Hiru aldiz erratu eta zuzen bukatzearen magia

Elisabete Alberdi Celaya

Matematikan lizentziatua eta doktoregaia

Laburpena: Dimentsio bakarrean soka baten zeharkako bibrazioak deskribatzen dituen deribatu partzialetan emandako uhin-ekuazioa aztertu dugu. Soka muturretan tinko dagoela suposatu dugu eta hasierako posizioa eta abiadura ezagunak direla. Soka osatzen duten puntu guztien kokapena edozein aldiunetan jakitea da helburua. Aldagai-banaketa metodoa erabiliz Fourierren serie gisako soluzioaren adierazpen analitikoa lortzen da. Zehaztasuna da soluzio analitikoaren abantailetako bat, hala ere, soluzioa serie gisa (infinitu batugai) emanda egoteak emaitza formalki zehatz adierazten du baina, praktikan, esplizituki kalkulatu behar denean, kontuan hartu ez diren batugaiek eraginda errore bat egiten da.

Emaitza analitiko zehatzak erakusten duen desabantailagatik, batugai guztiak hartzea posible egingo duen hurbilpenetara jo dugu. Lehenengo hurbilpenean, deribatu partzialetako ekuazioa dimentsio finituko bektore-espazio bateko funtzioez biderkatu eta sistema algebraiko batera iritsi gara. Bigarren hurbilpena sistema algebraikoan atera diren matrizeak diagonalizatzea izan da, errenkada bakoitzeko elementuak batu eta batura hori kokapen diagonalean jarriz. Hirugarren hurbilpena zenbakizko metodoez baliatuz ekuazio diferentzialaren emaitza pausoz pauso eraikitzea izan da. Honela, lortu da analitikoki infinitu batugairen bidez emandako sokako uhinaren mugimendu zehatza, kopuru finituan ditugun nodoen mugimendua deskribatzen duten batugai kopuru finitu baten bidez deskribatzea. Fenomeno honi superkonbergentzia deritzo.

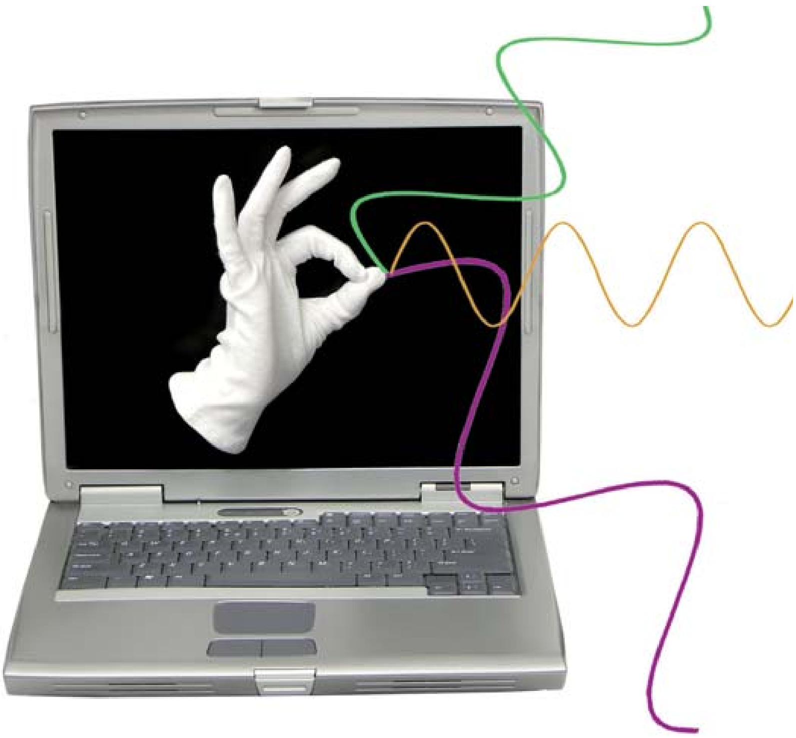
Abstract: We have considered the one-dimensional wave equation given by a partial differential equation, which describes the transverse vibrations of a string. We assume the string is fastened at each end and we know the initial position and the initial velocity of the string. Our goal is to know the position of all the points of the string in each moment. It is possible to get the analytic solution of this problem as the infinite sum of Fourier, using the technique of separation of variables. One of the advantages of the analytic solution is its accuracy, although the impossibility to take all the addends creates an error.

