

Moteltze algoritmiko kontrolatuko zenbakizko metodoak

Elisabete Alberdi Celaya*¹, Juan Jose Anza Aguirrezabala²

¹ Matematika Aplikatua Saila, Meatzeen eta Herri Lanen Ingeniaritza Teknikoko Unibertsitate Eskola (UPV/EHU)

² Matematika Aplikatua Saila, Ingeniaritza Goi Eskola Teknikoa (UPV/EHU)

* elisabete.alberdi@ehu.es

Jasoa: 2014-02-02

Onartua: 2014-07-16

Laburpena: Uhin erako Deribatu Partzialeko Ekuazioa (DPE) askatzeko Elementu Finituen Metodoa (EFM) erabilia, 2. ordenako Ekuazio Diferentzial Arrunteko (EDA) sistema zurruna lortzen da. Sistema honetako maiztasunik handieneko uhinak ez dira deribatu partzialeko ekuazioaren portaeraren adierazgarri eta beraien eragina moteltzea komeni da. HHT- α metodoak EFM erabili ostean sortzen diren maiztasun handiko uhinen moteltze algoritmikoari eragiten dio. 2. ordenako BDFa (BDF2a) oinarritzat hartuz, BDF- α izeneko metodo berri bat sortu dugu; metodo honek, HHT- α metodoaren antzeko moteltze algoritmikoa du. Sortu dugun metodo berria 2. ordenakoa da, eta α parametroaren balio batzuetarako A-egonkorra izateaz gain moteltze algoritmiko kontrolatua erakusten du.

Hitz gakoak: HHT- α metodoa, BDF metodoak, moteltze algoritmikoa, anplifikazio matrizea, egonkortasuna.

Abstract: After applying the Finite Element Method (FEM) to the wave-type Partial Differential Equation (PDE), a second order stiff Ordinary Differential Equation system (ODE) is obtained. The high frequency modes associated to this system are not representative of the PDE and they must be numerically damped. Similarly to the HHT- α method, which allows the numerical damping of these undesirable high frequency modes, we have constructed a modification of the 2-order BDF method (the BDF2 method), which we have called BDF- α . This new method is second-order accurate, and for some values of α it is unconditionally stable and it permits a parametric control of numerical dissipation.

Keywords: HHT- α method, BDF methods, numerical damping, amplification matrix, stability.

1. SARRERA

Uhin erako Deribatu Partzialeko Ekuazioa (DPE) askatzeko Elementu Finituaren Metodoa (EFM) erabili ostean, 2. ordenako Ekuazio Diferentzial Arrunteko (EDA) sistema zurruna lortzen da. Sistema zurruna da, EDAREN autobalioen neurrian ezberdintasun handia dagoenean. EDA sistema honetako maiztasunik handieneko autofuntzioak (edo maiztasunik handieneko uhinak) ez dira deribatu partzialeko ekuazioaren portaeraren adierazgarri eta beraien eragina moteltzea komeni da. Komenigarria da mota honetako sistematik askatzeko egonkortasun ezaugarri onak eta maiztasun handiko uhinetan moteltze algoritmiko kontrolatua duten zenbakizko metodoak erabiltzea. Moteltze algoritmikoa zenbakizko metodoaren errorea da eta metodoak maiztasun ezberdinetako uhinak moteltzeko duen gaitasuna neurtzen du.

DPE linealak askatzeko hainbat metodo daude [1]. Collocation metodoa [2], Wilsonena [3], HHT- α [4], Houbolt [5] edota alfa metodo orokortua [6] dira horietako batzuek. Artikulu honetan, problema linealetan arituko gara eta beraiek askatzeko BDF- α metodo berria proposatuko dugu. Metodo honek 2. ordenako zehaztasuna dauka, eta α parametroaren balio batzuetarako egonkorra izateaz gain moteltze algoritmiko kontrolatua erakusten du.

Deribatu partzialetan emandako uhin-ekuazioa aztertuko dugu dimentsio bakarrean. Ekuazio honek L luzerako soka baten zeharkako bibrazioak deskribatzen ditu. Soka muturretan tinko dagoela suposatuko dugu eta hasierako posizioa eta abiadura ezagunak direla [3]:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < L, t > 0 \\ \text{Ingurune Baldintzak: } u(0, t) = 0 = u(L, t), & t > 0 \\ \text{Hasierako Baldintzak: } u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g(x), & 0 \leq x \leq L \end{cases} \quad (1).$$

$u(x, t)$ ezezagunak sokaren desplazamendu bertikala adierazten du eta $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ parametroak sokako uhinaren abiadura, soka muturren tentsioaren menpe (T) eta sokak luzera unitateko duen masaren menpe (ρ).

