatuz, aldagai denboral berria  $\tau = -\Delta^{-1} \ln t + \tau_1$  izango da,  $\Delta = a_0 b_0 c_0$  izanik. Ondorioz,  $t = 0$  singularitatea  $\tau \rightarrow +\infty$  limitean emango da eta sinplifikatzeko, hasierako  $t_0$  aldiunea  $\tau \rightarrow -\infty$  limitearekin bat egitea aukeratu daiteke [18]. Izan ere,  $t_0$ -ren balioa edozein izan daitekeenez (positiboa den bitartean),  $\tau(t_0) \rightarrow -\infty$  ezarriz  $t_0$ -ren balio zehatza definitzeko beharra galtzen da.

Halaber, aurreko atalean bezala,  $p_1 < p_2 < p_3$  izatea aukeratuko da, orokortasunik galdu gabe. Hasierako egoeran, (2.29) Kasner-en soluzio orokortua dugunean,  $\lambda, \nu$  eta  $\mu$ -rekin loturiko gai guztiak arbuigarriak dira (2.27) eta (2.28) ekuazioetan<sup>5</sup>. Orduan, honako ekuazioen bidez deskribatu daiteke sistema:

$$\alpha' \beta' + \alpha' \gamma' + \beta' \gamma' = 0. \quad (2.30)$$

$$\alpha'' = \beta'' = \gamma'' = 0 \quad (2.31)$$

Haatik, (2.22) baldintza inposatzeari utzi ( $\lambda \neq 0$ ) eta egoera singularitaterantz eboluzionatzen uzten denean,  $a$ -rekin loturiko gaiek arbuigarriak izateari utziko diote. Izan ere,  $t \rightarrow 0$  limitera hurbildu ahala,  $a$  gero eta gehiago handituko da — $b$  eta  $c$  gero eta gehiago txikitzen direlarik— eta  $\lambda$  nulua ez den heinean, (2.28) ekuazioko  $\lambda^2 a^4$  “perturbazioa” agertuko da (2.31) ekuazioan [18]:

$$\begin{aligned} \alpha'' &= \frac{1}{2} \lambda^2 a^4 = \frac{1}{2} \lambda^2 e^{4\alpha}, \\ \beta'' &= \gamma'' = -\frac{1}{2} \lambda^2 a^4 = -\frac{1}{2} \lambda^2 e^{4\alpha}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Orduan, (2.32)-ri erreparatuz,  $\alpha''$ ,  $\beta''$  eta  $\gamma''$  ez dira nulua izango eta (2.30) ekuazioak (2.27) forma berreskuratuko du. Azken honek eta (2.32) ekuazioak metrikaren eboluzioa deskribatzen dute, (2.29) hasierako egoeratik hasita eta singularitaterantz hurbilduz,  $\tau \rightarrow +\infty$ . Hasierako baldintza hauek kontuan hartuz, honakoak dira (2.27) eta (2.32) ekuazioen soluzio zehatzak [18]:

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{2\Delta|p_1|}{|\lambda| \cosh \left[ 2\Delta|p_1|(\tau - \tau_1) + \ln \frac{|\lambda|a_0^2}{4\Delta|p_1|} \right]}, \\ b^2 &= \frac{\Delta|\lambda|}{2c_0^2|p_1|} e^{-2\Delta(p_2-|p_1|)(\tau-\tau_1)} \cosh \left[ 2\Delta|p_1|(\tau - \tau_1) + \ln \frac{|\lambda|a_0^2}{4\Delta|p_1|} \right], \\ c^2 &= \frac{\Delta|\lambda|}{2b_0^2|p_1|} e^{-2\Delta(p_3-|p_1|)(\tau-\tau_1)} \cosh \left[ 2\Delta|p_1|(\tau - \tau_1) + \ln \frac{|\lambda|a_0^2}{4\Delta|p_1|} \right]. \end{aligned} \quad (2.33)$$

(2.33) adierazpenek frogatu egiten dute perturbazioaren eraginpean hasierako (2.29) Kasner-en dinamika apurtu egiten dela. Hala ere,  $\tau \rightarrow +\infty$  limitera hurbildu ahala, Kasner-en erregimen berri bat lortzen dela ondorioztatzen da<sup>6</sup>:

$$a^2 = \tilde{a}_0^2 t^{2\tilde{p}_1}, \quad b^2 = \tilde{b}_0^2 t^{2\tilde{p}_2}, \quad c^2 = \tilde{c}_0^2 t^{2\tilde{p}_3}, \quad (2.34)$$

<sup>5</sup>(2.22) baldintzak  $\lambda = 0$  izatea inposatzen du eta  $b \propto t^{p_2}$  eta  $c \propto t^{p_3}$  arbuigarriak direnez  $t \rightarrow 0$  limitean, haiekin loturiko gaiak ere ( $\mu$  eta  $\nu$ -rekin lotutakoak, hurrenez hurren) arbuigarriak dira.

<sup>6</sup>(2.33) adierazpenei  $\tau \rightarrow +\infty$  limitea baino ez zaie aplikatu behar. Garapen osoa, ordea, [26] liburuko A eranskinean agertzen da.

non  $\tilde{p}_i$  berretzaile berriak honakoak diren:

$$\tilde{p}_1 = \frac{|p_1|}{1 - 2|p_1|}, \quad \tilde{p}_2 = \frac{p_2 - 2|p_1|}{1 - 2|p_1|}, \quad \tilde{p}_3 = \frac{p_3 - 2|p_1|}{1 - 2|p_1|}. \quad (2.35)$$

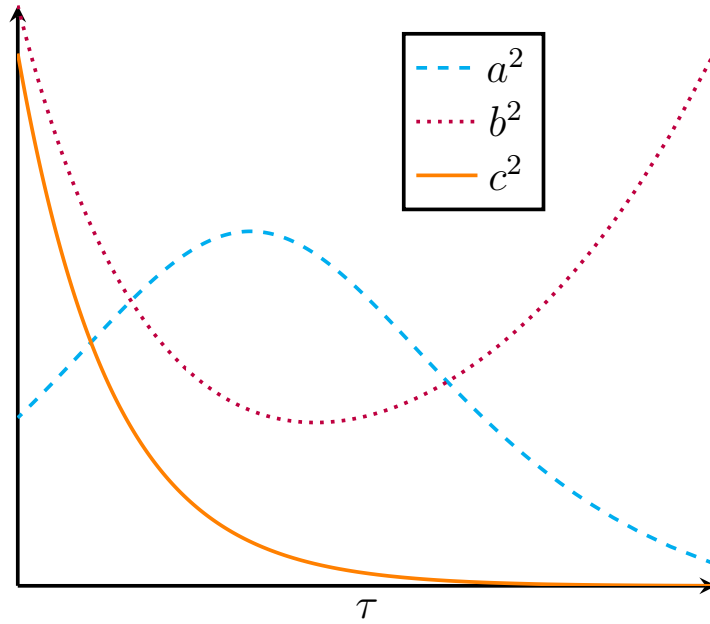
(2.35) adierazpenetik egiaztatu daiteke berretzaile berriek (2.14) erlazioak betetzen dituztela. Halaber,  $\tilde{\Delta} = \tilde{a}_0\tilde{b}_0\tilde{c}_0 = \Delta(1 - 2|p_1|)$  erlazioa beteko da [18].

Erregimen aldaketaren fenomeno hobeto ulertzeko, Kasner berretzaileen (2.15) parametrizazioaz baliatuko gara (2.35) adierazpena berridazteko:

$$\tilde{p}_1 = p_2(u - 1), \quad \tilde{p}_2 = p_1(u - 1), \quad \tilde{p}_3 = p_3(u - 1), \quad (2.36)$$

non  $u \geq 1$  parametroaren balioa hasierako berretzaileei dagokiona den.

(2.36) erlazioari erreparatuz, ondorioztatu egiten da perturbazioaren eraginez, berretzaile negatiboa triadako  $\vec{l}_1$  norabidetik  $\vec{l}_2$  norabidera transferitu egiten dela ( $u \geq 1$  den bitartean); hau da,  $\vec{l}_1$  eta  $\vec{l}_2$  norabideek rola trukutzen dute erregimen berrian,  $\vec{l}_3$ -k bera mantentzen duelarik.



Irudia 2.2:  $a$ ,  $b$  eta  $c$  eskala faktoreen eboluzio tipikoa  $\tau$  aldagai denboralaren funtzioan.

Idea hau argiago ikus daiteke 2.2 irudian, zeinetan (2.33) adierazpenak emandako  $a^2$ ,  $b^2$  eta  $c^2$  eskala faktoreen eboluzio tipikoa irudikatu den  $\tau$  denboraren funtzioan. Hasieran,  $\tau$  txikia denean, erraz identifikatu daiteke hasierako Kasner-en erregimena: singularitatera hurbildu ahala ( $\tau$  handitu ahala),  $a$  eskala faktorea hasi egiten da eta  $b$  eta  $c$  murriztu. Puntu batean, ordea, joera hau eten egiten dela ikus daiteke. Puntu horretan,  $a$ -k balio maximoa hartzen du ( $a_{max}^2 = \frac{2\Delta|p_1|}{|\lambda|}$ ) eta hortik aurrera,  $a$  eta  $b$ -k portaerak permutatzen dituzte,  $c$ -k joera beharokorra mantentzen duelarik. Horrela, Kasner-en erregimen berria hasten da.



Izan ere,  $a$ -ren hazkundearekin batera,  $\lambda^2 a^4$  “perturbazio” bera hazi egiten da, zeinak Kasner-en dinamika oztopatu eta erregimen aldaketa bideratzen duen. Hala ere, erregimena aldatu eta  $\vec{l}_1$  eta  $\vec{l}_2$  norabideek rola trukutzen dutenean, “perturbazioa” ahultzen hasten da,  $a$  murrizten delako. Hauxe azkar bihurtzen da arbuigarri eta orduan, sistemaren eboluzioa (2.30) eta (2.31) ekuazio trunkatuen bidez deskribatu daiteke berriz. Haatik,  $b$  hazi ahala, “perturbazio” berri bat ematen da, (2.28) ekuazioko  $\mu^2 b^4$  gaiarekin loturikoa oraingoan. Horrela, aurreko argudio bera jarraituz, sistema egoera honetatik abiatu eta eboluzionatu egingo da Kasner erregimen berri bat lortu arte, (2.36) erlazioek zehazturikoa [18]. Erregimen hauetako bakoitzari Kasner garaia (*Kasner epoch*) deritzo.

