

Gradu Amaierako Lana  
Fisikako Gradua

## Inflazio kosmologikoa

Inflazioaren teoria eta fluktuazio kuantikoak  
honen garapenean

Egilea:  
Ander Urio Garmendia

Zuzendaria:  
Joanes Lizarraga Olano



# Gaien Aurkibidea

<b>1</b>	<b>Sarrera eta helburuak</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Big Bang beroaren teoria</b>	<b>3</b>
2.1	Isotropia eta homogeneousasuna	3
2.2	Eskala faktorea eta Hubbleren parametroa	4
2.3	FLRW metrika	7
2.4	Denbora konformea eta horizonteak	8
2.5	Friedmannen ekuazioak	10
2.6	Ereduaren mugak	15
2.6.1	Horizontearen arazoa	15
2.6.2	Lautasunaren arazoa	16
2.6.3	Benetako arazoak?	17
2.7	Soluzioa teoriaren arazoei (inflazioaren aurkezpena)	17
2.7.1	Horizontearen arazoaren soluzioa	17
2.7.2	Lautasunaren arazoaren soluzioa	19
2.7.3	Inflazioaren parametroak	19
<b>3</b>	<b>Inflazioa</b>	<b>21</b>
3.1	Eremuak kosmologian	21
3.1.1	Eremu eskalar baten akzioa	21
3.1.2	Friedmannen ekuazioak eremu eskalarren arabera	22
3.1.3	Inflazioaren baldintzak eremuekiko	23
3.2	Slow-Roll inflazio eredua	24
3.3	Beharrezko inflazio kantitatea	26
3.4	Inflazioa amaitzean zer?	26
<b>4</b>	<b>Fluktuazio kuantikoetatik kurbaduraren perturbazioetara</b>	<b>27</b>
4.1	Perturbazio klasikoak	28
4.1.1	Gauge kohigikorraren aukeraketa	28
4.1.2	Akzioaren garapen koadratikoa	29
4.1.3	Mukhanov-Sasaki ekuazioa	30
4.1.4	Soluzio moduen analisisa	31
4.2	Perturbazioen kuantizazioa	32
4.2.1	Kuantizazio kanonikoa	32
4.2.2	Huts fisikoaren aukeraketa	33
4.2.3	Zero puntuko fluktuazioak de Sitterren espazioan	35
4.3	Inflazioan zehar sortutako perturbazioak	36
4.3.1	Potentzia espektroa Quasi-de Sitter espazioan	36
<b>5</b>	<b>Ondorioak</b>	<b>39</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>41</b>

A Einsteinen tentsorearen balio ez nuluak FLRW metrikarako	43
B Hutsaren bakartasun eza	45

# 1. Kapituluia

## Sarrera eta helburuak

Historian zehar gizakiak zeruaren misterioekiko miresmen berezi bat izan du. Antzinako greziarrek *zeru-esfera* batean zeudela izarrak uste zuten. Bertan, objektu batzuek higidura berezia jarraitzen zutelako ikusirik, hauei *planeta* deitu zieten. Hauen orbitak, teoria antropozentriko baten bidez deskribatuak izatetik heliozentriko izatera pasa ziren. Puntu horretan, Newtonen mekanikak berebiziko arrakasta izan zuen. Teoria matematiko honek benetako iragarpenak egiteko aukera eman baitzuen. Are gehiago, XX. mendera arte elkarrekintza grabitatorioaren deskribapen zehatzena ematen zuen mekanika newtondarrak. Hala ere, teoria oso baliagarria izan arren, hau ez zen nahikoa unibertsoaren sorrera eta eboluzioa bezalako kontzeptu orokorragoei azalpena emateko. Behar hauek asetzeko tresnak emango zituen Einstein-ek aurreko mendeko hamargarren hamarkadan, Erlatibitate Orokorraren teoria formulatuz. Hau oinarritzat harturik garatuko da hurrengo orrietako garapena.

Lan honen muina, gaur egun ikerketa ildo garrantzitsua den inflazioaren berrikusketara egitea izango da. Horretarako teoria honen beharra erakustez gain, honen gauzapena eta iragarpen nagusiak berraztertuko dira.

Gure lehen pausua Big Bang beroaren ereduak deskribatzen duen unibertsoa ulertzea izango da. Horretarako hipotesi oinarrikoetatik abiatuz honen geometria zehaztuko dugu, horrela posible izango delarik Einsteinen higidura-ekuazioak lortzea. Hauek unibertsoaren hedapenaren eta osararen inguruko informazioa emango digute. Bestalde, ereduaren mugak zein diren aurkeztuko ditugu. Behin ulerturik, soluzio gisa inflazioa planteatuko dugu.

Inflazioa hedapen azeleratuko garaia deskribatzen duen fenomeno da, non denbora oso laburrean unibertsoak berebiziko zabalkuntza jasan zuen. Teoria arrakastatsu hau laurogeigarren hamarkada hasieran planteatu zen eta iragarpen onak egiten dituelako da garrantzitsua. Zehatzagoak izanik inflazioa teoria sendoa da era egokian ezartzen dituelako unibertsoaren eboluzioaren hasierako baldintzak. Are gehiago, hauetatik abiatzen bagara, gaur egun behatzen diren hondoko mikrouhin erradiazioa (CMB, ingelesez *Cosmic Microwave Background*) edo eskala handiko egitura, eta inflazioa sartuz Big Bang ereduak aurrekariak duena hein handi batean bat datoz.

Hurrengo pausua inflazioa eremu teorian bidez deskribatzea izango da. Horretarako erarik orokor eta sinpleena eremu eskalarrak erabiltzea izango da. Horrela, aurreko ataletan inflazioa zehazteko erabilitako baldintzak eremuen baitan berridaztea posible izango da. Hau eginik, inflazioak bete beharreko baldintzak Slow-Roll ereduaren barne-bilduko ditugu. Azken hau era hurbilduan inflazioa deskribatzen duen ereduak da eta ikusiko dugu nola era oso errazean azaltzen duen bere dinamika.

Azken helburu gisa, eremu eskalarraren fluktuazioak aztertuko ditugu, hauek ondoren Big Bang beroaren ereduaren hasierako baldintzak nola zehazten dituzten ulertzeko. Horretarako eremuen teoria kuantikora jotzea beharrezkoa izango da. Prozesuan egin beharreko zenbait aukeraketa ere aurkeztuko dira, hutsaren zehaztapenak kasu. Amaitzeko inflazioak eragindako tentsore metrikoaren perturbazioak potentzia-espektroaren bidez laburbilduko ditugu, zeina behaketa esperimentalekin konparatuz inflazioaren izaera zehazteko erabiltzen den. Gure kasuan tentsore metrikoaren perturbazio eskalarrak aztertuko ditugu soilik.

Hasi baino lehen, zehaztuko dugu lan honetan  $c = 1$ ,  $\hbar = 1$  eta  $8\pi G = 1$  aukeraketa egin dela. Hauek guztiak Planck-en masa laburtuan bildu ditzakegu eta ondorioz:  $M_{Pl} = \sqrt{\hbar c / 8\pi G} = 1$ . Bestalde, erabiliko den signatura lorentziarra  $(- + + +)$  modukoa da.



## 2. Kapituluua

# Big Bang beroaren teoria

Aztertuko dugun teoria Big Bang beroaren teoria edo kosmologiaren eredu estandarra bezala da ezaguna. Honen helburua unibertsoak izandako eboluzioaren inguruko iragarpenak egitea da. Izatez, ereduak duen baliotasuna ikusteko beharrezkoa da aurreratu dituen fenomenoek behaketa.

XX. mendean zehar lortutako emaitza esperimentalek (geroago aztertuko ditugun Hubble-ren behaketak, mikrouhin hondoko erradiazioaren tenperaturaren neurketak eta abar) teoria hau finkatzen lagundu dute. Azken finean, unibertsoaren zabalkundea, garai ezberdinak eta adina, hondoko mikrouhin erradiazioa eta beste zenbait fenomeno ulertzeko iragarpen onargarriak ematen ditu eredu honek.

Atal honen helburua aztertzen ari garen ereduaren atzeko fisika ulertzea izango da. Horretarako ezinbestekoa da printzipio kosmologikoa ondo ulertzea, izan ere hortik abiatuta eta Einsteinen erlatibitate orokorreko ekuazioak erabiliz beharrezko tresnak izango baititugu fenomeno ezberdinak ulertzeko. Hala ere ereduak zenbait arazo dauzka eta hauei irtenbide emateko lan honen zentroa den inflazioa beharko dugu.

### 2.1 Isotropia eta homogeneotasuna

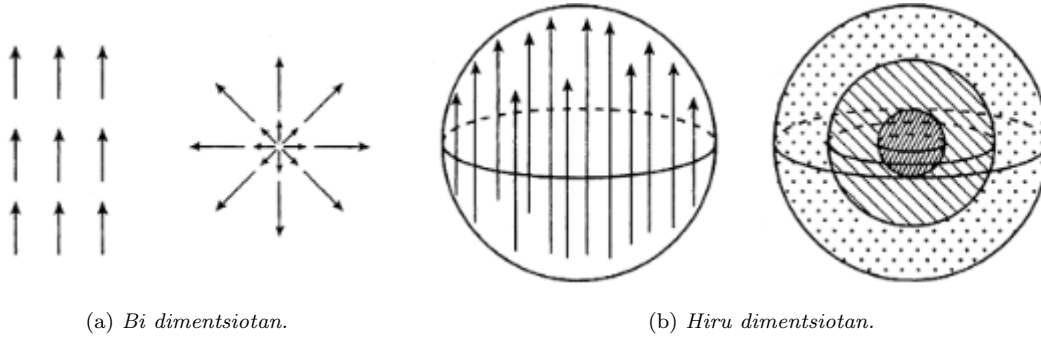
Lehen aipatu den moduan eredu honen muina printzipio kosmologikoa da. Honen arabera unibertsoa isotropoa eta homogeneoa da eskala handietan. Defini ditzagun bi kontzeptu hauek gure unibertsoaren kasuan:

- **Isotropia:** unibertsoak norabide guztietan begiratuta propietate berdinak erakusten ditu.
- **Homogeneotasuna:** unibertsoak puntu guztietan propietate berdinak erakusten ditu.

Hala ere, erraza da bi kontzeptu hauek nahastea. Euren arteko desberdintasuna ikusteko kontsideratu eremu magnetiko uniformeak duen unibertso bat. Kasu honetan unibertso homogeneo bat izango genuke baina ez isotropoa (2.1 irudia). Izan ere, puntu guztietan eremu magnetikoaren balio berdina izan arren eremu lerroen norabideak eta euren perpendikularrak ez dira berdinak izango. Beste adibide bat bi kontzeptuen ezberdintasuna ikusteko esferikoki simetrikoa den distribuzio bat izango litzateke (2.1 irudia). Hemen zentrotik begiratuta norabide guztietan berdina ikusiko genuke eta beraz isotropoa izango litzateke banaketa, baina ez homogeneoa (homogeneoa izango litzateke bi dimentsiotan bi puntu ezberdinetatik isotropoa balitz eta hiru dimentsiotan hirutik).

Hala ere, nola ulertu homogeneotasun eta isotropia hau gure kasuan Thyssen-Bornemisza museoan Rothko-ren “Titulu gabea (Berdea morearen gainean)” artelanaz gozatzen ari den ikusle batek eta Australiako hondartza batean eguzkia hartzen ari den pertsona batek gauza ezberdinak ikusten badituzte? Horregatik esaten da bi propietate hauek eskala handietan edo kosmologikoetan betetzen direla. Izan ere, printzipio hau milioika argi-urteko distantzietan betetzen da, galaxia kumuluen arteko distantzietarako hain zuzen ere.

Isotropia eta homogeneotasun honen ebidentzia handiena hondoko mikrouhin erradiazioan ikusten dugu. Baina, zertan datza? Izatez, unibertso gaztea oso energetikoa zen plasma batez osatuta zegoen non fotoiak, elektroiak eta barioiak elkarrekintzan zeuden. Ezaguna den unibertsoak 300.000 urte inguru zituenan,



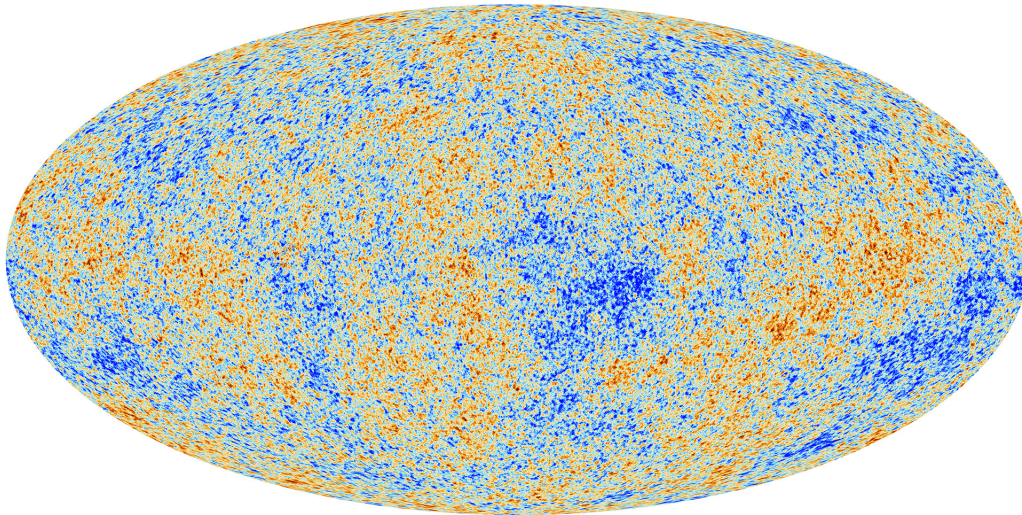
(a) Bi dimentsiotan.

(b) Hiru dimentsiotan.

2.1. Irudia: *Homogeneotasun eta isotropiaren ezberdintasunak grafikoki. (a) eta (b) irudietan ezkerrekoak homogeneotasuna betetzen du soilik eta eskuinekoak isotropia.* [1]

elektroiek eta protoiek hidrogeno atomoak osatu zituzten, eta fotoiak jada ez zirenez gai egoera lotu hauek ionizatzen aske bidaiatzen hasi ziren. Lurretik erradiazio hau neurtzen da eta ikusten da temperatura distribuzioa hein handi batean isotropoa dela. Neurtutako temperatura 2,7 K ingurukoa da.

Hala ere neurketek esaten digute anisotropiak badaudela CMB-an eta hori 2.2 irudian ikusi dezakegu. Nondik datoz hauek? Geroago aztertuko dugun inflazioan gertatutako fluktuazio txikiek sortuak izango dira perturbazio hauek eta horregatik ez dugu ikusten distribuzio guztiz uniforme bat, hots, kolore bakarreko irudi bat. Ideia bat izateko ikusteen diren anisotropia horien ordena  $10^{-5}$ K da .

2.2. Irudia: *Planck sateliteak neurtutako hondoko mikrouhin erradiazioaren irudia.* [2]

Izatez, CMB-aren neurketak egitean fotoien temperatura neurtzen da hein handi batean isotropia behatuz, baina benetan homogeneotasuna neurtzeko galaxia multzoen dentsitateen inguruko informazioa beharko zen. Beraz, homogeneotasuna hipotesizat hartzeko *Printzipio Kopernikarra* onartu behar da. Honen arabera gizakiak, eta ondorioz lurra, ez dira behatzaile pribilegiatuak unibertsoan. Beraz, lurrean CMB-a isotropoa dela neurtzen badugu, unibertsoko beste puntu batean berdina neurtu beharko zen, eta hortaz, puntu guztietan isotropia izanik homogeneotasuna izango genuke. Horrela printzipio kosmologikoa onartzea posible da.

## 2.2 Eskala faktorea eta Hubblearen parametroa

Hogeigarren hamarkadan fisikari askoren ustetan unibertsoa estatikoa zen eta iritzi horretakoa zen Einstein, bera izanik *Erlatibitate orokorra* garatu zuen zientzialari. Hala ere, hamarkadaren amaieran hipotesi hau

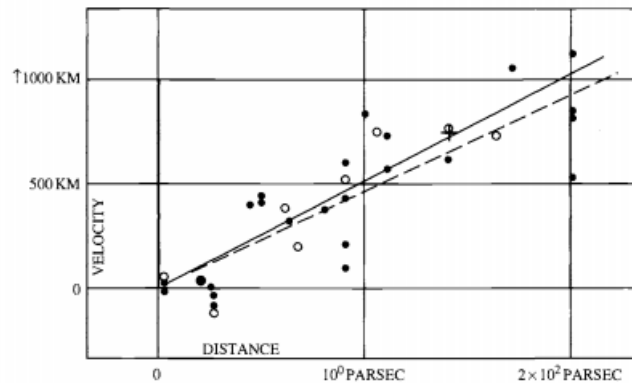


ezeztatzen zuen aurkikuntza egin zuen Edwin Hubble fisikari estatubatuarrak. 1929an galaxiak guregandik urruntzen ari zirela neurtu zuen. Honi Hubbleren legea deitzen zaio (aurten onartu da era independentean Georges Lemaitre fisikariak aurkikuntza berdina egin zuela eta beraz, Hubble-Lemaitre lege moduan berrizendatu da [3]) eta honela idazten da [4]:

$$v = Hd, \quad (2.1)$$

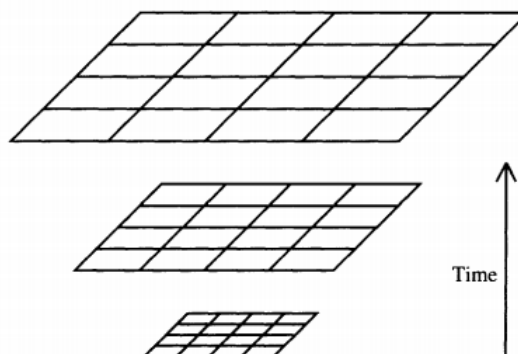
non  $v$  abiadura,  $d$  distantzia fisikoa eta  $H$  biak erlazionatzen dituen Hubbleren parametroa den.

Jarraian azaltzen den 2.3 irudian ikusi daitekeen moduan Hubbleren parametroa positiboa da, izan ere, galaxiak hurruntzen ari dira guregandik.



2.3. Irudia: *Hubblek 1929an egindako neurketa originala. Galaxia urrunen abiadura (ordenatuen ardatzean km/s azaldu beharko luke) distantziarekiko (Mpc-etan egon beharko luke) dago grafikaturatuta. Puntu zuriak eta hauei dagokien lerroak (etena) ez dute eguzkiaren higidura kontuan hartzen, hau kontuan izanik puntu beltzak eta lerro jarraitua izango genuke.* [4]

Honek suposatzen du gure unibertsoa dinamikoa dela, eta zehatzago izanik hedatzen ari dela. Hala ere, lehen aipatu dugun moduan printzipio kosmologikoa bete behar du unibertsoak gure eremuan. Beraz, beharrezkoa da isotropia eta homogeneotasuna era egokian adieraziko duten koordenatuak aukeratzea. Horretarako, koordenatu kohigikorrek erabiliko ditugu ( $r$ -ren bidez adieraziko ditugu), izan ere, hauetan hedapena izan arren behatzaileak koordenatu berdinetan mantenduko baitira. Hau erraz, ikusi daiteke puxika bat hartzen badugu. Bertan, bi puntu marrazten baditugu eta gero puzten hasten bagara, puntuak euren artean aldentu egingo dira, baina hala ere koordenatu/puntu berdinean jarraituko dute.



2.4. Irudia: *Unibertsoaren tamaina aldatu arren koordenatu kohigikorrek bere baitan jarraitzen dute, eta beraz edozein behatzailek koordenatu berdinetan jarraitzen du. Unibertsoaren aldaketa hori a eskala faktoreak ematen digu.* [5]

Behin hau jakinik, beharrezkoa da zehaztea nola handitzen den unibertsoa. Hau adierazteko eskala faktorea erabiltzen da:  $a$ . Honek printzipio kosmologikoa betetzeko beharrezkoa da denboraren funtzioa izatea soilik eta beraz,  $a = a(t)$  beteko du.

Baina, hola lotzen dira koordenatu kohigikorrek fisikoeekin? Hau da, nola neurtu objektuen arteko distantzia fisikoaren aldaketa? Era honetan idatzi dezakegu [6]:

$$d = a(t)r , \quad (2.2)$$

non koordenatu fisikoak lehen egin dugun moduan  $d$ -ren bidez adierazten ditugun.