Elementu finituen metodoa erabiliz $\{N_j\}_{j=1, \dots, n}$, euskarri txikiko funtzioak definitzen dira eta uhin-ekuazioaren hurbilpena funtzio hauen konbinazio lineal gisa definitzen da:

$$u(x, t) \approx u_h(x, t) = \sum_{j=1}^n d_j(t) N_j(x) \quad (2),$$

$d_j(t)$ ezezagunak izanik. Matrizeen bidez era honetan idatz daitekeen 2. ordenako EDA sistema lortzen da:

$$\begin{cases} M\mathbf{d}''(t) = -K\mathbf{d}(t) \\ \mathbf{d}(0) = (f(x_1), \dots, f(x_n))^T \\ \mathbf{d}'(0) = (g(x_1), \dots, g(x_n))^T \end{cases} \quad (3),$$

$M = (m_{ij})$ eta $K = (k_{ij})$ matrizeak masa matrizea eta zurruntasun matrizea izanik eta $\mathbf{d}(t)$ $d_j(t)$ ezezagunek osatutako bektorea izanik.

2. ordenako (3) EDA sistema lineala, lehen ordenako EDA sistema lineal gisa era honetan berriidatz daiteke:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}'_1(t) \\ \mathbf{y}'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1(t) \\ \mathbf{y}_2(t) \end{pmatrix} \quad (4),$$

$\mathbf{y}_1(t) = \mathbf{d}(t)$, $\mathbf{y}_2(t) = \mathbf{d}'(t)$
 $\mathbf{y}_1(0) = \mathbf{d}(0)$, $\mathbf{y}_2(0) = \mathbf{d}'(0)$ izanik.

Honela, (1) ekuazioari EFM ezarrita, lehen ordenako (4) EDA sistemara iritsi gara.

2. BDF METODOAK

Hasierako baliiodun lehen ordenako EDA aztertuko dugu:

$$y' = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0 \quad (5),$$

non $T = [t_0, t_n]$ tarte finitua den, eta $y : [t_0, t_n] \rightarrow \mathbb{R}^m$ eta $f : [t_0, t_n] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ funtzio jarraituak.

1. ordenako EDAn askatzeko urrats anitzeko metodo linealen forma honakoa da:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j} \quad (6),$$

h urrats luzera izanik.

Backward Differentiation Formulae (BDF) izenekoak [7] urrats anitzeko metodo linealak dira eta bai baliagarriak (5) motako problemak askatzeko. Beraien egonkortasun ezaugarri onei esker, metodo hauek oso erabiliak izan dira EDA sistema zurrunk askatzeko. k ordenako BDF metodoaren adierazpena hau da:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h f_{n+k} \quad (7),$$

$f_{n+k} = f(t_{n+k}, y_{n+k})$ izanik.

(7) adierazpeneko α_j konstanteak ordena baldintzak betetzeko eran aukeratuta daude. Urrats anitzeko (6) metodoa p ordenakoa da ondoko baldintzak betetzen badira [8, 9]:

$$C_i = 0, \quad 1 \leq q \leq p \quad \text{balioetarako eta} \quad C_{p+1} \neq 0 \quad (8),$$

non:

$$\begin{cases} C_0 = \sum_{i=0}^k \alpha_i \\ C_1 = \sum_{i=0}^k i \alpha_i - \sum_{i=0}^k \beta_i \\ C_q = \frac{1}{q!} \left(\sum_{i=0}^k i^q \alpha_i \right) - \frac{1}{(q-1)!} \left(\sum_{i=0}^k i^{q-1} \beta_i \right), \quad q \geq 2 \end{cases}$$

1. eta 2. ordenako BDFak A-egonkorak dira [7, 8, 10]. BDFek goi maiztasunei nola eragiten dieten jakiteko, beraien aplikazio matritzea aztertu behar da. Lehen ordenako EDA sistema lineal bati BDF metodo bat (edo urrats anitzeko edozein metodo lineal) ezartzeak, $y' = \lambda y$ ebatztea ematen dituen emaitzen antzerakoa dakar, λ balioak EDA sistema linealaren autobalioak izanik. $y' = \lambda y$ ekuazioari 1. ordenako test-ekuazio deritza, eta honi BDF metodoa ezarri ostean honakoa lortzen da:

$$X_{n+k} = A(\lambda) X_{n+k-1} \quad (9),$$

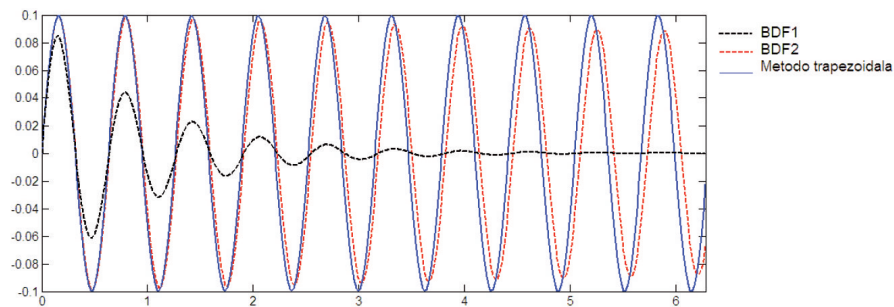
non $X_{n+k} = (y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_{n+k})^t$, $X_{n+k-1} = (y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_{n+k-1})^t$, dugun eta $A(\lambda)$ matritzea $k \times k$ dimentsioko aplikazio matritzea den. $A(\lambda)$ matritzeko autobalioetatik modulurik handiena duena da aztertu beharrekoa, erradio espektral bezala ezagutzen dena:

$$\rho(\lambda) = \max \{ |\mu_j| : \mu_j A(\lambda) \text{ matritzearen autobalioa izanik} \} \quad (10).$$

Erradio espektrala zenbakizko metodoaren egonkortasunarekin lotuta dago eta $\rho(\lambda) \leq 1$ baldintza bete behar da metodoa egonkorra izan dadin.