Garaien segida batean,  $\vec{l}_1$  eta  $\vec{l}_2$  norbideetako rola permutatzen direnez,  $a$  eta  $b$  oszilakorrak dira,  $c$  beherakor mantentzen delarik. Hau da,  $a$  eskala faktorea  $\vec{l}_1$  norabidearekin lotuta dagoenez,  $b$   $\vec{l}_2$ -rekin eta  $c$   $\vec{l}_3$ -rekin, hiru dimentsioko espazioak oszilatzen egiten du lehenengo bi norabideetan eta uzkuritu hirugarrenean. Hala ere,  $\tilde{\Delta} = \tilde{a}_0 \tilde{b}_0 \tilde{c}_0 = \Delta(1 - 2|p_1|) < \Delta$  erlazioa dela eta,  $a$  eta  $b$ -ren oszilazioen anplitudeak gutxituz doaz, singularitatean bertan guztiz desagertu arte [18].

Bestalde, garaien segida batean, (2.36) erlazioaren eraginez, honako eboluzioa jasaten du hasierako  $u \geq 1$  parametroak:

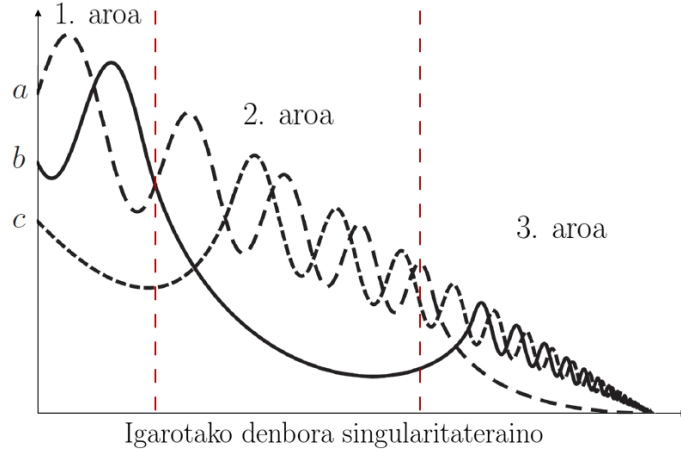
$$u, u - 1, u - 2, u - 3, \dots \quad (2.37)$$

$u$  parametroa unitatea baino handiagoa izan behar denez ( $u \geq 1$ ), (2.37) segida  $u - [u] + 1$  balioan amaituko da,  $[ ]$ -k zati osoa adierazten duelarik. Garaien segida honi aroa (*era*) deritzo eta behin bukatuta, beste aro berri bati egiten dio bide. Nola, ordea?  $u \rightarrow u - 1$  aruari jarraituz, aro berria  $u' = u - [u]$  parametro balioarekin hasten da. Balio hau  $u' < 1$  denez,  $u$ -ren eremutik kanpo dago, baina  $u' \rightarrow 1/u'$  aldaketa eginez, tarte egokira bideratu daiteke (2.1.2 azpiatalean azaldu bezala, (2.16) erlazioaren bidez). Laburbilduz:

1. **aroa:**  $u > 1$  hasierako parametroa  $\implies u, u - 1, \dots, u - [u] + 1$  eboluzioa
2. **aroa:**  $u' = u - [u] < 1$  hasierako parametroa  $\implies u' \rightarrow \frac{1}{u'}$  aldaketa  $\implies u', u' - 1, \dots, u' - [u'] + 1$  eboluzioa

(2.16) eta (2.36) erlazioak konbinatuz,  $u' \rightarrow 1/u'$  aldaketak rolen permutazio berri bat eragiten duela ondorioztatzen da: aurreko garaian berretzaile negatiboa zeukan eskala faktoreak ( $a$  edo  $b$ , azkenengo garaia arabera) berretzaile positibo *handiena* hartzen du aro berrian,  $c$ -k berretzaile positibo *txikiena*, eta gainerakoak (berretzaile positibo txikiena zeukanak) berretzaile negatiboa. Hau da, demagun aurreko aroko azken garaian  $a$  eskala faktoreak berretzaile negatiboa zeukala ( $a = t^{p_1}$ ,  $p_1 < 0$  izanik),  $b$ -k berretzaile positibo txikiena ( $b = t^{p_2}$ ) eta  $c$ -k berretzaile positibo handiena ( $c = t^{p_3}$ ,  $p_3 > p_2$  izanik). Orduan, aro berriaren hasieran,  $a$ -k hartuko du berretzaile positibo handiena ( $a = t^{p_3}$ ),  $b$ -k berretzaile negatiboa ( $b = t^{p_1}$ ) eta  $c$ -k berretzaile positibo txikiena ( $c = t^{p_2}$ ).

Ondorioz, hiru dimentsioko espazioaren oszilazioa norabidez aldatzen da —  $\vec{l}_1$  eta  $\vec{l}_3$  artean edo  $\vec{l}_2$  eta  $\vec{l}_3$  artean — eta uzkurteko joera gainerako norabideak hartzen du. Aurreko argudio bera jarraituz, aro berri hau amaitzean beste bati egiten zaio bide, eskala faktoreen rola aldatuz beste behin [26]. Guztira, garai eta aroen arteko trantsizioak kateatu egiten dira  $t = 0$  singularitatean heldu arte, non  $a$ ,  $b$  eta  $c$  eskala faktoreak desagertu egiten diren. Portaera hau argi deskribatzen du 2.3 irudiak.



Irudia 2.3: Eskala faktoreen portaera singularitatera hurbildu ahala. Iturria: [26].

Denbora sinkronoan ( $t$ ) oszilazioen periodoek zerora jotzen dute eta edozein  $t > 0$  aldiune finitu eta  $t = 0$  singularitatearen artean, infinitu aro eta garai ematen dira. Horregatik, aldagai denboral naturalena portaera hau deskribatzeko  $\tau$  da, singularitatea  $\tau \rightarrow +\infty$  puntura eramaten duelako.

Hauxe da, guztira, Belinskii, Khalatnikov eta Lifshitz-en konjetura, zeinetan singularitate kosmologikoa duen soluzio *orokor* baten portaera deskribatzen den. Izan ere, (2.22) baldintza ez inposatzean, soluzioak parametro arbitrario gehigarria berreskuratzen du eta horregatik, orokorra da: 4 parametro funtzional arbitrario ditu (ikusi A.3 eranskina).

Ikuspuntu matematikotik aztertuz, deskribapen honek berezitasun bat du: singularitate hurbil Einstein-en ekuazioak denboraren deribatu arruntetako ekuazio diferentzial bihurtzen dira, (2.24)-(2.25) ekuazioetan ikus daitekeen moduan. Propietate matematiko honen eraginez, espazioko puntu ezberdinen dinamikak independenteak dira; hau da, singularitatearen dinamika lokala da. Deribatu espazialak, bestalde, “pasiboki” sartzen dira Einstein-en ekuazioetan. Hala ere, haien eraginez sortzen dira hiru dimentsioko espazioaren oszilazioak singularitatera hurbildu ahala [30].

Bestalde, soluzio honek bestelako ezaugarri garrantzitsua dauka: estokastizazio espontaneo [30]. Izan ere, hasierako aldiunetik abiatuz eta singularitatera hurbildu ahala, “hasierako” baldintzekiko menpekotasuna galdu egiten da. Ondorioz, ereduaren eboluzioak baldintza hauen independentea den deskribapen estatistikoa onartzen du [30].

Azkenik, esan beharra dago azterketa hau hutseko kasurako egin bada ere, soluzioak portaera berdina erakusten duela materiaren presentzian: “*matter does not matter*” [17]. Izan ere, masarik gabeko eremu eskalarraren kasuan izan ezik<sup>7</sup>,  $T_a^b$  energia-momentuaren tentsorea arbuigarria da Einstein-en ekuazioetan singularitatearen hurbiltasunean, hutseko egoera bera lortuz [26]. Laburbilduz, BKL konjeturan singularitatea espazio-motakoa da, lokala, oszilakorra eta hutsak nagusitua.

<sup>7</sup>Kasu honetan soluzio orokorra singularitatera hurbiltzen da espazioaren norabide guztietan konprimituz, mono-tono eta anisotropikoki [31].

## Kapitulua 3

# BKL konjeturaren formalismo hamiltondarra

BKL konjeturaren analisi sakona —motibazioa, abiapuntua eta garapen zehatza— behin eginda, kapitulu honetan konjetura berformulatuko dugu formulazio hamiltondar bat erabiliz. Izan ere, 1. kapitulu esan bezala, BKL konjeturaren aldeko ebidentzien gorakada dela eta, ezinbestekoa dirudi grabitazio kuantikoan izan ditzakeen ondorioak aztertzea; konjeturak erlatibitate orokorraren sinplifikazio nabarmena postulatu du espazio-motako singularitate orokorren inguruan eta hor, zehazki, efektu kuantikoak nagusi izatea espero da [27]. Hala ere, BKL konjetura teoria hauen ikuspuntutik aztertzeke, orain arte erabilitako formulazioa (deribatu partzialetako ekuazio-sistemetan oinarritutakoa) ez da batera aproposa. Horregatik, egokiago baten beharrean, Ashtekar, Henderson eta Sloan-ek [27] artikuluan proposatutako formulazio hamiltondarra erabiliko dugu.

Formulazio hau kiribilen grabitazio kuantikoak (*Loop Quantum Gravity*) motibatutakoa da, konjetura teoria honetarako aproposak diren aldagaietan garatzen duelako. Izatez, grabitazioa eta fisika kuantikoa bateratzeko proposamenen artean, azken hau singularitate eta efektu kuantikoen arteko lotura azaltzeko hautagai nagusienetakoa da. Ondorioz, BKL konjetura teoria honetan aztertzea oso oparoa izan daiteke.

