# Matematika esperimentalaren adibide bat: Lauki sareko patroi bitarren kopuruaren kalkulua

*Yosu Yurramendi Mendizabal*

Konputazio Zientziak eta Adimen Artifiziala saila.
Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU)

yosu.yurramendi@ehu.es

Jasoa: 2013-05-24 Onartua: 2013-07-01

**Laburpena:** Lauki sare batek L lerro eta Z zutabe ditu, eta matrize baten bitartez adieraz daiteke: M(L,Z), L = 1, 2, 3, ... , Z = 1, 2, 3, ... .

Halako lauki sare bateko patroi bat M(L,Z)-ren balioak zehaztean datza. M bitarra da balioak 0 ala 1 direnean.

Lan honetan aztertzen den konbinatoria-problema hauxe da: zenbat patroi ezberdin daude (a(L,Z)) L eta Z zenbaki arrunt pare bakoitzeko, kontutan hartuta bi patroi, M(L,Z) eta M'(L,Z) baliokideak direla bata bestearen ispilua denean, edo bataren 180º-ko biraketaren bidez bestea lortzen denean.

Lan honetan a(L,Z) zenbakiak kalkulatzeko formulak gauzatzen dira matematika esperimentala izena duen bidetik.

**Hitz gakoak:** konbinatoria, lauki sarea, zenbaki osozko segidak, matematika esperimentala.

**Abstract:** A square grid has L rows and Z columns, and it can be defined by a matrix M(L,Z) , L=1,2,3, ... , Z=1,2,3, ... .

A pattern of such a grid relies on the definition of M(L,Z) values. A square grid is binary when values are 0 or 1.

In this paper this combinatorial problem is analysed: how many different pattern are (a(L,Z)) for each natural couple L and Z, two patterns M(L,Z) eta M'(L,Z) being equivalent when each one is the reflection or 180º rotation of the other.

In order to calculate the quantities a(L,Z), some formulas are given by means of an experimental way.

**Keywords:** combinatorics, square grid, integer sequences, experimental mathematics.

## 1. SARRERA

IFS (*Iterated function system,* hau da, funtzio errepikatu sistema) motako fraktalen katalogo bat egitekotan, ezinbestekoa da jakitea zein diren oinarrizko forma edo patroiak. Oinarrizko patroi bat L lerroz eta Z zutabez osatua den lauki sare batean datza, eta beraz L·Z laukitxoz osatuta dago. Laukitxo bakoitza beltza ala zuria izan daiteke. Laukitxo beltz bakoitzean patroi bera behin eta berriro txertatuz fraktal bat sortzen da.

Katalogorako fraktalak osatu aurretik bada konbinatoria problema bat: zenbat fraktal ezberdin osa daitezke modu horretan. Lan honetan problema horri aurre egiten zaio, hau da, oinarrizko patroien kopurua zenbatzeari.

Lauki sare bat matrize baten bitartez adieraz daiteke: M(L,Z), L=1,2,3,... , Z=1,2,3, ... . Halako lauki sare bateko patroi bat M(L,Z)-ren balioak zehaztean datza. Bitarra da litezkeen balioak bi direnean, *0* eta *1* adibidez (1. irudia).

| | | | |
|---|---|---|---|
| 00110 | 01100 | 11100 | 00111 |
| 10000 | 00001 | 10011 | 11001 |
| 11001 | 10011 | 00001 | 10000 |
| 00111 | 11100 | 01100 | 00110 |
| (α) | (b) | (c) | (d) |

**1. irudia.** L=4 eta Z=5 lauki sareko patroi bitar bat, eta bere baliokideak.

Bi patroi *baliokideak* dira fraktal bera ahalbideratzen dutenean, hau da, bata bestearen ispilu-irudia baldin bada (1. irudian (b) (a)-rena), edo bataren 180º-ko biraketaren bidez bestea lortzen bada ((c)), edo bi eragiketa horien konposaketaren bitartez ((d)).

Lan honetan aztertzen den konbinatoria problema hau da: zenbat patroi ezberdin dago L eta Z zenbaki arrunt pare bakoitzeko? Adibidez, L=2 eta Z=3 lauki sareko 64 ($2^{2 \cdot 3}$) oinarrizko patroi bitarrak 24 patroi ezberdinetan sailka daitezke bi eragiketa geometrikoren arabera (2. irudia). Lauki sare mota honi *2*x*3* lauki sarea esango zaio hemendik aurrera. Orokorrean, *L*x*Z* lauki sarea.

*L*x*Z* lauki sare bateko patroiak aztertu, eta patroi ezberdinen kopurua kalkulatzeko prozedura, *esperimentazio aldia* nolabait esateko, hauxe da:

1. Litezkeen patroi guztiak eraiki (M(L,Z) guztiak).

2. Eraikitako patroiak ispilatze eta 180º-ko biratze eragiketen arabera sailkatu.
3. Sail kopurua zenbatu, eta guztizko kopurua eman (a(L,Z)).

Guzti honi ekiteko, hasieran, espresuki egindako *programa informatiko bat* osatu eta erabili da.

Zenbat eta handiagoa izan L eta Z, orduan eta oroimen gaitasun eta denbora gehiago beharko du ordenagailuak emaitza lortzeko. Esan bezala, programa informatikoak, L eta Z emanda, litezkeen patroi guztiak (M(L,Z) guztiak, 1. urratsa) aztertzen ditu (2. urratsa), multzo osoa ahitu arte, eta azterketaren ondorioz (3. urratsa) a(L,Z)zenbakiak ematen ditu.

Emaitzak lortzeko baina, badira zenbait muga, erabilitako ordenagailuaren ezaugarrien (memoria kapazitatea eta prozesagailua) eta programa informatikoaren eraginkortasunaren arabera erabakitzen direnak.

Muga horietatik aurreragoko zenbakiak kalkulatzeko, *formula matematikoak* bilatzen dira programa informatikoaren bitartez lortutako zenbakietan oinarrituta. Ustezko formulak *induzitu* egiten dira. Horretarako, nolabaiteko behatze eta zorrozte gaitasunak behar dira. Esperimentatzearen *alor induktibo klasikoa* da, matematikariaren jarduera, fisikariaren edota kimikariarenaren pare jartzen duena ([1]). *Matematika esperimentala* deitzen zaio halako jarduerari, matematika klasiko deduktiboaren aldean bereizia izan dadin. ([2], [3]).

Esan bezala, *L*x*Z* lauki sare bakoitzeko zenbaki hau bilatzen da:

a(L,Z),   *L*x*Z* lauki sareko patroi ezberdin kopurua
Adibidez*, 2*x*3* lauki sarearen kasuan: a(L,Z) = 24 .

Azterketa are sakonago bat egin daiteke patroi bakoitzeko '*1*'-ekoen kopurua (K) kontuan hartuz, baita patroi bakoitzak dituen baliokideen kopurua (B) kontuan hartuz ere. 2. irudian azaltzen *2*x*3* lauki sareen azterketa. Ohartu da zenbaki konbinatorio binomialak agertzen direla (*C(6,0), C(6,1),…, C(6,6)*), eta $(1+1)^6$ binomioaren garapen-batugaiak dira ($2^{2\cdot 3}$=64).

7. atalean aipatu eta beste lan batean aztertuko dira '*1*'-ekoen kopuruaren (K) eta baliokideen kopuruaren (B) gaiak.

2. atalean lan honen oinarria osatzen duten emaitzak azaltzen dira. Emaitza hauek programa informatikoa osatuz eta ordenagailuan erabiliz, patroiak gauzatuz, aztertuz, eta zenbatuz lortzen dira.

Ondoren, 3. atalean emango dira lortutako emaitzek induzitzen dituzten zenbait formula errekurtsibo.

