



---

# GEODÉSICAS EN SUPERFICIES. Propiedades minimizadoras y completitud.

---

Trabajo Fin de Grado  
Grado en Matemáticas

Erroxe Etxabarri Alberdi

Trabajo dirigido por  
Yosu Arroyo Olea

Leioa, 21 de junio de 2019



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>v</b>
<b>1. Teoremas y definiciones básicas</b>	<b>1</b>
1.1. Superficies regulares . . . . .	1
1.2. Curvas Geodésicas . . . . .	4
1.3. Ecuaciones de las geodésicas . . . . .	6
1.4. Geodésicas en superficies de revolución . . . . .	12
<b>2. Geodésicas como curvas mínimas</b>	<b>17</b>
2.1. Aplicación exponencial . . . . .	17
2.2. Entornos geodésicos . . . . .	20
2.3. Geodésicas de longitud mínima . . . . .	24
<b>3. Teorema de Hopf-Rinow</b>	<b>29</b>
3.1. Distancia intrínseca . . . . .	29
3.2. Teorema de Hopf-Rinow . . . . .	31
<b>A. Ejercicios resueltos</b>	<b>37</b>
<b>B. Código de Mathematica</b>	<b>49</b>
B.1. Para conseguir las geodésicas . . . . .	49
<b>Bibliografía</b>	<b>51</b>



# Introducción

Este trabajo fin de grado estudia las geodésicas en superficies regulares, sus propiedades minimizantes y la completitud de estas superficies. De esta forma completaremos lo que nos mencionaron en la asignatura de segundo Curvas y Superficies y lo que no llegamos a dar en la asignatura de Geometría Global de Curvas y Superficies de tercero del Grado de Matemáticas de la UPV/EHU.

La idea del trabajo consiste en abordar varios problemas fundamentales en el estudio de las geodésicas de una superficie como son la existencia; las propiedades minimizantes de la longitud de las geodésicas; la existencia de geodésicas mínimas y unicidad de las mismas (Teorema de Hopf-Rinow); y las superficies geodésicas completas y superficies completas como espacios métricos. También, se ilustrará la importancia de las técnicas anteriores estudiando varias de sus aplicaciones, y, asimismo, se tratará con detalle un buen número de ejemplos y ejercicios.

Para ello vamos a empezar recordando las definiciones y teoremas básicos que nos enseñaron en segundo. Esta teoría está dada principalmente cuando trabajamos con curvas de longitud de arco, por lo tanto, generalizaremos los conceptos para cuando tengamos una parametrización cualquiera y nos daremos cuenta de que la ecuación general de las geodésicas coincide con la expresión obtenida de la curvatura geodésica de la misma. Asimismo, como hemos mencionado antes, demostraremos la existencia y unicidad de las geodésicas, y haremos un estudio más profundo sobre las geodésicas en superficies de revolución. Todo esto lo completaremos con un par de ejemplos y ejercicios teóricos que generalizaran teoremas previamente demostrados, como por ejemplo el Teorema de Clairaut, que se aplica a superficies de revolución, pero nosotros lo generalizaremos a las superficies de Liouville. Todos estos ejercicios los encontraremos en el apéndice A. Además, incluiremos un par de ejercicios de estas superficies como ejemplo.

En cuanto al segundo capítulo, nos centraremos en estudiar las propiedades minimizantes de las geodésicas, introduciremos la definición de la aplicación exponencial ya conocida, y añadiremos algunas de sus propieda-

des. Haciendo uso de esto, definiremos nuevos conceptos como el radio de inyectividad, círculos geodésicos, bolas geodésicas... y enunciaremos y demostraremos varios teoremas y proposiciones relacionados con estos nuevos conceptos. Veremos que en todo punto de la superficie existe un entorno especial llamado entorno uniformemente normal, en el que todos los puntos admiten una bola geodésica del mismo radio. También demostraremos que, dados dos puntos cualesquiera de una superficie, si existe una curva de longitud mínima que los una, esa curva será una geodésica.

Para finalizar, daremos paso al teorema de Hopf-Rinow y al estudio de la completitud, donde definiremos este último concepto desde el punto de vista de las geodésicas, haciendo uso de la aplicación exponencial. También añadiremos la definición de la distancia intrínseca y veremos que la topología que crea en la superficie, y la que ya estaba en ella son la misma. Después daremos paso al teorema básico de Hopf-Rinow, el cual nos asegura la existencia de una curva mínima que une cualesquiera dos puntos de una superficie completa, y acabaremos con varios corolarios y proposiciones que derivan de esta.

# Capítulo 1

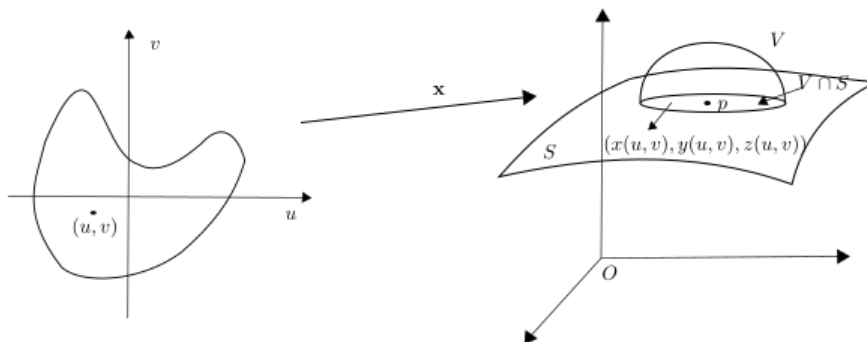
## Teoremas y definiciones básicas

En este capítulo daremos algunas de las definiciones y teoremas básicos que necesitaremos más adelante, entre otras la existencia y unicidad de las geodésicas. Además de esto, veremos el caso específico de las superficies de revolución donde destacaremos el teorema de Clairaut.

A lo largo de este trabajo nos encontraremos siempre en superficies regulares, por lo tanto, esta es la primera definición que necesitaremos.

### 1.1. Superficies regulares

**Definición 1.1.1.** Un subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  es una superficie regular si, para cada  $p \in S$ , existe un entorno  $V$  en  $\mathbb{R}^3$  y una aplicación  $\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap S$  de un subconjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  sobre  $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$  tal que



(i)  $\mathbf{x}$  es diferenciable. Esto significa que si escribimos

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U$$

las funciones  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $z(u, v)$  tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes en  $U$ .

- (ii)  $\mathbf{x}$  es un homeomorfismo. Como  $\mathbf{x}$  es continua por la condición 1, esto significa que  $\mathbf{x}$  admite una inversa  $\mathbf{x}^{-1} : V \cap S \rightarrow U$  que es continua; es decir,  $\mathbf{x}^{-1}$  es la restricción de una función continua  $F : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida sobre un conjunto abierto  $W$  que contiene a  $V \cap S$ .
- (iii) Condición de regularidad. para cada  $q \in U$ , la diferencial  $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es inyectiva.

**Definición 1.1.2.** El vector tangente a una superficie  $S$  en el punto  $p \in S$  es el vector tangente a una curva que vive en  $S$  en el punto  $p$ . El plano tangente  $T_p(S)$  a  $S$  en el punto  $p$  es el conjunto de todos los vectores tangentes a  $S$  en el punto  $p$ .

Para entender el plano tangente  $T_p(S)$ , elegimos una parametrización de la superficie  $S$ ,  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que  $p$  está en la imagen de  $\mathbf{x}$ , es decir,  $\exists(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $\mathbf{x}(u_0, v_0) = p$ . Si la curva  $\gamma$  reside en  $S$  y pasa por  $p$  cuando  $t = t_0$ , entonces, existen dos funciones  $u(t)$  y  $v(t)$  tal que

$$\gamma(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$$

para todos los valores de  $t$  cercanos a  $t_0$  las dos funciones son diferenciables, y  $u(t_0) = u_0$ ,  $v(t_0) = v_0$ .

**Proposición 1.1.1.** Sean  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización de la superficie regular  $S$  que contiene el punto  $p \in S$ , y  $(u, v)$  las coordenadas en  $U$ . El plano tangente a  $S$  en  $p$  es el subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^3$  creado por los vectores  $\mathbf{x}_u$  y  $\mathbf{x}_v$  (Las derivadas están evaluadas en el punto  $(u_0, v_0) \in U$  tal que  $\mathbf{x}(u_0, v_0) = p$ ).

**Definición 1.1.3.** Dado un punto  $p$  de una superficie regular  $S$ , hay dos vectores unitarios de  $\mathbb{R}^3$  que son normales al plano tangente  $T_p(S)$ ; se llama a cada uno de ellos un vector unitario normal en  $p$ . Fijada una parametrización  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  en  $p \in S$ , podemos determinar la elección de un vector unitario normal en cada punto  $q \in \mathbf{x}(U)$  por la regla

$$\mathbf{N}(q) = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|}(q).$$

Así, obtenemos una aplicación diferenciable  $\mathbf{N} : \mathbf{x}(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

El producto interior natural de  $\mathbb{R}^3 \supset S$  induce en cada plano tangente  $T_p(S)$  de una superficie regular  $S$  un producto interior, que se denotará por  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ . Si  $w_1, w_2 \in T_p(S) \subset \mathbb{R}^3$ , entonces  $\langle w_1, w_2 \rangle_p$  es igual al producto interior de  $w_1$  y  $w_2$  como vectores de  $\mathbb{R}^3$ . A este producto interior (que



es una forma bilineal simétrica, es decir,  $\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle w_2, w_1 \rangle_p$  y  $\langle w_1, w_2 \rangle_p$  es lineal, separadamente, en  $w_1$  y  $w_2$ ) corresponde una fórmula cuadrática  $I_p : T_p(S) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = |w|^2 \geq 0. \quad (1.1)$$

**Definición 1.1.4.** La forma cuadrática  $I_p$  en  $T_p(S)$ , definida por la ecuación (1.1), se denomina la primera forma fundamental de la superficie regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  en  $p \in S$ .

Ahora expresaremos la primera forma fundamental en la base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  asociada a la parametrización  $\mathbf{x}(u, v)$  en  $p$ . Como un vector tangente  $w \in T_p(S)$  es el vector tangente de una curva parametrizada  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ ,  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , con  $p = \alpha(0) = \mathbf{x}(u_0, v_0)$ , obtenemos

$$\begin{aligned} I_{\alpha'(0)} &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p = \langle \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle_p \\ &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p (u')^2 + 2\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p u'v' + \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p (v')^2 \\ &= E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2, \end{aligned}$$

en donde los valores de las funciones involucradas se evalúan en  $t = 0$ , y

$$\begin{aligned} E(u_0, v_0) &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p, \\ F(u_0, v_0) &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p, \\ G(u_0, v_0) &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p \end{aligned}$$

son los coeficientes de la primera forma fundamental en la base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  de  $T_p(S)$ . Si hacemos recorrer a  $p$  el entorno coordinado correspondiente a  $\mathbf{x}(u, v)$ , obtenemos en ese entorno las funciones diferenciables  $E(u, v)$ ,  $F(u, v)$ ,  $G(u, v)$ .

Al expresar las derivadas de los vectores  $\mathbf{x}_u$  y  $\mathbf{x}_v$  con respecto a la base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{N}\}$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v + e\mathbf{N} \\ \mathbf{x}_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_v + f\mathbf{N} \\ \mathbf{x}_{vu} &= \Gamma_{21}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{21}^2 \mathbf{x}_v + f\mathbf{N} \\ \mathbf{x}_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_v + g\mathbf{N} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Los coeficientes  $\Gamma_{ij}^k$ ,  $i, j, k = 1, 2$ , se denominan los símbolos de Christoffel de  $S$  en la parametrización  $\mathbf{x}$ . Como  $\mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vu}$ , concluimos que  $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$  y  $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$ .

Para determinar los símbolos de Christoffel, efectuamos el producto interior de las relaciones de (1.2) con  $\mathbf{x}_u$  y  $\mathbf{x}_v$ , obteniendo el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F &= \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle &= \frac{1}{2} E_u, \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G &= \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle &= F_u - \frac{1}{2} E_v, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F &= \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u \rangle &= \frac{1}{2} E_v, \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G &= \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle &= \frac{1}{2} G_u, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F &= \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u \rangle &= F_v - \frac{1}{2} G_u, \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G &= \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_v \rangle &= \frac{1}{2} G_v \end{cases}$$

Vemos que los símbolos de Christoffel se pueden calcular en términos de los coeficientes de la primera forma fundamental  $E$ ,  $F$ ,  $G$  y sus derivadas. Lo cual implica que son invariantes por isometrías locales. Estos símbolos volverán a aparecer en numerosas ocasiones.

## 1.2. Curvas Geodésicas

Ahora, para adentrarnos en el tema, daremos la definición de las curvas geodésicas, así como algunas caracterizaciones y teoremas relacionados. Para esto necesitamos las siguientes definiciones.

**Definición 1.2.1.** Sea  $\alpha : I \rightarrow S$  una curva parametrizada en  $S$ . Un campo vectorial  $w$  a lo largo de  $\alpha$  es una correspondencia que asigna a cada  $t \in I$  un vector

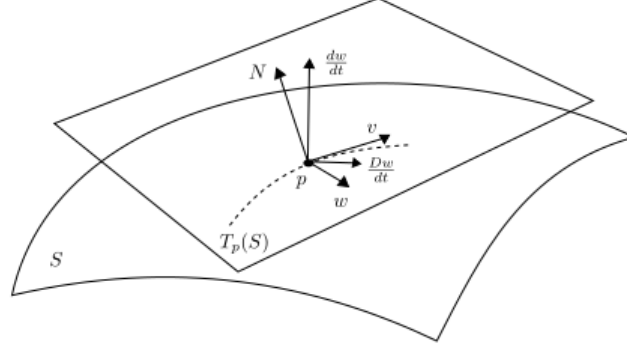
$$w(t) \in T_{\alpha(t)}(S)$$

Decimos que  $w$  es diferenciable en  $t_0 \in I$  si, para alguna parametrización  $\mathbf{x}(u, v)$  en  $\alpha(t_0)$ , las componentes  $a(t)$ ,  $b(t)$  de  $w(t) = a\xi_u + b\xi_v$  son funciones diferenciables respecto de  $t$  en  $t_0$ . Se dice que  $w$  es diferenciable en  $I$  si es diferenciable en cada punto  $t \in I$ .

**Definición 1.2.2.** Sea  $w$  un campo vectorial diferenciable en un conjunto abierto  $U \subset S$  y  $p \in U$ . Sea  $v \in T_p(S)$ . Consideremos una curva parametrizada

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U,$$

con  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(0) = v$ , y sea  $w(t)$ ,  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , la restricción del campo vectorial  $w$  a la curva  $\alpha$ . El campo vectorial que se obtiene proyectando ortogonalmente  $(\frac{dw}{dt})(0)$  sobre el plano  $T_p(S)$  se denomina la derivada covariante en  $p$  del campo vectorial  $w$  con respecto al vector  $v$ . La derivada covariante se denota por  $(\frac{Dw}{dt})(0)$  o por  $(D_v w)(p)$



**Definición 1.2.3.** Se dice que un campo vectorial  $w$ , a lo largo de una curva parametrizada  $\alpha : I \rightarrow S$ , es paralelo si  $\frac{Dw}{dt} = 0$  para cada  $t \in I$ .

Siendo  $\mathbf{x}(u(t), v(t)) = \alpha(t)$  la expresión de  $\alpha$  y sea

$$w(t) = a(u(t), v(t))\mathbf{x}_u + b(u(t), v(t))\mathbf{x}_v = a(t)\mathbf{x}_u + b(t)\mathbf{x}_v,$$

la expresión de  $w(t)$  en la parametrización  $\mathbf{x}(u, v)$ . Entonces

$$\frac{dw}{dt} = a(\mathbf{x}_{uu}u' + \mathbf{x}_{uv}v') + b(\mathbf{x}_{vu}u' + \mathbf{x}_{vv}v') + a'\mathbf{x}_u + b'\mathbf{x}_v$$

donde la prima representa la derivada con respecto de  $t$ . Como  $\frac{Dw}{dt}$  es la componente en el plano tangente de  $\frac{dw}{dt}$ , utilizamos las expresiones en (1.2) y suprimiendo la componente normal, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{Dw}{dt} &= (a' + \Gamma_{11}^1 au' + \Gamma_{12}^1 av' + \Gamma_{12}^1 bu' + \Gamma_{22}^1 bv')\mathbf{x}_u \\ &\quad + (b' + \Gamma_{11}^2 au' + \Gamma_{12}^2 av' + \Gamma_{12}^2 bu' + \Gamma_{22}^2 bv')\mathbf{x}_v \end{aligned} \quad (1.3)$$

Deducimos de (1.3) que  $\frac{Dw}{dt}(0)$  sólo depende del vector  $(u'(0), v'(0))$ , del punto  $(u(0), v(0))$  y de los símbolos de Christoffel, no de la curva  $\alpha$ . Esto implica que la derivada covariante es un concepto de la geometría intrínseca, es decir, que no varía por isometrías locales.

Una vez visto esto, damos paso a la definición de geodésica.

**Definición 1.2.4.** Se dice que una curva parametrizada no constante  $\gamma : I \rightarrow S$  es geodésica en  $t \in I$  si el campo de sus vectores tangentes  $\gamma'(t)$  es paralelo a lo largo de  $\gamma$  en  $t$ , es decir,

$$\frac{D\gamma'(t)}{dt} = 0;$$

Se dice que  $\gamma$  es una geodésica parametrizada si es geodésica para todo  $t \in I$ .