Because of the disadvantage that the exact analytic solution shows, we have used some approximations that enable us to take all the addends. In the first approximation, we have multiplied the partial differential equation by the functions of a finite dimension vectorial space, obtaining in this way an algebraic system. The second approximation have consisted of diagonalizing the matrixes of the algebraic system, adding the elements of each row and inserting the result in the position of the diagonal. In the third approximation we have built the result of the differential equation making use of numerical methods. In this way, the exact motion of the string which is given by infinite addends is described by a finite quantity of functions that describe the motion of finite nodes of the string. This phenomenon is known as superconvergence.

SARRERA

Markek, handi egiten denean, musikaria izan nahi du. Gitarra bikain jotzen du baina kostata dabil klabeak irakurtzen. Ikasturte amaierako kontzertuko pieza Fa 3.ean irakurri behar du, baina Fa 4.arekin nahasten du. Gainera, gitarra tonu eta erdi desafinatua dauka (tonu eta erdi goitik).

Newsikek, bere musikako irakasleak, apur bat moldatu dio Fa 3.ean dagoen partitura. Iritsi da unea. Markek pieza bukatu du eta osteko txalo zaparradak erakusten du bikain jo duela.



1. irudia. *Argazkilaria:* Elisabete Alberdi

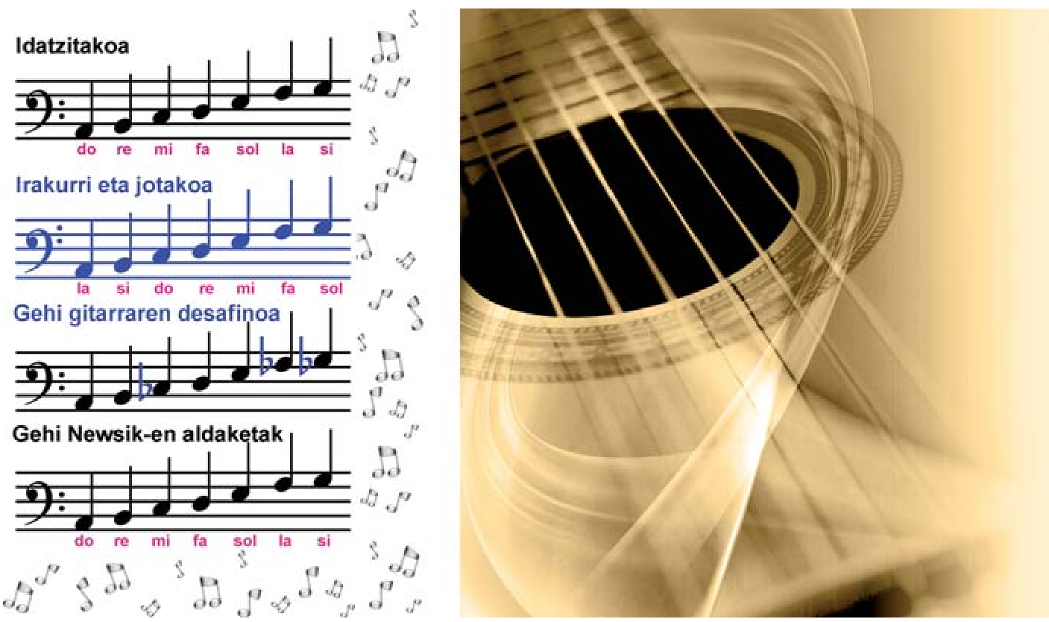
Gehienetan, kaotikoa izaten da zuzen egiten ez dakigun zerbaiti beste errore bat gehituz lortzen den emaitza. Ekuazio matematikoak hau izan behar duela dirudi: Fa 3.ean irakurtzen jakin ez gehi gitarra desafinatua berdin HONDAMENDIA. Badirudi pieza ezin dela interpretatu baina posible da ondo egitea ere

Markek Fa 4.a bailitzan irakurtzen du Fa 3.a. 3. lerroan Fa egon arren, berak Re irakurriko du. Hau da, idatzita dagoen nota bakoitza 2 beherago dagoena bezala irakurriko du.

Gitarra tonu eta erdi goitik dagoela gehituta ia idatzitakoa jotzea lortzen du. Mi-la-si notetan dago ezberdintasuna: hauek tonu erdi behetik daude.