4. atalean azalduko da nola induzitzen diren formula errekurtsibo orokorrak induzitutako formulen gainean, eta beren erregulartasunari erreparatuz; horrela a(L,Z) zenbakiak emango dira. Gero, 5. atalean azalduko da nola eman daitezkeen zuzenean zenbakien balioak, induzitutako formula errekurtsiboei eraginez, eta, berriz ere, erregulartasunei erreparatuz. Formula hauen bitartez zuzenean eman daitezke a(L,Z) zenbakien balioak.

Jakina, emaitzak azaltzeko orduan, L eta Z balioei mugak jarri behar zaizkie, lan honen orriaren zabaleraren arabera. Badira emaitzen azaltze horretan baldintzak jartzen dituzten beste bi kontu: ordenagailuaren ezaugarriak eta erabilitako programa informatikoarenak.

*L*x*L* lauki sareek arreta berezia eskatzen dute, 90º eta 270º biraketek ere patroi baliokideak ematen dituztelako, L eta Z ezberdinak direnean ez bezala. Horixe izango da 6. ataleko gaia.

Bukatzeko, 7. atalean aipatuko dira ondorioak, hausnarketak eta etorkizuneko eginbideak.

```
          K=0       K=1       K=2       K=3       K=4       K=5       K=6

          000       100       110       111       111       111       111
          000       000       000       000       100       110       111
             1         4         4         2         4         4         1
                    010       101       110       111       111
                    000       000       100       010       101
                       2         2         4         2         2
                              100       110       110
                              100       010       110
                                 2         4         2
                              100       110       110
                              010       001       101
                                 4         4         4
                              100       101       110
                              001       100       011
                                 2         4         2
                              010       101       101
                              010       010       101
                                 1         2         1

Zutabeak batuz gero hau dugu:
          1          6          15         20         15         6          1     64
       C(6,0)     C(6,1)     C(6,2)     C(6,3)     C(6,4)     C(6,5)     C(6,6)

Patroi kopurua:
          1          2          6          6          6          2          1     24

Baliokide kopurua:
   B=1    1                     1                     1                     1      4
   B=2               1          3          2          3          1                10
   B=4               1          2          4          2          1                10
```

**2. irudia.** *2*x*3* lauki sareko M(2,3)patroiak ($2^{2\cdot3}$ **=64**) **24** patroitan sailkatuta. K da patroi baten '*1*'ekoen kopurua. *C(2·3,k)* zenbaki binomial bat da. Patroi baten azpiko zenbakiak patroi baliokideren kopurua (B) adierazten du.

## 2. PATROI KOPURUAREN OINARRIZKO EMAITZAK

Atal honetan *L*x*Z* lauki sare bakunenak aztertu, eta beren a(L,Z) zenbakiak kalkulatuko dira.

a(L,Z) zenbakiak lortzearren, R hizkuntza informatikoan berezko programa bat idatzi da.

Erabilitako ordenagailuaren ezaugarrien arabera (hardwarea: prozesatzailea, Intel(r) Core(TM) i7 CPU Q720 1.60GHz; RAM memoria: 4,00GB; S.O, 64 bit) eta programa informatikoaren kalitatearen arabera (softwarea: http://www.r-project.org), lortu diren zenbakiek muga bat aurkitu dute. *L*x*Z* lauki sarea handiegia gertatu da azterketarako L·Z > 27 denean.

3. irudian azaltzen da aurkitutakoa. Kontuan hartu behar da *L*x*Z* eta *Z*x*L* lauki sare multzoen artean bana-banako korrespondentzia erlazioa dagoela, eta beraz a(Z,L)=a(L,Z) dela. Ondorioz, a(L,Z) taula simetrikoa da.

## 3. PATROI KOPURUA KALKULATZEKO FORMULA ERREKURTSIBOAREN BILAKETA

*L*x*Z* lauki sareei a(L,Z) patroi kopurua dagokie. L eta Z bi dimentsioko bat finkatuz gero, zenbaki segida bat lortzen da. Adibidez, *1*x*Z* (L=1) lauki sareei dagokien zenbaki segidaren hasiera hauxe da:

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z : | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| a(1,Z) : | 2 | 3 | 6 | 10 | 20 | 36 | 72 | 136 | 272 | 528 | 1056 | 2080 | 4160 | 8256 |

Atal honetan 3. irudiko taularen lerrokako zenbaki segidak aztertuko dira, kasu sinpleenetik kasu konplexuagoetara: *1*x*Z*, *2*x*Z*, *3*x*Z*, *4*x*Z* eta abar.

3. Irudiko taulan azaltzen diren emaitzetatik hareago, erlazioak bilatzeko eta formula bat gauzatzeko, segidak behatu, sena zorroztu eta zolitasuna behar da. Formula bat erabiliz gero, badago ordenagailu bidez lortutako zenbakiak baino zenbaki gehiago lortzerik. Hortxe bere garrantzia.

Azterbidean lortutako formulek erakusten dute beste segida guztiak nolakoak diren edo izan daitezkeen, behintzat.

### 3.1. *1xZ* lauki sareak

Lauki sare hauek dira kasurik bakunena, eta dagokien a(1,Z) zenbaki segida hau da:

a(1,Z) : 2, 3, 6, 10, 20, 36, 72, 136, 272, 528, 1056, 2080, 4160.

| L \ Z | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 6 | 10 | 20 | 36 | 72 | 136 | 272 | 528 | 1056 | 2080 | 4160 |
| 2 | 3 | 7 | 24 | 76 | 288 | 1072 | 4224 | 16576 | 66048 | 262912 | 1050624 | 4197376 | 16785408 |
| 3 | 6 | 24 | 168 | 1120 | 8640 | 66816 | 529920 | 4212736 | 33632256 | | | | |
| 4 | 10 | 76 | 1120 | 16576 | 263680 | 4197376 | | | | | | | |
| 5 | 20 | 288 | 8640 | 263680 | 8407040 | | | | | | | | |
| 6 | 36 | 1072 | 66816 | 4197376 | | | | | | | | | |
| 7 | 72 | 4224 | 529920 | | | | | | | | | | |
| 8 | 136 | 16576 | 4212736 | | | | | | | | | | |
| 9 | 272 | 66048 | 33632256 | | | | | | | | | | |
| 10 | 528 | 262912 | | | | | | | | | | | |
| 11 | 1056 | 1050624 | | | | | | | | | | | |
| 12 | 2080 | 4197376 | | | | | | | | | | | |
| 13 | 4160 | 16785408 | | | | | | | | | | | |

**3. irudia.** Programa informatikoaren bitartez lortutako a(L,Z)kopuruak.

Halako zenbaki segida bat ezaguna den ala ez jakiteko guztiz ezinbestekoa izan da wiki moduko *On line Encyclopedia of Integer Sequences* (OEIS)-en datu-basea ([4], [5]). a(1,Z) zenbaki segida webgune horretan jarriz gero ezaguna dela egiaztatzen da: A005418 kodea duen zenbaki segida, hain zuzen (N. J. A. Sloane). Esate baterako, A005418 segida hau *Losanitschen triangelua* izena duen objektu matematikoaren lerrokako gaien baturaren bidez lortzen da. Triangelu honen kodea A034851 da (N. J. A. Sloane).

OEISen webgunean zenbaki segida baten zenbait ezaugarri eta formula ikusi daitezke (azalpenak, funtzio esplizitua, funtzio sortzailea, beste zenbait segidekiko erlazioak, programak eta abar). Edozein ikerlarik hartu dezake parte zenbaki segida baten definizioan, baita ezaugarri eta formulen deskribapenean ere.

A005418 kodea duen OEISeko segidarekin erabat ados jartzeko lehenengo gaia definitu behar da. Bedi a(1,0)=1, webgunean azaltzen den bezala.