Kiribilen grabitazio kuantikoaren garapen zehatza, ordea, gradu amaierako lan honen irismenetik haratago doa. Beraz, aipaturiko artikuluan bezala, konjetura teoria honetarako egokiak diren aldagaietan formulatzera mugatuko gara, inolako kuantizaziorik egin gabe. Gainera, aipatzekoa da formulazio hamiltondar hau erlatibitate orokor klasikoaren testuinguruan ere oso baliagarria izan daitekeela, konjeturaren azterketa analitiko eta numerikoetan [27].

Sarrera hau kontuan hartuz, bi atal nagusitan banatuko dugu kapitulua. Lehendabizi, erlatibitate orokorraren formulazio hamiltondarra planteatuko dugu, oinarritzko definizio eta kontzeptuak azalduz. Ondoren, konjetura formulatuko dugu marko honetan, aldagai egoki batzuk definituz. Oinarritzat formulazio originala eta singularitatearen natura bera hartuko ditugu: singularitatean metrikaren determinantea nulua dela postulatu, sistema deskribatzen duen hamiltondarra trunkatuko dugu, aurreko formulazioan Einstein-en ekuazioak trunkatu ditugun moduan. Aipatzekoa da beste behin, hutseko kasua aztertzea mugatuko garela.

### 3.1 Erlatibitate orokorraren formulazio hamiltondarra

Erlatibitate orokorraren formulazio hamiltondarra garatzeko, sistema mekaniko klasikoetan erabiltzen den prozedura bera jarraitu behar da: Einstein-en eremu-ekuazioetatik abiatuz, hauek deskribatzen dituen lagrangear egokia eraiki eta ondoren, hamiltondarra kalkulatu Legendren transformazio baten bidez. Lan honen luzera mugatua dela eta, ordea, emaitza zuzenean ematera mugatuko gara.

Adierazpen hau eman aurretik, zenbait kontzeptu eta aldagai definitu beharko ditugu. Lehen urratsa, formulazio hamiltondarra garatzeko ezinbestekoa, espazio-denbora banatzea izango da, 3+1 deskonposaketa deritzona: espazioa alde batetik eta denbora bestetik.

#### 3.1.1 3+1 deskonposaketa

3+1 deskonposaketak  $t$  konstanteko *espazio-motako* gainazaletan,  $\Sigma_t$  Cauchy gainazaletan, “foliatzen” du espazio-denbora,  $t$  gainazal hauek parametrizatzen dituen denbora-aldagai global bat izanik [12]. Aldagai honekin batera, norabide *denborala* zehazten duen  $t^a$  eremu-bektorialekuatzen da, zeinak  $t^a \nabla_a t = 1$  baldintza betetzen duen<sup>1</sup>.

Bestalde,  $\Sigma_t$  hipergainazalen bektore unitario normala  $n^a$  bada, lau dimentsioko  $g_{ab}$  metrikak ondoko  $q_{ab}$  metrika espaziala (positiboki definiturikoa) indusitzen du  $\Sigma_t$  bakoitzean [12]:

$$q_{ab} \equiv g_{ab} + n_a n_b. \quad (3.1)$$

Metrika hau  $\Sigma_t$  bakoitzerako definituta dagoenez,  $t$ -ren menpekoa da. Halaber,  $t^a$  bektorea  $\Sigma_t$ -rekiko osagai normal eta tangenzialetan deskonposatzen bada:

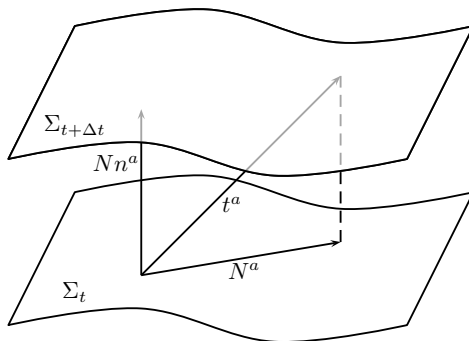
$$N = -t^a n_a = -(n^a \nabla_a t)^{-1}, \quad (3.2)$$

$$N_a = q_{ab} t^b \iff N^a = -q^a_b t^b, \quad (3.3)$$

non  $N$  funtzioari *lapse* (tarte funtzioa) deritzon eta  $N^a$  bektoreari *shift* (desplazamendu bektorea). Hau da,  $t^a = N n^a + N^a$ . Hauxe argiago ikus daiteke 3.1 irudian, zeinetan 3+1 deskonposaketaren irudikapen eskematiko bat egin den  $N$  eta  $N^a$ -ren esanahi geometrikoa hobeto ulertzeko.

Espazio-denboran zeharreko “denboraren fluxu” gisa interpretatu daiteke  $t^a$  eremu-bektorialeku. Orduan, 3.1 irudiari erreparatuz,  $t = 0$  baliotik hasita eta “denboran aurrera joan ahala” ( $t$  parametroa handitu ahala),  $\Sigma_0$  gainazaletik  $\Sigma_t$  gainazalera pasatuko gara [12]. Azken hau metrika espazialaren  $q_{ab}(t = 0)$ -tik  $q_{ab}(t)$ -rako aldaketa bezala ere uler daiteke. Hortaz, hiru dimentsioko hipergainazal batean definituriko metrika espaziala erlatibitate orokorraren aldagai dinamikotzat hartu daiteke [12]. Hala ere, azpimarratu beharra dago  $N^a$  *shift* bektorea eta  $N$  *lapse* funtzioa ez direla dinamikoak, denborak “aurrera” nola egin behar duen baino ez dutelako zehazten:  $t^a = N n^a + N^a$ .

<sup>1</sup> $\nabla_a$  lau dimentsioko  $g_{ab}$  metrikarekin loturiko deribatu kobariantea da:  $\nabla_c T_{b\dots}^a \equiv \partial_c T_{b\dots}^a + \Gamma_{dc}^a T_{b\dots}^d + \dots - \Gamma_{bc}^d T_{d\dots}^a - \dots$ , non  $\Gamma_{bc}^a$  bigarren motako Christoffel-en ikurrak (edo konexioa) diren.



Irudia 3.1: Espazio-denboraren 3+1 deskonposaketaren irudikapen eskematikoa.

Azkenik, (3.1)-(3.3) ekuazioak kontuan hartuz, honela idazten da lau dimentsioko metrika  $N$ ,  $N^a$  eta  $q_{ab}$  metrika espazialaren funtzioan [32]:

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} -N^2 + N^\alpha N_\alpha & -N_\alpha \\ -N_\alpha & q_{\alpha\beta} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Hortaz, hemendik  $N$  lapse funtzioa eta  $N^a$  shift bektorea honela identifikatu ditzakegu lau-dimentsioko metrikaren osagaiekin [32]:

$$g^{00} = \frac{1}{N^2}, \quad g^{0\alpha} = \frac{N^\alpha}{N^2}. \quad (3.5)$$

$N$  funtzioa eta  $N^a$  bektorea arbitrarioak dira, hauen balioa aukeratzeko gauge askatasuna dago. Beraz, koordinatu sistema egokia erabiliz edozein balio aukeratu daiteke (3.5) ekuazioko metrikaren lau osagaientzat. Izatez, hauxe bera egin dugu aurreko kapituluan erreferentzia-sistema sinkronoa aukeratzean (ikusi A.1 Eranskina):  $g_{00} = -1$  eta  $g_{0\alpha} = 0$ .

Halaber, (3.4) ekuaziotik honakoa ondorioztatzen da:

$$\sqrt{-g} = \sqrt{-\det g_{ab}} = \sqrt{N^2 \det q_{ab}} = N \sqrt{q}, \quad (3.6)$$

non  $g$  eta  $q$  lau dimentsioko metrikaren eta metrika espazialaren determinanteak diren, hurrenez hurren.

### 3.1.2 Kurbadura estrintsekoa eta triadak

Espazio eta denboraren deskonposaketa behin eginda, formulazio hamiltondarraren bi aldagaiak izango diren eremuak definitzeari ekingo diogu: triadak eta kurbadura estrintsekoa.

Triadak,  $E_i^\alpha$ ,  $\Sigma_t$  hipergainazalaren espazio tangentean oinarri bat osatzen duten hiru eremu-bektorial ortonormal dira. Hauen bidez honela definitu daiteke  $q_{\alpha\beta}$  metrika espaziala [32]:

$$q_{\alpha\beta} = E_\alpha^i E_\beta^j \delta_{ij}, \quad (3.7)$$

non  $\delta_{ij} = \text{diag}(1, 1, 1)$  metrika laua den. (3.7) erlazioari erreparatuz, ondorioztatu egiten da triadek espazio kurbatua eta laua erlazionatzen dituztela espazioko puntu bakoitzean. Hortaz, metrika espazialaren informazioa daramate. Gainera, ortonormalak direnez, honako erlazioak betetzen dituzte:

$$E_i^\alpha E_\beta^i = \delta_\beta^\alpha, \quad E_j^\alpha E_\alpha^i = \delta_j^i. \quad (3.8)$$

Halaber, ikus daiteke triadaren eremu bakoitzak bi indize dituela: barne-indizea ( $j$ ) eta indize espaziala ( $\alpha$ ). Biek 1, 2, 3 balioak hartzen dituzte, baina indize espazialak igo edo jaisteko  $q_{\alpha\beta}$  metrika espaziala erabili behar den bitartean,  $\delta_{ij}$  metrika laua erabili behar da barne-indizeekin [32].