Newsikek Marken partitura moldatu du, mi-la-si nota guztiei tonu erdi igoz. Newsikek partituran egindako aldaketak posible egin du hasierako kantua ondo jotzea, nahiz eta horretarako, irakurle txar bat eta gitarra desafinatua elkartu.

Antzeko paradoxa bat aurkitu dugu uhinen transmisioan. Metodo zehatzek errealitatea berdin deskribatzen dute, errealitatea klonatzen dute. Baina beti metodo zehatzak erabiltzea posible ez denez, hurbilpenetara jotzen da. Errealitatea deskribatzeko hurbilpen bat egiten denean errealitatearen deskribapen hurbildua lortzen da baina ez zehatza. Gehienetan, hurbilpen kopuruan aurrera egin ahala lortzen den deskribapena errealitatetik urruntzen joaten da, hurbilpen bakoitzak bere errorea atxikitzen baitu. Kasu gutxi batzuetan aldiz, matematikan ere mirariak gertatzen dira eta gerta daiteke hurbilpenak erabili arren errealitatea berdin-berdin deskribatzea lortzea. Are gehiago, lor daiteke doitasun handiko metodoekin lortu ezin den emaitza zehatza metodo xumeagoekin lortzea.



2. irudia. Markek partituran irakurri duenetik entzun denerako bidea, gitarraren desafinazioa eta Newsiken aldaketak barne. *Argazkilaria:* Elisabete Alberdi

SOKA BATEKO UHINAK

Inguru hurbilean aurki ditzakegun uhinak askotarikoak dira: harri bat uretara botatzean sortzen direnak, erradiazio elektromagnetikoa osatzen dutenak (irrati-uhinak, uhin infragorriak, e.a.), soinu-uhinak... Gitarra bateko 5. soka bibrarazten dugunean, ondo afinatuta baldin badago 1/110 periodoarekin bibratuko du. Mugimendu hau aireko molekuletara transmitituko da eta molekulak sokaren frekuentzia eta leuntasun berarekin mugiaraziko dira; mugimendua gure tinpanora iristen denean, tinpanoa ere jatorriko maiztasunarekin mugituko da eta horra, LA nota entzungo dugu.

Dimentsio bakarrean L luzerako soka baten zeharkako bibrazioak deskribatzen dituen deribatu partzialetan emandako uhin-ekuazioa hartuko dugu. Soka muturretan tinko dagoela onartuko dugu eta hasierako posizioa eta abiadura ezagunak direla ere. Matematikako formulazio batera joz gero, hau daukagu:

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 \le x \le L,\ 0 \le t \le T,\\
&u(0,t) = 0 = u(L,t),\\
&u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x).
\end{aligned}
$$

Hemen, α parametroak sokako uhinaren abiadura ematen digu; sokaren muturretako tentsioaren eta sokaren luzera-unitateko masaren menpekoa da abiadura hori. Soka osatzen duten puntu guztien kokapena edozein aldiunetan jakitea da helburua, hots u(x,t) ezagutzea. Aldagai-banaketa metodoa erabiliz Fourierren serie gisako soluzioaren adierazpen analitikoa lortzen da. Soluzio analitikoak abantailak eta desabantailak ditu. Zehaztasuna da abantailetako bat, baina soluzioa serie gisa (infinitu batugai) emanda egoteak emaitza formalki zehatz adierazten du, baina hala ere praktikan esplizituki kalkulatu behar denean, kontuan hartu ez diren batugaiek eraginda errore bat egiten da (infinitu izanda guztiak hartzea ezinezkoa baita).

Zehaztasunak duen desabantailagatik, batugai guztiak hartzea posible egingo duen hurbilpenetara joko dugu. Lehenengo hurbilpenean, deribatu partzialetako ekuazioa espazio bektorial bateko funtzioez biderkatu eta zenbait ekuazio integraletara iritsiko gara. Espazio bektorial horri dimentsio finitukoa izatea eskatuko diogu, kopuru finituan ditugun funtzio hauen konbinazio lineala izango baita emaitza osatuko duena. Lehenengo hurbilpena bukatzeko dimentsio finituko espazio bektorial horren oinarria izango diren funtzioak definitzea eta soka puntu kopuru finitu batez osatua dagoela suposatzea falta zaigu.