A005418-ren webgunean bertan ikus daitezke segida osatzeko hiru formula errekurtsibo hauek:

$$a(1,Z) = 2\cdot a(1,Z\text{-}1) + 2\cdot a(1,Z\text{-}2) - 4\cdot a(1,Z\text{-}3)\ ,\ Z>2\ ,$$
$$a(1,0) = 1,\ a(1,1) = 2,\ a(1,2) = 3\ .$$

$$a(1,Z) = 6\cdot a(1,Z\text{-}2)\text{-}8\cdot a(1,Z\text{-}4)\ ,\ Z>4\ ,$$
$$a(1,0) = 1,\ a(1,1) = 2,\ a(1,2) = 3,\ a(1,3) = 6\ .$$

$$a(1,Z) = 2\cdot a(1,Z\text{-}1) - 2^{(Z-2)/2}\cdot(1+(-1)^{Z})/2\ ,\ Z>2\ ,$$
$$a(1,0) = 1\ .$$

Lan honetan lehenengo formula errekurtsibo linealari erreparatu zaio batez ere. Hirugarren formularen adierazpidea ere interesgarria gertatu da, halako itxurakoak lortu baitira ikerlanean. Berez ez da guztiz errekurtsiboa, baduelako gai bat zuzenean Zren menpe dagoena, eta esplizituki kalkulatzen dena. Halako formula errekurtsiboei ez-homogeneoak esaten zaie, aurreko formula errekurtsibo linealei homogeneo esaten zaienekin alderatze aldera. Esan daiteke hirugarren formula errekurtsiboa mistoa dela.

Ulertzeko beste bide bat da deskonposizioa. Bi segida osatzen dira, baldin eta bereizten baldin baditugu alde batetik $a_1(1,Z)$ zenbaki segidako toki bakoitiak (lehenengoak 0. tokia betetzen du), eta bestetik bikoitiak:

$a_1(1,Z)$: 2, , 6, , 20, , 72, , 272, , 1056, , 4160.
$a_2(1,Z)$: , 3, , 10, , 36, , 136, , 528, , 2080.

$a_1(1,Z)$ segida OEISen webgunean bilatuz gero, A063376 kodea duen segida agertzen da (Henry Bottomley, 2001). Bi formula nagusi ditu, bata erabat errekurtsiboa, eta bestea mistoa:

$$a_1(1,Z) = 6 \cdot a_1(1,Z\text{-}1) - 8 \cdot a_1(1,Z\text{-}2)\ ,\ Z>1\ ,$$
$$a_1(1,0) = 2,\ a_1(1,1) = 6\ .$$

$$a_1(1,Z) = 4 \cdot a_1(1,Z\text{-}1) - 2^Z\ ,\ Z>0\ ,$$
$$a_1(1,0) = 2\ .$$

Areago, beste azterbide bat eskaintzen da webguneko beste zenbaki segida batean oinarritzen den formula honekin:

$$a_1(1,Z) = A001576(Z) - 1\ ,\ Z>0\ .$$

$a_2(1,Z)$ segida OEISen webgunean A007582 kodea duen segida da (Simon Plouffe).

$$a_2(1,Z) = 6 \cdot a_2(1,Z\text{-}1) - 8 \cdot a_2(1,Z\text{-}2)\ ,\ Z>1\ ,$$
$$a_2(1,0) = 1,\ a_2(1,1) = 3\ .$$

$$a_2(1,Z) = 4 \cdot a_2(1,Z\text{-}1) - 2^{(Z\text{-}1)}\ ,\ Z>0\ ,$$
$$a_2(1,0) = 1\ .$$

Bi formulak $a_1(1,Z)$ segidaren pareko formulen itxurakoak dira. Hurrengo bi formulek bide sakonagoak eskaintzen dituzte:

$$a_2(1,Z) = 2^{(Z\text{-}1)} \cdot A000051(Z)\ ,\ Z>0\ .$$

$$a_2(1,Z) = A000079(Z) + A006516(Z)\ ,\ Z>0\ .$$

$a_1(1,Z)$ eta $a_2(1,Z)$-ren lehenengo formulak konbinatuz gero, $a(1,Z)$ segida osoaren bigarren formula lortzen da eta bigarren formulak konbinatuz, hirugarrena. $a(1,Z)$ beraz, antzeko ezaugarriak dituzten $a_1(1,Z)$ eta $a_2(1,Z)$ segidetan deskonposatzen da.

Gainera, bi segidei erreparatuz gero, ikusten da $a_1(1,Z)$ $a_2(1,Z\text{-}1)$-ren bikoitza dela:

$$a_1(1,Z) = 2 \cdot a_2(1,Z\text{-}1)\ ,\ Z=1,3,5,\ \ldots\ .$$

Egiazta daiteke ordea $a_1(1,Z)$ eta $a_2(1,Z)$ segidek ez dutela betetzen $a(1,Z)$-ren lehenengo formula errekurtsiboa.

### 3.2. *2xZ* lauki sareak

3. irudiko 2. lerroko a(2,Z) zenbaki segida OEISen webgunean bilatuz gero (a(2,2)=6 jarrita, a(2,2)=7 jarri beharrean) A132390 kodea duen segida agertzen da (Yosu Yurramendi, 2008). Segida proposatu eta gutxi gorabehera urtebetera, Jon E. Schoenfieldek zenbaki gehiago eman zituen, eta formula errekurtsibo bat proposatu zuen. Berarekin izandako komunikazio idatzizkoan adierazita dago, besteak beste, nola lortu zuen formula errekurtsiboa. Ikerlan honetan azaltzen diren ideiak garatzeko funtsezkoa izan da berak adierazitakoa. Eskertuta nagokio, oso.

Programa informatikoaren bitartez eraikitako zenbakiak hauek izan dira:

a(2,Z): 3, 7, 24, 76, 288, 1072, 4224, 16576, 66048, 262912, 1050624, 4197376, 16785408.

Formula errekurtsiboa bilatzeko funtsean adierazi zigun prozedura honetan datza:

1. Bi gairen arteko proportzioa neurtu, eta 4runtz hurbiltzen doala antzeman.

   b(2,Z) = a(2,Z) / a(2,Z-1) .

   b(2,Z): 2.333333, 3.428571, 3.166667, 3.789474, 3.722222, 3.940299, 3.924242, 3.984556, 3.980620, 3.996105, 3.995127, 3.999024.

2. Gero, bi gairen arteko proportzioaren araberako aldiak kalkulatu:

   c(2,Z) = a(2,Z) – 4·a(2,Z-1) .
   c(2,Z): -5, -4, -20, -16, -80, -64, -320, -256, -1280, -1024, -5120, -4096.

3. Azkenik, segida berriaren erregulartasunari erreparatu:

   c(2,Z)= 4·c(2,Z-2) .

   Hau da,

   a(2,Z)-4·a(2,Z-1) = 4·(a(2,Z-2)-4·a(2,Z-3)) .

Horrela, formula errekurtsibo lineal hau lortzen da:

$a(2,Z) = 4\cdot a(2,Z-1) + 4\cdot(a(2,Z-2)- 4^2\cdot a(2,Z-3)$ , Z>2 ,
a(2,0) = 1, a(2,1) = 3, a(2,2) = 7 .

Hemen ere a(2,0)=1 gaia gehitu da.

Nahiz Z=13 kasura arte bakarrik lortu zenbakiak ordenagailuaren bidez, zenbaki segida nahi bezainbeste luza daiteke formula errekurtsiboa erabiliz. Zenbaki segida hau OEISen gehitu da, eta bere kodea A225826 da.

### 3.3. ***3xZ* lauki sareak**

Lauki sare hauetarako gauzatu ahal izan den a(3,Z) zenbaki segida hau da (gehi a(3,0)=1):

a(3,Z): 1, 6, 24, 168, 1120, 8640, 66816, 529920, 4212736, 33632256.

Segida hau ere ez zegoen OEISekoen artean (L>2, kasu guztiak bezala). Orain, berriz, gehitu da eta A225827 kodea du.

a(3,Z) segidaren lege edo formula errekurtsiboa bilatzearren, a(3,0)=1 definituz gero, a(2,Z)-rako erabilitako prozedura bera erabili da hasieran, eta ikusten da bi gaien arteko proportzioa 8runtz doala:

b(3,Z) = a(3,Z) / a(3,Z-1) .
b(3,Z): 6.000000, 4.000000, 7.000000, 6.666667, 7.714286, 7.733333, 7.931034, 7.949758, 7.983471.