Bigarren ordenako (3) EDA sistema linealaren kasuan, lehen ordenako (4) EDA sistema lineal gisa berridatzi ondoren hartzen dituen autobalioak irudikari puruak dira. Ondorioz, zenbakizko metodoa $y' = \omega i y$ moduko EDA eskalarrei ezarri eta aztertu nahi dugu. Zehazkiago hitz eginda, ω bakoitzari dagokion $\rho(\omega i)$ erradio espektrala aztertu nahi dugu.

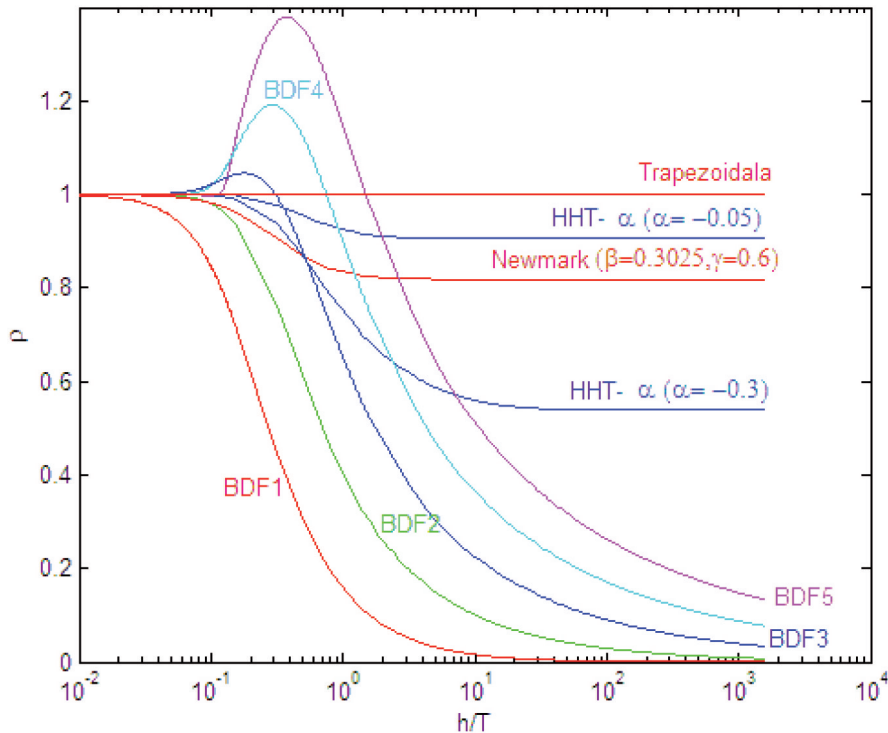
Moteltze algoritmikoa erradio espektralarekin lotuta dago. Adibidez, metodo trapezoidalaren erradio espektrala $\rho = 1$ da, frekuentziarekiko menpekotasunik gabe. Metodo trapezoidala eta BDF2 metodo biak 2. ordenakoak izanik, lehenengoak ez du jasaten moteltze algoritmikorik baina bigarrenak bai ordea, ikus 1. irudia.



1. irudia. Zenbait metodoren moteltze algoritmikoa, $y'' = -10^2 y$, $(y(0), y'(0)) = (0, 1)$ hasierako baliodun ekuazio diferentzialaren soluzioa aurkitzerakoan. Ekuazio diferentzialaren soluzio analitikoa $y(t) = \frac{1}{10} \sin(10t)$ da. Metodo guztietan 300 urrats eman dira soluzioa aurkitzeko.

2. ordenako EDAk askatzerakoan, maiztasunaren arabera erradio espektralak hartzen dituen balioak aztertu nahi baditugu, $\rho(\hat{h})$ balioa $\hat{h} = i\omega h$ balio ezberdinetarako ebaluatu beharra dago. Hauxe egin da, eta 2. irudian ikus daiteke nola kalkulatu den erradio espektralaren balioa $\omega h / (2\pi) = h/T$ balioen menpe. Irudi honetan bertan ikus daitekeenez, BDF metodoen erradio espektrala zerorantz hurbiltzen doa $h/T \rightarrow +\infty$ betetzen denean.

EFMa uhin-ekuazioari ezarri ostean lortzen den 2. ordenako EDA sistema askatzerakoan, ekuazio honetako goi maiztasunak diskretizazio prozesuaren ondorio dira eta ez dira deribatu partzialeko ekuazioaren portaeraren adierazgarri. Honelakoetan komenigarria da goi maiztasunetan moteltze algoritmikoa eragingo duten zenbakizko metodoak erabiltzea, hau da, ω maiztasun handietarako $\rho(\omega i) < 1$ betetzea. BDF metodoek, $\rho_\infty = \lim_{h/T \rightarrow \infty} \rho(A)$ betetzen dute eta beraz haiek dira maiztasunik handienean portaera eraginkorra erakusten dutenak. Hala ere, komenigarriagoa da



2. irudia. BDFen eta beste zenbait metodoren erradio espektrala.

parametro baten menpeko moteltze algoritmikoaren kontrola izango duen zenbakizko metodo bat izatea. Horrek, posible egingo baitu erdi-maiztasunen parte-hartzea. 2. irudian ikus daiteke HHT- $\alpha = -0,3$ metodoak, goi maiztasunei eragiten dien bitartean, erdi-maiztasunei eragiten dien moteltze algoritmikoa BDFena baino txikiagoa dela.