También tenemos las siguientes caracterizaciones de las geodésicas que se deducen de las definiciones (1.2.2) y (1.2.4):

**Proposición 1.2.1.** *Sea  $\sigma : I \rightarrow S$  una curva de clase  $C^\infty$  en una superficie regular  $S$ . Entonces,*

- (i)  *$\sigma$  es una geodésica si y solo si  $\sigma''$  es siempre ortogonal a la superficie, es decir, si y solo si  $\sigma''(t) \perp T_{\sigma(t)}(S)$  para todo  $t \in I$ .*
- (ii) *si  $\sigma$  es una geodésica entonces esta parametrizada por un múltiplo de longitud de arco, es decir,  $\|\sigma'\|$  es constante.*

### 1.3. Ecuaciones de las geodésicas

Vamos a introducir ahora las ecuaciones de una geodésica en un entorno coordenado. A tal efecto, sean  $\gamma : I \rightarrow S$  una curva parametrizada (por la longitud de arco) de  $S$  y sea  $\mathbf{x}(u, v)$  una parametrización de  $S$  en un entorno  $U$  de  $\gamma(t_0)$ ,  $t_0 \in I$ . Sea  $J \subset I$  un intervalo abierto que contiene a  $t_0$  tal que  $\gamma(J) \subset U$ . Sea  $\mathbf{x}(u(t), v(t))$ ,  $t \in J$ , la expresión de  $\gamma : J \rightarrow S$  con respecto a la parametrización  $\mathbf{x}$ . Entonces, el campo vectorial tangente  $\gamma'(t)$ ,  $t \in J$ , viene dado por

$$\gamma'(t) = u'(t)\mathbf{x}_u + v'(t)\mathbf{x}_v.$$

Por tanto, el hecho de que  $\gamma$  sea paralelo equivale a que se satisfaga el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} u'' + \Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1u'v' + \Gamma_{22}^1(v')^2 &= 0, \\ v'' + \Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2u'v' + \Gamma_{22}^2(v')^2 &= 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

que se obtiene a partir de la ecuación (1.3) haciendo  $a = u'$  y  $b = v'$  e igualando a cero los coeficientes de  $\mathbf{x}_u$  y  $\mathbf{x}_v$ .

En otras palabras,  $\gamma : I \rightarrow S$  es una geodésica parametrizada por el arco (o múltiplo de arco) si y sólo si se satisface el sistema (1.4); a este sistema se le conoce como las *ecuaciones diferenciales de las geodésicas* de  $S$ .

**Observación 1.3.1.** Estas ecuaciones son válidas cuando tenemos la curva parametrizada por la longitud de arco, pero veremos en el ejercicio 4 del apéndice A y observación (1.3.4), que en caso de tener una parametrización cualquiera, la ecuación general es

$$\begin{aligned} &(\Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2(v'u') + \Gamma_{22}^2(v')^2 + v'')u' \\ &- (\Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1(v'u') + \Gamma_{22}^1(v')^2 + u'')v' = 0. \end{aligned}$$

**Corolario 1.3.1.** Sea  $(U, \mathbf{x})$  un mapa de  $S$ , entonces una curva  $\gamma = \gamma(s)$  parametrizada por la longitud de arco es una curva geodésica si y solo si cumple el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\langle \gamma', \mathbf{x}_u \rangle &= \langle \gamma', \frac{d}{ds}\mathbf{x}_u \rangle, \\ \frac{d}{ds}\langle \gamma', \mathbf{x}_v \rangle &= \langle \gamma', \frac{d}{ds}\mathbf{x}_v \rangle.\end{aligned}\quad (1.5)$$

Este sistema de ecuaciones es equivalente al sistema (1.4).

*Demostración.* Necesitamos demostrar que se cumplan las ecuaciones (1.5) es equivalente a

$$\frac{D\gamma'}{ds} = 0. \quad (1.6)$$

Que (1.6) implica (1.5) es fácil de ver, ya que  $\frac{D\gamma'}{ds}$  por definición es la proyección de  $\frac{d\gamma'}{ds}$  en el plano tangente  $T_p(S)$ .

En cuanto a la otra implicación. Por definición

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\langle \gamma', \mathbf{x}_u \rangle &= \langle \frac{d}{ds}\gamma', \mathbf{x}_u \rangle + \langle \gamma', \frac{d}{ds}\mathbf{x}_u \rangle \\ \frac{d}{ds}\langle \gamma', \mathbf{x}_v \rangle &= \langle \frac{d}{ds}\gamma', \mathbf{x}_v \rangle + \langle \gamma', \frac{d}{ds}\mathbf{x}_v \rangle\end{aligned}$$

Ahora si tenemos en cuenta la hipótesis conseguimos  $\langle \frac{d}{ds}\gamma', \mathbf{x}_u \rangle = 0$  y  $\langle \frac{d}{ds}\gamma', \mathbf{x}_v \rangle = 0$ . Lo cual implica directamente (1.6).  $\square$

Podemos expresar (1.4) mediante los coeficientes de la primera forma fundamental:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(Eu' + Fv') &= \frac{1}{2}(E_u(u')^2 + 2F_u u'v' + G_u(v')^2), \\ \frac{d}{dt}(Fu' + Gv') &= \frac{1}{2}(E_v(u')^2 + 2F_v u'v' + G_v(v')^2),\end{aligned}\quad (1.7)$$

**Observación 1.3.2.** Es posible demostrar que tanto este sistema como el sistema (1.5) son equivalentes.

**Teorema 1.3.2.** (*Existencia y unicidad*) Dado un punto  $p \in S$  y un vector  $w \in T_p(S)$ ,  $w \neq 0$ , existe una geodésica  $\gamma : I \rightarrow S$  tal que  $0 \in I$ ,  $\gamma(0) = p$  y  $\gamma'(0) = w$ . Además, si existe  $\tilde{\gamma} : \tilde{I} \rightarrow S$  otra geodésica que cumple las mismas condiciones, entonces  $\gamma$  y  $\tilde{\gamma}$  coinciden en  $I \cap \tilde{I}$ . En particular, para todo  $p \in S$  y  $w \in T_p(S)$  existe un intervalo abierto maximal  $I_w \subseteq \mathbb{R}$  y una única geodésica  $\gamma_w : I_w \rightarrow S$  tal que  $\gamma_w(0) = p$  y  $\gamma_w'(0) = w$ .

*Demostración.* Las ecuaciones de las geodésicas vistas anteriormente son de esta forma:

$$u'' = f(u, v, u', v'), \quad v'' = g(u, v, u', v') \quad (1.8)$$

donde  $f$  y  $g$  son funciones diferenciables respecto a las cuatro variables  $u, v, u'$  y  $v'$ . Está demostrado en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias que, dadas unas constantes cualesquiera  $a, b, c$  y  $d$  y un valor  $t_0 \in I$ , existe una solución a las ecuaciones (1.8) tal que,

$$u(t_0) = a, v(t_0) = b, u'(t_0) = c, v'(t_0) = d \quad (1.9)$$

y tal que  $u(t)$  y  $v(t)$  están definidos y son diferenciables para todo  $|t-t_0| < \varepsilon$ , donde  $\varepsilon > 0$ . Además, el conjunto de soluciones es diferenciable respecto a las condiciones iniciales, lo cual utilizaremos en el siguiente capítulo.

Ahora aplicamos esto a las ecuaciones de las geodésicas. Supongamos que  $p$  reside en una curva  $\mathbf{x}(u, v)$  de  $S$ ,  $p = \mathbf{x}(a, b)$ , y que  $w = c\mathbf{x}_u + d\mathbf{x}_v$ , donde  $a, b, c$  y  $d$  son escalares y las derivadas están evaluadas en  $u = a, v = b$ . Una curva parametrizada  $\gamma(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$  pasa por el punto  $p$  en  $t = t_0$  si y solo si  $u(t_0) = a, v(t_0) = b$ , y tiene el vector tangente  $w$  en ese instante si y solo si

$$c\mathbf{x}_u + d\mathbf{x}_v = w = \gamma'(t_0) = u'(t_0)\mathbf{x}_u + v'(t_0)\mathbf{x}_v,$$

esto es,  $u'(t_0) = c, v'(t_0) = d$ . por lo tanto, encontrar una curva geodésica (de velocidad constante)  $\gamma$  que pasa por el punto  $p$  en el momento  $t = t_0$  y tiene el vector tangente  $w$  es equivalente a resolver las ecuaciones (1.8) sujetas a las condiciones iniciales (1.9).

De aquí deducimos que  $\exists \varepsilon > 0$  y una curva  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V \subset S$  que es solución de las ecuaciones (1.8) con las condiciones iniciales  $\gamma(0) = p$  y  $\gamma'(0) = w$ . Además, si  $\tilde{\gamma}$  es otra geodésica que satisface las mismas condiciones iniciales, entonces  $\gamma$  y  $\tilde{\gamma}$  coinciden en algún entorno de 0. Sea  $I_0$  el intervalo maximal contenido en  $I \cap \tilde{I}$  donde  $\gamma$  y  $\tilde{\gamma}$  coinciden. Si  $I_0$  esta estrictamente contenido en  $I \cap \tilde{I}$ , existe un punto  $t_1$  del extremo de  $I_0$  que está en  $I \cap \tilde{I}$ , y aplicando de nuevo lo que hemos visto pero con las condiciones iniciales  $\gamma(t_1)$  y  $\gamma'(t_1)$ , llegamos a que  $\gamma$  y  $\tilde{\gamma}$  coinciden en un entorno de  $t_1$ , y esto contradice a la definición de  $I_0$ . Lo cual implica que  $I_0 = I \cap \tilde{I}$  y que existe una única geodésica maximal que pasa por el punto  $p$  y es tangente a la dirección  $w$ .  $\square$

Hemos visto en el teorema anterior que para todo  $p \in S$  y  $v \in T_p(S)$  existe una única geodésica maximal  $\sigma_v : I_v \rightarrow S$  tal que  $\sigma_v(0) = p$  y  $\sigma'_v(0) = v$ . En el siguiente lema veremos que  $\sigma_v$  solo depende de la dirección de  $v$ .

**Lema 1.3.3.** *Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie,  $p \in S$  y  $v \in T_p(S)$ . Entonces:*

(i) *para todo  $c, t \in \mathbb{R}$  tenemos*

$$\sigma_{cv}(t) = \sigma_v(ct) \tag{1.10}$$

*en cuanto uno de los términos esté definido.*

(ii) *si  $\sigma_v$  está definido en  $t \in \mathbb{R}$  y  $s \in \mathbb{R}$ , entonces  $\sigma_v$  está definido en  $s+t$  si y solo si  $\sigma_{\sigma'_v(t)}$  está definido en  $s$ , y en este caso*

$$\sigma_{\sigma'_v(t)}(s) = \sigma_v(t+s) \tag{1.11}$$

*Demostración.* (i) Si  $c = 0$  no hay nada que demostrar. Si  $c \neq 0$  empezaremos demostrando que (1.10) se cumple siempre y cuando exista  $\sigma_v(ct)$ . Sea  $\bar{\sigma}(t) = \sigma_v(ct)$ ; está claro que,  $\bar{\sigma}(0) = p$  y  $\bar{\sigma}'(0) = cv$ , por lo tanto es suficiente demostrar que  $\bar{\sigma}$  es una geodésica. De hecho

$$\begin{aligned} \frac{D\bar{\sigma}'}{dt}(t) &= \frac{d^2\bar{\sigma}}{dt^2}(t) - \left\langle \frac{d^2\bar{\sigma}}{dt^2}(t), N \right\rangle N = c^2 \frac{d^2\sigma_v}{dt^2}(ct) - \left\langle c^2 \frac{d^2\sigma_v}{dt^2}(ct), N \right\rangle N \\ &= c^2 \frac{D\sigma'_v}{dt}(ct) = 0 \end{aligned}$$

y por tanto, quedaría demostrado.

Por otro lado, supongamos que existe  $\sigma_{cv}(t)$ , y sean  $w = cv$  y  $s = ct$ . Entonces existe  $\sigma_{cv}(t) = \sigma_w(c^{-1}s)$ , y esto es igual a  $\sigma_{c^{-1}w}(s) = \sigma_v(ct)$ , y así concluimos la demostración.

- (ii) Consideremos el conjunto  $I_v - t = \{s \in \mathbb{R} \mid s + t \in I_v\}$ , la curva  $\sigma : I_v - t \rightarrow S$  definida por  $\sigma(s) = \sigma_v(s + t)$  es claramente una geodésica con  $\sigma(0) = \sigma_v(t)$  y  $\sigma'(0) = \sigma'_v(t)$ , por tanto,  $\sigma(s) = \sigma_{\sigma'_v(t)}(s)$  para todo  $s \in I_v - t$ . Esto implica que  $\sigma_v$  está definida en  $s + t$ , entonces  $\sigma_{\sigma'_v(t)}$  está definida en  $s$  (esto es,  $I_v - t \subseteq I_{\sigma'_v(t)}$ ), y se cumple (1.11). En particular,  $-t \in I_v - t \subseteq I_{\sigma'_v(t)}$ , por lo tanto,  $\sigma_{\sigma'_v(t)}(-t) = p$  y  $\sigma'_{\sigma'_v(t)}(-t) = \sigma'_v(0) = v$ . Utilizando el mismo argumento para  $(-t, \sigma_v(t))$  en vez de para  $(t, p)$ , conseguimos que  $I_{\sigma'_v(t)} + t \subseteq I_v$ ; por tanto,  $I_{\sigma'_v(t)} + t = I_v$  (lo cual significa que  $\sigma_v$  está definido en  $s + t$  si y solo si  $\sigma_{\sigma'_v(t)}$  está definido en  $s$ ), y (1.11) siempre se cumple.  $\square$

**Observación 1.3.3.** Cuando decimos que  $\sigma_v$  está definida en  $t \in \mathbb{R}$  significa que existe un intervalo abierto que contiene el origen y  $t$  donde  $\sigma_v$  está definida.

**Ejemplo 1.3.1.** (*Esfera*) Sea la esfera  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  con la parametrización  $\mathbf{x}(u, v) = (\cos(u)\text{sen}(v), \text{sen}(u)\text{sen}(v), \cos(v))$ . En este caso las ecuaciones (1.4) quedarían así:

$$\begin{aligned} u'' + 2 \frac{\cos(v)}{\text{sen}(v)} u'v' &= 0, \\ v'' + (-\cos(v)\text{sen}(v))(u')^2 &= 0, \end{aligned}$$

Es evidente que tanto los meridianos,  $\gamma(t) = \mathbf{x}(u_0, v_0t + v_1)$ , como el ecuador de la esfera,  $\sigma(t) = \mathbf{x}(u_0t + u_1, \frac{\pi}{2})$ , cumplen estas ecuaciones. Pero estas no son las únicas geodésicas que contiene esta superficie, ya que toda circunferencia principal  $C$  es una geodésica, es decir toda curva definida por el corte de la esfera con un plano que pasa por el centro de la esfera  $O$  es una geodésica de  $\mathbb{S}^2$ . El vector normal en un punto  $p \in C$  nos da la dirección

de la línea que conecta  $p$  con el centro  $O$ . Como  $\mathbb{S}^2$  es una esfera, la normal de la superficie se encuentra en la misma dirección, lo cual implica por el apartado (i) de la proposición (1.2.1) que nuestra afirmación es correcta.

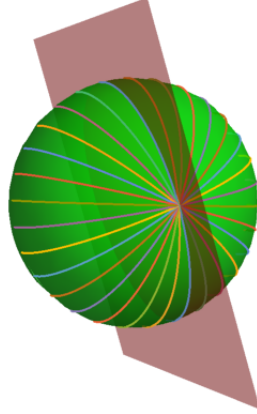


Figura 1.1: Esfera.

**Ejemplo 1.3.2.** (*Plano-Cilindro*) En el caso del cilindro recto, con base circular  $x^2 + y^2 = 1$ , está claro que los círculos obtenidos mediante la intersección del cilindro con los planos normales al eje del mismo son geodésicas. Esto es así porque la normal de la superficie coincide con la normal de la curva en todo momento.

Por otra parte, en el apartado siguiente de este capítulo veremos como las rectas del cilindro (generatrices) también son geodésicas, por ser una superficie de revolución creada por la rotación sobre el eje  $OZ$  de una recta.

Ahora comprobaremos la existencia de otras geodésicas  $C$  sobre el cilindro, para esto, consideramos la parametrización

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$$

del cilindro en un punto  $p \in C$ , con  $\mathbf{x}(0, 0) = p$ . Con esta parametrización, los entornos de  $p \in C$  se expresan como  $\mathbf{x}(u(s), v(s))$ , siendo  $s$  la longitud de arco de  $C$ . Es fácil comprobar que  $\mathbf{x}$  es una isometría local entre un entorno  $U$  de  $(0, 0)$  del plano  $uv$  en el cilindro. Sabiendo que las geodésicas se conservan mediante isometrías locales, la curva  $(u(s), v(s))$  debe ser una geodésica en  $U$  que pasa por  $(0, 0)$ . Pero las geodésicas del plano son las rectas. Por tanto, quitando los casos ya mencionados,

$$u(s) = as + c, \quad v(s) = bs + d, \quad a^2 + b^2 = 1.$$



Se deduce entonces que una curva regular es una geodésica del cilindro si localmente es de la forma

$$(\cos(as + c), \text{sen}(as + c), bs + d)$$

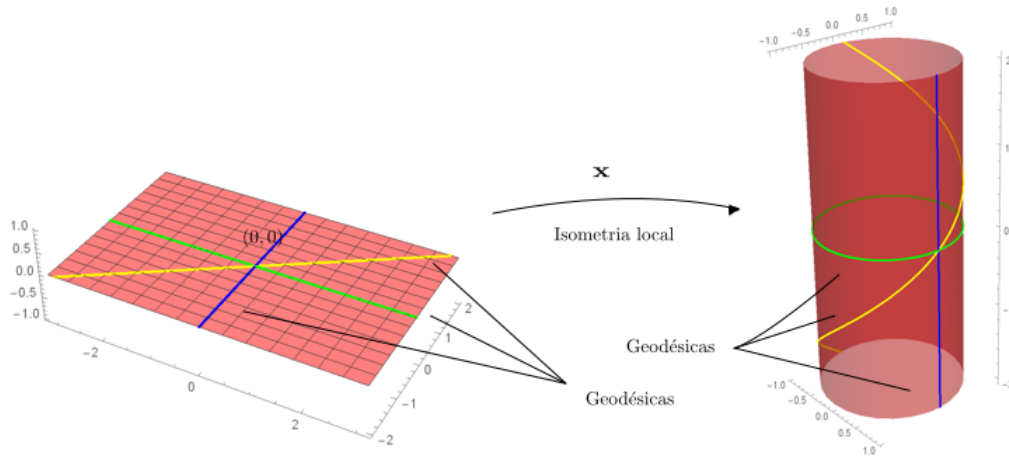


Figura 1.2: Isometria entre el plano y el cilindro.

por tanto es una hélice. De esta forma, quedan determinadas todas las geodésicas de un cilindro circular recto.