Gero, a(3,Z)-8·a(3,Z-1) zenbakiak aztertu dira, *2*x*Z* lauki sarearekin egin bezala. Behatu da baina, alde txiki bat falta zaiola 8·(a(3,Z)-8·a(3,Z-1)), a(2,Z)-ren kasua bezalakoa izateko.

c(3,Z) = a(3,Z) – 8·a(3,Z-1) .
c(3,Z): -2, -24, -24, -224, -320, -2304, -4608, -26624, -69632.

Zuzenean erlaziorik behatzen ez denez, beste saio batzuk egin behar dira. Horietako bat, lan honetan aipatutako Schoenfielden prozedurari gehitzen zaiona, aurreko kasuko formula egokituaren balioak kalkulatzean datza; hau da, dagokion a'(3,Z) zenbaki segida berria kalkulatzen da:

$a'(3,Z) = 8\cdot a(3,Z-1) + 8\cdot a(3,Z-2) - 8^2\cdot a(3,Z-3)$ , Z>2,
$a'(3,0) = 1$, $a'(3,1) = 6$, $a'(3,2) = 24$ .

Kontuan hartzekoa da a'(3,Z) zenbaki segida osatzeko a(3,Z) segidaren balioak erabiltzen direla. Gertatutakoarekin alderatuz gero :

d(3,Z) = a'(3,Z) - a(3,Z) .
d(3,Z): 0, 0, 0, 8, 32, 128, 512, 2048, 8192, 32768.

lehenengo hiru gaiak (0, 0, 0) alde batera utzita, (Z>2) segida honen erregulartasunari erreparatuz gero, 2ren berredurak direla egiaztatzen da.

Orduan, formula errekurtsibo hau lortzen da:

$a(3,Z) = 8\cdot a(3,Z\text{-}1) + 8\cdot a(3,Z\text{-}2)\text{-}\ 8^2\cdot a(3,Z\text{-}3) – 2^{2\cdot Z\text{-}3}$, $Z>2$ ,
$a(3,0) = 1$, $a(3,1) = 6$, $a(3,2) = 24$ .

Formula errekurtsiboa mistoa edo ez-homogeneoa da, gai bat ($2^{2\cdot Z\text{-}3}$) esplizituki ageri baita.

## 3.4. *4xZ* lauki sareak

Ordenagailu bidez lortutako segida hauxe da:

a(4,Z): 10, 76, 1120, 16576, 263680, 4197376.

Ez da eragozpenik gertatzen *2*x*Z* lauki sareetarako erabilitako prozedura erabiliz gero, a(2,Z)-ren kasuan bezala formula errekurtsibo bat lortzen baita. Hauxe da:

$a(4,Z) = 16\cdot a(4,Z\text{-}1) + 16\cdot a(4,Z\text{-}2)\text{-}\ 16^2\cdot a(4,Z\text{-}3)$, $Z>2$ ,
$a(4,0) = 1$, $a(4,1) = 10$, $a(4,2) = 76$ .

OEISen gehitu den zenbaki segidaren kodea A225828 da.

## 3.5. *5xZ* lauki sareak

Eraikitako zenbakiak hauek dira:

a(5,Z): 20, 288, 8640, 263680, 8407040.

Bi gairen arteko proportzioa bilatuz:

b(5,Z) = a(5,Z) / a(5,Z-1) .
b(5,Z): 14.40000, 30.00000, 30.51852, 31.88350.

Jomuga 32 izan daiteke. Aurreko *L*x*Z* lauki saretako (L=1,2,3,4) jomugek 2ren berredurak dirudite (2, 4, 8, 16), hau da, ($2^1$, $2^2$, $2^3$, $2^4$) , eta 32 ($2^5$) hurrengoa da.

Hortaz, a(5,Z)-32·a(5,Z-1) zenbakiak aztertu dira, eta behatu da ez zaiela asko falta 32·(a(5,Z-2)-32·a(5,Z-3)) izateko:

c(5,Z) = a(5,Z) – 32·a(5,Z-1) .
c(5,Z): -352, -576, -12800, -30720.

*3*x*Z* lauki sareekin gertatutakoa gertatzen da hemen ere: zuzentzeko batugai bat behar du formulak. Gehitu egin behar zaiona, a'(5,Z) segidarekin alderatu eta gero lortzen da:

$a'(5,Z) = 32 \cdot a(5,Z-1) + 32 \cdot (a(5,Z-2) - 32^2 \cdot a(5,Z-3)$ , $Z>2$ ,
$a'(5,0) = 1$, $a'(5,1) = 20$, $a'(5,2) = 288$ .

a'(5,Z): 1, 20, 288, 8640, 265216, 8419328.

a'(5,Z) eta a(5,Z) segiden arteko aldeak (a(5,0)=1 gehituz) hauek dira:

$d(5,Z) = a'(5,Z) - a(5,Z)$ .
d(5,Z): 0, 0, 0, 192, 1536, 12288.

Zeroak ez diren hiru zenbakien (Z>2: 192, 1536, 12288) faktore lehenak 2 eta 3 dira ($2^6 \cdot 3$, $2^9 \cdot 3$ eta $2^{12} \cdot 3$, hurrenez hurren). Lortzen den formula beraz, hauxe da:

$a(5,Z) = 32 \cdot a(5,Z-1) + 32 \cdot a(5,Z-2) - 32^2 \cdot a(5,Z-3) - 2^{3 \cdot Z-3} \cdot 3$, $Z>2$ ,
$a(5,0) = 1$, $a(5,1) = 20$, $a(5,2) = 288$ .

Ondorioz, OEISen A225829 kodea duen zenbaki segida gehitu da.

### 3.6. *6xZ* lauki sareak

Lortutako zenbakiak hauek dira:

a(6,Z): 36, 1072, 66816, 4197376.

*2*x*Z* eta *4xZ* lauki sareekin bezala, ordenagailu bidez lortutako lau zenbakiek formula errekurtsibo honi erantzuten diote:

$a(6,Z) = 2^6 \cdot a(6,Z-1) + 2^6 \cdot a(6,Z-2) - (2^6)^2 \cdot a(6,Z-3)$, $Z>2$ ,
$a(6,0) = 1$, $a(6,1) = 36$, $a(6,2) = 1072$ .

OEISen gehitutako zenbaki segidaren kodea A225830 da.

Aurreko lauki sareen formulak gogoan hartuta, egiazta daiteke ordenagailuz eraiki ez diren bi zenbaki hauek berdinak direla: a(5,6)=a(6,5). Hala izan behar zuen. Ohartzekoa da beraz, zenbaki berbera lortzen dela bi formula ezberdin erabiliz: a(5,Z)-rena eta a(6,Z)-rena.

### 3.7. *7xZ* lauki sareak

Lauki sare hauetarako lortutako zenbakiak ez dira ugari, hiru besterik ez, baina aurreko formulez ohartuta hiru zenbaki gehitzen dira a(7,Z) segidan: a(7,4)(=a(4,7)), a(7,5)(= a(5,7)), eta a(7,6) (= a(6,7)):

a(7,Z): 1, 72, 4224, 529920, 67133440, 8590786560, 1099516870656.

*3*x*Z* eta *5*x*Z* lauki sareen kasuan bezala, a'(7,Z) segida gauzatu behar izan da:

$$a'(7,Z) = 2^7 \cdot a(7,Z-1) + 2^7 \cdot a(7,Z-2) - (2^7)^2 \cdot a(7,Z-3)\ ,\ Z>2\ ,$$
$$a'(7,0) = 1,\ a'(7,1) = 72,\ a'(7,2) = 4224\ .$$

eta a(7,Z)-rekiko aldeak kalkulatu:

$$b(7,Z) = a'(7,Z) - a(7,Z)\ .$$

b(7,Z): 0, 0, 0, 57344, 917504, 14680064.