1. ETA 2. HURBILPENAK: EFM ETA DIAGONALIZAZIOA

Sistema baten portaeraren ulermena errazteko asmotan, ohikoa da sistema osagai edo elementu txikiagoetan banatzea. Elementu horietako bakoitzaren eta guztien portaera ulertzeak sistemaren portaera ulertzea dakar. Gainera sarritan, elementu kopuru finitu bat eredu egokia izaten da sistema osotasunean deskribatzeko. Sistema elementu finituek deskribatzen dutenean ditugun problemei diskretuak deritze, elementu kopuru infinituak egiten dutenei aldiz jarraituak.

Problema diskretuetan elementu kopurua ikaragarri handia izan daiteke, baina beti finitua. Problema diskretuak ordenagailuz aise ebatz daitezke; jarraituak aldiz, era zehatz batean analitikoki bakarrik ebatz daitezke.

Sistema jarrai baten portaera izango duen sistema diskretuak kalkulu gutxiago egin beharraren abantaila du. Hau dela-eta, zientzialariek sistema bat diskretizatzeko metodo ezberdinak proposatu izan dituzte. Metodo hauek guztiak sistema jarraituaren hurbilpena dira eta sistema diskretuko elementu kopurua handitu ahala sistema jarraituaren portaerarekiko hurbilketa bat ematen dute.

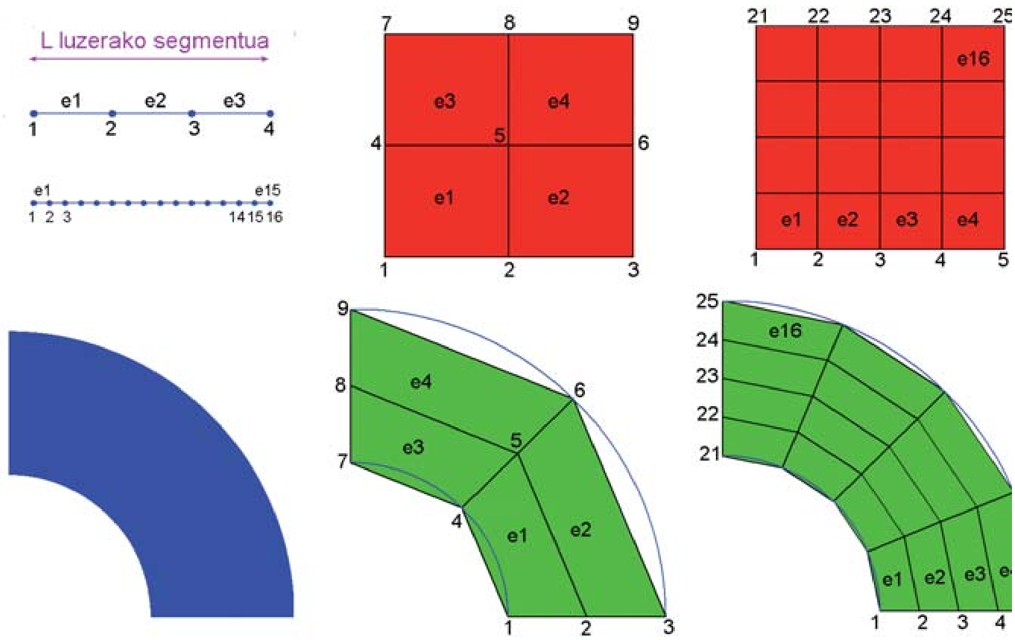
Elementu finituen metodoa, EFM, hauetako bat da, matematikoki planteatutako erlazioak betetzen diren sistema jarraitua diskretizatzeko balio duena eta eremu irregularretan ere aplikagarri dena.

Metodo honetan, jatorrizko espazio-eremua elementu izena hartzen duten azpieremu bakunagoetan banatzen da. Elementuen erpinei nodo deritze eta biek, elementuek eta nodoek, jatorrizko eremua ordezkatuko duen sarea osatzen dute. Sokaren kasuan EFM ezartzean, suposatzen gaude soka nodo kopuru finitu batez, hau da, puntu kopuru finitu batez osatua dagoela.