Bestalde, barne-indizeak dituzten objektuekin lan egin behar denean, ezinbestekoa da deribatu egoki bat definitzea:  $q_{\alpha\beta}$  metrika espazialarekin loturiko  $D_\alpha$  deribatu kobariantea, hain zuzen. Hasteko, demagun barne-indizea bakarrik duen objektua dugula. Honakoa lortuko da hiru dimentsioko deribatu kobariantea objektu honen gainean aplikatzean [32]:

$$\begin{aligned} D_\alpha G^i &= \partial_\alpha G^i + \Gamma_\alpha^i{}_j G^j, \\ D_\alpha G_i &= \partial_\alpha G_i - \Gamma_\alpha^j{}_i G_j, \end{aligned} \quad (3.9)$$

non  $\Gamma_\alpha^j{}_i$ -ri spin-konexioa deritzon. Indize mixtoak dituen objektuekin, ostera, honakoa da  $D_\alpha$  aplikatzearen emaitza:

$$D_\alpha G_i^a = \partial_\alpha G_i^a - \Gamma_\alpha^j{}_i G_j^a + \Gamma_{\alpha b}^a G_i^b, \quad (3.10)$$

non  $\Gamma_{bc}^a$  Christoffel-en ikurrak diren. Haatik, indize espazialak baino ez dituzten objektuen gainean eragiten duenean, hiru dimentsioko  $D_\alpha$  deribatua lau dimentsioko  $\nabla_a$  deribatu kobariantearen  $\Sigma_t$  gainazalaren gaineko proiektzio bezala definitu daiteke [12]:

$$D_\alpha T_{b_1 \dots b_l}^{a_1 \dots a_k} \equiv \left( q_{c_1}^{a_1} \dots q_{c_k}^{a_k} q_{b_1}^{d_1} \dots q_{b_l}^{d_l} \right) q_\alpha^e \nabla_e T_{d_1 \dots d_l}^{c_1 \dots c_k}. \quad (3.11)$$

Halaber, deribatu hau  $q_{ab}$  metrika espazialarekin bateragarri izateko definitzen da:  $D_\alpha q_{ab} = 0$ . Gainera, deribatuak triadak deuseztatzea inposatzen bada,  $D_\alpha E_i^\beta = 0$ , Christoffel-en ikurrek guztiz zehazten dute  $\Gamma_\alpha^j{}_i$  spin-konexioa.

Bestalde, kurbadura estrintsekoa,  $K_{\alpha\beta}$ , honako eran definituriko tentsore simetrikoa da [32]:

$$K_{\alpha\beta} = q_\alpha^a \nabla_a n_\beta = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n q_{\alpha\beta}, \quad (3.12)$$

non  $n^a \Sigma_t$  hipergainazalaren bektore normala den (3.1.1 azpiatalean aurkeztutakoa) eta  $\mathcal{L}_n$  Lie-ren deribatua  $n^a$  eremu-bektorialean zehar. Aldagai hau estuki erlazionatuta dago metrikaren “deribatu denboralarekin”:

$$\dot{q}_{\alpha\beta} \equiv \mathcal{L}_t q_{\alpha\beta} = 2N K_{\alpha\beta} + \mathcal{L}_N q_{\alpha\beta}, \quad (3.13)$$

non  $N$  lapse funtzioa den,  $\mathcal{L}_N$  Lie-ren deribatua  $N^a$  (shift) eremu-bektorialean zehar eta  $\mathcal{L}_t$  Lie-ren deribatua  $t^a$  eremu-bektorialean zehar (3.1.1 azpiatalean aurkeztutakoa).

Zehazki, tentsore honen eta triaden arteko kontrakzioa izango da aldagai gisa erabiliko duguna:

$$K_\alpha^i = K_\alpha^\beta E_\beta^i = q^{\beta\mu} K_{\alpha\mu} E_\beta^i. \quad (3.14)$$

Azkenik, funtsezkoa da dentsitateen kontzeptua aipatzea.  $q_{ab}$  metrika espazialaren determinantea  $q$  bada, objektu bat (eskalarra, tentsorea...)  $(\sqrt{q})^n$ -rekin biderkatzen denean ( $n \in \mathbb{Z}$ ),  $n$  pisuko dentsitate bat lortzen da. Dentsitate hau jatorrizko objektua bezala bider metrikaren determinantea ( $n/2$  berreturara) transformatuko da [32]. Hau da, jatorrizko objektuaren arabera, dentsitate eskalarra, tentsoriala etab. lortuko da. Jatorrizko objektuarekin desberdintzeko tilde ikurra erabiltzen da:  $n > 0$  denean,  $n$  tilde jartzen dira objektuaren gainean eta  $n < 0$  denean,  $n$  tilde objektuaren behean. Adibidez,  $f$  funtzio eskalarra badugu:  $\tilde{f} = \sqrt{q}f$  eta  $\underline{f} = f/\sqrt{q}$ .

Formalismo hamiltondarrean eremuak erabiltzen direnez, ezinbestekoa izaten da integralak egitea, eta horretarako, dentsitizaturiko objektuak erabili behar dira. Izan ere, funtzio eskalar bat bolumen batean integratu ahal izateko,  $\sqrt{q}$ -rekin biderkatu behar da; hots, +1 pisuko dentsitate eskalarra izan behar da<sup>2</sup>. Bereziki, dentsitizaturiko triadak erabiliko ditugu,  $\tilde{E}_i^\alpha = \sqrt{q}E_i^\alpha$ , eta nabarmendu beharra dago dentsitaterik gabeko triaden informazio bera gordetzen dutela.

Azken hauek,  $K_\alpha^i$ -rekin batera, formulazio hamiltondarra garatzeko erabiliko ditugun aldagaiak izango dira, bikote kanonikoa, hain zuzen. Eremu hauek denboraren funtzioan eboluzionatuko dute eta  $N$  lapse eta  $N^a$  shift-en laguntzaz, espazio-denborari dagokion lau dimentsioko metrika eraikitzea ahalbidetuko dute [32].

### 3.1.3 Erlatibitate orokorraren hamiltondarra hutsean

Aurreko azpiatalean auresan bezala, erlatibitate orokorraren formulazio hamiltondarra bi aldagaien bidez garatuko dugu: dentsitizaturiko triada ortonormala  $\tilde{E}_i^\alpha$  eta bere momentu konjugatua den  $K_\alpha^i$ , kurbadura estrintsekoarekin loturikoa.

Aldagai hauek eremuak dira eta  $(\tilde{E}_i^\alpha, K_\alpha^i)$  bikoteak osaturiko fase-espazioari  $\mathcal{P}$  deritzo. Halaber, haien arteko Poisson-en makoa honakoa da:

$$\{\tilde{E}_i^\alpha(\mathbf{x}), K_\beta^j(\mathbf{y})\} = \delta_i^j \delta_\beta^\alpha \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.15)$$

Aldagai hauekin eta 3+1 deskonposaketa behin eginda, ondoko eran eraikitzen da erlatibitate orokorrari dagokion hutseko hamiltondarra, Lagrange-ren biderkatzaileen batura gisa<sup>3,4</sup> [27]:

$$H[\tilde{E}, K] = \int_\Sigma -\frac{1}{2} \tilde{N} \tilde{S} - \frac{1}{2} N^\alpha \tilde{V}_\alpha + \Lambda_i \tilde{G}^i, \quad (3.16)$$

non  $\tilde{N}$  eta  $N^a$  aurreko 3.1.1 azpiatalean aurkeztutako lapse (dentsitizatuta) eta shift diren eta  $\Lambda_i$  barne espazioko biraketekin loturiko bektorea. Azken hiru hauek Lagrange-n biderkatzaileak dira eta gainontzeko funtzioak loturak:  $\tilde{S}$  lotura eskalarra da,  $\tilde{V}_\alpha$  lotura bektoriala eta  $\tilde{G}^k$  Gauss-en lotura. Zehazki, hauek dira loturen adierazpenak [27]:

$$\tilde{S}(\tilde{E}, K) \equiv -\tilde{q}\mathcal{R} - 2\tilde{E}_{[i}^\alpha \tilde{E}_{j]}^\beta K_\alpha^i K_\beta^j = 0, \quad (3.17)$$

<sup>2</sup>Objektu indizedunak (tentsoreak) dentsitateak izan badaitezke ere, ezin dira zuzenean integratu; beste objektu indizedunekin kontrakzioa egin behar da dentsitate eskalarrak lortu eta integratu ahal izateko.

<sup>3</sup>Esan bezala, lan honen luzera mugatua dela eta, emaitza zuzenean ematera mugatuko gara. Garapen osoa ikusteko [12] liburuko  $E$  eranskinera jo daiteke.

<sup>4</sup>Hurrengo ekuaziotik ohartu dentsitateen garrantziaz: integrakizun guztiak +1 pisuko dentsitate eskalarrak dira.

$$\tilde{V}_\alpha(\tilde{E}, K) \equiv 4D_{[\alpha}(K_{\beta]}^i \tilde{E}_i^\beta) = 0, \quad (3.18)$$

$$\tilde{G}^k(\tilde{E}, K) \equiv \epsilon_i^{jk} \tilde{E}_j^\alpha K_\alpha^i = 0, \quad (3.19)$$

non  $\mathcal{R}$   $q_{ab}$  metrika espazialari dagokion kurbaduraren eskalarra den,  $D_\alpha$  aurreko 3.1.2 azpiatalean aurkeztutako deribatua eta  $\epsilon_i^{jk}$  Levi-Civita-ren tentsorea<sup>5</sup>. Halaber, [ ] osagai antisimetrikoa adierazteko erabili da:  $M_{[i}N_{j]} = \frac{1}{2}(M_i N_j - M_j N_i)$ .

$D_\alpha$  deribatua triadarekin bateragarria izatea inposatzen bada, honako erlazioa beteko da [27]:

$$D_\alpha \tilde{E}_i^\beta + \epsilon_{ijk} \Gamma_\alpha^j \tilde{E}^{\beta k} = 0, \quad (3.20)$$

non  $\Gamma_\alpha^i = \epsilon^{jki} \Gamma_{\alpha jk}$  spin-konexioa den, 3.1.2 azpiatalean definitutakoa. Baldintza honekin,  $D_\alpha$  eragileak tentsore-indizeetan baino ez du eragingo: *barne-indizeak eskalartzat joko ditu*.

## 3.2 Konjeturaren formulazio hamiltondarra

Erlatibitate orokorraren formulazio hamiltondarra behin aurkeztuta, BKL konjetura garatzeari ekingo diogu. Hau, ordea, ez da hain triviala. Horregatik, formulazioaren oinarriak zehaztu baditugu ere, zenbait ideia findu beharko ditugu.

### 3.2.1 Konjeturak motibaturiko aldagaiak

Aurreko formulazioan (2. kapituluaz aztertutakoa) oinarritzen bagara konjetura marko berri honetan garatzeko, zenbait zalantza sortzen zaizkigu hasieratik: zein deribatu mota nagusituko da singularitateara hurbildu ahala, zein izango da arbuigarria? Are gehiago, zein kantitateen deribatuak izango dira arbuia beharrekoak?