Gero, aldeak faktorizatu, faktore lehen bakarrak 2 eta 7 direla ohartu, eta a'(7,Z)-ren formula errekurtsiboari batugai bat gehitu:

$$a(7,Z) = 2^7 \cdot a(7,Z-1) + 2^7 \cdot a(7,Z-2) - (2^7)^2 \cdot a(7,Z-3) - 2^{4 \cdot Z-3} \cdot 7,\ Z>2\ ,$$
$$a(7,0) = 1,\ a(7,1) = 72,\ a(7,2) = 4224\ .$$

OEISen A225831 kodea duen segida gehitu da.

### 3.8. *8xZ* lauki sareak

Lauki sare hauetarako ere hiru zenbaki besterik ez da lortu ordenagailu bidez, baina aurreko formulak kontuan hartuta, beste bi (a(8,4) eta a(8,5)) ere gehitzen dira. Erabilitako programa eta ordenagailuan a(8,6) eta a(8,7) handiegiak gertatu dira zenbaki osoko moduan adieraziak izateko erabilitako programa eta ordenagailuan. Beraz hauxe dugu:

a(8,Z): 136, 16576, 4212736, 1073790976, 274882625536.

Hauxe da *8*x*Z* lauki sareentzako lortutako formula errekurtsiboa:

$$a(8,Z) = 2^8 \cdot a(8,Z-1) + 2^8 \cdot a(8,Z-2) - (2^8)^2 \cdot a(8,Z-3),\ Z>2\ ,$$
$$a(8,0) = 1,\ a(8,1) = 136,\ a(8,2) = 16576\ .$$

OEISeko A225832 kodea duen zenbaki segida sortzen du.

### 3.9. ***9xZ* lauki sareak**

Hasierako hiru zenbakiei aurreko formulen bitartez lortutako a(9,4) gehituz gero, hauxe dugu:

a(9,Z): 1, 272, 66048, 33632256, 17180262400.

$a'(9,Z) = 2^9 \cdot a(9,Z-1) + 2^9 \cdot a(9,Z-2) - (2^9)^2 \cdot a(9,Z-3)$ , $Z>2$ ,

a'(9,0) = 1, a'(9,1) = 272, a'(9,2) = 66048 .
a'(9,Z): 1, 272, 66048, 33693696, 17182228480.

b(9,Z) = a'(9,Z) – a(9,Z) .
b(9,Z): 0, 0, 0, 61440, 1966080.

formula hau lortzen da:

$a(9,Z) = 2^9 \cdot a(9,Z-1) + 2^9 \cdot a(9,Z-2) - (2^9)^2 \cdot a(9,Z-3) - 2^{5 \cdot Z-3} \cdot 15$, $Z>2$ ,
a(9,0) = 1, a(9,1) = 272, a(9,2) = 66048 .

A225833 kodea duen zenbaki segidan gauzatu da OEISen.

Lauki sare handiagoak aztertzeko bidean txikiagoen emaitzak gehituz, eta lauki sareen zenbaki-sarea ehunduz alegia, nahi edo ahal (ordenagailuaren gaitasunen arabera) bezain urruti joan daiteke.

## 4. FORMULA ERREKURTSIBOEN BITARTEKO PATROI KOPURUEN KALKULUA

Honez gero, zenbait erregulartasun behatzen dira lortutako formula errekurtsiboetan:

— L-ren balioa bikoitia denerako (L = 2, 4, 6, 8, ...):

$a(L,Z) = 2^L \cdot a(L,Z-1) + 2^L \cdot a(L,Z-2) - (2^L)^2 \cdot a(L,Z-3)$, $Z>2$ ,
a(L,0)=1, a(L,1)= a(1,L), a(L,2) = a(2,L) .

— L-ren balioa bakoitia denerako (L = 1, 3, 5, 7, ...):

$$a(L,Z) = 2^L \cdot a(L,Z-1) + 2^L \cdot a(L,Z-2) - (2^L)^2 \cdot a(L,Z-3) - 2^{((L+1)/2) \cdot Z - 3} \cdot (2^{(L-1)/2}-1), \quad Z>2 ,$$
a(L,0) = 1, a(L,1) = a(1,L), a(L,2) = a(2,L) .

Ohartzekoa da zenbaki segiden formula errekurtsiboak erabiltzeko, beharrezkoak direla oinarrizko a(1,Z) eta a(2,Z) zenbaki segidak. Beraz, bi segida horien baitan daude beste guztiak.

Lortu diren formula errekurtsiboak erabiliz, badago hasierako taula betetzerik. Horra hor taula 4. irudian (kontuan hartu a(Z,L)=a(L,Z) dela), digitu gehiegi duten zenbakiak idatzi gabe utzita. Honez gero, taularen edozein lerro bete daiteke. Izan ere, **10xZ** lauki sareen A225834 kodeko zenbaki segida gehitu da OEISen.

| L \ Z | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 6 | 10 | 20 | 36 | 72 |
| 2 | 1 | 3 | 7 | 24 | 76 | 288 | 1072 | 4224 |
| 3 | 1 | 6 | 24 | 168 | 1120 | 8640 | 66816 | 529920 |
| 4 | 1 | 10 | 76 | 1120 | 16576 | 263680 | 4197376 | 67133440 |
| 5 | 1 | 20 | 288 | 8640 | 263680 | 8407040 | 268517376 | 8590786560 |
| 6 | 1 | 36 | 1072 | 66816 | 4197376 | 268517376 | 17180065792 | 1099516870656 |
| 7 | 1 | 72 | 4224 | 529920 | 67133440 | 8590786560 | 1099516870656 | |
| 8 | 1 | 136 | 16576 | 4212736 | 1073790976 | 274882625536 | 70368756760576 | |
| 9 | 1 | 272 | 66048 | 33632256 | 17180262400 | | | |
| 10 | 1 | 528 | 262912 | 268713984 | 274878693376 | | | |
| 11 | 1 | 1056 | 1050624 | 2148630528 | | | | |
| 12 | 1 | 2080 | 4197376 | 17184194560 | | | | |
| 13 | 1 | 4160 | 16785408 | | | | | |

**4. irudia.** Programa informatikoaren bitartez eta indukzio bidez gauzatutako formula errekurtsiboenbitarteko a(L,Z)taularen zenbait zenbaki. a(Z,L) = a(L,Z). Une zurietan digitu gehiegi duten zenbakiak idatzi gabe utzi dira.

## 5. FORMULA ESPLIZITUEN BITARTEKO PATROI KOPURUEN KALKULUA

Taula hori dela-eta, a(L,Z)-en balioak zuzenean (L eta Z balioak emanda soilik) kalkulatzeko formulen bilatzeari ekin diogu. Hemendik aurrera, *formula esplizituak* esango diegu formula horiei.

Lehenik, oinarrizko a(1,Z) eta a(2,Z) zenbaki segidarenak.

Bilatze prozedura formula errekurtsiboen garapenean datza. Adibidez, a(1,3) zenbakia hiru zenbaki (a(1,0), a(1,1) eta a(1,2)) ezagunen menpe dago; beraz, a(1,4) zenbakia (a(1,1), a(1,2) eta a(1,3) zenbakien menpean dagoena), hiru zenbaki ezagun horien (a(1,0), a(1,1) eta a(1,2) zenbakien) menpean dago; a(1,5), a(1,6) eta abar. a(1,L) zenbaki guztiak hiru zenbaki ezagun horien menpean daude, eta beraien bitartez esplizituki kalkula daitezke:

— Z bikoitia denerako(Z = 2, 4, 6, 8, ...) a(1,Z) segidarako lortu den formula esplizitua hauxe da:

$$a(1,Z) = a(1,2)\cdot 2^{(Z/2-1)}\cdot(2^{(Z/2)} -1)/(2-1) -$$
$$- a(1,0)\cdot 2^{(Z/2+1)}\cdot(2^{(Z/2-1)}-1)/(2-1) \quad , Z>2 ,$$
$$a(1,0) = 1, \qquad a(1,2) = 3 .$$

— Z bakoitia denerako (Z = 1, 3, 5, 7, ...):

$$a(1,Z) = a(1,2)\cdot 2^{(Z-1)/2}\cdot(2^{(Z-1)/2}-1)/(2-1) + a(1,1)\cdot 2^{(Z-1)/2} -$$
$$- a(1,0)\cdot 2^{(Z+1)/2}\cdot(2^{(Z-1)/2}-1)/(2-1) \quad , Z>2 ,$$
$$a(1,0) = 1, \quad a(1,1) = 2, \quad a(1,2) = 3 .$$

(2-1) zatitzailea formulan mantendu dugu aurreragoko formulen antzekotasunari eustearren.