Lehen esan dugu unibertsoa handitzen ari dela, eta behin eskala faktorearen kontzeptua sarturik, honek  $a$  denborarekin handitzen ari dela esan nahi du,  $\dot{a} > 0$ . Gainera, honek aldentzen ari den objektu batek igortzen duen uhin luzera behatzen dena baino txikiagoa izatea eragingo du. Honi gorriranzko lerrakuntza kosmologikoa deritzo eta honela definitzen da [7]:

$$1 + z \equiv \frac{\lambda_{\text{behatzaile}}}{\lambda_{\text{igorle}}} = \frac{a_{\text{behatzaile}}}{a_{\text{igorle}}} , \quad (2.3)$$

non unibertsoa zabaltzen egonik uhin luzeren arteko erlazioa eskala faktoreen bidez idatzi dezakegun:  $\lambda_{\text{behatzaile}} > \lambda_{\text{igorle}} \Rightarrow a_{\text{behatzaile}} > a_{\text{igorle}}$

Behin hau zehazturik, lehen aipatu dugun Hubbleren parametroa aztertzeraz bueltatuko gara. Horretarako,  $H$  eskala faktorearen menpe idatziko dugu [6]:

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} , \quad (2.4)$$

non bertan ikusten dugun hedatzen ari den unibertso batean,  $\dot{a} > 0$  izanik,  $H > 0$  betetzen den eta behaketekin bat datorren.

Hau horrela izanik, definizio honetatik abiatuz (2.1) adierazpena iritsi gaitzke, tartean (2.2) erlazioa kontuan hartuz:

$$R = a(t)r \rightarrow \dot{R} = \dot{a}r \rightarrow \dot{R} = \frac{\dot{a}}{a}R \rightarrow v = HR , \quad (2.5)$$

non  $\dot{r} = 0$  dela kontsideratu den eta abiadura moduan  $v = \dot{R}$ .

Beraz, 2.3 irudian adierazten den grafikotik posible izango zen Hubbleren ratioa lortzea. Gaur egun, Planck satelliteak egindako neurketetatik egindako estimazioa [8] ondokoa da:

$$H_o = (67,4 \pm 0,5) km/s/Mpc .$$

Hala ere, unibertsoa hedatzen ari bada, zergatik ez dugu ikusten hori eguneroko bizitzan? Izatez,  $H$ -k unibertsoko eskala karakteristikoa definitzen du, hau da, balio honek esaten digu ea aldaketa hauek zein eskalatan diren hautemangarriak. Lurraren eskala karakteristikoarekin konparatzen badugu Hubbleren aldaketa ratioa askoz ere handiagoa da. Ondorioz bi neurgailu edo eskala definituko ditugu honekin lotuta:

$$\begin{cases} \text{Unibertsoaren denbora karakteristikoa} \rightarrow t \sim H^{-1} , \\ \text{Unibertsoaren distantzia karakteristikoa} \rightarrow d \sim H^{-1}(c = 1) , \end{cases} \quad (2.6)$$

non unibertsoaren hedapena ez den nabaritu  $\Delta t < H^{-1}$  bada edo  $d < H^{-1}$ .

## 2.3 FLRW metrika

Aurreko atalean ikusi dugu unibertsoa dinamiko dela eta hedatzen ari dela, eta hau adierazteko koordenatu kohigikorrek eta eskala faktorea definitu ditugu. Hau jakinik, espazio-denboraren geometria ulertzea da hurrengo pausua. Horretarako, erlatibitate orokorrean metrika erabiltzen da eta honela adierazi dezakegu [4]:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.7)$$

non  $ds^2$  metrika den,  $dx^\mu$  (edo  $dx^\nu$ ) koordenatu orokortuak eta  $g_{\mu\nu}$  tentsore metrikoa, hau simetrikoa izanik. Indize grekoek 0,1,2,3 balioak har ditzakete eta Einsteinen batuketa konbentzioa jarraitzen dute.

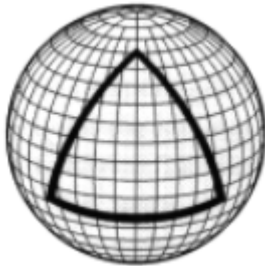
Hala nola, printzipio kosmologikoak ezartzen digun isotropia eta homogeneotasuna betetzeko beharrezkoa da  $t = kte$  hipergainazalek simetria esferikoa izatea. Hau adierazteko metrikaren zati espaziala honela idazten da [6]:

$$dl_{3D}^2 = a^2 \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right), \quad (2.8)$$

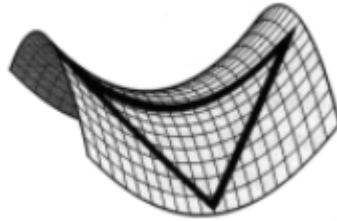
non aurretik definitu ditugun  $a$  eskala faktorea eta  $r$  koordenatu kohigikorrez gain  $k$  kurbadura dugun

Esan bezala, beharrezkoa da gainazalek printzipio kosmologikoa betetzea. Horregatik aipatu dugun moduan eskala-faktorea denboraren menpekora izango da soilik eta koordenatu kohigikorrek isotropia eta homogeneotasuna ziurtatuko dute hedapenarekin. Hau horrela izanik  $k$ -ren balioari dagokionez 3 kasu posible izango ditugu:

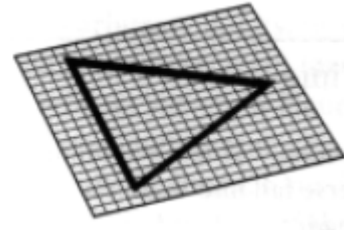
- Gainazal esferikoa kurbadura positiboarekin,  $k = 1$ .
- Gainazal hiperbolikoa kurbadura negatiboarekin,  $k = -1$ .
- Gainazal laua kurbadura nuluekin,  $k = 0$ .



(a) Kurbadura positiboa.



(b) Kurbadura negatiboa.

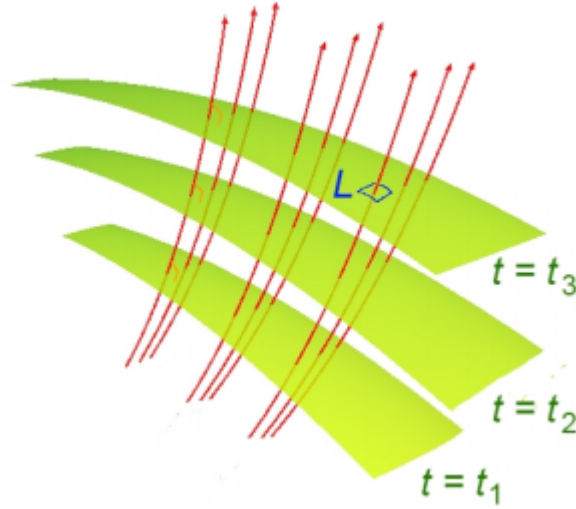


(c) Kurbadura nulua.

### 2.5. Irudia: Hiru dimentsioko espazioan gainazal isotropo eta homogeneoak. [1]

Beraz, jada badaukagu eskatutako baldintzak beteko dituen metrikaren zati espaziala. Baina nola idatzi espazio-denborari dagokion metrika? Horretarako beharrezkoa da gogoraraztea aldiune bakoitzerako gainazal espazial bat dugula eta gainazal hauek  $t$  aldiune kosmiko bat definituko dute. Izatez, zehatzagoak izateko Weyl-en hipotesia hartuko dugu oinarri (1923) [9]:

**Weyl-en hipotesia:** hipotesi honen arabera behatzaile pribilegiatu multzo bat existitzen da. Behatzaile hauek jarraituko dituzten unibertso-lerroak ohikoa den moduan denbora motakoak izango dira, baina aldi berean hauek geodesikoak (espazio kurbatua partikula askearen ibilbidea, hau da, erorketa askearena jarraitzen dutenak) izango dira eta ez dira euren artean ebakiko etorkizuneko edo iraganeko singularitateetan ez bada. Hau ikusteko fluido baten korrante lerroak imajinatu ditzakegu. Beraz, unibertso-lerro hauek gertaera bakoitzean espazio-motako plano ortogonal aldibereko lokal bat definitzen dute (plano hauek  $L$  letren bidez daude adierazita 2.6 irudian) eta hauen bateratzearen bide lortzen dira lehen aipatutako  $t$  konstanteko gainazal espazialak. Hortaz,  $t$  da behatzaile hauen denbora propioa.



2.6. Irudia: *Weyl-en postulatua modu grafikoan horrela ulertuko litzateke, unibertso lerroekin gainazalekiko perpendikular. Hala ere kontuan izan behar da gainazalak 4D ko espazioan dauden 3D ko hipergainazalak direla.* [10]

Behin hau jakinik, denborarekin erlazioatutako metrikaren zatia lortuko dugu. Lehenik eta behin behatzaileen eta gainazal espazialen arteko ortogonaltasuna erabiliko dugu, non lehenak  $v^\mu = (1, 0)$  abiadura duen eta plano espazialeko edozein bektore  $u^\nu = (0, u^i)$  moduan idatzi daitekeen:

$$g_{\mu\nu}u^\mu v^\nu = 0 \Rightarrow g_{0i}u^0 v^i = 0 \Rightarrow g_{0i} = 0, \quad (2.9)$$

non indize latindarrak 1,2 eta 3 balioak har ditzaketen.

Bestalde, Weylen hipotesian esan dugun moduan  $t$  uneak denbora propioaren berdina dira. Ideia hau eta aurreko emaitza erabiltzen baditugu:

$$-d\tau^2 = ds^2 \Rightarrow -d\tau^2 = g_{00}dt^2 \Rightarrow g_{00} = -1. \quad (2.10)$$

Beraz jada badaukagu informazio nahikoa printzipio kosmologikoa beteko duen metrika idazteko. Hau Friedmann-Lemâitre-Robertson-Walker metrika da eta honela idazten da [6]:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (2.11)$$

non metrika koordenatu kohigikorretan dagoen eta  $a$  eskala faktorea den.

## 2.4 Denbora konformea eta horizonteak

Aurreko kontzeptuak baliatuz argiaren hedapena nolakoa izango den jakitea interesatzen zaigu. Horretarako FLRW metrikak ematen dizkigun baliabideak erabiliko ditugu. Izan ere, era horretan unibertsoaren egitura kausalaren inguruko iragarpenak egin ahal zaingo baititugu.

Lehenengo pausua denbora konformea,  $\tau$ , definitzea izango da [6]:

$$\tau = \int \frac{dt}{a(t)} \quad \text{edo} \quad d\tau = \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.12)$$

Hau horrela izanik eta  $k = 0$  kurbadura kontsideratuz (normalean analisia errazteko kurbadura nuluko kasuak kontsideratuko ditugu) honela idatz dezakegu metrika:

$$ds^2 = a^2(\tau)[-d\tau^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] = a(\tau)^2[-d\tau^2 + dr^2]. \quad (2.13)$$

Eta (2.13) adierazpena Minkowski-ren metrikarekin konformalki erlazionatuta dago, hau da, jarraian adierazten den moduan konstante baten biderkatzea (eskala-faktorea, hain zuzen ere) izango da metriken de-berdinatasun bakarra:

$$ds^2 = a^2(\tau)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad (2.14)$$

non  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  Minkowskiren tentsore metrikoa den.

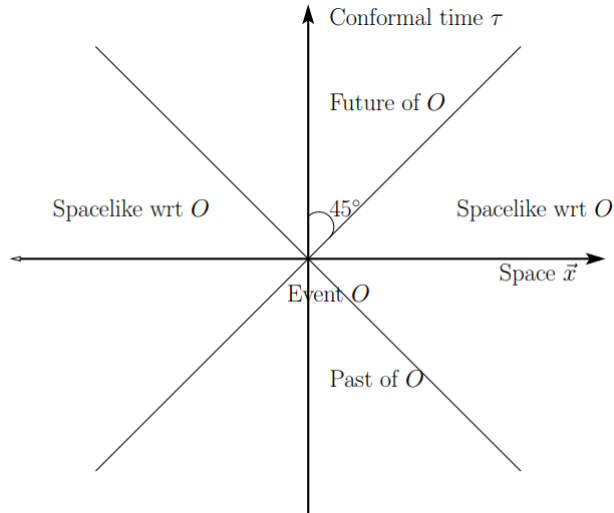
Adierazpen honi jarraituz guri argiaren propagazio erradiala interesatuko zaigu eta beraz  $d\Omega = 0$  kontsideratuko dugu. Hedapen erradiala beraz 2D-ko metrika honek emango digu:

$$ds^2 = a^2(\tau)[-d\tau^2 + dr^2]. \quad (2.15)$$

Gainera, badakigu masa gabeko fotoiak geodesiko nuluetan zehar mugituko direla ( $ds^2 = 0$ ). Beraz, hau kontuan hartuz eta (2.15) askatuz, Minkowskiren espazioan gertatzen den moduan argiak  $45^\circ$ -ko inklinazioa jarraituko du  $\tau$  vs  $r$  planoan (2D-ko espazio konformea):

$$r(\tau) = \pm\tau + kte. \quad (2.16)$$

Beraz, (2.16) ekuazioa bailatuz gertakari batek adieraziko duen kausalitatea irudikatu dezakegu:



2.7. Irudia: Irudian (2.16) ekuazioan definitutako geodesiko nuluek ikusi ditzakegu 2D-ko espazio konformean. Konoaren barruko gertakariak kausalki lotuta egongo dira eta denbora motako tarteez ( $ds^2 > 0$ ) bananduta. Espazio motako unibertso lerroek ( $ds^2 < 0$ ) berriz gertakari ez-kausalak lotuko dituzte, eta hauek konotik kanpo egongo dira. Beraz, geodesiko nuluek definituko dute gertakari baten kausalitatea. [11]

## Partikulen horizontea

Hasierako denbora bat hartzen badugu, demagun  $t_i$ , eta beranduagoko bat adibidez  $t > t_i$ , orduan argiak denbora tarte horretan distantzia maximo bat bidaiatu ahal izango du. Honi partikulen horizonta kohigikorra deritzo eta honela idazten da (2.12) eta (2.16) adierazpenei jarraituz:

$$r_p(\tau) = \tau - \tau_i = \int_{t_i}^t \frac{dt}{a}. \quad (2.17)$$

Lehen aldiune bezala “unibertsoaren sorrera” hartuz gero  $t_i \equiv 0$ , eskala faktoreak ondorengo balioa izango luke, hasierako singularitate deitua:  $a(t_i \equiv 0) \equiv 0$ . Partikulen horizontearen tamaina fisikoa (2.2) ekuazioa baliatuz ondokoa izango da:

$$d_p(t) = a(t)r_p . \quad (2.18)$$

Kontzeptu hau oso baliagarria izango da iraganeko eta gaur egungo gertakarien kausalitatea aztertzeko. Geroago ikusiko dugu nola eragiten duen kontzeptu honek Big Bang ereduaren arazoetan eta inflazioan.

Bestalde, geroago gauzak errazteko (2.17) adierazpena beste era batean idatziko dugu. Horretarako ondorengo garapena egingo dugu:

$$\frac{dt}{a} = \frac{dt}{da} \frac{da}{a} = \frac{d \ln a}{\dot{a}} = \frac{d \ln a}{aH} \rightarrow r_p = \int_0^{\ln a} \frac{d \ln a}{aH} , \quad (2.19)$$

non  $(aH)^{-1}$  Hubbleren erradio kohigikorra den (2.6) definizioari jarraituz.

Hortaz, honen arabera ikusten dugu partikulen horizontea Hubbleren erradio kohigikorraren menpekola dela eta beraz honen eboluzioaren azterketaren bidez FLRW unibertsoaren kausalitatea aztertu ahal izango dugula.

## Gertakarien horizontea

Amaierako denbora bat hartuz,  $t_{\text{buk}}$ , gertakarien horizontea esaten digu zein koordenatu multzora ez den iritsiko  $t < t_{\text{buk}}$  aldiunean igorritako seinale bat. Hau honela idazten da:

$$r_e(\tau) = \tau_{\text{buk}} - \tau = \int_t^{\tau_{\text{buk}}} \frac{dt}{a(t)} . \quad (2.20)$$

Beraz,  $r > r_{\text{end}}$  kasuan seinalea ez da iritsiko koordenatu horietara. Partikulen horizontearekin egin dugun moduan gertakarien horizontearen tamaina fisikoa idatz dezakegu:

$$d_e(t) = a(t)r_e . \quad (2.21)$$

Beraz, partikulen horizontearen kasuan azterketa atzerantz egin dugun moduan, gertakarien horizontearekin aurrerantz egin dugu. Izan ere, biak (2.16) ekuazioak adierazten duen 2.7 irudiko argi konoaren zonalde desberdinak azaltzen dituzte.

## 2.5 Friedmannen ekuazioak

Unibertsoaren dinamika ulertzeko ezinbestekoa da erlatibitate orokorra. Horregatik beharrezkoa da Einsteinen ekuazioak erabiltzea [6]:

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} , \quad (2.22)$$

non  $G_{\mu\nu}$  Einsteinen tentsoreak espazio-denboraren deskribapen geometrikoa ematen digun eta  $T_{\mu\nu}$  energia-momentu tentsoreak osaera energetikoa adierazten digun.

Ikusten dugu hortaz Einsteinen ekuazioek espazioaren geometria eta materia euren artean erlazionatzen dituztela. Honek esan nahi du baten aldaketak bestean eragingo duela, eta berdina alderantziz. Beraz, ekuazioak askatzen baditugu FLRW metrikarako orduan unibertsoaren dinamika jakitea posible izango da. Hau zatika egingo dugu lehenik  $G_{\mu\nu}$  garatuz eta ondoren  $T_{\mu\nu}$ .

## Einsteinen tentsorea

Hasteko, FLRW metrika sartu baina lehen, beharrezkoa da erlatibitate orokorreko zenbait definizio erabilitea. Einsteinen tentsorea honela definitzen da [6]:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (2.23)$$

non  $R_{\mu\nu}$  Ricci-ren tenstorea den eta  $R$  Ricci-ren eskalarra.

Hauek honela definitzen dira [6]:

$$R_{\mu\nu} \equiv \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} - \Gamma_{\beta\nu}^{\alpha}\Gamma_{\mu\alpha}^{\beta}, \quad (2.24)$$

$$R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \quad (2.25)$$

non  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$  Christoffel-en ikurrak diren.

Horien definizioa honela idatz daiteke [6]:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \equiv \frac{g^{\mu\nu}}{2} [g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}], \quad (2.26)$$

non  $(\dots)_{,\mu} = \partial(\dots)/\partial x^{\mu}$  deribatu partzial arrunta den.

Hau jakinik Einsteinenen tentsorea idatziko dugu FLRW metrikarako (2.23) definizioari kasu eginez (garapen honetan A eranskinean sakontzen da). Honen gai ez nuluak:

$$\begin{aligned} G_{00} &= 3 \left[ \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{a}{k^2} \right], & G_{11} &= -(2\ddot{a}a + (\dot{a})^2 + k)/(1 - kr^2), \\ G_{22} &= -(2\ddot{a}a + (\dot{a})^2 + k)r^2, & G_{33} &= -(2\ddot{a}a + (\dot{a})^2 + k)r^2 \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (2.27)$$

## Energia-momentu tentsorea

Energia-momentu tentsoreak Einsteinen ekuazioaren eskuineko gaia ematen digu. Honen funtzioa unibertsoa osatzen duen materia adieraztea edo ordezkatzeta da. Honen izaerari dagokionez, Einsteinen tentsorearen (2.27) emaitzak ikusiz FLRW metrikarako, unibertsoak eskala handietan fluido perfektu moduan jokatzen duela ikusten dugu (hau Weylen postulatutik ikusten da [9]). Gainera, fluido hau geldirik egongo da koordenatu kohigikorretan. Baldintza hauek betetzen dituen energia-momentu tentsorea honela idazten da [10]:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^{\mu}u^{\nu} + pg^{\mu\nu}. \quad (2.28)$$

Hala ere, guri tentsoreak forma kobariantea izatea interesatzen zaigu Einsteinen ekuazioak askatzeko. Beraz:

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}T^{\alpha\beta}. \quad (2.29)$$

Hau jakinik, fluidoaren definizioan beharrezkoa da zehaztea behatzaileen unibertso-lerroa eta fluidoaren 4D abiadura tangenteak direla. Modu errazago batean esanik honek behatzailea fluidoarekin batera doala esan nahi du. Hortaz,  $u^{\nu} = (1, 0, 0, 0)$  izango da eta tentsorearen gaiak (ez nuluak) hauek izango dira:

$$T_{00} = \rho \quad T_{ii} = g_{ii}p. \quad (2.30)$$

Bertan,  $\rho$ , energia-materia dentsitatea, eta  $p$ , fluidoak eragindako presioa, denboraren menpekoak dira soilik. Baldintza edo ezaugarri hau beharrezkoa da isotropia eta homogeneotasuna betetzeko.