Si continuamos con la analogía del plano, observamos que las líneas, esto es, las geodésicas del plano, están caracterizadas como curvas regulares con curvatura cero. Ahora, la curvatura de una curva en un plano orientado está dado por el valor absoluto de la derivada del campo vectorial unitario tangente a la curva, asociado a un signo el cual denota la concavidad de la curva con relación a la orientación del plano. Para considerar el signo, es conveniente introducir la siguiente definición.

**Definición 1.3.1.** Sea  $w$  un campo diferenciable de vectores unitarios a lo largo de una curva parametrizada  $\alpha : I \rightarrow S$  sobre una superficie orientada  $S$ . Como  $w(t)$ ,  $t \in I$ , es un campo vectorial unitario,  $(\frac{dw}{dt})(t)$  es normal a  $w(t)$  y por tanto

$$\frac{Dw}{dt} = \lambda(N \times w(t)).$$

El número real  $\lambda = \lambda(t)$ , denotado por  $[\frac{Dw}{dt}(t)]$ , se denomina el valor algebraico de la derivada covariante de  $w$  en  $t$ .

Obsérvese que el signo de  $[\frac{Dw}{dt}(t)]$  depende de la orientación de  $S$  y que  $[\frac{Dw}{dt}(t)] = \langle \frac{dw}{dt}, N \times w \rangle$ .

Vamos a definir ahora, para curvas en una superficie, un concepto análogo al de curvatura para curvas planas.

**Definición 1.3.2.** Sea  $C$  una curva regular orientada contenida en una superficie orientada  $S$ , y sea  $\gamma(s)$  una parametrización de  $C$  por la longitud de arco  $s$ , en un entorno de  $p \in S$ . El valor algebraico de la derivada covariante

$$\left[ \frac{D\gamma'(s)}{ds} \right] = \kappa_g$$

de  $\gamma'(s)$  en  $p$  se denomina la curvatura geodésica de  $C$  en  $p$ ; esto es,

$$\kappa_g = \langle \gamma'', N \times \gamma' \rangle.$$

Puede comprobarse que por una parametrización no unitaria la expresión quedaría de esta manera,

$$\kappa_g = \frac{1}{\|\alpha'\|^3} \langle \alpha'', N \times \alpha' \rangle$$

Otra forma de determinar si una curva cualquiera (no necesariamente parametrizada por la longitud de arco) es una geodésica es mediante la curvatura geodésica, esto es, una curva  $\alpha$  es una geodésica, si y solo si su curvatura geodésica es cero en todo su dominio.

**Observación 1.3.4.** Si tenemos una curva parametrizada  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$  de la expresión de la curvatura geodésica obtenemos esta otra ecuación,

$$\begin{aligned} \kappa_g = 0 \Leftrightarrow & (\Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2(v'u') + \Gamma_{22}^2(v')^2 + v'')u' \\ & - (\Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1(v'u') + \Gamma_{22}^1(v')^2 + u'')v' = 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Obsérvese que esta ecuación es la ecuación geodésica en el caso general. También es importante destacar que la curvatura geodésica se conserva mediante isometrías locales, ya que está en función de los símbolos de Christoffel.

## 1.4. Geodésicas en superficies de revolución

En esta sección utilizaremos lo que hemos visto anteriormente para analizar las geodésicas en superficies de revolución.

Parametrizaremos las superficies de revolución de la manera usual

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \operatorname{sen} v, g(u)),$$

donde asumimos que  $f > 0$  y  $\left(\frac{df}{du}\right)^2 + \left(\frac{dg}{du}\right)^2 = 1$ . Su primera forma fundamental es  $(u')^2 + f(u)(v')^2$ . Sustituyendo esto en las ecuaciones (1.7) obtenemos

$$\begin{aligned} u'' &= f(u) \frac{df}{du} (v')^2, \\ \frac{d}{dt} (f(u)^2 v') &= 0. \end{aligned} \tag{1.13}$$

A partir de ahora consideraremos geodésicas de longitud de arco, por lo tanto

$$(u')^2 + f(u)^2 (v')^2 = 1. \tag{1.14}$$

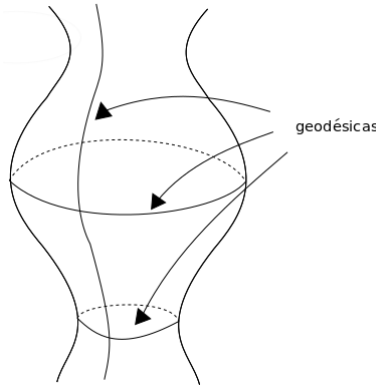
De aquí, deducimos lo siguiente:

**Proposición 1.4.1.** *Dada la superficie de revolución*

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \operatorname{sen} v, g(u))$$

- (i) *Todos los meridianos son geodésicas*
- (ii) *El paralelo  $u = u_0$  es una geodésica si y solo si  $\frac{df}{du} = 0$  cuando  $u = u_0$ , es decir,  $u_0$  es un punto estacionario de  $f$ .*

*Demostración.* En un meridiano,  $v = \text{constante}$ , por lo tanto, la segunda ecuación de (1.13) se cumple trivialmente. La ecuación (1.14) indica que  $u' = \pm 1$ , por tanto,  $u'$  es constante y se satisface la primera ecuación de (1.13).

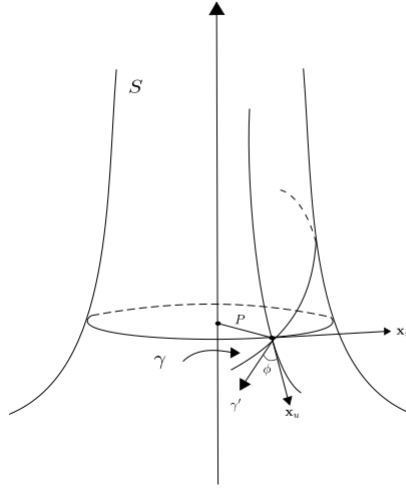


Para (ii), nótese que si  $u = u_0$  es constante, entonces de la ecuación (1.14) concluimos que  $(v') = \frac{\pm 1}{f(u_0)}$  es distinto de cero, y por lo tanto, la primera ecuación de (1.13) se cumple solo si  $\frac{df}{du} = 0$ . A la inversa, si  $\frac{df}{du} = 0$  cuando  $u = u_0$ , es obvio que la primera ecuación de (1.13) se cumple, y la segunda se cumple porque  $(v') = \frac{\pm 1}{f(u_0)}$  y  $f(u) = f(u_0)$ .  $\square$

Esta claro que esta proposición solo nos da algunas geodésicas de las superficies de revolución. Pero el siguiente resultado nos ayudara a entender las geodésicas restantes.

**Proposición 1.4.2.** (Teorema de Clairaut) Sea  $\gamma$  una curva de longitud de arco en una superficie de revolución  $S$ , sea  $\rho : S \rightarrow \mathbb{R}$  la distancia entre los puntos de  $S$  y el eje de rotación, y sea  $\phi$  el ángulo que forma  $\gamma'$  con los meridianos de  $S$ . Si  $\gamma$  es una geodésica, entonces  $\rho \sin \phi$  es constante a lo largo de  $\gamma$ . Recíprocamente, si  $\rho \sin \phi$  es constante a lo largo de  $\gamma$ , y si ninguna parte de  $\gamma$  es parte de algún paralelo de  $S$ , entonces  $\gamma$  es una geodésica.

En el segundo párrafo de la proposición, cuando decimos "parte de  $\gamma$ " nos referimos a  $\gamma(J)$ , donde  $J$  es un intervalo abierto. Las hipótesis no pueden ser menos restrictivos; para una curva paralelo, es decir, una curva en la que  $\phi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\rho \sin \phi$  es claramente constante. Pero, los paralelos no son geodésicas en general, como indica la Proposición (1.4.1).



*Demostración.* Parametrizando  $S$  como en la Proposición (1.4.1), tenemos  $\rho = f(u)$ . Notemos que  $\mathbf{x}_u$  y  $\rho^{-1}\mathbf{x}_v$  son vectores unitarios tangentes a los meridianos y paralelos, respectivamente. Como  $F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0$  son perpendiculares. Asumimos que  $\gamma(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$  es de longitud de arco; entonces, tenemos

$$\gamma' = \cos \phi \mathbf{x}_u + \rho^{-1} \sin \phi \mathbf{x}_v$$

(esta ecuación sirve para definir el signo de  $\phi$ , que el teorema no especifica). Por consiguiente,

$$\mathbf{x}_u \times \gamma' = (\rho^{-1} \sin \phi) \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v.$$

Como  $\gamma' = u' \mathbf{x}_u + v' \mathbf{x}_v$ , esto implica

$$v' \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = (\rho^{-1} \text{sen} \phi) \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v.$$

Por lo tanto,  $\rho v' = \text{sen} \phi$  y

$$\rho \text{sen} \phi = \rho^2 v'.$$

Por otro lado, por hipótesis sabemos que  $\gamma$  es una geodésica, y por consiguiente cumple las ecuaciones (1.13), en particular, la segunda ecuación, de la que se deduce que  $\rho^2 v'$  es constante a lo largo de la geodésica, tal y como se quería probar.

Para demostrar la otra implicación, si  $\rho \text{sen} \phi = C$  es constante a lo largo de la curva de longitud de arco  $\gamma$  en  $S$ , esto demuestra que la segunda ecuación de (1.13) se cumple, y nos falta ver que la primera ecuación de (1.13) también se cumple. Teniendo en cuenta

$$v' = \frac{\text{sen} \phi}{\rho} = \frac{C}{\rho^2}$$

y por ser  $\gamma$  una curva de longitud de arco, tenemos

$$(u')^2 = 1 - \frac{C^2}{\rho^2}$$

Diferenciando las dos partes respecto de  $t$  obtenemos

$$2u'u'' = \frac{2C^2}{\rho^3} \rho' = \frac{2C^2}{\rho^3} \frac{d\rho}{du} u'$$

$$u'(u'' - \rho \frac{d\rho}{du} (v')^2) = 0.$$

Supongamos que el término dentro del paréntesis es distinto de cero en algún punto de la curva, en  $\gamma(t_0) = \mathbf{x}(u_0, v_0)$ , entonces existe  $\varepsilon > 0$  tal que para todo  $t \in I$  donde  $|t - t_0| < \varepsilon$

$$u'' - \rho \frac{d\rho}{du} (v')^2 \neq 0$$

Pero entonces  $u' = 0$  cuando  $|t - t_0| < \varepsilon$ , y por lo tanto  $\gamma$  coincidiría con el paralelo  $u = u_0$  en ese intervalo, lo cual contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto, tiene que ser nulo en todo  $\gamma$ , esto es,

$$u'' = \rho \frac{d\rho}{du} (v')^2,$$

en consecuencia se cumplen las ecuaciones (1.13) y esto implica que  $\gamma$  es una geodésica.  $\square$

**Observación 1.4.1.** Este teorema se puede generalizar a las superficies de Liouville como hemos hecho en el ejercicio 1 del apéndice A. En este ejercicio veremos las propiedades que cumplen las geodésicas de las superficies de Liouville. Para complementar esto, hemos añadido dos ejercicios más como ejemplo de estas superficies, por un lado, en el ejercicio 2 trabajamos con Mapa u-Clairaut que son un caso particular de superficies de Liouville, y en el ejercicio 3 damos paso al espacio hiperbólico  $\mathbb{H}^2$  que es un caso particular del anterior.

## Capítulo 2

# Geodésicas como curvas mínimas

En este capítulo daremos la definición de la aplicación exponencial junto con varias de sus propiedades. Y usaremos esta aplicación para definir nuevos conceptos, tales como los entornos geodésicos, radio de inyectividad... Además, demostraremos que cualquier segmento suficientemente corto de una geodésica será minimizante y aquí es donde haremos uso de la aplicación exponencial. También veremos que si existe una curva de longitud mínima que una dos puntos, esta será una geodésica.

### 2.1. Aplicación exponencial

**Definición 2.1.1.** Sea  $S$  una superficie, y  $p \in S$ . Denotamos por

$$\varepsilon_p = \{v \in T_p(S) \mid 1 \in I_v\}$$

el conjunto de vectores tangentes  $v \in T_p(S)$  tal que  $\sigma_v$ , la geodésica que parte de  $p$  con vector director  $v$ , está definido en un entorno de  $[0, 1]$ . Entonces, la aplicación exponencial  $exp_p : \varepsilon_p \rightarrow S$  de  $S$  en  $p$  está definido por  $exp_p(v) = \sigma_v(1) = \sigma_{\frac{v}{\|v\|}}(\|v\|)$ .

**Ejemplo 2.1.1.** Uno de los ejemplos más sencillos son los planos, en estas superficies tan conocidas las geodésicas son rectas, dado un punto  $p$  y un vector  $v$  tenemos la geodésica  $\sigma_v(t) = p + tv$ , por lo tanto la aplicación exponencial sería  $exp_p(v) = p + v$ .

Otra de las superficies más conocidas es la esfera, nosotros cogeremos la esfera de radio 1,  $\mathbb{S}^2$ . Dado un punto  $p \in \mathbb{S}^2$  y un vector tangente  $v \in T_p(\mathbb{S}^2)$  obtenemos una base ortonormal  $\{n(p) = p, \frac{v}{\|v\|}\}$  de un plano que corta la esfera y que contiene a  $p$  y el centro de la esfera. La intersección de este plano con la esfera definen la geodésica

$$\gamma_{\frac{v}{\|v\|}}(t) = \cos(t)p + \operatorname{sen}(t)\frac{v}{\|v\|},$$

que además, está escrita por la longitud de arco. Por lo tanto la aplicación exponencial quedaría de la siguiente forma

$$\exp_p(v) = \gamma_{\frac{v}{\|v\|}}(\|v\|) = \cos(\|v\|)p + \operatorname{sen}(\|v\|)\frac{v}{\|v\|}$$

Podemos demostrar inmediatamente que la aplicación exponencial cumple las siguientes propiedades:

En lo que sigue hay que subrayar que donde aparece  $x$  estamos en un entorno de  $\mathbb{R}^2$  y sus coordenadas seran  $x = (u, v)$ , y en cuanto a  $w$  es un vector del plano tangente en coordenadas de la base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ , esto es,  $w = (w_1, w_2)$ .

**Proposición 2.1.1.** *Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie, y  $p \in S$ . Entonces:*

- (i)  $\varepsilon_p$  es un entorno abierto en forma de estrella del origen en  $T_p(S)$ .
- (ii) para todo  $v \in T_p(S)$  y  $t_0 \in \mathbb{R}$  tales que  $\sigma_v$  está definido en  $t_0$ , entonces, existe  $\delta > 0$  y  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$  una parametrización local centrado en  $p$  tales que, habiendo fijado el vector  $w_0 = (d\mathbf{x}_O)^{-1}(v)$ , la aplicación  $(x, w, t) \mapsto \sigma_{d\mathbf{x}_x(w)}(t)$  está definida y es de clase  $C^\infty$  en  $U \times B(w_0, \delta) \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^5$ .
- (iii) La aplicación exponencial  $\exp_p : \varepsilon_p \rightarrow S$  es de clase  $C^\infty$ .
- (iv)  $d(\exp_p)_O = id$  y, en particular,  $\exp_p$  es un difeomorfismo entre un entorno de  $O$  en  $T_p(S)$  y un entorno de  $p$  en  $S$ .

*Demostración.* Directamente el lema (1.3.3) implica que  $\varepsilon_p$  es de forma estrellada respecto el origen. Ahora definimos el conjunto

$$\mathcal{U} = \{(p, v, t_0) | p \in S, v \in T_p(S), \sigma_v \text{ está definido en } t_0 \in \mathbb{R}\}.$$

y el subconjunto  $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$  formado por los puntos  $(p, v, t_0) \in \mathcal{U}$  para los cuales existen un  $\delta > 0$  y una parametrización local  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$  centrada en  $p$  tales que, dado  $w_0 = (d\mathbf{x}_O)^{-1}(v) \in \mathbb{R}^2$ , la aplicación  $(x, w, t) \mapsto \sigma_{d\mathbf{x}_x(w)}(t)$  de clase  $C^\infty$  en el conjunto abierto  $U \times B(w_0, \delta) \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^5$ .

Esta claro que,  $\varepsilon_p = \pi(\mathcal{U} \cap (\{p\} \times T_p(S) \times \{1\}))$ , donde  $\pi : S \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  es la proyección en el factor central; por otra parte,  $\mathcal{W}_p = \pi(\mathcal{W} \cap (\{p\} \times T_p(S) \times \{1\}))$  es abierto en  $T_p(S)$ , por definición, y  $\exp_p$  es de clase  $C^\infty$  en  $\mathcal{W}_p$ ; por lo tanto, para demostrar (i)-(iii) es suficiente con ver que  $\mathcal{U} = \mathcal{W}$ .

Nótese que  $(p, v, 0) \in \mathcal{W}$  para todo  $p \in S$  y  $v \in T_p(S)$ , por el teorema (1.3.2).

Por reducción al absurdo, supongamos que existe  $(p_0, v_0, t_0) \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{W}$ ; ya que  $t_0 \neq 0$ , podemos asumir que  $t_0 > 0$ ; el caso  $t_0 < 0$  en análogo.

Sea  $\hat{t} = \sup\{t \in \mathbb{R} | \{p_0\} \times \{v_0\} \times [0, t] \subset \mathcal{W}\}$ ; está claro que,  $0 < \hat{t} \leq t_0$ . Por otro lado, ya que  $(p_0, v_0, t_0) \in \mathcal{U}$ , la geodésica  $\sigma_{v_0}$  está definida en  $\hat{t}$ ;



llamemos  $\hat{p} = \sigma_{v_0}(\hat{t})$  y  $\hat{v} = \sigma'_{v_0}(\hat{t})$ . Teniendo en cuenta que  $(\hat{p}, \hat{v}, 0) \in \mathcal{W}$ , existen una parametrización local  $\hat{\mathbf{x}} : \hat{U} \rightarrow S$  centrado en  $\hat{p}$ , un  $\delta > 0$  y un entorno  $\hat{W} \subseteq \mathbb{R}^2$  de  $\hat{w} = (d\hat{\mathbf{x}}_O)^{-1}(\hat{v})$  tales que la aplicación  $(x, w, t) \mapsto \sigma_{d\hat{\mathbf{x}}_x(w)}(t)$  es de clase  $C^\infty$  en  $\hat{U} \times \hat{W} \times (-\delta, \delta)$ .