Segidaren bakoiti-bikoiti bereizketa honek hasieran a(1,Z) segidaren bereizketa dakarkigu gogora.

Biderkagaiei eraginez, eta a(1,0), a(1,2) balioak erabiliz, formula esplizitu bakunago hau lortzen da:

— Z bikoitia denerako (Z = 2, 4, 6, 8, ...) :

$$a(1,Z) = 2^{(Z-1)} + 2^{(Z/2)-1} \text{ , edo } a(1,Z) = 2^{(Z/2-1)}\cdot(2^{Z/2} + 1) .$$

— Z bakoitia denerako (Z = 1, 3, 5, 7, ...):

$$a(1,Z) = 2^{(Z-1)} + 2^{(Z-1)/2} \text{ , edo } a(1,Z) = 2^{(Z-1)/2}\cdot(2^{(Z-1)/2} + 1) .$$

Formula hauen parekoak aurki daitezke lehen aipatutako OEISeko A005418 segidarako, A007582 eta A063376 segiden webguneetan.

Era berean, a(2,Z) zenbaki guztiak hiru zenbaki ezagunen bitartez adieraz daitezke (a(2,0), a(2,1) = a(1,2), eta a(2,2)). Hauexek dira a(2,Z)-rako lortu diren formula esplizituak:

— Z bikoitia denerako (Z = 2, 4, 6, 8, ...) :

$$a(2,Z) = a(2,2)\cdot 4^{(Z/2-1)}\cdot(4^{(Z/2)} -1)/(4-1) -$$
$$- a(2,0)\cdot 4^{(Z/2+1)}\cdot(4^{(Z/2-1)}-1)/(4-1) ,$$
$$a(2,0) = 1, \qquad a(2,2) = 7 .$$

— Z bakoitia denerako (Z = 1, 3, 5, 7, ...):

$$a(2,Z) = a(2,2)\cdot 4^{(Z-1)/2}\cdot(4^{(Z-1)/2}-1)/(4-1) + a(2,1)\cdot 4^{(Z-1)/2} - a(2,0)\cdot 4^{(Z+1)/2}\cdot(4^{(Z-1)/2}-1)/(4-1) \quad ,$$

$$a(2,0) = 1, \quad a(2,1) = a(1,2) = 3, \quad a(2,2) = 7 \ .$$

a(2,Z)-rako formula horietatik erator daitezke formula errekurtsibo bakunagoak:

— Z bikoitia denerako (Z = 2, 4, 6, 8, ...):

$$a(2,Z) = 2^{(Z-2)}\cdot(2^Z + 3) \ .$$

— Z bakoitia denerako (Z = 1, 3, 5, 7, ...):

$$a(2,Z) = 2^{(Z-2)}\cdot(2^Z + 4) \ .$$

Orokorrean, L bikoitia denean (L = 2, 4, 6, 8, ...), *L*x*Z* lauki sareen formula esplizitua lortzeko bidea *2*x*Z* lauki sareen bide berbera da, eta lortutako formulak haren antzekoak:

— Z bikoitia denerako (Z = 2, 4, 6, 8, ...):

$$a(L,Z) = a(2,L)\cdot(2^L)^{(Z/2-1)}\cdot((2^L)^{(Z/2)} -1)/(2^L-1) - a(2,0)\cdot(2^L)^{(Z/2+1)}\cdot((2^L)^{(Z/2-1)}-1)/(2^L-1) \ .$$

— Z bakoitia denerako (Z = 1, 3, 5, 7, ...):

$$a(L,Z) = a(2,L)\cdot(2^L)^{(Z-1)/2}\cdot((2^L)^{(Z-1)/2}-1)/(2^L-1) + a(1,L)\cdot(2^L)^{(Z-1)/2} - a(2,0)\cdot(2^L)^{(Z+1)/2}\cdot((2^L)^{(Z-1)/2}-1)/(2^L-1) \ .$$

Erabat definituak izan daitezen, kontuan hartu behar da a(1,L) eta a(2,L) balioak esplizituki ezagunak direla, eta sei zenbakien (a(1,0)=1, a(1,1)=2, a(1,2)=3, a(2,0)=1, a(2,1)=a(1,2), eta a(2,2)=7 zenbakien) menpe daudela. Sei zenbakiak erabiliz, a(L,Z)-rako formula esplizitu bakunago hauek lortzen dira:

— Z bikoitia denerako (Z = 2, 4, 6, 8, ...):

$$a(L,Z) = 2^{L\cdot Z/2-2}\cdot(2^{L\cdot Z/2} + 3) \ .$$

— Z bakoitia denerako (Z = 1, 3, 5, 7, ...):

$$a(L,Z) = 2^{L\cdot Z/2-1}\cdot(2^{L\cdot Z/2-1} + 2^{L/2-1} + 1) \ .$$

L bakoitia denerako (L=1,3,5,7, ...) antzeko bideari ekin diogu, eta ondorioz Z-ren bakoiti-bikoiti izaeraren araberako formula esplizituak lortu dira:

— Z bikoitia denerako (Z = 2, 4, 6, 8, ...):

$$a(L,Z) = 2^{L\cdot Z/2-1}\cdot(2^{L\cdot Z/2-1} + 2^{Z/2-1} + 1) .$$

— Z bakoitia denerako (Z = 1, 3, 5, 7, ...):

$$a(L,Z) = 2^{(L\cdot Z-1)/2-1}\cdot(2^{(L\cdot Z-1)/2} + 2^{(L-1)/2} + 2^{(Z-1)/2} + 1) .$$

Ohartzekoa da formulen L eta Z balioekiko simetria (a(L,Z) = a(Z,L)).

Esan beharra dago era berean formula hauek guztiak lortzeko, edo zenbakien itxuren nolabaiteko erregulartasuna bilatzeko, zenbakien faktorizazioa ezinbestekoa izan dela, eta horretarako, jakina, ordenagailua erabili dela.

## 6. **LxL LAUKI SAREAK**

*LxL* lauki sareak karratuak dira, eta baliokidetasun erlaziorako 180º biraketaz gain, kontuan har daitezke 90º eta 270º biraketak ere (5. irudia).

```
0011 1100 1100 0011 1001 1001 0110 0110
1000 0001 0011 1100 1001 1001 0100 0010
1100 0011 0001 1000 0010 0100 1001 1001
0011 1100 1100 0011 0110 0110 1001 1001
```

**5. irudia.** L=4, Z=4; zortzi patroiak baliokideak dira.

Hasierako taula osatzeko erabilitako programa informatikoa egokitu eta gero, zenbaki segida hau lortzen da:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| L: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| a(L,L): | 2 | 6 | 102 | 8548 | 4211744 |

Segida hau OEISen webgunean bilatuz gero, A054247 agertzen da (Vladeta Jovovic, 2000).

Orain artean segida honetarako eman den formula bakarra esplizitua da:

— L bikoitia denerako (L = 2, 4, 6, 8, ...):

$$a(L,L) = 2^{-3}\cdot(2^{(L\^2)} + 2\cdot2^{(L\^2)/4} + 3\cdot2^{(L\^2)/2} + 2\cdot2^{(L\^2+L)/2}) .$$

— L bakoitia denerako (L = 1, 3, 5, 7, ...):

$$a(L,L) = 2^{-3}\cdot(2^{(L\^2)} + 2\cdot2^{((L\^2)+3)/4} + 2\cdot2^{(L\^2+1)/2} + 4\cdot2^{(L\^2+L)/2}) .$$

## 7. ZENBAIT ONDORIO, GOGOETA ETA GERORAKO EGINBIDE

a(L,Z) taula osoa osatzearren, erabat esperimentala izan den prozedura bat egin da.