Helburu gisa hartu dugu HHT- α metodoaren antzeko ezaugarriak dituen metodo bat sortzea BDFak oinarri hartuz. Honetarako, HHT- α metodoa diseinatzeko moduari erreparatuko diogu lehendabizi.

3. BIGARREN ORDENAKO EDAK ASKATZEKO URRATS ANITZEKO METODO LINEALAK

HHT- α metodoa Newmarken metodoari ezarritako aldaketa da eta zuzenean 2. ordenako EDAK askatzeko balio du [4]. Newmarken metodoa ondoko adierazpenen bidez emanda dago [11]:

$$\begin{cases} ma_{n+1} + cv_{n+1} + kd_{n+1} = f_{n+1} \\ d_{n+1} = d_n + \Delta tv_n + \frac{\Delta t^2}{2} [(1-2\beta)a_n + 2\beta a_{n+1}] \\ v_{n+1} = v_n + \Delta t [(1-\gamma)a_n + \gamma a_{n+1}] \end{cases} \quad (11),$$

non $v = d'$ den, $a = v'$ den, eta β eta γ parametro aske errealak diren.

Newmarken metodoaren egonkortasuna eta moteltze algoritmikoa aztertzeko, metodoa 2. ordenako $d'' + \omega^2 d = 0$ test ekuazioari aplikatzen zaio:

$$X_{n+1} = AX_n \quad (12),$$

$X_{n+i} = (d_{n+i}, hv_{n+i}, h^2 a_{n+i})^T$, $i = 0, 1$ balioetarako, $h = \Delta t$ eta $A = A_1^{-1} \cdot A_2$ Newmarken metodoko amplifikazio matrizea izanik.

(12) sistema t_{n+1} eta t_{n+2} aldiuneetan aplikatuz, (12) motako bi sistema lortzen dira, guztira sei ekuazioz eta bederatzi ezezagunez osatuak (d_{n+i} , v_{n+i} , a_{n+i} $i = 0, 1, 2$ izanik). Eta sistema hau, murriz daiteke ekuazio bakarrak osatutako 2. ordenako EDak askatzeko urrats anitzeko zenbakizko metodo linealetara:

$$\sum_{i=0}^2 \alpha_i d_{n+i} = h^2 \sum_{i=0}^2 \beta_i d_{n+i}'' \quad (13),$$

α_j, β_j koefiziente jakin batzuetarako.

$\gamma = \frac{1}{2}$ denean Newmarken metodoa 2. ordenakoa da [1, 11]. Metodoa

A-egonkorra da, $\frac{1}{2} \leq \gamma \leq 2\beta$ baldintza betetzen denean; goi maiztasunen moteltze algoritmikoa gertatzeko baldintza honakoa da:

$$\beta = \frac{\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)^2}{4} \quad (14).$$

Beraz, 2. ordenako Newmarken metodoa A-egonkorra da $\gamma = \frac{1}{2}$ eta

$\beta \geq \frac{1}{4}$ betetzen direnean. $\beta = \frac{1}{4}$ denean goi maiztasunen moteltze algorit-

mikoko baldintza betetzen bada ere, kasu honetan lortzen den Newmarken metodoan $\rho_\infty = 1$ gertatzen da eta ez da moteltzerik gertatzen. Parametro hauek dituen Newmarken metodoa, metodo trapezoidala da eta ez du moteltze algoritmikorik, 3. irudian ikus daitekeen bezala.

Newmarken metodoan oinarrituta, moteltze algoritmikoa izango zuen HHT- α metodoa diseinatu zen. Metodo honetan Newmarken metodoko 2. eta 3. adierazpenak berdin mantentzen dira eta lehenengo adierazpena era honetan aldatzen da:

$$ma_{n+1} + cv_{n+1+\alpha} + kd_{n+1+\alpha} = f(t_{n+1+\alpha}) \quad (15),$$

non:

$$\begin{cases} d_{n+1+\alpha} = (1+\alpha)d_{n+1} - \alpha d_n \\ v_{n+1+\alpha} = (1+\alpha)v_{n+1} - \alpha v_n \\ t_{n+1+\alpha} = (1+\alpha)t_{n+1} - \alpha t_n \end{cases} \quad (16).$$

Ohartu gaitezten $\alpha = 0$ denean Newmark-en metodoa lortzen dela.