Elegimos  $t_1 < \hat{t}$  tal que  $t_1 + \delta > \hat{t}$ ,  $\sigma_{v_0}(t_1) \in \hat{V} = \hat{\mathbf{x}}(\hat{U})$ , y  $\sigma'_{v_0}(t_1) \in d\hat{\mathbf{x}}_{x_1}(\hat{W})$ , donde  $x_1 = \hat{\mathbf{x}}^{-1}(\sigma_{v_0}(t_1))$ . Dado que  $\{p_0\} \times \{v_0\} \times [0, t_1] \subset \mathcal{W}$ , por tanto podemos encontrar una parametrización local  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$  centrado en  $p_0$ , un  $\varepsilon > 0$  y un entorno  $W \subseteq \mathbb{R}^2$  de  $w_0 = (d\mathbf{x}_O)^{-1}(v_0)$  tales que  $(x, w, t) \mapsto \sigma_{d\mathbf{x}_x(w)}(t)$  es de clase  $C^\infty$  en  $U \times W \times (-\varepsilon, t_1 + \varepsilon)$ ; además, tomando  $U$  y  $W$  más pequeños, también podemos asumir que  $\sigma_{d\mathbf{x}_x(w)}(t_1) \in \hat{V}$  y  $\sigma'_{d\mathbf{x}_x(w)}(t_1) \in d\hat{\mathbf{x}}_{x'}(\hat{W})$  para todo  $(x, w) \in U \times W$ , donde  $x' = \hat{\mathbf{x}}^{-1}(\sigma_{d\mathbf{x}_x(w)}(t_1))$ .

Ahora, si  $(x, w) \in U \times W$  el punto  $\sigma_{d\mathbf{x}_x(w)}(t_1)$  está bien definido y depende de manera  $C^\infty$  en  $x$  y  $w$ . Por lo tanto,  $x' = \hat{\mathbf{x}}_{x'}^{-1}(\sigma_{d\mathbf{x}_x(w)}(t_1)) \in \hat{U}$  y el vector  $w' = (d\hat{\mathbf{x}})^{-1}(\sigma'_{d\mathbf{x}_x(w)}(t_1)) \in \hat{W}$  también depende de una manera  $C^\infty$  en  $x$  y  $w$ . Esto implica que para todo  $t \in (t_1 - \delta, t_1 + \delta)$  el punto

$$\sigma_{\sigma'_{d\mathbf{x}_x(w)}(t_1)}(t - t_1) = \sigma_{d\hat{\mathbf{x}}_{x'}(w')}(t - t_1)$$

depende de manera  $C^\infty$  en  $x$ ,  $w$  y  $t$ . Pero el Lema (1.3.3) (ii) implica

$$\sigma_{\sigma'_{d\mathbf{x}_x(w)}(t_1)}(t - t_1) = \sigma_{d\mathbf{x}_x(w)}(t);$$

por tanto hemos probado que la aplicación  $(x, w, t) \mapsto \sigma_{d\mathbf{x}_x(w)}(t)$  es de clase  $C^\infty$  en  $U \times W \times (-\varepsilon, t_1 + \delta)$ , y esto contradice la definición de  $\hat{t}$ .

Finalmente, vamos a calcular la diferencial del  $exp_p$  en el origen. Si  $w \in T_p(S)$ , por definición tenemos

$$d(exp_p)_O(w) = \left. \frac{d}{dt}(exp_p \circ \tau) \right|_{t=0},$$

donde  $\tau$  es una curva en  $T_p(S)$  con  $\tau(0) = O$  y  $\tau'(0) = w$ . Por ejemplo, cogemos  $\tau(t) = tw$ ; por tanto, por (1.10)

$$d(exp_p)_O(w) = \left. \frac{d}{dt} exp_p(tw) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \sigma_{tw}(1) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \sigma_w(t) \right|_{t=0} = w.$$

De aquí,  $d(exp_p)_O = id$  es invertible, y la aplicación exponencial es un difeomorfismo entre un entorno de  $O$  en  $T_p(S)$  y un entorno de  $p$  en  $S$ .  $\square$

**Observación 2.1.1.** Nótese que(1.10) implica que la geodésica que parte desde el punto  $p \in S$  puede escribirse como

$$\sigma_v(t) = exp_p(tv)$$

Después de ver estas proposiciones damos paso al siguiente apartado:

## 2.2. Entornos geodésicos

**Definición 2.2.1.** Si  $p \in S$  y  $\delta > 0$ , sea

$$B_p(O, \delta) = \{v \in T_p(S) \mid \|v\|_p < \delta\}$$

la bola abierta con centro en el origen y radio  $\delta > 0$  en el plano tangente del punto  $p$ . La frontera de esta bola es el círculo.

$$\partial B_p(O, \delta) = \{v \in T_p(S) \mid \|v\|_p = \delta\}$$

- Llamamos radio de inyectividad  $inj\ rad(p)$  de  $S$  en  $p$  al mayor  $\delta > 0$  para el cual  $exp_p : B_p(O, \delta) \rightarrow S$  es un difeomorfismo con su imagen. Si  $0 < \delta \leq inj\ rad(p)$ , al conjunto  $B_\delta(p) = exp_p(B_p(O, \delta))$  se le llama bola geodésica centrada en  $p$  y radio  $\delta$ .
- Las geodésicas que parten de  $p$ , es decir, a las curvas con forma  $t \mapsto exp_p(tv)$ , se les llama geodésicas radiales.
- A las curvas que son imágenes mediante  $exp_p$  de círculo centradas en el origen de  $T_p(S)$  y radio menor que  $inj\ rad(p)$  se les llama círculos geodésicos:

$$\partial B_\delta(p) = exp_p(\partial B_p(O, \delta))$$

Por último, si tenemos el conjunto  $B_\delta^*(p) = B_\delta(p) \setminus \{p\}$ , el campo radial  $\frac{\partial}{\partial r} : B_\delta^*(p) \rightarrow \mathbb{R}^3$  esta definido por

$$\frac{\partial}{\partial r} \Big|_q = \frac{\sigma'_v(1)}{\|v\|} \in T_p(S)$$

para todo  $q = exp_p(v) \in B_\delta^*(p)$ .

En el plano, es evidente que las geodésicas radiales del origen son ortogonales a los círculos geodésicos centrados en el origen, y son tangentes al campo radial en todos lados. Más adelante comprobaremos que esto también se cumple en el resto de las superficies.

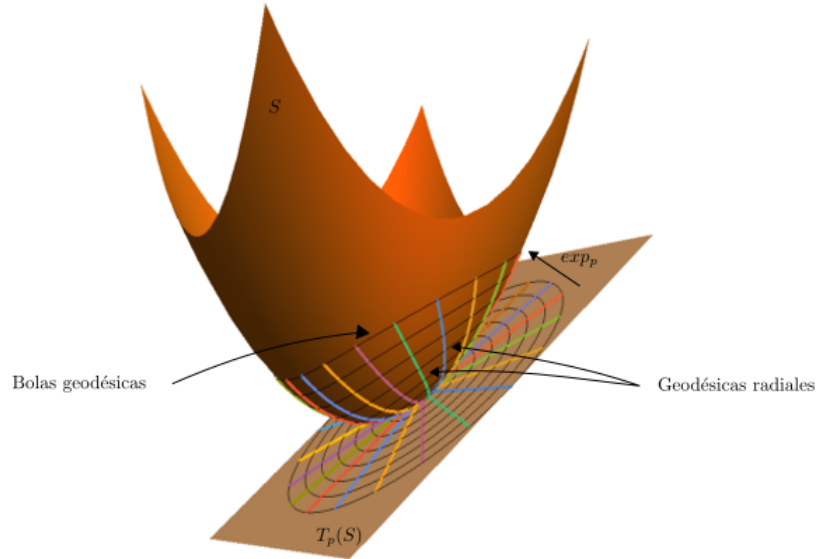


Figura 2.1: Paraboloides con plano tangente. La exponencial envía el entorno  $B_p(O, \delta)$  a los entornos geodésico  $B_\delta(p)$ .

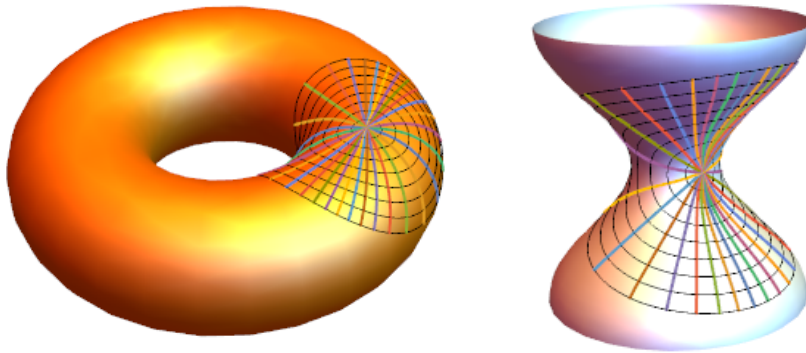


Figura 2.2: Ejemplos de círculos geodésicos y geodésicas radiales en superficies de revolución. Obsérvese que las geodésicas radiales son ortogonales a los círculos geodésicos.

**Lema 2.2.1.** *Dado un punto  $p \in S$  y  $0 < \delta \leq \text{injrad}(p)$ , sea la bola geodésica  $B_\delta(p) \subset S$  centrada en  $p$ . Entonces:*

- (i) *Para todo  $q = \text{exp}_p(v) \in B_\delta^*(p)$  tenemos*

$$\frac{\partial}{\partial r} \Big|_q = \frac{\sigma'_v(1)}{\|v\|} = \sigma'_{\frac{v}{\|v\|}}(\|v\|) = \frac{1}{\|v\|} d(\text{exp}_p)_v(v).$$

En particular,  $\|\frac{\partial}{\partial r}\| \equiv 1$  y  $\|d(\exp_p)_v(v)\| = \|v\|$ .

- (ii) Las geodésicas radiales que parten de  $p$ , parametrizadas por la longitud de arco, son tangentes al campo radial en  $B_\delta^*(p)$ .
- (iii) **(Lema de Gauss)** El campo radial es ortogonal a todo círculo geodésico que vive en  $B_\delta^*(p)$  y, en particular,

$$\langle d(\exp_p)_v(v), d(\exp_p)_v(w) \rangle = \langle v, w \rangle \quad (2.1)$$

para todo  $w \in T_p(S)$ .

*Demostración.* (i) La primera igualdad viene dada por

$$\|\sigma'_v(1)\| = \|\sigma'_v(0)\| = \|v\|,$$

la segunda podemos obtenerla de la diferencial de

$$\sigma_{\frac{v}{\|v\|}}(t) = \sigma_v\left(\frac{t}{\|v\|}\right)$$

y cogiendo  $t = \|v\|$ . Por último, una curva en  $T_p(S)$  que parte de  $v$  y es tangente a  $v$  es  $\sigma(t) = v + tv$ , por lo tanto,

$$d(\exp_p)_v(v) = \left. \frac{d}{dt} \exp_p((1+t)v) \right|_{t=0} = \sigma'_v(1). \quad (2.2)$$

- (ii) Las geodésicas radiales parametrizadas por la longitud de arco y que empiezan en el punto  $p$  son las curvas  $\gamma_v$  con  $v \in T_p(S)$  tal que  $\|v\| = 1$ . Ya que  $\gamma_{sv}(t) = \gamma_v(ts)$ , tenemos que  $\gamma'_{sv}(1) = s\gamma'_v(s)$ , y por (i) tenemos:

$$\gamma'_v(s) = \frac{\gamma'_{sv}(1)}{\|sv\|} = \left. \frac{\partial}{\partial r} \right|_{\exp_p(sv)} = \left. \frac{\partial}{\partial r} \right|_{\gamma_v(s)},$$

y por tanto  $\gamma_v$  es siempre tangente a  $\frac{\partial}{\partial r}$ .

- (iii) Sean  $q \in B_\delta^*(p)$  y  $v \in T_p(S)$  tal que  $q = \exp_p(v)$ . Fijamos una base ortonormal  $\{u_1, u_2\}$  de  $T_p(S)$  tal que  $u_1 = \frac{v}{\|v\|}$ . Entonces,  $\gamma_{u_1}$  es una geodésica radial de  $p$  a  $q = \gamma_{u_1}(\|v\|)$  parametrizada por la longitud de arco, mientras que el círculo geodésico que pasa por  $q$  está parametrizado por la curva

$$\tau(s) = \exp_p(\|v\|(\cos s)u_1 + \|v\|(s \operatorname{sen} s)u_2).$$

Por lo tanto, nuestro objetivo es demostrar que  $\gamma_{u_1}(\|v\|)$  es ortogonal a  $\tau'(0)$ . Para esto, consideremos la aplicación

$$\Sigma : (-\pi, \pi) \times (-\delta, \delta) \rightarrow S$$

definida por

$$\Sigma(s, t) = \exp_p(t(\cos s)u_1 + t(\operatorname{sens}s)u_2).$$

Teniendo en cuenta que

$$\|t(\cos s)u_1 + t(\operatorname{sens}s)u_2\| = |t| < \delta,$$

la aplicación  $\Sigma$  está bien definida y es de clase  $C^\infty$ . Además,

$$\gamma_{u_1}(t) = \Sigma(0, t) \quad y \quad \tau(s) = \Sigma(s, \|v\|)$$

Por tanto, tenemos que ver,

$$\left\langle \frac{\partial \Sigma}{\partial t}(0, \|v\|), \frac{\partial \Sigma}{\partial s}(0, \|v\|) \right\rangle = 0.$$

Fijamos  $v_s = (\cos s)u_1 + (\operatorname{sens}s)u_2$ , para obtener  $\Sigma(s, t) = \gamma_{v_s}(t)$ . En particular, todo  $\gamma_{v_s}$  es una geodésica parametrizada por la longitud de arco. Esto implica que  $D\gamma'_{v_s} \equiv O$  y  $\|\gamma'_{v_s}\| \equiv 1$ . Con esto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial \Sigma}{\partial t}(s, t), \frac{\partial \Sigma}{\partial s}(s, t) \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \gamma'_{v_s}(t), \frac{\partial \Sigma}{\partial s}(s, t) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \Sigma}{\partial t}(s, t), \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial t \partial s}(s, t) \right\rangle \\ &= \left\langle D\gamma'_{v_s}(t), \frac{\partial \Sigma}{\partial s}(s, t) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \Sigma}{\partial t}(s, t), \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial t \partial s}(s, t) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial \Sigma}{\partial t}(s, t), \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial t \partial s}(s, t) \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left\| \frac{\partial \Sigma}{\partial t}(s, t) \right\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \|\gamma'_{v_s}(t)\|^2 = 0. \end{aligned}$$

Esto implica que  $\left\langle \frac{\partial \Sigma}{\partial t}(s, t), \frac{\partial \Sigma}{\partial s}(s, t) \right\rangle$  es constante respecto de  $t$ , y por tanto

$$\left\langle \frac{\partial \Sigma}{\partial t}(0, \|v\|), \frac{\partial \Sigma}{\partial s}(0, \|v\|) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \Sigma}{\partial t}(0, 0), \frac{\partial \Sigma}{\partial s}(0, 0) \right\rangle.$$

Como sabemos que

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial s}(0, t) = td(\exp_p)_{tu_1}(u_2),$$

tenemos que  $\frac{\partial \Sigma}{\partial s}(0, 0) = O$ , y hemos acabado.

En particular, teniendo en cuenta que por (i)

$$\gamma'_{u_1}(\|v\|) = \frac{1}{\|v\|} d(\exp_p)_v(v),$$

y que por la definición de  $\tau$

$$\tau'(0) = \|v\| d(\exp_p)_v(u_2),$$

hemos demostrado (2.1) para  $w = v$  y para  $w$  ortogonal a  $v$ . Si tenemos en cuenta que cualquier vector de  $T_p(S)$  puede ser expresado mediante  $v$  y un vector ortogonal a  $v$ , tenemos la afirmación.  $\square$

## 2.3. Geodésicas de longitud mínima

Ahora veremos la caracterización de las geodésicas como la curva más corta entre dos puntos.

**Teorema 2.3.1.** *Sea  $S$  una superficie y  $p \in S$ .*

- (i) *Si  $0 < \delta \leq \text{inj rad}(p)$ , entonces para todo  $q \in B_\delta(p)$  la geodésica radial de  $p$  a  $q$  es la curva más corta (salvo reparametrizaciones) en  $S$  que une  $p$  y  $q$ .*
- (ii) *Si  $\alpha : [0, 1] \rightarrow S$  es la curva regular a trozos con longitud más corta entre dos puntos  $p = \alpha(0)$  y  $q = \alpha(1)$  en  $S$ , entonces  $\alpha$  es una geodésica (y en particular regular en todo su dominio).*
- (iii) *Sean  $\gamma : [a, b] \rightarrow S$  una geodésica parametrizada por la longitud de arco,  $t_0 \in [a, b]$ , y  $\delta = \text{inj rad}(\gamma(t_0))$ . Entonces,  $\gamma$  es la curva más corta en  $S$  de  $\gamma(t_0)$  a  $\gamma(t_1)$  si  $|t_0 - t_1| < \delta$ .*

*Demostración.* (i) Sea  $q_0 \in B_\delta(p)$ . Elegimos  $v_0 \in T_p(S)$  tal que  $q_0 = \exp_p(v_0)$ , y cogemos  $u_1 = \frac{v_0}{\|v_0\|}$ , con esto tenemos que  $\gamma_{u_1} : [0, \|v_0\|] \rightarrow S$  es la geodésica parametrizada por la longitud de arco que une  $p$  y  $q_0$ . Tenemos que demostrar que si  $\alpha : [0, l] \rightarrow S$  es otra curva regular a trozos parametrizada por la longitud de arco en  $S$  de  $p$  a  $q_0$  entonces

$$L(\alpha) \geq L(\gamma_{u_1}) = \|v_0\|,$$

y la igualdad se da cuando  $\alpha = \gamma_{u_1}$ .

Si  $\alpha$  pasa más de una vez por  $p$ , podemos eliminar una parte de  $\alpha$  y conseguir así una curva más corta que vaya de  $p$  a  $q_0$ . Por lo tanto, podemos asumir que  $\alpha(s) \neq p$  para todo  $s > 0$ .