## Friedmannen ekuazioak

Azkeneko bi ataletako emaitzak kontuan izanik Einsteinen ekuazioak askatu ditzakegu lortutako gaiak (2.22) adierazpenean sartuz. Horrela, aztertu nahi dugun unibertsoaren dinamika jakin dezakegu. Proposatutako FLRW metrikaren bidez lortutako higidura-ekuazioak Friedmannen ekuazioak dira:

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{1}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (2.31)$$

$$\dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}(\rho + 3p), \quad (2.32)$$

non (2.32) adierazpena lortzeko (2.31) adierazpena erabili den.

Bi ekuazio hauetan begia ipintzen badugu ikusi dezakegu lehena  $\dot{a}$ -ren menpekota dela eta bigarrena  $\ddot{a}$ . Hortaz, esan dezakegu bata eskala faktorearen abiaduraren ekuazioa dela eta bigarrena azelerazioari dagokiona.

Normalean Friedmannen ekuazioak ematean, (2.31) ekuazioa ematen da eta bigarren adierazpen moduan honen eta (2.32) adierazpenaren konbinazio lineala den *jarraitasun-ekuazioa*. Bere adierazpena lortzeko lehenik (2.31) deribatzen da  $t$ -rekiko:

$$2H\dot{H} = \frac{1}{3}\frac{d\rho}{dt} - \frac{2k\dot{a}}{a^3} = 0. \quad (2.33)$$

Hau moldatuz eta  $H$ -ren (2.4) definizioa erabiliz:

$$\frac{d\rho}{dt} + 6H\left(\frac{k}{a^2} - \dot{H}\right) = 0. \quad (2.34)$$

Eta azkenik parentesiko bi gaietan (2.31) eta (2.32) ekuazioak ordezkatur, jarraitasun-ekuazioa lortzen da:

$$\frac{d\rho}{dt} + 3H(\rho + p), \quad (2.35)$$

non ekuazio honen bidez ikus dezakegun nola aldatzen den materia dentsitatea denboran zehar.

Beraz, (2.31) eta (2.35) ekuazioen bidez unibertsoaren dinamika aztertzen hasi gaitzke. Hala ere, horrekin hasi baino lehen ohartu Einsteinen ekuazioen forma dela eta posible dela beste materia mota bat sartzea [7]:

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{[\Lambda]}. \quad (2.36)$$

Beharrezkoa da bigarren terminoak itxura konkretu bat izatea Einsteinen ekuazioak askatu ahal izateko. Horregatik tentsore metrikoaren eta konstante baten biderkadura moduan idazten dugu:

$$T_{\mu\nu}^{[\Lambda]} = -g_{\mu\nu}\Lambda, \quad (2.37)$$

non  $\Lambda$  moduan idatzi duguna konstante kosmologikoa den

Hau kontuan izanik lortuko ditugun Friedmannen ekuazioak ondokoak dira:

$$H^2 = \frac{1}{3}\rho + \frac{1}{3}\Lambda - \frac{k}{a^2}, \quad (2.38)$$

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{1}{6}(\rho + 3p) + \frac{1}{3}\Lambda. \quad (2.39)$$



Jarraitasun-ekuazioak aldiz berdin jarraituko du. Hala ere, nahikoa da dentsitate eta presioa,  $\rho \rightarrow \rho - \Lambda$  eta  $p \rightarrow p + \Lambda$ , moduan hartzea konstante kosmologikorik gabeko (2.31) eta (2.32) Friedmannen ekuazioak berreskuratzeko. Dena den, gaur egun kontuan hartzen da  $\Lambda$  konstante kosmologikoa; izan ere, energia iluna izan daitekeela uste da. Ikerketek erakusten dute unibertsoa era azeleratuan zabaltzen dagoela, hau da,  $\ddot{a} > 0$  eta horregatik konstante kosmologikoa nagusi den unibertsoan gaudela uste da.

Hau jakinik, gure helburua unibertsoaren eboluzioa markatzen duen eskala faktorearen bilakaera aztertzea izango da. Horretarako unibertsoa osatzen duen fluido perfektuaren egoera ekuazioa barotropikoa dela suposatuko dugu [6]:

$$p = \omega \rho , \quad (2.40)$$

non  $\omega$  konstantea den eta erlazioa lineala.

Hau horrela izanik, (2.35) jarraitasun-ekuaziotik abiatuko gara, bertan (2.40) egoera-ekuazioa ordezkatur:

$$\frac{d\rho}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho(1 + \omega) = 0 \rightarrow \frac{d\rho}{\rho} \frac{a}{da} = -3(1 + \omega) \rightarrow \frac{d \ln \rho}{d \ln a} = -3(1 + \omega) , \quad (2.41)$$

non azken pausuan  $d \ln x = dx/x$  propietatea erabili den.

Hau integratuz eskala faktore eta energia-dentsitatearen arteko erlazioa lortzen dugu:

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)} . \quad (2.42)$$

Behin emaitza hau izanik unibertsoaren osagai desberdinen energia-dentsitatearen eskala-faktorearekiko eboluzioaren adierazpenak idazti ditzakegu.

$$\rho \propto a^{-3} \quad (\omega = 0) , \quad (2.43)$$

$$\rho \propto a^{-4} \quad (\omega = 1/3) , \quad (2.44)$$

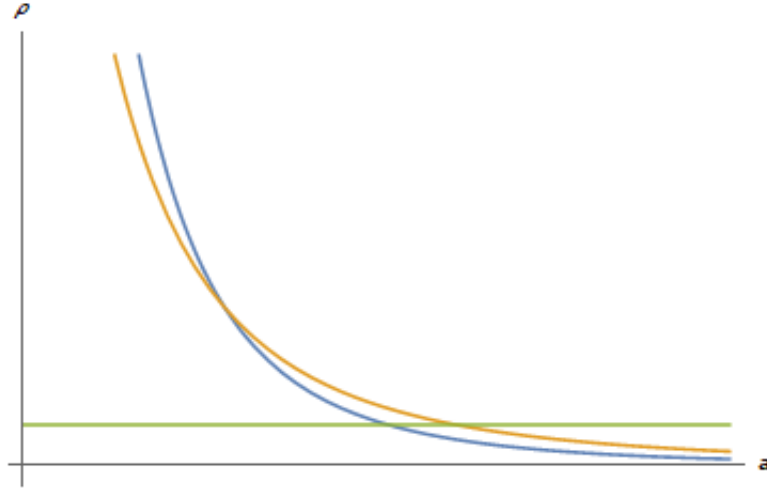
$$\rho \propto a^0 \quad (\omega = -1) . \quad (2.45)$$

Lehenengo adierazpenaren kasuan fluidoa materia ez-erlatibista dela kontsideratu dugu, eta orduan jakinik materiak presiorik egiten ez duela,  $p = 0$ , (2.43) adierazpenean jarri dugun emaitzara iristen gara. Bertan, ikusten dugu dentsitateak behera egiten duela eskala faktorea handitu ahala, eta beraz unibertsoa hazi ahala. Zehazki, unibertsoaren bolumen handitzearen proportzionala da materiaren energia dentsitatea. Horrelako unibertso bati materia ez-erlatibistak menderatutakoa deritzo.

Bestalde, bigarren adierazpenaren kasuan unibertsoan nagusi erradiazioa dela kontsideratu dugu, eta honi dagokion egoera ekuazioa orduan honakoa da:  $p = \rho/3$ . Materiaren kasuarekin gertatu den moduan unibertsoaren bolumen handitzearekin batera dentsitateak behera egiten du. Hala ere, kasu honetan  $a^{-4}$  izanik beste arrazoi batengatik ere dentsitateak behera egiten du. Hau argiaren uhin luzeraren zabaltzea da. Ohartu uhin luzera eskala faktorearekin proportzionalki handitzen dela eta erradiazioaren energia  $E = 1/\lambda$  denez, hau da energi-dentsitatearen jaitsieran eragiten duena. Horrelako portaera duen unibertso bati erradiazioak edo materia-erlatibistak menderatutakoa deritzo.

Hala nola, posible da lehen deskribatutako fluido perfektua konstante kosmologikoa dela kontsideratzea eta hori egin dugu (2.45) adierazpenean. Kasu horretan, egoera ekuazioa  $p = -\rho$  izango litzateke eta energia-dentsitatea ez zen aldatuko eskala-faktorearekin.

Hortaz, (2.43), (2.44) eta (2.45) emaitzak erabili ditzakegu gure unibertsoaren osaeraren eboluzioa aztertze-ko era kualitatiboan (2.8 irudia). Lehenik ikusten dugu hasieran erradiazioa zela gailentzen zena beste bien gainetik izan ere eskala faktorea hasieran 0-tik hurbil egonik dentsitate handiena izango lukeelako. Denbora aurrera joan ahala, eskala faktorea handitzen doa eta beraz pixkanaka materiak dominatutako unibertsoa pasako ginatke. Azkenik, erradiazioa eta materia gutxitzen joango dira unibertsoaren zabalkuntzarekin eta konstante kosmologikoa energia-dentsitate handiena izango du.



2.8. Irudia: Grafiko honetan unibertsoa dominatuko duten osagaien arabeko energia-dentsitatearen eboluzioa adierazi da. Lerro urdina erradiazioari dagokio, laranja materia ez-erlatibistari eta berdea konstante kosmologikoari.

Bestalde, kurbadura nuluko Friedmannen ekuazioetan (2.42) emaitza ordezkatzen badugu eskala faktorearen denborarekiko eboluzioa lortu dezakegu:

$$k = 0 \rightarrow \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\rho}{3} \rightarrow \frac{\dot{a}}{a} \propto \rho^{1/2} \rightarrow \frac{\dot{a}}{a} \propto a^{-3(1+\omega)/2} \rightarrow a^{-1-2/3(1+\omega)} da \propto dt . \quad (2.46)$$

Eta  $\omega \neq -1$  kasuan aurrekoa integratuz eskala faktorearen denborarekiko mendekotasuna:

$$a \propto t^{2/3(1+\omega)} \quad (\omega \neq -1) . \quad (2.47)$$

Konstante kosmologikoaren kasuan berriz, hau da,  $\omega = -1$  denean, (2.31) ekuazioan  $k = 0$  dela kontsideratzen badugu eta (2.45) emaitzari kasu egiten badiogu,  $H^2$  konstantea izango da. Hortaz,  $H = \dot{a}/a = kte$  izango dugu eta hortik erraza da integratuz ikustea  $\Lambda$  -ren kasuan eskala faktorearen eboluzioa ondokoa dela:

$$a \propto e^{Ht} \quad (\omega = -1) . \quad (2.48)$$

Izatez, konstante batek dominatutako unibertsoari de Sitter-en unibertsoa deitzen zaio, eta honetan  $a$ -ren eboluzioa (2.48) ekuazioak adierazten duena da.

Fluidoaren osagai ezberdinei dagozkien emaitza hauek 2.1 taulan barnebildu ditzakegu:

	$\omega$	$\rho(a)$	$a(t)$	$a(\tau)$
M. EZ-ERL.	0	$a^{-3}$	$t^{2/3}$	$\tau^2$
ERRAD.	1/3	$a^{-4}$	$t^{1/2}$	$\tau$
$\Lambda$	-1	$a^0$	$e^{Ht}$	$-\tau^{-1}$

2.1. Taula: Aurreko ataletan lortutako emaitzak biltzen dira taula honetan. Bertan, materia ( $\omega = 0$ ), erradiazio ( $\omega = 1/3$ ) eta konstante kosmologikoaren ( $\omega = -1$ ) energia dentsitatearen eskala faktorearekiko eboluzioa eta azken honen denborarekikoa (fisikoa) azaltzen dira. Bestalde, denbora konformearekiko  $a$ -ren eboluzioa ere erakusten da (2.12) adierazpenari jarraituz.

## 2.6 Ereduaren mugak

Orain arte ikusi duguna kontuan izanik, Big Bang-aren eredu estandarrek era egoki batean azaltzen du unibertsoaren eboluzioa, bere hasierako garaitik (energia altuko hasierako uneak alde batera utziz) gaur egun arte. Ereduak gaitasuna dauka unibertsoaren dinamikaren inguruan iragarpen egokiak egiteko, garai ezberdinetan izan duen osiera posibleaz gain, eta hipotesiak hein handi batean bat datoz egiten diren behaketekin.

Hala ere, jarraian ikusiko dugun moduan zenbait fenomenori ez die azalpenik ematen kosmologia estandarrek. Esan daiteke hauek ereduaren mugak direla eta beraz, dudatan jarri dezakete honen baliagarritasuna. Baina, horren ordeaz, eta ikusirik hein handi batean teoria sendoa dela eta emaitza onak ematen dituela, moldaketa bat proposatuko dugu. Hau inflazioa da eta geroago ikusiko dugu jarraian azalduko ditugun arazoei nola ematen dien konponbide:

### 2.6.1 Horizontearen arazoa

Horizontearen arazoa ikusteko partikulen horizontea aztertuko dugu. Horretarako materia arrunta kontsideratuko dugu soilik, hau da, energiaren ondorengo baldintza betetzen duena:  $\rho + 3p \geq 0$ . (2.35) adierazpenetik ikusten dugu Hubbleren erradio kohigikorraren eboluzioa aztertuz partikulen horizontearen eboluzioa jakin dezakegula. Friedmannen (2.31) ekuaziotik eta (2.42) erlaziotik:

$$H^2 \propto \rho \rightarrow (aH)^{-1} \propto a^{-1} \rho^{-1/2} \rightarrow (aH)^{-1} \propto a^{\frac{1}{2}(1+3\omega)}. \quad (2.49)$$

Ohartu ohiko materiarako energiaren baldintza ( $\omega \geq -1/3$ ) bete ezkeror duan handitzen ari den unibertsoan Hubbleren erradio kohigikorra handitzen ari da ere. Partikulen horizontearen (edo denbora konformearen) kasuan aurreko (2.49) ordezkatu ezkeror :

$$r_p = \tau - \tau_i \propto \frac{2}{(1+3\omega)} [(aH)^{-1} - (a_i H_i)^{-1}]. \quad (2.50)$$

Jakinik  $\omega > -1/3$  bada Hubbleren erradio kohigikorra handitzen doala, onartu dezakegu kontribuzio handiena lehen terminoak egingo duela eta beraz:

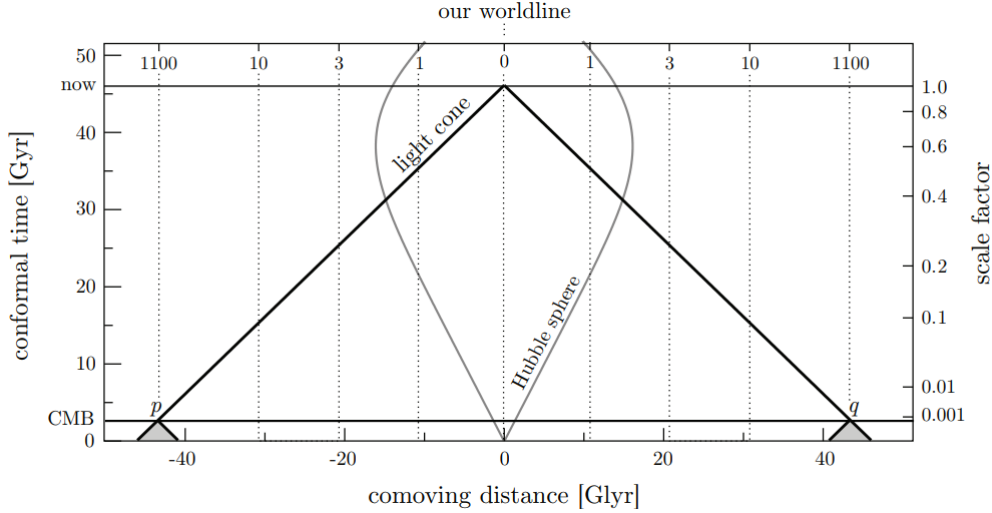
$$r_p \simeq \tau \propto \frac{2}{(1+3\omega)} (aH)^{-1}. \quad (2.51)$$

Hortaz ezarritako baldintzen arabera bai  $(aH)^{-1}$  bai  $r_p$  monotonoki gorakorrak dira. Gainera, ikusi dezakegu partikulen horizontea finitua dela, eta horrek suposatzen du partikulen horizontearen distantzia baina handiagora dauden bi behatzaileak ezingo dutela euren artean komunikatu inoiz.

Zer arazo dakar honek? Lehen esan bezala CMB-a temperatura distribuzioa isotropoztat hartu dezakegu. Ikusi dugunaren arabera hasierako singularitatearen ( $t_i = 0$ ) eta CMB-aren igorpenaren ( $t_{\text{CMB}}$ ) arteko tartean partikulen horizontea finitua da. Horren arabera, kausalki lotuta ez dauden puntuek ezaugarri berdinak erakusten dituzte, hots, euren iraganeko argi-konoak gainezartzen ez diren arren guk CMB-an berdina ikusten dugu.

Hau modu argi batean 2.9 irudian ikus dezakegu. Bertan zeruko aurkako bi norabide kontsideratzen dira. Norabide horietan neurtutako CMB-ko erradiazioa, irudiko p eta q aldiunetan igorritako fotoiak dira. Ohartu igorpen puntu horien eta hasierako singularitatearen arteko denbora konforme kantitate ez dela batere handia. Horregatik bi puntu horien partikulen horizonteak ez dira gainezartzen eta ezin daitezke kausalki lotuta egon. Izatez nahikoa da neurketak egitean zeruan gradu batera baino gehiagora dauden bi puntu kontsideratzea kausalitate eza ikusteko.

Hori horrela izanda zergatik da isotropoa CMB-a egiten diren neurketetan? Nola jartzen dira bi fotoiak ados temperatura berdina izateko, euren artean inoiz kontakturik izan ez badute? Nola azaldu kausalitate arazo hau Big Bang-aren ereduak alde batera utzi gabe? Honi horizontearen arazoa deritzo.



2.9. Irudia: Irudi honetako diagraman ikusi daiteke horizontearen arazoa, eta horretarako argi-konoa zein  $(aH)^{-1}$  irudikatzen dira. Gure iraganeko argi-konoak CMB-a igorri zen unea ebakitzen du, bertan aurkako  $p$  eta  $q$  puntuak egonik. Hauen argi-konoak ez dira ebakitzen  $a = 0$  singularitatera iritsi aurretik, eta beraz kausalitate eza ikusi dezakegu. Bestalde, esan bezala ohiko materia (materia ez-erlatibista eta erradiazioa) gailentzen den bitartean Hubbleren erradio kohigikorra handitzen doa. Soilik konstante kosmologikoa gailentzen hasten denean hau txikitzen hasten da ( $a \simeq 0,5$  inguruan). [12]

## 2.6.2 Lautasunaren arazoa

Lautasunaren arazoa ikusi baina lehen hainbat parametro definituko ditugu. Hasteko, dentsitate kritikoa idatziko dugu, zeina (2.31) Friedmannen ekuazioaren soluzioa den kurbadura nulua denean [6]:

$$\rho_{\text{kri}} \equiv 3H^2. \quad (2.52)$$

Behin hau jakinik osagai bakoitzari dagokion dentsitate ratio idatz dezakegu. Hau osagai bakoitzaren energia-dentsitatearen eta dentsitate kritikoren arteko zatidura da eta honela idazten da [6]:

$$\Omega_i(a) \equiv \frac{\rho_i(a)}{\rho_{\text{kri}}(a)}. \quad (2.53)$$

Bestalde, kurbadurari ere badagokio bere ratioa eta era honetan idazten da [6]:

$$\Omega_k(a) \equiv -\frac{k}{H^2 a^2}. \quad (2.54)$$

Beraz, energia-dentsitateak beteko duen adierazpena (2.42) baldin bada eta aurreko definizioak kontuan hartzen baditugu, Friedmannen (2.31) ekuazioa berridatzi dezakegu honela:

$$\sum_i \Omega_i(a) + \Omega_k(a) = 1. \quad (2.55)$$

Hau modu definitiboan idazteko, osagai guztiei dagozkien ratio ekarpenak batukari moduan idatzi beharrean ratio totalaren barruan sartuko ditugu:

$$\Omega_{\text{tot}}(a) - 1 = \frac{k}{(aH)^2}. \quad (2.56)$$

Ikusi dezakegu eskuineko terminoa Hubbleren erradio kohigikorraren menpekoea dela, kurbadurari dagokion  $k$  terminoaz gain. Badakigu  $(aH)^{-1}$  denborarekin handitzen doala (2.49) adierazpenari jarraitzen badiogu (unibertsoak ohiko materiaz osatutako fluido moduan jokatzen duela kontsideratuz), eta beraz berdina gertatuko da (2.56) ekuazioko ezkerreko terminoarekin (zeinuak alde batera utziz). Aukera bakarra unibertsoak bere horretan jarraitzeko kurbadura nulua izatea da ( $\Omega_{\text{tot}} = 1$ ). Baina oreka egoera hau guztiz ezegonkorra da, izan ere sistema apur bat desbideratzen bada dibergitu egiten baitu. Honek suposatzen du kurbadurari dagokion ekarpenik izanez gero denborarekin termino hau handitzen joango dela eta horrekin batera unibertso gero eta kurbatuagoa izango genuke.