HHT- α metodoa 2. ordenako test-ekuazioari aplikatzean, (12) adierazpena lortzen da, $A = A_1^{-1} \cdot A_2$ anplifikazio matrizea izanik. Gainera,

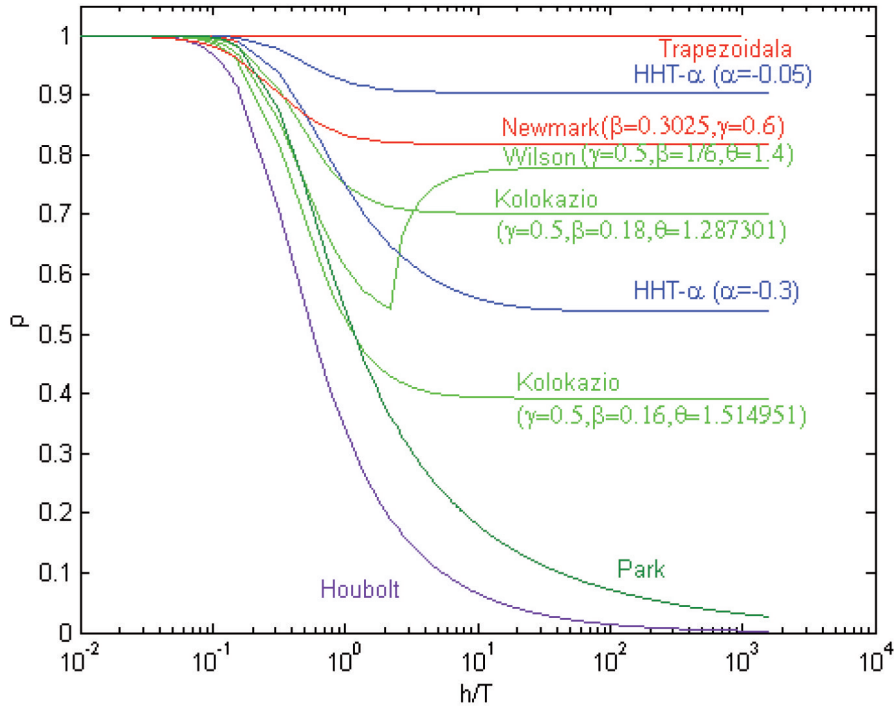
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\beta \\ 0 & \frac{1}{h} & -\frac{1}{h}\gamma \\ \omega^2(1+\alpha) & 0 & \frac{1}{h^2} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} - \beta \\ 0 & \frac{1}{h} & \frac{1}{h}(1-\gamma) \\ \omega^2\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (17).$$

Newmarken metodoaren antzera, HHT- α metodoa ere 2. ordenako EDAk askatzeko urrats anitzeko zenbakizko metodo linealetara murrizten da. HHT- α metodoa 2. ordenakoa da $\gamma = \frac{1-2\alpha}{2}$ betetzen denean. Gainera,

$$\alpha \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right] \text{ eta } \beta = \frac{(1-\alpha)^2}{4} \text{ betetzen direnean, metodoa A-egonkorra da}$$

eta goi maiztasunetan moteltze algoritmikoa eragiteko gai da. 3. irudian Newmarken metodoaren, HHT- α metodoaren erradio espektralak ikus daitezke, bai eta mekanika konputazionalan erabiltzen diren zenbait metodoen erradio espektralak ere: besteak beste, Houbolten metodoarena, Parken

metodoarena, Kolokazio metodoarena eta azken honen kasu berezia den Wilsonen metodoarena ere [1, 2, 5].



3. irudia. Zenbait metodoren erradio espektralak.

4. BDF- α METODOA

Ikusia dugu BDF2 metodoak asko eragiten diela maiztasun ertain eta handiei. HHT- α metodoaren antzeko ezaugarriak dituen metodo bat eraikitzeko ondoko adierazpenak emana dagoen BDF2 metodoan oinarritu gara:

$$\frac{3}{2} y_{n+2} - 2y_{n+1} + \frac{1}{2} y_n = hf_{n+2} \quad (18).$$

Metodo berria sortzeko, (18) adierazpenean hiru parametroren menpeko, α , β eta γ batugaiak sartu ditugu:

$$\frac{3}{2} ((1 + \beta) y_{n+2} - \beta y_{n+1}) - 2((1 + \gamma) y_{n+1} - \gamma y_n) + \frac{1}{2} y_n = h((1 + \alpha) f_{n+2} - \alpha f_{n+1}) \quad (19).$$

(19) adierazpena berrordenatuz ondokoa daukagu:

$$\frac{3}{2}(1+\beta)y_{n+2} + \left(-\frac{3}{2}\beta - 2(1+\gamma)\right)y_{n+1} + \left(2\gamma + \frac{1}{2}\right)y_n = h(1+\alpha)f_{n+2} - h\alpha f_{n+1} \quad (20).$$

Eta (20) adierazpena 1. ordenako EDAtarako urrats anitzeko metodo lineala da:

$$\sum_{j=0}^2 \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^2 \beta_j f_{n+j} \quad (21),$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = \frac{3}{2}(1+\beta), & \alpha_1 = -\frac{3}{2}\beta - 2(1+\gamma), & \alpha_0 = 2\gamma + \frac{1}{2} \\ \beta_2 = 1+\alpha, & \beta_1 = -\alpha, & \beta_0 = 0 \end{cases} \text{ izanik.}$$