Supongamos que la imagen de  $\alpha$  está contenido en  $B_\delta(p)$ , más tarde veremos el caso en el que la imagen de  $\alpha$  sale de  $B_\delta(p)$ . En este caso, para todo  $s \in (0, l]$  donde  $\alpha$  es diferenciable existe  $a(s) \in \mathbb{R}$  y  $w(s) \in T_{\alpha(s)}(S)$  ortogonal al campo radial tal que,

$$\alpha'(s) = a(s) \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{\alpha(s)} + w(s).$$

Notemos que, por el Lema de Gauss (2.2.1) (iii), el vector  $w(s)$  es tangente al círculo geodésico que pasa por  $\alpha(s)$ .

Sea  $r : B_\delta^*(p) \rightarrow \mathbb{R}^+$ , la función radio geodésico, dado por

$$r(q) = \|\exp_p^{-1}(q)\|.$$

Como  $r$  es norma de un vector, está claro que es de clase  $C^\infty$ , y los círculos geodésicos son las curvas de nivel de  $r$ , esto es, a lo largo de un círculo geodésico el valor de  $r$  es constante. Por lo tanto,  $dr_q(w) = 0$  para todo vector  $w \in T_q(S)$  tangente al círculo geodésico que pasa por  $q \in B_\delta^*(p)$ . Es más, si  $q = \exp_p(v)$  tenemos

$$\begin{aligned} dr_q \left( \frac{\partial}{\partial r} \Big|_q \right) &= dr_{\exp_p(v)} \left( \frac{\gamma'_v(1)}{\|v\|} \right) \\ &= \frac{1}{\|v\|} \frac{d}{dt} (r \circ \exp_p)(tv) \Big|_{t=1} = \frac{1}{\|v\|} \frac{d}{dt} (t\|v\|) \Big|_{t=1} \equiv 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, obtenemos

$$\frac{d(r \circ \alpha)}{ds}(s) = dr_{\alpha(s)}(\alpha'(s)) = a(s).$$

Ahora estimaremos la longitud de  $\alpha$ . Sea  $0 = s_0 < \dots < s_k = l$  una partición de  $[0, l]$  tal que  $\alpha|_{[s_{j-1}, s_j]}$  es regular para  $j = 1, \dots, k$ . Entonces,

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= \sum_{j=1}^k \int_{s_{j-1}}^{s_j} \|\alpha'(s)\| ds = \sum_{j=1}^k \int_{s_{j-1}}^{s_j} \sqrt{|a(s)|^2 + \|w(s)\|^2} ds \\ &\geq \sum_{j=1}^k \int_{s_{j-1}}^{s_j} |a(s)| ds \geq \sum_{j=1}^k \int_{s_{j-1}}^{s_j} a(s) ds = \sum_{j=1}^k \int_{s_{j-1}}^{s_j} \frac{d(r \circ \alpha)}{ds}(s) ds \\ &= \sum_{j=1}^k [r(\alpha(s_j)) - r(\alpha(s_{j-1}))] = r(q_0) - r(p) = \|v_0\| = L(\gamma_{u_1}). \end{aligned}$$

Con esto, vemos que  $\alpha$  es como mínimo de la longitud de  $\gamma_{u_1}$ . La igualdad se cumple si y solo si  $w(s) = 0$  y  $a(s) \geq 0$  para todos. En este caso, teniendo en cuenta que la longitud de  $\alpha'$  es 1, tenemos que  $\alpha' \equiv \frac{\partial}{\partial r} \Big|_\alpha$ . Esto implica que por el Lema (2.2.1) (ii),  $\alpha$  es, al igual que  $\gamma_{u_1}$ , tangente siempre al campo vectorial radial. Por tanto,  $\gamma_{u_1}$  y  $\alpha$  son solución del mismo sistema de ecuaciones ordinarias con la misma condición inicial (son dos geodésicas tales que  $\alpha(0) = \gamma_{u_1}(0)$  y  $\alpha'(0) = \gamma'_{u_1}(0)$ , y por el Teorema (1.3.2) tenemos que  $\alpha \equiv \gamma_{u_1}$ , y así conseguimos lo que buscábamos.

Por último, si la imagen de  $\alpha$  no está contenida en  $B_p(\delta)$ , sea  $t_1 > 0$  el primer valor para el cual  $\alpha$  corta  $S_p(\delta)$ . Entonces el argumento previo demuestra que

$$L(\alpha) \geq L(\alpha|_{[0, t_1]}) \geq \delta > \|v_0\|,$$

y con esto acabamos.

- (ii) Si  $\alpha$  es la curva más corta entre  $p$  y  $q$ , lo es también para cualesquiera dos puntos que esten en su imagen. Si esto no fuera así, sustituiríamos el fragmento de  $\alpha$  por el fragmento más corto, y de esta manera, obtendríamos una curva regular a trozos más corta que  $\alpha$ . Pero hemos demostrado en (i) que localmente, las curvas mínimas son geodésicas. Teniendo en cuenta que el ser una geodésica es una propiedad local,  $\alpha$  tiene que ser una geodésica.
- (iii) Bajo estas premisas  $\gamma(t_1)$  está en la bola geodésica centrada en  $\gamma(t_0)$  y con radio  $\delta$ , y  $\gamma$  es la geodésica radial de  $\gamma(t_0)$  a  $\gamma(t_1)$ . □

**Observación 2.3.1.** No siempre tiene por qué existir una curva mínima que une dos puntos en una superficie. Por ejemplo, si cogemos  $S = \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$  y  $p \in S$ , entonces para cualquier curva en  $S$  que una  $p$  y  $-p$  hay una curva de menor longitud en  $S$  que una estos dos puntos. En cambio en el siguiente capítulo veremos que si  $S$  cumple unas condiciones concretas, entonces cualquier par de puntos de  $S$  podrán unirse mediante una curva mínima, la cual será una geodésica.

**Observación 2.3.2.** Incluso cuando existe, la curva mínima que une dos puntos puede que no sea único. Por ejemplo, dos puntos antipodales de la esfera están unidas por infinitas curvas, todas con la misma longitud.

**Definición 2.3.1.** El radio de inyectividad del un subconjunto  $C \subset S$  de una superficie  $S$  es el numero

$$inj\ rad(C) = \inf\{inj\ rad(q) | q \in C\} \geq 0.$$

Un conjunto abierto  $V \subset S$  es uniformemente normal si su radio de inyectividad es positivo. En otras palabras,  $V$  es uniformemente normal si y solo si existe  $\delta > 0$  tal que  $exp_p$  es un difeomorfismo de  $B_q(O, \delta)$  con  $B_\delta(q)$  para todo  $q \in V$ .

**Proposición 2.3.2.** *Todo punto de una superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$  tiene un entorno uniformemente normal.*

*Demostración.* Dado un punto  $p \in S$ , la proposición (2.1.1) (ii) proporciona un  $\delta > 0$  y una parametrización local  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$  centrada en  $p$  tal que la aplicación  $(x, w, t) \mapsto \sigma_{d\mathbf{x}_x(w)}(t)$  es de clase  $C^\infty$  en el subconjunto abierto  $U \times B(O, \delta) \times (1 - \delta, 1 + \delta) \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^5$ . En particular, la aplicación  $\bar{E} : U \times B(O, \delta) \rightarrow S$  dado por  $\bar{E}(x, w) = exp_{\mathbf{x}(x)}(d\mathbf{x}_x(w))$  es de clase  $C^\infty$ . Además, como  $\bar{E}(O, O) = p$ , podemos encontrar un entorno  $U_1 \subset U$  de  $O$  y un  $0 < \delta_1 < \delta$  tal que  $\bar{E}(U_1 \times B(O, \delta_1)) \subseteq \mathbf{x}(U)$ . Entonces, definimos  $E : U_1 \times B(O, \delta_1) \rightarrow U \times U$  definido por

$$E(x, w) = (x, \mathbf{x}^{-1}(\bar{E}(x, w)));$$



queremos demostrar que  $E$  es invertible en un entorno de  $(O, O)$ . Es suficiente con verificar que  $dE_{(O,O)}$  es invertible. Denotemos por  $x = (x_1, x_2)$  las coordenadas de  $x$ , y por  $w = (w_1, w_2)$  las coordenadas de  $w$ . Entonces, para  $j = 1, 2$  tenemos

$$\begin{aligned} dE_{(O,O)} \left( \frac{\partial}{\partial w_j} \right) &= \frac{d}{dt} E(O, t\mathbf{e}_j) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} (O, \mathbf{x}^{-1}(\exp_p(t\partial_j|_p))) \Big|_{t=0} \\ &= (O, d\mathbf{x}_p^{-1} \circ d(\exp_p)_O(\partial_j|_p)) = (O, d\mathbf{x}_p^{-1}(\partial_j|_p)) \\ &= \left( O, \frac{\partial}{\partial x_j} \right), \end{aligned}$$

ya que por la proposición (2.1.1) (iv)  $d(\exp_p)_O = id$ . Por otro lado, también tenemos

$$\begin{aligned} dE_{(O,O)} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right) &= \frac{d}{dt} E(t\mathbf{e}_j, O) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} (t\mathbf{e}_j, \mathbf{x}^{-1}(\exp_{\mathbf{x}(t\mathbf{e}_j)}(O))) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} (t\mathbf{e}_j, t\mathbf{e}_j) \Big|_{t=0} = \left( \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $dE_{(O,O)}$  lleva una base de  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  a una base de  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ , es invertible, y esto implica que existe un entorno  $U_0 \subseteq U_1$  de  $O$  y un  $0 < \delta_0 < \delta_1$  tales que  $E|_{U_0 \times B(O, \delta_0)}$  es un difeomorfismo con su imagen. En particular, esto implica que para todo  $x \in U_0$  la aplicación  $\bar{e}_x : B(O, \delta_0) \rightarrow U$  dado por  $\bar{e}_x(w) = \mathbf{x}^{-1}(\exp_{\mathbf{x}(x)}(d\mathbf{x}_x(w)))$  es un difeomorfismo con su imagen.

Finalmente, cogiendo un  $U_0$  suficientemente pequeño, tenemos que encontrar un  $\varepsilon > 0$  tal que  $B_{\mathbf{x}(x)}(O, \varepsilon) \subseteq d\mathbf{x}_x(B(O, \delta_0))$  para todo  $x \in U_0$ . Sea  $V_0 = \mathbf{x}(U_0)$ ; entonces, para todo  $q = \mathbf{x}(x) \in V_0$  la aplicación  $\exp_q : B_q(O, \varepsilon) \rightarrow S$  es un difeomorfismo con su imagen, siendo  $\exp_q = \mathbf{x} \circ \bar{e}_x \circ (d\mathbf{x}_x)^{-1}$ , y  $V_0$  es un entorno uniformemente normal de  $p$ .  $\square$



## Capítulo 3

# Teorema de Hopf-Rinow

Ya hemos visto en el capítulo anterior que las curvas más cortas entre dos puntos de una superficie son geodésicas, y que el inverso se cumple localmente. En este capítulo veremos bajo qué condiciones podemos garantizar que dados dos puntos  $p, q \in S$  exista una geodésica mínima que los una.

### 3.1. Distancia intrínseca

**Proposición 3.1.1.** *Dados dos puntos  $p$  y  $q \in S$  de una superficie regular (conexa)  $S$ , existe una curva parametrizada diferenciable a trozos que une a  $p$  con  $q$ .*

*Demostración.* Ya que  $S$  es conexo y localmente conexo por caminos, existe una curva continua  $\alpha : [a, b] \rightarrow S$  tal que  $\alpha(a) = p$  y  $\alpha(b) = q$ . Sean  $t \in [a, b]$  y  $I_t$  un intervalo abierto en  $[a, b]$  que contiene a  $t$ , tal que  $\alpha(I_t)$  es un entorno coordenado de  $\alpha(t)$ . La unión  $\bigcup_{t \in [a, b]} I_t$ , cubre  $[a, b]$  y, por compacidad, existe un subrecubridor finito de esta  $I_1, \dots, I_n$ . Por lo tanto, es posible descomponer  $I$  mediante los puntos  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = b$  tal que  $[t_i, t_{i+1}]$  está contenido en algún  $I_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Esto implica que  $\alpha([t_i, t_{i+1}])$  está contenido en un entorno coordenado.

Como  $p = \alpha(t_0)$  y  $\alpha(t_1)$  están en el mismo entorno coordenado  $\mathbf{x}(U) \subset S$ , es posible unirlos mediante una curva diferenciable, que será la imagen por  $\mathbf{x}$  de una curva diferenciable en  $U \subset \mathbb{R}^2$  que une  $\mathbf{x}^{-1}(\alpha(t_0))$  y  $\mathbf{x}^{-1}(\alpha(t_1))$ . Siguiendo este procedimiento, unimos  $p = \alpha(t_i)$  y  $\alpha(t_{i+1})$ ,  $i = 0, \dots, k$ , mediante una curva diferenciable. De esta forma, conseguimos una curva diferenciable por trozos que une  $p = \alpha(t_0)$  y  $q = \alpha(t_{k+1})$ , y concluimos la demostración de la proposición.  $\square$

Ahora, sean  $p, q \in S$  dos puntos de la superficie regular  $S$ . Denotamos por  $\alpha_{p,q}$  la curva parametrizada diferenciable a trozos que une  $p$  con  $q$  y por  $L(\alpha_{p,q})$  su longitud. Si definimos como  $\Omega_{pq}$  el conjunto que contiene todos

los  $\alpha_{p,q}$ , sabemos por la proposición (3.1.1) que este conjunto es diferente del vacío. Por lo tanto, podemos dar la siguiente definición:

**Definición 3.1.1.** La distancia (intrínseca)  $d(p, q)$  del punto  $p \in S$  al punto  $q \in S$  es el número

$$d(p, q) = \inf\{L(\alpha) \mid \alpha \in \Omega_{pq}\}$$

donde se toma el ínfimo sobre todas las curvas parametrizadas y diferenciables a trozos que unen  $p$  y  $q$ .

**Proposición 3.1.2.** Dado un punto  $p \in S$ , siendo  $S$  una superficie regular (conexa), y  $0 < \delta \leq \text{injrad}(p)$ , sea la bola geodésica  $B_\delta(p) \subset S$ . Entonces para todo  $q \in S$  tal que  $q \notin B_\delta(p)$  se cumple  $d(p, q) \geq \delta$ .

*Demostración.* Sea  $\alpha : [a, b] \rightarrow S$  una curva parametrizada regular a trozos cualquiera que une  $p$  y  $q$ . Como  $\alpha([a, b])$  es conexo y  $q \notin B_\delta(p)$ , existe un punto  $t_0 \in [a, b]$  tal que  $\alpha(t_0)$  está en la frontera de  $B_\delta(p)$ . Por lo tanto,  $L(\alpha) \geq \delta$  para cualquier  $\alpha \in \Omega_{pq}$ , y esto a su vez implica que

$$d(p, q) \geq \delta.$$

□

**Proposición 3.1.3.** Esta función,  $d$ , verifica las propiedades de una distancia:

- (i)  $d(p, q) \geq 0$ .
- (ii)  $d(p, q) = d(q, p)$ .
- (iii)  $d(p, q) = 0$  si y solo si  $p = q$ .
- (iv)  $d(p, q) + d(q, r) \geq d(p, r)$ .

*Demostración.* (i) Esta propiedad viene dada por que el ínfimo de números positivos, es positivo o cero.

(ii) Es inmediato, ya que de cada curva parametrizada

$$\alpha : [a, b] \rightarrow S,$$

con  $\alpha(a) = p$ ,  $\alpha(b) = q$ , podemos conseguir otra curva parametrizada  $\tilde{\alpha} : [a, b] \rightarrow S$ , definido por  $\tilde{\alpha}(t) = \alpha(a - t + b)$ . Está claro que  $\tilde{\alpha}(a) = q$ ,  $\tilde{\alpha}(b) = p$  y que  $L(\tilde{\alpha}) = L(\alpha)$ .

(iii) Sean  $p = q$ . Entonces, si cogemos la curva constante  $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ , dado por  $\alpha(t) = p$ ,  $t \in [a, b]$ , tenemos  $L(\alpha) = 0$ ; por tanto,  $d(p, q) = 0$ . Para demostrar la otra implicación, supongamos que  $d(p, q) = 0$  y  $p \neq q$ . Sea  $V$  un entorno de  $p$  en  $S$  tal que  $q \notin V$ , y todo punto en

$V$  está unido a  $p$  por una única geodésica. Sea  $B_\delta(p) \subset V$  la bola geodésica centrada en  $p$  y radio  $\delta$  contenido en  $V$ . Por la definición de ínfimo, dado un  $\varepsilon > 0$ ,  $0 < \varepsilon < \delta$ , existe una curva parametrizada diferenciable a trozos  $\alpha : [a, b] \rightarrow S$  que une  $p$  con  $q$  y  $L(\alpha) < \varepsilon$ . Pero por la proposición (3.1.2) sabemos que  $d(p, q) \geq \delta > \varepsilon$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $p = q$ .

- (iv) Sean  $p, q, r \in S$ ; si  $\alpha$  es una curva diferenciable a trozos en  $S$  de  $p$  a  $q$ , y  $\beta$  una curva diferenciable a trozos en  $S$  de  $q$  a  $r$ , la curva  $\alpha * \beta$  que obtenemos cruzando primero  $\alpha$  y después  $\beta$  (con una parametrización adecuada) es una curva parametrizada diferenciable a trozos que une  $p$  y  $r$  con  $L(\alpha * \beta) = L(\alpha) + L(\beta)$ . Considerando el ínfimo en  $\alpha$  y  $\beta$ , y teniendo en cuenta que  $d(p, r)$  es el ínfimo de las longitudes de todas las curvas que unen  $p$  y  $r$ , tenemos la desigualdad triangular

$$d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r).$$

□

Ahora veremos que la topología inducida por la distancia  $d$  y la topología usual de  $S$  son la misma.