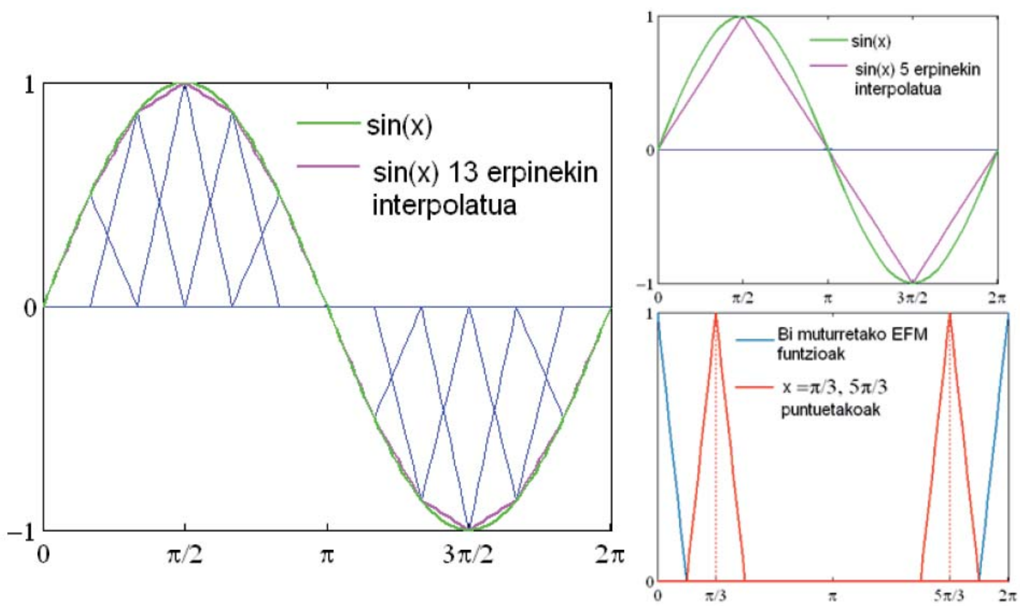
Nodo hauek elkarrengandik distantzia berdinera hartuko ditugu. Lehenengo hurbilpena bukatzeko behar genituen funtzioak nodo bakoitzari lotuta definituko ditugun EFM funtzioak izango dira. Sokaren mugimendua EFM funtzioen konbinazio lineal gisa lortzea izango da helburua, konbinazio lineal horretako koefizienteak izanik gure ezezagunak. Koefiziente horiek t denbora-aldagaiaren menpekoak dira. Arestian aipatutako ekuazio integrala EFM funtzio bakoitzerako idatziz gero, ezezagunak diren koefizienteak adina ekuazio dituen sistema algebraikora iritsiko gara. Sistema honetan zenbait matrize agertuko dira eta hauen eraketak bi parte izango ditu: bata elementu mailakoa, diskretizazioko elementu bakoitzean integralak kalkulatuz egiten dena eta bestea globala, bertan, elementu mailako matrizeen mihiztadura egiten baita.

Lehen hurbilpen luze honek denborarekiko 2. ordenako ekuazio diferentzialera garamatza, bertako ezezagunak EFM funtzioak biderkatuko dituzten koefizienteak izanik. Ezezagun hauek ezagutzeak soka osatzen duten nodoen aldiuneko kokapena ezagutzea dakar, hau da, sokaren mugimendu hurbildua ezagutzea.

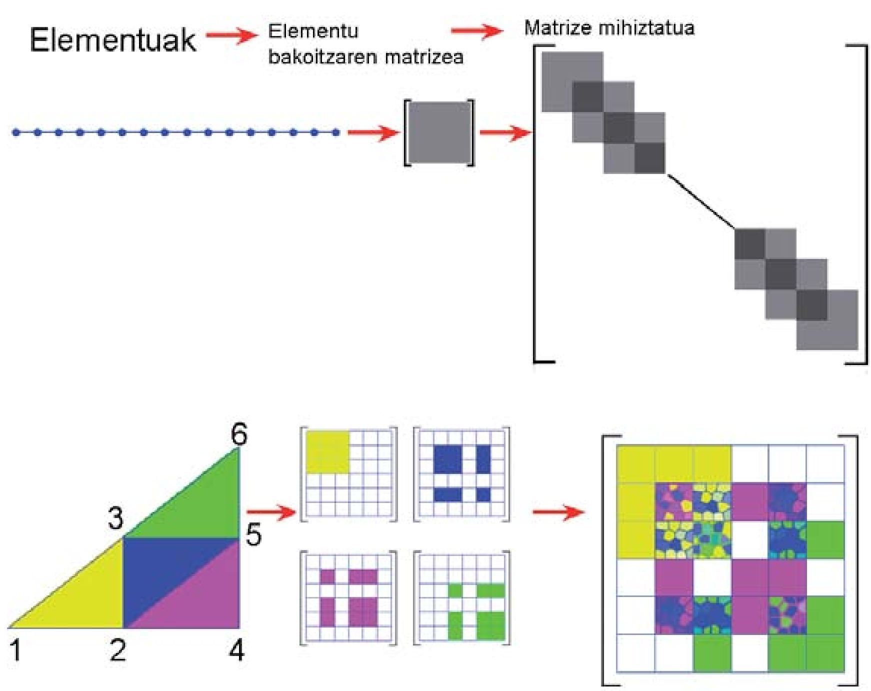
Bigarren hurbilpen batean sistema algebraikoan atera diren matrizeak diagonalizatu egingo ditugu, errenkada bakoitzeko elementuak batu eta batura hori diagonaleko posizioan kokatuz.