Honi erantzuteko, singularitatearen inguruan dakigun informazioa aztertuko dugu lehendabizi. Hasteko, badakigu aztertzen ari garen singularitatea espazio-motakoa dela eta bertan,  $q_{ab}$  metrikaren determinantea,  $q$ , desagertu egiten dela:  $q \rightarrow 0$ . Beraz, pentsa daiteke singularitatean dibergenteak diren eremuak  $q$ -ren berretura egokiekin dentsitizatuz gero, hauen limiteak finituak izatea lortu daitekeela<sup>6</sup>. Honen adibide argia triadak ditugu:  $\tilde{E}_i^\alpha$  dentsitaterik gabeko triadak dibergenteak dira, baina  $\sqrt{q}$ -rekin biderkatuz gero lortzen diren  $\tilde{E}_i^\alpha$  triadak, ostera, ondo definituta daude singularitatean. Zehazki, limite nulua dute [27].

Orduan, aurreko ideari jarraituz,  $\tilde{E}_i^\alpha$ -rekiko kontrakzioa ere erabili daiteke singularitatean dibergenteak diren eremuak "leuntzeko".  $K_\alpha^i$  aldagaiek eta  $\Gamma_\alpha^i$  konexioek, esate baterako, limite infinitua dute singularitatean, baina  $\tilde{E}_i^\alpha$ -rekin kontrakzioa eginez gero, dibergentzia ezabatzen da [27]. Azken hau kontuan hartuz, BKL konjetura deskribatzeko egokiagoak diren bi aldagai berri definituko ditugu:

$$\tilde{P}_i^j \equiv \tilde{E}_i^\alpha K_\alpha^j - \tilde{E}_k^\alpha K_\alpha^k \delta_i^j, \quad (3.21)$$

<sup>5</sup>  $\epsilon_i^{jk} = \epsilon_{ilm} \delta^{lj} \delta^{mk}$ , non  $\epsilon_{ijk}$  ohiko Levi-Civita tentsorea den.

<sup>6</sup> Horrela, indeterminazio bat lortuko genuke eta  $q$ -ren berretura egokiarekin, limitea finitua izatea.



$$\tilde{C}_i{}^j \equiv \tilde{E}_i^\alpha \Gamma_\alpha^j - \tilde{E}_k^\alpha \Gamma_\alpha^k \delta_i^j. \quad (3.22)$$

Argi dagoenez, bi aldagai hauek eremuak dira eta  $K_\alpha^i$  eta  $\Gamma_\alpha^i$ -ren kontrakzioen konbinazio linealak direnez, ondo definituta daude singularitatean (kontrakzio bakoitza, independenteki, finitua da limite honetan). Halaber, bestelako propietate garrantzitsuak dute: barne-indizeak baino ez dituzte. Ondorioz, indizeak igo edo jaisteko  $\delta^{ij}$  metrika laua erabili beharko da, singularitatean dibergentea den  $q^{ab}$  metrika dinamikoa erabili beharrik gabe. Gainera, difeomorfismoen eraginpean  $\Sigma$ -n definituriko dentsitate *eskalar* gisa transformatuko dira. Guzti honek abantaila ugari ekarriko ditu haiekin lan egiterakoan, geroago ikusiko den bezala.

Beraz, hauek izango dira BKL konjektura formulazio hamiltondarrean garatzeko erabiliko ditugun aldagaiak. Hauekin batera, deribatu eragile berria proposatuko dugu,  $D_\alpha$  eta  $\tilde{E}_i^\alpha$ -ren arteko kontrakzioa, hain zuzen:

$$\tilde{D}_i \equiv \tilde{E}_i^\alpha D_\alpha. \quad (3.23)$$

Eragile hau lineala da eta Leibniz-en araua betetzen du. Gainera, eraiki den moduagatik  $D_\alpha$  deribatuak barne-indizeak dituzten objektuak eskalartzat jotzen dituen (ikus (3.20) erlazioa), deribatu honek ere eskalartzat joko ditu. Bestalde,  $\tilde{E}_i^\alpha$  triadak nuluak direnez singularitatean,  $\tilde{D}_i$  daukan gai oro ezabatu egingo da limite honetan. Hortaz, hauxe dugu atalaren hasieran bilatzen ari ginen deribatua:  $\tilde{D}_i$  eragileak kantitate baten gainean eragitean, singularitatearen inguruan arbuigarria izatea postulatu da.

Halaber, (3.20), (3.22) eta (3.23) ekuazioetatik baliatuz, ondokoa da  $\tilde{C}_i{}^j$  aldagai eta  $\tilde{D}_i$  deribatu berriaren arteko erlazioa [27]:

$$\tilde{C}^{ij} = \tilde{C}_k{}^j \delta^{ik} = -\tilde{E}_\alpha^i \epsilon^{klj} \tilde{D}_k \tilde{E}_l^\alpha. \quad (3.24)$$

**Oharra:** Hemendik aurrera, aldagaien esanahi argi dagoen heinean, tildeak erabiltzeari utziko diegu notazioa sinplifikatzeko. Beraz,  $E_i^\alpha$ ,  $C_i^j$ ,  $P_i^j$  eta  $D_i$  agertzen diren bakoitzean, ohartu +1 pisua daramatela,  $N$  tarte funtzioak -1 pisua daramalarik.

Ondorioz, guzti hau kontuan hartuz, ondoko eran adieraziko dira (3.17)-(3.19) loturak (3.21)-(3.23) aldagai berrien funtzioan<sup>7</sup> [27]:

$$S = 2\epsilon^{ijk} D_i(C_{jk}) + 4C_{[ij]} C^{[ij]} + C_{ij} C^{ji} - \frac{1}{2} C^2 + P_{ij} P^{ji} - \frac{1}{2} P^2 = 0, \quad (3.25)$$

$$V_i = -2D_j P_i^j - 2\epsilon_{jkl} P_i^j C^{kl} - \epsilon_{ijk} C P^{jk} + 2\epsilon_{ijk} P^{jl} C_l^k = 0, \quad (3.26)$$

$$G^k = \epsilon^{ijk} P_{ji} = 0. \quad (3.27)$$

Ekuazio hauetatik zenbait gauza ondorioztatu daitezke. Hasteko, aipatu berri ditugun aldagaien pisuak kontuan hartuz,  $S$  lotura eskalarrak eta  $V_i$  lotura bektorialak +2 pisua izango dute,  $G^k$  lotura gaussiarrak +1 pisua izango duen.

<sup>7</sup>Hurrengo ekuazioan  $V_\alpha$  bektorearen eta  $E_i^\alpha$ -ren arteko kontrakzioa egin dugu, bere bektore-indizea barne-indize bihurtuz. Singularitatekanpo  $E_i^\alpha$  ez-endakaturik denez,  $V_i$  -k jatorrizko  $V_\alpha$ -ren lotura bera definituko du.

Bestalde, lotura guztiak ( $P_i^j, C_i^j$ ) oinarriko aldagaien eta haien deribatuen polinomioak direla ikus daiteke. Beraz, lotura hauek mantendu egingo dira singularitatean, bertan oinarriko aldagai hauen eta haien deribatuak finituak direlako. Gainera, (3.16) ekuazioari erreparatuz hamiltondarra lotura hauen konbinazio lineala denez, ondo definituta egongo da singularitatean.

Loturak behin zehaztuta, sistema guztiz deskribatu ahal izateko, aldagaien eboluzioa kalkulatu beharko da. Horretarako,  $\mathcal{P}$  fase-espazioko aldagai bakoitzaren Poisson-en makoak kalkulatu behar dira (3.16) ekuazioko hamiltondarrarekin [27]:

$$\begin{aligned} \dot{C}^{ij} = & -\epsilon^{jkl} D_k \left( N \left( \frac{1}{2} \delta_l^i P - P_l^i \right) \right) + N \left[ 2C^{(i} P^{k|j)} + 2C^{[kj]} P_k^i - PC^{ij} \right] \\ & + N^k D_k C^{ij} + C^{ij} D_k N^k + \left( C_k^i \epsilon^{klj} + C_k^j \epsilon^{kli} \right) \left( \Lambda_l - N^m C_{ml} + \frac{1}{2} C N_l \right) \\ & + C^{ij} \epsilon_{klm} N^k C^{lm} + D^i \left( \Lambda^j - N^k C_k^j + \frac{1}{2} N^j C \right) - D_k \left( \Lambda^k - N^l C_l^k + \frac{1}{2} N^k C \right) \delta^{ij}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \dot{P}^{ij} = & \epsilon^{jkl} D_k \left( N \left( \frac{1}{2} \delta_l^i C - C_l^i \right) \right) - \epsilon^{klm} D_m (N C_{kl}) \delta^{ij} + \epsilon^{jkm} \left( C_k^i - C_k^i \right) D_m (N) \\ & + N^k D_k P^{ij} + P^{ij} D_k N^k + \left( P_k^i \epsilon^{klj} + P_k^j \epsilon^{kli} \right) \left( \Lambda_l - N^m C_{ml} + \frac{1}{2} C N_l \right) \\ & + P^{ij} \epsilon_{klm} N^k C^{lm} + \left( D^i D^j - D^k D_k \delta^{ij} \right) N + N \left[ C C^{ij} - 2C^{(ik)} C_k^j - 2C^{[kl]} C_{[kl]} \delta^{ij} \right], \end{aligned} \quad (3.29)$$

non  $(\ )$ -k osagai simetrikoa adierazten duen:  $M_{(ij)} = \frac{1}{2}(M_{ij} + M_{ji})$ . Pisurik gabeko ohiko  $N^\alpha$  lapse bektorea erabili beharrean,  $-1$  pisuko  $N^i$  eskalarra erabili dugu,  $N^\alpha = N^i E_i^\alpha$  izan dadin definitutakoa<sup>8</sup>. Beraz,  $N^i$  agertzen den bakoitzean, ohartu  $-1$  pisua duela.