(20) adierazpeneko parametroak $\alpha = \frac{3}{2}\beta = 2\gamma$ baldintza betetzeko

eran aukeraten direnean lortzen den metodoa 2. ordenakoa da. Horretarako nahikoa da, urrats anitzeko metodo linealen ordena baldintzak aplikatzea. (8) adierazpenari jarraituz, metodoa bigarren ordenakoa izango da $C_0 = C_1 = C_2 = 0$ eta $C_3 \neq 0$ betetzen badira. Eta baldintza hauek betetzeko $\alpha = \frac{3}{2}\beta = 2\gamma$ eran aukeratu behar dira parametroak. Era honetan sortutako metodoari BDF- α metodoa deitu diogu:

$$\left(\frac{3}{2} + \alpha\right)y_{n+2} + (-2 - 2\alpha)y_{n+1} + \left(\frac{1}{2} + \alpha\right)y_n = h(1+\alpha)f_{n+2} - h\alpha f_{n+1} \quad (22).$$

4.1. BDF- α metodoaren egonkortasuna

Metodoaren egonkortasun-azterketa egiteko BDF- α metodoa 1. ordenako test-ekuazioari $y' = \lambda y$ aplikatuko diogu:

$$\left(\frac{3}{2} + \alpha\right)y_{n+2} + (-2 - 2\alpha)y_{n+1} + \left(\frac{1}{2} + \alpha\right)y_n = \hat{h}(1+\alpha)y_{n+2} - \hat{h}\alpha y_{n+1} \quad (23),$$

$\hat{h} = \lambda h$ izanik. (23) adierazpenean $y_p = r^p$ ordezkatzuz polinomio karakteristikoaren ekuazioa lortzen da eta bertatik \hat{h} askatuz haxe daukagu:

$$\hat{h} = \frac{\left(\frac{3}{2} + \alpha\right)r^2 + (-2 - 2\alpha)r + \left(\frac{1}{2} + \alpha\right)}{(1 + \alpha)r^2 - \alpha r} \quad (24).$$

Egonkortasun eremuko mugan $|r| = 1$ betetzen denez, (24) adierazpean $r = e^{i\theta}$ ordezkatzuz lortuko dugu egonkortasun eremuko muga:

$$\hat{h}(\theta) = \frac{(1 + 2\alpha)(\cos\theta - 1)^2 + i\sin\theta \left[(1 + 2\alpha)(1 - \cos\theta) + \frac{1}{1 + \alpha} \right]}{(1 + \alpha) \left[\left(\cos\theta - \frac{\alpha}{1 + \alpha} \right)^2 + \sin^2\theta \right]} \quad (25).$$

$\alpha \geq -0,5$ balioetarako (25) adierazpeneko izendatzailea konstante positibo batek behe-bornatua dago. Beraz, $\alpha \geq -0,5$ balio bat finkaturik, α -ren menpekota den eta θ -rekiko menpekotasunik ez duen $R(\alpha) \in \mathbb{R}$ zenbaki erreale baterako, ondokoa betetzen da:

$$0 \leq \operatorname{Re}(\hat{h}(\theta)) \leq R(\alpha) \quad (26).$$

Egonkortasun eremuaren muga plano konplexuaren eskuinaldeko, \mathbb{C}^+ -ko, multzo trinko bat da. Edozein $\hat{h} \in \mathbb{C}^-$ balioetarako A-egonkortasuna lortzen da eta jarraitasun ezaugarriengatik, \mathbb{C}^- egonkortasun eremuaren parte da. Hau da, $\alpha \geq -0,5$ balioetarako BDF- α metodoa A-egonkorra da.

4.2. BDF- α metodoaren moteltze algoritmikoa

BDF- α metodoa test-ekuazioari aplikatuz (12) adierazpena lortzen da, A anplifikazio matrizea izanik:

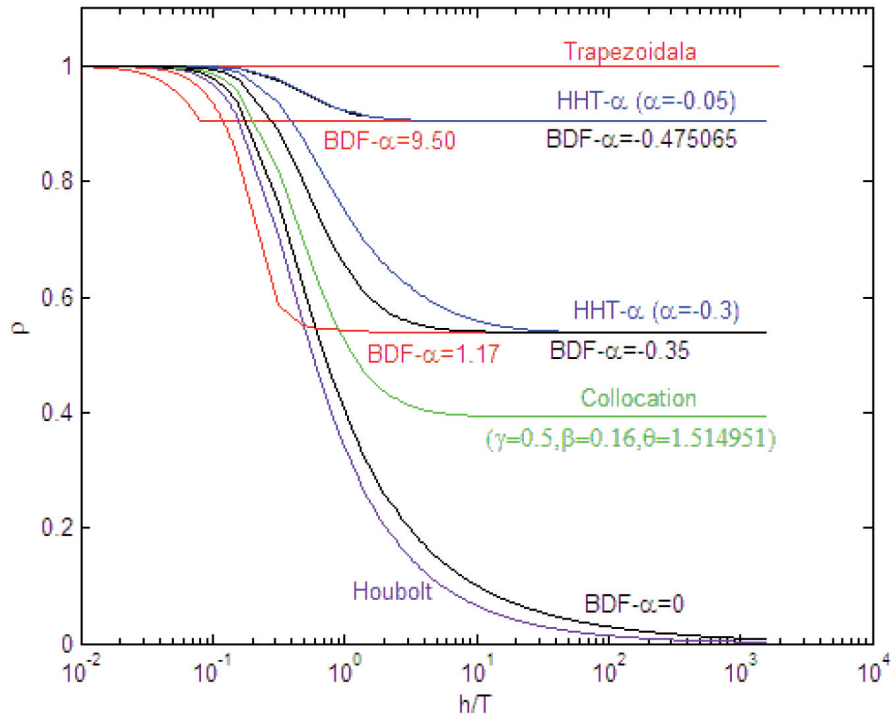
$$\left\{ \begin{array}{l} X_{n+1} = \begin{pmatrix} y_{n+1} \\ y_{n+2} \end{pmatrix}, \quad X_n = \begin{pmatrix} y_n \\ y_{n+1} \end{pmatrix}, \quad A = A_1^{-1} A_2 \\ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} + \alpha - \hat{h}(1 + \alpha) \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} - \alpha & 2 + 2\alpha - \hat{h}\alpha \end{pmatrix}, \quad \hat{h} = \lambda h \end{array} \right. \quad (27).$$