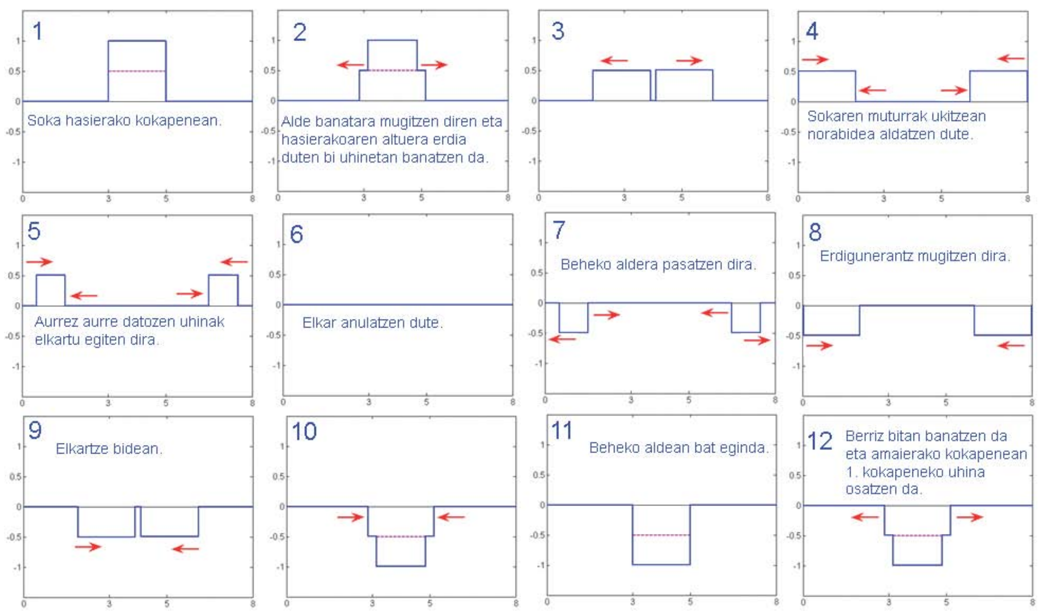
3. irudia. 1D eta 2D-ko hiru eremu (segmentua, karratua eta zirkuluaren zati bat) elementu finitutan banatuta. 1D-ko kasuan elementuak segmentuak dira, eta 2D-ko eremuen kasuan forma ezberdineko elementuak erabil daitezke elementu gisa. Elementuak izendatzeko e hizkia erabili da, eta nodoak zenbakiz adierazi dira. *Argazkilaria:* Elisabete Alberdi



4. irudia. sin(x) funtzioaren interpolazioa, hurrenez hurren 5 eta 13 erpinekin EFM funtzio linealak erabilita. 13 erpinekin egindako interpolazioa 5 erpinekin egindakoa baino hobea dela antzeman daiteke. *Argazkilaria:* Elisabete Alberdi



5. irudia. 1D eta 2Dko bi eremu elementutan banatu, elementu bakoitzaren matrizea kalkulatu eta matrize mihiztatua kalkulatzerainoko bidea. *Argazkilaria:* Elisabete Alberdi



6. irudia. Muturretan tinko dagoen L=8 cm-ko sokaren mugimendu zehatza, hasierako posizioa uhin karratu edo pultsu batena, hasierako abiadura 0cm/s duena eta α = 1cm/s-ko uhin-abiaduraz higitzen dena. Azaldutako hurbilketa sortarekin sokak errealitatean duen mugimendu bera lortzen da. *Argazkilaria:* Elisabete Alberdi

HIRUGARREN HURBILKETA: ZENBAKIZKO METODOA

Azkenik, zenbakizko metodoez baliatuz pausoz pauso eraikiko dugu ekuazio diferentzialaren emaitza. Ordena eta egonkortasuna dira zenbakizko metodoen ezaugarrietako bi. Ordenak esaten digu zenbakizko metodoaren bidez lortutako soluzioak zein neurritan ematen duen emaitza analitikoarekiko hurbilketa.