**Proposición 3.1.4.** *Sea  $S$  una superficie regular con la topología usual  $\tau$ , y sea  $\tau_d$  la topología inducida por la distancia intrínseca  $d$  definida anteriormente. Entonces,  $\tau = \tau_d$ .*

*Demostración.* Para demostrar que  $\tau$  y  $\tau_d$  son la misma topología basta con ver que sus abiertos básicos son equivalentes, en este caso veremos que no solo son equivalentes, sino que son iguales.

$$\exp_p(B_p(O, \delta)) = B_\delta(p) = B_d(\delta, p)$$

Está claro que cualquier punto  $q \in B_\delta(p)$  está unido a  $p$  por una geodésica de longitud inferior a  $\delta$ , lo cual implica que  $d(p, q) < \delta$ . Por lo tanto  $B_\delta(p) \subset B_d(\delta, p)$ .

Por otra parte, sea  $q \in B_d(\delta, p)$ , sea  $\sigma$  la geodésica mínima de  $p$  a  $q$ . Como su longitud es a lo sumo  $\delta$ , podemos escribirla como  $\sigma(t) = \exp_p(tv)$  con  $\|v\| < \delta$ , y  $q = \exp_p(v) \in \exp_p(B_p(O, \delta)) = B_\delta(p)$ , y así conseguimos lo que necesitábamos. □

## 3.2. Teorema de Hopf-Rinow

**Definición 3.2.1.** Se dice que una superficie regular  $S$  es completa si para cada punto  $p \in S$ , cualquier geodésica parametrizada  $\gamma : [0, \varepsilon] \rightarrow S$  de  $S$ , que comience en  $p = \gamma(0)$ , puede prolongarse a una geodésica parametrizada

$\bar{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow S$ , definida en toda la recta real  $\mathbb{R}$ .

En otras palabras,  $S$  es completa cuando la aplicación  $exp_p : T_p(S) \rightarrow S$  está definida para cada  $v \in T_p(S)$ , y esto sucede en todos los puntos  $p \in S$ .

**Definición 3.2.2.** A una curva diferenciable a trozos  $\sigma : [a, b] \rightarrow S$  en una superficie  $S$  se le llama mínima si su longitud es menos o igual a cualquier otra curva diferenciable a trozos en  $S$  con los mismos extremos, esto es, si y solo si  $L(\sigma) = d(\sigma(a), \sigma(b))$ . La curva  $\sigma$  es localmente mínima si para todo  $t \in [a, b]$  existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\sigma|_{[t-\varepsilon, t+\varepsilon]}$  es mínima.

**Teorema 3.2.1.** (Teorema básico de Hopf-Rinow): Sea  $S$  una superficie geodésicamente completa en el punto  $p$ , entonces, para un punto cualquiera  $q \in S$ , existe una geodésica mínima que une  $p$  y  $q$ .

*Demostración.* Sea  $r = d(p, q)$  la distancia entre los puntos  $p$  y  $q$ . Sea  $B_p(O, \delta) \subset T_p(S)$  un disco de radio  $\delta$ , centrado en el origen  $O$  del plano tangente  $T_p(S)$  y contenido en un entorno  $U \subset T_p(S)$  del punto  $O$ , en el que  $exp_p$  es un difeomorfismo. Sea  $B_\delta(p)$  la bola geodésica centrada en  $p$  y radio  $\delta$ .

Obsérvese que la frontera  $\partial B_\delta(p) = \Sigma$  (círculo geodésico de radio  $\delta$  y centro  $p$ ) es compacta pues es la imagen continua del conjunto compacto  $\partial B_p(O, \delta) \subset T_p(S)$ .

Si  $x \in \Sigma$ , la función continua  $d(x, q)$  alcanza el mínimo en el punto  $x_0$  del conjunto compacto  $\Sigma$ . Podemos escribir  $x_0$  de la forma

$$x_0 = exp_p(\delta v), \|v\| = 1, v \in T_p(S)$$

Sea  $\gamma_v$  la geodésica parametrizada por la longitud de arco definida por,  $\gamma_v(t) = exp_p(tv)$ . Como  $S$  es completa en  $p$ ,  $\gamma_v$  está definida para cada  $t \in \mathbb{R}$ . En particular,  $\gamma_v$  está definida en el intervalo  $[0, r]$ . Si probamos que  $\gamma_v(r) = q$ , entonces  $\gamma_v$  debe ser una geodésica que une  $p$  y  $q$ , y esta será mínima, ya que  $l(\gamma_v) = r = d(p, q)$ . Con esto, la demostración quedaría terminada.

Definimos

$$A = \{t \in [0, r] \mid d(\gamma_v(t), q) = r - t\}$$

Está claro que el conjunto  $A \neq \emptyset$  ya que  $0 \in A$ . Además, como  $\gamma_v(\delta) = x_0$   $\delta \in A$ . Observemos que si  $t \in A$ , entonces

$$r = t + d(\gamma_v(t), q) \geq d(p, \gamma_v(t)) + d(\gamma_v(t), q) \geq r$$

lo cual implica que  $t = d(p, \gamma_v(t))$ . Ahora veremos que si  $t_0 \in A$ , entonces  $[0, t_0] \subset A$ . Sea  $t < t_0$  y notemos que

$$\begin{aligned} r &\leq d(p, \gamma_v(t)) + d(\gamma_v(t), q) \leq d(p, \gamma_v(t)) + d(\gamma_v(t), \gamma_v(t_0)) + d(\gamma_v(t_0), q) \\ &\leq t + t_0 - t + d(\gamma_v(t_0), q) \leq t_0 + d(\gamma_v(t_0), q) = d(p, q) = r. \end{aligned}$$

Esto implica que  $d(p, \gamma_v(t)) + d(\gamma_v(t), q) = r$  y  $t = d(p, \gamma_v(t))$ , y esto a su vez demuestra que  $t \in A$ .

Podemos decir que  $A$  es cerrado en  $[0, r]$  ya que  $t \mapsto d(\gamma_v(t), q)$  es continuo.

Ahora demostraremos que si  $t_0 \in A$  y  $t_0 < r$ , entonces  $t_0 + \delta' \in A$ , donde  $\delta' > 0$  suficientemente pequeño.

Sea  $B_{\delta'}(O)$  un disco del plano tangente  $T_{\gamma_v(t_0)}(S)$ , con centro en el origen  $O$  de este plano y contenido en entorno  $U'$ , en donde  $\exp_{\gamma_v(t_0)}$  es un difeomorfismo. Sean  $B_{\delta'}(\gamma_v(t_0)) = \exp_{\gamma_v(t_0)}(B_{\delta'}(O))$  y  $\Sigma' = \partial B_{\delta'}(\gamma_v(t_0))$ . Si  $x' \in \Sigma'$ , la función continua  $d(x', q)$  alcanza su mínimo en  $x'_0 \in \Sigma'$ . Como en el caso anterior tenemos que  $d(\gamma_v(t_0), q) = \delta' + d(x'_0, q)$ .

Como  $t_0 \in A$ , tenemos que  $d(\gamma_v(t_0), q) = r - t_0$ . Por lo tanto,

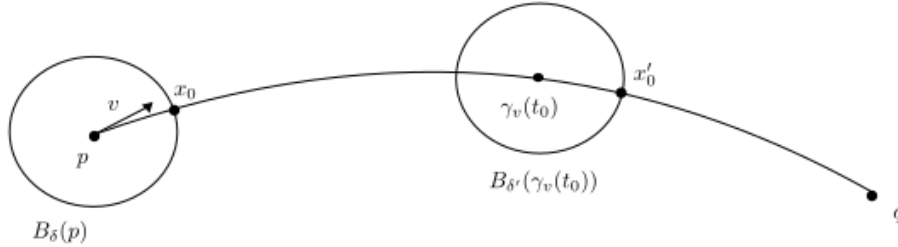
$$d(x'_0, q) = r - t_0 - \delta' \tag{3.1}$$

Además, puesto que

$$d(p, x'_0) \geq d(p, q) - d(q, x'_0),$$

obtenemos de (3.1)

$$d(p, x'_0) \geq r - (r - t_0) + \delta' = t_0 + \delta'.$$



Obsérvese ahora que la curva que va de  $p$  a  $\gamma_v(t_0)$  a través de  $\gamma_v$  y de  $\gamma_v(t_0)$  a  $x'_0$  a través de un radio geodésico de  $B_{\delta'}(\gamma_v(t_0))$  es de longitud  $t_0 + \delta'$ . Como  $d(p, x'_0) \geq t_0 + \delta'$ , esta curva, que une  $p$  y  $x'_0$ , tiene longitud mínima. Se deduce entonces ((2.3.1) (ii)) que es una geodésica, luego es regular en todos sus puntos. Por lo tanto, debe coincidir con  $\gamma_v$ , esto implica que  $x'_0 = \gamma_v(t_0 + \delta')$ . Puede así reescribirse la ecuación (3.1)

$$d(\gamma_v(t_0 + \delta'), q) = r - (t_0 + \delta'),$$

y con esto demostramos que  $t_0 + \delta' \in A$  y a su vez llegamos a lo que queríamos.  $\square$

**Teorema 3.2.2.** (Teorema de Hopf-Rinow): Sea una superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$ . Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i)  $S$  es completa (con la topología  $\tau_d$ );
- (ii) Para todo  $p \in S$  la aplicación exponencial  $\exp_p$  está definida en todo  $T_p(S)$  (Complejitud geodésica);
- (iii) Existe un punto  $p \in S$  para el cual la aplicación exponencial  $\exp_p$  está definida en todo  $T_p(S)$ .
- (iv) Todo subconjunto cerrado y acotado (respecto de  $d$ ) de  $S$  es compacto. (Heine-Borel)

*Demostración.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) Por la definición (3.2.1), es suficiente demostrar que para todo  $p \in S$  y  $v \in T_p(S)$  la geodésica  $\sigma_v$  está definida en todo  $\mathbb{R}$ . Sea

$$t_0 = \sup\{t > 0 \mid \sigma_v \text{ definida en } [0, t]\},$$

y asumamos por contradicción que  $t_0$  es finita. Como

$$d(\sigma_v(s), \sigma_v(t)) \leq L(\sigma_v|_{[s,t]}) = \|v\| |s - t|$$

para todo  $0 \leq s \leq t \leq t_0$ , si  $t_k \subset [0, t_0)$  es creciente y tiende a  $t_0$ , la secuencia  $\{\sigma_v(t_k)\}$  es Cauchy en  $S$  con respecto a la distancia  $d$ , y por tanto, converge a un punto  $q \in S$  independientemente de la secuencia que elijamos. Esto lleva a que  $\sigma_v(t_0) = q$ , y conseguimos una aplicación continua de  $[0, t_0]$  a  $S$ . Sea  $V$  un entorno uniformemente normal de  $q$ , para el cual su radio de inyección es  $\varepsilon > 0$ . Para un  $k$  suficientemente grande tenemos  $|t_k - t_0| < \frac{\delta}{\|v\|}$  y  $\sigma_v(t_k) \in V$ . En particular, las geodésicas radiales que empiezan en  $\sigma_v(t_k)$  pueden ser prolongadas al menos a una longitud  $\delta$ ; ya que  $L(\sigma_v|_{[t_k, t_0]}) = |t_0 - t_k| \|v\| < \delta$ , la geodésica  $\sigma_v$  puede ser prolongada más allá de  $t_0$ , lo cual es contradictorio. Por lo tanto,  $t_0 = +\infty$ ; de la misma forma, podemos demostrar que  $\sigma_v$  está definido en  $(-\infty, 0]$ , y así quedaría demostrado.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Trivial.

(iii)  $\Rightarrow$  (iv) Es una consecuencia fácil del teorema (3.2.1). Por la proposición (3.1.4) sabemos que

$$\exp_p(\bar{B}_p(O, \delta)) = \bar{B}_\delta(p) = \bar{B}_d(\delta, p).$$

Ahora sabemos que toda bola cerrada  $\bar{B}_d(\delta, p)$  es compacta dado que es la imagen de una bola cerrada en  $\mathbb{R}^2$ . Dado que cualquier subconjunto acotado de  $S$  está dentro de una de estas bolas  $\bar{B}_d(\delta, p)$ , y sabiendo que un cerrado dentro de un compacto es compacto, se cumple la propiedad de Heine-Borel.



(iv)  $\Rightarrow$  (i) Sea  $\{p_n\} \subset S$  una sucesión de Cauchy para  $d$ . En particular, es un subconjunto acotado de  $S$ , y para cualquier  $q \in S$  podemos encontrar  $\delta > 0$  tal que  $\{p_n\} \subset \bar{B}_d(\delta, p)$ . Por hipótesis, la bola cerrada  $\{p_n\} \subset \bar{B}_d(\delta, p)$  es compacta, por lo tanto, existe una subsucesión  $\{p_{n_k}\}$  que converge a un punto  $p \in \bar{B}_d(\delta, p)$ . Pero cuando una subsucesión converge a  $p \in S$  toda la sucesión de Cauchy  $\{p_n\}$  converge al mismo punto, y con esto queda demostrado que  $S$  es completa.  $\square$

**Observación 3.2.1.** No todas las geodésicas son mínimas. Tenemos como contraejemplo el ejercicio 5 del apéndice A

**Corolario 3.2.3.** *Sea  $S$  una superficie completa. Entonces, para todo punto  $p \in S$  la aplicación exponencial  $\exp_p : T_p(S) \rightarrow S$  es sobreyectiva sobre  $S$ .*

*Demostración.* Sean un punto  $q \in S$  y  $r = d(p, q)$ , entonces  $q = \exp_p(rv)$ , donde  $v = \gamma'(0)$  es el vector tangente a una geodésica mínima  $\gamma$  parametrizada por la longitud de arco y que une  $p$  y  $q$ .  $\square$

**Observación 3.2.2.** Podemos ver un ejemplo de un espacio completo en el ejercicio 3 del apéndice A, donde demostramos que  $\mathbb{H}^2$  es completa.

**Proposición 3.2.4.** *Una superficie cerrada  $S \subset \mathbb{R}^3$  es completa. En particular, una superficie compacta es completa.*

*Demostración.* Sea  $\gamma : [0, \varepsilon) \rightarrow S$  una geodésica parametrizada de  $S$ ,  $\gamma(0) = p \in S$ , podemos asumir, sin pérdida de generalización, que esta parametrizada por la longitud de arco. Tenemos que demostrar que es posible extender  $\gamma$  a una geodésica  $\bar{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow S$ , definida en toda la recta real  $\mathbb{R}$ . Obsérvese primero que cuando  $\bar{\gamma}(t_0)$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ , está definido, entonces, por el teorema de existencia y unicidad de las geodésicas (1.3.2), es posible extender  $\bar{\gamma}$  a un entorno de  $t_0$  en  $\mathbb{R}$ . Por lo tanto, el conjunto de todos los  $t \in \mathbb{R}$  donde  $\bar{\gamma}$  está definido es abierto en  $\mathbb{R}$ . Si pudiéramos demostrar que este conjunto es cerrado en  $\mathbb{R}$  (el cual es conexo), sería posible definir  $\bar{\gamma}$  para todo  $\mathbb{R}$ , y habríamos concluido con la demostración.

Asumamos que,  $\bar{\gamma}$  está definido para  $t < t_0$  y veamos qué  $\bar{\gamma}$  está definido para  $t = t_0$ . Consideremos la sucesión  $\{t_n\} \rightarrow t_0$ , tal que  $t_n < t_0$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Primero vamos a demostrar que la sucesión  $\{\bar{\gamma}(t_n)\}$  converge en  $S$ . En efecto, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0$  tal que si  $n, m > n_0$ , entonces  $|t_n - t_m| < \varepsilon$ . Sea  $\bar{d}$  la distancia en  $\mathbb{R}^3$ , y nótese que si  $p, q \in S$ , entonces  $\bar{d}(p, q) \leq d(p, q)$ . Por tanto,

$$\bar{d}(\bar{\gamma}(t_n), \bar{\gamma}(t_m)) \leq d(\bar{\gamma}(t_n), \bar{\gamma}(t_m)) \leq |t_n - t_m| < \varepsilon,$$

donde la segunda desigualdad viene de la definición de  $d$  y el hecho de que  $|t_n - t_m|$  es igual a la longitud de arco de la curva  $\bar{\gamma}$  entre  $t_n$  y  $t_m$ . Esto

implica que  $\{\bar{\gamma}(t_n)\}$  es una sucesión de Cauchy en  $\mathbb{R}^3$ ; por lo tanto, converge a un punto  $q \in \mathbb{R}^3$ . Como  $q$  es un punto límite de  $\{\bar{\gamma}(t_n)\}$  y  $S$  es cerrado,  $q \in S$ , lo cual prueba nuestra suposición.

Ahora sean un entorno de  $q$   $W$  uniformemente normal y  $0 < \delta \leq \text{inj rad}(q)$  que le corresponde por la definición (2.3.1). Sean  $\bar{\gamma}(t_n), \bar{\gamma}(t_m) \in W$  puntos tales que  $|t_n - t_m| < \delta$ , y sea  $\gamma$  la única geodésica con  $L(\gamma) < \delta$  que une  $\bar{\gamma}(t_n)$  con  $\bar{\gamma}(t_m)$ . Está claro que  $\bar{\gamma}$  coincide con  $\gamma$ . Como  $\exp_{\bar{\gamma}(t_n)}$  es un difeomorfismo en  $B_{\bar{\gamma}(t_n)}(O, \delta)$  y  $\exp_{\bar{\gamma}(t_n)}(B_{\bar{\gamma}(t_n)}(O, \delta)) \supset W$ ,  $\gamma$  extiende  $\bar{\gamma}$  a partir de  $q$ . Por lo tanto,  $\bar{\gamma}$  está definido en  $t = t_0$ , lo cual concluye la demostración.  $\square$

**Observación 3.2.3.** Hay superficies que son completas, pero no cerradas, podemos ver un contraejemplo en el ejercicio 7, donde veremos una superficie no cerrada en  $\mathbb{R}^3$  que es completa.