Gaur egun, Planck sateliteak lortutako emaitzak kontuan harturik [8], unibertso ia lau bat neurtzen dugu  $|\Omega_{k,0}| < 0,01$ . Honek suposatzen du aurreko azalpenei jarraituz unibertsoa oraindik eta lauagoa zela hasieran. Gainera, unibertsoak gaur egungo balioa izateko garai ezberdinetan kurbadurari dagokion ekarpenak nulu izatetik oso gertu egon beharko luke.

### 2.6.3 Benetako arazoak?

Normalean aurreko bi mugapenez gain, monopolari edo partikula zaharrei dagokiona sartzen da [5]. Era simple batean honela azaldu dezakegu arazo hau: gure ereduari jaramon egiten badiogu, unibertsoa tenperatura oso altu eta energetikotik hasi zen eta baldintza hauek gaur egun behatzen ez ditugun partikulen sorrera ahalbidetzen dute, adibidez monopolak. Hala ere, monopolaren arazoa oraindik frogatu ez den teoria batek auresaneko partikulen sorreran oinarritzen da, GUT (Grand Unified Theory) teorian hain zuzen ere. Beraz, izatez ez da benetako arazo bat, kontsideratzen badugu teoriak ez duela zertan zuzena izan behar.

Bestalde, horizontearen eta lautasanaren arazoak kontsideratu daitezke ez direla benetako arazoak suposatzen badugu unibertsoa hasieratik era perfektuki uniformean eta kurbadurarik gabe garatzen hasi zela. Beraz, oso garrantzitsua da ulertzea benetan ez dugula akatsik eremuan, gertatzen dena da beharrezkoa dela baldintza pribilegiatuak onartzea unibertsoa ulertzeko. Hala ere, baldintza zehatz hauek onartu beharrean, muga hauei soluzio emateko inflazioa deituriko fenomenoak kontsideratuko dugu.

## 2.7 Soluzioa teoriaren arazoei (inflazioaren aurkezpena)

Lehendik auresan dugun moduan planteatutako arazoei soluzioa inflazioak emango die. Zuzenean honen aurkezpena eta deskribapena egin beharrean horizontearen arazoa nola konpontzen den ikusiko dugu. Bertatik zuzenean inflazioa zer den erraz ulertuko dugu, eta hori eginik jada deskribatutako fenomenoak nola lautasanaren mugarekin amaitzen duen adieraziko dugu.

### 2.7.1 Horizontearen arazoaren soluzioa

Horizontearen arazoa azaltzean partikulen horizontearen garrantzia azpimarratu dugu. Hau ikusi dugun moduan Hubbleren erradio kohigikorraren eboluzioaren menpekoea da. Beharrezkoa da bi kontzeptu hauen arteko desberdintasuna ondo ulertzea inflazioak planteatzen duen soluzioa ulertzeko.

Alde batetik, esan bezala bi partikula partikulen horizontea baina distantzia handiagoa bananduta badaude, hauek ezin izan dute inoiz euren artean komunikatu, ez daude kausalki lotuta. Bestalde, bi partikula hauen arteko distantzia  $(aH)^{-1}$  baino handiagoa bada hauek ezin izango dute kontaktuan egon orain, baina posible da beste uneren batean bai iraganean bai etorkizunean kontaktuan egotea.

Beraz, horizontearen arazoa konpontzeko nahikoa da unibertsoaren garai goiztiarretan Hubbleren erradio kohigikorra txikitzen doan fase bat sartzea:

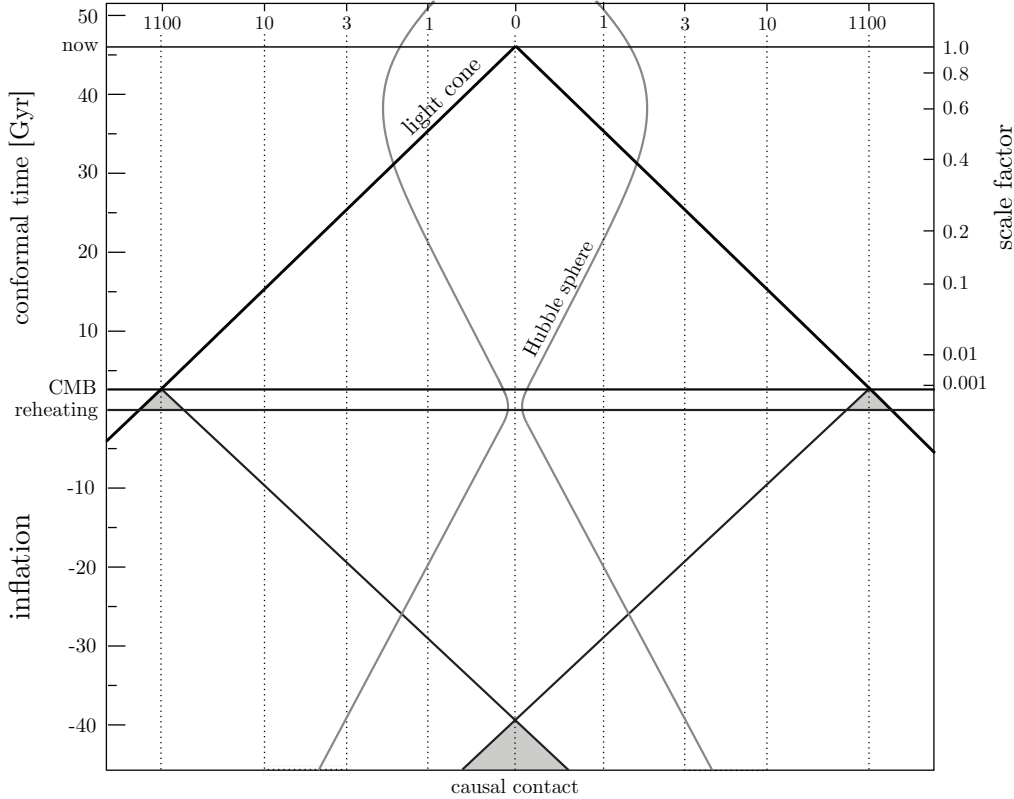
$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} < 0. \quad (2.57)$$

Honek suposatzen du, (2.49) adierazpenari jaramon egiten badiogu, garai horretan beharrezkoa dela  $\omega < -1/3$  betetzea eta beraz ohiko materiaren energiaren baldintza ez betetzea. Hau horrela izanik partikulen horizontean hasierako kontribuzioa ez da arbuigarria eta ondoko balioa izango du:

$$\tau_i \propto \frac{2}{(1+3\omega)} (a_i H_i)^{-1} \rightarrow -\infty, \quad (2.58)$$

non esan bezala Hubbleren erradio kohigikorra txikitzen badoa, hasierako unean hau oso handia izango den eta  $\omega < -1/3$  hartzen den.

Honek suposatzen du denbora konforme gehiago egotea CMB-aren igorpenaren eta hasierako singularitatearen artean. Hau erraz ikusi daiteke 2.9 irudian. Bertan ikusten dugu denbora konforme gehiago izateak CMB-aren garaian kausalki lotuta ez zeuden puntuak iraganean haiek kontaktuan egotea suposatzen duela. Beraz, honek horizontearen arazoari irtenbide ematen dio.

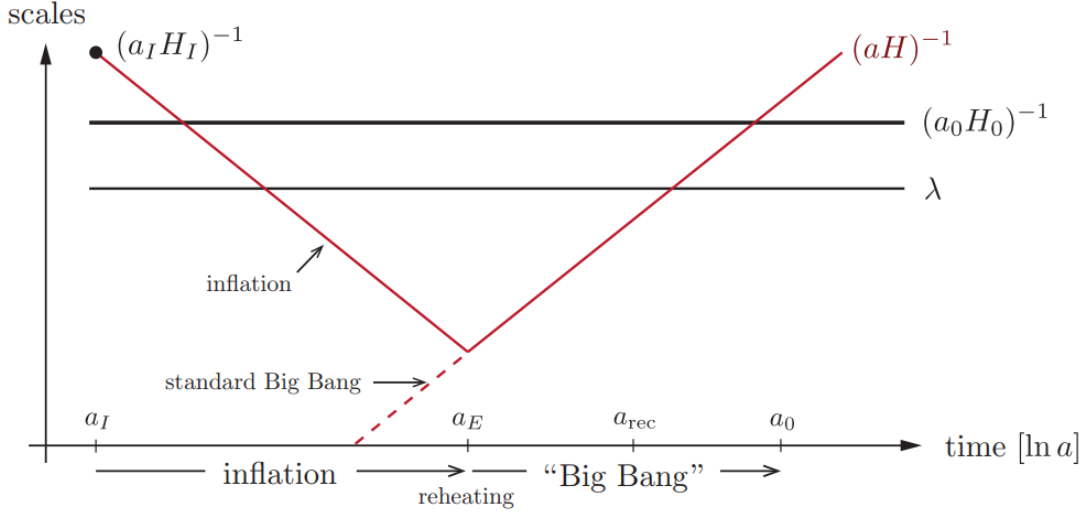


2.10. Irudia: (2.9) irudiaren moldaketa inflazioaren garaia sartuz, hots, ikusi daitekeen bezala denbora konforme negatiboko eta  $(aH)^{-1}$  beherakorren garaia. Irudi berrian jada CMB-aren igorpenaren garaiko puntu guztiak kausalki lotuta daude iraganean gainezartzen diren argi-konoak baitaizkate. Ohartu singularitatearen ordez  $\tau = 0$  aldiunea inflazioaren eta Big Bang eredu estandarren trantsizioari dagokiola. [12]

Denbora konforme gehiago sartze honi, hots,  $(aH)^{-1}$  txikitzen ari den fase honi, inflazio deritzo. Jada  $\tau = 0$  ez da singularitateari dagokion garaia izango eta Big Bang estandarrek deskribatutako garaia eta inflazioaren arteko muga adieraziko du.

Beste era bat hau ikusteko 2.11 irudia aztertzea da. Suposatu dezagun gaur egun behagarriak diren eskala kosmologikoak  $\lambda$ -ren bidez adierazten ditugula. Horretaz gain, Hubbleren erradio kohigikorrek esaten digu aldiune bakoitzean zer distantziatar hitz egin dezaketen partikulek. Orduan, orain behagarria den unibertsoa inflazioa hasi baino lehenago aldiune horretako Hubbleren erradio kohigikorraren barruan balego, ez genuke horizontearen arazorik izango. Honek  $(a_I H_I)^{-1} > (a_0 H_0)^{-1}$  izatea suposatzen du, izan ere, horrela orain neurtzen ditugun eskalak inflazioa hasi baino lehen  $(aH)^{-1}$  barruan egingo lirarteke.

Beraz, baldintza hau betetzeko zenbait inflazio behar den jakitea interesatzen zaigu. Izan ere, honek homogeneous espaziala finkatzeko inflazioak zenbat denbora iraun behar duen esaten digu, eta horrela CMB-an neurtutako emaitzak jada ez dira ulergaitzak izango.



2.11. Irudia: *Diagraman ikusten da nola gaur egun behatzen dugun unibertsoa zati handi batean Hubbleren erradio kohigikorretik kanpo dagoen. Hala ere inflazioa gertatu baina lehen, unibertso goiztiarrean, neurtzen ditugun eskala horiek ( $\lambda$ -ren bidez adierazten da eskala hori, hau bi partikulen arteko distantzia kohigikor moduan hartuz)  $(aH)^{-1}$ -ren barruan daude.* [12]

## 2.7.2 Lautasunaren arazoaren soluzioa

Lehen esan dugun moduan gaur egun unibertsoaren kurbadura ia laua dela neurtzen dugu, eta hau horrela izateko hasiera batean Big Bang-aren eredu estandarren arabera, unibertsoak oraindik eta lauagoa izan behar zuen. Horizontearen arazoa aztertzean inflazioaren soluzioa planteatu dugu eta honek  $(aH)^{-1}$  handitzen den garaiari egiten dio erreferentzia. Horren arabera, (2.56) adierazpenari jaramon egiten badiogu, inflazioan zehar unibertsoa lautasunerantz doa:

$$\text{Inflazioa} \quad \Rightarrow \quad (aH)^{-1} \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_{\text{tot}} \rightarrow 1. \quad (2.59)$$

Izatez, honek suposatzen du berdin duela inflazioa baina lehenagoko kurbadurak, izan ere inflazioak hasierako edozein egoera lautasunera eramango baitu. Hortaz, inflazioa amaitu eta gero, Big Bang-aren eredu estandarrek azaldutako garaia kurbadura nuluko unibertsoetik hasiko litzateke eta beraz ereduaren garapena eta gaur egungo behaketak bat etorriko lirake. Hala ere lehen aipatu dugun moduan beharrezkoa da hasierako lautasuna ia perfektua izatea eta hortaz beharrezkoa da inflazioa kantitate bat izatea.

## 2.7.3 Inflazioaren parametroak

Orain arte ikusi dugu inflazioak aukera ematen digula lehen aipatutako mugak gainetik kentzeko. Hala ere garai honen inguruan ez dugu gauza gehiegi zehaztu. Lehen esan dugu inflazioa (2.57) baldintza betetzen duen garaia dela, eta honek Hubbleren parametroa geldoki aldatzea eragingo du. Hau ikusteko garatu dezagun Hubbleren erradio kohigorraren deribatua eta erabil dezagun (2.57):

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = -\frac{\dot{a}H + a\dot{H}}{(aH)^2} = -\frac{1}{a}(1 - \varepsilon) < 0 \quad \text{non} \quad \varepsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2}. \quad (2.60)$$

Beraz  $\varepsilon$  parametroak baldintza hau beteko du:

$$0 < \varepsilon < 1. \quad (2.61)$$

Parametro hau  $H$ -ren menpe idazteko  $e$ -fold kantitatea definituko dugu lehenik. Hau eskala faktorea zenbat aldatzen den neurtzen duen  $N$  kantitatea da eta honela definitzen da:

$$dN = d \ln a = H dt . \quad (2.62)$$

Honek esan nahi du (2.62) honela berridatzi dezakegula:

$$0 < \varepsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{d \ln H}{dN} < 1 . \quad (2.63)$$

Hortaz,  $\varepsilon$  parametroaren baldintzatik ikusten dugu Hubbleren parametroaren e-fold bakoitzeko aldaketa txikia izango dela inflazioan zehar, eta beraz geldoki aldatuko da. Izatez estimatzen da inflazioaren iraupenak  $N > 60$  izan behar duela lehen aipatutako lautasunaren eta horizontearen mugei soluzioa emateko.

Hau beste modu batera adierazi daiteke esanez  $\varepsilon$  parametroaren aldaketak txikia izan behar duela  $N$ -rekiko. Hau adierazteko  $\eta$  parametroa idatziko dugu:

$$|\eta| = \left| \frac{\dot{\varepsilon}}{H\varepsilon} \right| = \left| \frac{d\varepsilon}{dN} \right| < 1 . \quad (2.64)$$

Beraz, era laburrean adierazi ditugu inflazioa ezaugarritzen duten parametroak. Hala ere, fenomeno hau ikertzen jarraitzeko beharrezkoa da kontzeptu berriak sartzea eta hau hurrengo kapituluan egingo dugu. Bertan eremuen kontzeptua sartuko dugu eta hauen bidez ekuazio esanguratsuenak eta inflazioaren baldintzak idatziko ditugu.



## 3. Kapituluua

# Inflazioa

Aurreko atalean inflazioaren aurkezpena egin dugu. Sarreran aipatu den moduan, inflazioak Big Bang eredu estandarren arazoei soluzioa ematen die eta gainera eredu honen hasierako-baldintzak finkatu. Izatez, inflazioak bete beharreko baldintzak aurkeztu dira baina ez da zehaztu zerk gidatzen duen fenomeno hau.

Inflazioa jarraian aurkeztuko den eremu eskalar batek gidatuko du, hau baita aukeraketa erraz eta estandarrena. Eremu eskalar honi *inflatoia* deritzo. Kotsideratuko dugu, kalkulua errazteko, eremu eskalar hau homogeneoa dela. Honekin soilik ez da posible izango inflazioak ezartzen dituen hasierako-baldintzak azaltzea, baina geroago aztertuko ditugun fluktuazio kuantikoak gehitzean posible izango da hauek ulertzea.

Hau eginik, materia eta grabitazioa erlazioatuko dituen akziorik sinpleena idatziko dugu. Honek eremuen menpe Friedmannen ekuazioak idaztea ahalbidetuko digu eta hortik aurreko kapituluako inflazioaren parametroak berridatziko ditugu. Azkeneko hauek, inflazioan zeharreko baldintzak adieraziko dituen Slow-Roll hurbilketara eramango gaituzte. Azkenik, eredu hurbildu honek, zeinak inflazioa deskribatuko duen, Big Bang ereduaren hasierara eramango gaitu.

### 3.1 Eremuak kosmologian

Ezertan sartu aurretik eremuei buruzko sarrera txiki bat egingo dugu. Mekanika klasikoan, formalismo lagrangearrean, erraza da partikula eta dimentsio kantitate ezberdinekin lan egitea. Dimentsio batean  $N$  partikula izanik,  $N$  koordenatu orokortu,  $x_i(t)$ , izango ditugu eta  $N$  momentu konjokatu,  $p_i(t)$ , non  $i = 1, 2, \dots, N$ . Izatez, orain arte espazioa era diskretuan interpretatu dugu, baina horren ordez espazio-denbora koordenatuak emango dizkigun eremuetara pasako gara. Hau sistema jarraituekin lan egingo dugulako da, eta kasu horietan hobe da eremuekin lan egitea.

Adibidez, kotsideratzen badugu gure sistema soka oszilakor bat dela, hau  $N$  osziladore harmonikok osatuko dute non puntu bakoitza sokarekiko norabide perpendikularrean desplazatuko den.  $N \rightarrow \infty$  eramaten badugu sokaren deskribapena era zehatzagoan egin ahal izango dugu, hau jarraitutzat kotsideratuz [13]:

$$x(t) \Rightarrow \phi(x, t). \quad (3.1)$$

Orain,  $\phi(x, t)$ -k, sokaren puntu eta momentu konkretu bateko desplazamendua ematen digu, eta hortaz, hau eremu koordenatua izango da. Adierazpena hiru dimentsiotara orokortzeko nahikoa da  $x \rightarrow \vec{x}$ , eta beraz,  $\phi(x, t) \rightarrow \phi(\vec{x}, t)$  aldaketak egitea.

#### 3.1.1 Eremu eskalar baten akzioa

Lehen aipatu dugun moduan gure aukeraketa eremu eskalarrekin lan egitea izango da. Hau aukeraketa esatandarrena da inflazioa deskribatzeko, izan ere, Lorentz-en transformazioekiko inbariantek dira [13]. Honek esan nahi du eremu eskalarra aldaezina dela errotazio espazialekiko eta Lorentzen *boost*-ekiko.

Eremu eskalarrek kosmologian duten eboluzioa aztertzeke beharrezkoa da hauek espazio-denbora kurbatuan duten garapena ulertzea. Koordenatu orokortuekin egin ohi den moduan akzio minimoaren printzipioa

erabiliko dugu. Gure sistemaren akzioa erlatibitate orokorra kontuan hartuz ondokoa izango da [14]:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}, \quad (3.2)$$

non  $\mathcal{L}$  langranger dentsitatea den, hau Lorentz-en transformazioekiko inbariantea izanik.