Metodoaren moteltze algoritmikoa ezaugarritzeko erradio espektralaren balioa kalkulatu behar da $\hat{h} \rightarrow \infty$ denean. Horixe egin dugu A-egonkorra den 2. ordenako BDF- α metodorako, hau da $\alpha \geq -0,5$ kasurako:

$$\rho_\infty = \lim_{\hat{h} \rightarrow \infty} \max\{\lambda_1, \lambda_2\} = \begin{cases} 1, & \alpha = -0.5 \\ \frac{-2\alpha}{2+2\alpha} < 1, & \alpha \in [-0.5, 0) \\ \frac{2\alpha}{2+2\alpha} < 1, & \alpha \in [0, +\infty) \end{cases} \quad (28),$$

λ_1 eta λ_2 A matrizearen autobalioak izanik. (28) adierazpena aztertuta, erraza da ρ_∞ balioak $(0,1]$ tarteko balio guztiak hartzen dituela frogatzea. Hau da, $\rho_\infty \in (0,1]$ balio bat finkatuta, posible da 2. ordenako zehaztasuneko eta A -egonkorra den BDF- α metodo bat aurkitzea; metodo horrek, $\hat{h} \rightarrow \infty$ denean finkatu dugun erradio espektrala izango du.

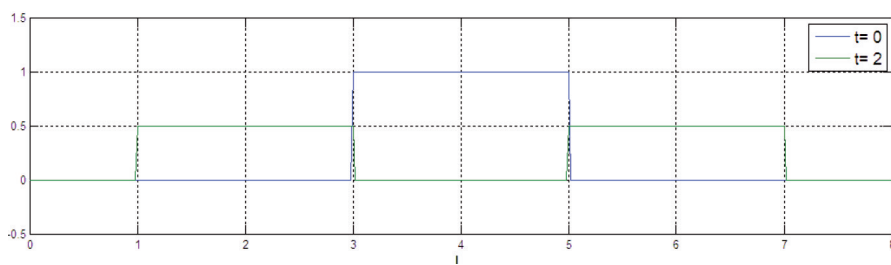
Beraz, sortu berri dugun metodoak moteltze algoritmikoaren kontrol parametrikoa dauka. 4. irudian irudikatu dira zenbait BDF- α metodoen erradio espektralak. Irudi honetan ikus daitekeenez, HHT- $\alpha = -0,3$ eta BDF- $\alpha = -0,35$ metodoek antzeko ρ_∞ daukate. Gauza bera gertatzen da HHT- $\alpha = -0,05$ eta BDF- $\alpha = -0,475065$ metodoen kasuan.



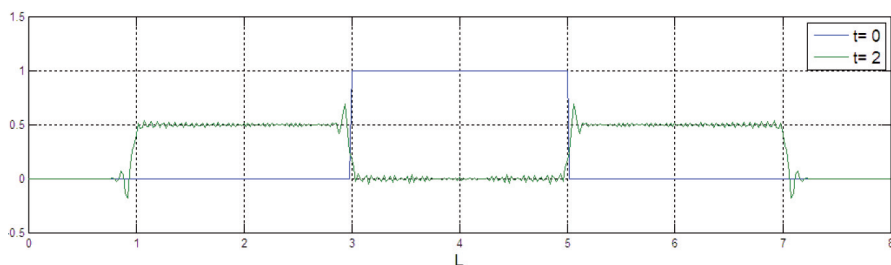
4. irudia. Zenbait BDF- α metodoen eta beste metodo batzuen erradio espektralak.

5. METODOEN APLIKAZIOA

Azkenik, bi metodoak (HHT- α eta BDF- α) jarri ditugu abian. Dimentsio bakarrean L luzerako soka baten zeharkako bibrazioak deskribatzen dituen deribatu partzialetan emandako (1) uhin-ekuazioa aztertu dugu. $L = 8$ cm, $a^2 = 1$ cm²/s² eta hasierako baldintza modura pulsu errektangeluarra duen uhin ekuazioaren emaitza lortu da Newmarken metodoa, HHT- $\alpha = -0,3$ eta BDF- $\alpha = -0,35$ metodoak erabilita. Kasu guztietan 400 elementuko diskretizazioa aztertu da. Hasierako posizioa, $t = 0$ segundo, eta $t = 2$ segundo balioei dagozkien emaitzak irudikatu dira. 5. irudian irudikatu da (1) ekuazioaren emaitza zehatza. Metodo trapezoidalaren bidez lortzen den emaitzak zarata erakusten du, goi maiztasunen eragina alegia, 6. irudia.