(3.28) eta (3.29) ekuazioetatik, ikus daiteke  $C_i^j$  eta  $P_i^j$ -ren higidura-ekuazioak, (3.25)-(3.27) loturak bezala, dentsitate eskalarren eta  $D_i$  deribatuaren bidez deskribatu daitezkeela soilik. Gainera, triaden eboluzioa kalkulatzeko bada, deribatu arruntetako ekuazio diferentziala lortzen dugu,  $P_i^j$  zehaztuz zuzenean aska daitekeena:

$$\dot{E}_i^\alpha = -N P_i^j E_j^\alpha. \quad (3.30)$$

Azkenik,  $D_i$  deribatu beraren eboluzioa kalkulatu dugu. Horretarako, barne-indizeak bakarrik dituzten objektuak eskalartzat jotzen dituela kontuan hartuz,  $n$  dentsitateko  $S_n$  eskalar bati aplikatuko diogu:

$$\dot{D}_i S_n = \frac{n}{2} \left[ D_i (N P) \right] S_n - N P_i^j D_j S_n. \quad (3.31)$$

Hortaz, lotura eta eboluzio-ekuazio hauekin  $C_i^j$ ,  $P_i^j$  eta  $D_i$ -ren menpekota baino ez den sistema itxia sortu dugu. Aldagai hauek hasieran definitu beharko ditugu  $\Sigma_0$  hasierako gainazal batean,

<sup>8</sup>Hau da, tildeak esplizituki idatziz:  $\underline{N}^i = N^\alpha \underline{E}_\alpha^i$ .

$(E_i^\alpha, K_\alpha^i)$  aldagai kanonikoen bikote batetik abiatuz. Ondoren, (3.28), (3.29) eta (3.31) ekuazioen bitartez, hirukote honen eboluzioa kalkulatu ahal izango dugu, jatorrizko  $(E_i^\alpha, K_\alpha^i)$  bikote kanonikoari erreferentziarik egin beharrik gabe<sup>9</sup>.

Nabarmendu beharra dago gure hamiltondarra  $(E_i^\alpha, K_\alpha^i)$  bikote kanoniko zein  $(C_i^j, P_i^j, D_i)$  hirukotearen bidez deskribatu daitekeela. Izan ere, sistema bera deskribatzeko bi modu baino ez dira: bikote kanonikoak (3.17)-(3.19) loturak beteko ditu *baldin eta soilik baldin* tripleteak (3.25)-(3.27) loturak betetzen baditu. Hala ere, eskuetan dugun problema aztertzeko propietate egokiagoak dituzten heinean, azken aldagai hauek izango dira konjetura deskribatzeko erabiliko ditugunak.

### 3.2.2 Konjetura

Aldagai egokiak behin definituta, azken zehaztasunak falta zaizkigu konjetura formulatu ahal izateko. Formalismo hamiltondarrean lan egiten ari garenez, espazio-denbora  $\Sigma_t$  gainazaletan foliatuta egongo da. Gainazal hauek  $t$  denbora-aldagaiak parametrizatuko ditu, aukeratutako  $N$  lapse funtzio (dentsitizatu gabekoa) eta  $N^a$  *shift* bektorearekin zuzenki lotuta dagoena (ikusi 3.1.1 azpiatala). Konjetura garatzeko erabiliko ditugunak dentsitizaturikoak dira<sup>10</sup>,  $\underline{N}$  eta  $\underline{N}^i$ ,  $-1$  pisukoak biak. Dentsitizaturik daudela kontuan hartuz, singularitatera hurbildu ahala limite leuna onartzen dutela suposatuko dugu. Gainera,  $q_{ab}$  metrika espazialaren determinantea nulua denez singularitatean, bertan  $N = \sqrt{q}\underline{N}$  lapse funtzioa nulua izango da eta ondorioz, singularitatea  $t \rightarrow \infty$ -n kokatuko da<sup>11</sup>.

Formulazio originalean, deribatu espazial eta denboral arruntak erabili ditugu konjetura deskribatzeko. Formulazio berri honetan, ordea, kontzeptu hauek lausoagoak dira. Deribatu espazialak aurreko azpiatalean aurkeztutako  $\tilde{D}_i$  deribatuak izango dira, aukeratutako triadarekin eta harekin bateragarria den deribatu kobariantearekin zuzenki loturik daudenak:  $\tilde{D}_i = \tilde{E}_i^\alpha D_\alpha$ . Bestetik, deribatu denboralak 3.1.2 azpiatalean aipatutako Lie-ren deribatuak izango dira,  $t^a \equiv Nn^a + N^a$  eremu-bektorialean zehar<sup>12</sup>.

Hau behin argituta, honela formulatuko dugu BKL konjetura<sup>13</sup> [27]:

*Singularitatera hurbildu ahala, oinarrizko eremuen deribatu espazialak  $(D_i C_j^k, D_i P_j^k, D_i N, D_i N^j)$  arbuigarriak izango dira oinarrizko eremuekin aldaratuz.*

Oinarrizko eremuak ondo definituta daudenez singularitatean, hauxe  $D_i$ -ren definizioaren ondorio zuzena da,  $E_i^\alpha$  nulua delako puntu honetan (zeina aldi berean nulua den  $q$ -ren ondorioz). Lotura eta higidura-ekuazio guztiak oinarrizko eremu hauen eta haien deribatuen bidez bakarrik definituta daudenez, sinplifikatu egingo dira singularitatetik hurbil; hau da, trunkatu ahal

<sup>9</sup>Edozein aldian triadak (edo metrika espaziala) kalkulatu nahi izatekotan, (3.30) ekuazioa erabiltzea besterik ez dugu.

<sup>10</sup>Hurrengo bi paragrafoetan tilde ikurra jarriko dugu esplizituki, dentsitizaturik ez daudenekin desberdintzeko.

<sup>11</sup>2. kapitulan  $t \rightarrow \tau$  aldagai-aldaketa egitean lortu dugun emaitza bera.

<sup>12</sup>Hauek hamiltondarrekin Poisson-en makoa kalkulatu lortzen diren berdinak dira.

<sup>13</sup>Hemendik aurrera, tildeak esplizituki erabiltzeari utziko diogu berriz, aurreko hitzarmena jarraituz eta  $N$  eta  $N^i$  eremuek  $-1$  pisua dutela onartuz.

izango ditugu. Horretarako,  $D_i C_j^k = D_i P_j^k = D_i N = D_i N_j = C_{[ij]} = 0$  ezarri besterik ez dugu (3.25)-(3.29) ekuazioetan<sup>14</sup>.

Ondorioz, honakoak izango dira loturak singularitatetik hurbil:

$$S_{(T)} \equiv C_{ij} C^{ji} - \frac{1}{2} C^2 + P_{ij} P^{ji} - \frac{1}{2} P^2 = 0, \quad (3.32)$$

$$V_i(T) \equiv 2\epsilon_{ijk} P^{jl} C_l^k - \epsilon_{ijk} C P^{jk} = 0, \quad (3.33)$$

$$G_{(T)}^k \equiv \epsilon^{ijk} P_{ji} = 0, \quad (3.34)$$

non  $(T)$  trunkaturik daudela adierazteko erabili den. Ohartu (3.27) adierazpenak  $D_i$ -rekin loturiko gairik ez duenez, trunkaturiko lotura eta trunkatu gabekoa berdinak direla. Beste bi loturak, aitzitik, nabarmenki sinplifikatzen dira: adierazpen aljebraiko puruak dira eta gainera, oinarritzko aldagaien konbinazio koadratikoak baino ez dituzte. Ondoren, trunkaturiko lotura hauekin hamiltondar trunkatua eraikiko genuke (3.16) ekuazioaren bidez.

Bestalde, sinplifikazio berdinak eginez (3.28) eta (3.29) ekuazioetan, honakoak izango dira higidura-ekuazioak singularitatetik hurbil:

$$\dot{C}^{ij} \approx N \left[ 2C^{(i} P^{k|j)} - P C^{ij} \right] + 2\epsilon^{kl(i} C^j)_k \left( \Lambda_l - N^m C_{ml} + \frac{1}{2} C N_l \right), \quad (3.35)$$

$$\dot{P}^{ij} \approx N \left[ C C^{ij} - 2C^{ik} C_k^j \right] + 2\epsilon^{kl(i} P^j)_k \left( \Lambda_l - N^m C_{ml} + \frac{1}{2} C N_l \right). \quad (3.36)$$

Halaber, nabarmendu beharra dago trunkaturiko hamiltondarrarekin Poisson-en makoak kalkulatzeko badira, higidura-ekuazio trunkatu berak lortzen direla. Hau da, bi prozedurak trukakorak dira.

Ondorioz, konjeturaren arabera, sistema ondo deskribatuta egongo da singularitatetik hurbil (3.32)-(3.36) trunkaturiko lotura eta higidura-ekuazioen bidez. Gainera, ekuazio *osoen* soluzioek (trunkatu gabekoak) *trunkaturiko* ekuazioen soluzioetara joko dute limite asintotikoan [27].

Beraz, formulazio hamiltondarrean garatutako BKL konjeturak, formulazio originalean bezala, sistemaren deskribapen sinplifikatua postulatu du singularitatetik hurbil. Izan ere, lotura eta higidura-ekuazio guztiak oinarritzko eremu batzuen ( $N$ ,  $N^i$ ,  $C_i^j$  eta  $P_i^j$ ) adierazpen polinomialak baino ez dira. Eremu hauek, gainera, ondo definituta daude singularitatean eta barne-indizeak baino ez dituzte; hau da,  $\delta^{ij}$  metrika laua besterik ez da behar indizeak igo edo jaisteko.

Are gehiago, (3.35) eta (3.36) higidura-ekuazioak deribatu arruntetako ekuazio diferentzialak baino ez dira. Hortaz, formulazio originalarekin bateragarritasuna erakutsiz, puntu espazial ba-koitzaren dinamika beste puntuekiko independentea izango da, hots, dinamika lokala izango da. Azken finean, formulazio hau zein 2. kapituluaren erabilitakoa konjetura bera deskribatzeko bi modu baino ez dira, eta horregatik, bateragarriak izan behar dira. Hala ere, bien arteko zenbait xehetasun aipatu daitezke. Lehenengoan, singularitate hurbildu ahala, deribatu espazialak

<sup>14</sup> $C_{ij}$ -ren osagai antisimetrikoa singularitatean nulua izatea (3.24) ekuazioaren ondorio zuzena da.