Bi urrats nabarmentzen dira:

1. Oinarrizko taularen osaketa. Taularen hasierako zenbakiak programa informatiko baten bitartez lortu dira.
2. Indukzioa. Gainontzeko zenbakiak ordenagailu bidez lortutako zenbakien gainean induzitutako formulen bitartez lortu dira lehenago, eta gero, formula horien gainean induzitutako beste formula orokorragoen bitartez.

Lan honetan islatzen den ikerketaren ondorio nagusietakoa da, aurkitutako zenbaki segidak (A225826tik A225834ra bitarteko kodea dutenak) OEISen webgunean gehituak izana. Zenbaki segidak beste zenbait ikerlarientzat eskuragarriak izango dira horrela, eta, nahiz izanez gero, iradokizun edo formula berriak gehituko dituzte ikerlari horiek.

Bururatu lekioke bati oinarrizko taula osatzeko programa informatikoaren zuzentasunaz galdetzea: zenbaki-emaitzak OEISekoekin alderatu eta gero egiaztatzen da *1*x*Z* lauki sareei egokitutakoak berreskuratzen direla, baita *L*x*L* lauki sare karratuei egokitutakoak ere. Hau da, zuzentasunaren ustea OEISeko segida horien zuzentasunaren menpe dago. Ustea sendoa da beraz.

Ikerlan honen beste emaitza bat izan da formula errekurtsibo linealak (homogeneoak eta ez-homogeneoak) induzitzeko bidea: hasieran, Jon E. Schoenfield-ek *2*x*Z* lauki sareei buruz adierazitakoari jarraituz, eta gero, beste urrats bat gehiago emanaz.

Formula horien itxurei begira, a(L,Z) segiden Lrekiko bakoiti-bikoiti bereizketa nabarmendu da. Galdetzekoa da a(1,Z) segidaren bereizketaren ondorengoa ote den. Gainera, formulen arabera, edozein a(L,Z)-ren balioa sei balio hauetan oinarritzen da:

$$a(1,0)=1,\ a(1,1)=2,\ a(1,2)=3,\ a(2,0)=1,\ a(2,1)=a(1,2),\ a(2,2)=7 .$$

Formula errekurtsiboetatik abiatuta, soilik L eta Z zenbakien menpe dauden formulak (esplizituak) lortu dira.

Lortu diren formula guztiak onargarriak dira berez, *LxZ* lauki sare handiagoei a(L,Z) zenbakiak eman dakizkiekeelako formulei eraginez. Esaten ausartu gintezke lortutako zenbaki horiek direla hasierako problemaren soluzioak. Esaterako, *5*x*6* lauki sareei a(5,6)=268517376 zenbakia egokitu zaie, baina zalantzan jartzekoa da zehatz-mehatz hainbeste patroi ezberdin ote diren.

a(L,Z) taularen egiazkotasuna ziurtatzeko *froga matematikoa* behar da; hau da, matematikaren ikuspegi klasikotik ezin da baieztatu problemaren egiazko soluzioak a(L,Z) balioak direnik. Beren egiazkotasuna uste edo *susmoaren* mailan gelditzen da.

Matematikari baten jardueran teorema edo formula bat egiaztatzeko ohiko bidea esperimentaziotik abiatu eta froga batekin amaitzen da ([6], [7]]). Matematiken ohiko azalpena aldiz, teorema edo formula enuntziatzean datza lehendabizi; gero, formula egiaztatzen da aurretiko enuntziatu egiazkoetan oinarrituta.

Duela gutxi arte, gutxitan azaltzen zen teorema edo formula bat nondik eta nola sortua zen; alegia, ezkutuan gelditzen zen, tradizioari jarraitu nahi ziotelako, kontuak baliorik ez zuelako, edo, zergatik ez dakigula, arrastorik utzi nahi ez zuelako (Abelek esan zuen Gaussek, azeriak bezala, isatsez ezabatzen zituela harean utzitako arrastoak [8], nahiz eta Gaussek berak esana zuen egia matematikoetara iristeko bere bidea esperimentazio sistematikoa zela [7]).

Matematika esperimentalaren alorreko enuntziatu matematikoen jatorria eta lortzeko bidea aldarrikatzen da, beren froga matematikoen osagarri gisa. Matematikarien jardun esperimentala oso lotuta dago intuizioarekin, azken kontzeptu hau zehazki definitzea zaila bada ere.

Gaur egun badira ordea, alor honetan froga matematikoaren garrantzia bera ere zalantzan jartzen dutenak, alde batetik gero eta estuagoak direlako frogen zorroztasun mailaren eskakizunak, eta, bestetik, ordenagailuak eragina duelako matematikarien jardunean.

Dakigunez, froga matematikoaren zorroztasun delako kontzeptua aldakorra izan da historian zehar, ez baita gai bera Euklidesentzat edo Hilbertentzat, esate baterako. Areago, froga matematiko askoren teknizismoa ulertzea ez dago edozein matematikariren eskura. Adibidez, berriki eman diren *Fermaten azken teorema* eta *Poincaréren susmoa*ren frogak ontzat ematea aditu bakar batzuen esku dago bakarrik.

Beste alde batetik, egun, matematiken indukzio alderdia areagotu egin da ordenagailuen erabilerarekin. Izan ere, ordenagailuak ez dira erabiltzen zenbakizko kalkuluak egiteko bakarrik, eta besteak beste, objektu matematikoak begiztatzeko, beren arteko erlazioak bilatzeko, edo susmoak egiaztatzeko edo baztertzeko ([2]), ikerlan honetan egin den bezala.

Ordenagailua matematikarien jardunean hasi da eragiten, teleskopioak eta mikroskopioak astronomian eta biologian eragin zuten bezala: hizkuntza informatikoak, matematiketara zuzendutako programa paketeak, datubaseak, informazio-bilatzaileak, entziklopedia digitalak, aldizkari digitalak, eta abar. Ondorioz, ordenagailuen erabilerak eskaintzen dituen hainbeste aurkikuntza berri zirraragarrien aurrean, oraingo matematikari asko ez dira egia matematikoaz arduratzen lehengoak bezainbeste ( [9]).

Matematikariaren jardunean indukzioari ematen zaion erabilera nolakoa den ikusiaz, matematika esperimentala, hasieran esan bezala, zientzia esperimentaltzat har liteke. Ikerlan hau ildo horretan ibili da: induzitutako formulek lortutako zenbakien arteko erlazioen berri ematen dute, eta zenbaki berriak proposatzen dituzte. Erabat sinestuta gaude horiexek direla egiazko formulak, ez baitugu aurkitu arrazoirik besterik uste izateko, ez irregulartasunik, ezta kasu berezirik ere. Zenbaki hauek problemaren egiazko soluzio gisa gordeko ditut, kasu bakarren batean gutxienez, ezeztatzen ez diren bitartean.

Gure aldetik, susmoak ahalik eta sendoenak gauzatzen saiatu gara, eta susmo hau nahikoa sendoa dela uste dugu. Esate baterako, a(5,6) zenbakia, edo taulako beste edozein zenbaki, bi formula ezberdin erabiliz lortu izanak uste edo konfiantza sendoa ematen digu lortutako formulen benetakotasunari begira.

a(L,Z) taularen egiazkotasun matematikoa frogatzearren, problemaren barne-izaera ulertu behar da. Formula errekurtsiboak lagungarriak izan daitezke bide horretan. Badira ere sakonkiago aztertzeko beste bide batzuk ere.