**Proposición 3.2.5.** *Las isometrías locales conservan la completitud.*

*Demostración.* Sea una isometría local  $\phi : S \rightarrow V$ . Supongamos que  $S$  es completa, esto es, para todo  $p \in S$ , cualquier geodésica parametrizada, que comience en  $p = \gamma(0)$  puede prolongarse a una geodésica parametrizada  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow S$  definida en toda la recta real  $\mathbb{R}$ . Hemos visto en los capítulos anteriores que las isometrías locales conservan las geodésicas. Ahora, sea  $q \in \phi(S) \subset V$ , entonces existe  $p \in S$  tal que  $q = \phi(p)$ . Por lo tanto, al aplicar la isometría local  $\phi$  a las geodésicas que comienzan en  $p$  y están definidas en toda la recta real  $\mathbb{R}$  obtendremos las geodésicas que comienzan en  $q$  y están definidas en toda la recta real  $\mathbb{R}$ . Y por el teorema de Hopf-Rinow (3.2.2)  $V$  es una superficie completa.  $\square$

**Ejemplo 3.2.1.** Un ejemplo claro son el plano y el cilindro, entre las que es posible definir una isometría local y los dos son completos, en este caso, es fácil comprobar que el cilindro es completo ya que es una superficie cerrada. Pero podemos ver otro ejemplo en el ejercicio 7 del apéndice A donde usaremos esta proposición para dar una superficie que no es cerrada, pero si es completa.

## Apéndice A

# Ejercicios resueltos

**Ejercicio 1. Superficies de Liouville.** Las superficies de Liouville son aquellas superficies para las que es posible obtener un sistema de coordenadas locales  $\mathbf{x}(u, v)$  tal que los coeficientes de la primera forma fundamental se escriben

$$E = G = f(u) + g(v), \quad F = 0,$$

donde  $f$  y  $g$  son funciones diferenciables. Las superficies de Liouville generalizan las superficies de revolución. Demuéstrese que

- (i) Si  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , es el ángulo que forma una geodésica con la curva  $v = v_0 = \text{cte.}$ , entonces se cumple

$$f(u)\text{sen}^2\theta - g(v)\text{cos}^2\theta = \text{const.} \quad (\text{A.1})$$

(Notese que ésta es la relación análoga a la de Clairaut para superficies de Liouville.)

- (ii) Las geodésicas de una superficie de Liouville cumplen

$$\int \frac{du}{\sqrt{f(u) - c}} = \pm \int \frac{dv}{\sqrt{g(v) + c}} + d,$$

donde  $c$  y  $d$  son constantes que dependen de las condiciones iniciales.

*Solución.* (i) Sea  $\mathbf{x}(u, t)$  una parametrización de la superficie de Liouville. Observemos que  $\frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{f(u)+g(v)}}$  es el vector unitario tangente a la curva  $\sigma(t) = \mathbf{x}(u(t), v_0)$ , además como  $F = 0$ ,  $\mathbf{x}_u$  y  $\mathbf{x}_v$  son perpendiculares en todos los puntos de la superficie. Asumimos que  $\gamma(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$  es de longitud de arco, tenemos

$$(f + g)((u')^2 + (v')^2) = 1 \quad (\text{A.2})$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\langle \gamma', \mathbf{x}_u \rangle}{\sqrt{f(u) + g(v)}} = \frac{u'}{\sqrt{f(u) + g(v)}} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = u' \sqrt{f(u) + g(v)} \\ \operatorname{sen} \theta &= \frac{\langle \gamma', \mathbf{x}_v \rangle}{\sqrt{f(u) + g(v)}} = \frac{v'}{\sqrt{f(u) + g(v)}} \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = v' \sqrt{f(u) + g(v)}\end{aligned}\tag{A.3}$$

Ahora como  $\gamma$  es una geodésica cumple las ecuaciones (1.7),

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(f(u) + g(v))u' &= \frac{1}{2}(f'(u)((u')^2 + (v')^2)) \\ \frac{d}{dt}(f(u) + g(v))v' &= \frac{1}{2}(g'(v)((u')^2 + (v')^2))\end{aligned}$$

Sabiendo que  $\gamma$  es de longitud de arco, utilizando (A.2), tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(f(u) + g(v))u' &= \frac{1}{2} \left( f'(u) \left( \frac{1}{f(u)+g(v)} \right) \right) \\ \frac{d}{dt}(f(u) + g(v))v' &= \frac{1}{2} \left( g'(v) \left( \frac{1}{f(u)+g(v)} \right) \right)\end{aligned}$$

Liberando  $f'(u)$  y  $g'(v)$  y pasándolo todo a un lado, tenemos

$$\begin{aligned}f'(u) - 2(f(u) + g(v))\frac{d}{dt}(f(u) + g(v))u' &= 0 \\ g'(v) - 2(f(u) + g(v))\frac{d}{dt}(f(u) + g(v))v' &= 0\end{aligned}\tag{A.4}$$

Teniendo en cuenta todo esto, para ver que se cumple (A.1), modificaremos la expresión haciendo uso de las ecuaciones (A.3) y las fórmulas trigonométricas.

$$\begin{aligned}f(u)\operatorname{sen}^2 \theta - g(v)\cos^2 \theta &= f(u) - f(u)\cos^2 \theta - g(v)\cos^2 \theta \\ &= f(u) - (f(u) + g(v))\cos^2 \theta = f(u) - ((f(u) + g(v))(u')^2)\end{aligned}$$

Para que esto sea constante su derivada ha de ser cero

$$\begin{aligned}f'(u)u' - 2(f(u) + g(v))u'\frac{d}{dt}(f(u) + g(v))u' \\ = u'(f'(u) - 2(f(u) + g(v))\frac{d}{dt}(f(u) + g(v))u')\end{aligned}$$

Esta claro que como  $\gamma$  cumple la primera ecuación de (A.4) la derivada que vemos arriba es cero, y por lo tanto queda demostrado este primer apartado.

**Observación A.0.1.** El recíproco será cierto cuando  $u' \neq 0$ . Pero veamos qué pasa en el caso de que  $u = \text{constante}$ , si esto es así la ecuación (A.2) nos queda

$$(f(u) + g(v))(v')^2 = 1$$

y con esto las ecuaciones (A.4) nos quedan:  $f'(u) = 0$  y  $g'(v) = 0$ . Por lo tanto, para que  $\gamma$  sea una geodésica en estas condiciones  $f$  y  $g$  a lo largo de  $\gamma$  tienen que ser constantes.

- (ii) En el apartado anterior hemos demostrado que al ser  $\gamma$  una geodésica se cumple (A.1). Ahora si modificamos esta expresión de la misma forma que anteriormente conseguimos

$$f(u) - c = (f(u) + g(v))^2 (u')^2 \Rightarrow u' = \pm \frac{\sqrt{f(u) - c}}{f(u) + g(v)} = \frac{du}{dt}$$

sustituyendo esta expresión en (A.2), obtenemos

$$v' = \pm \frac{\sqrt{g(v) + c}}{f(u) + g(v)} = \frac{dv}{dt}.$$

Ahora, haremos un cambio de variable,  $u = u(v)$  siendo  $v' \neq 0$  y mediante la regla de la cadena, conseguimos

$$\frac{du}{dv} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{dv} = \pm \frac{\sqrt{f(u) - c}}{\sqrt{g(v) + c}}$$

Y por último ponemos a un lado lo que está en función de  $u$  y en el otro lado lo que está en función de  $v$  e integramos los dos lados, de esta forma, tenemos lo que queríamos

$$\int \frac{du}{\sqrt{f(u) - c}} = \pm \int \frac{dv}{\sqrt{g(v) + c}} + d,$$

□

**Ejercicio 2. (Mapa  $u$ -Clairaut (simetricamente Mapa  $v$ -Clairaut),** es un caso particular del ejercicio anterior) Sea la superficie parametrizada  $(U, \mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v))$  con los coeficientes de la primera forma fundamental  $E = E(u)$ ,  $F = 0$  y  $G = G(u)$ .

- (i) Sea

$$\gamma(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$$

una geodésica de longitud de arco. Sea también  $\theta = \theta(t)$  el ángulo que forman el vector tangente  $T(s) = \gamma'(t)$  con el vector  $\mathbf{x}_v$ . Probar que

$$\sqrt{G} \cos \theta = cte. \tag{A.5}$$

a lo largo de  $\gamma$ .

- (ii) Para la curva anterior  $\gamma(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ , también se cumple lo siguiente:

$$\begin{cases} u' = \pm \frac{\sqrt{G-c^2}}{\sqrt{EG}}, \\ v' = \frac{c}{G} \end{cases} \tag{A.6}$$

donde  $c$  es una constante. Y recíprocamente, si  $v' \neq 0$ , cuando las ecuaciones (A.6) se cumplen, entonces  $\gamma$  es una curva geodésica.

- (iii) Demostrar que las curvas coordenadas  $\gamma(u) = \mathbf{x}(u, v_0)$  son geodésicas.
- (iv) Demostrar que para que las curvas coordenadas  $\gamma(v) = \mathbf{x}(u_0, v)$  sean geodésicas tienen que cumplir

$$\frac{\partial G}{\partial u} = 0$$

a lo largo de la curva.

- (v) Demostrar que si la curva  $\alpha(u) = \mathbf{x}(u, v(u))$  es una curva geodésica entonces se cumple

$$v(u) = \pm \int \sqrt{\frac{E}{G(G - c^2)}} \quad (\text{A.7})$$

*Solución.* Aunque a primera vista no es algo evidente, los mapas u-Clairaut son superficies de Liouville. Para comprobar esto, es fácil encontrar una reparametrización que haga que  $E = G$ ,  $\mathbf{y}(u, v) = \mathbf{x}(h(u), v)$ . Por lo tanto, estas superficies cumplen las ecuaciones y propiedades mencionadas en el ejercicio anterior. Las cuales usaremos en los siguientes apartados:

- (i) Como los Mapas u-Clairaut son superficies de Liouville cumplen la ecuación (A.1) donde  $\theta$  es el ángulo que forma la geodésica con el vector  $\mathbf{y}_u$ . En este caso, como el ángulo que nos dan es el que está entre la curva y el vector  $\mathbf{y}_v$  la ecuación quedaría de la siguiente forma:

$$g(u) \cos^2 \theta = cte. \Rightarrow G(h(u)) \cos^2 \theta = cte \Rightarrow \sqrt{G(h(u))} \cos \theta = cte.$$

Con esto demostramos que se cumple (A.5).

- (ii) Sabiendo que

$$\cos \theta = \frac{\langle \gamma', \mathbf{x}_v \rangle}{\sqrt{G(u)}} = v' \sqrt{G(u)}$$

lo sustituimos en (A.5) y obtenemos

$$G(u)v' = c \Rightarrow v' = \frac{c}{G(u)}$$

Para obtener la otra ecuación partimos de que  $\gamma$  está escrita por la longitud de arco  $(u')^2 E + (v')^2 G = 1$ . Sustituyendo aquí la expresión que acabamos de sacar para  $v'$  tenemos

$$(u')^2 E = 1 - \frac{c^2}{G} \Rightarrow (u')^2 = \frac{G - c^2}{GE} \Rightarrow u' = \pm \frac{\sqrt{G - c^2}}{\sqrt{GE}}$$

y por lo tanto se cumple (A.6). Para ver que el recíproco también se cumple, es suficiente con sustituir  $u'$  y  $v'$  por las expresiones que hemos conseguido, comprobando que se cumplen las ecuaciones (1.7).

(iii) Supongamos que  $\gamma$  está escrita por la longitud de arco, como  $v' = 0$  tenemos que  $u' = \pm \frac{1}{\sqrt{E}}$  y podemos comprobar que se cumplen las ecuaciones (1.7).

(iv) Supongamos que  $\gamma$  está escrita por la longitud de arco, como  $u' = 0$  tenemos que  $v' = \frac{1}{\sqrt{G}}$ , ahora veamos que tiene que pasar para que se cumplan las ecuaciones (1.7). La segunda ecuación se cumple siempre y para la primera:

$$0 = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} (v')^2 \Leftrightarrow \frac{\partial G}{\partial u} = 0.$$

(v) Supongamos, sin pérdida de generalización, que  $\alpha$  está escrita por la longitud de arco, y suponiendo que  $v' \neq 0$  (ya hemos analizado ese caso)  $\alpha$  cumple las ecuaciones (A.6) y por tanto tenemos

$$\frac{dv}{du} = \frac{dv}{dt} \frac{dt}{dv} = \frac{c}{G} \left( \pm \sqrt{\frac{G - c^2}{EG}} \right)$$

Ahora si desarrollamos esto, pasamos  $du$  al otro lado e integramos conseguimos (A.7).

□

**Ejercicio 3. (Espacio hiperbólico  $\mathbb{H}^2$ )** Sea  $\mathbb{H}^2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | v > 0\}$ , con la primera forma fundamental

$$E = G = \frac{1}{v^2}, \quad F = 0.$$

Encontrar las ecuaciones que tienen que cumplir las curvas geodésicas (escritas por la longitud de arco) y demostrar que las imágenes de las curvas  $u = cte$  y

$$(u - u_0)^2 + v^2 = r^2 = cte,$$

son las únicas curvas geodésicas de  $\mathbb{H}^2$ . Ver que este espacio es completo, y en cambio si tenemos la primera forma fundamental  $E = G = \frac{1}{v}$  y  $F = 0$  no lo es.

*Solución.* Está claro que el espacio  $\mathbb{H}^2$  es una superficie de Liouville, por lo tanto, las geodésicas de esta superficie cumplen las ecuaciones vistas en el ejercicio 1. En particular, sustituyendo nuestros datos en la ecuación (A.1) y tomando la constante como  $-c^2$  tal que  $c \neq 0$ , conseguimos

$$v = \frac{\cos \theta}{c}$$

En cambio, si  $c = 0$  tenemos que

$$\frac{1}{v} \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}.$$

De aquí conseguimos las geodésicas  $u = cte.$ , que son rectas verticales en  $\mathbb{H}^2$ .

Si  $c \neq 0$  sustituimos nuestros datos en la ecuación (A.4) obtenemos

$$\int du = \pm \int \frac{vc}{\sqrt{1-(vc)^2}} \Rightarrow u - u_0 = \pm \frac{1}{c} \sqrt{1-(vc)^2}$$

$$\Rightarrow (u - u_0)^2 = \frac{1}{c^2}(1 - (vc)^2) \Rightarrow (u - u_0)^2 + v^2 = \frac{1}{c^2}.$$

Esta ecuación representa las circunferencias de radio  $\frac{1}{c}$  centradas en  $(u_0, 0)$ .

Terminaremos esta parte demostrando que todas las geodésicas de  $\mathbb{H}^2$  son de este tipo. Sabemos que por el teorema (1.3.2) dado un punto y un vector, existe una única geodésica que pase por ese punto con ese vector tangente.

Sea  $p \in \mathbb{H}^2$  y  $w \in T_p(\mathbb{H}^2)$ , tenemos dos posibilidades:

- (i) Sea  $w = (0, w_2)$ , en este caso la geodésica que parte de  $p$  con vector tangente  $v$  será la recta vertical, una curva con  $u = cte.$
- (ii) Sea  $w = (w_1, w_2)$  donde  $w_1 \neq 0$ , en este caso haciendo uso de la geometría analítica, definimos el círculo que pasa por el punto  $p$  con vector tangente  $v$ .

Sabiendo  $w$  obtenemos  $n = (w_2, -w_1)$  el vector normal que define la recta que pasa por  $p = (x_0, y_0)$  y por el centro  $(u_0, 0)$ , por tanto

$$(x_0, y_0) + \lambda(w_2, -w_1) = (u_0, 0).$$

De esta ecuación conseguimos el radio  $\lambda = \frac{y_0}{w_1}$  y el centro del círculo  $u_0 = x_0 + \lambda w_2 = x_0 + y_0 \frac{w_2}{w_1}$ , los cuales definen un círculo.

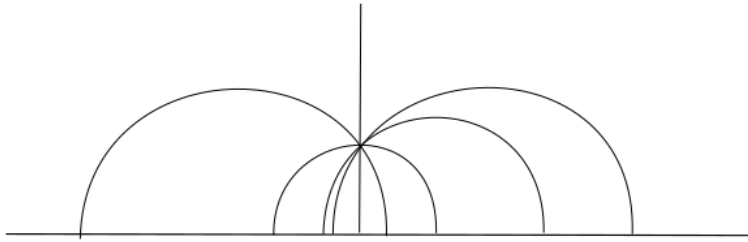


Figura A.1: Geodésicas en el espacio hiperbólico  $\mathbb{H}^2$ .

Ahora, tenemos que comprobar que  $\mathbb{H}^2$  es un espacio completo. Para esto veremos que las geodésicas se extienden infinitamente. Como hemos dicho antes, tenemos dos tipos de geodésicas en este espacio:



- (i) Por un lado tenemos las rectas verticales, su parametrización por la longitud de arco es la siguiente:

$$\gamma(s) = (u_0, e^s)$$

En este caso es evidente que  $\gamma$  está definido en toda la recta real  $\mathbb{R}$ , y por lo tanto se extiende infinitamente.

- (ii) En cuanto a las otras geodésicas no es algo tan evidente, su parametrización más común es esta de aquí:

$$\sigma(t) = \left( \frac{1}{c} \cos(t) + u_0, \frac{1}{c} \operatorname{sen}(t) \right)$$

Pero esta parametrización no está escrita por la longitud de arco, por lo tanto, reparametrizaremos estas curvas teniendo en cuenta que la métrica en este espacio es  $g = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}$ .

Empezaremos por calcular la norma del vector tangente

$$\|\sigma'(t)\| = \left\| \left( -\frac{1}{c} \operatorname{sen}(t), -\frac{1}{c} \cos(t) \right) \right\| = \frac{1}{\operatorname{sen}(t)}$$

Con esto encontraremos el cambio de coordenada

$$s(t) = \int_0^t \frac{1}{\operatorname{sen}(t)} = -\operatorname{arctanh}(\cos(t)) \Rightarrow -\operatorname{tanh}(s) = \cos(t).$$

Y sustituyendo esta expresión conseguimos la reparametrización por la longitud de arco:

$$\gamma(s) = \left( u_0 - \frac{1}{c} \operatorname{tanh}(s), \frac{1}{c} \frac{1}{\operatorname{cosh}(s)} \right)$$

Con esto vemos que las geodésicas en este espacio se extienden infinitamente por lo tanto es un espacio completo.