Kasu honetan, ohartzen gara normalean mekanika klasikoan agertzen ez den beste faktore bat azaltzen dela. Espazio-denbora lauan bolumen unitatea  $dx^4$  moduan sartzen da, baina erlatibitate orokorrean hau kurbatua izan daiteke eta beraz bolumen unitatea  $\sqrt{-g}$  moduan sartzen da (3.2) adierazpenean ikusten dugun moduan. Bertan,  $g$  tentsore metrikoaren determinantea da.

Bestalde, materia eta grabitazioa bateratuko dituen langranger dentsitatea behar dugu, izan ere Einsteinen ekuazioek biak nahasten dituzte. Horretarako, eremu eskalarra erlatibitate orokorrarekin minimoki akoplatzen duen langranger dentsitatea era honetan idatzi behar dugu [7]:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{E-H}} + \mathcal{L}_M, \quad (3.3)$$

Edo (3.2) adierazpena erabiliz, akzio osoa honela idatziko dugu:

$$S = S_{\text{E-H}} + S_M. \quad (3.4)$$

Bertan, ikusten dugu akzio osoa bi terminoz osatuta dagoela. Lehenengoan, grabitazioari dagokion akzioa dugu eta honi Einstein-Hilbert akzioa deritzo. Hau honela idazten da [7]:

$$S_{\text{E-H}} = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{R}{2}, \quad (3.5)$$

non  $R$  aurreko kapituluan (2.25)-n definitu dugun Ricciren eskalarra den.

Hau idatzirik, Einsteinen hutseango ekuazioak lortu daitezke  $S_{\text{E-H}}$  akziotik. Horretarako nahikoa da Einstein-Hilbert akzioa tentsore metrikoarekiko bariatzea eta akzio-minimoaren legetik hau nulua denez [7]:

$$\frac{\delta S_{\text{E-H}}}{\delta g_{\mu\nu}} = 0 \Rightarrow G_{\mu\nu} = 0. \quad (3.6)$$

Honetaz gain, akzio osoan materiari dagokion terminoa dugu. Hau lehen aipatu dugun eremu eskalarraren menpekoea da. Ondorioz, materiari dagokionez langranger dentsitatea eta akzioa era honetan idazten dira [7]:

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \Rightarrow S_M = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right], \quad (3.7)$$

non  $\mathcal{L}_M = 0$  denean hutsa izango dugun eta beraz akzio-osoa Einstein-Hilbert akzioa soilik. Aukeraketa honetan termino koadratikoak erarik sinpleenean azaltzen dira eta lortzen diren higidura-ekuazioak Klein-Gordon delakoak dira [13].

Behin hau jakinik, espazio-denbora kurbatua materia sartzeko akzio osoaren adierazpena idatziko dugu [6]:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} R + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right]. \quad (3.8)$$

### 3.1.2 Friedmannen ekuazioak eremu eskalarren arabera

Eremu eskalarrak printzipio kosmologikoa bete dezan beharrezkoa da homogenea izatea. Hau horrela izanik, era honetan idatziko dugu:

$$\phi(\vec{x}, t) = \phi(t). \quad (3.9)$$

Aurreko atalean bateratze minimoari dagokion akzioa idatzi dugu. Behin hau izanik, gure helburua Friedmannen ekuazioak idaztea izango da aurreko kapituluan egin dugun moduan, baina kasu honetan eremu eskalarren menpe.

Beraz, lehenik eta behin energia-momentu tentsorea lortuko dugu. Horretarako nahikoa da (3.8) akzioa tentsore metrikoarekiko bariatzea jarraian erakusten den adierazpena jarraituz [6]:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left[ \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + V(\phi) \right]. \quad (3.10)$$

Behin adierazpen hau izanda, aurreko kapituluan lortu ditugun emaitzekin konparatuko dugu. Horretarako, oroitu FLRW metrikaren bidez fluido perfektua garatzean, energia-momentu tentsorearen gai ez nuluak presioa eta energia-dentsitatearen menpe idatzi ditugula (hau (2.30) adierazpenean adierazi dugu). Hortaz,  $p$  eta  $\rho$  honela idazten dira eremuen menpe :

$$T_{00} = \rho \quad \Rightarrow \quad \rho_\phi \equiv \rho = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (3.11)$$

$$T_{ii} = g_{ii} p \quad \Rightarrow \quad p_\phi \equiv p = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad (3.12)$$

non eremu eskalarra homogenea izanik, denboraren menpekotasuna duela soilik hartu den kontuan garapenak egiteko.

Orain Friedmannen ekuazioak berridazteko, berriro ere aurreko kapituluan lortutako emaitzak erabiliko ditugu. Zehazki, lehen energia-dentsitatearen eta presioaren menpe idatzi ditugun Friedmannen ekuazioak baliatuko ditugu, (2.31) eta (2.32) hain zuzen ere. Hauetan, eremuen menpeko (3.11) eta (3.12) adierazpenak ordezkatzeko baditugu:

$$H^2 = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right] - \frac{k}{a^2}. \quad (3.13)$$

$$H^2 + \dot{H} = -\frac{1}{3} \left[ \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right] \quad \Rightarrow \quad \dot{H} = -\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{k}{a^2}. \quad (3.14)$$

Hala ere, sinplifikazio bat egingo dugu analisia errazteko. Zehazki kurbadura nulutzat hartuko dugu eta beraz  $k=0$  balio ordezkatzeko dugu (3.13) eta (3.14) adierazpenetan:

$$H^2 = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right]. \quad (3.15)$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{2} \dot{\phi}^2. \quad (3.16)$$

Hala nola, eremuen menpe jarraitasun-ekuazioa ere idatzi dezakegu. Horretarako berriro ere aurreko kapituluan garatutako adierazpen batera joko dugu. Kasu honetan, (2.35) ekuazioa erabiliko dugu. Bertan, nahikoa da (3.11) eta (3.12) adierazpenak ordezkatzeko ondokoa lortzeko:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right] + 3H \dot{\phi}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\phi} + 3H \dot{\phi}^2 + V' = 0, \quad (3.17)$$

non  $V' = \frac{dV}{d\phi}$  den. Bestalde,  $\phi$ -ren higidura ekuazioa dugu bertan. Hau Euler-Lagrange ekuaziotik lortuko genukeenaren berdina da.

Beraz, lehen geneuzkan higidura-ekuazioak lortu ditugu. Kasu honetan, hauek hasieran aipatu dugun eremu eskalarraren menpekoak dira, hau denboraren menpekoa izanik soilik. Ohartu potentzialaren menpekotasuna ere badugula, baina hau eremuaren menpekoa izango da.

### 3.1.3 Inflazioaren baldintzak eremuekiko

Behin eremu eskalarrekiko Friedmannen ekuazioak izanik, jada badauzkagu tresna nahikoak inflazioa aztertzeke hauek erabiliz. Horretarako aurreko kapituluko azken atalera joan behar dugu. Bertan, Hubbleren parametroa inflazioan oso astiro aldatzen dela zehazten da, hau ia konstante mantentzen delarik hedapen azeleratuak irauten duen bitartean. Hau ikusteko lehenik  $\varepsilon$  parametroa definitu dugu (2.60) adierazpenean eta honek inflazioan zehar (2.61) baldintza bete behar duela esan dugu. Hortaz, hau eremuen menpe ikusteko,  $\varepsilon$  parametroa  $\phi$ -ren menpe idatziko dugu. Sar ditzagun beraz (3.15) eta (3.16) ekuazioak (2.60) adierazpenean:

$$\varepsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} = -3\frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)} < 1. \quad (3.18)$$

Beraz, inflazioak irauten duen bitartean, eremu eskalarrek zein honen menpeko potentzialak aurreko baldintza bete beharko dituzte.

Bestalde,  $H$ -ren inflazioaren zeharreko aldaketa geldoa adieraztean,  $\varepsilon$  parametroak ere berdin jokatuko duela zehaztu dugu. Hau erakusteko  $\eta$  parametroa erabili dugu. Hortaz, orain hau ere eremuekiko idatziko dugu, horretarako (3.16) eta (3.18) adierazpenak aurreko kapituluko (2.64) baldintzan ordezkatur:

$$|\eta| = \left| \frac{\dot{\varepsilon}}{H\varepsilon} \right| = \left| 2 \left[ \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}H} - \frac{\dot{H}}{H^2} \right] \right| < 1. \quad (3.19)$$

Ohartu bigarren terminoan  $\varepsilon$  ordezkatu dezakegula. Bestalde,  $\delta$  azelerazio adimentsionalaren parametroa horrela definitzen badugu [15]:

$$\delta = -\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}H}. \quad (3.20)$$

Posible da era honetan  $\eta$  berridaztea (3.19) adierazpenari jarraituz:

$$|\eta| = |2(\varepsilon - \delta)| < 1. \quad (3.21)$$

Beraz, inflazioaren parametroek bete behar dituzten baldintzak jada  $\phi$  eremuaren menpe idaztea lortu dugu. Hau horrela izanik, jarraian azalduko dugun atalean, baldintza hauek beteko dituen eredua ikusiko dugu. Honen izena *Slow-Roll inflazio eredua* da.

## 3.2 Slow-Roll inflazio eredua

Slow-Roll inflazio eredua ulertzeko aurreko ataleko baldintzetan sakonduko dugu. Lehenik, inflazioa gertatzeko beharrezkoa den (3.18) baldintza aztertuko dugu. Bertan,  $\varepsilon < 1$  izateak, potentziala termino zinetikoari gailentzea eskatzen du [15]:

$$|V(\phi)| \gg \left| \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \right|, \quad (3.22)$$

eta hau mantentzea beharrezkoa da inflazioak irauten duen bitartean. Orduan baldintza honek irauteko inflazioari dagokion azelerazioak txikia izan behar du. Horregatik, azelerazio adimentsionala adierazten duen terminoari ondokoa eskatuko diogu [15]:

$$|\delta| = \left| -\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}H} \right| \ll 1. \quad (3.23)$$

Hortaz, bi baldintza hauek bermatzen dute bai  $H$  bai  $\varepsilon$  e-fold aldaketekiko oso era geldoan aldatzea. Beste modu batean esanik  $\varepsilon, |\delta| \ll 1 \rightarrow \varepsilon, |\eta| \ll 1$  inplikazioa gertatzen da. Hortaz, ikusi ditugun baldintza hauei Slow-Roll baldintzak deritze. Hauek baliatuz gure hurrengo helburua Friedmannen ekuazioak moldatzea izango da, hurbilketak kontuan izanik.

Beraz, Slow-Roll hurbilketa aplikatzen hasiko gara gure higidura-ekuazioetan. Lehenik (3.22) baldintza Friedmannen eremuekiko (3.15) ekuazioari aplikatzen badiogu ondokoa lortuko dugu:

$$H^2 \simeq \frac{1}{3}V(\phi). \quad (3.24)$$

Bestalde, azelerazio adimentsionalari dagokion (3.23) baldintza, eremu eskalarrekiko jarraitasun-ekuazioan (3.17) aplikatzen badugu, ondorengo adierazpenera pasako gara:

$$3H\dot{\phi} \simeq -V' . \quad (3.25)$$

Hau horrela, jada badauzkagu Slow-Roll hurbilketarako inflazioaren dinamika ematen duten ekuazioak. Orain, ditugun parametroak moldatuko ditugu, Slow-Roll hurbilketari dagozkion parametroak lortzeko.

Lehenik eta behin, Slow-Roll hurbilketa  $\varepsilon$  parametroari aplikatuko diogu. Horretarako, hurbilketak egin baino lehen (3.16) ekuazioa (2.60) adierazpenean ordezkatzeko dugu. Hau eginik (3.24) eta (3.25) ekuazio hurbilduak sartu ditzakegu eta horrela Slow-Roll hurbilketak aplikatuz:

$$\varepsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2}{H^2} \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{V'}{V}\right)^2 . \quad (3.26)$$

Bestalde,  $\eta$  lortu nahi dugu Slow-Roll baldintzak aplikatuz. Hala ere, hau zertxobait luzeagoa da. Hasteko (3.25) denborarekiko deribatuko dugu:

$$3\dot{H}\dot{\phi} + 3H\ddot{\phi} \simeq \dot{\phi}V'' \quad \Rightarrow \quad \ddot{\phi} \simeq -\dot{\phi}\frac{V'' + 3\dot{H}}{3H} . \quad (3.27)$$

Honek,  $\eta$  parametroaren hurbilketa idaztea ahalbidetuko digu. Horretarako, (3.21) adierazpenetik abiatuz:

$$\eta = 2(\varepsilon - \delta) = 2\left(\varepsilon + \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}H}\right) \simeq 2\left(\varepsilon - \frac{\dot{H}}{H^2} - \frac{V''}{3H^2}\right) \simeq 2\left(2\varepsilon - \frac{V''}{V}\right) . \quad (3.28)$$

Beraz, jada lortu dugu inflazioko parametroen adierazpen hurbilduak idaztea Slow-Roll ereduan. Hala ere, guk lortu ditugun (3.26) eta (3.28) adierazpenei Hubbleren Slow-Roll parametro esaten zaie, eta guri potentzialari dagozkion Slow-Roll parametroak interesatzen zaizkigu. Izan ere, hauen izenak berak esaten duen moduan potentzialaren menpekoak dira soilik. Hauek ondorengo eran idazten dira [15]:

$$\varepsilon_V \simeq \varepsilon \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{V'}{V}\right)^2 , \quad (3.29)$$

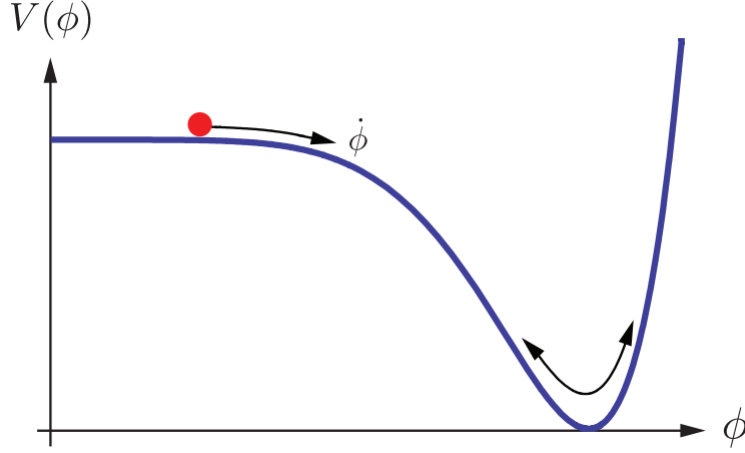
$$\eta_V \simeq 2\varepsilon - \frac{1}{2}\eta \simeq \frac{V''}{V} . \quad (3.30)$$

Beraz, ikusten dugu bi parametro hauek potentzialaren mendekoak direla soilik. Lehenengoaren kasuan eremuarekiko lehen deribatua azaltzen da eta bigarrenaren kasuan berriz, bigarren deribatua. Gainera, potentzial parametro hauen kasuan, Slow-Roll inflazioa betetzeko beharrezkoa da  $\varepsilon_V \ll 1$  eta  $|\eta_V| \ll 1$  baldintzak betetzea. Hau ikusteko nahikoa da  $\varepsilon$  eta  $\eta$  parametroek bete behar dituzten baldintzak (3.29) eta (3.30) adierazpenetan ordezkatzeari.

Baina, nola garatzen da inflazioa Slow-Roll hurbilketan? Orain arte parametroek bete behar dituzten baldintzak ikusi ditugu, baina jarraian era kualitatiboan zer gertatzen den ikusiko dugu.

Lehenik eta behin imajinatuko dugu inflazioa gidatzen duen eremu eskalarra pilota bat dela. Gainera, pilota hau malda batean zehar higituko da. Inflazioak irauten duen bitartean aldapa ez da oso handia izango eta astiro higituko da. Hala ere, momenturen batean malda handiegia izango da eta beraz inflazioa amaituko da. Hau da Slow-Roll eredua ulertzeko era sinplea eta 3.1 irudian ikusi dezakegu.

Hala ere, zehatzagoak izateko esan behar dugu maldan pilota astiro higitzea, (3.23) baldintzaren baliokidea dela. Bestalde, pilota deritzogunak jarraituko duen bidea azken finean potentzialaren  $\phi$  eremuarekiko adierazpena izango da. Izan ere, inflazioan zehar  $H$  hein handi batean konstante mantentzen bada, orduan potentziala ere konstantea izango da (3.24) hurbilketa kontuan hartzen badugu. Momenturen batean (3.23) baldintza ez da beteko eta (3.15) adierazpena erabili beharko dugu. Orduan,  $\varepsilon \simeq 1$  ingurura iristean inflazioa amaitzen dela kontsideratuko dugu.



3.1. Irudia: Irudi honetan *Slow-Roll* eredu adierazten da grafikoki. Horretarako potentziala inflazioa gidatuko duen eremu eskalarren menpe idazten da. Lehenengo zatian potentziala ia konstante mantenduko da  $\phi$  eremuarekiko baina momentu batean malda handiegia izango da eta hor bukatuko da inflazioa. [15]

### 3.3 Beharrezko inflazio kantitatea

Nola kalkulatu daiteke eredu honetan beharrezko inflazio kantitatea? Horretarako, (2.62) adierazpena erabiliko dugu e-fold kantitatea jakin ahal izateko. Hala ere, lehenago moldaketa batzuk egingo ditugu *Slow-Roll* hurbilketak erabiliz:

$$H dt = \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi \simeq -\frac{3H^2}{V'} d\phi \simeq -\frac{V}{V'} d\phi \simeq -\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_V}} d\phi. \quad (3.31)$$

Hau jakinik,  $N$  emango digun integrala idatzi dezakegu inflazioa gidatuko duen eremu eskalarren menpe:

$$N \simeq \int_{\phi_f}^{\phi_i} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_V}} d\phi, \quad (3.32)$$

non  $\phi_i$  eta  $\phi_f$  hasierako eta amaierako egoera eskalarrak diren, lehen esan bezala  $\varepsilon_V < 1$  bete bitartean.

Gaur egun, CMB-an neutzen diren anisotropia handienak inflazioa bukatu baino  $40 \sim 60$  e-fold inguru lehenago gertatu zirela estimatzen da [12]:

$$N_{\text{CMB}} \simeq 40 \sim 60. \quad (3.33)$$

Beraz inflazioaren iraupenari  $N_{\text{tot}} > N_{\text{CMB}}$  betetzea eskatu behar diogu, hau da, anisotropiak inflazioan zehar gertatu zirela onartzen badugu zentzuzkoa da inflazioaren iraupena handiagoa izatea onartzea.

### 3.4 Inflazioa amaitzean zer?

Inflazioa deskribatzeko kasurik sinpleena kontsideratu dugu: eremu eskalar bakarra. Gainera, hau unitertsoaren osagai bakarra dela suposatu dugu. Hau horrela izanik  $\varepsilon \rightarrow 1$  iristean inflazioa amaituko da. Behin inflazioa bukatu, 3.1 irudian ikusten dugu nola  $\phi$  eremuak potentzialaren minimoaren inguruan oszilatuko duela *birberotze* prozesuan. Prozesu honetan eremu eskalarrak presiorik gabeko materia moduan jokatzen du [6]:

$$\frac{d\rho_\phi}{dt} + 3H\rho_\phi = 0. \quad (3.34)$$

Denborarekin, minimoaren inguruan oszilatuz energia galtzen joango da inflatoia. Prozesu horretan partikula berriak sortzen joango dira eta inflatoia desagertuko da. Honen bidez, posible izan daiteke *Eredu Estandarreko* partikulen sorrerara azaltzea.

## 4. Kapituluia

# Fluktuazio kuantikoetatik kurbaduraren perturbazioetara

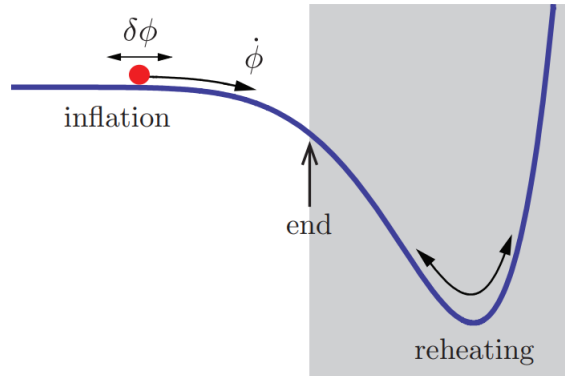
Inflazioa Big Bang ereduaren gehipenik arrakastatsuenan izan da, esan dugun moduan lautasunaren eta horizontearen arazoei soluzioa ematen dielako. Hala nola, horretaz gain unibertsoaren garapenaren hasierako baldintzak finkatzen ditu. Hala ere, baldintza hauek edo hainbat esperimentutan frogatu diren fluido primordialaren perturbazioak lortzeko, beharrezkoa da inflatoiaren fluktuazioak aztertzea.