Adibidez, sarreran *2*x*3* lauki sareen azterketa sakonago bat egin da '*1*'ekoen kopurua (K) kontuan hartuz (2. irudia), eta a(2,3) zenbakia deskonposatu da. Gauza bera egin daiteke edozein a(L,Z) zenbakirekin, eta horrela a(L,Z,K) zenbakien arabera deskonposatuko da:

$$a(L,Z) = \sum_{K=0,1,2,\ldots,L\cdot Z} a(L,Z,K)\ .$$

L eta K zenbakiak finkatuz gero, a(L,Z,K) zenbaki segidak azter daitezke.

*1*x*Z* lauki sareen a(1,Z,K) segidak OEISen webgunean bilatuz gero, denak agertzen dira ezagunak, baita taula osoaren zenbakien arteko erlazioa ere. Esaterako, 6. irudian *1*x*Z* lauki sareen segidek *Losanitschen triangelua* izena duen taula osatzen dute (aipatutako OEIS-eko A034851 segida). Azken lerroan azaltzen dira a(1,Z) zenbakiak, eta Z jakin bakoitzari zenbaki zutabe bat dagokio. K. zutabeko a(1,Z,K) zenbakien batura a(1,Z) zenbakia da. Adibidez, 5. zutabean (Z = 5):

$$20 = 1 + 3 + 6 + 6 + 3 + 1\ .$$

Taula honen zenbakiak A007318 kodea duen *Pascalen triangelua*ren bidez lortzen dira (N. J. A. Sloane, Mira Bernstein), nabarmenduen kasuetan izan ezik. Hau da, taulako gela baten zenbaki bat lortzen da bere aurreko zutabearen pareko eta bere gaineko zenbakia batuta, nabarmenduen kasuetan izan ezik. Adibidez, a(1,6,2) = a(1,5,2) + a(1,5,1) (9 = 6 + 3).

Nabarmendutako salbuespenak ere *Pascalen triangelua*ren bitartez adieraz daitezke. Izan ere, *1*x*Z* lauki sareen a(1,Z,K) taula *Pascalen triangelua* (A007318) eta *Pascalen triangelu «zulatu»*aren (A204293, Reinhard Zumkeller, 2012) arteko kenketaren emaitza da. *Losanitsch-en triangelua*ren ezaugarri nagusi bat da *Pascalen triangelua*rekiko duen erlazio hau.

**a(1,Z,K)**

| K \ Z | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | | 1 | **1** | 2 | **2** | 3 | **3** | 4 | **4** | 5 | **5** | 6 | **6** | 7 | **7** |
| 2 | | | 1 | 2 | 4 | 6 | 9 | 12 | 16 | 20 | 25 | 30 | 36 | 42 | 49 |
| 3 | | | | 1 | **2** | 6 | **10** | 19 | **28** | 44 | **60** | 85 | **110** | 146 | **182** |
| 4 | | | | | 1 | 3 | 9 | 19 | 38 | 66 | 110 | 170 | 255 | 365 | 511 |
| 5 | | | | | | 1 | **3** | 12 | **28** | 66 | **126** | 236 | **396** | 651 | **1001** |
| 6 | | | | | | | 1 | 4 | 16 | 44 | 110 | 236 | 472 | 868 | 1519 |
| 7 | | | | | | | | 1 | **4** | 20 | **60** | 170 | **396** | 868 | **1716** |
| 8 | | | | | | | | | 1 | 5 | 25 | 85 | 255 | 651 | 1519 |
| 9 | | | | | | | | | | 1 | **5** | 30 | **110** | 365 | **1001** |
| 10 | | | | | | | | | | | 1 | 6 | 36 | 146 | 511 |
| 11 | | | | | | | | | | | | 1 | **6** | 42 | **182** |
| 12 | | | | | | | | | | | | | 1 | 7 | 49 |
| 13 | | | | | | | | | | | | | | 1 | **7** |
| 14 | | | | | | | | | | | | | | | 1 |

Zutabeak batuz gero hau dugu:

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 6 | 10 | 20 | 36 | 72 | 136 | 272 | 528 | 1056 | 2080 | 4160 | 8256 |

**6. irudia.** *1*x*Z* lauki sareen segidaren deskonposizio taula.

Ohartzekoa da 6. irudiko lerroen zenbakiak alkano edo parafinen zenbakiak direla ([10]). Esaterako, a(1,Z,3) zenbaki segida A005993 kodea duen segida da (N.J.A. Sloane, Winston C. Yang), eta l(6,Z) alkano-zenbakiak adierazten ditu.

Halakorik ez da gertatzen *2*x*Z* lauki-sareen kasuan. Z finkatuz gero, a(2,Z,K) segidak orokorrean ez dira ezagunak. Segida bakar batzuk, bakunenak, aurki daitezke OEISen.

*3*x*Z* lauki sareen eta konplexuagoak diren lauki sareetarako ere ez dago segida ezagunik OEISen webgunean. Hauek guztiak dira azterbideak.

Azken batean, azterketaren helburua bi dimentsioko a(L,Z) taula izan beharrean, hiru dimentsioko a(L,Z,K) taula bihurtzen da.

Are gehiago, a(L,Z,K)zenbakiak deskonposa daitezke patroi bakoitzaren baliokideen kopuruaren (B) arabera. Batzuek ez dute baliokiderik (B=1), beste batzuek bat (B=2), eta gainontzekoek hiru (B=4). 1. irudian eta 2. irudiko taulan azaltzen dira halako deskonposizioak:

$$a(L,Z,K) = \sum_{B=1,2,4} a(L,Z,K,B)$$

Badira azterbide gehiago, esaterako, zenbaki segidek OEISen bitartez beste zenbait segidarekin erakusten dituzten harremanetan oinarritzen direnak.

*L*x*L* lauki sare karratuen kasuetan, besteetan ez bezala, B=8 ere gerta daiteke, eta azterketa berezia behar da.

L eta Z lauki sareen bi parametro dira. Hortaz, bi parametro baino gehiago duten sareak azter daitezke. *L*x*Z* planuan adieraz daitekeen bezala, *L*x*Z*x*G* sarea hiru dimentsioko espazio batean ere adieraz daiteke.

Beste alde batetik, patroiak bitarrak izateko muga ere gainditu daiteke (hirutarra, lautarra, eta abar)

Azterbide hauek guztiak ibiltzea da esparru honetan dagoen eginbide nagusia.

## 8. **BIBLIOGRAFIA**

[1] POCHIN E.A.N. 1906. «Experimental mathematics». *Proceedings of the Physical Society of London,* **20(1)**, 566 -578.

[2] BAILEY David H., BORWEIN Jonathan M. 2012. *Exploratory Experimentation in Mathematics: Selected Works*, Perfectly Scientific Press, Portland, Oregon.

[3] SØRENSEN Henrik Kragh. 2010. «Exploratory experimentation in experimental mathematics: A glimpse at the PSLQ algorithm» in *PhiMSAMP. Philosophy of Mathematics: Sociological Aspects and Mathematical Practice*. Benedikt Löwe, Thomas Müller (ed.). College Publications, London. pp. 341-360.

[4] *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, elektronikoki argitaratua http://oeis.org, 2013.
[5] https://oeis.org/wiki/User:N._J._A._Sloane, 2013.
[6] POLYA George. 1981. *Mathematical Discovery*. John Wiley & Sons. New York.
[7] EPSTEIN David, LEVY Silvio, DE LA LLAVE Rafael. 1992. «About This Journal». *Experimental Mathematics*, **1(1)**, p. 1.
[8] SIMMONS George Finlay. 1992. *Calculus Gems*. *Brief Lives and Memorable Mathematics*. Mcgraw Hill. New York. p. 177.
[9] ZEIDELBERGER D., ANDREWS G. E. 1994. «Theorems for a Price: Tomorrow's Semi-rigorous Mathematical Culture». *The Mathematical Intelligencer*. **16(4)**, pp. 11-18.
[10] LOSANITSCH S. M. 1897. «Die Isomerie-Arten bei den Homologen der Paraffin-Reihe», *Chem. Ber.* **30**, pp. 1917-1926.