“pasiboki” sartzen dira Einstein-en ekuazioetan, “perturbazio” gisa. Aitzitik, haiei esker sortzen dira hiru dimentsioko espazioaren oszilazioak, 2.2 atalean zehaztu dugun moduan. Bigarren honetan, oster, definitu ditugun  $D_i$  deribatu espazialak guztiz arbuiagarriak dira singularitatearen hurbiltasunean; alegia, deribatu denboralak erabat nagusitzen dira [26]. Izan ere, (3.23) ekuazioari erreparatuz,  $D_i$  deribatua  $E_i^\alpha$  triadarekin kontrakzioa eginez definitzen da eta azken hau, izatez, singularitatean nulua izatea postulatu da.

Amaitzeko, kapitulu honen sarrerara itzuliz, kiribilen grabitazio kuantikoa izan da formulazio hamiltondar honen motibazio nagusia. Aurrean bezala, marko *klasiko* batera mugatu gara, baina konjetura teoria honetan aztertu nahi izanez gero, proposatu berri dugun sistema trunkatua abiapuntutzat hartu eta kuantizatu beharko genuke. Trunkaturiko sistema honen kuantizazio egokia eginez gero, aurrerapauso nabarmenak eman daitezke espazio-motako singularitate orokorren patua grabitazioa kuantikoan ulertzeko bidean.

## Kapitulua 4

# Ondorioak

BKL konjetura erlatibitate orokorraren funtsezko galdera bati erantzuteko jaio zen: singularitateak Einstein-en ekuazioen berezko propietateak al dira, edo suposizio berezien, hala nola, simetriaren ondorioa? Belinskii, Khalatnikov eta Lifshitz fisikariek garapen matematiko sotil baten bidez —eta intuizio handiz— galdera honi erantzuna eman zioten, konjeturari sorrera emanaz: singularitate kosmologikoa duen soluzio *orokorra* existitzen da. Are gehiago, konjetura eta singularitateen teorema nagusiak garaikideak badira ere, fisikari hauen lana izan zen singularitate kosmologiko orokorren izaera eta portaera deskribatu zuen lehena. Zehazki, singularitatera hurbildu ahala, soluzioa oszilakorra, lokala eta hutsak nagusitua dela postulatu zuten.

Teorema nagusi hauek, jakina denez, ondorio zuzenak izan dituzte erlatibitate teorikoan eta haien inguruan literatura zabala idatzi da. Hala ere, singularitate orokorren izaeraren berri ematen duten heinean, berdinki aipagarriak dira konjeturaren emaitzak, Einstein-en ekuazioen ez-linealtasun eta konplexutasun maila kontuan hartuz, batez ere. Izatez, BKL konjetura eta teorema hauek fenomeno berdinarekin bi alderdi baino ez dira, gaur egun haien arteko loturak lausoak badira ere.

Bestalde, 2. kapituluan ikusi dugun moduan, konjeturaren berezitasuna simetriak alde batera utzi eta soluzioa ebazteko, intereseko zonaldera mugatzea da: singularitatearen ingurura, hain zuzen. Horrela, soluzio *orokor* baten adierazpen asintotikoa lor daiteke ingurune honetan, simetria zehatzekin ez bezala. Honetarako, ordea, ezinbestekoak dira suposizioak eta intuizioa. Izan ere, Landau taldeko fisikariek (Belinskii, Khalatnikov eta Lifshitz) metrikaren *ad hoc*-eko suposizioak eginez garatu zuten konjetura, nagusiki, espazio homogeen buruan izanda, simetria globalik ezarri ez bazuten ere. Honen emaitza izaera oszilakorra konplexu eta lokala duen portaera da, 2.2 atalean sakonki aztertu dugun moduan. Halaber, bereziki aipagarria da garapen honetan materiaren eragina sartuz gero —masarik gabeko eremu eskalarra salbu— espazioak hutseko portaera bera erakusten duela singularitatearen hurbiltasunean: “*matter does not matter*”. Gainera, portaera oszilakorrean sakonduz, soluzioak estokastizazio espontaneoak jasaten duela ondorioztatzen da; hots, singularitatera hurbildu ahala, “hasierako” baldintzekiko menpekotasuna galtzen dela.

Emaitza hauek heuristikoak badira ere, konjeturaren aldeko ebidentziek gora egin dute azkenengo hamarkadetan, simulazio numerikoen eskutik batez ere [21–25]. Beraz, honek pentsarazten du konjeturaren azterketan sakontzea emankorra izan daitekeela. Hala ere, ez gara azterketa

klasikora mugatu beharko. Izan ere, singularitateek teoria klasikoaren apurketa adierazten dute, eta horregatik, haien hurbiltasunean efektu kuantikoak nabarmenak izatea espero da. Ondorioz, BKL konjeturaren azterketa osoa egiteko, ezinbestekoa da grabitazio kuantikoa. Grabitate eta kuantikaren arteko bateratzea, ordea, egun zabalik dagoen problema da. Proposamenen artean, *Loop Quantum Gravity* (LQG) da jarraituenetakoa; hortaz, konjetura ikuspuntu kuantikotik aztertu nahi izanez gero, hauxe izan liteke lehen urratsa.

BKL konjeturak, gainera, erlatibitate orokorraren sinplifikazio nabarmena postulatu du singularitate hurbil. Horregatik, oso eredu egokia da singularitate eta kuantikaren arteko erlazioa hobeto ulertzen saiatzeko. Formulazio originala, oster, ez da batere egokia xede hauetarako, berformulatu egin behar da, alegia. Hauxe da, izatez, 3. kapituluaren egin duguna formulazio hamiltondar baten bidez. Honetarako, erlatibitate orokorraren formulazio hamiltondarra hartu behar da abiapuntutzat eta ondoren, konjetura garatzeko egokiagoak diren aldagai batzuk definitu. Singularitatean metrika espazialaren determinantea nulua izatea postulatu bada (formulazio originalean oinarrituz) ingurune honetan ondo definituta dauden eremuak eta bereziki, singularitatean guztiz arbuigarriak diren deribatu espazialak definitu daitezke. Gainera, aldagai guzti hauek espazio-denborako eskalarrak izateko eraiki daitezke; hau da, barne-indizedunak bakarrik izateko eta indizeak igo edo jaisteko metrika laua besterik ez erabiltzeko. Singularitatearen limitean deribatu espazialak nuluak direla kontsideratuz, sistema deskribatzen duten ekuazioak (loturak eta higidura-ekuazioak) sinplifikatuz formulatu da konjetura, 3.2.2 azpiatanean ikusi dugun moduan. Horrela, sistema trunkatu bat lortzen da eta konjeturaren arabera, sistema osoaren eta trunkatuaren soluzioek bat egiten dute singularitatearen limitean.

Formulazio hau klasikoa den heinean, kuantizatu beharra dago grabitazio kuantikoaren ikuspuntutik aztertu ahal izateko. Abiapuntua 3.2.2 azpiatanean planteaturiko sistema trunkatua da, eta honen kuantizazio egokia giltzarri izan daiteke oinarritzko galdera hauei erantzuteko: desagertu egiten dira espazio-motako singularitate orokorrak erregimen kuantikoan? Mantendu egiten dira? Hala bada, nolako portaera izango dute?

Lanari amaiera emateko, labur esanda, bi atal nagusitan banatu dugu konjeturaren azterketa. Lehenengo atalean, 2. kapituluaren formulazio originalaz baliatu gara konjetura sakontasunez aztertzeko: motibazioa, abiapuntua eta deskribapen zehatza. Honela, zehaztasun handiz analizatu ahal izan dugu soluzio orokorraren portaera singularitatearen hurbiltasunean. Bigarren atalean, 3. kapituluaren konjeturaren bestelako formulazio bat proposatu dugu, grabitazio kuantikoaren eremuan izan ditzakeen aplikazioetara bideratuta. Bi formulazio hauek, azkenean, ideia bera deskribatzeko bi modu baino ez dira eta bakoitzarekin, helburu jakin bat lortu dugu: konjetura zehaztasunez deskribatzea lehenengoan, eta singularitate eta kuantikaren arteko erlazioan sakontzeko tresnak proposatzea bigarrean.

Oraindik lan handia dago singularitateen fenomenoa guztiz ulertzeko, eta galdera irekiak anitzak dira. Horregatik, singularitate orokorrak hobeto ulertzera bideratu diezagukeen edozein “aztar-na” jarraitu beharra dago. Hori dela eta, konjeturaren ezaugarri eta haren aldeko ebidentzien gorakada kontuan hartuz, ezinbestekoa dirudi bere azterketan sakontzea. Etorkizuneko ikerketak izango dira konjetura egiaztatu edo gezurtatuko dutenak; edozein modutan ere, aurrerapausoak izango dira grabitazioa eta kuantika bateratzeko erronkan.

# Bibliografia

- [1] A. Einstein, Zur Elektrodynamik bewegter Körper, *Annalen der Physik* **17**, 891 (1905).
- [2] A. Einstein, Die Feldgleichungen der Gravitation, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* **48**, 844 (1915).
- [3] A. Friedmann, Über die Krümmung des Raumes, *Zeitschrift für Physik* **10**, 377 (1922).
- [4] A. Friedmann, Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes, *Zeitschrift für Physik* **21**, 326 (1924).
- [5] G. Lemaître, Un universe homogène de masse constante et de rayon croissant, rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extragalactiques, *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles* **A47**, 49 (1927).
- [6] G. Lemaître, L'Univers en expansion, *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles* **A53**, 51 (1933).
- [7] H.P. Robertson, Kinematics and world structure, *Astrophysical Journal* **82**, 248 (1935).
- [8] H.P. Robertson, Kinematics and world structure II, *Astrophysical Journal* **83**, 187 (1936).
- [9] H.P. Robertson, Kinematics and world structure III, *Astrophysical Journal* **83**, 257 (1936).
- [10] A.G. Walker, On Milne's theory of world-structure, *Proceedings of the London Mathematical Society* **42**, 90 (1937).
- [11] K. Schwarzschild, Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie, *Sitz. Preuss. Akad. Wiss.* **7**, 189 (1916).
- [12] R.M. Wald, *General Relativity* (University of Chicago Press, Chicago, 1984).
- [13] S.W. Hawking & G.F.R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time* (Cambridge University Press, Cambridge, 1973).
- [14] J.M.M. Senovilla, Singularity theorems in general relativity: achievements and open questions, kap. 15, *Einstein and the Changing Worldviews of Physics (Einstein Studies vol. 12)*, C. Lehner, J. Renn & M. Schemmel (Birkhäuser, Basel, 2012).
- [15] R. Penrose, Gravitational collapse and space-time singularities, *Phys. Rev. Lett.* **14**, 57 (1965).