Atal honen helburua fluktuazioek espazio-denboran eragiten dituzten perturbazioak, fisikoki esanguratsua den behagarri baten bidez kalkulatzeko izango da. Hala nola, fluktuazioen inguruan hauen sorrera eta inflazioan izango duten eboluzioa interesatuko zaigu. Bestalde, atal honetan oso garrantzitsua izango da hutsa finkatzea. Izan ere, horrela anbiguetateak saihestuko baititugu eta esangura fisikoa duten emaitzak lortu. Ohikoa den moduen perturbazio hauek potentzia-espektroaren bidez adieraziko ditugu, ondoren behaketa esperimentalekin bateragarriak izango diren emaitzen iragarpena eta konparaketa egiteko.

Aipatu ditugun fluktuazioak ulertzen hasteko beharrezkoa da inflazioa gidatzen duen  $\phi(t)$  eremua aztertzea, zeina FLRW metrikak deskribatutako unibertsoan denboraren menpekora den soilik. Ziurgabetasun printzipioa hartzen badugu kontuan, eremu honek fluktuazioak jasango ditu eta hauek espazioarekiko mendekotasuna izango dute:

$$\delta\phi(t, \vec{x}) \equiv \phi(t, \vec{x}) - \bar{\phi}(t). \quad (4.1)$$

Hau kontuan hartzen badugu, lokalki espazioko zonalde ezberdinek garapen ezberdina izango dute. Hau da, fluktuazioen ondorioz zonalde hauek momentu ezberdinean amaituko dute inflazioa, eta honek unibertsoan dentsitate ezberdineko guneak egotea eragingo du.



4.1. Irudia: Aurreko ataletan ikusitako eremuak gidatutako inflazioa fluktuazioak sarturik. [15]

Beraz, jarraian kuantikoki sortutako fluktuazioak aztertu eta hauek sortzen dituzten perturbazioak ezagarrituko ditugu

## 4.1 Perturbazio klasikoak

Lehen eremuaren fluktuazioak adierazteko (4.1) deskonposaketa egin dugun moduan, tentsore metrikoaren perturbazioak era berean banandu ditzakegu:

$$\delta g_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = g_{\mu\nu}(t) - g_{\mu\nu}(t, \vec{x}) , \quad (4.2)$$

non  $g_{\mu\nu}$  lehen proposatu dugun FLRW tentsore metrikoa den.

Ohartu eremuaren fluktuazioek baditugu, (4.1), hauek perturbazioak eragingo dituztela energia-momentu tentsorean eta hauek Einsteinen ekuazioei jarraituz tentsore metrikoan:

$$\delta\phi \Rightarrow \delta T_{\mu\nu} \Rightarrow \delta g_{\mu\nu} . \quad (4.3)$$

Bestalde, lehenik tentsore metrikoaren perturbazioak kontsideratzen baditugu, hauek eremuaren fluktuazioak eragingo dituzte berriro ere Einsteinen ekuazioei jarraituz:

$$\delta g_{\mu\nu} \Rightarrow \delta\phi . \quad (4.4)$$

Hortaz ikusten dugu bai eremuen fluktuazioak eta tentsore metrikoaren perturbazioak elkarlotuta daudela, erlazio zuzena egonik bien artean:

$$\delta\phi \iff \delta g_{\mu\nu} . \quad (4.5)$$

FLRW unibertsoan denbora konstanteko gainazalean aukera posible bakarra zegoen homogeneotasuna mantentzeko. Hala ere, unibertso perturbatu baten kasuan gainazal aukeraketa infinitua da, simetria galdu delako. Kasu horretan, denbora konstanteko gainazalen aukeraketa hortan dugu askatasunari *gauge* deitzen zaio.

Askatasun gradu fisikoekin jarduteko eta horrela lortzen diren emaitzak fisikoak izateko 2 estrategia posible daude:

- Gauge aldaezinak diren kantitateak eta hauei dagozkien higidura-ekuazioak lortzea.
- Gauge aukeraketa konkretu bat egitea.

Hasiera batean pentsa genezake eremu eskalar batek askatasun eskalar bat baino gehiago izango dituela. Hala ere, gauge askatasunak eta Einsteinen ekuazioetatik ondorioztatzen den (4.5) adierazpenak askatasun gradu eskalar bakarra aukeratzea ahalbidetzen digute. Izatez,  $\delta\phi$  eta  $\delta g_{\mu\nu}$  gaugearen menpekoak dira eta hauen konbinazio lineal bat izango da gauge aldaezina, eta beraz fisikoki esanguratsua.

Interesen arabera bi bideetako bat aukeratzen da. Gure kasuan hartuko dugun estrategia gaugea finkatzea izango da. Horrela denboraren zatiketa bakarra izango baita.

Izatez, aukeraketa posible ugari daude. Gure kasuan egokiena gauge kohigikorraren aukeraketa izango da. Hala ere, adibidez, CMB-aren fluktuazioen analisisa egin nahi izanez gero gauge newtondarra aproposagoa da [16].

### 4.1.1 Gauge kohigikorraren aukeraketa

Emaitza fisikoak lortu ahal izateko gure estrategia gauge konkretu bat hautatzea izango da. Esan bezala gauge kohigikorrarekin egingo dugu lan, era honetan analisisa errazagoa baita. Honi dagozkion adierazpenak ondokoak dira [6]:

$$\delta\phi = 0 , \quad \delta g_{ij} = a^2(1 - 2\zeta)\delta_{ij} + a^2 h_{ij} , \quad \partial_i h_{ij} = h_i^i = 0 . \quad (4.6)$$

Aukeraketa honek ( $\delta\phi = 0$ ) nahaspilatsua dirudien arren, aurretik aipatu dugun moduan  $\delta\phi$  eta  $\delta g_{\mu\nu}$ -ren konbinazio lineala bat izango da gauge inbariantea. Hau kurbaturaren askatasun kohigikorra,  $\zeta$ , izango da eta neurgarri ona izango da inflazioa ezaugarritzeko.

Bestalde,  $h_{ij}$ -ren baldintzak perturbazio tentsorialekin egongo dira lotuta. Gure kasuan ez dugu sakonduko hauetan, baina uhin-grabitazionalak aztertzeke ezinbestekoak dira [16].



### 4.1.2 Akzioaren garapen koadratikoa

Behin, gauge kohigikorra aukeraturik minimoki akoplatutako (3.8) akzioa  $\zeta$ -ren menpe idaztea izango da gure helburua. Horretarako, tentsore metrikoaren perturbazioak  $\zeta$ -ren menpe idatzi eta akzioaren garapena egingo dugu honen orden koadratikora arte [15]:

$$S = \frac{1}{2} \int dt d^3 \vec{x} a^3 \frac{\dot{\phi}^2}{H^2} \left[ \dot{\zeta}^2 - \frac{1}{a^2} (\partial_i \zeta)^2 \right], \quad (4.7)$$

non esan bezala  $\zeta$ -ren bigarren ordena baina altuagoko gaiak arbuiatu egin diren.

Akzio koadratikoaren analisiarekin jarraitzeko, aldagai aldaketa bat egingo dugu, Mukhanov-en aldagaia definituz [15]:

$$v \equiv z \zeta. \quad (4.8)$$

non  $z$ -ren balioa ondokoa den:

$$z^2 \equiv a^2 \frac{\dot{\phi}^2}{H^2} = 2a^2 \varepsilon. \quad (4.9)$$

Hau kontuan izanik eta denbora konformea erabiliz, (4.7) akzioak itxura hau hartzen du:

$$S = \frac{1}{2} \int d\tau d^3 \vec{x} \left[ (z\zeta')^2 - (z\partial_i \zeta)^2 \right], \quad (4.10)$$

non  $(\dots)' = \frac{\partial}{\partial \tau}(\dots)$ .

Hau moldatzen jarraitzeko  $\partial_i z = 0$  dela kontuan hartuko dugu, eta gainera  $v' = z'\zeta + z\zeta'$ :

$$S = \frac{1}{2} \int d\tau d^3 \vec{x} \left[ (v')^2 - (\partial_i v)^2 + (z'\zeta)^2 - 2v'z'\zeta \right], \quad (4.11)$$

Bestalde, jakinik  $(z'/z)' = (z''/z) - (z'/z)^2$  dela:

$$S = \frac{1}{2} \int d\tau d^3 \vec{x} \left[ (v')^2 - (\partial_i v)^2 + \frac{z''}{z} v^2 - \left( \frac{z'}{z} \right)' v^2 - 2v'v \frac{z'}{z} \right], \quad (4.12)$$

Azkeneko bi terminoak adierazpen honen berdinak dira:

$$\left[ \frac{z'}{z} v^2 \right]' = \left( \frac{z'}{z} \right)' v^2 + 2 \frac{z'}{z} v' v, \quad (4.13)$$

eta deribatu osoa akziotik kendu dezakegu, mugalde-baldintzek ezabatu egingo baitute higidura ekuazioan azaldu gabe. Beraz, akzioaren itxura definitiboa:

$$S = \frac{1}{2} \int d\tau d^3 \vec{x} \left[ (v')^2 - (\partial_i v)^2 + \frac{z''}{z} v^2 \right]. \quad (4.14)$$

Akzio honek harmoniko oszilakorraren itxura berdina du, baina masa denboraren menpekota izanik. Beraz, masa efektiboak ondokoa betetzen du (4.9) adierazpenari jarraituz:

$$m_{\text{eff}}^2 \equiv -\frac{z''}{z} = -\frac{H}{a\dot{\phi}} \left( \frac{a\dot{\phi}}{H} \right)'' . \quad (4.15)$$

Bertan, masaren denborarekiko menpekotasuna dugu,  $\zeta$  perturbazio eskalarrak ingurune grabitatorioarekin duen interakzioetatik.

### 4.1.3 Mukhanov-Sasaki ekuazioa

Aurreko akzioari dagokion higidura-ekuazioa,  $v$ -rekiko akzio hau bera bariatuz lortuko dugu:

$$\frac{\delta S}{\delta v} = 0 \Rightarrow v'' - \partial_i^2 v - \frac{z''}{z} v^2 = 0 . \quad (4.16)$$

Baina,  $v = v(\tau, \vec{x})$  eremua izanik, posible da hau Fourier-en modu hedapenaren bidez garatzea [14]:

$$v(\tau, \vec{x}) \equiv \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} v_{\vec{k}}(\tau) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} . \quad (4.17)$$

Beraz, (4.17) erabiliz (4.16) ekuazioak honelako itxura izango du, hau Mukhanov-Sasaki ekuazioa izanik:

$$v_{\vec{k}}'' + \left( k^2 - \frac{z''}{z} \right) v_{\vec{k}} = 0 , \quad (4.18)$$

non  $\omega_k^2(\tau) = k^2 - \frac{z''}{z}$  maiztasuna definitu dezakegun eta  $v_{\vec{k}}$  moduen menpe idatzi dugun ekuazioa.

Kasu honetan, (4.18) ekuazioaren soluzio analitiko orokorra bilatzea oso zaila da, izan ere,  $z = z(\tau)$  daukagu. Beraz hurbilketak egingo ditugu era intuitiboan ulertzeko higidura-ekuazioaren esanahia. Horretarako, de Sitterren espazioan egingo dugu lan. Hau inflazio baldintzaren kasu muturrekoa da non  $\varepsilon = 0$ , eta (2.48) ekuazioan ikusi dugun moduan konstante kosmologikoak dominatutako unibertsoaren dinamika berdina izango dugun. Lor dezagun beraz de Sitterren unibertsoan nola aldatzen den eskala faktorea, jakinik  $H$  konstantea dela:

$$\frac{\dot{a}}{a} = H = kte \Rightarrow \frac{da}{a^2} = d\tau H \Rightarrow a = -\frac{1}{H\tau} , \quad (4.19)$$

non  $dt = a d\tau$  berdintza erabili den.

Hau jakinik, de Sitterren espazioan Mukhanov-Sasaki ekuazioko maiztasuneko bigarren gaiak, (4.15) definizioari jarraituz ondorengo itxura izango du:

$$\frac{z''}{z} = \frac{2}{\tau^2} , \quad (4.20)$$

non gogorarazi de Sitterren espazioan egonik  $H$  konstantea den eta gainera  $\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = 0$ .

Horregatik, Mukhanov-Sasaki ekuazioa horrela hartzen da de Sitterren espazioan:

$$v_{\vec{k}}'' + \left( k^2 - \frac{2}{\tau^2} \right) v_{\vec{k}} = 0 . \quad (4.21)$$

Ohartu (4.20) adierazpena Hubbleren erradio kohigorraren menpekota dela, kasu honetan honen alderantzizkoaren karratuaren menpekota:

$$\frac{z''}{z} = \frac{2}{\tau^2} = 2[(aH)^{-1}]^2 , \quad (4.22)$$

Bestalde,  $k$  uhin luzeraren alderantziz proportzionala da. Hau argi izanik,  $(aH)^{-1}$  baino askoz txikiagoak diren uhin luzeretak, hau da *subhorizontearen* kasuan:

$$k^2 \gg \left| \frac{z''}{z} \right| \Rightarrow v_{\vec{k}}'' + k^2 v_{\vec{k}} = 0 . \quad (4.23)$$

Ekuazio honek soluzio oszilakorrak behar ditu:

$$v_{\vec{k}} \propto e^{\pm i k \tau} , \quad (4.24)$$

eta beraz modu oszilakorrak izango ditugu horizontearen barruan.

Hala ere, aurkako kasuan,  $(aH)^{-1}$  baino askoz handiagoak diren uhin luzeretakoa, hau da *superhorizontean*:

$$k^2 \ll \left| \frac{z''}{z} \right| \Rightarrow v_k'' - \frac{2}{\tau^2} v_k = 0. \quad (4.25)$$

Hau askatzeko  $v_k \propto \tau^r$  moduko soluzioa probatzen da. Horrela, bi soluzio lortzen dira,  $r = -1$  eta  $r = 2$  dutenak:

$$v_k^{(1)} \propto \tau^{-1}, \quad (4.26)$$

$$v_k^{(2)} \propto \tau^2. \quad (4.27)$$

Hala ere, badakigu inflazioak gutxi gorabehera denbora konforme oso negatibotatik balio nulura jotzen duela. Beraz bigarren soluzioa beherakorra da eta baztertu dezakegu, eta lehenengoarekin, hau da, gora-korreakin geratu superhorizontearen kasurako:

$$v_{\vec{k}} \propto z \propto \tau^{-1}. \quad (4.28)$$

Emaitza hau hartzen badugu eta (4.8) adierazpenean ordezkatu, kurbadura eskalarrari dagokion modua horrelakoa da:

$$\zeta_{\vec{k}} = z^{-1} v_{\vec{k}} \propto kte. \quad (4.29)$$

Honen esanahia ulertzeko inflazioari begirada bat emango diogu. Oroitu inflazioan zehar Hubbleren erradio kohigikorra txikitzen doala. Beraz, kurbaduraren perturbazioak inflazioan zehar unerren batean  $(aH)^{-1}$ -tik atera eta izoztu egingo dira, (4.29) adierazpenari jarraituz. Hala ere inflazioa amaitu ondoren Hubbleren horizontea handitzen hasiko da eta berriro ere barrura sartuko dira moduak.

Idea hau oso garrantzitsua da. Izan ere, fisikoki esanguratsuak diren kurbaduraren perturbazioak, inflazioan zehar horizontetik ateratzean izoztu egingo dira eta erradiazioa gainezartzen den momentuan berriz sartu. Honen ondorioz, birberotzeak edo tarteko energia altuko fisikak ez diete eragingo, eta inflazioaren *argazki zuzen* bat izan dezakegu.

#### 4.1.4 Soluzio moduen analisisa

Atal honetan, kuantizazioarekin hasi baina lehen, Mukhanov-Sasaki ekuazioko moduak, hau da,  $v_{\vec{k}}$  soluzioak aztertuko ditugu.

Lehenik eta behin, kontuan har dezagun  $v(\tau, \vec{x})$  funtzio erreala izanik, orduan moduen konplexu konjokatuak bete beharreko baldintza hau dela:

$$v_{\vec{k}}^*(\tau) = v_{-\vec{k}}(\tau). \quad (4.30)$$

Hau jakinik, eta ohartuz Mukhanov-Sasaki ekuazioaren maiztasunaren,  $\omega_{\vec{k}}^2(\tau)$ , menpekotasuna  $k \equiv |\vec{k}|$  dela, honen soluzioa era honetan idatz daiteke [14]:

$$v_{\vec{k}} \equiv a_{\vec{k}}^- v_k(\tau) + a_{-\vec{k}}^+ v_k^*(\tau), \quad (4.31)$$

non geroago adierazpena era zuzenagoan azaltzeko bigarren gaian  $-\vec{k}$  indizea finkatu dugun. Gainera, (4.30) baldintza kontuan hartuz,  $a_{\vec{k}}^+ = (a_{-\vec{k}}^-)^*$ .

Bestalde, Fourierren moduen (4.17) hedapena berreskuratuz, eta bertan (4.31) soluzioa sartuz, ondorengo emaitza lortzen da:

$$v(\tau, \vec{x}) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} [a_{\vec{k}}^- v_k(\tau) + a_{-\vec{k}}^+ v_k^*(\tau)] e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} [a_{\vec{k}}^- v_k(\tau) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + a_{\vec{k}}^+ v_k^*(\tau) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}}], \quad (4.32)$$

non azken berdintza  $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$  aldaketa egin den, integrakizuna erreala izateko bista hutsera.

Behin klasikoki  $v(\tau, \vec{x})$ -ren adierazpena lorturik, hurrengo pausua perturbazioak aztertzen jarraitzeko honen kuantizazioa egingo da.

## 4.2 Perturbazioen kuantizazioa

Gure helburua atal honetan  $v(\tau, \vec{x})$  eremua kuantizatzea da. Horretarako, jarraitu beharreko prozedura osziladore harmoniko baten kasuan kuantizazioa egiteko berdina da. Hala ere, kasu honetan Mukhanov-Sasaki ekuazioa daukagu, eta lehen azpimarratu dugun moduan, honen maiztasuna denboraren (gure analisisian denbora konformearren) menpekoa da. Honek, geroago ikusiko dugun moduan, hutsaren aukeraketan eragina izango du.

### 4.2.1 Kuantizazio kanonikoa

Kuantizazioarekin hasteko beharrezkoa da gogoraztea zein den aztertzen ari garen Lagrangearra. Gure, kasuan aztertzen ari garen akzioa (4.13) adierazpenak emandakoa izanik:

$$L[v] = \int d^3 \vec{x} \mathcal{L} \Rightarrow \mathcal{L} = [(v')^2 - (\partial_i v)^2 + \frac{z''}{z} v^2], \quad (4.33)$$

non  $\mathcal{L}$  dentsitate Lagrangearra den.

Beraz, jakinik momentu konjokatua Lagrangearraren abiadura orokorrarekiko,  $v' = \frac{\partial v}{\partial \tau}$ , deribatu funtzionala dela [14]:

$$\pi(\tau, \vec{x}) \equiv \frac{\delta L[v]}{\delta v'(\tau, \vec{x})} = v'(\tau, \vec{x}). \quad (4.34)$$

Behin hau jakinda, bai  $v$  eremua eta bai  $\pi$ , eragile kuantiko bilakatuko ditugu:  $\hat{v}$  eta  $\hat{\pi}$ . Hauek bete behar dituzten trukatzeko baldintzak ondokoak dira [15]:

$$[\hat{v}(\tau, \vec{x}), \hat{\pi}(\tau, \vec{y})] = i\delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (\hbar = 1), \quad (4.35)$$

$$[\hat{v}(\tau, \vec{x}), \hat{v}(\tau, \vec{y})] = [\hat{\pi}(\tau, \vec{x}), \hat{\pi}(\tau, \vec{y})] = 0. \quad (4.36)$$

Bestalde, eremua eta momentu konjokatua eragile bihurtu ditugun moduan, orain  $a_{\vec{k}}^{\pm}$  parametroak ere eragile kuantikoak izango dira:  $\hat{a}_{\vec{k}}^{\pm}$ . Hortaz,  $\hat{v}$  idatz dezakegu (4.32) adierazpena jarraituz:

$$\hat{v}(\tau, \vec{x}) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \left[ \hat{a}_{\vec{k}}^- v_{\vec{k}}(\tau) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \hat{a}_{\vec{k}}^+ v_{\vec{k}}^*(\tau) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right], \quad (4.37)$$

non moduek Mukhanov-Sasaki ekuazioa betetzen duten.