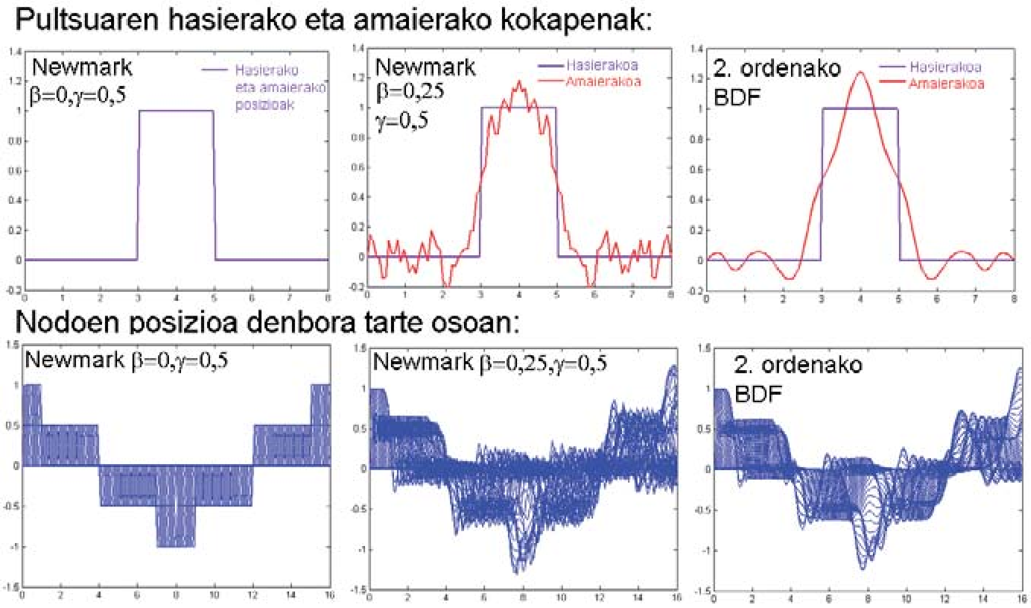
Zenbat eta ordena altuago, lortutako emaitza hurbildua zehatzagoa izango da. Egonkortasunak, erakusten digu zenbakizko metodoak zein portaera duen kalkuluak egiterakoan sortzen diren erroreen aurrean. Metodoak, zenbat eta egonkorragoa izan, hainbat eta gaitasun gehiago izango du aurretik egindako erroreetatik eratorritako perturbazioak ahultzeko. Baina zenbakizko metodoa ordena altukoa izan arren inoiz ez da zehatza izango, eta beraz 3. hurbilpena egiten egongo gara.

Zenbakizko metodoen artean, 1-5 ordenako BDF (Backward Differentiation Formulae) metodoak egonkorrak dira. Bi parametrori, (β, γ), balioak emanez lortzen den Newmarken familiako metodoak ere oso egonkorrak dira eta $\gamma = \frac{1}{2}$ denean 2 ordenakoak dira. Newmarken metodoak BDFak baino ordena txikiagokoak izan arren, besteak beste parametroei balioak emateko duten aukeragatik, posible egiten dute soka bateko uhin-ekuazioan elementu finituak erabili, matrize diagonalak eraiki eta zenbakizko metodoa aplikatu ostean uhinak errealitatean izango lukeen portaera deskribatzea.