- [16] S.W. Hawking & R. Penrose, The Singularities of gravitational collapse and cosmology, Proc. Roy. Soc. Lond. **A314**, 529 (1970).
- [17] J.M.M. Senovilla & D. Garfinkle, The 1965 Penrose singularity theorem, Class. Quantum Grav. **32**, 124008 (2015).
- [18] V.A. Belinskii, E.M. Khalatnikov & E.M. Lifshitz, Oscillatory approach to a singular point in relativistic cosmology, Usp. Fiz. Nauk **102**, 463 (1970).
- [19] P.S. Joshi, Spacetime Singularities, kap. 20, *Springer Handbook of Spacetime*, A. Ashtekar & V. Petkov (Springer, Heidelberg, 2014).
- [20] A. Ashtekar, T. Pawłowski & P. Singh, Quantum nature of the big bang, Phys. Rev. Lett. **96**, 141301 (2006).
- [21] B.K. Berger & V. Moncrief, Numerical investigation of cosmological singularities, Phys. Rev. **D48**, 4676 (1993).
- [22] B.K. Berger, D. Garfinkle, J.A. Isenberg, V. Moncrief & M. Weaver, The singularity in generic gravitational collapse is space-like, local and oscillatory, Mod. Phys. Lett. **A13**, 1565 (1998).
- [23] B.K. Berger & V. Moncrief, Evidence for an oscillatory singularity in generic U(1) symmetric cosmologies on  $T^3 \times R$ , Phys. Rev. **D58**, 064023 (1998).
- [24] B.K. Berger, Numerical approaches to spacetime singularities, Living Rev. Relativ. **5**, 1 (2002).
- [25] D. Garfinkle, Numerical simulations of singular spacetimes, Class. Quantum Grav. **29**, 244003 (2012).
- [26] V. A. Belinskii & M. Henneaux, *The Cosmological Singularity* (Cambridge University Press, Cambridge, 2017).
- [27] A. Ashtekar, A. Henderson & D. Sloan, A Hamiltonian Formulation of the BKL Conjecture, Phys. Rev. **D83**, 084024 (2011).
- [28] V.A. Belinskii, On the cosmological singularity, Int. J. Mod. Phys. **D23**, 1430016 (2014).
- [29] E. Kasner, Geometrical theorems on Einstein's cosmological equations, Am. J. Math. **43**, 217 (1921).
- [30] V.A. Belinskii, E.M. Khalatnikov & E.M. Lifshitz, A General Solution of the Einstein Equations with a Time Singularity, Advances in Physics **31**, 639 (1982).
- [31] V.A. Belinskii, Cosmological singularity, AIP Conference Proceedings **1205**, 17 (2010).
- [32] R. Gambini & J. Pullin, *A first course in loop quantum gravity* (Oxford University Press, Oxford, 2011).

# Eranskina A

## Parametro arbitrario kopuruaren kalkulua

### A.1 Erreferentzia-sistema sinkronoa

Erreferentzia-sistema sinkronoa honako baldintzek definiturikoa da:

$$g_{00} = -1, \quad g_{0\alpha} = 0, \quad (\text{A.1})$$

Erreferentzia-sistema honetan, beraz,  $ds^2$  tarte infinitesimalak honako forma hartzen du:

$$ds^2 = -dt^2 + g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (\text{A.2})$$

non  $x^0 = t$  espazio osoan sinkronizatutako denbora koordenatua den eta  $g_{\alpha\beta}$  hiru dimentsioko metrikaren tentsorea.

(A.1) gauge baldintzak dira, baina ez dute koordenatu sistema guztiz zehazten. Izan ere, zenbait koordenatu transformazio egin daitezke,  $x^\alpha$  aldagai espazialen menpekoak diren 4 funtzio arbitrarioz definiturikoa. Hala ere, funtzio hauek ez dute esangura fisikorik, gauge askatasuna baino ez dute islatzen [26]. Hortaz,  $g_{\alpha\beta}$  metrikaren parametro arbitrario guztien artean, koordenatu espazialen menpekoak diren 4 funtzio arbitrario egongo dira, inolako esangura fisikorik ez dutenak.

### A.2 Einstein-en eremu-ekuazioak

Einstein-en eremu-ekuazioak erreferentzia-sistema sinkronoan definitzen direnean, honako sistema lortzen da:

$$\frac{1}{2}\partial_t \kappa + \frac{1}{4}\kappa_\beta^\alpha \kappa_\alpha^\beta = T_0^0 - \frac{1}{2}(T_0^0 + T_\alpha^\alpha), \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{1}{2}(\kappa_{,\alpha} - \kappa_{\alpha;\beta}^\beta) = T_\alpha^0, \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{1}{2\sqrt{g}}\partial_t(\sqrt{g}\kappa_\alpha^\beta) + \mathcal{R}_\alpha^\beta = T_\alpha^\beta - \frac{1}{2}\delta_\alpha^\beta(T_0^0 + T_\gamma^\gamma), \quad (\text{A.5})$$

non  $\kappa_{\alpha\beta} = \partial_t g_{\alpha\beta}$  eta  $\mathcal{R}_\alpha^\beta$  hiru dimentsioko Ricci-ren tentsorea diren.

Halaber,  $T_a^b$  energia-momentuaren kontserbazioa ezarritz:

$$T_{a,b}^b = 0. \quad (\text{A.6})$$

Ekuazio-sistema honen soluzio orokor batek parametro arbitrario kopuru bat izango du, *edozein* hastapen baldintza arbitrarioekin lotzeko nahikoa dena. Gainera, ekuazioak erreferentzia-sistema sinkronoan definituta daudenez, parametro funtzional hauek aldagai espazialen menpekoak izango dira soilik.

Simetriagatik ( $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ ) hiru dimentsioko metrikak 6 osagai independente ditu. (A.3) eta (A.4) ekuazioek osagai hauen arteko loturak zehazten dituzte eta (A.5) eta (A.6) ekuazioek, ordea, metrikaren eta materia-eremuen dinamika deskribatu [26].

(A.5) denboraren bigarren ordenako 6 ekuazio diferentzial direnez, haien soluzio orokorrak hiru dimentsioko  $2 \cdot 6 = 12$  funtzio arbitrario izango ditu. Halaber, materia-eremuetan agertzen diren hiru dimentsioko funtzio arbitrarioen kopurua  $M$  bada, (A.5) eta (A.6) ekuazio dinamikoen soluzio orokorrak, guztira, hiru dimentsioko  $12 + M$  funtzio arbitrario izango ditu. Bestalde, soluzio orokor honek (A.3) eta (A.4) ekuazioak bete beharko ditu. Hauek parametro arbitrario kopurua handitu beharrean, murriztu egiten dute, funtzioen arteko loturak ezartzen dituztelako [26]. (A.3) eta (A.4) 4 ekuazioz osatuta daudenez, guztira 4 lotura ezartzen dituzte parametro arbitrarioen artean.

Hortaz, lotura hauek eta erreferentzia-sistema sinkronoan esangura fisikorik gabeko 4 parametro funtzional arbitrario daudela kontuan hartuz (A.1 eranskinean azaldutakoa), soluzio orokorraren parametro funtzional kopurua —fisikoki esanguratsuak direnak— honakoa izango da:

$$12 + M - (4 \text{ lotura}) - (4 \text{ gauge parametro}) = 4 + M. \quad (\text{A.7})$$

Orduan, hutsean  $T_a^b = 0$  denez,  $M = 0$  izango da; hau da, hutseko soluzio batek 4 parametro funtzional arbitrario (aldagai espazialen menpekoak) izan beharko ditu orokorra izan dadin.

### A.3 Kasner-en soluzio orokortua

Kasner-en soluzio orokortua honakoa da:

$$g_{\alpha\beta} = q_{ij} l_\alpha^i l_\beta^j, \quad q_{ij} = \text{diag}(t^{2p_1}, t^{2p_2}, t^{2p_3}), \quad (\text{A.8})$$

non  $l_\alpha^i$  bektoreek triada bat osatzen duten eta  $p_i$  berretzaileek honako baldintzak betetzen dituzten:

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 &= 1, \\ p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 &= 1. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Metrika hau  $t \rightarrow 0$  limitean (A.3)-(A.5) ekuazioen soluzioa izan dadin, triadako bektoreek honako baldintza bete behar dute:

$$(l_{\mu,\nu}^1 - l_{\nu,\mu}^1) l_2^\mu l_3^\nu = 0. \quad (\text{A.10})$$

Triadako bektoreak aldagai espazialen menpekoak dira eta guztira,  $3 \cdot 3 = 9$  funtzio arbitrario izango ditugu  $l_\alpha^i$  bektoreetan. Halaber, 3  $p_i$  berretzaile ditugu baina (A.9) erlazioak direla eta, bakarra da independentea. Beraz, guztira  $9 + 1 = 10$  funtzio arbitrario izango ditu soluzio honek.

Berretzaileen loturak (A.3) ekuazioak zehazten ditu, baina (A.4) ekuazioek 3 lotura gehigarri ezarriko dituzte 10 parametro funtzional hauen artean. Gainera, (A.10) baldintzak laugarren lotura bat ezarriko du.

Bestalde, A.1 eranskinean aipatu denez, gauge askatasuna islatzen duten 4 parametro funtzional daude, (A.8) metrika erreferentzia sistema sinkronoan emanda dagoelako. Haatik, singularitatea  $t = 0$ -n simultaneoki ematea aukeratzen denez, gauge askatasun bat galdu egiten da eta orotara, esangura fisikorik gabeko 3 funtzio arbitrario baino ez daude. Hortaz, Kasner soluzio orokortua-ren parametro funtzional arbitrario kopurua —fisikoki esanguratsuak direnak— honakoa izango da:

$$10 - (3 \text{ gauge parametro}) - (3 \text{ lotura}) - (1 \text{ lotura gehigarri, A.10}) = 3. \quad (\text{A.11})$$

A.2 eranskinean aipatu bezala, hutsean 4 da kopuru minimoa soluzio bat orokor izan dadin; Kasner-en soluzio orokortua ez da, beraz, soluzio orokorra.