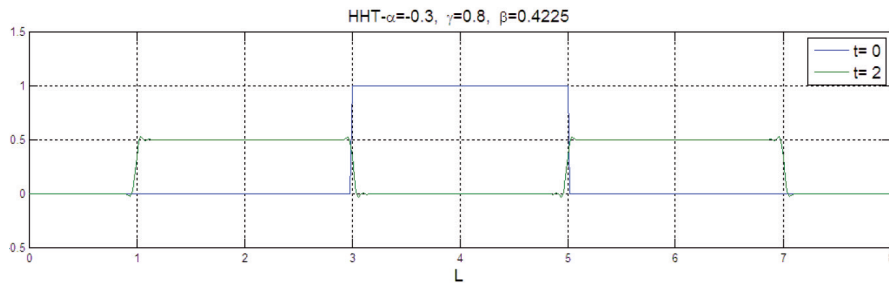
5. irudia. Uhin-ekuazioaren emaitza zehatza.



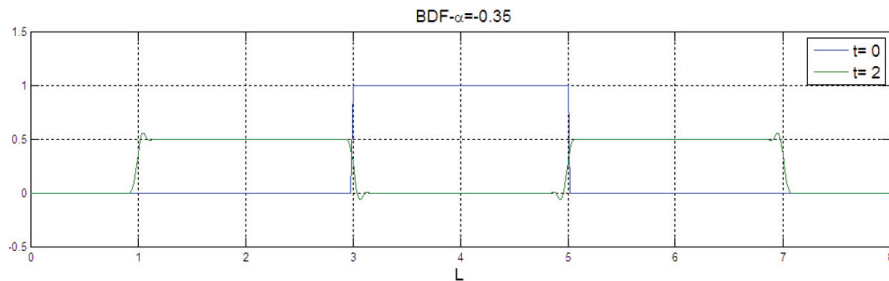
6. irudia. Uhin-ekuazioaren emaitza Newmarken metodoa erabiliz, eta $\beta = \frac{1}{4}$ eta $\gamma = \frac{1}{2}$, izanik (metodo trapezoidalarekin 1.400 urrats eman dira).

7. irudian ikus dezakegu HHT- $\alpha = -0,3$ metodoa gai dela zarata honen parterik handiena kentzeko. Eta guk sortu dugun BDF- $\alpha = -0,35$ metodo berriarekin probatzen dugunean ere HHT- $\alpha = -0,3$ metodoak eman digun

emaitzaren parekoa den emaitza lortu dugu, 8. irudian ikus daitekeen bezala. Honela ba, BDF metodoak oinarri hartuz, aukera izan dugu goi maiztasunei moteltze algoritmiko kontrolatua eragingo dien metodo berria sortzeko.



7. irudia. Uhin-ekuazioaren emaitza HHT- $\alpha = -0,3$ metodoa erabiliz (1.400 urrats).



8. irudia. Uhin-ekuazioaren emaitza BDF- $\alpha = -0,35$ metodoa erabiliz (1.400 urrats).

6. BIBLIOGRAFIA

- [1] HUGHES T. J. R. 1987. *The finite element method. Linear Static and dynamic finite element analysis*. Prentice-Hall International Editions, New Jersey.
- [2] HILBER H. M. eta HUGHES T. J. R. 1978. «Collocation, dissipation and overshoot for time integration schemes in structural dynamics». *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **6**, 99-117.
- [3] WILSON E. L. 1968. «A computer program for the dynamic stress analysis of underground structures». *SEL Report*, **68**.
- [4] HILBER H. M., HUGHES T. J. R. eta TAYLOR R. L. 1977. «Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics». *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **5**, 283-292.

- [5] GLADWELL I. eta THOMAS R. 1980. «Stability properties of the Newmark, Houbolt and Wilson θ methods». *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **4**, 143-158.
- [6] CHUNG J. eta HULBERT G. M. 1993. «A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized- α method». *Journal of Applied Mechanics*, **60**, 371-375.
- [7] GEAR C. W. 1971. *Numerical initial value problems in Ordinary Differential Equations*. Prentice Hall, New Jersey.
- [8] BUTCHER J. C. 2000. «Numerical methods for ordinary differential equations in the 20th century». *Journal of Computational and Applied mathematics*, **25**, 1-29.
- [9] LAMBERT J. D. 1991. *Numerical Methods for ordinary differential systems: the initial value problem*. John Wiley & Sons Ltd., Chichester.
- [10] HAIRER E., NØRSETT S. P. eta WANNER G. 1993. *Solving ordinary differential equations, I, Nonstiff problems*. Springer, Berlin.
- [11] NEWMARK N. M. 1959. «A method of computation for structural dynamics». *Journal of Engineering and Mechanics Division, ASCE*, **85**, 67-94.