Acabaremos viendo que con la primera forma fundamental  $E = G = \frac{1}{v}$  y  $F = 0$  el espacio  $V = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | v > 0\}$  no es completa. Para esto basta ver que las rectas parametrizadas por la longitud de arco, (que son geodésicas en este espacio) no están definidas en toda la recta real  $\mathbb{R}$ . Su expresión con la métrica  $g = \frac{du^2 + dv^2}{v}$  de la siguiente forma:

$$\gamma(s) = \left( u_0, \frac{1}{4}(s+2)^2 \right)$$

y esta parametrización no está definida en  $s = -2$  por lo tanto estas geodésicas no se extienden infinitamente.  $\square$

**Ejercicio 4.** Sea  $S$  una superficie,  $C \subset S$  una curva (subconjunto), siendo

$$\gamma = \gamma(s), \quad s \in [0, L],$$

su parametrización por la longitud de arco. Supongamos que tenemos una parametrización general de  $C$

$$\alpha = \alpha(t), \quad t \in [a, b]$$

que no tiene por qué ser de longitud de arco.

- (i) ¿Qué es lo que tiene que cumplir la parametrización  $\alpha$  para que el subconjunto  $C$  sea una curva geodésica? Dicho de otra forma, ¿Qué es lo que tiene que cumplir la parametrización  $\alpha$ , para que la derivada covariante de su reparametrización mediante la longitud de arco  $\gamma$  cumpla

$$\frac{D\gamma'}{ds} = 0$$

- (ii) Entonces, ¿Cómo quedaría el sistema de ecuaciones (1.4) cuando tenemos una parametrización cualquiera  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ ?

*Solución.* (i) La respuesta es que la derivada covariante sea paralela al vector tangente,

$$\frac{D\alpha'}{dt} \parallel \alpha'$$

. Démonos cuenta de que este último generaliza lo anterior en el caso de la parametrización por la longitud de arco, por un lado, cumpliría también,

$$\frac{D\gamma'}{ds} \parallel \gamma'(s),$$

pero por otro lado, como está parametrizado por la longitud de arco, también debe cumplirse

$$\frac{D\gamma'}{ds} \perp \gamma'(s),$$

Y de estos dos conseguimos que

$$\frac{D\gamma'}{ds} = \vec{0},$$

teniendo en cuenta que  $\gamma'(s) \neq \vec{0}$ .

- (ii) Como hemos visto en el apartado anterior, la curva  $C$  parametrizada por  $\alpha$  será una geodésica si y solo si  $\frac{D\alpha'}{dt} \parallel \alpha'$ . Por lo tanto para sacar una ecuación que represente esto, lo primero que haremos será calcular  $\alpha'$  y  $\frac{D\alpha'}{dt}$ .

$$\alpha'(t) = \mathbf{x}_u(u(t), v(t))u'(t) + \mathbf{x}_v(u(t), v(t))v'(t)$$

Y la expresión de  $\frac{D\alpha'}{dt}$  obtenemos de (1.6), nos queda

$$\begin{aligned} \frac{D\alpha'}{dt} &= \mathbf{x}_u(\Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1(v'u') + \Gamma_{22}^1(v')^2 + u'') \\ &\quad + \mathbf{x}_v(\Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2(v'u') + \Gamma_{22}^2(v')^2 + v'') \end{aligned}$$

Por lo tanto, para que  $C$  sea una geodésica tiene que cumplirse

$$\begin{aligned} &(\Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1(v'u') + \Gamma_{22}^1(v')^2 + u'')v' = \\ &(\Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2(v'u') + \Gamma_{22}^2(v')^2 + v'')u' \end{aligned}$$

Con esto conseguimos la ecuación equivalente a (1.4) para cuando tengamos una parametrización cualquiera:

$$\begin{aligned} &(\Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2(v'u') + \Gamma_{22}^2(v')^2 + v'')u' \\ &- (\Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1(v'u') + \Gamma_{22}^1(v')^2 + u'')v' = 0. \end{aligned} \tag{A.8}$$

Esta ecuación coincide con la ecuación que sale de la expresión de la curvatura geodésica (1.12). □

**Ejercicio 5.** Definimos en el paraboloido

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = x^2 + y^2\}$$

la curva  $\delta : \mathbb{R} \rightarrow P$  como  $\delta(t) = (t, 0, t^2)$ . Verifica que  $\delta$  es una geodésica. Demuestra que  $\delta$  no es mínima.

*Solución.* Como  $\delta$  no está parametrizada con la longitud de arco comprobaremos que es un geodésica mediante la curvatura geodésica.

Por lo tanto, lo primero que tenemos que hacer es calcular el vector normal  $N$  de la superficie.

Por un lado, tenemos la parametrización de la superficie:

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$$

Con esto calculamos  $N$

$$N(u, v) = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}(u, v) = \frac{(1, 0, 2u) \times (0, 1, 2v)}{\|(1, 0, 2u) \times (0, 1, 2v)\|} = \frac{(-2u, -2v, 1)}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}$$

Si escribimos la normal a lo largo de  $\delta(t) = \mathbf{x}(t, 0)$  tendríamos:

$$N(t, 0) = \frac{(-2t, 0, 1)}{\sqrt{4t^2 + 1}}$$

Ahora calcularemos la primera y segunda derivada de  $\delta$ , además de la norma de la primera.

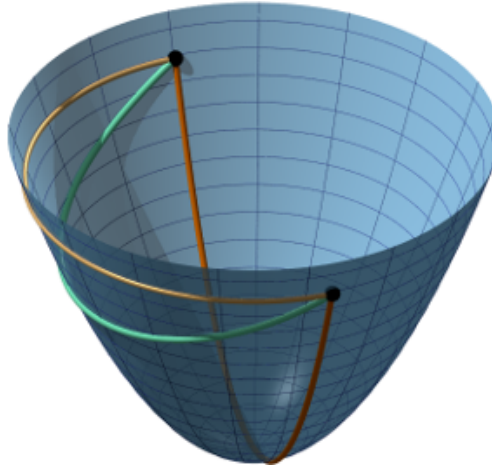
$$\begin{aligned} \delta'(t) &= (1, 0, 2t); \quad \|\delta'(t)\| = \sqrt{4t^2 + 1} \\ \delta''(t) &= (0, 0, 2) \end{aligned}$$

Para terminar con este apartado procederemos a calcular la curvatura geodésica de  $\delta$  y veremos que es 0 en todo  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}\kappa_g &= \frac{1}{\|\delta'\|} \langle \delta'', N \times \delta' \rangle = \frac{1}{\sqrt{4t^2 + 1}} \langle (0, 0, 2), (-2t, 0, 1) \times (1, 0, 2t) \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{4t^2 + 1}} \langle (0, 0, 2), (0, 4t^2 + 1, 0) \rangle = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos demostrado que  $\delta$  es una geodésica. Ahora nos falta ver que nuestra curva no es mínima.

Para ver que  $\delta$  no es mínima, cogeremos los puntos  $\delta(-3) = (-3, 0, 9)$  y  $\delta(3) = (3, 0, 9)$  de la superficie que están unidos por  $\delta$  y veremos que la longitud de este entre estos dos puntos es mayor que si cogemos, por ejemplo, el meridiano en el que se encuentran ( $\sigma(t) = (t, \sqrt{9 - t^2}, 9)$  con  $t \in [-3, 3]$ ).



$$\int_{-3}^3 \|\delta'(t)\| dt = \int_{-3}^3 \sqrt{4t^2 + 1} dt = \frac{1}{2}(6\sqrt{37} + \arcsen(6)) \approx 19,4942$$

En cambio, si calculamos la longitud del arco que une  $(-3, 0, 9)$  y  $(3, 0, 9)$  mediante  $\sigma(t)$  tenemos:

$$\begin{aligned}\|\sigma'(t)\| &= \sqrt{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{9 - t^2}}\right)^2} \\ \int_{-3}^3 \|\sigma'(t)\| dt &= \int_{-3}^3 \sqrt{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{9 - t^2}}\right)^2} dt = 3\pi \approx 9,42478\end{aligned}$$

Y con esto concluimos el ejercicio.

□

**Ejercicio 6.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  un paraboloido elíptico (superficie de revolución), con ecuación

$$z = x^2 + y^2$$

Demostrar que cualquier geodésica  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow S$ , que no sea meridiano y que se dirige en la dirección donde el radio de las paralelas de  $S$  va en aumento, se corta a si mismo infinitas veces.

*Solución.* Sea  $q_0$  un punto de  $S$  y sea  $\sigma_0$  el paralelo de radio  $\rho_0$  que pasa por  $q_0$  y forma un ángulo  $\phi_0$  con  $\sigma_0$ .

Por el teorema de Clairaut (o el ejercicio anterior) sabemos que a lo largo de  $\gamma$

$$\rho \cos \phi = cte = |c| \text{ siendo } 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$$

teniendo en cuenta que si  $\phi_1 > \phi_2$ , siendo  $0 \leq \phi_i \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos \phi_1 < \cos \phi_2$  concluimos que  $\phi$  crece con  $\rho$ .

Por lo tanto, si nos dirigimos en la dirección a las paralelas crecientes,  $\phi$  crece. Podría suceder que en algunas superficies de revolución  $\gamma$  se aproxima asintóticamente a un meridiano. Pero veremos que esto no pasa en un paraboloido elíptico. Es decir, la geodésica  $\gamma$  interseca todos los meridianos, y esto implica que efectúa infinitas vueltas alrededor del paraboloido.

Primero, observemos que la geodésica no puede ser tangente a un meridiano. En otro caso, debería coincidir con el meridiano en virtud a la parte de unicidad de (1.3.2). Como el ángulo  $\phi$  crece con  $\rho$ , si  $\gamma$  no cortase a todos los meridianos, debería aproximarse asintóticamente a un meridiano, por ejemplo M.

Supongamos que es ésta la situación y elijamos el sistema de coordenadas locales para el paraboloido  $z = x^2 + y^2$ , definido por

$$x = v \cos u, \quad y = v \sin u, \quad z = v^2$$

donde  $0 < v < +\infty$  y  $0 < u < 2\pi$ , de forma que el entorno coordenado correspondiente contenga a  $M$  cuando  $u = u_0$ . Por hipótesis  $u \rightarrow u_0$  cuando  $c \rightarrow \infty$ . Por otra parte, en este sistema de coordenadas la ecuación de la geodésica  $\gamma$  viene dada por (con una orientación en la que  $c > 0$ )

$$u = c \int \frac{1}{v} \sqrt{\frac{1+4v^2}{v^2-c^2}} dv + cte > c \int \frac{dv}{v} + cte$$

ya que

$$\frac{1+4v^2}{v^2-c^2} > 1.$$

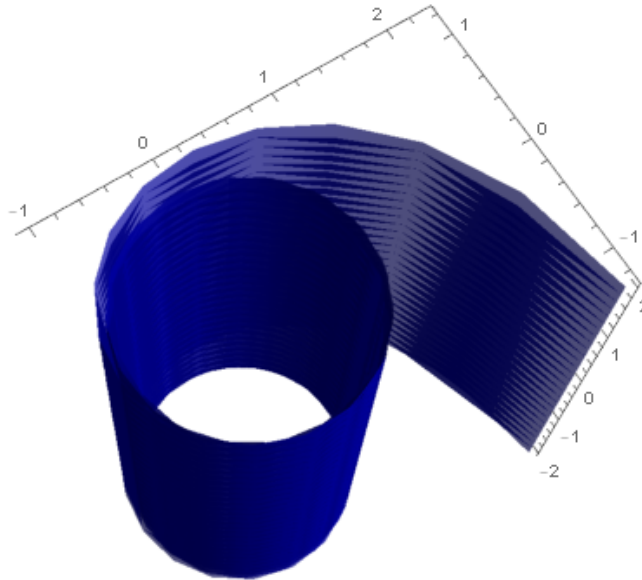
De la desigualdad de arriba se deduce que cuando  $v \rightarrow \infty$ ,  $u$  crece superando cualquier valor prefijado, lo que contradice el hecho de que  $\gamma$  se aproxima

asintóticamente a  $M$ . Por lo tanto,  $\gamma$  interseca a todos los meridianos y con esto completamos la demostración.  $\square$

**Ejercicio 7.** Sea  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  la curva parametrizada

$$\alpha(t) = ((1 + e^{-t}) \cos t, (1 + e^{-t}) \sin t);$$

esta curva es una espiral que se aproxima asintóticamente por el exterior al círculo unitario centrado en el origen, pero sin llegar a alcanzarlo. Denotemos por  $C = \alpha(\mathbb{R})$  a la imagen de  $\mathbb{R}$  por  $\alpha$ , sea  $S = C \times \mathbb{R}$  el cilindro recto con base  $C$ . Está claro que la superficie  $S$  no es cerrada en  $\mathbb{R}^3$ . Demuestra que  $S$  es completa



*Solución.* Para este ejercicio utilizaremos la proposición (3.2.5) la cual nos dice que la completitud se conserva por isometrías locales. Veremos que la superficie  $S$  es isométrica al plano y como el plano es una superficie completa, quedaría demostrado que  $S$  también lo es. Empecemos por calcular la primera forma fundamental de la superficie  $S$ , para eso necesitamos una parametrización de la misma,  $\mathbf{x}(u, v) = ((1 + e^{-u}) \cos t, (1 + e^{-u}) \sin t, v)$ . Y obtenemos,  $E = \|\alpha'(u)\|^2$ ,  $F = 0$  y  $G = 1$ . Por lo tanto, si reparametrizamos la curva  $\alpha$  por su longitud de arco, tendríamos que la primera forma fundamental de  $S$  es la misma que la del plano, lo cual implica que existe una isometría entre estas dos superficies, y por lo tanto habríamos terminado.  $\square$

## Apéndice B

# Código de Mathematica

Este es el código que se ha utilizado para hacer varias imágenes de geodésicas y demás inspirados por el libro [6]. Además de este código de Mathematica se ha utilizado un programa llamado Inkscape para pequeñas modificaciones y aclaraciones de las figuras.

Primero definimos las derivadas parciales de la parametrización de una superficie y su primera forma fundamental.

```
x1[superficie_] := Derivative [1, 0] [superficie]
x2[superficie_] := Derivative [0, 1] [superficie]
G[superficie_][u_, v_] :=
  FullSimplify[{{x1 [superficie][u, v].x1 [superficie][u, v],
    x1 [superficie][u, v].x2 [superficie][u, v]}, {x1 [superficie][u,
    v].x2 [superficie][u, v],
    x2 [superficie][u, v].x2 [superficie][u, v]}}
```

### B.1. Para conseguir las geodésicas

Calcularemos los símbolos de Christoff y después definiremos las funciones que nos darán las geodésicas de la superficie deseada.

```
christoffG[M_][u_, v_] :=
  Module[{A},
    si = Simplify[#] /. {U -> u, V -> v} &;
    ee = M[U, V][[1, 1]];
    ff = M[U, V][[1, 2]];
    gg = M[U, V][[2, 2]];
    A[1, 1, 1] = D[ee, V] ff - 2 D[ff, U] ff + D[ee, U] gg;
    A[2, 2, 2] = D[gg, V] ee - 2 D[ff, V] ff + D[gg, U] ff;
    A[2, 1, 1] = -D[ee, V] ee + 2 D[ff, U] ee - D[ee, U] ff;
    A[1, 2, 2] = -D[gg, V] ff + 2 D[ff, V] gg - D[gg, U] gg;
```

```

A[1, 1, 2] = D[ee, V] gg - D[gg, U] ff;
A[2, 1, 2] = -D[ee, V] ff + D[gg, U] ee;
A[i_, 2, 1] = A[i, 1, 2];
gamma[i_, j_, k_] := A[i, j, k]/(ee*gg - ff^2)/2 // si;
Flatten[Table[gamma[i, j, k], {i, 1, 2}, {j, 1, 2}, {k, 1, 2}]]
];

solvegeol[M_, {u0_, v0_}, longitud_, tita0_] :=
Module[{su, e, so, detEFG},
  christoffG[M][u[s], v[s]];
  detEFG := Sqrt[Det[M[u[0], v[0]]]];
  e[j_] :=
    gamma[j, 1, 1]*u'[s]^2 + 2*gamma[j, 1, 2]*u'[s]*v'[s] +
    gamma[j, 2, 2]*v'[s]^2;
  eqic := {u''[s] + e[1] == 0, v''[s] + e[2] == 0, u[0] == u0,
    v[0] == v0,
    u'[0] == (Cos[tita0]/Sqrt[ee] -
      Sin[tita0]*ff/(Sqrt[ee]*detEFG)) /. {U -> u0, V -> v0},
    v'[0] == (Sin[tita0]*Sqrt[ee]/detEFG) /. {U -> u0, V -> v0}};
  so := NDSolve[eqic, {u, v}, {s, 0, longitud}];
  Flatten[so, 1]
];

solvegeo[M_, {u0_, v0_}, longitud_, m_] :=
Module[{su, e, so, detEFG},
  christoffG[M][u[s], v[s]];
  detEFG := Sqrt[Det[M[u0, v0]]];
  e[j_] :=
    gamma[j, 1, 1]*u'[s]^2 + 2*gamma[j, 1, 2]*u'[s]*v'[s] +
    gamma[j, 2, 2]*v'[s]^2;
  eqic := {u''[s] + e[1] == 0, v''[s] + e[2] == 0, u[0] == u0,
    v[0] == v0,
    u'[0] == (Cos[tita]/Sqrt[ee] -
      Sin[tita]*ff/(Sqrt[ee]*detEFG)) /. {U -> u0, V -> v0},
    v'[0] == (Sin[tita]*Sqrt[ee]/detEFG) /. {U -> u0, V -> v0}};
  so := NDSolve[eqic, {u, v}, {s, 0, longitud}];
  Flatten[Table[so, {tita, 0, 2*Pi, 2*Pi/m}], 1]
];

enr2[u_, v_] := {u, v}
enelplano[g_][u0_, v0_][t_][up0_, vp0_] :=
  g[u0, v0] + t*up0*x1[g][u0, v0] + t*vp0*x2[g][u0, v0];
planotangente[g_][u0_, v0_][u_, v_] :=
  g[u0, v0] + u*x1[g][u0, v0] + v*x2[g][u0, v0]

```



# Bibliografía

- [1] Malfredo P. do Carmo, Geometría diferencial de curvas y superficies, Alianza Universidad Textos.
- [2] Andrew Pressley, Elementary Differential Geometry, Second Edition, Springer-Verlag, London, 2010.
- [3] M. Abate, F. Tovena, Curves and Surfaces, Springer, Italia, 2012.
- [4] Angel Montesdeoca, Líneas geodésicas, 2018.
- [5] Kristopher Tapp, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Springer 2016.
- [6] Alfred Gray, Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, CRC Press, 1997.