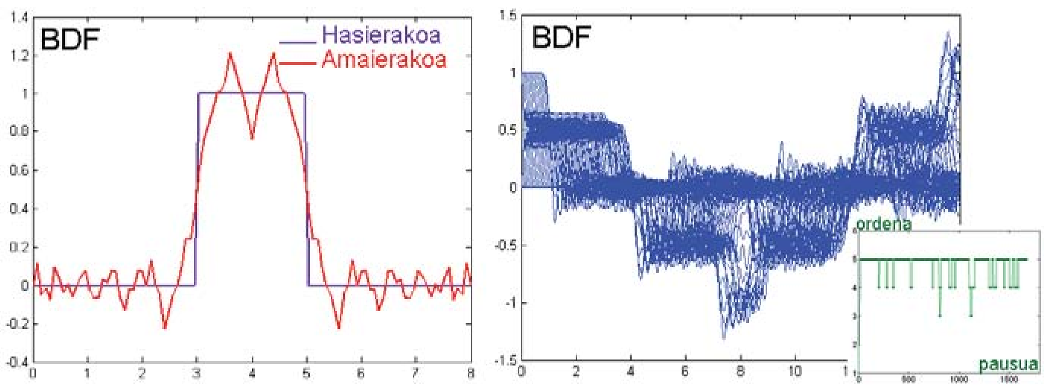
Kateatutako hurbilpen hauek sokako uhinaren mugimendu zehatza deskribatu ahal izateko, nahikoa da Newmarken metodoan $\beta = 0, \gamma = \frac{1}{2}$ parametroak eta zenbakizko metodoko pausu tamaina bezala sokako elementu bakoitzaren luzera uhin abiaduraz (α-z) zatituta hartzea.

Fenomeno honi superkonbergentzia deritzo eta kasu honetan, kopuru finituan ditugun nodoen mugimendua deskribatzen duten batugai kopuru finitu baten bidez deskribatzen da analitikoki infinitu batugairen bidez emandako sokako uhinaren mugimendu zehatza.

Kokapenak



7. irudia. 6. irudian azaldutako sokaren hasierako eta amaierak kokapenak eta nodoen kokapenak, hurbilpen guztiak aplikatu ezarri eta zenbakizko metodo ezberdinak erabilita. Guztiak sokan 100 elementu hartuta eta 200 pausu emanda. *Argazkilaria:* Elisabete Alberdi.



8. irudia. Ordena ezberdinetako BDF metodoekin 6. irudian azaldutako problema ebazterakoan lortzen den sokaren hasierako eta amaierako kokapenak eta zenbait nodorenak denbora tarte osoan. Sokan 100 elementu hartuta eta 1676 pausu emanda. Leiho txikian pausu bakoitza emateko erabili den ordena ikus daiteke. *Argazkilaria:* Elisabete Alberdi.

Ariketa baten azken soluzioa, soluzio zuzenarekin bat etortzeak ez du esan nahi ariketa pausoz pauso ondo eginda dagoenik. Uhinaren transmisioaren kasuan, hiru hurbilpen egin ditugu eta hauetako bakoitzak errore bat atxiki du prozesuan.

Baina errealitatea berdin deskribatzea lortu dugunez, badirudi ez dugula egin inolako hurbilpenik. Egin ditugun hurbilpenen erroreak aztertu eta parametro egokiekin aurkako erroreak lortzean egon da gakoa, errore guztien batuketak zero ematean errealitatearen deskribapen perfektua lortzen baita. Hiru hurbilpenetako bakoitzak bakartasunean ez duen zehaztasuna elkartuta lortu dute. Banakako inperfekzioek, batuta izaki perfektua osatu dute. Unibertsoan eguzki-eklipseek izaten dituztenen antzeko maiztasunaz gertatzen dira.

Matematiken unibertsoan beraz, liluragarria da hurbilpenek emaitza oso-osorik eklipseen bidez nola estaltzen dituzten ikustea.

BIBLIOGRAFIA

[1] J.C. Butcher. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. Wiley, 2008.
[2] Stanley J. Farlow. *Partial differential equations for scientists and Engineers*. John Wiley & Sons, 1993.
[3] C. W. Gear. *Numerical initial value problems in ordinary differential equations*. Prentice Hall. 1971.
[4] E. Hairer, G. Wanner. *Solving ordinary differential equations, II, Stiff and Differential Algebraic Problems*. Springer, 1996.
[5] Thomas J. R. Hughes. *The finite element method. Linear static and dynamic finite element analysis*. Prentice-Hall International Editions, 1987.
[6] J. D. Lambert. *Numerical methods for ordinary differential systems: the initial value problem*. John Wiley & Sons, 1991.
[7] L. F. Shampine, I. Gladwell, S. Thompson. *Solving Odes with Matlab*. Cambridge University Press. 2003.
[8] L. F. Shampine, M. W. Reichelt. *The MATLAB ODE suite*. SIAM J. Sci. Comp. 18. bolumena, 1-22 orrialdeak, 1997.
[9] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor & J. Z. Zhu. *The finite element method. Its basis & fundamentals*. Elsevier Butterworth-Heinemann. 2005.