Horretaz gain, erlazio hauek lortzen ditugu  $\hat{a}_{\vec{k}}^{\pm}$  eragile kuantikoetarako:

$$[\hat{a}_{\vec{k}}^-, \hat{a}_{\vec{k}'}^+] = \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \quad [\hat{a}_{\vec{k}}^-, \hat{a}_{\vec{k}'}^-] = [\hat{a}_{\vec{k}}^+, \hat{a}_{\vec{k}'}^+] = 0. \quad (4.38)$$

Hauek erraz konprobatu daitezke (4.37) modu garapena (4.35) eta (4.36) trukatzeko erlazioetan ordezkaturik, eta kontuan izanik Wronskiarrak normalizaziorako ematen digun askatasuna ondokoa dela [15]:

$$W[v_{\vec{k}}, v_{\vec{k}}^*] = -i. \quad (4.39)$$

Ohartu (4.37) adierazpeneko integrazio parametroak, (4.38) trukatzeko erlazioak kontuan hartuz, sortze,  $\hat{a}_{\vec{k}}^+$ , eta deuseztatze,  $\hat{a}_{\vec{k}}^-$ , eragile moduan har ditzakegula. Honela jokatzen dute eragile kuantiko hauek:

$$\hat{a}^+ |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad \hat{a}^- |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle. \quad (4.40)$$

Ohiko moduan eraikitzen dute Hilbert-en espazioa eragile hauek. Gainera, hutsaren existentzia postulatuko dugu, hau  $|0\rangle$  moduan adieraziz, eta hau ezabatua izango da deuseztatze eragile guztientzat:

$$\hat{a}_{\vec{k}}^- |0\rangle = 0 . \quad (4.41)$$

Bestalde, hutsetik abiatuz beste egoera kitzikatuak eraikitzen joango gara horretarako sortze eragileak erabiliz:

$$|m_{\vec{k}_1}, n_{\vec{k}_2}, \dots\rangle = \frac{1}{\sqrt{m!n!\dots}} \left[ (a_{\vec{k}_1}^+)^m (a_{\vec{k}_2}^+)^n \dots \right] |0\rangle , \quad (4.42)$$

non  $\vec{k}_i$  bektoreak  $i = 1, 2, \dots$  egoera bakoitza ematen digun, eta horien kitzikapena  $m, n, \dots$  den.

### 4.2.2 Huts fisikoaren aukeraketa

Moduen konbinazio linealen aukeraketaren arabera huts desberdina izango dugu eta honek interpretazio fisikoa baldintzatuko du (B eranskinean sakontzen da gehiago honetan). Horregatik, gure helburua atal honetan benetako hutsa edo huts fisikoa deskribatzen duten modu funtzioak bilatzea izango da.

#### Aldiuneko energia-maila baxuena

Normalean hutsa ahalik eta energia baxuena duen hamiltondarraren autobalio moduan definitzen da. Horrela, honek baldintza hau betetzen duten moduak aukeratzea ahalbidetzen digu. Beraz, hurrengo pausua hamiltondarra idaztea izango da. Hau honela definitzen da:

$$H = \int \pi(\tau, \vec{x}) v'(\tau, \vec{x}) d^3 \vec{x} - L . \quad (4.43)$$

Hortaz, hamiltondarraren adierazpen orokorrean (4.2.1) eta (4.34) adierazpenak ordezkatur:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^3 \vec{x} [\hat{\pi}^2 + (\partial_i v)^2 + m_{\text{eff}}^2 v^2] , \quad (4.44)$$

non masa efektiboak (4.15) definizioa jarraitzen duen.

Hala ere, gure kasuan arazo batekin aurkitzen gara: (4.44) hamiltondarrak denboraren mendekotasun esplizitua dauka. Hortaz, bere autobalioak denboraren menpekoak izango dira, eta beraz, ezin izango dugu huts orokorra definitu. Soilik aldiune konkretu batean, demagun hau  $\tau_0$  dela, definitu dezakegu hutsa, eta honi aldiuneko hutsa deritzo:  $|0_{\tau_0}\rangle$ . Beraz, hau  $\tau_0$  unean  $\hat{H}(\tau_0)$  hamiltondarraren autobalio energetikoki baxuena duen egoera da.

Aldiuneko hutsa deskribatzen duten moduak bilatzeko, hamiltondarraren esperotako balioa lortuko dugu,  $\langle 0_{(v)} | \hat{H}(\tau_0) | 0_{(v)} \rangle$ ; hutsaren egoera,  $|0_{(v)}\rangle$ , deskribatzen duten modu orokorrentzako eta ondoren hauekiko minimizatuko dugu.

Beraz, idatz dezagun (4.44) hamiltondarra era egokienean bere esperotako balioa lortzeko. Lehenik eta behin, Fourierren modu garapena erabiliz (4.17) ekuazioan bezala:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^3 \vec{x} \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{d^3 \vec{k}'}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{x}(\vec{k}+\vec{k}')} \left[ \hat{v}'_{\vec{k}} \hat{v}'_{\vec{k}'} - \vec{k} \cdot \vec{k}' \hat{v}_{\vec{k}} \hat{v}_{\vec{k}'} + m_{\text{eff}}^2 \hat{v}_{\vec{k}} \hat{v}_{\vec{k}'} \right] . \quad (4.45)$$

Bertan, Dirac-en delta ordezkatu dezakegu eta ondoren integratu:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^3 \vec{k} d^3 \vec{k}' \delta(\vec{k} + \vec{k}') \left[ \hat{v}'_{\vec{k}} \hat{v}'_{-\vec{k}'} - \vec{k} \cdot \vec{k}' \hat{v}_{\vec{k}} \hat{v}_{-\vec{k}'} + m_{\text{eff}}^2 \hat{v}_{\vec{k}} \hat{v}_{-\vec{k}'} \right] = \frac{1}{2} \int d^3 \vec{k} \left[ \hat{v}'_{\vec{k}} \hat{v}'_{-\vec{k}} + \omega_{\vec{k}}^2(\tau) \hat{v}_{\vec{k}} \hat{v}_{-\vec{k}} \right] . \quad (4.46)$$

Azkenik, adierazpenean (4.31) ordezkatur:

$$\hat{H} = \frac{1}{4} \int d^3 \vec{k} \left[ \hat{a}_{\vec{k}}^- \hat{a}_{-\vec{k}}^- F_{\vec{k}}^* + \hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{-\vec{k}}^+ F_{\vec{k}} + (2\hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}}^- + \delta^3(0)) E_{\vec{k}} \right] , \quad (4.47)$$

non

$$E_k(\tau) \equiv |v'_k(\tau)|^2 + \omega_k^2(\tau)|v_k(\tau)|^2, \quad (4.48)$$

$$F_k(\tau) \equiv v_k'^2(\tau) + \omega_k^2(\tau)v_k^2(\tau), \quad (4.49)$$

diren [15].

Orain jada lor dezakegu aldiune jakin baterako  $\hat{H}(\tau_0)$ -ren batezbestekoa. Horretarako, nahikoa da  $\hat{a}_k^- |0_{(v)}\rangle$  aplikatzea eta (4.40) adierazpeneko propietateez oroitzea:

$$\langle 0_{(v)} | \hat{H}(\tau_0) | 0_{(v)} \rangle = \frac{1}{4} \delta^3(0) \int d^3 \vec{k} E_k(\tau_0). \quad (4.50)$$

Bertan dibergentzia bat dugu hiru dimentsioko Dirac-en deltarekin, baina honek espazioko bolumen infinitua adierazten du. Beraz, energia dentsitatea idatziko dugu:

$$\varepsilon(\tau_0) = \frac{1}{4} \int d^3 \vec{k} E_k(\tau_0) = \frac{1}{4} \int d^3 \vec{k} (|v'_k(\tau_0)|^2 + \omega_k^2(\tau_0)|v_k(\tau_0)|^2), \quad (4.51)$$

non  $\varepsilon$  kasu honetan energia-dentsitatea den eta ez dugun nahastu behar inflazioaren atalean definitutako ikur berdina duen parametroarekin.

Beraz, energia-dentsitatea minimizatuko duen  $v_k(\tau_0)$  modua bilatuko dugu eta hau  $k$  bakoitzerako  $E_k(\tau_0)$  minimizatzearen parekoa izango da. Lehenengo  $v_k$  modua konplexua izanik, bi funtzio errealeen menpe idatziko dugu [14]:

$$v_k = r_k e^{i\alpha_k}. \quad (4.52)$$

Jarraian hau  $E_k(\tau_0)$  adierazpenean sartuz:

$$E_k(\tau_0) = r_k'^2 + \alpha_k'^2 r_k^2 + \omega_k^2 r_k^2. \quad (4.53)$$

Hau sinplifikatzeko (4.52) adierazpena Wronskiarraren normalizazio baldintzak [15] erabiliz:

$$r_k^2 \alpha_k' = -\frac{1}{2} \Rightarrow E_k(\tau_0) = r_k'^2 + \frac{1}{4r_k^2} + \omega_k^2 r_k^2 \quad (4.54)$$

Hau horrela izanik,  $E_k(\tau_0)$  minimizatzen da  $r_k'^2(\tau_0) = 0$  eta  $r_k(\tau_0) = (2\omega_k)^{-1/2}$  betetzen direnean. Ondorioz, aldiuneko hutsa definituko dituzten moduak honela adierazi ditzakegu:

$$v_k(\tau_0) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k(\tau_0)}} e^{i\alpha_k(\tau_0)}, \quad v_k'(\tau_0) = -i\omega_k(\tau_0)v_k(\tau_0). \quad (4.55)$$

Hau jakinik (2.59) hamiltondarra moldatu dezakegu, horretarako (4.55) soluzioa (4.48) eta (4.49) adierazpenetan ordezkatuz:

$$\hat{H} = \int d^3 \vec{k} \left[ \hat{a}_k^+ \hat{a}_k^- + \frac{1}{2} \delta^3(0) \right] \omega_k(\tau_0), \quad (4.56)$$

non  $E_k(\tau_0) = \omega_k(\tau_0)$  eta  $F_k(\tau_0) = 0$  diren.

Ohartu  $\tau = \tau_0$  aldiunean (4.56) hamiltondarra diagonal dela okupazio eragilearen oinarrian eta beraz  $|0_{\tau_0}\rangle$  egoerari hamiltondarraren aldiuneko diagonalizazioaren hutsa deritzo. Hala ere maiztasuna denboraren menpekota izanik, beste aldiuneren batean,  $\tau = \tau_1$  adibidez, modu funtzioak ezberdinak izango dira. Honek esan nahi du  $|0_{\tau_0}\rangle$  hutsa eta  $|0_{\tau_1}\rangle$  ezberdinak direla eta eta beraz  $|0_{\tau_0}\rangle$  egoerari dagokion energia ez dela minimoa izango  $\tau_1$  aldiunean.

### Bunch-Davies hutsa

Ikusi dugunez  $\omega_k(\tau)$  denboraren menpekota denez soilik aldiuneko hutsa defini dezakegu hauei dagozkien moduak lortuz. Hortaz, huts fisikoa definitzeko arazoarekin jarraitzen dugu.

Honi soluzioa emateko unibertsoaren hasierako uneetara joango gara, hau da,  $\tau \rightarrow -\infty$  denbora konformea oso negatiboa zeneko uneetara non bertan intereseko modu guztiak horizontearen barruan (subhorizontea) zeuden. Gainera, de Sitterren unibertsoan gaudela kontsideratzen badugu, orduan maiztasuna jada ez da denboraren menpekota izango eta orduan:

$$\omega_k^2 = k^2 - \frac{2}{\tau^2} \simeq k^2 . \quad (4.57)$$

Hau horrela izanik moduen Mukhanov-Sasaki ekuazioa honela idazten da:

$$v_k'' + k^2 v_k = 0 . \quad (4.58)$$

Honen soluzioa era orokorrean  $v_k \propto e^{\pm ik\tau}$  izango da. Hala ere, gogorarazi denboren menpeko maiztasunerako aldiuneko hutsa definitzen duten moduak lortu ditugula. Hauetan, (4.54) adierazpeneko lehen atala integratuz  $\alpha_k$  lortu dezakegu (maiztasuna denboraren independentea delako):

$$\alpha_k = -ik\tau . \quad (4.59)$$

Eta beraz (4.58) ekuazioaren soluzio moduak honela idatzi daitezke:

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} v_k(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\tau}} e^{-ik\tau} . \quad (4.60)$$

Honela, hutsaren zehaztasun ezarekin bukatzen dugu, hasierako baldintzak finkatuz. Izan ere, (4.60) ekuaziozko moduak huts fisiko bakarria definituko dute, eta honi *Bunch-Davies hutsa* deritzo.

### 4.2.3 Zero puntuko fluktuazioak de Sitterren espazioan

Aurreko guztia kontuan izanik jada prest gaude de Sitterren espazioan izango ditugun modu funtzioak zehazteko. Horretarako idatz dezagun Mukhanov-Sasaki ekuazioa espazio honetan:

$$v_k'' + \left(k^2 - \frac{2}{\tau^2}\right) v_k = 0 , \quad (4.61)$$

non (4.21) ekuazioa lortzeko kontsiderazio berdinak hartu diren kontuan.

Bigarren ordenako ekuazio diferentzial homogeenoa arrunta da hau. Honen soluzio orokorra ondokoa da [15]:

$$v_k(\tau) = \alpha \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\tau}\right) + \beta \frac{e^{ik\tau}}{\sqrt{2k}} \left(1 + \frac{i}{k\tau}\right) , \quad (4.62)$$

non  $\alpha$  eta  $\beta$  bi konstante diren.

Badirudi oraindik aurreko hutsaren ziurgabetasunarekin jarraituko dugula,  $\alpha$  eta  $\beta$  konstanteak izaten jarraitzen baitugu. Hala ere, Bunch-Davies hutsak emandako (4.60) hasierako baldintza aplikatuz, konstanteek balio hauek hartzen dituzte:

$$\alpha = 1 , \quad \beta = 0 . \quad (4.63)$$

Hortaz, de Sitterren unibertsoan izango dugun modu funtzioa honela idazten da:

$$v_k(\tau) = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\tau}\right). \quad (4.64)$$

Zein izango da modu honen dinamika superhorizontean? Horretarako gogoratu (4.25) baldintzak de Sitterren espazioan hartzen duen itxura:

$$k^2 \ll \frac{1}{\tau^2} \Rightarrow k\tau \ll 1 \Rightarrow \lim_{k\tau \rightarrow 0} v_k = \frac{1}{i\sqrt{2}k^{3/2}\tau}. \quad (4.65)$$

### Zero puntuko fluktuazio kuantikoak

Moduak zehaztuta izateak zero puntuko fluktuazioak jakiten lagunduko digu. Horretarako potentzia espektroaren adierazpena lortzea beharrezkoa da. Hau korrelazio funtzioaren Fourierren transformatua da, eta fluktuazioen inguruko informazio guztia barnebiltzen du.

Lehenik eta behin idatz dezagun zero puntuko fluktuazioen adierazpena:

$$\langle \hat{v}_{\vec{k}} \hat{v}_{\vec{k}'} \rangle = \langle 0 | \hat{v}_{\vec{k}} \hat{v}_{\vec{k}'} | 0 \rangle, \quad (4.66)$$

Bertan, lehenik (4.31) kuantizaturik ordezkatzuz:

$$\langle \hat{v}_{\vec{k}} \hat{v}_{\vec{k}'} \rangle = \langle 0 | (\hat{a}_{\vec{k}}^- v_k + \hat{a}_{\vec{k}}^+ v_k^*(\tau)) (\hat{a}_{\vec{k}'}^- v_{k'} + \hat{a}_{\vec{k}'}^+ v_{k'}^*) | 0 \rangle = v_k v_{k'}^* \langle 0 | \hat{a}_{\vec{k}}^- \hat{a}_{\vec{k}'}^+ | 0 \rangle = |v_k|^2 \delta(\vec{k} + \vec{k}'). \quad (4.67)$$

Bertatik, potentzia espektroa definitu dezakegu:

$$P_v = |v_k|^2. \quad (4.68)$$

Hau horrela izanik, superhorizontearako lehen lortu dugun (4.65) emaitza ordezkatu dezakegu bertan:

$$P_v = \frac{1}{2k^3\tau^2} = \frac{1}{2k^3} (aH)^2. \quad (4.69)$$

Emaitza hau oso garrantzitsua da, izan ere eremuaren potentzia espektroa jakinik, kurbaturak sortutako perturbazioen,  $\zeta$ , potentzia espektroa jakingo baitugu. Soilik (4.8) kontuan izanik:

$$P_\zeta = \frac{1}{z^2} P_v. \quad (4.70)$$

## 4.3 Inflazioan zehar sortutako perturbazioak

Beraz, jada badirudi badaukagula adierazpen beharrezkoa fluktuazio kuantikoak neurtzeko. Hau hein handi batean ez da inflazioaren deskribapen egokiena. Izatez de Sitterren espazio perfektuan lortu dugu emaitza, eta honelako espazio batean inflazioak ez luke izango amaierarik. Hau ikusteko nahikoa da gogoraztea de Sitterrean  $\varepsilon \rightarrow 0$  dela. Egoera honetan (4.9) adierazpena nulua da, eta beraz  $\zeta$ -k ez luke zentzurik izango. Nola jarraitu orduan?

### 4.3.1 Potentzia espektroa Quasi-de Sitter espazioan

Jakinik inflazioak amaitu behar duela, de Sitterretik zertxobait aldentzen den kasua ikusiko dugu non  $\varepsilon \ll 1$  beteko den baina hau ez den izango nulua. Honi *Quasi-de Sitter* espazioan lana egitea esango diogu.

Hasteko (4.70) adierazpena erabiliko dugu baina  $\varepsilon$ -ekiko menpekotasuna esplizituki azalduz:

$$P_\zeta = \frac{1}{z^2} P_v = \frac{1}{2k^3\tau^2} = \frac{1}{4k^3} \frac{H^2}{\varepsilon}, \quad (4.71)$$

non superhorizonteko eskalatako (4.69) eremu potentzia espektroa eta (4.9) adierazpena ordezkatu ditugun.



Hau izanik, lehen lortutako emaitza bat erabiliko dugu: horizontea gurutzatzean  $\zeta$  izoztu egiten dela. Beraz, kurbadura perturbazioen potentzia espektroa  $k$ -ren menpekota izango da horizonte horren mugan:

$$P_\zeta(k) = \frac{1}{4k^3} \frac{H^2}{\varepsilon} \Big|_{k=aH} . \quad (4.72)$$

Eta hau era adimentsionalean idatz dezakegu:

$$\Delta_s^2(k) \equiv \frac{k^3}{2\pi^2} P_\zeta(k) = \frac{1}{8\pi^2} \frac{H^2}{\varepsilon} \Big|_{k=aH} . \quad (4.73)$$

Badakigu, infrazioan zehar  $\varepsilon$  aldatzen joango dela pixkanaka eta horrek de Sitter perfektuan izango genukeen  $\Delta_s^2(k) \sim kte(k^0)$  ez betetzea eragingo du. Hau ikusteko, (4.73) beste era batean idazten da, parametrizazio ohikoena hau izanik:

$$\Delta_s^2(k) = A_s \left( \frac{k}{k_s} \right)^{n_s-1} , \quad (4.74)$$

non  $A_s$  anplitude primordiala den eta  $n_s$  indize espektrala. Bestalde, pibote eskala ere azaltzen da, honek Plancken neurketan  $k_s = 0.05 Mpc^{-1}$  balioa izanik [8].

Gaur egun, Planck sateliteak [8] indize espektralera eta anplitude primordialera lortzen dituen balioak hauek dira:

$$n_s = 0,954 \pm 0,004 , \quad \ln(10^{10} A_s) = 3,043 \pm 0,014 . \quad (4.75)$$

non  $\pm 1\sigma$  desbideraketa estandarra den.

Honen harira, posible da era honetan idaztea indize espektrala [15]:

$$n_s - 1 = \frac{d \ln \Delta_s^2}{d \ln k} , \quad (4.76)$$

non Slow-Roll hurbilketa erabiltzen badugu azken honen parametroen menpe idatzi dezakegun [15]:

$$n_s - 1 = -2\varepsilon - \eta . \quad (4.77)$$

Beraz, (4.75) adierazpeneko indize espektralaren balioak erakusten digu de Sitter espazio perfektutik desbideraketa txiki bat dagoela. Beraz, balio honen arabera Slow-Roll edo Quasi-de Sitter moduko hurbilketekin bat etorriko litzateke infalzioa.



## 5. Kapituluia

# Ondorioak

Big Bang-aren eredu estandarra arrakasta handiko teoria da, iragarpen onak egiten baititu unibertsoaren eboluzioaren inguruan. Hala ere, ereduak baditu zenbait hutsune, horien artea horizonteren arazoa eta hasierako lautasunaren muga. Horregatik hauei soluzio emateko inflazioaren teoria sartzen da.

Lan honen helburua inflazioaren teoriaren hurbilketa bat egitea izan da, era orokor batean azalduz hau. Horretarako erlatibitate orokorra eta eremuen teoria klasikoa zein kuantikoa uztartu dira eta horrela inflazioaren fisika eta honen emaitza garrantzitsu asko berrikustea posible izan da. Izatez, inflazioaren teoriak fisika kuantikoa eta klasikoa era arrakastatsuan bateratzen ditu. Izan ere, fenomeno kuantikoek eskala kosmologikoetan eragina dutela ikusi baitaiteke.

Lehenik eta behin, lan honetan, inflazioa ezaugarritzen duten parametroak lortu dira. Hauetara iristeko, hasiera batean Big Bang-aren eredu estandarra azaldu eta egiten dituen iragarpenak ikusi dira. Hau eginik, ereduak dituen mugak azaldu eta inflazioaren teoria plazaratu da soluzio moduan. Izatez, lehen deskribapen moduan Hubbleren erradio kohigikor beherakorreko garai moduan aurkeztu da inflazioa eta ideia horretatik aipatutako baldintza parametroak lortu dira.

Behin hori eginik, inflazioa eremuen teoriak erabiliz idatzi da. Horretarako, aukeraketa errazenez baliatu gara eta eremu eskalarrak erabili dira. Jarraian, hauen aurreko ataleko inflazioaren baldintza parametroak berridaztea posible izan da. Horiek Slow-Roll hurbilketa adierazteko erabili dira eta horrela inflazioaren dinamikaren inguruko deskribapen orokor bat lortzea posible izan da. Horretaz gain, inflazioaren gutxi gorabeherako iraupen bat eman da.

Azkeneko atalean, fluktuazio kuantikoek espazio-denborako perturbazioetan nola eragiten duten ikusi da. Horretarako, behin gauge askatasuna finkaturik, askatasun gradu eskalar bakarra kuantizatu da eremuen teoria kuantikoa baliatuz. Honen ostean, anbiguetate fisikoa saihesteko, inflazioaren hasierako baldintzak finkatu dira. Bestalde, tartean kurbaduraren perturbazioak superhorizontean izozten direla erakutsi da, eta hauek geroago erradiazioa gailentzen denean berriz sartuko direla. Hortaz, tarteko energia altuko fisika ez diote eragingo, hala nola birberotzeak edo bestelako prozesu ezezagunek, eta inflazioaren *argazki on* bat ateratzea posible izango da. Horretaz gain, kurbaduraren perturbazioak adieraziko dituen potentzia-espektroa idatzi da. Hau adierazpen garrantzitsua da, izan ere emaitza teorikoak behaketa esperimentalekin konparatzeko aukera ematen du. Horregatik, hau ikusteko atalaren amaieran Planck sateliteak indize espektralera eta anplitude primordialera neurtzen dituen balioak jarri dira, ikusiz Slow-Roll hurbilketa gerturapen posible bat izan daitekeela.

Azken finean, lan honen helburua inflazioaren berrikusketa orokor bat egitea izan da eta ez gara sartu inflazio eredu konkretuetan. Gure kasuan, eremu eskalar bakarrak gidatutako inflazioa erabili dugu eta ez da potentzialaren adierazpenik zehaztu. Gaur egun, inflazioaren teoria irekita dagoen ikerketa lerroa da eta ez da zehaztu honen izaera. Hala ere, komunitate zientifikoan hein handi batean teoria onartua da, izan ere iragarpen oso onak egiten ditu CMB-ko fluktuazioen inguruan. Bestetik, inflazioak beste hainbat fenomeno auresaten ditu, inflazioa hobeto ezagutzeko baliagarriak izan daitezkeenak. Horien artean, azken urtetan indarra hartu duten uhin grabitazionalak [15] eta zulo beltz primordialak [17] adibidez.

Hortaz, inflazioaren berrikusketa honen bidez, kosmologia modernoaren muinetako baten inguruan barneratutako ezagutzak adierazi dira. Honek, etorkizunean bertako atal ezberdinetan sakontzea ahalbidetzen du, inflazioaren benetako izaera zein de ezagutu arte.



# Bibliografia

- [1] James Schombert. *Geometry of th Universe*. URL: <http://abyss.uoregon.edu>.
- [2] Peter Ade et al. “Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results”. In: *Astronomy and Astrophysics* 571 (Nov. 2014), page 1. DOI: 10.1051/0004-6361/201321529.
- [3] International Astronomical Union. *IAU resolution on the suggested renaming of the Hubble law*.
- [4] Scott Dodelson. *Modern cosmology*. San Diego, CA: Academic Press, 2003. URL: <https://cds.cern.ch/record/1282338>.
- [5] Andrew Liddle. *An introduction to modern cosmology; 2nd ed.* Chichester: Wiley, 2003. URL: <https://cds.cern.ch/record/1010476>.
- [6] Daniel Baumann. “Inflation”. In: *Physics of the large and the small, TASI 09, proceedings of the Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics, Boulder, Colorado, USA, 1-26 June 2009*. 2011, pages 523–686. DOI: 10.1142/9789814327183\_0010. arXiv: 0907.5424 [hep-th].
- [7] Andrew R. Liddle and D. H. Lyth. *Cosmological inflation and large scale structure*. 2000. ISBN: 0521575982, 9780521575980, 9780521828499.
- [8] Planck Collaboration et al. “Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters”. In: (July 2018).
- [9] R. d’Inverno. *Introducing Einstein’s relativity*. 1992. ISBN: 9780198596868.
- [10] Juan M. Aguirregabiria. *Grabitazioa eta Kosmologia; 7. edizioa*. EHU-UPV, 2017. URL: <http://tp.lc.ehu.es/jma/GK.html>.
- [11] Leonardo Senatore. “Lectures on Inflation”. In: Jan. 2017. DOI: 10.1142/9789813149441\_0008.
- [12] Daniel Baumann and Liam McAllister. *Inflation and String Theory*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2015. ISBN: 9781107089693, 9781316237182. DOI: 10.1017/CB09781316105733. arXiv: 1404.2601 [hep-th]. URL: <http://www.cambridge.org/mw/academic/subjects/physics/theoretical-physics-and-mathematical-physics/inflation-and-string-theory?format=HB>.
- [13] W Noel Cottingham and Derek A. Greenwood. “An introduction to the standard model of particle physics: Second edition”. In: *An introduction to the standard model of particle physics / W. Noel Cottingham, Derek A. Greenwood. 2nd ed. Cambridge : Cambridge University Press, 2007. ISBN: 9780521852494 (cased)* (Jan. 2007). DOI: 10.1017/CB09780511791406.
- [14] Viatcheslav Mukhanov and Sergei Winitzki. *Introduction to quantum effects in gravity*. Cambridge University Press, 2007. ISBN: 9780521868341, 9781139785945. URL: <http://www.cambridge.org/us/catalogue/catalogue.asp?isbn=0521868343>.
- [15] Daniel Baumann. *The Physics of Inflation*. Dec. 2011. URL: [https://www.icts.res.in/sites/default/files/baumann\\_icts\\_dec2011.pdf](https://www.icts.res.in/sites/default/files/baumann_icts_dec2011.pdf).
- [16] Julien Lesgourgues. “Cosmological Perturbations”. In: *Proceedings, Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics: Searching for New Physics at Small and Large Scales (TASI 2012): Boulder, Colorado, June 4-29, 2012*. 2013, pages 29–97. DOI: 10.1142/9789814525220\_0002. arXiv: 1302.4640 [astro-ph.CO].
- [17] Juan Garcia-Bellido and Ester Ruiz. “Primordial black holes from single field models of inflation”. In: *Physics of the Dark Universe* 18 (Feb. 2017). DOI: 10.1016/j.dark.2017.09.007.



## A. Eranskina

# Einsteinen tentsorearen balio ez nuluak FLRW metrikarako

Einsteinen tentsorearen balio ez nuluak lortzeko FLRW metrikarako, hau da, (2.11) adierazpenerako, tentsore metrikoa forma kobariante zein kontrabariantean idatziko dugu:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a(t)^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(t)^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-kr^2}{a(t)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a(t)^2 r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a(t)^2 r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Hortaz, tentsore metrikoa deribatuz, (2.26) adierazpenaren arabera (ohartu koordenatu esferikoetan idatzi dugula tentsore metrikoa) Christoffelen ikur ez nuluak lortu ditugu:

$$\begin{aligned} \Gamma_{0i}^i &= \dot{a}/a, & \Gamma_{ii}^0 &= (\dot{a}/a)g_{ii}, & \Gamma_{11}^1 &= kr/(1-kr^2), & \Gamma_{22}^1 &= -r(1-kr^2), \\ \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \theta (1-kr^2), & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = 1/r, & \Gamma_{23}^3 &= \cos \theta / \sin \theta, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

non jakinik Christoffel-en ikurren indize konbariantek simetrikoak direla, hauen termino bakarria idatzi den. Gainera, FLRW koordenatu kohigikor esferikoetan egonik, kasu honetan, 1, 2, 3  $\rightarrow$   $r, \theta, \phi$  baliokideak dira.

Hauek lorturik Ricciren tentsorearen gai ez nuluak lortuko ditugu. Frogatu dezakegu aurreko Christoffelen ikurrak erabiliz Ricciren tentsorea diagonal izango dela eta beraz lortutako balioak (2.24) adierazpena jarraituz:

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\ddot{a}/a, & R_{11} &= (\ddot{a}a + 2(\dot{a})^2 + 2k)/(1-kr^2), \\ R_{22} &= (\ddot{a}a + 2(\dot{a})^2 + 2k)r^2, & R_{33} &= (\ddot{a}a + 2(\dot{a})^2 + 2k)r^2 \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Beraz, Ricciren tentsorea izanik Ricciren eskalarra lortu dezakegu (2.25) definizioari erreparaturik:

$$R = 6 \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right]. \quad (\text{A.4})$$

Azkenik, hasieratik gure helburua zen Einsteinen tentsorea idatziko dugu (2.23) definizioari kasu eginez. Honen gai ez nuluak:

$$\begin{aligned} G_{00} &= 3 \left[ \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{a}{k^2} \right], & G_{11} &= -(2\ddot{a}a + (\dot{a})^2 + k)/(1-kr^2), \\ G_{22} &= -(2\ddot{a}a + (\dot{a})^2 + k)r^2, & G_{33} &= -(2\ddot{a}a + (\dot{a})^2 + k)r^2 \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$





## B. Eranskina

# Hutsaren bakartasun eza

Hutsa finkatzea oso garrantzitsua da. Izan ere, horrela posible izango da anbiguetate fisikoak saihestea. Horretarako, beharrezkoa da hasierako baldintza egokiak zehaztea.

Esan bezala aurreko sortze eta deuseztatze eragileak Hilberten espazioko egoera kuantikoen oinarria osatzeko erabil daitezke. Hala ere, hauek zentzu fisiko bakarra hartzen dute soilik  $v_k$  moduak zehaztuta badaude. Are gehiago, (4.39) Wronskierra ez da normalizazio baldintza nahikoa  $v_k$  moduak zehazteko Mukhanov-Sasaki ekuazioan.

Hau errazago ulertzeko kontsideratu dezagun hurrengo ekuazioa:

$$u_k(\tau) = \alpha_k v_k(\tau) + \beta_k v_k^*(\tau), \quad (\text{B.1})$$

non  $\alpha_k$  eta  $\beta_k$  koefizientea konplexuak denboraren independenteak diren, eta  $u_k$  ere Mukhanov-Sasaki ekuazioa betetzen duen.

Hala nola, (4.39) Wronskiarraren normalizazio baldintza ere beteko dute, betiere koefizienteek ondorengoa jarraitzen badute [15]:

$$W[u_k, u_k^*] = -i \Rightarrow |\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2 = 1. \quad (\text{B.2})$$

Beraz,  $u_k$  moduak ere erabili ditzakegu eta  $v_k$  ez dira bakarrak. Hortaz, posible da  $\hat{v}$  eremuaren modu hedapena idaztea lehenengoan menpe:

$$\hat{v}(\tau, \vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \left[ \hat{b}_{\vec{k}}^- u_k(\tau) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \hat{b}_{\vec{k}}^+ u_k^*(\tau) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right], \quad (\text{B.3})$$

non  $\hat{b}_{\vec{k}}^\pm$  beste sortze eta deuseztatze eragile multzo bat den besteak bezala (4.38) trukatzeko erlazioak betez.

Hortaz, bi eragile izanik bakoitzerako bere hutsa definituko da:  $|0_{(a)}\rangle$  eta  $|0_{(b)}\rangle$ . Hauek ezabatua izango dira bakoitzaren deuseztatze eragileen bidez:

$$\hat{a}_{\vec{k}}^- |0_{(a)}\rangle = 0, \quad \hat{b}_{\vec{k}}^- |0_{(b)}\rangle = 0, \quad (\text{B.4})$$

non hau  $\vec{k}$  guztientzako betetzen den.

Orain gure helburua ea bi huts horiek berdinak diren ikustea izango da. Horretarako, bi eragile hauen arteko erlazioa lortuko dugu. Hortaz, bi modu garapenak bateragarriak izateko, hau da, (4.37) eta (B.3) adierazpenak berdinak izateko, beharrezkoa da ondoko berdintza betetzea:

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} [u_k^*(\tau) \hat{b}_{\vec{k}}^- + [u_k(\tau) \hat{b}_{-\vec{k}}^+]] = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} [v_k^*(\tau) \hat{a}_{\vec{k}}^- + [v_k(\tau) \hat{a}_{-\vec{k}}^+]], \quad (\text{B.5})$$

non orain integralen bigarren gaietan  $-\vec{k} \rightarrow \vec{k}$  aldaketa egin den, horrela hurrengo pausuan esponentzialak ezabatu ahal izateko.

Behin hau izanik, (B.1) adierazpena ordezkatzeko badugu bertan,  $\hat{a}_k^\pm$  eta  $\hat{b}_k^\pm$  eragileak erlazionatu ditzakegu. Hauei *Bogolyubov-en transformazioak* deritze eta honela idazten dira:

$$\hat{a}_k^- = \alpha_k^* \hat{b}_k^- + \beta_k \hat{b}_{-k}^+, \quad \hat{a}_k^+ = \alpha_k \hat{b}_k^+ + \beta_k^* \hat{b}_{-k}^-, \quad (\text{B.6})$$

non bigarren berdintza lortzeko  $-\vec{k} \rightarrow \vec{k}$  aldaketa egin den.

Gainera, transformazio hauei buelta eman diezaiekegu ondokoa lortzeko:

$$\hat{b}_k^- = \alpha_k \hat{a}_k^- - \beta_k \hat{a}_{-k}^+, \quad \hat{b}_k^+ = \alpha_k^* \hat{a}_k^+ - \beta_k^* \hat{a}_{-k}^-. \quad (\text{B.7})$$

Tartean dauden  $\alpha_k$  eta  $\beta_k$  koefizientei *Bogolyuboven koefizienteak* deritze eta hauek Wronskiarren menpe idatziko ditugu jarraian. Horretarako (B.1) adierazpena eta bere deribatua idatziko ditugu:

$$u_k(\tau) = \alpha_k v_k(\tau) + \beta_k v_k^*(\tau), \quad (\text{B.8})$$

$$u_k'(\tau) = \alpha_k v_k'(\tau) + \beta_k v_k'^*(\tau). \quad (\text{B.9})$$

Alde batetik,  $\beta_k$  koefizientea lortzeko bigarren ekuazioa  $v_k$  moduaz biderkatuko dugu eta lehenengoa modu horren deribatuaz. Bestetik, beste Bogolyuboven koefizientea lortzeko berdina egingo dugu baina moduen konplexu konjugatua erabiliz [15]:

$$\beta_k = iW[v_k, u_k], \quad \alpha_k = iW[u_k, v_k^*]. \quad (\text{B.10})$$

Beraz badakigu nola erlazionatzen diren  $\hat{a}_k^\pm$  eta  $\hat{b}_k^\pm$  eragileak. Lehenak Hilberten espazioan oinarri ortonormalak osatzeko erabili daitezkeen moduan bigarrenekin ere berdina egin dezakete.

Egoera kitzikatuak (4.42) ekuazioan adierazi den moduan osatzen dira, baina kasu honetan  $a$  *hutsetik* abiatuz bat eta bestea  $b$  *hutsetik*:

$$|m_{k_1}^-, n_{k_2}^-, \dots (a)\rangle = \frac{1}{\sqrt{m!n! \dots}} \left[ (a_{k_1}^+)^m (a_{k_2}^+)^n \dots \right] |0_{(a)}\rangle, \quad (\text{B.11})$$

$$|m_{k_1}^+, n_{k_2}^+, \dots (b)\rangle = \frac{1}{\sqrt{m!n! \dots}} \left[ (b_{k_1}^+)^m (b_{k_2}^+)^n \dots \right] |0_{(b)}\rangle, \quad (\text{B.12})$$

non egoera egoera hauek  $a$  *partikula* eta  $b$  *partikularen* egoerak deskribatzen dituzten.

Bestalde, posible da egoera kuantiko bat edozein  $a$  partikula edo  $b$  partikularen egoeren konbinazio lineal moduan idaztea. Hala ere,  $a$  egoerak eta  $b$  egoerak orokorrean ez dira berdinak, eta berdina gertatuko da hauek definitutako hutsarekin.

Adibidez,  $\beta_k \neq 0$  dela hartzen badugu (B.7) transformazioetan orduan  $b$  hutsak  $a$  partikulak izango ditu. Hau era orokorragoan ikusteko,  $a$  partikulen okupazio eragilearen [14] ( $a$  partikula kantitatea),  $\hat{N}_k^{(a)} = \hat{a}_k^+ \hat{a}_k^-$ , batezbestekoa lortuko dugu  $b$  hutsean:

$$\begin{aligned} \langle 0_{(b)} | \hat{N}_k^{(a)} | 0_{(b)} \rangle &= \langle 0_{(b)} | \hat{a}_k^+ \hat{a}_k^- | 0_{(b)} \rangle = \langle 0_{(b)} | (\alpha_k^* \hat{b}_k^+ + \beta_k^* \hat{b}_{-k}^-) (\alpha_k \hat{b}_k^- + \beta_k \hat{b}_{-k}^+) | 0_{(b)} \rangle = \\ &= \langle 0_{(b)} | (\beta_k^* \hat{b}_{-k}^-) (\beta_k \hat{b}_{-k}^+) | 0_{(b)} \rangle = |\beta_k|^2 \delta^{(3)}(0), \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

non bigarren pausuan Bogolyuboven transformazioak erabili ditugun, hirugarren kasuan (4.40) propietateak sortze eta deuseztatze eragileentzat, eta azkenik (4.38) trukatzeko propietatea.

Ohartu adierazpen honetan hiru dimentsioko Dirac-en delta daukagula hau dibergentea izanik. Izatez honek bolumen espazial infinitua adierazten du eta beraz  $\vec{k}$  modurako  $a$  partikulen dentsitatea hurrengoa da:

---

$$n_{\vec{k}} = |\beta_k|^2, \quad (\text{B.14})$$

Eta emaitza hau modu guztietarako integratzen badugu dentsitate totala izango dugu:

$$n = \int d^3\vec{k} |\beta_k|^2, \quad (\text{B.15})$$

non balioa jada finitua den eta ez du zertan nulua izan behar.

Emaitza honek beraz, a eta b hutsak ea berdinak ziren galdeari erantzuna ematen dio. Aurreko emaitzak esaten digu a hutsean b partikulak izan ditzakegula eta beraz bi hauen hutsak ez dutela zertan berdinak izan behar.